Я. М. ЕРУСАЛИМСКИЙ

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА. ТЕОРИЯ И ПРАКТИКУМ

Учебник

ЛАНЬ®
• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА • КРАСНОДАР •
• 2018 •

ББК 22.176я73
Е 79

Ерусалимский Я. М.

Е 79 Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник. — СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 476 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-2908-0

Учебник содержит основные разделы курса дискретной математики: «Алгебра высказываний», «Алгебра предикатов и множеств», «Элементы комбинаторики», «Отношения», «Булевы функции», «Элементы теории алгоритмов», «Элементы теории графов». Отдельная глава посвящена разбору решений задач и упражнений. Изложенный материал составляет теоретическую основу компьютерной математики.

Учебник предназначен для студентов вузов, обучающихся по направлениям и специальностям, входящим в укрупненные группы «Математика и механика» и «Компьютерные и информационные науки». Издание будет полезно аспирантам, преподавателям вузов, инженерам-системотехникам, программистам.

ББК 22.176я73

Рецензенты:

О. П. КУЗНЕЦОВ — доктор технических наук, профессор, зав. лабораторией Института проблем управления РАН;

Т. М. ЛЕДЕНЕВА — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой вычислительной математики и прикладных информационных технологий Воронежского государственного университета.

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

© Издательство «Лань», 2018
© Я. М. Ерусалимский, 2018
© Издательство «Лань», художественное оформление, 2018

Оглавление

Предисловие

Первый вариант этой книги «Дискретная математика: теория, задачи, приложения» (Москва, Вузовская книга) вышел в 1999 г. За прошедшее время она многократно переиздавалась, последнее, 12-е издание, было выпущено в 2011 г. Книга «пережила» образовательные стандарты первого, второго и третьего поколений, и настоящий ее вариант написан в соответствии с ФГОС 3+2.

Определение предмета «Дискретная математика» из «Введения» в книгу:

> *«Дискретная математика – бурно развивающаяся в XXI веке ветвь математики. Ее роль и место определяются тремя факторами:*
>
> - *дискретную математику можно рассматривать как теоретические основы компьютерной математики;*
> - *модели и методы дискретной математики являются хорошим средством и языком для построения и анализа моделей в различных науках, включая химию, физику, биологию, генетику, психологию, экологию, социологию и др.;*
> - *язык дискретной математики чрезвычайно удобен и стал фактически метаязыком современной математики» —*

стало каноническим. Оно вошло в образовательный стандарт Республики Беларусь по прикладной математике и информатике, цитируется без кавычек и ссылок диссертантами. Все это свидетельствует о том, что книга оказалась востребованной.

Прошедшее время и опыт использования книги требуют внесения изменений в ее содержание. При подготовке учебника автор существенно расширил главу 3 «Элементы комбинаторики», добавив параграф 3.6 «Пути на решетке».

Существенным дополнением к главе 3 является и новый параграф 3.7 «Генерация комбинаторных объектов», который может быть полезен тем, кто собирается в последующем заниматься приложениями, в том числе биоинформатикой, дизайном химических соединений и т. п.

Глава 8 «Практикум по решению упражнений и задач» фактически новая – она заменила главу 8 «Задачи и упражнения для самостоятельного решения».

Автор выражает благодарность профессору, заведующему лабораторией ИПУ РАН *О. П. Кузнецову* и профессору, заведующей кафедрой вычислительной математики и прикладных информационных технологий Воронежского государственного университета *Т. М. Леденевой* за ценные замечания и предложения, сделанные при рецензировании настоящего издания, а также своим дочерям *Т. Я. Васильевой* и *Н. Я. Ерусалимской* за помощь в подготовке настоящего издания книги.

Введение

Памяти моих родителей посвящаю

Дискретная математика — бурно развивающаяся в XXI в. ветвь математики. Ее роль и место определяются в основном тремя факторами:

— дискретную математику можно рассматривать как теоретические основы компьютерной математики;

— модели и методы дискретной математики являются хорошим средством и языком для построения и анализа моделей в различных науках, включая химию, физику, биологию, генетику, психологию, экологию, социологию и др.;

— язык дискретной математики чрезвычайно удобен и стал фактически метаязыком современной математики.

Математика как наука, естественно, от рождения делится на дискретную и континуальную математику. Что мы относим к континуальной математике? Все, что явно или неявно содержит идеи теории пределов и непрерывности. Все остальное — дискретная математика (т. е. арифметика, теория множеств и общая теория отображений, математическая логика, комбинаторный анализ, теория алгоритмов и многое другое).

В учебный предмет «Дискретная математика» включают только тот круг вопросов, который можно озаглавить «Теоретические основы компьютерной математики».

Прообраз этого пособия — курс дискретной математики, читаемый в течение ряда лет автором студентам первого курса специальности и направления подготовки «Прикладная математика и информатика». Это и определило его содержание и характер изложения.

Учебный курс дискретной математики в институте математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича Южного федерального университета (до 2007 г. — Ростовский государственный университет) читается в первых двух семестрах и включает в себя 70 ч. лекций и 70 ч. практических занятий. У этого учебного предмета две главные задачи: первая – дать элементарное введение в теорию множеств, отображений, комбинаторику, язык предикатов и кванторов; вторая – стать теоретической основой для дисциплин компьютерного цикла.

Существенным отличием этого учебника от других является систематическое использование языка теории множеств и отображений (в том числе и при изложении элементов комбинаторики). Это позволило сделать курс дискретной математики достаточно цельным, несмотря на разнообразие и внешнюю неоднородность изначального материала. Такой подход к изложению материала сложился на кафедре алгебры и дискретной математики РГУ со дня ее основания в 1972 г. и отражает методические воззрения заведующего кафедрой заслуженного деятеля науки РФ профессора И. Б. Симоненко (1935 — 2008 гг.) и его учеников. Нам представляется, что главная задача учебных курсов — не сообщение всех фактов, известных лектору, а привитие математической культуры мышления с помощью тщательно отобранного материала.

В 2004 г. на базе кафедры математического моделирования РГУ была создана корпоративная кафедра математического моделирования, включившая в себя родственные кафедры трех вузов: Ростовского государственного университета, Таганрогского радиотехнического университета и Южно-Российского государственного технического университета (НПИ). Обсуждение этой книги на корпоративной кафедре показало, что она может быть использована и используется не только в классических университетах, но и в технических. Участники обсуждения порекомендовали автору уделить больше внимания решению примеров и задач к разделу «Отображения», поскольку этот раздел вызывает наибольшие трудности у студентов технических специальностей.

Ответим на ряд вопросов, которые могут возникнуть у заинтересованного читателя.

• **Какие предварительные знания необходимы изучающему дискретную математику по этому учебнику?** Достаточным и необходимым является знание школьного курса математики.

• **Для изучения каких предметов будут полезны знания, полученные при изучении этого курса?** Перечислим основные учебные курсы: «Математический анализ», «Алгебра», «Теория вероятностей», «Функциональный анализ», «Исследование операций» и все предметы компьютерного цикла дисциплин.

• **Какие источники необходимо дополнительно привлечь для изучения курса дискретной математики?** Учебник замкнут в себе и одновременно открыт. Что это означает? Все сведения и факты, составляющие содержание курса, а также задачи и упражнения приведены в учебнике. Это позволяет обходиться без специальных задачников. Каждый раздел снабжен замечаниями и вопросами для самоконтроля. Открытость курса обеспечена наличием списка литературы, позволяющего заинтересованному читателю продвинуться дальше.

• **Что можно посоветовать преподавателю, избравшему этот учебник в качестве основного?** Небольшой объем материала и подробные доказательства в тексте позволят:

а) не требовать от студентов обязательного конспектирования лекций;

б) уделять на лекциях больше внимания обсуждению существа предмета, оставив выкладки, а порой и доказательства целых теорем для самостоятельного изучения.

• **Что можно посоветовать ассистенту?** Следует уделить особое внимание упражнениям по комбинаторике. Изложение этого раздела существенно отличается от традиционного. Это должно сказаться и на подходах к решению задач и необходимых комментариях преподавателя.

Перечислим имена крупных ученых, внесших существенный вклад в современную дискретную математику: английский математик и философ Б. Рассел, английский математик А. Тьюринг, американские математики А. Черч, К. Гедель, Э. Пост, С. Клини, польские математики Л. Лукасевич, С. Мостовской, советские математики А. А. Марков, И. И. Жегалкин, П. С. Новиков, В. М. Глушков, российские математики С. В. Яблонский, О. Б. Лупанов, Ю. И. Журавлев.

В настоящее время исследования по дискретной математике активно ведутся в МГУ на кафедрах дискретной математики, математических методов прогнозирования, математической кибернетики, суперкомпьютеров и квантовой информатики, в СПбГУ на кафедре теоретической кибернетики, в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, в ИПУ РАН, в Институте математики СО РАН и НГУ на кафедрах дискретной математики и информатики, теоретической кибернетики, в УрФУ на кафедре алгебры и дискретной математики, в ИММ УРО РАН, в КФУ на кафедре теоретической кибернетики, в ЮФУ на кафедре алгебры и дискретной математики и в других научных центрах нашей страны.

Мы постарались снабдить учебник биографическими ссылками, считая, что, изучая предмет, нельзя не уделять внимания его истории и людям, которым принадлежат основополагающие результаты. Большинство биографических ссылок подготовлены по книге: *Бородин А. И., Бугай А. С.* Биографический словарь деятелей в области математики: пер. с укр. — Киев: Радяньска школа, 1979.

Не только бурное развитие компьютерной техники и компьютерных наук, появление Интернета, мобильной связи, систем спутниковой навигации ставит новые задачи перед дискретной математикой. Практически весь рукотворный мир стал дискретным или, как теперь говорят, цифровым (digital). Цифровыми стали телевидение и радиовещание, аудио- и видеозапись. Оцифровываются не только документы, но и произведения искусств. Достигаемое при этом качество изображения и звука определяется уже не техническими возможностями устройств, а нашими потребностями.

Развитие естественных наук на рубеже XX–XXI вв.: квантовой физики и химии; нанотехнологии (т. е. физики, химии, механики наноизмерений); генетики и биоинформатики; биотехнологий и генной инженерии показало, что непрерывные модели недостаточны или неэффективны в этих науках. Что касается гуманитарных, социальных наук и экономических наук, то в них непрерывные (континуальные) математические модели часто являются отходом от существа дела, поскольку изучаемые в этих науках процессы дискретны априори.

Математика, ответственная за разработку моделей, используемых в других науках, вступает в эпоху дискретной математики и дискретного математического моделирования. Сказанное не следует воспринимать как заупокойную мессу по непрерывной математике или как гвоздь в ее гроб. Ни о каком исчерпании возможностей континуальной математики речь не идет и не может идти. Существует и будет существовать единая наука — математика, в которой на разных этапах скорость развития отдельных ее отраслей неравномерна. Если с XVII в. по середину XX в. континуальная математика в своем развитии опережала дискретную, то сейчас, по моему мнению, начинается этап опережающего развития дискретной математики.

Отбирая материал в этот учебник, я руководствовался личным опытом преподавания дискретной математики и своим собственным восприятием ее как науки. Выражаю надежду, что мои пристрастия придутся по вкусу читателям этой книги. При этом следует понимать, что этот учебник представляет собой элементарное введение в дискретную математику. Ее изучение начинается с этого учебника, но не заканчивается на нем.

Глава 1
Алгебра высказываний

§ 1.1. Высказывания. Операции над высказываниями

Как и во всей математике, в данном курсе, в каждом его разделе, существуют основные понятия, с которых все начинается. Считается, что у каждого из нас существуют интуитивные представления о них. В этих интуитивных представлениях спрессован исторический опыт человечества в области математических знаний. Основные понятия не определяются, для них даются квазиопределения, как правило, содержащие отсылки к другим неопределенным понятиям и объектам. В первой главе таким основным неопределяемым понятием является *высказывание*.

Высказывание — связное повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 1.1.** «$2 \times 2 = 4$». (Дважды два равно четырем.)

Пример 1.2. «$2 < 3$».

Пример 1.3. Река Дон в 2002 году впадает в Каспийское море.

Пример 1.4. «$x < 2$, $x \in R$». (Вещественное число x меньше, чем два.)

Пример 1.5. Площадь отрезка меньше длины куба.

Пример 1.6. Является ли $x = 3$ корнем уравнения $x^2 - 5x = 0$?

Пример 1.7. Меньше один в является два при.

Пример 1.8. Слава российским студентам!

Пример 1.9. $3 \geqslant 5$.

В приведенных примерах высказываниями являются 1.1, 1.2, 1.3, 1.9. Причем 1.1 и 1.2 — истинные высказывания, а 1.3 и 1.9 — ложные. Пример 1.5 — это пример связного повествовательного предложения, которое не является высказыванием, так как о нем нельзя сказать, истинно оно или ложно (из-за отсутствия в этом предложении какого-либо смысла). Примеры 1.6 и 1.8 не являются высказываниями, так как не являются повествовательными предложениями. Пример 1.7 не является высказыванием, несмотря на его повествовательность (в конце него стоит точка), по причине его несвязности, а значит, и отсутствия смысла. Предложение примера 1.4 не является высказыванием, несмотря на свою повествовательность, связность и осмысленность. В нем содержится переменная, из-за присутствия которой это предложение обладает свойством превращаться в высказывание при фиксации значения этой переменной. Если через $P(x)$ обозначить предложение примера 1.4, то $P(-1)$ — истинное высказывание, $P(3)$ — ложное высказывание. Ясно, что объекты такого типа являются обобщением понятия высказывания. К изучению этих объектов мы приступим позже, в главе 2.

В дальнейшем нас будет интересовать не то, о чем идет речь в высказывании (его содержательная часть), а лишь какое значение истинности («истина», «ложь») оно имеет. В алгебре высказываний все высказывания, имеющие одинаковые значения истинности, взаимозаменяемы, т. е. мы имеем два класса высказываний: класс истинных высказываний и класс ложных высказываний.

Введем следующие обозначения: если a — высказывание, то через $\widehat{a}$ будем обозначать его значение истинности.

Если a — истинное высказывание, то $\widehat{a} = 1$ (и, t).
Если a — ложное высказывание, то $\widehat{a} = 0$ (л, f).
(Здесь и далее в скобках приводятся другие встречающиеся в литературе обозначения.)

Таким образом, символ «$\widehat{\ }$» может рассматриваться как отображение множества высказываний в двухэлементное множество $\{0; 1\}$.

Определение 1.1. *Два высказывания a и b будем называть равносильными (и писать $a \equiv b$), если $\widehat{a} = \widehat{b}$, т. е.*

$$a \equiv b \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{a} = \widehat{b}$$

(знак $\Leftrightarrow$ используется как символ метаязыка, заменяющий «тогда и только тогда, когда»).

Логические операции над высказываниями

В русском языке (как и в любом другом) из простых связных повествовательных предложений с помощью некоторых стандартных связок (конструкций) можно образовывать новые (составные) повествовательные предложения. В алгебре высказываний этим конструкциям соответствуют логические операции. Так как нас интересует не содержательный смысл высказывания, а только его значение истинности, то для определения (задания) операции достаточно определить значение истинности результата применения операции.

Отрицание

Отрицание — унарная логическая операция (т. е. применяемая к одному высказыванию), соответствующая конструкциям: «Не …», «Не верно, что … ».

Определение 1.2. *Отрицание высказывания a — высказывание, обозначаемое $\overline{a}$ ($\neg a$) и определяемое следующей таблицей:*

$\widehat{a}$	$\widehat{\overline{a}}$
0	1
1	0

.

Очевидно, имеет место свойство

$$\overline{\overline{a}} \equiv a.$$

Оно называется *законом двойного отрицания.*

Перейдем теперь к определению бинарных (т. е. применяемых к паре высказываний) операций алгебры высказываний.

Конъюнкция

Конъюнкция (логическое умножение) соответствует союзу «и» в русском языке, т. е. конструкции «… и ×××».

Определение 1.3. *Конъюнкцией высказываний a и b называется высказывание, обозначаемое $a \wedge b$ ($a \cdot b$, ab, $a\&b$) и определяемое следующей таблицей:*

$\widehat{a}$	$\widehat{b}$	$\widehat{a \wedge b}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

,

т. е. конъюнкция $a \wedge b$ истинна тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания a, b.

Имеют место следующие свойства:

а) $a \wedge b \equiv b \wedge a$ — коммутативный закон;

$$\left.\begin{array}{l}\text{б) } a \wedge 1 \equiv a \\ \text{в) } a \wedge 0 \equiv 0\end{array}\right\}$$ — законы «0» и «1» для конъюнкции;

г) $a \wedge a \equiv a$ — закон идемпотентности.

Дизъюнкция

Дизъюнкция (логическое сложение) соответствует неразделительному «или» в русском языке, т. е. конструкции «... или $\times\times\times$».

Определение 1.4. *Дизъюнкцией высказываний a, b называется высказывание, обозначаемое $a \vee b$ и определяемое следующей таблицей:*

$\widehat{a}$	$\widehat{b}$	$\widehat{a \vee b}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

,

т. е. дизъюнкция $a \vee b$ ложна тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания a, b.

Имеют место следующие свойства:

а) $a \vee b \equiv b \vee a$ — коммутативный закон;

$$\left.\begin{array}{l}\text{б) } a \vee 1 \equiv 1 \\ \text{в) } a \vee 0 \equiv a\end{array}\right\}$$ — законы «0» и «1» для дизъюнкции;

г) $a \vee a \equiv a$ — закон идемпотентности.

Эквиваленция

Эквиваленция (равносильность) соответствует конструкции «... равносильно $\times\times\times$» (« ... тогда и только тогда, когда $\times\times\times$»).

Определение 1.5. *Эквиваленцией высказываний a, b называется высказывание, обозначаемое $a \sim b$ ($a \leftrightarrow b$) и определяемое следующей таблицей:*

$\widehat{a}$	$\widehat{b}$	$\widehat{a \sim b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

,

т. е. эквиваленция $a \sim b$ истинна тогда и только тогда, когда образующие ее высказывания a, b имеют равные значения истинности.

Очевидно, имеют место следующие свойства:

а) $a \sim b \equiv b \sim a$ — коммутативный закон;
б) $a \sim b \equiv \overline{a} \sim \overline{b}$;
в) $a \sim 1 \equiv a$;
г) $a \sim 0 \equiv \overline{a}$.

Импликация

Импликация соответствует конструкции «Если ... , то $\times\times\times$» («Из ... следует $\times\times\times$»).

Определение 1.6. *Импликацией высказываний a, b называется высказывание, обозначаемое $a \to b$ ($a \supset b$, $a \Rightarrow b$) и определяемое следующей таблицей:*

$\widehat{a}$	$\widehat{b}$	$\widehat{a \to b}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

,

т. е. импликация $a \to b$ ложна тогда и только тогда, когда a — истина, а b — ложь.

Высказывания, образующие импликацию $a \to b$, имеют специальные названия: a — *посылка* (гипотеза, антецедент), b — *заключение* (вывод, консеквент).

При первоначальном знакомстве с логическими операциями кажется, что все они, кроме импликации, введены довольно естественно, а восприятию введенного определения импликации наше сознание сопротивляется. Однако можно привести пример, показывающий, что такое определение импликации соответствует нашей интуитивной логике и конструкции «Если ... , то $\times\times\times$ », которой мы пользуемся в математике очень часто. Вспомним одну теорему из арифметики — $Q(x) =$ «Если натуральное число x делится на 4, то оно (натуральное число x) делится на 2». В справедливости этой теоремы мы не сомневаемся, т. е. какое натуральное число x мы ни зафиксируем в $Q(x)$, мы получим истинное высказывание. Обозначим $A(x) =$ «Натуральное число x делится на 4», $B(x) =$ «Натуральное число x делится на 2».

Тогда имеем

$$Q(x) \equiv A(x) \to B(x). \tag{1.1}$$

Фиксируя в (1.1) значения $x = 8,\ 2,\ 3$, мы реализуем строки $1 \to 1$, $0 \to 1$, $0 \to 0$. Ясно, что не удается для (1.1) подобрать такое значение x, чтобы реализовалась ситуация $1 \to 0$ (так как справедлива приведенная теорема, т. е. $Q(x) \equiv A(x) \to B(x) \equiv 1$).

Очевидно, имеют место свойства:

а) $a \to b \not\equiv b \to a$;
б) $a \to a \equiv 1$;
в) $0 \to a \equiv 1$;
г) $1 \to a \equiv a$;
д) $a \to 1 \equiv 1$;
е) $a \to 0 \equiv \overline{a}$.

Заметим, что в обычном языке в предложении вида «Если A, то B» A и B содержательно (контекстно) связаны. Это совершенно необязательно в нашем определении импликации, т. е. мы имеем право рассматривать импликацию вида: «Если сегодня четверг, то $2 \times 2 = 5$», которая истинна во все дни, кроме четверга, а в четверг ложна.

В большинстве алгоритмических языков имеется логический оператор «if P then S», использование которого несколько отличается от определения импликации, а именно если P — истина, то отрезок S программы выполняется, а если P — ложь, то отрезок S программы опускается (не выполняется).

П **Пример 1.10.** Каково значение переменной x после выполнения следующего фрагмента программы

$$\text{if } x < 2 \text{ then } x := 3x,$$

если до начала его выполнения: а) $x = 1$; б) $x = 4$?

Ответ: а) $x = 3$; б) $x = 4$.

С импликацией $a \to b$ связывают еще две импликации: $b \to a$, $\overline{b} \to \overline{a}$. Первую из них называют *обращением* $a \to b$, вторую — *контрапозицией импликации* $a \to b$.

П **Пример 1.11.** Найти обращение и контрапозицию следующей импликации:
«Если сегодня четверг, то $2 \times 2 = 4$».
Решение. Обращение исходной импликации имеет вид: «Если $2 \times 2 = 4$, то сегодня четверг», а контрапозиция: «Если $2 \times 2 \neq 4$, то сегодня не четверг».

Зависимости между операциями

Введенные операции не являются независимыми, одни из них могут быть выражены через другие.

Теорема 1.1. *Справедливы следующие равносильности:*

$$a \to b \equiv \overline{a} \vee b;$$

$$a \sim b \equiv (a \to b)(b \to a) \equiv (\overline{a} \vee b) \cdot (a \vee \overline{b}) \equiv (a \cdot b) \vee (\overline{a} \cdot \overline{b}).$$

(Всюду в дальнейшем знак ► означает начало доказательства, решения примера и т. п., а знак ◄ — окончание.)

► Любую из этих равносильностей можно доказать с помощью таблицы истинности (см. «Замечания и вопросы в конце параграфа», п. 2). ◄

Из приведенных равносильностей видно, что $\to$ и $\sim$ выражаются через $\vee$, $\wedge$ и $\neg$. В дальнейшем будет показано, что через $\vee$, $\wedge$ и $\neg$ можно выразить любую операцию алгебры высказываний. Поэтому основное внимание мы уделим изучению свойств этих операций, которые принято называть *булевскими*[1] (*булевыми*) операциями алгебры высказываний.

---

[1]Буль Джордж (1815–1864) — английский математик-самоучка. Преподавал в *Queen's College* (Шотландия). В 1854 г. первым определил то, что теперь называют *булевыми алгебрами*.

Теорема 1.2. *Справедливы следующие 19 равносильностей для булевых операций алгебры высказываний*:

0. $\overline{\overline{a}} \equiv a$ — закон двойного отрицания

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ a \vee b \equiv b \vee a \\ 2.\ a \wedge b \equiv b \wedge a \end{array}\right\} \text{— коммутативные законы}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3.\ a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c \\ 4.\ a \wedge (b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \wedge c \end{array}\right\} \text{— ассоциативные законы}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5.\ a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ 6.\ a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{array}\right\} \text{— дистрибутивные законы}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7.\ a \vee a \equiv a \\ 8.\ a \wedge a \equiv a \end{array}\right\} \text{— законы идемпотентности}$$

$$\left.\begin{array}{l} 9.\ \overline{a \vee b} \equiv \overline{a} \wedge \overline{b} \\ 10.\ \overline{a \wedge b} \equiv \overline{a} \vee \overline{b} \end{array}\right\} \text{— законы де Моргана}^{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} 11.\ a \vee 1 \equiv 1 \\ 12.\ a \wedge 0 \equiv 0 \\ 13.\ a \vee 0 \equiv a \\ 14.\ a \wedge 1 \equiv a \end{array}\right\} \text{— законы нуля и единицы}$$

$$\left.\begin{array}{l} 15.\ a \vee (a \wedge b) \equiv a \\ 16.\ a \wedge (a \vee b) \equiv a \end{array}\right\} \text{— законы поглощения}$$

17. $\overline{a} \equiv 1$ — закон исключенного третьего

18. $a \wedge \overline{a} \equiv 0$ — закон противоречия

► Любую из них можно доказать с помощью таблицы истинности. ◄

[2] Де Морган Огастес (1806–1871) — шотландский математик. Окончил *Trinity College* (Кембридж). Преподавал в *University College* (Лондон). Среди его учеников много известных математиков, в т. ч. дочь Байрона Августа Ада Кинг Лавлейс — основатель программирования. В ее честь назван алгоритмический язык «Ада».

Логические и битовые операции

В компьютерах основной единицей информации является *бит*. Бит принимает два возможных значения: 0 или 1, иными словами, бит — одноразрядное двоичное число. Для обозначения значения истинности высказывания мы также использовали 0, 1. Таким образом, если a — высказывание, то его значение истинности $\widehat{a}$ — бит информации. Переменная, принимающая значения во множестве $\{0, 1\}$, обычно называется *булевой переменной*. То есть булева переменная — это такая переменная, задание значения которой определяет один бит информации.

Компьютерные битовые (или логические) операции соответствуют операциям над высказываниями (вернее, над их значениями истинности). Приведем таблицы, определяющие операции $\neg$, or ($\vee$), and (&, $\wedge$), xor ($\oplus$):

x	$\neg x$
0	1
1	0

or	0	1
0	0	1
1	1	1

and	0	1
0	0	0
1	0	1

xor	0	1
0	0	1
1	1	0

Определение 1.7. *Битовой строкой длины* n ($n \in N$) *называется последовательность длины* n*, элементами которой являются биты.*

Например, 0110010 — битовая строка длины 7. Битовые операции естественным образом (поэлементно) распространяются на битовые строки равной длины. Их обозначения: bitwise $\neg$, bitwise or, bitwise and, bitwise xor.

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 1.12.** bitwise $\neg$ (0110010) = 1001101

$$\begin{array}{ll}
0110010 & \\
1101010 & \\
\hline
1111010 & \text{— bitwise or} \\
0100010 & \text{— bitwise and} \\
1011000 & \text{— bitwise xor}
\end{array}$$

Замечания и вопросы в конце параграфа

? ! **1.** У нас встречались записи такого типа: «$a \vee 0$», «$a \to 1$», ... Повсюду в них 0 и 1 — символы ложного и истинного высказывания соответственно.

2. При задании логических операций мы использовали таблицы

$\widehat{a}$	$\widehat{b}$	$\widehat{a \square b}$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

,

где $\square$ — символ определяемой операции, в первых столбцах таблиц перечислены возможные наборы значений истинности высказываний a, b. Всевозможные наборы значений истинности порождают строки таблицы. Каждый такой набор значений истинности может рассматриваться как двоичная запись неотрицательного целого числа. Наборы мы всегда будем располагать сверху вниз в порядке возрастания неотрицательных целых чисел $00_2 = 0_{10}$, $01_2 = 1_{10}$, $10_2 = 2_{10}$, $11_2 = 3_{10}$. Такое расположение наборов называется *лексикографическим порядком*, которого мы будем всегда придерживаться.

3. Приведите примеры теорем, имеющих конструкцию эквиваленции, импликации; посмотрите, какие строки таблицы, определяющей операцию, можно реализовать, а какие — нет.

4. Постройте примеры неверных математических утверждений, имеющих конструкцию эквиваленции, импликации. Какие строки таблицы, определяющей операцию, удастся реализовать, показывая, что утверждение неверно?
5. Сколько всего различных бинарных операций над высказываниями можно определить?

§ 1.2. Формулы алгебры высказываний

Будем считать, что существует некоторое множество элементарных высказываний (типа «$2 \times 2 = 4$»). Как правило, их будем обозначать первыми буквами латинского алфавита, а также 0, 1. Введем в рассмотрение высказывательные переменные — символы, вместо которых можно подставлять высказывания. Высказывательные переменные, как правило, обозначают последними буквами латинского алфавита (x, y, z, t, w, …). Мы ввели также знаки (обозначения) логических операций. Введем еще два служебных символа: «(» — открывающая скобка и «)» — закрывающая скобка.

Под формулами алгебры высказываний будем понимать осмысленные выражения, полученные из символов элементарных высказываний, символов высказывательных переменных, знаков операций (конечного числа) и скобок, определяющих порядок действий.

П **Пример 1.13.** $((a \to \overline{x}) \vee a) \sim (x \wedge \overline{y})$.

Пример 1.14. $((a \vee 0) \wedge ((l\overline{c}) \vee a)) \to \overline{x}$.

Пример 1.15. $(a \to) \sim (c \vee \overline{x}))$.

Пример 1.16. $(\to x \vee \overline{y}) \sim$.

Ясно, что 1.13, 1.14 — формулы, 1.15, 1.16 не являются формулами (проверьте почему).

Дадим более четкое определение формулы алгебры высказываний.

Определение 1.8

1. Элементарные высказывания, символы логических переменных — формулы.
2. Если F_1 и F_2 — формулы алгебры высказываний, то $\overline{F_1}, (F_1 \vee F_2), (F_1 \wedge F_2), (F_1 \sim F_2), (F_1 \to F_2)$ — формулы алгебры высказываний.
3. Других формул алгебры высказываний нет.

! **Замечание 1**

Из определения 1.8 видно, что любая формула, отличная от перечисленных в п. 1, должна быть заключена в наружные скобки. Поэтому выражения из примеров 1.13 и 1.14 также не являются формулами в смысле определения 1.8.

Каковы же функции наружных скобок? Они нужны для будущего — для подготовки формулы к образованию из нее новых формул (с помощью п. 2).

Замечание 2

Определение формулы таково, что формулы насыщены скобками и трудночитаемы, поэтому мы примем соглашения об упрощении записи формул:

а) наружные скобки в записи формул можно опускать;

б) условимся, что конъюнкция «сильнее» дизъюнкции, а обе они «сильнее» $\to$ и $\sim$, поэтому часть скобок, определяющих порядок действий, можно опускать;

в) скобки, определяющие порядок действий, в ассоциативном случае можно опускать (см. п. 3, 4 в теореме 1.2);

г) конъюнкцию будем обозначать знаком «$\cdot$» или знак конъюнкции опускать.

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 1.17.** Дана формула

$$((((a \wedge b) \wedge \overline{c}) \vee c) \to ((a \vee \overline{b}) \wedge a)).$$

Ее упрощенная запись имеет вид

$$ab\overline{c} \vee c \to (a \vee \overline{b}) \cdot a.$$

Приведем теперь без доказательства три важнейшие теоремы алгебры высказываний.

Теорема о фиксации значений в формуле

Теорема 1.3. *Если $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — формула алгебры высказываний, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — высказывательные переменные формулы, то при фиксации значений всех высказывательных переменных (т. е. при подстановке вместо них высказываний) формула алгебры высказываний превращается в высказывание. То есть формула алгебры высказываний является отображением множества наборов значений высказывательных переменных в высказывания. Можно также говорить о функции истинности формулы $\widehat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — отображении множества наборов высказывательных переменных во множество $\{0; 1\}$.*

Теорема о подстановке формул в формулу

Определение 1.9
Пусть $F(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — формулы алгебры высказываний. Подстановкой формул f_i в формулу F будем называть следующую конструкцию:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(F\Big|_{y_i \leftarrow f_i}\right)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{\mathrm{def}}{\equiv}$$
$$\equiv F\left(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots,\right.$$
$$\left.\ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right).$$

Последняя запись означает, что все вхождения y_1 *заменяются на* $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y_2 *на* $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\ldots$, y_m *на* $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Теорема о подстановке формул в формулу

Теорема 1.4. *Если* F *и* f_i *— формулы алгебры высказываний, то* $(F\big|_{y_i \leftarrow f_i})(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *— формула алгебры высказываний. При этом говорят, что она получена из формулы* F *подстановкой формул* f_i *вместо ее переменных.*

Равносильность формул.
Теорема о равносильной подстановке

Определение 1.10. *Две формулы алгебры высказываний* $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $f_2(x_1, \ldots, x_n)$ *называют равносильными (пишут* $f_1(x_1, \ldots, x_n) \equiv f_2(x_1, \ldots, x_n)$*), если*

$$\widehat{f_1}(x_1, \ldots, x_n) = \widehat{f_2}(x_1, \ldots, x_n).$$

В высказываниях нас не интересует содержательная часть, а интересуют только значения истинности; множество всевозможных наборов значений истинности высказывательных переменных конечно (состоит из 2^n наборов), и функцию $\widehat{f}(x_1, \ldots, x_n)$ можно задать таблично. Такая таблица называется таблицей истинности формулы.

Дадим второе определение равносильности формул.

Определение 1.10′. *Две формулы* $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $f_2(x_1, \ldots, x_n)$ *равносильны, если столбцы* $\widehat{f_1}$ *и* $\widehat{f_2}$ *их таблиц истинности совпадают.*

Теорема 1.5 (**о равносильной подстановке**)
Пусть

$$F(y_1, y_2, \dots, y_m) \equiv G(y_1, y_2, \dots, y_m),$$
$$f_1(x_1, \dots, x_n) \equiv g_1(x_1, \dots, x_n),$$
$$f_2(x_1, \dots, x_n) \equiv g_2(x_1, \dots, x_n),$$
$$\dots,$$
$$f_m(x_1, \dots, x_n) \equiv g_m(x_1, \dots, x_n),$$

тогда

$$\left(F\big|_{y_i \leftarrow f_i}\right)(x_1, \dots, x_n) \equiv \left(G\big|_{y_i \leftarrow g_i}\right)(x_1, \dots, x_n).$$

Слушатель, интересующийся длинными и скучными доказательствами, может обратиться к книге С. Клини «Математическая логика» (М. : Мир, 1973).

Определение 1.11. *Формулы алгебры высказываний, при образовании которых не использовались операции, отличные от* $\vee$, $\wedge$ *и* $\neg$, *называют булевыми формулами алгебры высказываний.*

Теорема 1.6. *Для любой формулы алгебры высказываний существует равносильная ей булева формула алгебры высказываний.*

► Прежде чем начать доказательство теоремы, дадим определение ранга формулы алгебры высказываний.

Определение 1.12. *Рангом формулы называется число логических операций, встречающихся в формуле, причем каждая операция считается столько раз, сколько встречается.*

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 1.18.** $a \cdot \overline{b} \cdot (a \to b) \vee \overline{c}$ — формула ранга 6.

Доказательство теоремы проведем индукцией по рангу формулы.

0^0 **(случай формул нулевого ранга)**. $\mathrm{rang}\,(f) = 0$. Все формулы ранга 0 перечислены в п. 1 определения формулы (определение 1.8) — все это булевы формулы (так как в них нет небулевых операций).

1^0 **(случай формул ранга 1)**. Все формулы ранга 1 имеют следующие конструкции:
1) $\neg\triangle$; 2) $\triangle \vee \square$; 3) $\triangle \wedge \square$; 4) $\triangle \to \square$; 5) $\triangle \sim \square$,
где $\triangle$ и $\square$ — формулы нулевого ранга, а значит (см. 0^0), булевы формулы. Тогда 1–3 также булевы формулы. Очевидно, в случаях 4 и 5 имеет место:

$$\triangle \to \square \equiv \overline{\triangle} \vee \square, \quad \triangle \sim \square \equiv \triangle \cdot \square \vee \overline{\triangle} \cdot \overline{\square},$$

при этом справа стоят булевы формулы.

2^0 **(индуктивный переход)**. Допустим, утверждение теоремы справедливо для любой формулы ранга, меньшего или равного n_0. Докажем, что тогда утверждение теоремы справедливо и для любой формулы, имеющей ранг $n_0 + 1$.

Пусть $\mathrm{rang}\,(f) = n_0 + 1$. Выделим в f последнюю операцию, тогда f имеет одну из следующих конструкций: 1) $\neg\triangle$; 2) $\triangle \vee \square$; 3) $\triangle \wedge \square$; 4) $\triangle \to \square$; 5) $\triangle \sim \square$, где $\triangle$ и $\square$ — формулы ранга, меньшего или равного n_0. Для $\triangle$ и $\square$ справедливо предположение индукции, т. е. $\triangle \equiv \triangle_б$, $\square \equiv \square_б$, где $\triangle_б$ и $\square_б$ — булевы формулы алгебры высказываний, тогда

$$\neg\triangle \equiv \neg\triangle_б; \quad \triangle \vee \square \equiv \triangle_б \vee \square_б; \quad \triangle \wedge \square \equiv \triangle_б \wedge \square_б.$$
$$\triangle \to \square \equiv \overline{\triangle}_б \vee \square_б; \quad \triangle \sim \square \equiv \triangle_б \cdot \square_б \vee \overline{\triangle}_б \cdot \overline{\square}_б,$$

так как справа стоят булевы формулы, то индуктивный переход доказан, а вместе с этим и вся теорема. ◀

Вопрос в конце параграфа

? При доказательстве последней теоремы мы неявно пользовались теоремой о равносильной подстановке. Самостоятельно разберитесь, в каких местах доказательства используется эта теорема.

§ 1.3. Двойственность в алгебре высказываний. Принцип двойственности. Закон двойственности

Определение 1.13. *Пусть* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *— формула алгебры высказываний. Двойственной к ней будем называть формулу* $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, определенную следующим:*

$$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)}.$$

Из закона двойного отрицания следует, что $(f^*)^* \equiv f$.

П **Пример 1.19.** $(0)^* \equiv \overline{0} \equiv 1$; $(1)^* \equiv \overline{1} \equiv 0$; $(x)^* \equiv \overline{\overline{x}} \equiv x$; $(x \vee y)^* \equiv \overline{(\overline{x} \vee \overline{y})} \equiv x \cdot y$; $\quad (x \wedge y)^* \equiv \overline{(\overline{x} \wedge \overline{y})} \equiv x \vee y$.

Теорема 1.7 (закон двойственности)
Формулы $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *равносильны тогда и только тогда, когда равносильны* $f_1^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $f_2^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, т. е.*

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \Leftrightarrow$$
$$f_1^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f_2^*(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Для доказательства закона двойственности установим связь между таблицами истинности формулы и двойственной к ней.

Утверждение. *Столбец значений $\widehat{f}^*$ может быть получен из столбца $\widehat{f}$ с помощью инвертирования, т. е. симметрией относительно середины и отрицания.*

x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\widehat{f}$	$\widehat{f}^*$
0	0	$\dots$	0	α	$\overline{\delta}$
0	0	$\dots$	1	β	$\overline{\gamma}$
.	.	$\dots$	.	.	.
1	1	$\dots$	0	γ	$\overline{\beta}$
1	1	$\dots$	1	δ	$\overline{\alpha}$

► Пусть $f_1 \equiv f_2$, тогда столбцы $\widehat{f_1}$ и $\widehat{f_2}$ совпадают, тогда инвертированные столбцы, т. е. столбцы для $\widehat{f_1^*}$ и$\widehat{f_2^*}$, совпадают. Это означает, что мы доказали, что $f_1 \equiv f_2 \Rightarrow f_1^* \equiv f_2^*$, но тогда $f_1^* \equiv f_2^* \Rightarrow (f_1^*)^* \equiv (f_2^*)^* \Leftrightarrow f_1 \equiv f_2$. ◄

Теорема 1.8 (общий принцип двойственности)
Пусть

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \left(F\big|_{y_i \leftarrow f_i}\right)(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

тогда

$$\Phi^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \left(F^*\big|_{y_i \leftarrow f_i^*}\right)(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

► $$\Phi^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \left(\left(F\big|_{y_i \leftarrow f_i}\right)(x_1, x_2, \dots, x_n)\right)^* \equiv$$

$$\equiv (F\left(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)\right))^* \equiv$$

$$\equiv \overline{F\left(f_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n), \dots, f_m(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)\right)} \equiv$$

$$\equiv \overline{F\left(\overline{\overline{f_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)}}, \dots, \overline{\overline{f_m(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)}}\right)} \equiv$$

$$\equiv \overline{F\left(\overline{f_1^*(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \dots, \overline{f_m^*(x_1, x_2, \dots, x_n)}\right)} \equiv$$

$$\equiv \left(F^*\big|_{y_i \leftarrow f_i^*}\right)(x_1, x_2, \dots, x_n).$$ ◄

Принцип двойственности для булевых формул

Теорема 1.9. *Двойственная к булевой формуле может быть получена заменой констант* 0 *на* 1, 1 *на* 0, $\vee$ *на* $\wedge$, $\wedge$ *на* $\vee$ *и сохранением структуры формулы (т. е. соответствующего порядка действий).*

П **Пример 1.20.** $(x \cdot \overline{y} \vee z)^* \equiv (x \vee \overline{y}) \cdot z$.
Скобка в правой части примера 1.20 поставлена для сохранения структуры формулы.

► Доказательство теоремы проведем индукцией по рангу формулы.

0-й шаг (случай формул ранга 0). Все формулы нулевого ранга описаны в п. 1 определения формулы (см. определение 1.8). Это формулы 0, 1, x. Мы знаем из примеров, что $0^* \equiv 1$, $1^* \equiv 0$, $x^* \equiv x$, т. е. утверждение теоремы выполнено.

1-й шаг (случай формул ранга 1). Все булевы формулы имеют вид:
$\neg\triangle$, $\triangle \vee \square$, $\triangle \wedge \square$, где $\triangle$, $\square$ — булевы формулы ранга 0.
Применим общий принцип двойственности:

$$(\neg\triangle)^* \equiv \left(\neg y_1\big|_{y_1 \leftarrow \triangle}\right)^* \equiv \neg y_1\big|_{y_1 \leftarrow \triangle^*} \equiv \neg\triangle^*;$$

$$(\triangle \vee \square)^* \equiv \left(y_1 \vee y_2\Big|_{\substack{y_1 \leftarrow \triangle \\ y_2 \leftarrow \square}}\right)^* \equiv y_1 \wedge y_2\Big|_{\substack{y_1 \leftarrow \triangle^* \\ y_2 \leftarrow \square^*}} \equiv \triangle^* \wedge \square^*;$$

$$(\triangle \wedge \square)^* \equiv \left(y_1 \wedge y_2\Big|_{\substack{y_1 \leftarrow \triangle \\ y_2 \leftarrow \square}}\right)^* \equiv y_1 \vee y_2\Big|_{\substack{y_1 \leftarrow \triangle^* \\ y_2 \leftarrow \square^*}} \equiv \triangle^* \vee \square^*.$$

Очевидно, во всех случаях в правой части получилось то, что нужно.

Индуктивный переход. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для любой формулы ранга, меньшего либо равного n_0. Докажем, что тогда оно справедливо и для формулы ранга $n_0 + 1$.

Пусть $\operatorname{rang}(f) = n_0 + 1$. Выделим в f последнюю операцию, тогда f имеет один из следующих видов: $\neg\triangle$, $\triangle \vee \square$, $\triangle \wedge \square$, где $\triangle$, $\square$ — булевы формулы ранга, меньшего или равного n_0. Тогда по предположению индукции $\triangle^*$ и $\square^*$ получаются из $\triangle$ и $\square$ по предписанным доказываемой теоремой правилам.

Тогда, повторяя рассуждения первого шага, имеем:

$(\neg\triangle)^* \equiv \triangle^*; \quad (\triangle\vee\square)^* \equiv \triangle^*\wedge\square^*; \quad (\triangle\wedge\square)^* \equiv \triangle^*\vee\square^*.$

Индуктивный переход доказан, а вместе с ним и вся теорема. ◀

Замечание в конце параграфа

! Закон двойственности облегчает нашу жизнь вдвое, т. е. если мы, например, с помощью таблиц истинности или равносильными преобразованиями доказали, что $f_1 \equiv f_2$, то автоматически мы доказали, что $f_1^* \equiv f_2^*$.

В теореме 1.2 о девятнадцати основных равносильностях для булевых операций мы располагали их, начиная с первой, двойственными парами. Поэтому достаточно с помощью таблиц истинности доказать равносильности $0, 1, 3, 5, \ldots, 17$, а $2, 4, 6, \ldots, 18$ будут выполнены по закону двойственности.

§ 1.4. Нормальные формы. СДНФ. СКНФ. Понятие о показателе степени. Показательные уравнения

Определение 1.14
Пусть $\sigma \in \{0, 1\}$, x *— высказывательная переменная. Определим*

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \textit{если } \sigma = 1; \\ \overline{x}, & \textit{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Удобство введенного показателя степени состоит в том, что однотипно обозначаются x и $\overline{x}$.

Рассмотрим уравнение

$$x^\sigma \equiv 1, \tag{1.2}$$

где x — неизвестное; σ — параметр. Очевидно, уравнение (1.2) имеет единственное решение $x \equiv \sigma$ $(\widehat{x} = \sigma)$.

Рассмотрим уравнение

$$x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} \equiv 1. \tag{1.3}$$

где x_i — неизвестные, σ_i — параметры. Очевидно, уравнение (1.3) имеет единственное решение

$$x_1 \equiv \sigma_1, \quad x_2 \equiv \sigma_2, \quad \ldots, \quad x_n \equiv \sigma_n.$$

Рассмотрим уравнение

$$\bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} \equiv 1, \tag{1.4}$$

Очевидно, множеством решений уравнения (1.4) является множество Σ.

Лемма 1.1 (о разложении по переменной)
Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — формула алгебры высказываний, $1 \leqslant i \leqslant n$, тогда

$$\begin{gathered} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv x_i f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \vee \\ \vee \overline{x}_i f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \equiv \\ \equiv \bigvee_{\sigma_i \in \{0,1\}} x_i^{\sigma_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \sigma_i, x_{i+1}, \ldots, x_n). \end{gathered} \tag{1.5}$$

► Множество всевозможных наборов значений истинности высказывательных переменных разобьем на два множества — I, II, отнеся к I все такие наборы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, в которых $\alpha_i = 1$, ко II — все такие наборы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, в которых $\alpha_i = 0$.

Пусть $\alpha \in$ I. Подставляя его в правую часть (1.5), получим

$$\begin{gathered} 1 \cdot f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \vee \\ \vee \overline{1} \cdot f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \equiv \\ \equiv 1 \cdot f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \vee 0 \equiv \\ \equiv f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \end{gathered}$$

Пусть $\alpha \in$ II. Подставляя его в правую часть (1.5), получим

$$\begin{gathered} 0 \cdot f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \vee \\ \vee \overline{0} \cdot f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \equiv \\ 0 \vee f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \equiv f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \end{gathered}$$ ◄

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — формула алгебры высказываний. Применяя лемму о дизъюнктивном разложении по переменной x_1, получим

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \bigvee_{\sigma_1 \in \{0;1\}} x_1^{\sigma_1} \cdot \underline{f(\sigma_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{1.6}$$

Применяя к подчеркнутым множителям в (1.6) лемму о разложении по переменной x_2, получим

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$$
$$\equiv \bigvee_{\sigma_1 \in \{0;1\}} x_1^{\sigma_1} \cdot \left(\bigvee_{\sigma_2 \in \{0;1\}} x_2^{\sigma_2} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, x_3, \ldots, x_n) \right). \quad (1.7)$$

Применим в правой части (1.7) дистрибутивный закон для конъюнкции относительно дизъюнкции (п. 6 теоремы 1.2), тогда

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$$
$$\equiv \bigvee_{\sigma_1 \in \{0;1\}} \bigvee_{\sigma_2 \in \{0;1\}} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Продолжая последовательное разложение по переменным, получим

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$$
$$\equiv \bigvee_{\sigma_1 \in \{0;1\}} \bigvee_{\sigma_2 \in \{0;1\}} \cdots \bigvee_{\sigma_n \in \{0;1\}} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots$$
$$\cdots x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \equiv \quad (1.8)$$
$$\overset{\mathrm{d}ef}{\equiv} \bigvee_{\sigma_i \in \{0;1\}} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

Полученное в правой части (1.8) представление формулы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ее *полным дизъюнктивным разложением.*

Множители $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ не содержат переменных, т. е. являются высказываниями. Опуская в (1.8) все слагаемые, в которых $\widehat{f}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$, получим

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \bigvee_{\sigma_i \in \{0;1\} \mid \ \widehat{f}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}. \quad (1.9)$$

То есть мы доказали следующую теорему:

Теорема 1.10. *Для любой формулы алгебры высказываний, отличной от тождественно ложной, существует ее представление в виде* (1.9)*, которое называется ее совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ).*

Докажем единственность СДНФ, т. е. если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \Sigma} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}, \quad (1.10)$$

то правая часть (1.10) совпадает с правой частью (1.9) с точностью до порядка слагаемых.

Рассмотрим уравнение

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 1. \quad (1.11)$$

В силу (1.10) оно равносильно уравнению

$$\bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \Sigma} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n} \equiv 1, \quad (1.12)$$

а в начале этого параграфа мы доказали, что множеством решений такого уравнения является множество Σ.

Таким образом, Σ — это множество всех тех наборов значений переменных, на которых $\widehat{f}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$, это же множество фигурирует в правой части (1.9). Единственность доказана. Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема 1.11. *Для любой отличной от тождественно ложной формулы алгебры высказываний существует и единственное ее представление в виде СДНФ — дизъюнкции полных совершенных элементарных конъюнкций (слагаемых вида $x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}$).*

Теорема 1.12. *Для любой отличной от тождественно истинной формулы алгебры высказываний существует и единственное ее представление в виде совершенной* *конъюнктивной нормальной формы (СКНФ) — конъюнкции полных совершенных элементарных дизъюнкций (т. е. сомножителей вида $(x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n})$).*

► $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n))^* \equiv (\text{СДНФ}(f^*))^* \equiv$

$$\equiv \left(\bigvee_{\tau_i \in \{0;1\} |\ \widehat{f}^*(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = 1} x_1^{\tau_1} \cdot x_2^{\tau_2} \cdots x_n^{\tau_n} \right)^* \equiv$$

$$\equiv \bigwedge_{\tau_i \in \{0;1\} |\ \widehat{f}^*(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = 1} (x_1^{\tau_1} \vee x_2^{\tau_2} \vee \ldots \vee x_n^{\tau_n}) \equiv$$

$$\equiv \bigwedge_{\sigma_i \in \{0;1\} |\ \widehat{f}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0} \left(x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n} \right).$$

Существование СКНФ доказано.

Докажем единственность СКНФ. Будем доказывать от противного, т. е. предположим, что существует такая формула $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, у которой по крайней мере две СКНФ ($\text{СКНФ}(\varphi)_1$ и $\text{СКНФ}(\varphi)_2$), тогда

$$\varphi^* \equiv \begin{cases} (\text{СКНФ}(\varphi)_1)^* \equiv \text{СДНФ}(\varphi^*)_1; \\ (\text{СКНФ}(\varphi)_2)^* \equiv \text{СДНФ}(\varphi^*)_2, \end{cases}$$

что противоречит единственности СДНФ для φ^*. ◄

Таким образом, мы показали, что для формул алгебры высказываний существуют равносильные им, однозначно определенные ими канонические представления — СДНФ и СКНФ.

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 1.21.** Рассмотрим формулу $x_1 \to x_2 \equiv (\overline{x}_1 \vee x_2)$. Мы получили СКНФ для импликации. Продолжим преобразования, опустим внешние скобки.

$$x_1 \to x_2 \equiv \overline{x}_1 \vee x_2 \equiv \overline{x}_1 \cdot 1 \vee 1 \cdot x_2 \equiv$$
$$\equiv \overline{x}_1 \cdot (x_2 \vee \overline{x}_2) \vee (x_1 \vee \overline{x}_1) \cdot x_2 \equiv$$
$$\equiv \overline{x}_1 \cdot x_2 \vee \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \vee x_1 \cdot x_2 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2 \equiv$$
$$\equiv \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 \text{ — СДНФ импликации.}$$

На этом примере покажем связь между таблицей истинности формулы и ее совершенными нормальными формами:

x_1	x_2	$\widehat{x_1 \to x_2}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} x_1 \to x_2 &\equiv x_1^0 x_2^0 \vee x_1^0 x_2^1 \vee x_1^1 x_2^1 \equiv \\ &\equiv \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 \text{ — СДНФ.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \to x_2 &\equiv (x_1^{\overline{1}} \vee x_2^{\overline{0}}) \equiv (x_1^0 \vee x_2^1) \equiv \\ &\equiv (\overline{x}_1 \vee x_2) \text{ — СКНФ.} \end{aligned}$$

Дадим серию определений.

Определение 1.15

Пусть $V_n = \{x_1; \overline{x}_1; x_2; \overline{x}_2; \ldots; x_n; \overline{x}_n\}$ *и пусть* $v(\neq \varnothing) \subset V_n$.

Элементарной конъюнкцией (ЭК), порожденной подмножеством v*, называется конъюнкция всех элементов* v.

Определение 1.16. *Элементарная конъюнкция называется совершенной (СЭК), если в нее не входит никакая из переменных одновременно с отрицанием этой переменной.*

Определение 1.17. *Элементарная конъюнкция называется полной (ПСЭК), если в ней представлены все переменные.*

Аналогично с ЭК, СЭК и ПСЭК определяются ЭД (элементарная дизъюнкция), СЭД, ПСЭД.

Определение 1.18. *Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций.*

Определение 1.19. *Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.*

Ясно, что СДНФ является ДНФ, СКНФ является КНФ. Сформулируем и докажем основную теорему для нормальных форм.

Теорема 1.13. *Для любой формулы алгебры высказываний существуют равносильные ей ДНФ и КНФ.*

► Приведем конструктивное доказательство, опишем алгоритм перехода к ДНФ (КНФ).

• Рассмотрим отдельно случай формул ранга 0:

$$1 \equiv \underbrace{x \vee \overline{x}}_{\text{ДНФ}} \equiv \underbrace{(x \vee \overline{x})}_{\text{КНФ}}, \quad 0 \equiv \underbrace{x \cdot \overline{x}}_{\text{ДНФ}} \equiv \underbrace{(x) \cdot (\overline{x})}_{\text{КНФ}}.$$

Формула x является одновременно и ДНФ, и КНФ.

• Случай формулы $r \geqslant 1$. Опишем шаги алгоритма, приводящие к цели.

1. Пользуясь формулами $x \to y \equiv \overline{x} \vee y$ и $x \sim y \equiv$ $\equiv x \cdot y \vee \overline{x} \cdot \overline{y}$, перейти к равносильной булевой формуле.

2. Пользуясь законами де Моргана, перейти к формуле с тесными отрицаниями, т. е. содержащей отрицание не выше, чем над переменными (пропустить отрицание внутрь формулы).

3. Пользуясь дистрибутивными законами, сделать дизъюнкцию внешней операцией (или конъюнкцию для КНФ). ◄

П **Пример 1.22. Пример.** $(x \sim y) \to \overline{(z \sim xy)} \equiv \overline{(xy \vee \overline{x} \cdot \overline{y})} \vee \overline{(xyz \vee \overline{xy} \cdot \overline{z})} \equiv$

$$\equiv \overline{xy} \cdot (\overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}) \vee \overline{(xyz)} \cdot \overline{(\overline{xy} \cdot \overline{z})} \equiv$$

$$\equiv (\overline{x} \vee \overline{y})(x \vee y) \vee (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})(xy \vee z) \equiv$$

$$\overset{1}{\equiv} x \cdot \overline{x} \vee x\overline{y} \vee \overline{x}y \vee y\overline{y} \vee \overline{x} \cdot xy \vee xy \cdot \overline{y} \vee$$

$$\vee\, xy \cdot \overline{z} \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z \vee z\overline{z} \equiv$$

$$\overset{2}{\equiv} x\overline{y} \vee \overline{x}y \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z \equiv (x\overline{y} \vee xy\overline{z}) \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z \equiv$$

$$\equiv x(\overline{y} \vee y\overline{z}) \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z \equiv x(\overline{y} \vee y\overline{z}) \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z \equiv$$

$$\equiv x(\overline{y} \vee \overline{z}) \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z \equiv$$

$$\overset{3}{\equiv} x\overline{y} \vee x\overline{z} \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z \equiv (x(\overline{y} \vee \overline{z}) \vee \overline{x}(y \vee z)) \vee \overline{y}z \equiv$$

$$\equiv (x(\overline{y} \vee \overline{z}) \vee \overline{x}) \cdot ((x(\overline{y} \vee \overline{z}) \vee (y \vee z)) \vee \overline{y}z \equiv$$

$$\equiv (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})\,((x \vee y \vee z)(y \vee z \vee \overline{y} \vee \overline{z})) \vee \overline{y}z \equiv$$

$$\equiv ((\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})(x \vee y \vee z) \vee \overline{y})\,((\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})(x \vee y \vee z) \vee z) \equiv$$

$$\overset{4}{\equiv} (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{y})(x \vee y \vee z \vee \overline{y})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee z)(x \vee y \vee z \vee z) \equiv$$

$$\overset{5}{\equiv} (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})(x \vee y \vee z).$$

Выражения после $\overset{1}{\equiv}$, $\overset{2}{\equiv}$; $\overset{3}{\equiv}$ являются ДНФ, после $\overset{4}{\equiv}$, $\overset{5}{\equiv}$ являются КНФ; выражение после $\overset{5}{\equiv}$ — СКНФ.

Замечания в конце параграфа

! **1.** Как видно из примера, ДНФ и КНФ, в отличие от СДНФ и СКНФ, не обладают свойством единственности (однако это не всегда является недостатком).

2. Пункт 3 алгоритма для построения ДНФ психологически выполнять легче (раскрыть скобки), чем п. 3 для КНФ. Поэтому можно предложить обходной маневр: после выполнения п. 1, 2 перейти к двойственной формуле, выполнить для нее п. 3 построения ДНФ и выписать для полученной ДНФ двойственную (это и будет КНФ исходной формулы, так как $(f^*)^* = f$).

§ 1.5. Основные проблемы алгебры высказываний. Критерии тождественной истинности и тождественной ложности

Формулы алгебры высказываний обычно делят на три типа: *тождественно истинные* (тавтологии), *тождественно ложные* (противоречия) и *нетривиально выполнимые* (остальные). Наибольший интерес для математики представляют тождественно истинные формулы — именно они представляют собой скелеты (схемы) логически безупречных рассуждений.

Классический пример такой схемы рассуждений дает следующая тождественно истинная формула:

$$x(x \to y) \to y \quad (modus\ ponens).$$

Эта формула — схема рассуждения вида: «Известно, что из x следует y и x — выполнено, значит, выполнено y».

В алгебре высказываний выделяют три основные проблемы: разрешения, равносильности, представимости. Сформулируем их.

Проблема разрешения

Существует ли алгоритм, позволяющий с помощью равносильных преобразований для произвольной формулы алгебры высказываний выяснить, является она тождественно истинной, тождественно ложной или нетривиально выполнимой?

Проблема равносильности

Существует ли алгоритм, позволяющий с помощью равносильных преобразований для произвольных формул выяснить, являются ли они равносильными?

Проблема представления

Можно ли двузначную 0–1 функцию n двузначных переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ реализовать формулой алгебры высказываний $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ так, чтобы

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \widehat{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)?$$

Ответ положителен. Причем для двух последних проблем его можно получить, применяя теорию СДНФ–СКНФ. Что касается первой проблемы, то для нее проще обойтись ДНФ и КНФ.

Критерий тождественной истинности формулы

Теорема 1.14. *Для того чтобы формула алгебры высказываний была тождественно истинной, необходимо и достаточно, чтобы в равносильной ей КНФ были тождественно истинны все элементарные дизъюнкции.*

► Справедливость критерия очевидна. ◄

Критерий тождественной истинности элементарной дизъюнкции

Теорема 1.15. *Для того чтобы элементарная дизъюнкция была тождественно истинна, необходимо и достаточно, чтобы в ней существовала хотя бы для одной переменной пара — переменная и ее отрицание.*

► **Достаточность** очевидна, так как
$$\dots \vee x \vee \overline{x} \vee \dots \equiv 1.$$

Необходимость

Докажем от противного. То есть предположим, что существует тождественно истинная элементарная дизъюнкция, для которой не выполнены условия теоремы. Высказывательные переменные с помощью этой ЭД разобьем на три типа: «+», «−», «∅».

К типу «+» отнесем переменные, которые вошли в ЭД сами (без отрицания); к типу «−» отнесем переменные, которые входят в ЭД своими отрицаниями; к типу «∅» — те переменные, которые вовсе не представлены в ЭД.

Сформируем $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — набор значений переменных, полагая
$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i \in «+»; \\ 1, & \text{если } x_i \in «-» \cup «\varnothing», \end{cases}$$
и подставим этот набор в нашу ЭД. Получим
$$0 \vee 0 \vee \dots \vee 0 \equiv 0,$$
что противоречит тождественной истинности ЭД. ◄

Критерий тождественной ложности формулы

Теорема 1.16. *Для того чтобы формула алгебры высказываний была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы в равносильной ей ДНФ все ЭК были тождественно ложны.*

Критерий тождественной ложности ЭК

Теорема 1.17. *Для того чтобы ЭК была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы в ней существовала хотя бы для одной переменной пара — переменная и ее отрицание.*

Ясно, что две последние теоремы — двойственные результаты для предыдущих.

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 1.23.** Дана формула $x\overline{y}\cdot(x \to z) \sim \overline{z}$. Классифицировать эту формулу.

► Построим ДНФ:

$$x\overline{y} \cdot (x \to z) \sim \overline{z} \equiv x\overline{y} \cdot (x \to z) \cdot \overline{z} \vee \overline{x\overline{y} \cdot (x \to z)} \cdot z \equiv$$
$$\equiv x\overline{y}(\overline{x} \vee z) \cdot \overline{z} \vee \left(\overline{x} \vee y \vee \overline{(\overline{x} \vee z)}\right) \cdot z \equiv$$
$$\equiv x\overline{y} \cdot \overline{x} \cdot \overline{z} \vee x\overline{y} \cdot z \cdot \overline{z} \vee \overline{x}z \vee yz \vee x\overline{z} \cdot z \equiv$$
$$\equiv \overline{x} \cdot z \vee y \cdot z.$$

По критерию тождественной ложности получаем, что формула не является тождественно ложной.

Построим КНФ: $x\overline{y}\cdot(x \to z) \sim \overline{z} \equiv \overline{x}\cdot z \vee y \cdot z \equiv (\overline{x} \vee y)\cdot z$.

По критерию тождественной истинности получаем, что формула не является тождественно истинной.

Вывод: формула нетривиально выполнима. ◄

Замечания и вопросы в конце параграфа

$\boxed{?}$ $\boxed{!}$

1. Ясно, что для проблемы разрешения можно обойтись только совершенными нормальными формами.
2. Попробуйте в терминах СДНФ (СКНФ) для формулы от n переменных дать решение проблемы разрешения.

§ 1.6. Релейно-контактные схемы и схемы из функциональных элементов

Рассмотрим электромагнитные реле, состоящие из катушки индуктивности, контактной группы и вспомогательных элементов (пружина, корпус и т. п.). Реле бывают двух типов: *нормально разомкнутые* (рис. 1.1) и *нормально замкнутые* (рис. 1.2).

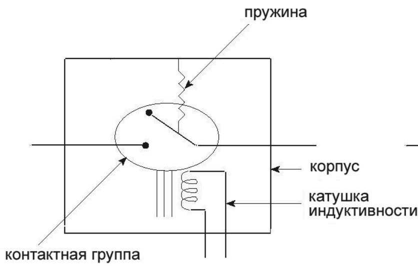


Рис. 1.1

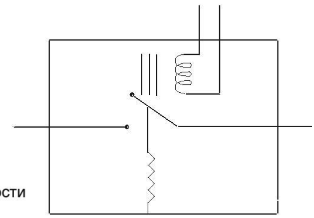


Рис. 1.2

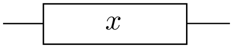
Условимся, что если по катушке индуктивности течет ток, то значение управляющего сигнала равно 1, если нет тока, то значение управляющего сигнала равно 0. Если контактная группа находится в замкнутом положении, то значение функции проводимости реле равно 1; если в разомкнутом — 0. Работа реле описывается таблицами

Управ. сигнал	Функция проводимости нормально разомкнутое реле
0	0
1	1

Управ. сигнал	Функция проводимости нормально замкнутое реле
0	1
1	0

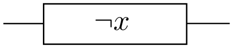
Т. е. нормально разомкнутое реле имеет тождественную функцию проводимости, а нормально замкнутое —

отрицание управляющего сигнала. Если управляющий сигнал обозначить x, то нормально разомкнутое реле будем обозначать



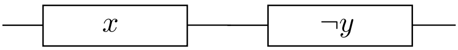
,

нормально замкнутое



.

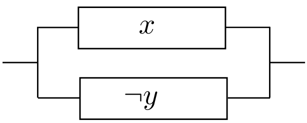
Рассмотрим схему



.

Очевидно, ее функция проводимости — $x \cdot \overline{y}$, т. е. последовательное соединение реле реализует конъюнкцию.

Рассмотрим схему



.

Очевидно, ее функция проводимости — $x \vee \overline{y}$, т. е. параллельное соединение реле реализует дизъюнкцию.

Определение 1.20. *Функцией проводимости схемы называется способность проводить или не проводить ток через схему соединения контактных групп реле в зависимости от комбинации управляющих сигналов, поданных на обмотки всех реле, образующих схему.*

Сформулируем основные задачи теории релейно-контактных схем.

1. ***Задача синтеза.*** Построить схему, реализующую заданную функцию проводимости.

Эта задача разрешима — достаточно построить формулу алгебры высказываний типа СДНФ или СКНФ (очевидно, что формулы такого типа реализуемы схемами).

2. ***Задача упрощения.*** По данной схеме построить более простую схему, имеющую такую же функцию проводимости (т. е. равносильную схему).

Сразу заметим, что единого критерия простоты схемы нет, а пример упрощения будет приведен ниже (построение машины голосования).

3. ***Задача анализа схемы.*** Не включая схему в работу, проанализировав соединения контактных групп, найти функцию проводимости схемы. (Задачи такого типа — одна из составляющих промышленного шпионажа.)

В качестве примера решения задач 1 и 2 рассмотрим построение машины голосования.

П **Пример 1.24.** Комитет состоит из трех человек (x, y, z) и принимает решения простым большинством голосов. Построить схему машины голосования для этого комитета так, чтобы в случае принятия решения загоралась лампочка.

Очевидно, если договориться о том, что в случае голосования **«за»** управляющий сигнал равен 1, а **«против»** — 0, то функция проводимости имеет следующий вид:

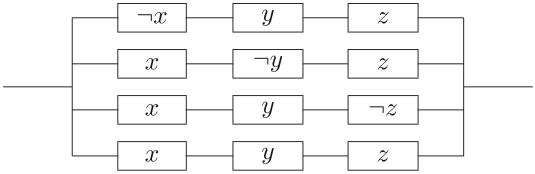
x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
Функция проводимости	0	0	0	1	0	1	1	1

Выпишем по таблице СДНФ —

$$\overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz.$$

Задача синтеза уже решена.

Нарисуем схему для полученной формулы:

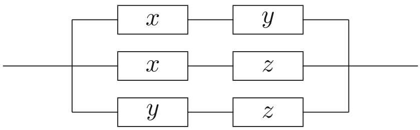


.

Перейдем к задаче упрощения:

$$\overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz \equiv$$
$$\equiv \overline{x}yz \vee xyz \vee x\overline{y}z \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee xyz \equiv$$
$$\equiv (\overline{x} \vee x)yz \vee x(\overline{y} \vee y)z \vee xy(\overline{z} \vee z) \equiv xy \vee xz \vee yz.$$

Нарисуем схему для полученной формулы:



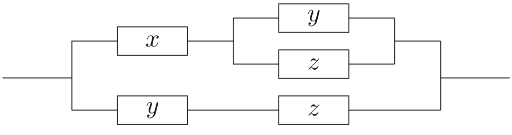
.

Мы сэкономили 6 реле (!). Можно продолжить упрощения:

$$xy \vee xz \vee yz \equiv x(y \vee z) \vee yz.$$

Сэкономлено еще одно реле, но схема стала менее технологичной (потеряна симметричность).

Нарисуем схему для полученной формулы:



.

Двоичный сумматор

Перейдем к построению схемы основного элемента арифметического процессора любой ЭВМ — n-разрядного двоичного сумматора.

n-разрядный сумматор будем строить из n штук одноразрядных двоичных сумматоров.

Управляющими сигналами одноразрядного сумматора i-го разряда являются x_i, y_i — значения i-го разряда слагаемых и p_i — перенос в i-й разряд из предыдущего ($p_1 = 0$). В результате работы сумматора должны быть сформированы: z_i — значимые суммы в i-м разряде и p_{i+1} — значение переноса в $i+1$ разряд.

Ясно, что работа сумматора описывается таблицей

x_i	y_i	p_i	z_i	p_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

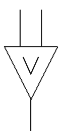
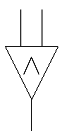
,

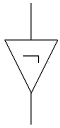
z_i — функция проводимости для суммы;

p_{i+1} — функция проводимости для переноса.

Очевидно, $p_{i+1}=x_iy_i\vee x_ip_i\vee y_ip_i$ (см. построение машины голосования — пример 1.24). $z_i=\overline{p}_{i+1}(x_i\vee y_i\vee p_i)\vee x_iy_ip_i$.

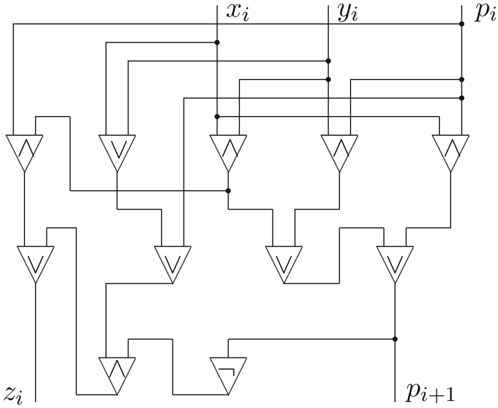
Построим схему одноразрядного сумматора как схему из функциональных элементов, используя следующие элементы:

 — дизъюнкция;  — конъюнкция;

 — отрицание

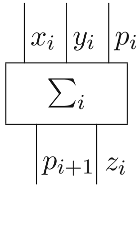
(вверху — входы (упр. сигналы), внизу — выход).

Тогда схема сумматора имеет вид



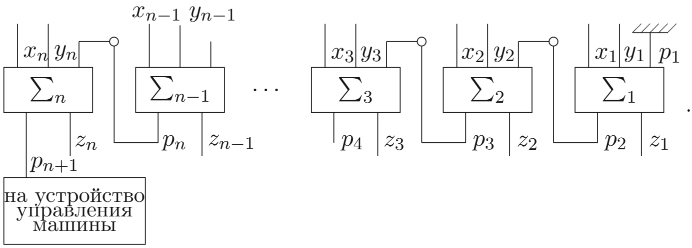
.

Полученную схему одноразрядного сумматора можно считать функциональным элементом с тремя входами и двумя выходами.



.

Построим теперь схему n-разрядного сумматора:



Обозначения: ○ — элементы задержки, запирающие сумматор до того, как прошло суммирование в предыдущем разряде; p_{n+1} подается на устройство управления для выработки сигнала о переполнении сумматора в случае, когда $p_{n+1} = 1$. Вход p_1 заземлен.

Замечания и вопросы в конце параграфа

? **!**

1. Ясно, что в современной вычислительной технике используются не электромеханические реле, однако смысл от этого не меняется.

2. Для чего в ЭВМ необходим датчик частоты?

3. Почему с увеличением разрядности уменьшается быстродействие компьютера?

4. Почему заземлен вход p_1 в n-разрядном сумматоре?

5. Почему в цифровой электронике предпочтение отдано двоичной системе счисления?

6. Какова функция элементов задержки в n-разрядном двоичном сумматоре?

7. Что такое «переполнение» сумматора и как компьютер «узнает» о его возникновении?

8. Сколько входов и выходов у одноразрядного и n-разрядного двоичных сумматоров?

Глава 2
Алгебры предикатов и множеств. Отображения

§ 2.1. Предикаты. Логические операции над предикатами. Кванторы

Предметом изучения в этой главе будут **предикаты** — отображения произвольных множеств во множество высказываний. Фактически мы совершаем переход на новый уровень абстракции, переход такого типа, какой был совершен в школе — от арифметики вещественных чисел к алгебре числовых функций.

Определение 2.1. *Пусть* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *— символы переменных произвольной природы. Эти переменные будем называть предметными. Пусть наборы значений переменных* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *принадлежат (выбираются из) множеству* Ω*, которое будем называть предметной областью. Предикатом местности* n *(*n*-местным предикатом), определенным на предметной области* Ω*, называют функцию (отображение), определенную на* Ω*, принимающую значения во множестве высказываний.*

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров, дадим квазиопределение n-местного предиката.

Определение. «Связное повествовательное предложение, содержащее n переменных и обладающее следующим свойством: при фиксации значений всех переменных о нем (предложении) можно сказать, истинно оно или ложно».

П **Пример 2.1.** $D(x_1, x_2) =$ «Натуральное число x_1 делится (без остатка) на натуральное число x_2» — двуместный предикат, определенный на множестве пар натуральных чисел $N \times N$. Очевидно, $\widehat{D}(4,2) = 1$, $\widehat{D}(3,5) = 0$.

Пример 2.2. $Q(x) =$ «$x^2 < -1, x \in R$» — одноместный предикат, определенный на R.
Ясно, что $\widehat{Q}(-1) = 0$, $\widehat{Q}(\sqrt{3}) = 0$ и вообще предикат $Q(x)$ — тождественно ложен, т. е. $\widehat{Q}(x) \equiv 0$.

Пример 2.3. $R(x,y,z) =$ «$x^2+y^2 \leqslant z;\ x,y,z \in R$» — трехместный предикат, определенный на R^3.

$$\widehat{R}(1,1,-2) = 0, \quad \widehat{R}(1,1,2) = 1.$$

Пример 2.4. $S(x,y) = \sin 2xy > -3;\ x,y \in R$ — тождественно истинный двуместный предикат.

Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — n-местный предикат, определенный на Ω. Свяжем с ним два множества (подмножества Ω), определенные следующим:

- $P^{-1}(\{1\}) =$«множество всех наборов значений переменных, на которых значение предиката P — истинное высказывание». Это множество называют множеством истинности предиката P.
- $P^{-1}(\{0\}) =$«множество всех наборов значений переменных, на которых значение предиката P — ложное высказывание». Это множество называют множеством ложности предиката P.

Определение 2.2. *Предикат P, определенный на Ω, называется тождественно истинным, если*

$$P^{-1}(\{1\}) = \Omega\,(P^{-1}(\{0\}) = \varnothing);$$

тождественно ложным, если

$$P^{-1}(\{0\}) = \Omega\,(P^{-1}(\{1\}) = \varnothing);$$

нетривиально выполнимым, если

$$P^{-1}(\{1\}) \neq \varnothing \quad \text{и} \quad P^{-1}(\{0\}) \neq \varnothing.$$

Изобразим в R^3 множества $R^{-1}(\{1\})$, $R^{-1}(\{0\})$ (см. рис. 2.1) для предиката $R(x, y, z)$ примера 2.3.

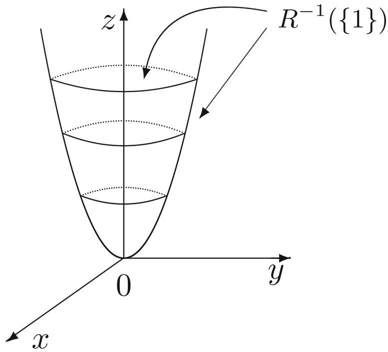


Рис. 2.1. Поверхность и внутренность изображенного параболоида вращения — $R^{-1}(\{1\})$, внешность — $R^{-1}(\{0\})$.

Логические операции над предикатами

Поскольку предикаты — это отображения со значениями во множестве высказываний, где введены логические операции, то эти операции, естественно, определяются и для предикатов.

Определение 2.3. *Пусть P — предикат, определенный на Ω. Отрицанием предиката P называется предикат, обозначаемый $\neg P$ $(\bar{P})$, определенный на Ω следующим образом:*

$$(\neg P)(x_1, \ldots, x_n) \overset{def}{\equiv} \overline{P(x_1, \ldots, x_n)};$$

$$\left((\widehat{\neg P})(x_1, \ldots, x_n) \overset{def}{=} \overline{P(\widehat{x_1, \ldots, x_n})} \right).$$

Пусть P и Q — предикаты, определенные на Ω.

Дизъюнкцией (конъюнкцией, импликацией, эквиваленцией) предикатов P и Q называется предикат, определенный на Ω, обозначаемый $P \vee Q$ ($P \wedge Q(P \cdot Q, P\&Q, PQ)$), $P \to Q$, $P \sim Q$) и определяемый следующим:

$$(P \vee Q)(x_1, \ldots, x_n) \overset{def}{\equiv} P(x_1, \ldots, x_n) \vee Q(x_1, \ldots, x_n).$$

$$\left((P \wedge Q)(x_1, \ldots, x_n) \overset{def}{\equiv} P(x_1, \ldots, x_n) \wedge Q(x_1, \ldots, x_n)\right).$$

$$\left((P \to Q)(x_1, \ldots, x_n) \overset{def}{\equiv} P(x_1, \ldots, x_n) \to Q(x_1, \ldots x_n)\right).$$

$$\left((P \sim Q)(x_1, \ldots, x_n) \overset{def}{\equiv} P(x_1, \ldots, x_n) \sim Q(x_1, \ldots x_n)\right).$$

Определение 2.4. *Предикаты P и Q, определенные на Ω, называются равносильными (пишут $P \equiv Q$), если*

$$P(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q(x_1, \ldots, x_n)$$

для любого набора $(x_1, \ldots, x_n)$ предметных переменных из Ω.

Теорема 2.1. *Множество n-местных предикатов, определенных на Ω, образует булеву алгебру предикатов, т. е. для них справедливы 19 основных равносильностей булевой алгебры:*

0. $\neg\neg P \equiv P.$
1. $P \vee Q \equiv Q \vee P.$
2. $P \wedge Q \equiv Q \wedge P.$
3. $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R \overset{def}{\equiv} P \vee Q \vee R.$
4. $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R \overset{def}{\equiv} P \wedge Q \wedge R.$
5. $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$
6. $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$
7. $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q.$
8. $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q.$
9. $P \vee P \equiv P.$

10. $P \wedge P \equiv P$.
11. $P \vee 1 \equiv 1$.
12. $P \wedge 0 \equiv 0$.
13. $P \vee 0 \equiv P$.
14. $P \wedge 1 \equiv P$.
15. $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$.
16. $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$.
17. $P \vee \neg P \equiv 1$.
18. $P \wedge \neg P \equiv 0$.

Здесь 1 — *обозначение тождественно истинного предиката на* Ω*;* 0 — *обозначение тождественно ложного предиката на* Ω*.*

► Справедливость этой теоремы очевидна, так как операции над предикатами вводились с помощью операций над высказываниями, а высказывания образуют булеву алгебру (теорема 1.2). ◄

§ 2.2. Кванторы, их свойства и применение

В этом параграфе мы познакомимся с двумя операциями, уменьшающими местность (т. е. количество переменных) предиката, — фиксацией значений переменной и навешиванием кванторов (квантификацией). Эти операции принципиально отличаются от изученных ранее логических операций, которые сохраняли местность предикатов.

Наиболее важными с точки зрения приложений в других областях математики являются операции навешивания кванторов. Утрируя, можно сказать, что математика говорит на языке предикатов и кванторов. Наиболее насыщен предикатами и кванторами математический анализ, особенно в своих базовых понятиях (предел последовательности, предел функции, непрерывность, равномерная непрерывность, сходимость ряда и т. п.). Плохое владение языком предикатов и кванторов вызывает у многих студентов панический страх при изучении математического анализа. Стоит затратить небольшие усилия для того, чтобы понять, что разноименные кванторы не коммутируют. Это снимет проблемы в понимании того, чем отличается определение непрерывности функции на множестве от определения равномерной непрерывности функции на множестве. Уделите особое внимание примерам, связанным с применением языка предикатов и кванторов для записи математических утверждений.

Операции, уменьшающие местность предикатов

1. Фиксация значений переменных

Пусть $P(x_1, \dots, x_n)$ — n-местный предикат, определенный на Ω. Зафиксируем $x_i = a$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Обозначим Ω_a^i — множество значений переменных $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, определяемое следующим:

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \Omega_a^i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \Omega.$$

Определим на Ω_a^i $(n-1)$-местный предикат $Q(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ следующим:

$$Q(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \equiv P(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Говорят, что предикат $Q(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ получен из предиката $P(x_1, \dots, x_n)$ фиксацией значения i-й переменной $x_i = a$.

П **Пример 2.5.** Зафиксировав в предикате $R(x, y, z)$ примера 2.3 значение третьей переменной $z = 3$, получим двуместный предикат

$$«x^2 + y^2 \leqslant 3; \quad x, y \in R».$$

2. Кванторы

Приведенные ниже конструкции очень распространены в математике (особенно в математическом анализе), и, вероятно, вам уже приходилось с ними встречаться. Обратите особое внимание на приведенные ниже определения, так как при интуитивном пользовании неаккуратно введенными объектами у вас могли уже выработаться «вредные привычки и дурной тон».

Определение 2.5. *Пусть $P(x)$ — одноместный предикат. Поставим ему в соответствие высказывание, обозначаемое $\forall x\ P(x)$ (читается «для любого x $P(x)$»), которое истинно тогда и только тогда, когда $P(x)$ — тождественно истинный предикат. О высказывании $\forall x P(x)$ говорят, что оно получено из предиката P навешиванием квантора всеобщности по переменной x.*

Определение 2.6. *Пусть $P(x)$ — одноместный предикат. Поставим ему в соответствие высказывание, обозначаемое $\exists x\ P(x)$ (читается «существует x $P(x)$»), которое ложно тогда и только тогда, когда $P(x)$ — тождественно ложный предикат. О высказывании $\exists x\, P(x)$ говорят, что оно получено из предиката P навешиванием квантора существования по переменной x.*

! **Замечание 2.1.** Обозначения $\forall$ и $\exists$ для кванторов — это перевернутые латинские буквы A и E соответственно, которые являются первыми буквами английских слов *all* — «все», *exist* — «существовать».

Замечание 2.2. Высказывания можно считать предикатами, не содержащими переменных, т. е. 0-местными предикатами (или предикатами любой местности).

Замечание 2.3. В силу замечания 2.2 кванторы можно рассматривать как отображения множества одноместных предикатов во множество высказываний (0-местных предикатов), т. е. отображения, уменьшающие местность на 1.

Замечание 2.4. Формулы алгебры высказываний от n высказывательных переменных можно рассматривать как n-местные предикаты от этих переменных.

Основные равносильности, содержащие кванторы. Кванторы как обобщение логических операций

Пусть $P(x_1, \ldots, x_n)$ — n-местный предикат, определенный на Ω. Зафиксируем в нем значения переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, на полученный одноместный предикат $Q(x_i)$ навесим квантор всеобщности (существования), получим высказывание. Тем самым фиксированному набору значений переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ с помощью квантора всеобщности (существования) поставлено в соответствие высказывание. Сопоставление любому набору значений переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ вполне определенного высказывания — это отображение из множества наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$

во множество высказываний, т. е. предикат от этих переменных. Говорят, что этот $(n-1)$-местный предикат переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ получен из исходного предиката $P(x_1, \ldots, x_n)$ навешиванием квантора всеобщности (существования) по i-й переменной. Этот $(n-1)$-местный предикат обозначают

$$\forall x_i \; P(x_1, \ldots, x_n)$$
$$(\exists x_i \; P(x_1, \ldots, x_n))\,.$$

Об i-й переменной (которой уже нет) говорят, что она связана квантором всеобщности (существования).

П **Пример 2.6.** Пусть $D(x_1, x_2)$ — предикат примера 2.1. Навесим последовательно на его переменные кванторы. Ясно, что

1) $\forall x_1 \; \forall x_2 \; D(x_1, x_2) \equiv 0.$

2) $\forall x_2 \; \forall x_1 \; D(x_1, x_2) \equiv 0.$

3) $\exists x_1 \; \exists x_2 \; D(x_1, x_2) \equiv 1.$

4) $\exists x_2 \; \exists x_1 \; D(x_1, x_2) \equiv 1.$

5) $\forall x_1 \; \exists x_2 \; D(x_1, x_2) \equiv 1.$

6) $\exists x_2 \; \forall x_1 \; D(x_1, x_2) \equiv 1.$

7) $\exists x_1 \; \forall x_2 \; D(x_1, x_2) \equiv 0.$

8) $\forall x_2 \; \exists x_1 \; D(x_1, x_2) \equiv 1.$

Таким образом (сравнением 7 и 8 в последнем примере) мы доказали теорему:

Теорема 2.2. *Разноименные кванторы, вообще говоря, не коммутируют.*

Основные равносильности, содержащие кванторы

Теорема 2.3

Имеют место следующие равносильности:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \overline{\forall x\ P(x)} \equiv \exists x\ \overline{P(x)} \\ 2.\ \overline{\exists x\ P(x)} \equiv \forall x\ \overline{P(x)} \end{array}\right\} \text{законы де Моргана для кванторов}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3.\ \forall x\ \forall y\ P(x,y) \equiv \forall y\ \forall x\ P(x,y) \\ 4.\ \exists x\ \exists y\ P(x,y) \equiv \exists y\ \exists x\ P(x,y) \end{array}\right\} \text{коммутация одноименных кванторов}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5.\ \forall x(P(x)\cdot Q(x)) \equiv \forall x P(x)\cdot \forall x Q(x) \\ 6.\ \exists x(P(x)\vee Q(x)) \equiv \exists x P(x)\vee \exists x Q(x) \end{array}\right\} \text{дистрибутивные законы для кванторов}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7.\ \forall x(P(x)\vee Q(y)) \equiv \forall x P(x)\vee Q(y) \\ 8.\ \exists x(P(x)\wedge Q(y)) \equiv \exists x P(x)\wedge Q(y) \end{array}\right\} \text{законы ограничения действия кванторов}$$

9. $\exists y\forall x P(x,y) \to \forall x\exists y P(x,y) \equiv 1$ — *каков бы ни был двуместный предикат $P(x,y)$*

▶ [1] ▶ Пусть P такой предикат, что левая часть в (1) ложна $\Leftrightarrow$ $\forall x P(x)$ — истина $\Leftrightarrow$ $P(x)$ — тождественно истинный предикат $\Leftrightarrow$ $\overline{P(x)}$ — тождественно ложный предикат $\Leftrightarrow$ $\exists x\overline{P(x)}$ — ложь.

Таким образом, мы доказали, что левая и правая части в (1) ложны одновременно, а значит, и истинны они тоже только одновременно. $◀_1$

[2] ▶ $\overline{\exists x P(x)} \equiv \overline{\exists x \overline{\overline{P(x)}}} \overset{1}{\equiv} \overline{\overline{\forall x \overline{P(x)}}} \equiv \forall x \overline{P(x)}$. $◀_2$

[3] ▶ Пусть $P(x,y)$ — такой двуместный предикат, что левая часть в (3) — истина $\Leftrightarrow$ $\forall y P(x,y)$ — тождественно истинный предикат переменной x $\Leftrightarrow$, зафиксировав произвольное x_0, мы получим, что $\forall y P(x_0,\ y)$ — истина $\Leftrightarrow$,

зафиксировав произвольное x_0, мы получим $P(x_0, y)$, — тождественно истинный предикат переменной y $\Leftrightarrow$, зафиксировав произвольно x_0 и y_0 в $P(x, y)$, мы получим $P(x_0, y_0)$ — истина, т. е. $P(x, y)$ — тождественно истинный предикат.

Очевидно, истинность правой части в (3) равносильна тому же самому — тождественной истинности предиката $P(x, y)$. $\blacktriangleleft_3$

[4] $\blacktriangleright$ $\exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists x \exists y \overline{\overline{P(x,y)}} \overset{1}{\equiv} \exists x \overline{\forall y \overline{P(x,y)}} \overset{1}{\equiv}$
$\equiv \overline{\forall x \forall y \overline{P(x,y)}} \overset{3}{\equiv} \overline{\forall y \forall x \overline{P(x,y)}} \overset{1}{\equiv} \exists y \overline{\forall x \overline{P(x,y)}} \overset{1}{\equiv}$

$\equiv \exists y \exists x \overline{\overline{P(x,y)}} \equiv \exists y \exists x P(x,y)$. $\blacktriangleleft_4$

[5] $\blacktriangleright$ Пусть левая часть в (5) — истина $\Leftrightarrow$ $P(x) \wedge Q(x)$ — тождественно истинный предикат $\Leftrightarrow$ $P(x)$ — тождественно истинный предикат и $Q(x)$ — тождественно истинный предикат $\Leftrightarrow$ ($\forall x P(x)$ — истина) и ($\forall x Q(x)$ — истина) $\Leftrightarrow$ $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ — истина, т. е. мы доказали, что левая часть в (5) — истина тогда и только тогда, когда правая часть в (5) — истина, значит, и ложны они только одновременно. $\blacktriangleleft_5$

[6] $\blacktriangleright$ $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \overline{\overline{\exists x (P(x) \vee Q(x))}} \equiv$

$$\equiv \overline{\forall x (\overline{P(x) \vee Q(x)})} \equiv \overline{\forall x (\overline{P(x) \wedge \overline{Q(x)}})} \equiv$$
$$\equiv \overline{\forall x \overline{P(x)} \wedge \forall x \overline{Q(x)}} \equiv \overline{\forall x \overline{P(x)}} \vee \overline{\forall x \overline{Q(x)}} \equiv$$
$$\equiv \exists x \overline{\overline{P(x)}} \vee \exists x \overline{\overline{Q(x)}} \equiv$$
$$\equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x). \blacktriangleleft_6$$

Равносильности (7) и (8) докажите самостоятельно.

[9] ▶ Допустим противное, т. е. что существует такой двуместный предикат $P_0(x, y)$, что $\exists y \forall x P_0(x, y) \to$ $\to \forall x \exists y P_0(x, y)$ — ложь

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists y \forall x P_0(x, y) \text{ — истина;} \\ \forall x \exists y P_0(x, y) \text{ — ложь.} \end{cases}$$

Разберемся отдельно с верхней и нижней строками последнего соотношения.

• $\exists y \forall x P_0(x, y)$ — истина $\Leftrightarrow$ $\forall x P_0(x, y)$ — не тождественно ложный предикат переменной $y \Leftrightarrow$ можно зафиксировать такое значение y_0, что $P_0(x, y_0)$ — тождественно истинный предикат переменной x (α).

• $\forall x \exists y P_0(x, y)$ — ложь $\Leftrightarrow$ $\exists y P_0(x, y)$ — не тождественно истинный предикат $x \Leftrightarrow$ можно зафиксировать такое значение x_0, что $\exists y P_0(x_0, y)$ — ложь $\Leftrightarrow$ можно зафиксировать такое значение x_0, что $P_0(x_0, y)$ — тождественно ложный предикат y (β).

Зафиксировав в (α) значение x_0, найденное в (β), получим $P_0(x_0, y_0)$ — истина (1), а зафиксировав в (β) значение y_0 из (α), получим $P_0(x_0, y_0)$ — ложь (2).

