А. Ф. ГАЛКИН

ТЕРМОДИНАМИКА
СБОРНИК ЗАДАЧ

Учебное пособие

ЛАНЬ®
• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА •
• КРАСНОДАР •
2017

ББК 22.365я73
Г 16

Галкин А. Ф.

Г 16 Термодинамика. Сборник задач: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2017. — 80 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-2436-8

В учебном пособии приведены задачи по классической термодинамике. Даны решения характерных задач.

Предназначено для самостоятельной работы студентов, изучающих дисциплины «Термодинамика», «Техническая термодинамика», «Прикладная теплофизика», «Теплотехника», «Техническая теплотехника».

Учебное пособие адресовано студентам, обучающимся по направлениям подготовки и специальностям: «Физика и астрономия», «Электро- и теплотехника», «Машиностроение», «Физико-технические науки и технологии», «Технологии материалов», «Прикладная геология, горное дело, нефтегазовое дело и геодезия».

ББК 22.365я73

Рецензенты:

В. Н. ДЕНИСОВ — доктор технических наук, академик Международной академии наук экологии, безопасности человека и природы;
В. В. АНДРЕЕВ — кандидат технических наук, доцент кафедры теплотехники и теплоэнергетики Санкт-Петербургского горного университета.

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии приведены задачи и их решения по различным разделам курса «Термодинамика». Условно задачи разделены на классы, соответствующие отдельным темам общей программы освоения дисциплины. В частности, включены следующие группы характерных задач по разделам: молекулярно-кинетическая теория и основные газовые законы; газовые циклы и коэффициент полезного действия; работа и энергия; влажный воздух и пар. На практических занятиях студенты защищают свои работы, которые выполняют самостоятельно в период подготовки к сессии или непосредственно на занятиях совместно с преподавателем. Выбор задач каждому конкретному студенту осуществляет преподаватель. В пособии умышленно, в большинстве случаев, не приведены размерности физических величин и констант в формулах. Это является предметом самостоятельного поиска для студентов и банком вопросов для преподавателя при защите работ.

Настоящее учебное пособие является полностью компилятивным: автор-составитель самостоятельно не придумал ни одной задачи. Работа свелась в основном к поиску и классификации задач как по тематикам, так и по сложности. При подготовке учебного пособия использовались как имеющиеся печатные литературные источники, в том числе приведенные в списке рекомендованной литературы, так и открытые интернет-источники, которые являлись преобладающими. Сложные задачи, требующие размышления и оценки вариативности ответа, сведены в раздел «Задачи для самостоятельного решения», которые предназначены для наиболее способных студентов, желающих углубленно освоить практическое применение знаний, полученных в период изучения курса.

1. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ. ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ

Задача № 1. Камеру объемом $V = 10$ л наполнили при температуре $t_1 = 0$°C воздухом, ввели в нее $m = 3$ г воды, закрыли, а затем нагрели до $t_2 = 100$°C. Какое давление установится в камере, если первоначальное давление было $p_1 = 10^5$ Па?

Решение.

Искомое давление по закону Дальтона равно сумме давлений водяного пара и сухого воздуха. Давление сухого воздуха, первоначально находившегося в камере, найдем по закону Шарля:

$$p_в = p_1T_2/T_1 \approx 136{,}6 \text{ кПа}.$$

Прежде чем дать окончательное заключение о давлении пара, выясним, будет ли он насыщенным при $t_2 = 100$°C. Предположив, что вся вода испарилась, оценим возможное парциальное давление пара:

$$p_п = mRT_2/(MV) \approx 51{,}7 \text{ кПа}.$$

Давление же насыщенного водяного пара при данной температуре почти в два раза больше (100 кПа). Значит, наше предположение правильное, и для полного давления в камере получим

$$p = p_в + p_п \approx 188{,}3 \text{ кПа}.$$

Если бы давление пара при оценке получилось большим, чем 100 кПа, то отсюда следовало бы, что пар еще насыщенный и его давление 100 кПа, а полное давление в камере $p \approx 236{,}6$ кПа.

Ответ: $p = \approx 188{,}3$ кПа.

