

Г. А. КЛЕКОВКИН

ВВЕДЕНИЕ В ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНУЮ КОМБИНАТОРИКУ

Издание третье, стереотипное

РЕКОМЕНДОВАНО

УМО по образованию в области подготовки педагогических кадров в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлению «Педагогическое образование»



• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА • КРАСНОДАР •
• 2019 •

УДК 519.1
ББК 22.141я73
К 48

Клековкин Г. А.

К 48 Введение в перечислительную комбинаторику: Учебное пособие. — 3-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2019. — 228 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-4386-4

В пособии рассмотрены классические перечислительные задачи на выбор и упорядочивание элементов конечного множества и задачи на разбиение конечных множеств и мультимножеств. Основные понятия, факты и методы перечислительной комбинаторики даны в объеме, позволяющем выпускнику вуза на высоком содержательном и методическом уровне разрабатывать и проводить элективные и факультативные курсы по комбинаторике в средней школе. Изложенный материал является также фундаментом для изучения «серьезной» учебной и монографической литературы по комбинаторике и ее приложениям.

Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Педагогическое образование». Оно может быть использовано при преподавании раздела «Комбинаторика» в курсах дискретной математики, а также при разработке и постановке специальных курсов по выбору студентов, устанавливаемых вузом. В профильных школах отдельные разделы пособия могут служить основой элективных курсов по комбинаторике для учащихся 10–11 классов.

УДК 519.1
ББК 22.141я73

Рецензенты:

А. Г. ГЕЙН — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дискретной математики Уральского федерального университета им. Первого Президента России Б. Н. Ельцина;

В. В. ЧЕРМНЫХ — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дискретной математики Вятского государственного университета.

Обложка

Е. А. ВЛАСОВА

© Издательство «Лань», 2019
© Г. А. Клековкин, 2019
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	6
Глава 1. Основные комбинаторные конфигурации и комбинаторные числа	9
§ 1.1. Вводные понятия	11
1.1.1. Комбинаторные конфигурации	11
1.1.2. Комбинаторные числа и способы их вычисления	15
1.1.3. Комбинаторные схемы	16
§ 1.2. Основные правила комбинаторики	21
1.2.1. Правило суммы	21
1.2.2. Правило включения-исключения	22
1.2.3. Правило произведения	25
§ 1.3. Вычисление конечных сумм	27
1.3.1. Преобразования конечных сумм	27
1.3.2. Кратные суммы, произведения сумм	28
1.3.3. Методы вычисления конечных сумм	31
§ 1.4. Размещения и перестановки	35
1.4.1. Размещения	35
1.4.2. Перестановки	37
§ 1.5. Сочетания	39
1.5.1. Сочетания	39
1.5.2. Сочетания с повторениями	42
§ 1.6. Бином Ньютона	44
1.6.1. Вывод формулы	44
1.6.2. Свойства биномиальных коэффициентов	46
1.6.3. Треугольник Паскаля и его обобщения	49
1.6.4. Частный случай формулы включения-исключения	53
§ 1.7. Полиномиальная формула	55
1.7.1. Вывод полиномиальной формулы	55
1.7.2. Свойства полиномиальных коэффициентов	57
§ 1.8. Формулы обращения	58
1.8.1. Теорема обращения	58
1.8.2. Биномиальное обращение	60
§ 1.9. Специальные целочисленные функции	62
1.9.1. Целочисленные округления	62
1.9.2. Число и сумма натуральных делителей. Функция Эйлера	65
1.9.3. Функция Мебиуса	66
§ 1.10. Отображения и подстановки конечных множеств	68
1.10.1. Число отображений конечных множеств	68
1.10.2. Перечисление подстановок	71
1.10.3. Задача о беспорядках	74

§ 1.11. Групповые методы в комбинаторике	76
1.11.1. Действие группы на множестве	76
1.11.2. Лемма Бернсайда	80
1.11.3. Задача об ожерельях I	85
§ 1.12. Разбиения множеств	89
1.12.1. Разбиения и их виды	89
1.12.2. Упорядоченные разбиения	90
1.12.3. Неупорядоченные разбиения	93
§ 1.13. Разбиения чисел	97
1.13.1. Раскладки по различимым ящикам	97
1.13.2. Раскладки по неразличимым ящикам. Диаграммы Ферре – Юнга	99
§ 1.14. Примеры разбиения мультимножеств	102
Глава 2. Метод рекуррентных соотношений	
§ 2.1. Примеры задач, приводящих к рекуррентным соотношениям	104
2.1.1. Задание комбинаторных чисел рекуррентными соотношениями	104
2.1.2. Числа Фибоначчи	106
2.1.3. Сумма m -х степеней натуральных чисел	107
2.1.4. Анализ алгоритмов типа «разделяй и властвуй»	108
§ 2.2. Рекурсия в задачах о разбиении чисел	109
2.2.1. Раскладка одинаковых предметов по неразличимым ящикам	109
2.2.2. Разбиения чисел с ограничениями	111
§ 2.3. Числа Стирлинга	114
2.3.1. Числа Стирлинга первого рода	114
2.3.2. Числа Стирлинга второго рода. Числа Белла	117
§ 2.4. Рекуррентное соотношение как уравнение	119
2.4.1. Понятие решения рекуррентного соотношения	120
2.4.2. Решение линейных рекуррентных соотношений	121
§ 2.5. Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами	123
2.5.1. Основные теоремы	123
2.5.2. Характеристическое уравнение и вид общего решения	127
§ 2.6. Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами	134
2.6.1. Основные теоремы и примеры	134
2.6.2. Рекуррентные соотношения и вычисление конечных сумм	140
§ 2.7. Конечные разности	141
2.7.1. Операторы конечной разности и сдвига	141
2.7.2. Факториальные степени	144
2.7.3. Полиномиальные последовательности	148
2.7.4. Суммирование конечных разностей	150

Глава 3. Производящие функции	
§ 3.1. Алгебра формальных степенных рядов	155
3.1.1. Идеи, приводящие к понятию производящей функции	155
3.1.2. Алгебра Коши	157
3.1.3. Кольцо формальных степенных рядов	159
3.1.4. Подстановка ряда в ряд. Дифференцирование и интегрирование формальных степенных рядов	161
3.1.5. Алгебра Блиссара	164
§ 3.2. Производящие функции	166
3.2.1. Понятие производящей функции	166
3.2.2. Степенные производящие функции	169
3.2.3. Экспонента	172
3.2.4. Логарифм	174
§ 3.3. Приложения метода производящих функций	176
3.3.1. Доказательство биномиальных тождеств	176
3.3.2. Еще раз о биномиальном обращении	178
3.3.3. Решение рекуррентных соотношений	179
3.3.4. Числа Каталана	183
3.3.5. Числа Бернулли	186
§ 3.4. Производящие функции и выборки	188
3.4.1. Неупорядоченные выборки	188
3.4.2. Упорядоченные выборки	192
§ 3.5. Производящие функции и разбиения множеств	194
§ 3.6. Производящие функции и разложения чисел	200
3.6.1. Разложения, в которых не учитывается порядок слагаемых	200
3.6.2. Разложения, в которых учитывается порядок слагаемых	207
§ 3.7. Теорема Пойа	210
3.7.1. Цикловой индекс группы	210
3.7.2. Производящая функция классов эквивалентности	213
3.7.3. Задача об ожерельях II	218
Список использованной и рекомендуемой литературы	221
Предметный указатель	223

Предисловие

В педагогических вузах элементы комбинаторики традиционно изучаются в курсах дискретной математики и теории вероятностей. В основу предлагаемого учебного пособия легли материалы курса лекций по дискретной математике, который в течение последних десяти лет автор читал студентам факультета информатики Самарского филиала Московского городского педагогического университета. Отдельные параграфы пособия появились как введение в тематику курсовых и выпускных квалификационных работ, предлагавшихся студентам факультета. Начальные параграфы первой главы использовались также при проведении занятий с учителями математики – слушателями курсов повышения квалификации. Поэтому содержание пособия охватывает комбинаторный материал гораздо шире, чем это обычно удается сделать в курсе дискретной математики. В условиях двухуровневого высшего образования пособие может быть полезно при разработке и постановке курсов по выбору студентов, устанавливаемых вузом.

До недавнего времени с решением комбинаторных задач приходилось, как правило, сталкиваться лишь школьникам – участникам различных олимпиад по математике и программированию. Сегодня элементы комбинаторики вошли в базовые школьные курсы алгебры и начал анализа, избранные разделы комбинаторики все чаще встречаются в тематике элективных курсов в профильной школе. Это накладывает новые дополнительные требования на математическую и методическую подготовку будущих учителей математики и информатики в области комбинаторики.

Главная цель данного пособия – дать систематическое изложение основных понятий, фактов и методов перечислительной комбинаторики, которое позволило бы выпускнику вуза на высоком содержательном и методическом уровне разрабатывать и проводить соответствующие элективные и факультативные курсы в средней школе.

Хочется также надеяться, что среди читателей этого учебного пособия по комбинаторике окажутся студенты, которые захотят более глубоко познакомиться с этим увлекательным и вновь активно разрабатываемым разделом математики. Поэтому вторая цель, которая преследовалась при написании пособия, – заложить фундамент для чтения «серьезной» учебной и монографической литературы по комбинаторике и ее приложениям.

Содержательным стержнем пособия являются классические перечислительные задачи на выбор и упорядочивание элементов конечного множества и задачи на разбиение конечных множеств и мультимножеств. Сначала в пособии рассматриваются решения этих задач прямыми комбинаторными методами, базирующимися на определениях комбинаторных конфигураций и основных правилах комбинаторики, затем – методом рекуррентных соотношений и, наконец, – с помощью производящих функций. Такой подход, как показывает практика, помо-

гает студентам достаточно объективно оценить достоинства и недостатки каждого из методов, позволяет научиться в последующем выбирать наиболее оптимальные пути решения встречающихся комбинаторных задач.

В последние годы появились многочисленные учебники и учебные пособия по дискретной математике, включающие главы и разделы, посвященные комбинаторике. Поэтому перечислим некоторые методические особенности предлагаемого пособия.

При его написании учитывались два обстоятельства, характеризующие современное состояние высшего образования. Во-первых, нынешние студенты отличаются крайне неоднородным уровнем предварительной математической подготовки. Во-вторых, в структуре учебных планов произошло резкое сокращение количества аудиторных занятий и увеличено время на самостоятельную работу студентов. Для организации результативного учебного процесса в сложившихся условиях изложение материала начинается на достаточно элементарном уровне, а строгость изложения нарастает постепенно; как правило, напоминаются определения и свойства используемых понятий из других разделов математики; рассмотрение теории в обязательном порядке сопровождается примерами ее применения к решению задач и т. п.

Отличительной тенденцией многих новых учебных книг по дискретной математике стало представление алгоритмических доказательств на языке псевдокода, разработанного авторами, или на конкретном языке программирования. Как показывает практика, значительная часть студентов при таком методическом подходе «не видит» математической сущности самих доказательств. Поэтому в пособии преднамеренно выбран стиль изложения, традиционный для учебной литературы по математике.

Отбор материала, используемого понятийного аппарата, выбор методов доказательства, обозначений осуществлялся с учетом того, что книга адресована будущим учителям. Большое внимание при этом уделялось действенной реализации межпредметных связей; подавляющее большинство задач, сопровождающих теорию, взято из учебной и научно-популярной литературы для школьников либо по своим формулировкам напоминает эти задачи; по ходу изложения материала даны многочисленные примечания, в которых приводятся иные методические подходы к его подаче, и т. п.

Цель – написать именно введение в комбинаторику – заставила автора отказаться от первоначального желания включить в пособие такие вопросы, как покрытия множеств, перечисление графов и многие другие. В пособие не вошли даже асимптотические методы, широко востребованные сегодня при комбинаторной оценке сложности алгоритмов.

Во многих местах пособия искушенный читатель сразу заметит несомненное влияние замечательных книг Н. Я. Виленкина «Комбинаторика», В. Н. Сачкова «Введение в комбинаторные методы дискретной математики», Р. Стенли «Перечислительная комбинаторика», Р. Грехема, Д. Кнута, О. Поташника «Конкретная математика», В. Л. Матросова, В. А. Стеценко «Лекции по дискретной математике» и др. Кого-то наверняка удивит и непомерно большой список литературы, приведенный в конце книги. Создавая предлагаемое учебное пособие,

автор сам учился у авторов книг, включенных в этот список, трепетно принимая и в том или ином виде используя их интересные методические находки. Глубокая признательность всем им за эту науку.

Слова благодарности за полезные обсуждения, состоявшиеся в разное время, хочется высказать в адрес своих друзей и коллег – доктора физико-математических наук, профессора Е. М. Вечтомова, доктора педагогических наук, профессора С. И. Калинина (Вятский государственный гуманитарный университет), доктора педагогических наук, профессора В. А. Тестова (Вологодский государственный педагогический университет). Хочется поблагодарить доктора педагогических наук, профессора А. Г. Гейна и доктора физико-математических наук, профессора В. В. Чермных, рецензировавших данное пособие. Особая благодарность и признательность моему бывшему однокурснику, а в настоящее время доценту кафедры высшей математики Российского государственного профессионально-педагогического университета, кандидату физико-математических наук Е. А. Перминову, взявшему на себя огромный труд быть первым читателем и критиком различных вариантов рукописи пособия. Остается только сожалеть, что он отказался быть моим соавтором.

Автор будет признателен за указания на допущенные ошибки и любые предложения по дальнейшему улучшению текста пособия, которые можно направлять по адресу klekovkin_ga@mail.ru.

Г. Клековкин

Глава 1

Основные комбинаторные конфигурации и комбинаторные числа

Долгое время комбинаторикой называли раздел математики, рассматривающий задачи о выборе и расположении в соответствии с заданными правилами элементов из некоторого конечного множества. Получаемые при этом комбинации из выбираемых элементов сегодня обычно называют *комбинаторными конфигурациями*.

Истоки комбинаторики можно отыскать в глубокой древности. Так, задолго до новой эры в Древнем Китае было популярно составление магических квадратов (заданные числа в этих квадратах должны располагаться так, чтобы сумма по всем горизонталям, вертикалям и главным диагоналям была одинаковой). Ученым Древнего Востока были, по сути дела, известны формула бинома Ньютона и правило подсчета числа сочетаний, а ученые Древней Греции занимались изучением так называемых фигурных чисел, связанных с геометрическими фигурами.

Оформление комбинаторики в самостоятельный раздел математики происходит в XVII в. одновременно со становлением теории вероятностей. Это объясняется тем, что при решении вероятностных задач постоянно приходилось сталкиваться с подсчетом числа исходов, благоприятствующих наступлению некоторого события, и числа всех равновозможных исходов. Первую систематизацию комбинаторных понятий связывают с работами и перепиской Б. Паскаля и П. Ферма по теории азартных игр. В 1666 г. немецкий математик Г. Лейбниц публикует работу «Об искусстве комбинаторики», в которой впервые появляется сам термин «комбинаторика». Большой вклад в становление комбинаторики внесли швейцарские математики Я. Бернулли и Л. Эйлер; последний долгое время жил и продуктивно работал в России. В последующем комбинаторные понятия и методы, как правило, развивались в недрах алгебры и теории чисел.

С середины прошлого века комбинаторика переживает второе рождение. Интерес к этому древнему разделу дискретной математики вызван бурным развитием вычислительной техники и расширением областей ее применения. Быстродействие и объем памяти современных ком-

пьютеров позволили «заглянуть» на микроскопический уровень реальности и значительно расширить масштабы использования дискретных математических моделей.

С выбором объектов с заданными свойствами и их размещением человеку приходится сталкиваться чуть ли не во всех сферах его деятельности. Поэтому комбинаторные понятия и методы находят все новые и новые приложения в физике, химии, биологии, экономике, лингвистике и т. д. Они играют фундаментальную роль в таких новых разделах математики, как теория кодирования, криптография, исследование операций, широко используются в информационных технологиях.

По-прежнему центральное место в комбинаторике занимают *перечислительные задачи*, в которых требуется либо осуществить построение всех комбинаторных конфигураций указанного вида, либо только подсчитать их число, либо выполнить и то, и другое. Поэтому важную роль в этой дисциплине играют задачи на поиск алгоритмов построения конфигураций с заданными свойствами.

С появлением современных быстродействующих компьютеров у некоторых пользователей складывается ложное представление о том, что с помощью компьютера можно решить любую перечислительную задачу методом полного перебора. Увы, это не так; не всякий алгоритм может быть фактически (практически) реализован. Известно огромное число теоретических и прикладных задач, алгоритмы решения которых достаточно просты, но время их реализации даже на самых современных суперкомпьютерах сравнимо со временем существования человечества. Другим существенным ограничением при переборном методе решения может стать объем памяти компьютера. В связи с этим актуальными проблемами комбинаторики стали анализ алгоритмов, подразумевающий оценку ресурсов, необходимых для их выполнения при условии, что размерность задачи стремится к бесконечности; построение алгоритмов, допускающих практическую реализацию на компьютере; их оптимизация.

§ 1.1. Вводные понятия

Вводятся начальные сведения о комбинаторных конфигурациях, числах и схемах; напоминаются некоторые теоретико-множественные понятия, которые используются при определении основных комбинаторных конфигураций.

1.1.1. Комбинаторные конфигурации

Основные классические конфигурации, изучаемые в перечислительной комбинаторике, возникают при построении выборок с указанными свойствами из элементов заданного дискретного множества и при различных разбиениях конечных множеств. Чтобы получить представления об этих видах комбинаторных конфигураций и увидеть, какие понятия требуются для их определения, рассмотрим две задачи.

Задача 1.1.1. Для обеспечения одного из вариантов движения игрушки-робота необходимо последовательно нажать две из трех различных кнопок, обозначенных на пульте управления буквами p , q и s . Сколько может существовать различных вариантов движения робота?

Ответ на вопрос этой задачи можно дать лишь после уточнения его формулировки:

- различны ли варианты, отличающиеся порядком нажатия кнопок;
- предусмотрены ли варианты движения, для запуска которых требуется дважды нажать на одну и ту же кнопку?

В результате перебора всех возможных вариантов можно выделить четыре следующие ситуации:

1. Порядок нажатия кнопок не существен, запрещено дважды нажимать одну и ту же кнопку. В этом случае имеется 3 варианта работы конвейера: pq , ps , qs .

2. Порядок нажатия кнопок не существен, но предусмотрено повторное нажатие кнопок. Здесь имеется 6 вариантов: pq , ps , qs , pp , qq , ss .

3. Порядок нажатия кнопок существен, запрещено дважды нажимать одну и ту же кнопку. В этой ситуации свои 6 вариантов: pq , ps , qp , qs , sp , sq .

4. Порядок нажатия кнопок существен, допускается повторное нажатие кнопки. Существует 9 вариантов: pq , ps , qp , qs , sp , sq , pp , qq , ss .

В первом случае все возможные варианты можно задать как двухэлементные подмножества

$$\{p, q\}, \{p, s\}, \{q, s\}$$

трехэлементного множества $M = \{p, q, s\}$, а следовательно, искомые конфигурации определить как сочетания из трех элементов по два.

В третьем и четвертом случаях конфигурации являются упорядоченными парами элементов множества M , причем в третьем случае элементы пар различны и представляют собой размещения из трех элементов по два:

$$(p, q), (p, s), (q, p), (q, s), (s, p), (s, q);$$

в четвертом случае элементы в парах могут повторяться:

$$(p, q), (p, s), (q, p), (q, s), (s, p), (s, q), (p, p), (q, q), (s, s).$$

Однако в обоих случаях конфигурации можно рассматривать как элементы декартового квадрата $M^2 = M \times M$ множества M .

Три рассмотренных вида комбинаторных конфигураций допускают определение на языке теории множеств. В общем случае упорядоченные выборки и неупорядоченные выборки без повторений из элементов некоторого конечного множества определяются аналогичным образом. Поэтому вспомним используемые в дальнейшем теоретико-множественные понятия и обозначения.

Если элемент a принадлежит множеству A , то пишут $a \in A$, в противном случае употребляется запись $a \notin A$. Множество, не содержащее элементов, называется пустым и обозначается \emptyset .

Множества A и B называются равными (пишут $A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов. Если каждый элемент множества B является элементом множества A , то множество B называется *подмножеством* множества A ; при этом пишут $B \subseteq A$. В том случае, когда $B \subseteq A$ и $B \neq A$, множество B называется *собственным* подмножеством множества A . Пустое множество \emptyset является подмножеством любого множества.

Основной численной характеристикой множества является его *мощность*. Если мощность множества есть целое неотрицательное число, оно называется конечным; в противном случае множество называется бесконечным. Конечное множество A , содержащее n элементов, кратко называют *n -множеством*, а его мощность обозначают $|A|$ и пишут: $|A| = n$. Считают, что $|\emptyset| = 0$.

Множество A мощности n можно задать *списком* его элементов: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Список элементов множества служит примером простейшей комбинаторной конфигурации, в которой все элементы a_i , $i = 1, \dots, n$ различны, а их порядок является несущественным.

Пусть B – подмножество множества A и $|A| = n$, $|B| = m$, тогда $m \leq n$; если при этом B – собственное подмножество A , то $m < n$. Любое m -элементное подмножество B множества A можно, в свою очередь, задать списком $B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}\}$, в котором $a_{i_k} \in A$. Множество всех m -элементных подмножеств множества A обозначается $A^{(m)}$.

Декартовым произведением множеств A_1, A_2, \dots, A_m называется множество

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m = \{(a_1, a_2, \dots, a_m) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

В случае $A_1 = A_2 = \dots = A_m = A$ декартово произведение называется m -й *декартовой степенью* множества A и обозначается A^m . В зависимости от конкретной интерпретации множества A^m его элементы называют *кортежами*, *конечными последовательностями*, *словами* длины m или m -мерными *векторами*.

Для задания неупорядоченных конфигураций с повторяющимися элементами (второй вариант движения робота) удобно ввести в рассмотрение совокупности

$$\{\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{n_1}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{n_2}, \dots, \underbrace{a_m, \dots, a_m}_{n_m}\},$$

в которых элемент a_i , $i = 1, \dots, m$, содержится $n_i \geq 1$ раз. Такие совокупности называются *мультимножествами*. Число n_i называется *кратностью элемента a_i* , а сумма $\sum_{i=1}^m n_i = n$ – *числом элементов (мощностью) мультимножества*. Мультимножество мощности n называется n -мультимножеством.

Поскольку все элементы множества являются различными, его можно рассматривать как мультимножество, в котором кратность каждого элемента равна 1.

Теперь неупорядоченные комбинаторные конфигурации с повторяющимися элементами из задачи 1.1.1 можно задать как двухэлементные мультимножества

$$\{p, q\}, \{p, s\}, \{q, s\}, \{p, p\}, \{q, q\}, \{s, s\},$$

составленные из элементов множества $M = \{p, q, s\}$.

Мультимножество A , в котором элемент a_1 повторяется n_1 раз, элемент a_2 – n_2 раз и т. д., элемент a_m – n_m раз, обозначают

$$A = \{n_1 a_1, n_2 a_2, \dots, n_m a_m\}.$$

Это же мультимножество можно задать с помощью двух списков: списка его различных элементов $S(A) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ и списка

$[A] = [n_1, n_2, \dots, n_m]$ их кратностей. Первый список называют *основанием*, а второй – *спецификацией* мультимножества.

Так, основанием мультимножества $A = \{p, p, q, q, q, s\}$ или $A = \{2p, 3q, s\}$ является множество $S(A) = \{p, q, s\}$. Элемент p повторяется в A два раза, элемент q – три, а элемент s – один, поэтому его спецификация $[A] = [2, 3, 1]$.

Мультимножество B называется *подмультимножеством* мультимножества A , если $S(B) \subseteq S(A)$ и кратность каждого элемента в B не больше кратности этого элемента в A .

Задача 1.1.2. Сколькими способами n открыток можно упаковать в m конвертов?

Опять нетрудно заметить, что задача требует дополнительных уточнений. Во-первых, неясно, являются ли открытки различными или они одинаковые. Во-вторых, те же самые вопросы возникают относительно конвертов. Наконец, не указано, сколько открыток разрешается класть в один конверт.

В том случае, когда открытки различные, а конверты одинаковые, соответствующие раскладкам комбинаторные конфигурации состоят из m попарно непересекающихся подмножеств, которые образуют разбиение n -множества, причем порядок подмножеств разбиения является несущественным. Если же и открытки, и конверты различные, при составлении соответствующих конфигураций необходимо учитывать порядок подмножеств разбиения.

В тех случаях, когда открытки считаются одинаковыми, речь, по сути дела, идет о разбиении числа n на m слагаемых. В зависимости же от того, считаются конверты различными или одинаковыми, в соответствующих конфигурациях (суммах) учитывается или не учитывается порядок слагаемых.

Наконец, вид комбинаторной конфигурации может зависеть и от заданного способа раскладки открыток по конвертам. Можно считать его произвольным, но можно, например, разрешить класть в конверт не более одной открытки или потребовать, чтобы не было пустых конвертов. Эти ситуации легко описать, если рассматривать раскладки как отображения множества $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ открыток во множество $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ конвертов. В первом случае отображения считаются произвольными, во втором – инъективными, а в третьем – сюръективными.

Напомним, что отображение $f: A \rightarrow B$ называется:

– инъекцией, если каждый элемент из B имеет не более одного прообраза, т. е. из $f(a_i) = f(a_j)$ следует, что $a_i = a_j$;

– сюръекцией, если каждый элемент из B имеет хотя бы один прообраз, т. е. $f(A) = B$.

Очевидно, что инъективное отображение $f: A \rightarrow B$ может существовать только тогда, когда $m \leq n$ (число открыток не больше числа конвертов), а сюръективное, – когда $m \geq n$ (число открыток не меньше числа конвертов).

Приведенные примеры, конечно, далеко не исчерпывают всех видов комбинаторных конфигураций, встречающихся в перечислительной комбинаторике. При решении любой перечислительной задачи важно прежде всего определить и четко представить, о каких конфигурациях в ней идет речь. Это позволит в дальнейшем подобрать наиболее удобную схему их описания и выбрать нужные методы или вычислительные формулы.

1.1.2. Комбинаторные числа и способы их вычисления

В перечислительной задаче с небольшими числовыми данными найти число всех нужных конфигураций можно, выполнив их полный перебор. Именно так мы поступили при пересчете конфигураций, возникших после уточнения формулировки задачи 1.1.1. В аналогичных задачах, сформулированных в общем виде, искомые количества конфигураций будут уже определяться значениями некоторых функций, заданных на множестве $N_0 = N \cup \{0\}$ целых неотрицательных чисел. Так же точно в каждой из задач, полученных в результате уточнения формулировки задачи 1.1.2, искомые числа будут значениями функций, зависящих от целых неотрицательных чисел n и m . Такие функции называют «перечисляющими», а их значения – *комбинаторными числами*. Существует четыре основных способа задания комбинаторных чисел.

1. Идеальный случай, когда перечисляющую функцию удастся найти в явном *замкнутом* виде, т. е. записать в виде выражения, составленного из известных функций с помощью основных арифметических операций и не содержащего символов суммирования.

Пример такого задания комбинаторных чисел дают знакомые из школьного курса алгебры формулы

$$f(n) = n!, c(n, m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Функция $f(n)$ перечисляет число P_n перестановок n -множества, а функция $c(n, m)$ – число C_n^m сочетаний из n элементов по m .

Всякая перечисляющая функция $f(n)$, заданная на \mathbf{N}_0 , определяет последовательность $\langle u_n \rangle$ комбинаторных чисел с общим членом $u_n = f(n)$:

$$u_0 = f(0), u_1 = f(1), \dots, u_n = f(n), \dots$$

Так же точно перечисляющие функции нескольких аргументов определяют некоторые семейства комбинаторных чисел.

К сожалению, существование «хороших» замкнутых формул для комбинаторных чисел скорее исключение, чем правило. Кроме того, использование многих известных формул сопряжено с громоздкими вычислениями.

2. Второй способ вычисления комбинаторных чисел, рассматриваемый в главе 2, основан на понятии *рекуррентного соотношения*. При этом способе находят одно или несколько первых комбинаторных чисел указанного вида и задают правило (рекуррентное соотношение), позволяющее вычислить по ним последующие числа. Например, число P_n перестановок n -множества можно задать рекуррентным соотношением

$$P_{n+1} = (n + 1)P_n, P_0 = 1.$$

Последовательно вычисляя $P_1 = 1 \cdot P_0 = 1$, $P_2 = 2 \cdot P_1 = 2$, $P_3 = 3 \cdot P_2 = 6$, ..., можно найти P_n для любого требуемого n .

3. В третьей главе комбинаторные числа находятся методом *производящих функций*. Суть этого метода состоит в сопоставлении последовательности искомых комбинаторных чисел формального степенного ряда (производящей функции), коэффициенты которого являются членами этой последовательности.

4. В приложениях перечислительной комбинаторики часто вместо точного вычисления больших комбинаторных чисел используется их *асимптотическая оценка*, для этого скорость роста числа $a(n)$ рассматриваемых конфигураций сравнивается со скоростью роста какой-либо известной функции $f(n)$ при условии, что $n \rightarrow \infty$ ([4], [11], [14], [15] и др.). Этот способ представления комбинаторных чисел в пособии не рассматривается.

1.1.3. Комбинаторные схемы

Для успешного решения перечислительной задачи важно выбрать удобную и достаточно наглядную схему конструирования рассматриваемых в ней комбинаторных конфигураций. Обычно используются две основные комбинаторные схемы.

1. *Выбор элементов* из конечного множества или мультимножества и их размещение в выборке.

Выборки, в которых учитывается порядок размещения элементов, называются *упорядоченными*. Поэтому две упорядоченные выборки, состоящие из одних и тех же элементов, но отличающиеся порядком их расположения, являются различными. Различными, например, будут упорядоченные выборки pq и qp из множества $M = \{p, q, s\}$. Если очередность следования элементов в выборке является несущественной, она называется *неупорядоченной*; в этом случае выборки pq и qp считаются одинаковыми.

Выборка, все элементы которой различны, называется *выборкой без повторений*, а выборка, элементы в которой могут повторяться, – *выборкой с повторениями*.

Пусть n -множество A задано списком содержащихся в нем элементов: $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Тогда любую выборку k элементов из n данных или кратко (n, k) -выборку можно однозначно задать списком элементов, включенных в эту выборку.

Список упорядоченной (n, k) -выборки – кортеж $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ длины k , составленный из элементов множества A . При этом в кортежах, соответствующих выборкам без повторений, все элементы различные, а в кортежах, соответствующих выборкам с повторениями, могут быть одинаковые.

Неупорядоченные (n, k) -выборки без повторений являются k -элементными подмножествами $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ множества A , а неупорядоченные (n, k) -выборки с повторениями – k -элементными мультимножествами, для которых множество A является основанием. Поэтому в списках неупорядоченных выборок порядок элементов может быть произвольным.

В некоторых задачах (n, k) -выборки с повторениями удобно рассматривать как выборки из мультимножества, в котором содержатся элементы n типов. Это можно делать в тех случаях, когда в мультимножестве число элементов каждого типа не меньше, чем k .

Различные виды разбиений конечных множеств и мультимножеств также можно задать с помощью списков. Сначала, например, можно составить список подмножеств разбиения, а затем списки элементов, входящих в подмножества (подмультимножества) разбиения. Вид разбиения отражается в упорядоченности или неупорядоченности формируемых списков.

2. *Раскладка предметов по ящикам.* Пусть имеются два конечных множества $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ и требуется найти число всех отображений A в B , которые удовлетворяют некоторым заданным ограничениям. Первое множество примем за множество предметов, а второе – за множество ящиков. Тогда любое отображение $f: A \rightarrow B$ можно рассматривать как определенную раскладку предметов по ящикам.

В зависимости от того, отличаются предметы друг от друга или нет, их считают различимыми или неразличимыми; ящики так же точно могут быть различимыми и неразличимыми. Комбинируя различные варианты, получаем четыре возможные случая.

Предметы	Ящики
различимые	различимые
различимые	неразличимые
неразличимые	различимые
неразличимые	неразличимые

Кроме того, в каждом из этих четырех случаев можно рассматривать разные способы отображения (раскладки). Их можно считать:

- 1) произвольными,
- 2) инъективными (в ящик разрешается класть не более одного предмета),
- 3) сюръективными (не должно быть пустых ящиков).

Таким образом, выделяются *двенадцать* основных перечислительных задач.

Чтобы понять, какие отображения (раскладки) в каждой из этих задач считать одинаковыми (или эквивалентными), обратимся к следующему примеру.

Пусть даны множества $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Рассмотрим четыре отображения f_1, f_2, f_3, f_4 множества A во множество B и выясним, в каких из четырех случаев, указанных в таблице, они дают одинаковые раскладки предметов по ящикам.

В том случае, когда и предметы, и ящики являются различимыми (рис. 1), все четыре отображения (раскладки) являются различными.

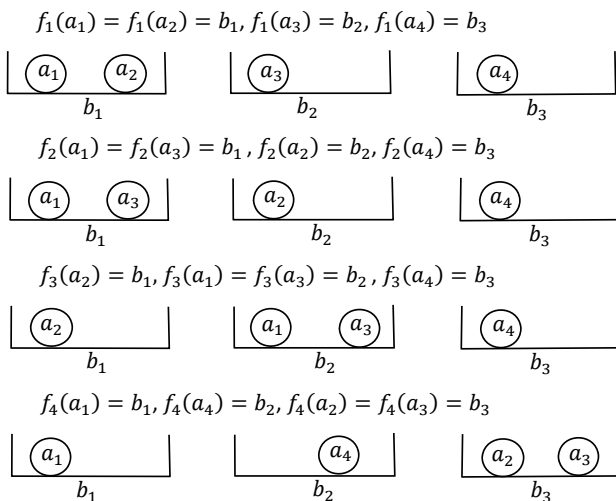


Рис. 1

Когда предметы неразличимы, а ящики различимы, отображения f_1 и f_2 являются одинаковыми, но отображения f_1, f_3, f_4 остаются различными (рис. 2). Можно условиться считать, что предметы отличаются друг от друга лишь обозначениями, поэтому подстановка $s = \begin{pmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ a_1 a_3 a_2 a_4 \end{pmatrix}$, заданная на множестве предметов A , переводит f_1 в f_2 , т. е. $f_2 = s \cdot f_1$.

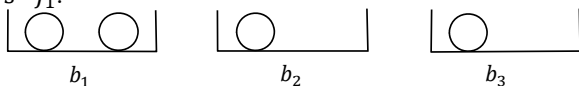


Рис. 2

Когда предметы различимы, ящики неразличимы, одинаковыми являются отображения f_2 и f_3 , а отображения f_1, f_3, f_4 остаются различными (рис. 3). В этом случае $f_3 = f_2 \cdot t$, где $t = \begin{pmatrix} b_1 b_2 b_3 \\ b_2 b_1 b_3 \end{pmatrix}$ – подстановка на множестве B ящиков.

Наконец, когда и предметы, и ящики неразличимы, все четыре отображения являются одинаковыми (рис. 4).



Рис. 3

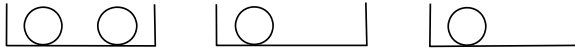


Рис. 4

Обобщая полученные результаты, можно следующим образом определить эквивалентные (одинаковые) отображения в рассматриваемых перечислительных задачах.

Пусть f, g – отображения множества $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ во множество $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ и B^A – множество отображений A в B .

Отображение g называется эквивалентным отображению f с различным множеством A , если существует подстановка $s: A \rightarrow A$ такая, что $g = sf$, т. е. $g(a_i) = f(s(a_i))$ для всех $a_i \in A$.

Отображение g называется эквивалентным отображению f с различным множеством B , если существует подстановка $t: B \rightarrow B$ такая, что $g = ft$, т. е. $g(a_i) = t(f(a_i))$ для всех $a_i \in A$.

Отображение g называется эквивалентным отображению f с различными множествами A и B , если существуют подстановки $s: A \rightarrow A$, $t: B \rightarrow B$ такие, что $g = sft$, т. е. $g(a_i) = t(f(s(a_i)))$ для всех $a_i \in A$.

Нетрудно доказать, что определенные на множестве B^A отображений A в B отношения действительно являются отношениями эквивалентности. Поэтому любое из них задает разбиение множества всех отображений A в B на классы эквивалентных между собой отображений. В каждом из трех случаев число «различных» отображений (различных раскладок предметов по ящикам) равно числу классов эквивалентности.

В случае инъективных (сюръективных) отображений A в B (A на B) число различных раскладок предметов по ящикам равно числу классов эквивалентности, отображения в которых инъективны (сюръективны).

§ 1.2. Основные правила комбинаторики

Даны правила вычисления числа элементов в объединении и декартовом произведении конечных множеств. На эти правила опирается большинство комбинаторных рассуждений и вычислений, поэтому в учебной литературе их обычно называют *основными правилами комбинаторики*.

1.2.1. Правило суммы

Рассмотрим простейшую задачу.

Задача 1.2.1. В вазе лежит t яблок и n груш. Сколькими способами можно выбрать яблоко либо грушу?

Решение. Яблоко можно выбрать t способами, а грушу – n способами. Следовательно, яблоко либо грушу можно выбрать $t + n$ способами. \square

Решение иллюстрирует первое основное правило пересчета, называемое **правилом суммы**:

Пусть множество A содержит t элементов, множество B – n элементов и эти множества не пересекаются. Тогда существует $t + n$ способов выбрать один элемент, имеющийся либо в A , либо в B .

Поскольку $t + n = |A \cup B|$, то это правило можно сформулировать так: *если A и B – конечные непересекающиеся множества такие, что $|A| = t$, $|B| = n$, то*

$$|A \cup B| = |A| + |B| = t + n.$$

Правило суммы можно обобщить на любое конечное число попарно непересекающихся множеств:

Пусть в попарно непересекающихся множествах A_1, A_2, \dots, A_k имеется n_1, n_2, \dots, n_k элементов соответственно. Тогда существует $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ способов выбрать один элемент, содержащийся в одном из перечисленных множеств.

Иными словами, если A_1, A_2, \dots, A_k – конечные попарно непересекающиеся множества, т. е. $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Другим обобщением правила суммы является правило включения-исключения, которое используется при вычислении числа элементов в объединении пересекающихся конечных множеств.

1.2.2. Правило включения-исключения

Решим задачу, аналогичную задаче 1.2.1, для случая, когда пересечение множеств A и B не пусто.

Задача 1.2.2. Среди студентов, обратившихся в библиотеку за учебной литературой по дискретной математике, 36 человек взяли учебник, 32 человека – сборник задач, а 20 человек среди них – и учебник, и сборник задач. Сколько студентов взяли в библиотеке учебник либо задачник по дискретной математике?

Решение. Множество студентов, взявших учебник, обозначим через A , а множество студентов, взявших задачник, – через B . Пересечение этих множеств не пусто, множество студентов, взявших одновременно учебник и задачник, есть $A \cap B$ (рис. 5). Требуется найти число элементов объединения $A \cup B$. По условию задачи $|A| = 36$, $|B| = 32$, $|A \cap B| = 20$. Поскольку в сумме $|A| + |B|$ студент, одновременно взявший учебник и задачник, учитывается два раза, искомое число студентов равно $36 + 32 - 20 = 48$. □

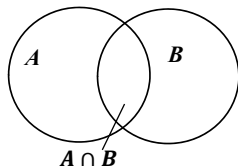


Рис. 5

Таким образом, если $A \cap B \neq \emptyset$, то каждый элемент пересечения $A \cap B$ входит в сумму $|A| + |B|$ дважды. Поэтому

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad (1.2.1)$$

Заметим, что формула включает и тот случай, когда $A \cap B = \emptyset$.

Поставим задачу обобщить формулу (1.2.1) для любого конечного числа n ($n \geq 2$) множеств, среди которых имеются попарно пересекающиеся.

Начнем со случая $n = 3$. Пусть множества A_1, A_2, A_3 попарно пересекаются и при этом $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ (рис. 6). Каждый элемент пересечений $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$, $A_2 \cap A_3$ учитывается в сумме $|A_1| + |A_2| + |A_3|$ дважды, а следовательно, каждый элемент пересечения $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ – трижды. Поэтому

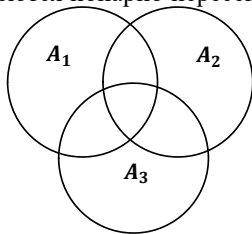


Рис. 6

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Очевидно, что эта формула также включает и те случаи, когда некоторые из множеств попарно не пересекаются.

Найденная формула позволяет сделать предположение, что для любого натурального $n \geq 2$ имеет место

Теорема 1.2.1. Пусть A_i – конечные множества, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

При $n = 2$ в силу (1.2.1) формула (1.2.2) справедлива.

Предположим, что формула имеет место для $n = k - 1 \geq 2$, т. е. выполняется равенство

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{k-1}| &= \sum_{i=1}^{k-1} |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \dots + (-1)^k |A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}|. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Докажем справедливость формулы (1.2.2) для $n = k$ множеств. Обозначим $A = A_1 \cup \dots \cup A_{k-1} \cup A_k$ и воспользуемся тем, что формула имеет место для $n = 2$:

$$\begin{aligned} |A| &= |A_1 \cup \dots \cup A_{k-1} \cup A_k| = |(A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}) \cup A_k| = \\ &= |A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}| + |A_k| - |(A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}) \cap A_k|. \end{aligned}$$

Из дистрибутивности операции пересечения относительно операции объединения следует

$$|A| = |A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}| + |A_k| - |(A_1 \cap A_k) \cup \dots \cup (A_{k-1} \cap A_k)|$$

или

$$|A| = |A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}| + |A_k| - |B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}|, \quad (1.2.4)$$

где $B_i = A_i \cap A_k$. Согласно предположению

$$\begin{aligned} |B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}| &= \sum_{i=1}^{k-1} |B_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k-1} |B_{i_1} \cap B_{i_2}| + \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k-1} |B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap B_{i_3}| - \dots + (-1)^k |B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}| &= \sum_{i=1}^{k-1} |A_i \cap A_k| - \\ &- \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_k| + \dots + (-1)^{k-1} |A_1 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap A_k|. \end{aligned}$$

Подставив в (1.2.4) вместо $|A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}|$ правую часть равенства (1.2.3), а вместо $|B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}|$ – правую часть последнего равенства, убеждаемся, что формула (1.2.2) справедлива для $n = k$, а значит, для любого натурального $n \geq 2$. ■

Следствие. Пусть A – конечное множество и A_1, A_2, \dots, A_n – его подмножества. Тогда

$$|A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)| = |A| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \quad (1.2.5)$$

Действительно, по определению дополнения множества до множества

$$(A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)) \cup (A_1 \cup \dots \cup A_n) = A,$$

$$(A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)) \cap (A_1 \cup \dots \cup A_n) = \emptyset,$$

Поэтому $|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| + |A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A|$, откуда

$$|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = |A| - |A_1 \cup \dots \cup A_n|.$$

Остается заменить $|A_1 \cup \dots \cup A_n|$ по формуле (1.2.2).

Формула (1.2.2) называется **формулой включений и исключений**. В приложениях эту формулу часто гораздо удобнее использовать в следующей форме.

Пусть во множестве A содержится N элементов, а элементы обладают либо не обладают свойствами p_1, p_2, \dots, p_n . Число элементов, обладающих свойством p_i , условимся обозначать $N(p_i)$, число элементов, одновременно обладающих свойствами $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$, – через $N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k})$, а число элементов, не обладающих ни одним из свойств p_1, p_2, \dots, p_n , – через N_0 . Тогда число элементов, одновременно обладающих k свойствами, равно

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} N(p_{i_1}, \dots, p_{i_k}), \quad (1.2.6)$$

и согласно формуле (1.2.5) $N_0 = N - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^n S_n$ или

$$N_0 = N + \sum_{k=1}^n (-1)^k S_k. \quad (1.2.7)$$

В правой части формулы (1.2.7) из N сначала исключаются все элементы, обладающие хотя бы одним из свойств p_1, p_2, \dots, p_n , затем включаются элементы, обладающие, по крайней мере, двумя свойствами, снова исключаются элементы, обладающие хотя бы тремя из

Другими словами, если A и B – конечные множества такие, что $|A| = m$, $|B| = n$, то декартовое произведение $A \times B$ содержит mn элементов: $|A \times B| = mn$.

Правило произведения обобщает

Теорема 1.2.2. Пусть множества A_1, A_2, \dots, A_k имеют мощности n_1, n_2, \dots, n_k соответственно. Тогда декартовое произведение $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ содержит $n_1 n_2 \dots n_k$ элементов.

Доказательство. Применим индукцию по k . Для $k = 2$, т. е. для упорядоченных пар элементов, утверждение справедливо. Предположим, что оно справедливо для $k = m \geq 2$, т. е. $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m| = n_1 n_2 \dots n_m$ для любых множеств A_1, A_2, \dots, A_m таких, что $|A_i| = n_i$, $i = 1, 2, \dots, m$. Докажем, что утверждение имеет место для $k = m + 1$.

Возьмем множество A_{m+1} мощности n_{m+1} и рассмотрим декартовые произведения $A_1 \times \dots \times A_m \times A_{m+1}$ и $(A_1 \times \dots \times A_m) \times A_{m+1}$. Элементами первого произведения являются упорядоченные последовательности $(a_1, \dots, a_m, a_{m+1})$, а элементами второго – упорядоченные пары $((a_1, \dots, a_m), a_{m+1})$, в которых $a_i \in A_i$ ($1 \leq i \leq m$), $a_{i+1} \in A_{i+1}$. При этом каждой последовательности $(a_1, \dots, a_m, a_{m+1})$ соответствует единственная упорядоченная пара $((a_1, \dots, a_m), a_{m+1})$, и наоборот. Это означает, что число элементов декартового произведения $A_1 \times \dots \times A_m \times A_{m+1}$ равно числу элементов декартового произведения $(A_1 \times \dots \times A_m) \times A_{m+1}$, т. е.

$$|A_1 \times \dots \times A_m \times A_{m+1}| = |(A_1 \times \dots \times A_m) \times A_{m+1}|.$$

По предположению $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m| = n_1 n_2 \dots n_m$, $|A_{m+1}| = n_{m+1}$, поэтому

$$|(A_1 \times \dots \times A_m) \times A_{m+1}| = (n_1 \dots n_m) n_{m+1} = n_1 \dots n_m n_{m+1}.$$

Следовательно, $|A_1 \times \dots \times A_m \times A_{m+1}| = n_1 \dots n_m n_{m+1}$ и теорема имеет место для любого натурального k . ■

Следствие. Декартова степень A^k n -множества A содержит n^k элементов.

Задача 1.2.5. В трех группах курса 23, 24 и 25 студентов. Сколькими способами можно выбрать трех представителей курса по одному из каждой группы?

Решение. По правилу произведения тройку представителей курса можно выбрать $23 \cdot 24 \cdot 25 = 13800$ способами. □

Задача 1.2.6. Найти число всех подмультимножеств мультимножества $A = \{n_1 a_1, n_2 a_2, \dots, n_m a_m\}$.

Решение. Каждое подмультимножество B мультимножества A однозначно определяется списком $[B] = [k_1, k_2, \dots, k_m]$ кратностей входящих в него элементов; при этом

$$0 \leq k_1 \leq n_1, 0 \leq k_2 \leq n_2, \dots, 0 \leq k_m \leq n_m.$$

Отсюда по правилу произведения следует, что число всех подмультимножеств мультимножества A равно $\prod_{i=1}^m (n_i + 1)$. \square

Задача 1.2.7. Сколько четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3?

Решение. В качестве первой цифры числа можно взять любую из цифр множества $A = \{1, 2, 3\}$, т. е. она может быть выбрана тремя способами. Вторая, третья и четвертая цифры также выбираются из трех заданных цифр. Поэтому число всех четырехзначных чисел, которые можно записать с помощью трех данных цифр, равно числу элементов множества A^4 . По следствию из правила произведения это можно сделать $3^4 = 81$ способами. \square

§ 1.3. Вычисление конечных сумм

Параграф посвящен элементарным методам вычисления конечных сумм. Его включение обусловлено тем, что отыскание комбинаторных чисел, как правило, сводится к суммированию конечных числовых последовательностей.

1.3.1. Преобразования конечных сумм

Умение вычислять конечные суммы основано на хорошем владении основными правилами преобразования сумм. Это умение позволяет сводить нахождение искомым сумм к уже известным суммам или в каком-то смысле более удобным для суммирования.

Простейшим преобразованием сумм является операция *замены индекса суммирования*:

$$\sum_{P(i)} a_i = \sum_{P(j)} a_j. \quad (1.3.1)$$

Сумму по элементам некоторого подмножества I натуральных (целых) чисел можно преобразовывать, используя свойства:

– ассоциативности сложения

$$\sum_{k \in I} (a_k + b_k) = \sum_{k \in I} a_k + \sum_{k \in I} b_k; \quad (1.3.2)$$

– коммутативности сложения

$$\sum_{k \in I} a_k = \sum_{p(k) \in I} a_k, \quad (1.3.3)$$

где $p(k)$ – образ элемента k при подстановке $p: I \rightarrow I$;

* Запись $\sum_{P(i)} a_i$ означает, что индекс суммирования i удовлетворяет заданному условию $P(i)$.

– *дистрибутивности* умножения относительно сложения

$$\sum_{k \in I} c a_k = c \sum_{k \in I} a_k. \quad (1.3.4)$$

Ассоциативность сложения сумм позволяет разбивать сумму на несколько сумм и объединять несколько сумм в одну, а также проводить *разбиения области суммирования* типа

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m}^n a_k - a_m.$$

Коммутативность сложения сумм дает основание переставлять члены конечной суммы в любом требуемом порядке, а также выполнять *преобразования области суммирования* типа

$$\sum_{p(k) \in I} a_k = \sum_{p(s(k)) \in J} a_k,$$

где $s: I \rightarrow J$ – некоторая биекция множества индексов. Так, применив подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, можно записать

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_{n-i},$$

а с помощью биекций $s(i) = i - 1$ и $s(i) = i + k$ множества $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ на множества $J_1 = \{0, 1, \dots, n-1\}$ и $J_2 = \{1+k, 2+k, \dots, n+k\}$ соответственно осуществить преобразования $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \sum_{i=k+1}^{n+k} a_{i-k}$.

На основании дистрибутивности умножения относительно сложения можно вносить и выносить постоянные множители при членах суммы под знак и за знак суммы \sum .

Примечание. В третьей главе знак суммы \sum будет использоваться для компактной записи рядов, т. е. сумм, содержащих бесконечное число слагаемых. Следует иметь в виду, что понятие суммы бесконечного ряда, в основе которого лежит операция предельного перехода, отличается от понятия суммы конечного числа слагаемых. Поэтому лишь некоторые из рассмотренных свойств конечных сумм переносятся на суммы бесконечных рядов, и то при выполнении определенных дополнительных условий.

1.3.2. Кратные суммы, произведения сумм

Члены суммы могут иметь два и более индекса суммирования. Например, такой является сумма

$$(a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1}) + (a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2}) + \dots + (a_{1m} + a_{2m} + \dots + a_{nm}).$$

Ее можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^m (a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj}) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij}.$$

Последнее выражение в этих равенствах является суммой членов a_{ij} , которые получаются, когда i и j независимо друг от друга принимают все возможные значения: $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$.

На основании коммутативности и ассоциативности операции сложения чисел эту сумму можно записать иначе:

$$\sum_{i=1}^m a_{1i} + \sum_{i=1}^m a_{2i} + \dots + \sum_{i=1}^m a_{ni} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij}.$$

Отсюда следует, что величина суммы не зависит от порядка суммирования, т. е.

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right). \quad (1.3.5)$$

Поэтому двойные суммы вида (1.3.5), опуская скобки, записывают $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}$, а при их вычислении выбирают, в каком порядке легче проводить суммирование.

Пусть $a_{ij} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, определяемый условиями

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (1.3.6)$$

Тогда $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \delta_{ij} = \delta_{11} + \dots + \delta_{nn} = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ раз}} = n$ при $n \leq m$.

В общем случае сумму вида

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_r=1}^{n_r} a_{i_1 i_2 \dots i_r} = \sum_{\substack{1 \leq i_k \leq n_k \\ k=1,2,\dots,r}} a_{i_1 i_2 \dots i_r}$$

называют *кратной*, точнее, *r-кратной*.

Аналогичные равенства имеют место для сокращенных записей произведений, сомножители в которых имеют два и более индекса. Например,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m a_{1j} a_{2j} \dots a_{nj} &= \prod_{j=1}^m a_{1j} \prod_{j=1}^m a_{2j} \dots \prod_{j=1}^m a_{nj} = \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^m a_{ij} \right) = \prod_{j=1}^m \left(\prod_{i=1}^n a_{ij} \right) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij}. \end{aligned}$$

Теорема 1.3.1. Произведения двух сумм можно представить в виде суммы произведений слагаемых этих сумм:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{j=1}^m b_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_i b_j. \quad (1.3.7)$$

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по индексу m .

При $m = 1$ справедливость равенства следует из (1.3.4).

Пусть $m > 1$ и соотношение (1.3.7) справедливо для любой суммы элементов b_j , состоящей не более чем из $m - 1$ слагаемого. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{j=1}^m b_j\right) &= \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\left(\sum_{j=1}^{m-1} b_j\right) + b_m\right) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m-1} b_j\right) + \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)b_m = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} a_i b_j + \sum_{i=1}^n a_i b_m = \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^n a_i b_j + \sum_{j=m}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j. \blacksquare \end{aligned}$$

Аналогично можно преобразовать произведение сумм, члены которых зависят от нескольких слагаемых. Так, для произвольного натурального k имеет место равенство

$$\prod_{i=1}^k \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{\varphi \in I_m^k} \prod_{i=1}^k a_{i,\varphi(i)}, \quad (1.3.8)$$

где I_m^k – множество всех отображений $\varphi: I_k \rightarrow I_m$.

Проведем доказательство индукцией по k . Очевидно, что при $k = 1$ равенство выполняется. Предположим, что оно справедливо при $k = m - 1$, где $m \geq 2$. Докажем его справедливость при $k = m$:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k \sum_{j=1}^m a_{ij} &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^m a_{ij}\right)\left(\sum_{j=1}^m a_{kj}\right) = \\ &= \left(\sum_{\varphi \in I_m^{k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} a_{i,\varphi(i)}\right)\left(\sum_{j=1}^m a_{kj}\right) = \sum_{\varphi \in I_m^{k-1}} \sum_{j=1}^m a_{kj} \prod_{i=1}^{k-1} a_{i,\varphi(i)} = \\ &= \sum_{\varphi \in I_m^k} \prod_{i=1}^k a_{i,\varphi(i)}. \end{aligned}$$

Задача 1.3.1. Доказать тождество

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i\right)^2 = \sum_{i=0}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a_i a_j.$$

Решение. Учитывая, что $a_i a_j = a_j a_i$, имеем

$$\begin{aligned} (\sum_{i=0}^n a_i)^2 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j = \sum_{i=0}^n \left(a_i a_i + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n a_i a_j \right) = \\ &= \sum_{i=0}^n a_i^2 + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a_i a_j = \sum_{i=0}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j. \quad \square \end{aligned}$$

Задача 1.3.2. Вычислить сумму $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m j$.

Решение. Поскольку в выражении, стоящем под знаком двойной суммы, индекс k явно не указан, естественно для всех $k = 1, \dots, m$ положить $\varepsilon_k = 1$. Тогда, учитывая (1.3.7), получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m j &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m j \varepsilon_k = \left(\sum_{j=1}^n j \right) \left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_k \right) = \left(\sum_{j=1}^n j \right) \left(\sum_{k=1}^m 1 \right) = \\ &= (1 + \dots + n) \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{m \text{ раз}} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot m = \frac{mn(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

1.3.3. Методы вычисления конечных сумм

Универсальных способов вычисления конечных сумм не существует. Поэтому на конкретных примерах рассмотрим лишь наиболее известные и часто используемые методы их суммирования.

1. Угадывание ответа с доказательством по индукции. Использование метода математической индукции предполагает, что первоначально каким-либо образом удается выдвинуть гипотезу о виде формулы для подсчета искомой суммы.

Задача 1.3.3. Вычислить сумму $S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

Решение. Найти значения искомой суммы для малых значений n просто, но обнаружить при этом какую-либо закономерность весьма трудно. Поэтому поступим следующим образом. Известно, что $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Рассмотрим совместно несколько значений двух сумм:

n	1	2	3	4	5	6	...
$1 + 2 + \dots + n$	1	3	6	10	15	21	...
$1^2 + 2^2 + \dots + n^2$	1	5	14	30	55	91	...

Выпишем первые члены последовательности $\frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{1+2+\dots+n}$:

$$1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, \dots$$

Представив в виде дроби первый и четвертый члены этой последовательности $\frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, \dots$, можно предположить, что $\frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{1+2+\dots+n} = \frac{2n+1}{3}$. Учитывая значение суммы, стоящей в знаменателе левой части этого равенства, приходим к формуле $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, верной при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Для доказательства этой гипотезы для любого n воспользуемся методом математической индукции, т. е. докажем, что формула остается справедливой при замене n на $n+1$. Так как $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$, то по предположению имеем $S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

Таким образом, формула справедлива.

Основной недостаток этого метода состоит в том, что увидеть общую закономерность и угадать вид формулы искомой суммы обычно достаточно трудно.

2. Приведение к уравнению от S_n . В отдельных случаях при вычислении сумм удастся обойтись правилами оперирования с сокращенными записями сумм и произведений, рассмотренными в предыдущем пункте. В частности, преобразования сумм лежат в основе *метода приведения к уравнению от S_n* . Сущность этого метода продемонстрируем на двух примерах.

Сначала вернемся к сумме $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$. Чтобы получить уравнение относительно S_n , представим двумя способами сумму S_{n+1} :

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2,$$

$$S_{n+1} = \sum_{0 \leq k \leq n} (k+1)^2 = \sum_{0 \leq k \leq n} (k^2 + 2k + 1) = \sum_{0 \leq k \leq n} k^2 + 2 \sum_{0 \leq k \leq n} k + \sum_{0 \leq k \leq n} 1 = S_n + 2 \sum_{0 \leq k \leq n} k + (n+1).$$

Сравнивая правые части, видим, что величины S_n взаимно уничтожаются и пока найти сумму S_n не удастся.

В результате проведенных преобразований можно, однако, найти сумму $\sum_{0 \leq k \leq n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ первых n натуральных чисел. Поэтому возникает гипотеза: а нельзя ли подобным образом найти искомую сумму, преобразуя сумму K_{n+1} кубов чисел? Проверим эту гипотезу:

$$K_{n+1} = K_n + (n+1)^3,$$

$$K_{n+1} = \sum_{0 \leq k \leq n} (k+1)^3 = \sum_{0 \leq k \leq n} (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = K_n + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Действительно, теперь взаимно уничтожаются величины K_n , а $3S_n = (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$. \square

Задача 1.3.4. Найти сумму $\sum_{0 \leq k \leq n} k 2^k$.

Решение. $S_{n+1} = S_n + (n+1)2^{n+1} = \sum_{0 \leq k \leq n} (k+1)2^{k+1} = \sum_{0 \leq k \leq n} k 2^{k+1} + \sum_{0 \leq k \leq n} 2^{k+1}$. По формуле суммы членов геометрической прогрессии $\sum_{0 \leq k \leq n} 2^{k+1} = \frac{2(1-2^{n+1})}{1-2} = 2^{n+2} - 2$. Следовательно, $S_n + (n+1)2^{n+1} = 2S_n + 2^{n+2} - 2$, откуда находим:

$$S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} k 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

3. Подбор вспомогательной функции. Знакомство с методом начнем с решения задачи.

Задача 1.3.5. Вычислить сумму $\sum_{k=1}^n \frac{(k-1)2^k}{k(k+1)}$.

Решение. Искомый результат дают следующие преобразования заданной суммы:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)2^k}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} \right) 2^k = \sum_{k=1}^n \frac{2^{k+1}}{k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} = \\ &= \left(\frac{2^2}{2} + \dots + \frac{2^n}{n} + \frac{2^{n+1}}{n+1} \right) - \left(\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{2^n}{n} \right) = \frac{2^{n+1}}{n+1} - 2. \quad \square \end{aligned}$$

Обобщим проведенные рассуждения. Пусть требуется вычислить сумму $\sum_{k=1}^n u_k$, где u_k – значения данной функции $u_k = u(k)$ целочисленного аргумента. Метод вспомогательной функции используется, когда удается найти такую функцию $U_k = U(k)$, для которой справедливо равенство

$$u_k = U_{k+1} - U_k \quad (1.3.9)$$

(в рассмотренной задаче $U_k = \frac{2^k}{k}$). Последовательно придавая k значения от 1 до n , получим:

$$\begin{aligned} u_1 &= U_2 - U_1, \\ u_2 &= U_3 - U_2, \\ &\dots\dots\dots \\ u_{n-1} &= U_n - U_{n-1}, \\ u_n &= U_{n+1} - U_n. \end{aligned}$$

Складывая по частям эти равенства, приходим к формуле:

$$\sum_{k=1}^n u_k = U_{n+1} - U_1. \quad (1.3.10)$$

Задача 1.3.6. Вычислить сумму $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Решение. Слагаемые суммы имеют вид $u_k = \frac{1}{k(k+1)}$, при этом $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Таким образом, функция U_k , удовлетворяющая условию (1.3.9), существует и имеет вид $U_k = -\frac{1}{k}$. Поэтому $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = -\frac{1}{n+1} + 1 = \frac{n}{n+1}$. \square

4. Преобразование Абеля*. Этот метод применяется при вычислении сумм вида $\sum_{k=1}^n u_k v_k$.