(1) и (2) противоречат друг другу. ◀$_9$ ◀

Кванторы как обобщение логических операций

Теорема 2.4

Пусть $P(x)$ — одноместный предикат, определенный на конечном множестве $\Omega = \{x_1; x_2; \ldots; x_N\}$, тогда

$$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_N);$$

$$\exists x P(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_N).$$

Доказательство теоремы, очевидно, следует из определения кванторов и логических операций, а смысл теоремы состоит в том, что квантор всеобщности обобщает конъюнкцию, а квантор существования — дизъюнкцию в случае предикатов, определенных на бесконечных множествах.

Применение языка предикатов и кванторов для записи математических утверждений

В качестве примера рассмотрим определение того, что вещественное число a является пределом числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Образуем следующие предикаты:

- «$n > N$» — двуместный предикат переменных n и N (переменные принимают натуральные значения);
- «$|x_n - a| < \varepsilon$» — двуместный предикат переменных n и ε (n — натуральное число, ε — положительное вещественное число);
- «$(n > N) \to (|x_n - a| < \varepsilon)$» — трехместный предикат переменных n, N, ε, порожденный парой: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, a — вещественное число.

Навесим на этот трехместный предикат кванторы

$$\forall\varepsilon\exists N\forall n((n > N) \to (|x_n - a| < \varepsilon)).$$

Мы получим высказывание. Утверждение, что a является пределом числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, равносильно истинности полученного высказывания. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon\exists N\forall n((n > N) \to (|x_n - a| < \varepsilon)) \equiv 1. \tag{2.1}$$

Разберемся, что означает, что a не является пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Это означает, что истинным высказыванием является отрицание последнего высказывания в равносильности (2.1), т. е.

$$\overline{\forall\varepsilon\exists N\forall n((n > N) \to (|x_n - a| < \varepsilon))} \equiv 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists\varepsilon\overline{\exists N\forall n((n > N) \to (|x_n - a| < \varepsilon))} \equiv 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists\varepsilon\forall N\overline{\forall n((n > N) \to (|x_n - a| < \varepsilon))} \equiv 1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists\varepsilon\forall N\exists n\overline{((n > N) \to (|x_n - a| < \varepsilon))} \equiv 1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists\varepsilon\forall N\exists n\overline{((\overline{n > N}) \vee (|x_n - a| < \varepsilon))} \equiv 1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists\varepsilon\forall N\exists n((\overline{\overline{n > N}}) \cdot (\overline{|x_n - a| < \varepsilon})) \equiv 1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists\varepsilon\forall N\exists n((n > N) \cdot (|x_n - a| \geqslant \varepsilon)) \equiv 1,$$

где n, N — натуральные числа; ε — положительное вещественное число.

$\boxed{!}$ **Замечание.** Заметим, что при изучении математического анализа многие, не использующие языка предикатов и кванторов или использующие его неправильно, испытывают серьезные трудности при построении отрицаний определений, утверждений, теорем. Наш опыт показывает, что аккуратное «выписывание» определений на языке предикатов и кванторов не только и не сколько предохраняет от ошибок, но и способствует правильному и полному восприятию изучаемого материала.

Замечания и вопросы в конце параграфа

$\boxed{?}$ $\boxed{!}$ **1.** Доказав, что $\exists y\forall xP(x,y) \to \forall x\exists yP(x,y) \equiv 1$, мы доказали, в частности, что если функция равномерно непрерывна на множестве, то она и непрерывна на множестве. Разберитесь, почему.

2. Имеет место следующее:

$$\forall x P(x) \equiv \forall y P(y), \quad \exists x P(x) \equiv \exists y P(y),$$

т. е. все равно, как обозначена переменная, по которой навешен квантор. (Аналогия: $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(t)\,dt$.)

3. Дайте самостоятельно определение формулы алгебры предикатов (по аналогии с определением формулы алгебры высказываний).

§ 2.3. Алгебра множеств

Основными понятиями этого параграфа являются понятия множества и элемента множества (и значит, они не определяются). В случае, когда a является элементом множества A, будем писать «$a \in A$», в противном случае «$a \notin A$».

Понятие об универсальном и пустом множестве

При рассмотрении конкретных задач удобно (а порой и необходимо) выбрать и зафиксировать достаточно широкое множество, за пределы которого мы не будем выходить, т. е. элементы всех множеств, которые мы будем рассматривать, должны одновременно являться элементами этого множества, называемого *универсальным множеством* задачи (слово «задачи» обычно опускают). Для этого множества будем применять обозначение I. Ясно, что выбор такого множества неоднозначен, но важно его выбрать и зафиксировать.

Пусть A — некоторое множество. Говорят, что A задано, если относительно любого элемента $x \in I$ можно сказать, принадлежит или не принадлежит он множеству A.

Таким образом, с каждым множеством A связан одноместный предикат $P_A(x)$, определенный на универсальном множестве:

$$P_A(x) \equiv «x \in A».$$

Ясно, что $P_I(x)$ — тождественно истинный предикат.

Наряду с универсальным множеством удобно иметь дело с его противоположностью — не содержащим элементов множеством — *пустым множеством*, обозначаемым $\varnothing$. Ясно, что $P_\varnothing(x)$ — тождественно ложный предикат.

Определение 2.7. *Два множества A и B называются равными (пишут $A = B$) тогда и только тогда, когда*

$$P_A(x) \equiv P_B(x).$$

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 2.7.** Пусть A — множество неотрицательных целых чисел, не превосходящих 9, B — множество цифр, используемых в десятичной записи чисел. Ясно, что $A = B = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Операции над множествами

Очевидно, что любой одноместный предикат $P(x)$, определенный на I, можно считать предикатом, порожденным множеством. Действительно, если положить

$$A_p = P^{-1}(\{1\}), \text{ то } P_{A_p}(x) \equiv P(x).$$

Последнее позволяет вводить операции над множествами, используя операции над предикатами.

Булевы операции над множествами

Определение 2.8. *Дополнением ко множеству* A *относительно универсального множества* I *называется множество, обозначаемое* $\overline{A}$ *(см. рис. 2.2), определяемое следующим:* $P_{\overline{A}}(x) \equiv \overline{P_A(x)}$.

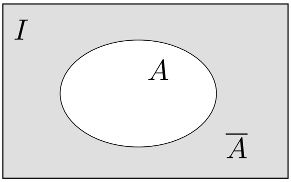


Рис. 2.2[1]

Определение 2.9. *Объединением множеств* A *и* B *называется множество, обозначаемое* $A \cup B$ *(см. рис. 2.3), определяемое следующим:* $P_{A \cup B}(x) \equiv P_A(x) \vee P_B(x)$.

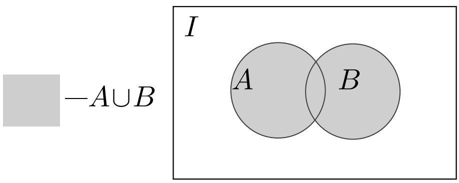


Рис. 2.3

Определение 2.10. *Пересечением множеств* A *и* B *называется множество, обозначаемое* $A \cap B$ *(см. рис. 2.4), определяемое следующим:* $P_{A \cap B}(x) \equiv P_A(x) \cdot P_B(x)$.

---

[1] Картинки, интерпретирующие операции над множествами, называют диаграммами Венна (кругами Эйлера — Венна).

Венн Джон (1834–1923) — английский математик. Получил ученую степень в 1857 г. в Кембридже. Первым применил термин «символическая логика». Помимо математики, интересовался историей и теологией.

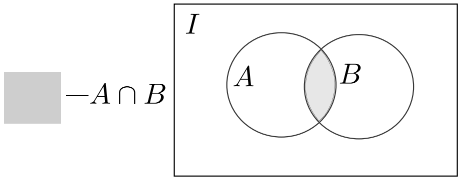


Рис. 2.4

Теорема 2.5. *Множества относительно операций дополнения, объединения, пересечения образуют булеву алгебру множеств, т. е. для них выполнены 19 основных равенств:*

0. $\overline{\overline{A}} = A$ — закон двойного дополнения

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ A \cup B = B \cup A \\ 2.\ A \cap B = B \cap A \end{array}\right\} \text{— коммутативные законы}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3.\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \overset{def}{=} A \cup B \cup C \\ 4.\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \overset{def}{=} A \cap B \cap C \end{array}\right\} \text{— ассоциативные законы}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5.\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ 6.\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{array}\right\} \text{— дистрибутивные законы}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7.\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ 8.\ \overline{a \wedge b} \equiv \overline{a} \vee \overline{b} \end{array}\right\} \text{— законы де Моргана}$$

$$\left.\begin{array}{l} 9.\ A \cup A = A \\ 10.\ A \cap A = A \end{array}\right\} \text{— законы идемпотентности}$$

$$\left.\begin{array}{l} 11.\ A \cup I = I \\ 12.\ A \cap \varnothing = \varnothing \\ 13.\ A \cup \varnothing = A \\ 14.\ A \cap I = A \end{array}\right\} \text{— законы } \varnothing \text{ и } I$$

$$\left.\begin{array}{l} 15.\ A \cup (A \cap B) = A \\ 16.\ A \cap (A \cup B) = A \end{array}\right\} \text{— законы поглощения}$$

17. $A \cup \overline{A} = I$
18. $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Справедливость 0–18 следует из определения операций над множествами и того, что предикаты относительно $\neg$, $\vee$ и $\wedge$ образуют булеву алгебру предикатов.

Другие операции над множествами

Определение 2.11. *Разностью множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \setminus B$ $(A - B)$ (см. рис. 2.5), определяемое следующей равносильностью:* $P_{A\setminus B}(x) \equiv P_A(x) \cdot \overline{P_B(x)}$.

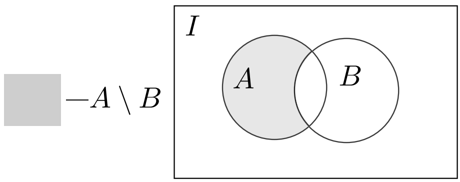


Рис. 2.5

Очевидно, имеет место равенство

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}. \tag{2.2}$$

► $P_{A\setminus B}(x) \equiv P_A(x) \cdot \overline{P_B(x)} \equiv P_A(x) \cdot P_{\overline{B}}(x) \equiv P_{A\cap\overline{B}}(x)$. ◄

Ясно, что разность множеств — некоммутативная операция. Действительно, пусть $A = \{1; 2; 3\}$; $B = \{1; 2; 5; 7\}$.

$$A \setminus B = \{3\}; \quad B \setminus A = \{5; 7\}.$$

Имеют место следующие равенства:

1. $A \setminus \varnothing = A$.
2. $\varnothing \setminus A = \varnothing$.
3. $A \setminus I = \varnothing$.
4. $I \setminus A = \overline{A}$.
5. $A \setminus A = \varnothing$.

Определение 2.12. *Симметрической разностью множеств A и B называют множество, обозначаемое $A \triangle B$ $(A - B)$ (см. рис. 2.6), определяемое следующим: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.*

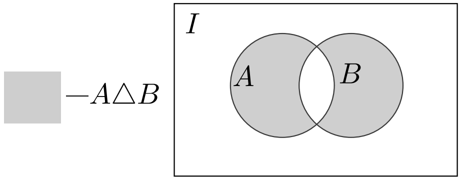


Рис. 2.6

Имеет место равенство

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B). \tag{2.3}$$

► $$\begin{aligned} P_{A\triangle B}(x) &\equiv P_{A\setminus B}(x) \vee P_{B\setminus A}(x) \equiv \\ &\equiv P_A(x)\cdot\overline{P_B(x)} \vee P_B(x)\cdot\overline{P_A(x)} \equiv \\ &\equiv P_A(x)\cdot\overline{P_B(x)} \vee P_B(x)\cdot\overline{P_B(x)} \vee \\ &\vee P_A(x)\cdot\overline{P_A(x)} \vee P_B(x)\cdot\overline{P_A(x)} \equiv \\ &\equiv (P_A(x) \vee P_B(x))\cdot\overline{P_B(x)} \vee \\ &\vee (P_A(x) \vee P_B(x))\overline{P_A(x)} \equiv \\ &\equiv P_{A\cup B}(x)\cdot\overline{P_B(x)} \vee P_{A\cup B}(x)\cdot\overline{P_A(x)} \equiv \\ &\equiv P_{A\cup B}(x)\cdot(\overline{P_B(x)} \vee \overline{P_A(x)}) \equiv \\ &\equiv P_{A\cup B}(x)\cdot\overline{P_B(x)\cdot P_A(x)} \equiv \\ &\equiv P_{A\cup B}(x)\cdot\overline{P_{A\cap B}(x)} \equiv P_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)}(x). \end{aligned}$$ ◄

Имеют место следующие равенства:

1. $A \triangle B = B \triangle A$ — коммутативность.
2. $A \triangle I = \overline{A}$.
3. $A \triangle \varnothing = A$.

Подмножество

Важным понятием является понятие подмножества. Понятие подмножества — понятие относительное, то есть применяется к паре множеств.

Определение 2.13. *Говорят, что множество A является подмножеством множества B (пишут $A \subset B$) тогда и только тогда, когда каждый элемент множества A является элементом множества B (см. рис. 2.7), то есть $A \subset B \Leftrightarrow P_A(x) \to P_B(x) \equiv 1$.*

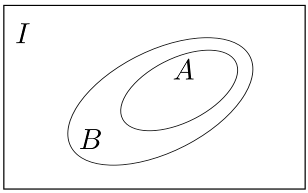


Рис. 2.7

Теорема 2.6. *Для того чтобы множество A являлось подмножеством множества B, необходимо и достаточно, чтобы $A \setminus B = \varnothing$.*

$$\blacktriangleright\ A \subset B \Leftrightarrow P_A(x) \to P_B(x) \equiv 1 \Leftrightarrow \overline{P_A(x) \to P_B(x)} \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{\overline{P_A(x)} \vee P_B(x)} \equiv 0 \Leftrightarrow \overline{\overline{P_A(x)}} \cdot \overline{P_B(x)} \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_A(x) \cdot \overline{P_B(x)} \equiv 0 \Leftrightarrow P_{A \setminus B}(x) \equiv 0 \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing. \blacktriangleleft$$

Свойства отношения «являться подмножеством»

Теорема 2.7. *Имеют место соотношения:*

1. $A \subset A$ — *рефлексивность.*

2. $(A \subset B) \& (B \subset C) \Longrightarrow A \subset C$ — *транзитивность.*

3. $(A \subset B) \& (B \subset A) \Leftrightarrow A = B$ — *антисимметричность.*

► 1. Составим разность $A \setminus A = \varnothing \Leftrightarrow A \subset A$.

2. $$\left.\begin{array}{l} A \subset B \Leftrightarrow P_A(x) \to P_B(x) \equiv 1 \\ B \subset C \Leftrightarrow P_B(x) \to P_C(x) \equiv 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (P_A(x) \to P_B(x)) \cdot (P_B(x) \to P_C(x)) \equiv 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overline{P_A(x)} \vee P_B(x)) \cdot (\overline{P_B(x)} \vee P_C(x)) \equiv 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{P_A(x)} \cdot \overline{P_B(x)} \vee P_B(x) \cdot \overline{P_B(x)} \vee$$

$$\vee \overline{P_A(x)} P_C(x) \vee P_B(x) \cdot P_C(x) \equiv 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{P_A(x)} \cdot \overline{P_B(x)} \vee \overline{P_A(x)} \cdot P_C(x) \vee$$

$$\vee \overline{P_A(x)} P_C(x) \vee P_B(x) \cdot P_C(x) \equiv 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{P_A(x)} (\underbrace{\overline{P_B(x)} \vee P_C(x)}_{\equiv 1 \text{ по усл.}}) \vee (\underbrace{\overline{P_A(x)} \vee P_B(x)}_{\equiv 1 \text{ по усл.}}) \cdot P_C(x) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overline{P_A(x)} \vee P_C(x) \equiv 1 \Leftrightarrow P_A(x) \to P_C(x) \equiv 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \subset C.$$

3. $$\left.\begin{array}{l} A \subset B \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing \\ B \subset A \Leftrightarrow B \setminus A = \varnothing \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing \Leftrightarrow A \triangle B = \varnothing \Leftrightarrow A = B.$$ ◄

Множество всех подмножеств множества A обозначают 2^A. Ясно, что $\varnothing \in 2^A$ и $A \in 2^A$. Они называются *несобственными* подмножествами множества A. Остальные подмножества (если они есть) называются *собственными*.

П **Пример 2.8.** Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. Ясно, что $2^A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Замечания и вопросы в конце параграфа

[?] [!]

1. Докажите самостоятельно, что $A = B \Leftrightarrow A \triangle B = \varnothing$.
2. Докажите, что пустое множество единственно.
3. Докажите, что нельзя выразить $\setminus$ через $\triangle$.
4. Диаграммы Венна являются лишь хорошей иллюстрацией и способом построения контрпримеров, а не методом доказательства равенств в теории множеств.

§ 2.4. Отображения. Образ и прообраз множества при отображении. Свойства образов и прообразов

Отображение (синоним — функция) — термин, знакомый по средней школе. В этом параграфе мы уточним понятие отображения как тройки объектов: двух множеств и правила, сопоставляющего элементам первого множества элементы второго множества, и определим два новых понятия, связанных с отображениями, — образ и прообраз множества при отображении.

Пусть X и Y — непустые множества, f — отображение X в Y, т. е. правило, сопоставляющее каждому элементу $x \in X$ вполне определенный элемент $f(x) \in Y$. Если задано отображение из X в Y, будем писать $f : X \to Y$.

Последняя запись «$f : X \to Y$» означает, что под отображением мы понимаем тройку (X, Y, f).

Напомним, что два отображения $f_1 : X_1 \to Y_1$ и $f_2 : X_2 \to Y_2$ считают равными, если $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ и $f_1 = f_2$ (т. е. для любого $x \in X_1 (= X_2)$ имеет место равенство $f_1(x) = f_2(x)$).

Определение 2.14. *Пусть* $f : X \to Y$, $B \subseteq Y$. *Прообразом множества* B *при отображении* f *называется множество* $f^{-1}(B)(\subseteq X)$, *определяемое следующим:*

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Определение 2.15. *Пусть* $f : X \to Y$, $A \subseteq X$. *Образом множества* A *при отображении* f *называют множество* $f(A)$ $(\subseteq Y)$, *определяемое следующим:*

$$y \in f(A) \Leftrightarrow f^{-1}(\{y\}) \cap A \neq \varnothing.$$

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 2.9.** Рассмотрим отображение синус $\sin : R \to R$. Ясно, что имеет место

$$\sin^{-1}([0;2]) = \{[2\pi n; \pi + 2\pi n];\ n \in \mathbb{Z}\},$$
$$\sin((0;\pi/4)) = (0;\sqrt{2}/2);$$
$$\sin^{-1}((-3;-2]) = \varnothing.$$

Теорема 2.8 (свойства образов и прообразов)
Пусть $f : X \to Y$; $A_1, A_2 \subseteq X$; $B_1, B_2 \subseteq Y$; *тогда имеют место соотношения:*

1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
2) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
3) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$;
4) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

$\blacktriangleright$ [1] $\blacktriangleright$ Пусть $y \in f(A_1 \cup A_2) \Leftrightarrow f^{-1}(\{y\}) \cap (A_1 \cup A_2) \neq \varnothing \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \big(f^{-1}(\{y\}) \cap A_1\big) \cup \big(f^{-1}(\{y\}) \cap A_2\big) \neq \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big(f^{-1}(\{y\}) \cap A_1 \neq \varnothing\big) \vee \big(f^{-1}(\{y\}) \cap A_2 \neq \varnothing\big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y \in f(A_1)) \vee (y \in f(A_2)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2).$$

$\blacktriangleleft_1$

^{2} $\blacktriangleright$ Пусть $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow (f(x) \in B_1) \vee (f(x) \in B_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B_1)) \vee (x \in f^{-1}(B_2)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2). \qquad \blacktriangleleft_2$$

^{3} $\blacktriangleright$ Пусть $y \in f(A_1 \cap A_2) \Leftrightarrow f^{-1}(\{y\}) \cap (A_1 \cap A_2) \neq \varnothing \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow (f^{-1}(\{y\}) \cap A_1) \cap (f^{-1}(\{y\}) \cap A_2) \neq \varnothing \overset{(!)}{\Longrightarrow}$$
$$\Longrightarrow (f^{-1}(\{y\}) \cap A_1 \neq \varnothing) \wedge (f^{-1}(\{y\}) \cap A_2 \neq \varnothing) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y \in f(A_1)) \wedge (y \in f(A_2)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2). \qquad \blacktriangleleft_3$$

^{4} $\blacktriangleright$ Пусть $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow (f(x) \in B_1) \wedge (f(x) \in B_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B_1)) \wedge (x \in f^{-1}(B_2)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \qquad \blacktriangleleft_4$$

Приведем пример такого отображения, для которого $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ (т. е. когда $\subseteq$ строгое):
$$\sin : R \to R; \quad A_1 = [0; \pi/2]; \quad A_2 = [2\pi; 2\pi + \pi/2];$$
$$\sin(A_1) = [0;1]; \quad \sin(A_2) = [0;1];$$
$$\sin(A_1) \cap \sin(A_2) = [0;1]; \quad \sin(A_1 \cap A_2) = \sin(\varnothing) = \varnothing;$$
$$\varnothing \subseteq [0;1]. \qquad \blacktriangleleft$$

Композиция отображений

Определение 2.16. *Пусть* $f\colon X \to Y$, $Y \to Z$. *Композицией отображений* f *и* g *(сложным отображением) называется отображение* $g \circ f\colon X \to Z$, *определяемое следующим:* $(g \circ f)(x) \overset{def}{=} g(f(x))$.

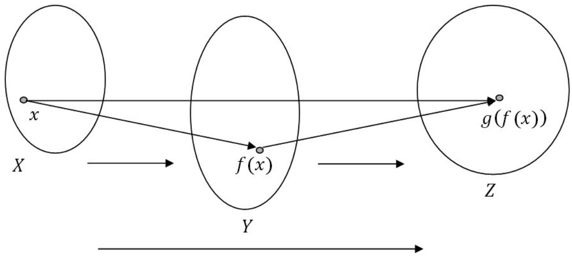


Рис. 2.8 иллюстрирует определение 2.16

Теорема 2.9 (ассоциативность композиции)
Если $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$, *то* $\forall x (\in X)$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x). \tag{2.4}$$

► $$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)));$$
$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))),$$

т. е. левая часть (2.4) равна правой части. ◄

Замечания и вопросы в конце параграфа

? ! **1.** Запись $f^{-1}(B)$ нужно воспринимать как цельный символ и не путать с обратным отображением (которое не всегда существует). Однако когда f — обратимое отображение, прообраз B при отображении f совпадает с образом B при отображении f^{-1}.

2. Приведите пример такого отображения, для которого образ пересечения множеств равен пересечению образов множеств.

§ 2.5. Типы отображений. Обратимость и односторонняя обратимость

Сделаем в начале этого параграфа одно существенное замечание. Типы отображений, введенные в нем — инъективные, сюръективные, биективные, — не дают полной классификации отображений. Существуют отображения, являющиеся «никакими», т. е. неинъективными, несюръективными, небиективными. Однако свойства, связанные с выделенными типами отображений — инъективность, сюръективность, биективность, — чрезвычайно полезны и важны при изучении отображений.

Выделяют три основных типа отображений: сюръективные, инъективные, биективные.

Определение 2.17. *Отображение* $f\colon X \to Y$ *называется сюръективным, если* $\forall y (\in Y)\ f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$.

Определение 2.18. *Отображение* $f\colon X \to Y$ *называется инъективным, если*

$$\forall x_1 (\in X) \forall x_2 (\in X) ((x_1 \neq x_2) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Определение 2.19. *Отображение* $f\colon X \to Y$ *называется биективным, если оно сюръективно и инъективно.*

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 2.10.** $\sin : R \to [-1; 1]$ — сюръективное отображение, но неинъективное. $\boxed{?}$

Пример 2.11. $\sin : [-\pi/2; \pi/2] \to R$ — инъективное отображение, но несюръективное. $\boxed{?}$

Пример 2.12. $\sin : [-\pi/2; \pi/2] \to [-1; 1]$ является биективным отображением.

§ 2.5.1 Теоремы о композиции однотипных отображений

Теорема 2.10. *Если $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — инъективные отображения, то $g \circ f : X \to Z$ — инъективное отображение.*

► Пусть $x_1 \neq x_2$. Так как f — инъективно, то $f(x_1) \neq f(x_2)$; так как g — инъективно, то $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Последнее означает, что $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$.

Инъективность композиции доказана. ◄

Теорема 2.11. *Если $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — сюръективные отображения, то $g \circ f : X \to Z$ — сюръективное отображение.*

► Пусть z — произвольный элемент Z. Так как $g : Y \to Z$ сюръективно, то $g^{-1}(\{z\}) \neq \varnothing \Leftrightarrow$ существует $y_0 \in g^{-1}(\{z\})$ (или, что то же самое, $g(y_0) = z$). Так как f — сюръективное отображение, то $f^{-1}(\{y_0\}) \neq \varnothing \Leftrightarrow$ существует $x_0 \in f^{-1}(\{y_0\})$ (или, что то же самое, $f(x_0) = y_0$). Ясно, что $(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0)) = g(y_0) = z$. Значит, $x_0 \in (g \circ f)^{-1}(\{z\}) \Leftrightarrow (y \circ f)^{-1}(\{z\}) \neq \varnothing$, а это и означает сюръективность $g \circ f$. ◄

Теорема 2.12. *Если $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — биективные отображения, то композиция $g \circ f : X \to Z$ — биективное отображение.*

Ясно, что эта теорема — следствие предыдущих.

Удобно пользоваться (и мы это уже неявно делали при доказательстве теоремы 2.11) следующим равносильным определением сюръективности отображения.

Определение 2.20. *Отображение* $f\colon X \to Y$ *сюръективно, если уравнение* $f(x) = y$, *где* x *— неизвестное,* y *— параметр, имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра* $y \in Y$.

Определение 2.21. *Пусть* X *— множество. Тождественным на* X *отображением называется отображение* $e_X\colon\ X \to X$, *определяемое следующим:*

$$e_X(x) = x, \quad \forall x \in X.$$

Ясно, что тождественные отображения играют роль нейтральных элементов в композиции, т. е. для любого $f : X \to Y$ имеет место

$$f(x) = (e_Y \circ f)(x) = (f \circ e_X)(x), \quad \forall x \in X,$$

$$\text{т. е. } f = e_Y \circ f = f \circ e_X.$$

Определение 2.22. *Отображение* $f\colon X \to Y$ *называется обратимым слева (справа), если существует отображение* $f_л^{-1}\colon Y \to X$ $(f_п^{-1}\colon Y \to X)$ *такое, что*

$$f_л^{-1} \circ f = e_X; \tag{2.5}$$

$$(f \circ f_п^{-1} = e_Y). \tag{2.6}$$

Определение 2.23. *Отображение* $f\colon X \to Y$ *называется обратимым, если существует отображение* $f^{-1}\colon Y \to X$ *такое, что*

$$f^{-1} \circ f = e_X; \quad f \circ f^{-1} = e_Y. \tag{2.7}$$

Критерии односторонней обратимости и критерий обратимости

Теорема 2.13 (критерий обратимости слева)
Для того чтобы отображение $f\colon X \to Y$ было обратимым слева, необходимо и достаточно, чтобы f было инъективным.

► Необходимость ►

Докажем ее от противного, т. е. предположим, что существует неинъективное отображение $f\colon X \to Y$, которое обратимо слева. Неинъективность f означает, что существуют такие x_1 и x_2 ($\in X$), что $x_1 \neq x_2$, а $f(x_1) = f(x_2)$.

Применим к обеим частям последнего равенства отображение $f_{\text{л}}^{-1}$ (существование которого мы предположили), тогда

$$f_{\text{л}}^{-1}(f(x_1)) = f_{\text{л}}^{-1}(f(x_2)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (f_{\text{л}}^{-1} \circ f)(x_1) = (f_{\text{л}}^{-1} \circ f)(x_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e_X(x_1) = e_X(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Последнее противоречит выбору x_1 и x_2 ($x_1 \neq x_2$).

◄ Необходимость.

Достаточность ►

Представим Y в виде $Y = f(X) \cup (Y \setminus f(X))$ и зададим отображение $g : Y \to X$ правилом

$$g(y) = \begin{cases} x \text{ такое, что } f(x) = y, \text{ если } y \in f(X); \\ x_0 \text{ — произвольный фиксированный элемент } X, \\ \qquad \text{если } y \in Y \setminus f(X). \end{cases}$$

Ясно, что отображение g и есть левое обратное к f.

◄ Достаточность.

Теорема доказана. ◄

Суть дела проясняет следующая картинка (см. рис. 2.9). Точкам, в которых заканчиваются стрелки, сопоставляются начала стрелок, а точкам, не покрытым стрелками, — произвольная точка x_0 из X.

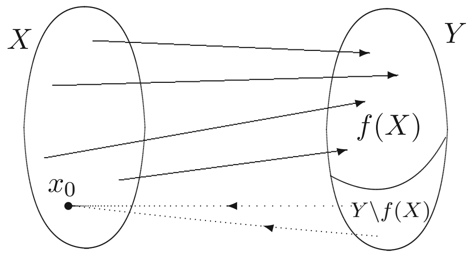


Рис. 2.9

Теорема 2.14 (критерий обратимости справа)
Для того чтобы отображение $f\colon X \to Y$ было обратимым справа, необходимо и достаточно, чтобы оно было сюръективно.

► Необходимость ►

Докажем ее от противного, т. е. предположим, что существует такое отображение $f\colon X \to Y$, которое несюръективно, но является обратимым справа. Несюръективность отображения f означает, что существует $y_1 \in Y$ такое, что $f^{-1}(\{y_1\}) = \varnothing$. С другой стороны, $y_1 = e_Y(y_1) = (f \circ f_{\text{п}}^{-1})(y_1) = f(f_{\text{п}}^{-1}(y_1))$. Последняя цепочка равенства означает, что $x_1 = f_{\text{п}}^{-1}(y_1)$ $(\in X)$ принадлежит $f_{\text{п}}^{-1}(\{y_1\})$, а это противоречит тому, что $f_{\text{п}}^{-1}(\{y_1\}) = \varnothing$.

◄ Необходимость.

Достаточность ►

Сюръективность f означает (см. определение 2.20), что уравнение

$$f(x) = y \tag{2.8}$$

имеет хотя бы одно решение при любом $y \in Y$. Рассмотрим отображение $g\colon Y \to X$, заданное правилом $g(y) = x$, где x — какое-то решение уравнения (2.8) (которое существует). Очевидно, что это и есть правое обратное к f.

◀ Достаточность ◀

Теорема 2.15 (критерий обратимости)
Для того чтобы отображение $f{:}X \to Y$ было обратимым, необходимо и достаточно, чтобы f было биективным.

► Необходимость очевидна, так как обратимость отображения означает правую и левую обратимость, а значит, сюръективность и инъективность отображения (см. предыдущие теоремы), т. е. биективность.
Достаточность ►

Так как отображение f биективно, то оно, в частности, инъективно и, значит, имеет левое обратное отображение $f_{\text{л}}^{-1}\colon Y \to X$ такое, что $f_{\text{л}}^{-1} \circ f = e_X$, а так как f биективно, то оно, в частности, сюръективно, а значит, имеет правое обратное отображение $f_{\text{п}}^{-1} : Y \to X$ такое, что $f \circ f_{\text{п}}^{-1} = e_Y$.

Покажем, что в этом случае $f_{\text{л}}^{-1} = f_{\text{п}}^{-1}$, что и завершит доказательство достаточности:

$$f_{\text{л}}^{-1} = f_{\text{л}}^{-1} \circ e_Y =$$
$$= f_{\text{л}}^{-1} \circ (f \circ f_{\text{п}}^{-1}) =$$
$$(f_{\text{л}}^{-1} \circ f) \circ f_{\text{п}}^{-1} =$$
$$= e_X \circ f_{\text{п}}^{-1} = f_{\text{п}}^{-1}.$$

◀ Достаточность ◀

Замечания и вопросы в конце параграфа

$\boxed{?}$ $\boxed{!}$

1. Покажите, что теоремы, обратные к теоремам о композиции, не верны.
2. Приведите пример, показывающий, что $f_{\text{л}}^{-1}$ может быть не единственным.
3. То же самое, что и 2, только для $f_{\text{п}}^{-1}$.
4. Возможны ли варианты построения $f_{\text{л}}^{-1}$, отличные от приведенного в доказательстве критерия обратимости слева?
5. Приведем мнемоническое правило, позволяющее запомнить, за обратимость с какой стороны отвечает инъективность, а с какой стороны — сюръективность. Для этого выпишем алфавитное упорядочение слов «инъективность» и «сюръективность». То, что оказалось слева, отвечает за обратимость слева, а то, что оказалось справа, отвечает за обратимость справа.

§ 2.6. Семейства множеств и операции над семействами

В этом параграфе операции над множествами — дополнение, объединение и пересечение — будут распространены на случай, когда мы имеем дело с бесконечными наборами (семействами) множеств. Средством для этого являются операции навешивания кванторов, так как они являются обобщением $\wedge$ и $\vee$ (см. теорему 2.4).

Определение 2.24. *Пусть I — некоторое универсальное множество, J $(\neq \varnothing)$ — множество, называемое множеством индексов. (Оно может и не являться подмножеством универсального множества I.)*

Семейством множеств над универсальным множеством I, индексированным множеством индексов J, называется отображение множества J в 2^I. (Здесь 2^I — множество всех подмножеств универсального множества I.)

Таким образом, задать семейство — значит указать правило, сопоставляющее каждому индексу i из J вполне определенное подмножество универсального множества I.

Для обозначения семейства используется запись, аналогичная обозначениям, применяемым для последовательностей. А именно: подмножество, соответствующее индексу i, обозначают не $f(i)$, а A_i, а все семейство обозначают не $f : J \to 2^I$, а $\{A_i\}_{i \in J}$.

П **Пример 2.13.** Пусть $J = R_+ = [0; \infty)$, $I = \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел). Рассмотрим семейство $\{A_r\}_{r \in R_+}$ над $\mathbb{C}$, заданное правилом

$$A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}.$$

Множества A_0 и A_r ($r \neq 0$) изображены на рис. 2.10.

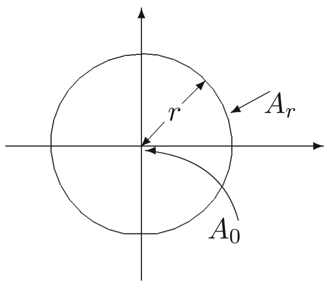


Рис. 2.10

Пример 2.14. Пусть $J = [0; 2\pi)$, $I = \mathbb{C}$. Рассмотрим семейство $\{B_\alpha\}_{\alpha \in [0;2\pi)}$ над $\mathbb{C}$, заданное правилом

$$B_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \alpha\}, \quad (\arg 0 \text{ — любой}).$$

На рис. 2.11 изображены множества B_0 и B_α $(\alpha \neq 0)$.

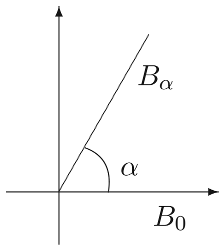


Рис. 2.11

Пример 2.15. Пусть $I = \mathbb{N}$, $J = \mathbb{N}$. Рассмотрим семейство $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $A_n = [1; n]_{\mathbb{N}}$.

Пример 2.16. Пусть $I = \mathbb{N}$, $J = \mathbb{N}$. Рассмотрим семейство $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, заданное правилом $D_n = \{\, m \in \mathbb{N} \mid \text{делится на } n \,\}$.

Пример 2.17. Пусть $I = M_{2\times 2}(R)$ (множество матриц размера 2×2 с вещественными элементами). $J = R$. Рассмотрим семейство $\{M_a\}_a \in R$, где $M_a = \{\, A \in M_{2\times 2}(R) \mid (A)_{11} + (A)_{22} = a \,\}$.

Пример 2.18. Пусть $X (\neq \varnothing)$ — произвольное множество, $J = X$. Рассмотрим семейство $\{\, \{x\}_{x \in X} \,\}$ — семейство одноэлементных подмножеств множества X.

Пример 2.19. Пусть $J = [0; 1]$; $I = C([0; 1])$ — множество непрерывных на отрезке функций. Рассмотрим семейство $\{C_i^0([0; 1])\}_{i \in [0;1]}$ над $C([0; 1])$, заданное правилом $C_i^0([0; 1]) = \{f \in C([0; 1]) \mid f(i) = 0\}$.

На рис. 2.12 условно изображено множество $C^0_{1/2}([0;1])$ — «паучок» всех графиков непрерывных на $[0;1]$ функций, обращающихся в 0 в точке $x = 1/2$.

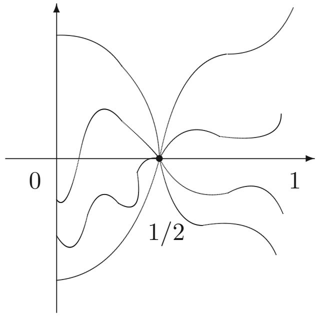


Рис. 2.12

Операции над семействами

Сейчас мы определим три операции над семействами множеств: дополнение к семейству, объединение семейства, пересечение семейства. Эти операции над семействами будем вводить, как и операции над множествами, используя связь между множествами и предикатами.

Пусть задано семейство $\{A_i\}_{i\in J}$ над универсальным множеством I.

Рассмотрим предикат $P_{A_i}(x)$=«$x{\in}A_i$, $x{\in}I$, $i{\in}J$». Это двуместный предикат переменных x и i, т. е. семейство множеств — то же самое, что двуместный предикат, где одна переменная — из множества индексов, а другая — из универсального множества.

Определение 2.25. *Дополнением к семейству* $\{A_i\}_{i\in J}$ *над* I *называется семейство над* I*, обозначаемое* $\{\bar{A}_i\}_{i\in J}$*, определяемое предикатом*

$$P_{\bar{A}_i}(x) \overset{def}{=} \overline{P_{A_i}(x)}.$$

Вернемся к примеру § 2.5. Ясно, что

$$\overline{A_r} = \{z \in C \ \mid \ |z| \neq r\}\,.$$

Определение 2.26. *Объединением семейства* $\{A_i\}_{i\in J}$ *над* J *называется множество, обозначаемое* $\bigcup_{i\in J} A_i$*, определяемое следующим:*

$$P_{\bigcup\limits_{i\in J} A_i}(x) \overset{def}{\equiv} \exists i \ P_{A_i}(x).$$

Ясно, что в примере 2.13

$$\bigcup_{r\in R_+} A_r = C.$$

В примере 2.14

$$\bigcup_{\alpha\in[0;2\pi)} B_\alpha = C.$$

В примере 2.15

$$\bigcup_{i\in[0;1]} C_i^0([0;1]) = C^0([0;1]).$$

Здесь $C^0([0;1])$ — множество всех непрерывных на $[0;1]$ функций, обращающихся в ноль хотя бы в одной точке отрезка $[0;1]$.
В примере 2.16

$$\bigcup_{x\in X} \{x\} = X.$$

Определение 2.27. *Пересечением семейства* $\{A_i\}_{i\in J}$ *над* I *называется множество, обозначаемое* $\bigcap_{i\in J} A_i$*, определяемое следующим:*

$$P_{\bigcap\limits_{i\in J} A_i}(x) \overset{def}{\equiv} \forall i \ P_{A_i}(x).$$

Ясно, что в примере 2.13

$$\bigcap_{r\in R_+} A_r = \varnothing.$$

В примере 2.14

$$\bigcap_{\alpha\in[0;2\pi)} B_\alpha = \{0\}.$$

В примере 2.15
$$\bigcap_{i\in[0;1]} C_i^0([0;1]) = \{\,0|_{[0;1]}\},$$
где через $0|_{[0;1]}$ обозначена функция, тождественно равная 0 во всех точках отрезка $[0;1]$.
В примере 2.16
$$\bigcap_{x\in X} = \begin{cases} X, & \text{если } X \text{ — одноэлементное множество;} \\ \varnothing, & \text{если } X \text{ содержит более одного элемента.} \end{cases}$$

Теорема 2.16 (законы де Моргана для семейств)
Для любого семейства справедливо:
$$1)\ \overline{\bigcup_{i\in J} A} = \bigcap_{i\in J} \overline{A_i};$$
$$2)\ \overline{\bigcap_{i\in J} A_i} = \bigcup_{i\in J} \overline{A_i}.$$

Замечания и вопросы в конце параграфа

$\boxed{?}$ $\boxed{!}$

1. Самостоятельно докажите законы де Моргана для семейств множеств.

2. Пусть у нас есть конечный набор A_1, A_2, …, A_n (все они подмножества одного и того же универсального множества). Рассмотрим множество $J=[1;n]_N=\{1;2;\ldots;n\}$. Тогда набор множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно рассматривать как семейство $\{A_i\}_{i\in J}$. При этом, очевидно (см. теорему 2.4), выполнено
$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup\nolimits_{i\in J} A_i;$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap\nolimits_{i\in J} A_i.$$

3. Из замечания 2 следует, что операции пересечения и объединения семейств обобщают обычные операции пересечения и объединения на случай семейств, индексированных бесконечным множеством.

4. Пусть $\{A_i\}_{i\in N}$ — семейство множеств и $A_1 \supset \supset A_2 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$

Докажите, что

$$\bigcap_{i\in N} A_i = \bigcap_{i\in N} A_{2i} = \bigcap_{i\in N} A_{3i} = \dots$$

5. Справедливы ли равенства?

а) $A \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A \setminus A_i)$;

б) $A \setminus \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A \setminus A_i)$;

в) $\bigcup_{i\in J}\left(\bigcap_{i\in J} A_{ij}\right) = \bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{i\in I} A_{ij}\right)$;

г) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$;

д) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$.

Глава 3
Элементы комбинаторики

Спросил меня голос
В пустыне дикой:
— Много ли в море
Растет земляники?
— Столько же, сколько
Селедок соленых
Растет на березах
И елках зеленых.

С. Я. Маршак

§ 3.1. Что такое комбинаторика? Число элементов во множестве. Правило суммы

Основным вопросом этой главы является вопрос «Сколько?» в различных вариантах, а основным способом ответа на этот вопрос является установление взаимнооднозначного соответствия (осуществляемого биективным отображением) между множеством, в котором нам предстоит подсчитать количество элементов (т. е. ответить на вопрос «Сколько?»), и множеством, в котором количество элементов нам известно. Этот принцип подсчета — основной принцип комбинаторики — прекрасно изложен С. Я. Маршаком в его переводах из английской детской поэзии. Эти строки, знакомые многим, мы и предпослали главе «Элементы комбинаторики» в качестве эпиграфа.

Комбинаторика — раздел математики, посвященный способам подсчета числа элементов в конечных множествах, — имеет широкий круг приложений: теория вероятностей, теория информации, теория надежности, алгебраическая топология и алгебра и, наконец, математический анализ. Особенно полезными являются сами комбинаторные рассуждения. Они позволяют обойтись без излишнего формализма, и там, где эти принципы срабатывают, получаются красивые и понятные результаты. Ярким примером эффективности комбинаторного подхода является теория бинома Ньютона. Все красивые результаты — различные соотношения между биномиальными коэффициентами — имеют простое комбинаторное истолкование. Некоторые из этих соотношений будут приведены в нашем курсе (см. § 3.4, 3.5).

Число элементов в конечном множестве. Основной принцип комбинаторики

В качестве утверждений, принимаемых без доказательства, возьмем следующие:

1. Отрезок натурального ряда $[1; n]_N = \{1; 2; 3; \ldots; n\}$ содержит n элементов.

2. Если A и B — множества и существует биективное отображение $\varphi:\ A \to B,$ то $|A| = |B|,$

где $|A|$ — обозначение числа элементов во множестве A.

3. $|\varnothing| = 0$. Вторая аксиома носит название «Основной принцип комбинаторики» и является главным рабочим инструментом комбинаторики (соответственно, искусство решения комбинаторных задач и состоит в определении множеств A, B и построении биективного отображения φ, реализующего основной принцип комбинаторики).

Определение 3.1. *Говорят, что отрезок натурального ряда* $[1;n]_N$ *нумерует множество* A*, если существует биективное отображение* $\varphi:\ [1;n]_N \to A$.

Если задана нумерация φ *множества* A*, то применяют следующие обозначения:*

$$\varphi(1) \stackrel{def}{=} a_1;\ \varphi(2) \stackrel{def}{=} a_2; \ldots; \varphi(n) \stackrel{def}{=} a_n;$$
$$A = \{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n\}.$$

Утверждение 3.1. *Если отрезок* $[1;n]_N$ *нумерует множество* A*, то* $|A| = n$.

Ясно, что оно является прямым следствием определения нумерации и основного принципа комбинаторики.

Определение 3.2. *Говорят, что множество* A *конечно, если существует такое натуральное число* n_A*, что отрезок* $[1;n_A]_N$ *нумерует* A*, при этом* $|A| = n_A$.

Утверждение 3.2. *Число элементов в конечном множестве определено однозначно.*

$\boxed{!}$ Несмотря на кажущуюся свою очевидность, доказательство этого утверждения довольно громоздко, и мы его не приводим. Желающим рекомендуется попробовать провести его самостоятельно.

Правило суммы

Теорема 3.1. *Пусть* A *и* B *— конечные непересекающиеся множества (т. е.* $A \cap B = \varnothing$*), тогда*

$$|A \cup B| = |A| + |B|. \tag{3.1}$$

▶ Зафиксируем $\varphi_A : [1; |A|]_N \to A$, $\varphi_B : [1; |B|]_N \to B$ нумерации A и B соответственно и рассмотрим отображение

$$\varphi_{A \cup B} : [1; |A| + |B|]_N \to A \cup B,$$

заданное правилом

$$\varphi_{A \cup B}(i) = \begin{cases} \varphi_A(i), & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant |A|; \\ \varphi_B(i - |A|), & \text{если } |A| < i \leqslant |A| + |B|. \end{cases}$$

Очевидно, $\varphi_{A \cup B}$ — биективное отображение, тогда на основании основного принципа комбинаторики получаем

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$ ◀

Теорема 3.2 (следствие предыдущей)
Пусть A, B — конечные множества, тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{3.2}$$

▶ Очевидно, $|A \cup B| = A \cup (B \setminus A)$ и множества A и $B \setminus A$ не пересекаются, тогда из равенства (3.1) получим

$$|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|. \tag{3.3}$$

Очевидно, $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ и множества $A \cap B$ и $B \setminus A$ не пересекаются, тогда из равенства (3.1) получаем

$$|B| = |A \cap B| + |B \setminus A|. \tag{3.4}$$

Подставляя выражение для $|B \setminus A|$ из (3.4) в (3.3), получаем

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$ ◀

Теорема 3.3 (правило включения-исключения)
Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — конечные множества, тогда

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \\
&= (|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|) - (|A_1 \cap A_2| + \\
&+|A_1 \cap A_3| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n|) + \\
&+(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + \\
&+|A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) - \dots + \\
&+(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = \\
&= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \\
&+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + \\
&+(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

В правой части формулы (3.5), *называемой формулой включения-исключения, стоят с чередующимися знаками суммы, содержащие всевозможные попарные пересечения множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$, пересечения троек множеств и т. д.*

►Докажем формулу включения-исключения по индукции.

Справедливость ее для случая $n = 2$ доказана в предыдущей теореме. Рассмотрим индуктивный переход, т. е. предположим, что формула верна для любых $(n-1)$ множеств, и покажем, что тогда она верна и для n множеств.

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cup A_n| = \\
&\overset{\text{теорема 3.2}}{=} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}| + |A_n| - \\
&- |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n| = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| + \dots +
\end{aligned}$$

$$+(-1)^{n-2}|A_1\cap\dots\cap A_{n-1}|+$$

$$+|A_n|-\left|\underbrace{(A_1\cap A_n)\cup(A_2\cap A_n)\cup\dots\cup(A_{n-1}\cap A_n)}_{\text{здесь } (n-1) \text{ скобка}}\right|=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}|A_i\cap A_j|+$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n-1}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\ldots+(-1)^{n-2}|A_1\cap\dots\cap A_{n-1}|\ -$$

$$-\Big(\sum_{i=1}^{n-1}|A_i\cap A_n|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}|(A_i\cap A_n)\cap(A_j\cap A_n)|+$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n-1}|(A_i\cap A_n)\cap(A_j\cap A_n)\cap(A_k\cap A_n)|\ -\ldots$$

$$+(-1)^{n-2}|(A_1\cap A_n)\cap(A_2\cap A_n)\cap\dots\cap(A_{n-1}\cap A_n)|\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|\ -$$

$$-\dots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n|.$$

Здесь мы воспользовались равенствами

$$(A_1\cap A_n)\cap(A_2\cap A_n)=A_1\cap A_2\cap A_n;$$

$$(A_1\cap A_n)\cap(A_2\cap A_n)\cap(A_3\cap A_n)=$$
$$=A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_n,\quad \ldots$$

$$(A_1\cap A_n)\cap(A_2\cap A_n)\cap\dots\cap(A_{n-1}\cap A_n)=$$
$$=A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n.$$ ◀

Теорема 3.4 (правило суммы)
Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — конечные попарно непересекающиеся множества (т. е. $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$), то

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|. \tag{3.6}$$

Ясно, что это тривиальное следствие из предыдущей теоремы.

Замечания и вопросы в конце параграфа

$\boxed{?}$ $\boxed{!}$

1. Дайте определение бесконечного множества (т. е. не являющегося конечным).

2. В конце доказательства утверждения 3.2 мы привели без доказательства утверждение о том, что не существует биективного отображения $\varphi : X \to Y$, если $|X| = 1$, а $|Y| \geqslant 2$. Докажите его самостоятельно.

3. Справедливо ли следующее утверждение: «Отображение $|\ |$, действующее из множества конечных множеств во множество Z_+ неотрицательных целых чисел, сопоставляющее конечному множеству число элементов в нем, сюръективно»?

4. В студенческой группе — 25 человек, 13 из них знают английский язык, 12 — немецкий, 13 — французский, 4 человека знают английский и французский, 6 — английский и немецкий, 5 — немецкий и французский. Сколько студентов знают все три языка?

§ 3.2. Декартово произведение множеств, множество степень

Определение 3.3. *Декартовым*[1] *произведением множеств X и Y называется множество, обозначаемое $X \times Y$, элементами которого являются упорядоченные пары $(x; y)$, где $x \in X$, $y \in Y$. Равенство упорядоченных пар $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ $(z_1, z_2 \in X \times Y)$ понимается в следующем смысле:*

$$z_1 = z_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} (x_1 = x_2) \& (y_1 = y_2).$$

Теорема 3.5. *Если X и Y — конечные множества, то $X \times Y$ — конечное множество и*

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|. \tag{3.7}$$

► Ясно, что в случае, когда одно из множеств X, Y пусто, то и $X \times Y$ пусто и (3.7) тривиально выполнено. Рассмотрим случай, когда X и Y — непустые множества. Зафиксируем в X нумерацию

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_{|X|}\}.$$

[1] Декарт Рене (1596–1650) — выдающийся французский математик и философ. Окончил иезуитский колледж, после чего два года посвятил изучению математики. Пытался стать военным, но слабое здоровье не позволило ему осуществить юношеские мечты. После этого он провел несколько лет в Париже, где занимался изучением математики, философии и конструировал оптические приборы. Затем 20 лет жил в Голландии, где им были сделаны основные математические и философские открытия. В 1649 г. по приглашению королевы Кристины Декарт переехал в Швецию. Суровый климат оказался для Декарта губительным, зимой 1650 г. он скончался от пневмонии.

Ясно, что $X \times Y = \bigcup\limits_{i=1}^{|X|} \{x_i\} \times Y$ и множества $\{x_i\} \times Y$ попарно не пересекаются, тогда по правилу суммы имеем

$$|X \times Y| = \sum_{i=1}^{|X|} |\{x_i\} \times Y|. \tag{3.8}$$

Рассмотрим отображение $f_i : \{x_i\} \times Y \to Y$, действующее по правилу

$$f_i((x_i; y)) = y.$$

Ясно, что f_i — биективное отображение, тогда по основному принципу комбинаторики получаем

$$|\{x_i\} \times Y| = |Y|. \tag{3.9}$$

Подставляя (3.9) в (3.8), получим

$$|X \times Y| = \sum_{i=1}^{|X|} |Y| = |X| \cdot |Y|.$$

◀

Определение 3.4. *Пусть X — множество и $n \in N$. Определим декартовы степени множества X следующим:*

$$X^1 = X; \quad X^2 = X \times X; \quad \ldots \quad X^n = X^{n-1} \times X.$$

! **Замечание.** Традиционно n-я декартова степень множества $R(\mathbb{C}, \mathbb{Z})$ обозначается не $R^n(C^n, \mathbb{Z}^n)$, а $R_n(\mathbb{C}_n, \mathbb{Z}_n)$; в последнее время входят в употребление обозначения $R^n(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}^n)$, соответствующие определению 3.4.

Теорема 3.6. *Если X — конечное множество, то*

$$|X^n| = |X|^n. \tag{3.10}$$

Ясно, что теорема 3.6 — следствие теоремы 3.5.

Задача 3.1. Из города A в город B ведут три дороги, а из города B в город C — четыре дороги. Сколькими способами можно добраться из A в C через B?

► Задача, конечно, очень простая. Однако она демонстрирует особенности задач по комбинаторике, которые создают трудности при решении. Укажем на главную из этих особенностей.

Задача первоначально формулируется не как математическая, а как задача реальной жизни, и поэтому требуется ее переработка в математическую задачу. При этом нужно отделить существенные факторы от несущественных. (Как правило, нужно четко уяснить, что понимается под способом.) Действительно, если при подсчете способов мы будем учитывать время суток, скорость и способ перемещения (пешком, на автомобиле, велосипеде и т. п.), то задача становится чрезвычайно простой, а ее ответ вряд ли устроит составителя задачи. Ясно, что при учете указанных факторов ответ задачи: «Имеется бесконечное множество способов». Если же отвлечься от всех указанных факторов и под способом попасть из A в C через B понимать упорядоченную пару (дорога, по которой перемещаемся из A в B; дорога, по которой перемещаемся из B в C), то решение задачи можно получить, используя понятие декартова произведения. Обозначим: AB — множество дорог, ведущих из A в B; BC — множество дорог, ведущих из B в C.

Тогда математическая задача, к которой свелась исходная задача, выглядит так: «Найти число элементов в декартовом произведении множеств $AB \times BC$».

Ясно, что $|AB \times BC| = |AB| \cdot |BC| = 3 \cdot 4 = 12$.

Ответ: 12 способов. ◄

? **Задача 3.2.** Из города A в город B ведут три дороги, из города B в город C — четыре; имеется также пять дорог из A в C, не проходящих через B.

Сколькими способами можно попасть из A в C, используя указанные дороги?

► Множество всех способов добраться из A в C разобьем на непересекающиеся подмножества I и II, отнеся к первому способы добраться из A в C через B, а ко второму — способы добраться из A в C, минуя B. Тогда, по правилу суммы, «число способов попасть из A в C» =

$$= |I| + |II| = |AB \times BC| + |II| = 3 \cdot 4 + 5 = 17.$$

Ответ: 17 способов. ◄

Определение 3.5. *Пусть X и Y — непустые множества. Обозначим через Y^X множество отображений, действующих из X в Y, т. е.*

$$f \in Y^X \Leftrightarrow f : X \to Y.$$

Множество Y^X называют множеством степень.

Мы хотим доказать теорему о числе элементов во множестве степень, когда X и Y — конечные множества. Доказательство теоремы опирается на две леммы.

Лемма 3.1. *Пусть X и Y — конечные непустые множества и $|X| = 1$, тогда*

$$|Y^X| = |Y|. \tag{3.11}$$

► Зафиксируем в X и Y нумерации —

$$X = \{x_1\}, \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{|Y|}\}.$$

Занумеруем элементы множества Y^X условием:

$$f_1(x_1) = y_1, \ f_2(x_1) = y_2, \dots, f_{|Y|}(x_1) = y_{|Y|}.$$

Ясно, что нумерующий отрезок — $[1; |Y|]_N$. ◄

Лемма 3.2. *Пусть X, Y — конечные непустые множества, $|X| \geqslant 2$, $x \in X$, тогда*

$$|Y^X| = |Y| \cdot |Y^{X \setminus \{x\}}|. \tag{3.12}$$

► Зафиксируем в X и Y нумерации, выбрав такую нумерацию множества X, при которой $x = x_{|X|}$.

Множество Y^X представим в виде объединения попарно непересекающихся множеств A_i $(i = 1, 2, \ldots, |Y|)$, отнеся f $(\in Y^X)$ ко множеству A_i, если

$$f(x_{|X|}) = y_i.$$

По правилу суммы (равенство (3.6)) получаем

$$|Y^X| = |\bigcup_{i=1}^{|Y|} A_i| = \sum_{i=1}^{|Y|} |A_i|. \tag{3.13}$$

Рассмотрим одно из множеств A_i. Каждое отображение $f \in A_i$ однозначно определяется своим ограничением (сужением) на множество $X \setminus \{x_{|X|}\}$ (стрелочная диаграмма любого отображения $f \in A_i$ содержит стрелку, ведущую из $x_{|X|}$ в y_i (см. рис. 3.1)).

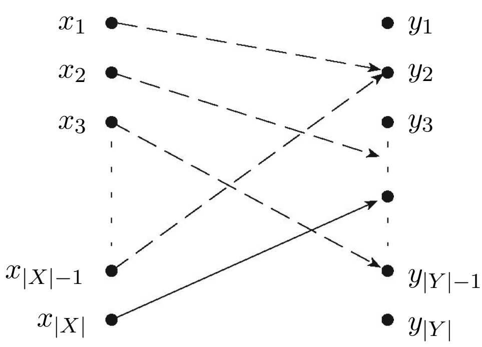


Рис. 3.1. Стрелки, указанные пунктиром, — ограничение f на $X \setminus \{x_{|X|}\}$.

Ясно, что

$$|A_i| = |Y^{X\setminus\{x_{|X|}\}}| = |Y^{X\setminus\{x\}}|. \qquad (3.14)$$

Подставляя (3.14) в (3.13), получаем

$$|Y^X| = \sum_{i=1}^{|Y|} |A_i| = \sum_{i=1}^{|Y|} |Y^{X\setminus\{x\}}| = |Y| \cdot |Y^{X\setminus\{x\}}|.$$

◀

Теорема 3.7. *Пусть X и Y — конечные непустые множества, тогда Y^X — конечное множество и*

$$|Y^X| = |Y|^{|X|}. \qquad (3.15)$$

▶ Проведем доказательство методом математической индукции, взяв в качестве параметра индукции число элементов во множестве X.

1-й шаг (случай $|X| = 1$**).** Применяя лемму 3.1, имеем

$$|Y^X| = |Y| = |Y|^1 = |Y|^{|X|}.$$

2-й шаг (индуктивный переход). Допустим, что утверждение теоремы справедливо для любого n-элементного множества. Докажем, что в этом случае оно справедливо и для множества X такого, что $|X| = n + 1$. Зафиксируем в X произвольный элемент x и применим лемму 3.2. Тогда

$$|Y^X| = |Y| \cdot |Y^{X\setminus\{x\}}|.$$

Множество $X \setminus \{x\}$ содержит n элементов, и к $Y^{X\setminus\{x\}}$ применимо предположение индукции, тогда

$$|Y^X| = |Y| \cdot |Y^{X\setminus\{x\}}| = |Y| \cdot |Y|^{|X\setminus\{x\}|} =$$
$$= |Y| \cdot |Y|^{|X|-1} = |Y|^{|X|}.$$

Индуктивный переход, а следовательно и вся теорема доказаны. ◀

? **Задача 3.3.** В НИИ работают 4 курьера — A, B, C, D. Сколько существует способов разослать 7 писем в 7 различных организаций, если доставка осуществляется только курьерами, работающими в институте?

► Ясно, что мы не учитываем время суток, погодные условия, скорость доставки и т. п. Каждый способ доставки однозначно определяется указанием для каждого письма, какой из курьеров его доставляет. То есть способ доставки — отображение из множества писем П во множество курьеров К. Тогда «число способов доставки писем» $= |\text{К}^{\text{П}}| = |\text{К}|^{|\text{П}|} = 4^7 = 16\,384$ способа. ◄

? **Задача 3.4.** В кабину лифта 9-этажного дома вошли 3 пассажира — A, B, C, каждый из которых может выйти на любом из 8 этажей. Сколькими способами может осуществиться разгрузка лифта?

► Способ разгрузки — это указание, на каком этаже выходит пассажир A, на каком — пассажир B, на каком — пассажир C, т. е. сопоставление пассажиру этажа, на котором он выходит.

Обозначим через П множество пассажиров, Э — множество этажей выхода. Значит, «число способов осуществления разгрузки лифта» $= |\text{Э}^{\text{П}}| = |\text{Э}|^{|\text{П}|} = 8^3 = 512$. ◄

Вопросы в конце параграфа

? **1.** Попробуйте самостоятельно составить комбинаторные задачи, сводящиеся к нахождению числа элементов в декартовом произведении множеств и во множестве степень.

2. Справедливы ли теоремы, обратные к теоремам 1–3 этого параграфа, и как они формулируются?

3. Попробуйте доказать коммутативность сложения и умножения натуральных чисел, используя комбинаторный подход.

§ 3.3. Множества инъективных и биективных отображений. Размещения, перестановки

В этом параграфе мы продолжим изучение множества Y^X, вернее, его подмножеств: множества инъективных отображений — $In\,Y^X$ и множества биективных отображений — $Bi\,Y^X$ (в случае, когда $|X| = |Y|$). Затем будут введены основные комбинаторные понятия — размещения и перестановки.

Множество инъективых отображений

Определение 3.6. *Пусть X, Y — непустые множества. Обозначим через $In\,Y^X$ множество инъективных отображений из X в Y, т. е. $f \in In\,Y^X \Leftrightarrow f\colon X \to Y$ — инъективное отображение.*

Критерий непустоты множества инъективных отображений

Теорема 3.8. *Пусть X, Y — конечные непустые множества. Для того чтобы $In\,Y^X$ было непусто, необходимо и достаточно, чтобы $|Y| \geqslant |X|$.*

▶ Необходимость ▶

Так как $In\,Y^X$ непусто, то существует $f\colon X \to Y$ — инъективное отображение. Представим Y в виде $Y = f(X) \cup (Y \setminus f(X))$. Очевидно, $|f(X)| = |X|$.

Действительно, если рассмотреть отображение $f_1\colon X \to f(X)$, заданное правилом $f_1(x) = f(x)$ $(\forall x \in X)$, то f_1 биективно. Тогда на основании основного принципа комбинаторики получаем, что $|X| = |f_1(X)| = |f(X)|$. Множества $f(X)$ и $Y \setminus f(X)$ не пересекаются, поэтому

$$|Y| = |f(X)| + |Y \setminus f(X)| = |X| + |Y \setminus f(X)| \geqslant |X|.$$

◀ Необходимость.

Достаточность ▶

По условию теоремы, $1 \leqslant |X| \leqslant |Y| < \infty$. Зафиксируем нумерации множеств X и Y, т. е.

$$X = \{x_1; x_2; \ldots; x_{|X|}\}, \quad Y = \{y_1; y_2; \ldots; y_{|Y|}\}.$$

Рассмотрим отображение $\varphi\colon X \to Y$, порожденное этими нумерациями, $\varphi(x_i) = y_i$.

Ясно, что это отображение инъективно, а значит, множество $In\,Y^X$ непусто. ◀ Достаточность ◀

Лемма 3.3. *Пусть X, Y — непустые конечные множества и $1 = |X| \leqslant |Y| < \infty$, тогда*

$$|In\,Y^X| = |Y|. \tag{3.16}$$

▶ Очевидно, в случае $|X| = 1$ любое отображение $f\colon X \to Y$ инъективно, т. е. $In\,Y^X = Y^X$, тогда, используя лемму 3.1 из предыдущего параграфа, получаем

$$|In\,Y^X| = |Y^X| = |Y|. \quad ◀$$

Лемма 3.4. *Пусть X, Y — непустые конечные множества, $1 < |X| \leqslant |Y| < \infty$ и $x \in X$, тогда*

$$|In\,Y^X| = |Y| \cdot |In\,(Y \setminus \{y\})^{X \setminus \{x\}}|, \tag{3.17}$$

где $y \in Y$.

► Как и при доказательстве леммы 3.2 из предыдущего параграфа, зафиксируем в X такую нумерацию, что $x = x_{|X|}$. Представим $In\,Y^X$ в виде объединения попарно непересекающихся множеств B_i $(i = 1, 2, \dots, |Y|)$, отнеся f $(\in In\,Y^X)$ ко множеству B_i, если

$$f(x_{|X|}) = y_i.$$

Используя правило суммы (равенство (3.6)), получаем

$$|In\,Y^X| = \left|\bigcup_{i=1}^{|Y|} B_i\right| = \sum_{i=1}^{|Y|} |B_i|. \qquad (3.18)$$

Рассмотрим одно из множеств B_i.

Каждое отображение $f \in B_i$ однозначно определяется своим ограничением на множество $X \setminus \{x_{|X|}\}$. Ясно, что $y_i \notin f(X \setminus \{x_{|X|}\})$ из-за инъективности f. При этом

$$f|_{X \setminus \{x_{|X|}\}}:\ X \setminus \{x_{|X|}\} \to Y \setminus \{y_i\} \text{ — инъективно.}$$

Стрелочная диаграмма любого отображения $f \in B_i$ содержит стрелку, ведущую из $x_{|X|}$ в y_i, а стрелки, ведущие из $X \setminus \{x_{|X|}\}$, ведут в $Y \setminus \{y_i\}$ «инъективно» (см. рис. 3.2).

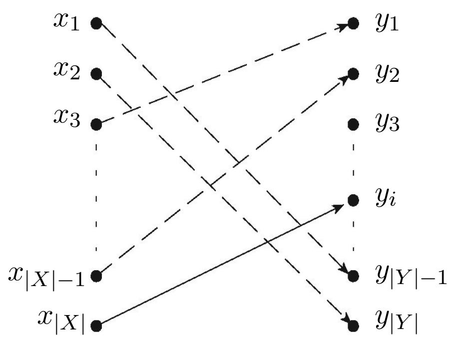


Рис. 3.2 Стрелки, указанные пунктиром, — ограничение f на $X \setminus \{x_{|X|}\}$.

Тогда
$$|B_i| = |In\,(Y \setminus \{y_i\})^{X \setminus \{x_{|X|}\}}|. \tag{3.19}$$

Поскольку нумерация в Y зафиксирована произвольно, а эти рассуждения можно повторить для любой нумерации, можно записать
$$|B_i| = |In\,(Y \setminus \{y_i\})^{X \setminus \{x\}}|, \tag{3.20}$$
где $x \in X$, $y \in Y$.

Подставляя (3.20) в (3.18), получаем
$$|In\,Y^X| = \sum_{i=1}^{|Y|} |B_i| = \sum_{i=1}^{|Y|} |In\,(Y \setminus \{y\})^{X \setminus \{x\}}| =$$
$$= |Y| \cdot |In\,(Y \setminus \{y\})^{X \setminus \{x\}}|, \text{ где } x \in X,\ y \in Y. \qquad ◀$$

Теорема 3.9. *Пусть X, Y — конечные непустые множества, $1 \leqslant |X| \leqslant |Y| < \infty$, тогда*
$$|In\,Y^X| = |Y| \cdot (|Y| - 1) \cdot (|Y| - 2) \ldots (|Y| - |X| + 1) =$$
$$= \frac{|Y|!}{(|Y| - |X|)!}. \tag{3.21}$$
(В средней части формулы (3.21) содержится $|X|$ сомножителей, первый из которых — наибольший, а каждый следующий меньше предыдущего на 1.)

▶ Проведем доказательство методом математической индукции, взяв в качестве параметра индукции число элементов во множестве X.

1-й шаг (случай $|X| = 1$). Применяя лемму 3.3, имеем
$$|In\,Y^X| = |Y|.$$

В правой части, как и требует в этом случае формула 3.21, один сомножитель — $|Y|$.

2-й шаг (индуктивный переход). Допустим, что утверждение теоремы справедливо для любого n-

элементного множества. Докажем, что в этом случае оно справедливо и для множества X такого, что $|X| = n + 1$. Зафиксируем в X произвольный элемент x и применим лемму 3.4.

$$|In\,Y^X| = |Y| \cdot |In\,(Y \setminus \{y\})^{X\setminus\{x\}}|, \text{ где } x \in X,\ y \in Y.$$

Множество $X\setminus\{x\}$ содержит n элементов, и к $In\,(Y \setminus \{y\})^{X\setminus\{x\}}$ в последнем равенстве применимо предположение индукции, тогда

$$\begin{gathered}|In\,Y^X| = |Y| \cdot |In(Y \setminus \{y\})^{X\setminus\{x\}}| = \\ = |Y| \cdot (|Y \setminus \{y\}| \cdot (|Y \setminus \{y\}| - 1) \ldots \\ \ldots (|Y \setminus \{y\}| - |X \setminus \{x\}| + 1) = \\ \overset{|X\setminus\{x\}|=|X|-1}{=} |Y| \cdot ((|Y| - 1) \cdot \\ \cdot (|Y| - 2) \ldots (|Y| - 1 - |X| + 1 + 1) = \\ = |Y| \cdot ((|Y| - 1) \cdot (|Y| - 2) \ldots (|Y| - |X| + 1)) .\end{gathered}$$

Индуктивный переход, а значит и вся теорема доказаны. ◀

? **Задача 3.5.** Имеются 15 различных книг и книжная полка, вмещающая 12 книг. Сколько существует способов заполнить книжную полку, используя имеющиеся книги?

► Ясно, что мы не учитываем время суток, толщину книг и т. п., однако можно считать, что на полке имеются места (отсеки) для книг — 1-е место, 2-е место, ..., 12-е место. Заполнить полку — это значит сопоставить месту на полке книгу, его (место) заполняющую. То есть заполнить полку — это значит задать отображение из множества мест во множество книг, при этом, поскольку любая книга не может заполнить более одного места, отображения инъективны.

Значит, «число способов заполнения книжной полки» =

$$|In\, K^M| = |K| \cdot (|K| - 1) \ldots (|K| - |M| + 1) =$$
$$= 15 \cdot 14 \ldots 5 \cdot 4 = \tfrac{15!}{3!} = 217\,945\,728\,000 \text{ способов.}$$

Здесь K — множество книг, M — множество мест на книжной полке. ◀

$\boxed{?}$ **Задача 3.6.** В кабину лифта 9-этажного дома вошли 3 пассажира, каждый из них может выйти на любом из восьми этажей. Сколько существует способов разгрузки лифта, при которых на каждом этаже выходит не более одного пассажира?

▶ Ясно, что «число способов разгрузки» =

$$= |In\, Э^{П}| = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

(Обозначения см. в задаче 3.4.) ◀

Определение 3.7
Пусть X и Y — множества, обозначим через $Bi\,Y^X$ множество биективных отображений множества X во множество Y, т. е. $f \in Bi\,Y^X \Leftrightarrow f : X$ — биективное отображение.

Теорема 3.10 (критерий непустоты $Bi\,Y^X$)
Пусть X, Y — непустые конечные множества. Для того чтобы $B : Y^X \neq \varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы

$$|X| = |Y|.$$

▶ Необходимость ▶

Пусть $f \in Bi\,Y^X$, тогда, так как f сюръективно, $f(X) = Y$, а так как f — инъективно, то $|f(X)| = |X|$. Значит, $|X| = |Y|$. ◀ Необходимость

Достаточность ►

Зафиксируем нумерации в X и Y.

$$X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}, \quad Y = \{y_1; y_2; \ldots; y_n\},$$

где $n = |X| = |Y|$. Рассмотрим $f : X \to Y$, заданное правилом $f(x_i) = y_i$. Ясно, что f биективно, т. е. $Bi\,Y^X \neq \varnothing$.

◄ Достаточность ◄

Теорема 3.11. *Пусть X, Y — конечные непустые множества и $|X| = |Y|$. Имеет место формула*

$$|Bi\,Y^X| = |X|! = |Y|!, \tag{3.22}$$

где

$$|X|! = |X| \cdot (|X| - 1)(|X| - 2) \ldots 2 \cdot 1.$$

► Очевидно, в случае, когда $|X| = |Y|$, имеет место $Bi\,Y^X = In\,Y^X$, значит, по теореме 3.10 имеем

$$|Bi\,Y^X| = |In\,Y^X| = |Y| \cdot (|Y| - 1) \ldots 1 = |Y|! = |X|!. \ ◄$$

Основные комбинаторные понятия

Определение 3.8. *Пусть X — непустое конечное множество, $|X| = n$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Размещениями длины m элементов множества X называют инъективные отображения множества $[1; m]_N$ в X. Обозначим через $\mathbb{A}_X^m$ множество размещений длины m элементов множества X. Это означает, что*

$$\mathbb{A}_X^m = In\,X^{[1;m]_N}, \tag{3.23}$$

а через $A_{|X|}^m$ — число размещений длины m элементов множества X. Это означает, что

$$A_{|X|}^m = |\mathbb{A}_X^m|. \tag{3.24}$$

Теорема 3.12. *Пусть* $1 \leqslant m \leqslant n$, *тогда*

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

$\boxed{!}$ **Замечание.** $\quad 0! \stackrel{def}{=} 1.$

▶ Ясно, что теорема 3.12 — переформулировка теоремы 3.9. ◀

Определение 3.9. *Пусть* X *— конечное непустое множество,* $n = |X|$. *Перестановками элементов множества* X *называют биективные отображения множества* $[1;n]_N$ *в* X. *Множество перестановок элементов* X *обозначают* $\mathbb{P}_X$, *а число перестановок элементов* X *— через* $P_{|X|}$, *т. е.*

$$P_{|X|} \stackrel{def}{=} |\mathbb{P}_X|. \tag{3.25}$$

Теорема 3.13. *Пусть* $1 \leqslant n < \infty$, *тогда*

$$P_n = n!. \tag{3.26}$$

▶ Ясно, что теорема 3.13 — переформулировка теоремы 3.11. ◀

Замечания и вопросы в конце параграфа

$\boxed{?}$ $\boxed{!}$

1. В обозначении $A_{|X|}^m$ есть формальный след множества X, в записи A_n^m этот след исчез, можно в этом случае в качестве порождающего множества X такого, что $|X| = n$, взять множество $X = [1;n]_N$.
2. То же самое, что и замечание 1, только для случая P_n.

3. Сколькими способами можно заполнить полку, вмещающую 17 книг, если имеется 17 различных книг?
4. Коробка для хранения 12 дискет имеет нумерованные отсеки, вмещающие каждый по одной дискете. Сколько существует способов заполнения коробки двенадцатью различными дискетами? Одиннадцатью различными дискетами? Десятью дискетами?
5. У студента 15 дискет с различными данными. Для хранения дискет он приобрел коробку (см. п. 4). Сколькими способами он может ее заполнить (чтобы все отсеки в ней были заполнены)? То же самое, только студент может хранить в коробке $12, 11, \ldots, 1, 0$ дискет?
6. У студента 15 дискет с различными данными. Для хранения дискет он приобрел синюю и красную коробки (см. п. 4). Сколько существует способов размещения всех дискет на хранение?

§ 3.4. Бином Ньютона. Сочетания. Сочетания с повторениями

Этот параграф посвящен перечислению подмножеств конечных множеств и приложениям полученных результатов в теории бинома Ньютона, который используется в алгебре и анализе.

Начнем этот параграф с бинома Ньютона, т. е. с разложения по степеням a, b бинома $(a+b)^n$ $(n \in Z_+)$.

Ясно, что $(a+b)^0 = 1$;

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m \quad (n \in N). \tag{3.27}$$

Коэффициенты C_n^i называются *биномиальными коэффициентами* (для них применяют и другие обозначения: $C(n,i)$ и $\binom{n}{i}$). Какой комбинаторный смысл имеют эти коэффициенты? Правая часть формулы (3.27) получается после возведения $a+b$ в n-ю степень (перемножением скобок $(a+b)$ и приведением подобных членов), т. е. мы имеем произведение скобок

$$(a+b)_1 \cdot (a+b)_2 \cdot \cdots \cdot (a+b)_n$$

и должны раскрыть скобки, привести подобные и расположить слагаемые по убывающим степеням a. Коэффициент C_n^m стоит при выражении $a^{n-m}b^m$, слагаемые такого вида получаются при раскрытии скобок в тех случаях, когда из m скобок берется b, из оставшихся $(n-m)$ скобок — a. То есть C_n^m — это число способов выбора m скобок из имеющихся n скобок. Выбирая m скобок из имеющихся n скобок, мы выделяем m-элементное подмножество из n-элементного множества.

Заметим, что из этого комбинаторного истолкования коэффициентов бинома мы, еще не зная формулы для числа m-элементных подмножеств данного n-элементного множества, получаем следующее свойство:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad 0 \leqslant m \leqslant n. \tag{3.28}$$

► a и b входят в разложения бинома равноправно, тогда

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m = (b+a)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m b^{n-m} a^m.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в двух разложениях одного и того же бинома, получаем равенство (3.28). ◄

Определение 3.10. *Пусть X — конечное непустое множество, $0 \leqslant m \leqslant n = |X|$. Сочетаниями длины m из элементов множества X называют m-элементные подмножества X. Множество сочетаний длины m из элементов множества X обозначают $\mathbb{C}_X^m$, а их число — $C_{|X|}^m$, т. е.*

$$|\mathbb{C}_X^m| = C_n^m.$$

Теорема 3.14. *Пусть $n \geqslant 1$ и $0 \leqslant m \leqslant n$, тогда*

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} = \\ = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{3.29}$$

► Пусть X — какое-нибудь n-элементное множество. Рассмотрим множество инъективных отображений

$$In\, X^{[1;\, m]_N}.$$

Разобьем его на непересекающиеся подмножества по следующему принципу: два инъективных отображения $f, g\colon [1; m]_N \to X$ относятся к одному и тому же подмножеству разбиения тогда и только тогда, когда

$$f([1; m]_N) = g([1; m]_N)$$

(т. е. если образы области определения совпадают).

Образ области определения — отрезка натурального ряда $[1; m]_N$ при инъективном отображении является m-элементным подмножеством X.

Ясно, что любое m-элементное подмножество X является образом хотя бы одного инъективного отображения отрезка натурального ряда $[1; m]_N$ в X, т. е. множеств разбиения множества $In\, X^{[1;m]_N}$ мы получим столько, сколько существует m-элементных подмножеств X, т. е. C_n^m.

Займемся одним из множеств разбиения. В нем находятся все инъективные отображения отрезка $[1;m]_N$ в X, дающие один и тот же образ области определения. Ясно, что их столько, сколько биективных отображений из $[1;m]_N$ в этот образ, т. е. P_m. Тогда, применяя правило суммы, получим

$$A_n^m = |\mathbb{A}_X^m| = \left|\sum_{i=1}^{C_n^m} B_i\right| = \sum_{i=1}^{C_n^m} |B_i| = \sum_{i=1}^{C_n^m} P_m = C_n^m \cdot P_m,$$

или

$$C_n^m = \tfrac{A_n^m}{P_m}. \qquad ◀$$

! **Замечание.** Ясно, что $C_n^0 = |\{\varnothing\}| = 1$, если положить $A_n^0 = 1$, $P_0 = 1$, то формула (3.29) будет справедлива и для случая $m = 0$.

? **Задача 3.7.** В студенческой группе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать из них трех человек для участия в профсоюзной конференции факультета?

► Ясно, что представители, выбранные на конференцию, — трехэлементное подмножество множества студентов группы, тогда «число способов выбора» $= \frac{25\cdot24\cdot23}{1\cdot2\cdot3} =$ $= 2\,300$. ◀

Напомним, что если X —множество, то 2^X — множество всех его подмножеств. (Напомним, что обозначение «2^X» введено в конце § 2.3.)

Теорема 3.15. *Для любого конечного множества X имеет место равенство*

$$|2^X| = 2^{|X|}. \tag{3.30}$$

► Ясно, что в случае, когда $X = \varnothing$ ($\Leftrightarrow |X| = 0$), формула (3.30) верна.

Рассмотрим случай, когда X — непустое множество, т. е. когда $n = |X| \geqslant 1$. Зафиксируем нумерацию X, т. е.

$$X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}.$$

Каждому $A \in 2^X$ ($\Leftrightarrow A \subset X$) сопоставим $|X|$-разрядное двоичное число $d_A = (d_{1A} d_{2A} \ldots d_{|X|A})_2$, положив

$$d_{iA} = \begin{cases} 1, \text{если } x_i \in A, \\ 0, \text{если } x_i \notin A. \end{cases}$$

Ясно, что отображение $\varphi\colon 2^X \to$ «множество $|X|$-разрядных двоичных чисел», действующее по правилу

$$\varphi(A) = d_A,$$

является биективным отображением. Тогда, по основному принципу комбинаторики,

$$|2^X| = |\text{«множество } |X|\text{-разрядных двоичных чисел»}| = 2^{|X|}.$$

◄

Проведем еще одно доказательство теоремы 3.15 в случае $n = |X| \geqslant 1$.

► Рассмотрим множество $\{0; 1\}^X$ — множество отображений из множества X в двухэлементное множество $\{0; 1\}$ и сопоставим каждому $A \in 2^X$ ($A \subset X$) отображение

$$\chi_A\colon X \to \{0; 1\} \ (\Leftrightarrow \chi_A \in \{0; 1\}^X),$$

заданное правилом

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A, \\ 0, \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Ясно, что $F : 2^X \to \{0; 1\}$, действующее по правилу $F(A) = \chi_A$, является биективным отображением, тогда, по основному принципу комбинаторики,

$$|2^X| = |\{0; 1\}^X| \overset{\text{теорема 3.7}}{=} |\{0; 1\}|^{|X|} = 2^{|X|}.$$ ◄

Некоторые свойства биномиальных коэффициентов

Теорема 3.16

Пусть $0 \leqslant m \leqslant n$. *Имеют место следующие свойства:*

$$1)\ C_n^m = C_n^{n-m};$$
$$2)\ C_{n+1}^{m+1} = C_n^{m+1} + C_n^m;$$
$$3)\ \sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n.$$

► 1) ► Соотношение 1 мы уже доказали (см. формулу (3.28)), используя симметрию бинома. Его можно легко доказать, и воспользовавшись формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Действительно, тогда

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = C_n^m.$$

Приведем еще одно (третье!) комбинаторное доказательство. Зафиксируем X — n-элементное множество и рассмотрим $\mathbb{C}_X^m$ — множество m-элементных подмножеств X. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{C}_X^m \to \mathbb{C}_X^{n-m}$, заданное правилом $\varphi(A) = X \setminus A$.

Ясно, что φ — биективное отображение из $\mathbb{C}_X^m$ в $\mathbb{C}_X^{n-m}$.

Тогда, по основному принципу комбинаторики,

$$C_n^m = C_n^{n-m}. \qquad ◄_1$$

2) ► Зафиксируем в $(n+1)$-элементном множестве X произвольную нумерацию, т. е.

$$X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n; x_{n+1}\}.$$

Разобьем множество $\mathbb{C}_X^{m+1}$ на два непересекающихся множества I и II, отнеся ко множеству I такие $(m+1)$-элементные подмножества X, которые не содержат x_{n+1}, а ко второму — такие $(m+1)$-элементные подмножества X, которые содержат x_{n+1}. Ясно, что

$$C_{n+1}^{m+1} = |\mathbb{C}_X^{m+1}| = |I| + |II|;$$

$$|I| = |\mathbb{C}^{m+1}_{X\setminus\{x_{n+1}\}}| = C_n^{m+1}; \quad |II| = |\mathbb{C}^{m}_{X\setminus\{x_{n+1}\}}| = C_n^m.$$

В пояснении нуждается только последнее равенство. Действительно, любое $(m+1)$-элементное подмножество X, содержащее x_{n+1}, может быть получено добавлением к m-элементному подмножеству множества $X \setminus \{x_{n+1}\}$ элемента x_{n+1}. $\blacktriangleleft_2$

3) $\blacktriangleright$ Пусть X — n-элементное множество, тогда

$$2^X = \bigcup_{m=0}^{n} \mathbb{C}_X^m.$$

Множества $\mathbb{C}_X^m$ не пересекаются, т. е.

$$\mathbb{C}_X^i \bigcap \mathbb{C}_X^j = \varnothing, \text{ если } i \neq j.$$

Тогда, по правилу суммы,

$$2^n = |2^X| = \sum_{m=0}^{n} |\mathbb{C}_X^m| = \sum_{m=0}^{n} C_n^m. \qquad \blacktriangleleft_3$$

Приведем еще одно доказательство соотношения 3 и теоремы 3.15 (ее третье доказательство).

Если X — произвольное n-элементное множество, то

$$|2^X| = \left|\bigcup_{m=0}^{n} \mathbb{C}_X^m\right| = \sum_{m=0}^{n} C_n^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m 1^{n-m} \cdot 1^m =$$

$$\overset{(3.27)}{=} (1+1)^n = 2^n. \qquad \blacktriangleleft$$

Соотношение

$$C_{n+1}^{m+1} = C_n^{m+1} + C_n^m \tag{3.31}$$

для бинома Ньютона означает, что коэффициент C_{n+1}^{m+1} в биноме степени $n+1$ получается суммированием двух соседних коэффициентов в биноме n-й степени. На этом свойстве основана конструкция знаменитого треугольника Паскаля[2] (см. рис. 3.3*а*, рис. 3.3*б*). Равенство (3.31) называют соотношением Паскаля.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & & & \searrow + \swarrow & & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
 & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
\ldots\ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Рис. 3.3*а*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & & & \searrow + \swarrow & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\ldots\ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Рис. 3.3*б*

Теорема 3.17 (тождество Вандермонда[3]) *Пусть* $m, n, r \in Z_+$ *и* $0 \leqslant r \leqslant \min\{m, n\}$, *тогда*

$$C(m+n, r) = \sum_{i=0}^{r} C(m, r-i) \cdot C(n, i). \tag{3.32}$$

[2] Паскаль Блез (1623–1662) — знаменитый французский математик, известен вместе с Декартом и Ферма как основоположник аналитической геометрии, ему принадлежат основные результаты в теории конических сечений. Результаты Паскаля стали основополагающими для раздела «Геометрическая вероятность».

► Возьмем произвольное $m+n$-элементное множество X и зафиксируем в нем произвольную нумерацию

$$X = \{x_1; x_2; \ldots; x_m; x_{m+1}; \ldots; x_{m+n}\}.$$

Множество $\mathbb{C}_X^r$ r-элементных подмножеств множества X разобьем на непересекающиеся подмножества S_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, r)$, отнеся A $(\in \mathbb{C}_X^r)$ ко множеству S_i тогда и только тогда, когда

$$|A \bigcap \{x_{m+1}; x_2; \ldots; x_{m+n}\}| = i. \qquad (3.33)$$

Ясно, что при этом

$$|A \bigcap \{x_1; x_2; \ldots; x_m\}| = r - i. \qquad (3.34)$$

Мы получили, что

$$\mathbb{C}_X^r = \bigcup_{i=0}^{r} S_i, \qquad (3.35)$$

а так как множества S_i попарно не пересекаются, то, по правилу суммы (теорема 3.6), получаем

$$C_{n+m}^r = |\mathbb{C}_X^r| = \sum_{i=0}^{r} |S_i|. \qquad (3.36)$$

Займемся одним из множеств S_i (напомним, что S_i состоит из таких r-элементных подмножеств множества X, для которых выполнено (3.33) и (3.34)).

Разобьем множество S_i на попарно непересекающиеся подмножества S_{ik} по следующему правилу: два подмножества A и B из S_i относятся к одному S_{ik} тогда и только тогда, когда

$$A \bigcap \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = B \bigcap \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}. \qquad (3.37)$$

---

[3] Вандермонд Александр Теофил (1735–1796). Родители прочили сыну музыкальную карьеру, но, несмотря на музыкальное образование, он развил в себе и математические способности. Опубликовал в 1771–1772 гг. четыре работы по математике, внеся существенный вклад в теорию алгебраических уравнений, теорию определителей (в т. ч. знаменитый определитель Вандермонда) и др.

Пересечения, стоящие в левой и правой частях (3.37), являются (см. (3.34)) $r-i$-элементными подмножествами множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Таких подмножеств C_m^{r-i}. Тем самым мы доказали, что существует $\mathbb{C}_m^{r-i}$ множеств S_{ik} (т. е. k принимает значения от 1 до C_m^{r-i}).

По правилу суммы, получим

$$|S_i| = \left|\bigcup_{k=1}^{C_m^{r-i}} S_{ik}\right| = \sum_{k=1}^{C_m^{r-i}} |S_{ik}|. \tag{3.38}$$

Рассмотрим множество S_{ik} (k фиксировано). Ясно, что

$$|S_{ik}| = |\mathbb{C}^i_{\{x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}\}}| = C_n^i. \tag{3.39}$$

Подставляя (3.39) в (3.38), получаем

$$|S_i| = \sum_{k=1}^{C_m^{r-i}} C_n^r = C_m^{r-i} C_n^i. \tag{3.40}$$

Подставляя теперь (3.40) в (3.36), получаем

$$C_{m+n}^r = \sum_{i=0}^{r} C_m^{r-i} C_n^i. \qquad \blacktriangleleft$$

Следствие. В теореме 3.17 m и n фигурируют равноправно, поэтому справедливо

$$C_{m+n}^r = \sum_{i=0}^{r} C_n^{r-i} C_m^i = \sum_{i=0}^{r} C_m^{r-i} C_n^i, \tag{3.41}$$

где $m, n \in Z_+$, $0 \leqslant r \leqslant \min\{m, n\}$.

Сочетания с повторениями

? **Задача 3.8.** В кондитерской продаются пирожные пяти видов (бисквитные, корзиночки, буше, эклеры, трубочки). Сколькими способами можно купить 12 пирожных?

► Покупка взаимнооднозначно определяется набором неотрицательных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_5)$, где x_i — количество приобретаемых пирожных i-го вида ($x_2 = 0$ означает, что мы решили не покупать корзиночки). Тогда наша задача равносильна задаче о числе решений уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12, \quad x_i \in Z_+. \tag{3.42}$$

Сделаем взаимнооднозначную замену $y_i = x_i + 1$, тогда наша задача равносильна задаче о числе решений уравнения

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 17, \quad y_i \in N. \tag{3.43}$$

На прямой отметим 17 точек. Каждому решению уравнения (3.43) сопоставим картинку из отмеченных точек и разделяющих черточек, которая строится следующим образом. Если $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_S^0)$ — решение уравнения (3.43), т. е. набор из пяти натуральных чисел, сумма которых равна 17 (например $(1, 2, 7, 1, 6)$), то отсчитаем слева направо y_1^0 отмеченных точек и за последней отсчитанной точкой ставим вертикальную разделяющую черточку. Затем отсчитываем от полученной черточки y_2^0 точек и ставим следующую разделяющую черточку и т. д.

Какое бы решение уравнения (3.43) мы ни брали, последняя (пятая) черточка будет стоять за последней (семнадцатой) отмеченной точкой.

Договоримся последнюю черточку не рисовать.

Решению (1, 2, 7, 1, 6) соответствует рис. 3.4.

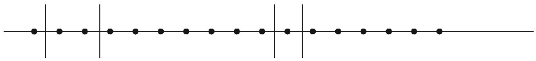


Рис. 3.4

Ясно, что соответствие между решениями и картинками биективное. Подсчитаем количество картинок. Каждая картинка взаимнооднозначно определяется набором из четырех промежутков между точками, в которых проставляются разделяющие черточки.

Число способов выбора четырех промежутков из имеющихся 16 промежутков равно C_{16}^4.

Таким образом, число способов покупки двенадцати пирожных, если имеется 5 видов пирожных, равно

$$C_{16}^4 = C_{12+5-1}^{5-1} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1\,820.$$

◄

Определение 3.11. *Задачами на сочетания с повторениями длины n из m видов называют задачи, сводящиеся к нахождению числа решений уравнений*

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n, \quad x_i \in Z_+. \tag{3.44}$$

Теорема 3.18. *Число сочетаний с повторениями длины n из m видов равно C_{n+m-1}^{m-1}.*

► Можно дословно повторить решение задачи о пирожных, начиная с уравнения (3.44). ◄

Вопросы в конце параграфа

1. Приведите комбинаторное доказательство того факта, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах в разложении бинома $(a+b)^n$ по степеням a, b, равна сумме коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

2. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «арбуз»?

3. То же самое для слова «математика».

4. Сравнивая задачи 3 и 4, попробуйте ввести понятие «перестановка с повторениями» и получить формулу для числа перестановок с повторениями.

§ 3.5. Количество сюръективных отображений

В этом параграфе мы получим формулу (к сожалению, не очень компактную) для количества сюръективных отображений и некоторые интересные следствия из нее.

Обозначим через $\operatorname{sur} Y^X$ множество сюръективных отображений, действующих из X в Y. Через $\neg\operatorname{sur} Y^X$ обозначим множество отображений, действующих из X в Y и не обладающих свойством сюръективности. Ясно, что

$$\operatorname{sur} Y^X = Y^X \setminus (\neg\operatorname{sur} Y^X) \tag{3.45}$$

и если X и Y конечные множества, то

$$|\operatorname{sur} Y^X| = |Y^X| - |\neg\operatorname{sur} Y^X|. \tag{3.46}$$

Попробуем вычислить $|\neg\operatorname{sur} Y^X|$. Зафиксируем в Y произвольную нумерацию — $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{|Y|}\}$. Пусть

$$A_M \stackrel{def}{=} \{f \in Y^X \mid f^{-1}(M) = \varnothing,\ M \subset Y\},$$

тогда

$$\neg\operatorname{sur} Y^X = \bigcup_{M \in \mathbb{C}_Y^1} A_M. \tag{3.47}$$

К сожалению, множества A_M не являются попарно непересекающимися, и мы не можем воспользоваться правилом суммы и вынуждены применить формулу включения-исключения:

$$|\neg\mathrm{sur}\, Y^X| = |\bigcup_{M\in\mathbb{C}^1_Y} A_M| = \sum_{M\in\mathbb{C}^1_Y} |A_M| - \sum_{M\in\mathbb{C}^2_Y} |A_M| +$$
$$+\sum_{M\in\mathbb{C}^3_Y} |A_M| - \cdots + (-1)^{|Y|-2} \sum_{M\in\mathbb{C}^{|Y|-1}_{|Y|}} |A_M| + (-1)^{|Y|-1}|A_Y|.$$

Ясно, что

$$A_Y = \varnothing; \tag{3.48}$$
$$\begin{aligned} |A_M| &= |(Y \setminus M)^X| = (|Y| - |M|)^{|X|} = \\ &= |(Y\setminus\{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}\})^X| = (|Y| - k)^{|X|}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Учитывая (3.49), получаем

$$\sum_{M\in\mathbb{C}^k_Y} |A_M| = C^k_{|Y|}(|Y| - k)^{|X|}. \tag{3.50}$$

Воспользуемся (3.48) и (3.50) и вернемся к вычислению $|\neg\mathrm{sur}\, Y^X|$.

$$\begin{aligned} |\neg\,\mathrm{sur}\, Y^X| &= C^1_{|Y|}(|Y| - 1)^{|X|} - C^2_{|Y|}(|Y| - 2)^{|X|} + \cdots + \\ &+(-1)^{|Y|-3}C^{|Y|-2}_{|Y|}(|Y| - (|Y| - 2))^{|X|} + \\ &+(-1)^{|Y|-2}C^{|Y|-1}_{|Y|}(|Y| - (|Y| - 1))^{|X|} = \\ &= C^1_{|Y|}(|Y| - 1)^{|X|} - C^2_{|Y|}(|Y| - 2)^{|X|} + \cdots + \\ &+(-1)^{|Y|-3}C^{|Y|-2}_{|Y|}2^{|X|} + (-1)^{|Y|-2}C^{|Y|-1}_{|Y|}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Из (3.46) и (3.51) получаем следующую теорему.

Теорема 3.19. *Пусть X, Y — конечные непустые множества. Тогда*

$$\begin{aligned} |\mathrm{sur} Y^X| &= |Y|^{|X|} - C^1_{|Y|}(|Y|-1)^{|X|} + C^2_{|Y|}(|Y|-2)^{|X|} - \ldots + \\ &+ (-1)^{|Y|-2}C^{|Y|-2}_{|Y|}2^{|X|} + (-1)^{|Y|-1}C^{|Y|-1}_{|Y|}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Ясно, что в случае, когда $|X| = |Y|$, $\mathrm{sur}\, Y^X = \mathrm{Bi}\, Y^X$, и мы получаем

Следствие 3.1. *Имеет место формула*

$$n! = n^n - C_n^1(n-1)^n + C_n^2(n-2)^n -$$
$$- C_n^3(n-3)^n + \dots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}. \qquad (3.53)$$

Если $1 \leqslant |X| < |Y|$, множество $\operatorname{sur} Y^X = \varnothing$, и мы получаем

Следствие 3.2. *Пусть $m < n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда справедлива формула*

$$n^m = C_n^1(n-1)^m - C_n^2(n-2)^m + C_n^3(n-3)^m - \dots +$$
$$+ (-1)^{n-3}C_n^{n-2} \cdot 2^m + (-1)^{n-2}C_n^{n-1}. \qquad (3.54)$$

Формулы (3.53) и (3.54) неожиданны и непривычны. Проверим их на конкретных n и m. Подставим в (3.53) $n = 4$:

$$24 = 4! = 4^4 - C_4^1 \cdot 3^4 + C_4^2 2^4 - C_4^3 =$$
$$= 256 - 4 \cdot 81 + 6 \cdot 16 - 4 = 256 - 324 + 96 - 4 = 24.$$

Подставим в (3.54) $n = 4$, $m = 3$:

$$64 = 4^3 = C_4^1 \cdot 3^3 - C_4^2 \cdot 2^3 + C_4^3 =$$
$$= 4 \cdot 27 - 6 \cdot 8 + 4 = 108 - 48 + 4 = 64.$$

Вопросы в конце параграфа

$\boxed{?}$ Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$.

1. Проверьте, что $|\operatorname{sur} Y^X| = 6$.

2. Найдите множество $\operatorname{sur} Y^X$.

3. Найдите множество $\neg\operatorname{sur} Y^X$.

4. Формулы (3.53) и (3.54), может быть, и не так важны, однако мы привели их из-за необычной «техники» доказательства.

§ 3.6. Пути на решетке

? **Задача 3.9.** Рассмотрим на декартовой плоскости решетку, состоящую из вершин, имеющих целочисленные координаты, и дуг, выходящих из каждой вершины в ближайшие к ней вершины, находящиеся от нее справа и сверху (см. рис. 3.5).

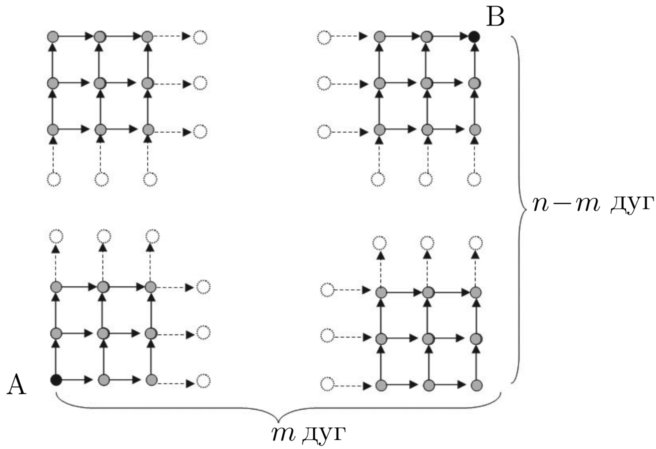


Рис. 3.5

Путем на решетке будем называть последовательность дуг, в которой каждая следующая дуга начинается в вершине, в которой заканчивается предыдущая дуга. Зафиксируем на решетке две вершины A и B и рассмотрим прямоугольник, у которого A является нижней левой вершиной, а B — верхней правой вершиной. По ширине прямоугольника расположено m дуг, а по высоте — $(n-m)$ дуг $(1 < m < n)$.
Сколько различных путей на решетке ведет из нижней левой вершины прямоугольника A в его верхнюю правую вершину B?

► *Решение задачи.* Ясно, что каждый путь, ведущий из вершины A в вершину B, состоит из n дуг, из которых m горизонтальных дуг и $(n-m)$ вертикальных. Каждый такой путь можно кодировать вектором длины n, состоящим из m единиц и $(n-m)$ нулей. Единицы в этом векторе стоят на местах, соответствующих прохождению пути по горизонтальным дугам, а нули — по вертикальным дугам. Например, вектор $(1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0)$ соответствует пути, проходящему по нижней стороне прямоугольника, а затем по правой вертикальной стороне.

Каждый такой $(0-1)$ вектор однозначно определяется набором из m позиций, в которых находятся единицы (или набором из $(n-m)$ позиций, в которых находятся нули). Ясно, что выбор m позиций из имеющихся n позиций можно осуществить C_n^m способами (что выбор $n-m$ позиций из имеющихся n позиций можно осуществить C_n^{n-m} способами).

Таким образом, мы решили задачу о количестве путей на решетке, ведущих из вершины A в вершину B, и попутно доказали, что $C_n^m = C_n^{n-m}$. ◄

Решетка является замечательным «инструментом» для доказательства свойств биномиальных коэффициентов, причем эти доказательства оказываются не только простыми, но и наглядными.

Сейчас мы с помощью решетки приведем еще одно такое доказательство тождества Паскаля:

$$C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}.$$

Увеличим размер прямоугольника, добавив еще один вертикальный слой, т. е. увеличим его ширину на единицу, а высоту оставим прежней. (см. рис. 3.6).

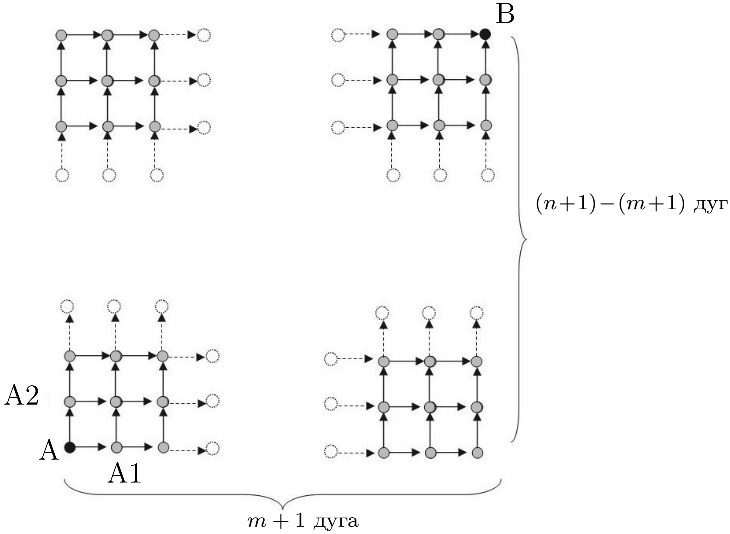


Рис. 3.6

Еще раз выпишем полученный выше результат: *«количество путей, ведущих из вершины A в вершину B»* $=$

$= C^{\text{«основание»}}_{\text{«основание»}+\text{«высота»}}$.

Ясно, что в этом случае количество путей, ведущих из вершины A в вершину B, равно C^{m+1}_{n+1}. Разобьем все множество путей из вершины A в вершину B на два подмножества. К первому подмножеству отнесем такие пути, на которых первый шаг совершается по вертикальной дуге (в вершину $A2$), а ко второму подмножеству — пути, на которых первый шаг совершается по горизонтальной дуге (в вершину $A1$). Тогда количество путей, попавших в первое подмножество, равно количеству путей, ведущих на решетке из вершины $A2$ в вершину B — C^{m+1}_{n} (основание соответствующего прямоугольника равно $m + 1$, а высота равна $n - m - 1$), а количество путей, попавших во второе подмножество, равно количеству путей, ведущих на решетке из вершины $A1$ в вершину B — C_n^m (основание соответствующего прямоугольника равно m, а высота равна $n - m$). Таким образом, мы еще раз доказали тождество Паскаля:

$$C_{n+1}^{m+1} = C_n^{m+1} + C_n^m.$$

Вернемся теперь к доказательству тождества

$$2^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m.$$

Будем считать, что вероятность перехода из вершины в вершину по любой дуге за один временной такт равна $1/2$. Вероятность попадания из вершины $O(0;0)$ в вершину $B(m;n-m)$ за n шагов равна $C_n^m \cdot (1/2)^n$. Тогда $\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m \cdot (1/2)^n$ — вероятность попадания за n шагов из вершины $O(0;0)$ в какую-нибудь вершину решетки. Ясно, что она равна 1.

§ 3.7. Генерация комбинаторных объектов

Для тех, кто занимается биоинформатикой, важнее умение генерировать комбинаторные объекты, чем подсчитывать их количество (количество знать полезно, поскольку это позволяет контролировать, все ли объекты сгенерированы, или представлять себе объем предполагаемой работы по генерации комбинаторных объектов). Генерация предполагает использование какого-нибудь принципа, это позволяет не пропустить объект или не сгенерировать его дважды.

Генерация перестановок

Мы начнем с генерации перестановок. Пусть $X = \{a; b; c; d\}$. Перестановки элементов этого множества — это биективные отображения отрезка $[1; 4]_N$ во множество $\{a; b; c; d\}$. Каждое такое отображение можно задать таблично. Верхняя строка таблицы — $(1|2|3|4)$, в нижней строке находятся соответствующие им значения перестановки (биективного отображения). В этой строке перечисляются элементы множества $\{a; b; c; d\}$, каждый по одному разу. Задать перестановку — это то же самое, что задать нижнюю строку таблицы. Всевозможные строки этой таблицы будем генерировать следующим образом: отдельно сгенерируем строки, в которых элемент a стоит на первом месте, отдельно — такие строки, в которых на первом месте стоит элемент b, отдельно — такие строки, в которых на первом месте стоит элемент c, и т. д. Таким образом, мы собираемся сгенерировать строки четырех видов: $(a\,\square\square\square)$, $(b\,\square\square\square)$, $(c\,\square\square\square)$, $(d\,\square\square\square)$. Строки вида $(a\,\square\square\square)$ будем генерировать далее по аналогичному принципу — строки вида $(a\,b\square\square)$, $(a\,c\,\square\square)$, $(a\,d\,\square\square)$. В результате все перестановки (а их 24) будут сгенерированы в следующем порядке:

$$(abcd), (abdc), (acbd), (acdb), (adbc), (adcb), (bacd), (badc),$$
$$(bcad), (bcda), (bdac), (bdca), (cabd), (cadb), (cbad), (cbda),$$
$$(cdab), (cdba), (dabc), (dacb), (dbac), (dbca), (dcab), (dcba).$$

Применим теперь другой принцип генерации. Он будет основан на некоторой рекурсивной процедуре. Перестановки длины $n + 1$ можно сгенерировать из перестановок длины n, составленных из первых n букв, следующим образом: к каждой такой перестановке применяется вставка $(n+1)$-й буквы спереди, между буквами и в конце перестановки.

Начнем работу в соответствии с этой процедурой.

Составим сначала перестановку длины 1 из буквы a. Мы получили одну перестановку (a). Из нее генерируем перестановки длины 2: $(ba), (ab)$. Из каждой полученной перестановки вставкой c генерируем перестановки длины 3: (cba), (bca), (bac), (cab), (acb), (abc). Применим теперь к каждой перестановке длины 3 процедуру вставки буквы d:

$$(dcba), (cdba), (cbda), (cbad), (dbca), (bdca), (bcda), (bcad),$$
$$(dbac), (bdac), (badc), (bacd), (dcab), (cdab), (cadb), (cabd),$$
$$(dacb), (adcb), (acdb), (acbd), (dabc), (adbc), (abdc), (abcd).$$

Мы сгенерировали те же самые перестановки, но в другом порядке.

★ Рекомендуем читателю попробовать самостоятельно сгенерировать все перестановки длины 4, не заглядывая в книгу.

Генерация цепочек

Рассмотрим теперь следующую задачу.

? **Задача 3.10.** Имеются четыре различные буквы. Сколько четырехбуквенных цепочек длины 4 можно образовать из этих букв?

►Мне неизвестна формула, позволяющая получить ответ задачи, поскольку цепочки — это не то же самое, что перестановки. Действительно, если представить себе цепочку в виде четырех различных бусинок, нанизанных на нить, то, перевернув цепочку (сделав ее левый конец правым, а правый — левым или, что то же самое, посмотрев на цепочку с другой стороны), мы получаем ту же самую цепочку, но порядок расположения бусинок на нити при чтении в том же направлении изменился. Поэтому для решения задачи мы применим следующую процедуру: выбираем из множества перестановок какую-то и удаляем из этого множества ту, которая получается из нее в результате переворачивания. Эту процедуру будем применять до исчерпания возможности применения.

Возьмем множество перестановок длины 4:
$(dcba); (cdba); (cbda); (cbad);\ (dbca); (bdca); (bcda); (bcad);$
$(dbac); (bdac); (badc); (bacd);\ (dcab); (cdab); (cadb); (cabd);$
$(dacb); (adcb); (acdb); (acbd);\ (dabc); (adbc); (abdc); (abcd).$

Применим к этому множеству описанную выше процедуру.

На первом шаге выберется перестановка $\boldsymbol{(dcba)}$ и будет удалена перестановка $(abcd)$. Затем выбирается $\boldsymbol{(cdba)}$ и удаляется $(abdc)$. Далее:
$\boldsymbol{(cbda)}$, $(adbc)$, $\boldsymbol{(cbad)}$, $(dabc)$; $\boldsymbol{(dbca)}$, $(acbd)$;
$\boldsymbol{(dbca)}$, $(acbd)$; $\boldsymbol{(bdca)}$, $(acdb)$; $\boldsymbol{(bcda)}$, $(adcb)$;
$\boldsymbol{(bcad)}$, $(dacb)$; $\boldsymbol{(dbac)}$, $(cabd)$, $(cabd)$; $\boldsymbol{(bacd)}$, $(dcab)$.

Мы видим, что выбрана половина перестановок, причем «удобным для работы» оказался второй способ генерации перестановок, пары (выбранная и выброшенная перестановка расположены в списке симметрично относительно его середины).

Ответ задачи: существует 12 различных цепочек. ◄

Теперь, после того как эта задача с помощью предложенной процедуры решена, становится ясно, что имеет место общая формула для количества различных цепочек такого типа. Оно равно $\dfrac{P_n}{2} = \dfrac{n!}{2}$ $(n \geq 2)$.

Генерация колечек

Рассмотрим теперь следующую задачу.

? **Задача 3.11.** Имеется четыре различные буквы. Сколько четырехбуквенных с четырьмя буквами колечек (ожерелий с четырьмя различными бусинками) можно образовать из этих букв?

Прежде чем мы начнем решать эту задачу, отметим, что кольцевые структуры наряду с цепочками являются основными в генетике и биоинформатике.

►Мне неизвестна формула, позволяющая получить ответ задачи, поскольку колечки — это не то же самое, что цепочки или перестановки. Действительно, если представить себе колечко, то его можно получить, взяв перестановку как упорядоченный набор бусинок, нанизать на нить в цепочку и соединить концы. Мы получаем колечко (будем считать, что стык незаметен). Расположим колечко как циферблат часов и будем считать, что буквы расположены на местах: «12 часов», «3 часа», «6 часов», «9 часов» (см. рис. 3.7).

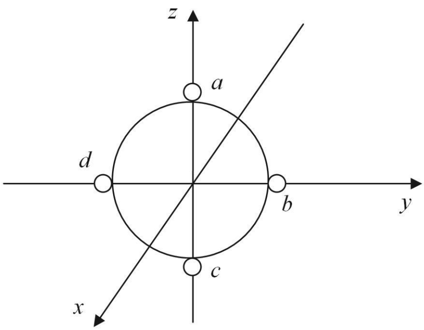


Рис. 3.7

Центр колечка расположен в начале координат. Колечко лежит в плоскости xz, а мы смотрим на него, находясь на положительном направлении оси x-ов. Прочтем надпись на колечке, начиная с верхней буквы по часовой стрелке. Для колечка, изображенного на рисунке 3.7, мы получим $(abcd)$ перестановку. Повернем колечко на $^{\pi}/_{2}$ радиан (90°) по часовой стрелке. Ясно, что мы получили то же самое кольцо, но надпись уже будет читаться как другая перестановка — $(dabc)$. При повороте на π радиан (180°) мы получим $(cdab)$, а при повороте на $^{3\pi}/_{2}$ радиан (270°) — $(bcda)$.

Повороты против часовой стрелки мы не будем рассматривать, так как поворот на $^{\pi}/_{2}$ радиан против часовой стрелки дает такое же положение надписи на кольце, что и поворот на $^{3\pi}/_{2}$ радиан по часовой стрелке, поворот на π радиан против часовой стрелки дает такое же положение надписи на кольце, что и поворот на π радиан по часовой стрелке, поворот на $^{3\pi}/_{2}$ радиан против часовой стрелки дает такое же положение надписи на кольце, что и поворот на $^{\pi}/_{2}$ радиан по часовой стрелке. Повернем теперь колечко вокруг оси z на угол π радиан (это то же самое, что мы смотрим на колечко с тыльной стороны). Заново прочтем надпись на колечке. Вместо исходной надписи $(abcd)$ мы прочтем «зеркальную» надпись $(adcb)$. Повороты колечка на $^{\pi}/_{2}$ радиан, на π радиан, на $^{3\pi}/_{2}$ радиан по часовой стрелке дадут еще три разных надписи: $(badc)$, $(cbad)$, $(dcba)$. Все эти восемь надписей образуют восемь различных перестановок.

Для решения задачи о количестве колечек и их генерации мы применим следующую процедуру: выбираем из множества перестановок какую-то и удаляем из этого множества те, которые получаются из нее в результате поворотов на $\pi/2$, π, $3\pi/2$ радиан, а затем удаляем зеркальную и те, которые получаются из нее в результате поворотов на $\pi/2$, π, $3\pi/2$ радиан. Эту процедуру будем применять до исчерпания возможности применения. Ясно, что количество колечек должно оказаться в восемь раз меньшим, чем количество перестановок.

Осуществим теперь генерацию колечек.

Выпишем множество перестановок длины 4 (его мы нашли раньше (см. п. «Генерация перестановок")) —

$(dcba), (cdba), (cbda), (cbad), (dbca), (bdca), (bcda), (bcad),$
$(dbac), (bdac), (badc), (bacd), (dcab), (cdab), (cadb), (cabd),$
$(dacb), (adcb), (acdb), (acbd), (dabc), (adbc), (abdc), (abcd).$

Применим к этому множеству описанную процедуру. На первом шаге выберется перестановка $\boldsymbol{(dcba)}$ и удалятся $(adcb)$, $(badc)$, $(cbad)$, $(dabc)$, $(cdab)$, $(bcda)$, $(abcd)$.

Теперь мы будем иметь дело со следующим множеством:

$(cdba), (cbda), (dbca), (bdca), (bcad), (dbac), (bdac), (bacd),$
$(dcab), (cadb), (cabd), (dacb), (acdb), (acbd), (adbc), (abdc).$

На втором шаге мы выберем $\boldsymbol{(cdba)}$ и удалим $(acdb), (bacd), (dbac), (cabd), (dcab), (bdca), (abdc)$.

Вместо исходного множества перестановок осталось множество

$(cbda)$, $(dbca)$, $(bcad)$, $(bdac)$, $(cadb)$, $(dacb)$, $(acbd)$, $(adbc)$.

Применим еще раз указанную процедуру.

Выбирается перестановка $\boldsymbol{(cbda)}$ и удаляются $(acbd)$, $(dacb)$, $(bdac)$, $(cadb)$, $(bcad)$, $(dbca)$, $(adbc)$. Наступило исчерпание исходного множества.

В результате мы получили, что существует три различных колечка. Эти колечки порождены следующими перестановками: $(dcba)$, $(cdba)$, $(cbda)$.

Ясно, что пятибуквенных колечек из пяти различных букв будет в десять раз меньше, чем перестановок длины 5, т. е. $5! : 10 = 12$. В случае n-буквенных колечек из n различных букв их количество можно найти по формуле

«число колечек» $= \frac{P_n}{2 \cdot n} = \frac{n!}{2 \cdot n}$. ◀

Еще один способ генерации колечек

Теперь мы приведем еще один метод генерации колечек, который не связан с поворотами колечка вокруг оси и сменой положения наблюдателя (метод сразу учитывает это). Будем считать, что колечко всегда повернуто так, что первая буква находится на «12 часах», и мы считываем надпись на колечке от «12» по часовой стрелке. Тогда любое колечко — это две перестановки, начинающиеся с первой буквы, такие, что одна перестановка является чтением другой при смене положения наблюдателя на противоположное (со стороны крышки часов).

Приведем пример. Будем генерировать колечки задачи 3.11. Возьмем множество перестановок длины 4:

$$(dcba), (cdba), (cbda), (cbad), (dbca), (bdca), (bcda), (bcad),$$
$$(dbac), (bdac), (badc), (bacd), (dcab), (cdab), (cadb), (cabd),$$
$$(dacb), (adcb), (acdb), (acbd), (dabc), (adbc), (abdc), (abcd).$$

Оставим в нем только перестановки, начинающиеся с буквы a: $(adcb), (acdb), (acbd), (adbc), (abdc), (abcd)$.

Образуем первое колечко. Оно будет представлено парой перестановок — $(adcb)$ и $(abcd)$.

Удалим эти перестановки из рассматриваемого множества перестановок: $(acdb), (acbd), (adbc), (abdc)$. Следующее колечко представлено парой перестановок — $(acdb)$ и $(abdc)$.

Удалим эти перестановки из рассматриваемого множества перестановок: $(acbd), (adbc)$. Последнее колечко представлено оставшейся парой перестановок — $(acbd)$ и $(adbc)$.

Заметим, что мы сгенерировали те же колечки, что и раньше, но теперь для колечек мы предложили их стандартную запись в виде пар перестановок, начинающихся с первой буквы: $(adcb); (abcd)$, $(acdb); (abdc)$, $(acbd); (adbc)$. *Это делает понятной формулу для числа колечек, приведенную выше.*

Генерация сочетаний

Пусть множество $X = \{a; b; c; d; e\}$. Сгенерируем множество C_X^3 — множество трехэлементных подмножеств множества X. Для этого выпишем в лексикографическом порядке все пятиразрядные двоичные числа: 00000, 00001, 00010, 00011, 00100, 00101, 00110, 00111, 01000, 01001,01010, 01011, 01100, 01101, 01110, 01111, 10000, 10001, 10010, 10011, 10100, 10101, 10110, 10111, 11000, 11001, 11010, 11011, 11100, 11101, 11110, 11111.

Выберем из полученного списка числа, в записи которых содержится три единицы: 00111, 01011, 01101, 01110, 10011, 10101, 10110, 11001, 11010, 11100.

Используем эти числа в качестве «масок», выбирающих во множестве $\{a; b; c; d; e\}$ его трехэлементные подмножества. Первое число выбирает подмножество $\{c; d; e\}$ (выбираются буквы, на месте которых в двоичном числе стоят единицы), второе число выбирает $\{b; d; e\}$, третье — $\{b; c; e\}$, четвертое — $\{b; c; d\}$, пятое — $\{a; d; e\}$, шестое — $\{a; c; e\}$, седьмое — $\{a; c; d\}$, восьмое – $\{a; b; e\}$, девятое — $\{a; b; d\}$, десятое — $\{a; b; c\}$.

! **Замечание 1.** Если не использовать двоичные числа в качестве маски, то непонятно, почему подмножества были сгенерированы в таком порядке.

Замечание 2. «Маски», которыми мы пользовались, называются характеристическими функциями соответствующих им подмножеств.

★ Предложите ваш «собственный» алгоритм генерации подмножеств с заданным числом элементов.

Дадим теперь четкое определение характеристической функции множества.

Определение 3.12. *Пусть I — универсальное множество, характеристической функцией множества а называют отображение $v\chi_A : I \to \{0; 1\}$, заданное правилом*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A; \\ 0, \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Генерация сочетаний с повторениями

В дальнейшем мы собираемся заняться цепочками и колечками, на которых буквы могут повторяться. Поэтому первый вопрос — «какие и сколько», т. е. вопрос о качественно-количественном составе. После решения этого вопроса можно будет переходить к вопросу о том, как они комбинируются, образуя цепочку или колечко.

Перейдем к рассмотрению конкретной задачи. Имеются буквы a, b, c, d, e. Мы собираемся рассматривать цепочки, составленные из четырех букв, и эти буквы необязательно различны. Сколько типов цепочек по составу может быть и какие возможны составы?

Ясно, что качественно-количественный состав цепочки однозначно определяется указанием, какие буквы в нее входят и в каком количестве.

Договоримся, что если буква в цепочке не участвует, то это означает, что мы включаем ее в качественно-количественный состав цепочки в количестве ноль. Обозначим через x_a — количество букв a, входящих в состав цепочки, x_b — количество букв b, входящих в состав цепочки, ..., x_e — количество букв e, входящих в состав цепочки. Тогда качественно-количественный состав — это набор неотрицательных целых чисел $x_a, x_d, \ldots, x_e$, таких что $x_a + x_b + \cdots + x_e = 4$. Наша задача свелась к нахождению числа решений и самих решений уравнения

$$x_a + x_b + \cdots + x_e = 4,\ x_a,\, x_b, \ldots, x_e \in Z_+.$$

Такое уравнение уже встречалось (см. (3.18)) в задаче о покупке пирожных, в разделе «Сочетания с повторениями». Там нами была получена формула для числа решений и фактически была предложена схема для генерации решений. Повторим еще раз все, что мы уже проделывали в общем виде, для нашей задачи.

Сделаем в уравнении взаимно однозначную замену переменных:

$$y_1 = x_f + 1, y_2 = x_b + 1, \ldots, y_5 = x_e + 1.$$

Тогда задача подсчета числа решений уравнения свелась к задаче подсчета числа решений уравнения

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 4 + 5 = 9,\ y_i \in N.$$

Возьмем произвольную прямую и отметим на ней девять различных точек. Каждому решению полученного уравнения поставим в соответствие картинку, которая строится следующим образом. Отсчитаем слева направо y_1 точек и поставим за последней из них вертикальную черточку, затем отсчитаем от первой черточки y_2 точек и поставим за последней отсчитанной точкой вертикальную черточку и т. д. Ясно, что последняя (пятая) вертикальная черточка для любого решения будет стоять за последней (девятой) точкой. Таким образом, задача подсчета количества решений уравнения и генерации свелась к подсчету «картинок» и их генерации. Различные «картинки» будут получаться за счет различного расположения внутренних разделительных черточек. Этих черточек *четыре* «штуки», их расположение однозначно определяется выбором четырех промежутков, в которых они будут нарисованы (по одной в каждом из выбранных промежутков). Выбранные промежутки между точками образуют четырехэлементное подмножество во множестве промежутков между точками, таких промежутков восемь. Мы получили, что полученное уравнение, а значит и исходное уравнение имеет $C_8^4 = 70$ решений. Решения можно генерировать с помощью процедуры генерации сочетаний.

Для этого нам нужны восьмиразрядные двоичные числа, запись которых содержит четыре единицы (см. пункт «Генерация подмножеств»):

$$00001111, 00011110, 00011101, 00011011,$$
$$00010111, \ldots, 11110000.$$

Подмножества, которые они определяют, — это промежутки между точками. Первое число выбирает пятый, шестой, седьмой и восьмой промежутки для постановки разделяющих вертикальных точек. Тогда $y_1 = 5$,

$y_2 = 1$, $y_3 = 1$, $y_4 = 1$. Это означает, что выбран такой качественно-количественный состав: четыре буквы a, ни одной из букв b, c, d, e. Аналогично число 00101011 определяет такой состав: две буквы a, одна буква b, одна буква c.

Перестановки с повторениями

Рассмотрим задачу.

? **Задача 3.12.** Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова **МАМА**?

► *Решение задачи.* Ясно, что от слова мы не требуем осмысленности. Попробуем просто построить всевозможные слова: МАМА, МААМ, АМАМ, АММА, ММАА, ААММ.

Нам удалось построить 6 различных слов, считая и само слово МАМА.

Решим аналогичную задачу для слова АМАА. Ясно, что нам удастся построить еще меньше различных слов: МААА, АМАА, ААМА и АААМ, а если мы возьмем слово АААА, то из него никаких новых слов нам сгенерировать не удастся. Ясно, что чем больше в составе исходного слова повторяющихся букв, тем меньше слов удастся сгенерировать. Максимальное количество генерируемых слов получается в том случае, когда все буквы в исходном слове различны, и в этом случае слова — это перестановки, длина которых равна количеству букв в слове. Эти рассуждения привели нас к оценке количества слов, которые можно получить, переставляя буквы слова длины n:

$$1 \leq \text{количество слов} \leq P_n = n!. \qquad ◄$$

Объекты, которые мы строили, решая задачу 3.12, называются перестановками с повторениями. Попробуем дать четкое определение.

Определение 3.13

Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ — *множество,* $m \le n$ — *натуральные числа,* $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — *натуральные числа и* $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. *Сюръективное отображение* φ *множества* $[1; n]_N$ *во множество* $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ *называется перестановкой с повторениями длины* n *типа* $k_1, k_2, \ldots, k_m$, *если*

$$\left|\varphi^{-1}(\{a_1\})\right| = k_1, \left|\varphi^{-1}(\{a_2\})\right| = k_2, \ldots, \left|\varphi^{-1}(\{a_m\})\right| = k_m.$$

! **Замечание.** Ясно, что в случае, когда m равно n, все k_i равны 1, перестановки с повторениями типа $1, 1, \ldots, 1$ являются обычными перестановками.

Попробуем получить формулу для количества перестановок длины n типа $k_1, k_2, \ldots, k_m$.

Множество этих перестановок разобьем на непересекающиеся множества по признаку «две перестановки с повторениями φ и ψ относятся к одному множеству разбиения, если $\varphi^{-1}(a_1) = \psi^{-1}(a_1)$». Множеств мы получим столько, сколько во множестве $[1; n]_N$ имеется k_1-элементных подмножеств, т. е. $C_n^{k_1}$, каждое из полученных множеств разобьем на непересекающиеся множества по признаку: «две перестановки с повторениями φ и ψ относятся к одному множеству разбиения, если $\varphi^{-1}(a_2) = \psi^{-1}(a_2)$». В результате мы каждое множество разобьем на $C_{n-k_1}^{k_2}$ множеств. Продолжим этот процесс. Окончательно мы получим разбиение исходного множества на $C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot C_{n-(k_1+k_2)}^{k_3} \cdots C_{n-(k_1+\cdots+k_{m-1})}^{k_m}$. В каждом таком множестве находится одна перестановка с повторениями. Подставляя в полученные формулы для нахождения числа сочетаний и учитывая, что $n - (k_1 + \cdots + k_{m-1}) = k_m$, мы получим

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n\,!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!}\ . \tag{3.55}$$

Слева в формуле (3.55) стоит обозначение для количества перестановок с повторениями.

Генерация перестановок с повторениями

Наш подсчет количества перестановок с повторениями и решение задачи 3.12 показывают, что генерация перестановок с повторениями — задача более сложная, чем генерация обычных перестановок. Однако, если мы не ограничены вычислительными ресурсами, можно для генерации перестановок с повторениями использовать генерацию обычных перестановок.

Поясним это на примере задачи 3.12. Рассмотрим слово МАМА. Запомним, что 1 соответствует M, 2 — A, 3 — M, 4 — A. Сгенерируем всевозможные перестановки длины 4 из элементов 1, 2, 3, 4 (см. пункт «Генерация перестановок»):

(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432), (2134), (2143), (2314), (2341), (2413), (2431), (3124), (3142), (3214), (3241), (3412), (3421), (4123), (4132), (4213), (4231), (4312), (4321).

Воспользуемся теперь тем, что 1 и 3 соответствуют букве M, а 2 и 4 — букве A. В результате наш список перестановок превратится в список слов:

MAMA, MAAM, MMAA, MMAA, MAAM, MAMA,
AMMA, AMAM, AMMA, AMAM, AAMM, AAMM,
MMAA, MMAA, MAMA, MAAM, MAMA, MAAM,
AMAM, AMMA, AAMM, AAMM, AMMA, AMAM.

Осталось выбрать из этого списка разные слова: *MAMA, MAAM, MMAA, AMMA, AMAM, AAMM.*

Генерация цепочек с повторениями

Посмотрим, что получится при генерации цепочек с повторениями (для того чтобы вспомнить, что такое цепочка, рекомендуем вернуться к пункту «Генерация цепочек»), если в качестве их основы мы возьмем перестановки с повторениями, возникшие из слова *МАМА*. Для этого мы возьмем множество

$$\{\boldsymbol{MAMA},\ \boldsymbol{MAAM},\ \boldsymbol{MMAA},\ \boldsymbol{AMMA},\ \boldsymbol{AMAM},\ \boldsymbol{AAMM}\}$$

и подвергнем его процедуре, описанной нами в пункте «Генерация цепочек».

На первом шаге мы выбираем слово ***МАМА*** и удаляем ***АМАМ***. На втором шаге выбираем ***МААМ***, а удалять нечего, так как выбранное слово при зеркальном отражении переходит само в себя (чего не было для обычных перестановок). На третьем шаге выбираем ***ММАА*** и удаляем ***ААММ***. На четвертом шаге выбираем ***АММА*** и ничего не удаляем, так как опять выбрано слово, переходящее само в себя при зеркальном отражении. Мы сгенерировали четыре разные цепочки, которые порождены следующими перестановками с повторениями: ***МАМА, МААМ, ММАА*** и ***АММА.***

$\boxed{?}$ *Мы сгенерерировали цепочки с повторениями длины четыре, в которых повторялось две буквы М и две буквы А. Попробуйте сгенерировать все цепочки длины четыре, для образования которых используются буквы М и А.*

Генерация колечек с повторениями

Попробуем теперь сгенерировать все колечки, получаемые из перестановок с повторениями букв слова *МАМА.*

Ясно, что колечки с повторениями — это не то же самое, что колечки без повторений. Если представить себе колечко с повторениями, то его можно получить, взяв перестановку с повторениями как бусинки, соединить нитью в цепочку и соединить концы. Мы получаем колечко (будем считать, что стык незаметен).

Расположим колечко как циферблат часов и будем считать, что буквы расположены на местах: «12 часов», «3 часа», «6 часов», «9 часов» (см.рис. 3.8).

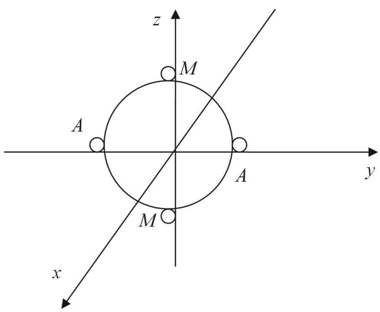


Рис. 3.8

Центр колечка расположен в начале координат. Колечко лежит в плоскости xz, а мы смотрим на него, находясь на положительном направлении оси абсцисс. Прочтем надпись на колечке, начиная с верхней буквы по часовой стрелке. Для колечка, изображенного на рисунке 3.8, мы получим (*МАМА)* — перестановку с повторениями. Повернем колечко на $\pi/2$ радиан ($90°$) по часовой стрелке. Ясно, что мы получили то же самое колечко, но надпись на нем уже будет читаться как другая перестановка с повторениями — (*AMAM*). При повороте на π радиан (180°) мы получим *(MAMA)*, а при повороте на $^{3\pi}/_2$ радиан (270°) — *(AMAM)*.

Повороты против часовой стрелки мы не будем рассматривать, так как поворот на $^{\pi}/_2$ радиан против часовой стрелки дает такое же положение надписи на кольце, что и поворот на $^{3\pi}/_2$ радиан по часовой стрелке, поворот на π радиан против часовой стрелки дает такое же положение надписи на кольце, что и поворот на π радиан по часовой стрелке, поворот на $^{3\pi}/_2$ радиан против часовой стрелки дает такое же положение надписи на кольце, что и поворот на $^{\pi}/_2$ радиан по часовой стрелке. Повернем теперь колечко вокруг оси z на угол π радиан. Заново прочтем надпись на колечке. Вместо исходной надписи (*MAMA*) мы прочтем «зеркальную» надпись (*MAMA*), которая совпадает с исходной перестановкой с повторениями.

(Напишите на колечке $\begin{matrix} & \text{M} & \\ \text{A} & & \text{A} \\ & \text{M} & \end{matrix}$ *и прочтите эту надпись, глядя на отражение колечка в зеркале.)*

Повороты колечка на $^{\pi}/_2$ радиан, на π радиан, на $^{3\pi}/_2$ радиан по часовой стрелке дадут еще три разных надписи: *(AMAM), (MAMA), (AMAM)*. Таким образом, две перестановки с повторениями *MAMA* и *AMAM* дают одно колечко с повторениями.

Удалим их из множества перестановок с повторениями. Возьмем теперь перестановку *MAAM*. Поворот колечка на $^{\pi}/_2$ радиан по часовой стрелке даст нам надпись *MMAA*, а поворот на угол π радиан даст нам *AMMA*, поворот на угол $^{3\pi}/_2$ радиан даст *AAMM*. Поворот колечка вокруг оси z на угол π радиан даст нам из исходной записи запись *MMAA.* Повороты колечка на $^{\pi}/_{2}$ радиан, на π радиан, на $^{3\pi}/_{2}$ радиан по часовой стрелке дадут надписи: *(AMMA), (AAMM), (MAAM).*

Мы получили, что перестановки с повторениями *MAAM, MMAA, AMMA, AAMM дают еще одно колечко с повторениями.*

Таким образом, мы уже перебрали все множество перестановок с повторениями. В результате мы получили всего два различных колечка с повторениями.

! **Замечание 1.** Мы получили интересный результат, показывающий, что в случае повторений ситуация принципиально меняется. Когда мы генерировали четырехбуквенные колечки без повторений, каждые восемь перестановок порождали одно колечко. Для колечек с повторениями получилось не так. Одно из колечек порождается двумя перестановками с повторениями, а другое — четырьмя. Это показывает, что надеяться на получение простой формулы, позволяющей вычислять количество колечек с повторениями через количество перестановок с повторениями, не приходится.

Замечание 2. Аналогичный результат мы получили и для цепочек с повторениями — из четырех полученных цепочек с повторениями две порождались двумя перестановками каждая, а еще две других цепочки порождались каждая только одной перестановкой.

Диполярная комбинаторика

Сейчас мы в качестве исходных объектов будем использовать новые объекты — диполи. Что это такое? *Во-первых*, у диполя есть имя (как правило, имя — это буква). *Во-вторых*, у диполя есть две различимые стороны (условно «+» и «–» («левая сторона», «правая сторона»)).

Диполь можно представлять картинкой (см. рис. 3.9):

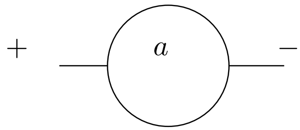


Рис. 3.9

Диполи могут соединяться между собой как одинаковыми сторонами (полюсами), так и разными, поэтому их комбинаторные возможности при образовании перестановок, цепочек и колечек без повторений и с повторениями значительно шире, чем у букв, которыми мы пользовались до сих пор.

? **Задача 3.13.** Дано три диполя $(+a-)$, $(+b-)$, $(+c-)$. Сколько перестановок можно получить из этих диполей?

► *Решение задачи.* Образуем первую перестановку из этих трех диполей — $(+a-\,+b-\,+c-)$. Меняя в ней ориентацию диполей, получаем следующие перестановки: $(+a-\,+b-\,-c+)$, $(+a-\,-b+\,+c-)$, $(+a-\,-b+\,-c+)$, $(-a+\,+b-\,+c-)$, $(-a+\,+b-\,-c+)$, $(-a+\,-b+\,+c-)$, $(-a+\,-b+\,-c+)$.

Таким образом, одна обычная перестановка порождает восемь различных перестановок из трех диполей. ◄

Решая эту задачу, мы фактически получили формулу
$$P_n^{\pm} = 2^n \cdot n\,!. \tag{3.56}$$
Слева в формуле (3.56) *— обозначение для количества перестановок из n диполей.*

Генерация перестановок из диполей

Как сгенерировать перестановки из диполей? Вернемся к решению задачи 3.11. Перестановку диполей $(+a-\ +b-\ +c-)$ можно взаимнооднозначно расщепить на обычную перестановку длины 3 (abc) и набор из шести знаков $(+-+-+-)$. Этот набор взаимнооднозначно определяет набор из трех знаков, стоящих в нем на нечетных местах $(+++)$. Аналогично перестановка $(-+\ -a+\ +b-)$ взаимнооднозначно расщепляется на (ab) и $(--+)$.

Это наблюдение позволяет предложить вариант генерации перестановок, составленных из диполей. Обычные перестановки мы уже умеем генерировать, осталось научиться генерировать знаковые последовательности.

Поскольку знак принимает два возможных значения, мы можем от этих не совсем привычных объектов — знаковых последовательностей перейти к двоичным числам. Будем считать, что плюс кодируется единицей, а минус — нулем, тогда знаковая последовательность длины n кодируется n-разрядным двоичным числом. Например, последовательность $(+--+)$ кодируется числом 1001, а последовательность $(++--)$ — числом 1100. Таким образом, генерация знаковых цепочек свелась к генерации двоичных чисел.

Это же порождает новую запись перестановки из n диполей (и фактически определение этого объекта). Перестановка из n диполей $+a_1-,\ +a_2-, \ldots, +a_n$ — это упорядоченная пара, состоящая из перестановки элементов множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и n-разрядного двоичного числа. То есть множество перестановок из n диполей — это декартово произведение множеств

$$P_A \times (\{0;1\} \times \{0;1\} \times \cdots \times \{0;1\}).$$

Из этого и формулы (3.5) для числа элементов в декартовом произведении множеств мы получаем формулу

$$P_n^{\pm} = P_n \cdot 2^n = 2^n \cdot n\,!.$$

Цепочки из диполей

Рассмотрим теперь дипольные цепочки длины 3, составленные из трех разных диполей $+a-, +b-, +c-$. Возьмем перестановку диполей $((abc); 110)$. Ясно, что перестановка диполей $((cba); 011)$ дает ту же самую цепочку, поэтому дипольных цепочек в два раза меньше, чем перестановок диполей.

Описывать генерацию дипольных цепочек мы не будем, каждый из читателей может и должен проделать это самостоятельно ($\longleftarrow \bigstar$[4]).

Колечки из диполей

О чем сейчас пойдет речь? Поскольку мы уже многое понимаем в колечках, то сразу перейдем к делу. В качестве исходной перестановки диполей возьмем $((abcd), 1111)$. Повернув колечко на $^{\pi}/_{2}$ радиан по часовой стрелке, получим то же самое кольцо, но надпись на колечке уже будет читаться как другая перестановка диполей — $((dabc), 1111)$. При повороте на π радиан мы

[4] Знак $\longleftarrow \bigstar$ указывает на то, что необходимо проделать самостоятельно.

получим $((cdab), 1111)$, а при повороте на $^{3\pi}/_{2}$ радиан — $((bcda), 1111)$. Повернем теперь колечко вокруг оси z на угол π радиан и снова прочтем надпись на колечке. Вместо исходной надписи $((abcd), 1111)$ мы прочтем «зеркальную» надпись $((adcb), 1111)$. Повороты колечка на $^{\pi}/_{2}$ радиан, на π радиан, на $^{3\pi}/_{2}$ радиан по часовой стрелке дадут еще три разных надписи: $((badc), 1111)$, $((cbad), 1111)$, $((dcba), 1111)$. Все эти восемь надписей образуют восемь различных перестановок из четырех диполей.

Подробно описывать генерацию дипольных колечек мы не будем, каждый из читателей может и должен проделать это самостоятельно ($\longleftarrow \bigstar$).

Перестановки из диполей с повторениями

Здесь мы только укажем на объект, который следует называть дипольной перестановкой с повторениями.

Определение 3.14. *Пусть* $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ *— множество,* $m \le n$ *— натуральные числа,* $k_1, k_2, \ldots, k_m$ *— натуральные числа и* $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. *Перестановкой с повторениями диполей* $+a_1-$, $+a_2-, \ldots, +a_m-$ *длины* n *типа* $k_1, k_2, \ldots k_m$ *называется упорядоченная пара* (φ, *«n-разрядное двоичное число»), где* φ *— перестановка с повторениями элементов множества* $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ *длины* n *типа* $k_1, k_2, \ldots, k_m$. *(То есть* φ *— сюръективное отображение множества* $[1; n]_N$ *во множество* $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, *такое, что* $\left|\varphi^{-1}(\{a_1\})\right| = k_1$, $\left|\varphi^{-1}(\{a_2\})\right| = k_2, \ldots, \left|\varphi^{-1}(\{a_m\})\right| = k_m$*).*

! **Замечание.** Из определения следует, что повторяющиеся в такой перестановке диполи могут иметь различную ориентацию.

★ ⟶*Постарайтесь самостоятельно сгенерировать перестановки из диполей с повторениями (в этом вам помогут пункты «Генерация перестановок с повторениями» и «Генерация перестановок из диполей»).*

Цепочки из диполей с повторениями

После того как мы определили, что такое перестановки диполей с повторениями заданного типа заданной длины, вы сами сможете понять, что такое цепочки диполей с повторениями заданной длины и заданного типа.
★ ⟶ *Постарайтесь сами сгенерировать цепочки диполей с повторениями (в этом вам помогут разделы «Генерация колечек», «Генерация перестановок с повторениями» и «Генерация перестановок из диполей»).*

Колечки из диполей с повторениями

О чем сейчас пойдет речь? Поскольку мы уже многое понимаем в колечках, диполях, перестановках с повторениями, колечках с повторениями, мы сможем понять, что такое колечко диполей заданной длины и заданного типа.
★ ⟶ *Постарайтесь сами сгенерировать колечки из диполей с повторениями (в этом вам помогут разделы «Генерация колечек», «Генерация перестановок с повторениями», «Генерация перестановок из диполей»).*

Глава 4
Отношения

Эта небольшая глава посвящена отношениям и операциям над ними. С отношениями мы имеем дело каждый день, таковыми являются отношение равенства на произвольном множестве, отношения $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$ на множестве вещественных чисел, отношения подобия фигур на плоскости и т. п. Оказывается, что и числовые функции можно рассматривать как частный случай отношений. При этом легче понять, что означает обратимость функции и т. п. В этом введении все упомянутые отношения двуместны. Можно рассматривать и n-местные ($n > 2$) отношения, однако наибольшее внимание мы уделим двуместным отношениям.

§ 4.1. n-местные отношения. Булевы алгебры отношений и матриц

1. n-местные отношения

Определение 4.1. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *— непустые множества,* n*-местным отношением, заданным на* $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$*, называют подмножество* S *декартова произведения* $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$*. Об* n*-ке* $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *говорят, что она связана отношением* S*, если* $(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in S$*, или не связана отношением* S*, если* $(x_1; x_2; \ldots; x_n) \notin S$*.*

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 4.1.** Рассмотрим на декартовой плоскости $R^2 = R \times R$ множество S — окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Ясно, что пара (x_1, x_2) связана двуместным отношением S тогда и только тогда, когда

$$x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

П **Пример 4.2.** Рассмотрим трехместное отношение на R^3, заданное следующим:

$$(x_1, x_2, x_3) \in S \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = x_3.$$

Ясно, что S — параболоид вращения с вершиной в начале координат и осью вращения $0x_3$ (см. рис. 4.1).

П **Пример 4.3.** Рассмотрим двуместное ($\Leftrightarrow$ бинарное) отношение на R^2, заданное следующим: $(x_1, x_2) \in S \Leftrightarrow x_1 \leqslant x_2$. Ясно, что S — полуплоскость, лежащая выше биссектрисы I и III координатных углов, и сама биссектриса (см. рис. 4.2).

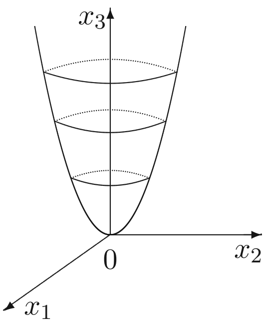


Рис. 4.1

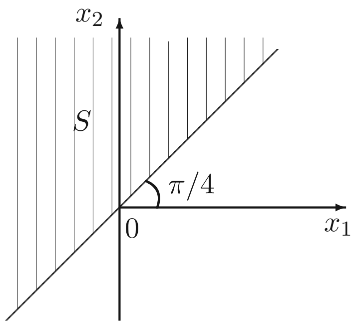


Рис. 4.2

Для двуместных (бинарных) отношений вместо записи $(x, y) \in S$ принята запись $x\alpha_s y$, а если знают, о каком S идет речь, то пишут $x\alpha y$ (за наиболее распространенными отношениями закреплены обозначения «$=$», «$\leqslant$», «$<$», «$\geqslant$», «$>$», «$\subset$»).

2. Булева алгебра отношений

Зафиксируем X, Y — непустые множества и рассмотрим множество $R(X \times Y)$ — множество бинарных отношений на $X \times Y$. Введем на $R(X \times Y)$ операции дополнения, объединения, пересечения.

Определение 4.2. *Дополнением к отношению α_s, порожденному множеством S, называется отношение $\overline{\alpha}_s$, порожденное множеством $\overline{S}$ — дополнением S относительно $X \times Y$, т. е.*

$$x\overline{\alpha}_s y \Leftrightarrow \overline{x\alpha_s y}.$$

Определение 4.3. *Объединением (пересечением) отношений α_S и α_T называется отношение $\alpha_S \cup \alpha_T$ $(\alpha_S \cap \alpha_T)$, порожденное множеством $S \cup T$ $(S \cap T)$, т. е.*

$$x\alpha_S \cup \alpha_T y \overset{def}{\Leftrightarrow} x\alpha_{S \cup T} y$$

$$\left(x\alpha_S \cap \alpha_T y \overset{def}{\Leftrightarrow} x\alpha_{S \cap T} y\right).$$

П **Пример 4.4.** Рассмотрим на R^2 отношения $\leqslant$ и $\geqslant$, тогда

$$x\overline{\leqslant}y \Leftrightarrow x > y,$$

$$x \leqslant \cap \geqslant y \Leftrightarrow x = y,$$

$x \leqslant \cup \geqslant y$ — тривиальное отношение, которое связывает между собой любые два вещественных числа.

Теорема 4.1. *Множество $R(X \times Y)$ образует относительно операций дополнения, объединения, пересечения булеву алгебру, т. е. для них (отношений) выполняется 19 основных равенств булевой алгебры. (Доказательство следует из определения операций над отношениями и теоремы о том, что множества относительно операций дополнения, объединения и пересечения образуют булеву алгебру.)*

3. Булева алгебра матриц

Пусть X и Y — конечные непустые множества. Зафиксируем нумерацию в X и в Y, т. е.

$$X = \{x_1; x_2; \dots; x_{|X|}\}; \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{|Y|}\}.$$

Рассмотрим на $X \times Y$ бинарное отношение α. Поставим ему в соответствие матрицу A_α размера $|X| \times |Y|$ с элементами $(A_\alpha)_{ij}(\in \{0; 1\})$, определенную следующим:

$$(A_\alpha)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \alpha y_j; \\ 0, & \text{если } x_i \overline{\alpha} y_j. \end{cases}$$

Справедливо и обратное: если X и Y — конечные непустые нумерованные множества и A — произвольная $|X| \times |Y|$«0–1» матрица ($\Leftrightarrow (A)_{ij} \in \{0; 1\}$), то существует бинарное отношение α на $X \times Y$ такое, что

$$A_\alpha = A.$$

Таким образом, между множеством $R(X \times Y)$ бинарных отношений на $X \times Y$ (X и Y — непустые конечные нумерованные множества) и множеством «0–1» матриц размера $|X| \times |Y|$ существует взаимнооднозначное соответствие — сопоставление бинарному отношению его матрицы. Значит, булевы операции над «0–1» матрицами размера $m \times n$ можно вводить, используя булевы операции над бинарными отношениями, положив, например,

$$X = [1; m]_N, \quad Y = [1; n]_N$$

с их естественной нумерацией.

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 4.5.** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,1 \\ 1\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,1\,1 \end{pmatrix}, \; A \cup B = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1 \end{pmatrix}, \; A \cap B = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{!}$ **Замечание 4.1.** Ясно, что имеют место равенства:

$$\begin{aligned} (\bar{A})_{ij} &= \overline{(A)}_{ij} \\ (A \cup B)_{ij} &= (A)_{ij} \vee (B)_{ij} \\ (A \cap B)_{ij} &= (A)_{ij} \wedge (B)_{ij}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Теорема 4.2. *Множество $B(m \times n)$ — «0–1» матриц (булевых матриц) размера $m \times n$ образует булеву алгебру относительно операций дополнения, объединения, пересечения, т. е. для булевых матриц выполнено 19 основных соотношений булевой алгебры.*

4. Композиция бинарных отношений. Булево произведение матриц

Определение 4.4. *Пусть α — бинарное отношение на $X \times Y$, β — бинарное отношение на $Y \times Z$. Определим композицию бинарных отношений $\alpha \circ \beta$ как бинарное отношение на $X \times Z$, заданное следующим:*

$$x\alpha \circ \beta z \Leftrightarrow \exists y((x\alpha y)(y\beta z)) \equiv 1.$$

Очевидно, что композиция ассоциативна, т. е.

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma),$$

и, вообще говоря, некоммутативна, т. е. существуют α и β такие, что $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$.

Отмеченное выше соответствие между бинарными отношениями на конечных множествах и булевыми матрицами порождает операцию булева умножения «0–1» матриц. (Композиции отношений соответствует булево произведение матриц.) Ясно, что оно (булево умножение) определено следующим правилом:

Определение 4.5. *Пусть A — булева матрица размера $m \times p$ с элементами $(A)_{ij}$, B — булева матрица размера $p \times n$ с элементами $(B)_{ij}$.*

Булевым произведением матриц A, B называется булева матрица $A \boxed{\times} B$ размера $m \times n$ с элементами $(A \boxed{\times} B)_{ij}$, определенными следующим равенством:

$$\left(A \boxed{\times} B\right)_{ij} = \bigvee_{k=1}^{p} (A)_{ik} \wedge (B)_{kj}.$$

П **Пример 4.6.** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1\,0\,1 \\ 0\,1\,1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}, \quad \text{тогда } A \boxed{\times} B = \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что булево умножение матриц ассоциативно, т. е.

$$(A \boxed{\times} B) \boxed{\times} C = A \boxed{\times} (B \boxed{\times} C), \tag{4.2}$$

и, вообще говоря, некоммутативно, т. е. существуют такие матрицы A и B, для которых

$$A \boxed{\times} B \neq B \boxed{\times} A. \tag{4.3}$$

Замечания и вопросы в конце параграфа

? **!**

1. Мы определили булевы операции для двуместных отношений. Ясно, что они определяются точно так же для отношений любой местности.
2. Как сказывается на матрице A_α бинарного отношения α на $X \times Y$ изменение нумерации X; изменение нумерации Y?

3. Приведите пример таких отношений, для которых

$$\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha.$$

4. Приведите пример таких булевых матриц, для которых

$$A \boxed{\times} B \neq B \boxed{\times} A.$$

5. Приведите пример таких отношений, для которых

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha.$$

6. Приведите пример таких булевых матриц, для которых

$$A \boxed{\times} B = B \boxed{\times} A.$$

7. Пусть A — квадратная $n \times n$ булева матрица. Определим ее булевы натуральные степени, положив

$A^{\boxed{1}} = A;\; A^{\boxed{2}} = A \boxed{\times} A;\; A^{\boxed{3}} = A^{\boxed{2}} \boxed{\times} A; \ldots$
$\ldots; A^{\boxed{k+1}} = A^{\boxed{k}} \boxed{\times} A.$

Докажите, что

$$A^{\boxed{m}} \boxed{\times} A^{\boxed{n}} = A^{\boxed{m+n}}.$$

8. Докажите, что для любой $n \times n$ булевой матрицы A имеет место:

$$(I \cup A)^{\boxed{n-1}} = (I \cup A)^{\boxed{n}} = \ldots;$$

$$\text{где } I \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \ldots 0 \\ 0\,1\,0 \ldots 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot \ldots \cdot \\ 0\,0\,0 \ldots 1 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

§ 4.2. Бинарные отношения на множестве. Свойства бинарных отношений

Определение 4.6. *Бинарным отношением на множестве X называется бинарное (двуместное) отношение на $X \times X$.*

П **Пример 4.7.** Пусть $X = R$. Рассмотрим бинарное отношение α, заданное правилом $x\alpha y \overset{def}{\Leftrightarrow} x^2 = y^2$.

Пример 4.8. Пусть $X = R$. Рассмотрим бинарное отношение β, заданное правилом $x\beta y \overset{def}{\Leftrightarrow} x^2 < y^2$.

Пример 4.9. Пусть $X = \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел). Рассмотрим бинарное отношение γ, заданное правилом $z_1\gamma z_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} |z_1| = |z_2|$.

Пример 4.10. Рассмотрим на $\mathbb{C}$ бинарное отношение δ, заданное правилом

$$z_1\delta z_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} (\operatorname{Re} z_1 \leqslant \operatorname{Re} z_2)\&(\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2).$$

Выделяют следующие основные свойства бинарных отношений: рефлексивность, транзитивность, симметричность, антисимметричность, а затем с помощью присутствия определенной комбинации этих свойств выделяют два важнейших типа бинарных отношений: отношения порядка и отношения эквивалентности.

Определение 4.7. *Бинарное отношение α на X называется рефлексивным, если $\forall x \quad (x\alpha x) \equiv 1$.*

То есть бинарное отношение α, порожденное множеством S_α, называется рефлексивным, если множество S_α, порождающее α, содержит целиком диагональ декартова квадрата $X \times X$ —

$$diag(X \times X) = \bigcup_{x \in X} \{(x; x)\}.$$

Определение 4.8. *Бинарное отношение α на X называется транзитивным, если*

$$\forall x \forall y \forall z\, ((x\alpha y)\&(y\alpha z) \to (x\alpha z)) \equiv 1.$$

$$(\forall x \forall y \forall z\, ((x\alpha y)\&(y\alpha z) \Longrightarrow (x\alpha z)))\,.$$

Определение 4.9. *Бинарное отношение α на X называется симметричным, если*

$$\forall x \forall y\, ((x\alpha y) \to (y\alpha x)) \equiv 1.$$

$$(\forall x \forall y\, ((x\alpha y) \Longrightarrow (y\alpha x)))\,.$$

То есть бинарное отношение α на X симметрично, если множество S_α, его порождающее, расположено симметрично относительно $diag(X \times X)$ (см. рис. 4.3).

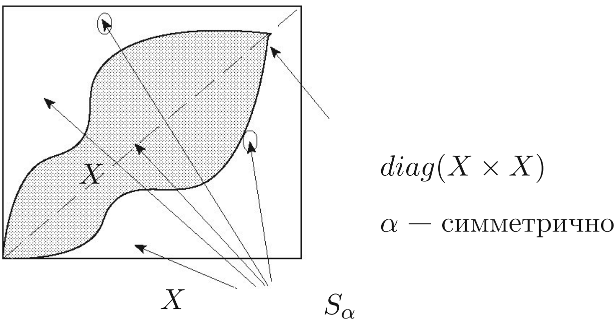


Рис. 4.3

Определение 4.10. *Бинарное отношение α на X называется антисимметричным, если*

$$\forall x \forall y\, ((x\alpha y)\&(y\alpha x) \to (x = y)) \equiv 1.$$

$$(\forall x \forall y\, ((x\alpha y)\&(y\alpha x) \Longrightarrow (x = y)))\,.$$

То есть бинарное отношение α на X антисимметрично, если множество S_α, его порождающее, не содержит ни одной пары различных точек, симметричных относительно $diag(X \times X)$ (см. рис. 4.4).

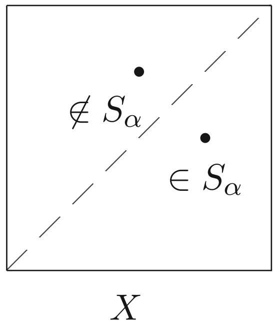


Рис. 4.4

Пример 4.11. Рассмотрим таблицу:

	Рефл.	Симметр.	Транз.	Антисимм.
α	$+$	$+$	$+$	$-$
β	$-$	$-$	$+$	$+$
γ	$+$	$+$	$+$	$-$
δ	$+$	$-$	$+$	$+$
$=$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\leqslant$	$+$	$-$	$+$	$+$
$x \leqslant \lvert y\rvert$, $x, y \in R$	$+$	$-$	$-$	$-$

Здесь «+» означает, что соответствующее свойство присутствует, а «−» — отсутствует. α, β, γ, δ — отношения из примеров 4.7–4.10.

Вопросы в конце параграфа

1. Приведите примеры рефлексивных отношений.
2. Приведите примеры нерефлексивных отношений.
3. Приведите примеры симметричных отношений.
4. Приведите примеры несимметричных отношений.
5. Приведите примеры транзитивных отношений.
6. Приведите примеры нетранзитивных отношений.

7. Приведите примеры антисимметричных отношений.
8. Приведите примеры неантисимметричных отношений.
9. Для приведенных вами в вопросах 1–8 отношений проверьте наличие и отсутствие остальных, выделенных определениями 4.6–4.10 свойств.

§ 4.3. Отношение порядка и доминирование

Определение 4.11. *Бинарное отношение α на X называется отношением порядка на X, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.*

Классическим примером отношения порядка является отношение $\leqslant$ на R. Ясно, что отношение δ (см. пример 4.10) является отношением порядка на $\mathbb{C}$.

Отношение порядка α на X называется отношением линейного порядка на X (линейным порядком на X), если

$$\forall x \forall y \left((x\alpha y) \vee (y \alpha x) \right) \equiv 1.$$

В противном случае порядок называется *частичным.*

То есть отношение порядка на X является линейным порядком, если любые два элемента множества X сравнимы с этим отношением.

Ясно, что отношение $\leqslant$ на R является отношением линейного порядка, а отношение δ на $\mathbb{C}$ — частичного порядка, так как $1 + i \, \overline{\delta} \, 2 - 2i$ и $2 - 2i \, \overline{\delta} \, 1 + i$.

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 4.12.** Рассмотрим произвольное множество A и на множестве 2^A — бинарное отношение $\subset$. Ясно, что $\subset$ является отношением порядка, причем если $|A| \leqslant 1$ — порядок линейный, а если $|A| \geqslant 2$ — частичный.

Пара (X, α), где α — бинарное отношение на X, называется упорядоченным множеством, если α — отношение порядка на X; линейно упорядоченным множеством, если α — линейный порядок; частично упорядоченным множеством, если α — частичный порядок.

Ясно, что $(R, \leqslant)$ — линейно упорядоченное множество, а (C, δ) (см. пример § 4.2) — частично-упорядоченное множество.

Пусть (X, α) — упорядоченное множество, определим на X еще одно бинарное отношение d_α — доминирование.

Определение 4.12. *Говорят, что y $(\in X)$ доминирует над x $(\in X)$ по отношению порядка α (пишут $xd_\alpha y$), если:*

1) $x \neq y$;
2) $x\alpha y$;
3) $\forall z\,((x\alpha z)\&(z\alpha y) \to (x = z) \vee (z = y)) \equiv 1$.

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 4.13.** Рассмотрим $(N, \leqslant)$. Ясно, что 4 доминирует над 3, 5 — над 4.

Пример 4.14. Пусть $\zeta = \{1; 2; 3\}$. На множестве $2^\zeta = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}, \zeta\}$ рассмотрим отношения $\subset$, $d_\subset$. Элементы множества 2^ζ изобразим точками, а пару точек x, y соединим стрелкой от x к y, если $xd_\subset y$. Тогда мы получим граф доминирования (см. рис. 4.5). Этот рисунок ($\Leftrightarrow$ граф) называется *диаграммой Хассе*, или *диаграммой доминирования.*

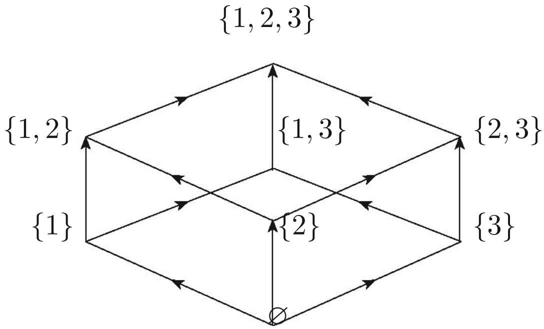


Рис. 4.5

Определение 4.13. *Пусть* (X, α) — *упорядоченное множество. Последовательность* $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ $(x_i \in X)$ *называется цепью доминирующих элементов длины* n, *соединяющей* x *с* y, *если выполнены два условия:*

1) $x = x_0$, $y = x_n$; 2) $x_{i-1} d_\alpha x_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 4.3 (**о цепях доминирующих элементов**) *Пусть* (X, α) — *конечное* $(|X| < \infty)$ *упорядоченное множество,* $x, y \in X$, $x \neq y$ *и* $x\alpha y$, *тогда существует цепь доминирующих элементов, соединяющая* x *с* y (*длины не большей чем* $|X|$).

► Для каждой пары (x, y) такой, что $x\alpha y$, $x \neq y$, в конечном упорядоченном множестве (X, α) можно ввести характеристику $\theta(x, y)$ — «число элементов, лежащих между x и y (говорят, что z лежит между x и y, если

$$(x\alpha z)\&(z\alpha y)\&(z \neq x)\&(z \neq y))».$$

Теорему будем доказывать индукцией по $\theta(x, y)$.

Шаг I. $x\alpha y$, $x \neq y$, $\theta(x, y) = 0$. Это означает, что y доминирует над x. Положим $x_0 = x$, $x_1 = y$ — искомая цепь построена.

Индуктивный переход. Допустим, утверждение теоремы справедливо для любых двух элементов ν и ω множества X таких, что $\theta(\nu, \omega) \leqslant n_0$. Докажем, что тогда теорема справедлива для любых x, y таких, что

$$\theta(x, y) = n_0 + 1.$$

Зафиксируем какой-либо элемент z, лежащий между x и y. Ясно, что

$$\theta(x, z) \leqslant n_0; \quad \theta(z, y) \leqslant n_0.$$

Тогда по предположению индукции существуют: цепь доминирующих элементов $\{x_i^{(1)}\}_{i=0}^{n_{xz}}$, соединяющая x с z, и цепь $\{x_i^{(2)}\}_{i=0}^{n_{zy}}$, соединяющая z с y. Рассмотрим последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{n_{xz}+n_{zy}}$, заданную правилом

$$x_i = \begin{cases} x_i^{(1)}, \text{ если } 0 \leqslant i \leqslant n_{xz}; \\ x_{i-n_{xz}}^{(2)}, \text{ если } n_{xz} < i \leqslant n_{xz} + n_{zy}. \end{cases}$$

Ясно, что $\{x_i\}_{i=0}^{n_{xz}+n_{zy}}$ — искомая цепь доминирующих элементов. Индуктивный переход, а значит и вся теорема доказаны. ◀

Смысл доказанной теоремы 4.3 состоит в том, что в конечном упорядоченном множестве (X, α) порядок полностью восстанавливается цепями доминирующих элементов.

Замечания и вопросы в конце параграфа

? ! **1.** Прежде чем сформулировать вопросы, определим важные понятия, связанные с отношением порядка.

Определение 4.14. *Пусть (X, α) упорядоченное множество и $A \subset X$. Элемент $a_M \in A$ ($a_m \in A$) называется наибольшим (наименьшим) элементом множества A, если для любого элемента $a \in A$ выполнено $a \alpha a_M$ ($a_m \alpha a$).*

Определение 4.15. *Элемент $a' \in A$ называется максимальным (минимальным) элементом в A, если для любого элемента $a \in A$ выполнено $a' \alpha a \Leftrightarrow a' = a \quad (a \alpha a' \Leftrightarrow a = a')$.*

Ясно, что если рассмотреть $(R, \leqslant)$, то во множестве $(0; 1]$ элемент 1 является и наибольшим, и максимальным, а наименьшего и минимального элементов нет.

2. Рассмотрим упорядоченное множество из примеров 4.12, 4.14 — $(2^{\{1,2,3\}}, \subset)$ и $A = \{\{1\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$. В нем $\{1,2,3\}$ — наибольший элемент, $\{1,2,3\}$ — максимальный элемент, $\{1\}$, $\{2,3\}$, $\{1,3\}$ — минимальные элементы, наименьшего элемента нет.

3. Рассмотрим $(\mathbb{C}, \delta)$ (см. пример 4.10). Пусть A — множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:
а) $z \in A \;\Leftrightarrow\; |z| \leqslant 1$;
б) $z \in A \;\Leftrightarrow\; (1 < \operatorname{Re} z \leqslant 2) \& (-i < \operatorname{Im} z \leqslant i)$.
Найдите в A наибольший, наименьший, максимальные, минимальные элементы.

4. Докажите самостоятельно, что если во множестве существует наибольший элемент, то он единствен и является при этом единственным максимальным элементом. То же самое справедливо и для наименьшего элемента.

§ 4.4. Отношение эквивалентности

Определение 4.16. *Бинарное отношение α на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

П **Пример 4.15.** Отношение «=» на любом множестве X является отношением эквивалентности.

Пример 4.16. Отношения α и γ из примеров 4.7 и 4.9 являются отношениями эквивалентности.

Определение 4.17. *Пусть α — отношение эквивалентности на X, $x \in X$. Рассмотрим множество $[x]_\alpha \overset{def}{=} \{y \in X | x\alpha y\}$, это множество называется классом эквивалентности (смежности) элемента x по отношению к эквивалентности α.*

П **Пример 4.17.** $[x]_= = \{x\}$; $[1]_\alpha = \{-1; 1\}$; $[1 - i]_\gamma$ — множество точек на комплексной плоскости, образующих окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат (см. рис. 4.6; α из примера § 4.2, γ — из примера 4.9).

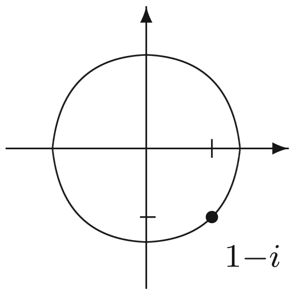


Рис. 4.6

Теорема 4.4. *Пусть α — отношение эквивалентности на X. Множества $[x]_\alpha$ обладают свойствами:*

1) $[x]_\alpha \neq \varnothing \quad \forall x \in X$;

2) $\forall x \forall y\ ([x]_\alpha \cap [y]_\alpha \neq \varnothing \Longrightarrow [x]_\alpha = [y]_\alpha)$;

3) $\bigcup\limits_{x \in X} [x]_\alpha = X$.

► 1) Так как α рефлексивно, то $x\alpha x \Leftrightarrow x \in [x]_\alpha$, значит, $[x]_\alpha \neq \varnothing$.

3) Так как $x \in [x]_\alpha$, то $\{x\} \subset [x]_\alpha$, тогда

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subset \bigcup_{x \in X} [x]_\alpha \subset X \tag{4.4}$$

(последнее — $\bigcup\limits_{x \in X} [x]_\alpha \subset X$ выполнено, так как $[x]_\alpha \subset X$). Мы получили, что в (4.4) слева и справа стоит множество X, значит, в этой цепочке все знаки $\subset$ тривиальны, т. е. заменяются на знак $=$.

2) Пусть $[x]_\alpha \cap [y]_\alpha \neq \varnothing$. Покажем, что в этом случае $[x]_\alpha = [y]_\alpha$. Тривиальным является случай, когда $x = y$. Рассмотрим случай $x \neq y$. Зафиксируем произвольную точку $z \in [x]_\alpha \cap [y]_\alpha$ и возьмем произвольную точку $t \in [y]_\alpha$, тогда мы имеем:

а) $x\alpha z\ (z \in [x]_\alpha)$; б) $y\alpha z\ (z \in [y]_\alpha)$;

в) $y\alpha t\ (t \in [y]_\alpha)$.

Так как α симметрично, то $y\alpha z \Leftrightarrow$ б$'$) $z\alpha y$. Из а) и б$'$) по транзитивности α получаем г) $x\alpha y$. Из в) и г) по транзитивности α получаем, что $x\alpha t \Leftrightarrow$ д) $t \in [x]_\alpha$.

Так как t — произвольная точка $[y]_\alpha$, то мы доказали, что из $[x]_\alpha \cap [y]_\alpha \neq \varnothing \Longrightarrow [y]_\alpha \subset [x]_\alpha$.

Но условие $[x]_\alpha \cap [y]_\alpha \neq \varnothing \Leftrightarrow [y]_\alpha \cap [x]_\alpha \neq \varnothing$, значит, по доказанному и $[x]_\alpha \subset [y]_\alpha$, но тогда мы доказали, что

$$[x]_\alpha = [y]_\alpha.$$ ◄

Определение 4.18. *Пусть α — отношение эквивалентности на X. Фактор-множеством множества X по отношению α называется множество, обозначаемое X/α, элементами которого являются классы эквивалентности — $[x]_\alpha$.*

П **Пример 4.18.** Пусть γ — отношение эквивалентности на $\mathbb{C}$, заданное правилом $z_1 \gamma z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$ (пример 4.9), тогда $\mathbb{C}/\gamma$ — множество концентрических окружностей с центром в начале координат, включая и вырожденную — $|z| = 0$.

Пример 4.19. Пусть w — отношение эквивалентности на $\mathbb{C}$, заданное правилом

$$z_1 w z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2,$$

$\mathbb{C}/w$ — множество горизонтальных прямых на плоскости.

Мы видим, что при переходе от X к X/α происходит изменение природы объектов (были точки комплексной плоскости — стали концентрические окружности (пример 4.18), горизонтальные прямые (пример 4.19)).

Важным понятием, позволяющим вернуться к объектам исходной природы, является система различных представителей (СРП).

Определение 4.19. *Пусть α — отношение эквивалентности на X. $X'(\subset X)$ называется СРП по отношению эквивалентности α, если для любого x из X выполнено $|X' \cap [x]_\alpha| = 1$.*

П **Пример 4.20.** Ясно, что в качестве СРП примера 4.18 можно взять множество таких комплексных чисел z, у которых $\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.

П **Пример 4.21.** Ясно, что в качестве СРП примера 4.19 можно взять множество таких комплексных чисел z, у которых $\operatorname{Re} z = 0$.

Теорема 4.5. *Если α — отношение эквивалентности на X, то между X' — СРП по α и X/α можно установить биективное соответствие, в частности, если $|X/\alpha| < \infty$, то $|X'| = |X/\alpha|$.*

Вопросы в конце параграфа

?

1. Постройте другие СРП для примеров 4.19 и 4.20.
2. Постройте пример множества X и отношения эквивалентности α на нем, для которых имеет место $|X| = \infty$, $|X/\alpha| < \infty$.
3. Докажите, что если α — отношение эквивалентности на конечном множестве X, $|X| = |X/\alpha|$, то α — отношение равенства на множестве X.
4. Докажите, что если α — отношение эквивалентности на множестве X, $x \in X$ и $y \in [x]_\alpha$, то $[x]_\alpha = [y]_\alpha$.
5. Перечислите все отношения эквивалентности на множестве $\{1; 2; 3; 4\}$.

Глава 5
Булевы функции

В этой главе мы возвращаемся к началу нашего курса. Мы знаем, что с каждой формулой алгебры высказываний $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ связана функция $\hat{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, сопоставляющая каждому фиксированному набору высказывательных переменных значение истинности формулы ($\in \{0, 1\}$). Поскольку в самих высказываниях нас интересует не содержательная часть, а только значение истинности, то фактически $\hat{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — отображение множества $\{0, 1\}^n$ в $\{0, 1\}$. Сейчас мы отойдем от схемы формула — функция и займемся изучением множества булевых функций — отображений $\{0, 1\}^n$ в $\{0, 1\}$. Особенностью этого множества является следующее: все переменные и значения функций одной природы ($\{0, 1\}$), что создает «простор» для построения суперпозиций, так как вместо любой переменной можно подставить в булеву функцию булеву функцию.

§ 5.1. Функции алгебры логики. Многочлены Жегалкина

Множества $P_2(n)$, P_2

Определение 5.1. *Пусть $E_2 = \{0; 1\}$. Булевой функцией (функцией алгебры логики (0–1 функцией)) от n переменных называется отображение $f : E_2^n \to E_2$. Напомним, что $E_2^n = \underbrace{E_2 \times E_2 \times \dots \times E_2}_{n \text{ раз}}$.*

Множество булевых функций от n переменных обозначим $P_2(n)$, таким образом

$$P_2(n) = E_2^{E_2^n},$$

а множество всех булевых функций обозначим через P_2, т. е.

$$P_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_2(n).$$

Теорема 5.1. $|P_2(n)| = 2^{2^n}$.

► Применим теоремы о $|Y^X|$ и $|X^n|$ (теоремы 3.6, 3.7):

$$|P_2(n)| = |E_2^{E_2^n}| = |E_2|^{|E_2^n|} = 2^{|E_2|^n} = 2^{2^n}. \qquad ◄$$

Заметим, что множества $P_2(n)$ конечны, но число элементов в них быстро растет в зависимости от n. Действительно,

$$|P_2(0)| = 2, \quad |P_2(1)| = 4, \quad |P_2(2)| = 16,$$

$$|P_2(3)| = 2^{2^3} = 256, \quad |P_2(4)| = 65\,536.$$

Уже для небольших n (3, 4, 5) множество $P_2(n)$ становится совершенно «необозримым».

Выпишем все функции из множества $P_2(2)$, задав их своими таблицами. Столбцы значений функций из $P_2(2)$ будем рассматривать как четырехразрядные двоичные числа и будем их располагать (и нумеровать) в лексикографическом порядке (табл. 5.1).

Табл. 5.1 $P_2(2)$

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Окончание табл. 5.1

x_1	x_2	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Среди этих функций много наших «хороших знакомых»:

$$f_0 = 0, \quad f_{15} = 1, \quad f_1(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2,$$
$$f_7(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2, \quad f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \to x_2,$$
$$f_9(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2, \quad f_3(x_1, x_2) = x_1, \quad f_5(x_1, x_2) = x_2,$$

$$f_{12}(x_1, x_2) = \overline{x}_1, \quad f_{10}(x_1, x_2) = \overline{x}_2,$$
$$f_6(x_1, x_2) = \overline{x_1 \sim x_2} = x_1 \oplus x_2, \quad f_{11}(x_1, x_2) = x_2 \to x_1.$$

Функция $f_8 = \overline{x_1 \vee x_2}$ называется *функцией Пирса* и обозначается $x_1 \uparrow x_2$ (*стрелка Пирса*), а функция $f_{14}(x_1, x_2) = \overline{x_1 \cdot x_2}$ называется *функцией Шеффера* и обозначается $x_1 | x_2$ (штрих Шеффера). Как мы увидим в дальнейшем, каждая из двух последних функций обладает удивительной способностью порождать все множество булевых функций.

В этом и следующем параграфах мы более подробно изучим множество булевых функций, а вернее, алгебру булевых функций, т. е. множество этих функций, оснащенное операцией суперпозиции функций. Множество 0–1 функций уже появлялось в наших рассмотрениях в связи с изучением формул алгебры высказываний (таковыми были $\hat{f}$, где f — формула алгебры высказываний). Более того, мы уже знаем (после изучения теории нормальных форм), что любая функция из P_2 реализуема в виде высказывательной функции булевой формулы алгебры высказываний, т. е. использующей только $\neg$, $\vee$, $\wedge$.

Главной задачей, которую мы ставим на ближайшее время, является получение ответа на вопрос:

«Каким условиям должен удовлетворять набор функций $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, чтобы любая функция алгебры логики могла быть реализована в виде формулы над набором $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$?» Исчерпывающий ответ на этот вопрос дает теорема Поста, доказательство которой и составит основную содержательную часть этой главы.

Алгебра булевых функций интересна с двух точек зрения — чисто математической и прикладной.

С математической точки зрения это алгебра с «богатой» внутренней структурой, которая возникает из-за того, что все переменные и множество значений функций имеют одну природу, поэтому в P_2 можно вместо любой переменной подставлять функцию из P_2 (суперпозиция) и отождествлять переменные (т. е. осуществлять суперпозицию с тождественной функцией одной и той же переменной).

С прикладной точки зрения интерес к 0–1 функциям основан на том, что вся современная электроника (в том числе компьютерная) — цифровая 0–1 электроника.

Многочлены Жегалкина

В качестве «строительного материала» для построения многочленов Жегалкина[1] используют константы 0 и 1 и символы переменных, в качестве «связующего материала» — операции конъюнкции (&) и сложения по mod 2 ($\oplus$, см. f_6 в табл. 5.1).

[1] И. И. Жегалкин (1869–1947) — профессор МГУ, основатель первого в стране научного семинара по математической логике, в котором работали П. С. Новиков, В. И. Гливенко, А. А. Ляпунов. Основные труды относятся к математической логике, теории множеств, основаниям математики, теории функций действительного переменного.

Определение 5.2. *Многочленом Жегалкина от переменных* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *называется выражение, полученное из* 0; 1; x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ *путем применения конечного числа операций &,* $\oplus$ *и скобок, определяющих порядок действий.*

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 5.1.** $p(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot x_2 \oplus 1) \cdot (x_1 \oplus 0 \cdot$ $\cdot x_2 \cdot x_3 \oplus 1) \oplus 1$.

$\boxed{!}$ **Замечание.** Так как конъюнкция — идемпотентная операция ($xx = x$), в алгебре логики нет степеней переменных.

Определение 5.3. *Каноническим многочленом Жегалкина от* n *переменных* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *называется многочлен вида*

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \dots \oplus a_nx_n \oplus$$
$$\oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus \dots \oplus a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \oplus \dots$$
$$\oplus \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} a_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \oplus \dots \oplus a_{12\dots n} x_1 x_2 \dots x_n,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, a_{i_1 i_2 \dots i_k}, \dots, a_{123\dots n} \in \{0, 1\}$.

$\boxed{!}$ **Замечание.** Считается, что «$\cdot$» сильнее, чем «$\oplus$».

Теорема 5.2. *Любой многочлен Жегалкина может быть приведен к каноническому виду.*

Доказательство следует из существования дистрибутивного закона

$$a \cdot (b \oplus c) = a \cdot b \oplus ac \tag{5.1}$$

и правила приведения подобных:

$$\underbrace{a \oplus a \oplus \dots \oplus a}_{k \text{ раз}} = \begin{cases} 0, \text{если } k = 2n,\ n \in N; \\ a, \text{если } k = 2n - 1,\ n \in N. \end{cases} \tag{5.2}$$

Имея дистрибутивный закон (5.1) и правило приведения подобных (5.2), помня об идемпотентности конъюнкции, для получения канонического многочлена Жегалкина нужно раскрыть скобки и привести подобные.

П **Пример 5.2.** Вернемся к примеру § 5.1.

$$p(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2 \oplus 1)\cdot (x_1 \oplus 0\cdot x_2x_3 \oplus 1)\oplus 1 =$$
$$= x_1x_2 \oplus x_1 \oplus 0 \cdot x_1x_2x_3 \oplus 0 \cdot x_2x_3 \oplus x_1x_2\oplus$$
$$\oplus x_1x_2\oplus 1\oplus 1 = 0 \oplus 1 \cdot x_1\oplus 0\cdot x_2 \oplus 0 \cdot x_3 \oplus$$
$$\oplus 0 \cdot x_1x_2 \oplus 0 \cdot x_1x_3 \oplus\cdot x_2x_3 \oplus 0 \cdot x_1x_2x_3.$$

Получен канонический многочлен Жегалкина для исходного многочлена $p(x_1, x_2, x_3)$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{123} = 0$.

Для канонического многочлена часто используют сокращенную запись, в которой слагаемые с нулевыми коэффициентами опущены, а единичные коэффициенты не написаны, тогда

$$p(x_1, x_2, x_3) = x_1.$$

Теорема 5.3. *Для любой функции алгебры логики существует ее представление в виде многочлена Жегалкина.*

► Мы уже знаем (см. § 1.5), что любая функция алгебры логики может быть реализована (представлена) булевой формулой (например, СДНФ или СКНФ), поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать существование многочлена Жегалкина для функции, реализованной булевой формулой, а для этого достаточно доказать, что операции $\vee$ и $\neg$ выражаются через жегалкинские операции. Очевидно, справедливы формулы

$$\neg a = a \oplus 1; \tag{5.3}$$
$$a \vee b = ab \oplus a \oplus b. \tag{5.4}$$

Справедливость (5.3) следует из определения операции $\oplus$.

Докажем (5.4):

$$a \vee b = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}} = (a \oplus 1)(b \oplus 1) \oplus 1 =$$
$$= a \cdot b \oplus b \oplus a \oplus 1 \oplus 1 = ab \oplus a \oplus b.$$

Если теперь в булевой формуле исключить с помощью (5.3) и (5.4) отрицание и дизъюнкцию, то будет получен многочлен Жегалкина. ◀

Теорема 5.4. *Для любой функции $f \in P_2(n)$ существует единственное представление каноническим многочленом Жегалкина.*

▶ Существование представления каноническим многочленом следует из теорем 5.2 и 5.3. Докажем единственность. Обозначим через (n) множество канонических многочленов от n переменных.

Каждый канонический многочлен порождает свой набор коэффициентов. Поэтому

$$|(n)| = |\text{«множество наборов коэффициентов»}|.$$

Если мы докажем, что

$$|\text{«множество наборов коэффициентов»}| = 2^{2^n} = |P_2(n)|, \tag{5.5}$$

то это будет означать, что для каждой булевой функции от n переменных существует точно по одному представлению каноническим многочленом Жегалкина.

Каждому набору индексов у коэффициентов многочлена поставим в соответствие (биективно) множество по следующему правилу:

$$0 \to \varnothing,\ 1 \to \{1\},\ 2 \to \{2\}, \dots, \{n\} \to \{n\},$$
$$1\ 2 \to \{1; 2\}, \dots, n-1,\ n \to \{n-1; n\}, \dots$$
$$1, 2, \dots,\ n \to \{1; 2; \dots; n\}.$$

Эти множества — подмножества $[1;n]_N$, т. е. элементы множества $2^{[1;n]_N}$. Тогда

$$|\text{«множество индексов коэффициентов»}| = \\ = |2^{[1;n]_N}| = 2^{|[1;n]_N|} = 2^n.$$

Таким образом, набор коэффициентов канонического многочлена Жегалкина от n переменных можно рассматривать как 2^n-разрядное двоичное число, а их количество равно 2^{2^n}.