Обозначим через V_k сумму первых k членов последовательности $\langle v_k \rangle$: $V_k = \sum_{i=1}^k v_i$. Тогда $v_1 = V_1$ и $v_k = V_k - V_{k-1}$ при $k > 1$. Выполним соответствующую замену в исходной сумме:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k v_k &= u_1 V_1 + \sum_{k=2}^n u_k (V_k - V_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} u_k V_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} V_k + u_n V_n = u_n V_n - \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^n u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k. \quad (1.3.11)$$

Задача 1.3.7. Вычислить с помощью преобразования Абеля сумму задачи 1.3.4.

Решение. Положим $u_k = k$, $v_k = 2^k$. Тогда V_k является суммой членов геометрической прогрессии со знаменателем 2 и, значит, $V_k = 2 + 2^2 + \dots + 2^k = \frac{2^{k+1} - 2}{2 - 1} = 2^{k+1} - 2$, а $u_{k+1} - u_k = 1$. Поэтому согласно формуле (1.3.11)

$$\sum_{k=1}^n k 2^k = n(2^{n+1} - 2) - \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k+1} - 2) = (n - 1)2^{n+1} + 2. \quad \square$$

* Нильс Хенрик Абель (1802–1829) – норвежский математик, работы которого оказали огромное влияние на развитие математики. Они привели к возникновению таких разделов математики, как теория Галуа, теория алгебраических чисел; содействовали становлению теории функций комплексного переменного и современной абстрактной алгебры.

§ 1.4. Размещения и перестановки

Приведены новые сведения о размещениях и перестановках, изучавшихся в школьном курсе математики.

1.4.1. Размещения

Пусть A – n -множество. Упорядоченная (n, k) -выборка из элементов множества A , все элементы которой различны, называется *размещением из n элементов по k* или (n, k) -размещением. Упорядоченная (n, k) -выборка, элементы которой могут повторяться, называется *размещением k элементов из n с повторениями* или (n, k) -размещением с повторениями.

Из определения декартовой степени множества A следует, что (n, k) -размещения являются элементами множества A^k , т. е. кортежами (последовательностями) длины k . В случае размещений без повторений все элементы в кортеже различны, а в случае размещений с повторениями могут повторяться.

В отечественной учебной литературе число размещений из n элементов по k традиционно обозначается A_n^k , а число всех размещений из n элементов по k с повторениями – \bar{A}_n^k .

Для множества $M = \{p, q, s\}$ имеется 6 размещений из трех элементов по два: pq, ps, qp, qs, sp, sq . Поэтому $A_3^2 = 6$. Если добавить к этим размещениям $(3, 2)$ -выборки pp, qq, ss с повторениями, то получим $\bar{A}_3^2 = 9$.

Теорема 1.4.1. Число размещений из n элементов по k равно $A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ при $k \leq n$ и $A_n^k = 0$ при $k > n$.

Доказательство. При $k = 1$ имеем очевидное равенство $A_n^1 = n$ (один элемент из n можно выбрать n способами). Чтобы получить все размещения из n по 2, нужно к каждому из n элементов добавить второй элемент из $n - 1$ оставшихся. Следовательно, $A_n^2 = A_n^1 \cdot (n - 1) = n(n - 1)$. Если продолжить этот процесс, то размещения из n элементов по k ($k \leq n$) получаются добавлением к кортежам из $k - 1$ элементов k -й компоненты, которая является элементом исходного n -множества и не совпадает ни с одной из $k - 1$ предшествующих компонент. Поэтому $A_n^k = A_n^{k-1}(n - k + 1)$, где $A_n^{k-1} = n(n - 1) \dots (n - k)$. Таким образом,

$$A_n^k = n(n - 1) \dots (n - k + 1). \quad (1.4.1)$$

Умножая и деля правую часть полученной формулы на $(n - k)!$, получим

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (1.4.2)$$

Определим $0! = 1$ (что соответствует пустой выборке). Тогда $A_n^0 = A_0^0 = 1$.

Пусть $k > n$. Так как из n данных элементов нельзя выбрать более n различных элементов, то $A_n^k = 0$. ■

Примечание. Для выражения, стоящего в правой части формулы (1.4.1), часто используется специальное обозначение $(n)_k$, где

$$(n)_k = \begin{cases} n(n-1) \dots (n-k+1), & \text{если } k \leq n, \\ 0, & \text{если } k > n. \end{cases}$$

Задача 1.4.1. В финал игр городской лиги студенческих команд КВН выходят три команды, которые награждаются дипломами I, II и III степени. В играх участвуют 9 команд. Сколькими способами может произойти награждение команд?

Решение. Необходимо учесть, какие три команды из девяти выйдут в финал и как произойдет распределение мест в финале. При этом ни одна команда не может получить более одного диплома. Поэтому для ответа на вопрос задачи надо найти число размещений из 9 элементов по 3: $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$. □

Теорема 1.4.2. Число размещений из n элементов по k с повторениями равно

$$\bar{A}_n^k = n^k. \quad (1.4.3)$$

Доказательство. Каждое размещение из n элементов по k с повторениями является кортежем длины k , в котором любой элемент кортежа может быть выбран n способами. По правилу произведения $\bar{A}_n^k = n^k$.

Задача 1.4.2. Найти число всех подмножеств n -элементного множества.

Решение. Пронумеруем элементы n -множества A с помощью первых n натуральных чисел. Тем самым определяется биекция $f: A \rightarrow I_n$. Поэтому число подмножеств множества A равно числу подмножеств множества $I_n = \{1, \dots, n\}$.

Каждое подмножество множества I_n закодируем кортежем длины n , составленным из чисел 0 и 1. Именно, если число i из I_n входит в подмножество, то на i -м месте кортежа ставим 1, в противном случае — 0.

Например, подмножества $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ множества $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ кодируются кортежами 1000, 0110, 1111 длины 4. Обратнo, каждому такому кортежу соответствует единственное подмножество множества I_4 . Так, кортежам 0000, 0101 соответствуют пустое множество \emptyset и подмножество $\{2, 4\}$.

Указанное кодирование задает биективное соответствие между кортежами и подмножествами множества I_n . Значит, подмножеств в множестве I_n столько же, сколько кортежей. Эти кортежи являются размещениями из двух элементов (0 и 1) по n с повторениями. Поэтому искомое число подмножеств равно $\bar{A}_2^n = 2^n$.

Поскольку множество можно рассматривать как мультимножество, в котором кратность каждого элемента равна 1, то к этому же результату можно прийти, если в формуле, полученной в задаче 1.2.6, положить $k_1 = \dots = k_m = 1$. \square

Примечание. Множество $\mathcal{B}(A)$ всех подмножеств множества A , включая пустое множество \emptyset и само множество A , называется *булеаном*. Согласно результату задачи 1.4.2, для любого конечного множества A его булеан содержит $2^{|A|}$ элементов.

Задача 1.4.3. Имеются 4 карточки, на которых написана цифра «1», 5 карточек с цифрой «2», 4 карточки с цифрой «3» и 3 карточки с цифрой «4». Сколько различных трехзначных чисел можно составить, используя эти карточки?

Решение. Имеем мультимножество, содержащее элементы четырех типов, – карточки с цифрами 1, 2, 3 и 4. Цифры в трехзначном числе могут повторяться, а их порядок является существенным. Поскольку карточек каждого типа не меньше 3, искомое количество трехзначных чисел равно $4^3 = 64$.

1.4.2. Перестановки

Размещения из n элементов по n называются *перестановками из n элементов*. Число перестановок из n элементов обозначают P_n .

В силу теоремы 1.4.1

$$P_n = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 = \frac{n!}{0!} = (n)_n = n!. \quad (1.4.4)$$

Задача 1.4.4. В финале областного конкурса «Учитель года» принимают участие 9 учителей. Порядок их выступлений определяется жеребьевкой. Найти число возможных вариантов порядка выступлений.

Решение. Число вариантов в определении порядка выступлений равно числу перестановок из 9 элементов: $P_9 = 9! = 362880$. \square

Задача 1.4.5. Сколькими способами официант может рассадить 9 посетителей за круглым столом, если способы рассадки клиентов, при которых соседи слева и справа от любого из них остаются прежними, считаются одинаковыми?

Решение. Казалось бы, как и в предыдущей задаче, ответ равен $9!$. Однако это не так, в задаче 1.4.4 упорядочивание производилось в «ряд», а здесь – «по кругу». При «вращении» клиентов вокруг стола (одновременном смещении на один или несколько стульев) соседи слева и справа от любого из них остаются прежними, поэтому такое вращение не меняет их порядка. Значит, перестановки, переходящие при вращении друг в друга, следует считать одинаковыми. Иными словами, при 9 возможных «вращениях» из каждой перестановки получается 9 равных ей перестановок. Поэтому искомое число способов равно $\frac{9!}{9} = 8! = 40320$.

В задаче 1.4.5 мы имели дело с комбинаторной конфигурацией, которая называется циклической подстановкой или, короче, *циклом*. Цикл из n элементов a_1, a_2, \dots, a_n записывается в виде $(a_1 a_2 \dots a_n)$, при этом элемент a_1 считается соседним с элементом a_n . Поэтому запись цикла можно начать с любого из его элементов, т. е. $(a_1 a_2 \dots a_n) = (a_i \dots a_n a_1 \dots a_{i-1})$. Следовательно, число циклов, образованных n элементами, равно $\frac{n!}{n} = (n - 1)!$.

Пусть дано мультимножество $A = \{n_1 a_1, n_2 a_2, \dots, n_k a_k\}$ мощности n . Кортежи, содержащие все n элементов этого мультимножества, называются *перестановками из n элементов с повторениями*, а их число обозначается символом $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Теорема 1.4.3. Число перестановок элементов мультимножества $A = \{n_1 a_1, n_2 a_2, \dots, n_k a_k\}$ мощности n вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (1.4.5)$$

Доказательство. Число элементов в каждой перестановке с повторениями равно $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Поэтому если бы все элементы в ней были различны, то число перестановок равнялось бы $n!$. Но поскольку некоторые элементы повторяются, число перестановок с повторениями меньше $n!$. Для подсчета этого числа рассмотрим перестановку

$$\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{n_1}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{n_2}, \dots, \underbrace{a_k, \dots, a_k}_{n_k}, \quad (*)$$

в которой сначала выписаны все элементы a_1 , затем все элементы a_2, \dots , наконец, все элементы a_k .

Элементы a_1 можно переставлять друг с другом $n_1!$ способами. Но так как все эти элементы одинаковы, то при таких перестановках последовательность (*) не изменяется. Точно так же ничего не меняют $n_2!$ перестановок элементов a_2 и т. д. Перестановки совокупностей из одинаковых элементов в (*) можно делать независимо друг от друга. Поэтому по правилу произведения можно $n_1! n_2! \dots n_k!$ способами переставить друг с другом элементы перестановки (*) так, что она не изменится.

Ясно, что в любой другой перестановке, отличной от (*) и содержащей все n элементов данного мультимножества, можно также $n_1! n_2! \dots n_k!$ способами делать перестановки одинаковых элементов так, что она не изменится. Поэтому число $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$ всех искомым перестановок с повторениями в $n_1! n_2! \dots n_k!$ раз меньше, чем число $n!$ всех перестановок из n различных элементов. ■

Задача 1.4.6. Сколько анаграмм можно составить из слова «математика»? (Анаграммой называется слово, полученное перестановками букв данного слова, независимо от того, имеет оно или не имеет смысловое значение.)

Решение. В слове «математика» 10 букв, среди которых 3 раза встречается буква «а», 2 раза – «м» и 2 раза – «т». Поэтому число анаграмм $P_{10}(3, 2, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{3! 2! 2! (1!)^3} = 151200$. □

§ 1.5. Сочетания

Углубляются и дополняются школьные знания о сочетаниях. В частности, рассматриваются сочетания с повторениями.

1.5.1. Сочетания

Пусть A – множество из n элементов. Неупорядоченная (n, k) -выборка из A , все элементы которой различны, называется *сочетанием из n элементов по k* или (n, k) -сочетанием. Иными словами, сочетание из n элементов по k это – любое k -элементное *подмножество* множества A .

Число сочетаний из n элементов по k , следуя опять школьным традициям, будем обозначать символом C_n^k . Однако следует иметь в

виду, что в научной литературе для обозначения числа сочетаний без повторений обычно используется символ $\binom{n}{k}$.

Теорема 1.5.1. Число сочетаний из n элементов по k равно $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ при $k \leq n$ и $C_n^k = 0$ при $k > n$.

Доказательство. Пусть $k \leq n$. Если в каждом сочетании из n элементов по k выполнить все перестановки (а их для каждого сочетания — $k!$), то получим все размещения без повторений из данных n элементов по k . Поэтому $C_n^k \cdot k! = A_n^k$ или

$$C_n^k \cdot P_k = A_n^k. \quad (1.5.1)$$

Отсюда в силу (1.4.1) следует, что

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \quad (1.5.2)$$

или

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.5.3)$$

При $k > n$ нельзя выбрать k различных элементов из n данных, поэтому в этом случае полагаем $C_n^k = 0$. ■

Напомним, мы условились считать, что $0! = 1$, поэтому $C_n^0 = C_n^n = 1$, т. е. полученная формула имеет место и для $k = 0$ (пустая выборка), и для $k = n$.

Следствие. Число всех k -элементных подмножеств n -элементного множества A равно C_n^k , т. е. $|A^{(k)}| = C_n^k$.

Примечание. Формула (1.5.1) связывает число сочетаний и размещений из n элементов по k и число перестановок из k элементов.

Задача 1.5.1. В играх городской лиги студенческих команд КВН участвуют 9 команд. Сколькими способами жюри игр может выбрать трех участников финала?

Решение. Каждая из 9 команд может оказаться участником финала. Так как финалисты равноправны, число способов их выбора равно $C_9^3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3} = 84$.

Задача 1.5.2. Доказать, что для всех $k = 1, \dots, n$ справедливо равенство:

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}. \quad (1.5.4)$$

Решение. Согласно формуле (1.5.3)

$$nC_{n-1}^{k-1} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = kC_n^k. \quad \square$$

Для доказательства тождества (1.5.4) была непосредственно использована формула для подсчета числа сочетаний. Однако такой способ доказательства комбинаторных тождеств не является универсальным. В частности, его использование может привести к трудоемким и даже непреодолимым алгебраическим преобразованиям. В этом нетрудно убедиться на примере задачи 1.5.3. В подобных случаях можно попытаться провести доказательство, основанное на определении комбинаторных конфигураций. Рассмотрим пример такого доказательства.

Задача 1.5.3. Доказать, что для всех $k = 1, \dots, n$ справедливо равенство $C_n^k = C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_{k+1}^{k-1} + \dots + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-1}^{k-1}$.

Решение. Пусть даны n элементов a_1, a_2, \dots, a_n . Число всех сочетаний по k элементов, содержащих элемент a_k и не содержащих элементов с большим индексом, можно образовать C_{k-1}^{k-1} способами (так как одно место занято самим элементом a_k). Число всех сочетаний по k элементов, содержащих элемент a_{k+1} и не содержащих элементов с большим индексом, можно образовать C_k^{k-1} способами и т. д. Наконец, число сочетаний по k элементов, содержащих элемент a_n , можно образовать C_{n-1}^{k-1} способами. Поэтому общее число сочетаний из n элементов по k равно $C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1} + \dots + C_{n-1}^{k-1}$. С другой стороны, число сочетаний из n элементов по k равно C_n^k . \square

В некоторых случаях для доказательства комбинаторного тождества удастся подобрать или сформулировать подходящую текстовую перечислительную задачу, наглядно отражающую его комбинаторный смысл. Проиллюстрируем сказанное на примере задачи 1.5.2. Для этого сформулируем следующую текстовую задачу:

Сколькими способами из n кандидатов можно выбрать k депутатов, в том числе спикера?

Процедура выборов может быть осуществлена двумя способами. Можно сначала выбрать k депутатов из n кандидатов (это можно сделать C_n^k способами), а затем среди них избрать спикера (это можно сделать k способами). По правилу произведения число способов, которыми из n кандидатов можно выбрать k депутатов и среди последних спикера, будет равно $k C_n^k$. С другой стороны, можно сразу выбрать спикера, а затем из остальных $n - 1$ кандидатов выбрать $k - 1$ депутатов. Первый выбор осуществляется n способами, а второй — C_{n-1}^{k-1} , поэтому теперь искомое число выразится так: $n C_{n-1}^{k-1}$.

1.5.2. Сочетания с повторениями

Пусть A – множество из n элементов. Неупорядоченная (n, k) -выборка, элементы которой могут повторяться, называется *сочетанием из n элементов по k с повторениями* или (n, k) -*сочетанием с повторениями*.

Понятно, что (n, k) -сочетания с повторениями можно считать k -элементными мультимножествами, для которых множество A является основанием.

При решении некоторых задач сочетания с повторениями удобно рассматривать и как k -элементные подмультимножества мультимножества, содержащего элементы n типов; в этом случае число элементов каждого типа должно быть не меньше k .

Число сочетаний из n элементов по k с повторениями обозначается символом \bar{C}_n^k .

Теорема 1.5.2. $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$. (1.5.5)

Доказательство. Каждому сочетанию с повторениями из n элементов a_1, a_2, \dots, a_n по k , в котором элемент a_i повторяется k_i раз, поставим в соответствие кортеж, в начале которого стоят k_1 единиц, затем 0, следом k_2 единиц, снова 0 и т. д., до k_n единиц в конце кортежа. Построенный кортеж состоит из $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ единиц и $n - 1$ нулей. Обратно, каждому кортежу из k единиц и $n - 1$ нулей соответствует вполне определенное сочетание с повторениями из n элементов по k .

Возьмем, например, трехэлементное множество $A = \{a, b, c\}$. Считая элемент a первым, b – вторым, c – третьим, рассмотрим следующие $(3, 5)$ -сочетания с повторениями: $aabcc$, $acccc$, $bbccc$ (на самом деле, порядок следования элементов в этих выборках роли не играет). Этим сочетаниям соответствуют кортежи 1101011, 1001111, 0110111. Обратно, каждому кортежу из 5 единиц и 2 нулей соответствует вполне определенное $(3, 5)$ -сочетание с повторениями. Например, кортежам 1011011, 1011110 и 1010111 соответствуют сочетания $abbcc$, $abbbb$ и $abccc$.

Полученные кортежи из 1 и 0 есть не что иное, как перестановки с повторениями, в которых один элемент повторяется k раз, а второй $n - 1$ раз. Согласно формуле (1.4.5) число таких перестановок равно $P_{n+k-1}(k, n - 1) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k$. Поскольку между множеством

сочетаний с повторениями из n элементов по k и множеством перестановок с повторениями из k единиц и $n - 1$ нулей установлено взаимно-однозначное соответствие, формула (1.5.5) справедлива. ■

Задача 1.5.4. В цветочном магазине имеется 7 различных сортов цветов. Сколькими способами можно составить букет из 5 цветов?

Решение. Считая, что выбор цветов каждого сорта не ограничен, имеем $\bar{C}_7^5 = C_{7+5-1}^5 = C_{11}^5 = \frac{11!}{5! 6!} = 462$.

Задача 1.5.5. Сколькими способами 25 человек могут заказать на десерт по порции мороженого, если в ассортименте кафе имеется 5 сортов мороженого и выбор каждого сорта не ограничен?

Решение. $\bar{C}_5^{25} = C_{29}^{25} = \frac{29!}{25! 4!} = 23751$.

При решении задач на размещение и сочетания с повторениями рассматриваются либо (n, k) -выборки из n -множества с возвращением элементов, либо выборки из мультимножества, содержащего элементы n типов. В тех случаях, когда (n, k) -выборка происходит из мультимножества, следует внимательно следить за числом элементов каждого типа, оно может оказаться меньше k ; тогда применение общей формулы может привести к ошибке. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.5.6. Сколькими способами можно составить букет из 5 роз, если в наличии имеется 5 одинаковых красных, 4 одинаковых белых и 3 одинаковых желтых розы?

Решение. В этой задаче полностью составить букет можно только из красных роз, выбор белых и желтых роз ограничен. Поэтому, если, как и в предыдущих задачах, воспользоваться формулой (1.5.5), решение будет неверным.

Нетрудно, однако, перебрать все возможные варианты составления букета. Буквы К, Б и Ж в выборках будут означать включение в букет красной, белой и желтой розы соответственно. Последовательно составим все возможные букеты с 5, 4, 3, 2, 1 и 0 красными розами:

ККККК;

ККККБ, ККККЖ;

КККББ, КККБЖ, КККЖЖ;

ККБББ, ККББЖ, ККБЖЖ, ККЖЖЖ;

КББББ, КБББЖ, КББЖЖ, КБЖЖЖ;

ББББЖ, БББЖЖ, ББЖЖЖ.

Итак, число всех выборок равно $1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 = 17$. □

§ 1.6. Бином Ньютона

Дан вывод формулы бинома Ньютона, изучаются свойства биномиальных коэффициентов. Рассматриваются треугольник Паскаля и его обобщения.

1.6.1. Вывод формулы

Из школьного курса алгебры хорошо известны формулы:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Обобщим эти формулы для любого целого неотрицательного показателя n .

Теорема 1.6.1. *Для любого целого неотрицательного n справедлива формула*

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n. \quad (1.6.1)$$

Доказательство. При перемножении множителей $a + b$ в правой части равенства $(a + b)^n = \underbrace{(a + b) \dots (a + b)}_{n \text{ раз}}$ получится некоторая

сумма одночленов вида $a^{n-k} b^k$, каждый из которых имеет степень n . Буквы a и b , входящие в одночлены, условимся записывать в том порядке, в каком они входят в перемножаемые скобки (не прибегая к использованию показателя степени). Тогда эти одночлены будут представлять собой всевозможные перестановки с повторениями, составленные из n букв a и b . При этом одночлены, содержащие одинаковое количество букв a (и, следовательно, одинаковое количество букв b), будут подобными.

Чтобы выполнить приведение подобных членов, найдем число одночленов, в которые входит $n - k$ букв a , а значит, k букв b . Такие одночлены являются перестановками с повторениями, составленными из $n - k$ букв a и k букв b . Согласно формуле (1.4.5) их число $P_n(k, n - k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$. Поэтому после приведения подобных членов одночлен $a^{n-k} b^k$ будет иметь коэффициент C_n^k . Придавая k все значения от 0 до n , найдем сумму всех одночленов вида $C_n^k a^{n-k} b^k$, равную $(a + b)^n$. ■

Равенство (1.6.1) называют *биномом Ньютона*, его правую часть – биномиальным разложением или *разложением бинома*, а комбинаторные числа $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$, т. е. коэффициенты разложения, – *биномиальными коэффициентами**.

Общий член разложения имеет вид $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, где $k = 0, 1, \dots, n$. Индекс $k + 1$ обозначает его порядковый номер, считая слева направо. Число всех членов разложения на единицу больше показателя степени бинома, т. е. равно $n + 1$.

Используя знак суммы \sum , формулу бинома Ньютона можно записать так:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k. \quad (1.6.2)$$

В приложениях, как мы увидим в дальнейшем, выведенную формулу часто гораздо полезней записывать в виде многочлена от x , который получается при $a = 1, b = x$:

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n. \quad (1.6.3)$$

Задача 1.6.1. Найти все рациональные члены разложения бинома $(\sqrt[3]{2} + \sqrt{3})^8$.

Решение. Запишем общий член этого разложения

$$T_{k+1} = C_8^k (\sqrt[3]{2})^{8-k} (\sqrt{3})^k = C_8^k \cdot 2^{\frac{8-k}{3}} \cdot 3^{\frac{k}{2}},$$

где $k = 0, 1, \dots, 8$. Для того, чтобы член разложения был рациональным, показатели $\frac{8-k}{3}$ и $\frac{k}{2}$ степеней должны быть целыми числами. Второй показатель будет целым при четных k , т. е. при 0, 2, 4, 6, 8. Подставляя эти значения k в первый показатель, видим, что он будет целым только при $k = 2$ и $k = 8$. Следовательно, в разложении имеются два рациональных члена

$$T_3 = C_8^2 \cdot 2^2 \cdot 3 = 336, T_9 = C_8^8 \cdot 2^0 \cdot 3^4 = 81. \quad \square$$

Задача 1.6.2. Вычислить сумму

$$C_5^0 + 2C_5^1 + 4C_5^2 + 8C_5^3 + 16C_5^4 + 32C_5^5.$$

Решение. Нетрудно догадаться, что это сумма коэффициентов многочлена

* Формулу разложения степени двучлена для натурального показателя знали еще средневековые математики Омар Хайям (1048–1131), Гийас ад-Дин Джемшид ал-Каши (умер около 1430 г.). В Западной Европе до Исаака Ньютона ею пользовался Блез Паскаль (1623–1662). Заслуга Ньютона (1643–1727) в том, что он обобщил эту формулу для любого действительного показателя степени.

$$(x + 2)^5 = C_5^0 x^5 + C_5^1 2x^4 + C_5^2 2^2 x^3 + C_5^3 2^3 x^2 + C_5^4 2^4 x + C_5^5 2^5.$$

Равенство справедливо для любого значения x , поэтому при $x = 1$ получим

$$(1 + 2)^5 = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2 C_5^2 + 2^3 C_5^3 + 2^4 C_5^4 + 2^5 C_5^5.$$

Итак, искомая сумма равна 3^5 , т. е. 243.

1.6.2. Свойства биномиальных коэффициентов

Рассмотрим основные свойства биномиальных коэффициентов.

1°. *Биномиальные коэффициенты членов, равностоящих от концов разложения бинома, равны между собой, т. е.*

$$C_n^k = C_n^{n-k} \text{ (свойство симметрии)}. \quad (1.6.4)$$

Справедливость этого свойства следует из формулы (1.5.3) для вычисления числа сочетаний.

Используя свойство (1.6.4), можно обобщить понятие биномиальных коэффициентов. Поскольку $C_n^k = 0$ при $k > n$, т. е. когда $n - k < 0$, считают, что $C_n^m = 0$ для любых целых $m < 0$.

2°. *Сумма биномиальных коэффициентов всех членов разложения равна 2^n , т. е. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ или*

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n. \quad (1.6.5)$$

Для доказательства достаточно в (1.6.3) положить $x = 1$.

3°. *При $n \neq 0$ сумма биномиальных коэффициентов разложения, стоящих на нечетных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, и равна 2^{n-1} .*

В самом деле, полагая в формуле (1.6.3) $x = -1$, получим: $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$. Чтобы доказать равенство сумм, остается все отрицательные слагаемые перенести в левую часть. Каждая из полученных сумм равна половине суммы 2^n биномиальных коэффициентов, т. е. 2^{n-1} . Используя знак суммы, это свойство можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0. \quad (1.6.6)$$

4°. *При фиксированном $n > 1$ биномиальный коэффициент C_n^k возрастает по k при $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ и убывает при $k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. При $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ коэффициент принимает наибольшее значение*

$$\max_{0 \leq k \leq n} C_n^k = C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.*$$

Поскольку $\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n-k}{k+1}$, то это отношение больше 1 при $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ и меньше 1 при $k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

5°. Для всех $0 \leq i \leq k \leq n$

$$C_n^k C_k^i = C_n^i C_{n-i}^{k-i} = C_n^{k-i} C_{n-k+i}^i \quad (1.6.7)$$

(правило преобразования произведения).

Выразив произведение $C_n^k C_k^i$ через факториалы по формуле (1.5.3), в результате преобразований получим:

$$\begin{aligned} C_n^k C_k^i &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{n!}{i!(n-k)!(k-i)!} = \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!} \left(= \frac{n!}{(k-i)!(n-k+i)!} \cdot \frac{(n-k+i)!}{i!(n-k)!} \right) = \\ &= C_n^i C_{n-i}^{k-i} (= C_n^{k-i} C_{n-k+i}^i). \end{aligned}$$

Примечания. 1. При тождественных преобразованиях биномиальных выражений иногда удобнее использовать другие варианты правила преобразования произведения, полученные из равенства (1.6.7) с помощью свойства симметрии, например $C_n^k C_{n-k}^i = C_n^i C_{n-i}^k = C_n^{k+i} C_{k+i}^k$.

2. Для каждого из подобных соотношений легко составить соответствующую ему задачу о выборах. Так, тождеству $C_n^k C_k^i = C_n^i C_{n-i}^{k-i}$ соответствует задача:

Сколькими способами из n кандидатов можно выбрать k депутатов и среди последних i председателей парламентских комитетов?

Процедура выборов может быть осуществлена двумя способами. Сначала можно C_n^k способами выбрать депутатов, а затем среди них C_k^i способами – i председателей парламентских комитетов. Следовательно, формируемый парламент может быть избран $C_n^k C_k^i$ способами. С другой стороны, можно сначала сразу выбрать председателей комитетов, это можно сделать C_n^i способами. Затем из оставшихся $n-i$ кандидатов довыбрать $k-i$ депутатов, это можно сделать C_{n-i}^{k-i} способами. При таком порядке выборов парламент может быть избран $C_n^i C_{n-i}^{k-i}$ способами.

3. Первое равенство в (1.6.7) при $i=1$ принимает вид $C_n^k C_k^1 = C_n^1 C_{n-1}^{k-1}$ или $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ (см. также задачу 1.5.2). Откуда

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}. \quad (1.6.8)$$

6°. Для всех $k=1, \dots, n$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \text{ (правило суммирования)}. \quad (1.6.9)$$

* $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ – наименьшее целое число, большее или равное n , $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ – наибольшее целое число, большее или равное n (см. § 1.9).

Свойство вновь легко доказать, используя схему выборов. Для этого можно рассмотреть следующую задачу:

В парламенте n депутатов, включая спикера. Сколькими способами можно сформировать парламентскую делегацию в составе k человек для участия в межгосударственной встрече?

При решении надо учесть, что формируемая делегация может как включать спикера, так и не включать.

Приведем еще один способ доказательства комбинаторных тождеств, который более подробно будет рассмотрен в третьей главе. Запишем формулу (1.6.3) для показателя бинома, равного $n - 1$:

$$(1 + x)^{n-1} = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 x + \dots + C_{n-1}^k x^k + \dots + C_{n-1}^{n-1} x^{n-1}.$$

Обе части этого равенства умножим на $1 + x$, тогда

$$(1 + x)^n = (1 + x)^{n-1} (1 + x) = C_{n-1}^0 + (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) x + \dots + (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k) x^k + C_{n-1}^{n-1} x^{n-1}.$$

Сравнивая коэффициенты полученного многочлена и коэффициенты разложения (1.6.3) при одинаковых степенях x , убеждаемся в справедливости доказываемого свойства.

7°. При $k = 0, 1, \dots, \min(m, n)$

$$C_{n+m}^k = C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \dots + C_m^i C_n^{k-i} + \dots + C_m^m C_n^{k-m}$$

(если $m \leq n$).

Для доказательства свойства можно рассмотреть выборы k человек из $n + m$ кандидатов, среди которых n мужчин и m женщин, либо перемножить разложения биномов $(1 + x)^m$, $(1 + x)^n$, а затем полученный результат сравнить с разложением бинома $(1 + x)^{n+m}$. Используя знак суммирования, это свойство, называемое *сверткой Вандермонда*, можно записать в виде

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^m C_m^i C_n^{k-i}. \quad (1.6.10)$$

8°. Для всех $k \leq n$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{i-k} C_n^i C_i^k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = n, \\ 0 & \text{при } k < n. \end{cases} \quad (1.6.11)$$

Действительно, на основании свойства 5° и правила оперирования с сокращенными записями сумм имеем:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{i-k} C_n^i C_i^k = \sum_{i=0}^n (-1)^{i-k} C_n^k C_{n-k}^{i-k} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i-k} C_n^k C_{n-k}^{i-k} +$$

$$+ \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} C_n^k C_{n-k}^{i-k} = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j C_n^k C_{n-k}^j = C_n^k \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j C_{n-k}^j.$$

(Мы учли, что $C_{n-k}^{i-k} = 0$ при $i < k$, и изменили область суммирования: $j = i - k$.) По свойству 3° $\sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j C_{n-k}^j = 0$ при $n \neq k$ и $C_n^n (-1)^0 C_0^0 = 1$ при $n = k$.

Аналогично доказывается, что при $m \geq n$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{i-k} C_{m-i}^{m-n} C_{m-k}^{m-i} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = n, \\ 0 & \text{при } k < n. \end{cases} \quad (1.6.12)$$

Приведем примеры использования рассмотренных свойств и методов их доказательства при доказательстве комбинаторных тождеств.

Задача 1.6.3. Доказать тождество $\sum_{i=0}^n (C_n^i)^2 = C_{2n}^n$.

Решение. 1 способ. Число, стоящее в правой части тождества, является коэффициентом при $(n+1)$ -м члене $T_{n+1} = C_{2n}^n x^n$ разложения бинома $(1+x)^{2n}$. Сумму, стоящую в левой части, можно найти как коэффициент при x^n в произведении разложений $(1+x)^n (x+1)^n$.

2 способ. Воспользуемся сверткой Вандермонда и свойством симметрии биномиальных коэффициентов:

$$C_{2n}^n = C_{n+n}^n = \sum_{i=0}^n C_n^i C_n^{n-i} = \sum_{i=0}^n C_n^i C_n^i = \sum_{i=0}^n (C_n^i)^2.$$

Задача 1.6.4. Доказать тождество задачи 1.5.3 предыдущего параграфа, используя свойства биномиальных коэффициентов.

Решение. Учитывая, что $C_n^n = 1$ для любого n , и применяя правило суммирования (1.6.9), запишем следующие равенства:

$$\begin{aligned} C_{k-1}^{k-1} &= C_k^k, \\ C_k^{k-1} + C_k^k &= C_{k+1}^k, \\ C_{k+1}^{k-1} + C_{k+1}^k &= C_{k+2}^k, \\ &\dots \\ C_{k+(n-k-1)}^{k-1} + C_{k+(n-k-1)}^k &= C_n^k. \end{aligned}$$

Остается сложить эти равенства и привести подобные члены.

1.6.3. Треугольник Паскаля и его обобщения

Вычислим все значения C_n^k для $n = 0, 1, 2, \dots, 7, \dots$ и расположим их треугольником (табл. 1). В вершину треугольника поместим одно число $C_0^0 = 1$, под ним – строку из чисел $C_1^0 = C_1^1 = 1$, а в следующую (третью) строку поместим $C_2^0 = 1, C_2^1 = 2, C_2^2 = 1$ и т. д.

Каждый кратчайший маршрут от A до N содержит одно и то же число кварталов, обозначим это число через n . Если такой маршрут включает k кварталов, пройденных в направлении вниз налево, то в нем $n - k$ кварталов проходится в направлении вниз направо. Так, для зигзагообразной ломаной, соединяющей на рисунке 7 точки A и B , имеем: $n = 9$, $k = 4$, $n - k = 5$.

Из точки A можно единственным способом попасть в самую эту точку – остаться на месте. С перекрестка A существует единственный маршрут на соседний перекресток, расположенный вниз налево и единственный маршрут на соседний перекресток, расположенный вниз направо. Продолжая рассуждения, нетрудно заметить, что число кратчайших маршрутов от перекрестка A до любого перекрестка N можно найти, используя треугольник Паскаля. В нашем случае эти вычисления будут выглядеть так:

				1					
			1		1				
		1		2		1			
	1		3		3		1		
1		4		6		4		1	
	5		10		10		5		1
		15		20		15		6	
			35		35		21		
				70		56			
					126				

Таким образом, число различных кратчайших маршрутов длины n , в которых k кварталов проходится налево вниз, равно C_n^k . Поэтому число различных кратчайших маршрутов между перекрестками A и B равно $C_9^4 = \frac{9!}{4!5!} = 126$. \square

Примечания. 1. Для многих комбинаторных задач можно указать подобные геометрические интерпретации и тем самым сводить их решение к подсчету числа кратчайших путей. Такой метод решения комбинаторных задач часто называют *методом траекторий*. Примеры использования этого метода можно найти в книгах [12], [16], [20].

Заметим также, что между перекрестками и парами чисел k и $n - k$ существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому эти числа можно рассматривать как координаты точки (перекрестка) в системе координат, начало которой совпадает с вершиной треугольника Паскаля (рис. 8).

2. Вместо треугольника Паскаля можно использовать таблицу 2, в которой свойство $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ реализуется в том, что каждый элемент строки равен сумме двух элементов предыдущей строки – стоящего над ним прямо и над ним слева. При этом все элементы нулевого столбца ($k = 0$) равны 1 и $C_n^k = 0$ при $0 \leq n < k$. Для распространения свойства на элементы нулевого столбца введен столбец с номером $k = -1$, все элементы которого положены равными нулю.

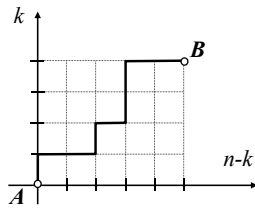


Рис. 8

Для того чтобы характеристическое свойство выполнялось для элементов столбца с номером $k = -1$, добавлен нулевой столбец с номером $k = -2$ и т. д.

Таблица 2

n	k												
	...	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
0	...	0	1										...
1	...	0	1	1									...
2	...	0	1	2	1								...
3	...	0	1	3	3	1			0				...
4	...	0	1	4	6	4	1						...
5	...	0	1	5	10	10	5	1					...
6	...	0	1	6	15	20	15	6	1				...
7	...	0	1	7	21	35	35	21	7	1			...
8	...	0	1	8	28	56	70	56	28	8	1		...
9	...	0	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	...
...

3. Из соображений общности таблицу 2 можно продолжить и вверх, т. е. ввести биномиальные коэффициенты C_n^k для целых отрицательных n . Для $n > 0$ имеем

$$C_{n+k-1}^k = \frac{n(n-1)\dots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \frac{(-n)(-n+1)\dots(-n-k+1)}{k!}.$$

Поэтому естественно принять

$$C_n^k = (-1)^k C_{n+k-1}^k, \quad n > 0. \quad (1.6.13)$$

При этом характеристическое свойство $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ таблицы будет выполняться и для отрицательных n . Действительно, при $n > 0$ имеем

$$\begin{aligned} C_{-(n+1)}^{k-1} + C_{-(n+1)}^k &= (-1)^{k-1} C_{n+k-1}^{k-1} + (-1)^k C_{n+k}^k = \\ &= (-1)^k (C_{n+k}^k - C_{n+k-1}^{k-1}) = (-1)^k C_{n+k-1}^k = C_{-n}^k. \end{aligned}$$

Далее, $C_{-1}^k = (-1)^k C_1^k = (-1)^k$ при $k \geq 0$ и $C_{-1}^k = 0$ при $k < 0$. Следовательно, над нулевой строкой стоит строка, состоящая сначала из нулей, а затем – из чередующихся 1 и -1. Поэтому

$$C_{-1}^{k-1} = C_{-1}^k = (-1)^k (C_k^k - C_{k-1}^{k-1}) = \delta_{0k} = C_0^k,$$

где δ_{0k} – символ Кронекера, что согласуется с таблицей 2.

Для малых значений n и k таблица обобщенных рассмотренным способом биномиальных коэффициентов выглядит так:

Таблица 3

		$k = -1$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	
...
$n = -5$	0	0	1	-5	15	-35	70	-196	...
$n = -4$	0	0	1	-4	10	-20	35	-56	...
$n = -3$	0	0	1	-3	6	-10	15	-21	...
$n = -2$	0	0	1	-2	3	-4	5	-6	...
$n = -1$	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	...
$n = 0$	0	0	1	0	0	0	0	0	...
$n = 1$	0	0	1	1	0	0	0	0	...
$n = 2$	0	0	1	2	1	0	0	0	...
$n = 3$	0	0	1	3	3	1	0	0	...
$n = 4$	0	0	1	4	6	4	1	0	...
$n = 5$	0	0	1	5	10	10	5	1	...
...

Эта таблица называется *обобщенным треугольником Паскаля*.

4. Воспользовавшись формулой (1.6.13), легко доказать *правило обращения верхнего индекса*

$$C_n^k = (-1)^k C_{k-n-1}^k, \quad k - \text{целое.} \quad (1.6.14)$$

1.6.4. Частный случай формулы включений-исключений

При решении перечислительных задач часто используется частный случай формулы (1.2.7) включений и исключений, когда число $N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k})$ элементов, одновременно обладающих свойствами $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$, $k \leq n$, зависит не от самих этих свойств, а от их числа.

В этом случае

$$N(p_1) = \dots = N(p_n),$$

$$N(p_1, p_2) = N(p_1, p_3) = \dots = N(p_{n-1}, p_n),$$

$$N(p_1, p_2, p_3) = N(p_1, p_2, p_4) = \dots = N(p_{n-2}, p_{n-1}, p_n)$$

и т. д., т. е. в каждой из сумм

$$S_1 = N(p_1) + \dots + N(p_n),$$

$$S_2 = N(p_1, p_2) + N(p_1, p_3) + \dots + N(p_{n-1}, p_n),$$

$$S_3 = N(p_1, p_2, p_3) + N(p_1, p_2, p_4) + \dots + N(p_{n-2}, p_{n-1}, p_n)$$

и т. д. все слагаемые равны между собой. Обозначим эти равные слагаемые $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}$ и т. д. соответственно. Индекс k указывает на то, что число $N^{(k)}$ зависит от k из n данных свойств p_1, p_2, \dots, p_n . Эти k свойств из n данных можно выбрать C_n^k способами, поэтому число $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} N(p_{i_1}, \dots, p_{i_k})$ элементов, одновременно обладающих k свойствами, равно $C_n^k N^{(k)}$. Отсюда следует, что имеет место формула

$$N_0 = N + \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k N^{(k)}. \quad (1.6.15)$$

Задача 1.6.6. Сколько целых неотрицательных чисел, меньших, чем миллион, которые содержат в своей записи все нечетные цифры?

Решение. Число N всех целых неотрицательных чисел, меньших, чем миллион, равно 10^6 . Имеется 5 нечетных цифр. Пусть свойства p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 означают, что в записи числа нет цифры 1, 3, 5, 7, 9 соответственно. Число способов, которыми можно выбрать k цифр из этих пяти, равно C_5^k , а количество $N^{(k)}$ чисел, меньших, чем миллион, которые записаны остальными $10 - k$ цифрами, равно $(10 - k)^6$. По формуле (1.6.15) находим, что все нечетные цифры содержат $10^6 - C_5^1 9^6 + C_5^2 8^6 - C_5^3 7^6 + C_5^4 6^6 - C_5^5 5^6 = 5400$ чисел, меньших, чем миллион.

Примечание. Задача достаточно просто решается и без использования формулы (1.6.15). Можно, например, рассуждать следующим образом. Все нечетные цифры могут содержать лишь пятизначные и шестизначные числа. В пятизначном числе все цифры будут различны, и, следовательно, таких чисел $5! = 120$. Шестизначное число может содержать либо одну четную цифру, либо две одинаковые нечетные цифры. Существует $4 \cdot 120 = 480$ чисел с четной цифрой на первом месте. Если четная цифра не стоит на первом месте, то место для нее можно выбрать 5 способами, сама цифра также выбирается 5 способами. Поэтому таких чисел $5 \cdot 5 \cdot 120 = 3000$. В числах с двумя одинаковыми нечетными цифрами повторяющаяся цифра может быть выбрана 5 способами, а места для нее $C_6^2 = 15$ способами. Значит, шестизначных чисел с повторяющейся нечетной цифрой $5 \cdot 15 \cdot 4! = 1800$. Суммируя результаты, имеем: $120 + 480 + 3000 + 1800 = 5400$.

Задача 1.6.7. Доказать, что при $k < n$ справедливо тождество

$$n^k - C_n^1 (n-1)^k + C_n^2 (n-2)^k - \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 1^k = 0 \quad (1.6.16)$$

Решение. Возьмем n -множество $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ и рассмотрим (n, k) -размещения с повторениями из элементов этого множества. Свойство p_i будет означать, что размещение не содержит элемент a_i .

Тогда $N(p_{i_1}, \dots, p_{i_m})$ – число (n, k) -размещений с повторениями, в которые не входят элементы a_{i_1}, \dots, a_{i_m} . Следовательно, в эти размещения входят только остальные $n - m$ элементов, а число таких размещений равно $(n - m)^k$, т. е. $N^{(m)} = (n - m)^k$. Так как m элементов из n данных можно выбрать C_n^m способами, то число всех (n, k) -размещений с повторениями, в которых содержатся только $n - m$ элементов из n данных, равно $C_n^m N^{(m)}$.

Если (n, k) -размещение не обладает ни одним из свойств p_1, \dots, p_n , оно должно содержать все n элементов множества A . Но это невозможно, по условию $k < n$. Поэтому размещений, не обладающих ни одним из свойств p_1, \dots, p_n , не существует, т. е. $N_0 = 0$. Число N всех (n, k) -размещений с повторениями равно n^k . Справедливость тождества (1.6.16) следует из формулы (1.6.15). \square

§ 1.7. Полиномиальная формула

Вводится полиномиальная формула, обобщающая формулу бинома Ньютона, и рассматриваются свойства полиномиальных коэффициентов.

1.7.1. Вывод полиномиальной формулы

Формулу бинома Ньютона и ее вывод легко обобщить для целой неотрицательной степени любого конечного числа слагаемых. Именно, имеет место

Теорема 1.7.1. *Для любого целого неотрицательного n справедлива формула*

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}. \quad (1.7.1)$$

Доказательство. При возведении суммы $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ в n -ю степень ее нужно перемножить n раз:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \dots (x_1 + x_2 + \dots + x_k).$$

В результате умножения и приведения подобных членов получится сумма слагаемых вида

$$Ax_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}, \quad (1.7.2)$$

в которых $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, а множители входят по одному из каждой скобки. Для отыскания коэффициента A нужно подсчитать, сколько членов, подобных одночлену $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$, содержится в

найденной сумме. Не используя показатели степени, запишем множители каждого такого одночлена в порядке их следования в скобках произведения, т. е. в каждом произведении n сомножителей одночлена на i -е место поставим множитель, взятый из i -й скобки (на 1-е место – множитель из первой скобки, на 2-е – из второй и т. д.). Ясно, что каждое такое произведение будет перестановкой n сомножителей с повторениями из k элементов x_1, x_2, \dots, x_k . При этом во всех произведениях, подобных (1.7.2), x_1 повторяется n_1 раз, x_2 – n_2 раз, ..., x_k – n_k раз. Таких перестановок $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$, это и есть величина коэффициента A . Искомая формула получается в результате суммирования по всем неотрицательным целочисленным решениям уравнения $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Полученную формулу называют *полиномиальной*, а коэффициенты в ней – *полиномиальными коэффициентами*. Формула бинора Ньютона является частным случаем полиномиальной формулы. Поэтому для единообразия полиномиальные коэффициенты иногда обозначают $C_n^{n_1 n_2 \dots n_k}$. В этих обозначениях формула (1.7.1) выглядит так:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} C_n^{n_1 n_2 \dots n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}.$$

Для использования полиномиальных разложений при вычислениях и преобразованиях выражений первоначально приходится искать все целочисленные неотрицательные решения уравнения

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n,$$

а это, как правило, достаточно трудоемкое занятие. Нетрудно доказать, что число решений, а значит, *число слагаемых в правой части формулы* (1.7.1), равно $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$. Действительно, каждому решению (n_1, n_2, \dots, n_k) уравнения в целых неотрицательных числах можно поставить во взаимно-однозначное соответствие кортеж длиной $n + k - 1$, составленный из n единиц и $k - 1$ нулей, в начале которого стоят n_1 единиц, затем 0, следом n_2 единиц, снова 0 и т. д., до n_k единиц в конце кортежа. Число таких кортежей равно

$$P_{n+k-1}(n, k-1) = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = C_{n+k-1}^k.$$

Задача 1.7.1. В разложении $(x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ найти коэффициенты A и B при одночленах $Ax_1^2 x_2^3 x_3^5$ и $Bx_1^3 x_2^5 x_3^2$.

Решение. Из полиномиальной формулы имеем:

$$A = P_{10}(2,3,5) = \frac{10!}{2!3!5!} = 2520, B = P_{10}(3,5,2) = \frac{10!}{3!5!2!} = 2520. \square$$

Задача 1.7.2. Найти коэффициент при x^7 в многочлене

$$(1 - x + x^2)^5.$$

Решение. Согласно формуле (1.7.1)

$$\begin{aligned} (1 - x + x^2)^5 &= \sum_{n_1+n_2+n_3=5} \frac{5!}{n_1!n_2!n_3!} 1^{n_1}(-x)^{n_2}(x^2)^{n_3} = \\ &= \sum_{n_1+n_2+n_3=5} \frac{(-1)^{n_2}5!}{n_1!n_2!n_3!} x^{n_2+2n_3}. \end{aligned}$$

Чтобы найти коэффициент при x^7 , необходимо решить систему

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 = 5, \\ n_2 + 2n_3 = 7. \end{cases}$$

Из общего решения $n_1 = -2 + n_3$, $n_2 = 7 - 2n_3$ системы следует, что n_3 может принимать только значения 2 и 3. В первом случае $n_1 = 0$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$, во втором $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 3$. Поэтому коэффициент при x^7 равен $\frac{(-1)^3 5!}{0!3!2!} + \frac{(-1)^1 5!}{1!1!3!} = -10 - 20 = -30$.

1.7.2. Свойства полиномиальных коэффициентов

Вернемся к задаче 1.7.1; тот факт, что коэффициенты A и B при одночленах $Ax_1^2x_2^3x_3^5$ и $Bx_1^3x_2^5x_3^2$ оказались одинаковыми, неслучаен. Показатели n_1, n_2, n_3 степеней любого члена разложения представляют собой разбиение числа 10 на 3 неотрицательных слагаемых. Если показатели m_1, m_2, m_3 степеней получаются перестановкой показателей n_1, n_2, n_3 , то коэффициенты $P_{10}(m_1, m_2, m_3)$, $P_{10}(n_1, n_2, n_3)$ у соответствующих членов разложения будут равны. В общем виде отмеченное свойство формулируется следующим образом.

1°. Если показатели m_1, m_2, \dots, m_k степеней x_i , $i = 1, \dots, k$ в правой части формулы (1.7.1) получаются перестановкой показателей n_1, n_2, \dots, n_k , то $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Это свойство обобщает свойство симметрии биномиальных коэффициентов. Приведем еще два примера подобных обобщений.

2°. Сумма полиномиальных коэффициентов равна k^n :

$$\sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_k!} = k^n.$$

(порядок слагаемых в сумме $n_1 + \dots + n_k = n$ учитывается).

Для доказательства этого свойства в формуле (1.7.1.) следует положить $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 1$.

$$3^\circ. P_{n+1}(n_1, n_2, \dots, n_k) = P_n(n_1 - 1, n_2, \dots, n_k) + \\ + P_n(n_1, n_2 - 1, \dots, n_k) + \dots + P_n(n_1, n_2, \dots, n_k - 1).$$

Для доказательства этого обобщения правила суммирования биномиальных коэффициентов обе части формулы (1.7.1) нужно умножить на $x_1 + x_2 + \dots + x_k$. Затем в левой части выполнить разложение по формуле (1.7.1), а в правой – умножение и приведение подобных членов. Для завершения доказательства остается сравнить коэффициенты при одинаковых слагаемых в левой и правой частях полученного равенства.

§ 1.8. Формулы обращения

Вводится понятие взаимно обратных комбинаторных соотношений и рассматриваются некоторые его приложения.

1.8.1. Теорема обращения

Простейший пример взаимно обратных соотношений дает пара биномиальных равенств

$$y^n = (1 + x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k, \quad x^n = (y - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k y^k, \quad (1.8.1)$$

связывающих степени x и y . Если имеет место одно из этих равенств, то имеет место и другое.

Подставив x^n из второй формулы в первую, в результате тождественных преобразований получим равенство

$$y^n = \sum_{i=0}^k y^i \sum_{k=0}^n (-1)^{k-i} C_n^k C_k^i,$$

из которого следуют соотношения, связывающие сами биномиальные коэффициенты: $\sum_{k=0}^n (-1)^{k-i} C_n^k C_k^i = \delta_{ni}$, где δ_{ni} – символ Кронекера. Учитывая, что $C_k^i = 0$ при $i > k$, их можно переписать в виде $\sum_{k=i}^n (-1)^{k-i} C_n^k C_k^i = \delta_{ni}$.

В ряде случаев взаимно обратные соотношения позволяют упростить вычисление комбинаторных чисел и доказательство комбинаторных тождеств. Используемые при этом рассуждения основаны на следующей общей теореме.

Теорема 1.8.1 (теорема обращения). Пусть имеется два семейства комбинаторных чисел $\{a(m, n)\}$, $\{b(m, n)\}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, \dots, m$). Если для любых m и $n \leq m$ имеют место соотношения

$$a(m, n) = \sum_{k=0}^m \lambda_{nk}(m)b(m, k) \quad (1.8.2)$$

и при $n \leq m$, $i \leq m$ существуют числа $\mu_{ni}(m)$ такие, что

$$\sum_{i=0}^m \mu_{ni}(m)\lambda_{ik}(m) = \delta_{nk}, \quad (1.8.3)$$

где δ_{nk} – символ Кронекера, то

$$b(m, n) = \sum_{k=0}^m \mu_{nk}(m)a(m, k). \quad (1.8.4)$$

Доказательство. Пусть имеют место равенства (1.8.2). Согласно условиям (1.8.3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \mu_{nk}(m)a(m, k) &= \sum_{k=0}^m \left(\sum_{i=0}^m \lambda_{ki}(m)b(m, i) \right) \mu_{nk}(m) = \\ &= \sum_{i=0}^m \left(\sum_{k=0}^m \mu_{nk}(m)\lambda_{ki}(m) \right) b(m, i) = \sum_{i=0}^m \delta_{ni}b(m, i) = b(m, n). \end{aligned}$$

Таким образом, равенства (1.8.4) истинны.

Точно так же, имея верные равенства (1.8.4), на основании условий (1.8.3) можно доказать справедливость соотношений (1.8.2). ■

Формула (1.8.4) называется *формулой обращения* для формулы (1.8.2), и наоборот. Условия (1.8.3), которые служат источником получения этих взаимно обратных соотношений, называются *ортогональными соотношениями*. Из теоремы 1.8.1 следует, что если справедливо одно из тождеств, образующих пару взаимно обратных соотношений, то будет справедливо и второе тождество, образующее с ним эту пару. Поэтому в тех случаях, когда требуется установить справедливость взаимно обратных тождеств, появляется возможность выбора, может быть, более простого доказательства одного из этих тождеств.

Если при фиксированном m рассмотреть матрицы $M = \|\mu_{ni}\|$ и $L = \|\lambda_{ik}\|$, то соотношения (1.8.3) означают, что эти матрицы являются взаимно обратными, т. е. $L = M^{-1}$ и $ML = LM = E$, где E – единичная матрица. Пусть M' – матрица, полученная транспонированием матрицы M (заменой строк матрицы M столбцами с сохранением порядка их следования). Известно, что

$$(M')^{-1} = (M^{-1})'. \quad (1.8.5)$$

Это равенство позволяет получать из (1.8.3) новые ортогональные соотношения.

1.8.2. Биномиальное обращение

Наиболее часто используются взаимно обратные формулы, составленные на основе ортогональных соотношений, связывающих биномиальные коэффициенты.

Вернемся к ортогональным соотношениям, приведенным в начале предыдущего пункта:

$$\sum_{k=i}^n (-1)^{k-i} C_n^k C_k^i = \delta_{ni}. \quad (1.8.6)$$

Рассматривая матрицы $M = \|C_n^k\|$, $\Lambda = \|(-1)^{i-k} C_i^k\|$ и транспонированные матрицы $M' = \|C_k^n\|$, $\Lambda' = \|(-1)^{i-k} C_k^i\|$, на основании (1.8.5) можно получить ортогональные соотношения

$$\sum_{i=n}^m (-1)^{i-k} C_i^n C_k^i = \delta_{nk}. \quad (1.8.7)$$

где $m = n, n+1, \dots$

Пусть $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ – числовые последовательности. Используя ортогональные соотношения (1.8.6), (1.8.7), легко установить следующие следствия теоремы 1.8.1.

Следствие 1. Если $a_n = \sum_{k=0}^n C_n^k b_k$, то $b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k a_k$.

Следствие 2. Если $a_n = \sum_{k=n}^m C_n^k b_k$, где $n \leq m$, то $b_n = \sum_{k=n}^m (-1)^{k-n} C_k^n a_k$.

Для доказательства первого следствия достаточно положить $\lambda_{nk}(m) = C_n^k$, $\mu_{nk}(m) = (-1)^{n-k} C_n^k$, а для доказательства второго – $\lambda_{nk}(m) = C_k^n$, $\mu_{nk}(m) = (-1)^{k-n} C_k^n$.

При решении задач приходится применять пары взаимно обратных соотношений, записанные в иной форме. Для получения новых соотношений используются свойства биномиальных коэффициентов и преобразования области суммирования. Так, на основании свойства симметрии (1.6.6) из взаимно обратных соотношений следствия 1, изменяя область суммирования, приходим к взаимно обратным соотношениям

$$a_n = \sum_{k=0}^n C_n^k b_{n-k}, \quad b_n = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_n^k a_{n-k}. \quad (1.8.8)$$

Из следствия 2 аналогично получаем соотношения

$$a_n = \sum_{k=0}^n C_{m-k}^{m-n} b_k, \quad b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{k-n} C_{m-k}^{m-n} a_k. \quad (1.8.9)$$

Учитывая, что $(-1)^{k-n} = (-1)^{k+n}$, во взаимно обратных соотношениях следствий 1, 2 и в (1.8.9) сделаем соответствующую замену.

Теперь с помощью подстановки $b_k = (-1)^k B_k$ можно переписать взаимно обратные соотношения так, чтобы в обоих содержался знакопередающийся множитель. Например, таким образом из следствия 1 вытекают соотношения

$$a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k B_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k a_k. \quad (1.8.10)$$

Из этого же следствия и равенства $\delta_{nk} = \delta_{n+m, k+m}$ можно получить соотношение

$$a_n = \sum_{k=0}^n C_{n+m}^{k+m} b_k, \quad b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_{n+m}^{k+m} a_k. \quad (1.8.11)$$

Приведем примеры применения биномиальных ортогональных соотношений и следствий теоремы обращения.

Задача 1.8.1. Доказать, что для любого $n > 1$ справедливо тождество $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} k C_n^k = 0$.

Решение. Учитывая, что $C_n^1 = n$ для $n \geq 1$, перепишем тождество в виде $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_n^k C_k^1 = 0$.

Согласно (1.8.6) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_n^k C_k^1 = \delta_{n1}$. Так как $\delta_{n1} = 0$ при $n \neq 1$, то тождество истинно. \square

Задача 1.8.2. Доказать справедливость соотношений

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} C_n^k, \quad \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_n^k H_k, \quad (1.8.12)$$

где $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $n=1, 2, \dots$.

Решение. Используя правило суммирования и свойство $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$ биномиальных коэффициентов, преобразуем правую часть первого соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} C_{n-1}^k + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} C_{n-1}^{k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} C_{n-1}^k - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} C_{n-1}^{k-1} = H_{n-1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k = \\ &= H_{n-1} + \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{n} = H_n. \end{aligned}$$

На заключительном этапе преобразований учтено, что из свойства (1.6.8) следует $C_n^0 + \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k = 0$, а значит, $\sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k = -1$. Таким образом, первое соотношение доказано. Сравнивая соотношения задачи с соотношениями (1.8.10), видим, что они образуют пару

* Числа H_n называются *гармоническими числами*. Каждый член последовательности $\left(\frac{1}{k}\right)$, начиная со второго, равен среднему гармоническому двух соседних.

взаимно обратных соотношений. Поэтому второе соотношение также справедливо.

Задача 1.8.3. Пусть элементы некоторого конечного множества обладают либо не обладают свойствами p_1, \dots, p_n ; $N(n, k)$ – число элементов, обладающих в точности k свойствами из n свойств p_1, \dots, p_n . Доказать, что

$$N(n, k) = \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} C_i^k S_i, \quad S_k = \sum_{i=k}^n C_i^k N(n, i), \quad (1.8.13)$$

где S_k вычисляются по формуле (1.2.7).

Решение. При $k \leq i \leq n$ элементы, обладающие ровно i свойствами, обладают и k свойствами. Эти k свойств из i можно выбрать C_i^k способами. Поэтому вторая формула очевидна. Справедливость первой формулы вытекает из следствия 2 теоремы обращения. □

§ 1.9. Специальные целочисленные функции

Вводятся теоретико-числовые функции, которые широко используются в комбинаторике и ее приложениях.

1.9.1. Целочисленные округления

К числу наиболее известных целочисленных функций, заданных на множестве действительных чисел \mathbf{R} , относится функция $[x]$ – *антье* или *целая часть* x . Она определяется как наибольшее целое число, не превосходящее x : если $n \leq x < n + 1$, $n \in \mathbf{Z}$, то $[x] = n$. Например,

$$[36,7] = 36, \quad [-0,5] = -1, \quad [5] = 5, \quad [-5] = -5.$$

В 60-х годах прошлого века К. Ю. Айверсон ввел для этой функции новое обозначение $\lfloor x \rfloor$, а наименьшее целое число, большее или равное x , предложил обозначать $\lceil x \rceil$. Эти функции получили названия «пол» (*нижнее округление*) x и «потолок» (*верхнее округление*) x соответственно. Таким образом,

$$\lfloor 36,7 \rfloor = 36, \quad \lfloor -0,5 \rfloor = -1, \quad \lfloor 5 \rfloor = 5, \quad \lfloor -5 \rfloor = -5,$$

$$\lceil 36,7 \rceil = 37, \quad \lceil -0,5 \rceil = 0, \quad \lceil 5 \rceil = 5, \quad \lceil -5 \rceil = -5.$$

В задачах, где приходится одновременно рассматривать как нижние, так и верхние округления, использование функций $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$ дает возможность более кратко записывать математические выражения.