Соотношение (5.5) и вся теорема доказаны. ◀

Следствие из теоремы 5.4. Различные канонические многочлены Жегалкина различны и как функции из $P_2(n)$.

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 5.3.** Найти канонический многочлен Жегалкина для $(x_1 \vee \overline{x}_2) \to x_1x_2$.

► **1-й способ (равносильные преобразования)**

$$(x_1 \vee \overline{x}_2) \to x_1x_2 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_1x_2 = \overline{x}_1x_2 \vee x_1x_2 = x_2.$$

2-й способ (метод неопределенных коэффициентов)

$$(x_1 \vee \overline{x}_2) \to x_1x_2 = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_{12}x_1x_2.$$

Подставляя последовательно в левую и правую части наборы значений переменных $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, получаем

$$(0 \vee 1) \to 0 \cdot 0 = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_{12}0 \cdot 0;$$
$$0 = a_0;$$
$$(0 \vee 0) \to 0 \cdot 1 = 0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_{12}0 \cdot 1;$$
$$1 = a_2$$
$$(1 \vee 1) \to 1 \cdot 0 = 0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 0 \oplus a_{12}1 \cdot 0;$$
$$0 = a_1;$$
$$(1 \vee 0) \to 1 \cdot 1 = 0 \oplus 0 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 \oplus a_{12}1 \cdot 1;$$
$$1 \to 1 = 1 \oplus a_{12};\ 1 = 1 \oplus a_{12},\ a_{12} = 0.$$ ◀

Замечания и вопросы в конце параграфа

? ! **1.** Мы перестали в этой главе использовать знак $\equiv$ («равносильно»), так как объектами нашего рассмотрения являются 0–1 функции, а формулы алгебры высказываний теперь рассматриваем как один из способов задания этих функций.

2. Существенным «недостатком» канонического многочлена Жегалкина по сравнению с СДНФ и СКНФ является отсутствие простых алгоритмов восстановления по многочлену таблицы значений и по таблице значений многочлена.

3. Пусть $f \in P_2(n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Говорят, что функция не зависит от переменной x_i (x_i — фиктивная переменная для f), если имеет место равенство

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \\ = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \overline{x_i}, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Докажите, что x_i — фиктивная переменная для f тогда и только тогда, когда канонический многочлен Жегалкина для функции f не содержит в своей сокращенной записи переменную x_i.

§ 5.2. Полнота и замкнутость. Классы Поста P_0 и P_1

Полнота и замкнутость

Определение 5.4. *Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P_2$. Замыканием множества $\mathfrak{M}$ называется множество, обозначаемое $[\mathfrak{M}]$, которое состоит из функций множества $\mathfrak{M}$ и функций, которые могут быть получены из функций множества $\mathfrak{M}$ путем отождествления переменных и суперпозиций (конечным их числом).*

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 5.4.** $\mathfrak{M} = \{0, 1\}$ $[\mathfrak{M}] = \{0; 1\} = \mathfrak{M}$.

Пример 5.5. $\mathfrak{M} = P_2$, $[\mathfrak{M}] = P_2 = \mathfrak{M}$.

Пример 5.6. $\mathfrak{M} = \{\neg, \vee, \wedge\}$, $[\mathfrak{M}] \stackrel{?}{=} P_2 \neq \mathfrak{M}$.

Определение 5.5. *Множество $\mathfrak{M}$ называется замкнутым, если $[\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$.*

Определение 5.6. *Множество $\mathfrak{M}$ называется полным, если $[\mathfrak{M}] = P_2$.*

Очевидно, $\{0; 1\}$ замкнуто и неполно, P_2 замкнуто и полно, $\{\neg, \vee, \wedge\}$ незамкнуто и полно.

Теорема 5.5. *Имеют место следующие свойства:*

1. $\mathfrak{M} \subseteq [\mathfrak{M}]$ $\forall \mathfrak{M} \subseteq P_2$.
2. $[[\mathfrak{M}]] = [\mathfrak{M}]$ $\forall \mathfrak{M} \subseteq P_2$.
3. $\mathfrak{M}_1 \subseteq M_2 \Longrightarrow [\mathfrak{M}_1] \subseteq [\mathfrak{M}_2]$ $\forall \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \subseteq P_2$.

► Справедливость теоремы следует из определения замыкания (см. определение 5.4). ◄

Теорема 5.6. *Если* $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$, *то:*

1) *если* $\mathfrak{M}_1$ *полно, то* $\mathfrak{M}_2$ *полно;*
2) *если* $\mathfrak{M}_2$ *неполно, то* $\mathfrak{M}_1$ *неполно.*

▶ Очевидно, эта теорема следует из предыдущей и определения полноты (см. определение 5.6). ◀

Класс P_0 и его свойства

Определение 5.7. *Пусть* $f \in P_2(n)$. *Говорят, что функция сохраняет ноль, если* $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Обозначим через $P_0(n)$ множество функций от n переменных, сохраняющих ноль, а через P_0 — множество всех функций, сохраняющих ноль, т. е.

$$P_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_0(n).$$

П **Пример 5.7.** $0 \in P_0, 1 \notin P_0$; $x_1 \vee x_2 \in P_0$, $x_1 \cdot x_2 \in P_0$, $x_1 \to x_2 \notin P_0$.

Теорема 5.7. $|P_0(n)| = 2^{2^n - 1} = \dfrac{2^{2^n}}{2} = \dfrac{|P_2(n)|}{2}$.

▶ Любая функция алгебры логики может быть задана таблицей. Таблица функции из P_0 характерна тем, что в столбце значений функции вверху (в строке, соответствующей нулевому набору значений переменных, см. табл. 5.2) стоит 0.

Столбец значений функции, сохраняющей 0, можно понимать как 2^n-разрядное двоичное число, у которого в старшем разряде стоит 0, или как $(2^n - 1)$-разрядное двоичное число, а таких чисел

$$2^{(\text{число разрядов})} = 2^{2^n - 1}.$$ ◀

Табл. 5.2

x_1	x_2	...	x_n	f
0	0	...	1	0
0	0	...	1	$*$
...	...	...	...	...
1	1	...	1	$*$

$** \cdots *$ — любой набор из 0 и 1.

Теорема 5.8. *Класс P_0 замкнут и неполон, т. е.*

$$[P_0] = P_0 \neq P_2.$$

► Так как тождественная функция сохраняет 0, а отождествление переменных — суперпозиция с тождественной функцией (подстановка тождественной функции на места отождествляемых переменных), то для доказательства замкнутости достаточно показать, что суперпозиция функций, сохраняющих ноль, сохраняет ноль. Пусть

$$\Phi(y_1, \dots, y_m), f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) \in P_0.$$

Докажем, что $F(x_1, \dots, x_n) = \left(\Phi|_{y_i \leftarrow f_i}\right)(x_1, \dots, x_n) \in P_0$

$$F(0,0, \dots, 0) = \Phi(f_1(0, \dots, 0), f_2(0, \dots, 0), \dots, f_m(0, \dots, 0)) =$$

$$\stackrel{f_i \in P_0}{=} \Phi(0, 0, \dots, 0) \stackrel{\Phi \in P_0}{=} 0.$$

Теперь, когда замкнутость P_0 доказана, неполнота P_0 следует из существования функций, не сохраняющих 0 (см. пример 5.7). ◄

Лемма 5.1 (о функции, не сохраняющей ноль)
Если $f \notin P_0$, то отождествлением всех ее переменных из нее получается константа 1 или $\neg x$.

► Пусть $f \notin P_0$, т. е. $f(0, 0, \dots, 0) = 1$. Рассмотрим $\varphi(x) = f(x, x, \dots, x)$. Ясно, что $\varphi(0) = f(0, 0, \dots, 0) = 1$. Найдем $\varphi(1)$. Если $\varphi(1) = 1$, то $\varphi(x) = 1$ — константа, если $\varphi(1) = 0$, то $\varphi(x) = \neg x$. ◄

Класс P_1 и его свойства

Определение 5.8. *Пусть* $f \in P_2(n)$. *Говорят, что функция сохраняет единицу, если* $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$.

Обозначим через $P_1(n)$ множество функций от n переменных, сохраняющих единицу, а через P_1 — множество всех функций, сохраняющих единицу, т. е.

$$P_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_1(n).$$

П **Пример 5.8**

$$1 \in P_1,\ 0 \notin P_1,\ x \in P_1,\ \neg x \notin P_1,\ x_1 \vee x_2 \in P_1,$$
$$x_1 \cdot x_2 \in P_1,\ x_1 \to x_2 \in P_1,\ x_1 \oplus x_2 \notin P_1.$$

Очевидно, имеют место следующие теоремы и лемма.

Теорема 5.9. $|P_1(n)| = 2^{2^n - 1} = \dfrac{|P_2(n)|}{2}$.

Теорема 5.10
Класс P_1 *замкнут и неполон, т. е.* $[P_1] = P_1 \neq P_2$.

Лемма 5.2 (**о функциях, не сохраняющих единицу**)
Если $f \notin P_1$, *то отождествлением всех ее переменных из нее получается константа* 0 *или* $\neg x$.

Вопросы в конце параграфа

?
1. Самостоятельно докажите теоремы 5.9, 5.10 и лемму 5.2 (о функциях, не сохраняющих единицу).
2. Чему равно $|P_0(n) \cap P_1(n)|$, $|P_0(n) \cup P_1(n)|$?
3. Какие из множеств функций замкнуты: $P_2(0)$, $P_2(1)$, $P_2(2)$, $P_1(0)$, $P_1(1)$, $P_1(2)$, $P_0(0)$, $P_0(1)$, $P_0(2)$, $P_0 \cap P_1$, $P_0 \cup P_1$?

4. Какие из множеств функций полны: $P_2(0)$, $P_2(1)$, $P_2(2)$, $P_1(0)$, $P_1(1)$, $P_1(2)$, $P_0(0)$, $P_0(1)$, $P_0(2)$, $P_0 \cap P_1$, $P_0 \cup P_1$?

5. Является ли объединение (пересечение) замкнутых множеств замкнутым множеством?

6. Является ли объединение (пересечение) полных множеств полным множеством?

7. Докажите, что $[\mathfrak{M}_1] \cup [\mathfrak{M}_2] \subseteq [\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2]$.

8. Приведите пример, когда $[\mathfrak{M}_1] \cup [\mathfrak{M}_2]$ является собственным подмножеством $[\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2]$.

§ 5.3. Классы Поста L и S

Класс L и его свойства

Определение 5.9. *Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_2(n)$. Говорят, что функция f линейна, если ее канонический многочлен Жегалкина не содержит произведений переменных (т. е. коэффициенты при слагаемых, содержащих произведения переменных, равны нулю).*

Обозначим через $L(n)$ множество линейных функций от n переменных, а через L — множество всех линейных функций, т. е.

$$L = \bigcup_{n=0}^{\infty} L(n).$$

П **Пример 5.9**

$$1 \in L,\ 0 \in L,\ \neg x = x \oplus 1 \in L,$$

$$x_1 \cdot x_2 \notin L,\ x_1 \vee x_2 = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \notin L,$$

$$x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2 = (x_1 \oplus 1) \cdot x_2 \oplus (x_1 \oplus 1) \oplus x_2 =$$

$$= x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus 1 \notin L,\ x_1 \oplus x_2 \in L.$$

Теорема 5.11. $|L(n)| = 2^{n+1}$.

► Линейный канонический многочлен Жегалкина от n переменных имеет следующий вид:

$$a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \cdots \oplus a_nx_n.$$

Он взаимнооднозначно определяется набором своих коэффициентов: $a_0a_1 \ldots a_n$. Так как коэффициенты принимают значения во множестве $E_2 = \{0; 1\}$, то набор коэффициентов можно рассматривать как $(n+1)$-разрядное двоичное число, а их количество равно

$$2^{(\text{число разрядов})} = 2^{n+1}. \qquad ◄$$

Теорема 5.12. *Класс L замкнут и неполон, т. е.*

$$[L] = L \neq P_2.$$

► Так как тождественная функция линейна, то для доказательства замкнутости нужно доказать, что суперпозиция линейных функций — линейная функция.

Пусть

$$\begin{aligned}
\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m) &= b_0 \oplus b_1y_1 \oplus b_2y_2 \oplus \cdots \oplus b_my_m,\\
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_0^1 \oplus a_1^1x_1 \oplus a_2^1x_2 \oplus \cdots \oplus a_n^1x_n,\\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_0^2 \oplus a_1^2x_1 \oplus a_2^2x_2 \oplus \cdots \oplus a_n^2x_n,\\
&\ldots\\
f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_0^m \oplus a_1^mx_1 \oplus a_2^mx_2 \oplus \cdots \oplus a_n^mx_n.
\end{aligned}$$

Образуем

$$\begin{aligned}
F(x_1, \ldots, x_n) = (\Phi|_{y_i \leftarrow f_i})(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\
= b_0 \oplus b_1(a_0^1 \oplus a_1^1x_1 \oplus a_2^1x_2 \oplus \cdots \oplus a_n^1x_n) \oplus \\
\oplus b_2(a_0^2 \oplus a_1^2x_1 \oplus a_2^2x_2 \oplus \cdots \oplus a_n^2x_n) \oplus \\
\oplus \cdots \oplus \\
\oplus b_m(a_0^m \oplus a_1^mx_1 \oplus a_2^mx_2 \oplus \cdots \oplus a_n^mx_n) = \\
= c_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus \cdots \oplus c_nx_n,
\end{aligned}$$

где
$$\begin{aligned}
c_0 &= b_0 \oplus b_1 a_0^1 \oplus b_2 a_0^2 \oplus \dots \oplus b_m a_0^m,\\
c_1 &= \phantom{b_0 \oplus{}} b_1 a_1^1 \oplus b_2 a_1^2 \oplus \dots \oplus b_m a_1^m,\\
c_2 &= \phantom{b_0 \oplus{}} b_1 a_2^1 \oplus b_2 a_2^2 \oplus \dots \oplus b_m a_2^m,\\
&\qquad\qquad \dots,\\
c_n &= \phantom{b_0 \oplus{}} b_1 a_n^1 \oplus b_2 a_n^2 \oplus \dots \oplus b_m a_n^m.
\end{aligned}$$

Значит, $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L$ и замкнутость L доказана. После того как замкнутость L доказана, неполнота L следует из существования нелинейных функций (см. пример 5.9). ◀

Лемма 5.3 (о нелинейной функции). *Из произвольной нелинейной функции с помощью подстановки констант и отрицания можно получить конъюнкцию двух переменных.*

▶ Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \notin L$, значит, в ее каноническом многочлене Жегалкина присутствуют слагаемые, содержащие произведения каких-то переменных. Не нарушая общности, будем считать, что нелинейность проявилась за счет присутствия слагаемых, содержащих x_1x_2. Представим тогда нашу функцию в виде
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underbrace{a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \dots \oplus a_nx_n}_{\text{линейная часть канонического многочлена}} \oplus$$
$$\oplus x_1x_2f_1(x_3, x_4, \dots, x_n) \oplus x_1f_2(x_3, x_4, \dots, x_n) \oplus$$
$$\oplus x_2f_3(x_3, x_4, \dots, x_n) \oplus f_4(x_3, x_4, \dots, x_n).$$
Слагаемое $x_1x_2f_1(x_3, \dots, x_n)$ получилось группировкой в нелинейной части всех слагаемых, содержащих x_1x_2, и вынесением x_1x_2 за скобки; слагаемое $x_1f_2(x_3, \dots, x_n)$ получилось группировкой в нелинейной части всех слагаемых, содержащих x_1 и не содержащих x_2, и вынесением x_1 за скобки; аналогично получается

$x_2 f_3(x_3, x_4, \dots, x_n)$, а $f_4(x_3, x_4, \dots, x_n)$ остается от нелинейной части после выделения $x_1 x_2 f_1$, $x_1 f_2$, $x_2 f_3$. По нашему предположению, $f_1(x_3, x_4, \dots, x_n) \neq 0$. Это означает, что существует такой набор значений переменных $x_3, \dots, x_n$ — $\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n$, что $f_1(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n) = 1$. Подставляя константы $\alpha_3, \dots, \alpha_n$ из этого набора в функцию f, получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n) = \\ = a_0' \oplus a_1' x_1 \oplus a_2' x_2 \oplus x_1 x_2, \end{aligned} \tag{5.6}$$

где

$$\begin{aligned} a_0' &= a_0 \oplus a_3\alpha_3 \oplus a_4\alpha_4 \oplus \dots \oplus a_n\alpha_n \oplus f_4(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n), \\ a_1' &= a_1 \oplus f_2(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n), \\ a_2' &= a_2 \oplus f_3(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Покажем, что, пользуясь средствами, разрешенными условиями леммы, можно избавиться в (5.6) от слагаемых первой степени.

Образуем функцию $\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1 \oplus \alpha, x_2 \oplus \beta)$, где $\alpha, \beta \in \{0; 1\}$ (если $\alpha = 0$, то $x_1 \oplus \alpha = x_1$; если $\alpha = 1$, то $x_1 \oplus \alpha = \overline{x}_1$, если $\beta = 0$, то $x_2 \oplus \beta = x_2$; если $\beta = 1$, то $x_2 \oplus \beta = \overline{x}_2$).

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2) &= a_0' \oplus a_1'(x_1 \oplus \alpha) \oplus a_2'(x_2 \oplus \beta) \oplus (x_1 \oplus \alpha)(x_2 \oplus \beta) = \\ &= (a_0' \oplus a_1'\alpha \oplus a_2'\beta \oplus \alpha\beta) \oplus (a_1' \oplus \beta)x_1 + (a_2' \oplus \alpha)x_2 \oplus x_1 x_2. \end{aligned}$$

Полагая $\alpha = a_2'$, $\beta = a_1'$, получаем

$$\psi(x_1, x_2) = (a_0' \oplus a_1' a_2') \oplus x_1 x_2.$$

Если $a_0' \oplus a_1' \cdot a_2' = 0$, то лемма доказана, если $a_0' \oplus a_1' a_2' = 1$, то $\psi(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus 1 = \overline{x_1 x_2}$.

Рассмотрим функцию

$$\psi_1(x_1, x_2) = \overline{\psi(x_1, x_2)} = \overline{\overline{x_1 x_2}} = x_1 x_2. \qquad \blacktriangleleft$$

Класс S и его свойства

Определение 5.10. *Пусть* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_2$. *Говорят, что функция* f *самодвойственна, если*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^*(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{def}{=} \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}.$$

Обозначим через $S(n)$ множество самодвойственных функций от n переменных, а через S — множество всех самодвойственных функций, т. е.

$$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} S(n).$$

П **Пример 5.10.** $0 \notin S,\ 1 \notin S,\ x \in S, \overline{x} \in S,$
$x_1 \vee x_2 \notin S,\ x_1 \cdot x_2 \notin S.$

Теорема 5.13. $|S(n)| = 2^{2^{n-1}}$.

► Таблица самодвойственной функции характерна тем, что столбец ее значений переходит сам в себя при инвертировании (см. § 1.3). Тогда задание верхней половины столбца значений самодвойственной функции однозначно определяет нижнюю половину столбца значений функции (см. табл. 5.3).

Табл. 5.3

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$f = f^*$
0	0	$\ldots$	0	$\square$
0	0	$\ldots$	1	$\triangle$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
1	1	$\ldots$	0	$\overline{\triangle}$
1	1	$\ldots$	0	$\overline{\square}$

Верхнюю половину столбца значений можно рассматривать как (2^{n-1})-разрядное двоичное число, а таких чисел

$$2^{(\text{число разрядов})} = 2^{2^{n-1}}.$$ ◄

Теорема 5.14. *Класс самодвойственных функций замкнут и неполон, т. е.* $[S] = S \neq P_2$.

► Так как тождественная функция самодвойственна, то для доказательства замкнутости нужно доказать, что суперпозиция самодвойственных функций является самодвойственной функцией.

Пусть $\Phi(y_1, \dots ,y_m), f_1(x_1, \dots ,x_n), \dots ,f_m(x_1, \dots ,x_n) \in S$. Образуем $F(x_1, \dots , x_n) = (\Phi_{y_i \leftarrow f_i})(x_1, \dots , x_n)$. Найдем F^*. По общему принципу двойственности (§ 1.3) имеем

$$F^*(x_1, x_2, \dots , x_n) = (\,\Phi^*|_{y_i \leftarrow f_i^*})(x_1, \dots , x_n) \overset{\Phi=\Phi^*,\ f_i=f_i^*}{=}$$
$$= (\,\Phi|_{y_i \leftarrow f_i})(x_1, \dots , x_n) = F(x_1, \dots , x_n).$$

Самодвойственность F доказана.

Теперь, когда замкнутость S доказана, неполнота S следует из существования несамодвойственных функций (см. пример 5.10). ◄

Лемма 5.4. *Из любой несамодвойственной функции с помощью отрицания и отождествления переменных можно получить константы* 0 *и* 1.

► Пусть $f \notin S$. Это означает, что $f(x_1, \dots , x_n) \neq$ $\neq f^*(x_1, \dots , x_n)$. Значит, существует такой набор значений переменных $(\alpha_1, \alpha_2, \dots ,\alpha_n)$, что

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_n) \neq f^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_n) \text{ или}$$
$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_n) \neq \overline{f(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots , \overline{\alpha_n})}.$$

Значит,

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_n) = f(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots , \overline{\alpha_n}). \tag{5.7}$$

Рассмотрим $\varphi(x) = f(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots , x^{\alpha_n})$. Тогда

$$\varphi(0) = f(0^{\alpha_1}, 0^{\alpha_2}, \dots , 0^{\alpha_n}) = f(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots , \overline{\alpha_n}),$$
$$\varphi(1) = f(1^{\alpha_1}, 1^{\alpha_2}, \dots , 1^{\alpha_n}) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_n).$$

Учитывая (5.7), получаем, что $\varphi(0) = \varphi(1)$, т. е. $\varphi(x)$ — константа, $\overline{\varphi(x)}$ — вторая константа. ◀

П **Пример 5.11.** Продемонстрируем теперь «работу» леммы 5.4 на примере функции $x_1 \vee x_2$. Набор (α_1, α_2), о котором идет речь в лемме, — $(0, 1)$, тогда $\varphi(x) = \overline{x} \vee x = 1$.

Вопросы в конце параграфа

? **1.** Чему равно $|S(n) \cap P_0(n)|$, $|S(n) \cup P_0(n)|$, $|S(n) \cap P_1(n)|$, $|S(n) \cup P_1(n)|$?

2. Рассмотрите «работу» леммы 5.3 (о нелинейной функци) на примере функции $x_1 \to x_2$, леммы 5.4 (о несамодвойственной функции) на примере $x_1 \cdot x_2 \vee x_3$.

3. Докажите, что $P_2(0) = L(0)$, $P_2(1) = L(1)$, $P_2(2) \neq \neq L(2)$.

§ 5.4. Класс Поста M

Определение 5.11. *Введем на множестве E_2^n бинарное отношение «$\preccurlyeq$» следующим:*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \preccurlyeq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \Leftrightarrow \forall i\ (\alpha_i \leqslant \beta_i). \quad (5.8)$$

П **Пример 5.12**

$$(0,1) \preccurlyeq (1,1),\ (0,0,0) \preccurlyeq (1,0,1),\ (0,1) \not\preccurlyeq (1,0),$$
$$(1,0) \not\preccurlyeq (0,1),\ (1,1) \preccurlyeq (1,1).$$

Теорема 5.15. *Бинарное отношение $\preccurlyeq$ на множестве E_2^n является отношением порядка, причем при $n \geqslant 2$ $\preccurlyeq$ — частичный порядок.*

▶ ◀

Определение 5.12. *Пусть $f \in P_2(n)$. Говорят, что f монотонна, если для любых наборов значений переменных $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ таких, что $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \preccurlyeq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, выполняется*

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leqslant f(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Обозначим через $M(n)$ множество монотонных функций от n переменных, а через M — множество всех монотонных функций, т. е.

$$M = \bigcup_{n=0}^{\infty} M(n).$$

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 5.13.** Рассмотрим множество $P_2(2)$ и определим, какие функции из $P_2(2)$ монотонны. $f_0 =$«0», $f_1 =$«$\wedge$», $f_3 =$«x_1», $f_5 =$«x_2», $f_7 =$«$\vee$», $f_{15} = 1 \in M$; f_2, f_4, f_6, f_8, f_9, f_{10}, f_{12}, f_{13}, f_{14} не являются монотонными.

Теорема 5.16. *Класс M замкнут и неполон, т. е.*

$$[M] = M \neq P_2.$$

► Так как тождественная функция монотонна, то для доказательства замкнутости достаточно показать, что суперпозиция монотонных функций монотонна. Пусть $\Phi \in P_2(m)$, $f_i \in P_2(n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Докажем, что функция

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\Phi|_{y_i \leftarrow f_i})(x_1, \ldots, x_n) \in M.$$

Возьмем $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — два произвольных набора значений переменных таких, что

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \preccurlyeq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

тогда

$$\xi_1 = f_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leqslant f_1(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \eta_1,$$
$$\xi_2 = f_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leqslant f_2(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \eta_2,$$

$$\dots\ \dots\ \dots$$
$$\xi_m = f_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leqslant f_m(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \eta_m.$$

Тогда $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \preccurlyeq (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$, а так как

$$\Phi(y_1, y_2, \dots, y_m) \in M,$$

то

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \leqslant \Phi(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m),$$

но

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$
$$\Phi(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) = F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Монотонность $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ доказана, а значит, доказана и замкнутость M. После того как замкнутость M доказана, неполнота M следует из существования немонотонных функций (см. пример 5.13). ◀

Лемма 5.5. *Из произвольной немонотонной функции с помощью подстановки констант и отождествления переменных можно получить отрицание.*

▶ Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \notin M$. Это означает, что существуют такие наборы значений переменных $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, что

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \preccurlyeq (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n),$$
$$\text{а} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) > f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Последнее означает, что

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1, f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = 0.$$

Из того, что $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, следует, что $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

Выделим подпоследовательность индексов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$ такую, что $\alpha_{i_1} = \beta_{i_1}, \alpha_{i_2} = \beta_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k} = \beta_{i_k}, \alpha_i \neq \beta_i, i \neq i_1, i_2, \dots, i_k$.

Последнее в сочетании с тем, что $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \preccurlyeq$ $\preccurlyeq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ означает, что $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1, i \neq$ $\neq i_1, i_2, \ldots, i_k$. Образуем функцию $\varphi(x)$, подставив на места $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ соответственно, а в остальные позиции — x. Тогда

$$\varphi(0) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1,$$
$$\varphi(1) = f(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = 0,$$

т. е. $\varphi(x) = \overline{x}$. ◀

П **Пример 5.14.** Рассмотрим «работу» леммы 5.5 на примере функции $x_1 \to x_2$. В качестве набора (α_1, α_2) возьмем набор $(0, 0)$, а в качестве набора (β_1, β_2) — набор $(1, 0)$, тогда, следуя лемме, $\varphi(x) = x \to 0 =$ $= \overline{x} \vee 0 = \overline{x}$.

Мы рассмотрели 5 классов функций — P_0, P_1, L, S, M. Они называются классами Поста в честь американского математика Эмиля Поста[2] — крупнейшего специалиста в области дискретной математики. Ему принадлежит и теорема — «критерий полноты», которой мы посвятим следующий параграф. Заметим, что для каждого класса Поста мы доказали его замкнутость и неполноту (это потребуется нам при доказательстве необходимости в теореме Поста) и лемму о функциях, не принадлежащих классу. (Леммы 5.1–5.5 будут работать при доказательстве достаточности.)

[2]Эмиль Леон Пост (1897–1954) родился в Польше, работал в США. Основные его труды относятся к математической логике (в том числе по m-значным логикам) и основаниям математики.

Замечания и вопросы в конце параграфа

1. Заметим, что монотонными мы назвали только монотонно возрастающие функции. Ясно, что можно определить и монотонно убывающие функции, однако если монотонными назвать и те, и другие, то для такого монотонного класса пропадет свойство замкнутости.

2. Докажите самостоятельно утверждение, сформулированное в замечании 1.

§ 5.5. Критерий полноты (теорема Поста)

Мы знаем, что множества функций $\{\neg, \vee, \wedge\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{0, 1, \wedge, \oplus\}$ полны. Сейчас мы сформулируем и докажем общий критерий полноты для произвольного множества функций $\mathfrak{M}$.

Теорема 5.17 (**теорема Поста**)

1-я формулировка

Для того чтобы множество $\mathfrak{M}$ было полным, необходимо и достаточно, чтобы оно не являлось подмножеством ни одного из классов Поста: P_0, P_1, L, S, M.

2-я формулировка

Для того чтобы множество $\mathfrak{M}$ было полным, необходимо и достаточно, чтобы для каждого класса Поста: P_0, P_1, L, S, M среди функций из $\mathfrak{M}$ нашлась функция, не принадлежащая этому классу Поста. (Для каждого класса может быть «своя» функция.)

Чтобы дать третью формулировку теоремы, определим, что такое таблица Поста для множества $\mathfrak{M}$. Столбцы таблицы соответствуют классам Поста: P_0, P_1, L, S, M. Строки — функциям из $\mathfrak{M}$. В клетках таблицы проставляются «$+$» или «$-$» в зависимости от того, принадлежит функция соответствующему классу или не принадлежит.

3-я формулировка

Для того чтобы множество $\mathfrak{M}$ было полным, необходимо и достаточно, чтобы в каждом столбце таблицы Поста множества $\mathfrak{M}$ был хотя бы один минус.

► Необходимость ►

Докажем ее от противного, т. е. предположим, что существует такое полное множество $\mathfrak{M}'$, которое является подмножеством хотя бы одного из классов Поста. Обозначим этот класс Π. Тогда $\mathfrak{M}' \subseteq \Pi$.

Перейдем к замыканиям. Тогда (см. теорему 5.5)

$$[\mathfrak{M}'] \subseteq [\Pi]. \tag{5.9}$$

Но, по нашему предположению, $[\mathfrak{M}'] = P_2$, а по свойствам класса Поста — $[\Pi] = \Pi \neq P_2$ и из (5.9) мы получаем, что $P_2 \subseteq \Pi \neq P_2$.

Так как $\Pi \subseteq P_2$, получаем $P_2 \underset{\text{строго}}{\subseteq} P_2$.

Полученное противоречие и доказывает необходимость условий теоремы для полноты множества.

◄ Необходимость

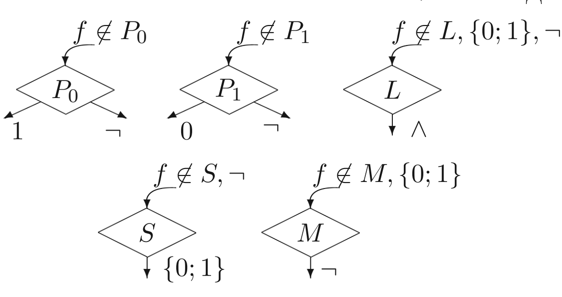


Рис. 5.1

Достаточность ►

Прежде чем провести доказательство достаточности, введем условные обозначения для доказанных лемм (см. рис. 5.1).

Смысл обозначений становится ясным, если еще раз вспомнить соответствующие леммы: на входе указано, что необходимо иметь, чтобы можно было применить лемму; на выходе — то, что может быть получено в результате применения леммы.

Обозначим через f_0 такую функцию, что $(f_0 \in \mathfrak{M})$ & & $(f_0 \notin P_0)$; через f_1 такую, что $(f_1 \in \mathfrak{M})$ & $(f_1 \notin P_1)$; через f_L такую, что $(f_L \in \mathfrak{M})$ & $(f_1 \notin L)$; через f_S такую функцию, что $(f_S \in \mathfrak{M})$ & $(f_S \notin S)$; через f_M такую функцию, что $(f_M \in \mathfrak{M})$ & $(f_M \notin M)$. Покажем, что, используя леммы, из них можно построить $\neg$ и $\wedge$, т. е. что в $[\mathfrak{M}] \supset \{\neg, \wedge\}$, что и будет означать полноту $\mathfrak{M}$ (см. теорему 5.6). «Логика» рассуждений задается следующей схемой (см. рис. 5.2).

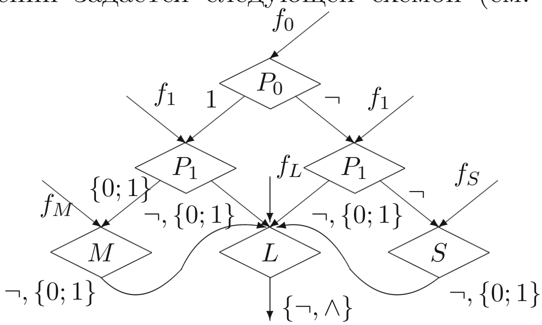


Рис. 5.2

◄ Достаточность ◄

Следствие 5.1. *В любом полном множестве существует полное подмножество, состоящее не более чем из пяти функций.*

► Очевидно, множество функций $\{f_0; f_1; f_L; f_S; f_M\}$, с которым приходится работать при доказательстве достаточности, подходит для доказательства этого следствия. ◄

Следствие 5.2. *В любом полном множестве существует полное подмножество, состоящее не более чем из четырех функций.*

► Покажем, что во множестве $\{f_0; f_1; f_L; f_S; f_M\}$ в случае, когда $|\{f_0; f_1; f_L; f_S; f_M\}| = 5$, можно произвести «сокращение штатов». Рассмотрим функцию f_0 и вычислим ее значение на единичном наборе. Если $f_0(1, 1, \dots, 1) = 0$, то $f_0 \notin P_1$ и набор $\{f_0; f_L; f_S; f_M\}$ образует полное подмножество.

Если $f(1, 1, \dots, 1) = 1$, то $f_0 \notin S$ и $\{f_0; f_1; f_L; f_M\}$ образует полное подмножество. ◄

Замечания и вопросы в конце параграфа

$\boxed{?}$ $\boxed{!}$ **1.** Основным критерием истинности в математике является логическая безупречность доказательства. Однако автор этого курса смеет утверждать, что существует еще одно необходимое условие истинности математического утверждения. Это условие эстетическое — «верным» в математике может быть только «красивый результат», а «справедливым» — только «красивое доказательство».

Яркий пример этого — теорема Поста и ее доказательство. Эстетическому условию удовлетворяет даже приведенная на рис. 5.2 схема доказательства достаточности. Наличие эстетического начала в содержании и в методах математики выделяет ее в ряду других наук (как естественных, так и гуманитарных) и придает ей особый характер. Красота и гармония математики (вплоть до самых ее абстрактных разделов) вдохновляли и вдохновляют не только математиков, но и поэтов, композиторов, художников, скульпторов. Если доказательство некрасиво, то оно либо неверно, либо есть другое, «красивое», доказательство. Более того, в течение тысячелетий продолжаются попытки (к счастью, бесплодные) обратить утверждение о красоте математики, получив математические критерии эстетичности (теория золотого сечения, математические основы стихосложения, математические основы музыкальной композиции и т. п.).

Ясно, что сводимость эстетического к математическому не может быть доказана, однако отрицать наличие связей между ними не приходится, а значит, имеют право на жизнь математические живопись, музыка, поэзия, как и живописная, музыкальная, поэтичная математика.

2. Проверьте с помощью теоремы Поста на полноту следующие системы функций:

$$\{\uparrow\},\quad \{\sim, \vee, \neg\},\quad \{|\},\quad \{\to, \neg\},\quad \{\vee, \wedge, \circ\}.$$

3. Базисом в P_2 называется полная система функций, у которых никакое собственное подмножество не является полной системой. Докажите, что любой базис в P_2 содержит не более пяти функций; приведите примеры базисов, состоящих из одной, двух, трех, четырех, пяти функций.
4. Если вам, выполняя задание 3, удалось привести пример базиса, состоявшего из пяти функций, то вы не поняли содержание следствия 5.2. Последнее утверждает, что базисов, состоящих из пяти и более функций, не существует.

§ 5.6. Предполные классы и их свойства

Вспомним, что, изучая классы P_0, P_1, L, S, M, мы получали утверждения одного типа для этих внешне различных классов. Оказывается (и об этом пойдет речь дальше), эти классы связаны между собой близким родством — все они охватываются одним общим определением, их порождающим, и других родственников такого типа у них нет. Все результаты, о которых мы будем говорить сейчас, не имеют конкретных приложений, однако они завершают этот красивый раздел, придавая ему математически завершенный характер. Обращаем ваше внимание на необычную структуру изложения и получения результатов, которая характерна более для «чистой», нежели для прикладной математики: исходное определение порождает объект — предполные классы, и априори не ясно, существуют ли они. Затем, отправляясь от определения, мы изучаем свойства этих классов (оставляя открытым вопрос об их существовании). Полученные свойства позволяют понять, где их искать. Последней идет теорема о существовании этих классов, в которой доказывается, что эти объекты (предполные классы) существуют и их список исчерпывается классами P_0, P_1, L, S, M.

Определение 5.13. $P(\subseteq P_2)$ *называется предполным классом, если*

1) P неполон, т. е. $[P] \neq P_2$;

2) $\forall f(f \notin P \Longrightarrow [P \cup \{f\}] = P_2)$, т. е. добавление к предполному классу любой функции, ему не принадлежащей, приводит к образованию полного множества.

Таким образом, определение 5.13 дает описание неполного множества, максимально близкого по вложению к полному множеству.

Свойства предполных классов

1. Предполный класс замкнут.

► Предположим противное, т. е. что существует $\mathbb{P}$ — незамкнутый предполный класс. Значит, $\mathbb{P} \underset{\text{строго}}{\subseteq} [\mathbb{P}]$.

Следовательно, существует функция $f \in [\mathbb{P}]$ и $f \notin \mathbb{P}$ (расположенная в «зазоре» между $\mathbb{P}$ и $[\mathbb{P}]$). Тогда, по п. 2 определения 5.13, $\mathbb{P} \cup \{f\}$ — полное множество, т. е. $[\mathbb{P} \cup \{f\}] = P_2$. С другой стороны, так как $f \in [\mathbb{P}]$, то $[\mathbb{P} \cup \{f\}] = [\mathbb{P}] \neq P_2$ (см. п. 1 определения 5.13). Полученное противоречие и доказывает требуемое. ◄

2. Предполный класс не может быть строго вложен ни в один из классов Поста: P_0, P_1, L, S, M.
► Допустим противное, т. е. что существует такой предполный класс Q, для которого среди классов Поста P_0, P_1, L, S, M найдется такой (обозначим его Π, т. е.

$\Pi \in \{P_0, P_1, L, S, M\}$), что $Q \underset{\text{строго}}{\subseteq} \Pi$. Выберем f из «зазора» между Q и Π, т. е. $f \in \Pi$ и $f \notin Q$, тогда

$$P_2 = [Q| \cup \{f\}] \subseteq [\Pi] = \Pi \neq P_2.$$

Эта цепочка и дает требуемое противоречие. Для записи самой цепочки мы воспользовались п. 2 определения 5.13, а также замкнутостью и неполнотой любого класса $\Pi \in \{P_0, P_1, L, S, M\}$. ◀

3. Любой предполный класс (если таковые существуют) совпадает с одним из классов Поста.

▶ Предположим противное, т. е. что существует предполный класс R такой, что $R \neq P_0, R \neq P_1, R \neq L$, $R \neq S, R \neq M$.

Объединяя это со свойством 2, получим:

$$R \neq P_0 \text{ и } R \underset{\text{строго}}{\not\subseteq} P_0;\ R \neq P_1 \text{ и } R \underset{\text{строго}}{\not\subseteq} P_1;\ R \neq L \text{ и } R \not\subseteq L;$$

$$R \neq S \text{ и } R \underset{\text{строго}}{\not\subseteq} S;\ R \neq M \text{ и } R \underset{\text{строго}}{\not\subseteq} M.$$

Следовательно, R удовлетворяет условиям теоремы Поста (1-я формулировка) и, значит, R — полное множество, что противоречит п. 1 определения 5.13 предполного класса. ◀

Теорема 5.18. *Предполными классами являются P_0, P_1, L, S, M. Других предполных классов нет.*

▶ Нам нужно доказать, что классы P_0, P_1, L, S, M предполны. Это можно сделать, используя таблицу Поста для функций 1, 0, $\neg x$, $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, $x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$ (см. табл. 5.4).

Табл. 5.4

Таблица Поста

	P_0	P_1	L	S	M
0	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
1	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$\neg x$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
$x_1 \cdot x_2$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$

Покажем, как работает эта таблица при доказательстве предполноты P_0. Мы знаем, что P_0 неполон, поэтому нам осталось доказать, что если $f \notin P_0$, то $P_0 \cup \{f\}$ — полная система. Воспользуемся теоремой Поста.

Покажем, что в таблице Поста для $P_0 \cup \{f\}$ в каждом столбце есть хотя бы один минус. Функция f дает минус в столбце P_0, минусы для остальных столбцов будем искать с помощью выписанной таблицы в P_0. Действительно, $0 \in P_0$ и дает минусы по столбцам P_1 и S; $x_1x_2 \in P_0$ и дает минус по столбцу L; $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \in P_0$ и дает минус по столбцу M.

Аналогично доказывается с помощью выписанной таблицы предполнота P_1, L, S, M. ◀

В конце параграфа еще раз отметим совершенство изложенной теории предполных классов — все на своем месте и результаты таковы, что «ни убавить, ни прибавить».

Вопросы в конце параграфа

?

1. Докажите самостоятельно предполноту классов P_1, L, S, M.
2. Какими из свойств (замкнутость, полнота, предполнота) обладают множества, представляющие собой попарные объединения и попарные пересечения множеств P_0, P_1, L, S, M?

Замечание в конце главы

! Основным понятием этой главы является понятие замыкания множества (см. определение 5.4). Замыкание можно считать операцией, определенной на 2^{P_2}, на множестве подмножеств булевых функций, т. е.

$$[\quad] : 2^{P_2} \longrightarrow 2^{P_2}.$$

С этой операцией связаны определения замкнутого множества и незамкнутого множества (см. определение 5.5) и полного множества (см. определение 5.6).

Первое определение (5.5) связано со взаимным расположением множества $\mathfrak{M}$ и его замыкания $[\mathfrak{M}]$. Если $\mathfrak{M}$ расположено строго внутри $[\mathfrak{M}]$, то $\mathfrak{M}$ называется незамкнутым множеством (см. рис. 5.3).

Второе определение (5.6) связано со взаимным расположением множества P_2 и $[\mathfrak{M}]$. Если $[\mathfrak{M}]$ строго вложено в P_2, то множество $\mathfrak{M}$ называется неполным (см. рис. 5.4).

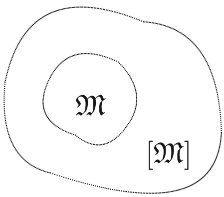


Рис. 5.3

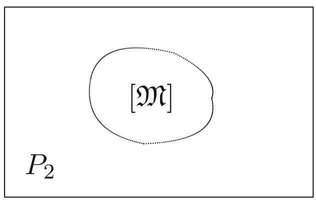


Рис. 5.4

Таким образом, определение 5.6 «не регулирует» взаимоотношения между $\mathfrak{M}$ и $[\mathfrak{M}]$, и это показывают приведенные в этой главе примеры. Для множества $\mathfrak{M}$ возможны различные комбинации свойств, т. е. имеются примеры полных незамкнутых множеств, замкнутых и неполных множеств, незамкнутых и неполных множеств, полных и замкнутых множеств. Для множества $\mathfrak{M}$ возможны различные комбинации свойств, т. е. имеются примеры полных незамкнутых множеств, замкнутых и неполных множеств, незамкнутых и неполных множеств, полных и замкнутых множеств. В этом месте мы ставим точку в главе 5. При этом отметим, что **единственным полным замкнутым множеством является само множество P_2.**

Глава 6
Элементы теории алгоритмов

§ 6.1. Что такое алгоритм? Вводные понятия

Этот раздел курса не выглядит привычной математической теорией, которая выстроена в соответствии со своей внутренней логикой. Он рожден приложениями математики, связанными с решениями различных вычислительных задач.

Что значит «вычислить»? Какими возможностями для этого мы располагаем? Всегда ли можно решить задачу? Что такое задача? Что такое процесс ее решения?

Здесь будет изложен подход к теории алгоритмов как к теории абстрактной вычислительной машины (абстрактной машины Тьюринга[1]). Существуют и другие равносильные подходы к теории алгоритмов (теория рекурсивных функций, теория нормальных алгорифмов), однако их мы касаться не будем.

Теория алгоритмов представляет собой теоретические основы всей прикладной математики, особенно ее компьютерной части, так как она дает ответы на вопросы, поставленные в начале параграфа (см. 2-й абзац сверху).

[1] Алан Тьюринг (1912–1954) — английский математик и инженер, член Лондонского Королевского общества, возглавлял работы по созданию первых английских ЭВМ; математические работы по логике, теории алгоритмов, основам кибернетики; автор книги «Может ли машина мыслить?», переведенной на русский язык в 1960 г.

Абстрактная машина Тьюринга может рассматриваться как простейшая и одновременно всеохватывающая модель любой реальной ЭВМ. Простота ее устройства и принцип работы не оставляют даже места для возникновения вопроса «Может ли машина мыслить?».

1. Понятие об алгоритме

Алгоритм — первичное, неопределяемое понятие. Чтобы извлечь его из нашего подсознания, вспомним алгоритм нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел — a, b:

1) разложить a на простые множители;
2) повторить п. 1 для b и перейти к п. 3;
3) составить произведение общих простых множителей из разложений a и b с показателями, равными наименьшим из показателей вхождения в разложения.

Проанализировав этот пример, отметим важнейшие черты (свойства) алгоритма.

1. ***Массовость*** — применимость алгоритма не к одной задаче, а к классу задач.

2. ***Дискретность*** — четкая разбивка на отдельные этапы (шаги) алгоритма.

3. ***Детерминированность*** — наличие точных правил, определяющих переход от одного этапа алгоритма к другому (не приходится прибегать к датчикам случайных чисел, гаданию на кофейной гуще и т. п.).

4. ***Конечность*** — для получения результата при применении алгоритма к решению конкретной задачи выполняется конечная последовательность шагов алгоритма.

Вопросы «Что такое алгоритм?», «Что такое алгоритмически разрешимые и неразрешимые проблемы?» стали особенно актуальными в XX в. в связи с развитием ЭВМ и естественной потребностью в анализе их возможностей. Теория алгоритмов была создана совместными (параллельными) усилиями, в основном американских, английских и советских математиков. Осмысление понятия «алгоритм» потребовало и пересмотра многих философских воззрений на мышление как творческий процесс. Всегда ли, когда человек работает «головой», он думает? Если часть «головной» работы переложена на машину, то следует ли считать, что машина думает? Решение этих философских проблем принадлежит одному из крупнейших математиков XX в., основоположнику кибернетики Н. Винеру и английскому математику А. Тьюрингу.

2. Алфавит, буквы, слова. Операции над словами, запись слова на бесконечной ленте

Определение 6.1. *Алфавит — непустое конечное (как правило) множество, элементы алфавита — буквы.*

Определение 6.2. *Словом длины* $n (n \in \mathbb{N})$ *над алфавитом* A *(в алфавите* A*) называется отображение* $u\colon [1;n]_{\mathbb{N}} \to A$.

П **Пример 6.1.** Пусть $A = \{|;*\}$, $n = 5$. $u(1) = |$, $u(2) = |$, $u(3) = *$, $u(4) = |$, $u(5) = *$, $u = |\,|\,*\,|\,*$.

Определение 6.3. *Пусть* s *и* t *— слова над алфавитом* A *длины* n_1 *и* n_2 *соответственно. Упорядоченной склейкой слов (конкатенацией)* s *и* t *называется слово* st *длины* $n_1 + n_2$*, заданное следующим правилом:*

$$st(i) = \begin{cases} s(i), & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant n_1; \\ t(i - n_1), & \text{если } n_1 < i \leqslant n_1 + n_2. \end{cases}$$

П **Пример 6.2.** $A = \{|; *\}$, $s = |\,|\,*\,|\,*$, $t = *\,*\,|$, тогда $st = |\,|\,*\,|\,*\,*\,*\,|$, $ts = *\,*\,|\,|\,|\,*\,|\,*$.

Пусть A — алфавит и $\wedge \notin A$. Назовем $\wedge$ пустым символом, а $A \cup \{\wedge\}$ — алфавитом с пустым символом.

Определение 6.4. *Бесконечной записью конечного слова над алфавитом A в алфавите с пустым символом называется отображение $f\colon \mathbb{Z} \to A \cup \{\wedge\}$, удовлетворяющее следующим условиям: существуют $n_1 < n_2$ (n_1, $n_2 \in \mathbb{Z}$) такие, что*

1) $f\left((-\infty; n_1)_{\mathbb{Z}}\right) = f\left((n_2; +\infty)_{\mathbb{Z}}\right) = \{\wedge\}$;

2) $f\left([n_1; n_2]_{\mathbb{Z}}\right) \subset A$.

Длиной слова называется величина $(n_2 - n_1 + 1)$. $f(n_1)$ называется первой буквой слова, $f(n_1 + 1)$ — второй буквой, ..., $f(n_2)$ — последней $(n_2 - n_1 + 1)$-й буквой.

Бесконечная запись конечного слова называется еще записью слова на бесконечной ленте. (Заметим, что запись слова привязана к конкретному участку ленты — $[n_1; n_2]_{\mathbb{Z}}$.)

Определение 6.5. *Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Сдвигом τ_n называется отображение $\tau_n\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, заданное правилом:*

$$(\tau_n)(i) = i + n.$$

Теоремы 6.1 и 6.2 относятся к алгебре, а не к дискретной математике, читатель, незнакомый с понятиями «группа» и «гомоморфизм», может их опустить.

Теорема 6.1. *Множество сдвигов $\{\tau_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ относительно операции «$\circ$ (композиции)» образует коммутативную (абелеву) группу.*

► Очевидно, $\tau_n \circ \tau_m = \tau_{n+m}$, тогда отображение, сопоставляющее сдвигу τ_n целое число n, есть гомоморфизм множества сдвигов $\{\tau_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ с операцией $\circ$ во множество $\mathbb{Z}$ с операцией $+$, а целые числа относительно сложения образуют абелеву группу. ◄

Пусть $A \cup \{\wedge\}$ — алфавит с пустым символом. На множестве бесконечных записей конечных слов над A введем отношение $\sim$ следующим:

$$u \sim v \quad \Leftrightarrow \quad \exists n(\in \mathbb{Z})\ (u \circ \tau_n = v) \equiv 1.$$

Теорема 6.2. *Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на множестве бесконечных записей слов.*

► Докажите самостоятельно. ◄

Обозначим через $v(A)$ множество бесконечных записей конечных слов над алфавитом A.

Рассмотрим $v(A)/\sim$. Элементы этого множества и называются записями слов на бесконечной ленте.

Вопросы в конце параграфа

$\boxed{?}$

1. Докажите, что склейка слов — коммутативная операция над словами тогда и только тогда, когда $|A| = 1$.
2. Приведите пример унарной операции над словами.
3. Приведите примеры известных вам алгоритмов и «неалгоритмов».

§ 6.2. Машина Тьюринга. Описание. Примеры машин

Машина Тьюринга имеет три алфавита.

1. Внешний алфавит с пустым символом — $A \cup \{\wedge\}$.

2. Внутренний алфавит, или алфавит состояний $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$. Состояние q_0 называется заключительным состоянием, q_1 — начальным состоянием, состояния $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — рабочими состояниями.

3. Алфавит сдвигов $S = \{-1, 0, +1\}$.

В конструкции машины имеются:

а) бесконечная лента (разбитая на ячейки), предназначенная для размещения бесконечных записей конечных слов над алфавитом A (по одной букве в ячейке);

б) считывающе-записывающее устройство (СЗУ). Оно обладает способностью обозревать одну ячейку ленты, считывать букву, записанную в ячейке, заносить на место считываемой буквы любую другую из $A \cup \{\wedge\}$, передвигаться вдоль ленты влево и вправо на одну ячейку;

в) устройство управления (УУ), которое управляет с помощью программы машины ее работой;

г) программа машины, определяющая переходы машины от одной конфигурации к другой.

Под конфигурацией машины понимают пару: слово с отметкой и состояние машины.

Словом с отметкой называют слово, записанное на ленте с указанием обозреваемой СЗУ ячейки.

Программа машины — отображение $\Pi : A \cup \{\wedge\} \times Q \setminus \{q_0\} \to A \cup \{\wedge\} \times Q \times S$, т. е. правило, сопоставляющее любой паре (a, q_i) — буква — состояние тройку: (b, q, s) — буква — состояние — сдвиг.

Так как A, Q конечны, то программу машины можно задать таблицей (см. табл. 6.1).

Табл. 6.1

$A \cup \{\wedge\}$	$Q \setminus \{q_0\}$				
	q_1	$\ldots$	q_j	$\ldots$	q_n
a_1					
a_2					
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a_i			$(b; q; s)$		
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a_m					
$\wedge$					
$(b; q; s) = \Pi\left((a_i, q_j)\right)$					

Правила работы машины (правила обращения УУ с программой и СЗУ)

Машина работает дискретно (пошагово). На каждом шаге происходит переход от одной конфигурации к другой. Перед началом работы машина находится в начальной конфигурации: СЗУ обозревает первую букву слова, а машина находится в начальном состоянии q_1. СЗУ считывает букву, находящуюся в обозреваемой ячейке. УУ обращается к программе машины: находит клетку, соответствующую считанной букве и состоянию машины. Пусть в этой клетке находится тройка $(a; q; s)$, тогда буква a заносится в обозреваемую ячейку, машина переводится в состояние q, а СЗУ совершает сдвиг на одну ячейку влево, если $s = -1$, на одну ячейку вправо, если $s = +1$, и остается на месте, если $s = 0$. На этом завершена работа машины на первом шаге, и она готова к выполнению следующего аналогичного шага и т. д.

Работа машины продолжается до тех пор, пока на каком-то из шагов она не придет в состояние q_0.

Устройство управления в этом случае останавливает машину. Возникшая конфигурация называется *заключительной*, а полученное слово — результатом применения машины к исходному слову.

Если u — исходное слово, T — машина, то через $T(u)$ обозначают результат применения машины T к слову u.

Определение 6.6. *Говорят, что машина T неприменима к слову u, если в процессе применения ее к слову она ни на каком из шагов не приходит в заключительное состояние.*

П **Пример 6.3.** Построим машину Тьюринга, складывающую натуральные числа, записанные в унарной системе счисления.

► Напомним, что $5_{10} = |||||_{\text{унарн.}}$. Рассмотрим алфавит $A \cup \{\wedge\} = \{|, +, \wedge\}$.

Необходимо построить машину T, удовлетворяющую условию:

$$T\left((m)_{\text{унарн.}} + (n)_{\text{унарн.}}\right) = (m+n)_{\text{унарн.}}.$$

Ясно, что такая машина определяется следующей программой:

	q_1	q_2	q_3
$\vert$	$\vert\ q_1\ +1$	$\wedge\ q_3\ -1$	$\vert\ q_3\ -1$
$+$	$\vert\ q_1\ +1$		
$\wedge$	$\wedge\ q_2\ -1$		$\wedge\ q_0\ +1$

Выпишем последовательно возникающие при работе этой машины конфигурации на исходном слове $||+|||$. При записи конфигурации будем использовать следующее соглашение: состояние, в котором находится машина, записывается в круглых скобках справа за обозреваемой буквой.

0)	$\cdots\wedge\,|\,(q_1)\,|\;+\,|\,|\,|\;\wedge\ldots$	8)	$\cdots\wedge\,|\,|\,|\,|\,|\,(q_3)\;\wedge\ldots$
1)	$\cdots\wedge\,|\,|\,(q_1)\;+\,|\,|\,|\;\wedge\ldots$	9)	$\cdots\wedge\,|\,|\,|\,|\,(q_3)\,|\;\wedge\ldots$
2)	$\cdots\wedge\,|\,|\;+\,(q_1)\,|\,|\,|\;\wedge\ldots$	10)	$\cdots\wedge\,|\,|\,|\,(q_3)\,|\,|\;\wedge\ldots$
3)	$\cdots\wedge\,|\,|\,|\,|\,(q_1)\,|\,|\;\wedge\ldots$	11)	$\cdots\wedge\,|\,|\,(q_3)\,|\,|\,|\;\wedge\ldots$
4)	$\cdots\wedge\,|\,|\,|\,|\,|\,(q_1)\,|\;\wedge\ldots$	12)	$\cdots\wedge\,|\,(q_3)\,|\,|\,|\,|\;\wedge\ldots$
5)	$\cdots\wedge\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,(q_1)\;\wedge\ldots$	13)	$\cdots\wedge\,(q_3)\,|\,|\,|\,|\,|\;\wedge\ldots$
6)	$\cdots\wedge\,|\,|\,|\,|\,|\,|\;\wedge\,(q_1)\ldots$	14)	$\cdots\wedge\,|\,(q_0)\,|\,|\,|\,|\;\wedge\ldots$
7)	$\cdots\wedge\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,(q_2)\,\wedge\ldots$		

◀

! **Замечание 6.1.** Условимся составлять программы так, чтобы «останов» происходил на первой букве результата (почему, подумайте сами).

Замечание 6.2. В программе могут быть пустые клетки. Можно считать, что при выходе на такие клетки происходит «останов» ($\Leftrightarrow$, что внутри таких клеток написаны тройки, содержащие заключительное состояние).

П **Пример 6.4.** Построить машину Тьюринга, удваивающую натуральные числа, записанные в унарной системе счисления.

▶ Расширим исходный алфавит $A = \{|\}$ до $A' = \{|;\alpha\}$. Искомую машину построим в алфавите $A' \cup \{\wedge\}$. Ясно, что программа такой машины может выглядеть так:

	q_1	q_2	q_3
$\vert$	$\alpha\, q_1\ +1$	$\vert\, q_2\ -1$	$\vert\, q_3\ +1$
α		$\vert\, q_3\ +1$	
$\wedge$	$\wedge\, q_2\ -1$	$\wedge\, q_0\ +1$	$\vert\, q_2\ -1$

Применим полученную машину к слову $|\,|$.

$$
\begin{array}{ll}
0)\ \dots\wedge|(q_1)|+\dots & 1)\ \dots\wedge\alpha|(q_1)\wedge\dots\\
2)\ \dots\wedge\alpha\alpha\wedge(q_1)\dots & 3)\ \dots\wedge\alpha\alpha(q_2)\wedge\dots\\
4)\ \dots\wedge\alpha|\wedge(q_3)\dots & 5)\ \dots\wedge\alpha|(q_2)|\wedge\dots\\
6)\ \dots\wedge\alpha|(q_2)|\wedge\dots & 7)\ \dots\wedge\alpha(q_2)||\wedge\dots\\
8)\ \dots\wedge|(q_3)||\wedge\dots & 9)\ \dots\wedge|(q_2)|||\wedge\dots\\
 & \dots\\
13)\ \dots\wedge|(q_2)|||\wedge\dots & 14)\ \dots\wedge(q_2)||||\wedge\dots\\
15)\ \dots\wedge|(q_0)|||\wedge\dots & \blacktriangleleft
\end{array}
$$

Введение новой буквы α и замена исходных $|$ на α позволяет различить исходные $|$ и новые (приписанные) $|$. Состояние q_1 обеспечивает замену $|$ на α, состояние q_2 обеспечивает поиск α, предназначенных для замены на $|$, и «останов» машины в случае, когда α не обнаружено, q_3 обеспечивает дописывание $|$ в случае, когда произошла замена α на $|$.

Введем в рассмотрение стандартные машины.

1. *Тождественная машина* E применима к любому слову над алфавитом A и $E(u) = u$.

2. Пусть A — алфавит и $\blacktriangle A$, $n \in \mathbb{N}$. *Копирующей машиной* K_n называется машина, применимая к любому слову u над A, причем

$$K_n(u) = u\blacktriangle \underbrace{u\blacktriangle \dots \blacktriangle u}_{n \text{ раз}}.$$

3. Пусть A — алфавит и α, β $(\alpha \neq \beta) \in A$. Машиной, *заменяющей* α на β, называется машина $З_{\alpha\leftarrow\beta}$, применимая к любому слову u так, что

$$\forall i \in \mathbb{Z} \qquad (З_{\alpha\leftarrow\beta}u)\,(i) = \begin{cases} u(i), & \text{если } u(i) \neq \alpha;\\ \beta, & \text{если } u(i) = \alpha.\end{cases}$$

4. Пусть A — алфавит и $\blacktriangle \notin A$. *Машиной-проектором* $\Pi_{1\blacktriangle}$ $(\Pi_{\blacktriangle 2})$ называют машину, применимую к любому слову $u\blacktriangle v$, где u, v — слова над алфавитом A, причем

$$(\Pi_{1\blacktriangle})\,(u\blacktriangle v) = u; \quad (\Pi_{\blacktriangle 2})\,(u\blacktriangle v) = v.$$

Теорема 6.3. *Тождественная, копирующая, заменяющая машины и машины-проекторы существуют.*

Задания в конце параграфа

? **1.** Докажите самостоятельно последнюю теорему.
2. Приведите пример такой машины T и слова u, к которому она неприменима.
3. Приведите пример такого алфавита A и такой машины, которая неприменима ни к одному слову над алфавитом A.

§ 6.3. Сочетания машин Тьюринга: композиция и объединение. Машины с полулентами, разветвление и итерация машин

Перечисленные в заголовке типы сочетаний машин позволяют при конструировании машин использовать стандартные приемы, аналогами которых в реальном программировании являются подпрограммы, циклы, разветвления, модульное программирование.

1. Композиция машин

Композиция машин — последовательное их применение.

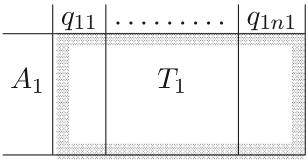
Определение 6.7. *Пусть T_1 — машина с внешним алфавитом A_1 и алфавитом состояний Q_1, T_2 — с алфавитами A_2 и Q_2 соответственно, причем $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$.*

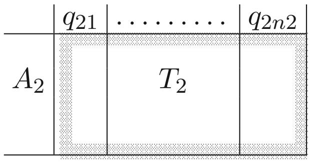
Композицией T_1, T_2 называется машина, обозначаемая $T_2 \circ T_1$, с внешним алфавитом $A_1 \cup A_2$, алфавитом *состояний* $(Q_1 \cup Q_2) \setminus \{q_{10}\}$ (q_{10} — *заключительное состояние* T_1), *и работающая по правилу*

$$(T_2 \circ T_1)(u) = T_2(T_1(u)).$$

Теорема 6.4. *Композиция машин существует.*

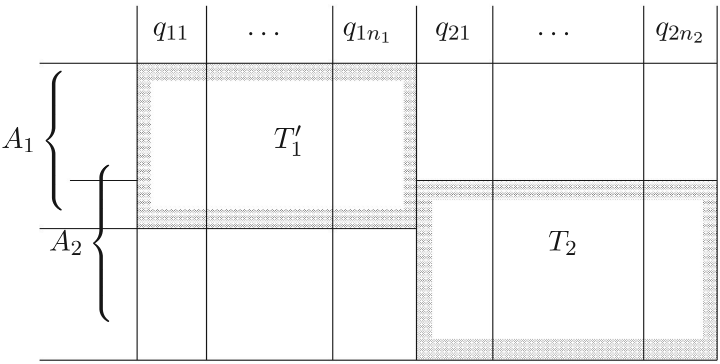
► Пусть программы машин T_1 и T_2 выглядят следующим образом:





Программа композиции $T_2 \circ T_1$ приведена в табл. 6.2.

Табл. 6.2



Блок T_1' получен из блока T_1 следующим образом: все клетки вида $\alpha q_{10} s$ программы T_1 заменены на клетки вида $\alpha q_{21} s$ (что и обеспечивает включение в работу машины T_2 после окончания работы машины T_1). ◄

П **Пример 6.5.** Пусть T_1 — машина, складывающая числа в унарной системе счисления (пример — § 6.2), T_2 — машина Тьюринга, удваивающая числа, записанные в унарной системе счисления (пример — § 6.2). Тогда $T_2 \circ T_1$ — машина, проводящая вычисления по формуле $2(a+b)$, в частности,

$$(T_2 \circ T_1)\,(||+|||) = ||||||||||.$$

2. Машины с полулентами

Прежде чем перейти к объединению, разветвлению, итерации машин, нам необходимо изучить класс машин Тьюринга с полулентами.

Под машиной с правой (левой) полулентой понимают следующее: в одной из ячеек бесконечной ленты содержится символ ▲ — неподвижный ограничитель, СЗУ машин с правой (левой) полулентой может находиться только на правой (левой) полуленте, состоящей из ячейки, содержащей неподвижный ограничитель, и ячеек, находящихся справа (слева) от этой ячейки.

При выходе СЗУ на ячейку с неподвижным ограничителем машина не имеет права менять ее содержимое. Так как теория машин с левой полулентой — зеркальное отражение теории машин с правой полулентой, мы в дальнейшем будем рассматривать подробно только машины с правыми полулентами.

Теорема 6.5. *Пусть* $\blacktriangle T$ *— машина с правой полулентой, тогда существует обычная машина* T*, ей эквивалентная, т. е. для любого слова* u *над алфавитом* A *имеет место следующее:*

$$\blacktriangle T(\blacktriangle u) = \blacktriangle v \quad\Longrightarrow\quad T(u) = v.$$

► Искомую машину построим в виде композиции трех машин: $T_2 \circ \blacktriangle T \circ T_1$, где $T_1(u) = \blacktriangle u$ для любого слова u над A, $T_2(\blacktriangle v) = v$ для любого слова $\blacktriangle v$. ◄

Оказывается (!), что наряду с этой теоремой справедлива и обратная к ней теорема.

Теорема 6.6. *Для любой машины Тьюринга с обычной лентой существует равносильная ей машина с правой (левой) полулентой* $\blacktriangle T$ $(T\blacktriangle)$, *т. е. для любого слова* u *над* A *справедливо следующее:*

$$T(u) = v \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \blacktriangle T(\blacktriangle u) = \blacktriangle v. \\ (T\blacktriangle(u\blacktriangle)) = v\blacktriangle). \end{array}$$

► Расширим исходный алфавит двумя символами: $\blacktriangle$ — неподвижный ограничитель, $\triangle$ — подвижный ограничитель. Искомую машину $\blacktriangle T$ построим в виде композиции

$$\blacktriangle T = T_4 \circ T' \circ T_3.$$

Опишем работу машин T_3 и T_4. Машина T_3 применима к любому слову $\blacktriangle u$ и $T_3(\blacktriangle u) = \blacktriangle u\triangle$. Ясно, что T_3 существует. T_4 применима к любому слову $w = \blacktriangle \wedge \wedge \cdots \wedge v\triangle$ и $T_4(w) = \blacktriangle v$. Ясно, что и T_4 существует. Участок ленты между $\blacktriangle$ и $\triangle$ назовем *рабочей зоной*. Машина T' строится по машине T следующим образом: внутри рабочей зоны она работает так же, как машина T; в случае выхода СЗУ на $\triangle$ она перемещает подвижный ограничитель на одну ячейку вправо, помещая в освободившуюся ячейку $\wedge$, и продолжает работу, возвращаясь на одну ячейку влево в том же состоянии, в котором СЗУ вышло на $\triangle$. Эта возможность расширения рабочей зоны обеспечивается введением для каждого рабочего состояния q машины T состояния $\tilde{q}$ машины T'.

«Хуже» обстоит дело в случае, когда СЗУ выходит на $\blacktriangle$, так как неподвижный ограничитель нельзя перемещать. В этот момент работа машины T' как машины T должна прерваться для того, чтобы побуквенно переместить слово на одну ячейку вправо, заполнив освободившуюся ячейку пустым символом $\wedge$; после чего машина T' может вернуться к освободившейся ячейке и продолжить работу как машина T. Сложность такой «модернизации» T к T' состоит в том, что машина Тьюринга не обладает внутренней памятью, а запоминать нужно рабочее состояние, в котором произошел выход СЗУ на неподвижный ограничитель и перекладываемые буквы (какую поместить в ячейку из предыдущей и какую запомнить, чтобы переложить в следующую). Такое расширение рабочей зоны обеспечивается введением для каждого рабочего состояния q машины T целого шлейфа состояний машины T' (длина шлейфа зависит от $|A|$). Выпишем программу машины T' в случае, когда $A = \{\alpha; \beta\}$ (табл. 6.3).

Табл. 6.3

	α	β	$\wedge$	$\blacktriangle$	$\triangle$
q_1					
...					
q		T		$\blacktriangle q_{\blacktriangle}+1$	$\wedge\tilde{q}+1$
...					
q_n					
...	...	...	...	...	...
$q_{\blacktriangle}$	$\wedge q_{\alpha}+1$	$\wedge q_{\beta}+1$	$\wedge q_{\wedge}+1$		$\triangle q_{\triangle}+1$
q_{α}	$\alpha q_{\alpha}+1$	$\alpha q_{\beta}+1$	$\alpha q_{\wedge}+1$		$\alpha q_{\triangle}+1$
q_{β}	$\beta q_{\alpha}+1$	$\beta q_{\beta}+1$	$\beta q_{\wedge}+1$		$\beta q_{\triangle}+1$
$q_{\wedge}$	$\wedge q_{\alpha}+1$	$\wedge q_{\beta}+1$	$\wedge q_{\wedge}+1$		$\wedge q_{\triangle}+1$
$q_{\triangle}$			$\triangle q'-1$		
q'	$\alpha q'-1$	$\beta q'-1$	$\wedge q'-1$	$\blacktriangle q+1$	
$\tilde{q}$			$\triangle q-1$		
...					

Очевидно, построение программы T' возможно в случае любого конечного алфавита A. ◀

Доказанные две теоремы означают, что класс машин с полулентами эквивалентен классу обычных машин Тьюринга.

3. Объединение машин

Определение 6.8. *Пусть T_1 и T_2 — машины Тьюринга с общим или различными внешними алфавитами A_1, A_2 и пусть $\blacktriangle \notin A_1 \cup A_2$. Объединением машин T_1, T_2 называется машина, обозначаемая $T_1 \cup T_2$, работающая по правилу*

$$(T_1 \cup T_2)\,(u\blacktriangle v) = T_1(u)\blacktriangle T_2(v).$$

Теорема 6.7. *Объединение машин существует.*

► Объединение построим в виде композиции четырех машин:

$$T_{+\blacktriangle} \circ {}_{\blacktriangle}T_2 \circ T_{\blacktriangle+} \circ T_{1\blacktriangle},$$

где $T_{1\blacktriangle}$ — аналог машины T_1 на левой полуленте, ${}_{\blacktriangle}T_2$ — аналог машины T_2 на правой полуленте, машина $T_{\blacktriangle+}$, отправляясь от первой буквы слова $w\blacktriangle z$, останавливается на первой букве после символа $\blacktriangle$, оставляя на ленте слово $w\blacktriangle z$. Машина $T_{+\blacktriangle}$, отправляясь от первой справа за $\blacktriangle$ буквы слова $w\blacktriangle z$, останавливается на первой букве слова w, оставляя на ленте слово $w\blacktriangle z$. Очевидно, машины $T_{\blacktriangle+}$ и $T_{+\blacktriangle}$ существуют. ◄

4. Разветвление машин

Пусть T_1 и T_2 — две машины Тьюринга с общим внешним алфавитом A и алфавитами состояний Q_1 и Q_2 ($Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$) и пусть 0 и 1 не принадлежат A.

Пусть Φ — машина-предикат, т. е. машина с внешним алфавитом $A \cup \{0; 1\}$, применимая к любому слову u над алфавитом A и $\Phi(u)$ принадлежит множеству $\{0; 1\}$.

Определение 6.9. *Разветвлением машин* T_1, T_2, *управляемым предикатом* Φ, *называется машина, обозначаемая* $T_1 \overset{1\,0}{Y}_{\Phi} T_2$, *которая работает по правилу*

$$\left(T_1 \overset{1\,0}{Y}_{\Phi} T_2\right)(u) = \begin{cases} T_1(u), & \text{если } \Phi(u) = 1; \\ T_2(u), & \text{если } \Phi(u) = 0. \end{cases}$$

Теорема 6.8. *Разветвление машин существует.*

►Построим разветвление в виде композиции трех машин:

$$T_1 \overset{1\,0}{Y}_{\Phi} T_2 = \left(\Pi \begin{smallmatrix} \xrightarrow{1} T_1 \\ \xrightarrow{0} T_2 \end{smallmatrix}\right) \circ (\Phi \cup E) \circ K_1,$$

где машина $\Pi \begin{smallmatrix} \xrightarrow{1} T_1 \\ \xrightarrow{0} T_2 \end{smallmatrix}$ имеет программу, представленную в виде табл. 6.4.

Начальным состоянием машины $\Pi \begin{smallmatrix} \xrightarrow{1} T_1 \\ \xrightarrow{0} T_2 \end{smallmatrix}$ является состояние q_1, а заключительными — заключительные состояния q_{10}, q_{20} — машин T_1 и T_2 соответственно. Эта машина называется *переключателем.* ◄

5. Итерация машины

Пусть T — машина Тьюринга с внешним алфавитом A и Φ — машина-предикат (см. предыдущий пункт).

Табл. 6.4

	q_1	q_2	q_3	q_{11}	$\ldots$	q_{1n_1}	q_{21}	$\ldots$	q_{2n_2}
a_1									
$\vdots$					T_1			T_2	
a_n									
1	$\wedge q_2 + 1$								
0	$\wedge q_3 + 1$								
▲		$\wedge q_{11} + 1$	$\wedge q_{21} + 1$						

Определение 6.10. *Итерацией машины T по предикату Φ называется машина, обозначаемая $T\circlearrowleft_{\Phi}$, работа которой описывается следующим:*

1. *К слову u применяется предикат Φ; если $\Phi(u) = 1$, то переход к 2; если $\Phi(u) = 0$, то переход к 3.*
2. *$u := T(u)$, переход к 1.*
3. *$(T\circlearrowleft_{\Phi})\,(u) := u$, останов.*

Теорема 6.9. *Итерация машины T по предикату Φ существует.*

► Построим машину $T\overset{1\,0}{Y}_{\Phi}E$. Обозначим через $(T\overset{1\,0}{Y}_{\Phi}E)'$ машину, программа которой получается из программы $T\overset{1\,0}{Y}_{\Phi}E$ следующей модернизацией: все клетки, содержащие тройки $\alpha q_{0T}s$, где q_{0T} — заключительное состояние машины T, заменяются на клетки, содержащие тройки $\alpha q_{1T\overset{1\,0}{Y}_{\Phi}E}s$, где $q_{1T\overset{1\,0}{Y}_{\Phi}E}$ — начальное состояние всего агрегата $T\overset{1\,0}{Y}_{\Phi}E$.

Очевидно, $T\circlearrowleft_{\Phi} = (T\overset{1\,0}{Y}_{\Phi}E)'$. ◄

6. Машина Тьюринга, переводящая запись числа из унарной системы счисления в троичную

В заключение приведем пример еще одной машины Тьюринга, переводящей унарную запись натурального числа в троичную систему счисления.

Напомним, что в унарной системе счисления используется только один символ «|» («палочка»). Натуральное число записывается (изображается) в виде набора «палочек» в количестве, равном изображаемому числу. Так, натуральное число «пять» записывается в виде

$$(|||||)_{\text{унарн}}.$$

Троичная система счисления — позиционная. Это означает, что вклад цифры в число зависит от позиции (разряда), которую занимает эта цифра. В основании троичной системы лежат степени тройки. Для записи чисел используются упорядоченные наборы цифр. Цифрами троичной системы счисления являются 0, 1, 2. Так, натуральное число «пять» в троичной системе записывается как $(12)_3$.

Значит, мы имеем равенство

$$(|||||)_{\text{унарн}} = (12)_3.$$

Идея алгоритма, реализуемого машиной, состоит в последовательном уменьшении унарной записи переводимого числа на единицу и увеличении формируемой троичной записи на единицу до тех пор, пока на месте унарной записи переводимого числа ничего не останется. Программа такой машины задается табл. 6.5.

Табл. 6.5

	q_1	q_2	q_3	q_4
$\vert$	$\vert q_1+1$	$\wedge q_4-1$		$\vert q_4-1$
0	$0q_1+1$	$0q_30$	$0q_3-1$	$1q_1+1$
1	$1q_1+1$	$1q_30$	$1q_3-1$	$2q_1+1$
2	$2q_1+1$	$2q_30$	$2q_3-1$	$0q_4-1$
$\wedge$	$\wedge q_2-1$		$\wedge q_0+1$	$1q_1+1$

Решим контрольный пример. Вычислим $T(|||||) \overset{?}{=} (12)_3$.

0) $\cdots\wedge|\,(q_1)\,||||\ \wedge\ldots$
1) $\cdots\wedge||\,(q_1)\,|||\ \wedge\ldots$
2) $\cdots\wedge|||\,(q_1)\,||\ \wedge\ldots$
3) $\cdots\wedge||||\,(q_1)\,|\ \wedge\ldots$
4) $\cdots\wedge|||||\,(q_1)\ \wedge\ldots$
5) $\cdots\wedge|||||\ \wedge(q_1)\ \ldots$
6) $\cdots\wedge|||||\,(q_2)\ \wedge\ldots$
7) $\cdots\wedge||||\,(q_4)\ \wedge\wedge\ldots$
8) $\cdots\wedge|||\,(q_4)\,|\ \wedge\wedge\ldots$

25) $\cdots\wedge 2\,|||\,(q_2)\ \wedge\ldots$
26) $\cdots\wedge 2\,||\,(q_4)\ \wedge\wedge\ldots$

$\ldots$

28) $\cdots\wedge(q_4)\,2\,||\ \wedge\ldots$
29) $\cdots\wedge(q_4)\,0\,||\ \wedge\ldots$
30) $\cdots\wedge 1\,0\,(q_1)\,||\ \wedge\ldots$

$\ldots$

35) $\ldots\wedge 1\,0\,||\wedge(q_1)\ldots$
36) $\cdots\wedge 1\,0\,||\,(q_2)\ \wedge\ldots$

9) $\cdots \wedge \mid \mid (q_4) \mid \mid \ \wedge \wedge \ldots$
10) $\cdots \wedge \mid (q_4) \mid \mid \mid \ \wedge \wedge \ldots$
11) $\cdots \wedge (q_4) \mid \mid \mid \mid \ \wedge \wedge \ldots$
12) $\cdots \wedge 1 \ (q_1) \mid \mid \mid \mid \ \wedge \wedge \ldots$
$\ldots$
16) $\cdots \wedge 1 \mid \mid \mid \mid \ \wedge (q_1) \ \wedge \ldots$
17) $\cdots \wedge 1 \mid \mid \mid \mid (q_2) \ \wedge \wedge \ldots$
18) $\cdots \wedge 1 \mid \mid \mid (q_4) \ \wedge \wedge \wedge \ldots$
$\ldots$
21) $\cdots \wedge 1 \mid (q_4) \ \| \wedge \wedge \wedge \ldots$
22) $\cdots \wedge 2 \ (q_1) \mid \mid \mid \ \wedge \wedge \wedge \ldots$
$\ldots$
24) $\cdots \wedge 2 \mid \mid \mid \ \wedge (q_1) \ \wedge \wedge \ldots$

37) $\ldots \wedge 1 \ 0 \mid (q_4) \ \wedge \wedge \ldots$
38) $\ldots \wedge 1 \ 0 \ (q_4) \mid \ \wedge \wedge \ldots$
39) $\ldots \wedge 1 \ 1 \mid (q_1) \ \wedge \wedge \ldots$
40) $\ldots \wedge 1 \ 1 \mid \ \wedge (q_1) \wedge \ldots$
41) $\cdots \wedge 1 \ 1 \mid (q_2) \ \wedge \ldots$
42) $\cdots \wedge 1 \ 1 \ (q_4) \ \wedge \wedge \ldots$
43) $\cdots \wedge 1 \ 2 \ \wedge (q_1) \ \wedge \ldots$
44) $\cdots \wedge 1 \ 2 \ (q_1) \ \wedge \wedge \ldots$
45) $\cdots \wedge 1 \ 2 \ (q_3) \ \wedge \wedge \ldots$
46) $\cdots \wedge 1 \ (q_3) \ 2 \wedge \wedge \ldots$
47) $\cdots \wedge (q_3) \ 1 \ 2 \wedge \wedge \ldots$
48) $\cdots \wedge 1 \ (q_0) \ 2 \wedge \ldots$

Вопросы и задания в конце параграфа

$\boxed{?}$

1. Чему равны $K_m \circ K_n$ и $K_n \circ K_m$?

2. Постройте машину K_1 для алфавита $A = \{\alpha; \beta\}$.

3. Сколько рабочих состояний у машины T' в теореме 6.6, если у машины T четыре рабочих состояния, а внешний алфавит $A = \{\alpha; \beta; \gamma\}$?

4. Постройте машины $T_{+\blacktriangle}$ и $T_{\blacktriangle+}$ к теореме об объединении машин (теорема 6.7).

5. При построении $T_2 \circ T_1$ мы полагали, что $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$. Почему это ограничение несущественно?

6. Постройте машину, переводящую двоичную запись числа в троичную запись.

7. Постройте соответствующую машину-предикат Φ и машину T, увеличивающую троичную запись числа на 1 так, чтобы перевод из унарной системы счисления в троичную осуществлялся с помощью машины $T_{\Phi}^{\circlearrowleft}$.

§ 6.4. Тьюрингов подход к понятию «алгоритм». Алгоритмически разрешимые и неразрешимые проблемы

Вернемся к тем вопросам, с которых мы начали изучение этого раздела. Главным из них был следующий: «Что такое алгоритм?» Тьюрингов подход к ответу на этот вопрос прост и естествен: «Алгоритм — это машина Тьюринга».

Определение 6.11. *Говорят, что существует тьюрингов алгоритм решения класса задач* Z, *если существует такая машина Тьюринга* T *с внешним алфавитом* A, *что:*

1) *для условия любой задачи* $z \in Z$ *существует слово* u_z *над* A, *кодирующее условие задачи* z ($\Leftrightarrow$ *дающее его запись на ленте машины);*

2) *машина* T *применима к слову* u_z;

3) $v_z = T(u_z)$ *является словом, кодирующим ответ задачи* z.

Сама работа машины T над словом u_z называется применением алгоритма*, заданного машиной* T, *к задаче* z. Класс задач Z, для которого существует решающий его тьюрингов алгоритм, называется *алгоритмически разрешимой по Тьюрингу проблемой* (классом) Z.

Проанализировав содержание предыдущих параграфов этой главы, мы можем сказать, что разрешимыми по Тьюрингу проблемами являются:

1. Проблема сложения натуральных чисел.

2. Проблема удвоения натурального числа.

3. Проблема перевода унарной записи натурального числа в троичную запись.

Возникает естественный вопрос: «Существуют ли алгоритмически неразрешимые по Тьюрингу проблемы?» Оказывается, есть (к нашему счастью, так как иначе математика была бы достаточно скучной наукой и сводилась бы к тьюрингову программированию). «Поставщиком» таких проблем является и сама теория машин Тьюринга.

Универсальный алфавит, универсальная кодировка

Каждая машина Тьюринга имеет три алфавита: внешний A, внутренний Q и алфавит сдвигов S. Все три алфавита — конечные множества, и можно считать, что

$$A \cap Q = A \cap S = Q \cap S = \varnothing.$$

Тогда любое слово над $A \cup Q \cup S$ однозначно разбивается на слоги (подслова) (возможно, и однобуквенные) над алфавитами A, Q, S. В частности, любую клетку программы машины как отображения $A \cup \{\wedge\} \times Q \backslash \{q_0\} \to A \cup \{\wedge\} \times Q \times S$ можно закодировать как пятибуквенное слово над $A \cup \{\wedge\} \cup Q \cup S$, задающее соответствие $(\alpha; q_i) \to (\beta; q_j; s)$. Если условиться, что программа выписывается последовательно по столбцам сверху вниз, то мы получим стандартную запись программы в виде «длинного» слова над алфавитом $A \cup \{\wedge\} \cup Q \cup S$. Поставим следующий вопрос: «Нельзя ли выбрать достаточно простой алфавит, с помощью слов которого можно будет кодировать все буквы, а значит, и слова над $A \cup \{\wedge\} \cup Q \cup S$ (т. е. внешние слова и программу машины)?» Оказывается, в качестве такого простого алфавита, называемого универсальным, можно взять двубуквенный алфавит $\{0;1\}$. Опишем стандартную кодировку букв алфавита $A \cup \{\wedge\} \cup Q \cup S$ словами над $\{0;1\}$ с помощью таблицы кодирования (см. табл. 6.6).

Кодировка с помощью этой таблицы называется стандартной. Понятно, что стандартная кодировка допускает однозначное декодирование для любых A, Q, S. Поэтому можно считать, что всегда применяется кодировка с помощью $\{0;1\}$ и что все машины работают со словами над алфавитом $\{0;1\}$.

Табл. 6.6

Буква		Код (слово) над $\{0;1\}$
Сдвиги	-1	101
	0	1001
	$+1$	10001
Буквы	$\wedge$	100001
	a_1	10000001
	a_2	1000000001
	...	...

Буква		Код (слово) над $\{0;1\}$
Состояния	q_0	1000001
	q_1	100000001
	q_2	10000000001
	...	...
	q_j	$1\underbrace{0\ldots0}_{2j+5}1$
	...	...

Определение 6.12. *Машина Тьюринга T называется самоприменимой, если она применима к слову u_T — стандартной записи на ленте своей программы.*

Это определение разбило все множество машин Тьюринга **МТ** на два класса: $\mathbf{MT}_s$ — класс самоприменимых и $\mathbf{MT}_{ns}$ — класс несамоприменимых машин.

Сформулируем проблему распознавания самоприменимости: «Существует ли такая машина Тьюринга S, которая умеет распознавать самоприменимость, т. е. по слову u_T, кодирующему программу машины T, сообщать, является ли машина T самоприменимой или нет?» Оказывается, имеет место следующая теорема.

Теорема 6.10. *Проблема распознавания самоприменимости является алгоритмически неразрешимой по Тьюрингу проблемой.*

► Допустим противное, т. е. что существует машина S, решающая проблему самоприменимости, причем

$$S(u_T) = \begin{cases} 1, & \text{если } T \text{ — самоприменима;} \\ 0, & \text{если } T \text{ — несамоприменима.} \end{cases}$$

Если машина S существует, то ее можно перестроить в машину $\tilde{S}$, которая в случае, когда u_T — кодировка программы несамоприменимой машины, перерабатывает u_T в слово «0» и останавливается, а в случае, когда u_T — кодировка программы самоприменимой машины, «выпечатывает», уходя вправо, бесконечный хвост «1». Покажем, что существование машины $\tilde{S}$, а значит и S, ведет к противоречиям. Для этого применим $\tilde{S}$ к слову $u_{\tilde{S}}$. Возможны два исхода:

а) после применения $\tilde{S}$ к $u_{\tilde{S}}$ машина напечатает 0 и остановится, но, с одной стороны, это означает (0) — несамоприменимость, а с другой (остановка машины) — самоприменимость;

б) в результате применения $\tilde{S}$ к $u_{\tilde{S}}$ идет без остановки печать бесконечного хвоста единиц. Хвост единиц означает теперь самоприменимость, а это противоречит тому, что машина не останавливается.

Полученное противоречие и доказывает теорему. ◄

Задания в конце параграфа

?

1. Предложите свою, более простую, чем стандартная, кодировку программы (возможно, не пятерками, а тройками со стандартным расположением).

2. Докажите, что универсальный алфавит не может состоять из одной буквы.

3. Попробуйте найти оценку

$$m\,(|A|, |Q|) \leqslant \ell\,(u_T) \leqslant M\,(|A|, |Q|)\,,$$

где $\ell\,(u_T)$ — длина слова над алфавитом $\{0; 1\}$, однозначно кодирующим (не обязательно стандартно) программу машины T с алфавитами A, Q, S.

§ 6.5. Универсальная машина Тьюринга

В заключительном параграфе этого раздела эскизно опишем, что такое универсальная машина Тьюринга. В обычной машине Тьюринга программа «зашита» в устройстве управления, а входная информация (условия задачи) записывается на бесконечной ленте. В универсальной машине в устройстве управления записана программа, реализующая алгоритм подражания, т. е. программную реализацию правил работы любой машины (см. § 6.2), вернее, правила обращения с ее программой. Тогда входной информацией для универсальной машины является пара — слово u_T, стандартно кодирующее машину-алгоритм, решающий данный класс задач Z; и слово v_z, кодирующее условие задачи $z \in Z$. Универсальная машина, используя u_T, перерабатывает v_z в $T(v_z)$.

Ясно, что для построения универсальной машины потребуется использование техники машин с полулентами и универсального алфавита. Эта машина будет работать очень вяло, теряя очень много времени на переходы от обрабатываемого слова к программе и обратно, однако ясно, что справедлива следующая теорема.

Теорема 6.11. *Универсальная машина Тьюринга существует.*

Доказательство этой теоремы и более подробно об универсальной машине Тьюринга см. *Б. А. Трахтенброт* «Алгоритмы и вычислительные автоматы» (М.: Советское радио, 1974).

А теперь еще раз обратимся к истории, а вернее, к биографии Алана Матиссона Тьюринга, члена Лондонского Королевского общества, руководителя работ по созданию первых английских ЭВМ и Национальной физической лаборатории в Теддингтоне. Свои замечательные результаты в области машин, носящих его имя, А. Тьюринг получил в 1936–1937 гг., будучи 25-летним, молодым (по нынешним понятиям) человеком. Изумляют не только четкость и математическая строгость подходов Тьюринга, но и глубочайшее понимание необходимости такого рассмотрения для дальнейшего развития прикладной математики. Результаты Тьюринга (а также параллельно работавших с ним в этой области А. А. Маркова (младшего), Э. Поста, А. А. Ляпунова, К. Геделя) — вклад не только в математику, но и в современную философию, ее важнейшую отрасль — теорию познания.

В результате изучения этого раздела нашего курса каждый слушатель стал владельцем персональной вычислительной машины (ПВМ) — машины Тьюринга, обладающей неограниченной памятью и широчайшими возможностями, быстродействие которой зависит от пользователя.

Автор отмечает, что программирование для машин Тьюринга (после приобретения некоторых навыков) — достаточно занимательное занятие, так как требует лишь алгоритмических навыков, а не удержания в голове стандартных конструкций, характерных для программирования на алгоязыках высокого уровня. Здесь нет фактически программистских проблем, а есть только алгоритмические проблемы. Решение задач по программированию для машин Тьюринга позволяет выработать и развить приемы алгоритмизации (чему человек обучается значительно труднее, чем «голому» программированию).

Глава 7
Элементы теории графов

§ 7.1. Введение, общее определение графа. Локальные характеристики

Эта глава нашего курса посвящена графам — математическим объектам, интересным во всех отношениях. Приведем обширную цитату из введения к книге Ф. Харари «Теория графов» (М. : Мир, 1973):

> «Существует несколько причин нарастания интереса к теории графов. Неоспорим тот факт, что теория графов применяется в таких областях, как физика, химия, теория связи, проектирование ЭВМ, электротехника, машиностроение, архитектура, исследование операций, генетика, психология, социология, экономика, антропология и лингвистика. Эта теория тесно связана также со многими разделами математики, среди которых — теория групп, теория матриц, численный анализ, теория вероятностей, топология и комбинаторный анализ.
>
> Графы действуют притягательно и обладают эстетической привлекательностью... Хотя в теории графов много результатов, элементарных по своей природе, в ней также громадное изобилие весьма тонких комбинаторных проблем, достойных внимания самых искушенных математиков».

Теория графов — тот редкий раздел математики, о котором доподлинно известно, когда он родился и кто был его основоположником. Родилась теория графов на берегах Невы, в Санкт-Петербурге, ее «отцом» (как и алгебраической топологии) является Леонард Эйлер[1], опубликовавший в 1736 г. решение задачи о кенигсбергских мостах (приведем название и выходные данные этой работы: *Euler L.* Solutio problematis ad geometrian sitis pertinents, Comment. Academiae Sci I. Petropolitanue, 8, 1736, p. 128–140).

Следующие шаги в развитии теории графов принадлежат Г. Кирхгофу, применившему теорию графов в 1847 г. к теории электрических цепей (законы Кирхгофа), и А. Кэли, разработавшему в 1857 г. теорию деревьев и применившему ее к теории химических изомеров.

Родившись при решении головоломок и занимательных задач, в XX в. теория графов стала мощным сред-

[1] Леонард Эйлер (1707–1783) родился в Базеле (Швейцария). В возрасте 13 лет начал учебу в университете Базеля на отделении теологии. Одновременно проходил математическую подготовку у И. Бернулли. Под его влиянием и происходит отход от теологии к математике. Магистерская диссертация защищена Л. Эйлером в возрасте 16 лет. В 1727 г. в 20-летнем возрасте Эйлер приглашен в созданную Петром I Санкт-Петербургскую академию наук, в 1746 г. он переезжает в Берлин, где до 1766 г. работает в Берлинской академии наук, а затем возвращается в Санкт-Петербург, где активно работает, несмотря на постигшую его в последние 17 лет жизни слепоту. Л. Эйлер относится к величайшим ученым, трудами которых основаны целые научные направления и науки. Им написано около 700 научных работ по теории чисел, математическому анализу, математической физике, комбинаторике, вариационному исчислению и многочисленным приложениям математических методов.

ством решения проблем многих наук, широкая приложимость стала дополнительным стимулом ее бурного развития. Сам термин «граф» ровно на 200 лет моложе этой теории, он введен в употребление в 1936 г. выдающимся венгерским математиком Д. Кёнигом.

Определение графа. Локальные характеристики

Графы бывают двух типов — *неориентированные* и *ориентированные*. В нашем курсе мы будем в основном заниматься ориентированными графами (они чаще встречаются в приложениях).

Определение 7.1. *Ориентированным графом* ($\Leftrightarrow$ *орграфом* $\Leftrightarrow$ *графом*) *будем называть тройку* $G(X, U, f)$, *где* X ($\neq \varnothing$) — *множество, называемое множеством вершин графа,* U — *множество (возможно, и пустое), называемое множеством дуг,* f — *отображение, действующее из* U *в* $X \times X$, *называемое отображением инцидентности.*

П **Пример 7.1.** Рассмотрим граф, изображенный на рис. 7.1.

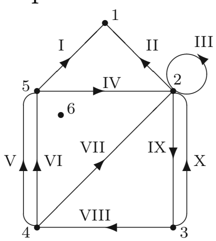


Рис. 7.1

$X = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$
$U = \{\mathrm{I};\ \mathrm{II};\ \ldots;\ \mathrm{X}\}$
$f(\mathrm{I}) = (5; 1)$; $f(\mathrm{II}) = (2; 1)$;
$f(\mathrm{III}) = (2; 2)$; $f(\mathrm{IV}) = (5; 2)$;
$f(\mathrm{V}) = (4; 5)$; $f(\mathrm{VI}) = (4; 5)$;
$f(\mathrm{VII}) = (4; 2)$; $f(\mathrm{VIII}) = (3; 4)$;
$f(\mathrm{IX}) = (2; 3)$; $f(\mathrm{X}) = (3; 2)$.

Введем в рассмотрение стандартные отображения
$$p_1 \;:\; X \times X \;\to\; X \quad \text{и} \quad p_2 \;:\; X \times X \;\to\; X$$
следующими правилами:
$$p_1\left((x;y)\right) \;=\; x; \qquad p_2\left((x;y)\right) \;=\; y.$$

Определение 7.2. *Пусть $G(X, U, f)$ — граф, u $(\in U)$ — дуга. Назовем вершину $(p_1 \circ f)(u)$ началом дуги u, вершину $(p_2 \circ f)(u)$ концом дуги u.*

Дуги u $(\in U)$ и v $(\in U)$ называются параллельными (кратными), если $f(u) = f(v)$.

Дуги u $(\in U)$ и w $(\in U)$ называются противоположными, если
$$f(u) \;=\; \left((p_2 \circ f)\,(w); (p_1 \circ f)\,(w)\right).$$
Дуга t $(\in U)$ называется петлей в вершине x, если
$$(p_1 \circ f)\,(t) = (p_2 \circ f)\,(t) = x.$$
Если $f(u) = (x;y)$, то говорят, что дуга u инцидентна вершинам x и y. Вершина x $(x \in X)$ называется изолированной, если
$$f^{-1}\left((X \setminus \{x\}) \times \{x\}\right) \;=\; f^{-1}\left(\{x\} \times (X \setminus \{x\})\right) \;=\varnothing.$$

Для графа на рис. 7.1 дуги V и VI параллельны, IX и X — противоположны, III — петля в вершине 2, вершина 6 — изолированная вершина. Вершина 2 инцидентна дугам II, III, IV, X, XI и VII.

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 7.2. Граф шахматной игры**

Множество вершин этого графа — множество позиций шахматной игры (позиция — диаграмма расположения фигур и указание, чей ход предстоит). Дуги графа шахматной игры — такие упорядоченные пары позиций, в которых вторая может быть получена из первой по правилам шахматной игры за один ход.

Отображение инцидентности — это отображение вложения множества дуг в декартово произведение вершин. Сама шахматная игра может рассматриваться как игра двух лиц на графе шахматной игры. «Белые» находятся в вершине, отвечающей началу игры (исходная расстановка, ход белых), и совершают ход, т. е. выбирают одну из дуг, выходящих из этой вершины. «Черные» получают ход в вершине, соответствующей концу этой дуги, и т. д. Цель игры — «загнать» противника в такую вершину x, что $f^{-1}(\{x\} \times X) = \varnothing$, т. е. в безвыходное положение.

3. Локальные характеристики графа

Определение 7.3. *Граф $G(X, U, f)$ называют конечным, если $|X| < \infty$, $|U| < \infty$, т. е. если у него конечное число вершин и дуг.*

В дальнейшем мы будем рассматривать только конечные графы (не оговаривая это дополнительно).

Определение 7.4. *Пусть x $(\in X)$ — вершина графа $G(X, U, f)$, поставим ей в соответствие три числа: $deg_+ x$, $deg_- x$, $deg\, x$:*

$deg_+ x \;=\; \left|f^{-1}(X \times \{x\})\right|$ *— число входящих в x дуг;*

$deg_- x \;=\; \left|f^{-1}(\{x\} \times X)\right|$ *— число выходящих из x дуг;*

$deg\, x \;=\; deg_+ x + deg_- x.$

Число $deg_+ x$ называют полустепенью захода в вершину x, $deg_- x$ — полустепенью исхода из вершины x, $deg\, x$ называют степенью вершины x.

Очевидно, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1. *Для любого графа $G(X, U, f)$, у которого $|U| < \infty$, имеют место соотношения*:

$$\sum_{x\in X} deg_+ x \;=\; \sum_{x\in X} deg_- x \;=\; |U|; \tag{7.1}$$

$$\sum_{x\in X} deg\, x \;=\; 2|U|. \tag{7.2}$$

$$\blacktriangleright\quad |U| \;=\; \left|f^{-1}(X\times X)\right| \;=\; \left|f^{-1}\left(\bigcup_{x\in X}(X\times\{x\})\right)\right| \;=$$

$$=\;\left|\bigcup_{x\in X} f^{-1}(X\times\{x\})\right| \;=\sum_{x\in X}\left|f^{-1}(X\times\{x\})\right| \;=$$

$$=\;\sum_{x\in X}\deg_+ x \;= \text{аналогично} \;=\; \sum_{x\in X}\deg_- x.$$

(Соотношение (7.2) — это следствие соотношения (7.1).) ◀

! **Замечание 1.** Множества $f^{-1}(X\times\{x\})$ попарно не пересекаются.

Теорема 7.2 (**теорема Эйлера о рукопожатиях**) *В любом конечном графе $G(X, U, f)$ число вершин нечетной степени является четным числом или равно нулю.*

▶ Представим множество вершин X в виде $X = X_2 \cup X_1$, отнеся к X_2 такие вершины x, у которых $\deg\, x = 2\cdot k_x$, $k_x \in \mathbb{Z}_+$; а к X_1 — такие вершины x, у которых $\deg\, x = 2\cdot k_x + 1$, $k_x\in\mathbb{Z}_+$.

Тогда, воспользовавшись соотношением (7.2) теоремы 7.1, получаем

$$2\cdot|U| = \sum_{x\in X}\deg\, x \;=\; \sum_{x\in X_2}\deg\, x + \sum_{x\in X_1}\deg\, x \;=$$

$$=2\cdot\sum_{x\in X_2}k_x + 2\cdot\sum_{x\in X_1}k_x + \sum_{x\in X_1}1 = 2\cdot\sum_{x\in X}k_x + |X_1| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |X_1| = 2|U| - 2\sum_{x\in X} k_x = 2\left(|U| - \sum_{x\in X} k_x\right).$$

Правая часть кратна двум или равна нулю, значит, $|X_1|$ кратно двум или равна нулю. ◀

Возможная интерпретация данной теоремы такова: на любом мероприятии (приеме, банкете и т. п.) число лиц, совершивших нечетное число рукопожатий, четно или таких лиц нет вовсе.

Графы принято интерпретировать (изображать) рисунками, состоящими из точек, соответствующих вершинам, и линий со стрелками, изображающих дуги.

Приведем в качестве заключительного в этом параграфе примера граф нашего курса (см. рис. 7.2). Вершины графа будут соответствовать разделам: алгебра высказываний (АВ), алгебра предикатов (АП), алгебра множеств и отношений (АМО), отображения и комбинаторика (ОК), отношения (О), булевы функции (БФ), элементы теории алгоритмов (А), введение в теорию графов (ТГ). Дуги графа — стрелки, ведущие от разделов, материал которых используется при изучении данного раздела, к вершине, соответствующей данному разделу.

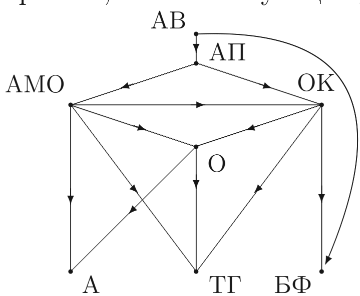


Рис. 7.2

Вопросы в конце параграфа

? **1.** Сравните условия теорем 7.1 и 7.2. Почему условия теоремы 7.1 слабее?

2. Оцените сверху количество дуг графа с n вершинами, на котором нет петель, противоположных и параллельных дуг.

§ 7.2. Изоморфизм графов. Геометрические графы. Плоские и неплоские графы. Реализуемость в $\boldsymbol{R_3}$. Пути, цепи, контуры, циклы

Изоморфизм графов

Похожесть и непохожесть однотипных объектов в математике определяются понятием «изоморфизм».

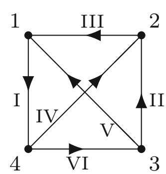
Определение 7.5. *Графы $G_1(X_1, U_1, f_1)$ и $G_2(X_2, U_2, f_2)$ называются изоморфными (пишут $G_1 \simeq G_2$), если существуют биективные отображения $\varphi : X_1 \to X_2$ и ψ: $U_1 \to U_2$ такие, что*

$$(p_i \circ f_2 \circ \psi)(u) = (\varphi \circ p_i \circ f_1)(u), \quad \forall u \in U,\ i = 1, 2.$$

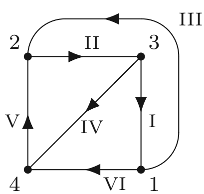
(Иначе $p_1 \circ f_2 \circ \psi = \varphi \circ p_1 \circ f_1$ и $p_2 \circ f_2 \circ \psi = \varphi \circ p_2 \circ f_1$.)

П **Пример 7.3.** Рассмотрим графы G_1, G_2, G_3, G_4, изображенные на рис. 7.3:

G_1:



G_2:



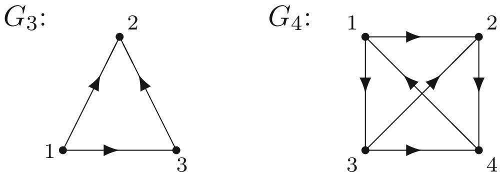


Рис. 7.3

Очевидно, $G_1 \simeq G_2$, $G_1 \not\simeq G_3$, $G_1 \not\simeq G_4$.

Изоморфизм $G_1 \simeq G_2$ реализуют отображения φ и ψ, заданные следующими соотношениями:

$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(2) = 4, \quad \varphi(3) = 1, \quad \varphi(4) = 3.$
$\psi(\mathrm{I}) = \mathrm{II},\ \psi(\mathrm{II}) = \mathrm{VI},\ \psi(\mathrm{III}) = \mathrm{V},\ \psi(\mathrm{IV}) = \mathrm{IV},$
$\psi(\mathrm{V}) = \mathrm{III}\ \psi(\mathrm{VI}) = \mathrm{I}.$

Теорема 7.3. *Изоморфизм — отношение эквивалентности на множестве графов* $\mathcal{G}$, *т. е. оно рефлексивно, симметрично, транзитивно:*

1. $\forall G\ (\in \mathcal{G}) \quad G \simeq G.$
2. $\forall G_1\ \forall G_2 \quad (G_1 \simeq G_2 \implies G_2 \simeq G_1)\,.$
3. $\forall G_1\ \forall G_2\ \forall G_3\ ((G_1 \simeq G_2)\&(G_2 \simeq G_3) \Longrightarrow (G_1 \simeq G_3))\,.$

► Доказательство теоремы основано на том, что:

а) тождественное отображение биективно;

б) биективные отображения обратимы и обратные к ним биективны;

в) композиция биективных отображений биективна. ◄

Геометрические графы. Реализуемость графов

Определение 7.6. *Геометрическим графом называется граф, у которого множество вершин — множество отмеченных точек в R_2 или R_3, множество дуг — множество параметризованных отрезков непрерывных кривых в R_2 или в R_3, концами которых являются соответствующие им вершины графа*[2].

Все графы, приведенные раньше на рисунках, можно считать геометрическими.

Теорема 7.4. *Для любого графа существует изоморфный ему геометрический граф (и в R_2, и в R_3), называемый его геометрической реализацией.*

► Вершинам графа поставим в соответствие помеченные точки плоскости или пространства, а дуги изобразим параметризованными отрезками прямых или дуг окружностей. ◄

Определение 7.7. *Геометрический граф называется правильно реализованным (или правильным), если его дуги не имеют общих точек, отличных от вершин графа.*

П **Пример 7.4.** Рассмотрим графы G_1 и G_2, изображенные на рис. 7.4.
Граф G_1 не является правильно реализованным, граф G_2 — правильный. (Заметим, что $G_1 \simeq G_2$, т. е. G_2 — правильная реализация G_1.)

[2] Параметризованный отрезок кривой в пространстве задается параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [0; 1]$. Начало отрезка — точка с координатами $(x(0); y(0); z(0))$, конец — $(x(1); y(1); z(1))$

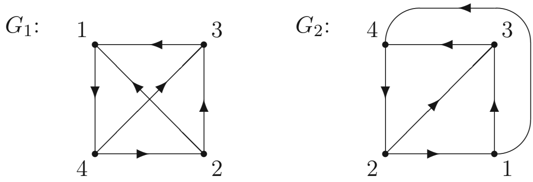


Рис. 7.4

Теорема 7.5. *Для любого графа существует его правильная реализация в* R_3.

► Опишем конструкцию, позволяющую построить правильную реализацию. Возьмем в R_3 произвольную прямую ℓ. Вершинам графа $G(X, U, f)$ поставим в соответствие отмеченные точки на этой прямой (точки будем обозначать теми же буквами, что и вершины графа G).

Каждой дуге графа G будет соответствовать своя плоскость, проходящая через ℓ. Если дуга $u \in U$ такова, что $f(u) = (x; y)$, $x \neq y$, то в соответствующей плоскости построим на отрезке $[x; y]$ как на диаметре полуокружность, параметризованную от x к y; если $w \in U$ и $f(w) = (z; z)$, то в соответствующей плоскости изобразим единичную окружность, касательную к ℓ в точке z, параметризованную произвольно (см. рис. 7.5).

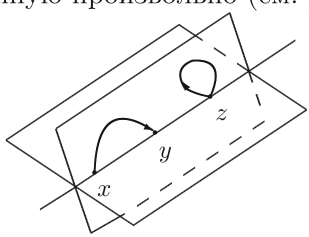


Рис. 7.5

Очевидно, эта конструкция дает правильную реализацию. ◄

Определение 7.8. *Граф называется плоским (⇔ планарным), если у него существует правильная реализация в* R_2.

Определение 7.9. *Полным графом* K_n $(n \in \mathbb{N})$ *называется граф с* n *вершинами без петель, кратных и противоположных дуг (ориентация безразлична), у которого любые две вершины соединены дугой (см. рис. 7.6).*

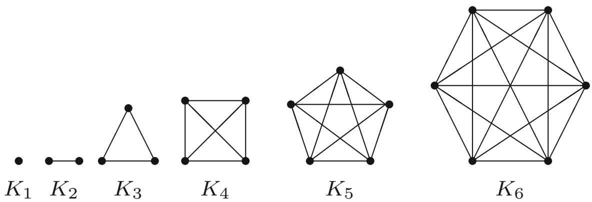


Рис. 7.6

Определение 7.10. *Полным двудольным графом* $K_{n,m}$ $(n \leqslant m)$ *называется граф с* $n+m$ *вершинами без петель, кратных и противоположных дуг (ориентация безразлична), у которого множество вершин разбито на два непересекающихся подмножества с* n *и* m *вершинами так, что любые две вершины различных подмножеств соединены дугой и никакие две вершины одного подмножества не соединены дугой (см. рис. 7.7).*

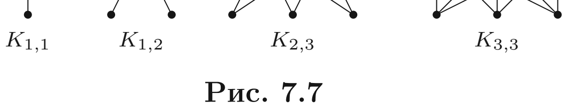


Рис. 7.7

Оказывается (и это доказали почти одновременно и независимо российский математик Л. С. Понтрягин и польский математик К. Куратовский), не являются плоскими графы K_5 и $K_{3,3}$ и графы, части которых устроены «подобно» K_5 и $K_{3,3}$. (Подробно и точно о критерии планарности Понтрягина — Куратовского см. в книге *Ф. Харари* «Теория графов» (М.: Мир, 1973). Смысл и значение этого факта и теоремы 7.5 о правильной реализуемости графов в R_3 для микроэлектроники трудно переоценить. Фактически из-за графов K_5 и $K_{3,3}$ пришлось создавать технологию многослойных печатных плат или микросхем в виде сэндвичей. С графом $K_{3,3}$ связана и головоломка о трех домах и трех колодцах (см. *Л. Кэрролл* «Алиса в стране чудес»).

Пути, цепи, контуры, циклы

Определение 7.11. *Путем длины* n $(n \in \mathbb{N})$ *на графе* $G(X, U, f)$ *называется отображение* $\mu{:}[1; n]_{\mathbb{N}} \to U$ *такое, что*

$$(p_2 \circ f \circ \mu)\,(i-1) \;=\; (p_1 \circ f \circ \mu)\,(i), \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Вершина $(p_1 \circ f \circ \mu)(1)$ *называется началом пути* μ, *вершина* $(p_2 \circ f \circ \mu)(n)$ *— концом пути* μ.

Если $(p_1 \circ f \circ \mu)(1) = (p_2 \circ f \circ \mu)(n)$, *то путь называется контуром.*

Если отображение μ *инъективно, то путь (контур) называется простым.*

Определение 7.12. *Цепью длины* n $(n \in \mathbb{N})$ *на графе* $G(X, U, f)$ *называется отображение* $\eta{:}[1; n]_{\mathbb{N}} \to U$ *такое, что у любой дуги* $\eta(i)$ $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$ *одна инцидентная вершина общая с дугой* $\eta(i-1)$, *а другая — общая с дугой* $\eta(i+1)$.

Вершина дуги $\eta(1)$, не являющаяся общей с дугой $\eta(2)$, называется началом цепи, вершина дуги $\eta(n)$, не являющаяся общей с дугой $\eta(n-1)$, называется концом цепи.

Если начало цепи совпадает с ее концом, цепь называется циклом.

Если отображение η инъективно, то цепь (цикл) называется простой (простым).

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 7.5.** Рассмотрим граф, приведенный на рис. 7.8, и отображение $\mu : [1;9]_{\mathbb{N}} \to U$, заданное табл 7.1.

Табл. 7.1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mu(i)$	VI	VIII	III	IX	II	IV	V	II	I

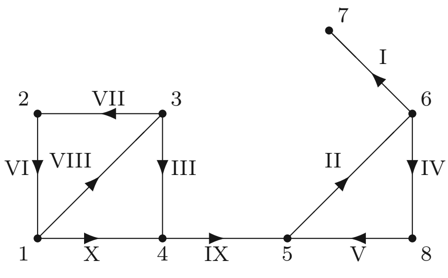


Рис. 7.8

Ясно, что μ — путь длины 9 из 2-й вершины в 7-ю вершину. Рассмотрим отображение η, заданное правилом

$$\eta(1) = \text{VII};\quad \eta(2) = \text{III};\quad \eta(3) = \text{IX};\quad \eta(4) = \text{V}.$$

Ясно, что η — цепь длины 4 из 2-й в 8-ю вершину.

$\mu_1(1)=\mathrm{VI}$; $\mu_1(2)=\mathrm{VIII}$; $\mu_1(3)=\mathrm{VII}$ — контур длины 3.
$\eta_1(1)=\mathrm{VI}$; $\eta_1(2)=\mathrm{X}$; $\eta_1(3)=\mathrm{III}$;
$\eta_1(4)=\mathrm{VII}$ — цикл длины 4.

Лемма 7.1 (**лемма о простом пути**)
Пусть $G(X,U,f)$ — граф; $x;y\,(\in X)$ — такие вершины, что существует путь μ_{xy} длины n_{xy} с началом в вершине x и концом в вершине y, тогда существует простой путь μ'_{xy} длины n'_{xy} с началом в вершине x и концом в вершине y, причем $n'_{xy} \leqslant n_{xy}$.

► Возможны два случая:

а) отображение μ_{xy} инъективно, тогда $\mu'_{xy} = \mu_{xy}$, $n'_{xy} = n_{xy}$ и утверждение леммы доказано (тривиально);

б) отображение μ_{xy} не является инъективным, значит, существует такая дуга $\overline{u} \in U$, что

$$\left|\mu_{xy}^{-1}\left(\{\overline{u}\}\right)\right| \geqslant 2.$$

Упорядочим элементы множества $\mu_{xy}^{-1}(\{\overline{u}\})$ в порядке возрастания, т. е.

$$\mu_{xy}^{-1}(\{\overline{u}\})=\{i_1;i_2;\ldots;i_k\}\ \ (1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n_{xy})\,.$$

Образуем путь $\mu_{1\,xy}$ длины $n_{1\,xy} = n_{xy} - (i_k - i_1)$, соединяющий x с y, положив

$$\mu_{1\,xy}(i)=\begin{cases}\mu_{xy}(i), & \text{если } 1\leqslant i\leqslant i_1;\\ \mu_{xy}\left(i+(i_k-i_1)\right), & \text{если } i_1<i\leqslant n_{xy}-(i_k-i_1).\end{cases}$$

При этом

$$\left|\mu_1^{-1}\left(\{\overline{u}\}\right)\right| = 1; \quad \mu_{1\,xy}^{-1}(\{u\}) \subset \mu_{xy}^{-1}(\{u\})$$

для любой дуги u, отличной от $\overline{u}$. Тогда, если $\mu_{1\,xy}$ инъективно, полагаем $\mu'_{xy} = \mu_{1\,xy}$; $n'_{xy} = n_{1\,xy}$, а если $\mu_{1\,xy}$ не является инъективным отображением, то к нему применимы приведенные выше рассуждения. Мы получим путь $\mu_{2\,xy}$ длины $n_{2\,xy} < n_{1\,xy}$ и т. д. За конечное число шагов процесс оборвется (так как длина пути — натуральное число) и требуемый простой путь будет построен. ◄

Лемма 7.2 (**лемма о простой цепи**)
Пусть $G(X, U, f)$ — граф; $x, y\,(\in X)$ — такие вершины, что существует цепь η_{xy} длины n_{xy}, соединяющая x с y. Тогда существует простая цепь η'_{xy} длины n'_{xy}, соединяющая x с y, причем $n'_{xy} \leqslant n_{xy}$.

► Возможны два случая:

а) отображение η_{xy}:$[1; n_{xy}]_{\mathbb{N}} \to U$ инъективно, тогда $\eta'_{xy} = \eta_{xy}$, $n'_{xy} = n_{xy}$ и утверждение леммы тривиально доказано;

б) отображение η_{xy}:$[1; n_{xy}]_{\mathbb{N}} \to U$ не является инъективным. Значит, существует такая дуга $\overline{u} \in U$, что

$$\left|\eta_{xy}^{-1}\left(\{\overline{u}\}\right)\right| \geqslant 2.$$

Упорядочим элементы множества $\eta_{xy}^{-1}(\{\overline{u}\})$ в порядке возрастания, т. е.

$\eta_{xy}^{-1}\left(\{\overline{u}\}\right) = \{i_1; i_2; \ldots; i_k\}\ \left(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n_{xy}\right).$

Для трассы цепи η_{xy} возможны четыре случая (см. рис. 7.9).

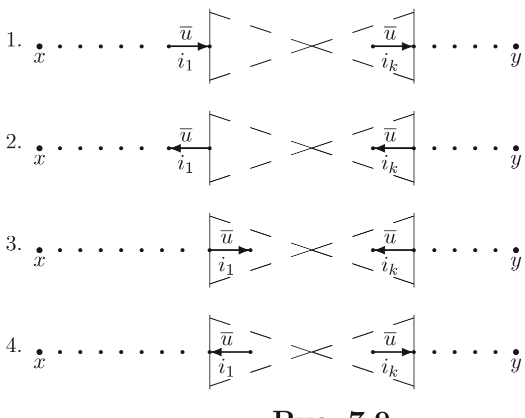


Рис. 7.9

Построим цепь $\eta_{1\,xy}$, соединяющую x с y, в случаях 1 и 2 по правилу

$$\eta_{1\,xy}(i)=\begin{cases}\eta_{xy}(i), & \text{если } 1\leqslant i\leqslant i_1;\\ \eta_{xy}\left(i+(i_k-i_1)\right), & \text{если } i_1<i\leqslant n_{xy}-(i_k-i_1),\end{cases}$$

а в случаях 3 и 4 — по правилу

$$\eta_{1\,xy}(i)=\begin{cases}\eta_{xy}(i), & \text{если } 1\leqslant i<i_1;\\ \eta_{xy}\left(i+(i_k-i_1)+1\right), & \text{если } i_1\leqslant i\leqslant n_{xy}-(i_k-i_1)-1.\end{cases}$$

При этом в случаях 1 и 2

$$\left|\eta_{1\,xy}^{-1}\left(\{\overline{u}\}\right)\right| = 1, \quad \eta_{1\,xy}^{-1}\left(\{u\}\right)\subset\eta_{xy}^{-1}\left(\{u\}\right)$$

для любой дуги u, отличной от $\overline{u}$, а в случаях 3 и 4

$$\left|\eta_{1\,xy}^{-1}\left(\{\overline{u}\}\right)\right| = \varnothing, \quad \eta_{1\,xy}^{-1}\left(\{u\}\right)\subset\eta_{xy}^{-1}\left(\{u\}\right)$$

для любой дуги u, отличной от $\overline{u}$. Тогда, если $\eta_{1\,xy}$ инъективно, полагаем $\eta'_{xy} = \eta_{1\,xy}$; $n'_{xy} = n_{1\,xy}$, а если $\eta_{1\,xy}$ не является инъективным отображением, то к нему применимы приведенные выше рассуждения. Мы получим цепь $\eta_{2\,xy}$ длины $n_{2\,xy} < n_{1\,xy}$ и т. д. За конечное число шагов процесс оборвется. Будет получена искомая простая цепь η'_{xy}. ◀

Лемма 7.3 (**лемма об инвертировании цепи**)
Пусть $G(X,U,f)$ — граф; $x,y(\in X)$ — вершины такие, что существует цепь η_{xy} длины n_{xy}, соединяющая x с y, тогда существует цепь η_{xy}^- длины n_{xy}, ведущая из y в x.

▶ Очевидно, отображение $\eta_{xy}^-{:}[1;n_{xy}]_{\mathbb{N}}\to U$, заданное равенством

$$\eta_{xy}^-(i) \;=\; \eta_{xy}\left(n_{xy}-i+1\right),$$

является искомой цепью из y в x. Говорят, что цепь η_{xy}^- получена инвертированием цепи η_{xy}. ◀

Замечания и вопросы в конце параграфа

$\boxed{?}$ $\boxed{!}$ **1.** Очевидно, что всякий путь является цепью и не всякая цепь является путем.

2. Докажите, что если $G_1(X_1, U_1, f_1) \simeq \simeq G_2(X_2, U_2, f_2)$ и φ, ψ — пара биективных отображений, реализующих этот изоморфизм, то для любой вершины $x \in X_1$ справедливо:
$$\deg_+ x = \deg_+ \varphi(x); \quad \deg_- x = \deg_- \varphi(x);$$
$$\deg x = \deg \varphi(x).$$
(Характеристики $\deg_+$, $\deg_-$, $\deg$ в левой части равенств вычисляются для графа G_1, а в правой — для графа G_2.)

3. Проверьте, что отображение η^-_{xy} в лемме 7.3 действительно является цепью.

§ 7.3. Части графа: подграф, частичный граф. Связность и сильная связность, компоненты. Мосты графа

В задачах теории графов иногда приходится изучать не весь граф в целом, а какие-то его части.

Определение 7.13. *Пусть $G(X, U, f)$ — граф, $U' \subset U$. Частичным графом графа G, порожденным U', называется граф $G\left(X, U', f\big|_{U'}\right)$. (Здесь $f\big|_{U'}$ — ограничение отображения $f : U \to X \times X$ на множество U', т. е. $f\big|_{U'} : U' \to X \times X$ по правилу $\left(f\big|_{U'}\right)(u) = f(u) \quad \forall u \in U'$.)*

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 7.6.** Пусть G — схема дорог Ростовской области. Схема дорог Ростовской области с асфальтовым покрытием — частичный граф графа G.

Определение 7.14

Пусть $G(X, U, f)$ — граф, $X'(\neq\varnothing)\subset X$. Подграфом графа G, порожденным множеством X', называется граф

$$G\left(X', U_{X'}, f\big|_{U_{X'}}\right), \quad \text{где } U_{X'} = f^{-1}\left(X' \times X'\right).$$

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 7.7.** Схема дорог Багаевского района Ростовской области — подграф схемы дорог Ростовской области.

Сам граф G по отношению к своим подграфам и частичным графам называется надграфом (суграфом или суперграфом).

Компоненты связности и сильной связности

Определение 7.15

Пусть x — вершина графа $G(X, U, f)$. Свяжем с ней множество C_x, определенное следующим: $y \in C_x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (y = x) \vee$ (существует цепь, ведущая из x в y).

Теорема 7.6 (свойства множеств C_x)

Множества C_x обладают следующими свойствами:

1. $\forall x \ (\in X) \quad C_x \neq \varnothing$;
2. $\forall x \ \forall y \quad (C_x \cap C_y \neq \varnothing \implies C_x = C_y)$;
3. $\bigcup\limits_{x \in X} C_x = X$.

► Нетрудно проверить, что отношение α, заданное следующим:

$x \alpha y \Leftrightarrow (y = x) \vee$(существует цепь, ведущая из x в y),

является отношением эквивалентности на множестве X — вершин графа. Действительно, его рефлексивность и симметричность очевидны, а транзитивность следует из возможности склейки цепей.

Пусть η_{xy} — цепь длины n_{xy}, ведущая из x в y; η_{yz} — цепь длины n_{yz}, ведущая из y в z.

Тогда отображение $\eta_{xz} \ : \ [1; n_{xy} + n_{yz}]_{\mathbb{N}} \to U$,

$$\eta_{xz}(i) = \begin{cases} \eta_{xy}(i), & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant n_{xy}; \\ \eta_{yz}\left(i - n_{xy}\right), & \text{если } n_{xy} < i \leqslant n_{xy} + n_{yz} \end{cases}$$

— цепь, ведущая из x в z.

Ясно, что $C_x = [x]_\alpha$, тогда эта теорема — частный случай теоремы 4.4 о свойствах множеств $[x]_\alpha$. ◀

Определение 7.16. *Компонентой связности вершины x графа $G(X, U, f)$ называется подграф, порожденный C_x.*

Определение 7.17. *Числом связности графа $G(X, U, f)$ называется число его* ***различных*** *компонент связности. Число связности обозначается $c(G)$.*

П Пример 7.8

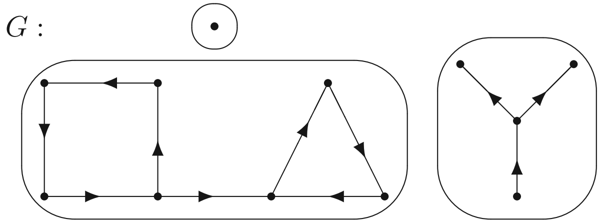


Рис. 7.10

Для графа G, заданного рис. 7.10, $c(G) = 3$. Обведены три различных компоненты связности графа G.

Определение 7.18
Граф G называется связным, если $c(G) = 1$, и несвязным, если $c(G) > 1$.

Определение 7.19
Пусть x — вершина графа $G(X, U, f)$. Свяжем с ней множество sC_x, определенное следующим:

$y \in {}_sC_x \Leftrightarrow (y = x) \vee$ ((существует путь, ведущий из x в y) & (существует путь, ведущий из y в x)).

Теорема 7.7 (свойства множеств sC_x)
Множества sC_x обладают следующими свойствами:

1. $\forall x\ (\in X) \quad sC_x \neq \varnothing.$
2. $\forall x\ \forall y \quad (sC_x \cap sC_y \neq \varnothing \implies sC_x = sC_y).$
3. $\bigcup\limits_{x \in X} sC_x = X.$

► Нетрудно доказать, что бинарное отношение β на множестве вершин, определенное частью, стоящей за «$\Leftrightarrow$» в определении 7.19, является отношением эквивалентности, $sC_x = [x]_\beta$, тогда эта теорема — частный случай теоремы 4.4. ◄

Определение 7.20
Компонентой сильной связности вершины x графа $G(X, U, f)$ называется подграф, порожденный множеством sC_x — $G\left(sC_x, U_{sC_x}, f\big|_{U_{sC_x}}\right)$.

Определение 7.21. *Числом сильной связности графа G называется число его* ***различных*** *компонент сильной связности. Число сильной связности графа G обозначается $sc(G)$.*

П **Пример 7.9.** Для графа G, заданного рис. 7.11, $sc(G) = 7$. На рисунке обведены замкнутыми кривыми различные компоненты сильной связности графа G.

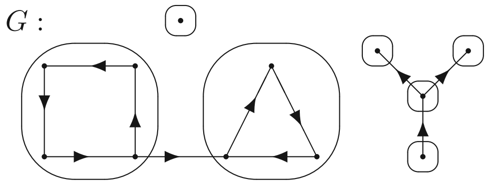


Рис. 7.11

Теорема 7.8. *Для любой вершины x графа $G(X, U, f)$ имеет место ${}_sC_x \subset C_x$.*

► Справедливость этого утверждения следует из того, что всякий путь является цепью. ◄

Следствие 7.1. *Для любого конечного графа $G(X, U, f)$ имеет место:* $1 \leqslant c(G) \leqslant sc(G) \leqslant |X|$.

► Крайние оценки очевидны, а внутренняя следует из теоремы 7.8. ◄

Мосты графа

Определение 7.22. *Дуга u графа $G(X, U, f)$ называется мостом, если*

$$c(G) < c(G'_u), \quad \text{где } G'_u = G\left(X, U \setminus \{u\}, f\big|_{U\setminus\{u\}}\right).$$

П **Пример 7.10.** На рис. 7.12 обозначен надписью мост графа G.

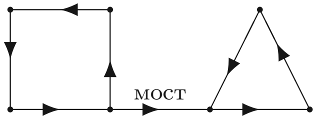


Рис. 7.12

Теорема 7.9 (**теорема о мостах**)

Мы с тобой два берега
у одной реки.

Если u_0 *— мост графа* $G(X, U, f)$, *то*

$$c(G) + 1 \;=\; c\left(G'_{u_0}\right).$$

► Так как каждая дуга графа находится внутри компоненты связности, то при удалении моста «разваливается» только та компонента связности, которой он принадлежал. Значит, достаточно показать, что при удалении моста из компоненты, которой он принадлежал, получается ровно два «осколка», т. е. нужно доказать следующую теорему: ◄

Теорема 7.10. *Если* u_0 *— мост графа* $G(X, U, f)$ *и* $c(G) = 1$, *то* $c\left(G'_{u_0}\right) = 2$.

► Предположим противное, т. е. что существует такой граф G и мост u_0 на нем, что

$$c(G) = 1, \text{а } C\left(G'_{u_0}\right) \;\geqslant\; 3.$$

Последнее означает, что в графе G'_{u_0} существуют вершины x, y, z, лежащие в разных компонентах связности. Исходный граф был связен, значит, на нем существовала цепь η_{xy}, ведущая из x в y, и цепь η_{xz}, ведущая из x в z. Можно считать (по лемме 7.2), что эти цепи простые.

На графе G'_{u_0} вершины x, y, z лежат в разных компонентах связности, значит, на нем нет цепей, соединяющих x с y и x с z, следовательно, цепи η_{xy} и η_{xz} «разорвались», а так как переход от G к G'_{u_0} осуществлен удалением дуги u_0, то эти цепи проходили через дугу u_0. Возможные комбинации трасс цепей таковы (см. рис. 7.13):

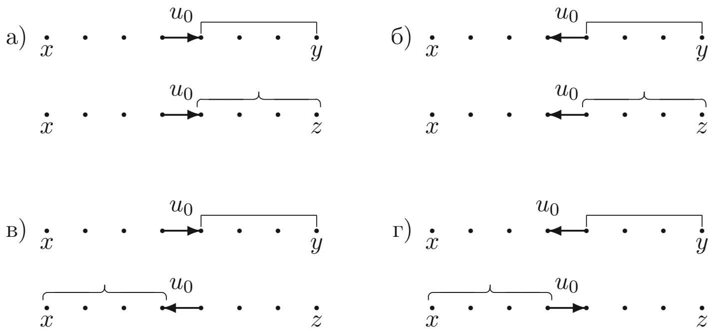


Рис. 7.13

«Куски» цепей, спрятанные за ..., не содержат дуги u_0 (так как цепи простые) и, значит, не пострадают при удалении дуги u_0. Тогда из инвертированного фрагмента «$\overline{|\qquad\quad|}$» на цепи η_{xy} и фрагмента «$\overbrace{\qquad\qquad}$» на цепи η_{xz} в случаях *а* и *б* склеивается цепь, соединяющая вершину y с вершиной z. Это противоречит тому, что эти вершины лежат в разных компонентах связности графа G'_{u_0}. В случаях *в* и *г* из фрагментов «$\overbrace{\qquad\qquad}$» и «$\overline{|\qquad\quad|}$» склеивается цепь, соединяющая вершину x с вершиной y. Это противоречит тому, что эти вершины лежат в разных компонентах графа G'_{u_0}. Полученные противоречия доказывают теоремы 7.9 и 7.10. ◀

Вопросы и задания в конце параграфа

?

1. Почему в определениях 7.17 и 7.21 слово «различных» подчеркнуто?

2. Докажите, что каждая дуга графа лежит внутри какой-то компоненты связности (т. е. ее начальная и конечная вершины находятся в одной компоненте связности).

3. Постройте граф $G(X, U, f)$ такой, что

$$|X| = 10, \quad c(G) = 3, \quad sc(G) = 5.$$

4. Докажите, что

$$sc(G) = c(G) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\ (\in X)\ C_x = {}_sC_x.$$

§ 7.4. Эйлеровы графы, критерий эйлеровости

В этом параграфе мы возвращаемся к истокам теории графов и задачам, которыми занимался великий Леонард Эйлер. Отправной точкой для него послужила знаменитая задача о кенигсбергских мостах, которая теперь стала неотъемлемой принадлежностью любого учебника по теории графов. Семь мостов города Кенигсберга (ныне Калининград) расположены на реке Прегель так, как изображено на рис. 7.14, соединяя его (города) части A, B, C, D. Задача состоит в следующем: «Найти такую точку города, выйдя из которой, можно пройти по всем мостам города по одному разу и вернуться в нее обратно». Эйлер показал, что эта задача не имеет решения. Каждый мост Эйлер заменил линией, соединяющей точки, соответствующие берегам. В результате получился граф, изображенный на рис. 7.15 (ориентация дуг не имеет значения).

! **Замечание 2.** Заметим, что ни одна из дуг графа на рис. 7.15 не является мостом в смысле определения 7.22.

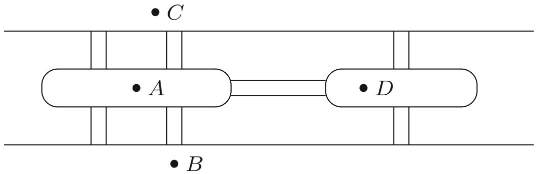


Рис. 7.14

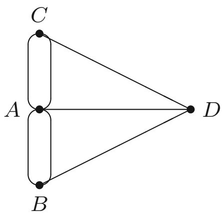


Рис. 7.15

Определение 7.23

Связный граф называется эйлеровым, если на нем существует простой цикл, проходящий через все дуги графа (простой, проходящий через все дуги, т. е. проходящий по одному разу через каждую дугу).

Лемма 7.4. *Если степень каждой вершины конечного графа четна, то на графе существует хотя бы один простой цикл.*

► Наличие хотя бы одной петли делает лемму тривиальной. Осталось рассмотреть графы без петель. Возьмем произвольную вершину графа. Так как ее степень четна, то существует по крайней мере две дуги, для которых она является граничной. Выйдем по одной из этих дуг из этой вершины (не обязательно по ее ориентации). Вершина, в которую мы придем, также имеет четную степень, и, значит, кроме дуги, по которой мы пришли, есть еще хотя бы одна, по которой можно из этой вершины уйти. «Уничтожим» после прохождения через вершину дуги «прихода» и «ухода». При этом степень пройденной вершины уменьшилась на 2, а значит, осталась четной. Таким образом, мы показали, что условие четности степеней вершин — это условие «незастревания» в них, и оно наследуется при уничтожении пройденных дуг. Двигаясь таким образом по конечному графу, не застревая в его вершинах, мы не можем все время оказываться в вершинах, в которых мы не побывали ранее (так как в конечном графе конечное число вершин). Тогда на каком-то из шагов такого «путешествия» мы окажемся в вершине графа, в которой уже были до этого. Отрезок простой цепи, заключенный между первым и вторым прохождениями через такую вершину, является простым циклом на исходном графе. ◀

Теорема 7.11 (**критерий эйлеровости графа**)
Для того чтобы конечный связный граф был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы степени всех его вершин были четными числами.

▶ **Необходимость** ▶

Она очевидна, так как, двигаясь по эйлеровому циклу, войдя в вершину по одной дуге, мы выходим из нее по другой дуге, т. е. каждой «дуге входа» соответствует «дуга выхода». Каждая такая пара дуг дает вклад, равный двум, в степень вершины, а поскольку эйлеров цикл содержит все дуги, то степень каждой вершины представлена суммой двоек и, значит, четна.

◀ Необходимость.

Достаточность ▶

Достаточность будем доказывать по индукции, взяв в качестве параметра индукции число дуг графа.

Шаг 1. $|U| = 1$. Единственный граф, удовлетворяющий условиям теоремы, изображен на рис. 7.16. Очевидно, его единственная дуга и образует эйлеров цикл.

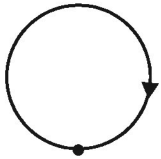


Рис. 7.16

Индуктивный переход. Предположим, что утверждение теоремы (ее достаточной части) справедливо для любого графа, у которого $|U| \leqslant n_0$. Докажем, что тогда оно справедливо и для графа, у которого $|U| = n_0 + 1$. Так как степени всех его вершин четны, то по лемме 7.4 на этом графе существует простой цикл η. Если этот цикл проходит через все дуги графа G, то он и есть искомый эйлеров цикл, и индуктивный переход доказан. В противном случае рассмотрим граф, полученный из G удалением дуг цикла η — G'_η. Каждая его компонента связности — конечный связный граф с четными степенями вершин и числом дуг, меньшим либо равным n_0. Тогда, по предположению индукции, на каждой компоненте связности существует эйлеров цикл. Обозначим эйлеровы циклы компонент $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ соответственно. Поскольку исходный граф связен, то цикл η имеет хотя бы по одной общей вершине с компонентами графа G'_η. Выберем по одной общей с циклом вершине на каждой компоненте — $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Искомый эйлеров цикл на графе G построим следующим образом: отправившись по циклу η из произвольной его вершины, движемся по нему до тех пор, пока не встретим вершину x_i из множества $\{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$, тогда от вершины x_i пройдем по эйлерову циклу η_i

на соответствующей компоненте графа G'_η, после чего продолжим движение по циклу η до тех пор, пока не встретим вершину $x_j \in \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$, опять прервем движение по η и пройдем по эйлерову циклу η_j соответствующей компоненты и т. д. В результате движения по циклу η мы побываем во всех вершинах множества $\{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$, а следовательно, пройдем по всем циклам η_1; $\eta_2; \ldots; \eta_k$ (см. рис. 7.17).

(Процесс склейки эйлерова цикла из цикла η и циклов $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ похож на сборку ожерелья с подвесками.)

Индуктивный переход, а вместе с ним и вся теорема доказаны.

◄ Достаточность◄

Определение 7.24. *Связный граф называется квази-эйлеровым, если на нем существует простая цепь, проходящая через все дуги графа.*

Теорема 7.12 (**критерий квазиэйлеровости**)
Для того чтобы конечный связный граф был квазиэйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы степени всех его вершин были четными числами или степени всех его вершин, за исключением ровно двух, были четными числами, причем в первом случае эйлерова цепь является эйлеровым циклом, а во втором случае эйлерова цепь начинается в одной из вершин нечетной степени, а заканчивается в другой вершине нечетной степени.

► Ясно, что теорема 7.12 является следствием теоремы 7.11. Случай двух вершин нечетной степени и построение эйлеровой цепи можно свести к эйлерову циклу на графе, полученном из G добавлением дуги, соединяющей две вершины нечетной степени. ◄

Вопросы в конце параграфа

? **1.** Можно ли нарисовать фигуру, называемую саблями Магомеда (см. рис. 7.18), не отрывая карандаш от бумаги и не проходя по отрезкам линий дважды (за исключением помеченных точек)?

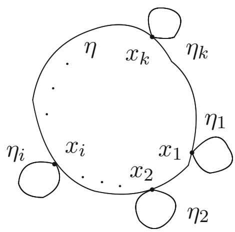


Рис. 7.17

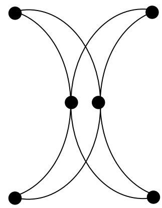


Рис. 7.18

2. Можно ли нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги и не проходя ни по одному из отрезков дважды, домик с крышей вида *а, б, в, г, д* (см. рис. 7.19)?

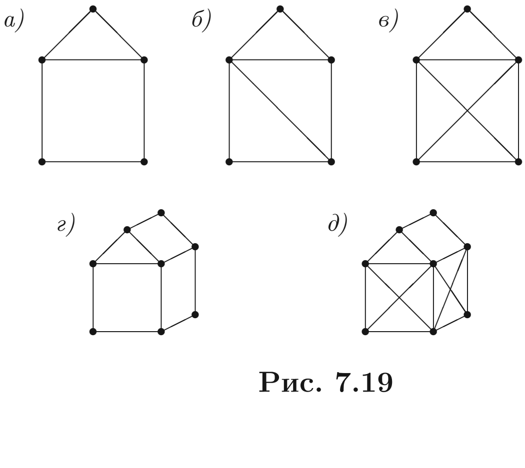


Рис. 7.19

3. Какие из графов, приведенных на рис. 7.20, являются эйлеровыми, квазиэйлеровыми?

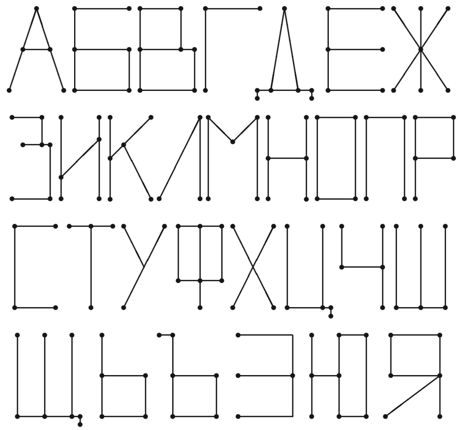


Рис. 7.20

§ 7.5. Деревья и леса

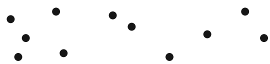
В этом параграфе мы изучим простой и очень важный своими приложениями класс графов — деревья. О широком применении этого класса говорят следующие термины: «дерево поиска», «древовидные структуры», «ветвление» и др.

Лемма 7.5. *Для любого конечного графа* $G(X, U, f)$ *справедливо*

$$|X| - c(G) \leqslant |U|. \tag{7.3}$$

► Проведем доказательство индукцией по параметру $m = |U|$.

1-й шаг. $m = 0$. Любой граф, у которого $|U| = 0$ ($\Leftrightarrow U = \varnothing$), имеет вид, изображенный на рис. 7.21.

Рис. 7.21 

Тогда $c(G)=|X|$. Значит, $|X| - c(G)=|X| - |X| = 0 \leqslant$ $\leqslant 0 = |U|$.
Соотношение (7.3) выполнено.

Индуктивный переход. Предположим, что соотношение (7.3) справедливо для любого графа, у которого $|U| \leqslant m_0$. Докажем, что тогда оно справедливо и для графа, у которого $|U| = m_0 + 1$. Для такого графа возможны два случая: 1) на нем нет ни одного моста; 2) на нем есть хотя бы один мост.

В первом случае удалим произвольную дугу u графа G, т. е. перейдем к графу G'_u. Для него соотношение (7.3) выполнено (по предположению), значит, $|X| - c\,(G'_u) \leqslant |U \setminus \{u\}|$, но $c\,(G'_u) = c(G)$, тогда $|X| - c(G) \leqslant |U - \{u\}| = |U| - 1 < |U|$. Соотношение (7.3) доказано.

Во втором случае обозначим через u_0 мост графа G и выпишем соотношение (7.3) для графа G'_{u_0}:

$$|X| - c\left(G'_{u_0}\right) \leqslant |U \setminus \{u_0\}|\,,$$

по теореме 7.9 о мостах $c\left(G'_{u_0}\right) = c(G) + 1$, тогда

$$|X| - c(G) - \cancel{1} \leqslant |U \setminus \{u_0\}| = |U| - \cancel{1}.$$

Соотношение (7.3) выполнено и в этом случае. Индуктивный переход доказан. ◄

Лемма 7.6. *Конечный граф $G(X, U, f)$, у которого*

$$|U| \leqslant |X| - 2, \tag{7.4}$$

не является связным.

► Предположим противное, то есть что существует конечный связный граф $G_0(X_0, U_0, f_0)$, у которого $|U_0| \leqslant \leqslant |X_0| - 2$. По предыдущей лемме для него выполнено

$$|X_0| - 1 \leqslant |U_0|. \tag{7.5}$$

Из (7.5) и (7.4) получим

$$|X_0| - 1 \leqslant |X_0| - 2 \quad \text{или} \quad -1 \leqslant -2.$$

Полученное противоречие и доказывает лемму. ◄

Определение 7.25. *Деревом называется конечный связный граф без циклов.*

Определение 7.26. *Лесом из k деревьев называется граф G без циклов, у которого $c(G) = k$, $k > 1$.*

П **Пример 7.11.** На рис. 7.22 справа изображен лес, состоящий из трех деревьев.

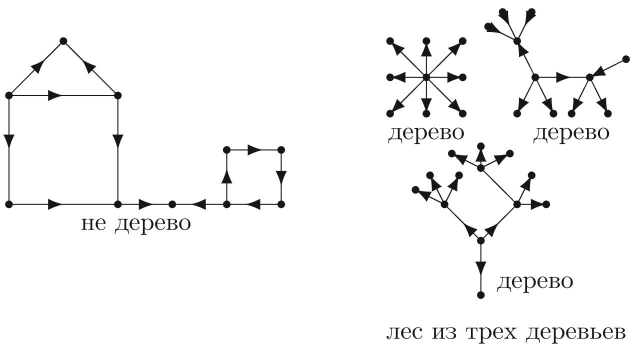


Рис. 7.22

Теорема 7.13 (основная теорема о деревьях)
Для конечного графа $G(X, U, f)$ следующие 6 утверждений эквивалентны:

1) *G — дерево, т. е. связный граф без циклов.*

2) *G не содержит циклов и $|U| = |X| - 1$.*

3) *G связен и $|U| = X - 1$.*

4) *G связен и каждая его дуга является мостом.*

5) *Любые две вершины можно соединить, и причем единственной простой цепью.*

6) *Добавление к графу G любой дуги приводит к образованию единственного простого цикла.*

► Докажем, что из 1) следует 4). Доказательство проведем от противного, т. е. предположим, что существует такое дерево G, на котором есть дуга u_0, не являющаяся мостом. Обозначим через x_0 ее конец, через y_0 — ее начало. Образуем граф G'_{u_0}. Так как он по нашему предположению связен, то на нем существует простая цепь $\eta_{x_0 y_0}$, ведущая из x_0 в y_0, тогда $\eta_{x_0 y_0} \cup \{u_0\}$ — простой цикл на G, что противоречит тому, что G — дерево.

Докажем, что из 1) следует 2), но так как то, что из 1) следует 4), уже доказано, то можно доказывать, что из 1) и 4) следует 2). На самом деле достаточно доказать, что из 1) и 4) следует, что $|U| = |X| - 1$. Докажем это по индукции, взяв в качестве параметра индукции $m = |U|$.

1-й шаг. $m = 0$. Единственное дерево имеет вид, приведенный на рис. 7.23. Ясно, что для него $|X| = 1$, $|U| = 0$, а значит, $|U| = |X| - 1$.

Рис. 7.23

Индуктивный переход. Предположим, что соотношение $|U| = |X| - 1$ справедливо для любого дерева, у которого $|U| \leqslant m_0$. Докажем, что тогда оно справедливо и для дерева, у которого $|U| = m_0 + 1$. Удалим произвольную дугу u дерева, т. е. перейдем к графу G'_u. Так как 4) для G выполнено, то u — мост и G'_u состоит из двух компонент связности (теорема 7.10), каждая из которых — дерево с числом дуг, меньшим либо равным m_0. Тогда для каждой компоненты связности выполнено предположение индукции:

$$|U_1| \;=\; |X_1| - 1, \qquad |U_2| \;=\; |X_2| - 1.$$

Складывая последние равенства, получаем

$$\begin{aligned} \underbrace{|U_1| + |U_2|}_{=|U|-1} &= \underbrace{|X_1| + |X_2|}_{=|X|} - 2;\\ |U| - 1 &= |X| - 2;\\ |U| &= |X| - 1. \end{aligned}$$

Индуктивный переход доказан.

Докажем теперь, что из 2) следует 3). На самом деле достаточно доказать, что из 2) следует «G — связен». Доказывать это будем от противного, т. е. предположим, что существует граф G, который не содержит циклов и у которого $|U| = |X| - 1$, но G не является связным. Тогда он состоит по крайней мере из k ($k \geqslant 2$) компонент связности, каждая из которых не содержит циклов, а значит, является деревом. Переход $1 \Longrightarrow 2$ уже доказан, а следовательно, для каждой компоненты

$$|U_i| \;=\; |X_i| - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Суммируя по i, получаем

$$\sum_{i=1}^{k} |U_i| \;=\; \sum_{i=1}^{k} (|x_i| - 1) \quad \text{или} \quad |U| \;=\; |X| - k.$$

Это противоречит тому, что $|U| = |X| - 1$.

Докажем, что из 3) следует 4). Будем доказывать от противного, т. е. предположим, что существует граф G, который связен и у которого $|U| = |X| - 1$, но 4) для него не выполнено, т. е. не каждая дуга является мостом. Пусть $u_0 \in U$ не является мостом, тогда G'_{u_0} — связный граф, у которого число дуг равно $|X| - 2$, а это противоречит лемме 7.6.

Докажем, что из 4) следует 5). Доказывать будем от противного, т. е. предположим, что существует такой связный граф, у которого каждая дуга является мостом, но для которого 5) не выполнено. Так как на графе G условие 5) не выполнено, то на нем есть такие две вершины, которые можно соединить двумя простыми цепями — η_1 и η_2. Ясно, что $\eta_1 \cup \eta_2$ либо является простым циклом, либо содержит простой цикл. А дуги простого цикла не являются мостами. Получено противоречие с 4).

Докажем, что из 5) следует 6). Добавим к графу G дугу w, соединяющую y с x. На исходном графе по условию существует простая цепь η_{xy}, соединяющая x с y, тогда $\eta_{xy} \cup \{w\}$ — простой цикл. Докажем единственность образовавшегося простого цикла. Доказывать единственность будем от противного. Предположим, что существуют такие вершины x_0 и y_0 и добавленная дуга w_0, соединяющая y_0 с x_0, что на графе $G \cup \{w_0\}$ существует два простых цикла, проходящих через w_0: η_1 и η_2. Но тогда $\eta_1 \setminus \{w_0\}$ и $\eta_2 \setminus \{w_0\}$ — две простые цепи, соединяющие x_0 с y_0 на G, а это противоречит 5).

Докажем, что из 6) следует 1). Достаточно доказать, что из 6) следует — «G связен».

Докажем от противного, т. е. предположим, что существует несвязный граф, для которого выполнено 6). Возьмем на этом графе две вершины x_0 и y_0, лежащие в разных компонентах связности, и добавим к графу дугу w_0, их соединяющую. Ясно, что при этом не образуется простой цикл, а это противоречит 6). ◀

Следствие 7.1. *Если $G(X, U, f)$ — лес из k деревьев, то*

$$|U| = |X| - k.$$

Определение 7.27. *Вершина x графа $G(X, U, f)$ называется висячей, если* $\deg x = 1$.

Следствие 7.2. *Если $G(X, U, f)$ — дерево и $|X| \geqslant 2$, то на нем есть по крайней мере две висячие вершины.*

▶ Допустим противное, т. е. что существует дерево $G(X, U, f)$, у которого $|X| \geqslant 2$ и не более одной висячей вершины.

Представим X в виде $X = (X \setminus X_b) \cup X_b$, где X_b — множество висячих вершин. Обозначим $\delta = |X_b| \leqslant 1$. По теореме Эйлера (теорема 7.1) имеем

$$2|U| = \sum_{x \in X} \deg x = \sum_{x \in X \setminus X_b} \deg x + \sum_{x \in X_b} \deg x =$$

$$= \sum_{x \in X \setminus X_b} \deg x + \delta \geqslant \sum_{x \in X \setminus X_b} 2 + \delta = 2\,(|X| - \delta) + \delta =$$

$$= 2|X| - \delta.$$

Учтем, что $|U| = |X| - 1$, тогда

$$2\,(|X| - 1) \geqslant 2|X| - \delta \quad \text{или} \quad -2 \geqslant -\delta.$$

Последнее дает противоречие и при $\delta = 0$, и при $\delta = 1$. ◀

Вопросы и задания в конце параграфа

? **1.** Докажите самостоятельно следствие 7.1 к теореме о деревьях.

2. Диаметром связного графа называется самая длинная простая цепь. Докажите, что любые два диаметра графа имеют общую вершину.

3. Могут ли на дереве все вершины быть висячими? Сколько вершин у такого дерева?

4. Каково максимальное количество висячих вершин на дереве с $n\,(n \geqslant 3)$ вершинами? Оцените сверху $\deg x$ дерева с $n\,(n \geqslant 3)$ вершинами.

§ 7.6. Помеченные графы. Перечисление помеченных деревьев. Матрицы графов

Помеченные графы

Определение 7.28. *Граф с n вершинами называется помеченным, если его множество вершин $X = [1; n]_{\mathbb{N}}$.*

Определение 7.29. *Помеченные графы G_1 и G_2 с n вершинами называются изоморфными, если существует биективное отображение $\psi\colon U_1 \to U_2$ такое, что*

$$(p_i \circ f_2 \circ \psi)\,(u) \;=\; (p_i \circ f_1)\,(u) \quad \forall u \in U_1, \quad i = 1, 2.$$

Это определение похоже на определение изоморфизма графов (см. определение 7.5), отличие состоит в том, что изоморфизм графов реализуется парой биективных отображений $\varphi{:}X_1 \to X_2$, $\psi{:}U_1 \to U_2$, а здесь φ — тождественное отображение.

П **Пример 7.12**

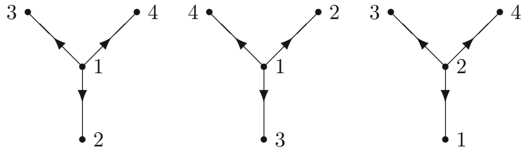


Рис. 7.24

Рассмотрим графы G_1, G_2, G_3, приведенные на рис. 7.24. G_1 изоморфен как помеченный графу G_2 и не изоморфен как помеченный графу G_3. Ясно, что в обычном смысле G_1, G_2, G_3 — изоморфны.

Перейдем теперь к решению одной комбинаторной задачи: «Сколько существует не изоморфных между собой неориентированных помеченных деревьев с n вершинами?»

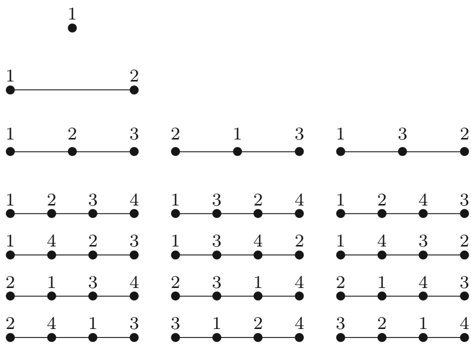
Обозначим число неизоморфных помеченных деревьев через $T(n)$. Ясно, что

$T(1) = 1$

$T(2) = 1$

$T(3) = 3$

$T(4) = 16$



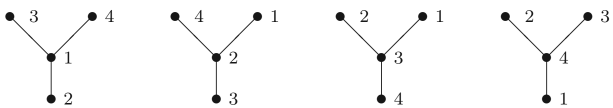


Рис. 7.25

Теорема 7.14 (**теорема Кэли**[3])

$$T(n) = n^{n-2}.$$

► Обозначим через $T(n,k)$ число неизоморфных помеченных деревьев с n вершинами, у которых $\deg 1 = k$. Тогда

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T(n,k).$$

Выведем формулу для нахождения $T(n,k)$. Для этого найдем соотношение, связывающее $T(n,k)$ и $T(n,k+1)$. Возьмем произвольное помеченное дерево A такое, что $\deg 1 = k$. Перестроим его в дерево B такое, у которого $\deg 1 = k+1$. Для этого удалим из A любую из $n-1-k$ дуг, не инцидентных вершине 1. Обозначим граничные вершины этой дуги x и y. При удалении дуги дерево A разваливается на два куска: один из них содержит вершину 1 и одну из $\{x; y\}$; а второй — оставшуюся из $\{x; y\}$ (см. рис. 7.26, левая часть).

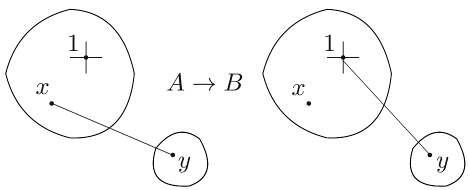


Рис. 7.26

[3]Артур Кэли (1821–1895) — английский математик. Его математические способности проявились уже в раннем возрасте. Окончил Тринити-колледж (Кембридж) в возрасте 17 лет. Занимался n-мерной геометрией и многомерным анализом. Основным источником существования А. Кэли с 1841 по 1863 г. являлась юридическая практика, однако ученый не оставлял занятий математикой и опубликовал за эти годы около 300 математических работ. С 1863 г. Кэли переходит на должность математика в Кембриджском университете, несмотря на заметную потерю в доходах.

Переход от дерева A к дереву B показан на правой части рис. 7.26, т. е. мы «пришиваем» отвалившуюся часть новой дугой, соединяющей 1 и «y». Пару полученных графов $(A; B)$ назовем связкой. Ясно, что одно дерево A порождает $n-1-k$ связок, тогда количество связок $(A; B)$ равно $(n-1-k)\cdot T(n,k)$.

Возьмем теперь произвольное дерево B, у которого $\deg 1 = k+1$. Подсчитаем, сколько связок $(A; B)$ порождает дерево B.

Удаление любой дуги u_i $(i = 1, 2, \ldots, k+1)$, инцидентной вершине 1, разваливает дерево B на две части, одна из которых содержит вершину 1, а другая — вторую инцидентную удаленной дуге вершину (обозначим ее x_i). «Отпавший лепесток» можно приклеить, соединив дугой вершину x_i с любой вершиной другого лепестка (см. рис. 7.27, правая часть).

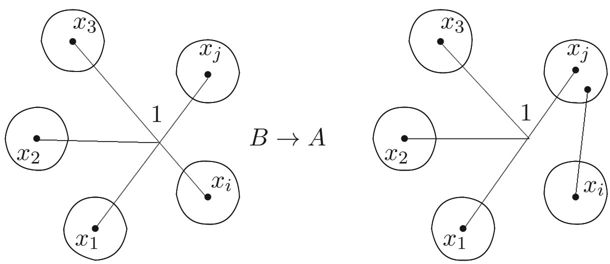


Рис. 7.27

Одна дуга u_i дает нам $(n-1-n_i)$ возможностей (n_i — число вершин на i-м лепестке). Тогда всего деревьев A, порождаемых B, будет

$$\sum_{i=1}^{k+1}(n-1-n_i) \;=\; (n-1)(k+1)-\sum_{i=1}^{k+1} n_i \;=$$
$$= (n-1)(k+1)-(n-1) \;=\; (n-1)k.$$

Таким образом, одно дерево B порождает $(n-1)k$ связок $(A;B)$. Тогда количество связок $(A;B)$ равно $(n-1)\cdot k\cdot T(n,k+1)$. Приравнивая дважды вычисленное количество связок $(A;B)$, получаем

$$(n-1-k)T(n,k) \;=\; (n-1)kT(n,k+1). \qquad (7.6)$$

Выпишем теперь серию соотношений типа (7.6):

$$\begin{array}{lcl}(n-1-k)T(n,k) &=& (n-1)kT(n,k+1).\\ (n-1-k-1)T(n,k+1) &=& (n-1)(k+1)T(n,k+2).\\ & \dots & \\ 1\cdot T(n,n-2) &=& (n-1)(n-2)T(n,n-1).\end{array}$$

Перемножая их и сокращая на общие множители, получаем

$$T(n,k)\cdot(n-1-k)! \;=\; (n-1)^{(n-1-k)}\cdot\frac{(n-2)!}{(k-1)!}\cdot\underbrace{T(n,n-1)}_{=1}.$$

Окончательно

$$T(n,k) \;=\; C_{n-2}^{k-1}(n-1)^{(n-1-k)}.$$

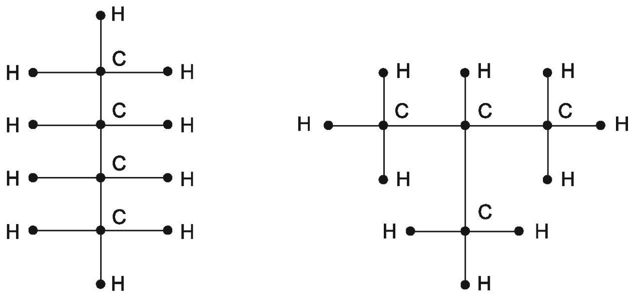
Тогда

$$T(n)=\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1}(n-1)^{(n-1-k)}=\sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^{i}(n-1)^{(n-2-i)} =$$

$$=\sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^{i}(1)^{i}(n-1)^{(n-2-i)} \overset{\text{ф-ла бинома}}{=}$$

$$= (1+(n-1))^{(n-2)} \;=\; n^{(n-2)}. \qquad ◀$$

Свои результаты по перечислению деревьев А. Кэли успешно применил в химии для определения количества химических изомеров углеводородов — C_nH_{2n+2}. Структурные формулы молекул таких соединений (вершины — атомы, дуги — валентные связи) представляют собой деревья. Структурные формулы двух таких изомеров — бутана и изобутана — приведены на рис. 7.28.



бутан изобутан

Рис. 7.28

Методы теории графов в XX в. нашли широкое приложение в химии (см., например, Химические приложения топологии и теории графов: пер. с англ. / под ред. Р. Кинга. — М. : Мир, 1987).

Важным для приложений классом ориентированных деревьев являются корневые, или растущие, деревья, т. е. такие, у которых существует вершина, называемая корнем, из которой существуют простые пути во все остальные вершины (в силу общих свойств деревьев путь из корня в каждую вершину — единственный). Вершины корневого дерева, отличные от корня и висячих, называют *промежуточными*. Такие структуры принято использовать для организации систем хранения информации, в частности, таковыми являются компьютерные файловые системы. Корневое дерево файловой системы обычно называют *деревом директорий*, в котором корень — корневая директория, промежуточные вершины — поддиректории, а висячие вершины — отдельные файлы или пустые поддиректории.

Матрицы графов

Во многих задачах теории графов (особенно решаемых на ЭВМ) графы удобно описывать матрицами. Пусть $G(X, U, f)$ — помеченный конечный граф с n вершинами и m дугами (дуги тоже занумерованы). Матрицей смежности графа G называется матрица $A(G)$ размера $n \times n$, определенная следующим:

$$(A(G))_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существует дуга из } i\text{-й вершины в } j\text{-ю;} \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Матрицей инцидентности графа называется матрица $B(G)$ размера $n \times m$, определяемая следующим:

$$(B(G))_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я дуга заканчивается в } i\text{-й вершине;} \\ -1, & \text{если } j\text{-я дуга начинается в } i\text{-й вершине;} \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

В случае неориентированного графа матрица инцидентности $B(G)$ определяется следующим:

$$(B(G))_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я дуга инцидентна } i\text{-й вершине;} \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 7.15. *Двоичный ранг (т. е. вычисленный в арифметике по mod 2:* $0 \dot{+} 0 = 0$, $0 \dot{+} 1 = 1$, $1 \dot{+} 1 = 0$) *матрицы* $B(G)$ *конечного неориентированного графа равен* $|X| - c(G)$.

► Если выбрать покомпонентную нумерацию вершин и дуг, то матрица $B(G)$ имеет блочную структуру — блоки соответствуют компонентам. Ранг такой матрицы равен сумме рангов блоков. Для доказательства теоремы осталось доказать, что в случае связного графа двоичный ранг равен $|X| - 1$. Если к последней строке матрицы прибавить все остальные строки, мы получим нулевую строку (двоичная арифметика), значит,

$$\operatorname{drang} B(G) \leqslant |X| - 1. \tag{7.7}$$

У любого связного графа существует частичный граф, являющийся деревом (покрывающее дерево). Тогда

$$\operatorname{drang} B(G) \geqslant \operatorname{drang} B(\text{покр. дерева}). \tag{7.8}$$

Покажем, что

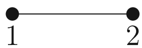
$$\operatorname{drang} B(G) = |X| - 1, \tag{7.9}$$

если G — дерево.

Последнее равенство будем доказывать по индукции, взяв в качестве параметра индукции $m = |U|$.

1-й шаг $m = 1$.

$G:$



$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \operatorname{drang} B(G) = 1 = 2 - 1 = |X| - 1,$$

так как $|X| = 2$.

Индуктивный переход. Предположим, утверждение справедливо для любого дерева с m дугами.

Докажем, что оно справедливо и для дерева, у которого $|U| = m + 1$. Мы знаем, что на таком дереве есть висячая вершина (следствие 7.2 теоремы 7.13). Будем считать, что она имеет последний номер и инцидентная ей дуга имеет последний номер. Тогда матрица $B(G)$ имеет следующую структуру:

$$B(G) = \left(\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & B\left(G'_{U_{m+1}}\right) & 1 \\ & & 0 \\ 0\,0 & \dots & 0\,1 \end{array}\right).$$

Но тогда

$$\operatorname{drang} B(G) = \operatorname{drang} B\left(G'_{U_{m+1}}\right) + 1.$$

Граф $G'_{U_{m+1}}$ — дерево с m дугами, полученное из дерева G удалением висячей вершины и инцидентной ей дуги.

Для него выполнено предположение индукции
$$\operatorname{drang} B\left(G'_{U_{m+1}}\right) = (|X| - 1) - 1,$$
тогда
$$\operatorname{drang} B(G) = |X| - 1 - 1 + 1 = |X| - 1.$$
Индуктивный переход доказан. Из (7.7), (7.8) и (7.9) получаем, что если G — связный граф, то
$$\operatorname{drang} B(G) = |X| - 1,$$
а это завершает доказательство всей теоремы. ◀

§ 7.7. Взвешенные графы. Задача о кратчайшем соединении. Кратчайшие пути

Завершая эту главу и весь курс, рассмотрим взвешенные графы, т. е. такие, у которых дугам поставлены в соответствие вещественные (как правило, неотрицательные) числа, называемые весами. В качестве весов могут выступать длины дуг, пропускная способность, стоимость эксплуатации и т. п.

Задача о кратчайшем соединении

Известны точки, в которых будут расположены населенные пункты (города), и известны трассы дорог, которые можно построить, а также стоимость их строительства.

На рис. 7.29 указаны населенные пункты A, B, C, D, F; арабские цифры около проектируемых участков дорог — стоимость их строительства; римские цифры — номера дуг. Требуется определить, какие из дорог следует построить, чтобы полученная схема дорог позволяла попасть из любого города в любой и из всех возможных схем имела наименьшую стоимость строительства.

Ясно, что сформулированная задача может быть формализована с помощью теории графов.

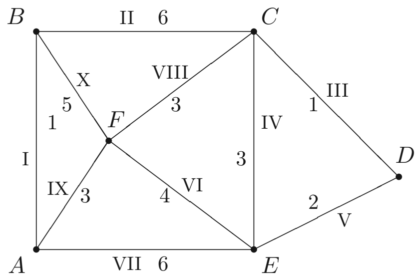


Рис. 7.29

Определение 7.30. *Взвешенным графом (графом с весами на дугах) будем называть четверку* $G(X, U, f, \rho)$, *где* $G(X, U, f)$ *— граф,* $\rho\colon U \to (0, +\infty)$.

Отображение ρ *называется весовым отображением. Если* $u \in U$, *то* $\rho(u)$ *называют весом дуги* u. *Если* $\{u_i\}_{i=1}^n$ *— путь или цепь на графе* G, *то ее весом называют величину*

$$\rho\left(\{u_i\}_{i=1}^n\right) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^n \rho(u_i).$$

Весом графа $G(X, U, f, \rho)$ *называют величину*

$$\rho(G) \stackrel{def}{=} \sum_{u \in U} \rho(u).$$

Аналогично определяется вес подграфа и частичного графа.

Сформулируем задачу о соединении городов на языке теории графов.

Дан конечный связный взвешенный граф $G(X, U, f, \rho)$. Требуется найти связный частичный граф минимального веса.

Определение 7.31. *Покрывающим деревом связного графа называется его частичный граф, который является деревом. Если G не является связным графом, то говорят о покрывающем лесе, т. е. о деревьях, покрывающих его компоненты связности.*

Теорема 7.16. *Решение задачи о соединении городов — покрывающее дерево.*

► Предположим противное, т. е. что решение задачи — $G\left(X, U', f\big|_{U'},\ \rho\big|_{U'}\right)$ не является деревом. Тогда на нем, по основной теореме о деревьях, существует хотя бы одна дуга, которая не является мостом. Обозначим ее u_0. Рассмотрим граф $G\left(X, U' \setminus \{u_0\}, f\big|_{U'\setminus\{u_0\}}, \rho\big|_{U'\setminus\{u_0\}}\right)$. Очевидно, он связен и

$$\rho\left(G\left(X, U' \setminus \{u_0\}, f\Big|_{U'\setminus\{u_0\}}\right)\right) =$$
$$= \rho\left(G\left(X, U', f\Big|_{U'}, \rho\big|_{U'\setminus\{u_0\}}\right)\right) - \rho(u_0) <$$
$$< \rho\left(G\left(X, U', f\Big|_{U'}, \rho\big|_{U'}\right)\right).$$

Последнее противоречит тому, что $G\left(X, U', f\big|_{U'}, \rho\big|_{U'}\right)$ является решением задачи о соединении городов. ◄

Теорема 7.17 (**алгоритм Краскала**[4])

Последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{|X|-1}$ *дуг покрывающего дерева минимального веса может быть найдена с помощью следующего алгоритма:*

1) u_1 *— дуга минимального веса из множества* U, *не являющаяся петлей;*

2) *если уже определен начальный отрезок последовательности* $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$, *то дуга* u_k *выбирается из множества* $U \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$ *так, что выполнено два условия:*

а) *добавление дуги* u_k *к* $\{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$ *не приводит к образованию циклов;*

б) *из дуг, удовлетворяющих условию а), дуга* u_k *обладает наименьшим весом.*

► Ясно, что последовательность, построенная по алгоритму, определяет покрывающее дерево. Очевидно, что $\rho(u_1) \leqslant \rho(u_2) \leqslant \ldots \leqslant \rho\left(u_{|X|-1}\right)$. Это дерево обозначим T_{K_p}. Покажем, что T_{K_p} является решением задачи о соединении городов. Предположим противное, т. е. что существует другое покрывающее дерево $T = G\left(X, V, f\big|_V, \rho\big|_V\right)$, при этом

$$\rho(T) < \rho\left(T_{K_p}\right). \tag{7.10}$$

Упорядочим последовательность дуг дерева T так, что $V = \{v_i\}_{i=1}^{|X|-1}$ и $\rho(v_1) \leqslant \rho(v_2) \leqslant \ldots \leqslant \rho\left(v_{|X|-1}\right)$.

[4]Джозеф Бернард Краскал (1928–2010). Родился в Нью-Йорке, окончил университет г. Чикаго, в 1954 г. получил степень доктора философии в Принстонском университете. Преподавал в Принстоне и университетах штатов Висконсин и Мичиган. С 1959 г. — научный сотрудник *Bell Laboratories*. Изложенный в этой книге алгоритм был предложен Краскалом еще на 2-м курсе университета.

Ясно, что $\{u_i\}_{i=1}^{|X|-1} \neq \{v_i\}_{i=1}^{|X|-1}$. Обозначим через k такой индекс, что $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_{k-1} = v_{k-1}, u_k \neq v_k$. Тогда $\rho(u_k) \leqslant \rho(v_k)$, так как v_k по отношению к $\{u_i\}_{i=1}^{k-1}$ удовлетворяет подпункту а) пункта 2) алгоритма Краскала. Добавим к дереву T дугу u_k. По основной теореме о деревьях это привело к образованию единственного простого цикла, содержащего дугу u_k. Очевидно, этот простой цикл содержит хотя бы одну дугу v_j, $j > k$. Мы имеем $\rho(u_k) \leqslant \rho(v_k) \leqslant \rho(v_j)$. Разорвем этот цикл, удалив дугу v_j. Полученное дерево обозначим T_1. Занумеруем его последовательность дуг $\{v_i^1\}_{i=1}^{|X|-1}$ так, что $\rho(v_1^1) \leqslant \rho(v_2^1) \leqslant \dots \leqslant \rho(v_{|X|-1}^1)$. Ясно, что

$$\rho(T_1) \leqslant \rho(T). \tag{7.11}$$

Возможны два случая:

1. $\{u_i\}_{i=1}^{|X|-1} = \{v_i^1\}_{i=1}^{|X|-1}$. Тогда $T_1 = T_{K_p}$ и мы имеем

$$\rho\left(T_{K_p}\right) \leqslant \rho(T). \tag{7.12}$$

Последнее противоречит (7.10).

2. $\{u_i\}_{i=1}^{|X|-1} \neq \{v_i^1\}_{i=1}^{|X|-1}$. Обозначим через $k1$ такой индекс, для которого

$$u_1 = v_1^1,\ u_2 = v_2^1,\ \dots\ u_{k1-1} = v_{k1-1}^1,\ u_{k1} \neq v_{k1}^1.$$

Из построения T_1 следует, что $k1 > k$. Тогда, применяя рассуждения, приведенные для пары T_{K_p}, T, к паре T_{K_p}, T_1, мы получим граф T_2 $(k2 > k1)$, для которого опять возможны два случая: 1), 2). Но случай 1) приводит к противоречию, а случай 2) приведет к графу T_3 и $k3 > k2$. Ясно, что мы можем лишь конечное число раз выходить на случай 2), так как $k1 < k2 < \dots < |X| - 1$, а выход на случай 1) приводит к тому, что на каком-то из шагов возникнет ситуация $T_1 = T_{K_p}$ и мы получим

$$\rho\left(T_{K_p}\right) = \rho(T_1) \leqslant \rho(T_2) \leqslant \cdots \leqslant \rho(T),$$

а это противоречит (7.10). ◄

П **Пример 7.13.** Применим алгоритм Краскала к графу, приведенному на рис. 7.29, — схеме дорог. На первом шаге выбирается дуга u_1 = III, затем u_2 = I, u_3 = V (далее отпадает возможность выбора дуги IV), u_4 = VIII (далее отпадает возможность выбора дуги VI), u_5 = IX (далее отпадает возможность выбора дуг II, X, VII). Процесс выбора дуг автоматически оборвался. Покрывающее дерево минимального веса приведено на рис. 7.30. Пунктиром обозначены дуги, не вошедшие в это дерево. $\rho\left(T_{K_p}\right) = 10$.

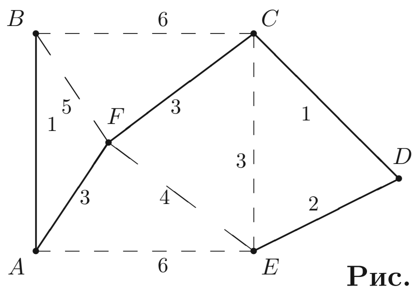


Рис. 7.30

Задача о кратчайших путях

Пусть дан граф с неотрицательными весами на дугах. Нас будут интересовать две задачи:

1) какова длина кратчайшего пути, ведущего из одной выделенной вершины к другой? Каков этот путь?
2) каковы длины кратчайших путей от выделенной вершины до всех остальных вершин графа? Каковы эти пути?

Задачи 1) и 2) очень похожи, и решение задачи 1) получается в результате прерывания в нужном месте решения задачи 2).

Приведенный ниже алгоритм Дейкстры[5] — один из первых известных динамических алгоритмов — основан на двух идеях:

- присвоении вершинам графа меток и правиле пересчета меток, при этом окончательные метки — длины кратчайших путей;

- экстремальном свойстве кратчайшего пути, состоящем в следующем: если кратчайший путь из вершины x в вершину y проходит через вершину z, то его отрезок от вершины x до вершины z — кратчайший путь от x до z, а его отрезок от z до y — кратчайший путь от z до y.

Опишем шаги алгоритма Дейкстры нахождения длин кратчайших путей из вершины s до всех вершин графа.

0^0. Начальная установка меток и массивов (метку вершины будем обозначать $m(x)$:)

$$m(s) := 0, \quad m(x) := \infty \quad \text{для всех } x \neq s;$$
$$S : \{s\}, \quad T := X \setminus S.$$

[5]Эдсгер Вибе Дейкстра (1930–2002) родился в Нидерландах. Программированием начал заниматься в 1950 г., когда учился на отделении теоретической физики Лейденского университета. Лицензию программиста получил в 1957 г. Э. Дейкстра — один из основоположников программирования как учебной дисциплины, включающей алгоритмические языки, структурное программирование, алгоритмизацию. С 1984 г. возглавлял отделение программирования в университете штата Техас.

1^0. Правило пересчета меток и изменения массивов. Пересчитываются только метки вершин $t \in T$, для которых существуют дуги, ведущие из множества S:

$$m(t) := \min_{y \in S} \left(m(t), m(y) + \rho\left(u_{yt}\right) \right), \tag{7.13}$$

где u_{yt} — дуга из вершины y в вершину t.

2^0. Из вершин, метки которых пересчитались, выбрать вершину t, имеющую наименьшую метку

$$S' := S \cup \{t\}, \quad T' := X \setminus S'.$$

3^0. Правило выхода из алгоритма. Если $S' = S$, то переход на 4^0, иначе $S := S'$, $T := T'$ и переход на 1^0.

4^0. $m(x)$ — длина кратчайшего пути из вершины s в вершину x, если $m(x) = \infty$, то пути из вершины s в вершину x на графе не существует.

Восстановление кратчайшего пути

Кратчайший путь от вершины s к вершине t восстанавливается по известным меткам вершин, полученным с помощью алгоритма Дейкстры, пошагово от вершины t до возврата в вершину s. Восстановление основано на экстремальном свойстве кратчайшего пути. Опишем один шаг возвращения.

Для вершины t среди вершин $y \in f^{-1}(X \times \{t\})$ найти такую, для которой выполнено условие

$$m(t) = m(y) + \rho\left(u_{yt}\right). \tag{7.14}$$

Условие (7.14) восстанавливает последнюю дугу кратчайшего пути: $y \xrightarrow{u_{yt}} t$. После чего выполняется шаг возвращения от вершины y и т. д.

П **Пример 7.14.** Для графа, приведенного на рис. 7.31, найти длины кратчайших путей от вершины x_1 ко всем остальным и восстановить кратчайший путь от x_1 к x_7 (числа около дуг – их веса).

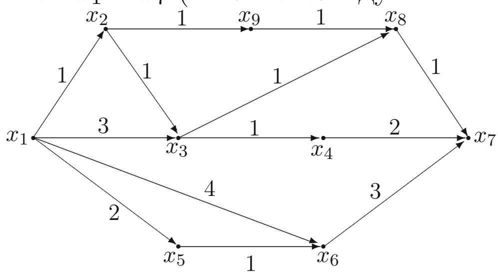


Рис. 7.31

► Решение задачи сведем в табл. 7.1 (окончательные метки обведены квадратом).

Проведем восстановление пути из x_1 в x_7. Ясно, что

$$\begin{aligned} m(x_7) &= m(x_8) + \rho\left(u_{x_8x_7}\right), \\ m(x_8) &= m(x_9) + \rho\left(u_{x_9x_8}\right), \\ m(x_9) &= m(x_2) + \rho\left(u_{x_2x_9}\right), \\ m(x_2) &= m(x_1) + \rho\left(u_{x_1x_2}\right). \end{aligned}$$

Табл. 7.1

№ шага пересчета меток	Метки вершин								
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	$\boxed{1}$	3	∞	$\boxed{2}$	4	∞	∞	∞
2	0	1	$\boxed{2}$	4	2	$\boxed{3}$	7	4	$\boxed{2}$
3	0	1	2	$\boxed{3}$	2	3	6	$\boxed{3}$	2
4	0	1	2	3	2	3	$\boxed{4}$	3	2
5	0	1	2	3	2	3	4	3	2

Таким образом, кратчайший путь из x_1 в x_7 имеет длину 4 и трассу $x_1 \xrightarrow{1} x_2 \xrightarrow{1} x_9 \xrightarrow{1} x_8 \xrightarrow{1} x_7$. ◄

Следует отметить высокую эффективность алгоритма Дейкстры и его широкую применимость в окружающем нас мире. Бортовые компьютеры современных автомобилей позволяют находить трассу кратчайшего пути, и делают это они с помощью алгоритма Дейкстры. Маршрутизаторы, являющиеся важнейшими элементами глобальной компьютерной сети Интернет, определяя маршрут доставки сообщения с одного сервера на другой, используют алгоритм Дейкстры.

Таким образом, графы и алгоритмы на графах все более и более (незаметно для нас самих) входят в нашу жизнь и становятся такими же привычными ее элементами, как электричество, радио и телевидение.

Замечания и вопросы в конце параграфа

? !

1. Если граф не связен, то алгоритм Краскала дает минимальный покрывающий лес.

2. Если граф не взвешен, то, присваивая всем дугам веса, равные 1, мы можем применить алгоритм Краскала для нахождения покрывающего дерева (леса).

3. Доказанная теорема о двоичном ранге (т. е. в арифметике $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$) матрицы $B(G)$ конечного неориентированного графа позволяет предложить матричный вариант реализации алгоритма Краскала.

4. Кратчайший путь из вершины x в вершину y на графе может быть не единственным.

5. Приведите пример такого графа и таких вершин x и y на нем, для которых существует несколько кратчайших путей из x в y.

6. Предложите модернизацию алгоритма Дейкстры, позволяющую находить все кратчайшие пути из одной вершины в другую.

7. Как модернизировать алгоритм Дейкстры, чтобы можно было находить все пути из одной вершины в другую в порядке убывания их длин?

§ 7.8. Пространства циклов и разрезов. Потоки в сетях

В этом параграфе будут изучены два векторных пространства, порожденных графами: пространство вектор-циклов и пространство разрезов графа. Мы вычислим их размерности и построим базисы этих пространств. Рассмотрение будем вести на орграфах. Аналогичные результаты справедливы и для неориентированных графов в арифметике по модулю 2 (т. е. в пространстве $\mathbb{Z}_2^m$, а не $\mathbb{Z}^m$).

Пространство циклов

Рассмотрим конечный ориентированный граф $G(X,U,f)$, занумеруем его дуги — $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. С каждым циклом η на графе G свяжем вектор $\vec{\eta} \in \mathbb{Z}^m$, определив его i–ю координату $\langle\vec{\eta}\rangle_i$ следующим равенством:

$\langle\vec{\eta}\rangle_i =$ «количество прохождений цикла η по дуге u_i
в направлении ее ориентации» $-$
«количество прохождений цикла η по дуге u_i
в направлении, противоположном ее ориентации».