Очевидны следующие свойства:

1°. $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ тогда и только тогда, когда x – целое число.

2°. $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ тогда и только тогда, когда x не является целым числом.

$$3^\circ. \lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil.$$

$$4^\circ. x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1.$$

5°. Целочисленное слагаемое можно вносить в (выносить за) скобки пола (потолка): $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$, $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$, n – целое.

Теорема 1.9.1. Количество натуральных чисел, кратных m и не превосходящих n , равно $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$.

Доказательство. Пусть n и m – натуральные числа. Число n можно единственным образом представить в виде $n = mq + r$, где $0 \leq r < m$. Это означает, что имеется q чисел $m, 2m, \dots, qm$, которые кратны m и не превосходят n ; при этом $\frac{n}{m} = q + \frac{r}{m}$, где $0 \leq \frac{r}{m} < 1$.

Следовательно, $q = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$. ■

Задача 1.9.1. Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на 2, ни на 5, ни на 9?

Решение. Воспользуемся только что доказанной теоремой и формулой включений-исключений. Искомое число

$$\begin{aligned} m &= 10000 - \left(\left\lfloor \frac{10000}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{9} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{10000}{2 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{2 \cdot 9} \right\rfloor + \right. \\ &+ \left. \left\lfloor \frac{10000}{5 \cdot 9} \right\rfloor \right) - \left\lfloor \frac{10000}{2 \cdot 5 \cdot 9} \right\rfloor = 10000 - (5000 + 2000 + 1111) + \\ &+ (1000 + 555 + 222) - 111 = 3555. \quad \square \end{aligned}$$

Натуральное число $n > 1$ либо является простым, либо его можно представить в виде произведения простых чисел. Среди простых множителей в таком произведении могут быть одинаковые, поэтому его обычно записывают в виде

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}, \quad (1.9.1)$$

где числа p_1, p_2, \dots, p_m расположены в порядке их возрастания. Такое представление числа n является единственным и называется его каноническим разложением.

Теорема 1.9.2. Показатель t , с которым простое число p входит в каноническое разложение числа $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, равен сумме

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor, \quad (1.9.2)$$

где показатель k последнего слагаемого определяется условиями $p^k \leq n < p^{k+1}$.

Доказательство. Согласно предыдущей теореме среди чисел $1, 2, \dots, n$ имеется $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ чисел, кратных p , $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ – кратных p^2 , \dots , $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ – кратных p^k ($p^k \leq n < p^{k+1}$, поэтому $\left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor = 0$). Отсюда следует, что количество чисел, кратных p , но не кратных p^2 , равно $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$, количество чисел, кратных p^2 , но не кратных p^3 , равно $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor$ и т. д.

Каждое из чисел $1, 2, \dots, n$, кратное p , но не кратное p^2 , дает в каноническое разложение числа $n!$ один простой множитель, равный p . Числа, кратные p^2 , но не кратные p^3 , дают два множителя, равных p^2 , и т. д. Следовательно, количество всех простых множителей, равных p , в каноническом разложении числа $n!$ равно сумме

$$m = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + 2 \left(\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor \right) + \dots + k \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \right).$$

Искомый показатель получим, если раскроем в этой сумме скобки и приведем подобные члены. ■

Задача 1.9.2. Найти степень, в которой число 5 входит в каноническое разложение числа 360!

Решение. Имеем: $\left\lfloor \frac{360}{5} \right\rfloor = 72$, $\left\lfloor \frac{360}{25} \right\rfloor = 14$, $\left\lfloor \frac{360}{125} \right\rfloor = 2$, $360 < 5^4$. Поэтому число 5 входит в каноническое разложение 360! в степени $m = 72 + 14 + 2 = 88$.

Примечание. С помощью функции $[x]$ на множестве действительных чисел \mathbf{R} вводят бинарную алгебраическую операцию $\text{mod}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, которая упорядоченной паре (x, y) ставит в соответствие число

$$x \text{ mod } y = \begin{cases} x - y \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor, & \text{если } y \neq 0, \\ x, & \text{если } y = 0. \end{cases} \quad (1.9.3)$$

Число $x \text{ mod } y$ называют *остатком* от деления x на y .

Когда x и y – целые числа, $x \text{ mod } y$ – обычный остаток от деления x на y . Например, $7 \text{ mod } 4 = 3$, $-3 \text{ mod } 5 = 2$, $12 \text{ mod } 3 = 0$. Очевидно, что для целых чисел $x \text{ mod } y = 0$ тогда и только тогда, когда x делится на y .

Из определения операции mod следует, что:

– $c(x \text{ mod } y) = (cx) \text{ mod } (cy)$ для любого $c \in \mathbf{R}$;

– если $y \neq 0$, то $0 \leq \frac{x \text{ mod } y}{y} < 1$ ($0 \leq \frac{x}{y} - \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor < 1$);

– $0 \leq x \text{ mod } y < y$ при $y > 0$ и $y < x \text{ mod } y \leq 0$ при $y < 0$;

– $x = [x] + x \text{ mod } 1$, т. е. величина $x \text{ mod } 1$ – дробная часть x .

Заметим, что в теории чисел сокращение «mod» употребляется для обозначения отношения сравнимости на множестве целых чисел. Там запись $a \equiv b \pmod{m}$, которая читается « a сравнимо с b по модулю m », означает, что разность $a - b$ делится на m . В этом случае $a \text{ mod } m = b \text{ mod } m$.

1.9.2. Число и сумма натуральных делителей. Функция Эйлера*

Рассматриваемые в этом пункте функции $\tau(n)$ – число всех натуральных делителей числа n , $\sigma(n)$ – их сумма и функция Эйлера $\varphi(n)$ определены на множестве \mathbf{N} натуральных чисел.

Теорема 1.9.3. Если число n имеет каноническое разложение (1.9.1), то число его натуральных делителей равно

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^m (k_i + 1). \quad (1.9.4)$$

Доказательство. Любой делитель d числа n имеет вид

$$d = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_m^{i_m},$$

где $0 \leq i_1 \leq k_1$, $0 \leq i_2 \leq k_2$, ..., $0 \leq i_m \leq k_m$. Каждому такому делителю соответствует одна и только одна последовательность (i_1, i_2, \dots, i_m) показателей степеней множителей p_1, p_2, \dots, p_m . Первый показатель может быть выбран $k_1 + 1$ способом, второй – $k_2 + 1$ способом и т. д., последний – $k_m + 1$ способом. По правилу произведения число последовательностей, а значит, и число делителей, равно $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_m + 1)$.

Теорема 1.9.4. Если число n имеет каноническое разложение (1.9.1), то сумма всех его натуральных делителей равна

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^m \frac{p_i^{k_i+1} - 1}{p_i - 1}. \quad (1.9.5)$$

Доказательство. Составим произведение

$$(1 + p_1 + \dots + p_1^{k_1})(1 + p_2 + \dots + p_2^{k_2}) \dots (1 + p_m + \dots + p_m^{k_m}).$$

Если в произведении раскрыть скобки, то получим сумму чисел вида $p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_m^{i_m}$, у любого из которых $0 \leq i_1 \leq k_1$, $0 \leq i_2 \leq k_2$, ..., $0 \leq i_m \leq k_m$. Такие числа являются делителями числа n , при этом в указанную сумму будут входить все делители этого числа, причем каждый из них ровно один раз. Поэтому составленное произведение равно $\sigma(n)$. Для того чтобы привести произведение к виду (1.9.5), достаточно заметить, что каждая из сумм $1 + p_i + \dots + p_i^{k_i}$, $i = 1, \dots, m$ является суммой геометрической прогрессии со знаменателем p_i .

* Леонард Эйлер (1707–1783) – выдающийся математик и механик. В 1727–1741 г. и с 1766 г. до конца жизни жил и работал в Петербурге; был членом многих европейских академий наук, в том числе Петербургской АН.

Функция Эйлера $\varphi(n)$ определяет число натуральных делителей числа n , которые не превосходят n и взаимно просты с n .

Теорема 1.9.5. Если число n имеет каноническое разложение (1.9.1), то

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_i}\right). \quad (1.9.6)$$

Доказательство. Согласно теореме 1.9.1 количество натуральных чисел, не превосходящих n и делящихся на p_i , равно $\frac{n}{p_i}$; количество натуральных чисел, не превосходящих n и делящихся на произведение $p_i p_j$, равно $\frac{n}{p_i p_j}$ и т. д. Поэтому число $\varphi(n)$ можно найти по формуле включений и исключений:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n - \sum_{i=0}^m \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{n}{p_i p_j} - \dots + (-1)^m \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_m} = \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right). \end{aligned}$$

Задача 1.9.4. Для числа 360 вычислить: а) число всех натуральных делителей, б) их сумму, в) функцию Эйлера.

Решение. Найдя каноническое разложение $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, последовательно вычисляем:

$$\text{а) } \tau(360) = (3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24;$$

$$\text{б) } \sigma(360) = \frac{2^4-1}{2-1} \cdot \frac{3^3-1}{3-1} \cdot \frac{5^2-1}{5-1} = 15 \cdot 13 \cdot 6 = 1170;$$

$$\text{в) } \varphi(360) = 360 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 96. \quad \square$$

Функция $f(n)$, определенная на множестве натуральных чисел, называется *мультипликативной*, если

$$1) f(1) = 1;$$

$$2) f(mn) = f(m)f(n) \text{ для любых взаимно простых } m \text{ и } n.$$

Используя это определение, докажите, что $\tau(n)$, $\sigma(n)$ и $\varphi(n)$ – мультипликативные функции.

1.9.3. Функция Мёбиуса*

Эта функция натурального аргумента n обозначается $\mu(n)$ и определяется условиями:

* Август Фердинанд Мёбиус (1790–1868) – немецкий математик. Основные труды – по геометрии. Функцию $\mu(n)$ ввел в 1832 г.

- 1) $\mu(1) = 1$;
- 2) $\mu(n) = (-1)^m$, если каноническое разложение числа n имеет вид $n = p_1 p_2 \dots p_m$ (все p_i различны);
- 3) $\mu(n) = 0$, если в каноническом разложении (1.9.1) числа n хотя бы один показатель k_i больше единицы.

Например,

$$\mu(30) = \mu(2 \cdot 3 \cdot 5) = (-1)^3 = -1, \mu(72) = \mu(2^3 3^2) = 0.$$

Теорема 1.9.6. *Функция $\mu(n)$ мультипликативная; причем $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ для любого $n > 1$. (Запись $d|n$ означает, что суммирование происходит по всем натуральным делителям d числа n .)*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения требуется установить, что для любых взаимно простых натуральных чисел a и b имеет место равенство $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$. При $a = 1$ либо $b = 1$ это равенство выполняется. Если в каноническое разложение хотя бы одного из чисел a и b простой делитель входит в степени, большей 1, то $\mu(ab) = 0$ и равенство также имеет место. Пусть $a = p_1 \dots p_k$, $b = q_1 \dots q_m$ – канонические разложения. Поскольку a и b взаимно просты, в этих разложениях нет одинаковых множителей. Тогда $ab = p_1 \dots p_k q_1 \dots q_m$ и по определению функции Мебиуса

$$\mu(ab) = (-1)^{k+m} = (-1)^k (-1)^m = \mu(a)\mu(b).$$

Докажем второе утверждение. Пусть $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$. В сумме $\sum_{d|n} \mu(d)$ отличными от нуля будут лишь те делители числа n , которые содержат первые степени простых чисел из канонического разложения; согласно определению функции Мебиуса остальные слагаемые обращаются в нуль, т. е.

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \sum_{i=0}^m \mu(p_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \mu(p_i p_j) + \dots + \mu(p_1 p_2 \dots p_m).$$

Из m простых чисел p_1, \dots, p_m выбрать k можно C_m^k способами. Поэтому

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 - C_m^1 + C_m^2 - \dots + (-1)^m C_m^m = (1 - 1)^m = 0.$$

Теорема 1.9.7. *Пусть $f(n)$ – произвольная функция натурального аргумента. Тогда эквивалентны следующие соотношения (формулы обращения Мебиуса):*

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d), \quad f(n) = \sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d). \quad (1.9.7)$$

Доказательство. Представим число n в канонической форме: $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$. Всякий делитель d числа n имеет вид $p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_m^{l_m}$,

где $0 \leq l_i \leq k_i$, $1 \leq i \leq m$. Поэтому, используя первое соотношение и правила суммирования, правую часть второго соотношения можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d) &= \sum_{0 \leq l_i \leq k_i} g(p_1^{k_1-l_1} p_2^{k_2-l_2} \dots p_m^{k_m-l_m}) \mu(p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_m^{l_m}) = \\ &= \sum_{0 \leq l_i \leq k_i} \left(\mu(p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_m^{l_m}) \sum_{0 \leq s_i \leq k_i - l_i} f(p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_m^{s_m}) \right) = \\ &= \sum_{0 \leq s_i \leq k_i} \left(f(p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_m^{s_m}) \sum_{0 \leq l_i \leq k_i - s_i} \mu(p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_m^{l_m}) \right). \end{aligned}$$

Для всех $0 \leq s_i \leq k_i$ числа $p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_m^{l_m}$ ($0 \leq l_i \leq k_i - s_i$, $1 \leq i \leq m$) являются делителями числа $s = p_1^{k_1-s_1} p_2^{k_2-s_2} \dots p_m^{k_m-s_m}$. Если хотя бы одна из разностей $k_i - s_i > 0$, то в силу предыдущей теоремы $\sum_{d|s} \mu(d) = 0$. Поэтому в последней двойной сумме отличными от нуля являются лишь те слагаемые, которые получаются при $k_i - s_i = 0$, т. е. при $k_i = s_i$. Отсюда следует, что эта сумма равна $f(p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_m^{s_m}) \cdot \mu(1) = f(n)$.

Обратное утверждение доказывается аналогично. ■

§ 1.10. Отображения и подстановки конечных множеств

Находится число произвольных, инъективных и сюръективных отображений одного конечного множества в другое конечное множество, а также число подстановок конечного множества: 1) с заданной цикловой структурой; 2) не имеющих инвариантных элементов, 3) имеющих заданное число инвариантных элементов.

1.10.1. Число отображений конечных множеств

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ – конечные множества, B^A – множество всех отображений (функций) A в B . Всякое отображение $f \in B^A$ можно интерпретировать как раскладку m различных предметов по n различным ящикам. В общем случае предполагается, что в каждый ящик можно класть любое количество имеющихся пред-

метов и допускается наличие пустых ящиков. В раскладках, соответствующих инъективным отображениям, в ящик разрешается класть не более одного предмета, а в случае сюръективных отображений не должно быть пустых ящиков. На основании сказанного можно сформулировать и доказать три следующие теоремы.

Теорема 1.10.1. Пусть $|A| = m$, $|B| = n$. Тогда число $|B^A|$ всех отображений A в B равно

$$|B|^{|A|} = n^m. \quad (1.10.1)$$

Доказательство. Каждое отображение $f \in B^A$ однозначно задается кортежем $(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m))$ длиной m . Поскольку образом $f(a_i)$ элемента a_i может быть любой из n элементов b_1, \dots, b_n (предмет можно класть в любой ящик), такой кортеж является размещением из n элементов по m с повторениями. Так как соответствие между отображениями A в B и указанными размещениями является взаимно-однозначным, то $|B^A| = n^m = |B|^{|A|}$.

Теорема 1.10.2. Пусть $|A| = m$, $|B| = n$. Тогда число инъекций A в B равно $(n)_m = A_n^m$.

Доказательство. По определению инъекции в кортеже $(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m))$, задающем инъекцию A в B , не может быть одинаковых членов (в ящик разрешается класть не более одного предмета). Стало быть, такой кортеж является (n, m) -размещением без повторений. Следовательно, число инъекций A в B равно A_n^m .

Теорема 1.10.3. Пусть $|A| = m$, $|B| = n$. Число $N(m, n)$ сюръекций A на B равно

$$N(m, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (n-k)^m. \quad (1.10.2)$$

Доказательство. Число $N(m, n)$ можно найти как число N_0 в формуле (1.6.15), являющейся следствием формулы включений-исключений. Пусть $N^{(k)}$ – число отображений A в B , для которых k элементов b_{i_1}, \dots, b_{i_k} из B не имеют прообраза в A (k ящиков b_{i_1}, \dots, b_{i_k} пустые, а m данных предметов произвольным образом раскладываются по остальным $n - k$ ящикам). По теореме 1.10.1 $N^{(k)} = (n - k)^m$, при этом k элементов b_i из n множества B можно выбрать C_n^k способами. Поэтому число всех отображений A в B , в которых k элементов из B не имеют прообраза в A , равно $S_k = C_n^k (n - k)^m$. В силу (1.6.15) число всех сюръекций A на B вычисляется по формуле (1.10.2).

Очевидно, что $N(0, m) = 0$ при $m \geq 1$. Из соображений общности удобно считать $N(0, 0) = 1$.

Примечания. 1. Как отмечалось, инъекция A в B существует, если $m \leq n$ (число ящиков не меньше числа предметов). Сюръективное отображение A на B существует, если $m \geq n$ (число предметов не меньше числа ящиков). Если существует биекция $f: A \rightarrow B$, то множества A и B имеют одинаковые мощности: $m = n$.

2. Пусть $f: A \rightarrow B$ – сюръекция. Обозначим через A_{b_i} множество всех прообразов элемента b_i . Семейство подмножеств $\{A_{b_i} | b_i \in B\}$ образует разбиение $\text{Ker} f$ множества A – ядро отображения f . Число сюръекций $N(m, n)$ равно числу упорядоченных разбиений m -множества на n непересекающихся подмножеств.

Для любого конечного множества A множества инъекций, сюръекций и биекций $f: A \rightarrow A$ совпадают. Поэтому из теорем 1.10.2, 1.10.3 вытекают:

Следствие 1. Число биекций n -множества A на себя равно $A_n^n = n!$.

Следствие 2. $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (n-k)^n = n!$.

Задача 1.10.1. В анкете пять вопросов, на каждый из которых нужно ответить либо «да», либо «нет». Найти число возможных вариантов заполнения анкеты.

Решение. Заполнение анкеты можно рассматривать как произвольное отображение множества A вопросов в двухэлементное множество B ответов. Поскольку $|A| = 5$, $|B| = 2$, то $|B^A| = 2^5 = 32$. \square

Задача 1.10.2. Имеется 3 различные открытки и 4 различные конверта. Сколькими способами можно разложить открытки по конвертам, если в конверт разрешается класть не более одной открытки?

Решение. Раскладку открыток по конвертам можно рассматривать как инъективное отображение множества A открыток во множество B конвертов. По условию $|A| = 3$, $|B| = 4$, поэтому искомое число способов равно $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. \square

Задача 1.10.3. Имеется 4 различные открытки и 3 различные конверта. Сколькими способами можно разложить открытки по конвертам так, чтобы не было пустых конвертов?

Решение. Раскладку можно рассматривать как сюръективное отображение множества A открыток на множество B конвертов. Поскольку $|A| = 4$, $|B| = 3$, то

$$N(4, 3) = \sum_{k=0}^3 (-1)^k C_3^k (3-k)^4 = 3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 1^4 = 34. \quad \square$$

1.10.2. Перечисление подстановок

Подстановками называются биекции конечного множества на себя. Рассмотрим множество подстановок n -множества A . Пусть элементы множества A пронумерованы n первыми числами натурального ряда, т. е. $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Тем самым установлена биекция множества A на множество $I_n = \{1, \dots, n\}$. Это позволяет изучать комбинаторные свойства подстановок любого n -множества на примере множества I_n . Подстановки множества I_n называют *подстановками n -й степени*, множество всех подстановками n -й степени обозначают S_n .

Каждую подстановку $s \in S_n$ можно задать таблицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}, \quad (1.10.3)$$

в которой под элементом k указывается его образ $i_k = s(k)$. Порядок записи чисел в первой строке таблицы является несущественным, его можно произвольно менять. При этом, естественно, переставляются и соответствующие элементы во второй строке. Поэтому всякая подстановка n -й степени может быть записана $n!$ способами.

Тождественное отображение множества I_n на себя, т. е. отображение, при котором $s(k) = k$ для любого $k \in I_n$, определяется подстановкой $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$; ее называют *тождественной подстановкой*.

Для любой подстановки (1.10.3) существует *обратная* ей подстановка $s^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s^{-1}(1) & s^{-1}(2) & \dots & s^{-1}(n) \end{pmatrix}$.

Если условиться элементы верхней строки подстановки всегда записывать в порядке их возрастания, то подстановку можно однозначно задавать одной нижней строкой. Так как существует $n!$ различных перестановок чисел $1, 2, \dots, n$ во второй строке, то множество S_n подстановок n -й степени содержит $n!$ подстановок.

На множестве S_n определено умножение подстановок. *Произведением st* подстановок s и t называется их последовательное выполнение, т. е. $st(i) = t(s(i))$ для всех $i \in I_n$.

Подстановка n -й степени называется *циклической*, или *циклом*, если она элемент i_1 переводит в элемент i_2 , i_2 — в i_3 и т. д., i_{k-1} — в i_k , наконец, i_k — в i_1 , а остальные элементы оставляет на месте (т. е. переводит в себя). Такая подстановка обозначается $(i_1 i_2 \dots i_k)$, при этом число $k \leq n$ называется *длиной цикла*. Например, подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (135)$ является циклом длины 3.

Два цикла n -й степени, не имеющие общих перемещаемых элементов, называются *независимыми*. Результат умножения независимых циклов не зависит от порядка сомножителей. Это позволяет любую подстановку $s \in S_n$ единственным образом представить в виде произведения попарно независимых циклов. Например,

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 1 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (125)(36)(78).$$

При этом говорят, что подстановка 8-й степени s разложена в произведение независимых циклов (125), (36) и (78).

Для дальнейшего изложения удобно для элементов, которые переходят в себя, ввести в рассмотрение циклы длины 1. Тогда запись разложения в приведенном примере будет выглядеть так:

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 1 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (125)(36)(78)(4).$$

Пусть подстановка n -й степени s разлагается в произведение m_1 циклов длины 1, m_2 циклов длины 2 и т. д., m_n циклов длины n , тогда $1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + \dots + n \cdot m_n = n$. При этом говорят, что подстановка s имеет тип $[1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n}]$. Так подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (135)(2)(4)$ имеет тип $[1^2, 2^0, 3^1, 4^0, 5^0]$, а подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 1 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ – тип $[1^1, 2^2, 3^1, 4^0, 5^0, 6^0, 7^0, 8^0]$.

Число подстановок n -й степени типа $[1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n}]$ обозначим через $C(m_1, m_2, \dots, m_n)$, а число подстановок n -й степени, имеющих в разложении точно k циклов, – через $C(n, k)$.

Теорема 1.10.4. Число подстановок n -й степени типа $[1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n}]$ равно

$$C(m_1, m_2, \dots, m_n) = \frac{n!}{1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n} m_1! m_2! \dots m_n!}. \quad (1.10.4)$$

Доказательство. Произвольную подстановку s типа $[1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n}]$ разложим в произведение независимых циклов

$$s = \prod_{j=1}^{m_1} (s_{1j}) \cdot \prod_{j=1}^{m_2} (s_{2j}) \dots \prod_{j=1}^{m_n} (s_{nj}),$$

где все циклы s_{ij} имеют длину i и

$$\sum_{i=0}^n i m_i = n.$$

Если в этом произведении, сохраняя порядок скобок, выполнить $n!$ перестановок элементов, то получим все перестановки типа

$[1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n}]$. При этом, однако, не будет учтено, что перестановки, соответствующие циклическим сдвигам элементов внутри скобок, и перестановки, полностью переставляющие элементы из одной скобки в скобки, содержащие такое же количество элементов, не порождают новых подстановок. По правилу произведения число таких перестановок равно $1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n} m_1! m_2! \dots m_n!$. Поэтому имеет место равенство

$$C(m_1, m_2, \dots, m_n) \cdot 1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n} m_1! m_2! \dots m_n! = n!,$$

из которого следует доказываемая формула (1.10.7).

Следствие. Число подстановок n -й степени, содержащих в разложении точно k циклов, равно

$$C(n, k) = \sum_{\substack{1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + \dots + n \cdot m_n = n, \\ m_1 + m_2 + \dots + m_n = k, \\ m_1 \geq 0, m_2 \geq 0, \dots, m_n \geq 0}} \frac{n!}{1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n} m_1! m_2! \dots m_n!}.$$

Обратите внимание на то, что суммирование осуществляется по всем неотрицательным целочисленным решениям (m_1, m_2, \dots, m_n) системы:

$$\begin{cases} 1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + \dots + n \cdot m_n = n, \\ m_1 + m_2 + \dots + m_n = k. \end{cases}$$

Таким образом, для того чтобы вычислить комбинаторное число $C(n, k)$, необходимо найти все такие решения.

Если при фиксированном n просуммировать числа $C(n, k)$ по k от 0 до n , то найдем число всех подстановок n -й степени, т. е.

$$n! = \sum_{k=0}^n C(n, k). \quad (1.10.5)$$

Задача 1.10.4. Найти число подстановок седьмой степени, содержащих в своем разложении ровно 3 цикла.

Решение. Искомое число равно $C(7, 3)$. Чтобы найти это число, нужно найти все неотрицательные целочисленные решения системы

$$\begin{cases} m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 + 5m_5 + 6m_6 + 7m_7 = 7, \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = 3. \end{cases}$$

Общее решение этой системы имеет вид:

$$\begin{cases} m_1 = -1 + m_3 + 2m_4 + 3m_5 + 4m_6 + 5m_7, \\ m_2 = 4 - 2m_3 - 3m_4 - 4m_5 - 5m_6 - 6m_7. \end{cases}$$

Из второго уравнения сразу следует, что в любом искомом решении $m_6 = m_7 = 0$. Поэтому нетрудно установить, что система имеет только четыре неотрицательных целочисленных решения:

$(2,0,0,0,1,0,0)$, $(0,1,0,1,0,0,0)$, $(0,2,1,0,0,0,0)$, $(1,0,2,0,0,0,0)$. Следовательно,

$$C(7,3) = \frac{7!}{5 \cdot 2!} + \frac{7!}{2 \cdot 4} + \frac{7!}{2^2 \cdot 3 \cdot 2!} + \frac{7!}{3^2 \cdot 2!} = \frac{7!}{2} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} \right) = 1624. \square$$

Следует заметить, что при больших n и k решение систем в целых числах является достаточно сложной и трудоемкой задачей, поэтому на практике при вычислении чисел $C(n, k)$ обычно используют рекуррентные соотношения, связывающие эти числа. Эти соотношения будут рассмотрены в следующей главе.

1.10.3. Задача о беспорядках

Элемент $i \in I_n$ называется *неподвижным* (*инвариантным*) при подстановке s , если $s(i) = i$. Подстановка, не содержащая неподвижных элементов, называется *беспорядком*. Количество всех беспорядков обозначим через D_n .

Теорема 1.10.5.

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}. \quad (1.10.6)$$

Доказательство. Пусть p_i – свойство подстановки n -й степени оставлять элемент i ($i = 1, \dots, n$) на месте, $N(p_{i_1}, \dots, p_{i_k})$ – число всех подстановок, при которых каждый из элементов i_α ($i_\alpha = 1, \dots, k$) остается на месте. Очевидно, что число $N(p_{i_1}, \dots, p_{i_k})$ элементов, одновременно обладающих свойствами $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$, $k \leq n$, зависит не от самих этих свойств, а от их числа, и при этом

$$N(p_{i_1}, \dots, p_{i_k}) = N^{(k)} = (n - k)!.$$

Поэтому для вычисления числа D_n воспользуемся формулой (1.6.15), являющейся следствием формулы включений-исключений.

В рассматриваемом случае $N = n!$ – число всех подстановок n -й степени, $N_0 = D_n$ – число подстановок, не обладающих ни одним из свойств p_i . Следовательно,

$$\begin{aligned} D_n &= n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k N^{(k)} = n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} = \\ &= n! \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Для $n = 0$ удобно принять $D_0 = 1$.

Задача 1.10.5. Имеется n различных предметов a_1, \dots, a_n и n различных ящиков b_1, \dots, b_n . Требуется разместить предметы по ящикам так, чтобы никакой предмет a_i не попал в ящик b_i . Сколько существует таких способов размещения?

Решение. Каждую раскладку предметов по ящикам можно однозначно задать таблицей $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_{\alpha_1} & b_{\alpha_2} & \dots & b_{\alpha_n} \end{pmatrix}$, в которой под предметом a_i указан ящик b_{α_i} , в который попадает этот предмет, или подстановкой $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$, в первой строке которой записаны номера предметов, а во второй – номера ящиков. Тогда если предмет a_i попадает в ящик b_i , то элемент i в этой подстановке остается инвариантным. Поэтому искомое число способов размещения равно D_n . \square

Подстановку, содержащую ровно k неподвижных элементов, в комбинаторике часто называют *подстановкой с k встречами*. Число всех подстановок с k встречами обозначим $D(n, k)$.

Теорема 1.10.6.

$$D(n, k) = C_n^k D_{n-k}. \quad (1.10.7)$$

Доказательство. Число способов, которыми можно выбрать из n элементов k инвариантных, равно C_n^k . Из остальных $n - k$ элементов можно составить D_{n-k} беспорядков. Следовательно, по правилу произведения количество подстановок с k встречами равно $C_n^k D_{n-k}$.

Следствие. $\sum_{k=0}^n C_n^k D_{n-k} = n!$. (1.10.8)

Задача 1.10.6. Рассеянный почтальон должен разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами он может разложить письма по почтовым ящикам так, чтобы

- а) ни один адресат не получил адресованное ему письмо;
- б) ровно 5 человек получили адресованные им письма;
- в) хотя бы один адресат получил адресованное ему письмо;
- г) ровно один адресат не получил адресованное ему письмо?

Решение. а) Как следует из предыдущей задачи, искомое число способов равно $D_{10} = 10! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!}\right) = 1334961$.

б) Согласно формуле (1.10.7) искомое число способов равно $D(10, 5) = C_{10}^5 D_5 = \frac{10!}{5! 5!} \cdot 5! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 11088$.

в) Всего $10!$ способов раскладки писем по ящикам, из них в D_{10} случаях ни один адресат не получит адресованное ему письмо. Поэтому искомое число способов $10! - D_{10} = 2293839$.

г) Очевидно, что такой ситуации быть не может.

§ 1.11. Групповые методы в комбинаторике

Определяющие признаки ряда комбинаторных конфигураций имеют групповую природу. Это позволяет при решении перечислительных задач, в которых рассматриваются такие конфигурации, эффективно использовать известные методы и результаты теории конечных групп. В параграфе приведены примеры подобных перечислительных задач и метод их решения, основанный на лемме Бернсайда.

1.11.1. Действие группы на множестве

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ – произвольное n -множество, $S(A)$ – множество всех подстановок $s: A \rightarrow A$. Множество $S(A)$ является группой относительно композиции (умножения) подстановок, эта группа имеет порядок $n!$. Всякую подгруппу G группы $S(A)$ называют группой преобразований или *группой подстановок множества A* . Рассмотрим действие некоторой группы подстановок G на множестве A . Именно, опишем подмножества множества A , которые группа G переводит в себя, т. е. оставляет инвариантными.

Примечание. Природа элементов множества A для нас не существенна, поэтому можно считать, что $A = I_n = \{1, \dots, n\}$. Группу $S(I_n)$ называют *симметрической группой степени n* и обозначают S_n . Подгруппа подстановок G в этом случае является подгруппой группы S_n .

Введем на множестве A бинарное отношение \sim : будем считать $a_i \sim a_j$, если существует подстановка $s \in G$ такая, что $a_j = s(a_i)$. Введенное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности. Действительно, тождественная подстановка $e \in G$, поэтому $a_i = e(a_i)$ для любого элемента $a_i \in A$, значит $a_i \sim a_i$, – отношение \sim рефлексивно. Далее, пусть $a_i \sim a_j$, т. е. $a_j = s(a_i)$, где $s \in G$. Группа G вместе с подстановкой s содержит обратную ей подстановку s^{-1} и $s^{-1}(a_j) = s^{-1}(s(a_i)) = ss^{-1}(a_i) = e(a_i) = a_i$, т. е. $a_j \sim a_i$, – отношение симметрично. Наконец, пусть $a_i \sim a_j$, $a_j \sim a_k$, тогда $a_j = s_1(a_i)$, $a_k = s_2(a_j)$, где $s_1, s_2 \in G$. Так как произведение $s_1 s_2 \in G$ и $a_k = s_2(a_j) = s_2(s_1(a_i)) = s_1 s_2(a_i)$, то $a_i \sim a_k$, поэтому отношение \sim транзитивно.

Введенное отношение определяет разбиение множества A на попарно непересекающиеся классы эквивалентности относительно группы подстановок G

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_l,$$

которые называются *G -орбитами*.

Орбиту, содержащую элемент a_i , обозначим $G(a_i)$; очевидно, что $G(a_i) = \{a_j \mid a_j = s(a_i), s \in G\}$. Число элементов, входящих в G -орбиту $G(a_i)$, будем называть *длиной* этой орбиты и обозначать $|G(a_i)|$.

Может оказаться, что единственной орбитой группы G будет все множество A . В этом случае для любых элементов $a_i, a_j \in A$ в группе G существует такая подстановка s , что $a_j = s(a_i)$. Такая группа G называется *транзитивной*. Группы подстановок, не являющиеся транзитивными, называются *интранзитивными*.

Задача 1.11.1. Найти орбиты группы G самосовмещений: а) правильного шестиугольника, б) шестиугольника, полученного путем сжатия правильного шестиугольника к одной из его диагоналей.

Решение. а) Занумеруем вершины правильного шестиугольника числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 (рис. 9). Тогда каждому самосовмещению φ шестиугольника можно поставить во взаимнооднозначное соответствие подстановку $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 \end{pmatrix}$, где $i_k = s(k)$ – номер вершины, в которую после отображения φ переходит вершина с номером k .

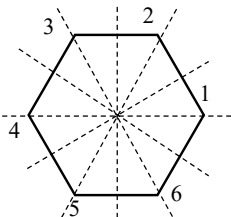


Рис. 9

Центр O правильного шестиугольника является центром симметрии шестого порядка, так как существует 6 вращений вокруг точки O , которые переводят шестиугольник в себя. Это повороты против часовой стрелки на углы $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}, \varphi_3 = \pi, \varphi_4 = \frac{4\pi}{3}, \varphi_5 = \frac{5\pi}{3}$. Перечисленные повороты можно задать с помощью подстановок:

$$\varphi_0 \mapsto e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4)(5)(6),$$

$$\varphi_1 \mapsto s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (123456),$$

$$\varphi_2 \mapsto s_2 = s_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (135)(246),$$

$$\varphi_3 \mapsto s_3 = s_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (14)(25)(36),$$

$$\varphi_4 \mapsto s_4 = s_1^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (153)(264),$$

$$\varphi_5 \mapsto s_5 = s_1^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (165432).$$

Примечание. Вращения правильного шестиугольника образуют циклическую группу C_6 порядка 6, которая изоморфна циклической группе подстановок $\langle s_1 \rangle$ с образующим элементом s_1 .

Далее, имеется 3 осевых симметрии шестиугольника относительно его диагоналей

$$\varphi_6 \mapsto s_6 = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 16 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(4)(26)(35),$$

$$\varphi_7 \mapsto s_7 = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 32 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (2)(5)(13)(46),$$

$$\varphi_8 \mapsto s_8 = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 54 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (3)(6)(24)(15)$$

и 3 осевых симметрии относительно срединных перпендикуляров противоположных сторон шестиугольника

$$\varphi_9 \mapsto s_9 = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 21 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(36)(45),$$

$$\varphi_{10} \mapsto s_{10} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 43 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (14)(23)(56),$$

$$\varphi_{11} \mapsto s_{11} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 65 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (16)(25)(34).$$

Таким образом, группа G самосовмещений правильного шестиугольника имеет порядок 12 и изоморфна собственной подгруппе симметрической группы S_6 (ее называют *группой диэдра* и обозначают D_6).

Для вершины с номером 1 имеем:

$$e(1) = s_6(1) = 1, s_1(1) = s_9(1) = 2, s_2(1) = s_7(1) = 3,$$

$$s_3(1) = s_{10}(1) = 4, s_4(1) = s_8(1) = 5, s_5(1) = s_{11}(1) = 6.$$

Отсюда следует, что орбита $G(1)$, которой принадлежит 1, совпадает со всем множеством $I_6 = \{1, \dots, 6\}$ и имеет длину 6. Значит, группа самосовмещений правильного шестиугольника является транзитивной.

б) Сожмем правильный шестиугольник к одной из диагоналей, например к диагонали с концами 1, 4 (рис. 10). Полученный шестиугольник имеет только четыре самосовмещения: тождественное отображение, центральную симметрию и две осевых симметрии. Эти отображения можно описать с помощью группы порядка 4, состоящей из подстановок:

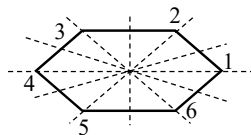


Рис. 10

$$e, s_3 = (14)(25)(36), s_6 = (1)(4)(26)(35), s_{10} = (14)(23)(56).$$

Для вершины с номером 1 имеем: $e(1) = s_6(1) = 1$, $s_3(1) = s_{10}(1) = 4$. Отсюда следует, что орбитой, которой принадлежит 1, является множество $G(1) = \{1, 4\}$. Возьмем любой элемент, не принадлежащий этой орбите, например 2. Поскольку $e(2) = 2$, $s_3(2) = 3$, $s_6(2) = 6$, $s_{10}(2) = 5$, то содержащая вершину 2 орбита $G(2) = \{2, 3, 6, 5\}$ имеет длину 4. Таким образом, группа перестановок вершин рассматриваемого шестиугольника имеет две орбиты $\{1, 4\}$, $\{2, 3, 6, 5\}$ и, следовательно, является интранзитивной. \square

При рассмотрении разбиения произвольного конечного множества A , порожденного его группой подстановок G , естественным образом возникают задачи о нахождении числа всех орбит группы G на множестве A и о вычислении их длин.

Рассмотрим множество $St(a_i) = \{s \in G | s(a_i) = a_i\}$ всех подстановок из G , которые оставляют неподвижным (переводят сам в себя) элемент a_i . Очевидно, что множество $St(a_i)$ является подгруппой группы G , она называется *стационарной подгруппой элемента a_i* . В силу теоремы Лагранжа порядок $|St(a_i)|$ группы $St(a_i)$ будет делителем порядка $|G|$ группы G . Частное $|G| : |St(a_i)|$ является *индексом* подгруппы $St(a_i)$ в группе G и равно числу элементов факторгруппы $G/St(a_i)$.

Так, в задаче 11.1 б) стационарная подгруппа вершин шестиугольника с номерами 2, 3, 5, 6 состоит из одной тождественной подстановки e , поэтому индекс стационарных подгрупп этих вершин $4 : 1 = 4$. Стационарная подгруппа вершин с номерами 1, 4 состоит из двух подстановок e, s_6 , а индекс стационарных подгрупп $St(1), St(4)$ этих вершин равен $4 : 2 = 2$.

Теорема 1.11.2. Пусть группа G действует на множестве A . Длина $|G(a_i)|$ орбиты $G(a_i)$ элемента $a_i \in A$ равна индексу стационарной подгруппы $St(a_i)$ этого элемента в группе G , т. е.

$$|G(a_i)| = |G| : |St(a_i)| = |G/St(a_i)|.$$

Доказательство. Каждому элементу a_j , принадлежащему G -орбите $G(a_i)$, поставим в соответствие левый смежный класс $sSt(a_i) \in G/St(a_i)$, где s – такая подстановка из G , что $a_j = s(a_i)$. Установленное соответствие будет отображением из $G(a_i)$ в $G/St(a_i)$. Действительно, если предположить, что в G существует подстановка s_1 такая, что $a_j = s_1(a_i)$, то $s(a_i) = s_1(a_i)$. Отсюда $a_i = s^{-1}s_1(a_i)$ и, значит, $s^{-1}s_1 \in St(a_i)$. Но тогда $s_1 \in sSt(a_i)$, а $sSt(a_i) = s_1St(a_i)$.

Докажем, что построенное отображение (обозначим его π) является биекцией, т. е. инъективно и сюръективно. Пусть $s_1, s_2 \in G$, $a_j = s_1(a_i)$, $a_k = s_2(a_i)$ и $a_j \neq a_k$; покажем, что $s_1 St(a_i) \neq s_2 St(a_i)$. Предположив $s_1 St(a_i) = s_2 St(a_i)$, получим $St(a_i) = s_2^{-1} s_1 St(a_i)$ и $s_2^{-1} s_1 \in St(a_i)$. Отсюда следует, что $a_i = s_2^{-1} s_1(a_i)$, а значит, $s_1(a_i) = s_2(a_i)$ или $a_j = a_k$. Пришли к противоречию, которое говорит о том, что отображение π – инъекция. Сюръективность отображения π непосредственно вытекает из его определения: смежный класс $sSt(a_i) \in G/St(a_i)$ имеет своим прообразом элемент $s(a_i) \in G(a_i)$.

Теорема 1.11.3. Пусть группа G действует на множестве A . Тогда если два элемента из A принадлежат одной орбите, то порядки их стационарных подгрупп равны.

Доказательство. Пусть элементы $a_i, a_j \in A$ содержатся в одной орбите, тогда $G(a_i) = G(a_j)$. Из этого равенства на основании предыдущей теоремы

$$St(a_i) = \frac{|G|}{|G(a_i)|} = \frac{|G|}{|G(a_j)|} = St(a_j).$$

1.11.2. Лемма Бернсайда

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ – произвольное n -множество, на котором действует группа подстановок $G = \{e = s_0, s_1, \dots, s_{k-1}\}$ порядка k . Число орбит группы подстановок G условимся обозначать через $X(G)$, а число элементов множества A , которые подстановка s_α оставляет неподвижными, – через $\chi(s_\alpha)$, $\alpha = 0, 1, \dots, k-1$.

Теорема 1.11.4 (лемма Бернсайда*). Для любой группы подстановок G порядка k , действующей на множестве A , имеет место равенство

$$X(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha=0}^{k-1} \chi(s_\alpha). \quad (1.11.1)$$

Доказательство. Рассмотрим на прямом произведении $G \times A$ бинарное отношение $\Delta \subset G \times A$ – «подстановка s_α оставляет элемент a_i неподвижным», т. е. отношение

$$\Delta = \{(s_\alpha, a_i) | a_i = s_\alpha(a_i)\}.$$

* Теорема названа по имени английского математика Уильяма Бернсайда (1852-1927), опубликовавшего в 1911 г. ее доказательство в своей книге по теории конечных групп. Эта теорема лежит в основе теории перечислений, разработанной американским математиком Д. Пойа.

Подсчитаем число элементов подмножества Δ . Это можно сделать двумя способами:

1) для каждой из подстановок s_α подсчитать число элементов множества A , которые она оставляет неподвижными, а затем найти их сумму;

2) для каждого из элементов a_i подсчитать число подстановок из G , которые оставляют его неподвижным, и, учитывая, что разные элементы $a_i, a_j \in A$ могут содержаться в одной орбите, найти соответствующую сумму.

При первом способе подсчета будем иметь

$$\chi(s_0) + \chi(s_1) + \dots + \chi(s_{k-1}) = \sum_{\alpha=0}^{k-1} \chi(s_\alpha).$$

Во втором случае составим сумму

$$|St(a_1)| + |St(a_2)| + \dots + |St(a_n)| = \sum_{i=1}^n |St(a_i)|. \quad (*)$$

Теперь необходимо учесть, что для элементов $a_i, a_j \in A$, принадлежащих одной орбите, $|St(a_i)| = |St(a_j)|$. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_{X(G)}$ – все орбиты группы G , т. е. $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{X(G)}$. Разобьем сумму (*) на слагаемые так, чтобы внутри каждого слагаемого суммирование шло по элементам одной орбиты:

$$\sum_{a_i \in A} |St(a_i)| = \sum_{a_i \in A_1} |St(a_i)| + \dots + \sum_{a_i \in A_{X(G)}} |St(a_i)|.$$

Каждую из этих $X(G)$ сумм можно найти следующим образом:

$$\sum_{a_i \in A} |St(a_i)| = \sum_{a_i \in A_\alpha} \frac{|G|}{|G(a_i)|} = \frac{|G|}{|A_\alpha|} \sum_{a_i \in A_\alpha} 1 = \frac{|G|}{|A_\alpha|} |A_\alpha| = |G|.$$

Следовательно, $\sum_{a_i \in A} |St(a_i)| = \underbrace{|G| + \dots + |G|}_{X(G) \text{ раз}} = X(G) \cdot |G|$.

Приравнивая результаты вычислений, полученные при первом и втором способах, будем иметь равенство

$$X(G) \cdot |G| = \sum_{\alpha=0}^{k-1} \chi(s_\alpha),$$

из которого следует доказываемая формула.

Рассмотрим примеры решения перечислительных задач с помощью леммы Бернсайда.

Задача 1.11.2. Сколько различных ожерелий можно составить из шести бусин трех цветов? (Выбор бусин каждого цвета неограничен.)

Решение. Поскольку каждую бусину можно выбрать тремя способами (любого цвета из трех имеющихся), то, казалось бы, существует $3^6 = 729$ различных ожерелий. Однако, рассуждая подобным образом, мы не учитываем, что два ожерелья, составленные в разной последовательности, могут совпасть при вращениях или переворачиваниях. Действительно, условимся для определенности считать, что

используемые бусины имеют красный (κ), синий (c) и желтый (ЖС) цвета (рис. 11). Из рисунка видим, что среднее ожерелье можно получить при вращении левого, а правое – при его переворачивании; поэтому все эти три ожерелья являются одинаковыми.

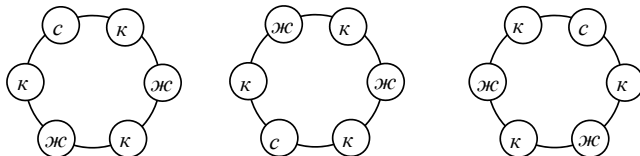


Рис. 11

Чтобы понять, как воспользоваться леммой Бернсайда, заметим, что рассматриваемая задача эквивалентна задаче:

Сколькими способами можно раскрасить вершины правильного шестиугольника в три цвета?

Новая формулировка задачи явно наталкивает на мысль, как определить одинаковые шестиугольники с раскрашенными вершинами на языке теории групп: вращения и осевые симметрии правильного шестиугольника образуют его группу самосовмещений G , изоморфную группе диэдра D_6 порядка 12 (см. задачу 1.11.1, а).

Пусть K – множество всех правильных шестиугольников с окрашенными вершинами. Два способа раскраски вершин шестиугольника являются *геометрически неразличимыми*, если существует самосовмещение этого шестиугольника (вращение вокруг его центра или осевая симметрия), при котором совпадают все вершины, окрашенные в одинаковые цвета. Иными словами, два шестиугольника F и F' из K являются геометрически неразличимыми, если существует подстановка $\varphi_\alpha \in G$, $\alpha = 0, 1, \dots, 11$ такая, что $F' = \varphi_\alpha(F)$, т. е. шестиугольники F и F' принадлежат одной орбите группы G , действующей на множестве K . Поэтому, чтобы определить число геометрически различных способов раскраски вершин шестиугольника (или, что то же самое, число различных ожерелий), нужно найти число орбит группы G на множестве K .

Занумеровав вершины шестиугольника числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, каждое его самосовмещение φ_α можно однозначно задать подстановкой $s_\alpha \in D_6$, действующей на множестве номеров вершин (задача 1.11.1, а). Обозначим шестиугольник с пронумерованными и окрашенными вершинами словом длины 6, составленным из букв κ , c и ЖС , i -я буква в котором обозначает цвет бусины с номером i .

Рассмотрим, как подстановки из D_6 индуцируют подстановки на множестве K . Возьмем, например, подстановку $s_7 = (2)(5)(13)(46)$ и шестиугольник (слово) $жкскжск$. Эта подстановка в каждом слове меняет местами первую и третью, а также четвертую и шестую буквы; вторую же и пятую буквы она оставляет на месте. Поэтому подстановка s_7 слово $жкскжск$ переводит в слово $скжкжск$. В слове $кжкссс$ первую и третью позиции занимает одна и та же буква – $к$, а четвертую и шестую позиции – буква $с$. Значит, при подстановке s_7 слово $кжкссс$ останется «неподвижным».

Таким образом, слово будет неподвижным относительно подстановки $\varphi_\alpha \in G$ тогда и только тогда, когда при разложении определяющей ее подстановки $s_\alpha \in D_6$ в произведение независимых циклов вершины шестиугольника, номера которых входят в один и тот же цикл, окрашены в один цвет.

Все 12 подстановок группы D_6 были выписаны в предыдущей задаче. Среди этих подстановок имеются:

1 подстановка типа $[1^6, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0, 6^0]$ (тождественная),

3 подстановки типа $[1^2, 2^2, 3^0, 4^0, 5^0, 6^0]$,

4 подстановки типа $[1^0, 2^3, 3^0, 4^0, 5^0, 6^0]$,

2 подстановки типа $[1^0, 2^0, 3^2, 4^0, 5^0, 6^0]$,

2 подстановки типа $[1^0, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0, 6^1]$.

Тождественная подстановка оставляет неподвижными 3^6 слов, любая подстановка второго типа – $3^2 \cdot 3^2 = 3^4$, любая подстановка третьего типа – 3^3 , любая подстановка четвертого типа – 3^2 и любая подстановка пятого типа – 3.

Поэтому на основании леммы Бернсайда число различных ожерелий равно

$$X(G) = \frac{1}{12}(3^6 + 3 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3) = 92. \quad \square$$

Задача 1.11.3. Сколькими способами можно раскрасить вершины куба в два различных цвета?

Решение. Куб имеет 8 вершин. Если считать, что куб каким-либо образом жестко фиксирован в пространстве, то имеется $2^8 = 256$ способов окраски его вершин в два цвета. Существуют, однако, вращения куба, при которых две окраски вершин становятся неразличимыми (совпадают все вершины, окрашенные в одинаковые цвета). Будем считать такие способы окраски вершин одинаковыми, т. е. искать геометрически различимые способы окраски. Чтобы перечислить такие

окраски, необходимо исследовать группу G самосовмещений куба. Эта группа содержит 24 элемента:

- 1) тождественное преобразование;
- 2) нетривиальные повороты вокруг каждой из трех осей, соединяющих центры противоположных граней куба (на углы $\frac{\pi}{2}$, π и $\frac{3\pi}{2}$);
- 3) нетривиальные повороты вокруг каждой из четырех диагоналей куба (на углы $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$);
- 4) нетривиальные повороты вокруг каждой из шести осей, проходящих через середины противоположных ребер (на угол π).

Если, как и в задаче 1.11.2, пронумеровать вершины куба (рис. 12), то любое такое вращение можно задать с помощью подстановки, переставляющей номера соответственных вершин. Например, нетривиальные вращения вокруг оси, проходящей через противоположные вершины 1, 7, можно задать с помощью подстановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix},$$

(1 2 3 4 5 6 7 8).
(1 4 8 5 2 3 7 6).

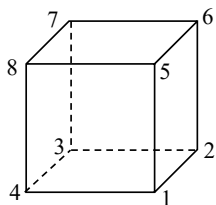


Рис. 12

Тождественное преобразование определяется тождественной подстановкой (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8).

Ненулевым поворотам вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней куба, соответствуют подстановки

(1584)(2673), (18)(27)(36)(45), (1485)(2376);
(1432)(5876), (13)(24)(57)(68), (1234)(5678);
(1562)(3487), (16)(25)(38)(47), (1265)(3784);

ненулевым поворотам вокруг осей, содержащих диагонали куба, – подстановки

(1)(7)(254)(368), (1)(7)(245)(386);
(2)(8)(136)(475), (2)(8)(163)(457);
(3)(5)(168)(274), (3)(5)(186)(247);
(4)(6)(138)(275), (4)(6)(183)(257);

наконец, ненулевым поворотам вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер, – подстановки

(15)(28)(37)(46), (17)(26)(35)(48), (12)(35)(46)(78),
(17)(28)(34)(56), (17)(23)(46)(58), (14)(28)(35)(67).

Таким образом, группа вращений куба содержит:

1 подстановку типа $[1^8, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0, 6^0, 7^0, 8^0]$,
8 подстановок типа $[1^2, 2^0, 3^2, 4^0, 5^0, 6^0, 7^0, 8^0]$,

9 подстановок типа $[1^0, 2^4, 3^0, 4^0, 5^0, 6^0, 7^0, 8^0]$,

6 подстановок типа $[1^0, 2^0, 3^0, 4^2, 5^0, 6^0, 7^0, 8^0]$.

Два куба для перестановки \tilde{s} из \tilde{G} будут геометрически неразличимыми, если при разложении соответствующей ей подстановки s в произведение циклов вершины куба, номера которых входят в один и тот же цикл, окрашены в одинаковый цвет. Поэтому тождественная подстановка оставляет неразличимыми 2^8 кубов, любая из перестановок второго и третьего типа – 2^4 , а любая подстановка последнего типа – 2^2 . Следовательно,

$$X(G) = \frac{1}{24}(2^6 + 8 \cdot 2^4 + 9 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2) = 23.$$

1.11.3. Задача об ожерельях I

Задачи типа рассмотренной задачи 1.11.2 о составлении ожерелий из бусин различных цветов достаточно часто возникают в различных комбинаторных приложениях. В общем виде задача о составлении ожерелий из бусин различных цветов, запас которых не ограничен, будет решена методом производящих функций в третьей главе. В этом пункте рассмотрим решение следующей задачи.

Задача 1.11.4. Имеется запас бусин, содержащий n_i бусин цвета t_i ($i = 1, \dots, q$; $\sum_{i=1}^q n_i = n$). Сколько различных ожерелий можно составить из этих n бусин, используя для составления каждого все бусины?

Решение. Пусть K – множество всех ожерелий. Как и в задаче 11.2, бусины ожерелий разместим в вершинах правильного многоугольника. Уточняя вопрос задачи, можно считать, что два ожерелья являются геометрически неразличимыми, если они совпадают:

- 1) при вращениях n -угольника относительно его центра;
- 2) при вращениях и осевых симметриях.

Рассмотрим оба случая. Число всех ожерелий, неразличимых при вращениях, обозначим $C_n(n_1, n_2, \dots, n_q)$, а число всех ожерелий, неразличимых при вращениях и осевых симметриях, – $D_n(n_1, n_2, \dots, n_q)$.

1) Имеется n вращений правильного n -угольника относительно его центра, которые переводят многоугольник в себя; это вращения φ_k на углы $\frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Множество $\{\varphi_k\}$ вращений образует группу относительно композиции вращений, которая является циклической группой C_n с образующей φ_1 , соответствующей повороту на угол $\frac{2\pi}{n}$.

Всякое вращение $\varphi_k \in C_n$ индуцирует подстановку $\tilde{\varphi}_k$ на множестве K : каждому правильному n -угольнику $F \in K$ ставится в соответствие n -угольник F' , который получается из F при вращении φ_k . Множество всех индуцированных подстановок образует группу \tilde{C}_n , действующую на множестве K . Два многоугольника F и F' являются геометрически неразличимыми, если они принадлежат одной орбите группы \tilde{C}_n , а для перечисления числа геометрически различных ожерелий нужно найти число орбит группы \tilde{C}_n на множестве K . Это число можно вычислить по лемме Бернсайда, если для каждой подстановки $\tilde{\varphi}_k \in \tilde{C}_n$ найти число n -угольников множества K , которые она оставляет неподвижными.

До сих пор приведенные рассуждения были всего лишь переформулировкой соответствующих рассуждений решения задачи 1.11.2. Теперь используем более естественный и простой способ пересчета неподвижных n -угольников для подстановок $\tilde{\varphi}_k \in \tilde{C}_n$. Для этого потребуются некоторые сведения из теории циклических групп, которые даны в следующем примечании.

Примечание. Циклическую группу с образующей s принято обозначать $\langle s \rangle$. Из теории групп известно, что всякая подгруппа циклической группы – циклическая; при этом конечные циклические группы обладают следующими свойствами:

- элемент s^k циклической группы $\langle s \rangle$ порядка n имеет порядок $n/\text{НОД}(n, k)$;
- элемент s^k является образующим элементом группы $\langle s \rangle$ порядка n тогда и только тогда, когда k и n взаимно просты;
- подгруппа циклической группы порядка n порождается элементом вида s^d , где d – делитель n ;
- для каждого делителя d числа n существует единственная подгруппа порядка d .

Таким образом, если $d = \text{НОД}(n, k)$, то элемент s^k имеет порядок $n/d = m$ и является образующей циклической подгруппы $\langle s^k \rangle$ порядка m группы $\langle s \rangle$. Подгруппа $\langle s^k \rangle$ содержит элементы $e, s^d, s^{2d}, \dots, s^{(m-1)d}$, при этом среди них $\varphi(m)$ элементов являются образующими этой подгруппы ($\varphi(m)$ – функция Эйлера).

Если поворот φ_δ на угол $\frac{2\pi}{\delta}$ переводит ожерелье из n бусин, среди которых n_i бусин цвета t_i ($i = 1, \dots, q$; $\sum_{i=1}^q n_i = n$), в ожерелье, геометрически с ним неразличимое, то:

- ожерелье состоит из δ одинаковых звеньев длины $\frac{n}{\delta}$;
- δ является общим делителем чисел n_1, n_2, \dots, n_q и каждое звено содержит $\frac{n_i}{\delta}$ бусин цвета t_i .

Поэтому число ожерелий, инвариантных относительно поворота φ_δ , равно числу способов перестановки $\frac{n}{\delta} = \sum_{i=0}^q \frac{n_i}{\delta}$ бусин звена, т. е. $P_{n/\delta}(n_1/\delta, n_2/\delta, \dots, n_q/\delta) = \frac{(n/\delta)!}{(n_1/\delta)!(n_2/\delta)! \dots (n_q/\delta)!}$. Если $1 \leq k < \delta$ взаимно просто с δ , то поворот $\varphi_{k\delta}$ на угол $\frac{2\pi k}{\delta}$ оставляет инвариантными столько же ожерелий, сколько поворот φ_δ на угол $\frac{2\pi}{\delta}$. Количество чисел, не превосходящих δ и взаимно простых с δ , равно $\varphi(\delta)$. Поэтому каждому общему делителю δ чисел n_1, n_2, \dots, n_q соответствует $\varphi(\delta)P_{n/\delta}(n_1/\delta, n_2/\delta, \dots, n_q/\delta)$ геометрически различных ожерелий.

Чтобы найти число $C_n(n_1, n_2, \dots, n_q)$ всех ожерелий, геометрически неразличимых при вращениях, остается просуммировать найденное произведение по всем общим делителям чисел n_1, n_2, \dots, n_q (или, что то же самое, по всем делителям их наибольшего общего делителя) и воспользоваться леммой Бернсайда:

$$C_n(n_1, \dots, n_q) = \frac{1}{n} \sum_{\delta | \text{НОД}(n_1, \dots, n_q)} \varphi(\delta) \frac{(n/\delta)!}{(n_1/\delta)! \dots (n_q/\delta)!}. \quad (1.11.2)$$

Примечание. Группа C_n изоморфна циклической группе $\langle s \rangle$ подстановок n -й степени с образующей $s = (1, 2, \dots, n)$. Чтобы задать этот изоморфизм, достаточно последовательно пронумеровать вершины n -угольника числами от 1 до n . При этом вращению φ_k будет соответствовать подстановка s^k . Нетрудно также заметить, что k -я степень s^k цикла $(1, 2, \dots, n)$ является произведением $d = \text{НОД}(n, k)$ независимых циклов, каждый из которых имеет длину $n/d = m$.

2) Если перевернутое ожерелье считается геометрически неразличимым с исходным, то следует учесть, что представляющий его правильный n -угольник переходит сам в себя не только при n поворотах φ_k , но еще и при n осевых симметриях.

При нечетном n имеется n осей, проходящих через вершины многоугольника и середины противоположных им сторон. При четном n имеется $\frac{n}{2}$ осей, содержащих диагонали многоугольника, и $\frac{n}{2}$ осей, проходящих через середины его противоположных сторон. Поэтому при любом n группа самосовмещений правильного n -угольника состоит из $2n$ преобразований. Эта группа называется *группой диэдра* и обозначается D_n .

Для нечетного n симметричные ожерелья существуют тогда и только тогда, когда одно из чисел n_1, n_2, \dots, n_q нечетно, а остальные четны. Пусть, например, нечетно число n_1 . Вершину для бусины цвета t_1 можно выбрать n способами. Ось, проходящая через выбранную

вершину, делит ожерелье на два симметричных звена, состоящих из $\frac{n_1-1}{2}$ бусин цвета t_1 и $\frac{n_i}{2}$ бусин каждого из цветов t_2, \dots, t_q . Поэтому эти звенья составляются $P_{(n-1)/2}((n_1-1)/2, n_2/2, \dots, n_q/2)$ способами. Поскольку $\frac{m}{2} = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ для четного m и $\frac{m-1}{2} = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ для нечетного, число всех ожерелий, инвариантных относительно осевых симметрий, можно записать в виде: $nP_{n/2}(\lfloor n_1/2 \rfloor, \lfloor n_2/2 \rfloor, \dots, \lfloor n_q/2 \rfloor)$. Следовательно, число $D_n(n_1, n_2, \dots, n_q)$ всех различных ожерелий в случае нечетного n находится по формуле

$$D_n(n_1, \dots, n_q) = \frac{1}{2} \left(C_n(n_1, \dots, n_q) + P_{\lfloor n/2 \rfloor}(\lfloor n_1/2 \rfloor, \dots, \lfloor n_q/2 \rfloor) \right). \quad (1.11.3)$$

Пусть n четное. Ожерелья, симметричные относительно осей, проходящих между бусинами, существуют только тогда, когда все числа n_i четные. Ожерелья, симметричные относительно осей, проходящих через бусины, опять же существуют тогда, когда все числа n_i четные, и, кроме того, тогда, когда среди этих чисел ровно два нечетных. Поэтому для четного n следует рассмотреть два подслучая: а) среди чисел n_i имеются ровно два нечетных, б) все числа n_i четные.

Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что в первом подслучае нечетными являются числа n_1 и n_2 . Тогда ось симметрии проходит через бусины цветов t_1 и t_2 . Здесь каждое из симметричных звеньев состоит из $\frac{n-2}{2}$ бусин, среди которых $\frac{n_1-1}{2}$ бусин цвета t_1 , $\frac{n_2-1}{2}$ бусин цвета t_2 и $\frac{n_i}{2}$ бусин каждого из цветов t_3, \dots, t_q . Такое звено можно составить $P_{(n-2)/2}((n_1-1)/2, (n_2-1)/2, n_3/2, \dots, n_q/2)$ способами. Поскольку таких осей $\frac{n}{2}$ и бусины на осях можно переставить местами, число всех ожерелий, инвариантных при рассматриваемых осевых симметриях, равно

$nP_{(n-2)/2}((n_1-1)/2, (n_2-1)/2, n_3/2, \dots, n_q/2)$ или $nP_{(n-2)/2}(\lfloor n_1/2 \rfloor, \lfloor n_2/2 \rfloor, \dots, \lfloor n_q/2 \rfloor)$, а количество всех геометрически различных ожерелий равно

$$D_n(n_1, \dots, n_q) = \frac{1}{2} \left(C_n(n_1, \dots, n_q) + P_{(n-2)/2}(\lfloor n_1/2 \rfloor, \dots, \lfloor n_q/2 \rfloor) \right). \quad (1.11.4)$$

Перейдем ко второму подслучаю. Сначала рассмотрим симметрии относительно осей, проходящих через вершины многоугольника. Для

того чтобы ожерелье было симметрично относительно указанной оси, бусины, через которые она проходит, должны быть одного цвета (любого из q имеющихся). Поэтому число всех ожерелий, инвариантных при такой симметрии, равно

$$P_{\frac{n-2}{2}}((n_1-1)/2, n_2/2, \dots, n_q/2) + P_{\frac{n-2}{2}}(n_1/2, (n_2-1)/2, \dots, n_q/2) + \dots \\ + P_{\frac{n-2}{2}}(n_1/2, n_2/2, \dots, (n_q-1)/2) = P_{\frac{n}{2}}(n_1/2, n_2/2, \dots, n_q/2).$$

(При суммировании использовано свойство 3° полиномиальных коэффициентов.) Таких осевых симметрий $\frac{n}{2}$.

Теперь рассмотрим симметрии относительно осей, проходящих между бусинами. Эти оси делят симметричное ожерелье на два одинаковых звена длины $\frac{n}{2}$, каждое из которых содержит $\frac{n_i}{2}$ бусин цвета t_i . Таких осей также $\frac{n}{2}$, а число способов составления звена равно $P_{n/2}(n_1/2, n_2/2, \dots, n_q/2)$.

Таким образом, если все числа n_i четные, то количество всех геометрически различных ожерелий равно

$$D_n(n_1, \dots, n_q) = \frac{1}{2} (C_n(n_1, \dots, n_q) + P_{n/2}(\lfloor n_1/2 \rfloor, \dots, \lfloor n_q/2 \rfloor)). \quad (1.11.5)$$

Наконец, в тех случаях, когда среди чисел n_1, n_2, \dots, n_q – более двух нечетных, не существует ожерелий, имеющих осевые симметрии. Здесь $D_n(n_1, \dots, n_q) = C_n(n_1, \dots, n_q)$. \square

§ 1.12. Разбиения множеств

Рассматриваются основные перечислительные задачи о разбиениях конечных множеств.

1.12.1. Разбиения и их виды

Пусть A – непустое конечное множество. Напомним, что подмножества $A_i \subseteq A$ образуют разбиение множества A , если $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$. В комбинаторике подмножества A_i обычно называют *блоками* разбиения, а их число k – *рангом* разбиения.

Очевидно, что все блоки A_i разбиения конечного множества также имеют конечные мощности. Пусть $|A_i| = n_i$, тогда список

$[n_1, n_2, \dots, n_k]$ мощностей блоков разбиения называется *спецификацией* или *типом* разбиения, а число n_i – *объемом* блока A_i .

Будем различать *упорядоченные* и *неупорядоченные* разбиения. Для упорядоченных разбиений порядок подмножеств в разбиении считается существенным, а для неупорядоченных – нет.

Разбиение конечного множества A можно однозначно задать списком его блоков $A_i, i = 1, \dots, k$ и списками элементов, входящих в блоки. В обозначении (A_1, A_2, \dots, A_k) списка блоков упорядоченного разбиения будем использовать круглые скобки, а в обозначении $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ списка блоков неупорядоченного разбиения – фигурные.

Например, разбиение множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ на блоки $\{1\}, \{3, 5\}, \{2, 4, 6\}$ имеет ранг 3 и тип $[1, 2, 3]$. Существует 6 различных упорядоченных разбиений из этих блоков – $(1, 35, 246), (35, 246, 1), (246, 1, 35), (35, 1, 246), (246, 35, 1), (1, 246, 35)$ и только одно неупорядоченное – $\{1, 246, 35\}$. (Для краткости скобки в записи блоков разбиений опущены.)

Наряду с разбиениями множеств на блоки в некоторых перечислительных задачах одновременно рассматриваются упорядочивания элементов в блоках разбиения.

Как отмечалось, при пересчете числа разбиений обычно прибегают к комбинаторной схеме, которую называют «раскладкой предметов по ящикам». Любое упорядоченное разбиение n -множества A ранга k интерпретируется как раскладка n различных предметов по k различным ящикам, а неупорядоченное разбиение – как раскладка n различных предметов по одинаковым (неразличимым) ящикам. Такие интерпретации особенно полезны при решении задач.

Рассмотрим основные задачи на нахождение числа всех упорядоченных и неупорядоченных разбиений конечного множества.

1.12.2. Упорядоченные разбиения

Пусть (A_1, A_2, \dots, A_k) – упорядоченное разбиение n -множества A типа $[n_1, n_2, \dots, n_k]$.

Теорема 1.12.1. Число всех упорядоченных разбиений (A_1, A_2, \dots, A_k) n -элементного множества A , таких, что $|A_i| = n_i, i = 1, \dots, k$ вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (1.12.1)$$

Доказательство. Выборку n_1 элементов блока A_1 из n элементов множества A можно выполнить $C_n^{n_1}$ способами. После этого выборка

n_2 элементов блока A_2 будет проводиться из $n - n_1$ оставшихся элементов множества A , поэтому их можно выбрать $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами. Последующая выборка элементов блока A_3 будет осуществляться $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ способами и т. д.

Наконец, выборка элементов последнего блока разбиения A_k будет производиться из оставшихся $n - n_1 - \dots - n_{k-1} = n_k$ элементов, таких способов $C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k}$. По правилу произведения число всех таких упорядоченных разбиений множества A равно $C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \dots C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k}$. По формуле для подсчета числа сочетаний:

$$\begin{aligned} C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \dots C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k} &= \\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}{n_k!0!} = \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = P_n(n_1, n_2, \dots, n_k). \end{aligned}$$

Задача 1.12.1. При выборах президента компании из 23 членов совета директоров за проголосовали 12 человек, против – 9, воздержалось – 2. Сколькими способами могло пройти такое голосование?

Решение. Пусть A – множество всех членов директората, A_1, A_2 и A_3 – множества членов совета, проголосовавших за, проголосовавших против и воздержавшихся от голосования. Тогда $|A| = 23$, $|A_1| = 12$, $|A_2| = 9$, $|A_3| = 2$. Имеем разбиение множества A на три различных подмножества, поэтому искомое число способов голосования $P_{23}(12, 9, 2) = \frac{23!}{12!9!2!} = 446185740$. \square

Найдем число упорядоченных разбиений множества, для которых указан только ранг разбиения. Пусть n -множество A разбивается на k упорядоченных блоков (n различных предметов раскладывается по k различным ящикам). Условимся обозначать через $T(n, k)$ число всех разбиений, среди которых допускаются пустые блоки (пустые ящики), а через $T(n, k, r)$ – число всех разбиений, среди которых имеется ровно r пустых блоков.

Из теорем 1.10.1, 1.10.3 следует, что

$$T(n, k) = k^n; \quad (1.12.2)$$

$$T(n, k, 0) = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i (k-i)^n; \quad (1.12.3)$$

$$T(n, k, r) = C_k^r \sum_{i=0}^{k-r} (-1)^i C_{k-r}^i (k-r-i)^n. \quad (1.12.4)$$

В последней формуле учтено, что если ровно r блоков из k являются пустыми, то разбиение проводится по остальным $k - r$ блокам и все они не пусты; r пустых блоков из k можно выбрать C_k^r способами.

Задача 1.12.2. Сколькими способами ключи, ручку, записную книжку, расческу, носовой платок, бумажник и сотовый телефон можно разложить по четырем разным карманам?

Решение. Имеется разбиение семиэлементного множества на 4 различных блока, среди которых допускаются пустые. Поэтому искоемое число способов равно $T(7,4) = 4^7 = 16384$. \square

Задача 1.12.3. Решить предыдущую задачу при условии, что в каждый карман следует положить хотя бы один из предметов?

Решение. Имеем: $(7,4,0) = 4^7 - C_4^1(4-1)^7 + C_4^2(4-2)^7 - C_4^3(4-3)^7 = 8400$.

Рассмотрим упорядоченные разбиения множества на блоки, элементы в которых, в свою очередь, также упорядочены.

Теорема 1.12.2. Число всех упорядоченных разбиений n -множества на k упорядоченных блоков равно $n! C_{n+k-1}^n$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Добавим к n элементам этого множества $k - 1$ одинаковых элементов, например a , и рассмотрим всевозможные перестановки $n + k - 1$ элементов полученного мультимножества. В каждой такой перестановке добавленные элементы будут указывать некоторый способ интересующего нас разбиения множества A . В первый блок разбиения войдут элементы множества A , стоящие до первого a ; если перестановка начинается с a , то первый блок разбиения пуст. Во второй блок войдут элементы, стоящие между первым и вторым a ; если первый и второй элементы a стоят рядом, то пуст второй блок и т. д. Число всех перестановок мультимножества равно

$$P(\underbrace{1, \dots, 1}_n, k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(1!)^n (k-1)!} = n! C_{n+k-1}^{k-1}.$$

Задача 1.12.4. Сколькими способами можно расставить 10 различных книг по шести полкам книжного шкафа, если полка может вместить все 10 книг?

Решение. В рассматриваемой расстановке книг важно и то, на какую полку книги попадут, и то, в каком порядке они будут на ней поставлены. Поэтому число способов расстановки книг равно $10! C_{10+6-1}^{6-1} = 10! C_{15}^5 = \frac{15!}{5!} = 10897286400$.

В этой задаче допускается, что некоторые полки могут оказаться пустыми. Можно ввести дополнительное ограничение, потребовав, чтобы на каждую полку выставлялась хотя бы одна книга. В общем случае имеет место

Теорема 1.12.3. Число всех упорядоченных разбиений n -множества на k упорядоченных блоков, каждый из которых не пуст, равно $n! C_{n-1}^{k-1}$.

Доказательство. Опять к n элементам множества A добавим $k - 1$ одинаковых элементов a и рассмотрим перестановки этих $n + k - 1$ элементов. Выделим среди них перестановки, в которых добавленные элементы задают нужный способ разбиения множества A . Элемент a в перестановках не может теперь стоять в начале и в конце перестановки, а также два элемента a не могут стоять рядом (в этих случаях появляются пустые блоки). Значит, элементы a в перестановке могут занимать $n - 1$ место. Всего же эти $k - 1$ элементов можно расставить C_{n-1}^{k-1} способами. Элементы множества A расставляются $n!$ способами. Поэтому число упорядоченных разбиений n -множества A на k упорядоченных блоков равно $n! C_{n-1}^{k-1}$.

Задача 1.12.5. Сколькими способами можно расставить 10 различных книг по шести полкам так, чтобы не было пустых полок, если полка может вместить все 10 книг?

Решение. В задаче опять важно, на какую полку и в каком порядке расставляются книги, но теперь не должно быть пустых полок. Поэтому искомое число расстановок $10! C_{10-1}^{6-1} = \frac{9! 10!}{5! 4!} = 457228800$.

1.12.3. Неупорядоченные разбиения

Пусть дано n -множество A . Рассмотрим неупорядоченное разбиение этого множества на блоки $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}, i = 1, 2, \dots, n$, среди которых для каждого i имеется $m_i \geq 0$ блоков с i элементами, т. е. $\sum_{i=1}^n i \cdot m_i = n$. Число всех указанных разбиений обозначим через $S_n(m_1, m_2, \dots, m_n)$.

Теорема 1.12.4.

$$S_n(m_1, \dots, m_n) = \frac{n!}{m_1! \dots m_n! (1!)^{m_1} \dots (n!)^{m_n}}. \quad (1.12.5)$$

Доказательство. Заданное разбиение множества A представляет собой объединение блоков $A_{i\alpha}$:

$$A = \bigcup_{\alpha=1}^{m_1} A_{1\alpha} \cup \bigcup_{\alpha=1}^{m_2} A_{2\alpha} \cup \dots \cup \bigcup_{\alpha=1}^{m_n} A_{n\alpha} = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\alpha=1}^{m_i} A_{i\alpha},$$

в котором блоки $A_{i\alpha}$ попарно не пересекаются, не упорядочены и $|A_{i1}| = |A_{i2}| = \dots = |A_{im_i}| = i$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$.

Будем рассматривать подобное разбиение как упорядоченное разбиение, в котором первые m_1 мест занимают блоки с одним элементом, следующие m_2 мест – блоки с двумя элементами и т. д., последние m_n мест – с n элементами. Кроме того, будем считать, что все элементы блоков, в свою очередь, также упорядочены. Тогда

1) для каждого из m_i блоков A_{im_i} существует $i!$ перестановок его элементов; для всех A_{im_i} с фиксированным i таких перестановок элементов – $(i!)^{m_i}$;

2) существует $(m_i)!$ перестановок m_i блоков A_{im_i} .

Элементы множества A можно переставить $n!$ способами. Если отказаться от упорядоченности элементов в блоках, это число уменьшится в $(1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \dots (n!)^{m_n}$ раз, а если отказаться и от упорядоченности самих блоков, – еще в $m_1! m_2! \dots m_n!$ раз. Отсюда следует справедливость доказываемой формулы.

Задача 1.12.6. В одинаковые конверты нужно упаковать 14 различных открыток. Сколькими способами это можно сделать, если в два конверта надо положить по 2 открытки, еще в два – по 3 и в один – 4?

Решение. По условию конверты одинаковые, поэтому рассматривается неупорядоченное разбиение 14-элементного множества на 5 блоков, среди которых два содержат по 2 элемента, еще два – по 3 и один – 4. Поэтому $m_2 = 2$, $m_3 = 2$, $m_4 = 1$; остальные $m_i = 0$. Значит, искомое число разбиений равно

$$S_{14}(0, 2, 2, 1, 0, 0, \dots, 0) = \frac{14!}{(2!)^2 (3!)^2 (4!)^1 (2!)^2 1!} = 151351200. \quad \square$$

Пусть $S(n, k)$ – число всех способов неупорядоченного разбиения n -множества на k непустых блоков. Комбинаторные числа $S(n, k)$ называют *числами Стирлинга** второго рода.

Легко заметить, что $S(0, 0) = S(n, n) = 1$, $S(n, 0) = 0$ и $S(n, k) = 0$ для $k > n$.

* Джеймс Стирлинг (1692-1770) – шотландский математик. Основной труд – «Метод разностей», в котором впервые введен так называемый ряд Стирлинга и рассмотрены бесконечные произведения.

Теорема 1.12.5.

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=n, \\ n_1>0, n_2>0, \dots, n_k>0}} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}, \quad (1.12.6)$$

$$S(n, k) = \sum_{\substack{1m_1+2m_2+\dots+nm_n=n, \\ m_1+m_2+\dots+m_n=k, \\ m_1 \geq 0, m_2 \geq 0, \dots, m_n \geq 0}} \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_n! (1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \dots (n!)^{m_n}}, \quad (1.12.7)$$

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i (k-i)^n. \quad (1.12.8)$$

Доказательство. Формула (1.12.6) непосредственно вытекает из формулы (1.12.1).

В силу теоремы 1.12.4 числа $S(n, k)$ можно найти как сумму чисел $S_n(m_1, m_2, \dots, m_n)$, которая вычисляется для всех неотрицательных целочисленных решений системы

$$\begin{cases} 1m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n, \\ m_1 + m_2 + \dots + m_n = k, \end{cases}$$

т. е. справедлива формула (1.12.7).

Наконец, поскольку $S(n, k) = \frac{1}{k!} T(n, k, 0)$, то формула (1.12.8) следует из формулы (1.12.3). ■

Следствие. Число всех неупорядоченных разбиений n -множества на k блоков, среди которых могут быть пустые, равно $\sum_{i=0}^k S(n, i)$.

Задача 1.12.7. Сколькими способами 7 канареек можно рассадить в 4 одинаковые клетки, если: а) в каждую клетку нужно поместить хотя бы одну птицу, б) допускаются пустые клетки?

Решение. а) Чтобы найти ответ на первый вопрос задачи требуется вычислить $S(7, 4)$. На основании теоремы 1.12.5 это число может быть вычислено тремя способами.

Для использования формулы (1.12.6) требуется найти все положительные целочисленные решения уравнения

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 7.$$

В данной задаче это можно сделать простым перебором всех возможных вариантов:

$$\begin{aligned} &(4, 1, 1, 1), (1, 4, 1, 1), (1, 1, 4, 1), (1, 1, 1, 4), (3, 2, 1, 1), \\ &(3, 1, 2, 1), (3, 1, 1, 2), (2, 3, 1, 1), (1, 3, 2, 1), (1, 3, 1, 2), \\ &(2, 1, 3, 1), (1, 2, 3, 1), (1, 1, 3, 2), (2, 1, 1, 3), (1, 2, 1, 3), \\ &(1, 1, 2, 3), (2, 2, 2, 1), (2, 2, 1, 2), (2, 1, 2, 2), (1, 2, 2, 2). \end{aligned}$$

Поэтому

$$S(7,4) = \frac{1}{4!} \left(4 \cdot \frac{7!}{4!(1!)^3} + 12 \cdot \frac{7!}{2!3!(1!)^2} + 4 \cdot \frac{7!}{1!(2!)^3} \right) = 210 \cdot \left(\frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{2} \right) = 350.$$

При использовании формулы (1.12.7) нужно найти все неотрицательные целочисленные решения системы уравнений

$$\begin{cases} m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 + 5m_5 + 6m_6 + 7m_7 = 7, \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = 4. \end{cases}$$

Общее решение этой системы имеет вид:

$$\begin{cases} m_1 = 1 + m_3 + 2m_4 + 3m_5 + 4m_6 + 5m_7, \\ m_2 = 3 - 2m_3 - 3m_4 - 4m_5 - 5m_6 - 6m_7. \end{cases}$$

Анализ этого решения показывает, что $m_5 = m_6 = m_7 = 0$, а m_3, m_4 могут принимать только значения 0 и 1. Отсюда следует, что система имеет только три неотрицательных целочисленных решения: $(2,1,1,0,0,0,0)$, $(3,0,0,1,0,0,0)$, $(1,3,0,0,0,0,0)$. Следовательно,

$$S(7,4) = \frac{7!}{(2!)^2 3!} + \frac{7!}{3!4!} + \frac{7!}{3!(2!)^3} = \frac{7!}{3!} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{8} \right) = 350.$$

Наконец, по формуле (1.12.8) имеем:

$$S(7,4) = \frac{1}{4!} \sum_{i=0}^4 (-1)^4 C_4^i (4-i)^7 = \frac{1}{4!} (C_4^0 4^7 - C_4^1 3^7 + C_4^2 2^7 - C_4^3) = \frac{1}{24} (4^7 - 4 \cdot 3^7 + 6 \cdot 2^7 - 4) = 350.$$

б) Для ответа на второй вопрос задачи воспользуемся следствием теоремы 1.12.5. Вычисляя $S(7,1) = 1$, $S(7,2) = 63$, $S(7,3) = 301$, получим:

$$S(7,1) + S(7,2) + S(7,3) + S(7,4) = 1 + 63 + 301 + 350 = 715. \square$$

Таким образом, при использовании формул (1.12.6), (1.12.7) необходимо искать все целочисленные решения соответствующих систем линейных уравнений, что само по себе при больших n и k опять является достаточно трудной задачей. Поэтому эти формулы в вычислительной практике мало пригодны и используются крайне редко. Не очень удобна и формула (1.12.8), которая при больших n и k также приводит к громоздким вычислениям. Гораздо эффективней при вычислении чисел $S(n, k)$ использовать связывающие их рекуррентные соотношения, которые будут рассмотрены во второй главе.

Число всех неупорядоченных разбиений n -множества на непустые подмножества (блоки) обычно обозначают через $B(n)$. Комбинаторные числа $B(n)$ называются *числами Белла*. Они связаны с числами Стирлинга второго рода соотношением

$$B(n) = \sum_{k=0}^n S(n, k), \quad (1.12.9)$$

при этом $B(0) = S(0, 0) = 1$.

Можно, наконец, рассмотреть неупорядоченные разбиения множества на непустые блоки, в которых упорядочены элементы в блоках разбиения. Для вычисления числа таких разбиений следует воспользоваться теоремами 1.12.2 и 1.12.3. Так, из теоремы 1.12.3 следует, что число всех неупорядоченных разбиений n -множества, состоящих из k непустых упорядоченных блоков, равно $\frac{n!}{k!} C_{n-1}^{k-1}$.

Задача 1.12.8. Девять различных марок нужно наклеить на 3 одинаковых конверта. Сколькими способами это можно сделать, если порядок, в котором наклеиваются марки, считается существенным и на каждый конверт наклеивается хотя бы одна марка?

Решение. При любом наклеивании марок, удовлетворяющем условию задачи, 9 марок надо разбить на три непустые части, а затем марки из каждой части наклеить в определенном порядке на один из конвертов. Поэтому искомое число способов равно $\frac{9!}{3!} C_{9-1}^{3-1} = \frac{9! \cdot 8!}{2! \cdot 3! \cdot 6!} = 1693440$. □

§ 1.13. Разбиения чисел

Рассматриваются примеры решения задач о разбиении натурального числа n на целые неотрицательные слагаемые (части), порядок которых либо учитывается, либо не учитывается. В подобных задачах можно говорить не о разбиении числа, а о раскладке одинаковых (неразличимых) предметов по ящикам, которые могут быть различимыми и неразличимыми.

1.13.1. Раскладки по различимым ящикам

Рассмотрим случай, когда указаны число предметов и число ящиков.

Теорема 1.13.1. Число способов раскладки n одинаковых предметов по k различимым ящикам равно

$$P_{n+k-1}(n, k-1) = C_{n+k-1}^n. \quad (1.13.1)$$

Доказательство. Поставим в соответствие n данным одинаковым предметам n единиц и добавим к ним $k-1$ нулей. Рассмотрим всевозможные перестановки с повторениями этих $n+k-1$ цифр. Каждой такой перестановке с повторениями из n единиц и $k-1$ нулей

ставится во взаимно-однозначное соответствие определенный способ раскладки n одинаковых предметов по k ящикам. Число единиц, стоящих перед первым нулем показывает количество предметов, оказавшихся в первом ящике, число единиц между первым и вторым нулем – количество предметов во втором ящике и т. д. Вновь, если перестановка начинается с нуля, то это означает, что в первом ящике не оказалось ни одного предмета, а если перестановка заканчивается нулем – предметов не оказалось в последнем k -м ящике. Точно так же два или более нулей подряд указывают на отсутствие предметов в соответствующих ящиках. Справедливость теоремы следует из формулы для вычисления числа перестановок с повторениями.

Примечание. Теорему можно сформулировать в виде: число способов разбиения натурального числа n на k целых неотрицательных слагаемых, порядок которых учитывается, равно C_{n+k-1}^n .

В рассмотренной теореме допускается наличие пустых ящиков. Теперь предположим, что в каждый ящик укладывается не менее чем l предметов, где $l \leq \frac{n}{k}$. Чтобы осуществить такое разбиение, сначала раскладывается lk предметов – по l предметов в каждый из k ящиков. Оставшиеся после этого $n - lk$ предметов распределяются уже рассмотренным в теореме 1.13.1 способом. Поэтому справедливо

Следствие. Число способов раскладки n одинаковых предметов по k различным ящикам, при которых:

– в каждый ящик кладется не менее l предметов, равно $C_{n-lk+k-1}^{n-lk} = C_{n-lk+k-1}^{k-1}$;

– все ящики не пусты, равно $r(n, k) = C_{n-1}^{k-1}$.

Второе утверждение следствия соответствует случаю $l = 1$ (в ящике содержится хотя бы один предмет).

Задача 1.13.1. На базу завезли 25 одинаковых мебельных гарнитуров. а) Сколькими способами их можно распределить между тремя мебельными магазинами? б) Сколькими способами их можно распределить между тремя мебельными магазинами, если каждый магазин должен получить не менее 5 гарнитуров?

Решение. а) Задано разбиение 25 одинаковых предметов по 3 различным ящикам, когда допускаются пустые ящики. Поэтому искомое число $C_{25+3-1}^{25} = C_{27}^{25} = 351$.

б) Распределим 15 гарнитуров – по 5 в каждый магазин. После этого останется 10 гарнитуров, которые можно распределить между тремя магазинами $C_{10+3-1}^2 = C_{12}^2 = 66$ способами.

1.13.2. Раскладки по неразличимым ящикам. Диаграммы Ферре – Юнга

Задачи о раскладке одинаковых предметов по неразличимым ящикам (о разбиении натурального числа на целые неотрицательные слагаемые, порядок которых считается несущественным), как правило, решаются методом рекуррентных соотношений, который будет рассматриваться в следующей главе. В данном пункте предметом изучения станут так называемы диаграммы Ферре – Юнга. Геометрическая наглядность этих диаграмм нередко существенно облегчают поиск и доказательство свойств неупорядоченных разбиений чисел.

Каждому неупорядоченному разбиению натурального числа n на слагаемые сопоставим диаграмму, строки которой содержат столько элементов, сколько единиц составляют соответствующее слагаемое разбиения. Например, разбиение $13 = 2 + 3 + 4 + 4$ можно интерпретировать с помощью диаграмм на рисунках 13, 14. Эти диаграммы отличаются тем, что на первой из них для изображения единиц применяются точки, на второй – квадратные клетки. Такие диаграммы могут также различаться порядком расположения строк (на самом деле, порядок слагаемых в разбиении числа роли не играет). Точечная диаграмма обычно называется диаграммой Ферре; ее строки расположены так, что их длина (число точек в строке) сверху вниз не убывает. Клеточная диаграмма называется диаграммой Юнга; длина ее строк сверху вниз не возрастает.

Задача 1.13.2. Доказать, что количество способов разбиения числа n на не более чем t слагаемых равно количеству способов разбиения числа $n + t$ на t слагаемых.

Решение. Любая диаграмма Ферре, соответствующая разбиению числа n на не более чем t слагаемых, состоит из n точек, расположенных не более чем в t строках. Добавим слева к каждой из таких диаграмм еще один столбец из t точек. Получится диаграмма из $n + t$ точек, расположенных в t строках. Наоборот, у каждой диаграммы Ферре из $n + t$ точек, расположенных в t строках, уберем левый столбец. При этом получится диаграмма из n точек, расположенных не более чем

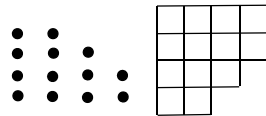


Рис. 13

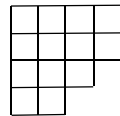


Рис. 14



Рис. 15

в m строках. С помощью рассмотренных преобразований устанавливается взаимно однозначное соответствие между указанными диаграммами из n и $n + m$ точек.

На рисунке 15 изображены одна из исходных диаграмм и результат ее преобразования для $n = 7, m = 4$. □

Задача 1.13.3. Доказать, что количество разбиений числа n на 3 слагаемых равно количеству разбиений числа $2n$ на 3 слагаемых, каждое из которых меньше, чем n .



Рис. 16

Решение. Построим диаграмму Ферре, соответствующую некоторому разбиению числа n на 3 слагаемых, до «прямоугольника» размером $3 \times n$. Добавленные точки с точностью до положения образуют диаграмму Ферре, соответствующую разбиению числа $2n$ на 3 слагаемых, каждое из которых меньше, чем n . Очевидно, что такое достраивание устанавливает биективное соответствие между разбиениями, описанными в условии задачи. На рис. 16 показано одно из разбиений числа 10 и соответствующее ему разбиение числа 20. □

Для каждой диаграммы Ферре (Юнга) можно построить двойственную диаграмму, которая получается в результате зеркального отражения данной диаграммы относительно ее «диагонали». Такое преобразование диаграммы Ферре показано на рисунке 17. Ясно, что при повторном зеркальном отражении полученная диаграмма перейдет в исходную. Поэтому все диаграммы разбиваются на пары, двойственные друг другу.

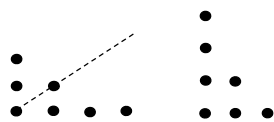


Рис. 17

При этом некоторые диаграммы при отражении будут переходить в себя, т. е. являться двойственными сами себе (рис. 18); такие диаграммы и соответствующие им разбиения называются *симметричными*.

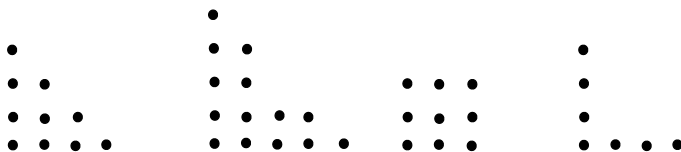


Рис. 18

Рассмотрим примеры задач, решение которых основано на сравнении двойственных диаграмм.

Задача 1.13.4. Доказать, что количество разбиений числа n на слагаемые, не превосходящие k , равно количеству разбиений числа n на не более чем k слагаемых.

Решение. Диаграммы, соответствующие разбиению числа n на слагаемые, не превосходящие k , состоят из n точек; при этом каждая строка содержит не более чем k точек. Поэтому любая такая диаграмма имеет не более k столбцов. Следовательно, двойственная ей диаграмма, также содержащая n точек, имеет не более чем k строк, и значит, соответствует разложению числа n не более чем на k слагаемых.

Задача 1.13.5. Доказать, что количество разбиений числа n на различные нечетные слагаемые равно количеству его симметричных разбиений.

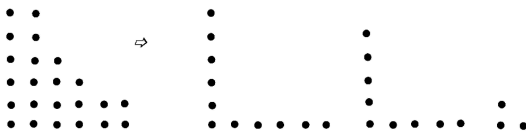


Рис. 19

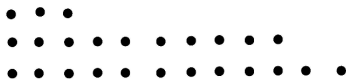


Рис. 20

Решение. Каждую симметричную диаграмму можно разбить на симметричные «углы» (рис. 19), причем каждый угол будет содержать нечетное число точек, а количество точек в разных углах будет различным. «Распрявим» углы в строки и составим из этих строк диаграмму Ферре (рис. 20). Каждая строка этой диаграммы будет, таким образом, состоять из нечетного числа точек, а количество точек в строках будет различным. При этом каждой симметричной диаграмме будет соответствовать единственная диаграмма из различных строк нечетной

длины. Наоборот, каждой диаграмме, составленной из различных строк нечетной длины, можно поставить в соответствие единственную симметричную диаграмму. Для этого нужно каждую ее строку «согнуть» в угол с вершиной в центральной точке и провести из полученных углов «сборку» соответствующей симметричной диаграммы.

§ 1.14. Примеры разбиения мультимножеств

Задачи, аналогичные рассмотренным в двух предыдущих параграфах, возникают и при разбиениях мультимножеств. Такие разбиения можно интерпретировать как раскладки предметов различных типов по разным или одинаковым ящикам. В качестве примеров таких задач рассмотрены задачи о разделе нескольких совокупностей однородных предметов между k лицами.

Теорема 1.14.1. *Число способов, которыми можно разложить по k различным ящикам совокупность предметов, включающую n_1 предметов первого типа, n_2 предметов второго типа и т. д., n_r предметов r -го типа, равно $C_{n_1+k-1}^{k-1} C_{n_2+k-1}^{k-1} \dots C_{n_r+k-1}^{k-1}$.*

Истинность утверждения вытекает из теоремы 1.13.1 и правила произведения.

Следствие. *Число способов, которыми можно разложить по k различным ящикам совокупность предметов, в которой n_1 предметов первого типа, n_2 предметов второго типа и т. д., n_r предметов r -го типа, так, чтобы в каждом ящике:*

– было $m_1 \leq \frac{n_1}{k}$ предметов первого типа, $m_2 \leq \frac{n_2}{k}$ предметов второго типа и т. д., $m_r \leq \frac{n_r}{k}$ предметов r -го типа, равно $C_{n_1-km_1+k-1}^{k-1} C_{n_2-km_2+k-1}^{k-1} \dots C_{n_r-km_r+k-1}^{k-1}$;

– был хотя бы один предмет каждого типа, равно $C_{n_1-1}^{k-1} C_{n_2-1}^{k-1} \dots C_{n_r-1}^{k-1}$.

Справедливость первого утверждения следует из следствия 1 теоремы 1.13.1. Второе утверждение соответствует случаю $m_1 = m_2 = \dots = m_r = 1$.

Теорема 1.14.2. *Число способов, которыми можно разложить по k различным ящикам совокупность предметов, включающую n_1 предметов первого типа, n_2 предметов второго типа и т. д., n_r предметов r -го типа, так, чтобы в каждом ящике был хотя бы один предмет, равно*

$$C_{n_1+k-1}^{k-1} C_{n_2+k-1}^{k-1} \dots C_{n_r+k-1}^{k-1} - C_k^1 C_{n_1+k-2}^{k-2} C_{n_2+k-2}^{k-2} \dots C_{n_r+k-2}^{k-2} +$$

$$+ C_k^2 C_{n_1+k-3}^{k-3} C_{n_2+k-3}^{k-3} \dots C_{n_r+k-3}^{k-3} - \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1}.$$

Справедливость теоремы следует из теоремы 1.14.1 и формулы включений и исключений (1.6.15).

Задача 1.14.1. Сколькими способами можно разделить 8 яблок, 10 груш и 7 апельсинов между 4 ребятами?

Решение. Предметы трех типов делятся на 4 группы без каких-либо ограничений. Этот случай соответствует теореме 1.14.1, поэтому раздел можно осуществить $C_{8+4-1}^{4-1} C_{10+4-1}^{4-1} C_{7+4-1}^{4-1} = C_{11}^3 C_{13}^3 C_{10}^3 = 5662800$ способами. \square

Задача 1.14.2. Сколькими способами можно разделить 8 яблок, 10 груш и 7 апельсинов между 4 ребятами так, чтобы каждому досталось хотя бы: а) по яблоку, 2 груши и апельсину; б) по одному фрукту каждого вида; в) по одному фрукту?

Решение. а) При разделе предметов трех типов установлено ограничение: каждый из четырех участников раздела должен получить хотя бы один предмет первого (яблоко) и третьего (апельсин) типа и два предмета второго типа (груша). Этот случай соответствует первому утверждению следствия теоремы 1.14.1. В задаче $m_1 = m_3 = 1$, $m_2 = 2$ поэтому раздел можно осуществить

$$C_{8-4+1+4-1}^{4-1} C_{10-4+2+4-1}^{4-1} C_{7-4+1+4-1}^{4-1} = C_7^3 C_5^3 C_6^3 = 7000$$

способами.

б) По условию каждый участник раздела должен получить хотя бы по одному фрукту каждого вида. Согласно второму утверждению следствия теоремы 1.14.1 искомое число способов деления фруктов $C_{8-1}^{4-1} C_{10-1}^{4-1} C_{7-1}^{4-1} = C_7^3 C_9^3 C_6^3 = 58800$.

в) Теперь каждый участник раздела должен получить хотя бы один фрукт (любого вида). Такой раздел соответствует условию теоремы 1.14.2, поэтому он может быть произведен

$C_{11}^3 C_{13}^3 C_{10}^3 - C_4^1 \cdot C_{10}^2 C_{12}^2 C_9^2 + C_4^2 \cdot C_9^1 C_{11}^1 C_8^1 - C_4^3 = 5239868$ способами.

Глава 2

Метод рекуррентных соотношений

§ 2.1. Примеры задач, приводящих к рекуррентным соотношениям

Вводится понятие рекуррентного соотношения, приводятся примеры рекуррентных соотношений.

2.1.1. Задание комбинаторных чисел рекуррентными соотношениями

Числовые последовательности, в которых каждый член, начиная с некоторого, выражается через предыдущие, называются *рекуррентными* (от латинского *recurrere* – возвращаться)*, или возвратными. Функциональная зависимость, связывающая члены рекуррентной последовательности, называется *рекуррентным соотношением*, а процесс последовательного вычисления членов такой последовательности – *рекурсией* или рекурсивным процессом.

Простейшие примеры рекуррентных числовых последовательностей дают хорошо известные еще из школьного курса алгебры арифметическая и геометрическая прогрессии.

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность

$$u_1 = a, u_2 = a + d, u_3 = a + 2d, \dots, u_n = a + (n - 1)d, \dots,$$

в которой каждый член, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и постоянного для этой последовательности числа d :

$$u_{n+1} = u_n + d. \quad (2.1.1)$$

Число d называется *разностью* арифметической прогрессии. Рекуррентное соотношение (2.1.1) задает бесконечно много арифметических прогрессий с одинаковой разностью d . Для того чтобы выделить из этого множества некоторую определенную арифметическую прогрессию, необходимо задать ее первый член $u_1 = a$.

* Термин «рекуррентность» ввел английский математик Абрахам де Муавр (1667–1754). Муавр нашел формулу для возведения в n -ю степень и извлечения корня n -й степени для комплексных чисел (формула Муавра), впервые воспользовался возведением в степень бесконечных рядов.

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность

$$u_1 = a, u_2 = aq, u_3 = aq^2, \dots, u_n = aq^{n-1}, \dots,$$

в которой каждый член, начиная со второго, равен произведению предыдущего члена и постоянного для этой последовательности числа q :

$$u_{n+1} = u_n q. \quad (2.1.2)$$

Число q называется *знаменателем* геометрической прогрессии. Рекуррентное соотношение (2.1.2) также задает бесконечно много геометрических прогрессий с одинаковым знаменателем q , а определенная геометрическая прогрессия из этого множества выделяется заданием первого члена $u_1 = a$.

Арифметические и геометрические прогрессии часто встречаются в вычислениях конечных сумм. Для их использования нужно знать формулы суммы конечного числа первых членов прогрессии:

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} n = \frac{(2a + (n-1)d)n}{2},$$

$$S_n = \frac{u_n q - u_1}{q - 1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \text{ при } q \neq 1, S_n = na \text{ при } q = 1.$$

Заметим, что в комбинаторных вычислениях нумерация членов прогрессий чаще всего начинается с 0, а не с 1, как в школьном курсе алгебры.

Во многих случаях при подсчете комбинаторных чисел гораздо удобней прибегать к рекурсии, чем пользоваться явными формулами для их вычисления. Этот метод используется в тех случаях, когда удастся последовательно выражать вычисляемые комбинаторные числа через меньшие числа того же вида, т. е. находить связывающие их рекуррентные соотношения.

Убедительным примером эффективности такого подхода может служить вычисление числа беспорядков D_n . В пункте 1.10.3 первой главы была найдена явная вычислительная формула

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

Использование этой формулы при больших n сопряжено с громоздкими вычислениями. Однако достаточно простые преобразования позволяют найти для чисел D_n рекуррентное соотношение, позволяющее существенно сократить процесс вычислений. Действительно, представив правую часть формулы в виде

$$n \cdot (n-1)! \left(\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right) + (-1)^n \frac{1}{n!} \right),$$

приходим к рекуррентному соотношению

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n.$$

Учитывая, что $D_0 = 1$, последовательно находим $D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 2, D_4 = 9, D_5 = 44, D_6 = 265, D_7 = 1854$ и т. д.

В некоторых случаях, наоборот, более целесообразно от рекуррентного задания комбинаторных чисел переходить к их заданию с помощью явных формул. Для этого рекуррентное соотношение рассматривают как уравнение и решают его при заданных начальных условиях.

Наконец, надо иметь в виду, что для некоторых комбинаторных чисел найти явные формулы достаточно трудно или совсем не удастся, но при этом относительно просто установить связывающие их рекуррентные соотношения.

Приведем примеры некоторых известных рекуррентных соотношений.

2.1.2. Числа Фибоначчи

При введении понятия рекуррентного соотношения в учебной литературе традиционно приводится следующая задача:

*Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух разнополых крольчат. Каждая новая пара кроликов через два месяца после рождения тоже приносит приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара только что народившихся кроликов? **

Из условия задачи следует, что:

- через месяц по-прежнему будет одна пара кроликов;
- через два месяца будут 2 пары (первая пара и ее приплод);
- через три месяца – 3 пары (приплод опять даст только первая пара);
- через четыре месяца – 5 пар (приплод дадут первая пара и достигшая двухмесячного возраста вторая) и т.д.

Количество пар кроликов, которое будет через n месяцев, обозначим через F_n . Через месяц к этим F_n парам добавится еще столько новых пар, сколько было пар в конце $(n - 1)$ -го месяца, т. е. F_{n-1} пар. Отсюда следует, что $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ или

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \quad (2.1.3)$$

* Задача была опубликована в 1202 г. в сочинении «Liber Abacci» («Книга об абаке») знаменитого итальянского математика Леонардо Пизанского, больше известного по прозвищу Фибоначчи (сын Боначчи).

Соотношение (2.1.3) позволяет найти число пар на конец любого месяца, если известно количество пар кроликов в два предыдущих месяца. В нашем случае:

Месяц (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Количество пар (F_n)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

При желании эту таблицу можно продолжать сколько угодно. Полученная бесконечная числовая последовательность

$F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, \dots, F_{10} = 89, F_{11} = 144, F_{12} = 233, \dots$ называется *последовательностью Фибоначчи*, а ее члены F_n – *числами Фибоначчи*. Заметим, что для того чтобы вычислить любой член последовательности Фибоначчи, кроме рекуррентного соотношения (2.1.3) необходимо задать начальные условия – два первых члена $F_0 = 1, F_1 = 1$. Если придать F_0 и F_1 начальные значения, отличные от 1, то получится другая числовая последовательность.

Примечание. Числа Фибоначчи появляются при решении самых разнообразных перечислительных задач. Они самым неожиданным образом возникают при исследовании различных природных объектов. Причина этого кроется в том, что поведение этих объектов подчиняется закономерности, аналогичной описанной закономерности размножения кроликов. Поэтому математики и естествоиспытатели неоднократно обращались к изучению свойств чисел Фибоначчи. В частности, французский астроном Ж.-Д. Кассини в 1680 году нашел соотношение $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^{n-1}$, получившее его имя. Само название «числа Фибоначчи» ввел французский математик Э. Люка, продуктивно занимавшийся изучением их свойств во второй половине XIX века. Им же введены так называемые числа Люка, которые определяются рекуррентным соотношением $L_0 = 1, L_1 = 3, L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$. Нетрудно заметить, что это соотношение отличается от соотношения Фибоначчи (2.1.3) только начальными членами. Докажите, что числа Люка и числа Фибоначчи связаны соотношением $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$.

2.1.3. Сумма m -х степеней натуральных чисел

Часто встречается рекуррентное соотношение, которое получил Якоб Бернулли* при вычислениях сумм m -х степеней натуральных чисел:

$$S_n^m = 1^m + 2^m + \dots + n^m.$$

Вывода соотношения, найденного Я. Бернулли, не сохранилось, но к полученной им формуле можно прийти с помощью следующих

* Якоб Бернулли (1654–1705) – швейцарский математик. Совместно с братом Иоганном Бернулли (1667–1748) заложил основы вариационного исчисления, доказал теорему Бернулли (частный случай закона больших чисел).

рассуждений. Согласно формуле бинорма Ньютона имеют место следующие равенства:

$$(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + C_{m+1}^1 n^m + \dots + C_{m+1}^m n + C_{m+1}^{m+1};$$

$$((n-1)+1)^{m+1} = (n-1)^{m+1} + C_{m+1}^1 (n-1)^m + \dots + C_{m+1}^m (n-1) + C_{m+1}^{m+1};$$

$$(2+1)^{m+1} = 2^{m+1} + C_{m+1}^1 2^m + \dots + C_{m+1}^m 2 + C_{m+1}^{m+1};$$

$$(1+1)^{m+1} = 1^{m+1} + C_{m+1}^1 1^m + \dots + C_{m+1}^m 1 + C_{m+1}^{m+1}.$$

Складывая их по частям, получим:

$$(n+1)^{m+1} = 1 + C_{m+1}^1 S_n^m + C_{m+1}^2 S_n^{m-1} + \dots + C_{m+1}^m S_n^1 + C_{m+1}^{m+1} S_n^0.$$

Таким образом, приходим к рекуррентному соотношению

$$S_n^m = \frac{1}{m+1} ((n+1)^{m+1} - 1 - C_{m+1}^2 S_n^{m-1} - \dots - C_{m+1}^m S_n^1 - C_{m+1}^{m+1} S_n^0).$$

Очевидно, что

$$S_n^0 = 1^0 + 2^0 + \dots + n^0 = n, \quad S_n^1 = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \frac{1}{3} ((n+1)^3 - 1 - C_3^2 S_n^1 - C_3^3 S_n^0) = \\ &= \frac{1}{3} \left((n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Точно так же находится сумма $S_n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ и суммы более высоких степеней.

Нетрудно заметить, что для любого m сумма S_n^m будет многочленом от n степени $m+1$, свободный член которого равен нулю. Поэтому найденное рекуррентное соотношение можно записать в виде $S_n^m = \frac{1}{m+1} (\beta_0 n^{m+1} + C_{m+1}^1 \beta_1 n^m + \dots + C_{m+1}^m \beta_m n)$, Именно эту формулу нашел Я. Бернулли, а числа β_i получили его имя. В следующей главе мы покажем, что они удовлетворяют неявному рекуррентному соотношению $\sum_{i=1}^{m+1} C_{m+1}^i \beta_{m+1-i} = 0$, $\beta_0 = 1$.

2.1.4. Анализ алгоритмов типа «разделяй и властвуй»

В программировании анализ алгоритма направлен на то, чтобы определить ресурсы, необходимые для его реализации на компьютере. Чаще всего оценивается время вычислений. При этом время работы программы представляется как функция, зависящая от размера входных данных; причем понятия «время работы алгоритма» и «размер входных данных» уточняются в соответствии с рассматриваемой задачей.

Многие алгоритмы имеют рекурсивную структуру, т. е. в процессе решения задачи конечное число раз вызывают сами себя. Такие алгоритмы обычно разрабатываются с помощью метода «разделяй и властвуй». Данная задача разбивается на несколько подзадач того же вида, но имеющих меньшую размерность. Эти подзадачи опять решаются рекурсивным методом. Затем из найденных решений комбинируется решение исходной задачи.

Пусть $T(n)$ – время решения данной задачи размера n и пусть для малых $n \leq c$, где c – некоторая известная константа, эта задача решается в течение фиксированного времени, его обозначают $\theta(1)$. Представим, что исходная задача разбивается на a подзадач, имеющих размер $\frac{n}{b}$. Если это разбиение осуществляется за время $D(n)$, а объединение решений подзадач в решение исходной задачи – за время $C(n)$, то время $T(n)$ решения данной задачи удовлетворяет рекуррентному соотношению:

$$T(n) = \begin{cases} \theta(1) & \text{при } n \leq c, \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + D(n) + C(n) & \text{при } n > c. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Для того чтобы установить границы производительности алгоритма, требуется решить полученное рекуррентное соотношение, а затем исследовать асимптотическое поведение найденного решения.

Примечание. В общем случае частное $\frac{n}{b}$ может не быть целым числом. Поэтому вместо $T\left(\frac{n}{b}\right)$ надо, казалось бы, рассматривать $T\left(\left\lfloor\frac{n}{b}\right\rfloor\right)$ либо $T\left(\left\lceil\frac{n}{b}\right\rceil\right)$. Однако, можно доказать, что выполненная замена не влияет на асимптотическое поведение решения рассматриваемого рекуррентного соотношения.

§ 2.2. Рекурсия в задачах о разбиении чисел

Даны примеры решения перечислительных задач о разбиении чисел (о раскладке одинаковых предметов по ящикам) с помощью рекуррентных соотношений.

2.2.1. Раскладка одинаковых предметов по неразличимым ящикам

Число способов раскладки n одинаковых предметов по k неразличимым ящикам, при которых нет пустых ящиков, обозначим через $R(n, k)$.

Теорема 2.2.1. Число $R(n, k)$ способов раскладки n одинаковых предметов по k неразличимым ящикам, при которых нет пустых ящиков, удовлетворяет соотношению

$$R(n, k) = R(n - 1, k - 1) + R(n - k, k). \quad (2.2.1)$$

Доказательство. Выделим среди раскладок, о которых говорится в условии теоремы, раскладки, содержащие в одном из ящиков ровно один предмет. В этом случае оставшиеся $n - 1$ предметов распределяются по остальным $k - 1$ ящикам $R(n - 1, k - 1)$ способами. Все остальные раскладки можно получить, если сразу класть в каждый из k ящиков по одному предмету, а затем распределить по ним остальные $n - k$ предметов; таких способов раскладки — $R(n - k, k)$. По правилу суммы

$$R(n, k) = R(n - 1, k - 1) + R(n - k, k). \blacksquare$$

Поскольку n предметов можно единственным образом уложить в один ящик, то $R(n, 1) = 1$. Кроме того, естественно считать, что $R(0, k) = 1$.

Следствие 1. Если $n - k < k$, то

$$R(n, k) = R(n - 1, k - 1).$$

Следствие 2. Число всех способов раскладки n одинаковых предметов по k неразличимым ящикам, при которых:

– допускаются пустые ящики, равно $\sum_{i=1}^k R(n, i)$;

– в каждый ящик кладется не менее $l \leq \frac{n}{k}$ предметов, равно

$$\sum_{i=1}^k R(n - kl, i).$$

Следствие 3.

$$R(n, k) = R(n - 1, k - 1) + R(n - k - 1, k - 1) + \\ + R(n - 2k - 1, k - 1) + \dots \quad (2.2.2)$$

Действительно, из соотношения (2.2.1) имеем:

$$R(n - k, k) = R(n - k - 1, k - 1) + R(n - 2k, k),$$

$$R(n - 2k, k) = R(n - 2k - 1, k - 1) + R(n - 3k, k)$$

и т. д.

Для разбиения числа на слагаемые, порядок которых не учитывается, доказанная теорема формулируется так: число $R(n, k)$ способов разбиения числа n на k натуральных слагаемых, порядок которых не учитывается, удовлетворяет рекуррентному соотношению (2.2.1). Аналогичным образом переформулируются и следствия теоремы.

Рекуррентное соотношение (2.2.2), полученное в следствии 3, и начальное условие $R(n, 1) = 1$ позволяют для всех n последовательно вычислить $R(n, 2)$, $R(n, 3)$ и т. д. (табл. 4).

Таблица 4

n	k										
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
0	1										...
1	1	1									...
2	1	1	1								...
3	1	1	1	1			0				...
4	1	1	2	1	1						...
5	1	1	2	2	1	1					...
6	1	1	3	3	2	1	1				...
7	1	1	3	4	3	2	1	1			...
8	1	1	4	5	5	3	2	1	1		...
9	1	1	4	7	6	5	3	2	1	1	...
...

Задача 2.2.1. Сколькими способами 10 одинаковых открыток можно разложить по 3 одинаковым конвертам так, чтобы в каждом конверте: а) лежала хотя бы одна открытка, б) лежало не менее 2, не менее 3 открыток?

Решение. а) Требуется найти $R(10,3)$. Согласно формуле (2.2.1): $R(10,3) = R(9,2) + R(7,3)$. Из таблицы 6 видим, что $R(9,2) = 4$, $R(7,3) = 4$; поэтому $R(10,3) = 8$. Это разложения на части:

$$10 = 1 + 1 + 8 = 1 + 2 + 7 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = \\ = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4.$$

б) По следствию 2 искомое число способов соответственно равно $\sum_{i=1}^3 R(10 - 3 \cdot 2, i) = \sum_{i=1}^3 R(4, i) = R(4,1) + R(4,2) + R(4,3) = 1 + 2 + 1 = 4$,

$$\sum_{i=1}^3 R(10 - 3 \cdot 3, i) = \sum_{i=1}^3 R(1, i) = R(1,1) + R(1,2) + R(1,3) = 1 + 0 + 0 = 1. \square$$

2.2.2. Разбиения чисел с ограничениями

В перечислительной комбинаторике решаются самые разнообразные задачи о разбиении чисел с дополнительными ограничениями, наложенными на вид разбиения и/или на слагаемые разбиения. Типичными примерами таких задач служат задачи об оплате и размене. Основным методом решения подобных задач является их последовательное сведение к задачам о разбиении меньших чисел и/или о разбиении на меньшее число слагаемых. Большое число задач на разбиения с

ограничениями различных видов рассмотрено в пособии [5] Н. Я. Виленкина. Приведем пример подобной задачи.

Пусть дано целое неотрицательное число n и требуется найти число способов представления этого числа в виде суммы заданных натуральных чисел n_1, \dots, n_k . Ограничением в этой задаче является то, что изначально заданы слагаемые, на которые производится разбиение числа n . Можно сформулировать целый ряд дополнительных ограничений, например, потребовать, чтобы каждое из слагаемых n_1, \dots, n_k входило в сумму не более одного раза, ограничить количество слагаемых в сумме и т. п. Рассмотрим случай, когда слагаемые n_1, \dots, n_k в сумме могут повторяться.

Число способов разбиения числа n на слагаемые n_1, \dots, n_k , при которых допускаются одинаковые слагаемые, обозначим через $f(n)$, если порядок слагаемых считается существенным, и через $F(n; n_1, \dots, n_k)$, если разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

Найдем рекуррентное соотношение для чисел $f(n)$. Очевидно, что отрицательное число нельзя представить в виде суммы натуральных чисел, поэтому $f(n) = 0$, если $n < 0$. Кроме того, естественно считать, что $f(n) = 1$, если $n = 0$; это условие формально выражает тот факт, что существует единственный способ представить число 0 в виде суммы заданных чисел, совсем не выполняя разбиения. Рассмотрим случай $n > 0$. Пусть последнее слагаемое в сумме, удовлетворяющей указанным ограничениям, равно n_i , где i принимает одно из значений $1, \dots, k$; тогда сумма остальных слагаемых равна $n - n_i$. Наоборот, прибавляя к любой сумме слагаемых n_1, \dots, n_k , равной $n - n_i$, слагаемое n_i , получим n . Число различных сумм, в которых на последнем месте стоит n_i , равно $f(n - n_i)$. Поэтому по правилу суммы количество $f(n)$ всех разбиений числа n на слагаемые n_1, \dots, n_k , порядок слагаемых в которых считается существенным, равно сумме $f(n - n_1) + \dots + f(n - n_k)$. Таким образом,

$$f(n) = f(n - n_1) + \dots + f(n - n_k).$$

В том случае, когда порядок слагаемых считается несущественным, числа $F(n; n_1, \dots, n_k)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$F(n; n_1, \dots, n_k) = F(n; n_1, \dots, n_{k-1}) + F(n - n_k; n_1, \dots, n_k).$$

Для доказательства этого соотношения все разбиения числа n , удовлетворяющие заданным условиям, разобьем на два класса. К первому

классу отнесем те разбиения, в которые входит слагаемое n_k , а ко второму классу – все остальные. Если число n_k входит в разбиение числа n , то сумма остальных слагаемых в этом разбиении равна $n - n_k$, и также составлена из слагаемых n_1, \dots, n_k . Число же $n - n_k$ указанным образом можно разбить $F(n - n_k; n_1, \dots, n_k)$ способами. В том случае, когда число n_k не входит в разбиение числа n , это разбиение состоит только из слагаемых n_1, \dots, n_{k-1} ; таких разбиений $F(n; n_1, \dots, n_{k-1})$. Справедливость соотношения вытекает из того, что выделенные классы исчерпывают все требуемые разбиения числа n .

В случае неупорядоченных разбиений естественно считать, что $F(0; n_1, \dots, n_k) = 1$.

Задача 2.2.2. Для оплаты некоторой коммунальной услуги надо перечислить через банкомат сумму в 2100 руб. Сколькими способами можно оплатить услугу банкнотами в 100, 500 и 1000 руб., если два способа, отличающиеся порядком, в котором банкноты отправляются в банкомат, считаются: а) различными, б) неразличимыми?

Решение. Очевидно, что задача сводится к задаче о разбиении числа 21 на слагаемые, равные 1, 5 и 10.

а) Число 21 нужно представить в виде суммы чисел 1, 5 и 10, в которой учитывается порядок слагаемых. Поэтому искомое количество способов оплаты удовлетворяет соотношению

$$f(21) = f(21 - 1) + f(21 - 5) + f(21 - 10)$$

$$\text{или } f(21) = f(20) + f(16) + f(11).$$

Очевидно, что $f(0) = 1$, а $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$. Далее мы должны учесть, что в ходе вычислений разность m , стоящая под знаком функции, может оказаться отрицательной. В этом случае $f(m) = 0$. Поэтому

$$f(5) = f(4) + f(0) = 2,$$

$$f(6) = f(5) + f(1) = 2 + 1 = 3,$$

$$f(7) = f(6) + f(2) = 3 + 1 = 4,$$

$$f(8) = f(7) + f(3) = 4 + 1 = 5,$$

$$f(9) = f(8) + f(4) = 5 + 1 = 6,$$

$$f(10) = f(9) + f(5) + f(0) = 6 + 2 + 1 = 9,$$

$$f(11) = f(10) + f(6) + f(1) = 9 + 3 + 1 = 13,$$

$$f(12) = f(11) + f(7) + f(2) = 13 + 4 + 1 = 18,$$

$$f(13) = f(12) + f(8) + f(3) = 18 + 5 + 1 = 24,$$

$$f(14) = f(13) + f(9) + f(4) = 24 + 6 + 1 = 31,$$

$$f(15) = f(14) + f(10) + f(5) = 31 + 9 + 2 = 42,$$

$$f(16) = f(15) + f(11) + f(6) = 42 + 13 + 3 = 58,$$

$$\begin{aligned}
 f(17) &= f(16) + f(12) + f(7) = 58 + 18 + 4 = 80, \\
 f(18) &= f(17) + f(13) + f(8) = 80 + 24 + 5 = 109, \\
 f(19) &= f(18) + f(14) + f(9) = 109 + 31 + 6 = 146, \\
 f(20) &= f(19) + f(15) + f(10) = 146 + 42 + 9 = 197.
 \end{aligned}$$

Следовательно, $f(21) = 197 + 58 + 13 = 268$.

б) Необходимо найти число $F(21; 1,5,10)$. Имеем:

$$\begin{aligned}
 F(21; 1,5,10) &= F(21; 1,5) + F(11; 1,5,10) = F(21; 1) + \\
 &+ F(16; 1,5) + F(11; 1,5) + F(1; 1,5,10) = 1 + F(16; 1) + \\
 &+ F(11; 1,5) + F(11; 1) + F(6; 1,5) + 1 = 4 + F(11; 1) + \\
 &+ F(6; 1,5) + F(6; 1) + F(1; 1,5) = 7 + F(6; 1) + F(1; 1,5) = 9.
 \end{aligned}$$

Это способы:

$$\begin{aligned}
 21 &= \underbrace{1 + \dots + 1}_{21} = \underbrace{1 + \dots + 1}_{16} + 5 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{11} + 5 + 5 = \\
 &= \underbrace{1 + \dots + 1}_{11} + 10 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{6} + 5 + 5 + 5 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{6} + 5 + 10 = \\
 &= 1 + 5 + 5 + 5 + 5 = 1 + 5 + 5 + 10 = 1 + 10 + 10. \quad \square
 \end{aligned}$$

§ 2.3. Числа Стирлинга

Вводятся числа Стирлинга первого рода. Находятся рекуррентные соотношения для чисел Стирлинга первого и второго рода.

2.3.1. Числа Стирлинга первого рода

В § 1.10 была получена явная формула для вычисления числа $C(n, k)$ подстановок n -й степени, содержащих в своем разложении ровно k циклов. При этом отмечалось, что в вычислительной практике вместо этой формулы обычно используются связывающие их рекуррентные соотношения. Найдем эти соотношения.

Теорема 2.3.1.

$$C(n, k) = C(n-1, k-1) + (n-1)C(n-1, k). \quad (2.3.1)$$

Доказательство. Сначала отметим, что при $n > 0$ невозможно образовать подстановку, содержащую n элементов и имеющую в разложении 0 циклов, поэтому $C(n, 0) = 0$ для всех $n > 0$. Поскольку существует единственный способ формирования подстановки, не содержащей элементов, – вовсе не строить ее, – то естественно считать, что $C(0, 0) = 1$. Далее, при $n > 0$ можно построить единственную подстановку, содержащую n циклов длины 1, это будет тождественная подстановка. Таким образом, для всех $n \geq 0$ имеем $C(n, n) = 1$. Кроме того, столь же естественно принять, что $C(n, k) = 0$ для всех $k > n$.

Число подстановок произвольного $(n - 1)$ -элементного множества A , имеющих в своем разложении точно $k - 1$ циклов, равно $C(n - 1, k - 1)$, а число подстановок, содержащих в разложении k циклов, равно $C(n - 1, k)$. Пополним множество A новым элементом a и составим всевозможные подстановки множества $A \cup \{a\}$, имеющие в своем разложении точно k циклов.

Эти подстановки можно получить, если, во-первых, ко всем подстановкам множества A , содержащим в своем разложении $k - 1$ циклов, добавить цикл длины 1, содержащий элемент a . Указанных подстановок с k циклами в разложении будет $C(n - 1, k - 1)$. Во-вторых, элемент a можно помещать в один из циклов подстановок множества A , имеющих в разложении k циклов. Возьмем произвольную подстановку $s = s_1 s_2 \dots s_k$ такого вида ($s_i, i = 1, \dots, k$ — циклы, входящие в ее разложение). Пусть длина цикла s_i равна n_i , тогда $\sum_{i=1}^k n_i = n - 1$. Если элемент a помещается в цикл s_i , то его в этом цикле можно разместить вслед за любым из n_i элементов цикла, т. е. сформировать n_i новых циклов. На основании правила суммы заключаем, что из каждой подстановки s можно сформировать $\sum_{i=1}^k n_i = n - 1$ новых циклов. Число подстановок множества A , имеющих в разложении k циклов, равно $C(n - 1, k)$. Поэтому путем добавления в циклы этих подстановок элемента a можно получить $(n - 1)C(n - 1, k)$ различных подстановок.

С помощью рассмотренных операций мы построили все подстановки n -множества $A \cup \{a\}$, имеющие в своем разложении точно k циклов. Таких подстановок $C(n, k)$, поэтому

$$C(n, k) = C(n - 1, k - 1) + (n - 1)C(n - 1, k). \blacksquare$$

Теорема 2.3.2.

$$C(n, k) = (n - 1)! \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{1}{i!} C(i, k - 1). \quad (2.3.2)$$

Доказательство. Рассмотрим множество всех $C(n, k)$ подстановок n -й степени, в разложении которых ровно k циклов. Выберем среди них подстановки, в разложение которых входит некоторый цикл s длины $n - i$, содержащий фиксированный элемент a . В остальные $k - 1$ циклов рассматриваемых подстановок входят i элементов, $k - 1 \leq i \leq n - 1$. Поэтому их число равно $C(i, k - 1)$.

Цикл s длины $n - i$, включающий элемент a , можно составить $C_{n-1}^{n-i-1} = C_{n-1}^i$ способами, а упорядочить элементы в этом цикле

$(n - i - 1)!$ способами. Следовательно, общее число подстановок, в разложение которых входит цикл длины $n - i$, включающий элемент a , равно $(n - i - 1)! C_{n-1}^i C(i, k - 1) = \frac{(n-1)!}{i!} C(i, k - 1)$.

Для завершения доказательства соотношения (2.3.2) остается про- суммировать найденные числа по i от $k - 1$ до $n - 1$. ■

Используя полученные рекуррентные соотношения, можно последо- вательно найти числа $C(n, k)$ для любых n и k (табл. 5).

Таблица 5

n	k									
	0	1	2	3	4	5	6	7	...	
0	1									...
1	0	1								...
2	0	1	1							...
3	0	2	3	1			0			...
4	0	6	11	6	1					...
5	0	24	50	35	10	1				...
6	0	120	274	225	85	15	1			...
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		...
...

Из таблицы 5 находим, что число $C(7,3)$ подстановок седьмой сте- пени, содержащих в своем разложении ровно 3 цикла, равно 1624. Этот же результат был получен в задаче 1.10.4 с помощью явной формулы.

Задача 2.3.1. Доказать рекуррентное соотношение

$$C(n + 1, k + 1) = \sum_{i=0}^k (n - i)C(n - i, k - i + 1).$$

Решение. В силу теоремы 2.3.1:

$$\begin{aligned} C(n + 1, k + 1) &= C(n, k) + nC(n, k + 1), \\ C(n, k) &= C(n - 1, k - 1) + (n - 1)C(n - 1, k), \\ C(n - 1, k - 1) &= C(n - 2, k - 2) + (n - 2)C(n - 2, k - 1), \\ &\dots \\ C(n - k + 1, 1) &= C(n - k, 0) + (n - k)C(n - k, 1). \end{aligned}$$

Для доказательства соотношения необходимо сложить по частям запи- санные равенства. □

Для решения широкого класса комбинаторных задач вместо чисел $C(n, k)$ удобней рассматривать числа

$$s(n, k) = (-1)^{n+k} C(n, k), \quad (2.3.3)$$

которые называются *числами Стирлинга первого рода*. Числа $C(n, k)$ поэтому часто называют числами Стирлинга первого рода без знака. Очевидно, что $s(n, n) = 1$ для всех $n \geq 0$ и $s(n, k) = 0$ для всех $k > n$.

Из (2.3.1) – (2.3.3) и (1.10.5) следует, что

$$s(n, k) = s(n - 1, k - 1) - (n - 1)s(n - 1, k), \quad (2.3.4)$$

$$s(n + 1, k) = \sum_{i=k}^n (-1)^{n-i} (n)_{n-i} s(i, k). \quad (2.3.5)$$

$$n! = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} s(n, k). \quad (2.3.6)$$

2.3.2. Числа Стирлинга второго рода. Числа Белла

Числа Стирлинга второго рода удовлетворяют рекуррентным соотношениям, аналогичным соотношениям (2.3.4), (2.3.5).

Теорема 2.3.3. *Число $S(n, k)$ всех способов неупорядоченного разбиения n -множества на k непустых блоков удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k). \quad (2.3.7)$$

Доказательство. Среди всех $S(n, k)$ неупорядоченных разбиений множества $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ на k непустых блоков выделим те, в которые входит блок $\{a_n\}$, состоящий из одного элемента a_n . Таких разбиений будет столько, сколько можно составить разбиений на $k - 1$ непустых блоков из остальных $n - 1$ элементов, т. е. $S(n - 1, k - 1)$.

Теперь среди $S(n, k)$ разбиений множества A найдем число таких разбиений, в которые $\{a_n\}$ не входит в качестве блока разбиения. Для этого заметим, что все эти разбиения можно получить следующим образом: возьмем $S(n - 1, k)$ разбиений множества $A \setminus \{a_n\} = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ на k блоков и в блоки каждого такого разбиения будем по очереди добавлять элемент a_n . Так как в разбиения входит по k блоков, для каждого разбиения это можно сделать k способами. Поэтому число разбиений множества A на k блоков, в которые $\{a_n\}$ не входит в качестве блока, равно $kS(n - 1, k)$. Значит,

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k). \blacksquare$$

Теорема 2.3.4. *Числа Стирлинга второго рода удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$S(n, k) = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i S(i, k - 1). \quad (2.3.8)$$

Доказательство. Возьмем все неупорядоченные разбиения множества $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ на k непустых блоков. Выделим среди них такие разбиения, которые включают некоторый блок B , содержащий элемент a_n . Если $|B| = n - i$, то в остальные $k - 1$ блоков этих разбиений входит i элементов, где $k - 1 \leq i \leq n - 1$. Поэтому число всех разбиений множества A , включающих блок B , равно $S(i, k - 1)$.

Блок, состоящий из $n - i$ элементов, среди которых находится фиксированный элемент a_n , можно составить $C_{n-1}^{n-i} = C_{n-1}^i$ способами. Поэтому общее число разбиений, включающих блок, состоящий из $n - i$ элементов и содержащий фиксированный элемент a_n , равно $C_{n-1}^i S(i, k - 1)$. Так как $k - 1 \leq i \leq n - 1$, то

$$S(n, k) = \sum_{i=k-1}^{n-1} C_{n-1}^i S(i, k - 1).$$

С учетом того, что $S(i, k - 1) = 0$ при $i < k - 1$, полученное равенство переписывается в виде:

$$S(n, k) = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i S(i, k - 1). \quad \blacksquare$$

Примечание. В математической литературе, особенно зарубежной, для чисел Стирлинга $s(n, k)$, $S(n, k)$ первого и второго рода используются также обозначения $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$, $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ соответственно.

Если просуммировать по k равенства (2.3.8), то получим рекуррентное соотношение для чисел Белла:

$$B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i B(i). \quad (2.3.9)$$

Поэтому, учитывая (1.12.8), их можно записать в явном виде:

$$B(n) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i C_k^i}{k!} (k - i)^n = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{(k - i)^n}{i! (k - i)!}.$$

Рекуррентные соотношения (2.3.7)–(2.3.9) позволяют построить таблицу для чисел $S(n, k)$ Стирлинга второго рода и чисел $B(n)$ Белла (табл. 6).

Таблица 6

n	k											$B(n)$	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...		
0	1											...	1
1	0	1										...	1
2	0	1	1									...	2
3	0	1	3	1								...	5
4	0	1	7	6	1							...	15
5	0	1	15	25	10	1						...	52
6	0	1	31	90	65	15	1					...	203
7	0	1	63	301	350	140	21		1			...	877
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1			...	4140
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1		...	21147
...

Возвращаясь к задаче 1.12.7, из таблицы 6 сразу видим, что в том случае, когда все клетки не пусты, число способов рассадки канареек равно 350, когда же допускаются пустые клетки, находим:

$$S(7,1) + S(7,2) + S(7,3) + S(7,4) = 1 + 63 + 301 + 350 = 715.$$

§ 2.4. Рекуррентное соотношение как уравнение

Вводится понятие решения рекуррентного соотношения. На примере линейных соотношений первого порядка рассматривается решение рекуррентных соотношений методом последовательных подстановок.

2.4.1. Понятие решения рекуррентного соотношения

Рекуррентное соотношение

$$u_{n+k} = \Phi(n; u_n, \dots, u_{n+k-1}), \quad (2.4.1)$$

где $n, k \in \mathbf{N}_0$, называется *рекуррентным соотношением* или *рекуррентным уравнением порядка k* .

Функция $u_n = f(n)$ называется *решением* рекуррентного соотношения (2.4.1), если при ее подстановке в это соотношение оно для каждого $n \in \mathbf{N}_0$ обращается в верное числовое равенство.

Соотношение (2.4.1) связывает $k + 1$ значений функции $f(n)$. Если известны k ее первых значений (*начальные условия*)

$$u_0 = f(0), u_1 = f(1), \dots, u_{k-1} = f(k-1), \quad (2.4.2)$$

где $f(0), f(1), \dots, f(k-1)$ – заданные числа, то можно найти $f(k)$ и вообще $f(n)$ для любого n . Поэтому решение $f(n)$ можно также записать в виде

$$f(n) = F(n; f(0), f(1), \dots, f(k-1)), \quad (2.4.3)$$

указав тем самым на то, что оно зависит от начальных значений $u_0 = f(0)$, $u_1 = f(1)$, ..., $u_{k-1} = f(k-1)$.

Очевидно, что другим начальным значениям будет соответствовать другое решение соотношения (2.4.1), такие решения называются его *частными* решениями.

Частное решение $f(n) = F(n; f(0), f(1), \dots, f(k-1))$ задает числовую последовательность

$$u_0 = f(0), u_1 = f(1), \dots, u_{k-1} = f(k-1), \dots, u_n = f(n), \dots$$

Эту последовательность называют *рекуррентной последовательностью порядка k* , заданной соотношением (2.4.1), и также считают решением этого рекуррентного соотношения.

Из сказанного следует, что каждому набору начальных значений соответствует свое решение рекуррентного соотношения (2.4.1). Эти решения объединяет функция

$$f(n) = F(n; C_0, C_1, \dots, C_{k-1}), \quad (2.4.4)$$

где C_0, C_1, \dots, C_{k-1} – произвольные числа. Решение (2.4.4) называется *общим* решением соотношения (2.4.1).

В качестве примера рассмотрим рекуррентное соотношение второго порядка

$$u_{n+2} = -6u_{n+1} - 9u_n + (-3)^{n+2}$$

и покажем, что его общим решением является функция

$$u_n = \left(C_1 + C_2 n + \frac{n^2}{2} \right) (-3)^n.$$

Действительно, подставляя данную функцию в правую часть рекуррентного соотношения, имеем

$$\begin{aligned} -6u_{n+1} - 9u_n + (-3)^{n+2} &= -6 \left(C_1 + C_2(n+1) + \frac{(n+1)^2}{2} \right) (-3)^{n+1} - \\ &- 9 \left(C_1 + C_2 n + \frac{n^2}{2} \right) (-3)^n + (-3)^{n+2} = \\ &= \left(2 \left(C_1 + C_2(n+1) + \frac{(n+1)^2}{2} \right) - \left(C_1 + C_2 n + \frac{n^2}{2} \right) \right) (-3)^{n+2} + (-3)^{n+2} = \\ &= \left(C_1 + C_2(n+2) + \frac{2n^2 + 4n + 2 - n^2}{2} \right) (-3)^{n+2} + (-3)^{n+2} = \\ &= \left(C_1 + C_2(n+2) + \frac{(n+2)^2 - 2}{2} \right) (-3)^{n+2} + (-3)^{n+2} = \\ &= \left(C_1 + C_2(n+2) + \frac{(n+2)^2}{2} \right) (-3)^{n+2} - (-3)^{n+2} + (-3)^{n+2} = \\ &= \left(C_1 + C_2(n+2) + \frac{(n+2)^2}{2} \right) (-3)^{n+2} = u_{n+2}. \end{aligned}$$

2.4.2. Решение линейных рекуррентных соотношений

Рекуррентное соотношение (2.4.1) можно решить *методом последовательных подстановок*. Рассмотрим, как это сделать, на примере линейных рекуррентных соотношений первого порядка.

Линейным рекуррентным соотношением первого порядка называется соотношение вида

$$u_{n+1} = a_n u_n + b_n, \quad (2.4.5)$$

где a_n, b_n – заданные вещественные или комплексные функции аргумента $n \in \mathbf{N}_0$; причем $a_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbf{N}_0$.

Если $b_n = 0$ для каждого $n \in \mathbf{N}_0$, то соотношение (2.4.5) называется *однородным*; в противном случае оно называется *неоднородным*.

Сначала найдем решение линейного однородного соотношения

$$u_{n+1} = a_n u_n, \quad (2.4.6)$$

Из (2.4.6) последовательной подстановкой вычисляем:

$$u_1 = a_0 u_0,$$

$$u_2 = a_1 u_1 = a_1(a_0 u_0) = a_0 a_1 u_0,$$

$$u_3 = a_2 u_2 = a_2(a_0 a_1 u_0) = a_0 a_1 a_2 u_0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_n = a_{n-1} u_{n-1} = a_0 a_1 \dots a_{n-1} u_0.$$

Таким образом, любое решение рекуррентного соотношения (2.4.6) имеет вид

$$u_n = C A_n, \quad (2.4.7)$$

где $A_n = \prod_{i=0}^{n-1} a_i$ и C – произвольное действительное или комплексное число. Такое решение является общим. Для нахождения какого-либо частного решения соотношения (2.4.6) необходимо придать C определенное числовое значение.

Теперь рассмотрим решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения (2.4.5). В этом случае кроме метода последовательных подстановок используется *метод вариации постоянных*. А именно: решение неоднородного соотношения (2.4.5) ищется в том же виде (2.4.7), что и решение однородного соотношения (2.4.6), но при этом C считается не произвольной постоянной, а некоторой неизвестной функцией C_n , заданной на \mathbf{N}_0 :

$$u_n = C_n A_n. \quad (2.4.8)$$

Подставляя u_n из (2.4.8) в соотношение (2.4.5), имеем:

$$C_{n+1} A_{n+1} = a_n C_n A_n + b_n$$

или $C_{n+1}A_{n+1} = C_nA_{n+1} + b_n$. Так как $A_{n+1} \neq 0$ для всех $n \in \mathbf{N}_0$, то отсюда

$$C_{n+1} = C_n + \frac{b_n}{A_{n+1}}.$$

В результате последовательных подстановок находим:

$$C_1 = C_0 + \frac{b_0}{A_1}, C_2 = C_1 + \frac{b_1}{A_2} = C_0 + \frac{b_0}{A_1} + \frac{b_1}{A_2}, \dots, C_n = C_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{A_{i+1}}.$$

Поэтому множество всех решений линейного неоднородного рекуррентного соотношения (2.4.5) имеет вид:

$$u_n = \left(C + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{A_{i+1}} \right) A_n,$$

где C – произвольное действительное или комплексное число.

Задача 2.4.1. Решить рекуррентное соотношение

$$u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+3} u_n + \frac{2n-1}{2n+3}.$$

Решение. В данном линейном неоднородном рекуррентном соотношении первого порядка $a_n = \frac{2n+1}{2n+3}$, $b_n = \frac{2n-1}{2n+3}$. Поэтому

$$\begin{aligned} A_n &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2i+1}{2i+3} = \frac{1}{2n+1}, \\ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{A_{i+1}} &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2i-1)(2i+3)}{2i+3} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (2i-1) = 2 \sum_{i=0}^{n-1} i - \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n(n-1) - n = n(n-2). \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение данного рекуррентного соотношения имеет вид

$$u_n = \frac{1}{2n+1} (C + n(n-2)),$$

где C – произвольная постоянная. \square

Таким образом, при использовании метода последовательных подстановок приходится находить конечные суммы и произведения. Серьезные трудности при их вычислении могут возникнуть уже при решении линейных рекуррентных соотношений. К сожалению, других универсальных способов решения рекуррентных соотношений не существует. Однако такие способы найдены для некоторых важных частных видов соотношений, например для линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами.

§ 2.5. Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Приведены основные теоремы о решении линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами. Вводится понятие характеристического уравнения, структурой корней которого определяется вид общего решения соотношения.

2.5.1. Основные теоремы

Рекуррентное соотношение

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n, \quad (2.5.1)$$

где a_1, a_2, \dots, a_k – заданные числа (действительные или комплексные), причем $a_k \neq 0$, называется *однородным линейным рекуррентным соотношением порядка k с постоянными коэффициентами*.

Из этого определения следует, что, например, соотношение (2.1.3), задающее последовательность Фибоначчи, – линейное однородное рекуррентное соотношение второго порядка.

Заметим, что условие $a_k \neq 0$ в приведенном определении является существенным. Так, соотношение $u_{n+2} = u_{n+1}$, в котором коэффициент при u_n равен нулю, не является линейным однородным рекуррентным соотношением второго порядка, так как замена $n + 1 = m$ приводит его к линейному однородному рекуррентному соотношению $u_{m+1} = u_m$ первого порядка.

Последовательность $\{f(n)\}$, $n \in \mathbf{N}_0$, являющаяся решением соотношения (2.5.1), называется *линейной однородной рекуррентной последовательностью порядка k* .

Для членов арифметической прогрессии с разностью d имеют место равенства $u_{n+2} = u_{n+1} + d$, $u_{n+1} = u_n + d$, вычитая которые по частям, получим $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$. Отсюда

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

и, следовательно, арифметическая прогрессия – линейная однородная рекуррентная последовательность второго порядка.

Члены геометрической прогрессии со знаменателем q связаны рекуррентным соотношением $u_{n+1} = qu_n$. Поэтому геометрическая прогрессия является линейной однородной рекуррентной последовательностью первого порядка.

Задача 2.5.1. Доказать, что последовательность

$$u_0 = 0^2, u_1 = 1^2, \dots, u_n = n^2, \dots$$

квадратов целых неотрицательных чисел является линейной однородной рекуррентной последовательностью.

Решение. Представим члены u_{n+1} и u_{n+2} в виде

$$u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = u_n + 2n + 1,$$

$$u_{n+2} = (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4 = u_{n+1} + 2n + 3.$$

Вычитая первое равенство из второго, находим, что

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2.$$

Отсюда

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2.$$

После вычитания двух последних соотношений получим

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n.$$

Следовательно, данная последовательность является линейной однородной рекуррентной последовательностью третьего порядка с постоянными коэффициентами. \square

Рассмотрим свойства решений линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами.

Теорема 2.5.1. Пусть $f_1(n)$, $f_2(n)$ – решения линейного однородного рекуррентного соотношения (2.5.1), c – произвольное число. Тогда (а) $cf_1(n)$, (б) $f_1(n) + f_2(n)$ – решения этого рекуррентного соотношения.

Доказательство. (а) По определению решения,

$$f_1(n+k) = a_1 f_1(n+k-1) + \dots + a_k f_1(n)$$

– верные числовые равенства для всех $n \in \mathbf{N}_0$. Умножая эти равенства на c , будем иметь:

$$cf_1(n+k) = a_1 cf_1(n+k-1) + \dots + a_k cf_1(n).$$

Значит, $cf_1(n)$ – решение соотношения (2.5.1).

б) Складывая верные равенства

$$f_1(n+k) = a_1 f_1(n+k-1) + \dots + a_k f_1(n),$$

$$f_2(n+k) = a_1 f_2(n+k-1) + \dots + a_k f_2(n),$$

получим верное равенство

$$f_1(n+k) + f_2(n+k) =$$

$$= a_1 (f_1(n+k-1) + f_2(n+k-1)) + \dots + a_k (f_1(n) + f_2(n)).$$

Поэтому $f_1(n) + f_2(n)$ – решение соотношения (2.5.1). \blacksquare

Из теоремы вытекают два очевидных следствия.

Следствие 1. Если $f_1(n)$, ..., $f_m(n)$ – решения линейного однородного рекуррентного соотношения (2.5.1), то их линейная комбинация $f(n) = c_1 f_1(n) + \dots + c_m f_m(n)$, где c_1, \dots, c_m – произвольные числа, является решением этого рекуррентного соотношения.

начальные значения которой равны соответствующим начальным значениям функции $\varphi(n)$. Соотношением (2.5.1) функция по ее начальным значениям определяется однозначно, поэтому функции $\varphi(n)$ и $f(n)$ тождественно совпадают для всех $n \in \mathbf{N}_0$. ■

Примечания. 1. Из рекуррентного соотношения (2.5.1) для каждой из функций $f_i(n)$, $i = 1, \dots, k$, по ее начальным значениям $f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{ik}$ однозначно вычисляется значение $f_i(k) = a_1 f_{ik} + \dots + a_2 f_{i2} + a_k f_{i1}$. По аналогии с определителем (2.5.2) составим определитель

$$D_1 = \begin{vmatrix} f_{12} \cdots f_{1k} \sum_{i=1}^k a_i f_{1,k-i+1} \\ f_{22} \cdots f_{2k} \sum_{i=1}^k a_i f_{2,k-i+1} \\ \dots \dots \dots \\ f_{k2} \cdots f_{kk} \sum_{i=1}^k a_i f_{k,k-i+1} \end{vmatrix}.$$

Следствие 1. Если $f_1(n), f_2(n), \dots, f_k(n)$ – решения рекуррентного соотношения (2.5.1) такие, что $D_0 \neq 0$, то

$$D_1 = (-1)^{k-1} a_k D_0.$$

Действительно, на основании свойств определителей

$$D_1 = a_1 \begin{vmatrix} f_{12} \cdots f_{1k} & f_{1k} \\ f_{22} \cdots f_{2k} & f_{2k} \\ \dots & \dots \\ f_{k2} \cdots f_{kk} & f_{kk} \end{vmatrix} + \dots + a_{k-1} \begin{vmatrix} f_{12} \cdots f_{1k} & f_{12} \\ f_{22} \cdots f_{2k} & f_{22} \\ \dots & \dots \\ f_{k2} \cdots f_{kk} & f_{k2} \end{vmatrix} + a_k \begin{vmatrix} f_{12} \cdots f_{1k} & f_{11} \\ f_{22} \cdots f_{2k} & f_{21} \\ \dots & \dots \\ f_{k2} \cdots f_{kk} & f_{k1} \end{vmatrix}.$$

Первые $k-1$ определителей в полученной сумме содержат равные столбцы и, значит, равны нулю. При перестановке последнего столбца в k -м определителе, выполненной $k-1$ раз, получается определитель D_0 . Доказываемое равенство следует из того, что каждая перестановка столбцов меняет знак определителя.

Аналогично вводятся определители D_n для любого $n \in \mathbf{N}$, при этом имеет место

Следствие 2. Если $f_1(n), f_2(n), \dots, f_k(n)$ – решения рекуррентного соотношения (2.5.1) такие, что $D_0 \neq 0$, то

$$D_{n+1} = (-1)^{k-1} a_k D_n, \quad D_n = (-1)^{kn-1} a_k^n D_0$$

для любого $n \in \mathbf{N}$.

2. Функции $f_1(n), f_2(n), \dots, f_m(n)$, определенные на множестве \mathbf{N}_0 , называются *линейно зависимыми* на этом множестве, если существуют постоянные числа c_1, c_2, \dots, c_m , не равные одновременно нулю, такие, что

$$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + \dots + c_m f_m(n) = 0$$

для каждого $n \in \mathbf{N}_0$.

Если же линейная комбинация функций $f_1(n), f_2(n), \dots, f_m(n)$ для каждого $n \in \mathbf{N}_0$ равна нулю тогда и только тогда, когда все ее коэффициенты равны нулю, то эти функции называются *линейно независимыми* на множестве \mathbf{N}_0 .

Можно доказать, что функции $f_1(n), f_2(n), \dots, f_m(n)$ линейно независимы на множестве \mathbf{N}_0 тогда и только тогда, когда определитель

$$\Delta(f_1(n), f_2(n), \dots, f_m(n)) = \begin{vmatrix} f_1(n) & f_2(n) & \dots & f_m(n) \\ f_1(n-1) & f_2(n-1) & \dots & f_m(n-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(n-m+1) & f_2(n-m+1) & \dots & f_m(n-m+1) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля для каждого $n \in \mathbf{N}_0$.

Тогда на основании теоремы 2.5.2 и следствия из нее можно заключить, что решения $f_1(n), f_2(n), \dots, f_k(n)$ линейного однородного рекуррентного соотношения (2.5.1) порядка k , удовлетворяющие условиям этой теоремы, являются линейно независимыми. Поэтому линейное пространство решений соотношения (2.5.1) является k -мерным.

2.5.2. Характеристическое уравнение и вид общего решения

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$\lambda^k = a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_{k-1} \lambda + a_k, \quad (2.5.5)$$

степени k , коэффициентами которого являются коэффициенты линейного однородного рекуррентного соотношения (2.5.1). Его называют *характеристическим уравнением* этого соотношения.

Теорема 2.5.3. Если λ_0 – корень характеристического уравнения (2.5.5), то функция $f(n) = \lambda_0^n$ является решением рекуррентного соотношения (2.5.1).

Доказательство. Пусть λ_0 – корень уравнения (2.5.5), т. е. $\lambda_0^k = a_1 \lambda_0^{k-1} + \dots + a_2 \lambda_0 + a_k$ – верное числовое равенство. Очевидно, что $\lambda_0 \neq 0$ (так как $a_k \neq 0$). Подставим $f(n) = \lambda_0^n$ в рассматриваемое рекуррентное соотношение:

$$\lambda_0^{n+k} = a_1 \lambda_0^{n+k-1} + \dots + a_{k-1} \lambda_0^{n+1} + a_k \lambda_0^n.$$

Сократив полученное равенство на λ_0^n , приходим к верному равенству $\lambda_0^k = a_1 \lambda_0^{k-1} + \dots + a_k$. Следовательно, $f(n) = \lambda_0^n$ – решение однородного линейного рекуррентного соотношения (2.5.1). ■

Вид общего решения соотношения (2.5.1) зависит от структуры корней его характеристического уравнения. Они могут быть простыми и кратными. Рассмотрим возможные случаи.

Случай простых корней. Пусть все корни характеристического уравнения простые. Тогда имеет место

Теорема 2.5.4. Если характеристическое уравнение (2.5.5) соотношения (2.5.1) имеет k различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, то общее решение этого соотношения имеет вид

$$f(n) = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_k \lambda_k^n, \quad (2.5.6)$$

где C_1, C_2, \dots, C_k – произвольные постоянные и $n \in \mathbf{N}_0$.

Доказательство. Согласно теореме 2.5.3 $f_1(n) = \lambda_1^n, f_2(n) = \lambda_2^n, \dots, f_k(n) = \lambda_k^n$ – решения рекуррентного соотношения (2.5.1). Поэтому в силу теоремы 2.5.2

$$f(n) = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_k \lambda_k^n$$

– общее решение этого соотношения, если определитель $D_0 \neq 0$. В рассматриваемом случае определитель

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

является определителем Вандермонда k -го порядка. В линейной алгебре доказывается, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j),$$

где $i, j = 1, \dots, k$. По условию теоремы все корни характеристического уравнения различны, поэтому $D_0 \neq 0$. Следовательно, (2.5.6) – общее решение соотношения (2.5.1). ■

Задача 2.5.2. Найти общее решение рекуррентного соотношения (2.1.3) и частное решение, определяющее последовательность Фибоначчи.

Решение. Характеристическим уравнением соотношения $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ является квадратное уравнение $\lambda^2 = \lambda + 1 = 0$. Оно имеет корни $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Поэтому общее решение этого рекуррентного соотношения имеет вид

$$F(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Последовательность Фибоначчи определяется начальными значениями $F_0 = 1, F_1 = 1$. Чтобы найти частное решение, соответствующее этим начальным условиям, необходимо решить систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} C_2 = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет решение $C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $C_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Поэтому искомое частное решение запишется в виде:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right), n \in \mathbf{N}_0.$$

Найденная формула называется *формулой Бине**. □

Типичным примером задач, которые приводят к линейным однородным рекуррентным соотношениям с постоянными коэффициентами, являются задачи о перечислении маршрутов заданной длины, проходящих через вершины многоугольников, многогранников и графов.

Задача 2.5.3. Найти число маршрутов длины n по ребрам правильного тетраэдра $ABCD$ со стороной 1, которые начинаются и заканчиваются в вершине A .

Решение. Пусть a_n – число замкнутых маршрутов длины n из вершины A в вершину A , а b_n, c_n, d_n – число маршрутов длины n из вершины A в вершины B, C, D соответственно. Очевидно, что числа a_n, b_n, c_n и d_n связаны между собой системой рекуррентных соотношений:

$$b_n = c_n = d_n, \quad (1)$$

$$a_{n+1} = b_n + c_n + d_n, \quad (2)$$

$$b_{n+1} = a_n + c_n + d_n, \quad (3)$$

при этом

$$a_0 = 1, a_1 = 0. \quad (4)$$

В силу соотношений (1) соотношения (2) и (3) можно переписать в виде

$$a_{n+1} = 3b_n, \quad (5)$$

$$b_{n+1} = a_n + 2b_n. \quad (6)$$

Из (5) и (6) последовательно имеем:

$$a_{n+2} = 3b_{n+1} = 3a_n + 6b_n.$$

Наконец, вновь используя соотношение (5), приходим к рекуррентному соотношению

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n. \quad (7)$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ соотношения (7) имеет корни $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 3$, поэтому его общее решение можно записать в виде:

$$a_n = C_1(-1)^n + C_23^n, n \in \mathbf{N}_0.$$

* Жак Бине (1786–1856) – французский математик и астроном. Формула впервые опубликована швейцарским математиком и механиком Даниилом Бернулли (1700–1782) в 1728 г., но о ней забыли; открыта вновь Ж. Бине в 1843 г. и получила его имя.

Осталось найти его частное решение при начальных условиях (4). В силу этих условий

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -C_1 + 3C_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $C_1 = \frac{3}{4}$, $C_2 = \frac{1}{4}$. Следовательно,

$$a_n = \frac{3}{4}((-1)^n + 3^{n-1}). \quad \square$$

Случай кратных корней. Если среди корней характеристического уравнения имеются кратные, то формула (2.5.6) не задает общего решения рекуррентного соотношения (2.5.1). В этом легко убедиться на примере соотношения

$$u_{n+3} = 6u_{n+2} - 12u_{n+1} + 8u_n.$$

Его характеристическое уравнение $\lambda^3 = 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$ или $(\lambda - 2)^3 = 0$ имеет трехкратный корень $\lambda_0 = 2$. Если применить формулу (2.5.6), то решение будет зависеть только от одной постоянной: $f(n) = C_1 2^n + C_2 2^n + C_3 2^n = C 2^n$. Поэтому для произвольных f_1, f_2, f_3 найти начальные значения так, чтобы $f(0) = f_1, f(1) = f_2, f(2) = f_3$, не удастся.

Можно, однако, проверить, что кроме $f(n) = 2^n$ решениями рассматриваемого соотношения будут $f_1(n) = n2^n$ и $f_2(n) = n^2 2^n$:

$$\begin{aligned} 6f_1(n+2) - 12f_1(n+1) + 6f_1(n) &= \\ &= 6(n+2)2^{n+2} - 12(n+1)2^{n+1} + 8n2^n = \\ &= (24n + 48 - 24n - 24 + 8n)2^n = (n+3)2^{n+3} = f_1(n+3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6f_2(n+2) - 12f_2(n+1) + 6f_2(n) &= \\ &= 6(n+2)^2 2^{n+2} - 12(n+1)^2 2^{n+1} + 8n^2 2^n = \\ &= (24n^2 + 96n + 96 - 24n^2 - 48n - 24 + 8n^2)2^n = \\ &= (8n^2 + 48n + 72)2^n = (n+3)^2 2^{n+3} = f_2(n+3). \end{aligned}$$

При этом $D_0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 16 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$. Поэтому общее решение этого

рекуррентного соотношения можно записать в виде:

$$f(n) = C_1 2^n + C_2 n 2^n + C_3 n^2 2^n = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2) 2^n.$$

Если характеристическое уравнение (2.5.5) имеет k -кратный корень, а именно такой пример был рассмотрен, справедлива

Теорема 2.5.5. Пусть характеристическое уравнение (2.5.5) соотношения (2.5.1) имеет только k -кратный корень λ_0 . Тогда общее решение этого соотношения имеет вид

$$f(n) = (C_1 + C_2 n + \dots + C_k n^{k-1}) \lambda_0^n. \quad (2.5.7)$$

Доказательство. В этом случае характеристическое уравнение соотношения (2.5.1) приводится к виду $(\lambda - \lambda_0)^n = 0$. Поэтому, используя формулу бинома Ньютона, его можно записать

$$\lambda^k = C_k^1 \lambda_0 \lambda^{k-1} - C_k^2 \lambda_0^2 \lambda^{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} C_k^k \lambda_0^k.$$

Следовательно, само соотношение (2.5.1) имеет вид

$$u_{n+k} = C_k^1 \lambda_0 u_{n+k-1} - C_k^2 \lambda_0^2 u_{n+k-2} + \dots + (-1)^{k-1} C_k^k \lambda_0^k u_n. \quad (2.5.8)$$

Как следует из задачи 1.6.7, для $m < k$ справедливо тождество

$$k^m = C_k^1 (k-1)^m - C_k^2 (k-2)^m + \dots + (-1)^k C_k^k 0^m.$$

Последовательно запишем это соотношение для $m = k-1, \dots, 1, 0$, предварительно умножая его на a_1, a_2, \dots, a_k соответственно:

$$\begin{aligned} a_1 k^{k-1} &= a_1 C_k^1 (k-1)^{k-1} - a_1 C_k^2 (k-2)^{k-1} + \dots + (-1)^k a_1 C_k^k 0^{k-1}, \\ a_2 k^{k-2} &= a_2 C_k^1 (k-1)^{k-2} - a_2 C_k^2 (k-2)^{k-2} + \dots + (-1)^k a_2 C_k^k 0^{k-2}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$a_k = a_k C_k^1 - a_k C_k^2 + \dots + (-1)^k a_k C_k^k.$$

Сложив по частям выписанные соотношения, заключаем, что для любого многочлена $f(x) = a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \dots + a_k$ степени $k-1$ имеет место тождество

$$f(k) = C_k^1 f(k-1) - C_k^2 f(k-2) + \dots + (-1)^k C_k^k f(0).$$

Взяв в качестве многочлена $f(x)$ многочлен $(x+n)^m$, где n — любое натуральное число, а $0 \leq m \leq k-1$, будем иметь:

$$(n+k)^m = C_k^1 (n+k-1)^m - C_k^2 (n+k-2)^m + \dots + (-1)^k C_k^k n^m.$$

Умножим последнее соотношение на λ_0^{n+k} :

$$\begin{aligned} (n+k)^m \lambda_0^{n+k} &= C_k^1 (n+k-1)^m \lambda_0^{n+k} - \\ &\quad - C_k^2 (n+k-2)^m \lambda_0^{n+k} + \dots + (-1)^k C_k^k n^m \lambda_0^{n+k}. \end{aligned}$$

Придавая m значения $0, 1, \dots, k-1$, убеждаемся, что функции

$$f_1(n) = \lambda_0^n, f_2(n) = n \lambda_0^n, \dots, f_k(n) = n^{k-1} \lambda_0^n$$

являются решениями рассматриваемого соотношения.

В силу теоремы 2.5.2 функция

$$f(n) = C_1 \lambda_0^n + C_2 n \lambda_0^n + \dots + C_k n^{k-1} \lambda_0^n$$

будет общим решением соотношения (2.5.1), если определитель $D_0 \neq 0$.

Вычисляя определитель

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 \lambda_0 \dots & \lambda_0^{k-1} \\ 0 \lambda_0 \dots & (k-1) \lambda_0^{k-1} \\ \dots \dots \dots & \dots \\ 0 \lambda_0 \dots & (k-1)^{(k-1)} \lambda_0^{k-1} \end{vmatrix} = 1! 2! \dots (k-1)! \lambda_0^{\frac{(k-1)k}{2}},$$

видим, что он отличен от нуля. Следовательно,

$$f(n) = (C_1 + C_2 n + \dots + C_k n^{k-1}) \lambda_0^n$$

— общее решение рекуррентного соотношения. ■

В общем случае характеристическое уравнение (2.5.5) линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами может иметь r различных корней: λ_1 кратности k_1 , λ_2 кратности k_2 , ..., λ_r кратности k_r , $\sum_{i=1}^r k_i = k$. Можно доказать, что тогда в его общем решении каждый корень λ_i представлен слагаемым

$$f_i(n) = (C_{i1} + C_{i2}n + \dots + C_{ik_i}n^{k_i-1})\lambda_i^n, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

а само общее решение есть сумма таких слагаемых.

Рекуррентные соотношения с действительными коэффициентами. В том случае, когда коэффициенты рекуррентного соотношения (2.5.1) являются действительными, а среди корней его характеристического уравнения имеются комплексные, в формуле общего решения можно освободиться от комплексных оснований степеней.

Пусть $a + bi$ – простой корень характеристического уравнения (2.5.5). Из алгебры известно, что если $a + bi$ – корень многочлена с действительными коэффициентами, то корнем этого многочлена является и комплексно сопряженное число $a - bi$. Рассмотрим, как из комплексных решений $(a + bi)^n$, $(a + bi)^n$ рекуррентного соотношения (2.5.1) составить его действительные решения. Для этого комплексные числа $a \pm bi$ представим в тригонометрической форме: $a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $a - bi = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$, где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$. Тогда

$$(a + bi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad (a - bi)^n = r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi).$$

По теореме 2.5.1

$$(a + bi)^n + (a - bi)^n = 2r^n \cos n\varphi, \quad (a + bi)^n - (a - bi)^n = 2ir^n \sin n\varphi$$

– решения рекуррентного соотношения (2.5.1) и, значит,

$$r^n(C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi)$$

– также решение этого соотношения. Поэтому в общем решении слагаемые, соответствующие простым комплексным сопряженным корням характеристического уравнения, можно заменить полученной суммой.

Если коэффициенты рекуррентного соотношения (2.5.1) являются действительными, а характеристическое уравнение имеет комплексный корень $a + bi$ кратности l , то сопряженный ему корень $a - bi$ тоже имеет кратность l . Как и в случае простого корня, из соответствующих кратному корню комплексных решений

$$(a + bi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad (a - bi)^n = r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi),$$

$$n(a + bi)^n = nr^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n(a - bi)^n = nr^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$n^{l-1}(a + bi)^n = n^{l-1}r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

$$n^{l-1}(a - bi)^n = n^{l-1}r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$$

можно получить $2l$ действительных решений:

$$r^n \cos n\varphi, nr^n \cos n\varphi, \dots, n^{l-1} r^n \cos n\varphi; \\ r^n \sin n\varphi, nr^n \sin n\varphi, \dots, n^{l-1} r^n \sin n\varphi.$$

Это позволяет представить эти корни в общем решении суммой $r^n(C_1 + nC_2 + \dots + n^{l-1}C_l)\cos n\varphi + r^n(C_{l+1} + nC_{l+2} + \dots + n^{l-1}C_{2l})\sin n\varphi$.

Задача 2.5.4. Найти общее и одно частное решение линейного однородного соотношения $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$ второго порядка.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 = 2\lambda - 4$ данного соотношения имеет корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$. Представим найденные корни в тригонометрической форме. Так как $r = 2$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$, то

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), \quad 1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right).$$

Отсюда следует, что общее решение рекуррентного соотношения можно записать в виде

$$f(n) = 2^n \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{3} + C_2 \sin \frac{n\pi}{3} \right), \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Найдем частное решение этого соотношения с начальными значениями $u_0 = f(0) = 1$, $u_1 = f(1) = 2$. Подставив эти значения в общее решение, получим

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1, \\ 2C_1 \cos \frac{\pi}{3} + 2C_2 \sin \frac{\pi}{3} = 2. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, поэтому искомым частным решением является функция $f(n) = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{n\pi}{3} \right)$, $n \in \mathbf{N}_0$. \square

Задача 2.5.5. Найти общее решение рекуррентного соотношения:

а) $u_{n+4} = -2u_{n+2} - u_n$,

б) $u_{n+5} = 5u_{n+4} - 7u_{n+3} - u_{n+2} + 8u_{n+1} - 4u_n$.

Решение. а) Характеристическое уравнение $\lambda^4 = -2\lambda^2 - 1$ или $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$ имеет двукратные корни i и $-i$. Поскольку $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$, общее решение рекуррентного соотношения записывается в виде $f(n) = (C_1 + C_2 n) \cos \frac{n\pi}{2} + (C_3 + C_4 n) \sin \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{N}_0$.

б) Характеристическое уравнение соотношения имеет вид $\lambda^5 = 5\lambda^4 - 7\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda - 4$ или $\lambda^5 - 5\lambda^4 + 7\lambda^3 + \lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$. Непосредственной проверкой (например, подставляя в уравнение делители свободного члена) можно убедиться, что это уравнение имеет два двукратных корня $-\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_{3,4} = 2$ и один простой $-\lambda_5 = -1$.

Поэтому общее решение рекуррентного соотношения имеет вид:
 $f(n) = (C_1 + C_2n)1^n + (C_3 + C_4n)2^n + C_5(-1)^n$ или
 $f(n) = C_1 + C_2n + (C_3 + C_4n)2^n + C_5(-1)^n$,
 где $n \in \mathbf{N}_0$. \square

§ 2.6. Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Рассматриваются свойства решений линейных неоднородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами. Даны примеры решения данных соотношений.

2.6.1. Основные теоремы и примеры

Рекуррентное соотношение

$$u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \dots + a_ku_n + b_n, \quad (2.6.1)$$

где a_1, a_2, \dots, a_k – заданные числа (действительные или комплексные), причем $a_k \neq 0$, а b_n – заданная функция от n , называется *линейным неоднородным рекуррентным соотношением порядка k с постоянными коэффициентами*.

Рекуррентное соотношение

$$u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \dots + a_ku_n \quad (2.6.2)$$

называется *линейным однородным рекуррентным соотношением, соответствующим соотношению (2.6.1)*.

Отыскание общего решения неоднородного линейного рекуррентного соотношения основано на следующих теоремах.

Теорема 2.6.1. *Сумма любого решения неоднородного линейного рекуррентного соотношения (2.6.1) и любого решения соответствующего ему однородного соотношения (2.6.2) есть решение соотношения (2.6.1).*

Доказательство. Пусть $g(n)$ – решение неоднородного соотношения (2.6.1), а $f(n)$ – решение соответствующего ему однородного соотношения (2.6.2). Тогда

$$g(n+k) = a_1g(n+k-1) + \dots + a_kg(n) + b_n,$$

$$f(n+k) = a_1f(n+k-1) + \dots + a_kf(n)$$

для всех $n \in \mathbf{N}_0$. Складывая эти равенства по частям, будем иметь

$$g(n+k) + f(n+k) = a_1(g(n+k-1) + f(n+k-1)) + \dots + a_k(g(n) + f(n)) + b_n.$$

Следовательно, функция $g(n) + f(n)$ является решением соотношения (2.6.1). \blacksquare

Теорема 2.6.2. Разность решений неоднородного линейного рекуррентного соотношения (2.6.1) есть решение соответствующего ему однородного соотношения (2.6.2).

Доказательство. Пусть $g_1(n)$ и $g_2(n)$ – решения соотношения (2.6.1). Тогда

$$g_1(n+k) = a_1 g_1(n+k-1) + \dots + a_k g_1(n) + b_n,$$

$$g_2(n+k) = a_1 g_2(n+k-1) + \dots + a_k g_2(n) + b_n$$

– верные равенства для всех $n \in \mathbf{N}_0$. Вычитая по частям эти равенства, получим:

$$g_1(n+k) - g_2(n+k) = a_1(g_1(n+k-1) - g_2(n+k-1)) + \dots + a_k(g_1(n) - g_2(n)).$$

Значит, $g_1(n) - g_2(n)$ – решение однородного линейного соотношения (2.6.2). ■

Из этих теорем вытекает

Теорема 2.6.3. Общее решение неоднородного линейного рекуррентного соотношения (2.6.1) есть сумма любого его частного решения и общего решения соответствующего ему однородного соотношения (2.6.2).

Иными словами, если $g(n)$ – некоторое частное решение неоднородного линейного рекуррентного соотношения (2.6.1), а $f(n, C_1, \dots, C_k)$ – общее решение соответствующего ему однородного соотношения (2.6.2), то

$$u_n = f(n, C_1, \dots, C_k) + g(n)$$

– общее решение неоднородного линейного рекуррентного соотношения (2.6.1).

Основная трудность при решении неоднородного линейного рекуррентного соотношения состоит в отыскании какого-либо частного решения. Его обычно ищут методом вариации произвольных постоянных в общем решении соответствующего однородного соотношения. Это, как правило, является достаточно трудной задачей. Однако в отдельных случаях частное решение удается находить по виду функции b_n .

1°. Функция $b_n = \beta^n$. Выделим следующие случаи:

А) Число β не является корнем характеристического уравнения $\lambda^k = a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k$ однородного соотношения (2.6.2). Положим $g(n) = C\beta^n$ и подставим в уравнение (2.6.1):

$$C\beta^{n+k} = C\beta^n(a_1\beta^{k-1} + \dots + a_k) + \beta^n.$$

Отсюда $C = \frac{1}{\beta^k - a_1\beta^{k-1} - \dots - a_k}$, следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$g(n) = \frac{\beta^n}{\beta^k - a_1\beta^{k-1} - \dots - a_k}.$$

Б) Число β является простым корнем характеристического уравнения. Подстановка $g(n) = Cn\beta^n$ в уравнение (2.6.1) дает

$$C(n+k)\beta^{n+k} = C\beta^n(a_1(n+k-1)\beta^{k-1} + \dots + a_k n) + \beta^n.$$

Отсюда

$$Cn(\beta^k - a_1\beta^{k-1} - \dots - a_k) + C(k\beta^k - a_1(k-1)\beta^{k-1} - \dots - a_{k-1}\beta) = 1.$$

Из этого равенства, учитывая, что $\beta^k - a_1\beta^{k-1} - \dots - a_k = 0$, находим $C = \frac{1}{\beta(k\beta^{k-1} - a_1(k-1)\beta^{k-2} - \dots - a_{k-1})}$. Следовательно,

$$g(n) = \frac{n\beta^{n-1}}{k\beta^{k-1} - a_1(k-1)\beta^{k-2} - \dots - a_k}$$

при $k\beta^{k-1} - a_1(k-1)\beta^{k-2} - \dots - a_k \neq 0$.

В) Число β является r -кратным корнем характеристического уравнения ($r \leq k$). В этом случае частное решение находится аналогичным образом в виде $g(n) = Cn^r\beta^n$.

2°. Функция b_n – многочлен $p(n) = p_0n^r + p_1n^{r-1} + \dots + p_r$ от n степени r . Выделяются случаи:

А) Число 1 не является корнем характеристического уравнения (2.6.2). Тогда $1 - a_1 - \dots - a_k \neq 0$. Частное решение находится в виде $g(n) = C_0 + C_1n + \dots + C_rn^r$. Подстановка многочлена $g(n)$ в соотношение (2.6.1) приводит к равенству

$$\sum_{i=0}^r C_i(n+k)^i - a_1 \sum_{i=0}^r C_i(n+k-1)^i - \dots - a_k \sum_{i=0}^r C_i n^i = p(n)$$

или

$$\sum_{i=0}^r C_i((n+k)^i - a_1(n+k-1)^i - \dots - a_k n^i) = p(n).$$

Выполнив в левой части этого равенства возведение в степень и приведение подобных членов, получим многочлен от n степени r с коэффициентом $C_r(1 - a_1 - \dots - a_k)$ при старшем члене. Значения C_0, \dots, C_r , определяющие искомое частное решение, находятся сравнением коэффициентов многочленов, стоящих в левой и правой частях.

Б) Число 1 является корнем характеристического уравнения, т. е. $1 - a_1 - \dots - a_k = 0$. Частное решение аналогичным способом находится в виде $g(n) = n^m \sum_{i=0}^r C_i n^i$, где m – кратность корня 1.

3°. Если $g(n), \bar{g}(n)$ – частные решения линейных неоднородных рекуррентных соотношений

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \dots + a_k u_n + b_n,$$

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \dots + a_k u_n + \bar{b}_n$$

соответственно, то $C_1 g(n) \pm C_2 \bar{g}(n)$ – частное решение рекуррентного соотношения $u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \dots + a_k u_n + (C_1 b_n \pm C_2 \bar{b}_n)$.

4°. Если соотношение

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n + A_n + iB_n,$$

где числа a_1, a_2, \dots, a_k и функции A_n, B_n действительны, имеет решение $g(n) = a(n) + ib(n)$, то его действительная часть $a(n)$ и мнимая часть $b(n)$ являются соответственно решениями соотношений

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n + A_n,$$

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n + B_n.$$

Задача 2.6.1. Найти общее решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения:

а) $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 8u_n + 3^n$;

б) $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 8u_n + 6 \cdot 2^{n+2}$;

в) $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 8u_n + 5n^2 - 3n + 1$;

г) $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 8u_n + 6 \cdot 2^{n+2} + 3^n$;

д) $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 8u_n + \sin \frac{\pi n}{2}$.

Решение. Всем данным неоднородным линейным рекуррентным соотношениям второго порядка с постоянными коэффициентами соответствует одно и то же однородное рекуррентное соотношение $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 8u_n$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 = -2\lambda + 8$ этого соотношения имеет корни $\lambda_1 = -4$ и $\lambda_2 = 2$. Поэтому его общим решением является функция

$$f(n) = C_1(-4)^n + C_2 2^n.$$

Для каждого из неоднородных соотношений найдем его частное решение и запишем общее решение.

а) Основание степени 3 у функции $b_n = 3^n$ не является решением характеристического уравнения, поэтому частное решение ищется в виде $g(n) = c3^n$:

$$c3^{n+2} = -2c3^{n+1} + 8c3^n + 3^n.$$

Отсюда $9c = -6c + 8c + 1$ и $c = \frac{1}{7}$. Таким образом, в качестве частного решения можно взять $g(n) = \frac{3^n}{7}$, поэтому общее решение неоднородного соотношения имеет вид

$$h(n) = C_1(-4)^n + C_2 2^n + \frac{3^n}{7}, n \in N_0.$$

б) Поскольку 2 – корень характеристического уравнения, частное решение неоднородного соотношения можно представить в виде $g(n) = cn2^n$. Тогда

$$c(n+2)2^{n+2} = -2c(n+1)2^{n+1} + 8cn2^n + 6 \cdot 2^{n+2}.$$

Отсюда $c = 2$, $g(n) = n2^{n+1}$ и общее решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения записывается так:

$$h(n) = C_1(-4)^n + C_22^n + n2^{n+1}, n \in \mathbf{N}_0.$$

в) Функция b_n является многочленом $5n^2 - 3n + 1$ от n , при этом 1 не является корнем характеристического многочлена. Частное решение ищется в виде $g(n) = c_0 + c_1n + c_2n^2$. Имеем:

$$c_0 + c_1(n+2) + c_2(n+2)^2 = -2(c_0 + c_1(n+1) + c_2(n+1)^2) + 8(c_0 + c_1n + c_2n^2) + 5n^2 - 3n + 1$$

или

$$-5c_2n^2 + (-5c_1 + 8c_2)n + (-5c_0 + 4c_1 + 6c_2) = 5n^2 - 3n + 1.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n , получим $c_0 = -\frac{11}{5}$, $c_1 = -1$, $c_2 = -1$. Общее решение неоднородного соотношения:

$$h(n) = C_1(-4)^n + C_22^n - \frac{11}{5} - n - n^2, n \in \mathbf{N}_0.$$

г) Общее решение получаем из решений пунктов а) и б):

$$h(n) = C_1(-4)^n + C_22^n + \frac{3^n}{7} + n2^{n+1}, n \in \mathbf{N}_0.$$

д) Для любого действительного числа φ имеет место формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, где $i^2 = -1$. Поэтому

$$e^{\frac{\pi ni}{2}} = \cos\frac{\pi n}{2} + i\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$u_{n+2} = -2u_{n+1} + 8u_n + e^{\frac{\pi ni}{2}}$$

или

$$u_{n+2} = -2u_{n+1} + 8u_n + \left(e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^n.$$

Согласно свойству 4^о мнимая часть частного решения этого соотношения будет удовлетворять исходному рекуррентному соотношению. Основание степени $e^{\frac{\pi i}{2}}$ функции $b_n = \left(e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^n$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение может быть записано в виде $g(n) = ce^{\frac{\pi ni}{2}}$ и

$$ce^{\frac{\pi(n+2)i}{2}} = -2ce^{\frac{\pi(n+1)i}{2}} + 8ce^{\frac{\pi ni}{2}} + e^{\frac{\pi ni}{2}}.$$

Откуда $c(e^{\pi i} + 2e^{\frac{\pi i}{2}} - 8) = c(-1 + 2i - 8) = 1$, $c = \frac{1}{-9+2i} = \frac{-9-2i}{85}$

и

$$\begin{aligned} g(n) &= \left(\frac{-9-2i}{85}\right)e^{\frac{\pi ni}{2}} = \left(\frac{-9-2i}{85}\right)\left(\cos\frac{\pi n}{2} + i\sin\frac{\pi n}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{85}\left(-9\cos\frac{\pi n}{2} + 2\sin\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{1}{85}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + 9\sin\frac{\pi n}{2}\right)i. \end{aligned}$$

Частное решение неоднородного рекуррентного соотношения имеет вид $\text{Im}(g(n)) = -\frac{1}{85} \left(2\cos\frac{\pi n}{2} + 9\sin\frac{\pi n}{2} \right)$, а его общее решение –

$$h(n) = C_1(-4)^n + C_2 2^n - \frac{1}{85} \left(2\cos\frac{\pi n}{2} + 9\sin\frac{\pi n}{2} \right), n \in \mathbf{N}_0. \square$$

Задача 2.6.2. Решить рекуррентное соотношение:

а) $u_{n+4} = 6u_{n+3} - 13u_{n+2} + 12u_{n+1} - 4u_n + 2^n$;

б) $u_{n+4} = 6u_{n+3} - 13u_{n+2} + 12u_{n+1} - 4u_n + 58n + 2$.

Решение. Данным неоднородным соотношениям соответствует однородное соотношение $u_{n+4} = 6u_{n+3} - 13u_{n+2} + 12u_{n+1} - 4u_n$. Его характеристическое уравнение $\lambda^4 = 6\lambda^3 - 13\lambda^2 + 12\lambda - 4$ или $(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2 = 0$ имеет два двукратных корня $\lambda_{1,2} = 1$ и $\lambda_{3,4} = 2$. Поэтому общее решение этого однородного соотношения

$$f(n) = C_1 + C_2 n + (C_3 + C_3 n) 2^n.$$

Найдем частные и общие решения неоднородных соотношений.

а) Поскольку $b_n = 2^n$ и 2 – двукратный корень характеристического уравнения, искомое частное решение будем искать в виде $g(n) = cn^2 2^n$. Подставляя эту функцию в рекуррентное соотношение, найдем соответствующее значение c . Имеем:

$$c(n+4)^2 2^{n+4} = 6c(n+3)^2 2^{n+3} - 13c(n+2)^2 2^{n+2} + 12c(n+1)^2 2^{n+1} - 4cn^2 2^n + 2^n.$$

Отсюда

$16c(n+4)^2 = 48c(n+3)^2 - 52c(n+2)^2 + 24c(n+1)^2 - 4cn^2 + 1$ и $c = \frac{1}{8}$. Поэтому $g(n) = n^2 2^{n-3}$, а общее решение неоднородного рекуррентного соотношения запишется так

$$h(n) = C_1 + C_2 n + (C_3 + C_3 n) 2^n + n^2 2^{n-3}, n \in \mathbf{N}_0.$$

б) Функция $b_n = 58n + 2$ – многочлен от n , а число 1 является двукратным корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищется в виде $g(n) = n^2(c_1 + c_2 n)$. Подстановка $g(n)$ в соотношение дает

$$(n+4)^2(c_1 + c_2(n+4)) = 6(n+3)^2(c_1 + c_2(n+3)) - 13(n+2)^2(c_1 + c_2(n+2)) + 12(n+1)^2(c_1 + c_2(n+1)) - 4n^2(c_1 + c_2 n) + 58n + 2.$$

Отсюда $58c_2 n + 2c_1 - 6c_2 = 58n + 2$ и $c_1 = 4$, $c_2 = 1$. Общее решение неоднородного рекуррентного соотношения

$$h(n) = C_1 + C_2 n + (C_3 + C_3 n) 2^n + n^2(n+4), n \in \mathbf{N}_0. \square$$

2.6.2. Рекуррентные соотношения и вычисление конечных сумм

Из изложенного в предыдущем пункте следует, что вычисление конечной суммы $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$ можно свести к решению неоднородного линейного рекуррентного соотношения

$$S_{n+1} = S_n + b_n, \quad n \in \mathbf{N}_0$$

первого порядка с постоянными коэффициентами, где $b_n = a_{n+1}$. Характеристическое уравнение $\lambda - 1 = 0$ однородного соотношения $S_{n+1} = S_n$ имеет корень $\lambda = 1$. Поэтому общее решение однородного соотношения имеет вид $f(n) = C$. Если $g(n)$ – частное решение неоднородного соотношения, то искомая сумма $S_n = C + g(n)$, где C определяется условием $S_0 = a_0$.

Задача 2.6.3. Вычислить суммы:

а) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$;

б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$;

в) $3^1 + 3^2 + \dots + 3^n$.

Решение. а) Общий член суммы – многочлен n^3 , при этом 1 является корнем характеристического многочлена. Поэтому частное решение неоднородного соотношения имеет вид $g(n) = n(c_1 + c_2n + c_3n^2 + c_4n^3)$. Подставляя его в рекуррентное соотношение $S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$, после преобразований получим $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + (2c_2 + 3c_3 + 4c_4)n + (3c_3 + 6c_4)n^2 + 4c_4n^3 = 1 + 3n + 3n^2 + n^3$.

Откуда $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{4}$, $c_3 = \frac{1}{2}$, $c_4 = \frac{1}{4}$. Таким образом, частное и общее решение неоднородного соотношения –

$$g(n) = n\left(\frac{1}{4}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{4}n^3\right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad S_n = C + \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Так как $S_0 = 0$, то $C = 0$, и искомая сумма $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

б) Частное решение ищется в виде $g(n) = n(c_1 + c_2n + c_3n^2)$. После его подстановки в соотношение $S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+2)$ и приведения подобных членов получим:

$$c_1 + c_2 + c_3 + (2c_2 + 3c_3)n + 3c_3n^2 = 2 + 3n + n^2.$$

Отсюда $c_1 = \frac{2}{3}$, $c_2 = 1$, $c_3 = \frac{1}{3}$, поэтому частное и общее решение соотношения имеют соответственно вид

$$g(n) = n\left(\frac{2}{3} + n + \frac{1}{3}n^2\right) = \frac{n(n^2+3n+2)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$
$$S_n = C + \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

С учетом того, что $S_0 = 0$, искомая сумма равна $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

в) Искомую сумму дополним слагаемым $3^0 = 1$ и вычислим сначала сумму $S_n = 3^0 + 3^1 + \dots + 3^n$. Число 3 не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение ищется в виде $g(n) = c3^n$. Подставив $g(n)$ в рекуррентное соотношение $S_{n+1} = S_n + 3^{n+1}$, имеем: $c3^{n+1} = c3^n + 3^{n+1}$. Отсюда $c = \frac{3}{2}$, и, значит, общее решение неоднородного рекуррентного соотношения запишется так: $S_n = C + \frac{3^{n+1}}{2}$. Поскольку $S_0 = 1$, то $C + \frac{3}{2} = 1$ и $C = -\frac{1}{2}$. Поэтому $S_n - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{3^{n+1}}{2} - 1 = \frac{3(3^n - 1)}{2}$.