П **Пример 7.15.** Рассмотрим на графе G (рис. 7.32) циклы η_1, η_2, η_3, η_4, заданные табл. 7.2. Их векторы равны соответственно:

$$\vec{\eta}_1 = (2, -2, 2, -2, 0, 1, 0, -1, 1);$$
$$\vec{\eta}_2 = (1, -1, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0);$$
$$\vec{\eta}_3 = (0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 1, -1);$$
$$\vec{\eta}_4 = (1, -1, 1, 0, -1, 0, -1, -1, 1).$$

Табл. 7.2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
η_1	u_1	u_3	u_4	u_5	u_6	u_8	u_9	u_5	u_2	u_1	u_3	u_4	u_2
η_2	u_1	u_3	u_4	u_2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
η_3	u_9	u_8	u_6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
η_4	u_1	u_3	u_7	u_8	u_9	u_5	u_2	—	—	—	—	—	—

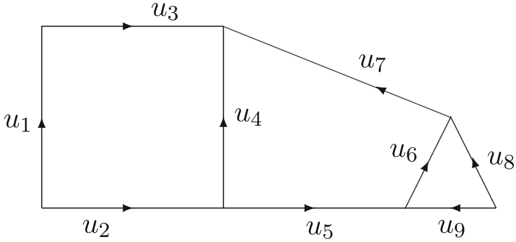


Рис. 7.32

Определение 7.32. *Векторы, соответствующие циклам графа, называют вектор-циклами, а линейное пространство, представляющее собой линейную оболочку вектор-циклов в $\mathbb{Z}^m$, называют пространством вектор-циклов графа. Циклы, векторы которых линейно независимы, называют линейно независимыми циклами.*

Ясно, что в примере 7.15 циклы η_1, η_2, η_3 не являются линейно независимыми, циклы η_1, η_2, η_4 линейно независимы.

Размерность пространства вектор-циклов графа G обозначают $\nu(G)$ и называют *цикломатическим числом* графа G.

Теорема 7.18. *Для любого конечного графа без петель имеет место равенство*

$$\nu(G) = m - n + p, \tag{7.15}$$

где $m = |U|$, $n = |X|$, $p = c(G)$.

► Образуем последовательность графов $G_0, G_1, G_2, \ldots, G_m = G$, положив $G_0 = G\left(X, \varnothing, f|_{\varnothing}\right)$, $G_i = \left(X, U_i, f|_{U_i}\right)$, где $U_i = \{u_1, u_2, \ldots, u_i\}$. Докажем справедливость (7.15) индукцией по этой последовательности графов.

Ясно, что (7.15) справедливо для G_0. Действительно, $\nu(G_0) = 0$, так как на G_0 нет циклов, правая часть (7.15) тоже равна 0. Действительно, $m_0 - n_0 + p_0 = 0 - n + n = 0$.

Допустим, что утверждение теоремы справедливо для графа G_i, покажем, что тогда оно справедливо и для графа G_{i+1}. Зафиксируем на графе G_i базисный набор циклов $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\nu(G_i)}$.

Переход от графа G_i к G_{i+1} состоит в добавлении дуги u_{i+1}. При этом возможны два случая:

а) добавленная дуга соединяет вершины x и y, лежащие в разных компонентах связности графа G_i;

б) добавленная дуга соединяет вершины x и y, лежащие в одной компоненте связности графа G_i.

В случае а) мы имеем $m_{i+1} = m_i + 1$, $n_{i+1} = n_i = n$, $p_{i+1} = p_i - 1$. Из этих равенств следует, что в случае а) при переходе к графу G_{i+1} значение правой части в формуле (7.15) не изменилось и для доказательства справедливости утверждения теоремы для G_{i+1} нам достаточно показать, что набор $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\nu(G_i)}$ остался базисным и на графе G_{i+1}. Циклы графа G_{i+1} разобъем на два типа: «старые» и «новые». «Старые» — это те циклы, которые являются циклами и на графе G_i, а «новые» — это те, которые являются циклами на графе G_{i+1} и не являются циклами на графе G_i. Если η — «старый» цикл, то его вектор $\vec{\eta}$ разлагается в линейную комбинацию векторов $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_{\nu(G_i)}$ (в силу их базисности на G_i). Пусть η — произвольный «новый» цикл. Значит, он проходит через дугу u_{i+1}, и тогда у него есть части, лежащие в компоненте связности графа G_i, содержащей вершину x, и части, лежащие в компоненте связности графа G_i, содержащей вершину y (см. рис. 7.33).

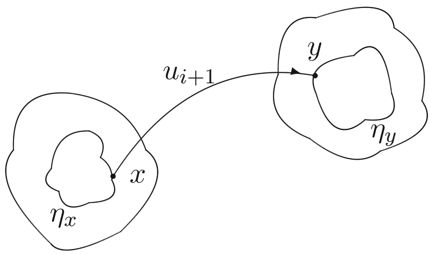


Рис. 7.33

Отправим в обход по циклу η от произвольной его вершины на компоненте вершины x двух путешественников $\boldsymbol{Я}$ и $\boldsymbol{Я}_x$ и поместим в вершине y третьего путешественника $\boldsymbol{Я}_y$. Путешественнику $\boldsymbol{Я}_x$ разрешено находиться только в компоненте вершины x, путешественнику $\boldsymbol{Я}_y$ — только на компоненте вершины y. В их обязанность входит сопровождение $\boldsymbol{Я}$ в его путешествии по циклу η на соответствующей компоненте.

Двигаясь от начальной вершины, $\boldsymbol{Я}$ вместе с $\boldsymbol{Я}_x$ обязательно попадет в вершину x. Оставив $\boldsymbol{Я}_x$ в вершине x, путешественник $\boldsymbol{Я}$, пройдя по дуге u_{i+1}, попадет в вершину y. В этой вершине он захватит с собой $\boldsymbol{Я}_y$ и продолжит свой путь по циклу η на компоненте вершины y. Поскольку обход цикла y был начат в компоненте вершины x, он не может быть завершен в компоненте вершины y. Двигаясь по циклу η, путешественник обязан вернуться в компоненту вершины x, оставив $\boldsymbol{Я}_y$ в вершине y и пройдя по дуге u_{i+1} в противоположном направлении. Оказавшись в вершине x, $\boldsymbol{Я}$ захватывает с собой $\boldsymbol{Я}_x$ (оставленного ранее в этой вершине) и продолжает путешествие по циклу η. Ясно, что $\boldsymbol{Я}_x$ пройдет совместно с $\boldsymbol{Я}$ на компоненте вершины x цикл η_x, $\boldsymbol{Я}_y$ — на компоненте вершины y цикл η_y. При этом

$$\vec{\eta} = \vec{\eta}_x + \vec{\eta}_y. \tag{7.16}$$

Сомнения в справедливости равенства (7.16) могут быть только в $i+1$-й координате, но у векторов $\vec{\eta}_x$ и $\vec{\eta}_y$ $\langle \vec{\eta}_x \rangle_{i+1} = \langle \vec{\eta}_y \rangle_{i+1} = 0$, так как они не проходят через дугу u_{i+1}, а $\langle \vec{\eta}\ \rangle_{i+1} = 0$, так как после каждого прохода по дуге u_{i+1} от вершины x к y цикл η (через какое-то число шагов) проходит по u_{i+1} от y к x.

Циклы η_x и η_y — «старые», значит, их векторы разлагаются по векторам $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_{\nu(G_i)}$. Тогда из равенства (7.16) следует, что и вектор $\vec{\eta}$ разлагается по векторам $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_{\nu(G_1)}$.

Таким образом, индуктивный переход в случае а) доказан.

Рассмотрим теперь случай б). В этом случае мы имеем $m_{i+1} = m_i + 1$, $n_{i+1} = n_i = n$, $p_{i+1} = p_i$. Из этих равенств следует, что при переходе от G_i к G_{i+1} значение правой части в формуле (7.16) увеличилось на единицу. Справедливость утверждения теоремы при индуктивном переходе будет доказана, если мы покажем, что базис пространства вектор-циклов графа G_{i+1} может быть получен добавлением к векторам $\vec{\eta}_1$, $\vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_{\nu(G_i)}$ одного вектор-цикла.

На графе G_i вершины x и y лежат в одной компоненте связности, поэтому существует простая цепь η_{xy}, их соединяющая. Добавленная дуга u_{i+1} замыкает эту цепь в простой цикл (см. рис. 7.34).

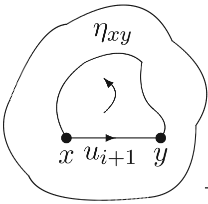


Рис. 7.34

Зафиксируем на полученном цикле такой обход, при котором по дуге u_{i+1} цикл проходит в направлении ее ориентации. Обозначим этот цикл $\eta_{\nu(G)+1}$. (Заметим, что в этом случае $\nu(G_{i+1}) = \nu(G_i) + 1$.) Ясно, что набор векторов $\vec{\eta}_1$, $\vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_{\nu(G_i)+1}$ линейно независим. Это следует из того, что векторы $\vec{\eta}_1, \ldots, \vec{\eta}_{\nu(G_i)}$ линейно независимы и $\langle\vec{\eta}_1\rangle_{i+1} = \langle\vec{\eta}_2\rangle_{i+1} = \cdots = \langle\vec{\eta}_{\nu(G_i)}\rangle_{i+1} = 0$, $\langle\vec{\eta}_{\nu(G_i)+1}\rangle_{i+1} = 1$.

Для завершения доказательства нам осталось показать, что вектор любого цикла графа G_{i+1} является линейной комбинацией этих векторов. Возьмем произвольный цикл η на графе G_{i+1}. Если этот цикл «старый», то он может быть представлен как линейная комбинация векторов $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ , \vec{\eta}_{\nu(G_i)}$, а значит, и векторов $\vec{\eta}_1, \ldots, \vec{\eta}_{\nu(G_i)}$, $\vec{\eta}_{\nu(G_i)+1}$. Для этого достаточно добавить в линейную комбинацию слагаемое $0 \cdot \vec{\eta}_{\nu(G_i)+1}$. Рассмотрим теперь случай, когда η — «новый» цикл. Это означает, что он проходит (какое-то число раз) через дугу u_{i+1}.

Перестроим его в цикл η' следующим образом. После каждого прохождения цикла η по дуге u_{i+1} по ее ориентации совершаем по η' дополнительный виток по циклу $\eta_{\nu(G_i)+1}$ в направлении, противоположном зафиксированному на нем обходу (считая начальной и конечной вершиной вершину y), а после каждого прохождения цикла η по дуге u_{i+1} в направлении, противоположном ее ориентации, совершаем один дополнительный виток по циклу $\eta_{\nu(G_i)+1}$ в направлении зафиксированного на нем обхода (считая начальной и конечной вершиной вершину x). Ясно, что имеет место равенство

$$\begin{aligned}\vec{\eta'} = \vec{\eta} - {}& \text{«число проходов цикла } \eta \text{ по дуге } u_{i+1} \text{ по ее}\\ &\text{ориентации»} \cdot \vec{\eta}_{\nu(G_i)+1} + \text{«число проходов цикла } \eta\\ &\text{по дуге } u_{i+1} \text{ против ее ориентации»} \cdot \vec{\eta}_{\nu(G_i)+1} =\\ = \vec{\eta} - {}&\langle\vec{\eta}\rangle_{i+1} \cdot \vec{\eta}_{\nu(G_i)+1}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Перестроим теперь цикл η в цикл η'' следующим образом. Заменим каждое прохождение цикла η по дуге u_{i+1} в направлении ее ориентации проходом по цепи η_{xy} в направлении от x к y, а каждое прохождение цикла η по дуге u_{i+1} в направлении, противоположном ее ориентации, проходом по цепи η_{xy} в направлении от y к x. Ясно, что

$$\vec{\eta'} = \vec{\eta''}. \tag{7.18}$$

Сомнение в равенстве (7.18) может вызвать только $(i+1)$-я координата, но $\langle\vec{\eta'}\rangle_{i+1} = 0$ (это следует из равенства (7.17)), а $\langle\vec{\eta''}\rangle_{i+1} = 0$, так как η'' — «старый» цикл.

Так как η'' — «старый» цикл, то по предположению индукции

$$\vec{\eta''} = \sum_{i=1}^{\nu(G_i)} \alpha_i \vec{\eta}_i. \tag{7.19}$$

Из (7.17) и (7.19) получаем, что

$$\vec{\eta} = \vec{\eta}' + \langle \vec{\eta}\ \rangle_{i+1} \vec{\eta}_{\nu(G_i)+1} = \sum_{i=1}^{\nu(G_i)} \alpha_i \vec{\eta}_i + \langle \vec{\eta}\ \rangle_{i+1} \vec{\eta}_{\nu(G_i)+1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\nu(G_i)+1} \alpha_i \vec{\eta}_i = \sum_{i=1}^{\nu(G_{i+1})} \alpha_i \vec{\eta}_i.$$

Индуктивный переход доказан и в этом случае. ◀

Перейдем теперь к построению базиса пространства вектор-циклов графа. Для этого преобразуем правую часть (7.15):

$$\nu(G) = |U| - |X| + c(G) = |U| - (|X| - c(G)).$$

Выражение в скобках, как это следует из основной теоремы о деревьях (теорема 7.13), — число дуг покрывающего леса графа (т. е. такого частичного графа, который является лесом). Значит, $\nu(G)$ равно количеству дуг графа, не вошедших в покрывающий лес. На этом простом наблюдении и основан алгоритм построения базиса пространства вектор-циклов. Опишем шаги алгоритма построения базиса пространства вектор-циклов.

1. Построить (с помощью, например, алгоритма Краскала) покрывающий лес графа G — $F(G)$. Определить множество дуг, вошедших в $F(G)$ — $U_{F(G)}$.

2. Добавляя к лесу $F(G)$ поочередно по одной из дуг u множества $U \setminus U_{F(G)}$, найти на графе $F(G) \cup \{u\}$ единственный простой цикл $\eta_{\{u\}}$ (на основании основной теоремы о деревьях (теорема 7.13) таковой существует).

Ясно, что множество векторов $\{\vec{\eta}_{\{u\}}\}$, $u \in U \setminus U_{F(G)}$ и есть базис пространства вектор-циклов. Их количество равно $\left|U \setminus U_{F(G)}\right| = |U| - \left|U_{F(G)}\right| = |U| - (|X| - c(G)) =$

$= \nu(G)$, а матрица, по строкам которой стоят координаты векторов $\vec{\eta}_{\{u\}}$, может быть перестановкой столбцов приведена к виду

$$\begin{pmatrix} \ldots\ldots \pm 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ 0 & \pm 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ 0 & 0 & \ldots\ldots & \pm 1 \end{pmatrix}$$

(последние столбцы соответствуют дугам множества $U \setminus U_{F(G)}$). Такая структура матрицы и означает линейную независимость этих векторов.

П **Пример 7.16.** На графе (рис. 7.35) темным цветом обозначено покрывающее дерево (его дуги — u_1, u_2, u_5, u_6). Добавление к нему дуги u_3 определяет цикл η_1 — $\{u_1, u_3, u_2\}$ (верхний треугольник). Добавление к дереву дуги u_4 определяет цикл η_2 — $\{u_2, u_4, u_5\}$ (правый треугольник). Добавление к дереву дуги u_7 определяет цикл η_3 — $\{u_5, u_7, u_6\}$ (нижний треугольник). На циклах обычно выбирают направление обхода, совпадающее с направлением порождающей дуги. Векторы $\vec{\eta}_1$, $\vec{\eta}_2$, $\vec{\eta}_3$ образуют базис пространства вектор-циклов этого графа. ($\nu(G) = 7 - 5 + 1 = 3$).

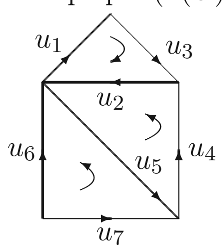
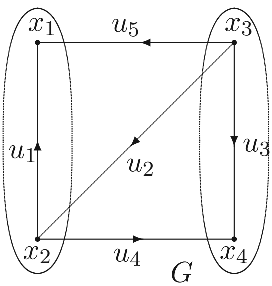


Рис. 7.35

Пространство разрезов

Пусть $G(X, U, f)$ — связный орграф. Разобьем множество вершин графа на два непустых непересекающихся подмножества X', X''. *Разрезом графа* G, порожденным $(X'; X'')$, называется множество дуг $U_{(X';X'')}$, каждая из которых начинается в одном из этих множеств, а заканчивается в другом. Иными словами, *разрез* — это такое множество дуг, что после его удаления связный граф превращается в несвязный граф. В частности, любой мост графа является разрезом.

П **Пример 7.17.** Рассмотрим граф G (рис. 7.36). Пусть



$$X' = \{x_1; x_2\};$$
$$X'' = \{x_3; x_4\}.$$
$$U_{(X';X'')} = \{u_2, u_4, u_5\}.$$

Рис. 7.36

Определение 7.33

Занумеруем дуги графа $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, *с каждым разрезом* $(X'; X'')$ *свяжем вектор* $\overline{(X'; X'')}$ *в пространстве* $\mathbb{Z}^m$:

$$\langle\overline{(X'; X'')}\rangle_i = \begin{cases} +1, & \text{если } u_i \in (X'; X'') \text{ и направлена из } X' \text{ в } X''; \\ -1, & \text{если } u_i \in (X'; X'') \text{ и направлена из } X' \text{ в } X'; \\ 0, & \text{если } u_i \notin (X'; X''). \end{cases}$$

Этот вектор называют вектор-разрезом.

Ясно, что имеет место равенство

$$\overline{(X'; X'')} = -\overline{(X''; X')}.$$

Для разреза графа на рис. 7.34 имеем

$$\overline{(\{x_1; x_2\}; \{x_1; x_4\})} = (0, -1, 0, 1, -1).$$

Разрезы графов, содержащих более одной компоненты связности, определяются как разрезы компонент связности.

Определение 7.34. *Пространством разрезов $R(G)$ графа G называется линейная оболочка его вектор-разрезов.*

Теорема 7.19. *Имеет место равенство*

$$\dim R(G) = |X| - c(G). \tag{7.20}$$

► Ясно, что в случае графа, состоящего из нескольких компонент связности, размерность пространства $R(G)$ равна сумме размерностей пространств разрезов его компонент. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что в случае связного графа имеет место равенство

$$\dim R(G) = |X| - 1. \tag{7.21}$$

Будем считать, что G — связный граф без петель (петли не могут входить ни в один из разрезов). Занумеруем вершины графа $X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$. Рассмотрим множество разрезов вида $(\{x_i\}; X \setminus \{x_i\})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Покажем, что любой вектор пространства $R(G)$ может быть представлен в виде линейной комбинации вектор-разрезов этого множества. Очевидно, имеет место равенство

$$\overline{(X'; X'')} = \sum_{x \in X'} \overline{(\{x\}; X \setminus \{x\})}. \tag{7.22}$$

Действительно, если

дуга $u_i \notin (X';X'')$ и $f(u_i)=(t,z)$, то $\{t,z\}\subset X'$или $\{t,z\}\subset X''$.

В этом случае

$$\langle\overline{(\{t\}; X \setminus \{t\})}\rangle_i = 1; \quad \langle\overline{(\{z\}; X \setminus \{z\})}\rangle_i = -1;$$
$$\langle\overline{(\{x\}; X \setminus \{x\})}\rangle_i = 0, \quad \text{если} \quad x \neq t, x \neq z.$$

Если $u_i \in (X', X'')$ и $f(u_i) = (t; z)$ и $t \in X'$, $z \in X''$, то

$$\langle\overline{(X'; X'')}\rangle_i = 1;$$
$$\langle\overline{(\{x\}; X \setminus \{x\})}\rangle_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x = t; \\ 0, & \text{если } x \neq t. \end{cases}$$

Если $u_i \in (X'; X'')$, $f(u_i) = (t, z)$ и $t \in X''$, $z \in X'$, то

$$\langle\overline{(X'; X'')}\rangle_i = -1;$$
$$\langle\overline{(\{x\}; X \setminus \{x\})}\rangle_i = \begin{cases} -1, & \text{если } x = z; \\ 0, & \text{если } x \neq z. \end{cases}$$

Для завершения доказательства теоремы осталось вычислить размерность линейной оболочки векторов разрезов вида $\overline{(\{x\}; X \setminus \{x\})}$, $x \in X$.

Очевидно, что $\overline{(\{x_i\};X \setminus \{x_i\})}$ совпадает с i-й строкой матрицы инцидентности $B(G)$ графа G, тогда $\dim R(G) = \operatorname{rang} B(G)$. Ясно, что $\operatorname{rang} B(G) = n-1$ в случае связного графа. (Доказательство этого утверждения для оргафов аналогично доказательству теоремы 7.15 о двоичном ранге матрицы инцидентности.) ◀

Следствием этой теоремы является утверждение о том, что набор векторов вида $\overline{(\{x\}; X \setminus \{x\})}$, построенных на всех вершинах графа за исключением одной (любой), является базисом пространства $R(G)$.

Определение 7.35. *Цикломатической матрицей графа называется матрица, строками которой являются линейнонезависимые вектор-циклы графа. Цикломатическую матрицу графа G будем обозначать $\mathbb{C}(G)$. Матрицей разрезов графа называют матрицу $\mathbb{R}(G)$, строками которой являются вектор-разрезы графа.*

Очевидно, $B(G)$ — матрица инцидентности графа G — является подматрицей матрицы $\mathbb{R}(G)$.

Теорема 7.20 (соотношение ортогональности)
Имеет место равенство

$$\mathbb{R}(G) \cdot \mathbb{C}^t(G) = 0. \tag{7.23}$$

► Для доказательства (7.23) достаточно доказать, что скалярное произведение любого вектор-разреза на любой вектор-цикл из базиса пространства вектор-циклов равно нулю. Поскольку существует базис пространства вектор-циклов, образованный простыми циклами, и базис пространства разрезов, порожденный векторами вида $\overline{(\{x\}; X\backslash\{x\})}$, нам достаточно доказать равенство нулю скалярного произведения вектора $\overline{(\{x\}; X\setminus\{x\})}$ на вектор простого цикла η.

Если цикл η не проходит через вершину x, то он не имеет общих дуг с разрезом $(\{x\}; X\setminus\{x\})$ и равенство нулю скалярного произведения векторов разреза и цикла очевидно.

Каждое прохождение цикла η через вершину x определяет две его дуги, общие с разрезом (см. рис. 7.37*а*, 7.37*б*, 7.37*в*, 7.37*г*; стрелкой указано направление обхода цикла η).

Покажем, что каждая пара таких дуг дает нулевой вклад в скалярное произведение вектора $\overline{(\{x\}; X\setminus\{x\})}$ на вектор $\vec{\eta}$.

• В случае рис. 7.37*а* имеем:

$$\langle\overline{(\{x\};X\setminus\{x\})}\rangle_i=-1;\quad \langle\overline{(\{x\};X\setminus\{x\})}\rangle_j=1;$$
$$\langle\vec{\eta}\rangle_i=\langle\vec{\eta}\rangle_j=1.$$

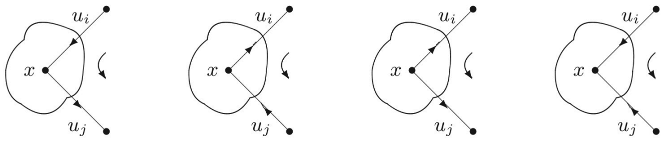


Рис. 7.37*а* Рис. 7.37*б* Рис. 7.37*в* Рис. 7.37*г*

• В случае рис. 7.37*б* имеем:

$$\langle\overline{(\{x\};X\setminus\{x\})}\rangle_i=1;\quad \langle\overline{(\{x\};X\setminus\{x\})}\rangle_j=-1;$$
$$\langle\vec{\eta}\rangle_i=\langle\vec{\eta}\rangle_j=-1.$$

В случае рис. 7.37*в* имеем:

$$\langle\overline{(\{x\};X\setminus\{x\})}\rangle_i=1;\quad \langle(\overline{(\{x\};X\setminus\{x\})})\rangle_j=1;$$
$$\langle\vec{\eta}\rangle_i=-1;\quad \langle\vec{\eta}\rangle_j=1.$$

• В случае рис. 7.37*г* имеем:

$$\langle\overline{(\{x\};X\setminus\{x\})}\rangle_i=-1;\quad \langle\overline{(\{x\};X\setminus\{x\})}\rangle_j=-1;$$
$$\langle\vec{\eta}\rangle_i=1;\quad \langle\vec{\eta}\rangle_j=-1.$$

Ясно, что во всех этих случаях

$$\langle\overline{(\{x\};X\setminus\{x\})}\rangle_i\cdot\langle\vec{\eta}\rangle_i+\langle\overline{(\{x\};X\setminus\{x\})}\rangle_j\cdot\langle\vec{\eta}\rangle_j=0.$$ ◀

Доказанную теорему обычно называют **соотношением ортогональности разрезов и циклов.**

Потоки в сетях

В этой заключительной части параграфа мы дадим небольшое введение в теорию сетей. Основоположниками этой теории считаются американские математики Л. Форд и Д. Фалкерсон, авторы знаменитой книги «Потоки в сетях», вышедшей в 1962 г. (русский перевод: *Форд Л., Фалкерсон Д.*. Потоки в сетях. — М. : Мир, 1966).

Определение 7.36. *Сетью (сетевым графом) называют конечный связный ориентированный граф* $G(X, U, f)$, *на котором выделены две вершины* x_0 *и* y_0, *называемые источником и стоком соответственно, при этом:*

1) $\deg_- x_0 > 0$; $\deg_+ x_0 = 0$*;*

2) $\deg_+ y_0 > 0$; $\deg_- y_0 = 0$*;*

3) $\deg_+ x > 0; \deg_- x > 0$ *для любой вершины* $x \in X \setminus \{x_0; y_0\}$.

Вершины из множества $X \setminus \{x_0; y_0\}$ *называют промежуточными вершинами сети.*

Ясно, что граф, изображенный на рис. 7.38, является сетью, или сетевым графом.

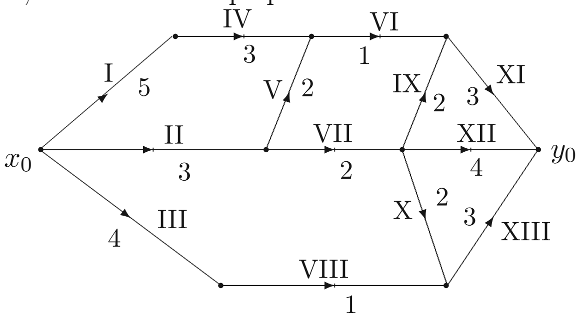


Рис. 7.38

Допустим, что на множестве дуг сети $G(X, U, f)$ задано отображение $\rho\colon U \to R_+$ $(= (0; \infty))$, называемое пропускной способностью дуг графа.

Определение 7.37

Отображение $d : U \to R_+ \cup \{0\}$ *называется допустимым потоком (потоком) на* $G(X, U, f, \rho)$, *если для него выполнены следующие условия:*

1) *для любой дуги* $u \in U$

$$d(u) \leqslant \rho(u);$$

2) *для любой вершины* $x \in X \setminus \{x_0; y_0\}$

$$\sum_{u \in U_{+x}} d(u) = \sum_{u \in U_{+x}} du,$$

$$\text{где } U_{+x} = \{u \in U \mid f(u) = (t; x); t \in X\};$$

$$U_{-x} = \{u \in U \mid f(u) = (x; w); w \in X\}.$$

Ясно, что поток, тождественно равный нулю, всегда является допустимым потоком.

П **Пример 7.18.** На рис. 7.38 изображен сетевой граф. Арабские цифры около дуг — их пропускные способности, римские цифры около дуг — их номера. Ясно, что отображения $d_i : U \to R_+ \cup \{0\}$, заданные следующим: $d_1(I) = 1$; $d_1(II) = 2$; $d_1(III) = 1$; $d_1(IV) = 1$; $d_1(V) = 0$; $d_1(VI) = 1$; $d_1(VII) = 2$; $d_1(VIII) = 1$; $d_1(IX) = 0$; $d_1(X) = 0$; $d_1(XI) = 1$; $d_1(XII) = 2$; $d_1(XIII) = 1$; $d_2(I) = 0{,}5$; $d_2(II) = 2{,}5$; $d_2(III) = 0.5$; $d_2(IV) = 0{,}5$; $d_2(V) = 0{,}5$; $d_2(VI) = 1$; $d_2(VII) = 2$; $d_2(VIII) = 0{,}5$; $d_2(IX) = 0$; $d_2(X) = 0$; $d_2(XI) = 1$; $d_2(XII) = 2$; $d_2(XIII) = 0{,}5$,
являются допустимыми потоками.

Определение 7.38

$$s(d) = \sum_{u \in U_{+y_0}} d(u) = \sum_{u \in U_{-x_0}} d(u) \qquad (7.24)$$

называют величиной допустимого потока d.

Как формулируется основная задача о потоках в сетях? Найти допустимый поток в сети, величина которого максимальна. Как, не находя этот поток, найти его величину? (Ее обычно называют *пропускной способностью сети.*)

Ответ на второй вопрос дает знаменитая теорема Форда — Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе. Чтобы сформулировать ее, нам потребуется уточнить понятие разреза графа.

Определение 7.39. *Пусть $G(X, U, f)$ — сеть с источником x_0 и стоком y_0. Разрез $(X'; X'')$ называется разрезом сети $G(X, U, f)$, если $x_0 \in X'$, $y_0 \in X''$, т. е. разрезами сети G называются только такие разрезы графа, при которых источник и сток находятся в разных множествах. Пропускной способностью разреза $(X'; X'')$ называется величина, равная сумме пропускных способностей дуг разреза, ориентированных по разрезу.*

При этом справедлива

Теорема 7.21 (**теорема Форда — Фалкерсона**) *Максимальный допустимый поток в сети равен пропускной способности ее минимального разреза.*

Вопросы и задания в конце параграфа

$\boxed{?}$

1. Докажите самостоятельно теоремы 7.18, 7.19, 7.20 для неориентированных графов (в арифметике по mod 2).
2. Пусть T_G — покрывающее дерево связного графа G По основной теореме о деревьях (теорема 7.13) каждая дуга u дерева T_G является мостом и при ее удалении дерево распадается на две компоненты. Обозначим $X_{1\{u\}}$ и $X_{2\{u\}}$ множества вершин, получившихся компонент связности. Докажите, что набор вектор-разрезов $\overline{\langle X_{1\{u\}}; X_{2\{u\}}\rangle}$ образует базис пространства $R(G)$.

3. Из формулы (7.15) следует, что цикломатическое число графа не зависит от ориентации его дуг. Докажите этот факт без использования формулы (7.15).

4. Ясно, что если $G_1 \simeq G_2$, то $\nu(G_1) = \nu(G_2)$. Приведите пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

5. Ясно, что если $G_1 \simeq G_2$, то $\dim R(G_1) = \dim R(G_2)$. Приведите пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

6. Докажите, что граф G не содержит циклов тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 0$.

7. Найдите пропускную способность сети, изображенной на рис. 7.38, и максимальный допустимый поток на ней.

Глава 8
Практикум по решению упражнений и задач

Введение

Цель этой главы, которую мы назвали «Практикум», — помочь студентам в решении задач и упражнений. В определении ее содержания мы ориентировались на предыдущие издания книги (*Ерусалимский Я. М.* Дискретная математика: теория, задачи, приложения. — 11-е изд. — М. : 2010), далее — *книга.* Следуя традиции аналогичных американских практикумов, мы будем подробно разбирать примеры и упражнения, имеющие нечетные номера, которые обычно решают в аудитории, оставляя четные для самостоятельного разбора.

В своих пояснениях мы будем придерживаться разной степени подробности, полагая, что практикум используется не от случая к случаю, а систематически. Прием, используемый первый раз, описывается подробно. Затем он считается уже освоенным и только упоминается.

Номера разбираемых примеров мы сохранили такими же, какие были в предыдущих изданиях книги. Номер примера в разделе «Решения» снабжается буквой **«Р»**, т. е. пример **8.231** в разделе «Решения» обозначается **Р8.231.** Примеры и задачи, взятые из Дополнения 1 к книге (*Скороходов В. А.* Методические указания по теме «Отображения»), включены в текст со своими номерами, к которым добавлено «**ОТ**». То есть пример, имевший номер **1.01**, обозначается нами **ОТ1.01**, а в разделе «Решения» — **Р ОТ1.01**.

Поскольку мы включили в практикум все примеры из книги, а не только разобранные, его можно использовать и как обычный задачник по дискретной математике. В качестве дополнительных задачников по дискретной математике мы рекомендуем «Задачи и упражнения по дискретной математике» (*Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009), «Задачи по теории множеств, математической логике, и теории алгоритмов» (*Лавров И. А., Максимова Л. Л.* — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004).

§ 8.1. Таблицы истинности формул алгебры высказываний

Примеры этого параграфа самые легкие. Для их решения необходимо знать определения логических операций (п. 1.1 книги) и определение формулы алгебры высказываний (п. 1.2).

Нужно помнить, что таблица истинности формулы содержит 2^n строк, где n — количество логических переменных формулы. Каждая строка соответствует конкретному набору значений истинности переменных. Этот набор мы можем считать n-разрядным двоичным числом, расположение строк в таблице соответствует расположению наборов в лексикографическом порядке (от меньшего двоичного числа к большему). Например, если формула содержит переменные x, y, z, то в таблице истинности формулы будет 8 строк и она будет содержать такую «стандартную» часть:

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

П **Пример 8.1.** Построить таблицу истинности следующей формулы: $x_1\overline{x_2} \to (x_1 \vee x_2) \cdot \overline{x_3}$.

Решение. Определим порядок действий в формуле (см. п. 1.2 в книге):

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x}_2 \to (x_1 \vee x_2) \cdot \overline{x}_3.$$

2 1 6 3 5 4

Порядок действий определяет последовательность вспомогательных столбцов в таблице истинности. Таблицу истинности рекомендуем заполнять последовательно столбец за столбцом (так вам не придется «скакать» от одной логической операции к другой).

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_2}$	$x_1\overline{x_2}$	$x_1 \vee x_2$	$\overline{x_3}$	$(x_1 \vee x_2) \cdot \overline{x_3}$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

Составить таблицы истинности для следующих формул:

8.1. $x \vee \overline{y}$;

8.2. $x \wedge \overline{y}$;

8.3. $x \to (y \vee x)$;

8.4. $x \to (x \wedge y)$;

8.5. $(x \vee y) \to (\overline{x} \vee \overline{y})$;

8.6. $x \to ((x \vee y) \vee z)$;

8.7. $x \to (y \to z)$;

8.8. $(x \to y) \to z$.

8.9. $x \sim (y \sim z)$;

8.10. $(x \sim y) \sim z$;
8.11. $(x \vee (y \vee z)) \to (\overline{x} \wedge (\overline{y} \wedge \overline{z}))$;
8.12. $(x \to (y \wedge z)) \to (x \to (y \wedge z))$;
8.13. $\left(x \sim \overline{(y \vee z)}\right) \sim (x \sim (y \vee z))$;
8.14. $(x \vee \overline{y}) \to ((y \wedge \overline{z}) \to (x \vee (y \sim z)))$;
8.15. $((x \sim y) \sim ((z \to (\overline{x} \vee \overline{y})) \to \overline{z})) \sim (x \vee y)$;
8.16. $(x \sim y) \to (((y \sim z) \to (z \sim x)) \to (x \sim z))$.

Пусть x_i $(i = 1, 2, 3)$ — символы булевых переменных (т. е. принимающих два значения: 0, 1). Построить таблицы истинности:

8.17. $(x_1 = x_2) \vee (x_2 = x_3)$;
8.18. $(x_1 > x_2) \to (x_2 = x_3)$;
8.19. $(x_1 \neq x_2) \vee (x_2 \neq x_3)$;
8.20. $((x_1 > x_2) \wedge (x_2 = x_3)) \to (x_1 > x_3)$.

Применяя таблицы истинности, доказать тождественную истинность формул:

8.21. $x \sim x$;
8.22. $x \vee \overline{x}$;
8.23. $\overline{(x \wedge \overline{x})}$;
8.24. $\overline{\overline{x}} \sim x$;
8.25. $x \to (y \to x)$;
8.26. $\overline{x} \to (x \to y)$;
8.27. $((x \to y) \wedge x) \to y$.
8.28. $((x \to y) \wedge \overline{y}) \to \overline{x}$;
8.29. $((x \vee y) \wedge \overline{x}) \to y$;
8.30. $((x \sim y) \wedge \overline{x}) \to \overline{y}$;
8.31. $(x \to y) \sim (\overline{y} \to \overline{x})$;
8.32. $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$;
8.33. $(x \to (y \to z)) \to ((x \wedge y) \to z)$;
8.34. $((x \to z) \wedge (y \to z)) \to ((x \vee y) \to z)$;
8.35. $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$.

Применяя таблицы истинности, доказать равносильность формул:

8.36. $x \vee y \equiv y \vee x$;
8.37. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$;
8.38. $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee z$;
8.39. $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$;

8.40. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
8.41. $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{8.42. } \overline{(x \vee y)} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y} \\ \textbf{8.43. } \overline{(x \wedge y)} \equiv \overline{x} \wedge \vee \overline{y}\end{array}\right\}\text{— законы де Моргана;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{8.44. } x \vee x \equiv x \\ \textbf{8.45. } x \wedge x \equiv x\end{array}\right\}\text{— законы идемпотентности;}$$

8.46. $x \vee 0 \equiv x$;
8.47. $x \wedge 1 \equiv x$;
8.48. $\overline{x} \equiv x$;
8.49. $x \sim y \equiv y \sim x$;
8.50. $x \sim (y \sim z) \equiv (x \sim y) \sim z$;
8.51. $x \to y \equiv \overline{x} \vee y$;
8.52. $x \sim y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$.

Решения

8.1. Составить таблицу для формулы $x \vee \overline{y}$. Ясно, что в таблице будет четыре строки и один дополнительный столбец.

x	y	$\overline{y}$	$x \vee \overline{y}$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0

8.3. Составить таблицу для формулы $x \to (x \vee y)$. Ясно, что в таблице будет четыре строки и один дополнительный столбец.

x	y	$x \vee y$	$x \to (x \vee y)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

8.5. Составить таблицу для формулы $(x \vee y) \to (\overline{x} \vee \overline{y})$. Ясно, что в таблице будет четыре строки и четыре дополнительных столбца.

x	y	$x \vee y$	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \vee \overline{y}$	$(x \vee y) \to (\overline{x} \vee \overline{y})$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

8.7. Составить таблицу для формулы $x \to (y \to z)$. Ясно, что в таблице будет восемь строк и один дополнительный столбец.

x	y	z	$y \to z$	$x \to (y \to z)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

8.9. Составить таблицу для формулы $x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$. Ясно, что в таблице будет восемь строк и один дополнительный столбец.

x	y	z	$y \leftrightarrow z$	$x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

8.17.Составить таблицу истинности формулы

$$(x_1 = x_2) \vee (x_2 = x_3), x_i = 0, 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Особенность этого примера состоит в том, что внутри формулы содержатся высказывания $x_1 = x_2$ и $x_2 = x_3$. Таблица истинности будет содержать восемь строк и два вспомогательных столбца.

x_1	x_2	x_3	$x_1{=}x_2$	$x_2{=}x_3$	$(x_1{=}x_2) \vee (x_2{=}x_3)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

8.19. Составить таблицу истинности формулы

$$(x_1 \neq x_2) \vee (x_2 \neq x_3), x_i = 0, 1. i = 1, 2, 3.$$

Особенность этого примера состоит в том, что внутри формулы содержатся высказывания $x_1 \neq x_2$ и $x_2 \neq x_3$. Таблица истинности будет содержать восемь строк и два вспомогательных столбца.

x_1	x_2	x_3	$x_1 \neq x_2$	$x_2 \neq x_3$	$(x_1 \neq x_2) \vee (x_2 \neq x_3)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0

§ 8.2. Равносильные преобразования и упрощение формул

Ключом к решению примеров на равносильные преобразования и упрощение формул являются 19 основных равносильностей булевой алгебры высказываний (теорема 1.2), поэтому первым шагом при решении таких формул является переход к булевым операциям с помощью следующих формул:

$$a \to b \equiv \overline{a} \vee b,$$

$$a \sim b \equiv (a \to b)\,(b \to a) \equiv ab \vee \overline{a}\overline{b} \equiv (\overline{a} \vee b)\,\left(a \vee \overline{b}\right).$$

Успешное решение примера зависит от умелого, эффективного применения основных равносильностей.

Следует иметь в виду, что буквы, использованные при записи основных равносильностей, могут означать как символы высказывательных переменных, так и формулы алгебры высказываний, т. е. основная равносильность

$$a \vee \overline{a} \equiv 1$$

означает, в частности, что

$$x_1 \vee \overline{x_1} \equiv 1,$$

$$1 \vee \overline{1} \equiv 1,$$

$$(x_1 \to x_2)\,\overline{x_3} \vee \overline{(x_1 \to x_2)\overline{x_3}} \equiv 1.$$

Полезными при решении примеров на упрощение формул являются законы полупоглощения:

$a \vee \overline{a}b \equiv a \vee b;$ $\quad$ 1′) $\overline{a} \vee ab \equiv \overline{a} \vee b;$

$a \cdot\ (\overline{a} \vee b) \equiv ab;$ $\quad$ 2′) $\overline{a}\,(a \vee b) \equiv \overline{a}b,$

► $a \vee \overline{a} \cdot\ b \overset{\text{дист. зак.}}{\equiv} (a \vee \overline{a})\,(a \vee b) \equiv 1\,(a \vee b) \equiv a \vee b.$

$a\,(\overline{a} \vee b) \overset{\text{дист. зак.}}{\equiv} a \cdot \overline{a} \vee a \cdot b \equiv 0 \vee ab \equiv ab.$ ◄

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 8.2.** С помощью равносильных преобразований упростить формулу $x_1\overline{x}_2 \to (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)\overline{x}_3$.

$$x_1\overline{x}_2 \to \left(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2\right)\overline{x}_3 \underset{\text{бул. опер.}}{\overset{\text{переход к}}{\equiv}} \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \left(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2\right)\overline{x}_3 \equiv$$

$$\underset{\text{дистр. закон}}{\overset{\text{закон де Моргана}}{\equiv}} \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\ \overline{x}_3\ \vee \overline{x}_2\ \overline{x}_3 \underset{\text{дв. отриц.}}{\overset{\text{закон}}{\equiv}}$$

$$\equiv \overline{x}_1 \vee \overbrace{x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2}\overline{x}_3 \underset{\text{поглощения}}{\overset{\text{закон}}{\equiv}}$$

$$\equiv \begin{cases} \text{а)}\ \overline{x}_1 \vee \left(x_2 \vee \overline{x}_3\right) \equiv x_1 \to \left(x_2 \vee \overline{x}_3\right). \\ \text{б)}\ \overline{x}_3 \vee \left(x_1 \vee \overline{x}_2\right) \equiv x_3 \to \left(\overline{x}_1 \vee x_2\right). \\ \text{в)}\ x_2 \vee\ \overline{x}_1\ \vee\ \overline{x}_3 \equiv x_2 \vee \overline{x}_1 x_3. \\ \text{г)}\ \overline{x}_1 \vee \overline{x}_3 \vee x_2 \equiv\ \overline{x}_1 x_3 \vee x_2 \equiv x_1 x_3 \to x_2. \\ \text{д)}\ \overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \equiv \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3. \end{cases}$$ ◄

$\boxed{!}$ **Замечание 1.** Любую запись а) — д) можно считать ответом.

Следующий тип примеров — доказательство равносильности двух заданных формул с помощью равносильных преобразований. Существует три основных схемы решения таких примеров. Каждая из них предполагает выполнение перехода к булевым операциям в исходных формулах.

Далее по *первой схеме* предполагается, начиная с левой формулы, провести цепочку равносильных преобразований, завершив ее на правой формуле.

Вторая схема — зеркальное отражение первой.

Третья схема предполагает проведение параллельных цепочек равносильных преобразований левой и правой формул до тех пор, пока в этих цепочках не обнаружится совпадение каких-то звеньев (одного звена верхней цепочки с одним звеном нижней).

П **Пример 8.3.** Доказать, что

$$(x_1 \to x_3)\,(x_2 \to x_3) \equiv (x_1 \vee x_2) \to x_3.$$

Перейдем к булевым операциям

$$(\overline{x}_1 \vee x_3)\,(\overline{x}_2 \vee x_3) \equiv \overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3.$$

1-я схема

$$(\overline{x}_1 \vee x_3)\,(\overline{x}_2 \ \vee x_3) \underset{\text{закон.}}{\overset{\text{дистр.}}{\equiv}} \overline{x}_1\ \overline{x}_2 \vee x_3 \underset{\text{де Моргана}}{\overset{\text{закон}}{\equiv}} \overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3.$$

2-я схема

$$\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3 \underset{\text{де Моргана}}{\overset{\text{закон}}{\equiv}} \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \vee x_3 \underset{\text{закон.}}{\overset{\text{дистр.}}{\equiv}} (\overline{x}_1 \vee x_3)\,(\overline{x}_2 \ \vee x_3)\,.$$

3-я схема

$$(\overline{x}_1 \vee x_2)\,(\overline{x}_2 \vee x_3) \underset{\text{закон.}}{\overset{\text{дистр.}}{\equiv}} \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_3 \equiv \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_3.$$

$$\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3 \underset{\text{де Моргана}}{\overset{\text{закон}}{\equiv}} \overline{x}_1 \cdot\ \overline{x}_2 \vee x_3.$$

! **Замечание 2.** Следует иметь в виду, что среди примеров на доказательство равносильности формул есть примеры с отрицательным ответом. В этом случае ни одна из схем не приводит к получению ответа. Однако неудача при использовании схем 1–3 может говорить и о недостаточно высокой технике равносильных преобразований. В случае неудачных попыток применения схем 1–3 следует для обеих формул построить таблицы истинности. Совпадения столбцов значений формул будут означать их равносильность, а несовпадение — неравносильность.

Порядок действий и упрощенная запись формул

При записи формул приняты соглашения об упрощении записи формул (см. § 1.2, замечание 1).

Учитывая соглашения о порядке выполнения операций, опустить «лишние» скобки и знак «$\wedge$» в формулах:

8.53. $x \wedge (y \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}))$;
8.54. $(x \wedge y) \vee ((y \wedge z) \wedge ((\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{z})))$;
8.55. $((x \vee y) \vee z) \to ((x \wedge \overline{y}) \vee z)$;
8.56. $((x \vee y) \wedge (x \vee (y \wedge z))) \to ((\overline{x} \wedge \overline{y}) \to \overline{z})$;
8.57. $((x \vee y) \vee (x \vee ((y \wedge (x \vee z)) \wedge (y \to z))) \sim \overline{z})$;
8.58. $((x \vee y) \to (x \wedge y)) \vee ((\overline{x} \wedge y) \vee (\overline{x} \vee y))$;
8.59. $((x \vee y) \wedge z) \to (((x \vee \overline{y}) \vee z) \sim (\overline{x} \vee y))$;
8.60. $(x \wedge (y \vee z)) \wedge ((x \to (y \to z)) \sim (x \wedge y))$.

Восстановить скобки и знак «$\wedge$» в формулах:

8.61. $x \vee y \to z$;
8.62. $x \vee y \to xy$;
8.63. $\overline{xy} \vee x\overline{y}\,\overline{(y \vee z)}$;
8.64. $x \vee y\,(xy \vee z)$;
8.65. $xy \vee x\overline{yz} \to \overline{x} \vee yz$;
8.66. $(x \to x \vee yz) \sim (x \vee y \to z)$;
8.67. $(x \vee y)\,\overline{z} \to (xy \ \sim \overline{y} \vee \overline{z})$;
8.68. $x \vee y \to x \vee y\,(x \to z) \vee x\,(y \sim z)$;
8.69. $xyz \to (x \sim yz) \vee x \vee y\,(x \to (y \sim z))$;
8.70. $xy \sim x\,(y \to z)\,(x \sim y) \vee xz \vee yz$.

Применяя равносильные преобразования, доказать следующие соотношения:

8.71. $x \vee y \equiv \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$;
8.72. $xy \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$;
8.73. $x \to y \equiv \overline{x \cdot \overline{y}}$;
8.74. $x \to y \equiv \overline{y} \to \overline{x}$;
8.75. $xy \vee x\overline{y} \equiv x$;
8.76. $x \vee xy \equiv x$;
8.77. $x\,(x \vee y) \equiv x$;
8.78. $x \vee \overline{x}y \equiv x \vee y$;

8.79. $x\,(\overline{x} \vee y) \equiv xy$;
8.80. $(x \to y) \to y \equiv x \vee y$;
8.81. $(x \vee y)\,(x \vee \overline{y}) \equiv x$;
8.82. $\overline{x} \vee \overline{y} \equiv y \to \overline{x}$;
8.83. $x \sim y \equiv \overline{x} \sim \overline{y}$;
8.84. $xy \vee \overline{x}y \ \vee \overline{xy} \equiv x \to y$;
8.85. $x \to (y \to z) \equiv (x \vee z)\,(y \vee z)$;
8.86. $x \to (y \to z) \equiv y \to (x \to z)$;
8.87. $\overline{x} \vee xy \vee xz \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z \equiv x \to y \vee z$.

Применяя равносильные преобразования, доказать тождественную истинность формул:

8.88. $x \to x \vee y$;
8.89. $xy \to x$;
8.90. $\overline{x} \to (x \to y)$;
8.91. $(x \to y) \to (\overline{x} \vee y)$;
8.91a. $(x \vee \overline{x}y) \sim (x \vee y)$;
8.92. $(\overline{x} \to y) \to (\overline{y} \to x)$;
8.93. $(\overline{x} \to \overline{y}) \to (y \to x)$;
8.94. $(x \to y) \vee (y \to x)$;
8.95. $(x \to y) \vee (x \to \overline{y})$;
8.96. $x \to (y \to xy)$;
8.97. $(x \to y)\,x \to y$;
8.98. $(x \to y)\,\overline{y} \to \overline{x}$;
8.99. $(x \vee y)\,\overline{x} \to y$;
8.100. $(x \vee\vee y)\,x \to \overline{y}$;

«$\vee\vee$» — альтернативная дизъюнкция: $(x \vee\vee y) \equiv \overline{x \sim y}$;

8.101. $(x \to y)\,(y \to z) \to (x \to z)$;
8.102. $(x \to (y \to z)) \to (xy \to z)$;
8.103. $(x \to z)\,(y \to z) \to (x \vee y \to z)$;
8.104. $(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$.

Применяя равносильные преобразования, «упростить»:

8.105. $\overline{\overline{xy}} \vee (x \to y)\,x$;
8.106. $\left(\overline{\overline{x} \vee y} \to x \vee y\right) y$;
8.107. $\overline{(x \to y)\,(y \to \overline{x})}$;
8.108. $(x \vee y)\,(x \sim y)$;
8.109. $(x \to y)\,(y \to z) \to (z \to x)$;
8.110. $xz \vee x\overline{z} \vee yz \vee \overline{x}yz$;
8.111. $\overline{xy\,(x \to y}$);
8.112. $xy\,(x \sim y)$;
8.113. $(x \to \overline{y})\,(x \sim y)$;
8.114. $(x \to \overline{y}) \vee \overline{(x \vee y)}$.

Следующие формулы преобразовать так, чтобы они содержали только «$\wedge$» и «$\neg$»:

8.115. $x \vee y$; **8.116.** $x \to y$;
8.117. $x \sim y$; **8.118.** $x \vee y \vee z$;
8.119. $x \to (y \to z)$; **8.120.** $x \vee (x \sim y)$;
8.121. $\overline{x \to y} \vee (\overline{x} \to \overline{y})$; **8.122.** $x \vee \vee y$;
8.123. $x\overline{y} \to (\overline{y} \to x)$; **8.124.** $x \vee y \to (\overline{x} \to z)$.

Следующие формулы преобразовать так, чтобы они содержали только «$\vee$» и «$\neg$»:

8.125. xy; **8.126.** xyz;
8.127. $x \sim y$; **8.128.** $x \vee \vee y$;
8.129. $x\,(y \sim z)$; **8.130.** $x \sim y \sim z$;
8.131. $(x \sim y)\,(y \sim z)$; **8.132.** $xy \sim xz$.

Преобразовать следующие формулы так, чтобы знак отрицания был отнесен только к переменным высказываниям:

8.133. $\overline{\overline{x} \vee y}$;
8.134. $\overline{xy \vee z}$;
8.135. $\overline{xy \vee \overline{z}} \to \overline{xyz}$;
8.136. $\overline{x \to (y \to z)}$;
8.137. $\overline{x \to y \to (\overline{x} \to \overline{z})}$;
8.138. $\overline{(x \sim y)\,(y \sim z)}$.

Преобразовать формулы так, чтобы они содержали только операции «$\wedge$», «$\vee$» и «$\neg$»:

8.139. $x \sim y$;
8.140. $(x \to y) \sim (y \to z)$;
8.141. $(x \sim y) \to (y \to z)$;
8.142. $(x \sim y) \to (y \sim z)$;
8.143. $(x \sim y)\,(y \sim z) \to (x \sim z)$;
8.144. $(x \sim y) \vee (y \sim z) \to (x \sim y \sim z)$;
8.145. $x \sim y \sim z \sim v$;
8.146. $(x \to y) \sim (z \to (x \sim \overline{z}))$.

Решения

P8.53. Учитывая соглашения о старшинстве операций и ассоциативные свойства отдельных операций, опустить лишние скобки и знак «$\wedge$» в формуле

$$x \wedge (y \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})).$$

Ясно, что формулу можно записать следующим образом:

$$xy\,(\overline{x} \vee \overline{y}).$$

P8.55. Учитывая соглашения о старшинстве операций и ассоциативные свойства отдельных операций, опустить лишние скобки и знак «$\wedge$» в формуле $((x \vee y) \vee z) \to$ $\to ((x \wedge \overline{y}) \vee z)$. Ясно, что формулу можно записать следующим образом: $[x \vee y \vee z \to x\overline{y} \vee z$.

P8.63. Восстановить скобки и знак «$\wedge$» в формуле $\overline{xy} \vee x\overline{y}\overline{(y \vee z)}$. Ясно, что формулу можно записать следующим образом:

$(\overline{x \wedge y}) \vee (x \wedge (\overline{y} \wedge \overline{(y \vee z)}))$, или $\overline{x \wedge y} \vee (x \wedge (\overline{y} \wedge \overline{(y \vee z)}))$,

или $(\overline{x \wedge y}) \vee ((x \wedge \overline{y}) \wedge \overline{(y \vee z)})$,

или $\overline{x \wedge y} \vee ((x \wedge \overline{y}) \wedge \overline{(y \vee z)})$.

P8.67. Восстановить скобки и знак «$\wedge$» в формуле

$$(x \vee y)\overline{z} \to (xy \sim \overline{y} \vee \overline{z}).$$

Ясно, что формулу можно записать следующим образом:

$$((x \vee y) \wedge \overline{z}) \to ((x \wedge y) \sim (\overline{y} \vee \overline{z})).$$

Применяя равносильные преобразования, доказать следующие равносильности:

P8.71. $x \vee y \equiv \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$. Преобразования будем вести от правой части к левой. С помощью закона де Моргана пропустим верхнее отрицание через конъюнкцию, а затем применим закон двойного отрицания. Получаем следующую цепочку равносильностей: $\overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} \equiv \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} \equiv x \vee y$.

P8.73. $x \to y \equiv \overline{x \cdot \overline{y}}$. Преобразования будем вести от правой части к левой. С помощью закона де Моргана пропустим верхнее отрицание через конъюнкцию, а затем применим закон двойного отрицания. И наконец, применим правило раскрытия импликации (вернее, ее восстановления). Получаем следующую цепочку равносильностей: $\overline{x \cdot \overline{y}} \equiv \overline{x} \vee \overline{\overline{y}} \equiv \overline{x} \vee y \equiv x \to y$.

P8.81. $(x \vee y)(x \vee \overline{y}) \equiv x$. Преобразования будем вести от левой части к правой. Применим дистрибутивный закон (раскроем скобки), затем закон противоречия и идемпотентности, а затем закон поглощения:

$$(x \vee y)(x \vee \overline{y}) \equiv xx \vee xy \vee x\overline{y} \vee y\overline{y} \equiv x \vee xy \vee x\overline{y} \equiv x \vee x\overline{y} \equiv x.$$

Последний переход — применение закона поглощения.

P8.83. $x \sim y \equiv \overline{x} \sim \overline{y}$. Преобразования будем вести от правой части к левой. Применим правило раскрытия эквиваленции, коммутативный закон, а затем закон двойного отрицания, коммутативный закон для дизъюнкции, после чего восстановим эквиваленцию (применение правила раскрытия в обратном направлении).

$$\overline{x} \sim \overline{y} \equiv \overline{x} \cdot \overline{y} \vee \overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{y}} \equiv \overline{x} \cdot \overline{y} \vee x \cdot y \equiv x \cdot y \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \equiv x \sim y.$$

P8.87. $\overline{x} \vee xy \vee xz \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z \equiv x \to y \vee z$. Будем преобразовывать левую часть к правой. Применим закон поглощения к первому и двум последним слагаемым, затем применим закон двойного отрицания ко второму и третьему слагаемым, затем применим дважды закон полупоглощения и свернем оставшееся в импликацию:

$$\overline{x} \vee xy \vee xz \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z \equiv \overline{x} \vee xy \vee xz \equiv \overline{x} \vee \overline{\overline{x}}y \vee \overline{\overline{x}}z \equiv$$
$$\equiv \overline{x} \vee y \vee z \equiv \overline{x} \vee (y \vee z) \equiv x \to y \vee z.$$

P8.105. С помощью равносильных преобразований упростить формулу $\overline{\overline{xy}} \vee (x \to y)x$. Применим к первому слагаемому закон двойного отрицания, а во втором слагаемом раскроем импликацию и затем скобку (дистрибутивный закон):

$$\overline{\overline{xy}} \vee (x \to y)x \equiv xy \vee (\overline{x} \vee y)x \equiv xy \vee \overline{x}x \vee xy \equiv xy.$$

§ 8.3. Двойственность в алгебре высказываний

Построение (нахождение) двойственной формулы основано на общем и булевом принципах двойственности (теоремы 1.8 и 1.9). В частности, общий принцип утверждает следующее: *если формула представляет собой подстановку формул в формулу, то для нахождения двойственной формулы нужно подставить двойственные формулы в двойственную формулу.* Булев принцип применим к булевым формулам и утверждает следующее: *двойственная к булевой формуле может быть получена из исходной формулы заменами дизъюнкции на конъюнкцию, конъюнкции на дизъюнкцию, «0» на «1», «1» на «0» и сохранением структуры формулы (должен быть аналогичный порядок действий).*

Рассмотрим **пример**.

Найти двойственную к следующей формуле:

$$F{=}(xy \to z) \vee (x \sim yz).$$

Ясно, что формулу можно рассматривать как подстановку формул $xy \to z$ и $x \leftrightarrow yz$ в формулу $y_1 \vee y_2$. Найдем с помощью булева принципа двойственную к наружной формуле (в которую подставляем): $(y_1 \vee y_2)^* = y_1 \cdot y_2$.

Найдем двойственные формулы для внутренних (подставляемых) формул. Для этого перейдем в них к булевым формулам, а затем применим булев принцип двойственности:

$$(xy \to z)^* \equiv (\overline{xy} \vee z)^* \equiv (\overline{xy\overline{z}})^* \equiv \overline{x \vee y \vee \overline{z}} \equiv \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z.$$

$$\begin{aligned}&(x \sim yz)^* \equiv (xyz \vee \overline{x} \cdot \overline{yz})^* = (x \vee y \vee z) \cdot (\overline{x} \vee (\overline{y \vee z})) \equiv \\ &\equiv (x \vee y \vee z) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \cdot \overline{z}) \equiv \\ &\equiv x \cdot \overline{x} \vee x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x}y \vee y \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot z \vee z \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \equiv \\ &\equiv x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot y \vee \overline{x} \cdot z \equiv x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot (y \vee z).\end{aligned}$$

Соберем теперь с помощью общего принципа двойственную формулу:

$$\begin{aligned}F^* = (y_1 y_2) \left| \begin{array}{l} y_1{=}\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \\ y_2{=}x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot (y \vee z) \end{array} \right. &= \\ = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \cdot (x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot (y \vee z)) &\equiv \\ \equiv \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \cdot (y \vee z) \equiv \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z.&\end{aligned}$$

Найти двойственные формулы:

8.147. $x\,(\overline{y} \vee z)$;

8.148. $xy \vee xz$;

8.149. $\overline{(x \vee y)}\ (x \vee \overline{yz})$;

8.150. $(xy \vee yz \vee zv)\,\overline{(x \vee y \vee z)}$;

8.151. $x\left(y \vee z\overline{(x \vee y)}\right)$;

8.152. $\overline{xyz} \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z\ \vee \overline{x}yz$;

8.153. $\left((x \vee y)\,\overline{(x \vee z)} \vee xy\right) \vee \left(\overline{(x \vee y)\,z}\ \vee x\right)$;

8.154. $xy\left(\overline{yz}\ \vee xyz\ \overline{(xz \vee yz)}\ \vee \overline{xy}\right)(x \vee y \vee z)$.

Применить закон двойственности к следующим равносильностям:

8.155. $xx \equiv x$;

8.156. $x \vee 0 \equiv x$;

8.157. $xy \equiv yx$;

8.158. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$;

8.159. $\overline{xy} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$;

8.160. $x\,(x \vee y) \equiv x$;

8.161. $x \vee \overline{x}y \equiv x \vee y$;

8.162. $x \vee xy \vee yz \vee \overline{x}z \equiv x \vee z$.

Решения

Р8.147. Найти двойственную к формуле $x(\overline{y} \vee z)$. Так как мы имеем булеву формулу, то можно воспользоваться булевым принципом двойственности:

$$(x(\overline{y} \vee z))^* = x \vee \overline{y}z.$$

Р8.149. Найти двойственную к формуле $\overline{(x \vee y)}(x \vee \overline{yz})$. Так как мы имеем булеву формулу, то можно воспользоваться булевым принципом двойственности:

$$(\overline{(x \vee y)}(x \vee \overline{yz}))^* = \overline{xy} \vee x \cdot (\overline{y \vee z}).$$

§ 8.4. Нормальные формы: ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ

Нормальные формы — это формулы алгебры высказываний, имеющие стандартную конструкцию. Они бывают двух типов — *дизъюнктивные* и *конъюнктивные*. Эти конструкции двойственные (двойственная к дизъюнктивной форме является конъюнктивной формой, и наоборот). Поэтому подробно изучают один из типов и технику работы с ним. Обычно это делается с дизъюнктивными формами.

Опишем, как возникает совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Будем считать, что у нас есть три булевых переменных: x, y, z. Рассмотрим формулу $x \cdot \overline{y} \cdot z$. Ясно, что она истинна только на одном наборе значений переменных — (101). Если мы возьмем другой набор переменных, например (100), то формула $x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$ истинна только на этом наборе значений переменных (100). Такие конструкции называют *полными совершенными элементарными конъюнкциями.*

Возьмем дизъюнкцию двух построенных нами полных совершенных элементарных конъюнкций $x{\cdot}\overline{y}{\cdot}z \vee x{\cdot}\overline{y}{\cdot}\overline{z}$. Ясно, что мы построили формулу, множество истинности которой состоит из двух наборов значений переменных (101) и (100). Таким образом, у нас появились «кирпичи» (полные совершенные элементарные конъюнкции — ПСЭКи) и «связующий материал» — дизъюнкция, с помощью которых мы можем строить формулы, множество истинности которых нам известно. Такие формулы называют совершенными дизъюнктивными нормальными формами (СДНФ). Ясно, что эти конструкции «жесткие» — разные СДНФ имеют разные множества истинности. Если мы исходную формулу преобразовали в равносильную формулу, имеющую вид СДНФ, то, *во-первых*, мы знаем ее множество истинности (т. е. ее таблицу истинности), *во-вторых*, представление формулы в виде СДНФ единственно (с точностью до порядка следования слагаемых).

Понятно, что, построив СДНФ, мы автоматически имеем таблицу истинности формулы, и наоборот, имея таблицу истинности, мы можем выписать СДНФ формулы. Имея теорию СДНФ, можно сформулировать **критерий равносильности формул**: «Формулы равносильны тогда и только тогда, когда их СДНФ совпадают или одновременно не существуют». (Последнее сказано потому, что у тождественно ложной формулы СДНФ не существует.)

Как строить СДНФ с помощью равносильных преобразований? Алгоритм построения СДНФ подобен действиям пастуха, загоняющего барана в кошару, — нужно от исходной формулы двигаться в сторону конструкции, имеющей вид СДНФ.

Опишем подробно шаги **алгоритма построения СДНФ:**

1. Перейти к булевой формуле, т. е. раскрыть импликацию и эквиваленцию.
2. Перейти с помощью закона де Моргана к формуле с «тесными отрицаниями», в которой отрицание встречается не выше, чем над переменной.
3. С помощью дистрибутивного закона сделать дизъюнкцию внешней операцией (раскрыть скобки).
4. Привести подобные и опустить тождественно ложные слагаемые.
5. Пополнить элементарные конъюнкции (получившиеся слагаемые) недостающими переменными, повторить п. 4 и остановиться.

Рассмотрим **пример**. В скобках будем указывать номер пункта алгоритма, который будет применяться на следующем шаге преобразований.

$$
\begin{aligned}
&(x \vee y) \to z \cdot (\overline{x} \vee \overline{z}) \equiv (1) \equiv \overline{(x \vee y)} \vee z \cdot (\overline{x} \vee \overline{z}) \equiv (2)\\
&\equiv \overline{x} \cdot \overline{y} \vee z \cdot (\overline{x} \vee \overline{z}) \equiv (3) \equiv \overline{x} \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \cdot z \vee z \cdot \overline{z} \equiv (4)\\
&\equiv \overline{x} \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \cdot z \equiv (5) \equiv \overline{x} \cdot \overline{y}(z \vee \overline{z}) \vee \overline{x} \cdot (y \vee \overline{y}) \cdot z \equiv (5)\\
&\equiv \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot y \cdot z \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \equiv (5, 4)\\
&\equiv \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot y \cdot z.
\end{aligned}
$$

СДНФ найдена, выпишем таблицу истинности формулы.

x	y	Z	$(x \vee y) \to z \cdot (\overline{x} \vee \overline{z})$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Опишем, как возникает совершенная конъюнктивная нормальная форма. Будем считать, что у нас есть три булевых переменных: x, y, z. Рассмотрим формулу $x \vee \overline{y} \vee z$. Ясно, что она ложна только на одном наборе значений переменных — (010). Если мы возьмем другой набор переменных, например (011), то формула $x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$ ложна только на этом наборе значений переменных (011). Такие конструкции называют *полными совершенными элементарными дизъюнкциями.*

Возьмем конъюнкцию двух построенных нами полных совершенных элементарных дизъюнкций $(x \vee \overline{y} \vee z) \cdot (x \vee \overline{y} \vee \overline{z})$. Ясно, что мы построили формулу, множество ложности которой состоит из двух наборов значений переменных: (010) и (011). Таким образом, у нас появились «кирпичи» (полные совершенные элементарные дизъюнкции — ПСЭДы) и «связующий материал» — конъюнкция, с помощью которых мы можем строить формулы, множество ложности которых нам известно. Такие формулы называют совершенными конъюнктивными нормальными формами (СКНФ). Ясно, что эти конструкции «жесткие» — разные СКНФ имеют разные множества ложности. Если мы с помощью равносильных преобразований преобразовали исходную формулу в СКНФ, то, *во-первых*, мы знаем ее множество ложности (т. е. ее таблицу истинности), *во-вторых*, представление формулы в виде СКНФ единственно (с точностью до порядка следования множителей).

Понятно, что, построив СКНФ, мы автоматически имеем таблицу истинности формулы, и наоборот, имея таблицу истинности, мы можем выписать СКНФ формулы. Имея теорию СКНФ, можно сформулировать **критерий равносильности формул**: «Формулы равносильны тогда и только тогда, когда их СКНФ совпадают или одновременно не существуют». (Последнее сказано потому, что у тождественно истинной формулы СКНФ не существует.)

Теперь мы можем выписать **алгоритм построения СКНФ:**

1. Перейти к булевой формуле, т. е. раскрыть импликацию и эквиваленцию.
2. Перейти с помощью закона де Моргана к формуле с «тесными отрицаниями», в которой отрицание встречается не выше, чем над переменной.
3. С помощью дистрибутивного закона сделать конъюнкцию внешней операцией (создать скобки).
4. Привести подобные и опустить тождественно истинные множители.
5. Пополнить элементарные дизъюнкции (получившиеся множители) недостающими переменными, повторить п. 4 и остановиться.

Рассмотрим **пример**. В скобках будем указывать номер пункта алгоритма, который будет применяться на следующем шаге преобразований.

$$
\begin{aligned}
&(x \vee y) \to z \cdot (\overline{x} \vee \overline{z}) \equiv (1) \equiv \overline{(x \vee y)} \vee z \cdot (\overline{x} \vee \overline{z}) \equiv (2)\\
&\equiv \overline{x} \cdot \overline{y} \vee z \cdot (\overline{x} \vee \overline{z}) \equiv (3) \equiv (\overline{x} \cdot \overline{y} \vee z) \cdot (\overline{x} \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \vee \overline{z}) \equiv (3)\\
&\equiv (\overline{x} \vee z) \cdot (\overline{y} \vee z) \cdot (\overline{x} \vee \overline{z}) \equiv (5)\\
&\equiv (\overline{x} \vee y \vee z) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \cdot (x \vee \overline{y} \vee z) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \cdot\\
&\cdot (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \equiv (5;4)\\
&\equiv (\overline{x} \vee y \vee z) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \cdot (x \vee \overline{y} \vee z) \cdot (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}).
\end{aligned}
$$

СКНФ найдена, выпишем таблицу истинности формулы.

x	y	Z	$(x \vee y) \to z \cdot (\overline{x} \vee \overline{z})$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Как видим, мы опять получили ту же самую таблицу, что уже получали, когда строили СДНФ нашей формулы.

Применение напрямую этого алгоритма психологически сложнее, чем алгоритма нахождения СДНФ, поскольку создавать скобки труднее, чем их раскрывать. Мы рекомендуем применять следующий обходной маневр — для исходной формулы найти двойственную, затем для двойственной найти ее СДНФ, а затем выписать с помощью булева принципа двойственную к полученной СДНФ формулу. Это и будет СКНФ исходной формулы, поскольку мы дважды применяли процедуру нахождения двойственной формулы, а любая формула равносильна дважды двойственной к себе.

Что же такое дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) и что такое конъюнктивная нормальная форма (КНФ)?

Конъюнкция переменных и их отрицаний называется элементарной конъюнкцией. Формула, имеющая вид элементарной конъюнкции или дизъюнкции элементарных конъюнкций, называется ДНФ. Ясно, что для любой формулы существует равносильная ей ДНФ. Ее можно получить, применив первые три пункта алгоритма построения СДНФ.

Дизъюнкция переменных и их отрицаний называется элементарной дизъюнкцией. Формула, имеющая вид элементарной дизъюнкции или конъюнкции элементарных дизъюнкций, называется КНФ. Ясно, что для любой формулы существует равносильная ей КНФ. Ее можно получить, применив первые три пункта алгоритма построения СКНФ.

Однозначная определенность СДНФ и СКНФ позволяет использовать их для доказательства равносильности формул алгебры высказываний. ДНФ и КНФ определены неоднозначно, поэтому желательно находить наиболее простую их форму. Мы не останавливаемся на нахождении специальных классов таких форм (например, тупиковые формы). Основное предназначение СДНФ, СКНФ — синтез формул, имеющих наперед заданную таблицу истинности, ДНФ и КНФ используются при реализации формул релейно-контактными схемами.

Привести к дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ):

8.163. $x \to (y \to z)$;
8.164. $\overline{xy} \vee (x \to y)$;
8.165. $(x \vee y \vee z)\,(x \to y)$;
8.166. $(x \vee y)\,(y \vee z) \to (x \vee z)$;
8.167. $x \sim y$;
8.168. $x \vee \vee y$;
8.169. $x \sim y \sim z$;
8.170. $(x \to y) \sim \overline{(x \to (y \to z))}$;
8.171. $(x \sim y)\,(y \sim z) \to (x \sim z)$;
8.172. $(x \sim y)\,(y \sim z)\,(z \sim x)$.

Привести к конъюнктивной нормальной форме (КНФ):

8.173. $x \vee yz$;

8.174. $xy \vee yz \vee \overline{z}$;

8.175. $x \vee yz \vee \overline{xyz}$;

8.176. $x \to yz$;

8.177. $x \to yzv$;

8.178. $x \sim yz$;

8.179. $xy \sim \overline{xy}$;

8.180. $x \sim y \sim z$;

8.181. $x \vee y \sim x \sim z$;

8.182. $x \vee \vee (y \vee \vee z)$.

Приведением к нормальной форме выяснить, какие из формул являются тождественно истинными, тождественно ложными, выполнимыми:

8.183. $xy \to x \vee y$;

8.184. $x \vee y \to xy$;

8.185. $\overline{x}y \to x\overline{y}$;

8.186. $(x \to y)\, x \to x \vee y \vee z$;

8.187. $x \vee y \to x \vee z$;

8.188. $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$;

8.189. $(x \to z) \to ((y \to z) \to ((x \vee y) \to z))$;

8.190. $\overline{x}y\ z \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee \overline{xyz}$;

8.191. $xy \vee \overline{xy} \sim (x \vee y)\,(\overline{x} \vee \overline{y})$.

Для каждой из следующих формул найти дизъюнктивное и конъюнктивное разложение:

8.192. $x \vee y$;

8.193. xy;

8.194. $x \to y$;

8.195. $x \sim y$;

8.196. $x \vee \vee y$;

8.197. $x \to (y \to x)$;

8.198. $\overline{x}y\overline{(x \to y)}$;

8.199. $x \vee y \to z$;

8.200. $xy \to z$.

Привести к совершенной ДНФ (СДНФ) форме следующие формулы:

8.201. $\overline{x} \vee \overline{y}$;

8.202. $(\overline{x} \to y) \to x$;

8.203. $x \to (y \to x)$;

8.204. $x \to (y \to z)$;

8.205. $(x \to y)\,(y \to z) \to (x \to z)$;

8.206. $(x \to y)\,(y \to z)\,(z \to x)$;

8.207. $(x \vee y)\,(y \vee z)\,(z \sim x)$;

8.208. $(x \to y)\,(y \to z)\,(z \to v)$.

Привести к совершенной КНФ (СКНФ) форме следующие формулы:

8.209. $(x \to y) \to x \vee \overline{y}$;

8.210. $x\overline{x} \cdot \overline{y}$;

8.211. $x\overline{y}\,(x \to y)$;

8.212. $x \to yz$;

8.213. xyz;

8.214. $(x \vee y)\,(y \to z)\,(z \sim x)$;

8.215. $x \vee y \to (x \to z)$;

8.216. $((x \to y) \sim (y \to \overline{x}))\,z$;

8.217. $x \vee y \vee z \to (x \vee y)\,z$;

8.218. $xy \to zv$.

Приведением к совершенным нормальным формам доказать неравносильность следующих формул:

8.219. $x \vee y$ и $x \to y$;

8.220. $x \to y$ и $x \sim y$;

8.221. $x \vee y$ и $x \bigoplus y$;

8.222. $x \to (y \to z)$ и $(x \to y) \to z$;

8.223. $xy \vee z$ и $x \to yz$;

8.224. $(x \to y) \vee z$ и $(x \sim y) \to z$;

8.225. $(x \to y)z$ и $x \to yz$;

8.226. $(x \to y) \sim z$ и $(x \sim y) \to z$;

8.227. $(x \vee y) \sim z$ и $(x \sim y) \vee z$;

8.228. $xy \sim z$ и $(x \sim y)\,z$.

Следующие формулы разложить по переменным x, y, z:

8.229. xy;

8.230. $x \vee y$;

8.231. x;

8.232. $(x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y})$;

8.233. $xy \vee \overline{x}y \vee \overline{xy}$.

Определение 8.1. *Формула F называется логическим следствием формул (посылок) $f_1, \dots, f_n$, если $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \to F \equiv 1$.*

Выяснить, является ли первая формула логическим следствием остальных формул:

8.234. y; $x \to y, x$;

8.235. x; $x \to y, y$;

8.236. $\overline{x}$; $x \to y$, $\overline{y}$;

8.237. $\overline{y}$; $x \to y$, $\overline{x}$;

8.238. y; $x \vee y$, $\overline{x}$;

8.239. y; $x \vee \vee y, x$;

8.240. $x \to z$; $x \to y, y \to z$;

8.241. $x \vee y \to z$; $x \to z, y \to z$;

8.242. $z \to x$; $x \to y, \overline{y} \to \overline{z}$;

8.243. $x \vee y$; $x \to y$, $\overline{y} \to \overline{x}$, $\overline{x} \vee \overline{y}$;

8.244. $\overline{x}$; $x \sim y$, $y \vee \overline{z}, z$;

8.245. z; $x \to y$, $\overline{y} \vee z$, x;

8.246. $\overline{y} \vee \overline{z}$; $x \vee \overline{z}$, $y \to x \cdot z$, x;

8.247. $z \to y$; $x \to y$, $\overline{x}$, z;

8.248. $\overline{z} \to \overline{x}$; $x \to y$, xy, $\overline{z} \to \overline{y}$;

8.249. $x \vee t$; $x \to y$, $y \to \overline{z}$, $x \vee z \to yt$;

8.250. xt; $x \to z$, $\overline{y} \vee z$, $z \to y \vee t$, $z \vee t$.

Найти все (с точностью до равносильности) логические следствия из посылок:

8.251. $x, x \to y$;

8.252. $\overline{x}$, $x \sim y$;

8.253. x, $\overline{y}$, $x \vee y$;

8.254. $x \to (y \to z), y \to z$;

8.255. $x \to (y \to z)$, $y \to \overline{z}$;

8.256. $x \to y$, $y \to z$;

8.257. $x \vee y$, $y \vee z$, $z \vee x$;

8.258. x, $x \vee y$, $x \vee y \vee z$;

8.259. $x \to (y \to (z \to t))$, $x \to (y \to z)$;

8.260. $x \to (y \to z)$, $y \to (z \to t)$.

Найти все (с точностью до равносильности) посылки, логическим следствием которых являются формулы:

8.261. $x \cdot y$;

8.262. $x \sim y$;

8.263. $x \vee y$;

8.264. $x \to y$;

8.265. $x \vee y \to x \cdot y$;

8.266. $x \cdot y \cdot z$;

8.267. $(x \vee y) \cdot z$;

8.268. $(x \to y) \cdot z$;

8.269. $x \to y \cdot z$;

8.270. $x \to (y \to \overline{z})$.

Определение 8.2. *Умозаключение вида* $\frac{f_1, \ldots, f_n}{F}$ *называется правильным, если формула* F *является логическим следствием формул* $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Докажите правильность умозаключений:

8.271. $\dfrac{\begin{matrix} a \to b \\ a \end{matrix}}{b}$;

8.272. $\dfrac{\begin{matrix} a \to b \\ \overline{b} \end{matrix}}{\overline{a}}$;

8.273. $\dfrac{\begin{matrix} a \vee b \\ \overline{a} \end{matrix}}{b}$;

8.274. $\dfrac{\begin{matrix} a \vee\!\vee b \\ a \end{matrix}}{\overline{b}}$;

8.275. $\dfrac{\begin{matrix} a \vee\!\vee b \\ \overline{a} \end{matrix}}{b}$;

8.276. $\dfrac{\begin{matrix} a \to b \\ b \to c \end{matrix}}{a \to c}$;

8.277. $\dfrac{\begin{matrix} a \vee b \\ a \to b \end{matrix}}{b}$;

8.278. $\dfrac{\begin{matrix} a \to b \\ b \to c \\ \overline{c} \end{matrix}}{a}$;

8.279. $\dfrac{\begin{matrix} a \to b \\ b \to c \\ a \end{matrix}}{b}$;

8.280. $\dfrac{\begin{matrix} a \vee\!\vee b \\ a \to b \end{matrix}}{b}$;

8.281. $\dfrac{\begin{matrix} a \vee\!\vee b \\ b \vee\!\vee c \end{matrix}}{a \to c}$;

8.282. $\dfrac{\begin{matrix} a \to b \\ b \to c \\ c \to a \end{matrix}}{a \to bc}$.

Выяснить, правильны ли следующие умозаключения:

8.283. $\begin{array}{l} a \to b \\ b \\ \hline a \end{array};$

8.284. $\begin{array}{l} a \to b \\ \overline{a} \\ \hline \overline{b} \end{array};$

8.285. $\begin{array}{l} a \to b \\ \overline{a} \to \overline{b} \\ \hline a \sim b \end{array};$

8.286. $\begin{array}{l} a \to b \\ \overline{b} \to \overline{a} \\ \hline a \sim b \end{array};$

8.287. $\begin{array}{l} a \to b \\ a \vee b \\ \hline a \end{array};$

8.288. $\begin{array}{l} a \to b \\ b \to a \\ a \vee b \\ \hline a \cdot b \end{array};$

8.289. $\begin{array}{l} a \to (b \to c) \\ (a \to b) \to c \\ \hline b \to c \end{array};$

8.290. $\begin{array}{l} a \to (b \to c) \\ (a \to b) \to c \\ \hline a \to c \end{array};$

8.291. $\begin{array}{l} a \to b\ c \\ b \to ac \\ c \to ab \\ a \vee b \vee c \\ \hline a \cdot b \cdot c \end{array};$

8.292. $\begin{array}{l} a \vee b \to c \\ a \vee c \to b \\ b \vee c \to a \\ a \vee b \vee c \\ \hline a \cdot b \cdot c \end{array}.$

Решения

P8.163. Найти ДНФ формулы $x \to (y \to z)$. Применим к формуле п. 1–3 алгоритма нахождения СДНФ.

$$x \to (y \to z) \equiv \overline{x} \vee (\overline{y} \vee z) \equiv \overline{x} \vee \overline{y} \vee z.$$

В результате мы получили ДНФ, состоящую из трех элементарных конъюнкций (?). Если же полученное записать иначе $\overline{x} \vee \overline{y} \vee z \equiv (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)$, то мы получаем СКНФ, состоящую из одной полной совершенной элементарной дизъюнкции.

Р8.165. Найти ДНФ формулы $(x \vee y \vee z)(x \to y)$. Применим к формуле п. 1–3 алгоритма нахождения СДНФ.

$$(x \vee y \vee z)(x \to y) \equiv (x \vee y \vee z)(\overline{x} \vee y) \equiv$$
$$\equiv \overline{x}y \vee \overline{x}z \vee xy \vee y \vee yz \equiv \overline{x}z \vee y.$$

Заметим, что уже после раскрытия скобок мы получили ДНФ, а потом применили закон поглощения, убрав слагаемые, содержащие переменную y множителем. В результате мы получили более простую ДНФ.

Р8.171. Найти ДНФ формулы $(x \leftrightarrow y)(y \leftrightarrow z) \to (x \leftrightarrow z)$. Применим к формуле п. 1–3 алгоритма нахождения СДНФ.

$$(x \leftrightarrow y)(y \leftrightarrow z) \to (x \leftrightarrow z) \equiv \overline{(x \leftrightarrow y)(y \leftrightarrow z)} \vee (x \leftrightarrow z) \equiv$$
$$\equiv \overline{(x \leftrightarrow y)} \vee \overline{(y \leftrightarrow z)} \vee (xz \vee \overline{x} \cdot \overline{z}) \equiv$$
$$\equiv \overline{xy \vee \overline{x} \cdot \overline{y}} \vee \overline{yz \vee \overline{y} \cdot \overline{z}} \vee xz \vee \overline{x} \cdot \overline{z} \equiv$$
$$\equiv (\overline{x} \vee \overline{y}) \cdot (x \vee y) \vee xz \vee \overline{x} \cdot \overline{z} \equiv x\overline{y} \vee \overline{x}y \vee xz \vee \overline{x}\ \overline{z}.$$

Р8.173. Найти КНФ формулы $x \vee yz$. Применим к формуле п. 1–3 алгоритма нахождения СКНФ:

$$x \vee yz \equiv (x \vee y) \cdot (x \vee z).$$

Получена КНФ, состоящая из двух элементарных дизъюнкций.

Р8.175. Найти КНФ формулы $x \vee yz \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$. Перейдем к двойственной формуле, построим для нее ДНФ и найдем для полученной ДНФ двойственную формулу.

$$(x \vee yz \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z})^* \equiv x \cdot (y \vee z) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}).$$
$$x \cdot (y \vee z) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \equiv (xy \vee xz) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \equiv xy\overline{z} \vee x\overline{y}z.$$
$$(xy\overline{z} \vee x\overline{y}z)^* = (x \vee y \vee \overline{z}) \cdot (x \vee \overline{y} \vee z).$$

Ясно, что мы получили не просто КНФ, а СКНФ.

Следующая серия примеров связана с критериями тождественной истинности и тождественной ложности формул. Сформулируем **критерий тождественной ложности формулы:**

«Для того чтобы формула алгебры высказываний была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы в равносильной ей ДНФ в каждой элементарной конъюнкции встречалась пара — переменная и ее отрицание».

Ясно, что **критерий тождественной истинности формулы** является двойственным к сформулированному: *«Для того чтобы формула алгебры высказываний была тождественно истинной, необходимо и достаточно, чтобы в равносильной ей КНФ в каждой элементарной дизъюнкции встречалась пара — переменная и ее отрицание»*. Наличие этих двух критериев позволяет для каждой формулы алгебры высказываний выяснить, какой она является — тождественно истинной, тождественно ложной или нетривиально выполнимой формулой.

P8.183. Выяснить, какой является формула — тождественно истинной, тождественно ложной или нетривиально выполнимой $xy \to (x \vee y)$.

Приведем нашу формулу к ДНФ.

$xy \to (x \vee y) \equiv \overline{xy} \vee x \vee y \equiv \overline{x} \vee \overline{y} \vee x \vee y$. Мы получили ДНФ, критерий «сработал» в отрицательном смысле, значит, формула не является тождественно ложной (конечно, уже видно, что она является тождественно истинной формулой, но мы будем делать вид, что этого не заметили). Приведем нашу формулу к КНФ. Для этого достаточно посмотреть на полученное более внимательно, а именно — поставить наружные скобки:

$$xy \to (x \vee y) \equiv \overline{x} \vee \overline{y} \vee x \vee y \equiv (\overline{x} \vee \overline{y} \vee x \vee y).$$

Мы получили КНФ, состоящую из одной элементарной дизъюнкции, применяя к ней критерий тождественной истинности, получаем — формула является тождественно истинной.

Р8.185. Выяснить, какой является формула — тождественно истинной, тождественно ложной или нетривиально выполнимой — $\overline{x}y \to x\overline{y}$.

Приведем нашу формулу к ДНФ.

$\overline{x}y \to x\overline{y} \equiv \overline{\overline{x}y} \vee x\overline{y} \equiv x \vee \overline{y} \vee x\overline{y}$. Мы получили ДНФ, критерий «сработал» в отрицательном смысле, значит, формула не является тождественно ложной. Приведем нашу формулу к КНФ.

$$x \vee \overline{y} \vee x\overline{y} \underset{\text{поглощения}}{\overset{\text{закон}}{\equiv}} (x \vee \overline{y})\,.$$

Мы получили КНФ. Критерий тождественной истинности «сработал» в отрицательном смысле (посмотрите на элементарную дизъюнкцию), значит, формула не является тождественно истинной. Окончательно получаем — формула является нетривиально выполнимой формулой.

Следующие примеры связаны с разложениями по переменным. Их два — дизъюнктивное и конъюнктивное. Второе — двойственное понятие к первому. В основе дизъюнктивного разложения лежит лемма о дизъюнктивном разложении (лемма 1.1) по переменной, смысл которой дает формула

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \equiv$$
$$\equiv x_i \cdot f(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n) \vee \overline{x}_i \cdot f(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n).$$

Полное дизъюнктивное разложение (по всем переменным) можно получить, применяя последовательно эту лемму по всем переменным.

Полное конъюнктивное разложение можно получить по следующей схеме:

$$f \equiv (f^*)^* \equiv (\text{дизъюнктивное разложение} f^*)^*.$$

Р8.195. Найти полные разложения формулы $x \sim y$.

Найдем полное дизъюнктивное разложение, воспользовавшись леммой.

$$x \sim y \equiv x \cdot (1 \sim y) \vee \overline{x} \cdot (0 \sim y) \equiv$$
$$\equiv x \cdot (y \cdot (1 \sim 1) \vee \overline{y} \cdot (1 \sim 0)) \vee \overline{x} \cdot (y \cdot (0 \sim 1) \vee \overline{y} \cdot (0 \sim 0)) \equiv$$
$$\equiv xy \cdot (1 \sim 1) \vee x\overline{y} \cdot (1 \sim 0) \vee \overline{x}y \cdot (0 \sim 1) \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot (0 \sim 0).$$

Найдем теперь полное конъюнктивное разложение.

$$x \sim y \equiv ((x \sim y)^*)^* \equiv$$
$$\equiv (xy \cdot (1 \sim 1)^* \vee x\overline{y} \cdot (1 \sim 0)^* \vee \overline{x}y \cdot (0 \sim 1)^* \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot (0 \sim 0)^*)^* \equiv$$
$$\equiv (x \vee y \vee ((1 \sim 1)^*)^*)(\overline{x} \vee y \vee ((0 \sim 1)^*)^*) \&$$
$$\& (x \vee \overline{y} \vee ((1 \sim 0)^*)^*)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee ((0 \sim 0)^*)^*) \equiv$$
$$\equiv (x \vee y \vee (1 \sim 1))(\overline{x} \vee y \vee ((0 \sim 1)) \&$$
$$\& (x \vee \overline{y} \vee ((1 \sim 0))(\overline{x} \vee \overline{y} \vee ((0 \sim 0)).$$

Заметим, что если в полном дизъюнктивном разложении вычислить значения истинности высказываний, то получим СДНФ формулы

$$x \sim y \equiv$$
$$\equiv xy \cdot (1 \sim 1) \vee x\overline{y} \cdot (1 \sim 0) \vee \overline{x}y \cdot (0 \sim 1) \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot (0 \sim 0) \equiv$$
$$\equiv xy \vee \overline{x} \cdot \overline{y}.$$

Если сделать это же в полном конъюнктивном разложении, то получим СКНФ формулы

$$x \sim y \equiv$$
$$\equiv (x \vee xy \vee (1x \sim x1))(\overline{x} \vee y \vee ((0 \sim 1))(x \vee \overline{y} \vee ((1 \sim 0))$$
$$\& (\overline{x} \vee \overline{y} \vee ((0 \sim 0)) \equiv (\overline{x} \vee y)\,(x \vee \overline{y})\,.$$

Р8.201. Найти СДНФ формулы $\overline{x} \vee \overline{y}$. Формула уже имеет вид ДНФ, нам необходимо довести ее до СДНФ (для этого выполняются шаги 5 и 4 алгоритма).

$$\overline{x} \vee \overline{y} \equiv \overline{x}\,(y \vee \overline{y}) \vee (x \vee \overline{x}) \cdot \overline{y} \equiv \overline{x} \cdot y \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \vee x \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \equiv$$
$$\equiv \overline{x} \cdot y \vee x \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \cdot \overline{y}.$$

P8.205. Найти СДНФ формулы $(x \to y)\,(y \to z) \to (x \to z)$. Ясно, что эта формула является тождественно истинной формулой, поэтому результат уже можно предвидеть, в СДНФ должно содержаться восемь полных совершенных элементарных дизъюнкций. Для построения СДНФ применим алгоритм.

$$(x \to y)\,(y \to z) \to (x \to z) \equiv \overline{(\overline{x} \vee y)\,(\overline{y} \vee z)} \vee (\overline{x} \vee z) \equiv$$
$$\equiv x \cdot \overline{y} \vee y \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \vee z \equiv$$
$$\equiv x \cdot \overline{y} \cdot z \vee x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee x \cdot y \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot y \cdot z \vee$$
$$\vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \vee \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee x \cdot y \cdot z \vee \overline{x} \cdot y \cdot z \vee$$
$$\vee x \cdot \overline{y} \cdot z \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \equiv x \cdot y \cdot z \vee \overline{x} \cdot y \cdot z \vee$$
$$\vee x \cdot \overline{y} \cdot z \vee x \cdot y \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \vee \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} \vee x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}.$$

P8.209. Найти СКНФ формулы $(x \to y) \to (x \vee \overline{y})$. Применим алгоритм построения СКНФ.

$$(x \to y) \to (x \vee \overline{y}) \equiv \overline{\overline{x} \vee y} \vee (x \vee \overline{y}) \equiv x \cdot \overline{y} \vee (x \vee \overline{y}) \equiv$$
$$\equiv (x \vee x \vee \overline{y}) \cdot (\overline{y} \vee x \vee \overline{y}) \equiv (x \vee \overline{y})\,.$$

P8.215. Найти СКНФ формулы $(x \vee y) \to (x \to z)$. Применим алгоритм построения СКНФ.

$$(x \vee y) \to (x \to z) \equiv \overline{x \vee y} \vee (\overline{x} \vee z) \equiv \overline{x} \cdot \overline{y} \vee (\overline{x} \vee z) \equiv$$
$$\equiv (\overline{x} \vee \overline{x} \vee z) \cdot (\overline{y} \vee \overline{x} \vee z) \equiv (\overline{x} \vee z) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \equiv$$
$$\equiv (\overline{x} \vee y \vee z) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \equiv$$
$$\equiv (\overline{x} \vee y \vee z) \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)\,.$$

Важным понятием является ***логическое следствие.*** Напомним его определение:

«Формула F называется *логическим следствием* посылок $f_1, \ldots, f_n$, если $f_1 \ldots f_n \to F \equiv 1$».