Этот же результат можно получить с помощью формулы для вычисления суммы членов геометрической прогрессии с первым членом и знаменателем, равными 3. \square

§ 2.7. Конечные разности

Исчисление конечных разностей – еще одно эффективное средство решения комбинаторных задач. В параграфе приведены основные понятия этого исчисления и рассмотрены некоторые приложения в перечислительной комбинаторике.

2.7.1. Операторы конечной разности и сдвига

В отличие от дифференциального исчисления, где аргумент функций изменяется непрерывно, в исчислении конечных разностей исследуются функции с дискретным изменением аргумента, заданные в точках $x_k = x_0 + hk$, где h – некоторая постоянная, k – целое число. Поэтому в этом исчислении в качестве аналога оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$, который в математическом анализе вводится с помощью предельного перехода $\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, рассматривается оператор Δ , определяемый как отношение $\Delta f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Пусть F – множество вещественно или комплекснозначных функций числового аргумента, каждая из которых определена в точке $x + 1$, если она определена в точке x (рассматривается случай $h = 1$). В зависимости от решаемых задач областью определения указанных функций могут быть множества целых, целых неотрицательных и действительных чисел. Введем на множестве F оператор взятия конечной разности Δ и оператор сдвига E .

Для функции $f(x) \in \mathbf{F}$ оператор $\Delta: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ взятия конечной разности определяется равенством

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x). \quad (2.7.1)$$

Функция $\Delta f(x)$ называется при этом *конечной разностью первого порядка*.

Оператор сдвига $E: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$, определяется равенством

$$Ef(x) = f(x+1). \quad (2.7.2)$$

Например,

$$\Delta x^n = (x+1)^n - x^n = nx^{n-1} + \sum_{k=2}^n C_n^k x^{n-k}, \quad Ex^n = (x+1)^n; \quad (2.7.3)$$

$$\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a-1)a^x, \quad Ea^x = a^{x+1} = aa^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

(В частности, при $a = 2$ имеем $\Delta 2^x = 2^x$, т. е. функция $f(x) = 2^x$ обладает свойством $\Delta f(x) = f(x)$, аналогичным свойству функции $f(x) = e^x$ при обычном дифференцировании: $\frac{de^x}{dx} = e^x$.)

Теорема 2.7.1. Для любых функций $f(x)$, $g(x)$ и любого постоянного с операторы Δ и E обладают свойством линейности:

$$(1) \Delta(f(x) + g(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x),$$

$$E(f(x) + g(x)) = Ef(x) + Eg(x);$$

$$(2) \Delta(cf(x)) = c\Delta f(x), \quad E(cf(x)) = cEf(x).$$

Доказательство. По определению операторов Δ и E :

$$\begin{aligned} \Delta(f(x) + g(x)) &= (f(x+1) + g(x+1)) - (f(x) + g(x)) = \\ &= (f(x+1) - f(x)) + (g(x+1) - g(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x), \end{aligned}$$

$$E(f(x) + g(x)) = f(x+1) + g(x+1) = Ef(x) + Eg(x);$$

$$\Delta(cf(x)) = cf(x+1) - cf(x) = c(f(x+1) - f(x)) = c\Delta f(x),$$

$$E(cf(x)) = cf(x+1) = cEf(x). \quad \blacksquare$$

Следствие 1. $\Delta(c) = 0$, $E(c) = c$.

При этом из равенства $\Delta f(x) = 0$ в общем случае не следует, что $f(x) = \text{const}$. Так, для периодической функции $f(x) \neq 0$ с периодом $T = 1$ имеем $f(x+1) = f(x)$. Поэтому для такой функции $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = 0$.

Следствие 2. $\Delta E = E\Delta$.

Действительно, в силу пункта (1) теоремы $\Delta Ef(x) = E(\Delta f(x)) = E(f(x+1) - f(x)) = Ef(x+1) - Ef(x) = (x+2) - (x+1)$, а $E\Delta f(x) = \Delta(Ef(x)) = \Delta f(x+1) = (x+2) - (x+1)$.

Теорема 2.7.2. Для любых функций $f(x)$, $g(x)$ имеют место следующие правила вычисления конечной разности произведения и частного:

$$(1) \Delta(f(x)g(x)) = \Delta f(x) \cdot Eg(x) + f(x) \cdot \Delta g(x),$$

$$(2) \Delta \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\Delta f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \Delta g(x)}{g(x) \cdot Eg(x)}.$$

Доказательство. По определению операторов Δ и E :

$$\begin{aligned} (1) \Delta(f(x)g(x)) &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) = \\ &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x+1) + f(x)g(x+1) - f(x)g(x) = \\ &= (f(x+1) - f(x))g(x+1) + f(x)(g(x+1) - g(x)) = \\ &= \Delta f(x) \cdot E g(x) + f(x) \cdot \Delta g(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \Delta \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \frac{f(x+1)}{g(x+1)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+1)g(x) - f(x)g(x+1)}{g(x)g(x+1)} = \\ &= \frac{f(x+1)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+1)}{g(x)g(x+1)} = \\ &= \frac{(f(x+1) - f(x))g(x) - f(x)(g(x+1) - g(x))}{g(x)g(x+1)} = \frac{\Delta f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \Delta g(x)}{g(x) \cdot E g(x)}. \blacksquare \end{aligned}$$

Таким образом, основные свойства операции взятия конечной разности имеют определенную аналогию с соответствующими свойствами операции дифференцирования.

На основании определений операторов Δ и E

$$\Delta f(x) = E f(x) - f(x) = (E - I) f(x),$$

где I – тождественный оператор на F . Поэтому $\Delta = E - I$ и $E = \Delta + I$.

По индукции вводятся операторы Δ^n и E^n :

$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)), \quad E^n f(x) = E(E^{n-1} f(x)),$$

действия которых состоят в n -кратном применении операторов Δ и E соответственно. Функция $\Delta^n f(x)$ называется *конечной разностью n -го порядка*.

Например, конечная разность 2-го порядка находится так:

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+1) - f(x)) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x) = \\ &= (f(x+2) - f(x+1)) - (f(x+1) - f(x)) = \\ &= f(x+2) - 2f(x+1) + f(x), \end{aligned}$$

$$\text{а } E^2 f(x) = E(E f(x)) = E f(x+1) = f(x+2).$$

Условимся также считать, что $\Delta^0 = E^0 = I$.

Теорема 2.7.3.

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k f(x+n-k), \quad (2.7.4)$$

$$f(x+n) = \sum_{k=0}^n C_n^k \Delta^k f(x), \quad (2.7.5)$$

Доказательство. По формуле биннома Ньютона

$$\Delta^n f(x) = (E - I)^n = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k E^{n-k} \right) f(x).$$

Равенство (2.7.4) вытекает из того, что

$$E^k f(x) = f(x+k). \quad (2.7.6)$$

Справедливость равенства (2.7.5) следует из следствия 2 теоремы обращения. ■

Следствие 1.

$$\Delta^n x^m = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (x+n-k)^m, \quad (2.7.7)$$

$$(x+n)^m = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \Delta^k x^m. \quad (2.7.8)$$

Для доказательства этих формул достаточно в (2.7.4), (2.7.5) положить $f(x) = x^m$.

Значения n -й разности функции $f(x) = x^m$ при $x = 0$ обозначаются $\Delta^n 0^m$ и называются *числами Моргана*. Из формул (2.7.7) и (1.12.8) следует, что

$$\Delta^n 0^m = n! S(m, n), \quad (2.7.9)$$

где $S(m, n)$ – числа Стирлинга второго рода.

Следствие 2. $\Delta^n e^{cx} = e^{cx} (e^c - 1)^n$, $c = \text{const}$. (2.7.10)

В самом деле,

$$\begin{aligned} \Delta^n e^{cx} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e^{c(x+n-k)} = \\ &= e^{cx} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e^{c(n-k)} = e^{cx} (e^c - 1)^n. \end{aligned}$$

2.7.2. Факториальные степени

Несмотря на отмеченную аналогию между свойствами операций дифференцирования и взятия конечной разности, на примере (2.7.3) степенной функции можно видеть, что $\Delta x^n = nx^{n-1} + \sum_{k=2}^n C_n^k x^{n-k}$, в то время как $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$. Вместе с тем, существует функция, которая под действием оператора Δ преобразуется так же, как функция x^n при обычном дифференцировании. Это многочлен

$$(x)_n = \begin{cases} x(x-1) \dots (x-n+1), & \text{если } n > 0, \\ 1, & \text{если } n = 0. \end{cases} \quad (2.7.11)$$

Для этой функции

$$\begin{aligned} \Delta(x)_n &= (x+1)x(x-1) \dots (x-n+2) - x(x-1) \dots (x-n+1) = \\ &= x(x-1) \dots (x-n+2)((x+1) - (x-n+1)) = \\ &= nx(x-1) \dots (x-n+2) = n(x)_{n-1}, \end{aligned}$$

а последовательное взятие от нее конечной разности приводит к функции $\Delta^k(x)_n = n(n-1) \dots (n-k+1)(x)_{n-k}$, или

$$\Delta^k(x)_n = (n)_k (x)_{n-k}, \quad (2.7.12)$$

где $(n)_k = 0$ при $k > n$.

Функция $(x)_n$ называется *убывающей факториальной степенью* (множители в произведении (2.7.11) убывают по величине). Нетрудно заметить, что для целых неотрицательных m, n ($m \leq n$) имеем: $(m)_n = A_m^n$, в частности $(m)_m = m!$.

Теорема 2.7.4. Для любого многочлена

$$f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

существует единственное представление в виде

$$f(x) = b_k(x)_k + b_{k-1}(x)_{k-1} + \dots + b_1(x)_1 + b_0. \quad (2.7.13)$$

Доказательство. Запишем данный многочлен $f(x)$ степени k в виде

$$f(x) = x(a_k x^{k-1} + \dots + a_2 x + a_1) + a_0 = x q_1(x) + b_0.$$

Многочлен $q_1(x)$ степени $k-1$ разделим с остатком на двучлен $(x-1)$:

$$q_1(x) = (x-1)q_2(x) + b_1.$$

Неполное частное $q_2(x)$ разделим на $(x-2)$:

$$q_2(x) = (x-2)q_3(x) + b_2.$$

Продолжая процесс деления с остатком, придем к соотношениям:

$$q_{k-2}(x) = (x-k+2)q_{k-1}(x) + b_{k-2},$$

$$q_{k-1}(x) = (x-k+1)b_k + b_{k-1}.$$

Последовательно подставляя $q_{k-1}(x), q_{k-2}(x), \dots, q_1(x)$ в предшествующие равенства, получим:

$$q_{k-2}(x) = (x-k+2)(x-k+1)b_k + (x-k+2)b_{k-1} + b_{k-2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$q_2(x) = (x-2) \dots (x-k+1)b_k + \dots + (x-2)b_3 + b_2,$$

$$q_1(x) = (x-1) \dots (x-k+1)b_k + \dots + (x-1)b_2 + b_1,$$

$$f(x) = x(x-1) \dots (x-k+1)b_k + \dots + x b_1 + b_0.$$

Отсюда $f(x) = b_k(x)_k + b_{k-1}(x)_{k-1} + \dots + b_1(x) + b_0$. Так как операция деления многочленов с остатком выполняется однозначно, найденное разложение многочлена $f(x)$ по факториальным степеням является единственным. ■

Теорема 2.7.5. Коэффициенты $b_i, i = 0, 1, \dots, k$ в разложении (2.7.13) многочлена $f(x)$ по факториальным степеням вычисляются по формуле

$$b_i = \frac{1}{i!} \Delta^i f(0). \quad (2.7.14)$$

Доказательство. В силу (2.7.12) последовательное взятие конечной разности от многочлена

$$f(x) = b_k(x)_k + b_{k-1}(x)_{k-1} + \dots + b_1(x) + b_0$$

дает:

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= kb_k(x)_{k-1} + (k-1)b_{k-1}(x)_{k-2} + \dots + 2b_2(x) + 1!b_1, \\ \Delta^2 f(x) &= k(k-1)b_k(x)_{k-2} + \dots + 3 \cdot 2 \cdot b_3(x) + 2!b_2, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{k-2} f(x) &= k(k-1) \dots 3 \cdot b_k(x)_2 + (k-1) \dots 2 \cdot b_{k-1}(x) + (k-2)! b_{k-2}, \\ \Delta^{k-1} f(x) &= k(k-1) \dots 2 \cdot b_k(x) + (k-1)! b_{k-1}, \\ \Delta^k f(x) &= k! b_k.\end{aligned}$$

Из этих равенств при $x = 0$ имеем $\Delta^i f(0) = i! b_i$, $i = 0, 1, \dots, k$. ■

Следствие. Коэффициенты в разложении степенной функции x^n по факториальным степеням $(x)_i$ являются числами Стирлинга второго рода, т. е.

$$x^n = \sum_{i=0}^n S(n, i)(x)_i. \quad (2.7.15)$$

Действительно, в силу (2.7.9) имеем

$$b_i = \frac{1}{i!} \Delta^i f(0) = \frac{1}{i!} \Delta^i 0^n = \frac{1}{i!} i! S(n, i) = S(n, i).$$

Возникает обратная задача нахождения разложения факториальной степени $(x)_n$ по степеням x . Оказывается, что коэффициентами в таком разложении являются числа Стирлинга первого рода, т. е. имеет место

Теорема 2.7.6.

$$(x)_n = \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k. \quad (2.7.16)$$

Доказательство. Пусть $(x)_n = \sum_{k=0}^n a(n, k)x^k$. Тогда $a(0, 0) = 1$ и $a(n, k) = 0$ при всех $k > n$. Из определения (2.7.11) следует, что

$$(x)_n = (x - n + 1)(x)_{n-1} = x(x)_{n-1} - (n-1)(x)_{n-1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n a(n, k)x^k &= x \sum_{k=0}^{n-1} a(n-1, k)x^k - (n-1) \sum_{k=0}^{n-1} a(n-1, k)x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a(n-1, k)x^{k+1} - (n-1) \sum_{k=0}^{n-1} a(n-1, k)x^k = \\ &= \sum_{k=1}^n a(n-1, k-1)x^k - (n-1) \sum_{k=0}^{n-1} a(n-1, k)x^k.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^n a(n, k)x^k = \sum_{k=1}^n a(n-1, k-1)x^k - (n-1) \sum_{k=0}^{n-1} a(n-1, k)x^k.$$

Приравнивая коэффициенты при x^k в левой и правой частях этого равенства, при $1 \leq k \leq n$ получим рекуррентные соотношения для коэффициентов $a(n, k)$:

$$a(n, k) = a(n-1, k-1) - (n-1)a(n-1, k).$$

Аналогичным рекуррентным соотношениям

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1)s(n-1, k)$$

удовлетворяют числа Стирлинга первого рода.

При этом начальные условия этих двух соотношений также совпадают: $a(0,0) = s(0,0) = 1$ и $a(n, k) = s(n, k) = 0$ при всех $k > n$. Значит, $a(n, k) = s(n, k)$, т. е. коэффициенты многочленов $(x)_n$ являются числами Стирлинга первого рода. ■

Следствие.

$$s(n, k) = (-1)^{n-k} \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n-1} i_1 i_2 \dots i_{n-k}, \quad (2.7.17)$$

где $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Формула (2.7.17) вытекает из формулы Виета (многочлен $(x)_n$ имеет корни $0, 1, \dots, n-1$).

Теорема 2.7.7. Числа Стирлинга первого и второго рода связаны соотношениями

$$\sum_{i=k}^n s(n, i)S(i, k) = \delta_{nk}, \quad (2.7.18)$$

где δ_{nk} – символ Кронекера.

Доказательство. Подставим x^k из формулы (2.7.15) в формулу (2.7.16):

$$(x)_n = \delta_{nk}(x)_k = \sum_{i=0}^n s(n, i)x^i = \sum_{i=0}^n s(n, i) \sum_{k=0}^i S(i, k)(x)_k.$$

Учитывая, что $S(i, k)$ при всех $k > i$, отсюда получим

$$\delta_{nk}(x)_k = \sum_{i=k}^n s(n, i)S(i, k)(x)_k.$$

Следовательно, $\sum_{i=k}^n s(n, i)S(i, k) = \delta_{nk}$. ■

На основании теоремы 2.7.7 справедливы формулы *обращения Стирлинга*:

$$a_n = \sum_{k=0}^n s(n, k)b_k, \quad b_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)a_k. \quad (2.7.19)$$

Для любых двух последовательностей $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$ если справедлива одна из этих формул, то справедлива и вторая.

Понятие убывающей факториальной степени распространяют на степени с целыми отрицательными показателями:

$$(x)_{-m} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}, \quad m > 0. \quad (2.7.20)$$

В этом случае

$$\Delta(x)_{-m} = \frac{1}{(x+2)\dots(x+m+1)} - \frac{1}{(x+1)\dots(x+m)} = \frac{-m}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)(x+m+1)} = -m(x)_{-(m+1)}.$$

Кроме того, рассматривают *возрастающие факториальные степени* $[x]_n$, которые определяются следующим образом:

$$[x]_n = \begin{cases} x(x+1)\dots(x+n-1), & \text{если } n > 0, \\ 1, & \text{если } n = 0. \end{cases} \quad (2.7.21)$$

Нетрудно доказать, что $[x]_n = (x+n-1)_n = (-1)^n(-x)_n$, $\Delta^k[x]_n = (n)_k \frac{[x]_n}{[x]_k}$ и $(x)_n < x^n < [x]_n$ при любом $1 < n < x$.

Примечание. При обозначении факториальных степеней $(x)_n$, $[x]_n$ в математической литературе используются также обозначения $x^{\underline{n}}$, $x^{\overline{n}}$ или $x^{(n)}$, $x^{[n]}$ соответственно.

Правило $x^m x^n = x^{m+n}$ умножения обычных степеней с одинаковыми основаниями для убывающих факториальных степеней принимает вид

$$(x)_{m+n} = (x)_m (x-m)_n, \quad m, n - \text{целые.} \quad (2.7.22)$$

Например,

$$(x)_{2+3} = (x)_2 (x-2)_3 = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = (x)_5,$$

$$(x)_{2+(-3)} = (x)_2 (x-2)_{-3} = \frac{x(x-1)}{(x-1)x(x+1)} = \frac{1}{x+1} = (x)_{-1},$$

$$(x)_{(-2)+(-3)} = (x)_{-2} (x+2)_{-3} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} \cdot \frac{1}{(x+3)(x+4)(x+5)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)} = (x)_{-5}.$$

2.7.3. Полиномиальные последовательности

Значения функции $u_n = f(n)$, определенной на \mathbf{N}_0 , образуют числовую последовательность

$$u_0, u_1, \dots, u_n, \dots \quad (2.7.23)$$

Разность $\Delta u_n = \Delta f(n)$ первого порядка этой функции определяет последовательность

$$\Delta u_0, \Delta u_1, \dots, \Delta u_n, \dots,$$

которая для (2.7.23) называется *последовательностью ее первых разностей*. Аналогично определяются последовательности

$$\Delta^k u_0, \Delta^k u_1, \dots, \Delta^k u_n, \dots$$

k -х разностей для любого $k \geq 2$.

Последовательность $\langle u_n \rangle$ с общим членом

$$u_n = \alpha_0 n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} n + \alpha_k, k \in N_0 \quad (2.7.24)$$

называется *полиномиальной последовательностью k -й степени*.

Теорема 2.7.8. *Числовая последовательность $\langle u_n \rangle$ является полиномиальной последовательностью k -й степени тогда и только тогда, когда все члены ее последовательности $(k+1)$ -х разностей равны нулю, а среди членов последовательности k -х разностей есть отличные от нуля.*

Доказательство. Из (2.7.3) и теоремы 2.7.1 следует, что взятие конечной разности от многочлена понижает степень этого многочлена на единицу. Поэтому $(k+1)$ -я разность многочлена (2.7.24) k -й степени будет нулевым многочленом и, значит, все члены последовательности $(k+1)$ -х разностей полиномиальной последовательности k -й степени равны нулю.

Обратно, пусть все члены последовательности $(k+1)$ -х разностей некоторой числовой последовательности $\langle u_n \rangle$ равны нулю. Докажем, что $\langle u_n \rangle$ – полиномиальная последовательность k -й степени. Если $\Delta^{k+1} f(n) = 0$, то $\Delta^m f(n) = 0$ при $m > k+1$, а все члены последовательности k -х разностей постоянны. По условию теоремы среди членов $\Delta^k f(n) = \Delta^k f(0)$ последовательности k -х разностей имеются отличные от нуля. Тогда из (2.7.5) при $x = 0$ получим $f(n) = \sum_{k=0}^n C_n^k \Delta^k f(0)$. Следовательно,

$$f(n) = f(0) + n\Delta f(0) + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 f(0) + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \Delta^k f(0),$$

т. е. $f(n)$ – многочлен k -й степени относительно n . ■

Примечание. Приведенное доказательство предполагает, что последовательность не является периодической с периодом $T = 1$.

Достаточно часто последовательности комбинаторных чисел являются именно полиномиальными. Доказанная теорема позволяет по известным их первым членам находить формулу общего члена.

Задача 2.7.1. Найти формулу общего члена последовательности – 2, 3, 76, 361, 1074, 2503, 5008, ...

Решение. Проверим, не является ли заданная последовательность полиномиальной. Для этого составим таблицу разностей, в первой строке которой стоят члены данной последовательности, а числа в последующих строках равны разностям двух чисел, стоящих над ними.

-2	3	76	361	1074	2503	5008
	5	73	285	713	1429	2505
		68	212	428	716	1076
			144	216	288	360
				72	72	72
					0	0

Из таблицы видим, что все члены последовательности пятых разностей равны нулю. Поэтому в силу теоремы 2.7.8 заданная последовательность является полиномиальной последовательностью четвертой степени. Нетрудно заметить, что коэффициенты многочлена $f(n)$, задающего формулу ее общего члена, можно найти по левым членам составленной таблицы:

$$f(n) = -2 + 5n + 68 \cdot \frac{n(n-1)}{2!} + 144 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + 72 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = 3n^4 + 6n^3 - 5n^2 + n - 2. \square$$

2.7.4. Суммирование конечных разностей

Продолжая параллели с дифференциальным и интегральным исчислениями, на множестве F (см. п. 2.7.1) введем аналоги неопределенного и определенного интеграла. Определим для этого *оператор суммирования* Σ , обратный оператору Δ взятия конечной разности: для функции $f(x) \in F$ будем считать $\Sigma f(x) = F(x)$, если $\Delta F(x) = f(x)$.

Очевидно, что $\Delta(F(x) + c) = \Delta F(x) = f(x)$, где $c = \text{const}$ или периодическая функция с периодом $T = 1$, поэтому

$$\Sigma f(x) = F(x) + c.$$

Таким образом, оператор суммирования Σ ставит в соответствие функции $f(x)$ семейство функций $F(x) + c$, являющееся аналогом неопределенного интеграла.

Из определения оператора суммирования следует, что

$$\Delta(\Sigma f(x)) = \Delta F(x) = f(x), \quad \Sigma(\Delta F(x)) = \Sigma f(x) = F(x) + c.$$

Теорема 2.7.9. Для любых функций $f(x)$, $g(x)$ и любого постоянного c оператор Σ обладает свойством линейности:

$$\Sigma(f(x) + g(x)) = \Sigma f(x) + \Sigma g(x), \quad \Sigma(cf(x)) = c \Sigma f(x).$$

Доказательство. Пусть $\Delta F(x) = f(x)$, $\Delta G(x) = g(x)$, тогда $\Sigma f(x) = F(x)$, $\Sigma g(x) = G(x)$ и

$$\Sigma f(x) + \Sigma g(x) = F(x) + G(x).$$

С другой стороны, в силу теоремы 2.7.1

$$\Delta(F(x) + G(x)) = \Delta F(x) + \Delta G(x) = f(x) + g(x).$$

Поэтому $\sum(f(x) + g(x)) = \sum f(x) + \sum g(x)$. Первое свойство доказано. Второе свойство доказывается аналогично. ■

Задача 2.7.2. Доказать, что

$$(a) \sum(x)_n = \frac{(x)_{n+1}}{n+1} + c, \text{ если } n \neq -1;$$

$$(б) \sum a^{kx} = \frac{a^{kx}}{a^k - 1} + c, \text{ где } k = \text{const}.$$

Решение. Имеем:

$$(a) \Delta \left(\frac{(x)_{n+1}}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} \Delta(x)_{n+1} = \frac{1}{n+1} (n+1) (x)_n = (x)_n,$$

$$(б) \Delta \left(\frac{a^{kx}}{a^k - 1} \right) = \frac{1}{a^k - 1} (a^{k(x+1)} - a^{kx}) = \frac{1}{a^k - 1} (a^k - 1) a^{kx} = a^{kx}.$$

Примечание. Для вычисления суммы $\sum(x)_{-1}$ (см. исключение $n \neq -1$ в пункте (а) задачи) рассмотрим функцию $f(x) = H_x = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{x}$. Для этой функции $\Delta H_x = H_{x+1} - H_x = \frac{1}{x+1}$, поэтому $\sum(x)_{-1} = \sum \frac{1}{x+1} = H_x + c$. Отсюда следует, что функция H_x является дискретным аналогом непрерывной функции $\ln x$. □

Пусть $f(x) = \Delta F(x) = F(x+1) - F(x)$ и функция $f(x)$ определена в точке $x = 0$. Тогда

$$\sum_{x=0}^n f(x) = \sum_{x=0}^n (F(x+1) - F(x)) = F(n+1) - F(0).$$

Полученное равенство позволяет, таким образом, вычислять суммы вида $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$:

$$S_n = F(n+1) - F(0),$$

где $f(x) = \Delta F(x) = F(x+1) - F(x)$. Найденная формула является аналогом формулы Ньютона – Лейбница для вычисления определенного интеграла. Продолжая аналогию, введем обозначение

$$F(x)|_0^{n+1} = F(n+1) - F(0).$$

Задача 2.7.3. Вычислить суммы:

$$a) \sum_{k=0}^n k(k+1) \dots (k+m) \text{ при целых } m, n \geq 0;$$

$$б) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \dots (k+m)} \text{ при целых } m, n \geq 0;$$

$$в) \sum_{k=0}^n k^3;$$

$$г) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-1)(4k+3)(4k+7)}.$$

Решение. а) По определению возрастающей факториальной степени

$$\sum_{k=0}^n k(k+1) \dots (k+m) = \sum_{x=0}^n [x]_{m+1} = \frac{[x]_{m+2}}{m+2} \Big|_0^{n+1} =$$

$$= \frac{n(n+1) \dots (n+m-1)}{m+2}.$$

$$6) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \dots (k+m)} = \sum_{x=1}^n (x-1)_{-(m+1)} = \frac{(x-1)_{-m}}{-m} \Big|_1^{n+1} =$$

$$= \frac{-1}{mx(x+1) \dots (x+m-1)} \Big|_1^{n+1} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1) \dots (n+m)} \right).$$

в) Запишем x^3 в факториальной форме:

$$x^3 = x \cdot x^2 = x((x^2 - 1) + 1) = x((x-1)(x+1) + 1) =$$

$$= x(x-1)(x+1) + x = x(x-1)((x-2) + 3) + x =$$

$$= x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x = (x)_3 + 3(x)_2 + (x)_1.$$

Отсюда

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \sum_{x=0}^n ((x)_3 + 3(x)_2 + (x)_1) =$$

$$= \left(\frac{(x)_4}{4} + \frac{3(x)_3}{3} + \frac{(x)_2}{2} \right) \Big|_0^{n+1} = \frac{1}{4} ((x)_4 + 4(x)_3 + 2(x)_2) \Big|_0^{n+1}.$$

Полученный многочлен вновь перепишем в обычной форме:

$$(x)_4 + 4(x)_3 + 2(x)_2 = x(x-1)((x-2)(x-3) + 4(x-2) + 2) =$$

$$= x(x-1)(x^2 - x) = x^2(x-1)^2.$$

$$\text{Тогда } \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{1}{4} (x^2(x-1)^2) \Big|_0^{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Примечание. Подобным образом можно поступать и в более общем случае, когда под знаком суммы стоит некоторый многочлен. Например, применяя теорему 2.7.5, можно следующим образом найти сумму:

$$\sum_{k=0}^n (3k^4 + 4k^3 - 5k^2 + k - 2) = \sum_{x=0}^n (3(x)_4 + 24(x)_3 + 34(x)_2 + 5(x)_1 - 2) =$$

$$= \left(\frac{3(x)_5}{5} + 6(x)_4 + \frac{34(x)_3}{3} + \frac{5(x)_2}{2} - 2(x)_1 \right) \Big|_0^{n+1} \text{ и т. д.}$$

г) Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, представим функцию $\frac{1}{(4k-1)(4k+3)(4k+7)}$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{1}{(4k-1)(4k+3)(4k+7)} = \frac{A}{4k-1} + \frac{B}{4k+3} + \frac{C}{4k+7}. \text{ Отсюда}$$

$$A(4k+3)(4k+7) + B(4k-1)(4k+7) + C(4k-1)(4k+3) = 1$$

и коэффициенты A, B, C находятся из системы

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ 5A + 3B + C = 0, \\ 21A - 7B - 3C = 1. \end{cases}$$

Имеем: $A = \frac{1}{32}, B = -\frac{2}{32}, C = \frac{1}{32}$, поэтому

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-1)(4k+3)(4k+7)} = \sum_{x=1}^n \frac{1}{(4x-1)(4x+3)(4x+7)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{32} \sum_{x=1}^n \left(\left(\frac{1}{4x-1} - \frac{1}{4x+3} \right) - \left(\frac{1}{4x+3} - \frac{1}{4x+7} \right) \right) = \\
&= -\frac{1}{32} \left(\frac{1}{4x-1} - \frac{1}{4x+3} \right) \Big|_1^{n+1} = \frac{-1}{8(4x-1)(4x+3)} \Big|_1^{n+1} = \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{(4x+3)(4x+7)} \right). \quad \square
\end{aligned}$$

В тех случаях, когда для функции $f(x)$ удастся подобрать такую функцию $F(x)$, что выполняется соотношение

$$f(x) = F(x+1) - aF(x), \quad (2.7.25)$$

легко находится сумма $\sum_{k=0}^n \frac{f(k)}{a^k}$. Действительно, из соотношения (2.7.25) следует, что $\frac{f(x)}{a^x} = \frac{F(x+1)}{a^x} - \frac{F(x)}{a^{x-1}}$. Поэтому

$$\sum_{k=0}^n \frac{f(k)}{a^k} = \sum_{x=0}^n \frac{f(x)}{a^x} = \frac{F(x)}{a^{x-1}} \Big|_0^{n+1} = \frac{F(n+1)}{a^n} - F(0).$$

Задача 2.7.4. Вычислить сумму $\sum_{k=0}^n \frac{k(5-3k)}{2^{2k}}$.

Решение. Преобразовав функцию $x(5-3x)$, видим, что $x(5-3x) = x(x+1) - 4(x-1)x$ и, следовательно, она удовлетворяет условию (2.7.25): $F(x) = (x-1)x$, $a = 4$. Поэтому

$$\sum_{k=0}^n \frac{k(5-3k)}{2^{2k}} = \sum_{x=0}^n \frac{x(5-3x)}{4^x} = \frac{(x-1)x}{4^{x-1}} \Big|_0^{n+1} = \frac{n(n+1)}{4^n}. \quad \square$$

Можно, наконец, в исчислении конечных разностей по аналогии с методом интегрирования по частям ввести метод *суммирования по частям* (см. преобразование Абеля).

Теорема 2.7.10.

$$\sum (f(x)\Delta g(x)) = f(x)g(x) + \sum (Eg(x)\Delta f(x)) + c.$$

Доказательство. Согласно теореме 2.7.2

$$\Delta(f(x)g(x)) = f(x) \cdot \Delta g(x) + Eg(x) \cdot \Delta f(x).$$

Отсюда $\sum(\Delta(f(x)g(x))) = \sum(f(x) \cdot \Delta g(x)) + \sum(Eg(x) \cdot \Delta f(x))$ или $f(x)g(x) = \sum(f(x) \cdot \Delta g(x)) + \sum(Eg(x) \cdot \Delta f(x))$, и, следовательно, доказываемая формула справедлива. ■

Из теоремы 2.7.10 следует, что

$$\sum_{x=0}^n (f(x) \cdot \Delta g(x)) = (f(x)g(x)) \Big|_0^{n+1} - \sum_{x=0}^n (Eg(x) \cdot \Delta f(x)). \quad (2.7.26)$$

Задача 2.7.5. Вычислить суммы:

$$\text{а) } \sum_{k=0}^n ka^k, \text{ где } a > 0, a \neq 1; \text{ б) } \sum_{k=0}^n kH_k.$$

Решение. В обоих пунктах воспользуемся методом суммирования по частям.

а) Положим $f(x) = x$, $\Delta g(x) = a^x$, тогда $f(x) = \Delta x = 1$, $g(x) = \frac{a^x}{a-1}$, $Eg(x) = \frac{a^{x+1}}{a-1}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n ka^k &= \sum_{x=0}^n xa^x = \frac{xa^x}{a-1} \Big|_0^{n+1} - \sum_{x=0}^n \left(\frac{a^{x+1}}{a-1} \cdot 1 \right) = \\ &= \frac{(n+1)a^{n+1}}{a-1} - \frac{a}{a-1} \sum_{x=0}^n a^x = \frac{(n+1)a^{n+1}}{a-1} - \frac{a(a^{n+1}-1)}{(a-1)^2} = \\ &= \frac{(an-n-1)a^{n+1}+a}{(a-1)^2}. \end{aligned}$$

б) Положим $f(x) = H_x$, $\Delta g(x) = x = (x)_1$, тогда $f(x) = (x)_{-1}$, $g(x) = \frac{(x)_2}{2}$, $Eg(x) = \frac{(x+1)_2}{2}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kH_k &= \sum_{x=1}^n xH_x = \frac{(x)_2 H_x}{2} \Big|_1^{n+1} - \sum_{x=1}^n \frac{(x+1)_2 (x)_{-1}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left((x)_2 H_x \Big|_1^{n+1} - \sum_{x=1}^n (x)_1 \right) = \frac{1}{2} \left((x)_2 H_x \Big|_1^{n+1} - \frac{(x)_2}{2} \Big|_1^{n+1} \right) = \\ &= \frac{(n+1)n}{2} \left(H_{n+1} - H_1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{(n+1)n}{2} \left(H_{n+1} - \frac{1}{2} \right). \quad \square \end{aligned}$$

Глава 3

Производящие функции

§ 3.1. Алгебра формальных степенных рядов

Один из наиболее универсальных методов решения перечислительных задач основан на использовании так называемых производящих функций. Основная идея этого метода состоит в сопоставлении последовательности комбинаторных чисел формального степенного ряда (производящей функции), коэффициенты которого являются членами этой последовательности. Такое соответствие позволяет свести процесс вычисления числа заданных комбинаторных конфигураций к операциям со степенными рядами, которые, как правило, оказываются логически более прозрачными, чем непосредственные комбинаторные рассуждения.

Производящие функции и арифметические операции над ними были введены А. де Муавром при решении линейных рекуррентных соотношений в общем виде. В дальнейшем Дж. Стирлинг применил метод производящих функций для решения более сложных рекуррентных соотношений и показал, что при этом наряду с арифметическими операциями можно использовать операции дифференцирования и интегрирования. Через несколько лет Л. Эйлер воспользовался производящими функциями при исследовании разбиений. Дальнейшее развитие метод производящих функций получает в работах П. С. Лапласа*.

3.1.1. Идеи, приводящие к понятию производящей функции

Чтобы понять, для чего и как появилось понятие производящей функции, вернемся к перечислительным задачам о выборе элементов из данного множества. Пусть имеется некоторое множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Можно перечислить всевозможные сочетания из n элементов a_1, a_2, \dots, a_n по k , а затем найти их число, если рассмотреть произведение $(1 + a_1x)(1 + a_2x) \dots (1 + a_nx)$. В самом деле, выполнив умножение и приводя подобные члены, получим

$$\begin{aligned} & (1 + a_1x)(1 + a_2x) \dots (1 + a_nx) = \\ & = 1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)x + (a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_{n-1}a_n)x^2 + \dots \\ & + (a_1a_2 \dots a_k + \dots + a_{n-k+1}a_{n-k+2} \dots a_n)x^k + \dots + a_1a_2 \dots a_nx^n. \end{aligned}$$

* Пьер Симон Лаплас (1749–1827) – французский математик, физик и астроном. Широко использовал производящие функции в своем труде «Аналитическая теория вероятностей», который трижды переиздавался при его жизни и считается классикой математической литературы.

Нетрудно заметить, что слагаемые в скобках при x^k , $k = 1, \dots, n$, являются сочетаниями из данных n элементов по k , а именно: при x – из n элементов по одному, при x^2 – из n по два и т. д. Чтобы найти число соответствующих сочетаний, достаточно положить $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$. Но мы знаем, что

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n.$$

Поэтому коэффициент C_n^k при x^k в многочлене, являющемся разложением бинома $(1+x)^n$, позволяет найти число сочетаний из n элементов по k .

Теперь выясним комбинаторный смысл коэффициентов при x^n в произведении

$$(1 + a_1 x + \dots + a_1^k x^k)(1 + a_2 x + \dots + a_2^k x^k) \dots (1 + a_n x + \dots + a_n^k x^k).$$

Положим, для примера, $k = 2$, $n = 3$, тогда:

$$\begin{aligned} & (1 + a_1 x + a_1^2 x^2)(1 + a_2 x + a_2^2 x^2)(1 + a_3 x + a_3^2 x^2) = \\ & = 1 + (a_1 + a_2 + a_3)x + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)x^2 + \\ & + (a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2^2 + a_1 a_3^2 + a_1^2 a_2 + a_1^2 a_3 + a_2 a_2^2 + a_2^2 a_3)x^3 + \\ & + (a_1^2 a_2 a_3 + a_1 a_2^2 a_3 + a_1 a_2 a_3^2 + a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_3^2 + a_2^2 a_3^2)x^4 + \\ & + (a_1 a_2^2 a_3^2 + a_1^2 a_2 a_3^2 + a_1^2 a_2^2 a_3)x^5 + a_1^2 a_2^2 a_3^2 x^6. \end{aligned}$$

Видим, что слагаемые в коэффициентах найденного многочлена представляют собой всевозможные сочетания из трех элементов с повторениями, при этом число повторений не превышает двух. Так, слагаемые $a_1 a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_2 a_2 a_3$, $a_1 a_2 a_3 a_3$, $a_1 a_1 a_2 a_2$, $a_1 a_1 a_3 a_3$, $a_2 a_2 a_3 a_3$ в коэффициенте при x^4 – сочетания из трех элементов a_1 , a_2 , a_3 по 4 с повторениями, в которых каждый элемент повторяется не более двух раз. Если теперь положить $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, то мы получим многочлен

$$(1 + x + x^2)^3 = 1 + 3x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6,$$

коэффициент при x^m ($m = 0, 1, \dots, 6$) в котором равен числу сочетаний из 3 элементов по m с не более чем с двукратным повторением. Очевидно, что точно так же коэффициенты многочлена

$$(1 + x + \dots + x^k)^n$$

равны числу сочетаний из n элементов по m ($0 \leq m \leq kn$) с повторениями, причем число повторений не превышает k .

Рассмотренные многочлены, коэффициенты в которых имеют определенный комбинаторный смысл, являются простейшими примерами производящих функций.

Можно ли подобным образом построить производящую функцию для нахождения числа сочетаний из n элементов с повторениями, когда каждый элемент может повторяться любое число раз? Да, но теперь придется перемножать степенные ряды:

$$(1 + x + \dots + x^k + \dots)^n.$$

Их произведением будет тоже степенной ряд; вместе с тем, поставленная цель будет достигнута: коэффициент при x^m в этом ряде равен числу сочетаний из n элементов по m с повторениями, при этом на m не накладывается никаких ограничений. В данном примере производящая функция является уже степенным рядом.

Построенные с помощью степенных рядов, в частности многочленов, и операций над ними производящие функции являются одним из наиболее универсальных средств решения самых разнообразных перечислительных комбинаторных задач. При этом оказывается, что до тех пор, пока не требуется прибегать к суммированию рядов, можно рассматривать производящие функции как формальные выражения, на множестве которых обычным образом введены алгебраические операции. Поэтому изучение метода производящих функций начнем с изучения алгебры формальных степенных рядов.

3.1.2. Алгебра Коши

Пусть \mathbf{K} – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей 1. *Формальным степенным рядом* над кольцом \mathbf{K} называется выражение

$$A(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots \quad (3.1.1)$$

или, кратко,

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,$$

где коэффициенты $a_n \in \mathbf{K}$, $n \in \mathbf{N}_0$ и x – некоторый произвольный символ, который принято называть переменной. Множество всех таких рядов обозначим через $\mathbf{K}[[x]]$.

Формальный степенной ряд

$$B(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots \quad (3.1.2)$$

и ряд (3.1.1) считаются *равными*, если $a_n = b_n$ для любого $n \in \mathbf{N}_0$. Если все коэффициенты ряда (3.1.1), за исключением конечного числа, равны нулю, то $A(x)$ – многочлен над кольцом \mathbf{K} . Поэтому множество многочленов $\mathbf{K}[x]$ – подмножество множества $\mathbf{K}[[x]]$.

Определим на множестве $\mathbf{K}[[x]]$ операции сложения и умножения формальных рядов, а также операцию умножения формального ряда на элементы кольца \mathbf{K} .

Суммой $A(x) + B(x)$ формальных рядов (3.1.1) и (3.1.2) называется ряд $C(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots$, т. е.

$$A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n. \quad (3.1.3)$$

Нейтральным элементом относительно сложения является нулевой ряд, т. е. ряд, все коэффициенты которого равны нулю: $A(x) + 0 = 0 + A(x) = A(x)$. Для любого ряда (3.1.1) существует противоположный ему ряд $-A(x) = -a_0 - a_1x - \dots - a_nx^n - \dots$ такой, что $A(x) + (-A(x)) = (-A(x)) + A(x) = 0$.

Произведением формального ряда $A(x)$ на элемент $k \in \mathbf{K}$ называется ряд $kA(x) = ka_0 + ka_1x + \dots + ka_nx^n + \dots$, т. е.

$$k \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} (ka_n)x^n. \quad (3.1.4)$$

В том случае, когда \mathbf{K} – поле, операции сложения рядов и умножения ряда на элемент поля (скаляра) определяют на множестве $\mathbf{K}[[x]]$ структуру бесконечномерного векторного (линейного) пространства над полем \mathbf{K} .

Произведением Коши* $A(x)B(x)$ формальных рядов (3.1.1) и (3.1.2) называется ряд $C(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots$ такой, что $C(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots$

$$+ (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0)x^n + \dots,$$

т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n, \quad (3.1.5)$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \quad (3.1.6)$$

Нейтральным элементом относительно умножения является ряд $1 = 1 + 0x + 0x^2 + \dots$, т. е. единица 1 кольца \mathbf{K} .

* Огюстен Луи Коши (1789–1857) – французский математик. Продуктивно работал в разных областях математики, преимущественно в математическом анализе и математической физике.

Произведение формальных степенных рядов $A_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + \dots + a_{in}x^n + \dots$, $i = 1, \dots, k$, $k \geq 2$ находится так:

$$\prod_{i=1}^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{in}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=n, \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, \dots, n_k \geq 0}} a_{1n_1} a_{2n_2} \dots a_{kn_k} \right) x^n.$$

Векторное пространство, в котором определена операция умножения векторов, называется линейной алгеброй. Поэтому $\mathbf{K}[[x]]$ – линейная алгебра, ее называют *алгеброй Коши*.

3.1.3. Кольцо формальных степенных рядов

Легко доказать, что множество $\mathbf{K}[[x]]$ формальных степенных рядов с определенными на нем правилами (3.1.3), (3.1.5) сложением и умножением является ассоциативным коммутативным кольцом с единицей, а подмножество $\mathbf{K}[x]$ многочленов – его подкольцом.

Если кольцо \mathbf{K} является областью целостности, т. е. не содержит делителей нуля, то $\mathbf{K}[[x]]$ – также целостное кольцо. Действительно, пусть для рядов (3.1.1) и (3.1.2) имеем $A(x)B(x) = 0$. Выполняя по формуле (3.1.6) умножение рядов и сравнивая соответствующие коэффициенты в разных частях, получим $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0$ для любого $n \in \mathbf{N}_0$, т. е.

$$a_0 b_0 = 0, a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0, \dots, a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = 0, \dots$$

Поскольку \mathbf{K} – область целостности, первое равенство возможно тогда и только тогда, когда хотя бы один из элементов a_0, b_0 равен нулю. Пусть для определенности $a_0 = 0, b_0 \neq 0$, тогда, подставляя $a_0 = 0$ во второе равенство, получим $a_1 = 0$. Продолжая процесс подстановки, убеждаемся, что $A(x) = 0$.

Все обратимые элементы кольца многочленов $\mathbf{K}[x]$ исчерпываются, как известно, многочленами нулевой степени. В кольце $\mathbf{K}[[x]]$ формальных степенных рядов имеет место

Теорема 3.1.1. *Для того чтобы формальный степенной ряд (3.1.1) был обратимым, необходимо и достаточно, чтобы его коэффициент a_0 был обратим в \mathbf{K} .*

Доказательство. Ряд $A(x)$ обратим в кольце $\mathbf{K}[[x]]$, если в этом кольце найдется ряд $B(x)$ такой, что $A(x)B(x) = 1$. Отсюда в силу (3.1.6) и определения равных рядов:

$$a_0 b_0 = 1, a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0, \dots, a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = 0, \dots$$

Рассмотрим записанные равенства как систему уравнений относительно $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$. Первое уравнение системы имеет решение $b_0 = a_0^{-1}$ тогда и только тогда, когда элемент a_0 обратим в \mathbf{K} . Это же условие является необходимым и достаточным для существования решений всех остальных уравнений. Действительно, подставляя найденное значение b_0 во второе уравнение, получим $b_1 = -a_0^{-1}(a_1 b_0) = -a_1(a_0^{-1})^2$ и т. д., т. е. каждый коэффициент b_n ряда $B(x)$ однозначно выражается через коэффициенты ряда $A(x)$. ■

Найденный ряд называется *обратным* к ряду $A(x)$ и обозначается $A^{-1}(x)$: $A(x)A^{-1}(x) = 1$.

В качестве примера найдем ряд, обратный к ряду $A(x) = 1 - x$ из $\mathbf{R}[[x]]$. В этом случае $a_0 = -a_1 = 1$ и $a_n = 0$ при $n > 1$; поэтому $b_0 = 1$ и $b_n = b_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$, а значит,

$$A^{-1}(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (3.1.7)$$

Следствие. Пусть даны формальные степенные ряды $A(x)$ и $B(x)$, причем ряд $B(x)$ обратим. Тогда существует единственный степенной ряд $C(x)$ такой, что $B(x)C(x) = A(x)$.

В самом деле, умножая равенство $B(x)C(x) = A(x)$ на $B^{-1}(x)$, находим $C(x) = B^{-1}(x)A(x)$. Степенной ряд $C(x)$ естественно назвать *частным* от деления ряда $A(x)$ на ряд $B(x)$ и обозначить $\frac{A(x)}{B(x)}$.

Пусть $C(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots$ — частное от деления ряда $A(x)$ на ряд $B(x)$. В силу (3.1.6) $\sum_{k=0}^n b_k c_{n-k} = a_n$. Отсюда $a_n = b_0 c_n + \sum_{k=1}^n b_k c_{n-k}$ и

$$c_0 = b_0^{-1}a_0, c_n = b_0^{-1}(a_n - \sum_{k=1}^n b_k c_{n-k}) \text{ при } n > 0. \quad (3.1.8)$$

Полученное рекуррентное соотношение позволяет выразить каждый коэффициент c_n частного через предыдущие коэффициенты c_0, c_1, \dots, c_{n-1} .

Примечание. Напомним, что для любого целостного кольца \mathbf{K} определено поле отношений (поле частных) \mathbf{F} , элементы которого имеют вид $\frac{a}{b}$, где $a, b \in \mathbf{K}$, $b \neq 0$. При этом $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ тогда и только тогда, когда $ad = bc$, а действия с дробями выполняются по правилам:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Если $\mathbf{R}[x]$ — кольцо многочленов над полем действительных чисел \mathbf{R} , то его поле отношений называют полем рациональных дробей и обычно обозначают $\mathbf{R}(x)$. Рациональная дробь в поле $\mathbf{R}(x)$ с точностью до множителя определяется несократимой дробью $\frac{f}{g}$, где f, g — многочлены из $\mathbf{R}[x]$, $g \neq 0$ и $\text{НОД}(f, g) = 1$.

Дробь $\frac{f}{g}$ называется правильной, если $\deg f < \deg g$. Каждая рациональная дробь из $\mathbf{R}(x)$ представима в виде суммы многочлена и правильной дроби (при этом считается, что нулевой многочлен является правильной дробью).

В дальнейшем будем считать \mathbf{K} полем \mathbf{R} действительных (или полем \mathbf{C} комплексных) чисел. Поле отношений кольца $\mathbf{R}[[x]]$ обозначим через $\mathbf{R}((x))$. Когда коэффициент b_0 формального степенного ряда $B(x)$, стоящего в знаменателе дроби $\frac{A(x)}{B(x)}$, отличен от нуля, сама дробь является формальным степенным рядом. Если же первый отличный от нуля коэффициент ряда $B(x)$ равен b_m , $m \geq 1$, т. е. $B(x) = b_m x^m + \dots$, то $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A(x)}{x^m(b_m + b_{m+1}x + \dots)}$. Поэтому каждый элемент поля $\mathbf{R}((x))$ может быть представлен в виде $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{1}{x^m} C(x)$, где $C(x)$ – формальный степенной ряд из $\mathbf{R}[[x]]$.

3.1.4. Подстановка ряда в ряд. Дифференцирование и интегрирование формальных степенных рядов

При построении новых формальных степенных рядов из данных рядов кроме арифметических операций широко используются операция подстановки ряда в ряд и операции дифференцирования и интегрирования.

Пусть даны ряд $A(y) = a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n + \dots$ и ряд $B(x) = b_1 x + \dots + b_n x^n + \dots$, коэффициент b_0 которого равен нулю. Подстановкой формального степенного ряда $B(x)$ в формальный степенной ряд $A(y)$ называется формальный степенной ряд $A(B(x)) = a_0 + a_1 b_1 x + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) x^2 +$
 $(a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_2 b_1^2) x^3 + \dots$

Пусть, например, $B(x) = -x$, тогда

$$A(-x) = a_0 - a_1 x + \dots + (-1)^n a_n x^n + \dots$$

Алгебраически, не используя понятие предельного перехода, определим операции дифференцирования и интегрирования формальных степенных рядов.

Производной формального степенного ряда (3.1.1) над полем \mathbf{R} действительных (\mathbf{C} комплексных) чисел называется формальный степенной ряд

$$D(A(x)) = A'(x) = a_1 + a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots,$$

т. е.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n. \quad (3.1.9)$$

Например,

$$\begin{aligned}
 ((1+x)^n)' &= \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k \right)' = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) C_n^{k+1} x^k, \\
 \left(\frac{1}{1-x} \right)' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.
 \end{aligned}$$

Из определения производной следует, что $Dc = 0$ для любого $c \in \mathbf{R}$ ($c \in \mathbf{C}$).

Операция дифференцирования D обладает хорошо известными из математического анализа свойствами:

$$D(A(x) + B(x)) = DA(x) + DB(x), \quad (3.1.10)$$

$$D(A(x)B(x)) = DA(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot DB(x). \quad (3.1.11)$$

Справедливость первого свойства непосредственно вытекает из определений производной и суммы степенных рядов. Для доказательства второго свойства можно воспользоваться тем, что

$$(x^{k+l})' = (k+l)x^{k+l-1} = (kx^{k-1})x^l + x^k(lx^{l-1}) = (x^k)'x^l + x^k(x^l)'. \quad (3.1.11)$$

Из (3.1.11), в частности, следует, что $D(cA(x)) = cDA(x)$.

Очевидно, что для функций, допускающих разложение в степенной ряд, введенный оператор дифференцирования D совпадает с обычным оператором $\frac{d}{dx}$.

Производная n -го порядка степенного ряда $A(x)$ определяется по индукции:

$$D^n(A(x)) = D(D^{n-1}(A(x))) \quad (3.1.12)$$

и обозначается $A^{(n)}(x)$.

Для формальных степенных рядов легко найти аналог формулы Маклорена. Для этого ряду $A(x)$ поставим в соответствие его первый (свободный) член a_0 ; при этом будем писать $A(0) = a_0$.

Последовательно дифференцируя ряд (3.1.1), получим:

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$A''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

.....

$$A^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n x^{n-k} \text{ и т. д.}$$

Учитывая принятую договоренность, приходим к равенствам

$$A(0) = a_0, A'(0) = 1! a_1, A''(0) = 2! a_2, \dots, A^{(k)}(0) = k! a_k, \dots,$$

из которых однозначно находятся коэффициенты $a_k = \frac{A^{(k)}(0)}{k!}$, $k = 0, 1, \dots$ ряда $A(x)$. Таким образом,

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{(n)}(0)}{n!} x^n. \quad (3.1.13)$$

Введем понятие *целой степени* формального степенного ряда. Натуральная степень ряда $A(x)$ определяется индуктивно:

$$A^n(x) = A(x)A^{n-1}(x).$$

По определению считается $A^0(x) = 1$. Если ряд $A(x)$ обратим, т. е. существует ряд $A^{-1}(x)$, то $A^{-n}(x) = (A^{-1}(x))^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Дифференцирование целых степеней формального степенного ряда обладает следующими свойствами:

$$1^\circ. D(A^{-1}(x)) = -A^{-2}(x)D(A(x)). \quad (3.1.14)$$

Для доказательства достаточно продифференцировать по частям равенство $A(x)A^{-1}(x) = 1$: $D(A(x))A^{-1}(x) + A(x)D(A^{-1}(x)) = 0$.

$$2^\circ. D(A^n(x)) = nA^{n-1}(x)D(A(x)), \quad n \in \mathbf{N}. \quad (3.1.15)$$

Свойство доказывается индукцией по n .

$$3^\circ. D(A^{-n}(x)) = -nA^{-n-1}(x)D(A(x)), \quad n \in \mathbf{N}. \quad (3.1.16)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} D(A^{-n}(x)) &= D(A^{-1}(x))^n = n(A^{-1}(x))^{n-1}D(A^{-1}(x)) = \\ &= -nA^{-n-1}(x)D(A(x)). \end{aligned}$$

Используя правило сложения биномиальных коэффициентов, индукцией по n можно доказать аналог формулы Лейбница:

$$4^\circ. D^n(A(x)B(x)) = \sum_{k=0}^n C_n^k D^k(A(x))D^{n-k}(B(x)).$$

Пусть теперь $A(x)$ – обратимый ряд и $q = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ – рациональное число. Тогда по свойству 2°

$$D((A^q(x))^n) = n(A^q(x))^{n-1}D(A^q(x)),$$

а в силу (3.1.15), (3.1.16)

$$D((A^q(x))^n) = D(A^m(x)) = mA^{m-1}(x)D(A(x)),$$

т. е. $n(A^q(x))^{n-1}D(A^q(x)) = mA^{m-1}(x)D(A(x))$. Поскольку ряд $A(x)$ обратим, отсюда следует свойство

$$5^\circ. D(A^q(x)) = qA^{q-1}(x)D(A(x)) \quad (3.1.17)$$

для любого $q \in \mathbf{Q}$.

Интегралом формального степенного ряда (3.1.1) называется формальный степенной ряд $\int A(x) = a_0x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$, т. е.

$$\int A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n. \quad (3.1.18)$$

Например,

$$\int (1+x)^n = \int \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} C_n^{k-1} x^k,$$

$$\int \frac{1}{1-x} = \int \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Нетрудно доказать, что операция интегрирования формальных степенных рядов обладает свойствами

$$\int (A(x) + B(x)) = \int A(x) + \int B(x), \int \lambda A(x) = \lambda \int A(x), \lambda \in \mathbf{R}(\mathbf{C}).$$

Так как $(\int A(x))' = A(x)$, то операция дифференцирования формальных степенных рядов является обратной для операции их интегрирования. Интегрирование же производной приводит к степенному ряду, который отличается от исходного тем, что имеет свободный член, равный нулю (для ряда, у которого $A(0) = a_0 = 0$, обратимость будет взаимной). Поэтому аналог формулы интегрирования по частям для формальных степенных рядов будет выглядеть следующим образом:

$$\int A(x) B'(x) - \int A'(x) B(x) = A(x) B(x) - A(0) B(0).$$

Для функций, допускающих разложение в степенной ряд,

$$\int A(x) = \int_0^x A(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

Примечание. При решении некоторых видов комбинаторных задач вместо формальных степенных рядов от одной переменной приходится использовать формальные степенные ряды $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от нескольких переменных, которые определяются по аналогии с многочленами от нескольких переменных.

3.1.5. Алгебра Блиссара

Наряду с обычными формальными степенными рядами над кольцом \mathbf{K} вводят экспоненциальные формальные степенные ряды. Так называются выражения вида

$$A(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + a_n \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (3.1.19)$$

где коэффициенты $a_i \in \mathbf{K}$, $n \in \mathbf{N}_0$ и x – некоторый произвольный символ. Множество таких рядов обозначим через $\mathbf{K}^*[[x]]$.

В целесообразности введения экспоненциальных степенных рядов легко убедиться, если на основе биномиальной формулы построить производящую функцию для пересчета числа размещений:

$$(1+x)^n = \frac{n!}{0!n!} + \frac{n!}{1!(n-1)!} x + \dots + \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k \dots + \frac{n!}{n!0!} x^n =$$

$$= 1 + \frac{n!}{(n-1)!} \cdot \frac{x}{1!} + \dots + \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{x^k}{k!} \dots + \frac{n!}{0!} \cdot \frac{x^n}{n!} =$$

$$= A_n^0 + A_n^1 \frac{x}{1!} + \dots + A_n^k \frac{x^k}{k!} \dots + A_n^n \frac{x^n}{n!}.$$

Без каких либо уточнений на множестве $K^*[x]$ определяются операции сложения рядов и их умножения на элемент $k \in K$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \frac{x^n}{n!},$$

$$k \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} k a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Однако произведение Коши экспоненциальных рядов не является экспоненциальным рядом, поэтому операцию умножения экспоненциальных рядов определяют следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!} \right) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k b_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k a_k b_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Экспоненциальный ряд $C(x)$, коэффициенты c_n которого вычисляются по формуле

$$c_n = \sum_{k=0}^n C_n^k a_k b_{n-k}, \quad (3.1.20)$$

называется *произведением Блессара** экспоненциальных рядов $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ и $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$.

Множество $K^*[x]$ относительно операций сложения и умножения также образует кольцо, а с учетом операции умножения ряда на элементы кольца K – линейную алгебру, которую называют *алгеброй Блессара*.

Выполняя формальное дифференцирование и интегрирование экспоненциального ряда (3.1.18), получим:

$$A'(x) = a_1 + a_2 \frac{x}{1!} + a_3 \frac{x^2}{2!} + \dots + a_{n+1} \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

$$\int A(x) = a_0 \frac{x}{1!} + a_1 \frac{x^2}{2!} + \dots + a_{n-1} \frac{x^n}{n!} + \dots.$$

* Дж. Блессар (1803–1875) – английский математик и логик.

Таким образом, операции дифференцирования и интегрирования экспоненциальных формальных рядов, не изменяя коэффициенты ряда, «сдвигают» их на одну позицию влево и вправо соответственно.

§ 3.2. Производящие функции

Дано понятие производящей функции числовой последовательности. Вводятся основные виды производящих функций, используемых в перечислительной комбинаторике.

3.2.1. Понятие производящей функции

Пусть имеется некоторая последовательность чисел

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (3.2.1)$$

Производящей функцией этой последовательности называется формальный степенной ряд

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i. \quad (3.2.2)$$

Экспоненциальной производящей функцией последовательности (3.2.1) называется формальный экспоненциальный ряд

$$A(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + a_n \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}. \quad (3.2.3)$$

При этом говорят, что производящие функции (3.2.2), (3.2.3) *генерируют (порождают)* последовательность (3.2.1).

Примечание. Как известно из курса математического анализа, ряд (3.2.2) можно определить как предел последовательности многочленов $A_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ при $n \rightarrow \infty$. Если для некоторого значения переменной x числовая последовательность $A_n(x)$ имеет конечный предел при $n \rightarrow \infty$, то значение этого предела называется суммой ряда (3.2.2), а сам ряд называется сходящимся в точке x . Множество X всех x , при которых ряд сходится, называется областью сходимости ряда.

Для каждого степенного ряда существует такое неотрицательное действительное число R , что в интервале $(-R, R)$ ряд сходится; на промежутках $(-\infty, -R)$, $(R, +\infty)$ ряд расходится; а в точках $x = -R$, $x = R$ ряд либо сходится, либо расходится. Число R называется радиусом сходимости степенного ряда, а интервал $(-R, R)$ – интервалом сходимости. В случае $R = 0$ интервал сходимости $(-R, R) = \{0\}$.

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = A(x)$, $x \in (-R, R)$, тогда в интервале сходимости $(-R, R)$ сумма $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ степенного ряда является непрерывной функ-

цией от x . Более того, в этом интервале функция $A(x)$ имеет производные любого порядка и от нее существует интеграл, которые можно найти почленным дифференцированием и интегрированием соответствующего степенного ряда. Рассмотрим несколько примеров.

1. Обычная производящая функция для последовательности $\langle 1, 1, 1, \dots \rangle$ имеет вид

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (3.2.4)$$

Ряд (3.2.4), представляющий собой сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем x , сходится к функции $\frac{1}{1-x}$ при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$. Экспоненциальная производящая функция для этой последовательности –

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (3.2.5)$$

Этот ряд при любом x сходится к функции e^x .

2. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$, являющийся производящей функцией последовательности $\langle 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n+1}, \dots \rangle$, сходится к функции $\ln(1+x)$ при $-1 < x \leq 1$.

3. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$, который является производящей функцией последовательности $\langle 1, 1, 2, 6, \dots, n!, \dots \rangle$, радиус сходимости $R = 0$, т. е. этот ряд расходится при любом $x \neq 0$.

Суммирование рядов в области их сходимости приводит к тем же соотношениям, которые получаются при алгебраических вычислениях. Так, при вычислении ряда, обратного ряду $1-x$, алгебраически было найдено, что $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \dots$. К этому же результату можно прийти при суммировании ряда $1 + x + \dots + x^n + \dots$ в его области сходимости. Поэтому для обозначения производящих функций, которые являются известными степенными рядами, сохраним их привычные функциональные обозначения.

Заметим также, что применение к исследованию производящих функций методов математического анализа нередко открывает новые эффективные подходы к решению перечислительных задач.

Пусть даны последовательности $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$. Операции сложения и умножения на скаляр, примененные к их производящим функциям $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, позволяют построить производящую функцию

$$\alpha A(x) + \beta B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$$

последовательности $\langle \alpha a_n + \beta b_n \rangle$.

Произведение Коши $C(x) = A(x) B(x)$ является производящей функцией последовательности $\langle c_n \rangle = \langle \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \rangle$, которая называется *сверткой Коши* последовательностей $\langle a_n \rangle$ и $\langle b_n \rangle$.

Важный частный случай свертки Коши имеем при $A(x) = x^m$, $m \in \mathbf{N}$. Здесь

$$x^m B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+m} = \sum_{n=m}^{\infty} b_{n-m} x^n,$$

и мы получаем производящую функцию последовательности $\langle 0, \dots, 0, b_0, b_1, \dots \rangle$, которая начинается с m нулей. Поэтому умножение производящей функции на x^m часто называют *операцией сдвига* (вправо на m позиций).

Теперь построим производящую функцию последовательности $\langle b_m, b_{m+1}, \dots \rangle$, полученной из $\langle b_n \rangle$ в результате отбрасывания m первых членов и сдвига остальных членов на m позиций влево. Для этого нужно вычесть из $B(x)$ ее первые m членов и найденную разность разделить на x^m :

$$\frac{1}{x^m} (B(x) - b_0 - b_1 x - \dots - b_{m-1} x^{m-1}) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n x^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+m} x^n.$$

Найдем также произведение Коши:

$$\begin{aligned} \frac{A(x)}{1-x} &= \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) x^n, \end{aligned}$$

где $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – произвольная производящая функция. Коэффициент при x^n в этом произведении равен частичной сумме $\sum_{k=0}^n a_k$ членов последовательности $\langle a_n \rangle$. Поэтому *умножение производящей функции на $\frac{1}{1-x}$ дает производящую функцию частичных сумм исходной последовательности*.

Чтобы получить производящую функцию последовательности $\langle n a_n \rangle$, нужно продифференцировать производящую функцию $A(x)$, а затем полученный результат умножить на x :

$$x A'(x) = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n.$$

Если же проинтегрировать производящую функцию $\frac{A(x)-a_0}{x}$, то получим производящую функцию последовательности $\langle \frac{a_n}{n} \rangle$:

$$\int_0^x \frac{A(t) - a_0}{t} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{n-1} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} x^n.$$

Произведение Блиссара $C(x) = A(x)B(x)$ экспоненциальных производящих функций $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$, $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$ последовательностей $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$ является экспоненциальной производящей функцией последовательности $\langle c_n \rangle = \langle \sum_{k=0}^n C_n^k a_k b_{n-k} \rangle$, которая называется *сверткой Блиссара* исходных последовательностей.

Заметим, что свертка Блиссара экспоненциальной производящей функции $A(x)$ с x дает экспоненциальную производящую функцию $xA(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} na_{n-1} \frac{x^n}{n!}$, генерирующую последовательность $\langle 0, a_0, 2a_1, \dots, na_{n-1}, \dots \rangle$.

3.2.2. Степенные производящие функции

Обобщим формулу бинома Ньютона для рационального показателя степени.

Теорема 3.2.1. *Для любого рационального q имеет место разложение*

$$(a+x)^q = a^q + qa^{q-1}x + \frac{q(q-1)}{2}a^{q-2}x^2 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-k+1)}{k!}a^{q-k}x^k + \dots. \quad (3.2.6)$$

Доказательство. Пусть

$$(a+x)^q = A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots.$$

По свойству (3.1.17)

$$((a+x)^q)' = q(x+a)^{q-1},$$

.....

$$((a+x)^q)^{(k)} = q(q-1)\dots(q-k+1)(x+a)^{q-k},$$

.....

Отсюда для любого натурального k имеем:

$$A^{(k)}(0) = q(q-1)\dots(q-k+1)a^{q-k}.$$

Подставляя $A^{(k)}(0)$ в ряд Маклорена (3.1.13), получим искомое разложение $(a+x)^q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q(q-1)\dots(q-k+1)}{k!}a^{q-k}x^k$. ■

Для коэффициентов найденного ряда введем обозначения

$$\frac{q(q-1)\dots(q-k+1)}{k!} = C_q^k \quad (3.2.7)$$

и назовем числа C_q^k *обобщенными биномиальными коэффициентами*.

Тогда

$$(a+x)^q = \sum_{k=0}^{\infty} C_q^k a^{q-k} x^k. \quad (3.2.8)$$

Условимся считать, что $C_q^k = 0$ при $k < 0$.

Коэффициенты C_q^k обладают многими свойствами обычных биномиальных коэффициентов. Так, из тождества

$$(1+x)^q = (1+x)^{q-1} + x(1+x)^{q-1}$$

имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_q^k x^k = x \sum_{k=0}^{\infty} C_{q-1}^k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_{q-1}^k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} C_{q-1}^{k-1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_{q-1}^k x^k.$$

Сравнивая коэффициенты при x^k в левой и правой частях этого равенства, получим обобщение правила сложения биномиальных коэффициентов: $C_q^k = C_{q-1}^{k-1} + C_{q-1}^k$, $k \in \mathbf{N}$. Аналогично получаются обобщения других свойств; например, из тождества $(1+x)^{p+q} = (1+x)^p(1+x)^q$, будем иметь $C_{p+q}^k = \sum_{i=0}^k C_p^i C_q^{k-i}$.

Доказанная теорема позволяет записать дробно-рациональные производящие функции, которые наиболее часто используются при решении перечислительных задач.

При $q = n$, где n – целое неотрицательное число, приходим, естественно, к формуле бинома Ньютона: $(a+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} x^k$.

В самом деле, в этом случае все производные порядка выше, чем n , тождественно равны нулю.

При $q = -n$, где n – натуральное число,

$$(a+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n(n+1) \dots (n+k-1)}{k!} a^{-n-k} x^k \quad (3.2.9)$$

или

$$\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{n+k-1}^k \left(\frac{x}{a}\right)^k.$$

Положив в (3.2.9) $a = 1$, получим

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{n+k-1}^k x^k, \quad (3.2.10)$$

в частности, при $n = 1$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \quad (3.2.11)$$

Примечание. Рекомендуется в качестве упражнения доказать формулу (3.2.10), используя метод математической индукции.

Заменяя в (3.2.10), (3.2.11) x на $-x$, соответственно имеем

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k x^k. \quad (3.2.12)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad (3.2.13)$$

При подстановке в (3.2.13) x^k , $k \in \mathbf{N}$, вместо x получаем производящую функцию

$$\frac{1}{1-x^k} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{kn},$$

а при подстановке ax вместо x , -

$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n. \quad (3.2.14)$$

Из формулы (3.2.6) при $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$ и $a = -1$, $q = -\frac{1}{2}$ соответственно имеем:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} C_{2k-2}^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} x^k, \quad (3.2.15)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k C_{2k}^{2k}}{2^{2k}} x^k. \quad (3.2.16)$$

Примечание. Как было отмечено в § 1.6, И. Ньютон обобщил формулу разложения бинома для любого действительного показателя. Именно, справедлива

Теорема 3.2.2. Для любого действительного α при $|x| < a$ имеет место разложение

$$(a+x)^\alpha = a^\alpha + a^{\alpha-1}x + \frac{\alpha(a-1)}{2!} a^{\alpha-2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(a-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!} a^{\alpha-k}x^k + \dots$$

Степенной ряд, являющийся разложением функции $(a+x)^\alpha$, называют *биномиальным рядом*, или *рядом Ньютона*, а для его коэффициентов, которые в математическом анализе называют *обобщенными биномиальными коэффициентами*, используют обозначение

$$C_\alpha^k = \frac{\alpha(a-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!}. \quad (3.2.17)$$

При этом считают $C_\alpha^k = 0$, если $k < 0$. Такие название и обозначение стали общепринятыми, и одной из причин этого опять же является то, что коэффициенты C_α^k обладают привычными свойствами биномиальных коэффициентов: $C_\alpha^k = C_{\alpha-1}^{k-1} + C_{\alpha-1}^k$, $C_{\alpha+\beta}^k = \sum_{i=0}^k C_\alpha^i C_\beta^{k-i}$ и т. д.

С учетом обозначений (3.2.17) разложение функции $(a+x)^\alpha$ в ряд Ньютона можно записать в виде

$$(a+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k a^{\alpha-k} x^k.$$

Степенные производящие функции с рациональными показателями выше были введены алгебраически. Вместе с тем, их можно было получить как следствия теоремы 3.2.2, считая эту теорему известной из курса математического анализа.

Из формулы (3.2.17) следует, что обобщенный биномиальный коэффициент C_α^k является многочленом от α степени k . Если взять ряд $A(x)$, принадлежащий $\mathbf{R}[[x]]$ либо $\mathbf{C}[[x]]$, коэффициенты которого удовлетворяют условию $A(0) = 0$, то для любого $\alpha \in \mathbf{R}$ ($\alpha \in \mathbf{C}$) можно определить формальный степенной ряд

$$((1+A(x))^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n A^n(x).$$

Коэффициент при x^n в этом ряде будет многочленом от α , поэтому, рассматривая α как переменную, сам ряд $((1+A(x))^\alpha$ можно определить как элемент кольца $\mathbf{R}[[x, \alpha]]$ (кольца $\mathbf{C}[[x, \alpha]]$).

Использование степенных рядов с полиномиальными коэффициентами нередко позволяет достаточно просто решать задачи, решение которых другими способами связано с большими трудностями.

3.2.3. Экспонента

Пусть $A(x)$ – формальный степенной ряд такой, что $A(0) = 0$. Формальный степенной ряд $U(x)$, удовлетворяющий «формальному» дифференциальному уравнению

$$D(U(x)) = U(x) D(A(x)), \quad (3.2.18)$$

называется *экспонентой* ряда $A(x)$ и обозначается $U(x) = e^{A(x)}$.

В этих обозначениях уравнение (3.2.18) переписется в виде

$$D(e^{A(x)}) = e^{A(x)} D(A(x)).$$

При $A(x) = x$ имеем $A'(x) = 1$. Пусть

$$U(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n + \dots,$$

тогда

$$U'(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots$$

Поэтому ряд e^x удовлетворяет дифференциальному уравнению $U(x) = U'(x)$, из которого следует, что

$$c_1 = c_0, c_2 = \frac{c_1}{2} = \frac{c_0}{1 \cdot 2} = \frac{c_0}{2!}, \dots, c_n = \frac{c_{n-1}}{n} = \frac{c_0}{(n-1)!n} = \frac{c_0}{n!}, \dots$$

Полагая $c_0 = 1$, получим известное из курса анализа разложение

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (3.2.19)$$

Очевидно, что $e^x = (e^x)'$, $\int e^x = e^x$.

Рассмотрим свойства экспоненты.

1°. Если $e^{A(x)} = e^{B(x)}$, то $A(x) = B(x)$.

Действительно, из условия следует, что $D(e^{A(x)}) = D(e^{B(x)})$, откуда на основании определения экспоненты получаем $e^{A(x)} D(A(x)) = e^{B(x)} D(B(x))$ и, значит, $D(A(x)) = D(B(x))$. С учетом условий $A(0) = 0$, $B(0) = 0$ имеем $A(x) = B(x)$.

2°. $e^{A(x)}e^{B(x)} = e^{A(x)+B(x)}$. (3.2.20)

На основании определения экспоненты

$$\begin{aligned} D(e^{A(x)}e^{B(x)}) &= D(e^{A(x)})e^{B(x)} + e^{A(x)}D(e^{B(x)}) = \\ &= e^{A(x)}D(A(x))e^{B(x)} + e^{A(x)}e^{B(x)}D(B(x)) = e^{A(x)}e^{B(x)}D(A(x) + B(x)). \end{aligned}$$

Вновь учитывая (3.2.18), получим $e^{A(x)}e^{B(x)} = e^{A(x)+B(x)}$.

Отсюда, в частности, следует, что

$$(e^x)^m = e^{mx}, m \in \mathbf{Z}. \quad (3.2.21)$$

Подстановкой в (3.2.19) вместо x ряда $A(x)$ можно получить производящую функцию $e^{A(x)}$. Так, подстановка $-x$ вместо x в (3.2.19) дает производящую функцию

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (3.2.22)$$

При этом $e^x e^{-x} = 1$. Действительно,

$$e^x e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} \right) \frac{x^n}{n!} = C_0^0 = 1.$$

Поэтому $e^0 = 1$.

Заменой x на mx получаем производящую функцию

$$e^{mx} = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{(mx)^2}{2!} + \dots + \frac{(mx)^n}{n!} + \dots \quad (3.2.23)$$

Складывая (вычитая) производящие функции (3.2.19), (3.2.22) и деля результат на 2, формально вводим гиперболические тригонометрические функции

$$\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots.$$

Аналогично вводятся тригонометрические функции:

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots, \\ \operatorname{sin}x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots, \end{aligned}$$

где i – мнимая единица ($i^2 = -1$). Заменяя в (3.2.10) x на x^2 , получим производящую функцию $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, интегрируя которую, находим

$$\operatorname{arctg}x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \dots.$$

3.2.4. Логарифм

Пусть $A(x)$ – формальный степенной ряд такой, что $A(0) = 1$. Формальный степенной ряд $V(x)$, удовлетворяющий «формальному» дифференциальному уравнению

$$D(A(x)) = A(x) D(V(x)), \quad (3.2.24)$$

называется *логарифмом* ряда $A(x)$ и обозначается $V(x) = \ln A(x)$.

Например, для ряда $A(x) = 1 + x$, имеем $A'(x) = 1$. Поэтому $\ln(1+x)$ находится из уравнения $(1+x)V'(x) = 1$. Откуда $V'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ и, следовательно,

$$\ln(1+x) = \int V'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}. \quad (3.2.25)$$

Подставляя $-x$ вместо x , получаем

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \quad (3.2.26)$$

Рассмотрим *свойства логарифма*. Прежде всего отметим, что на основании определения логарифма имеет место равенство $\ln 1 = 0$.

1°. Если $\ln A(x) = 0$, то $A(x) = 1$.

Действительно, из условия $A(0) = 1$ следует, что ряд $A(x)$ обратим, поэтому уравнение (3.2.24) можно переписать в виде

$$D(\ln A(x)) = A^{-1}(x) D(A(x)). \quad (3.2.27)$$

Из условия $\ln A(x) = 0$ имеем $D(\ln A(x)) = 0$, а так как $A^{-1}(x) \neq 0$, то $D(A(x)) = 0$ и, значит, $A(x) = 1$.

$$2^\circ. \ln(A(x)B(x)) = \ln A(x) + \ln B(x). \quad (3.2.28)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} D(\ln(A(x)B(x))) &= (A(x)B(x))^{-1}D(A(x)B(x)) = \\ &= A^{-1}(x)B^{-1}(x)(D(A(x))B(x) + A(x)D(B(x))) = \\ &= A^{-1}(x)D(A(x)) + B^{-1}(x)D(B(x)) = D(\ln A(x) + \ln B(x)). \end{aligned}$$

Поскольку $\ln(A(0)B(0)) = 0$, $\ln A(0) + \ln B(0) = 0$, интегрируя по частям полученное равенство, получим $\ln(A(x)B(x)) = \ln A(x) + \ln B(x)$.

На основании этого свойства

$$\ln A^q(x) = q \ln A(x) \quad (3.2.29)$$

для любого рационального q . Для натурального показателя степени утверждение очевидно. Далее из условия $A(x)A^{-1}(x) = 1$ следует, что

$$\ln A^{-1}(x) = -\ln A(x) \quad (3.2.30)$$

и, вообще, $\ln A^{-n}(x) = -n \ln A(x)$ для $n \in \mathbf{N}$. Пусть $q = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, тогда $m \ln A(x) = \ln A^m(x) = \ln(A^q(x))^n = n \ln A^q(x)$. Отсюда следует справедливость свойства (3.2.29).

3°. Если $\ln A(x) = \ln B(x)$, то $A(x) = B(x)$.

Из условия $\ln A(x) = \ln B(x)$ следует, что $\ln(A(x)B^{-1}(x)) = 0$. Тогда в силу свойства 1° $A(x)B^{-1}(x) = 1$. Следовательно, $A^{-1}(x) = B^{-1}(x)$ и $A(x) = B(x)$.

4°. $\ln e^{A(x)} = A(x)$, $e^{\ln A(x)} = A(x)$.

Справедливость первого из этих свойств вытекает из равенства

$$\begin{aligned} D(\ln e^{A(x)}) &= (e^{A(x)})^{-1} D(e^{A(x)}) = \\ &= (e^{A(x)})^{-1} e^{A(x)} D(A(x)) = D(A(x)). \end{aligned}$$

Поэтому $\ln e^{A(x)} = A(x)$, отсюда на основании свойства 3° $e^{\ln A(x)} = A(x)$.

Задача 3.2.1. Найти производящие функции, генерирующие последовательности:

- а) $0, 1, 2, \dots, n, \dots$;
- б) $1, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots, \frac{1}{2n-1}, 0, \dots$;
- в) $\langle H_n \rangle$, где $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Решение. а) Полагая в (3.2.12) $n = 2$, имеем

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + C_2^1 x + C_3^2 x^2 + \dots + C_{n+1}^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

Поэтому искомая производящая функция $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$.

б) Вычитая (3.2.25) из (3.2.26) и деля результат на 2, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}}{n}x^n = x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots. \end{aligned}$$

На основании свойств логарифма искомая производящая функция есть $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

в) Производящая функция равна произведению Коши функций $\frac{1}{1-x}$ и $\ln\frac{1}{1-x} = -\ln(1-x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right) = x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n\right) = \\ &= x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^n\frac{1}{n-k+1}\right)x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}H_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}H_nx^n. \square \end{aligned}$$

Задача 3.2.2. Найти производящую функцию для числа беспорядков D_n (см. задачу 1.9.4).

Решение. Согласно теореме 1.10.6 $D_n = n!\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{k!}$. В силу (3.2.21) эти числа есть не что иное, как частичные суммы коэффициентов экспоненциальной производящей функции e^{-x} . Поэтому искомая производящая функция является произведением этой функции на производящую функцию $\frac{1}{1-x}$:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x}}{1-x} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(n!\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{k!}\right)\frac{x^n}{n!}. \square \end{aligned}$$

§ 3.3. Приложения метода производящих функций

В данном и последующих параграфах этой главы будут рассмотрены некоторые приложения метода производящих функций. Читатель сможет оценить возможности и достоинства метода как при возвращении к уже знакомым понятиям и решенным задачам, так и при решении новых перечислительных задач.

3.3.1. Доказательство биномиальных тождеств

При решении прикладных комбинаторных задачах часто приходится применять различные биномиальные тождества, т. е. тождества,

содержащие биномиальные коэффициенты. Для доказательства таких тождеств уже неоднократно использовался производящий многочлен

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k. \quad (3.3.1)$$

(см., например, доказательство свойств в п. 1.6.2). Приведем еще несколько примеров доказательства биномиальных тождеств с помощью производящего многочлена (3.3.1).

Задача 3.3.1. Доказать, что

а) $\sum_{k=0}^n (-1)^k k C_n^k = 0$;

б) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$;

в) $\sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=k} C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} \dots C_{n_m}^{k_m} = C_n^k$, где $\sum_{i=1}^m n_i = n$.

Решение. а) При доказательстве тождества в § 1.8 была использована теорема обращения, теперь докажем его с помощью производящего многочлена (3.3.1). Продифференцировав этот многочлен, получим: $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1}$. Полагая $x = -1$, приходим к равенству $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k C_n^k = 0$, из которого следует доказываемое тождество.

б) Интегрируя (3.3.1) по x от 0 до 1, имеем

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \sum_{k=0}^n \int_0^1 C_n^k x^k dx.$$

Положив $x = 1$ в равенстве $\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k x^{k+1} \Big|_0^1$, получим $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$.

в) Правая часть доказываемого равенства есть коэффициент при x^k в разложении производящего многочлена $(1+x)^n$. Поскольку $\sum_{i=1}^m n_i = n$, справедливо тождество

$$(1+x)^{n_1} (1+x)^{n_2} \dots (1+x)^{n_m} = (1+x)^n,$$

равносильное тождеству

$$\left(\sum_{k_1=0}^{n_1} C_{n_1}^{k_1} x^{k_1} \right) \left(\sum_{k_2=0}^{n_2} C_{n_2}^{k_2} x^{k_2} \right) \dots \left(\sum_{k_m=0}^{n_m} C_{n_m}^{k_m} x^{k_m} \right) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

Выполнив умножение производящих многочленов из левой части этого тождества, убедимся, что в ней коэффициент при x^k равен $\sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=k} C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} \dots C_{n_m}^{k_m}$ (суммирование по неотрицательным целочисленным решениям уравнения $k_1 + k_2 + \dots + k_m = k$). \square

Используя производящую функцию для сочетаний с повторениями, самостоятельно докажите тождество, аналогичное тождеству в) задачи 3.3.1.

Задача 3.3.2. Доказать, что

$$\sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=k} C_{n_1+k_1-1}^{k_1} C_{n_2+k_2-1}^{k_2} \dots C_{n_m+k_m-1}^{k_m} = C_n^k,$$

где $\sum_{i=1}^m n_i = n$.

3.3.2. Еще раз о биномиальном обращении

Как мы видели в первой главе, хорошими источниками для получения новых комбинаторных соотношений служат теорема обращения и следствия из нее. Взаимно обратные производящие функции позволяют по-новому взглянуть на эту теорему. В качестве примера вновь рассмотрим наиболее часто встречающиеся биномиальные обращения.

Пусть $A(x)$, $B(x)$ – производящие функции последовательностей $\langle a_n \rangle$ и $\langle b_n \rangle$, связанным соотношением

$$B(x) = (1-x)^m A(x), \quad m \in \mathbf{N}. \quad (3.3.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n &= \left(\sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k x^k \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k C_m^k a_{n-k} \right) x^n \end{aligned}$$

и, значит,

$$b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_m^k a_{n-k}. \quad (3.3.3)$$

Умножая обе части равенства (3.3.2) на $(1-x)^{-m}$, находим

$$A(x) = (1-x)^{-m} B(x).$$

Откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{k=0}^m C_{m+k-1}^k x^k \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n C_{m+k-1}^k b_{n-k} \right) x^n$$

и

$$a_n = \sum_{k=0}^n C_{m+k-1}^k b_{n-k}. \quad (3.3.4)$$

Таким образом, из соотношений (3.3.3) следуют соотношения (3.3.4), а обращение рассуждений показывает, что из равенств (3.3.4) вытекают соотношения (3.3.3).

Пусть теперь $A(x)$, $B(x)$ – экспоненциальные производящие функции последовательностей $\langle a_n \rangle$ и $\langle b_n \rangle$, связанные соотношением

$$B(x) = e^x A(x). \quad (3.3.5)$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k a_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!}$$

и

$$b_n = \sum_{k=0}^n C_n^k a_{n-k}. \quad (3.3.6)$$

Из (3.3.5) $A(x) = e^{-x} B(x)$ или

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k b_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

Откуда

$$a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k b_{n-k}. \quad (3.3.7)$$

Опять выполнение любого из равенств (3.3.6), (3.3.7), связывающих члены последовательностей $\langle a_n \rangle$ и $\langle b_n \rangle$, влечет выполнение другого.

3.3.3. Решение рекуррентных соотношений

Важным направлением приложения производящих функций является решение рекуррентных соотношений. Продемонстрируем метод решения на примерах.

Задача 3.3.3. Решить рекуррентное соотношение:

а) $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$, $u_0 = 1$, $u_1 = 2$;

б) $u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n + n + 2$, $u_0 = 1$, $u_1 = 1$.

Решение. а) Пусть

$$F(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots + u_{n-2} x^{n-2} + u_{n-1} x^{n-1} + u_n x^n + \dots$$

– производящая функция, генерирующая последовательность, которая является решением данного рекуррентного соотношения. Найдем эту производящую функцию. Поскольку

$$-5xF(x) = -5u_0x - 5u_1x^2 - \dots - 5u_{n-1}x^n - \dots,$$

$$4x^2F(x) = 4u_0x^2 + \dots + 4u_{n-2}x^n + \dots,$$

то

$$F(x) - 5xF(x) + 4x^2F(x) = u_0 + (u_1 - 5u_0)x + \\ + (u_2 - 5u_1 + 4u_0)x^2 + \dots + (u_n - 5u_{n-1} + 4u_{n-2})x^n + \dots$$

По условию $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ и $u_n - 5u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$ при $n \geq 2$, поэтому

$$F(x) - 5xF(x) + 4x^2F(x) = 1 - 3x.$$

Отсюда

$$F(x) = \frac{1-3x}{1-5x+4x^2}.$$

Для отыскания решения рекуррентного соотношения полученную рациональную алгебраическую дробь необходимо разложить в степенной ряд. Воспользуемся для этого ее представлением в виде суммы элементарных (простейших) рациональных дробей, т. е. дробей вида $\frac{c}{(x-\lambda)^m}$. Чтобы получить такое представление, необходимо найти корни многочлена, стоящего в знаменателе найденной дроби.

Квадратный трехчлен $1 - 5x + 4x^2$ имеет корни 1 и $\frac{1}{4}$, значит, $\frac{1-3x}{1-5x+4x^2} = \frac{1-3x}{4(x-1)(x-\frac{1}{4})} = \frac{1-3x}{(1-x)(1-4x)}$. Поэтому можно записать тождество

$$\frac{1-3x}{1-5x+4x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-4x}$$

с неопределенными коэффициентами A и B . Для нахождения этих коэффициентов умножим обе части тождества на $(1-x)(1-4x)$:

$$1 - 3x = A(1 - 4x) + B(1 - x).$$

Придавая x значение 1 , находим $A = \frac{2}{3}$, а полагая $x = \frac{1}{4}$, получим $B = \frac{1}{3}$. Таким образом,

$$\frac{1-3x}{1-5x+4x^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-4x} = \\ = \frac{2}{3} (1 + x + \dots + x^n + \dots) + \frac{1}{3} (1 + 4x + \dots + 4^n x^n + \dots) = \\ = 1 + 2x + \dots + \frac{1}{3} (2 + 4^n)x^n + \dots$$

При разложении дробей $\frac{1}{1-x}$ и $\frac{1}{1-4x}$ мы воспользовались формулой (3.2.13). Коэффициент при x^n дает искомое частное решение

$$u_n = \frac{1}{3} (2 + 4^n).$$

б) Вновь пусть

$$F(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots + u_{n-2}x^{n-2} + u_{n-1}x^{n-1} + u_nx^n + \dots$$

– производящая функция, генерирующая последовательность, которая является решением рекуррентного соотношения. Находим

$$2xF(x) = 2u_0x + 2u_1x^2 + \dots + u_{n-2}x^{n-1} + u_{n-1}x^n + \dots,$$

$$x^2F(x) = u_0x^2 + \dots + u_{n-2}x^n + \dots.$$

Теперь, кроме того, потребуется производящая функция, генерирующая свободный член n , т. е. последовательность 1, 2, 3, ... Из (3.2.12) следует, что $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$. Поэтому

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n.$$

В итоге имеем:

$$F(x) + 2xF(x) + x^2F(x) - \frac{x}{(1-x)^2} =$$

$$= u_0 + (u_1 + 2u_0 - 1)x + \dots + (u_n + 2u_{n-1} + u_{n-2} - n)x^n + \dots.$$

При этом $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ и $u_n + 2u_{n-1} + u_{n-2} - n = 0$ при $n \geq 2$, поэтому

$$F(x) + 2xF(x) + x^2F(x) - \frac{x}{(1-x)^2} = 1 + 2x.$$

Следовательно,

$$(1 + 2x + x^2)F(x) = 1 + 2x + \frac{x}{(1-x)^2}$$

и

$$F(x) = \frac{1+2x}{(1+x)^2} + \frac{x}{(1+x)^2(1-x)^2} = \frac{C_{11}}{1+x} + \frac{C_{12}}{(1+x)^2} + \frac{C_{21}}{1-x} + \frac{C_{22}}{(1-x)^2}.$$

Отсюда

$$(1 + 2x)(1 - x)^2 + x = C_{11}(1 + x)(1 - x)^2 + C_{12}(1 - x)^2 + C_{21}(1 - x)(1 + x)^2 + C_{22}(1 + x)^2.$$

Придавая x значения 0, 1, -1 и 2, получим соответственно:

$$C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22} = 1, 4C_{22} = 1,$$

$$4C_{12} = -5, 3C_{11} + C_{12} - 9C_{21} + 9C_{22} = 7.$$

Из этой системы $C_{11} = 2$, $C_{12} = -\frac{5}{4}$, $C_{21} = 0$, $C_{22} = \frac{1}{4}$. Таким образом,

$$F(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Заменяя элементарные дроби их разложениями, получим:

$$F(x) = 2(1 - x + \dots + (-1)^n x^n + \dots) -$$

$$- \frac{5}{4}(1 - 2x + \dots + (-1)^n (n+1)x^n + \dots) +$$

$$+ \frac{1}{4}(1 + 2x + \dots + (n+1)x^n + \dots) =$$

$$= 1 + x + \dots + \left(\frac{(3-5n)(-1)^{n+n+1}}{4} \right) x^n + \dots$$

Таким образом,

$$u_n = \frac{1}{4}((3 - 5n)(-1)^n + n + 1). \quad \square$$

В первом примере производящая функция, генерирующая решение рекуррентного соотношения, оказалась правильной рациональной дробью. Это не случайно, имеет место

Теорема 3.3.1. Пусть последовательность $\langle u_n \rangle$ задана однородным линейным рекуррентным соотношением порядка k :

$$u_{n+k} = b_1 u_{n+k-1} + b_2 u_{n+k-2} + \dots + b_k u_n$$

с заданными начальными условиями u_0, u_1, \dots, u_{k-1} . Тогда производящая функция этой последовательности является правильной рациональной дробью $\frac{f(x)}{g(x)}$, степень многочлена $g(x)$ в знаменателе которой равна k .

Доказательство. Пусть

$$F(x) = u_0 + u_1 x + \dots + u_{k-1} x^{k-1} + u_k x^k + \dots + u_n x^n + \dots$$

– искомая производящая функция. Найдем произведение $F(x)$ на многочлен $b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k$ степени k :

$$\begin{aligned} (b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k)F(x) &= \\ &= b_1 u_0 x + b_1 u_1 x^2 + \dots + b_1 u_{k-2} x^{k-1} + b_1 u_{k-1} x^k + \dots + b_1 u_{n+k-1} x^{n+k} + \dots \\ &+ b_2 u_0 x^2 + b_2 u_1 x^3 + \dots + b_2 u_{k-2} x^k + \dots + b_2 u_{n+k-2} x^{n+k} + \dots \\ &+ b_k u_0 x^k + b_k u_1 x^{k+1} + \dots + b_k u_n x^{n+k} + \dots = \\ &= b_1 u_0 x + (b_2 u_0 + b_1 u_1) x^2 + \dots + (b_1 u_{k-2} + b_2 u_{k-3} + \dots + b_{k-1} u_0) x^{k-1} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (b_1 u_{n+k-1} + b_2 u_{n+k-2} + \dots + b_k u_n) x^{n+k} = b_1 u_0 x + (b_2 u_0 + b_1 u_1) x^2 + \dots \\ &+ (b_1 u_{k-2} + b_2 u_{k-3} + \dots + b_{k-1} u_0) x^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+k} x^{n+k} = \\ &= -u_0 - (u_1 - b_1 u_0) x - (u_2 - b_2 u_0 - b_1 u_1) x^2 - \dots \\ &- (u_{k-1} - b_1 u_{k-2} - b_2 u_{k-3} - \dots - b_{k-1} u_0) x^{k-1} + F(x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k)F(x) = -f(x) + F(x),$$

где

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{k-1} x^{k-1}$$

– многочлен, степень которого не превосходит k . Отсюда

$$F(x) = \frac{f(x)}{1 - b_1 x - b_2 x^2 - \dots - b_k x^k} = \frac{f(x)}{g(x)}. \quad \blacksquare$$

Примечание. По ходу доказательства мы нашли вид многочлена $g(x)$:

$$g(x) = 1 - b_1 x - b_2 x^2 - \dots - b_k x^k,$$

а также формулы для вычисления коэффициентов многочлена $f(x)$:

$$a_0 = u_0, a_1 = u_1 - b_1 u_0, \dots, a_{k-1} = u_{k-1} - b_1 u_{k-2} - b_2 u_{k-3} - \dots - b_{k-1} u_0.$$

Поэтому для доказанной теоремы справедлива обратная

Теорема 3.3.2. *Всякая дробно-рациональная функция $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k}$, где многочлены $f(x)$, $g(x)$ взаимно просты, $b_k \neq 0$ и степень многочлена $f(x)$ не превосходит k , служит производящей функцией некоторой однородной линейной рекуррентной последовательности $\{u_n\}$ порядка k с постоянными коэффициентами.*

Действительно, с учетом сделанного примечания коэффициенты искомого рекуррентного соотношения будут равны коэффициентам $-\frac{b_i}{b_0}$, $i = 1, \dots, k$ многочлена $1 - \frac{1}{b_0}g(x)$, а по коэффициентам многочлена $f(x)$ можно последовательно найти его начальные условия u_0, u_1, \dots, u_{k-1} .

3.3.4. Числа Каталана

Теперь рассмотрим нелинейное рекуррентное соотношение, которое называется соотношением Каталана* и достаточно часто встречается при решении самых разнообразных перечислительных задач (см., например, [2], [26]). Примером такой задачи является

Задача 3.3.4. Дано слово, содержащее $n + 1$ различных букв. Это слово разбивается на два так, что первое слово состоит из m первых букв данного слова, а второе – из $n - m + 1$ остальных. После этого каждое из полученных слов снова разбивается на два слова. Если какое-то из слов окажется однобуквенным, то оно не подвергается дальнейшему разбиению. Процесс разбиения продолжается до тех пор, пока все слова не окажутся однобуквенными. Два процесса разбиения считаются различными, если они хотя бы на одном из этапов приводят к различным результатам. Сколько существует различных процессов разбиения?

Решение. Число всех различных процессов разбиения $(n + 1)$ -буквенного слова обозначим c_n . На первом шаге это слово может быть разбито n способами. Процессы разбиения, в которых первое слово состоит из m букв, объединим в один класс, тогда множество всех процессов разбиения распадается на n классов.

Найдем число процессов в m -м классе. Первое слово, состоящее из m букв, разбивается в дальнейшем c_{m-1} различными способами. Второе слово, содержащее $n - m + 1$ букв, далее разбивается c_{n-m}

* Эжен Шарль Каталан (1814–1894) – бельгийский математик. Основные труды по геометрии, алгебре, теории чисел.

различными способами. Поэтому по правилу произведения m -й класс состоит из $c_{m-1}c_{n-m}$ различных процессов, а по правилу суммы число всех различных способов разбиения $(n+1)$ -буквенного слова

$$c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \dots + c_{n-1}c_0, \quad (3.3.8)$$

при этом $c_0 = 1$.

Полученное нелинейное рекуррентное соотношение называется *соотношением Каталана*, а определяемые им комбинаторные числа – *числами Каталана*.

Найдем решение соотношения (3.3.8). Для этого используем производящую функцию

$$\text{Cat}(x) = c_0x + c_1x^2 + \dots + c_nx^{n+1} + \dots \quad (3.3.9)$$

Ее квадрат

$$\begin{aligned} \text{Cat}^2(x) = c_0^2x^2 + (c_0c_1 + c_1c_0)x^3 + \dots \\ + (c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \dots + c_{n-1}c_0)x^{n+1} + \dots, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\text{Cat}^2(x) = c_1x^2 + c_2x^3 + \dots + c_nx^{n+1} + \dots.$$

С другой стороны, из (3.3.9)

$$\text{Cat}(x) - c_0x = c_1x^2 + c_2x^3 + \dots + c_nx^{n+1} + \dots.$$

Поэтому производящая функция $\text{Cat}(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\text{Cat}^2(x) = \text{Cat}(x) - c_0x$$

или, с учетом того, что $c_0 = 1$,

$$\text{Cat}^2(x) = \text{Cat}(x) - x.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\text{Cat}(x)$, получим

$$\text{Cat}(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Корень $\frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2}$ является посторонним, так как в этом случае при $x = 0$ имеем $\text{Cat}(0) = 1$, но из (3.3.9) следует, что $\text{Cat}(0) = 0$.

Подставляя в производящую функцию (3.2.15) $-4x$ вместо x , находим

$$\sqrt{1 - 4x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} C_{2k-2}^{k-1}}{k 2^{2k-1}} (-4x)^k = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{n+1} x^{n+1}.$$

Следовательно,

$$\text{Cat}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{n+1} x^{n+1},$$

откуда

$$c_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n. \quad \square \quad (3.3.10)$$

бов разрезания $(n - k + 1)$ -угольника. Поэтому по правилу произведения класс разбиений, в которые входит вырезанный треугольник, содержит $c_k c_{n-k-1}$ способов, а по правилу суммы число всех способов разрезания $(n + 2)$ -угольника

$$c_n = c_0 c_{n-1} + \dots + c_k c_{n-k-1} + \dots + c_{n-1} c_0.$$

Пришли к соотношению Каталана, следовательно,

$$c_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n. \quad \square$$

3.3.5. Числа Бернулли

В первом параграфе второй главы упоминались числа Бернулли, которые впервые были введены при вычислении сумм m -х степеней натуральных чисел. Рассмотрим эти числа.

Для последовательности $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots$ запишем экспоненциальную производящую функцию

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{x^n}{n!}. \quad (3.3.11)$$

Свободный член этого формального степенного ряда отличен от нуля, поэтому в силу следствия из теоремы 3.1.1 для него существует обратный ряд $F^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{x^n}{n!}$. Найдем коэффициенты ряда $F^{-1}(x)$.

Имеем:

$$\begin{aligned} F^{-1}(x) &= \frac{1}{F(x)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{x}{1!} + \frac{1}{3} \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{1}{n+1} \frac{x^n}{n!} + \dots} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots} = \frac{x}{e^x - 1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$F^{-1}(x) = \frac{x}{e^x - 1}. \quad (3.3.12)$$

Поскольку $F^{-1}(-x) = \frac{-x}{e^{-x} - 1} = \frac{x e^x}{e^x - 1} = \frac{x(e^x - 1) + x}{e^x - 1} = x + F^{-1}(x)$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n \frac{x^n}{n!} = x + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{x^n}{n!}.$$

Отсюда следует, что

$$\beta_0 = 1, \beta_1 = -\frac{1}{2} \text{ и } \beta_{2k+1} = 0 \text{ при } k > 0,$$

т. е. все коэффициенты с нечетными номерами, кроме первого, равны нулю. Поэтому

$$F^{-1}(x) = \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \quad (3.3.13)$$

Найдем коэффициенты, стоящие на четных местах. Из равенства $F(x)F^{-1}(x) = 1$ следуют соотношения

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k \beta_{n-k} = \delta_{n,0}, \quad (3.3.14)$$

где $\delta_{n,0}$ – символ Кронекера. Из этих соотношений при $n \geq 2$ имеем $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k \beta_{n-k} = 0$. Преобразовав последние равенства по формуле (1.5.4), получим $\sum_{k=0}^n C_{n+1}^{k+1} \beta_{n-k} = 0$. Отсюда

$\beta_{n+1} = C_{n+1}^0 \beta_{n+1} + C_{n+1}^1 \beta_n + \dots + C_{n+1}^{k+1} \beta_{n-k} + \dots + C_{n+1}^n \beta_1 + C_{n+1}^{n+1} \beta_0$ и, следовательно, при $n \geq 2$ числа β_n удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \beta_{n-k}. \quad (3.3.15)$$

Используя эти соотношения и учитывая, что $\beta_0 = 1, \beta_1 = -\frac{1}{2}$, последовательно вычислим несколько первых чисел β_n , стоящих на четных местах. Для $\beta_3 = 0$ из формулы (3.3.15) имеем

$$\beta_3 = C_3^0 \beta_3 + C_3^1 \beta_2 + C_3^2 \beta_1 + C_3^3 \beta_0.$$

Отсюда $3\beta_2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$ и, следовательно, $\beta_2 = \frac{1}{6}$. Далее аналогично находим $\beta_4 = -\frac{1}{30}, \beta_6 = \frac{1}{42}, \beta_8 = -\frac{1}{30}, \beta_{10} = \frac{5}{66}, \beta_{12} = -\frac{691}{2730}, \beta_{14} = \frac{7}{6}, \beta_{16} = -\frac{3617}{510}, \dots$

Для коэффициентов с четными номерами обычно вводят обозначение

$$\beta_{2n} = B_n \quad (3.3.16)$$

и именно числа B_n называют *числами Бернулли*. В этих обозначениях производящая функция (3.3.13) чисел Бернулли выглядит так:

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \quad (3.3.17)$$

В силу (3.3.16) имеем $B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = -\frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = \frac{5}{66}, B_6 = -\frac{691}{2730}, B_7 = \frac{7}{6}, B_8 = -\frac{3617}{510}, \dots$

Связь чисел B_n с суммой $S_n^m = 1^m + 2^m + \dots + n^m$, которую нашел Я. Бернулли, выражается формулой

$$S_n^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m C_{m+1}^k B_k n^{m+1-k}.$$

Используя индукцию по m , докажите эту формулу самостоятельно.

Соотношения (3.3.14) являются соотношениями ортогональности для чисел Бернулли. Из этих соотношений вытекают следующие формулы обращения:

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+1} C_n^k b_k, \quad b_n = \sum_{k=0}^n C_n^k B_{n-k} a_k. \quad (3.3.18)$$

§ 3.4. Производящие функции и выборки

Систематизируются сведения о производящих функциях для основных видов выборок из конечных множеств и мультимножеств.

3.4.1. Неупорядоченные выборки

Пусть имеется множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Производящие функции для некоторых выборок уже были найдены в первом пункте § 3.1. Именно, производящей функцией для числа сочетаний из n элементов по k является многочлен

$$F(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k. \quad (3.4.1)$$

Многочлен

$$F(x) = (1+x+\dots+x^k)^n \quad (3.4.2)$$

служит производящей функцией для числа сочетаний из n элементов с повторениями, если число повторений элемента не превышает k . В том случае, когда на число повторений не накладывается никаких ограничений, производящая функция является степенным рядом $F(x) = (1+x+\dots+x^k+\dots)^n = (1-x)^{-n}$. Согласно (3.2.12)

$$\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + C_n^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + C_{n+2}^3 x^3 + \dots + C_{n+k-1}^k x^k + \dots,$$

но $C_{n+k-1}^k = \bar{C}_n^k$, поэтому

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n^k x^k. \quad (3.4.3)$$

Перейдем к неупорядоченным выборкам из совокупности элементов m типов a_1, a_2, \dots, a_m . Возможны два основных случая:

- 1) число элементов каждого типа является неограниченным;
- 2) число элементов каждого типа ограничено, т. е. выбор идет из мультимножества $A = \{n_1 a_1, n_2 a_2, \dots, n_m a_m\}$.

На выборки из разных совокупностей, в свою очередь, могут накладываться некоторые дополнительные условия. Поэтому произво-

дящие функции $F(x)$, с помощью которых изучаются эти выборки, имеют специфические особенности. При составлении производящей функции $F(x)$ для вычисления числа n -выборок определенного вида в первом случае руководствуются следующими общими правилами.

1°. Число неупорядоченных n -выборок из совокупности элементов m типов, в которых представлено хотя бы по одному элементу каждого типа, равно коэффициенту при x^n в произведении

$$F(x) = \underbrace{(x + x^2 + \dots) \dots (x + x^2 + \dots)}_{m \text{ раз}}.$$

2°. В общем случае число неупорядоченных n -выборок из совокупностей элементов a_1, a_2, \dots, a_m равно коэффициенту при x^n в произведении

$$F(x) = F_1(x)F_2(x) \dots F_m(x), \quad (3.4.4)$$

где $F_i(x)$ – многочлен или ряд, который строится с учетом ограничений, наложенных на выбор элемента a_i . Именно, если из совокупности элементов a_i , $1 \leq i \leq m$ необходимо выбрать:

а) ровно k элементов, то эту совокупность в произведении (3.4.4) следует представить множителем x^k ;

б) не менее k_1 , но не более k_2 элементов, то эту совокупность в произведении (3.4.4) следует представить многочленом $(x^{k_1} + \dots + x^{k_2})$;

в) нечетное количество элементов, то эту совокупность представляет множитель $(x + x^3 + \dots + x^{2k+1} + \dots)$;

г) четное количество элементов, то эту совокупность представляет множитель $(1 + x^2 + \dots + x^{2k} + \dots)$;

д) количество элементов, кратное r , то эту совокупность следует представить множителем $(1 + x^r + \dots + x^{rk} + \dots)$ (понятно, что правило является обобщением предыдущего).

Задача 3.4.1. В продаже в неограниченном количестве имеются яблоки, груши и апельсины. Сколькими способами можно произвести покупку:

а) 9 фруктов;

б) 9 фруктов, среди которых хотя бы по одному фрукту каждого вида;

в) 9 фруктов, среди которых ровно 3 апельсина;

г) 9 фруктов, среди которых не менее 3 апельсинов;

д) 9 фруктов, среди которых не более 3 апельсинов;

е) 9 фруктов, среди которых не менее 4 яблок, но не более 2 апельсинов;

ж) 9 фруктов, из которых можно составить три одинаковых набора фруктов?

Решение. Для каждого пункта на основе правил 1°-2° составим соответствующие производящие функции:

а) $(1 + x + x^2 + \dots)^3$;

б) $(x + x^2 + \dots)^3$;

в) $x^3(1 + x + x^2 + \dots)^2$;

г) $(x^3 + x^4 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots)^2$;

д) $(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + \dots)^2$;

е) $(x^4 + x^5 + \dots)(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \dots)$

ж) $(1 + x^3 + x^6 + \dots)^3$.

Выполним необходимые преобразования.

а) В силу (3.2.12)

$$(1 + x + x^2 + \dots)^3 = \frac{1}{(1-x)^3} = 1 + C_3^1 x + C_4^2 x^2 + \dots + C_{11}^9 x^9 + \dots$$

Искомое число способов равно $C_{11}^9 = 55$.

б) $(x + x^2 + \dots)^3 = x^3(1 + x + x^2 + \dots)^3 = x^3(1 + C_3^1 x + C_4^2 x^2 + \dots + C_8^6 x^6 + \dots)$. Искомое число способов $C_8^6 = 28$.

в) Так как $x^3(1 + x + x^2 + \dots)^2 = \frac{x^3}{(1-x)^2} = x^3(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 7x^6 + \dots)$, то искомое число способов равно 7.

г) $(x^3 + x^4 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots)^2 = x^3(1 + x + x^2 + \dots)^3$. Поэтому, как и в пункте б), ответ 28.

д) Преобразуем первый множитель, воспользовавшись формулой суммы членов геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + \dots)^2 &= \frac{1-x^4}{1-x} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{1-x^4}{(1-x)^3} = (1-x^4)(1 + C_3^1 x + \dots + C_7^5 x^5 + \dots + C_{11}^9 x^9 + \dots). \end{aligned}$$

Коэффициент при x^9 равен $C_{11}^9 - C_7^5 = 55 - 21 = 34$.

$$\begin{aligned} \text{е) } (x^4 + x^5 + \dots)(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \dots) &= \\ = x^4(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \dots)^2 &= \frac{x^4(1-x^3)}{1-x} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \\ = \frac{x^4(1-x^3)}{(1-x)^3} &= x^4(1-x^3)(1 + C_3^1 x + C_4^2 x^2 + \dots + C_7^5 x^5 + \dots). \end{aligned}$$

Коэффициент при x^9 равен $C_7^5 - C_4^2 = 21 - 6 = 15$.

$$\text{ж) } (1 + x^3 + x^6 + \dots)^3 = \frac{1}{(1-x^3)^3} =$$

$$= (1 + C_3^1 x^3 + C_4^2 x^6 + C_5^3 x^9 + \dots).$$

Искомое число способов равно $C_5^3 = 10$. \square

Правила 1°–2° можно применять и для подсчета числа неупорядоченных выборок в том случае, когда задано количество элементов каждого типа. Если, например, из мультимножества $A = \{n_1 a_1, n_2 a_2, \dots, n_m a_m\}$ необходимо выбрать $n \leq n_1 + \dots + n_m$ элементов, то производящей функцией для числа таких выборок является произведение многочленов

$$F(x) = (1 + x + \dots + x^{n_1}) \dots (1 + x + \dots + x^{n_m}).$$

Задача 3.4.2. В вазе лежит 5 яблок, 6 груш и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать из них:

- а) 9 фруктов;
- б) 9 фруктов, среди которых хотя бы по одному фрукту каждого вида;
- в) 9 фруктов, среди которых ровно 3 апельсина;
- г) 9 фруктов, среди которых не менее 3 апельсинов;
- д) 9 фруктов, среди которых не более 3 апельсинов;
- е) 9 фруктов, среди которых не менее 4 яблок, но не более 2 апельсинов;
- ж) 9 фруктов, из которых можно составить три одинаковых набора фруктов?

Решение. Для каждого пункта составим соответствующие производящие функции. При составлении необходимо учитывать, что число фруктов каждого вида ограничено, поэтому:

- а) $(1 + x + \dots + x^5)(1 + x + \dots + x^6)(1 + x + \dots + x^4)$;
- б) $(x + \dots + x^5)(x + \dots + x^6)(x + \dots + x^4)$;
- в) $(1 + x + \dots + x^5)(1 + x + \dots + x^6)x^3$;
- г) $(1 + x + \dots + x^5)(1 + x + \dots + x^6)(x^3 + x^4)$;
- д) $(1 + x + \dots + x^5)(1 + x + \dots + x^6)(1 + x + x^2 + x^3)$;
- е) $(x^4 + x^5)(1 + x + \dots + x^6)(1 + x + x^2)$;
- ж) $(1 + x^3)^2(1 + x^3 + x^6)$.

Проведем необходимые преобразования в первом пункте; преобразования и соответствующие вычисления в других пунктах предлагается выполнить самостоятельно. Имеем

$$\begin{aligned} & (1 + x + \dots + x^5)(1 + x + \dots + x^6)(1 + x + \dots + x^4) = \\ &= \frac{1-x^6}{1-x} \cdot \frac{1-x^7}{1-x} \cdot \frac{1-x^5}{1-x} = \frac{1-x^5-x^6-x^7+x^{11}+x^{12}+x^{13}-x^{18}}{(1-x)^3} = \\ &= (1-x^5-x^6-x^7+\dots)(1+C_3^1x+C_4^2x^2+\dots+C_{11}^9x^9+\dots). \end{aligned}$$

Искомый коэффициент при x^9 равен

$$C_{11}^9 - C_6^4 - C_5^3 - C_4^2 = 55 - 15 - 10 - 6 = 24. \quad \square$$

Заметим, что при использовании производящих функций одной переменной указание вида выбираемых предметов (в задаче – фруктов) возможно тогда, когда число предметов одного типа не равно числу предметов другого вида. Отметим также, что решение любой подзадачи данной задачи на основе комбинаторных рассуждений возможно, но, как правило, является более сложным.

3.4.2. Упорядоченные выборки

Использование экспоненциальных производящих функций позволяет перечислять упорядоченные выборки. Действительно, как мы видели,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n A_n^k \frac{x^k}{k!},$$

т. е. коэффициент при $\frac{x^k}{k!}$ равен числу A_n^k размещений из n элементов по k . Отсюда следует, что $(1+x)^n$ – экспоненциальная производящая функция для числа размещений без повторений.

Экспоненциальной производящей функцией для числа размещений из n элементов по k с повторениями является функция $F(x) = e^{nx}$. В самом деле,

$$e^{nx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!}$$

и коэффициент при $\frac{x^k}{k!}$ равен n^k .

Рассмотрим упорядоченные n -выборки из совокупности элементов m типов a_1, a_2, \dots, a_m . Пусть для каждого $1 \leq i \leq m$ выбирается n_i элементов a_i и $n_1 + \dots + n_m = n$. Если количество элементов любого типа является неограниченным, то выборка элементов a_i может быть представлена членом $\frac{x^{n_i}}{n_i!}$ ряда $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$, а вся n -выборка – произведением

$$\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right), \quad (3.4.5)$$

содержащим m сомножителей.

Если это произведение представить в виде экспоненциального ряда, то коэффициент $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_m!}$ при $\frac{x^n}{n!}$, где

$$x^{n_1} x^{n_2} \dots x^{n_m} = x^{n_1+n_2+\dots+n_m},$$

даст число способов, которыми можно выбрать и упорядочить n элементов (по n_i элементов типа a_i).

Понятно, что в конкретной перечислительной задаче экспоненциальные ряды, представляющие в произведении (3.4.5) элементы типа a_i , вновь будут иметь специфические особенности, обусловленные условиями задачи. Поэтому при составлении экспоненциальной производящей функции следует руководствоваться теми же правилами 1° и 2°, которые сформулированы для обычных производящих функций. Продемонстрируем это при решении следующих задач.

Задача 3.4.3. Найти количество шестизначных чисел, все цифры в которых нечетные, а цифры 1 и 3 встречаются не менее одного раза.

Решение. Имеется 5 нечетных цифр. Поэтому экспоненциальная производящая функция, позволяющая найти количество указанных шестизначных чисел, ищется следующим образом

$$e^{3x} \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \right)^2 = e^{3x} (e^x - 1)^2 = e^{3x} (e^{2x} - 2e^x + 1) = e^{5x} - 2e^{4x} + e^{3x}.$$

Отсюда следует, что искомое количество шестизначных чисел равно $5^6 - 2 \cdot 4^6 + 3^6 = 8162$. □

Задача 3.4.4. Имеется 5 карточек, на которых написана буква А, 4 карточки с буквой Б и 3 карточки с буквой В. Сколько различных «слов» можно составить с помощью этих карточек, в которых:

- 6 букв;
- 6 букв, среди которых хотя бы по одной букве каждого вида;
- 6 букв, среди которых ровно 3 буквы А;
- 6 букв, среди которых не менее 4 букв А;
- 6 букв, среди которых не более 2 букв А;
- 6 букв, среди которых четное число букв А, не менее 2 букв Б и не более 2 букв В?

Решение. Теперь производящие функции составляются с учетом того, что выбор каждой из букв ограничен:

- $\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)$;
- $\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right) \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)$;
- $\frac{x^3}{3!} \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)$;
- $\left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)$;
- $\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)$;
- $\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)$.

В каждом пункте необходимо выполнить малоприятную процедуру перемножения многочленов и приведения подобных членов. Число искомых выборок будет равно произведению найденного коэффициента при x^6 на $6!$. \square

Вновь заметим, что прямые комбинаторные решения каждой из подзадач задачи 3.4.4 требуют специфических и по большей части достаточно тонких рассуждений.

§ 3.5. Производящие функции и разбиения множеств

Приводится сводка основных производящих функций для перечисления числа различных разбиений конечного множества.

Рассмотрим разбиения множеств, в которых задано количество блоков, образующих разбиение.

1°. Число способов упорядоченного разбиения n -множества на k блоков, среди которых допускаются пустые блоки, равно k^n (п. 1.12.2). Этот результат можно получить с помощью производящей экспоненциальной функции

$$F^*(x) = e^{kx}, \quad (3.5.1)$$

коэффициент при $\frac{x^n}{n!}$ у которой равен k^n .

2°. Число способов упорядоченного разбиения n -множества на k блоков, среди которых нет пустых, позволяет найти производящая экспоненциальная функция

$$F^*(x) = (e^x - 1)^k.$$

В самом деле, по формуле бинoма Ньютона имеем $(e^x - 1)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i e^{(k-i)x}$. Поскольку $e^{(k-i)x} = \sum_{n=0}^{\infty} (k-i)^n \frac{x^n}{n!}$, то

$$(e^x - 1)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i (k-i)^n \right) \frac{x^n}{n!}, \quad (3.5.2)$$

и коэффициент при $\frac{x^n}{n!}$ равен $\sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i (k-i)^n$.

3°. Число способов неупорядоченного разбиения n -множества на k непустых блоков есть число $S(n, k)$ Стирлинга второго рода. Согласно формуле (1.12.8) $S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i (k-i)^n$. Поэтому

$$\frac{1}{k!} (e^x - 1)^k = \sum_{n=k}^{\infty} S(n, k) \frac{x^n}{n!}, \quad (3.5.3)$$

и $F_k^*(x) = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k$ – экспоненциальная производящая функция для чисел Стирлинга второго рода.

Докажем также, что

$$\frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)} = \sum_{n=k}^{\infty} S(n, k) x^n, \quad (3.5.4)$$

т. е. $F_n(x) = \frac{x^n}{(1-x)(1-2x)\dots(1-nx)}$ – простая производящая функция чисел $S(n, k)$. Пусть $F_n(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c(n, k) x^n$. Тогда $c(0, 0) = 1$ и $c(n, k) = 0$ при $n < k$. Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)} &= \frac{x^{k(1-kx)}}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)} + \frac{kx^{k+1}}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)} = \\ &= \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-(k-1)x)} + k \frac{x^{k+1}}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}, \end{aligned}$$

то $F_n(x) = xF_{n-1}(x) + kxF_n(x)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} c(n, k) x^n &= x \sum_{n=k-1}^{\infty} c(n-1, k-1) x^{n-1} + kx \sum_{n=k}^{\infty} c(n, k) x^n = \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} c(n-1, k-1) x^n + k \sum_{n=k}^{\infty} c(n-1, k) x^n = \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} (c(n-1, k-1) + kc(n-1, k)) x^n. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что коэффициенты $c(n, k)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$c(n, k) = c(n-1, k-1) + k \cdot c(n-1, k).$$

Согласно теореме 1.12.6 числа Стирлинга второго рода удовлетворяют тем же самым соотношениям, поэтому $c(n, k) = S(n, k)$.

Так как

$$\begin{aligned} \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)} &= \prod_{i=1}^k \frac{x}{1-ix} = \\ &= \prod_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} (ix)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=n-k, \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, \dots, n_k \geq 0}} 1^{n_1} \cdot 2^{n_2} \cdot \dots \cdot k^{n_k} \right) x^n, \end{aligned}$$

то из (3.5.4) следует еще одна формула для вычисления чисел Стирлинга второго рода:

$$S(n, k) = \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=n-k, \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, \dots, n_k \geq 0}} 1^{n_1} \cdot 2^{n_2} \cdot \dots \cdot k^{n_k}.$$

Задача 3.5.1. Найти число способов, которыми 7 различных открыток можно разложить в 5 конвертов так, чтобы не было пустых конвертов. Рассмотреть случаи: а) все конверты одинаковые, б) все конверты различные.

Решение. а) Очевидно, что нужно найти $S(7,5)$. Используем для этого экспоненциальную производящую функцию

$$\begin{aligned} \frac{1}{5!}(e^x - 1)^5 &= \frac{1}{5!}(e^{5x} - C_5^4 e^{4x} + C_5^3 e^{3x} - C_5^2 e^{2x} + C_5^1 e^x - 1) = \\ &= \frac{1}{5!}(e^{5x} - 5e^{4x} + 10e^{3x} - 10e^{2x} + 5e^x - 1) = \\ &= \frac{1}{5!}\left(1 + 5x + \dots + \frac{(5x)^7}{7!} + \dots\right) - \frac{5}{5!}\left(1 + 4x + \dots + \frac{(4x)^7}{5!} \dots\right) + \\ &+ \frac{10}{5!}\left(1 + 3x + \dots + \frac{(3x)^7}{7!} \dots\right) - \frac{10}{5!}\left(1 + 2x + \dots + \frac{(2x)^7}{7!} \dots\right) + \\ &+ \frac{5}{5!}\left(1 + x + \dots + \frac{x^7}{7!} \dots\right) - \frac{1}{5!} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $S(7,5) = \frac{1}{5!}(5^7 - 5 \cdot 4^7 + 10 \cdot 3^7 - 10 \cdot 2^7 + 5 \cdot 1^7) = \frac{1}{120}(78125 - 81920 + 21870 - 1280 + 5) = 140$.