Для того чтобы научиться решать эти примеры с помощью СДНФ и СКНФ, разберемся, как по СДНФ (СКНФ) формул построить СДНФ (СКНФ) их конъюнкции. Поскольку множество истинности конъюнкции — пересечение множеств истинности сомножителей, то в СДНФ конъюнкции войдут только такие полные совершенные элементарные конъюнкции, которые входят в СДНФ всех сомножителей.

Множество ложности конъюнкции — объединение множеств ложности сомножителей, поэтому в СКНФ конъюнкции формул войдут все полные совершенные элементарные дизъюнкции, входящие в СКНФ хотя бы одного из сомножителей.

Р8.235. Выяснить, является ли первая формула логическим следствием остальных формул x, $x \to y, y$. Из соображений здравого смысла ясно, что мы должны получить отрицательный ответ.

Построим СДНФ каждой из формул (необходимо считать каждую из них, зависящей от всех переменных).

$$x \equiv xy \vee x\overline{y};\ x \to y \equiv \overline{x} \vee y \equiv \overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee xy \vee \overline{x}y \equiv$$
$$\equiv xy \vee \overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{y};\quad y \equiv xy \vee \overline{x}y.$$

Найдем теперь СДНФ конъюнкции посылок:

$$(x \to y) \cdot y \equiv xy \vee \overline{x} \cdot y.$$

Сравним полученную СДНФ с СДНФ проверяемой на логическое следствие формулы. Мы видим, что в СДНФ конъюнкции посылок имеется полная совершенная элементарная конъюнкция $(\overline{x} \cdot y)$, которой нет в СДНФ проверяемой формулы, значит, данная формула не является логическим следствием данных посылок.

P8.237. Выяснить, является ли первая формула логическим следствием остальных формул $\overline{x}$, $x \to y$, $\overline{y}$. Из соображений здравого смысла ясно, что мы должны получить утвердительный ответ. Построим СДНФ каждой из формул (необходимо считать каждую из них зависящей от всех переменных).

$$\overline{x} \equiv \overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{y};\ x \to y \equiv \overline{x} \vee y \equiv \overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee xy \vee \overline{x}y \equiv$$
$$\equiv \overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee xy; \overline{y} \equiv x\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{y}.$$

Найдем теперь СДНФ конъюнкции посылок.

$$(x \to y) \cdot \overline{y} \equiv \overline{x} \cdot \overline{y}$$

Сравним полученную СДНФ с СДНФ проверяемой на логическое следствие формулы. Мы видим, что она «содержится» в СДНФ формулы. Значит, формула является логическим следствием этих посылок.

P8.251. Найти все (с точностью до равносильных) логические следствия посылок x, $x \to y$.

Ясно, что СДНФ любого логического следствия должна содержать в себе СДНФ конъюнкции посылок. Поэтому СДНФ логических следствий можно получать «расширением» (в том числе тривиальным) СДНФ конъюнкции посылок.

Найдем СДНФ посылок и СДНФ их конъюнкции.

$$x \equiv xy \vee x\overline{y}; x \to y \equiv \overline{x} \vee y \equiv \overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee xy \vee \overline{x}y \equiv$$
$$\equiv \overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee xy;$$
$$x \cdot (x \to y) \equiv xy \vee \overline{x}y.$$

Выпишем теперь полные совершенные элементарные конъюнкции, которые не вошли в СДНФ (материал для пополнения): $x \cdot \overline{y}$, $\overline{x} \cdot \overline{y}$. Теперь мы можем выписать СДНФ всех логических следствий:

$$xy \vee \overline{x} \cdot y, xy \vee \overline{x} \cdot y \vee x \cdot \overline{y},$$
$$xy \vee \overline{x} \cdot y \vee \overline{x} \cdot \overline{y}, xy \vee \overline{x} \cdot y \vee x \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \cdot \overline{y}.$$

Что это за формулы? Ясно, что первая — это y, вторая — $x \vee y$, третья — $\overline{x} \vee y$, последняя — тождественная истина (константа 1).

Р8.261. Найти все (с точностью до равносильных) посылки, следствием которых является формула xy.

Ясно, что СДНФ конъюнкции посылок должна быть вложена в СДНФ логического следствия и поэтому такие СДНФ найти легко. Что касается самих посылок, то «простор для творчества» велик, начиная от их количества и заканчивая способами их конструирования.

Продемонстрируем сказанное на этом примере.

Сама формула уже имеет вид СДНФ, выпишем возможные СДНФ конъюнкции посылок. Это $xy, 0$. Если же мы договоримся, что посылок две, то тут возможно большое количество вариантов, например, x, y или xy, x и т. д.

Что касается примеров на проверку правильности умозаключений (8.271–8.292), то они повторяют примеры на логическое следствие, поскольку определение правильности умозаключения (определение 8.2) отсылает нас к понятию ***логическое следствие***.

§ 8.5. Релейно-контактные схемы и схемы из функциональных элементов

Задачи синтеза можно решать, используя связь совершенных нормальных форм с таблицами истинности. Перед решением задач этого параграфа просмотрите еще раз пример 1.23 книги.

П **Пример 8.19.** Построить схему машины экзаменатора, в которой студенту предлагаются вопрос и четыре варианта ответа на него, только один из которых правильный. В случае, когда ответ правильный, должно зажигаться табло «ответ верен».

Закодируем номера ответов двухразрядными двоичными числами 00, 01, 10, 11. Студент и машина должны генерировать двухразрядные управляющие сигналы.

Функция проводимости схемы задается таблицей

C_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
C_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
M_1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
M_2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1

Выпишем СДНФ, реализующую данную функцию проводимости, и упростим ее. Через C_1, C_2 обозначены разряды управляющего сигнала студента, M_1, M_2 — соответствующие разряды управляющего сигнала машины).

$$f \equiv \overline{C}_1\overline{C}_2\overline{M}_1\overline{M}_2 \ \vee \overline{C}_1 C_2 \overline{M}_1 M_2 \vee$$

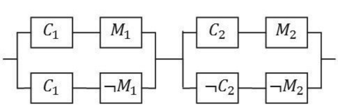
$$\vee C_1\overline{C}_2 M_1 \overline{M}_2 \vee C_1 C_2 M_1 M_2 \equiv$$

$$\equiv \overline{C}_1 \left(\overline{C}_2\overline{M}_2 \vee C_2 M_2\right) \overline{M}_1 \vee C_1 \left(\overline{C}_2\overline{M}_2 \vee C_2 M_2\right) M_1 \equiv$$

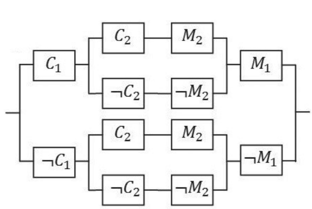
$$\equiv \left(\overline{C}_2\overline{M}_2 \vee C_2 M_2\right) \left(\overline{C}_1 \ \overline{M}_1 \vee C_1 M_1\right).$$

Схема имеет вид

а



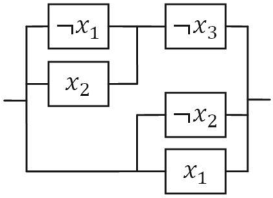
б



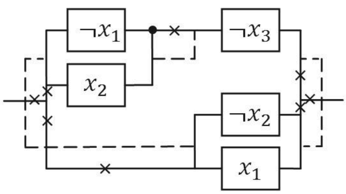
Ясно, что схема *а* предпочтительней схемы *б*.

Анализ схем

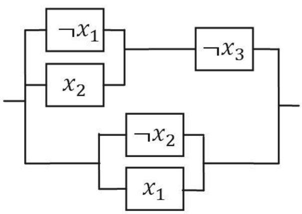
$\boxed{\text{П}}$ **Пример 8.11.** Найти функцию проводимости схемы



При решении задач такого типа следует помнить, что последовательное соединение реле соответствует конъюнкции, а параллельное — дизъюнкции. Полезным является умение преобразовать топологию схемы так, чтобы явно были видны последовательные и параллельные участки схемы. Преобразуем топологию схемы (добавленные участки обозначены пунктиром, удаляемые участки помечены «x»):

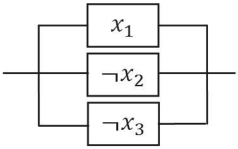


Получаем схему

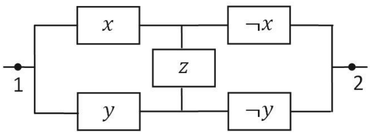


Ее функция проводимости задается формулой
$x_1 \vee \overline{x}_2 \vee (\overline{x}_1 \vee x_2)\, \overline{x}_3 \equiv x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_3 \equiv x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3.$

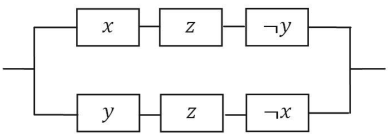
Значит, более простая схема имеет вид



! **Замечание 5.** Существуют схемы, в которых преобразование топологии не приводит к нужному результату (или такое преобразование трудно провести). Например, рассмотрим схему

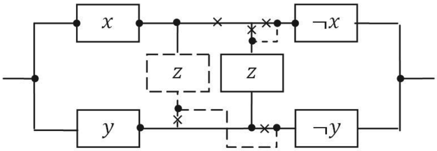


Анализ всевозможных путей прохождения по этой схеме от точки 1 до точки 2 показывает, что эквивалентная схема имеет следующий вид:

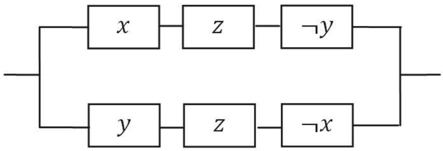


Функция проводимости исходной схемы задается формулой $xz\overline{y} \vee \overline{x}yz$.

Проведем теперь преобразование топологии схемы (здесь будут добавляться и удаляться не только проводники, но и реле):



Пересечение проводников, не отмеченное жирной точкой, означает их изоляцию друг от друга. Изобразим оставшееся на последней схеме:



Составить схемы, реализующие следующие функции:

8.293. $x \to y$; **8.294.** $x \sim y$;

8.295. $x \bigoplus y$; **8.296.** $(x \to y)\,(y \to z)$;

8.297. $(x \to y) \to \overline{x}\,(y \vee z)$;

8.298.

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
f_1	0	1	1	0	1	0	0	0
f_2	0	1	0	1	0	1	0	0
f_3	1	1	0	0	1	1	0	1

8.299. Имеется одна лампа в лестничном пролете двухэтажного дома. Построить схему так, чтобы на каждом этаже своим выключателем можно было гасить и зажигать лампу независимо от положения другого выключателя.

8.300. По установленному сигналу каждый игрок замыкает или размыкает выключатель, находящийся под его управлением. Если оба делают одно и то же, то выигрывает A, в противном случае — B. Построить схему так, чтобы в случае выигрыша A зажигалась лампочка.

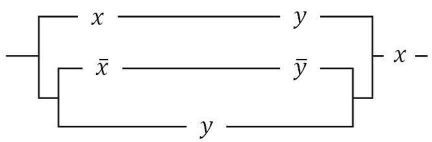
8.301. Комитет из 5 человек принимает решения большинством голосов. Председатель пользуется правом «вето». Построить схему так, чтобы голосование происходило нажатием кнопок и в случае принятия решения загоралась лампочка.

8.302. Построить схему, управляющую спуском лифта со второго этажа на первый. Условия, определяющие работу лифта, следующие:

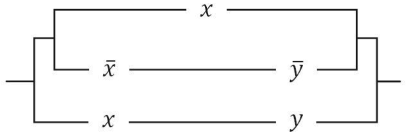
- дверь лифта на первом этаже закрыта;
- дверь лифта на втором этаже закрыта;
- пассажир находится в кабине лифта;
- кнопка вызова на первом этаже нажата;
- кнопка спуска на первый этаж в кабине нажата.

Найти функции проводимости следующих схем, если можно, упростить схемы:

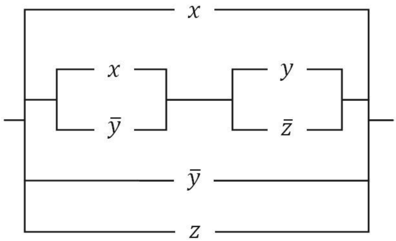
8.303.



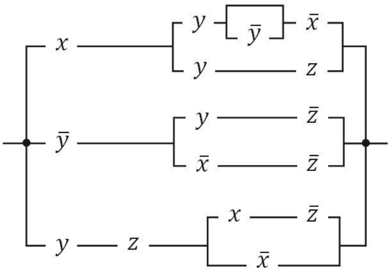
8.304.



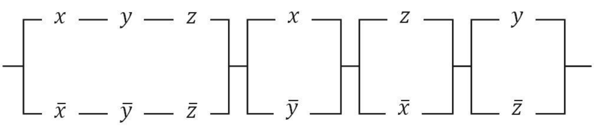
8.305.



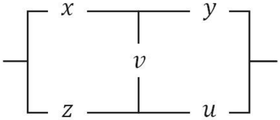
8.306.



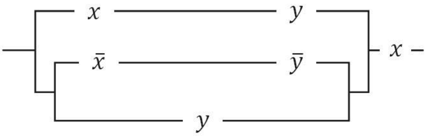
8.307.



8.308.



8.309.



Решения

Примеры 8.293–8.297 решаются очень просто, достаточно заданную формулу привести к булевой формуле с тесными отрицаниями и реализовать полученное в виде РКС, имеющей заданную исходной формулой функцию проводимости. Наибольший интерес в этой главе представляют примеры, связанные с синтезом РКС.

Р8.229. Имеется одна лампа в лестничном пролете двухэтажного дома. Построить схему так, чтобы на каждом этаже своим выключателем можно было бы включать и выключать лампу независимо от положения другого выключателя.

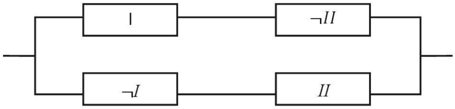
Ясно, что эти выключатели будут создавать два управляющих сигнала. Положим, что если оба выключателя находятся в положении «выключено», т. е. генерируют нулевой сигнал, то лампа в подъезде не светится. Далее вся таблица, описывающая работу схемы, определяется условиями задачи.

I	II	ЛАМПА
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

По единицам таблицы выпишем СДНФ:

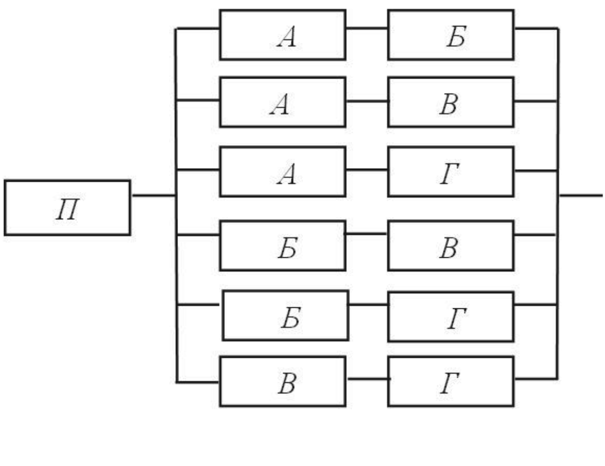
$$I \cdot \overline{II} \vee \bar{I} \cdot II.$$

Ясно, что упростить формулу не удастся. Нарисуем схему, реализующую полученную формулу:



P8.301. Комитет, состоящий из 5 человек, принимает решения простым большинством голосов, при этом председатель обладает правом «вето». Построить схему так, чтобы голосование происходило нажатием кнопок и лампочка загоралась в случае положительного решения.

Если решение примера начинать с таблицы, то она должна содержать 32 строки и 6 столбцов. Мы обойдемся без таблицы. Ясно, что реле председателя ($П$) должно быть подключено последовательно к остальной части схемы. Это позволяет реализовать его право «вето». Далее для положительного решения к голосу председателя должны присоединиться минимум два других члена комитета ($А$, $Б$, $В$, $Г$), поэтому в остальной части схемы должны быть параллельные участки, содержащие последовательно включенные реле двух рядовых членов комитета. Нарисуем теперь эту схему:



§ 8.6. Алгебра предикатов. Кванторы

§ 8.6.1 Предикаты и кванторы, множества, отображения

При решении примеров на доказательство равносильности формул алгебры предикатов следует обращать внимание на следующее:

1. Области определения предикатов, стоящих слева и справа от знака «$\equiv$», должны совпадать.
2. Связанная квантором переменная может обозначаться любой буквой, т. е.
$$\forall x P(x) \equiv \forall y P(y) \equiv \forall t P(t) \equiv \ldots$$
3. Основные равносильности, содержащие кванторы, имеют место в более широком смысле, чем они описаны в теореме 2.4.

Например:
$$\forall x \forall y \exists z P(x, y, z) \equiv \forall y \forall x \exists z P(x, y, z);$$
$$\forall x \forall y \forall z P(x, y, z) \equiv \forall z \forall x \forall y P(x, y, z).$$

Какие из следующих предложений являются предикатами?

8.310. x делится на 3 $(\forall x \in N)$;
8.311. x делится на 5;
8.312. $y = x^2, \quad x \in R$;
8.313. $x^2 + x + 1, \quad x \in R$;
8.314. $x^2 + y^2 = 0, \quad x, y \in R$;
8.315. $x^2 + y^2 \geq 0, \quad x, y \in R$;
8.316. $x^2 + y^2 = z, \quad x, y, z \in R$;
8.317. $x < y, \quad x, y \in R$;
8.318. $x^2 + y^2 < -2, \quad x, y \in R$;
8.319. Для всякого $x \in R$ найдется $y \in R$ такой, что $x = y + 1$.

8.320. Какие из предикатов в примерах 8.310–8.319 тождественно истинны, тождественно ложны, выполнимы?

Выделить свободные переменные следующих предикатов:

8.321. $\forall x\,(x - y \equiv x + (-y)\,; x, y \in R)\,;$

8.322. $(x < y; x, y \in R) \to \exists z\,((x \wedge z) \wedge (z < y) : z \in R)\,;$

8.323. $\forall y\,((y \in R,\ y > 0) \to \exists z\,(x = yz; x, z \in R))\,;$

8.324. $\forall x\,(\exists y P\,(x, y) \to Q(x, y, z))\,;$

8.325. $\exists u \forall v \Phi\,(u, v) \to \exists t \Phi(t, u);$

8.326. Из предикатов примеров 8.310–8.319 образовать с помощью кванторов высказывания, найти их значения истинности.

Доказать следующие равносильности:

8.327. $\overline{\forall x P\,(x, y)} \equiv \exists x \overline{P\,(x, y)};$

8.328. $\overline{\exists x P\,(x, y)} \equiv \forall x \overline{P\,(x, y)};$

8.329. $\forall x \forall y P\,(x.y.z) \equiv \forall y \forall x P\,(x, y, z)\,;$

8.330. $\exists x \exists y P\,(x, y, z) \equiv \exists y \exists x P\,(x, y, z)\,;$

8.331. $\forall x\,(P(x, y) \wedge Q(x, y)) \equiv \forall x P\,(x, y) \wedge \forall x Q\,(x, y)\,;$

8.332. $\exists x\,(P(x, y) \vee Q(x, y)) \equiv \exists x P\,(x, y) \vee \exists x Q\,(x, y)\,;$

8.333. $\forall x\,(P\,(x, z) \vee Q\,(y, z)) \equiv \forall x P\,(x, z) \vee Q\,(y, z)\,;$

8.334. $\exists x\,(P\,(x, z) \wedge Q\,(y, z)) \equiv \exists x P\,(x, z) \wedge Q\,(y, z)\,;$

8.335. $\exists x \forall y\ P\,(x, y, z) \to \forall y \exists x P\,(x, y, z) \equiv 1.$

Ввести необходимые предикаты и с помощью кванторов записать следующие определения, с помощью законов де Моргана получить их отрицания:

8.336. Определение предела числовой последовательности.

8.337. Определение фундаментальной по Коши последовательности.

8.338. Определение предела функции в точке.

8.339. Определение непрерывности функции в точке.

8.340. Определение непрерывной на интервале функции.

8.341. Определение равномерно непрерывной на интервале функции.

8.342. Почему из равномерной непрерывности на (a, b) следует непрерывность функции на (a, b)?

8.343. Доказать, что существуют предикаты Φ, Q и P такие, что

$$\forall x\ \ (\Phi(x) \vee Q(x)) \not\equiv \forall x \Phi\,(x) \vee \forall x Q\,(x);$$
$$\exists x\ \ (\Phi(x) \wedge Q(x)) \not\equiv \exists x \Phi\,(x) \wedge \exists x Q\,(x);$$
$$\forall y \exists x P\,(x) \to \exists x \forall y P(x) \not\equiv 1.$$

8.344. Какие из следующих формул тождественно истинны?

$$\forall x\ \ (\Phi\,(\mathrm{x}) \to P\,(x)) \to (\forall x \Phi\,(x) \to \forall x P\,(x));$$
$$\forall x\ \ (\Phi\,(\mathrm{x}) \to P(x)) \to (\exists x \Phi(x) \to \exists x P(x));$$
$$\exists x\ \ (\Phi\,(\mathrm{x}) \to P(x)) \to (\forall x \Phi(x) \to \forall x P(x));$$
$$\exists x\ \ (\Phi\,(\mathrm{x}) \to P(x)) \to (\exists x \Phi(x) \to \exists x P(x));$$
$$\forall x\ \ (\Phi\,(\mathrm{x}) \to P(x)) \sim (\exists x \Phi(x) \to \forall x P(x)).$$

Решения

Р8.311. Является ли предикатом следующее предложение: «x делится на 5»? Ясно, что не является, поскольку не указана область определения переменной. Если «исправить» этот «недостаток», то можно получить следующий предикат: «x делится на 5, $x \in N$».

Р8.313. Является ли предикатом следующее предложение: «$x^2 - 3x + 2$, $x \in R$»? Ясно, что не является, поскольку при фиксации значения переменной мы не получаем высказывание. Если «исправить» этот «недостаток», то можно получить, например, следующий предикат: «$x^2 - 3x + 2 \geq 0$, $x \in R$».

P8.317. Является ли предикатом следующее предложение: «$x < y$; $x, y \in R$»? Ясно, что это предложение задает двуместный предикат.

P8.321. Выделить свободные переменные предиката: «$\forall x(x - y = x + (-y))$, $x, y \in R$». Ясно, что свободной переменной является y. Переменная x связана квантором всеобщности.

Мы не разбираем примеры 8.327–8.335, поскольку они фактически повторяют теорему об основных равносильностях, содержащих кванторы (теорема 2.3).

P8.343. Доказать, что существуют такие предикаты Φ, Q, P, что

а) $\forall x(\Phi(x) \vee Q(x)) \neq \forall x\Phi(x) \vee \forall xQ(x)$;
б) $\exists x(\Phi(x) \cdot Q(x)) \neq \exists x\Phi(x) \cdot \exists xQ(x)$;
в) $\forall y\exists xP(x, y) \to \exists x\forall yP(x, y) \neq 1$.

Для того чтобы доказать пункты а) и б), рассмотрим следующие предикаты: «$\Phi(x) = x$ — *четное число,* $x \in N$», «$Q(x) = x$ — нечетное число, $x \in N$». Ясно, что эти предикаты не тождественно истинны, а их дизъюнкция — тождественно истинный предикат. Они же не являются тождественно ложными предикатами, а их конъюнкция — тождественно ложный предикат.

Рассмотрим теперь предикат

$$P(x, y) = «x = y, x \in R, y \in R».$$

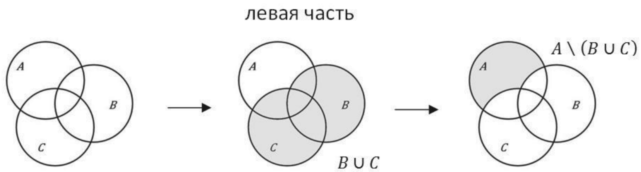
Ясно, что $\forall y\exists xP(x, y) \equiv 1, \exists x\forall yP(x, y) \equiv 0$.

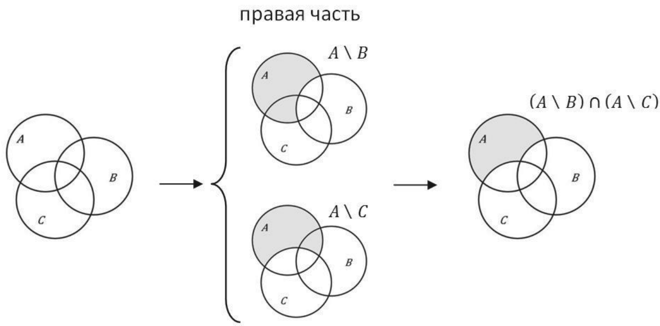
§ 8.7. Алгебра множеств

Основным типом примеров следующего пункта является «Доказать равенство множеств, заданных формулами алгебры множеств». Решение таких примеров следует начинать с построения диаграмм Виенна для левой и правой частей. Если картинки не совпали, то вы уже решили пример и доказали, что равенства множеств нет. В противном случае вам рекомендуется перейти к формулам алгебры предикатов, определяющим эти множества, и вычислить, равносильны ли они, или, оставаясь в формулах алгебры множеств, перейти к булевым формулам алгебры множеств и воспользоваться основными равенствами булевой алгебры множеств.

П **Пример 8.12.** Доказать, что $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

Построим диаграммы Виенна левой и правой частей:





Перейдем к булевым формулам алгебры множеств:

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) =$$
$$= \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(A \cap \overline{C}\right) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Особое внимание следует уделить решению примеров, содержащих семейства множеств, так как операции над семействами множеств (§ 2.5) вводятся с помощью кванторов («картинку» в таких примерах не нарисуешь и многоточиями не обойдешься).

П **Пример 8.13.** Доказать, что

$$A \bigcap \left(\bigcup_{i \in X} B_i \right) = \bigcup_{i \in X} (A \cap B_i).$$

► $x \in A \cap \left(\bigcup_{i \in X} B_i \right) \equiv (x \in A) \wedge \left(x \in \bigcup_{i \in X} B_i \right) \equiv$

$$\equiv (x \in A) \wedge \left(\exists i \, (x \in B_i)\right) \equiv \exists i \, ((x \in A) \wedge (x \in B_i)) \equiv$$

$$\equiv \exists i \, (x \in (A \cap B_i)) \equiv x \in \bigcup_{i \in X} (A \cap B_i).$$ ◄

8.345. Доказать, что множество A всех четных чисел равно множеству B целых чисел, представимых в виде суммы двух нечетных целых чисел.

8.346. Доказать, что множество
$A = \{x \mid \ x \in \mathbb{Z}, x$ делится на $6\}$ равно множеству
$B = \{x \mid \ x \in \mathbb{Z}, (x$ делится на $2), (x$ делится на $3)\}$,
где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

8.347. Доказать, что $\mathbb{Z} = \{x \mid \exists m \exists n \, (\subset \mathbb{Z}) \, x = 3m + 5n\}$.

8.348. Привести пример таких множеств A, B, C, что $A \in B$, $B \in C$, но $A \notin C$.

8.349. Привести пример множеств A, B таких, что $A \in B$ и $A \subset B$.

8.350. Доказать, что если $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_1$, то $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$.

8.351. Доказать, что $A \subset B$ тогда и только тогда, когда $A \backslash B = \varnothing$.

8.352. Доказать, что $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \vartriangle B = \varnothing$.

Доказать равенства:

8.353. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$;

8.354. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$;

8.355. $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$;

8.356. $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$;

8.357. $A \vartriangle B = B \vartriangle A$;

8.358. $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$;

8.359. $\mathbf{A} \cap (B \vartriangle C) = (A \cap B) \vartriangle (A \cap C)$;

8.360. $A \vartriangle (A \vartriangle B) = B$.

8.361. Выразить операции $\cup, \cap$, $\backslash$ через $\vartriangle, \cap$.

8.362. Выразить операции $\cup$, $\cap$, $\backslash$ через $\vartriangle, \cup$.

8.363. Выразить операции $\cup, \cap, \backslash$ через $\vartriangle, \backslash$.

8.364. Доказать, что нельзя выразить $\backslash$ через $\cup$ $\cap$.

8.365. Доказать, что нельзя выразить $\cup$ через $\cap$ и $\backslash$.

8.366. Пусть $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \vartriangle B$.

8.367. Перечислить все подмножества множества $\{1,\ 2,\ 3\}$; все собственные подмножества.

8.368. Доказать, что $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$, где 2^A — множество всех подмножеств множества A.

8.369. Пусть имеется последовательность множеств $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \ldots$. Доказать, что $\bigcup_{n \in N} A_n = \bigcap_{n \in N} A_{n_k}$

для любой неограниченной подпоследовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Пусть nZ есть множество всех целых чисел, делящихся на n. Найти:

8.370. $nZ \cap mZ$;

8.371. $\bigcup_{n=2}^{\infty} nZ$;

8.372. $\bigcap_{n=1}^{\infty} nZ$;

8.373. $\bigcup_{p \in P} pZ$, где P — множество простых чисел.

8.374. $\bigcup_{n \in N} [1/n; 1 - 1/n]$.

8.375. $\bigcap_{n \in N} [-1/n; 1 + 1/n]$.

8.376. Пусть $C\left([a;b]\right)$ — множество всех непрерывных функций, определенных на сегменте $[a;b]$,

$$C_x^3\left([a;b]\right) = \left\{f \in C\left([a;b]\right) \mid f\left(x\right) = 3\right\}.$$

Найти

$$\bigcup_{x \in [a;b]} C_x^3\left([a;b]\right); \qquad \bigcap_{x \in [a;b]} C_x^3\left([a;b]\right).$$

Доказать:

8.377. $B \bigcap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \left(B \bigcap A_i\right)$;

8.378. $B \bigcap \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \left(B \bigcup A_i\right)$.

Решения

Р8.345. Доказать, что множество четных чисел совпадает со множеством целых чисел, представимых в виде суммы двух нечетных чисел.

1. Пусть у нас есть два нечетных числа $m = 2k + 1$ и $n = 2l + 1$, $k, l \in Z$. Найдем их сумму:

$$m + n = (2k + 1) + (2l + 1) = 2(k + l + 1).$$

Мы видим, что в результате получилось четное число. Тем самым мы доказали, что любой элемент множества

чисел, представимых суммой двух нечетных чисел, является элементом множества четных чисел.
2. Возьмем теперь произвольное четное число $p=2r, r \in Z$. Преобразуем последнее выражение следующим образом: $p = 2r + 1 + (-1) = (2r + 1) + (-1)$, $r \in Z$. И первое и второе слагаемые — нечетные числа. Тем самым теперь мы доказали, что любой элемент множества четных чисел является элементом множества чисел, представимых в виде суммы двух нечетных чисел.
Учитывая п. 1 и 2, мы доказали равенство этих множеств.

P8.347. Доказать, что множество

$$Z = \{x| \exists m \exists n (m, n \in Z)| x = 3m + 2n\}.$$

Ясно, что множество целых чисел, представимых в виде $3m + 2n$, m, $n \in Z$, является подмножеством множества целых чисел.

Докажем теперь, что любое целое число можно представить в виде $3m + 2n, m, n \in Z$.

Мы имеем равенство $1 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-4)$. Возьмем произвольное целое число k. Покажем, что его можно представить в виде $3m + 2n$, m, $n \in Z$.

$$k = k \cdot 1 = k \cdot (3 \cdot 3 + 2(-4)) = 3 \cdot (3k) + 2 \cdot (-4k).$$
$$m = 3k, n = -4k.$$

Таким образом, мы доказали, что множество целых чисел является подмножеством множества чисел, представимых в виде $3m + 2n$, $m, n \in Z$.

P8.349. Привести пример таких множеств A и B, что $A \in B$ и $A \subset B$.

Этот пример очень прост, несмотря на то что такого, кажется, вообще не бывает. Приведем пример, который все расставляет по своим местам. Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ \{1, 2\}\}$.

P8.353. Доказать равенство $A\backslash(B\cup C) = (A\backslash B)\cap(A\backslash C)$.

$$A\backslash(B \cup C) = A \cap \overline{B \cap C} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) =$$
$$= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C).$$

P8.359. Доказать равенство

$$A \cap (B\Delta C) = (A{\cap}B)\Delta(A \cap C).$$

$$A \cap (B\Delta C) = A \cap ((B\backslash C) \cup (C\backslash B)) =$$
$$= (A \cap (B\backslash C)) \cup (A \cap (C\backslash B)) =$$
$$= (A \cap (B \cap \overline{C}) \cup (A \cap (C \cap \overline{B})) =$$
$$= \big((A \cap B) \cap \big(\overline{A} \cup \overline{C}\big)\big) \cup \big((A \cap C) \cap \big(\overline{A} \cup \overline{B}\big)\big) =$$
$$= ((A \cap B)(A \cap C)) \cup ((A \cap C)(A \cap B)) =$$
$$= (A \cap B)\Delta(A \cap C).$$

P8.365. Возьмем произвольное множество A, $A \neq \varnothing$, $A{\neq}I$. Пусть $B = \bar{A}$. Тогда $A \cup B = I$. Покажем теперь, что любая формула, построенная с помощью операций $\cap, \backslash$, не может на этих множествах дать универсальное множество. Рассуждения будем вести по индукции, взяв в качестве параметра индукции ранг формулы (количество операций).

Пусть F — формула ранга 1. Тогда

$F\,(A, B) = A \cap B = \varnothing, F\,(A, A) = A, F\,(B, B) = B$ или
$F\,(A, B) = A\backslash B{=}A, F\,(A, A) = \varnothing, F\,(B, B) = \varnothing,$
$F\,(B, A) = B.$

Докажем, что это (то, что мы получили для формул ранга 1), верно для формулы любого ранга. Допустим, что это верно для любой формулы F такой, что $\mathrm{rang}(F) \leq n_o$. Докажем, что тогда это верно и для формулы F, $\mathrm{rang}(F) = n_o + 1$. Выделим в нашей формуле последнюю операцию, тогда формула примет вид а) $F = F_1 \cap F_2, \operatorname{rang}(F_1) \leq n_o, \operatorname{rang}(F_2) \leq n_o$ или

б) $F{=}F_1 \backslash F_2, \operatorname{rang}(F_1) \leq n_o, \operatorname{rang}(F_2) \leq n_o$.

В случае а) в силу нашего предположения возможны следующие варианты:

$$F(A,B) = F_1(A,B) \cap F_2(A,B) = A \cap B;$$

$$F(A,B) = F_1(A,B) \cap F_2(A,B) = A \cap B;$$

$$F(A,B) = F_1(A,B) \cap F_2(A,B) = A \cap \varnothing = \varnothing;$$

$$F(A,B) = F_1(A,B) \cap F_2(A,B) = A \cap (A \cap B) = A \cap B;$$

$$F(A,B) = F_1(A,B) \cap F_2(A,B) = B \cap A = A \cap B;$$

$$F(A,B) = F_1(A,B) \cap F_2(A,B) = B \cap B = B;$$

$$F(A,B) = F_1(A,B) \cap F_2(A,B) = B \cap \varnothing = \varnothing;$$

$$F(A,B) = F_1(A,B) \cap F_2(A,B) = \varnothing \cap A = \varnothing;$$

$$F(A,B) = F_1(A,B) \cap F_2(A,B) = \varnothing \cap B = \varnothing;$$

$$F(A,B) = F_1(A,B) \cap F_2(A,B) = \varnothing \cap \varnothing = \varnothing;$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$F(A,B) = F_1(A,B) \cap F_2(A,B) = (A \cap B) \cap (A \cap B) = A \cap B.$$

В случае б) в силу нашего предположения возможны следующие варианты:

$$F(A,B) = F_1(A,B) \backslash F_2(A,B) = A \backslash A = \varnothing;$$

$$F(A,B) = F_1(A,B) \backslash F_2(A,B) = A \backslash B = A;$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$F(A,B) = F_1(A,B) \backslash F_2(A,B) = (A \backslash B) \backslash (A \backslash B) = \varnothing.$$

Индуктивный переход доказан. Вместе с этим мы доказали, что для любой формулы алгебры множеств, построенной на операциях пересечения и разности множеств, невозможно равенство $F(A,B) = I$. Это и завершает решение примера.

§ 8.8. Отображения

В начале этого раздела мы приводим основные понятия, определения и теоремы раздела «Отображения» курса «Дискретная математика».

Отображения.
Образ и прообраз при отображении

Под отображением пониманием тройку $(X,\ Y,\ f)$, где $X,\ Y$ — некоторые множества, а f — правило, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in X$ вполне определенный элемент $f(x) \in Y$.

Если задано отображение f из X в Y, то будем писать $f : X \to Y$. Множество X будем называть областью определения отображения f.

П **Пример 1.** Рассмотрим несколько выражений:

$$f(x) = x^2.$$

$$f : X \to Y, \quad f(x) = x^2, \quad X = R, \quad Y = (0; +\infty).$$

$$f : X \to Y, \quad f(x) = x^2, \quad X = R, \quad Y = [0; +\infty).$$

$$f : R \to R, \quad f(x) = \sin x.$$

$$f : X \to Y, \quad X = Y = R, \quad f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq 0; \\ x + 1, & x \leq 0. \end{cases}$$

Первое выражение не является отображением, поскольку задано только правило и не заданы множества. Второе выражение также не является отображением, поскольку существует такой элемент $x = 0\ (\in X)$, для которого $f(x) = 0$ не принадлежит множеству Y. Третье и четвертое выражения являются отображениями. Пятое выражение также не является отображением, поскольку существует такой элемент $x = 0\ (\in X)$, которому ставится в соответствие два различных элемента множества Y.

Два отображения $f_1 : X_1 \to Y_1$ и $f_2 : X_2 \to Y_2$ считают равными, если $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ и для любого x имеет место равенство $f_1(x) = f_2(x)$.

Определение 8.3. *Пусть $f : X \to Y$ и $X_1 \subset X$. Сужением отображения f на множество X_1 называется отображение $f|_{X_1} : X \to Y$, определяемое правилом $f|_{X_1}(x) = f(x) \forall x \in X_1$.*

Отображение $f : X \to Y$ называется продолжением на X отображения $g : \mathbb{X}_1 \to Y$, $X_1 \subset X$, если $f|_{X_1} = g$.

П **Пример 2.** Рассмотрим два отображения: $f_1 : X \to Y$ и $f_2 : X_1 \to Y$ $(X = Y = R,\ \ X_1 = [0; +\infty))$, определяемые правилами $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = x$.

Отображение f_2 является сужением отображения f_1 на множество $[0; +\infty)$, а f_1 является продолжением f_2 на множество R.

Заметим, что продолжением отображения f_2 на множество R также является, например, отображение $f_3 : R \to R$, определяемое правилом

$$f_3(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; +\infty); \\ 1 - x, & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

Пусть задано отображение $f : X \to Y$ и два множества $B \subset Y$ и $A \subset X$.

Определение 8.4. *Прообразом множества B при отображении f называется множество $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$.*

Определение 8.5. *Образом множества A при отображении f называется множество $f(A) = \left\{y \in Y \;\middle|\; f^{-1}(\{y\}) \cap A \neq \varnothing\right\}$.*

П **Пример 3.** Рассмотрим отображение $f : R \to R$, где $f(x) = x^2$. Для данного отображения найдем:

а) $f((-1;1))$; б) $f([0;2])$; в) $f^{-1}([1;4])$.

► а) По определению, образ некоторого множества A при отображении f — это множество всех таких элементов, прообраз которых при отображении f не пуст, т. е. для каждого такого элемента y существуют хотя бы один элемент $x \in A$ такой, что $x \in f^{-1}(\{y\})$ или, что то же самое, $f(x) = y$. Таким образом, образ множества A при отображении f — это множество всех таких элементов, в которые переводятся элементы множества A при отображении f.

Поскольку речь идет о числовой функции, то для нее построим график (рис. 8.1). На оси Ox построим множество A (в данном случае — интервал $(-1;1)$), далее рассмотрим проекцию множества A на график данной функции. Проекция полученной части графика на ось Oy и будет искомым множеством. Таким образом, $f((-1;1)) = [0;4]$;

б) аналогично пункту а) $f([0;2]) = [0;4]$;

в) по определению, прообраз некоторого множества B при отображении f — это множество всех таких элементов, которые переводятся отображением f в элементы множества B.

Поскольку речь идет о числовой функции, то для нее построим график (рис. 8.2). На оси Oy построим множество B (в данном случае — полуинтервал $[1;4)$), далее рассмотрим проекцию множества B на график данной функции. Проекция полученной части графика на ось Ox и будет искомым множеством. Таким образом, $f^{-1}([1;\ 4)) = (-2;1] \cup [1;2)$. ◄

Пусть $f : X \to Y; A_1,\ A_2 \subset X; B_1,\ B_2 \subset Y$; тогда имеют место соотношения:

$$f\left(A_1 \cup A_2\right) = f\left(A_1\right) \cup f\left(A_2\right);$$
$$f^{-1}\left(B_1 \cup B_2\right) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2);$$
$$f\left(A_1 \cap A_2\right) \subset f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right);$$
$$f^{-1}\left(B_1 \cup B_2\right) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

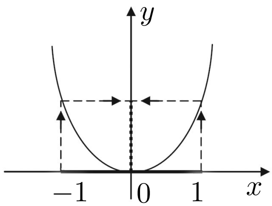


Рис. 8.1

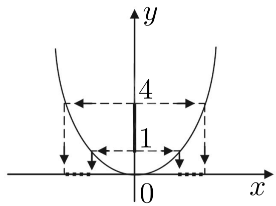


Рис. 8.2

Ниже приведен пример такого отображения и таких множеств A_1 и A_2, для которых не выполняется $f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right) \subset f\left(A_1 \cap A_2\right)$.

П **Пример 4.** Рассмотрим отображение $f : R \to R$, определяемое правилом: $f(x) = x^2$, и множества $A_1 = [-2; 0]\,, A_2 = [0; 1]$.

$$f\left(A_1\right) = [0; 4]\,,\ f\left(A_2\right) = [0; 1]\,,\quad A_1 \cap A_2 = \{0\}\,,$$
$$f\left(A_1 \cap A_2\right) = \{0\}\,,\ f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right) = [0; 1].$$

Ясно, что $[0; 1] \supset \{0\}$.

П **Пример 5.** Рассмотрим отображение $f : R \to R$, определяемое правилом:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (1; +\infty); \\ x^2, & x \in [-1; 1]; \\ 2 + x, & x \in (-\infty; -1). \end{cases}$$

Найдем: а) $f([2; 3])$; б) $f((-2; 3])$; в) $f^{-1}([-1; 2])$.

► а) На множестве $[2;3]$ отображение f определяется только верхней строкой своего определения и в этом случае действует по правилу $f(x)=x$, тогда $f([2;3])=[2;3]$.

б) На множестве $(-2;3]$ отображение f определяется всеми своими строками. Разобьем данное множество на три подмножества $(-2;\ -1)$, $[-1;1]$ и $(1;3]$, а образ всего множества будем отыскивать в виде объединения образов данных множеств (по теореме о свойствах образов и прообразов), т. е.

$$f\,((-2;3]\,)=f\,((-2;\ -1))\cup f\,([-1;1])\cup f\,((1;3]\,).$$

• На интервале $(-2;\ -1)$ отображение f определяется только нижней строкой своего определения, значит, $f\,((-2;\ -1))=(0;1)$.

• На отрезке $[-1;1]$ отображение f определяется только средней строкой своего определения, следовательно, $f\,([-1;1])=[0;1]$.

• На полуинтервале $(1;3]$ отображение f определяется только верхней строкой своего определения, значит $f\,((1;3])=(1;3]$.

Таким образом,

$$f\,((-2;3]\,)=f\,((-2;\ -1))\cup f\,([-1;1])\cup f\,((1;3]\,)=$$
$$=(0;1)\cup[0;1]\cup[1;3]=[0;3].$$

в) Найдем образ области определения при отображении f. По теореме о свойствах образов и прообразов имеем

$$f\,(R)=f\,((1;+\infty)\cup[-1;1]\cup(-\infty;-1))=$$
$$=f\,((1;+\infty))\cup f\,([-1;1])\cup f\,((-\infty;-1)).$$

Множество $(1;+\infty)$ соответствует верхней строке определения отображения f. На этом множестве это отображение совпадает с тождественным, поэтому

$$f\,((1;+\infty))=(1;+\infty);$$

на множестве $[-1;1]$ отображение f задано формулой $y = x^2$, поэтому

$$f\left([-1;1]\right) = [0;1];$$

на множестве $(-\infty;-1)$ отображение f задано формулой $y = 2 + x$, поэтому $f((-\infty;-1)) = (-\infty;+1)$.

Получаем, что образ области определения функции равен $(-\infty;+\infty)$.

Пересечение отрезка $[-1;2]$ и каждого из полученных образов не пусто. Значит, прообраз исходного множества будем разыскивать следующим образом:

для каждого из трех перечисленных случаев будем искать прообраз пересечения данного отрезка $[-1;2]$ и образа соответствующей части области определения. Затем прообраз исходного множества будем отыскивать как объединение полученных прообразов (по теореме о свойствах образов и прообразов), т. е.

$$f^{-1}\left([-1;2]\right) = f^{-1}\left([-1;2] \cap f\left((1;+\infty)\right)\right) \cup$$
$$\cup\, f^{-1}\left([-1;2] \cap f\left([-1;1]\right)\right) \cup f^{-1}\left([-1;2] \cap f\left((-\infty;1)\right)\right).$$

$[-1;2] \cap f\left((1;+\infty)\right) = [-1;2] \cap (1;+\infty) = (1;2]$.

$f^{-1}([-1;2]) = (1;2]$, поскольку в данном случае $(x \in (1;+\infty))$, отображение f действует по правилу $f(x) = x$;

$[-1;2] \cap f\left([-1;1]\right) = [-1;2] \cap [0;1] = [0;1]$. $f^{-1}\left([0;1]\right) = [-1;1]$, поскольку в данном случае $(x \in [-1;1])$, отображение f действует по правилу $f(x) = x^2$;

$[-1;2] \cap f\left((-\infty;1)\right) = [-1;2] \cap (-\infty;1) = [-1;1)$. $f^{-1}\left([-1;1)\right) = [-3;-1)$, так как в данном случае $(x \in (-\infty;-1))$ отображение f действует по правилу $f(x) = 2 + x$.

Таким образом,

$$f^{-1}\left([-1;2]\right) = (1;2] \cup [-1;1] \cup [-3;-1) = [-3;2]. \blacktriangleleft$$

Композиция отображений

Определение 8.16. *Пусть* $f : X \to Y, \quad g : T \to Z$. *Композицией отображений* f *и* g *называется отображение* $g \circ f : X \to Z$, *определяемое правилом*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Другими словами, композиция отображений $g \circ f$ — это последовательное действие отображений f и g.

П **Пример 6.** Для отображений $f : R \to R$ и $g : R \to R$, определяемых правилами:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \geq 2; \\ x^2, & x \in (-2; 2); \\ x, & x \geq -2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} |x|, & x < -1; \\ \sqrt{x}, & x > 1; \\ 1 + 2x, & x \in [-1; 1], \end{cases}$$

найдем композицию $g \circ f$.

► Поскольку отыскиваем композицию $g \circ f$, т. е. последовательное действие отображений f и g, необходимо сначала найти образ области определения отображения f.

Область определения отображения f состоит из частей $[2; +\infty)$; $(-2; 2)$; $(-\infty; -2]$.

Композицию $f \circ g$ будем отыскивать отдельно для каждой части области определения отображения f.

Пусть $x \in [2; +\infty)$ (т. е. верхней строке определения отображения f). В этом случае f действует по правилу$f(x) = 2 - x$ и множество $[2; +\infty)$ под действием отображения f переводится во множество $(-\infty; 0]$. На полученном множестве отображение g определяется как верхней, так и нижней строками, поэтому мы еще не «готовы» к нахождению композиции.

Исходное множество разобьем на два подмножества: $[2;3]$ и $(3;+\infty)$. Тогда $f([2;3]) = [-1;0]$ целиком попадает в нижнюю строку определения отображения g (т. е. на этом множестве отображение g определяется только нижней строкой своего определения), а $f((3;+\infty)) = (\infty;-1)$ целиком попадает в верхнюю строку определения отображения g. Следовательно, получаем

$$(g \circ f)(x) = f(x) = \begin{cases} 5-2x, & x \in [2;3]; \\ |2-x|, & x \in (3;+\infty). \end{cases}$$

Пусть $x \in (-2;2)$ (т. е. средней строке определения отображения f). В этом случае f действует по правилу $f(x) = x^2$, поэтому $f((-2;2)) = [0;4)$. На этом множестве отображение g определяется средней и нижней строками. Исходное множество разобьем на три подмножества $(-2;-1)$, $[-1;1]$ и $(1;2)$. Тогда $f((-2;-1)) = (1;4)$ целиком попадает в среднюю строку определения отображения g. Следовательно, получаем

$$(g \circ f)(x) = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2}, & x \in [-1;1]; \\ 1+2x^2, & x \in (-2;-1) \cup (1;2). \end{cases}$$

Пусть $x \in (-\infty;-2]$ (т. е. нижней строке определения отображения f). В этом случае fдействует по правилу $f(x) = x$, поэтому $f((-\infty;-2]) = (-\infty;-2]$. Это множество целиком попадает в верхнюю строку определения отображения g. Следовательно, получаем $(g \circ f)(x) = |x| = -x$, $x \in (-\infty;-2]$.

Окончательно получаем

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 5-2x, & x \in [2;3]; \\ |2-x|, & x \in (3;+\infty); \\ \sqrt{x^2}, & x \in [-1;1]; \\ 1+2x^2, & x \in (-2;-1) \cup (1;2); \\ |x| = -x, & x \in (-\infty;-2]. \end{cases}$$

Заметим, что поскольку $\sqrt{x^2} = |x|$, можно объединить строки третью и пятую в одну. Таким образом, имеем

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 5 - 2x, & x \in [2; 3]; \\ |2 - x|, & x \in (3; +\infty); \\ 1 + 2x^2, & x \in (-2; -1) \cup (1; 2); \\ |x|, & x \in (-\infty; -2] \cup [-1; 1]. \end{cases} \quad \blacktriangleleft$$

Типы отображений. Обратимость и односторонняя обратимость

Выделяют три основных типа отображений: инъективные, сюръективные и биективные.

Определение 8.17. *Отображение $f\colon X \to Y$ называется сюръективным, если для каждого $y \in Y$ $f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$.*

Определение 8.18. *Отображение $f\colon X \to Y$ называется инъективным, если для любых $x_1, x_2 (\in X)$, таких что $x_1 \neq x_2$, выполняется $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Определение 8.19. *Отображение $f\colon X \to Y$ называется биективным, если оно и инъективно, и сюръективно.*

П **Пример 7.** Рассмотрим несколько отображений:

$$f : X \to Y, \quad X = Y = R, \quad f(x) = |x|;$$
$$f : X \to Y, \quad X = R, \quad Y = [0; +\infty), \quad f(x) = |x|;$$
$$f : X \to Y, \quad X = (-\infty; 0], \quad Y = R, \quad f(x) = |x|;$$
$$f : X \to Y, \quad X = [0; +\infty), \quad Y = [0; +\infty), \quad f(x) = |x|;$$
$$f : X \to Y, \quad X = Y = R, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in (-\infty; 0); \\ 2x, & x \in [0; +\infty). \end{cases}$$

Первое отображение не является инъективным, поскольку существует такая пара значений $x_1 (\neq 0)$ и $x_2 = -x_1$, что $f(x_1) = f(x_2)$ (так, например, $f(1) = f(-1) = 1$), и не является сюръективным, поскольку для любого отрицательного значения из множества Y его прообраз пуст.

Второе отображение является сюръективным, но не является инъективным. Третье отображение является инъективным, но не является сюръективным. Четвертое и пятое отображения являются биективными, поскольку они и инъективны, и сюръективны.

Напомним **теорему 2.10**.
Если $f : X \to Y$ и $q : Y \to Z$ — инъективные отображения, то их композиция $g \circ f : X \to Z$ —инъективное отображение.

$\boxed{\text{П}}$ **Пример 8.** Покажем, что обратное утверждение неверно. Рассмотрим отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$, где $X = [0; +\infty)$ и $Y = Z = R$, определяемые правилами $f(x) = 2x$, $g(y) = |y|$.

Заметим, что отображение f — биективное, а следовательно, и инъективное. Отображение g не является ни сюръективным, ни инъективным отображением. Однако композиция этих отображений является инъективным отображением.

Действительно, если рассмотреть образ множества X при отображении f $(f(X) = [0; +\infty))$, то можно видеть, что на этом множестве отображение $g|_{f(X)}$ (т. е. сужение отображения g на множество $f(X)$) является инъективным.

Следовательно, по предыдущей теореме, композиция $g|_{f(X)} \circ f$ — инъективна, а так как отображение $g|_{f(X)} \circ f$:

$X \to Z$ равно отображению $g \circ f : X \to Z$ (поскольку равны множества и одинаковы правила, по которым они действуют). Следовательно, отображение $g \circ f : X \to Z$ также инъективно.

Напомним **теорему 2.11**.
Если $f : X \to Y$ и $q : Y \to Z$ — сюръективные отображения, то их композиция $g \circ f : X \to Z$ — сюръективное отображение.

П **Пример 9.** Покажем, что обратное утверждение неверно. Рассмотрим отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$, где $X = Y = R$ и $Z = [-1; 1]$, определяемые правилами $f(x) = |x|, g(y) = \sin y$.

Заметим, что отображение g — сюръективно. Отображение f не является ни инъективным, ни сюръективным отображением. Однако композиция этих отображений является сюръективным отображением.

Действительно, пересечение прообраза каждого элемента $z \in Z$ и образа множества X при отображении f не пусто, т. е. существует такой элемент $y \in g^{-1}(\{z\}) \cap f(X)$. Поскольку $y \in f(X)$, то существует такой элемент $x \in X$, что $f(x) = y$. Собирая, получим, что для любого элемента $z \in Z$ существует такой элемент $x \in X$, что $(g \circ f)(x) = z$, то есть $(g \circ f)^{-1}(\{z\}) \neq \varnothing$, а это означает сюръективность отображения $g \circ f$.

Определение 8.20. *Пусть X — некоторое множество. Тождественным на X отображением называется отображение $e_X : X \to X$, определяемое следующим:*

$$e_X(x) = x, \forall x \in X.$$

Ясно, что для любого отображения $f : X \to Y$ имеет место

$$f = e_Y \circ e_X.$$

Определение 8.21. *Отображение* $f\colon X\to Y$ *называется обратимым слева (справа), если существует отображение* $f_л^{-1}\colon Y\to X$ $(f_п^{-1}\colon Y\to X)$ *такое, что*

$$f_л^{-1}\circ f=e_X \quad \left(f\circ f_п^{-1}=e_Y\right).$$

Определение 8.22. *Отображение* $f\colon X\to Y$ *называется обратимым, если существует отображение* $f^{-1}\colon Y\to X$ *такое, что*

$$f^{-1}\circ f=e_X; \qquad f\circ f^{-1}=e_Y.$$

Отображение $f_л^{-1}\colon Y\to X$ *будем называть левым обратным к* f, $f_п^{-1}\colon Y\to X$ *— правым обратным к* f, *а* $f^{-1}\colon Y\to X$ *— обратным к* f.

Напомним следующие теоремы.

Теорема 2.13. *Для того чтобы отображение* $f\colon X\to Y$ *было обратимым слева, необходимо и достаточно, чтобы* f *было инъективным.*

Теорема 2.14. *Для того чтобы отображение* $f\colon X\to Y$ *было обратимым справа, необходимо и достаточно, чтобы* f *было сюръективным.*

Теорема 2.15. *Для того чтобы отображение* $f\colon X\to Y$ *было обратимым, необходимо и достаточно, чтобы* f *было биективным.*

П **Пример 10.** Найдем обратные отображения (с соответствующей стороны) либо покажем, что соответствующих обратных не существует для следующих отображений:

► а) $f\colon R\to R$, действует по правилу $f(x)=|x|$;

б) $f\colon R\to[0;+\infty)$, действует по правилу $f(x)=|x|$;

в) $f\colon\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to R$, действует по правилу $f(x)=\sin(x)$;

г) $f\colon R \to (0;+\infty)$, действует по правилу $f(x) = e^x$;

д) $f\colon R \to R$, действует по правилу:

$$\begin{cases} 2x, & x \in (1;+\infty); \\ x^2+1, & x \in [0;1]; \\ x+1, & x \in (-\infty;0). \end{cases}$$

По критериям обратимости отображений (теоремы 2.13–2.15), существование обратного отображения с соответствующей стороны следует из того, какого типа исходное отображение (сюръективное, инъективное или биективное). Поэтому вначале будем определять тип исходного отображения, а затем уже искать соответствующее обратное отображение.

а) $f : R \to R$, действует по правилу $f(x) = |x|$.

1. Отображение не является инъективным (а значит, и биективным), поскольку существуют такие различные x_1 и x_2, образы которых совпадают (так, например, $f(1) = f(-1) = 1$). Следовательно, это отображение не является обратимым слева (а значит, и обратимым), а значит, левого обратного к f не существует (и обратного к f не существует).

2. Отображение не является сюръективным (а значит, и биективным), так как для любого отрицательного значения его прообраз пуст. Следовательно, это отображение не является обратимым справа, т. е. правого обратного к f не существует (и обратного к f не существует).

б) $f : R \to [0;+\infty)$, действует по правилу $f(x) = |x|$.

1. Данное отображение не является инъективным (а значит, и биективным), поскольку существует такая пара значений x_1 и x_2, образы которых совпадают (так, например, $f(2) = f(-2) = 2$). Следовательно, это отображение не является обратимым слева, а значит, левого обратного к f не существует (и обратного к f не существует).

2. Данное отображение является сюръективным. Следовательно, это отображение является обратимым справа, т. е. существует правое обратное к f. В качестве правого обратного, пользуясь правилом построения правого обратного (см. доказательство теоремы 2.14 из настоящей книги), берем отображение $g : [0; +\infty) \to R$, определяемое правилом $g(y) = y$.

Тогда $(f \circ g)(y) = |y| = y = e_{[0;+\infty)}(y)$ для каждого элемента $y \in [0; +\infty)$.

Заметим, что в данном случае в качестве правого обратного к f можно взять отображение $h : [0; +\infty) \to R$, определяемое правилом $h(y) = -y$.

в) $f : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to R$, действует по правилу $f(x) = \sin x$.

Данное отображение не является сюръективным (а значит, и биективным), так как $\sin^{-1}(\{2\}) = \varnothing$ (т. е. не существует такого x, что $\sin x = 2$.).

Данное отображение является инъективным. Действительно, $\sin x$ монотонно возрастает на множестве $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому на этом множестве не может быть двух разных x_1 и x_2 таких, что $\sin x_1 = \sin x_2$. Для нахождения левого обратного отображения воспользуемся конструкцией из теоремы 2.13. Найдем $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$. Ясно, что

$$f\left(\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right) = \sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1; 1].$$

Тогда $f_л^{-1}$ можно задать формулой:

$$f_л^{-1} = \begin{cases} \arcsin x, & x \in [-1; 1]; \\ 0, & \text{если}\, x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty). \end{cases}$$

Ясно, что $f_{л}^{-1}$ на множестве $[-1; 1]$ определено однозначно (как $\arcsin x$), а на множестве $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ мы можем задать его совершенно произвольно (лишь бы оно действовало во множество $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$).

3. Так как данное отображение не является сюръективным, значит, оно не является и биективным, а следовательно, не является обратимым.

г) $f : R \to (0; +\infty)$ действует по правилу $f(x) = e^x$.

Поскольку данное отображение является биективным, оно является обратимым. В качестве обратного к f берем отображение $g : R \to (0; +\infty)$, определяемое правилом $g(y) = \ln y$. Тогда

$(g \circ f)(x) = \ln(e^x) = x \ \forall x \in R$ и $(g \circ f)(y) = e^{\ln y} = y$ $\forall y \in [0; +\infty)$.

Это же отображение является одновременно и левым, и правым обратным отображением.

д) $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (1; +\infty); \\ x^2 + 1, & x \in [0; 1]; \\ x + 1, & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$

Заметим, что

$$f((1; +\infty)) = (2; +\infty), f([0; 1]) = [1; 2],$$
$$f((-\infty; 0)) = (-\infty; 1).$$

Так как полученные множества не пересекаются и покрывают все множество R, то о типе отображения будем судить по типу отображений, задаваемых строками отображения f.

Рассмотрим отображения: $f_1 : (1; +\infty) \to (2; +\infty)$, определяемое правилом $f(x) = 2x$ (первая строка определения отображения f); $f_2 : [0; 1] \to [1; 2]$, определяемое правилом $f(x) = x^2 + 1$ (вторая строка определения отображения f); $f_3 : (-\infty; 0) \to (-\infty; 1)$, определяемое правилом $f\,(x) = x + 1$ (третья строка определения отображения f). Все эти отображения (f_1, f_2, f_3) являются биективными, поскольку они и инъективны, и сюръективны. Множества $(-\infty; 1)$, $[1; 2]$ и $(2; +\infty)$ попарно не пересекаются, и их объединение равно R. Следовательно, отображение f является биективным.

Отображение f^{-1} — обратное к отображению f. Сконструируем из отображений f_1^{-1}, f_2^{-1}, f_3^{-1}. Эти отображения порождают строки в определении отображения f^{-1}.

Ясно, что $f_1^{-1} : (2; +\infty) \to (1; +\infty)$ задается формулой $f_1^{-1}\,(y) = \frac{y}{2}$.

Отображение $f_2^{-1} : [1; 2] \to [0; 1]$ задается формулой $f_1^{-1}\,(y) = \sqrt{y - 1}$.

Отображение $f_3^{-1} : (-\infty; 0) \to (-\infty; 1)$ задается формулой $f_3^{-1}\,(y) = y - 1$.

Собирая все полученные отображения как строки определения отображения f^{-1}, получим

$$f_1^{-1}\,(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{2}, & y \in (2; +\infty); \\ \sqrt{y-1}, & y \in [1; 2]; \\ y - 1, & y \in (-\infty; 1). \end{cases} \quad ◀$$

П **Пример 11.** Проверить, является ли следующее отображение $F : C\,(R) \to C\,(R)$ ($C\,(R)$ — множество непрерывных на R функций) инъективным, сюръективным или биективным, и найти обратное к нему с соответствующей стороны:

$$[F(f)]\,(x) = f^2(x); [F(f)]\,(x) = 3f(2x);$$
$$[F(f)]\,(x) = 2^{f(x)}.$$

▶ 1. Данное отображение не является инъективным, поскольку существует пара функций $f_1, f_2 \in C\,(R)$, таких что $f_1 \neq f_2$, но для которых выполняется $F(f_1) = F(f_2)$.

В качестве таких функций можно взять $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = -x$. Тогда

$$[F(f_1)](x) = f_1^2(x) = x^2 = (-x)^2 = f_2^2(x) = [F(f_2)](x).$$

Таким образом, поскольку отображение F не является инъективным (а значит, и биективным), то оно не имеет левого обратного (и обратного к f не существует).

2. Данное отображение не является и сюръективным (а значит, и биективным), поскольку существуют такие функции, прообраз которых при данном отображении является пустым. Например, для функции $f_1 \in C(R)$, определяемой правилом $f_1(x) = -x^2$, нет таких функций, которые при возведении их в квадрат дают f_1.

Таким образом, поскольку отображение F не является сюръективным, оно необратимо справа, т. е. не имеет правого обратного отображения (и обратного к f не существует).

$$[F(f)](x) = 3f(2x).$$

Данное отображение является биективным, поскольку оно и инъективно, и сюръективно. Однако доказательство этого — дело довольно «хлопотное». Воспользуемся критерием обратимости отображения (теорема 2.15). Покажем, что у отображения $F : C(R) \to C(R)$ существует обратное отображение. Рассмотрим отображение $G : C(R) \to C(R)$, заданное формулой

$$[G(f)](x) = \frac{1}{3} f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Покажем, что это отображение обратно к F. Для этого найдем $F \circ G$ и $G \circ F$.

$$[F \circ G](f(x)) = F(G(f(x))) = F\left(\frac{1}{3} f\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \\ = 3\frac{1}{3} f\left(2\frac{x}{2}\right) = f(x),$$

$$[G \circ F](f(x)) = G(F(f(x))) = G(3f(2x)) = \\ = \frac{1}{3} 3f\left(\frac{2x}{2}\right) = f(x).$$

Мы доказали, что отображение F обратимо. По теореме 2.15 получаем, что отображение F является биективным.

$$[F(f)](x) = 2^{f(x)}.$$

Данное отображение является инъективным, значит, оно обратимо слева. В качестве левого обратного возьмем отображение $G : C(R) \to C(R)$, определенное правилом

$$[G(f)](x) = \begin{cases} \log_2(f(x)), & \text{если } f(x) \text{ принимает только положительные значения;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда, поскольку $2^{f(x)} > 0 \ \forall x \in R$,

$$[G \circ F](f(x)) = G(F(f(x))) = G\left(2^{f(x)}\right) = \\ = \log_2(2^{f(x)}) = f(x).$$

Данное отображение не является сюръективным, поскольку существуют такие функции, прообраз которых при данном отображении является пустым. Например, для функции $f_1 \in C(R)$, определяемой правилом $f_1(x) = -x^2$, нет ни одного отображения $g \in C(R)$ такого, что $f_1(x) = 2^{g(x)} \ \forall x \in R$.

Таким образом, поскольку отображение не является сюръективным, значит, оно не является обратимым справа. Поскольку это отображение не является биективным, то обратное отображение не существует. ◀

Задачи и упражнения

Определить, являются ли следующие выражения отображениями:

ОТ1.1. $f : R \to R, \quad f(x) = \log_2 x.$

ОТ1.2. $f : (0; +\infty) \to R, \quad f(x) = \log_2 x.$

ОТ1.3. $f : R \to R, \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty; -1); \\ \sin x, & x \in [-\pi; \pi]; \\ \ln x, & x \in (1; +\infty). \end{cases}$

ОТ1.4. $f : [-\pi; \pi] \to R, \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-\pi; 0); \\ \sin x, & x \in (0; \pi]. \end{cases}$

ОТ1.5. $f : [-1; 1] \to [-1; 1], \quad f(x) = \sin x + \cos x.$

ОТ1.6. $f : [-2; 2] \to [-2; 2], \quad f(x) = \sin x + \cos x.$

ОТ1.7. $f(x) = \sin x.$

ОТ1.8. $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-\infty; 0); \\ \sqrt{x}, & x \in [0; +\infty). \end{cases}$

ОТ1.9. $F : C(R) \to C(R),$

$$[F(f)](x) = |f(x)|.$$

ОТ1.10. $F : C(R) \to C(R),$

$$[F(f)](x) = \begin{cases} |f(x)|, & f(x) < 0; \\ \sin(f(x)), & f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $f : X \to Y$ — произвольное отображение, B, B_1, B_2 — произвольные подмножества множества Y. Доказать, что:

8.379. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$

8.380. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$

8.381. $f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B).$

8.382. $f^{-1}(B_1 \backslash B_2) = f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2)$.

8.383. $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

8.384. Привести пример, показывающий, что импликация $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \Rightarrow B_1 \subset B_2$, вообще говоря, не имеет места.

8.385. Доказать, что если $f : X \to Y$ и $A \subset X$, то

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x\,(x \in X)\ (x \in A) \wedge (y = f(x))\}.$$

Сравните с определением 2.15.

Пусть $f : X \to Y$ — произвольное отображение, A_1, A_2 — произвольные подмножества множества X. Доказать, что:

8.386. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

8.387. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

8.388. Привести пример, показывающий, что $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$, вообще говоря, не имеет места.

8.389. Доказать, что $f(A_1) \backslash f(A_2) \subset f(A_1 \backslash A_2)$.

8.390. Привести пример, показывающий, что

$$f(A_1 \backslash A_2) \subset f(A_1) \backslash f(A_2),$$

вообще говоря, не имеет места.

8.391. $(A_1 \subset A_2) \Rightarrow (f(A_1) \subset f(A_2))$.

8.392. Привести пример, показывающий, что

$$(f(A_1) \subset f(A_2)) \Rightarrow (A_1 \subset A_2),$$

вообще говоря, не имеет места.

Доказать, что для произвольного подмножества B области действия Y отображения $f : X \to Y$ выполняются соотношения:

8.393. $f\left(f^{-1}(B)\right) = B \cap f(X)$.

8.394. $f^{-1}(B) = \varnothing \Leftrightarrow B \cap f(X) = \varnothing$.

8.395. Доказать, что для произвольного множества A области определения X отображения $f : X \to Y$ имеет место соотношение $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Пусть $f : X \to Y, A \subset X,\ B \subset Y$. Доказать, что:

8.396. $f\left(A\right) \cap B = f\left(A \cap f^{-1}\left(B\right)\right)$.

8.397. $f\left(A\right) \cap B = \varnothing \ \Leftrightarrow A \cap f^{-1}\left(B\right) = \varnothing$.

8.398. $f\left(A\right) \subset B \ \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$.

ОТ1.11. Для отображения $f : R \to R$, определенного правилом $f\left(x\right) = \sin x$, найти $f\left([0;\pi]\right)$, $f\left(\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $f^{-1}((0;4])$ и $f^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2};2\right]\right)$.

ОТ1.12. Для отображения $f : R \to R$, определенного правилом

$$f\left(x\right) = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty;-1); \\ x^2, & x \in [-1;1]; \\ \sqrt{x}, & x \in (1;+\infty), \end{cases}$$

найти $f\left([-2;2]\right),\ f\left([1;4]\right),\ f^{-1}((0;4])$ и $f^{-1}([-5;9])$.

ОТ1.13. Для отображения $f : R \to R$, определенного правилом

$$f\left(x\right) = \begin{cases} -x-1, & x \in (-\infty;0); \\ 2^x+1, & x \in (0;+\infty), \end{cases}$$

найти $f\left([-2;1]\right),\ f\left([-4;4]\right),\ f^{-1}((0;4])$ и $f^{-1}\left([-5;2]\right)$.

ОТ1.14. Для отображения $f : R \to R$, определенного правилом

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \log_2(-x), & x \in (-\infty;-1]; \\ x^2+2x-3, & x \in (-1;0); \\ 3^{2x}, & x \in [0;+\infty), \end{cases}$$

найти $f\left([-2;2]\right),\ f\left([-1;2]\right),\ f^{-1}((0;+\infty))$ и $f^{-1}([-3;3])$.

ОТ1.15. Для отображения $f : R \to R$, определенного правилом

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \in (-\infty; -2); \\ \log_3(-x + 1), & x \in [-2; 1); \\ \sqrt{x} + 1, & x \in [1; +\infty), \end{cases}$$

найти $f([1; 5])$, $f([-2; 4])$, $f^{-1}([-4; 0))$ и $f^{-1}((-\infty; 2])$.

ОТ1.16. Для отображения $f : R \to R$, определенного правилом

$$f(x) = \sin(x) + x^2,$$

найти $f([0; 2\pi])$, $f\left(\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $f^{-1}((0; 3])$ и $f^{-1}([-2; 2])$.

ОТ1.17. Для отображения $f : R \to R$, определенного правилом

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty; 1]; \\ -\pi^{\sqrt[3]{x}}, & x \in (1; +\infty), \end{cases}$$

найти $f([-2; 2])$, $f([0; 4])$, $f^{-1}((0; 4])$ и $f^{-1}([-\pi^2; 9])$.

ОТ1.18. Для отображения $f : R \to R$, определенного правилом

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+5}{x}, & x \in (-\infty; 0); \\ x^3 + 1, & x \in [0; +\infty), \end{cases}$$

найти $f([-2; 1])$, $f([-4; 4])$, $f^{-1}((0; 2])$ и $f^{-1}([-4; 2])$.

ОТ1.19. Для отображения $f : R \to R$, определенного правилом

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3x^2 + 4}, & x \in (-\infty; -2]; \\ \log_2\left(6 - x^2\right), & x \in (-2; 2); \\ \sin x, & x \in [2; +\infty), \end{cases}$$

найти $f([-2; 2])$, $f([-1; 3])$, $f^{-1}((-1; +\infty))$ и $f^{-1}([-3; 3])$.

OT1.20. Для отображения $f : R \to R$, определенного правилом

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x+1}{2-x}, & x \in (-\infty; -2); \\ 3^{(-x+1)}, & x \in [-2; 1]; \\ -\sqrt{x-1}+1, & x \in [1; +\infty), \end{cases}$$

найти $f([1;5])$, $f([-2;4])$, $f^{-1}((-4;0))$ и $f^{-1}((-\infty;2])$.

Для следующих отображений найти по два различных непрерывных продолжения на множество R:

OT1.21. $f : [1; +\infty) \to R, \quad f(x) = \log_2 x.$

OT1.22. $f : (-\infty; 2\pi] \to R, \ f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty; 0); \\ \sin x, & x \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

OT1.23. $f : [-\pi; \pi] \to R, \ f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\pi; 0); \\ x^2+1, & x \in [0; \pi]. \end{cases}$

OT1.24. $f : (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \to R,$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-\infty; \ -1]; \\ x-1, & x \in [1; +\infty). \end{cases}$$

OT1.25. $f : (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \to R,$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+1, & x \in (-\infty; \ -2); \\ \sqrt{x}, & x \in (2; +\infty). \end{cases}$$

OT1.26. $f : [0; +\infty) \to R, \quad f(x) = e^x.$

OT1.27. $f : (-\infty; \pi] \to R,$

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x - 1, & x \in (-\infty; 0); \\ 2\sin x, & x \in [0; \pi]. \end{cases}$$

ОТ1.28. $f : [-2; 2] \to R$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^3+1} - 1, & x \in [-2; 0); \\ 2^x - 1, & x \in [0; 2]. \end{cases}$$

ОТ1.29. $f : (-\infty;\ -\pi] \cup [\pi; +\infty) \to R$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right), & x \in (-\infty;\ -\pi]; \\ 3^{\cos(x)}, & x \in [\pi; +\infty). \end{cases}$$

ОТ1.30 $f : \left(-\infty;\ -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right) \to R$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & x \in \left(\infty;\ -\frac{\pi}{3}\right); \\ \sqrt[3]{\cos x}, & x \in \left(\frac{\pi}{2};\ +\infty\right). \end{cases}$$

Для следующих отображений $f, g : R \to R$ найти композицию $f \circ g$, $g \circ f$:

ОТ1.31. $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \geq 1; \\ 1 - x, & x < 1. \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x, & x < -2; \\ 2x, & x \geq -2. \end{cases}$$

ОТ1.32. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1; \\ x, & x < 1. \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} |x|, & x \geq 2; \\ 3 - x, & x < 2. \end{cases}$$

ОТ1.33. $f(x) = \begin{cases} x^4, & |x| > 1; \\ -x, & |x| \leq 1. \end{cases}$

$$\mathrm{g}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 16; \\ 2 - x^3, & |x| < 16; \\ 2 + x, & x < -16, \end{cases}$$

ОТ1.34. $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), & x\in(-\pi,\ \pi);\\ x, & x\geq\pi;\\ -x-\pi, & x\leq-\pi.\end{cases}$

$$g(x)=\begin{cases}x^2, & x<-\sqrt{\pi};\\ \dfrac{x}{2}, & x\in[-\sqrt{\pi};0];\\ \dfrac{x^2}{4}, & x>0.\end{cases}$$

ОТ1.35. $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(-\infty;\ -1);\\ x^2, & x\in[-1;1];\\ 2-x, & x\in(1;+\infty).\end{cases}$

$$g(x)=\begin{cases}x+2, & x\in(-\infty;-1);\\ x^2, & x\in[-1;0];\\ \dfrac{x^3}{4}, & x\in(0;+\infty).\end{cases}$$

ОТ1.36. $f(x)=\begin{cases}\log_2^2|x|+\dfrac{x}{2}, & x<-2;\\ 3x^2+2x-1, & x\in[-2;2);\\ |x-5|, & x\geq 2.\end{cases}$

$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^4}{2}, & x<-1;\\ 1-x^2, & x\in[-1;1];\\ \dfrac{2}{x}-2, & x>1.\end{cases}$$

ОТ1.37. $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leq-1;\\ \dfrac{1}{x}, & \in(-1;0);\\ x^2, & x\geq 0.\end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \le -1; \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, & x \in (-1; 1]; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

OT1.38. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{2-x}, & x > 2, \\ \operatorname{sign}(x)\, x^2, & x \in (-\infty; 1]; \\ 3^x, & x \in (1; 2]. \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & x < -3; \\ \dfrac{x}{3}, & x \in [-3; 3]; \\ 1 - \dfrac{1}{x}, & x > 3. \end{cases}$$

OT1.39. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4}, & x \le\ -2; \\ 2 \cdot 3^x - 1, & x \in (-2; 1]; \\ -x, & x > 1. \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}(x), & x < 4; \\ -x^2, & x \ge 4. \end{cases}$$

OT1.40. $f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 - 2, & x \le 0 \\ 3x - 2, & x \in (0; 1); \\ \dfrac{x-1}{x+1}, & x \ge 1. \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+1}{2-x}, & x \in (-\infty;\ -2); \\ 3^{(-x+1)}, & x \in [-2; 1); \\ -\sqrt{x-1} + 1, & x \in [1; +\infty). \end{cases}$$

8.407. Пусть для отображения $f : X \to X$ и для некоторого натурального числа n имеет место равенство $f^n = e_X$. Докажите, что отображение инъективно.

8.408. Докажите, что если $f \circ g$ — инъективное отображение, то g — инъективное отображение.

8.409. Докажите, что если $f \circ g$ — сюръективное отображение, то f — сюръективное отображение.

Проверить, являются ли следующие отображения инъективными, сюръективными или биективными, и найти обратные к ним с соответствующей стороны:

ОТ1.41. $f : R \to R$ по правилу $f\,(x) = \sin x$.

ОТ1.42. $f : R \to R$ по правилу

$$f\,(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty;\ -1); \\ x^2, & x \in [-1; 1]; \\ \sqrt{x}, & x \in (1; +\infty). \end{cases}$$

ОТ1.43. $f : R \to R$ по правилу

$$f\,(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \in (-\infty; 0); \\ -2^x + 2 & x \in [0, +\infty). \end{cases}$$

ОТ1.44. $f : R \to R$ по правилу

$$f\,(x) = \begin{cases} \log_2(-x), & x \in (-\infty;\ -1); \\ x^2 + 2x - 3, & x \in (-1; 0); \\ 3^{2x}, & x \in [1; +\infty). \end{cases}$$

ОТ1.45. $f : R \to R$ по правилу

$$f\,(x) = \begin{cases} x + 4, & x \in (-3;\ -2); \\ \log_3 x - x + 1, & x \in [-2; 1); \\ \sqrt{x} + 1, & x \in [1; +\infty). \end{cases}$$

OT1.46. $f : R \to R$ по правилу

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+5}{x}, & x \in (-\infty; 0); \\ x^3 + 1, & x \in [0, +\infty). \end{cases}$$

OT1.47. $f : R \to R$ по правилу

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(4 - x^2), & x \in (-2; 0]; \\ \sqrt{3x^2 + 4}, & x \in (-\infty;\ -2]. \end{cases}$$

OT1.48. $f : R \to R$ по правилу

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+1}{2-x}, & x \in (-\infty\ ;\ -2); \\ 3^{-x+1}, & x \in [-2; 1); \\ -\sqrt{x-1} + 1, & x \in [1; +\infty). \end{cases}$$

Пусть $C(R)$ — множество всех вещественных непрерывных функций. Проверить, являются ли следующие отображения $F : C(R) \to C(R)$ инъективными, сюръективными, биективными, и найти обратные к ним с соответствующей стороны.

8.417. $[F(f)](x) = f(e^x)$.

8.418. $[F(f)](x) = e^{f(x)}$.

8.419. $[F(f)](x) = \left(x^2 - 1\right) \cdot f(x)$.

8.420. $[F(f)](x) = \left(x^2 + 1\right) \cdot f(x)$.

8.421. $[F(f)](x) = f(2x - 1)$.

8.422. $[F(f)](x) = f^3(x)$.

8.423. $[F(f)](x) = f\left(x^{1/3}\right)$.

OT1.49. $[F(f)](x) = f^2(x)$.

OT.1.50. $[F(f)](x) = (x + 1)\, f(2x)$.

OT1.51. $[F(f)](x) = 3^{f(x)}$.

OT1.52. $[F(f)](x) = f\left(x\left(x^2 + 1\right)\right)$.

ОТ1.53. $[F(f)](x) = f\left(x^2 - 1\right)$.

ОТ1.54. $[F(f)](x) = x^{f^2(x)+1}$.

ОТ1.56. $[F(f)](x) = \left(x^2 - 1\right) f(2x)$.

ОТ1.57. $[F(f)](x) = \begin{cases} \log_2(f(x)), & f(x) > 0; \\ 0, & f(x) \le 0. \end{cases}$

ОТ1.58. $[F(f)](x) = \cos(f(x))$.

ОТ1.60. $[F(f)](x) = f(|x| + 2)$.

Решения

Р ОТ1.1. $f : R \to R, \quad f(x) = \log_2 x$. Ясно, что выражение, стоящее справа, не задает функцию, определенную на множестве R, так как логарифмы отрицательных чисел не существуют.

Р ОТ1.3. $f : R \to R, \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty; -1); \\ \sin x, & x \in [-\pi; \pi]; \\ \ln x, & x \in (1; +\infty). \end{cases}$

Ясно, что это функция, действующая из R в R.

Р ОТ1.5. $f : [-1; 1] \to [-1; 1], \quad f(x) = \sin x + \cos x$.

Значение выражения, стоящего справа, при $x = \frac{\pi}{4}$ равно $\sqrt{2}$. Это число не принадлежит множеству $[-1; 1]$, поэтому выражение не задает функцию.

Р 8.381. Имеют место равенства:

$$\overline{B} = Y \setminus B \text{ и } f^{-1}(Y) = X. \qquad (*)$$

Тогда $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(B \cup \overline{B}) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(\overline{B})$.

Последние два множества не пересекаются (иначе пересекались бы B и $\overline{B}$). Значит, второе из них является дополнением к первому (относительно множества X), тогда $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)} = X \backslash f^{-1}(B)$, учитывая $(*)$, получаем $f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B)$.

Р 8.383. Так как $B_1 \subseteq B_2$, то $B_2 = B_1 \cup (B_2 \backslash B_1)$. Учитывая свойство «прообраз объединения равен объединению прообразов», получаем:

$$f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cup (B_2 \backslash B_1)) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2 \backslash B_1).$$

Из полученного равенства следует, что $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

Р 8.391. Пусть $y \in f(A_1) \Leftrightarrow f^{-1}(\{y\}) \cap A_1 \neq \varnothing$, а так как $A_1 \subseteq A_2$, то и $f^{-1}(\{y\}) \cap A_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow y \in f(A_2)$.

Приступая к решению примеров ОТ1.11–ОТ1.20 на нахождение образов и прообразов множеств, вернитесь к примеру 2.9.

Р ОТ1.21. $f : [1; +\infty) \to R, f(x) = \log_2 x$. Построение непрерывного продолжения дело довольно простое. Важно, чтобы на оставшейся части множества вещественных чисел было задано непрерывное отображение и чтобы оно на «стыке» принимало то же самое значение (имело соответствующий односторонний предел), что и имеющееся у нас выражение. В качестве такого непрерывного выражения можно взять, например, постоянную (вариант 1) или линейную функцию (вариант 2).

Вариант 1. Рассмотрим в качестве непрерывного продолжения нашего отображения следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 1); \\ \log_2 x, & x \in [1; +\infty). \end{cases}$$

Вариант 2. Рассмотрим в качестве непрерывного продолжения нашего отображения следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in (-\infty; 1); \\ \log_2 x, & x \in [1; +\infty). \end{cases}$$

Р8.407. Воспользуемся ассоциативностью композиции отображений
$$e_X{=}f^n{=}(f^{n-1})\circ f.$$
Последнее означает, что отображение f обратимо слева, тогда по критерию обратимости слева (теорема 2.13) это отображение инъективно. Еще раз воспользуемся ассоциативностью композиции отображений
$$e_X{=}f^n{=}f\circ(f^{n-1}).$$
Последнее означает, что отображение f обратимо справа, тогда по критерию обратимости справа (теорема 2.14) это отображение сюръективно.

Р8.409. Утверждение будем доказывать от противного, т. е. предположим, что существуют такие отображения $g : X \to Y, f : Y \to Z$, что $f\circ g$ — сюръективно, а f не является таковым. Отсутствие сюръективности отображения f означает, что во множестве Z существует такой элемент z_0, у которого $f^{-1}(\{z_0\}) =\varnothing$. Сюръективность отображения $f\circ g$ означает, в частности, что $(f\circ g)^{-1}(\{z_0\}) \neq \varnothing$. Это означает, что во множестве X существует такой элемент x_0, для которого имеет место равенство $(f\circ g)(x_0) = f((g(x_o)) = z_0$. Пусть $y_0 = g(x_0)$, тогда $y_0 \in Y$ и $f(y_0) = z_0$. Последнее противоречит тому, что $f^{-1}(\{z_0\}) = \varnothing$.

Приступая к решению примеров ОТ1.31–ОТ1.40 на нахождение композиции отображений, вернитесь к примеру 8.6.

Р ОТ1.41. $f : R \to R$ по правилу $f(x) = \sin x$. Это отображение является «никаким». Оно не является инъективным за счет периодичности синуса. Оно не является сюръективным, так как синус принимает только значения, не превосходящие по модулю единицу. Значит, ни о какой обратимости речи быть не может.

Р ОТ1.43. $f : R \to R$ по правилу

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \in (-\infty; 0); \\ -2^x + 2, & x \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Это отображение взаимнооднозначно отображает множество $(-\infty; 0)$ во множество $(1; +\infty)$, а множество $[0; +\infty)$ — во множество $(-\infty; 1]$. Полученные множества имеют пустое пересечение, а их объединение равно R. Из этого следует, что данное отображение биективно. Для построения обратного отображения необходимо найти обратные отображения к каждой из строк определения исходного отображения, а затем «склеить» из них нужное нам обратное отображение:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -x+1, & x \in (1; +\infty); \\ \log_2(2-x), & x \in (-\infty; 1]. \end{cases}$$

Р ОТ1.49. $[F(f)](x) = f^2(x)$. Это отображение является «никаким». Оно не инъективно, поскольку две разные функции $y = x$ и $y = -x$ отображаются в одну функцию $y = x^2$. Оно не сюрьективно, поскольку $F^{-1}(\{-e^x\}) = \varnothing$. Значит, о какой-либо обратимости этого отображения говорить не приходится.

§ 8.9. Комбинаторика

При решении комбинаторных примеров следует помнить, что:

- успех в решении зависит от того, насколько верно понято условие;

- почти не существует «чистых примеров», т. е. таких, в которых срабатывает «готовая формула».

П **Пример 8.15.** В купе с восемью сидячими местами (по четыре на каждом диване) вошло шесть пассажиров, один из которых (N1) согласен сидеть только у окна, двое (N2, N3) — только рядом, один (N4) — по ходу поезда, а двум (N5, N6) безразлично, где сидеть. Сколько существует способов рассадить пассажиров с учетом их пожеланий?

Множество всех способов разобьем на два непересекающихся множества A и B, отнеся к A те способы, когда N1 сидит у окна по ходу поезда, а к B — остальные. Ясно, что ответ задачи —

$$|A| + |B|\,. \qquad (8.1)$$

Займемся множеством A. Разобьем его на непересекающиеся подмножества I, II, III, IV и V в зависимости от того, какие два места занимают N2 и N3 (см. рис. 8.3).

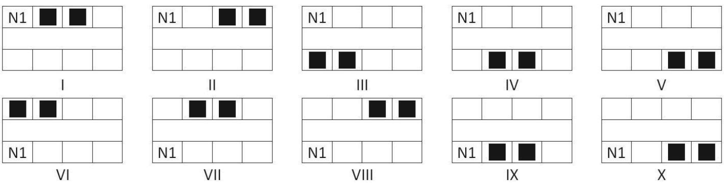


Рис. 8.3

Ясно, что

$$|A| = |\mathrm{I}| + |\mathrm{II}| + |\mathrm{III}| + |\mathrm{IV}| + |\mathrm{V}|. \qquad (8.2)$$

Помеченные места можно занять двумя способами. В случае I и II N4 занимает единственное свободное место на этом диване, N5 занимает любое из оставшихся четырех, а N6 — любое из оставшихся трех мест.

$$|\mathrm{I}| = |\mathrm{II}| = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24. \qquad (8.3)$$

В случаях III, IV, V пассажир N4 занимает любое из трех свободных мест на диване, где сидит N1, N5 — любое из оставшихся четырех мест, N6 — любое из оставшихся трех свободных мест. Тогда

$$|\mathrm{III}| = |\mathrm{IV}| = |\mathrm{V}| = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 72. \tag{8.4}$$

Из (8.2), (8.3), (8.4) получаем

$$|A| = 24 + 24 + 72 + 72 + 72 = 264.$$

Аналогично для множества B

$$|\mathrm{V}| = |\mathrm{VII}| = |\mathrm{VIII}| = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 48,$$
$$|\mathrm{IX}| = |\mathrm{XI}| = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 96,$$
$$|B| = 3 \cdot 48 + 2 \cdot 96 = 192 + 144 = 366.$$

Из (8.1) получаем ответ задачи: $264 + 336 = 600$ (способов). ◄

П **Пример 8.16.** На собрании должны выступать ораторы A, B, C, D. Сколько существует способов составить список выступающих так, чтобы C выступал позже B, но не сразу после него?

► Количество списков выступающих, когда сняты все ограничения, равно количеству перестановок длины 4, т. е. $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Разобьем множество списков на пары так, что второй список получается из первого переменой мест ораторов B и C (например, $ABDC$ и $ACDB$). Количество пар равно $\dfrac{24}{2} = 12$. В каждой такой паре один список, в котором B выступает раньше C, а другой — где C выступает раньше B. Значит, списков, в которых B выступает раньше C, столько же, сколько получилось пар, — 12.

Если мы определим количество списков, в которых C выступает сразу за B (их количество обозначим $|«BC»|$), то ответ задачи:

$$12 - |«BC»|. \tag{8.5}$$

Подсчитаем $|«BC»|$. Для этого «склеим» BC в одного оратора и рассмотрим, сколько списков можно составить, имея трех операторов: A, BC и D. Ясно, что количество списков из трех ораторов равно

$$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6. \tag{8.6}$$

Окончательно из (8.5) и (8.6) получаем ответ задачи: $12 - 6 = 6$ (способов).

Проверка. Выпишем все допустимые списки:

$BACD$; $BDCA$; $BADC$; $BDAC$; $ABDC$; $DBAC$. ◀

8.425. Найти $A \times B$, если $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$.

8.426. Доказать, что если $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, то $A \times B = B \times A$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

8.427. Равны ли множества $(A \times B) \times C$ и $A \times (B \times C)$?

8.428. Пусть $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ и $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$. Доказать, что $A = B = C = D$.

8.429. Пусть $A_i = [a_i; b_i] \times [c_i; d_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ $\big([a; b]$ — сегмент вещественных чисел$\big)$. Доказать, что если $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ для любых $i, j = 1, 2, \ldots, n$, то $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing$.

Доказать равенства:

8.430. $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$.

8.431. $\left(\bigcup_{i \in X} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} \left(A_i \times B_j\right)$.

8.432 $\left(\int_{i \in X} A_i\right) \times \left(\int_{j \in J} B_j\right) = \int_{(i,j) \in I \times J} \left(A_i \times B_j\right)$.

Задачи

8.433. Из города A в город B ведет 5 дорог, а из города B в город C — 4 дороги. Сколько путей, проходящих через B, ведет из A в C?

8.434. У Тани — 20 марок, у Наташи — 30. Сколькими способами можно осуществить обмен одной Таниной марки на одну Наташину? Двух Таниных на три Наташиных?

8.435. На ферме — 20 овец и 24 свиньи. Сколькими способами можно выбрать одну овцу? Одну свинью? Двух животных? Двух разнотипных животных (одну овцу и одну свинью)?

8.436. Из A в B ведет 5 дорог. Сколькими способами можно съездить из A в B и обратно, если путешествие туда и обратно совершается по разным дорогам?

8.437. В библиотеке 5 учебников геометрии, 7 — тригонометрии, 4 — алгебры. Сколько полных комплектов учебников можно составить? Сколько существует способов комплектования? (Все экземпляры книг считаются различными, а комплекты не имеют номеров.)

8.438. Сколькими способами можно выбрать 3 различные краски из имеющихся пяти?

8.439. Сколькими способами можно составить трехцветный трехполосный флаг, если имеется материя пяти различных цветов? То же самое, если средняя полоса должна быть синей?

8.440. Сколько различных флагов из трех полос можно составить, если имеется материал пяти цветов? (Сравните с предыдущей задачей.)

8.441. Надо послать 6 писем. Сколькими способами это можно сделать, если для доставки писем имеется 3 курьера?

8.442. Сколькими способами можно расставить 7 различных книг на книжной полке?

8.443. На собрании должны выступить 5 человек — А, Б, В, Г, Д. Сколькими способами можно составить список выступающих? То же самое при условии, что В выступает непосредственно перед Г?

8.444. В местком выбрано 9 человек, из них нужно выбрать председателя, заместителя, секретаря и культорга. Сколькими способами это можно сделать, если должности нельзя совмещать?

8.445. В зрительном зале — 120 мест. Сколькими способами могут занять места в нем 120 зрителей; 80 зрителей?

8.446. Сколькими способами можно наклеить 5 различных марок на 5 различных конвертов?

8.447. Сколькими способами на 5 различных конвертов можно наклеить по одной марке, если на почте имеется 7 различных видов марок?

8.448. Сколько слов можно получить, переставляя буквы слова «факел», «математика»?

8.449. Сколькими способами можно выбрать открытки для поздравления пяти лиц, если имеется 7 различных открыток?

8.450. Сколькими способами можно купить 5 открыток, если в продаже имеются открытки 7 различных видов?

8.451. В лифт сели 8 человек. Сколькими способами они могут выйти на четырех этажах, если на каждом этаже должен выйти хотя бы 1 человек?

8.452. Пять различных грузов нужно доставить на этажи строящегося дома. Сколькими способами это можно сделать, если каждый груз можно доставить на любой из пяти этажей?

8.453. У мамы 3 одинаковых яблока и 4 одинаковых груши. Каждый день, начиная с понедельника и заканчивая воскресеньем, она выдает ребенку по 1 плоду в день. Сколькими способами это можно сделать? То же самое, но при условии, что ни в какие 2 соседних дня не выдается однотипный плод? Те же самые вопросы в предположениях: а) яблоки различны, а груши одинаковые; б) яблоки одинаковы, а груши различны; в) все плоды различны.

8.454. Сколько способов разложить 10 одинаковых монет по двум различным карманам?

8.455. Сколько способов разложить 10 одинаковых монет по двум различным карманам так, чтобы оба кармана не были пусты?

8.456. Сколько способов разложить 10 различных монет по двум различным карманам?

8.457. Сколько способов разложить 10 различных монет по двум различным карманам так, чтобы оба кармана не были пусты?

8.458. Сколько способов разложить 10 одинаковых монет по трем различным карманам?

8.459. Сколько способов разложить 10 одинаковых монет по трем различным карманам так, чтобы ни один из карманов не был пустым?

8.460. Сколько способов разложить 10 различных монет по трем различным карманам?

8.461. Сколько способов разложить 10 различных монет по трем различным карманам так, чтобы ни один из карманов не был пустым?

8.462. На карусели 4 одинаковых места для пассажиров. Сколько способов рассадки четырех пассажиров для катания на карусели?

8.463. То же самое, что и в задаче 8.462, если пассажир B должен кататься, имея непосредственно перед собой пассажира A?

Решения

Р8.425. $(1; a), (1; b), (2; a), (2; b), (3; a), (3; b)$.

Р8.427. Эти множества не равны, поскольку они состоят из разных элементов. Так, элементами множества $(A \times B) \times C$ являются упорядоченные пары, в каждой из которых вторым элементом является элемент множества C, а элементами множества $A \times (B \times C)$ являются упорядоченные пары, вторыми элементами в которых являются упорядоченные пары вида $(b; c)$, в которых $b \in B$, $c \in C$.

Р8.433. Обозначим через AB множество дорог, ведущих из города A в город B, а через BC — множество дорог, ведущих из города B в город C. Ясно, что дорога, ведущая из города A в город C через город B, — это упорядоченная пара (дорога, ведущая из A в B; дорога, ведущая из B в C). Поэтому нам необходимо найти $|AB \times BC| = |AB| \cdot |BC| = 5 \cdot 4 = 20$.

Р8.437

Первый способ

Ясно, что полный комплект должен содержать по одному учебнику геометрии, тригонометрии и алгебры. Поскольку учебников алгебры меньше всего, то они определяют, что мы можем скомплектовать только четыре полных комплекта учебников. Комплекты не имеют нумерации, но сначала будем считать, что они занумерованы.

Начнем формировать первый комплект. В него можно включить любой из пяти учебников геометрии, любой из семи учебников тригонометрии и любой из четырех учебников алгебры. Мы получили 140 вариантов ($5\times7\times4$) для формирования первого комплекта. После этого мы приступаем к формированию второго комплекта из оставшихся учебников. Получится $4\times6\times3$ вариантов, для третьего комплекта мы получим $3\times5\times2$ вариантов формирования, тогда для четвертого — $3\times4\times1$ вариантов. Всего для формирования четырех занумерованных комплектов мы получаем $(5\times7\times4)\times(4\times6\times3)\times(3\times5\times2)\times(2\times4\times1)$ вариантов. Как снять нумерацию? Будем считать варианты комплектования, составленные из одинаковых наборов комплектов, но взятых в различном порядке, эквивалентными. Тогда множество всех вариантов разбивается на классы, эквивалентные между собой. Нас фактически интересует количество классов эквивалентности. Для того чтобы узнать, сколько получилось классов, мы определим, сколько элементов содержится в каждом классе. Ясно, что в каждом классе содержится элементов столько, сколько существует перестановок длины 4, а их $4! = 24$. Тогда ответ задачи

$$(5\times7\times4)\times(4\times6\times3)\times(3\times5\times2)\times(2\times4\times1) : 4! = \\ = 7\times5\times5\times4\times4\times4\times3\times3.$$

Второй способ

В состав комплектов при любом способе комплектования войдут все четыре учебника алгебры, только 4 из семи учебников тригонометрии и только 4 из пяти имеющихся учебников геометрии. Четыре учебника геометрии из имеющихся пяти образуют четырехэлементное подмножество, поэтому вариантов выбора четырех учебников $C_5^4 = 5$. Вариантов выбора четырех учебников тригонометрии —

$$C_7^4=\frac{A_7^4}{P_4}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=7\cdot 5=35.$$

Вариант выбора четырех учебников алгебры из четырех имеющихся учебников всего один (их и взять). Всего получилось $5\times 35\times 1$ комбинаций, состоящих из конкретной четверки учебников геометрии, четверки учебников тригонометрии и четверки учебников алгебры. Как превратить каждую такую четверку учебников геометрии, четверку учебников тригонометрии и четверку учебников алгебры в занумерованный набор из четырех комплектов? В первый комплект можно положить любой из четырех учебников геометрии, любой из четырех учебников тригонометрии и любой из четырех учебников алгебры, всего 4^3 вариантов, тогда во второй комплект можно положить любой из оставшихся трех учебников геометрии, любой из оставшихся трех учебников тригонометрии и любой из оставшихся трех учебников алгебры — всего 3^3. Аналогично для третьего комплекта имеем 2^3 вариантов. Оставшиеся учебники образуют последний четвертый комплект. Мы получили всего $35\times 5\times 4^3\times 3^3\times 2^3$ различных вариантов. Снятие нумерации осуществим таким же образом, как и при первом варианте решения.

Тогда ответ задачи выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}\left(35\times 5\times 4^3\times 3^3\times 2^3\right):(1\times 2\times 3\times 4)=\\ =35\times 5\times 4^3\times 3^2=\\ =7\times 5\times 5\times 4\times 4\times 4\times 3\times 3=7=\\ =7\times 5\times 5\times 4\times 4\times 4\times 3\times 3.\end{gathered}$$

Заметим, что мы получили тот же ответ, что и при первом способе решения задачи.

Р8.439. В этой задаче два вопроса. Начнем с первого. Заметим, что флаги бывают двух типов: горизонтально-полосные и вертикально-полосные. Любой вертикально-полосный флаг можно получить из горизонтальнополосного поворотом на девяносто градусов против часовой стрелки, поэтому тех и других флагов — поровну. Будем пересчитывать горизонтально-полосные флаги. Ширину полос и размеры флага мы не учитываем. Будем считать, что имеется красный материал (К), синий материал (С), зеленый материал (З), желтый материал (Ж) и белый материал (Б). Множество всех флагов разобьем на пять непересекающихся подмножеств по признаку «какого цвета у флагов верхняя полоса». Каждое из полученных подмножеств разобьем, в свою очередь, на четыре подмножества по признаку «какого цвета у флагов средняя полоса» (соседние полосы не могут иметь одинаковый цвет, поскольку в этом случае эти полосы сливаются в одну). В результате мы получили 20 непересекающихся подмножеств. Каждое из них разобьем на четыре непересекающихся подмножества по признаку «какого цвета у флагов нижняя полоса». В результате мы получили разбиение исходного множества на 80 непересекающихся подмножеств. Ясно, что в каждом из них содержится по одному флагу. Поэтому количество горизонтально-полосных флагов в нашем случае равно восьмидесяти. А всего флагов 160 (2×80). Поясним наши рассуждения рисунком (см. рис. 8.4).

Перейдем теперь ко второму вопросу задачи. Цвет средней полосы уже определен, по условию она имеет синий цвет. Тогда верхняя полоса может иметь любой из четырех цветов (К, З, Ж, Б), нижняя также может иметь любой из этих цветов. Такой флаг можно отождествить с упорядоченной парой (цвет верхней полосы; цвет нижней полосы), такие пары — элементы декартова произведения множества {К, З, Ж, Б} на себя, т. е. {К, З, Ж, Б} $\times$ {К, З, Ж, Б}. Тогда ответ на второй вопрос нашей задачи, учитывая, что флаги бывают горизонтально-полосными и вертикально-полосными, — $2 \times (4 \times 4) = 3$.

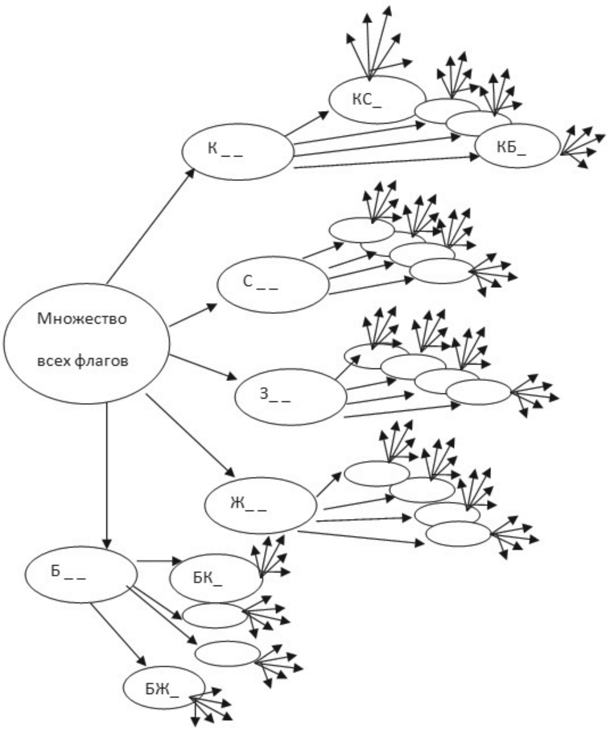


Рис. 8.4

Р8.441. Способ доставки задан, если каждому письму сопоставлен курьер, который его будет доставлять. Таким образом, способ доставки — это отображение из множества (П) писем во множество курьеров (К). Значит, количество способов доставки равно $\left|K^{\Pi}\right| = |\mathrm{K}|^{|\Pi|} = 3^6$.

Р8.443. В задаче два вопроса. Ответим сначала на первый вопрос. Составить список — значит определить, кто выступает первым, кто — вторым, кто — третьим, кто — четвертым, кто — пятым. Таким образом, список выступающих — это биективное отображение множества $[1;5]_N$ во множество ораторов. Поэтому количество возможных списков равно $P_5 = 5\,!$. Перейдем теперь ко второму вопросу задачи. «Склеим» *В* и *Г* в одного оратора *(ВГ)*.Теперь у нас есть четыре оратора: *А, Б, (ВГ), Д.* Рассуждая так же, как при ответе на первый вопрос задачи, получаем, что в этом случае количество списков ораторов равно $P_4 = 4\,!$.

Р8.445. В задаче два вопроса. Ответим на первый вопрос. Рассадить 120 зрителей по 120 местам в зрительном зале — это для каждого места определить зрителя, который его будет занимать. Таким образом, способ рассадки зрителей — это биективное отображение множества мест, т. е. $[1;120]_N$, во множество зрителей. Количество возможных способов рассадки равно $P_{120} = 120\,!$. Перейдем теперь ко второму вопросу задачи. Рассадить 80 зрителей в зрительном зале, имеющем 120 посадочных мест, — это для каждого из 80 зрителей определить место, на котором он должен сидеть. Таким образом, способ рассадки — это инъективное отображение (так как на одно место нельзя посадить нескольких зрителей) из множества зрителей во множество мест в зале. Количество способов рассадки 80 зрителей в 120-местном зале равно $A_{120}^{80} = 120 \cdot 119 \cdots 41$.

Приведем второй способ получения ответа на второй вопрос задачи. Для того чтобы рассадить 80 человек в 120-местном зрительном зале, нужно сначала выбрать 80 мест, а затем рассадить 80 человек на 80 выбранных мест. Выбрать 80 мест из 120 — это выделить 80-элементное подмножество множества мест в зале. Количество таких подмножеств равно C_{120}^{80}. Количество способов рассадки 80 зрителей на 80 выбранных местах равно $P_{80} = 80\,!$. Мы получили, что количество способов рассадки 80 человек в 120-местном зрительном зале равно $C_{120}^{80} \cdot P_{80}$.

Сравнив это с полученным ранее, мы получаем равенство $A_{120}^{80} = C_{120}^{80} \cdot P_{80}$. Ясно, что оно справедливо и при другом количестве зрителей и другой вместимости зала. Поэтому имеет место равенство

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m,\ m \leq n.$$

Р8.447. Наклеить марки на конверты — это для каждого конверта определить, какого вида марку на него наклеивать. Таким образом, способ в этом случае — отображение из множества конвертов (K) во множество видов марок (BM). Значит, количество способов равно $\left|\mathrm{BM}^{\mathrm{K}}\right| = |\mathrm{BM}|^{|\mathrm{K}|} = 7^5$.

Р8.451. Эта задача всегда вызывает у авторов улыбку. Каждому ясно, что «нормальные» люди заходят в лифт не для того, чтобы покататься (или создать задачу для задачника), а для того, чтобы добраться на тот этаж, на который им необходимо добраться. В связи со сказанным эта задача, с житейской точки зрения, имеет единственное решение (каждый пассажир лифта выходит на нужном ему этаже, и возникнет ситуация, о которой идет речь в задаче, или не возникнет — пассажиров лифта это не интересует). При решении задачи будем предполагать, что мы имеем дело со «странными» пассажирами, которым все равно, на каком этаже выходить. У них другая цель — реализация ситуации, о которой идет речь в условии задачи (на каждом из этажей выходит хотя бы один пассажир). При решении задачи мы не будем учитывать порядок выхода пассажиров на этаже в том случае, когда выходят несколько человек. Задать способ выхода — это определить для каждого из пассажиров, на каком этаже он должен выйти. Значит, способ — это отображение множества пассажиров ($\text{\textit{П}}$) во множество этажей выхода ($\text{\textit{Э}}$). Учитывая условие задачи — «на каждом из этажей выходит хотя бы один пассажир», отображения должны быть сюръективными. Количество способов равно (см. § 3.5)

$$\left|sur\text{Э}^{\text{П}}\right| = 4^8 - C_4^1 \cdot 3^8 + C_4^2 \cdot 2^8 - C_4^3 \cdot 1^8 = 4^8 - 4 \cdot 3^8 + 6 \cdot 2^8 - 4.$$

P8.455. Поскольку карманов всего два и монеты одинаковые, способ однозначно определяется количеством монет, положенных в первый карман (во второй кладем оставшиеся монеты). Наименьшее количество монет, которое можно положить в первый карман, — одна монета, следующее возможное количество монет, которое можно положить в первый карман, — две монеты и т. д. Последнее возможное количество монет, которое можно положить в первый карман, — девять монет. Ответ задачи: девять способов.

P8.457. Поскольку монеты различные, то способ — это указание для каждой монеты, в какой карман ее положить при данном варианте раскладки. Поэтому речь идет об отображениях множества монет (M) во множество карманов (K). Поскольку в каждом кармане должна быть хотя бы одна монета, то речь идет о сюръективных отображениях.

$$\left|sur\text{K}^{\text{M}}\right| = 2^{10} - C_2^1 \cdot 1^{10} = 2^{10} - 2 = 2(2^9 - 1).$$

Поскольку карманов всего два, то можно было бы и не включать «артиллерию большого калибра». В этом случае легко подсчитать количество несюръективных отображений. Их всего два (первое — всем монетам ставится в соответствие первый карман, второе — всем монетам ставится в соответствие второй карман). Тогда количество сюръективных отображений равно количеству всех отображений (2^{10}) минус количество несюръективных отображений (2). Мы опять получили, что количество способов раскладки десяти различных монет по двум разным карманам, при которых в каждом из карманов есть хотя бы одна монета, равно $2 \cdot (2^9-1)$.

P8.459. Поскольку монеты одинаковые, то способ раскладки определяется количеством монет, лежащих в каждом из карманов. Обозначим через x_1 количество монет, лежащих в первом кармане, через x_2 — количество монет, лежащих во втором кармане, через x_3 — количество монет, лежащих в третьем кармане. Тогда

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10,\ x_1, x_2, x_3 \in N.$$

Значит, количество способов раскладки равно числу решений полученного уравнения. Подсчетом числа решений этого уравнения мы занимались в § 3.4 книги, когда решали задачу о пирожных. Там мы доказали, что оно равно $C_9^2 = \dfrac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$.

P8.461. См. решение задачи 8.457. Ответ:

$$\left|sur\mathrm{K}^{\mathrm{M}}\right| = 3^{10} - C_3^1 \cdot 2^{10} + C_3^2 \cdot 1^{10} =$$
$$= 3^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3 = 3(3^9 - 2^{10} + 1).$$

P8.463. «Склеим» двух пассажиров A и B в одного — (AB). Теперь мы имеем трех пассажиров: (AB), C, D. Рассмотрим все перестановки, составленные из них:

(AB)CD, (AB)DC, C(AB)D, CD(AB), D(AB)C, DC(AB). Это фактически все способы рассадки пассажиров на стоящей карусели, при которых пассажир B сидит непосредственно за пассажиром A. Ясно, что при вращении карусели перестановки *(AB)CD, CD(AB)* и *D(AB)C* дают один и тот же вариант катания, поскольку каждый сидящий на карусели видит одинаковое взаимное расположение остальных сидящих на вращающейся карусели (представьте себе, что карусель вращается быстро и все находящееся вне ее «сливается в круговерти», а сидящих на карусели вы видите очень ясно, как и на стоявшей неподвижно карусели). Оставшиеся три перестановки *(AB)DC, DC(AB)* и *C(AB)D* порождают еще один вариант рассадки на вращающейся карусели. Мы получили два способа рассадки четырех пассажиров для катания на вращающейся карусели, при которых пассажир B видит непосредственно перед собой пассажира A.

§ 8.10. Отношения

В этом разделе мы будем рассматривать только двуместные отношения, в том числе на $X \times Y$ и на $X \times X$. Последние называются *бинарными отношениями на множестве* X.

Напомним, что если α отношение на $X \times Y$, $x \in X$, $y \in Y$ и x связан с y отношением α, то пишут $x\alpha y$, а если x не связан с y отношением α, то пишут $x\overline{\alpha}y$.

Для бинарных отношений на X определяют свойства: рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, которыми они могут обладать или не обладать. Напомним их ***определения***.

Бинарное отношение α на множестве X называется рефлексивным, если $\forall x(x\alpha x) \equiv 1$.

Бинарное отношение α на множестве X называется симметричным, если $\forall x \forall y((x\alpha y) \to (y\alpha x)) \equiv 1$.

Бинарное отношение α на множестве X называется антисимметричным, если

$$\forall x \forall y((x\alpha y)\&(y\alpha x) \leftrightarrow (x = y)) \equiv 1.$$

Бинарное отношение α на множестве X называется транзитивным, если $\forall x \forall y \forall z((x\alpha y)\&(y\alpha z) \to (x\alpha z)) \equiv 1$.

8.464. Найти все отношения на множестве $\{0;1\}$.

8.465. Привести пример отношения симметричного, транзитивного, но нерефлексивного.

Выяснить, какими из основных свойств — рефлексивностью, симметричностью, антисимметричностью — обладают следующие отношения на множестве натуральных чисел:

8.466. $S = \{(m,n)\,|m$ и n взаимно просты$\}$.

8.467. $S = \{(m,n)\,|m$ делится на $n\}$.

8.468. $S = \left\{(m,n)\,|m = n^2\right\}$.

8.469. $S = \{(m,n)\,|m < n\}$.

8.470. $S = \{(m,n)\,|m \leq n\}$.

8.471. $S = \{(m,n)\,|m - n$ делится на $2\}$.

8.472. $S = \{\,(m,n)\ \,|\, m - n = 2\,\}$.

8.473. Пусть дано отображение $f : X \to Y$. Доказать, что отношение $S = \{\,(x,x') \in X \times X, \mid f(x) = f(x')\,\}$ является отношением эквивалентности на X.

Доказать, что следующие отношения являются эквивалентностями, найти фактор-множества и установить взаимнооднозначные соответствия между ними и указанными множествами:

8.474. $S = \{\,(x,y)\ \mid x,y \in \mathbb{Z}, x-y$ — четное $\}$, $Z/\alpha_s \simeq \{0;1\}$.

8.475. $S = \{(x,y)\,|x,y \in R,\ \ x^2 = y^2\}$, $R/\alpha_s \simeq R_+$, где R — множество вещественных чисел, $R_+ = [0;+\infty)$.

8.476. $S = \{(x,y)\,|x,y \in R,\ \ x-y \in \mathbb{Z}\}$, $R/\alpha_s \simeq [0;1)$.

8.477. $S = \{(x,y)\,|x,y \in R,\ \ \sin x = \sin\}$, $R/\alpha_s \simeq \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

8.478. $S_n = \{(x,y)\,|x,y \in \mathbb{Z}, x-y$ — делится на $n, n \in N\}$,

$$\mathbb{Z}/\alpha_s \simeq \{0;1;2;\ldots;n-1\}.$$

8.479. $S = \{(x,y)\,|x,y \in \mathbb{C}, x-y \in R\}, \mathbb{C}/\alpha_s \simeq R$, где $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;

8.480. $S = \{(x,y)\,|x,y \in \mathbb{C},\ |x| = |y|\}$, $\mathbb{C}/\alpha_s \simeq R_+ = [0;\infty)$.

8.481. $S = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \arg x = \arg y, \mathbb{C}\backslash\{0\}/\alpha_s = [0;2\pi)$.

8.482. $S = \{\,(x,y)\mid x,y \in N, (x=y) \vee (x \geq 10)\cdot(y \geq 10)\,\}$, $N/\alpha_s \simeq \{1;2;3;\ldots;10\}$.

8.483. $S = \{(x,y)|\,x,y \in N,\ x\sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot 10^i, y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \cdot 10^i$, $x_i, y_i \in \{0;1;\ldots;9\}, x_0 = y_0\}$, $N/\alpha_s \simeq \{0,1,\ldots,9\}$.

8.484. $S = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{C}, \mathrm{R}e\ x = \mathrm{R}e\ y\}$, $\mathbb{C}/\alpha_s \simeq R$.

8.485. $S = \{(A,B)|A,B \in M_{2\times2}, tr\ A = tr\ B, M_{2\times2}/\alpha_s \simeq R$, где $M_{2\times2}$ — множество вещественных матриц размера 2×2, $\mathrm{t}r\ A$ — след матрицы A, $\mathrm{t}r\ A = (A)_{11} + (A)_{22}$.

На множестве всех бесконечных последовательностей вещественных чисел, имеющих конечный предел, заданы следующие отношения. Выяснить, какие из них являются эквивалентностями, а какие — частичным порядком:

8.486. $S = \{(\{a_n\}, \{b\_n\}) \mid \forall n \ (a_n \le b_n) \equiv 1\}$.

8.487. $S = \{(\{a_n\}, \{b_n\}) | \exists n \forall k ((k > n) \to (a_k = b_k)) \equiv 1\}$.

8.488. $S = \{(\{a_n\}, \{b_n\}) | \exists n \forall k ((k > n) \to (a_k \le b_k)) \equiv 1\}$.

8.489. $S = \left\{(\{a_n\}, \{b_n\}) \mid \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n \right\}$.

8.490. $S = \left\{(\{a_n\}, \{b_n\}) \mid \lim\limits_{n \to \infty} a_n\} \le \lim\limits_{n \to \infty} b_n \right\}$.

8.491. На множестве $N^2 \setminus \{(1;1)\}$ введено отношение

$$S = \{((m, n), (p, q)) \mid (m \le p)(n \le q)\}.$$

Доказать, что α_s — частичный порядок, и найти все минимальные элементы на этом множестве.

8.492. На множестве $N \setminus \{1\}$ введено отношение $S = \{(m, n) \mid n$ делится на $m\}$. Доказать, что α_s — отношение частичного порядка, но не линейного порядка.

8.493. На множестве $M = \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ введено отношение $S = \{(X, Y) \mid X, Y \in M, \ X \subset Y\}$. Показать, что α_s — отношение частичного, но не линейного порядка.

8.494. На множестве $B_{m \times n}$ булевых матриц (т. е. матриц с элементами из множества $\{0, 1\}$) размера $m \times n$ введено отношение

$$S = \Bigg\{(A, B) | \exists i_0 \forall i \forall k \Bigg((((i \ne i_0) \Longrightarrow (a_{ik} = b_{ik})) \ \& \\ \& \ \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{i_0 k} 2^{k-1} \le \sum_{k=1}^{n} b_{i_0 k} 2^{k-1}\Big) \vee (A = B) \Bigg) \Bigg\}.$$

Доказать, что α_s — отношение порядка. Каким является этот порядок — частичным или линейным?

Решения

P8.464. Легче всего решить этот пример, используя матрицу отношения. Для этого напомним ее определение. Пусть α — бинарное отношение на $X \times Y$, оба множества предполагаются конечными. Занумеруем элементы этих множеств $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. Поставим в соответствие отношению α булеву матрицу A_α размера $n \times m$ по следующему правилу:

$$(A_\alpha)_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i \alpha y_j; \\ 0, \text{ если } x_i \overline{\alpha} y_j. \end{cases}$$

Будем считать, что во множестве $\{0; 1\}$ элементы занумерованы в том порядке, как они перечислены. Задать отношение — это то же самое, что задать его матрицу. Выпишем все булевы матрицы размера 2×2:

$$\begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 0\,0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 0\,1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 1\,1 \end{pmatrix}.$$

P8.467. Ясно, что это отношение является рефлексивным, поскольку любое натуральное число делится само на себя. Очевидно, что это отношение не является симметричным. Действительно, 4 делится на 2, а 2 на 4 не делится. Ясно, что это отношение антисимметрично, так как одновременная делимость первого числа на второе и второго на первое возможна только в случае их равенства. Ясно, что это отношение транзитивно, так как если первое число делится на второе, а второе делится на третье, то первое число делится на третье.

P8.469. Ясно, что отношение «$<$» не является рефлексивным, не является симметричным, является антисимметричным (тривиально), является транзитивным.

P8.471. Ясно, что это отношение рефлексивно, симметрично, не является антисимметричным. Действительно, 4 и 2 связаны этим отношением, 2 и 4 также связаны этим отношением, однако $2 \neq 4$. Это отношение является транзитивным. Действительно, это отношение на множестве натуральных чисел на самом деле таково: «любые два четных числа связаны отношением, любые два нечетных числа связаны этим отношением, а числа разной четности не связаны между собой», поэтому в нашем случае $(m\alpha n)\&(n\alpha p)$ означает, что все три числа либо четны, либо нечетны, но так или иначе мы получаем, что $m\alpha p$.

P8.473. Ясно, что рефлексивность имеет место, так как для любого x справедливо равенство $f(x) = f(x)$. Симметричность также имеет место, так как из равенства $f(x_1) = f(x_2)$ следует равенство $f(x_2) = f(x_1)$. Транзитивность также наблюдается, так как из одновременного выполнения равенства $f(x_1) = f(x_2)$ и равенства $f(x_2) = f(x_3)$ следует выполнение равенства $f(x_1) = f(x_3)$.

P8.475. Ясно, что рефлексивность имеет место, так как для любого вещественного числа x имеет место равенство $x^2 = x^2$, симметричность также имеет место, поскольку если $x^2 = y^2$, то и $y^2 = x^2$. Ясно, что это отношение транзитивно. Действительно, если $x^2 = y^2$ и $y^2 = z^2$, то $x^2 = z^2$. Ясно, что $[0]_\alpha = \{0\}$, $[z]_\alpha = \{-z, z\}, z \neq 0$. Поставим в соответствие классу $[z]_\alpha$ число $|z|$. Мы получили биективное отображение фактор-множества R/α во множество $R_+ = [0; \infty)$.

P8.487. Ясно, что рассматриваемое отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности.

Р8.489. Ясно, что рассматриваемое отношение является отношением эквивалентности, так как оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Р8.491. Ясно, что это отношение рефлексивно, транзитивно и антисимметрично, т. е. является отношением порядка. Этот порядок лишь частичный, так как элементы $(2;3)$ и $(3;2)$ являются несравнимыми. Элементы $(1;2)$ и $(2;1)$ являются во множестве $N^2\backslash\{(1;1)\}$ минимальными.

Р8.493. Ясно, что отношение «$\subseteq$» является отношением порядка, так как оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. На данном множестве этот порядок не является линейным, а является лишь частичным порядком, так как $\{1\}$ и $\{2;3\}$ несравнимы этим отношением.

§ 8.11. Функции алгебры логики

Напомним, что булевы операции $\neg$, $\wedge$, $\vee$ образуют полную систему функций. Это означает, что любая функция алгебры логики ($\Leftrightarrow$ булева функция) может быть задана формулой над $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

В частности, $x|y \equiv \overline{x \cdot y}$, $x \uparrow y \equiv \overline{x \vee y}$, $x \oplus y \equiv x\overline{y} \vee \overline{x}y$.

Еще одной полной системой функций является $\{0, 1, \oplus, \&\}$.

Формулы над $\{0, 1, \oplus, \&\}$ *называют многочленами Жегалкина.*

Каноническим многочленом Жегалкина называют многочлен Жегалкина, в котором раскрыты скобки и приведены подобные.

Переменная x_i *функции* $f(x_1, \dots, x_n)$ *называется фиктивной, если*

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)\,.$$

Можно доказать, что переменная x_i в функции $f(x_1, \dots, x_n)$ фиктивна тогда и только тогда, когда канонический многочлен Жегалкина функции f не содержит переменной x_i.

8.496. Найти канонические многочлены Жегалкина следующих булевых функций:

а) всех булевых функций из $P_2(1)$, $P_2(2)$;
б) $(x_1 \to x_2) \sim (x_2 \sim x_3)$;
в) $(x_1 \to x_3) \cdot (x_2 \bigoplus x_3)$;
г) $\overline{x_1 \cdot x_3} \vee x_2 \cdot \overline{x}_4$; д) $(z_1 \sim z_2) \to z_3$;
е) (10101100) — столбец значений функции f в ее таблице;
ж) (11000100); з) $(\overline{x}_1 \mid x_2) \uparrow x_3$.

8.497. Найти все фиктивные переменные следующих булевых функций:

а) $x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2$; б) $x_1 \overline{x}_2 \vee x_2$;
в) $x_1 \overline{x}_2 \vee x_1$;
г) $(x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3))$;
д) $(x_1 \to x_2)\,((x_2 \to x_3) \to (x_1 \to x_3))$;
е) $(x_1 \to x_2) \to (\overline{x}_2 \to \overline{x}_1)$; ж) $(x_1 \to x_2) \to x_1$.

8.498. Сколько функций содержится во множестве:

а) $P_0\,(n) \cap P_1\,(n)$; б) $P_0\,(n) \cup P_1\,(n)$;
в) $P_0\,(n) \setminus P_1\,(n)$; г) $P_0\,(n) \cap S\,(n)$;
д) $P_0\,(n) \cup S\,(n)$; е) $P_0\,(n) \setminus S\,(n)$;
ж) $S\,(n) \setminus P_0\,(n)$.

8.499. Из функций примеров 8.496 и 8.497 выделить все функции, входящие в P_0; в P_1.

8.500. Какие из следующих функций самодвойственны:

а) $(x_1 \to x_2) \to x_1 x_3$;

б) $(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_1)\, x_4 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3$;

в) $x_1 x_2 \bigoplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3$;

г) (0001001001100111);

д) $f(x_1, x_2, \ldots, x_{2m+1}) = x_1 \bigoplus x_2 \bigoplus \cdots \oplus x_{2m+1} \oplus \delta$, $\delta \in \{0; 1\}$;

е) $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)$;

ж) $(x_1 \mid \overline{x}_1) \uparrow x_2$.

8.501. Из самодвойственной функции f с помощью отождествления переменных и $\neg$ получить константу:

а) (00111001); б) $(x_1 \mid x_2) \to (x_1 \bigoplus x_3)$;

в) $(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \bigoplus \overline{x}_1 x_2 x_3$;

г) $x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_4 \vee x_3 x_4$.

8.502. Какие из функций примеров 8.496, 8.497, 8.500 монотонны?

8.503. Из немонотонных функций примеров 8.500 и 8.501 с помощью подстановки констант получить $\neg x$.

8.504. Какие из следующих функций монотонны:

а) $x_1 \to (x_2 \to x_3)$; б) (00110111);

в) $x_1 x_3 \cdot (x_1 \bigoplus x_3)$; г) $x_1 x_2 \bigoplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1$;

д) (01100111).

8.505. Какие из функций примеров 8.496, 8.497, 8.500, 8.504 линейны?

8.506. Из нелинейных функций примера 8.505 с помощью 0, 1 и $\neg$ получить $\wedge$.

8.507. Выразить с помощью суперпозиций:

а) $\wedge$ и $\to$ через $\neg$, $\vee$;

б) $\vee$ и $\to$ через $\neg$, $\wedge$;

в) $\wedge$ и $\vee$ через $\neg$, $\to$;
г) $\neg$ через 0, $\to$; д) $\neg$ через 1, $\bigoplus$;
е) $\vee$ через $\to$; ж) $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\sim$ через $\uparrow$;
з) $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\oplus$ через $|$;
и) $\uparrow$ через $|$; к) $|$ через $\uparrow$.

8.508. Доказать полноту следующих систем функций сведением к заведомо полным системам:

а) $\{x_1 \uparrow x_2\}$; б) $\{x_1 | x_2\}$;
в) $\{x_1 \to x_2; \overline{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3}\}$;
г) $\{(1011)\,; (1100001100111100)\}$.

8.509. С помощью теоремы Поста проверить на полноту следующие системы функций:

а) x_1x_2; $x_1 \vee x_2$; б) $x_1 \to x_2$; $x_1 \to \overline{x}_2x_3$;
в) $x_1\overline{x}_2$; $\overline{x}_1 \sim x_2x_3$;
г) $0; 1; x_1(x_2 \sim x_3) \vee \overline{x}_1(x_2 \bigoplus x_3)$;
д) $\neg x$; (0010); (0101110011100011);
е) $1; x_1 \oplus x_2; (x_1 \to x_2) \uparrow (x_2 \sim x_3)\,; (x_3 \mid (x_1 \cdot x_2)) \to \overline{x}_3$;
ж) $x_1 \to x_2$; $\overline{x}_1$; з) x_1x_2; $x_1 \vee x_2$; $x_1 \to x_2$;
и) $x_1 \sim x_2$; $\overline{x}_1$; $\overline{x}_1 \to \overline{x}_2$;
к) $x_1 \to x_2; 0$; $x_1 \sim x_2$; л) $x_1 \oplus x_2; \overline{x}_1$;
м) $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3; 0; 1$;
н) $x_1x_2 \vee x_1x_3$; $\overline{x}_1$; $\overline{x}_1 \to x_2$.

8.510. Из полных систем примера 8.509 выделить все возможные базисы, т. е. такие полные подсистемы, у которых ни одна собственная подсистема не является полной.

8.511. Доказать, что если система функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ полна, то и система $\{f_1^*, f_2^*, \ldots, f_m^*\}$ также полна.

8.512. Какие из указанных систем функций являются замкнутыми:

а) $P_2(1)$; б) $P_2(2)$; в) P_2;
г) $P_0 \cap P_1$; д) $P_0 \cup P_1$; е) $P_0 \backslash P_1$.

8.513. Доказать, что пересечение функционально замкнутых классов является функционально замкнутым классом.

8.514. Доказать, что если множество $\mathcal{M}$ функционально замкнутый класс, то $\mathcal{M}^*$ — множество, состоящее из функций, двойственных к функциям из $\mathcal{M}$, также является функционально замкнутым классом.

8.515. Доказать, что если $\mathcal{M} \neq \varnothing$ и $\mathcal{M} \neq P_2$ и $[\mathcal{M}] = \mathcal{M}$, то $P_2 \backslash \mathcal{M}$ незамкнуто.

8.516. Обозначим M^- множество монотонно убывающих булевых функций. Доказать, что M^- и $M \cup M^-$ незамкнуты.

8.517. Доказать, что для монотонности функции, отличной от константы, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде суперпозиции конъюнкций и дизъюнкций ($\Leftrightarrow f \in [\vee, \ \wedge]$).

8.518. Доказать, что $f \in M \ \Leftrightarrow f^* \in M$.

8.519. Найти $M \cap (P_2 \backslash P_0)$, $\quad M \cap (P_2 \backslash P_1)$.

8.520. К какому наименьшему числу переменных можно свести немонотонную функцию с сохранением немонотонности, отождествляя ее переменные?

8.521. Найти $P_2\,(2) \backslash (P_0 \cup P_1 \cup L \cup S \cup M)$.

8.522. Найти все функции, которые можно получить, отождествляя переменные из следующих функций:

а) (10010110);
б) (11111101);
в) $x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$;
г) $x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus x_2 \oplus 1$.

Решения

Р8.497а. Преобразуем рассматриваемую функцию: $x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2 = x_1(x_2 \vee \overline{x}_2) = x_1 \cdot 1 = x_1$. Ясно, что x_2 — фиктивная переменная.

Р8.497б. Преобразуем рассматриваемую функцию:

$$x_1 \cdot \overline{x_2} \vee x_1 \underset{\text{поглощения}}{\overset{\text{закон}}{=}} x_1.$$

Ясно, что x_2 — фиктивная переменная.

Р8.497в. Преобразуем рассматриваемую функцию:

$$\begin{gathered}(x_1 \to x_3) \cdot (x_2 \oplus x_3) = (\overline{x_1} \vee x_3) \cdot (x_2 \oplus x_3) = \\ = (\overline{x_1} \cdot x_3 \oplus \overline{x_1} \oplus x_3 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus x_3) = \\ = ((x_1 \oplus 1) \cdot x_3 \oplus (x_1 \oplus 1) \oplus x_3 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus x_3) = \\ =(x_1 \cdot x_3 \oplus x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus x_3) = \\ = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \oplus x_1 \cdot x_2 \oplus x_2 \oplus x_3.\end{gathered}$$

Так как в каноническом многочлене Жегалкина содержатся все переменные, то функция не имеет фиктивных переменных.

Р8.501а. Будем решать этот пример, следуя доказательству леммы о несамодвойственных функциях. Восстановим таблицу функции:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Найдем в таблице функции такой набор значений переменных $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, для которого выполнено $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_n)$. Ясно, что таковым является набор (001). Теперь перейдем от табличного задания функции к ее заданию с помощью формулы. Для этого построим ее СДНФ:

$$\overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Преобразуем полученное с целью упрощения:

$$\overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \vee \overline{x}1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 = \\ = \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot (\overline{x}_3 \vee x_3) \vee x_1 \cdot (\overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_2 x_3) = \\ = \overline{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot (\overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_2 x_3).$$

С помощью выбранного набора значений (001) образуем функцию $\varphi(x) = f(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots, x^{\alpha_n})$. В нашем случае это означает, что нужно x_1 и x_2 заменить на $\overline{x}$, а вместо x_3 подставить x.

В результате получаем

$$\varphi(x) = \overline{\overline{x}} \cdot x \vee \overline{x} \cdot (\overline{\overline{x}} \cdot \overline{x} \vee \overline{x} x) = 0 \vee \overline{x} \cdot (0 \vee 0) = 0.$$

Р8.503. Возьмем функцию из примера 8.500а, рассмотрим ее таблицу истинности:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Найдем в таблице два набора значений переменных, на которых происходит нарушение монотонности. Таковыми являются наборы (100) и (110). Действительно, первый из них «младше» второго в смысле введенного отношения частичного порядка $\prec$ (см. в § 5.4), а на нем функция принимает большее значение, чем на втором наборе. Теперь перейдем от табличного задания функции к ее заданию с помощью формулы. Для этого построим ее СДНФ: $\overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

Преобразуем полученное с целью упрощения:

$$\overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 =$$
$$= \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot (\overline{x}_3 \vee x_3) \vee x_1 \cdot (\overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_2 x_3) =$$
$$= \overline{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot (\overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_2 x_3).$$

Далее будем следовать доказательству леммы о немонотонных функциях. Для этого, используя найденные наборы, образуем функцию $\gamma(x)$, подставим по местам совпадений значений в наборах вместо переменных эти значения, а по местам переменных, где значения в наборах не совпадают, подставим переменную x. В нашем случае вместо первой переменной нужно подставить 1, вместо третьей переменной нужно подставить 0, а вместо второй переменной — x.

$$\gamma(x) = \overline{1} \cdot x \vee 1 \cdot \left(\overline{x} \cdot \overline{0} \vee x \cdot 0\right) = 0 \vee (\overline{x} \cdot 1 \vee 0) = \overline{x}.$$

Р8.507а. Ясно, что $x \wedge y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}, x \to y = \overline{x} \vee y$.

Р8.507б. Ясно, что $x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}, x \to y = \overline{x \wedge \overline{y}}$.

Р8.507в. Ясно, что $x \vee y = \overline{x} \to y, x \wedge y = \overline{x \to \overline{y}}$.

Р8.509а. Для каждой из функций нужно заполнить ее строку в таблице Поста («плюс» ставится в клетке, если функция принадлежит соответствующему классу функций, а «минус» — если функция не принадлежит классу).

	P_0	P_1	L	S	M
$x_1 \cdot x_2$	+	+	−	−	+
$x_1 \vee x_2$	+	+	−	−	+

Далее необходимо провести анализ таблицы. Согласно теореме Поста рассматриваемое множество функций полно тогда и только тогда, когда в каждом столбце таблицы Поста имеется хотя бы один минус. Анализ вышеуказанной таблицы дает нам, что рассматриваемое множество функций не является полным множеством.

Р8.509б. Для облегчения ответов на вопросы о самодвойственности и монотонности для второй функции построим ее таблицу истинности:

x_1	x_2	x_3	$x_1 \to \overline{x}_2 \cdot x_3$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Для каждой из функций нужно заполнить ее строку в таблице Поста («плюс» ставится в клетке, если функция принадлежит соответствующему классу функций, а «минус» — если функция не принадлежит классу).

	P_0	P_1	L	S	M
$x_1 \to x_2$	−	+	−	−	−
$x_1 \to \overline{x}_2 \cdot x_3$	−	−	−	−	−

Далее необходимо провести анализ таблицы. Согласно теореме Поста рассматриваемое множество функций полно тогда и только тогда, когда в каждом столбце таблицы Поста имеется хотя бы один «минус». Ясно, что рассматриваемое множество функций является полным множеством. Более того, уже одна функция $x_1 \to \overline{x}_2 \cdot x_3$ образует полное множество.

Р8.511. Начнем с тривиальных утверждений.

А. Если $f \notin P_0$, то $f^* \notin P_1$.

Б. Если $f \notin P_1$, то $f^* \notin P_0$.

Перейдем к более сложным.

В. Если $f \notin S$, то $f^* \notin S$.

Действительно, $f \notin S \Leftrightarrow f \neq f^*$. Учитывая, что $f = (f^*)^*$, последнее неравенство можно переписать в виде $f^* \neq (f^*)^*$. Это и означает, что $f^* \notin S$.

Г. Если $f \notin M$, то $f^* \notin M$.

Действительно, $f \notin M$ равносильно тому, что существуют наборы значений $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, что $(\alpha_1, \alpha_2, , \alpha_n) \prec (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ и $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1$, $f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = 0$.

Вспомним, что означает

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \prec (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Это значит, что $\alpha_1 \leq \beta_1, \alpha_2 \leq \beta_2, \dots, \alpha_n \leq \beta_n$. Последнее равносильно тому, что $\overline{\alpha}_1 \geq \overline{\beta}_1, \overline{\alpha}_2 \geq \overline{\beta}_2, \dots, \overline{\alpha}_n \geq \overline{\beta}_n$. Это равносильно тому, что

$$(\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \dots, \overline{\beta}_n) \prec (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_n).$$

Найдем $f^*(\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \dots, \overline{\beta}_n) = \overline{f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} = \overline{0} = 1$ и $f^*(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_n) = \overline{f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} = \overline{1} = 0$. Немонотонность функции f^* доказана.

Д. Если $f \notin L$, то $f^* \notin L$.

Пусть f — нелинейная функция, это значит, что в его каноническом многочлене Жегалкина присутствует нелинейная часть. Выберем в ней слагаемое наибольшей степени, тогда всю функцию можно записать в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{i1} x_{i2} \cdots x_{ik} \oplus (\text{все остальное}).$$

«Все остальное» — это (возможно) слагаемые такой же степени, что и первое, но содержащие другие комбинации переменных и слагаемые меньших степеней. Чтобы перейти к двойственной функции, нужно в последнем равенстве каждую переменную $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$ заменить на $x_i \oplus 1, i = 1, 2, \ldots, n$ и к правой части добавить $\oplus 1$. Если раскрыть скобки и привести подобные, то мы получим канонический многочлен Жегалкина функции f^* и в нем будет содержаться слагаемое $x_{i1}x_{i2} \cdots x_{ik}$, поскольку оно возникает только один раз при раскрытии скобок. Наличие этого слагаемого и доказывает нелинейность функции f^*. Из доказанных нами утверждений следует, что $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ — полная система функций тогда и только тогда, когда $\{f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n{}^*\}$ — полная система функций.

P8.517. Поскольку дизъюнкция и конъюнкция монотонны, то в силу теоремы о замкнутости класса монотонных функций (теорема 5.16) мы получаем, что любая функция из $[\wedge, \vee]$ монотонна и отлична от константы. Докажем теперь и обратное. Рассмотрим СДНФ такой функции. Возможны два варианта.

А. Она имеет вид $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$. В этом случае наша функция уже представлена в требуемом виде.

Б. В СДНФ нашей функции есть еще какие-то слагаемые. Покажем, что слагаемого вида $\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdots \overline{x}_n$ быть не может. Действительно, наличие этого слагаемого означает, что $f(0, 0, \ldots, 0) = 1$. А так как функция монотонна, то она обязана быть тождественно равной единице, а мы знаем, что наша функция не является константой. Поэтому в любом слагаемом, содержащемся в СДНФ и отличном от $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$, имеются переменные без отрицания и переменные, находящиеся под знаком отрицания. Выпишем такое слагаемое, считая, что в нем первые k переменных без знака отрицания, а остальные находятся под знаком отрицания: $x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot \cdot \overline{x}_{k+1} \cdots \overline{x}_n$. Мы получили, что наша функция на наборе, составленном из единиц, стоящих на первых k местах, и нулей, стоящих на последних $n-k$ местах, равна единице. Из требования монотонности функции следует, что она обязана быть равной единице и на любом наборе значений, который старше этого набора в смысле отношения $\prec$. Любой старший набор можно получить из этого набора, заменив произвольное подмножество нулей единицами. Последнее означает, что в СДНФ нашей функции вместе со слагаемым $x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot \overline{x}_{k+1} \cdots \overline{x}_n$ должны содержаться и всевозможные слагаемые, получаемые из него выделением какого-нибудь непустого подмножества из последних $n-k$ переменных и снятием с них знака отрицания. Сгруппируем все такие слагаемые вместе с $x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot$ $\cdot\, \overline{x}_{k+1} \cdots \overline{x}_n$ и вынесем за скобки общий множитель. Мы получим следующее: $x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot$ («что-то»). Это «что-то» представляет собой СДНФ функции от переменных $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{n-k}$ и содержит 2^{n-k} полных совершенных элементарных конъюнкций. Последнее означает, что мы имеем дело с СДНФ функции, тождественно равной 1. Значит, мы показали, что в результате группировки возникло выражение вида $x_1 \cdot x_2 \cdots x_k$. Последовательное применение таких рассуждений показывает, что в нашем случае СДНФ функции может быть приведена к ДНФ, не содержащей отрицаний переменных, т. е. к формуле, содержащей только дизъюнкцию и конъюнкцию.

§ 8.12. Машина Тьюринга

В этом небольшом параграфе содержатся задачи двух главных типов:

- по заданной задаче Тьюринга найти результат ее применения к заданному слову u, т. е. $T(u)$;

- построение машины, решающей данный класс задач.

Естественные трудности возникают при решении задач второго типа. Мы рекомендуем до составления программы машины, т. е. до заполнения таблицы, задающей программу, тщательно продумать алгоритм, который должен быть реализован программой. В конце решения, т. е. когда программа составлена, не забудьте применить ее к подготовленному тестовому примеру.

Составление тестовых примеров – часть науки «Тестирование и верификация программного обеспечения». «Верификация программного обеспечения — более общее понятие, чем тестирование. Целью верификации является достижение гарантии того, что верифицируемый объект (требования или программный код) соответствует требованиям, реализован без непредусмотренных функций и удовлетворяет проектным спецификациям и стандартам» (*Синицын С. В., Налютин Н. Ю.* Верификация программного обеспечения: курс лекций).

По заданной машине T с внешним алфавитом $A = \{|, \wedge\}$ и слову u найти слово $T(u)$.

8.523.

	q_1	q_2
$\vert$	$\wedge q_2 + 1$	$\vert\, q_2 - 1$
$\wedge$	$\vert\, q_0 0$	$\wedge q_1 + 1$

$u_1 = |\ |\ |\ |$
$u_2 = |\wedge\ \wedge|$

8.524.

	q_1	q_2	q_3
$\vert$	$\wedge q_3+1$	$\vert q_2 0$	$\vert\ q_1+1$
$\wedge$	$\vert\ q_2+1$	$\vert q_3+1$	$\vert q_0 0$

$u_1 = |\,|\,|$
$u_2 = |\wedge\ \wedge|$
$u_3 = |\,|\wedge\ \wedge\ \wedge|$

Выяснить, применима ли машина Тьюринга с внешним алфавитом $\{|,\ \wedge\}$ к слову u, и в случае применимости найти результат.

8.525.

	q_1	q_2
$\vert$	$\vert\ q_1+1$	$\wedge q_2-1$
$\wedge$	$\wedge\ q_2-1$	$\vert\ q_0+1$

$u_1 = |\,|\,|$
$u_2 = |\,|\wedge|$

8.526.

	q_1	q_2	q_3
$\vert$	$\wedge q_1+1$	$\vert\ q_1-1$	$\vert\ q_2+1$
$\wedge$	$\vert\ q_2+1$	$\wedge q_3+1$	$\wedge\ q_0 0$

$u_1 = |\,|\wedge|$
$u_2 = |\wedge|\,|\ |\,|$

8.527. Построить машину K_2 над алфавитом $\{|\}$.

8.528. Построить машину K_1 над алфавитом $\{\alpha; \beta\}$.

8.529. Какую функцию натурального аргумента вычисляет машина, заданная программой:

	q_1	q_2
$\vert$	$\vert\ q_2+1$	q_2+1
$\wedge$	$\vert\ q_0 0$	$\vert\ q_0 0$

Упростите эту машину.

8.530. Постройте машину, распознающую четность натурального числа.

8.531. Постройте машину R_m, вычисляющую остаток от деления натурального числа на m.

8.532. Постройте машины Тьюринга, вычисляющие следующие функции, заданные на $N \times N$:
а) $x+y$; б) $x+2y$;
в) $x \cdot y$; г) x^2+3y.

8.533. Постройте машины Тьюринга, вычисляющие следующие функции, определенные на N:

а) $3x$; б) x^2; в) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x = 2n; \\ 2x, & \text{если } x = 2n+1. \end{cases}$

8.534. Постройте машину над алфавитом $\{\,|\,\}$, применимую к любому слову четной длины и не применимую к словам нечетной длины.

Постройте в алфавите $\{0; 1\}$ машину T, работающую по правилу:

8.535. $T\,(1^n) = 1^n 0\ 1^n, \quad n \in N, \ a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a\ a \cdots a}_{n}.$

8.536. $T\,(0^n 1^n) = (01)^n, \quad n \in N.$

8.537. $T\,(1^n) = 1^n 0 1^{2n} 0 1^{3n}, \quad n \in N.$

8.538. $T\,(1^n 0 1^m) = 1^m 0 1^n, \quad n, m \in N.$

8.539. $T\,(1^n 0^m) = \begin{cases} 1^{2n}, & \text{если } n > m; \\ (01)^n, & \text{если } n = m; \\ 0^m, & \text{если} n < m. \end{cases}$

8.540. Какую функцию натурального аргумента вычисляет машина T?

а)

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
$\mid$	$\mid q_1+1$	$0q_3+1$	$0q_3+1$	$\mid q_5-1$	$\mid q_5-1$
$\wedge$	$\wedge q_2+1$	$\wedge q_1-1$	$\wedge q_4-1$	$\wedge q_4-1$	$\wedge q_0+1$

б)

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
$\mid$	$\wedge q_2+1$	$\mid q_4+1$	$\mid q_3-1$	$\mid q_4+1$	$\mid q_6+1$
$\wedge$	$\wedge q_2+1$	$\wedge q_3+1$	$\mid q_0 0$	$\wedge q_5+1$	$\wedge q_5+1$
	q_6	q_7	q_8	q_9	
$\mid$	$\mid q_6+1$	$\mid q_8-1$	$\mid q_8-1$	$\mid q_9+1$	
$\wedge$	$\wedge q_7-1$		$\wedge q_9-1$	$\wedge q_1+1$	

8.541. Какие одноместные функции натурального аргумента в алфавите $\{|, \ \wedge\}$ могут вычислять машины, программы которых содержат только q_0 и q_1?

По словесному описанию машин $T_3, T_4, \ \ldots$ построить их программы. Внешний алфавит $\{0; 1; \ \wedge\}$.

8.542. T_3 — начиная с последней единицы массива из единиц, «сдвигает» его на одну ячейку влево и останавливается на первой единице.

8.543. T_4 — при заданном $l \geq 1$ СЗУ машины, начав с произвольной ячейки, заполненной единицей, движется вправо, не меняя содержимого ячеек, до тех пор, пока не пройдет массив из $l+1$ ноля; СЗУ останавливается на следующей ячейке, поместив туда единицу.

8.544. T_5 — при заданном $l \geq 1$ СЗУ машины, начав с произвольной ячейки и двигаясь вправо, проставляет подряд l единиц и останавливается на последней из них.

8.545. T_6 — машина начинает работу с крайней слева непустой ячейки произвольного слова, при заданном $l \geq 1$ отыскивает в слове первый слева массив из $l+1$ ноля, останавливается на последнем из них (содержимое ячеек не меняется).

8.546. T_7 — начав работу с самой левой непустой ячейки, машина отыскивает единицу, примыкающую слева к первому слева массиву из трех нолей, «окаймленному» единицами, СЗУ машины останавливается на найденной единице (содержимое ячеек не меняется).

8.547. T_8 — в исходной ячейке печатает ноль, СЗУ сдвигается на одну ячейку влево, и машина останавливается.

8.548. T_9 — СЗУ сдвигается на две ячейки вправо от начальной, машина останавливается в состоянии q_0, если эта ячейка содержит ноль; в состоянии q_0', если эта ячейка содержит единицу.

8.549. T_{10} — СЗУ передвигается на одну ячейку влево и машина останавливается.

8.550. T_{11} — отправляясь от начальной ячейки, находит первую единицу и останавливается на следующей за ней ячейке.

8.551. Найдите композиции машин: $T_4 \circ T_3$, $T_6 \circ T_7$, $T_{11} \circ T_{10} \circ T_5$. (Машины $T_3, T_4, \ldots$ см. в примерах 8.542–8.550.)

Решения

Р8.541. Машин Тьюринга, работающих в алфавите $\{|, \wedge\}$, не так уж много. Попробуем рассуждать «комбинаторно». В программе любой такой машины всего две клетки, а в каждую клетку вписывается тройка (буква, состояние, сдвиг). Таких троек 12 (букв две, состояний два, а сдвигов три), значит, программ, которые можно составить, — $12^2 = 144$. Вывод, который напрашивается: «В рассматриваемом случае имеется 144 машины Тьюринга». Приведенные ниже решения показывают, что наши комбинаторные рассуждения увели нас в сторону от верного ответа. Оказывается, что таких машин Тьюринга не 144, а всего 6 (они перечислены в конце решения).

Попробуем рассуждать иначе. Программирование любой такой машины нужно начинать с клетки, соответствующей букве « |» и состоянию «q_1». Если в этой клетке записана тройка «$|q_1 0$», то такая машина «зацикливается» и неприменима ни к какому слову. Если в клетке записана тройка $|q_1{+}1$, то машина переписывает палочки исходного слова до тех пор, пока не выйдет в этом состоянии на клетку ленты с пустым символом. Теперь нам предстоит программировать клетку, соответствующую паре «$\wedge$», «q_1». Если в нее мы запишем тройку вида «буква, q_1, сдвиг», то получим ситуацию «зацикливания». Рассмотрим варианты: «буква, q_0, сдвиг». Их всего шесть. Они приводят к машинам, которые реализуют либо тождественную функцию, либо прибавление к числу единицы.

Вернемся к начальному этапу программирования. Если в клетке, соответствующей букве «|» и состоянию «q_1», вписана тройка $\wedge q_1 0$, то мы должны перейти к программированию клетки, соответствующей паре «$\wedge$», «q_1». Вписав в нее тройку вида «буква, q_1, сдвиг», мы получаем ситуацию зацикливания, а вписав тройку вида «буква, q_0, сдвиг», мы получаем либо тождественную машину, либо машину, которая уменьшает число на единицу.

Продолжая наши рассуждения, мы обнаружим, что при всех вариантах будут получаться машины: неприменимые, тождественные, увеличивающие число на единицу, уменьшающие число на единицу, сопоставляющие любому числу число 1, сопоставляющие любому числу пустое слово.

P8.523. Применим данную машину к данному слову. Напоминаем, что в начале работы машина находится в состоянии q_1 и «обозревает» первую букву слова.

$\cdots$	$\wedge$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\cdots$
		q_1											
$\cdots$	$\wedge$	$\wedge$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\cdots$
			q_2										
$\cdots$	$\wedge$	$\wedge$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\cdots$
		q_2											
$\cdots$	$\wedge$	$\wedge$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\cdots$
			q_1										
$\cdots$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\vert$	$\vert$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\cdots$
				q_2									
$\cdots$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\vert$	$\vert$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\cdots$
			q_2										
$\cdots$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\vert$	$\vert$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\cdots$
				q_1									
$\cdots$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\vert$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\cdots$
					q_2								
$\cdots$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\vert$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\cdots$
				q_2									
$\cdots$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\vert$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\cdots$
					q_1								

$\cdots$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\cdots$
						q_2							
$\cdots$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\cdots$
						q_1	q_1						
$\cdots$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\vert$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\cdots$
							q_0						

Все остальные примеры на применение машины к слову решаются аналогично.

Р8.527. Обсудим, как должна работать копирующая машина K_2. Для этого вспомним, как мы строили в книге машину, которая удваивала натуральные числа, записанные в унарной системе счисления (см. пример 6.4). Мы сначала заменяли каждую «палочку» (вертикальную черту) слова на букву α, а затем каждую букву заменяли на «палочку» с приписыванием на правом конце слова «палочки». Процесс останавливали, когда все буквы α были заменены на «палочки». Если бы копирование было однократным, то все можно было бы сделать аналогично, не забыв проставить между словом и его копией разделитель. Двукратное копирование можно осуществить, используя две вспомогательные буквы — α и β.

Для этого сначала первую копию слова изготовим не из «палочек», а из букв β, а потом перекопируем слово из букв β в еще одно слово из «палочек». Ниже выписана программа полученной машины.

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8
$\vert$	$\alpha q_1{+}1$	$\vert q_2$-1	$\vert q_3{+}1$	$\vert q_4{+}1$	$\vert q_5$-1	$\vert q_6$-1	$\vert q_7{+}1$	$\vert q_8$-1
α		$\vert q_3{+}1$		$\alpha q_4{+}1$				
β		βq_2-1	$\beta q_3{+}1$	$\beta q_4{+}1$		$\vert q_7{+}1$		
$\blacktriangle$		$\blacktriangle q_2$-1	$\blacktriangle q_3{+}1$	$\blacktriangle q_4{+}1$	$\blacktriangle q_6$-1		$\blacktriangle q_7{+}1$	
$\wedge$	$\blacktriangle q_2{-}1$	$\wedge q_4{+}1$	βq_2-1	$\blacktriangle q_5 0$	$\wedge q_5$-1	$\blacktriangle q_8$-1	$\vert q_5$-1	$\wedge q_0{+}1$

Проверьте корректность работы этой машины на тестовом примере.

P8.531. Будем использовать унарную систему счисления для записи натуральных чисел, поэтому внешний алфавит машины состоит из двух символов $\{|; \wedge\}$. Обсудим сначала, как мы будем находить остаток от деления числа на m. Для этого нужно, пока это возможно, удалять из унарной записи числа по m штук «|». Когда это станет невозможным, на ленте будет записан остаток. Имеющиеся в алфавите $\{|; \wedge\}$ буквы не позволяют записать слово, кодирующее ноль, а это соответствует ситуации, когда число делится на ноль. Расширим наш алфавит буквами $0, 1, 2, \ldots, m-1$ для записи в ячейку ленты полученного остатка.

	q_1	q_2	q_3	q_4	$\cdots$	q_{m-1}	q_m
$\vert$	$\wedge q_2{+}1$	$\wedge q_3{+}1$	$\wedge q_4{+}1$	$\wedge q_5{+}1$		$\wedge q_m{+}1$	$\wedge q_1{+}1$
$\wedge$	$1q_0 0$	$2q_0 0$	$3q_0 0$	$4q_0 0$		m-1$q_0$0	$0q_0 0$
0							
1							
2							
$\vdots$							
$m-1$							

P8.535. Ясно, что эта машина ничем не отличается от копирующей машины K_1 (вместо разделителя ▲ используется «0»), которая в этом случае очень похожа на машину, удваивающую натуральное число, записанное в унарной системе счисления (см. пример 6.4). Расширим исходный алфавит $\{|;\ 0; \wedge\}$ еще одной буквой — $\{|; 0; \alpha; ▲\}$. Работа машины состоит в следующем. Сначала все «палочки» в слове заменяются на α и в конце полученного слова проставляется «0», затем начинается процесс восстановления «|» из α с дописыванием в конце слова «палочки». (Советуем также посмотреть решение задачи 8.527.)

	q_1	q_2	q_3
$\mid$	$\alpha q_1 + 1$	$\mid q_2 - 1$	$\mid q_3 + 1$
0		$0q_2 - 1$	$0q_3 + 1$
α		$\mid q_3 + 1$	
$\wedge$	$0q_2 - 1$	$\wedge q_0 + 1$	$\mid q_2 - 1$

§ 8.13. Графы и их матрицы

Задачи, приведенные в этом параграфе, разнообразны и трудно классифицируются как по типам, так и по степени сложности. Наряду с тривиальными встречаются и задачи, содержание которых — известные теоремы теории графов. Эти задачи помечены «*».

8.552. Для графов, приведенных на рис. 8.5, 8.6, 8.7, найти матрицу смежности $A(G)$ и матрицу инцидентности $B(G)$:

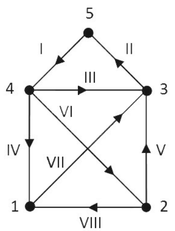


Рис. 8.5

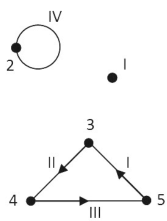


Рис. 8.6

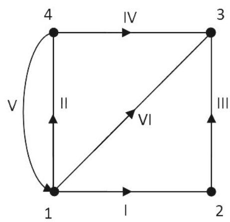


Рис. 8.7

8.553. Изобразить графы, заданные матрицами $A(G)$ или $B(G)$:

а) $A(G) = \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,1 \\ 1\,0\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0 \end{pmatrix}$;

$$\text{б)}\quad B(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)}\quad A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)}\quad B(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.554. Дана матрица $A(G)$ или $B(G)$. Найти матрицу $B(G)$ или $A(G)$:

$$\text{а)}\quad A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)}\quad B(G) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

в) $A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; г) $B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8.555. Найти компоненты связности и сильной связности графов, изображенных на рис. 8.8, 8.9, 8.10, 8.11, и их числа связности и сильной связности — $c(G)$ и $sc(G)$.

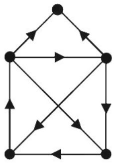


Рис. 8.8

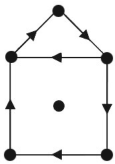


Рис. 8.9

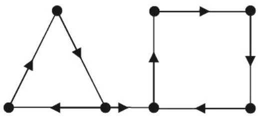


Рис. 8.10

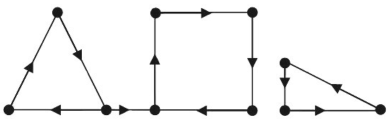


Рис. 8.11

8.556. Найти компоненты связности и сильной связности графов, заданных матрицами $A(G)$ и $B(G)$, и их числа связности и сильной связности — $c(G)$ и $sc(G)$:

а) $A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $B(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A(G)=\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$;

г) $B(G)=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&-1&1&1&-1&-1&0\\ -1&1&0&0&1&0&0\\ 1&0&-1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$;

д) $A(G)=\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$.

8.557. Для графов примеров 8.555, 8.556 найти матрицы достижимости и сильной достижимости вершин и компоненты связности и сильной связности этих графов.

Матрицей достижимости графа $G(X,U,f)$ $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ *называется матрица* $D(G)=(d_{ig})$ *размера* $n\times n$ $(n\in|X|)$, *определенная следующим:*

$$d_{ig}=\begin{cases}1, & \text{если } x_i \text{ и } x_j \text{ находятся в одной}\\ & \text{компоненте связности;}\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Матрицей сильной достижимости называется матрица $sD(G)=(sd_{ij})$ *размера* $n\times n$, *определяемая следующим:*

$$sd_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \text{ и } x_j \text{ находятся в одной} \\ & \text{компоненте сильной связности;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

8.558. Для графов примеров 8.553, 8.554, 8.556 найти $\deg_+ x$, $\deg_- x$, $\deg x$; $x \in X$.

8.559. Для графов примеров 8.555, 8.556 найти конденсацию, т. е. граф, вершины которого — компоненты сильной связности исходного графа, а дуги — дуги исходного графа, ведущие из одной его сильной компоненты в другую.

8.560. Найти мосты, блоки и точки сочленения графов примеров 8.553, 8.555, 8.556.

8.561. Пользуясь алгоритмом Краскала, найдите легчайшее покрывающее дерево графов, заданных рис. 8.12 (цифры около дуг — веса дуг):

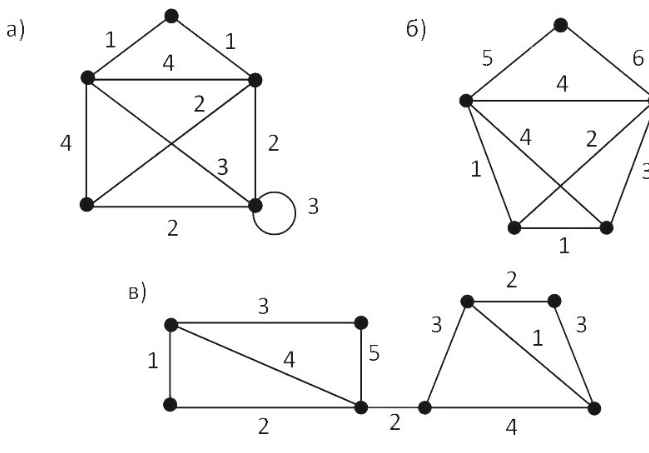


Рис. 8.12

8.562*. Доказать, что любые два диаметра (простая цепь максимальной длины) связного графа имеют хотя бы одну общую вершину.

8.563*. Каково максимальное количество висячих вершин дерева с n вершинами?

8.564. Нарисуйте все неизоморфные между собой неориентированные деревья с тремя, четырьмя вершинами.

8.565. Нарисуйте все неизоморфные между собой ориентированные деревья с тремя вершинами.

8.566. Нарисуйте все неизоморфные между собой помеченные неориентированные деревья с тремя вершинами.

8.567. Нарисуйте все неизоморфные между собой помеченные ориентированные деревья с тремя вершинами.

8.568*. Докажите, что если B_1, B_2 — блоки графа G, то $B_1 \cap B_2 = \varnothing \vee (\{x\} \mid x \in X$ и x — точка сочленения $G)$.

8.569. Для графов, приведенных на рис. 8.3*а*, 8.13*б*, 8.13*в*, найти длины кратчайших путей от вершины x_1 до всех остальных (около дуги в кружке — ее вес).

8.570. Для графов задачи 8.569 восстановить кратчайшие пути из x_1 в x_6; из x_1 в x_7.

8.571*. Докажите, что конденсация любого графа (определение конденсации см. задачу 8.559) — граф, не содержащий циклов.

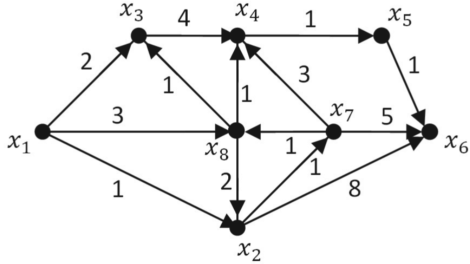


Рис. 8.13*а*

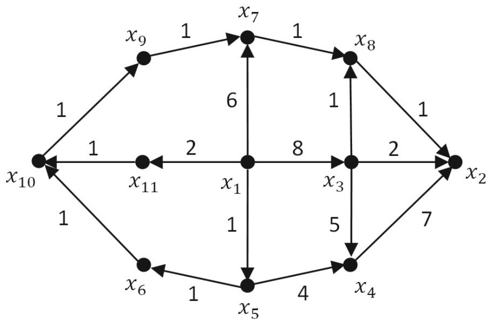


Рис. 8.13*б*

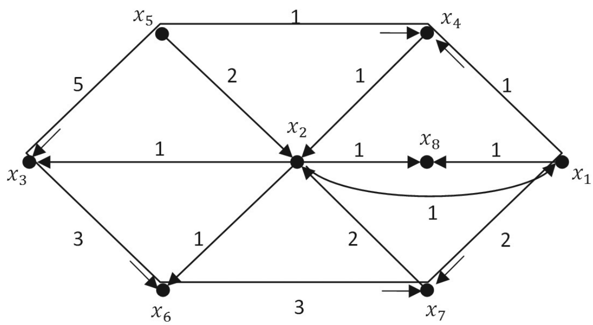


Рис. 8.13*в*

Раскраска графов

Определение 8.23. *Раскраской неориентированного графа без петель в k цветов называется отображение r, действующее из множества вершин графа в $[1, k]_N$, удовлетворяющее условию «x, y — смежные вершины» $\Rightarrow r(x) \neq r(y)$.*

Таким образом, раскрасить граф в k цветов — это значит каждой его вершине присвоить цвет из имеющихся k так, что любые две смежные вершины были окрашены в разные цвета.

Определение 8.24. *Хроматическим числом графа G называется наименьшее k, при котором существует хотя бы одна раскраска. Хроматическое число обозначают $\chi(G)$.*

Определение 8.25. *Хроматической функцией графа называют отображение $f_G : N \to Z_+$, определенное следующим:*
$f_G\,(x) =$ *«число способов раскраски графа G в x цветов».*

8.572*. Докажите, что $1 \le \chi\,(G) \le |X|$. X — множество вершин конечного графа G.

8.573*. Докажите, что

$$f_{K_n}\,(x) = x\,(x-1)\,(x-2)\cdots(x-n+1), \qquad (8.7)$$

где K_n — полный граф с n вершинами (см. определение 7.9).

8.574*. Докажите, что если y, z — несмежные вершины графа G, то

$$f_G\,(x) = f_{G_{y-z}}\,(x) + f_{G_{y=z}}\,(x), \qquad (8.8)$$

где G_{y-z} — граф, полученный из G добавлением дуги, соединяющей вершины y и z;
$G_{y=z}$ — граф, полученный из G отождествлением вершин y и z (см. рис. 8.14).

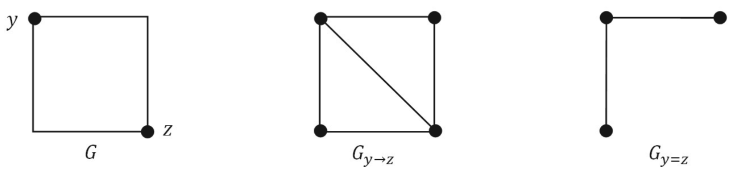


Рис. 8.14

8.575*. Докажите с помощью утверждений задач 8.573 и 8.574, что хроматическая функция графа с n вершинами — многочлен n-й степени с целыми коэффициентами.

8.576*. Докажите, что в разложении хроматического многочлена $f_G(x)$ по степеням x старший коэффициент равен 1, а его свободный член равен 0.

8.577*. Докажите, что если граф G содержит K_m в качестве подграфа, то хроматический многочлен $f_G(x)$ делится на $f_{K_m}(x)$.

8.578 Найдите хроматические многочлены и хроматические числа графов, приведенных на рис. 8.8, 8.10 и 8.11.

Решения

Р8.553а. Поскольку матрица смежности вершин графа $A(G)$ имеет размер 5×5, то граф имеет пять вершин, элементы этой матрицы, равные единице, определяют дуги графа. Если $(A(G))_{ij}$=1, то на графе существует дуга, ведущая из i-й вершины в j-ю. Изобразим граф, имеющий заданную матрицу $A(G)$ (см. рис. 8.15, кружки с цифрами внутри — вершины графа).

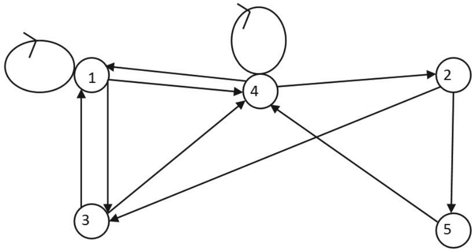


Рис. 8.15

Р8.553б. Количество строк этой матрицы — количество вершин графа, а каждый столбец соответствует дуге графа. «Минус единица» стоит на месте, соответствующем вершине, в которой дуга начинается, а «плюс единица» стоит на месте, соответствующем вершине, в которой дуга заканчивается. Нарисуем граф, имеющий заданную матрицу инцидентности $B(G)$ (см. рис. 8.16).

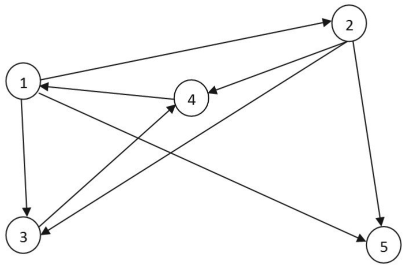


Рис. 8.16

Р8.555. Когда граф задан совсем простой «картинкой» (как в этом случае), найти компоненты связности и сильной связности не представляет большого труда. Ясно, что в случае графа, изображенного на рис. 8.8, он является связным (т. е. состоит из одной компоненты) и $c(G) = 1$, а его число сильной связности $sc(G) = 2$, поскольку у него две компоненты сильной связности (одна из них содержит только верхнюю вершину, а в другую входят все остальные вершины). В случае графа, изображенного на рис. 8.9, мы имеем $c(G) = 2$ и $sc(G) = 2$. У этого графа сильные и слабые компоненты связности совпадают. У графа, изображенного на рис. 8.10, $c(G) = 1$, $sc(G) = 4$. Каждая вершина треугольника является сильной компонентой, вершины квадрата порождают еще одну компоненту сильной связности.

Р8.557. В случае графов, заданных простой «картинкой», все обстоит достаточно просто — матрицы достижимости и сильной достижимости можно легко выписать, глядя на рисунок, на котором выделены компоненты связности или сильной связности. Это мы и проделаем для графа, изображенного на рис. 8.8. Поскольку мы будем искать компоненты графа и соответствующие матрицы, вершины графа следует занумеровать.

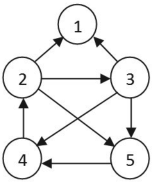


Рис. 8.17*а*

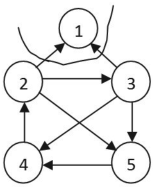


Рис. 8.17*б*

Рисунок 8.17*а* соответствует компонентам связности, граф состоит из одной компоненты. Рисунок 8.17*б* соответствует сильным компонентам связности, выделено две компоненты сильной связности. Одна из них порождена вершиной 1, а другая — вершинами 2, 3, 4, 5.

Выпишем матрицы связности и сильной связности нашего графа:

$$D(G) = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1 \end{pmatrix}; \quad sD(G) = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,1\,1 \end{pmatrix}.$$

Как находить компоненты сильной связности не по рисунку, а с помощью матриц графа? Рассмотрим матрицу смежности графа. Единицы этой матрицы соответствуют дугам графа. Дуги графа — это пути длины 1. Что означает, что существует путь длины 2 соединяющий какие-либо две его вершины? Это означает, что существует третья вершина, в которую приходит дуга из начальной вершины этого пути и из которой выходит дуга, ведущая в конечную вершину пути.

Поэтому если мы хотим построить матрицу, в которой единицы соответствуют наличию путей длины 2, а нули — их отсутствию, то для этого необходимо и достаточно найти булев квадрат матрицы $A(G)$. Ясно, что булев куб этой матрицы определяет на графе наличие — отсутствие путей длины 3 и т. д. Рассмотрим матрицу $A'(G) = I \vee A(G)$. Это матрица смежности графа, полученного из исходного графа добавлением петель в каждой его вершине. Ясно, что единицы матрицы $(A'(G))^{[2]}=(I \vee A(G)) \bigotimes (I \vee A(G))$ (здесь $\bigotimes$ — знак булевского умножения матриц) определяют наличие путей длины, не большей, чем 2, а нули этой матрицы свидетельствуют об отсутствии таких путей между соответствующими вершинами. Ясно, что матрица $(A'(G))^{[3]}$ определяет наличие — отсутствие путей, длина которых не превосходит 3 и т. д. Самый длинный простой путь на графе, имеющем n вершин, содержит не более чем $n-1$ дугу, поэтому имеет место стабилизация булевых степеней матрицы $A'(G)$:

$$(A'(G))^{[n-1]} = (A'(G))^{[n]} = \cdots .$$

Позиции единиц, стоящих в i-ой строке стабилизировавшейся матрицы, определяют номера вершин графа, в которые можно попасть, двигаясь по путям, начинающимся в i-й вершине. Позиции единиц, стоящих в i-м столбце стабилизировавшейся матрицы, определяют номера вершин графа, из которых можно попасть, двигаясь по путям, в i-ю вершину. Эти множества обозначают $Out(x_i)$ и $Ent(x_i)$ соответственно. Если мы найдем $Out(x_i) \cap Ent(x_i)$, то определим множество вершин компоненты сильной связности i-й вершины графа, тем самым и саму сильную компоненту. Задача нахождения слабых компонент (компонент связности) графа сводится к рассмотренной, если к каждой дуге графа добавить дугу противоположного ей направления и на полученном графе искать сильные компоненты (подумайте, почему это так). В матрицах графов это означает, что мы должны построить матрицу

$$A''(G) = A'(G) \vee (A'(G))^*,$$

а затем с ней проделать то же самое, что мы делали с матрицей $A'(G)$ ($*$ — знак транспонирования матрицы).

Заметим, что в этом случае множества $Out(x_i)$ и $Ent(x_i)$ обязательно совпадают, поэтому можно обойтись только множеством $Out(x_i)$.

Найдем с помощью описанного алгоритма компоненты сильной связности графа из примера 8.566а. Выпишем матрицу $A'(G)$ и найдем ее булевы степени (для ускорения процесса найдем матрицу $(A'(G))^{[4]}$ возведением в булев квадрат матрицы $(A(G)^{[2]}$ (не находя матрицу $(A'(G))^{[3]}$.

$$A'(G) = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,1\,0 \\ 1\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix};\ (A'(G))^{[2]} = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix};$$

$$\big(A'(G)\big)^{[4]} = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}.$$

Найдем множество $Out(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ и множество $Ent(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Найдя их пересечение, мы определяем состав компоненты сильной связности $Ent(x_1) \cap Out(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Ясно, что есть еще одна компонента сильной связности — $\{x_5\}$.

В случае, когда граф задан матрицей $B(G)$, для нахождения компонент связности и сильной связности мы рекомендуем перейти к матрице $A(G)$, а затем искать с ее помощью компоненты связности и сильной связности.

Рассмотрим граф из примера 8.556*б*. Выпишем по матрице $B(G)$ матрицу $A(G)$:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь матрицу $A'(G)$ и ее булевы степени:

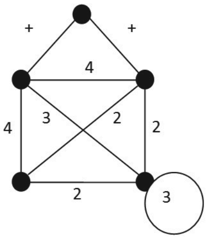
$$A'(G) = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,0 \\ 1\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix};\ \bigl(A'(G)\bigr)^2 = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix};$$

$$\bigl(A'(G)\bigr)^4 = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}.$$

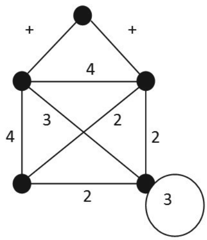
Ясно, что мы имеем две компоненты сильной связности — первая имеет множество вершин $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, вторая — $\{x_5\}$.

P8.561a. Поскольку граф очень прост, то алгоритм Краскала можно реализовать прямо на «картинке». Дуги, отобранные в состав легчайшего покрывающего дерева, будем помечать плюсом, а дуги, которые не будут включены в его состав, — минусом. Выполняемые этапы будем нумеровать.

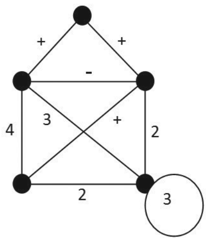
1.



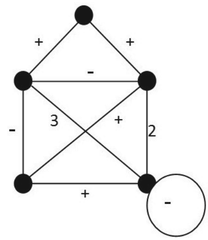
2.



3.



4.



Нарисуем полученное легчайшее покрывающее дерево (см. рис. 8.19).

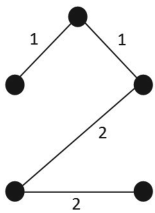


Рис. 8.19

P8.563. Из основной теоремы о деревьях (теорема 7.13) известно, что дерево с n вершинами имеет $(n-1)$ дугу, тогда по теореме Эйлера (теорема 7.1) сумма степеней всех вершин графа равна $2(n-1)$. Степень висячей вершины равна 1. Если на дереве $(n-1)$ висячая вершина, то должна быть вершина, к которой все они подвешены, ее степень равна $(n-1)$, и мы получаем необходимую сумму степеней вершин, если же все вершины висячие, то сумма степеней вершин равна n, а не $2(n-1)$. Ясно, что дерево с максимальным количеством висячих вершин состоит из одной вершины степени $(n-1)$, к которой подвешены на дугах висячие вершины. На рис. 8.20 изображено такое дерево с пятью вершинами.

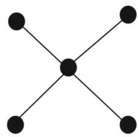


Рис. 8.20

Р8.565. Существует только одно неориентированное дерево с тремя вершинами:

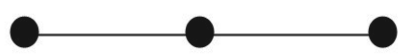
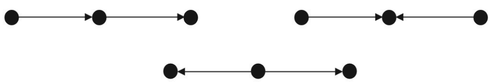


Рис. 8.21

Существует три неизоморфных ориентации, т. е. три неизоморфных ориентированных дерева с тремя вершинами:



Предметный указатель

А

Б

В

Г

Д

З

И

К

Н

О

П

Р

Ф

Ц

Ч

Ш

Э

Литература

[1] *Берж, К.* Теория графов и ее применения. — М. : ИЛ, 1962.

[2] *Биркгоф, Г.* Современная прикладная алгебра / Г. Биркгоф, Т. Барти — М. : Мир, 1976.

[3] *Виленкин, Н. Я.* Комбинаторика / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин. — М. : МЦНМО, ФИМА, 2006.

[4] *Виленкин, Н. Я.* Популярная комбинаторика. — М. : Наука, 1975.

[5] *Гаврилов, В. П.* Сборник задач по дискретной математике / В. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. — М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1977.

[6] *Горбатов, В. А.* Дискретная математика: учебник для студентов втузов / В. А. Горбатов, А. В. Горбатов, М. В. Горбатова. — М. : АСТ: Астрель, 2014.

[7] *Ежов, И. И.* Элементы комбинаторики / И. И. Ежов, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. — М.: Наука, 1977.

[8] Лекции по теории графов. В. А. Емеличев [и др.]. — М. : Наука, 1990.

[9] *Ершов, Ю. Л.* Математическая логика: учеб. пособие для вузов / Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. — М. : Наука, 1987.

[10] *Зыков, А. А.* Основы теории графов. — М. : Вузовская книга, 2012.

[11] *Карпов, В. Г.* Математическая логика и дискретная математика / В. Г. Карпов, В. А. Мощенский. — Минск: Вышэйшая школа, 1977.

[12] Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен [и др.]. — М. : Вильямс, 2015.

[13] *Кузнецов, О. П.* Дискретная математика для инженера: учеб. пособие. 6-е изд., стер. / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский. — СПб. : Лань, 2009.

[14] *Кук, Д.* Компьютерная математика / Д. Кук, Г. Бейз. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1990.

[15] *Лавров, И. А.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов : 5-е изд., исправл. / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. — М. : Наука, ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[16] *Нефедов, В. Н.* Курс дискретной математики : учеб. пособие / В. Н. Нефедов, В. А. Осипова. — М. : Изд-во МАИ, 1992.

[17] *Новиков, Ф. А.* Дискретная математика для программистов : учебник для вузов. 2-е изд. — СПб. : Питер, 2012.

[18] *Сачков, В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М. : Наука, 1982.

[19] *Свами, М.,* Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. — М. : Мир, 1984.

[20] *Татт, У.* Теория графов. — М. : Мир, 1988.

[21] *Трахтенброт, Б. А.* Алгоритмы и вычислительные автоматы. — М. : Советское радио, 1974.

[22] *Уилсон, Р.* Введение в теорию графов. — М. : Мир, 1977.

[23] *Фудзисава. Т.* Математика для радиоинженеров. Теория дискретных структур / Т. Фудзисава, Т. Касами. — М. : Радио и связь, 1984.

[24] *Харари, Ф.* Теория графов. — М. : Ленанд, 2015.

[25] *Холл, М.* Комбинаторика. — М. : Мир, 1970.

[26] *Хейфиц, А. И.* Элементы комбинаторики. — Ростов н/Д, ИРУ, 1984.

[27] *Яблонский, С. В.* Введение в дискретную математику — 6-е издание, стереотип. — М. : Высшая школа, 2010.

Яков Михайлович ЕРУСАЛИМСКИЙ

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА. ТЕОРИЯ И ПРАКТИКУМ

Учебник

Зав. редакцией
естественнонаучной литературы *М. В. Рудкевич*
Ответственный редактор *С. В. Макаров*
Корретор *Ю. Н. Теплова*
Выпускающий *В. А. Иутин*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com;
196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, 1, лит. А.
Тел.: (812) 412-92-72, 336-25-09.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 29.03.18.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 24,99. Тираж 100 экз.

Заказ № 201-18.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.