Число $S(7,5)$ можно также найти, воспользовавшись обычной производящей функцией:

$$\begin{aligned} \frac{x^5}{(1-x)(1-2x)(1-3x)(1-4x)(1-5x)} &= \frac{x}{1-x} \cdot \frac{x}{1-2x} \cdot \frac{x}{1-3x} \cdot \frac{x}{1-4x} \cdot \frac{x}{1-5x} = \\ &= (x + x^2 + \dots)(2x + (2x)^2 + \dots)(3x + (3x)^2 + \dots) \times \\ &\times (4x + (4x)^2 + \dots)(5x + (5x)^2 + \dots) = \dots \end{aligned}$$

Желающие могут выполнить умножение и убедиться, что результат будет тот же самый. В этом случае процесс вычислений будет еще более громоздким.

б) Искомое число способов равно $7! \cdot 140 = 705600$.

4°. Число всех неупорядоченных разбиений n -множества на непустые блоки выражается числами Белла $B(n)$, которые связаны с числами Стирлинга второго рода соотношением $B(n) = \sum_{k=0}^n S(n, k)$. Имеет место

Теорема 3.5.1 (тождество Белла).

$$e^{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B(n) \frac{x^n}{n!}. \quad (3.5.5)$$

Доказательство. Действительно,

$$e^{e^x-1} = e^{\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots} = e^{\frac{x}{1!}} \cdot e^{\frac{x^2}{2!}} \cdot \dots \cdot e^{\frac{x^n}{n!}} \cdot \dots,$$

где $e^{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x^n}{1 \cdot n!} + \frac{x^{2n}}{2!(n!)^2} + \frac{x^{3n}}{3!(n!)^3} + \dots + \frac{x^{kn}}{k!(n!)^k} + \dots$, $n = 1, 2, \dots$. Перемножив эти ряды, видим, что коэффициент при $\frac{x^n}{n!}$ равен

$$\sum_{\substack{1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \dots + n \cdot k_n = n, \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \dots, k_n \geq 0}} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n! (1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots (n!)^{k_n}},$$

т. е. $B(n)$. ■

Из этой теоремы следует, что $F^*(x) = e^{e^x-1}$ – экспоненциальная производящая функция для чисел Белла.

Рассмотрим произведение экспоненциальных производящих функций $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$ и $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{x^k}{k!}$:

$$\begin{aligned} e^{-x}F(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i (k-i)^n \right) \frac{x^k}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k^n}{k!} - \frac{(k-1)^n}{1!(k-1)!} + \frac{(k-2)^n}{2!(k-2)!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{1^n}{(k-1)!1!} \right) x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} S(n, k) x^k = \sum_{k=0}^n S(n, k) x^k. \end{aligned}$$

При $x = 1$ отсюда имеем

$$e^{-1}F(1) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} = \sum_{k=0}^n S(n, k) = B(n).$$

Получили еще одну формулу для вычисления чисел Белла

$$B(n) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}, \quad (3.5.6)$$

которая называется *тождеством Добинского*.

5°. Число всех упорядоченных разбиений (A_1, A_2, \dots, A_k) n -множества A , таких, что $|A_i| = n_i$, вычисляется по формуле $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_k!}$. Но $\frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_k!}$ – это коэффициенты полиномиальной формулы. Поэтому в качестве производящей функции удобно использовать функцию от k переменных

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) = (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n =$$

$$= \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_k=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, \dots, n_k \geq 0}} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}.$$

В тех случаях, когда на подмножества разбиения накладываются дополнительные ограничения, соответствующим образом видоизменяется и производящая функция. Покажем это на примере решения следующей задачи.

Задача 3.5.2. Требуется 20 различных книг расставить на трех различных полках так, чтобы:

а) на каждую полку было поставлено не менее шести и не более восьми книг;

б) на первую полку была поставлена хотя бы одна книга, на вторую – четное количество книг, на третью – нечетное;

в) на первую полку было поставлено не менее двух книг, на вторую – число книг, кратное трем, а на третью – кратное пяти.

Сколькими способами это можно сделать (порядок расстановки книг на полке считается несущественным)?

Решение. Составим производящие функции, соответствующие требуемым расстановкам:

$$а) F(x) = \left(\frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} \right)^3;$$

$$б) F(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) =$$

$$= (e^x - 1) \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = (e^x - 1) \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} (e^{3x} - e^{2x} - e^{-x} + e^{-2x});$$

$$в) F(x) = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \left(1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \right) \left(1 + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^{10}}{10!} + \dots \right).$$

Выполняя необходимые вычисления, находим коэффициенты при $\frac{x^{20}}{20!}$ в каждом из пунктов.

а) Используя формулу общего члена полиномиального разложения, найдем коэффициент при x^{20} . Так как

$$\frac{3!}{n_1! n_2! n_3!} \left(\frac{x^6}{6!} \right)^{n_1} \left(\frac{x^7}{7!} \right)^{n_2} \left(\frac{x^8}{8!} \right)^{n_3} = \frac{3!}{n_1! n_2! n_3! (6!)^{n_1} (7!)^{n_2} (8!)^{n_3}} x^{6n_1 + 7n_2 + 8n_3},$$

то показатели n_1, n_2, n_3 являются неотрицательными целочисленными решениями системы

$$\begin{cases} 6n_1 + 7n_2 + 8n_3 = 20, \\ n_1 + n_2 + n_3 = 3. \end{cases}$$

Таких решений два: $(1, 2, 0)$, $(2, 0, 1)$. Поэтому коэффициент при x^{20} равен $\frac{3!}{2!6!(7!)^2} + \frac{3!}{2!(6!)^2 8!}$, а искомое число способов расстановки книг $20! \left(\frac{3!}{2!6!(7!)^2} + \frac{3!}{2!(6!)^2 8!} \right) = 748261800$.

$$6) \frac{1}{4} (3^{20} - 2^{20} - (-1)^{20} + (-2)^{20}) = \frac{3^{20}-1}{4} = 871696100.$$

в) Общий член произведения будет иметь вид

$$\frac{x^{n_1}}{n_1!} \cdot \frac{x^{3n_2}}{(3n_2)!} \cdot \frac{x^{5n_3}}{(5n_3)!} = \frac{x^{n_1+3n_2+5n_3}}{n_1!(3n_2)!(5n_3)!}$$

Искомое число расстановок равно сумме слагаемых, определяемых целочисленными неотрицательными решениями уравнения $n_1 + 3n_2 + 5n_3 = 20$. Поскольку $n_3 = 4 - \frac{n_1+3n_2}{5}$, перебором находим:

n_1	n_2	n_3
0	0	4
0	5	1
1	3	2
2	1	3
2	6	0
3	4	1
4	2	2

n_1	n_2	n_3
5	0	3
6	3	1
7	1	2
8	4	0
9	2	1
10	0	2
11	3	0

n_1	n_2	n_3
12	1	1
14	2	0
15	0	1
17	1	0
20	0	0

Проведя необходимые вычисления, получим 230428200 способов. \square

Приведем примеры производящих функций для перечисления разбиений, в которых упорядочены элементы в блоках разбиения.

6°. Число всех упорядоченных разбиений n -множества на k упорядоченных блоков равно $n! C_{n+k-1}^{k-1} = A_{n+k-1}^{k-1}$ (см. теорему 1.12.2). Это число разбиений можно найти как коэффициент при $\frac{x^n}{n!}$ в экспоненциальной производящей функции

$$F_k^*(x) = (1 + x + x^2 + \dots)^k = \frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k-1}^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n! C_{n+k-1}^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n+k-1}^{k-1} \frac{x^n}{n!}.$$

7°. Число всех упорядоченных разбиений n -множества на k упорядоченных блоков, каждый из которых не пуст, равно $n! C_{n-1}^{k-1}$ (см. теорему 1.12.3). Здесь экспоненциальная производящая функция –

$$F_k^*(x) = \frac{x^k}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k-1}^n x^{n+k} = \sum_{n=k}^{\infty} C_{n-1}^{n-k} x^n = \sum_{n=k}^{\infty} n! C_{n-1}^{k-1} \frac{x^n}{n!}.$$

Когда блоки неразличимы, а значит, их порядок является несущественным, экспоненциальная производящая функция –

$$F_k^*(x) = \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} n! C_{n-1}^{n-k} \frac{x^n}{n!}.$$

8°. Число неупорядоченных разбиений n -множества в k циклах или, что то же самое, число подстановок степени n , в разложении которых ровно k циклов, равно $|s(n, k)|$, где $s(n, k)$ – число Стирлинга первого рода. Согласно теореме 1.15.6 $(x)_n = \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k$, поэтому

$$F_n(x) = (x)_n = x(x-1) \dots (x-n+1)$$

– обычная производящая функция чисел $s(n, k)$.

Докажем, что экспоненциальная производящая функция для чисел $s(n, k)$ равна

$$F_k^*(x) = \frac{1}{k!} \ln^k(1+x).$$

Используя теорему 3.2.2, запишем ряд Ньютона в виде

$$(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} C_x^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k \frac{t^n}{n!}.$$

При $|t| < 1$ левую часть этого равенства можно преобразовать следующим образом: $(1+t)^x = (e^{\ln(1+t)})^x = e^{x \ln(1+t)}$, но $e^{x \ln(1+t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \ln^k(1+t) \frac{x^k}{k!}$, поэтому

$$\frac{1}{k!} \ln^k(1+t) = \sum_{n=k}^{\infty} s(n, k) \frac{t^n}{n!}.$$

§ 3.6. Производящие функции и разложения чисел

Приведены примеры применения метода производящих функций к решению задач на перечисление различных разложений заданного натурального числа.

3.6.1. Разложения, в которых не учитывается порядок слагаемых

Рассмотрим различные виды разложений натурального числа n на целые неотрицательные слагаемые, порядок которых не учитывается, или, что то же самое, раскладок n неразличимых предметов в неразличимые ящики.

Начнем с таких разложений числа n , в которых указаны либо сами слагаемые, либо количество слагаемых разложения. Производящие функции, перечисляющие число таких разложений, являются произведениями конечного числа составленных соответствующим образом множителей.

1°. *Количество способов, которыми натуральное число n можно разложить на различные натуральные слагаемые, равные n_1, n_2, \dots, n_k .* Искомое число способов разложения находится с помощью производящей функции

$$F(x) = (1 + x^{n_1})(1 + x^{n_2}) \dots (1 + x^{n_k}). \quad (3.6.1)$$

В самом деле, после раскрытия скобок функция $F(x)$ будет представлять собой многочлен, в котором x^n содержится как слагаемое столько раз, сколькими способами можно разбить число n на слагаемые требуемым образом.

Если слагаемые принимают значения $1, 2, \dots, k$, то производящая функция есть многочлен

$$F(x) = (1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^k).$$

Задача 3.6.1. Сколько комплектов букетов можно составить из 15 одинаковых роз, если букеты могут состоять из 1, 3, 5, 7, 9 роз и число цветов во всех букетах комплекта должно быть различным?

Решение. Составим функцию

$$F(x) = (1 + x)(1 + x^3)(1 + x^5)(1 + x^7)(1 + x^9),$$

раскроем скобки и найдем коэффициент при x^{15} . Имеем:

$$F(x) = 1 + x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + 2x^8 + 2x^9 + 2x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 2x^{13} + x^{14} + 2x^{15} + 2x^{16} + 2x^{17} + x^{18} + x^{19} + x^{20} + x^{21} + x^{22} + x^{24} + x^{25}.$$

Следовательно, требуемым способом можно составить всего два комплекта букетов. В первом комплекте букеты состояются из 3, 5 и 7 роз, а во втором – из 1, 5 и 9. \square

2°. *Количество способов, которыми натуральное число n можно разложить на натуральные слагаемые, равные n_1, n_2, \dots, n_k , причем порядок слагаемых не учитывается.* Теперь не требуется, чтобы все слагаемые в разложении были различными. Иными словами, находится число целочисленных неотрицательных решений системы

$$n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k = n.$$

Производящую функцию для нахождения искомого числа способов можно построить следующим образом:

$$F(x) = (1 + x^{n_1} + x^{2n_1} + \dots)(1 + x^{n_2} + x^{2n_2} + \dots) \times \dots \times (1 + x^{n_k} + x^{2n_k} + \dots) = \frac{1}{(1-x^{n_1})(1-x^{n_2})\dots(1-x^{n_k})}. \quad (3.6.2)$$

В произведении степенных рядов показатели x в первом сомножителе принимают значения, кратные n_1 , во втором – кратные n_2, \dots , в k -м – кратные n_k . Следовательно, после раскрытия скобок x^n войдет в полученный при этом степенной ряд с коэффициентом, равным числу решений уравнения $n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k = n$. Тем самым получено обобщение решения задачи 3.5.3 предыдущего параграфа.

Отсюда, в частности, следует, что число способов разбиения n на слагаемые, не превосходящие k , представляется функцией

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}.$$

Теперь коэффициент при x^n равен количеству целочисленных неотрицательных решений уравнения $x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k = n$.

Задача 3.6.2. Сколькими способами купюру в 1000 рублей можно разменять на купюры в 50, 100 и 500 рублей?

Решение. Очевидно, что задача эквивалентна задаче о разложении числа 20 на слагаемые, равные 1, 2 и 10. Составим производящую функцию

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^{10})} = \frac{1}{1-x-x^2+x^3-x^{10}+x^{11}+x^{12}-x^{13}}.$$

Далее, конечно, можно выполнить деление углом и тем самым найти коэффициент при x^{10} , но можно воспользоваться и методом неопределенных коэффициентов. Имеем:

$$\frac{1}{1-x-x^2+x^3-x^{10}+x^{11}+x^{12}-x^{13}} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель дроби, находящейся в левой части. Тогда после приведения подобных членов коэффициент при x^n в правой части будет равен

$$c_n - c_{n+1} - c_{n+2} + c_{n+3} - c_{n+10} + c_{n+11} + c_{n+12} - c_{n+13}.$$

В левой части при $n \geq 1$ коэффициенты при x^n равны нулю. Поэтому

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, & c_{10} - c_9 - c_8 + c_7 - c_0 &= 0, \\ c_1 - c_0 &= 0, & c_{11} - c_{10} - c_9 + c_8 - c_1 + c_0 &= 0, \\ c_2 - c_1 - c_0 &= 0, & c_{12} - c_{11} - c_{10} + c_9 - c_2 + c_1 + c_0 &= 0, \\ c_3 - c_2 - c_1 + c_0 &= 0, & c_{13} - c_{12} - c_{11} + c_{10} - c_3 + c_2 + c_1 - c_0 &= 0, \\ c_4 - c_3 - c_2 + c_1 &= 0, & c_{14} - c_{13} - c_{12} + c_{11} - c_4 + c_3 + c_2 - c_1 &= 0, \\ c_5 - c_4 - c_3 + c_2 &= 0, & c_{15} - c_{14} - c_{13} + c_{12} - c_5 + c_4 + c_3 - c_2 &= 0, \\ c_6 - c_5 - c_4 + c_3 &= 0, & c_{16} - c_{15} - c_{14} + c_{13} - c_6 + c_5 + c_4 - c_3 &= 0, \\ c_7 - c_6 - c_5 + c_4 &= 0, & c_{17} - c_{16} - c_{15} + c_{14} - c_7 + c_6 + c_5 - c_4 &= 0, \\ c_8 - c_7 - c_6 + c_5 &= 0, & c_{18} - c_{17} - c_{16} + c_{15} - c_8 + c_7 + c_6 - c_5 &= 0, \\ c_9 - c_8 - c_7 + c_6 &= 0, & c_{19} - c_{18} - c_{17} + c_{16} - c_9 + c_8 + c_7 - c_6 &= 0, \\ & & c_{20} - c_{19} - c_{18} + c_{17} - c_{10} + c_7 + c_8 - c_7 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда последовательно находим: $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 2, c_4 = 3, c_5 = 3, c_6 = 4, c_7 = 4, c_8 = 5, c_9 = 5, c_{10} = 7, c_{11} = 7, c_{12} = 9, c_{13} = 9, c_{14} = 11, c_{15} = 11, c_{16} = 13, c_{17} = 13, c_{18} = 15, c_{19} = 15, c_{20} = 18$. Следовательно, 1000 рублей разменять на купюры в 50, 100 и 500 рублей можно 18 способами. □

3°. Количество способов разбиения числа n не более чем на k слагаемых. На языке предметов и ящиков это означает, что среди k неразличимых ящиков, в которые раскладываются неразличимые предметы, допускаются пустые ящики.

Производящая функция имеет вид

$$F(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots) \dots (1 + x^k + x^{2k} + \dots) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^k)}. \quad (3.6.3)$$

Примечание. Эта производящая функция уже была найдена в п. 2° при подсчете числа способов разбиения n на слагаемые, не превосходящие k . Таким образом, из пунктов 2° и 3° следует, что количество разложений числа n на слагаемые, не превосходящие k , равно количеству разложений числа n не более чем на k слагаемых. Ранее это было доказано с помощью диаграмм Ферре.

4°. Количество способов разбиения числа n ровно на k слагаемых.

На языке предметов и ящиков это означает, что теперь пустые ящики не допускаются. Поэтому соответствующая производящая функция может быть записана так:

$$F(x) = \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^k)}. \quad (3.6.4)$$

Гораздо трудней строить производящие функции в тех случаях, когда слагаемые разбиения или их число не указаны. Здесь в качестве производящих функций приходится рассматривать произведения, содержащие бесконечное число сомножителей.

5°. Количество разложений числа n на различные слагаемые, которые не указаны и порядок которых не учитывается, можно представить функцией

$$F(x) = (1+x)(1+x^2) \dots (1+x^k) \dots \quad (3.6.5)$$

Бесконечное произведение, стоящее в правой части, в процессе раскрытия скобок может быть разложено в степенной ряд $F(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots$. Укажем способ вычисления произвольного коэффициента a_k этого ряда. Для этого рассмотрим несколько первых конечных произведений:

$$n = 1: 1 + x = 1 + x;$$

$$n = 2: (1 + x)(1 + x^2) = 1 + x + x^2 + x^3;$$

$$n = 3: (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + x^4 + x^5 + x^6;$$

$$n = 4: (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4) =$$

$$= 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}.$$

По индукции легко показать, что для любого $n = k$ умножение на двучлен $1 + x^k$ не меняет ранее полученных коэффициентов при степенях, меньших k . Поэтому коэффициент a_k при x^k в $F(x)$ равен коэффициенту при x^k в многочлене

$$(1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^k).$$

С помощью аналогичных рассуждений можно, например, установить, что производящие функции для числа разложений на различные четные и различные нечетные слагаемые имеют соответственно вид:

$$F(x) = (1 + x^2)(1 + x^4) \dots (1 + x^{2k}) \dots;$$

$$F(x) = (1 + x)(1 + x^3) \dots (1 + x^{2k+1}) \dots$$

6°. В некоторых задачах, связанных с разбиением чисел, приходится рассматривать бесконечное произведение

$$F(x) = (1 - x)(1 - x^2) \dots (1 - x^n) \dots \quad (3.6.6)$$

Такое произведение также можно представить степенным рядом, при этом некоторые из его коэффициентов окажутся равными нулю. Для определения этих коэффициентов можно воспользоваться *тождеством Эйлера*.*

Теорема 3.6.1.

$$(1 - x)(1 - x^2) \dots (1 - x^n) \dots =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(x^{\frac{3k^2-k}{2}} + x^{\frac{3k^2+k}{2}} \right). \quad (3.6.7)$$

Доказательство. Как следует из 5°, при раскрытии скобок в произведении (3.6.7) ненулевые члены $\pm x^n$ будут входить столько раз, сколькими способами число n можно разбить на различные слагаемые. При этом если число слагаемых четно, то x^n входит в разложение

* В результате вычислений Л. Эйлер нашел, что бесконечное произведение (3.6.6) представляет собой степенной ряд $1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{22} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - x^{70} - x^{77} + x^{92} + x^{100} - \dots$, в котором часть коэффициентов равна нулю, а ненулевые отрицательные и положительные коэффициенты попарно чередуются. Это позволило ему высказать гипотезу о том, что в этом ряду отличны от нуля лишь члены $(-1)^k x^{\frac{3k^2 \pm k}{2}}$, где $k \in \mathbb{N}$.

со знаком плюс, а если нечетно, то со знаком минус. Поэтому коэффициент при x^n в степенном ряде, полученном в результате умножения, равен разности между количеством разбиений n на четное число различных слагаемых и количеством его разбиений на нечетное число различных слагаемых.

Используя диаграммы Ферре, докажем, что если число n не может быть представлено в виде $\frac{3k^2 \pm k}{2}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и нечетное число различных слагаемых. Попутно установим, что для чисел вида $\frac{3k^2 \pm k}{2}$ разность между этими количествами равна $(-1)^k$. Именно, если k четно, то на 1 больше разбиений на четное число слагаемых, а если k нечетно, то на 1 больше разбиений на нечетное число слагаемых.

Для этого каждое разложение числа n представим в виде диаграммы Ферре. Напомним, что в таких диаграммах строки расположены так, что их длина (число точек в строке) сверху вниз не убывает. Так как в рассматриваемом случае слагаемые, входящие в разложения, различны, диаграммы Ферре будут состоять из нескольких «поставленных друг на друга трапеций». В частности, трапеции могут вырождаться в строку, а верхняя трапеция – в треугольник или в точку. Обозначим длину (число точек) в верхней строке диаграммы через l , а количество строк в нижней трапеции – через k . На рисунке 22 изображена диаграмма, состоящая из двух трапеций, у которой $l = 2$, $k = 3$.

На множестве диаграмм выполним следующие их преобразования:

(1) Если диаграмма содержит не менее двух трапеций и $l \leq k$, то удалим верхнюю строку и ее точками на одну точку удлиним l последних строк нижней трапеции. (На рисунке 23 показан образ диаграммы, изображенной на рисунке 22). Аналогичное преобразование выполним для диаграмм, состоящих из одной трапеции, у которых $l \leq k - 1$.

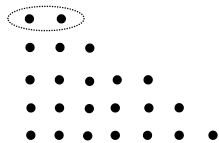


Рис. 22

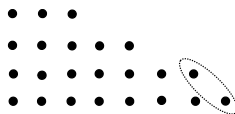


Рис. 23

Очевидно, что после такого преобразования общее число точек у указанных диаграмм не изменится, строки по-прежнему будут иметь различную длину, однако четность числа строк изменится (так как число строк уменьшается на 1).

(2) Если диаграмма содержит не менее двух трапеций, но $l > k$, то, наоборот, из каждой строки нижней трапеции возьмем по одной точке и составим из них верхнюю строку новой диаграммы. На рисунке 24 показан результат такого отображения. Аналогичное преобразование выполним для диаграмм, состоящих из одной трапеции, у которых $l > k - 1$.

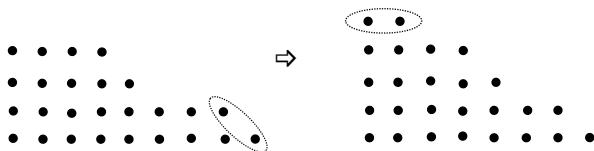


Рис. 24

Полученная при этом диаграмма вновь содержит столько же точек, сколько исходная, ее строки также имеют разную длину, и опять при преобразовании меняется четность числа строк (так как число строк увеличивается на 1).

Преобразования диаграмм (1), (2) являются взаимно обратными. Действительно, если сначала выполнить одно из преобразований, а затем другое, то в результате мы получим исходную диаграмму. В силу этого среди всех диаграмм разбиений числа n , допускающих описанные преобразования, диаграмм с четным числом строк столько же, сколько диаграмм с нечетным числом строк.

Выясним, какие из диаграмм преобразований (1), (2) не допускают. Эти диаграммы могут состоять только из одной трапеции, и для нее должно выполняться одно из условий: $l = k$ либо $l = k + 1$ (рис. 25).



Рис. 25

В первом случае $n = k + (k + 1) + \dots + 2k - 1 = \frac{3k^2 - k}{2}$, а во втором $n = k + (k + 1) + \dots + 2k = \frac{3k^2 + k}{2}$. При этом в каждом из случаев найденная диаграмма является единственной.

Итак, если в представлении числа n нет диаграмм, допускающих рассматриваемые преобразования, т. е. оно не является числом вида $\frac{3k^2 \pm k}{2}$, то у него совпадает число разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. Поэтому коэффициент при x^n в разложении $F(x)$ равен нулю.

Пусть n число вида $\frac{3k^2 \pm k}{2}$ и k – четное число. Тогда среди диаграмм, представляющих разложения числа n , имеется единственная диаграмма, допускающая преобразования и имеющая четное число строк. Поэтому разложений на четное число слагаемых на единицу больше, чем на нечетное число слагаемых. При нечетном k на единицу больше разложений на нечетное число слагаемых. ■

Доказанная теорема дает возможность практического использования производящей функции

$$F(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots) \dots (1 + x^k + x^{2k} + \dots) \dots = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)\dots} \quad (3.6.8)$$

для числа всех разложений числа n на произвольные слагаемые, порядок которых не учитывается.

Производящие функции для числа разбиений на произвольные четные и произвольные нечетные слагаемые имеют соответственно вид:

$$F(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)\dots(1-x^{2k})\dots},$$

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)\dots(1-x^{2k+1})\dots}.$$

3.6.2. Разложения, в которых учитывается порядок слагаемых

Приведем примеры производящих функций для разложений, в которых порядок слагаемых считается существенным. Для некоторых видов таких разложений в предыдущей главе были получены вычислительные формулы, для других – найдены рекуррентные соотношения.

Напомним, что в § 1.13 было доказано:

1°. Число способов представления натурального числа n в виде сумм k целых неотрицательных слагаемых, порядок которых учиты-

вается, равно $P_{n+k-1}(n, k-1) = C_{n+k-1}^{k-1}$. Этот результат можно получить, используя формулу (3.2.12):

$$F(x) = (1 + x + x^2 + \dots)^k = \frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k-1} x^n.$$

Аналогично находится производящая функция для числа способов представления натурального числа n в виде суммы k натуральных слагаемых, каждое из которых не меньше l и порядок которых учитывается

$$F(x) = (x^l + x^{l+1} + \dots)^k = \frac{x^{kl}}{(1-x)^k} = \sum_{n=kl}^{\infty} C_{n+k-kl-1}^{n-kl} x^n.$$

Коэффициент при x^n равен $C_{n+k-kl-1}^{n-kl} = C_{n+k-kl-1}^{k-1}$.

В частности, число способов представления натурального числа n в виде суммы k натуральных слагаемых, порядок которых учитывается, представляется производящей функцией

$$F(x) = \frac{x^k}{(1-x)^k}.$$

2°. Количество способов, которыми натуральное число n можно представить в виде суммы k слагаемых, принимающих значения n_1, n_2, \dots, n_m (порядок слагаемых учитывается), представляется производящей функцией

$$F(x) = (x^{n_1} + x^{n_2} + \dots + x^{n_m})^k. \quad (3.6.9)$$

Действительно, после возведения в степень слагаемое x^n войдет в полученный многочлен столько раз, сколько существует способов разложения числа n на сумму k слагаемых, принимающих значения n_1, n_2, \dots, n_m . При этом будут учитываться члены, отличающиеся порядком следования слагаемых в показателе.

В тех случаях, когда числа n_1, n_2, \dots, n_m образуют арифметическую прогрессию, а следовательно, степени $x^{n_1}, x^{n_2}, \dots, x^{n_m}$ – геометрическую, вид производящей функции и вычисление ее коэффициентов значительно упрощаются. Например, производящая функция для числа способов, которыми натуральное число n можно представить в виде суммы k слагаемых, каждое из которых равно одному из чисел $0, 1, 2, \dots, t$ (порядок слагаемых учитывается), имеет вид

$$F(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^t)^k = \frac{x^k(1-x^{t+1})^k}{1-x}.$$

Покажем, как с помощью найденной производящей функции решить две задачи, часто встречающиеся в учебной литературе по комбинаторике.

Задача 3.6.3 (о счастливых билетах). Трамвайные билеты имеют шестизначные номера. Билет считается «счастливым», если сумма его первых трех цифр равна сумме трех последних. Найти число всех счастливых билетов.

Решение. Для нахождения этого числа сначала покажем, что число счастливых билетов равно числу билетов, у которых сумма цифр равна 27. Действительно, существует взаимно однозначное соответствие между множеством счастливых шестизначных билетов и множеством номеров с суммой цифр 27. Для того чтобы установить такого соответствия, заменим в произвольном счастливом билете три последние цифры его шестизначного номера на цифры, дополняющие их до 9 (например, номер 713425 при такой замене перейдет в номер 713574, сумма цифр которого равна 27). Если сумма трех первых цифр (и трех последних) прежнего номера была равна k , то после указанной замены сумма трех последних цифр нового номера станет равной $27 - k$. Следовательно, общая сумма цифр нового номера равна 27.

Обратно, пусть в номере, сумма цифр которого равна 27, сумма трех первых цифр равна k , тогда сумма трех последних $- 27 - k$. Заменяя в нем последние три цифры на цифры, дополняющие их до 9, получим «счастливым» номер.

Число способов, которыми число 27 можно представить в виде суммы 6 слагаемых, каждое из которых равно одному из чисел 0, 1, 2, ..., 9 (порядок слагаемых учитывается), можно найти с помощью производящей функции

$$F(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^9)^6.$$

Учитывая, что $1 + x + x^2 + \dots + x^9 = \frac{1-x^{10}}{1-x}$, и используя разложения

$$(1 - x^{10})^6 = \sum_{k=0}^6 (-1)^k C_6^k x^k, \quad \frac{1}{(1-x)^6} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{6+k-1}^k x^k,$$

получим

$$F(x) = (1 - 6x^{10} + 15x^{20} - 20x^{30} + 15x^{40} - 6x^{50} + x^{60}) \times \\ \times (1 + C_6^1 x + C_7^2 x^2 + C_8^3 x^3 + \dots).$$

Отсюда следует, что искомое число счастливых билетов, равное коэффициенту при x^{27} , есть $C_{32}^{27} - 6C_{22}^{27} + 15C_{12}^7 = 55252$. \square

Задача 3.6.4 (задача абитуриента). Поступающий в высшее учебное заведение должен сдать 3 экзамена. Он полагает, что проходной

балл составит 13 баллов. Сколькими способами можно сдать экзамены, чтобы набрать проходной балл?

Решение. Проходной балл 13 разбивается на три слагаемых (число экзаменов), которые могут принимать значения 3, 4 и 5 (положительные отметки), причем порядок слагаемых имеет значение (экзамены разные). Поэтому

$$F(x) = (x^3 + x^4 + x^5)^3 = x^9(1 + x + x^2)^3 = x^9 \left(\frac{1 - x^3}{1 - x} \right)^3$$

или $F(x) = x^9(1 - x^3)^3(1 - x)^{-3}$. Поскольку

$$(1 - x^3)^3 = 1 - 3x^3 + 3x^6 - x^9,$$

$$(1 - x)^{-3} = 1 + C_3^1 x + C_4^2 x^2 + C_5^3 x^3 + C_6^4 x^4 + \dots,$$

производящая функция принимает вид

$$F(x) = x^9(1 - 3x^3 + 3x^6 - x^9)(1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \dots).$$

Отсюда следует, что коэффициент при x^{13} равен $6(15 - 3 \cdot 3)$. Таким образом, существует 6 вариантов успешной сдачи вступительных экзаменов, позволяющих набрать проходной балл. Это варианты: 3 + 5 + 5; 5 + 3 + 5; 5 + 5 + 3; 4 + 4 + 5; 4 + 5 + 4; 5 + 4 + 4. \square

§ 3.7. Теорема Пойа

В § 1.11 были рассмотрены некоторые приложения теоретико-групповых понятий и результатов (в частности, леммы Бернсайда) к решению перечислительных задач. Известный американский математик Дьёрдь Пойа органично соединил групповые методы с методом производящих функций в созданной им теории перечислений. Центральное место в этой теории занимает теорема, получившая его имя. В параграфе приведена эта теорема и даны примеры ее применения.

3.7.1. Цикловой индекс группы подстановок

Пусть X – произвольное n -множество, на котором действует группа подстановок G . Комбинаторные приложения леммы Бернсайда, как мы видели, сводятся к перечислению числа $X(G)$ орбит группы подстановок G и вычислению их длин. В теории Пойа дан общий метод построения производящей функции числа G -орбит, основанный на использовании циклового индекса группы подстановок. Поэтому знакомство с теорией Пойа начнем с понятия «циклового индекса группы подстановок».

Пусть s – произвольная подстановка из G , которая разлагается в произведение m_1 циклов длины 1, m_2 циклов длины 2 и т. д., m_n циклов длины n , где $\sum_{i=0}^n im_i = n$, т. е. имеет тип $[1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n}]$. Каждой подстановке $s \in G$ поставим в соответствие ее *вес* $w(s)$ – одночлен $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ из кольца многочленов $\mathbf{Z}(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$w(s) = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}.$$

Цикловым индексом группы подстановок G , действующей на множестве X , называется многочлен $P_G(x_1, x_2, \dots, x_n)$, равный сумме весов всех подстановок из G , деленной на их число:

$$P_G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}. \quad (3.7.1)$$

В качестве примеров найдем цикловые индексы групп подстановок, рассмотренных в п. 3 § 1.11.

1. Группа диэдра D_6 , действующая на множестве вершин правильного шестиугольника, содержит 12 подстановок, среди которых имеется: 1 подстановка типа $[1^6, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0, 6^0]$ (тождественная), 3 подстановки типа $[1^2, 2^2, 3^0, 4^0, 5^0, 6^0]$, 4 подстановки типа $[1^0, 2^3, 3^0, 4^0, 5^0, 6^0]$, 2 подстановки типа $[1^0, 2^0, 3^2, 4^0, 5^0, 6^0]$ и 2 подстановки типа $[1^0, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0, 6^1]$. Поэтому

$$P_{D_6}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{12}(x_1^6 + 3x_1^2 x_2^2 + 4x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6).$$

2. Группа G вращений куба, действие которой рассматривалось на множестве его вершин, содержит 24 подстановки, среди которых 1 подстановка типа $[1^8, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0, 6^0, 7^0, 8^0]$, 8 подстановок типа $[1^2, 2^0, 3^2, 4^0, 5^0, 6^0, 7^0, 8^0]$, 9 подстановок типа $[1^0, 2^4, 3^0, 4^0, 5^0, 6^0, 7^0, 8^0]$ и 6 – типа $[1^0, 2^0, 3^0, 4^2, 5^0, 6^0, 7^0, 8^0]$. Следовательно,

$$P_G = \frac{1}{24}(x_1^8 + 8x_1^2 x_3^2 + 9x_2^4 + 6x_4^2).$$

Задача 3.7.1. Найти цикловой индекс симметрической группы S_n .

Решение. Симметрическая группа S_n действует на n -элементном множестве и содержит $n!$ подстановок. Согласно (1.10.4) число подстановок типа $[1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n}]$ равно

$$C(m_1, m_2, \dots, m_n) = \frac{n!}{1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n} m_1! m_2! \dots m_n!}.$$

Поэтому цикловой индекс этой группы имеет вид

$$P_G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sum_{i=0}^n im_i = n} C(m_1, m_2, \dots, m_n) x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}, \quad (3.7.2)$$

где суммирование идет по всем целочисленным неотрицательным решениям системы $1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + \dots + n \cdot m_n = n$. \square

Задача 3.7.2. Найти цикловые индексы группы вращений R_n и группы диэдра D_n , действующих на множестве вершин правильного n -угольника.

Решение. Группа вращений R_n правильного n -угольника содержит n вращений φ_i , $i = 0, 1, \dots, n - 1$ этого многоугольника относительно его центра на углы $0, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{2\pi(n-1)}{n}$ соответственно.

Последовательно пронумеруем вершины n -угольника числами от 1 до n и опишем действие группы R_n с помощью подстановок множества $I_n = \{1, \dots, n\}$. Очевидно, что группа вращений R_n , циклически переставляющая вершины многоугольника, изоморфна циклической подгруппе $\langle s \rangle$ группы S_n , которая имеет порядок n и образующую $s = (1, 2, \dots, n)$. Этот изоморфизм задается отображением $\varphi_i \mapsto s^i$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Пусть $d = \text{НОД}(n, k)$, тогда элемент s^k имеет порядок $m = \frac{n}{d}$ и является образующей циклической подгруппы $\langle s^d \rangle$ порядка m группы $\langle s \rangle$. Подгруппа $\langle s^d \rangle$ содержит элементы $e, s^d, s^{2d}, \dots, s^{(m-1)d}$, при этом среди них $\varphi(m)$ элементов являются образующими этой подгруппы ($\varphi(m)$ – функция Эйлера). Очевидно, что элементы $e, s^d, s^{2d}, \dots, s^{(m-1)d}$ являются представителями смежных классов группы $\langle s \rangle$ по подгруппе $\langle s^d \rangle$.

Из примечания на страницах 86, 87 следует, что k -я степень s^k цикла $s = (1 \ 2 \ \dots \ n)$ является произведением $d = \text{НОД}(n, k)$ независимых циклов, каждый из которых имеет длину $m = \frac{n}{d}$. Поэтому каждая подстановка представлена в цикловом индексе одночленом вида $x_{n/d}^d$ с коэффициентом $\varphi(m) = \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$. Следовательно, цикловой индекс группы вращений R_n , действующей на множестве вершин правильного n -угольника, задается формулой

$$P_{R_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) x_{n/d}^d = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d}. \quad (3.7.3)$$

Группа диэдра D_n кроме вращений включает n осевых симметрий. Именно, при четном n имеется $\frac{n}{2}$ осей, содержащих диагонали многоугольника, и $\frac{n}{2}$ осей, проходящих через середины его противоположных

ных сторон; а при нечетном n имеется n осей, проходящих через вершины многоугольника и середины противоположных им сторон. Эти осевые симметрии могут быть заданы с помощью подстановок типов $[1^2, 2^{\frac{n-2}{2}}, 3^0, \dots, n^0]$, $[1^0, 2^{\frac{n}{2}}, 3^0, \dots, n^0]$ и $[1^1, 2^{\frac{n-1}{2}}, 3^0, \dots, n^0]$ соответственно. Поэтому цикловой индекс группы диэдра D_n равен

$$P_{D_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) x_{n/d}^d + \frac{1}{4} x_1^{\frac{n-2}{2}} (x_1^2 + x_2), & \text{если } n \text{ четное,} \\ \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) x_{n/d}^d + \frac{1}{2} x_1 x_2^{\frac{n-1}{2}}, & \text{если } n \text{ нечетное. } \square \end{cases}$$

3.7.2. Производящая функция классов эквивалентности

Чтобы понять, зачем нужны понятия, которые вводятся в этом пункте, вернемся к задаче 1.11.2 о составлении ожерелий или, что то же самое, о раскрашивании вершин правильного шестиугольника в три цвета. Всякий способ окраски вершин, по сути дела, задает некоторое отображение множества X вершин шестиугольника во множество E цветов, используемых для их окраски. Два способа окраски считаются эквивалентными (геометрически неразличимыми), если существует самосовмещение шестиугольника, при котором все вершины, окрашенные в одинаковые цвета, совпадают. Для того чтобы найти число различных способов окраски вершин, нам пришлось исследовать группу самосовмещений правильного шестиугольника, точнее циклическую структуру индуцируемой ею группы подстановок на множестве вершин шестиугольника. Оказывается, более продуктивно определить отношение эквивалентности не на множестве подстановок вершин, а на множестве указанных отображений $X \rightarrow E$.

Пусть по-прежнему X – произвольное n -множество, на котором действует группа подстановок G . Рассмотрим множество всех отображений E^X множества X в некоторое конечное множество E . (В упомянутой задаче 1.11.2 X – множество вершин шестиугольника, а E – множество цветов, используемых для окраски.)

На множестве E^X введем бинарное отношение \sim . Для отображений $f_1, f_2 \in E^X$ будем считать $f_1 \sim f_2$, если существует подстановка $s \in G$ такая, что

$$f_1(x) = f_2(s(x)) \quad (3.7.4)$$

для любого элемента $x \in X$. Нетрудно доказать, что введенное отношение является отношением эквивалентности. Действительно, $f_1(x) =$

$= f_1(e(x))$, где e – тождественная подстановка, т. е. отношение \sim рефлексивно. Понятно, что $f_2(x) = f_1(s^{-1}(x))$, поэтому оно симметрично. Наконец, если $f_2(s(x)) = f_3(t(s(x)))$ для некоторого $t \in G$, то $f_1(x) = f_3(st(x))$, где $st \in G$; отношение транзитивно.

Эквивалентность отображений, определяемая равенством (3.7.4), означает их эквивалентность относительно группы G , действующей теперь на множестве E^X . Отношение \sim разбивает множество E^X на орбиты – классы эквивалентных отображений. Фактормножество множества E^X по отношению эквивалентности \sim будем, как обычно, обозначать E^X/\sim .

Проиллюстрируем введенное понятие на примере. На рисунке 26 изображены ожерелья из 5 бусин черного и белого цвета, помещенных в вершины правильного пятиугольника. Вершины пятиугольника помечены числами 1, 2, 3, 4 и 5. Используемые цвета бусин обозначим буквами $ч$ и $б$. Каждому ожерелью соответствует отображение f_i множества $X = \{1,2,3,4,5\}$ во множество $E = \{ч, б\}$. Например, первому ожерелью соответствует отображение

$$f_1(1) = f_1(4) = ч, f_1(2) = f_1(3) = f_1(5) = б. \quad (3.7.5)$$

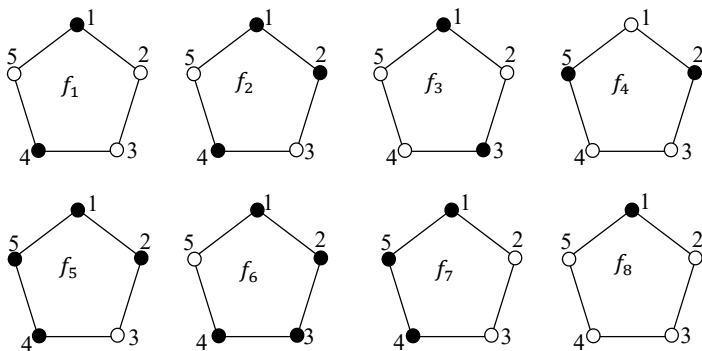


Рис. 26

Поскольку $f_4(2) = f_4(5) = ч$, $f_4(1) = f_4(3) = f_4(4) = б$ и существует подстановка $s = \begin{pmatrix} 12345 \\ 51234 \end{pmatrix}$ вершин пятиугольника такая, что $f_4(1) = f_1(s(1))$, $f_4(2) = f_1(s(2))$, $f_4(3) = f_1(s(3))$, $f_4(4) = f_1(s(4))$, $f_4(5) = f_1(s(5))$, то $f_4 \sim f_1$. Так же точно $f_1 \sim f_3$, а значит, $f_4 \sim f_3$.

Кроме того, $f_5 \sim f_6$. Других эквивалентных между собой отображений на рисунке нет.

Рассмотренный пример демонстрирует, что эквивалентность отображений означает, что любые два отображения, принадлежащие одной орбите, определяют ожерелья, одно из которых переходит в другое при некоторой подстановке $s \in G$, т. е. – одно и то же ожерелье. Таким образом, отношение эквивалентности, введенное на множестве отображений E^X , тесно связано с рассмотренным в § 1.11 отношением эквивалентности, заданном на самом множестве X . Поэтому при решении перечислительных задач вместо пересчета G -орбит множества X можно применять пересчет G -орбит множества отображений E^X . Это, как мы увидим, позволяет соединить групповой метод и метод производящих функций и тем самым создать гибкий и достаточно универсальный способ решения самых разнообразных комбинаторных задач.

Ключевым моментом схемы перечисления Пойа является придание весов классам эквивалентных отображений X в E и определение производящей функции классов эквивалентности.

Для этого сначала каждому элементу $\varepsilon \in E$ придается *вес* $w(\varepsilon)$, т. е. задается некоторое отображение $w: E \rightarrow \mathbf{K}$, где \mathbf{K} – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей (например, кольцо многочленов от нескольких переменных).

Затем определяются веса отображений из E^X . *Весом* $w(f)$ *отображения* $f \in E^X$ будем считать многочлен

$$w(f) = \prod_{x \in X} w(f(x)). \quad (3.7.6)$$

Пусть, например, черному и белому цветам (рис. 25) приписаны веса t_1 и t_2 соответственно из кольца $\mathbf{Z}[t_1, t_2]$ многочленов от двух переменных. Тогда $w(f_1) = t_1^2 t_2^3$, $w(f_2) = t_1^3 t_2^2$, $w(f_3) = t_1^2 t_2^3$ и т. д. Нетрудно заметить, что при этом эквивалентные отображения получают одинаковые веса; так, $f_1 \sim f_3$ и $w(f_1) = w(f_3)$. Поэтому естественно приписать этот же вес классу эквивалентности, которому принадлежат отображения f_1 и f_3 .

Пусть F – класс G -эквивалентных отображений и отображение $f \in F$ имеет вес $w(f)$, тогда *вес* $w(F)$ *класса эквивалентности (орбиты)* F считается равным $w(f)$.

Расклассифицировав орбиты по весам, введем *производящую функцию множества орбит* E^X/\sim . Она определяется как сумма

$$W(F) = \sum_F w(F), \quad (3.7.7)$$

взятая по всем орбитам F фактор-множества E^X/\sim .

Если теперь сгруппировать слагаемые одинакового веса, стоящие под знаком суммы, производящая функция $W(F)$ примет вид $W(F) = \sum_{w_i \in K} a_i w_i$, где a_i – число классов веса w_i . Полученные числа a_i будут являться решениями рассматриваемой перечислительной задачи.

Эти решения, как мы знаем, с одной стороны, зависят от цикловой структуры группы G , действующей на множестве X . Ее мы научились представлять с помощью циклового индекса группы. С другой стороны, решения зависят от элементов множества E , которые так же, как и орбиты, были расклассифицированы по весам. Поэтому можно ввести *производящую функцию элементов множества* E

$$W(E) = \sum_{\varepsilon \in E} w(\varepsilon). \quad (3.7.8)$$

Алгоритм составления производящих функций $W(F)$ дает

Теорема 3.7.1 (Пойа). *Производящая функция числа различных орбит равна*

$$W(F) = P_G \left(\sum_{\varepsilon \in E} w(\varepsilon), \sum_{\varepsilon \in E} w^2(\varepsilon), \dots, \sum_{\varepsilon \in E} w^n(\varepsilon) \right), \quad (3.7.9)$$

где $P_G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – *циклового индекса группы подстановок* G , действующей на множестве X , а n – число элементов этого множества.

Примем эту теорему без доказательства (желающие могут найти различные варианты доказательства в книгах [8], [19], [25]).

Очевидно, что положив в (3.7.9) все веса $w(\varepsilon)$ элементов из E равными 1, мы получим число $P_G(n, n, \dots, n)$ *всех неэквивалентных отбражений*.

Рассмотрим примеры применения теоремы Пойа. Сначала вернемся к задачам 1.11.2, 1.11.3.

В задаче 1.11.2 требовалось найти число различных ожерелий, которые можно составить из 6 бусин 3 цветов.

В этой задаче X – шестиэлементное множество бусин, на котором действует группа диэдра D_6 , E – трехэлементное множество цветов бусин. Цикловой индекс группы D_6 был найден в первом пункте этого

параграфа: $P_{D_6} = \frac{1}{12}(x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 4x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6)$. Припишем цветам бусин веса t_1, t_2 и t_3 . Тогда производящая функция (3.7.8) элементов множества E будет иметь вид:

$$W(E) = t_1 + t_2 + t_3.$$

Согласно теореме Пойа имеем:

$$W(F) = \frac{1}{12}((t_1 + t_2 + t_3)^6 + 3(t_1 + t_2 + t_3)^2(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)^2 + 4(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)^3 + 2(t_1^3 + t_2^3 + t_3^3)^2 + 2(t_1^6 + t_2^6 + t_3^6)).$$

Чтобы найти интересующее нас число различных ожерелий, нужно положить в построенной производящей функции $t_1 = t_2 = t_3 = 1$: $\frac{1}{12}(3^6 + 3 \cdot 3^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3) = 92$. Мы пришли к результату, полученному ранее с помощью леммы Бернсайда.

Если же в построенной производящей функции раскрыть скобки и привести подобные члены, то мы получим решения множества других перечислительных задач на составление ожерелья из 6 бусин 3 цветов. Дело в том, что коэффициент при одночлене $t_1^i t_2^j t_3^k$ ($i + j + k = 6$) многочлена, полученного после приведения подобных членов, будет давать информацию о числе различных ожерелий, составленных из i бусин первого, j бусин второго и k бусин третьего цвета.

Задача 3.7.3. Сколькими различными ожерелий можно составить из 6 бусин, среди которых:

- а) 3 красных, 2 синих и 1 белая бусины;
- б) 4 красных, 1 синяя и 1 белая бусины;
- в) бусин всех 3-х цветов поровну?

Решение. Используя полиномиальную формулу, перепишем производящую функцию множества ожерелий в виде

$$\begin{aligned} W(F) &= \frac{1}{12} \sum_{n_1+n_2+n_3=6} \frac{6!}{n_1!n_2!n_3!} t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_3^{n_3} + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=2, \\ m_1+m_2+m_3=2}} \frac{2!}{n_1!n_2!n_3!} \frac{2!}{m_1!m_2!m_3!} t_1^{n_1+2m_1} t_2^{n_2+2m_2} t_3^{n_3+2m_3} + \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{n_1+n_2+n_3=3} \frac{3!}{n_1!n_2!n_3!} t_1^{2n_1} t_2^{2n_2} t_3^{2n_3} + \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{n_1+n_2+n_3=2} \frac{2!}{n_1!n_2!n_3!} t_1^{3n_1} t_2^{3n_2} t_3^{3n_3} + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 t_i^6. \end{aligned}$$

Отсюда в результате анализа будем иметь:

а) Коэффициент при $t_1^3 t_2^2 t_3$ могут дать только слагаемые из первой и второй сумм, он равен $\frac{1}{12} \cdot \frac{6!}{3!2!1!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2!}{1!0!1!} \cdot \frac{2!}{1!1!0!} = 6$.

б) Коэффициент при $t_1^3 t_2 t_3$ опять дают слагаемые из первой и второй сумм: $\frac{1}{12} \cdot \frac{6!}{4!1!1!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2!}{0!1!1!} \cdot \frac{2!}{2!0!0!} = 4$.

в) Коэффициент при $t_1^2 t_2^2 t_3^2$ находим из первой, второй и третьей сумм

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{6!}{2!2!2!} + \frac{1}{4} \left(\frac{2!}{2!0!0!} \cdot \frac{2!}{0!1!1!} + \frac{2!}{0!2!0!} \cdot \frac{2!}{1!0!1!} + \frac{2!}{0!0!2!} \cdot \frac{2!}{1!1!0!} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{3!}{1!1!1!} = 11. \square$$

Число различных окрасок вершин куба в два цвета (задача 1.11.3) находится аналогично. Теперь X – восьмиэлементное множество вершин куба, на котором действует группа подстановок, индуцированная группой вращений куба, E – двухэлементное множество цветов, а цикловой индекс группы, действующей на X , имеет вид: $P_G = \frac{1}{24} (x_1^8 + 8x_1^2 x_3^2 + 9x_2^4 + 6x_4^2)$. Производящая функция (3.7.8) элементов множества E есть $W(E) = t_1 + t_2$. Поэтому

$$W(F) = \frac{1}{24} ((t_1 + t_2)^8 + 8(t_1 + t_2)^2 (t_1^3 + t_2^3)^2 + 9(t_1^2 + t_2^2)^4 + 6(t_1^4 + t_2^4)^2).$$

Положив $t_1 = t_2 = 1$, находим число различных раскрасок вершин куба в два цвета: $\frac{1}{24} (2^8 + 8 \cdot 2^2 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2) = 23$.

Задача 3.7.4. Сколькими способами можно раскрасить вершины куба в два цвета так, чтобы вершин каждого цвета было поровну?

Решение. Раскрыв в производящем многочлене задачи 3.7.3 скобки и приведя подобные члены, получим

$$W(F) = t_1^8 + t_1^7 t_2 + 3t_1^6 t_2^2 + 3t_1^5 t_2^3 + 7t_1^4 t_2^4 + 3t_1^3 t_2^5 + 3t_1^2 t_2^6 + t_1 t_2^7 + t_2^8.$$

Ответ на вопрос задачи дает коэффициент при одночлене $t_1^4 t_2^4$, поэтому число способов раскраски вершин куба в два цвета, при которых вершин каждого цвета поровну, равно 7. \square

3.7.3. Задача об ожерельях II

В заключение рассмотрим решение задач о составлении ожерелий из бусин различных цветов в общем виде. В зависимости от условий задачи два ожерелья считаются геометрически неразличимыми, если они совпадают: а) при вращениях, б) при вращениях и отражениях. По-

этому обычно считают, что бусины, составляющие ожерелье, помещены в вершины правильного многоугольника, и при решении задач используют группы самосовмещений этого многоугольника: в первом случае – группу вращений, во втором – группу диэдра.

Задача 3.7.5. Сколько можно изготовить различных ожерелий из n бусин q различных цветов? Считать, что запас бусин каждого цвета не ограничен и что перевернутое ожерелье: а) не отождествляется с исходным; б) геометрически неразличимо с исходным.

Решение. а) В данной задаче X – n -множество бусин, на котором действует группа вращений R_n правильного n -угольника, изоморфная циклической группе C_n порядка n ; E – q -множество цветов бусин. Цикловой индекс этой группы был найден в задаче 3.7.1: $P_{C_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) x_{n/d}^d$. Припишем цветам бусин веса t_1, t_2, \dots, t_q . Тогда производящая функция (3.7.8) элементов множества E равна $W(E) = \sum_{i=1}^q t_i$, а весами ожерелий являются одночлены $t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots t_q^{k_q}$. Составляем производящую функцию (3.7.9) для перечисления числа ожерелий:

$$W(F) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) \left(\sum_{i=1}^q t_i^{n/d} \right)^d. \quad (3.7.10)$$

Положив $t_1 = \dots = t_q = 1$, находим число различных ожерелий из n бусин q различных цветов в случае, когда перевернутое ожерелье не отождествляется с исходным:

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) q^d.$$

б) Теперь на множестве X действует группа диэдра D_n , цикловой индекс $P_{D_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ которой (задача 3.7.1):

$$\frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) x_{n/d}^d + \frac{1}{4} x_2^{\frac{n-2}{2}} (x_1^2 + x_2), \text{ если число } n \text{ четное;}$$

$$\frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) x_{n/d}^d + \frac{1}{2} x_1 x_2^{\frac{n-1}{2}}, \text{ если оно нечетное.}$$

Поэтому производящая функция при четном n имеет вид:

$$W(F) = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) \left(\sum_{i=1}^q t_i^{n/d} \right)^d + \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^q t_i^2 \right)^{\frac{n-2}{2}} \left(\left(\sum_{i=1}^q t_i \right)^2 + \sum_{i=1}^q t_i^2 \right),$$

а при нечетном n – вид:

$$W(F) = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) \left(\sum_{i=1}^q t_i^{n/d}\right)^d + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^q t_i\right) \left(\sum_{i=1}^q t_i^2\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Положив $t_1 = \dots = t_q = 1$, имеем $\frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) q^d + \frac{1}{4} q^{\frac{n}{2}}(q+1)$ при четном n и $\frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) q^d + \frac{1}{2} q^{\frac{n+1}{2}}$ при нечетном n .

Список использованной и рекомендуемой литературы

1. Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел: Сборник задач для математических школ. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2004.
2. Андерсон Д. А. Дискретная математика и комбинаторика. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2003.
3. Аршинов М. Н., Садовский Л. Е. Грани алгебры. – М.: Факториал Пресс, 2008.
4. Ахо А. В., Хопкрофт Д., Ульман Д. Д. Структуры данных и алгоритмы: учебное пособие. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2007.
5. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969.
6. Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика. – М.: Наука, 1975.
7. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1969.
8. Воронин В. П., Пospelов А. Д. Дополнительные главы дискретной математики. – М.: МГУ, 2002.
9. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике: учебное пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
10. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей: Учебное пособие. – 4-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2006.
11. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. – 2-е изд., испр. – М.: Мир, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
12. Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Элементы комбинаторики. – М.: Наука, 1977.
13. Калужнин Л. А., Суцанский В. И. Преобразования и перестановки. – М.: Наука, 1979.
14. Кнут Д. Э. Искусство программирования, том I. Основные алгоритмы. – 3-е изд. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2004.
15. Кормен Т. Х., Лейзерсон Ч. И., Ривест Р. Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. – 2-е изд. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2007.
16. Кузьмин О. В. Перечислительная комбинаторика: учебное пособие. – М.: Дрофа, 2005.
17. Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. – М.: Наука, 1983.
18. Матросов В. Л., Стеценко В. А. Лекции по дискретной математике. – М.: Прометей, 1997.
19. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. – М.: Изд-во МАИ, 1992.

20. Ландо С. К. Лекции о производящих функциях. – М.: МЦНМО, 2004.
21. Пойа Дж. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. – М.: Наука, 1970.
22. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. – М.: Наука, 1982.
23. Романко В. К. Разностные уравнения: учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
24. Рыбников К. А. Введение в комбинаторный анализ. – 2-е изд. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1985.
25. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: МЦНМО, 2004.
26. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. – М.: Мир, 1990.
27. Эвнин А. Ю. Сборник задач по дискретной математике. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.
28. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2003.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгебра Блиссара 164
– Коши 157
- Биномиальных коэффициентов**
– правило преобразования произведения 47
– суммирования 47
– свойство симметрии 46
- Бином Ньютона 44
Блок разбиения 89
- Вес орбиты** 215
– отображения 215
– элемента множества 216
- Выборка 17
– без повторений 17
– неупорядоченная 17
– с повторениями 17
– упорядоченная 17
- Группа диэдра** 78
– подстановок 76
– симметрическая 76
- Диаграмма Ферре – Юнга 99
Длина орбиты 77
– цикла 71
- Задача о беспорядках** 74
– об ожерельях 85, 218
– перечислительная 10
- Интеграл формального степенного ряда** 163
- Кольцо формальных степенных рядов** 159
Конечная разность первого порядка 142
– n -го порядка 143
Конфигурация комбинаторная 9
Коэффициент биномиальный 44
– обобщенный 169, 170
- полиномиальный 56
- Лемма Бернсайда** 80
Логарифм 174
- Мультимножество** 13
- Обращение биномиальное** 60
– Мебиуса 67
– Стирлинга 148
Объем блока разбиения 90
Оператор взятия конечной разности 142
– сдвига 142
– суммирования 150
Операция сдвига 168
Орбита группы 79
Основание мультимножества 14
- Перестановка** 37
– с повторениями 38
Подмультимножество 14
Подстановка 71
– ряда в ряд 161
– с k встречами 75
– циклическая 71
Последовательность линейная однородная рекуррентная порядка k 123
– полиномиальная 148
– Фибоначчи 107
Правило включений-исключений 22
– произведения 25
– суммы 21
Преобразование Абеля 34
Прогрессия арифметическая 104
– геометрическая 105
Произведение Блиссара 165
– Коши 158
Производная формального степенного ряда 161
- Разбиение множества** 89
– неупорядоченное 90

- упорядоченное 90
- числа 97
- Размещение 35
- с повторениями 35
- Ранг разбиения 89
- Рекурсия 109
- Ряд биномиальный 171
- формальный степенной 157
- экспоненциальный 164

- Свертка Блиссара 169
- Вандермонда 48
- Коши 167
- Символ Кронекера 29
- Соотношение Каталана 184
- ортогональное 59
- рекуррентное 124, 132
- линейное первого порядка 121
- неоднородное с постоянными коэффициентами 134
- однородное с постоянными коэффициентами 123
- Сочетания 39
- с повторениями 41
- Спецификация мультимножества 14
- разбиения 92
- Степень факториальная 144
- убывающая 145
- возрастающая 148
- Сумма кратная 28
- формальных степенных рядов 158
- Схема комбинаторная 16

- Теорема Пойа 210
- Тождество Белла 196
- Добинского 197
- Эйлера 204
- Треугольник Паскаля 49
- обобщенный 53

- Формула Бине 129
- включений-исключений 24
- обращения 59
- полиномиальная 55
- Эйлера 138

- Функция
- Мебиуса 66
- мультипликативная 66
- производящая 166
- множества орбит 216
- элементов множества 216
- экспоненциальная 166
- Эйлера 65

Характеристическое уравнение линейного однородного рекуррентного соотношения 140

Целая степень формального степенного ряда 163

Цикловой индекс группы подстановок 211

- Число Белла 96
- Бернулли 187
- беспорядков 76
- гармоническое 61
- Каталана 184
- комбинаторное 15
- Люка 107
- Моргана 144
- Стирлинга второго рода 97
- первого рода 75
- Фибоначчи 107

Экспонента 172

Геннадий Анатольевич КЛЕКОВКИН
ВВЕДЕНИЕ В ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНУЮ КОМБИНАТОРИКУ
Учебное пособие
Издание третье, стереотипное

Редакция
естественнонаучной литературы

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб
Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com;
196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, 1, лит. А.
Тел.: (812) 412-92-72, 336-25-09.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 21.05.19.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108^{1/32}.
Печать офсетная. Усл. п. л. 11,97. Тираж 100 экз.
Заказ № 383-19.
Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.