Задача № 2. В прямоугольном закрытом сосуде длиной $2l$ с непроницаемыми стенками находится слева тяжелая жидкость, например, ртуть, отделенная подвижным тонким поршнем от воздуха в правой части сосуда. В начальный момент поршень находится в равновесии и делит объем сосуда пополам. На сколько смещается поршень вправо, если абсолютная температура системы уменьшается в три раза? Тепловым расширением ртути и стенок сосуда, а также трением пренебречь.

Решение.

Введем искомое смещение x, высоту сосуда H_1, конечный уровень ртути H_2, начальное давление воздуха p_1, конечное p_2, d − удельный вес ртути. Условие сохранения объема ртути:

$$H_1l = H_2(l + x).$$

Из условия равновесия в начале

$$p_1H_1 = p_{ср1}H_1 = d(H_1/2)H_1 = (d/2)H_1^2$$

и в конце

$$p_2H_1 = p_{ср2}H_1 = d(H_2/2)H_2 = (d/2)H_2^2$$

имеем

$$p_1/p_2 = (H_1/H_2)^2.$$

Используя уравнение газового состояния, получаем

$$p_1/p_2 = T_1V_2/(T_2V_1) = T_1(1-x)/(T_2l) = 3(l-x)/l = (H_1/H_2)^2 = [(1+x)/l]^2.$$

Отсюда $x = [(\sqrt{33} - 5)l/2]$.

Ответ: $x = [(\sqrt{33} - 5)l/2]$.

Задача № 3. В запаянной с одного конца трубке сечения S находится поршень массы m на расстоянии l от запаянного конца. Другой конец трубки открыт, по обе стороны поршня – воздух с давлением p_o. Трубку начинают вращать с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через запаянный конец трубки. На каком расстоянии от дна трубки будет находиться поршень? Температура постоянна, трения нет.

Решение.

Из второго закона Ньютона и уравнения состояния идеального газа получаем для неизвестного расстояния x квадратное уравнение

$$m\omega^2x^2/(p_oS) - x + l = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = p_oS/(2m\omega^2)\{l \pm \sqrt{[l - 4m\omega^2l/(p_oS)]}\}.$$

Очевидно, что должно выполняться условие $4m\omega^2l/(p_oS) << 1$, иначе поршень из трубки вылетит.

Для того чтобы выяснить, оба ли корня подходят, можно построить графики двух функций:

$$y_1 = m\omega^2x^2/(p_oS) + l \quad \text{и} \quad y_2 = x.$$

Пересечение этих графиков и дает два корня: x_1 и x_2.

Нетрудно видеть, что корень x_1 соответствует неустойчивому положению равновесия, а корень x_2 – устойчивому. Следовательно, из физических соображений подходит лишь один корень x_2 (соответствующий знаку «минус» в скобке).

Ответ: $x_1 = p_oS/(2m\omega^2)\{1 - \sqrt{[1 - 4m\omega^2l/(p_oS)]}\}$.

Задача № 4. В центре закрытой с торцов трубы длиной $2l$ находится поршень массы m и площадью S, который может без трения перемещаться по трубе. Слева и справа от поршня имеется газ с давлением p. Трубу раскручивают в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Найдите угловую скорость вращения, если поршень сместился на $l/2$. Температуру газа считать постоянной.

Решение.

Пусть p_2 – большее давление, а p_1 – меньшее. По закону Бойля – Мариотта

$$p_2l/2 = pl \quad \text{и} \quad p_13l/2 = pl.$$

Второй закон Ньютона дает

$$m\omega^2l/2 = (p_2/p_1)S.$$

Решая систему, получаем

$$\omega = 2\sqrt{\{2pS/(3ml)\}}.$$

Ответ: $\omega = 2\sqrt{\{2pS/(3ml)\}}$.

Задача № 5. В вертикальном теплоизолированном сосуде под поршнем массы M необходимо подводить к нагревателю в жидкости, чтобы поршень поднимался с постоянной скоростью v? Температура внутри сосуда равна T, молярная масса μ, теплота парообразования λ. Внешнее давление отсутствует. Газовая постоянная равна R.

Решение.

Давление пара

$$p = Mg/S = const,$$

следовательно, и $T = const$.

При подведению к нагревателю мощности N за время Δt испарится жидкость в количестве $\Delta m = \rho v S \Delta t$, тогда

$$N\Delta t = \lambda \Delta m = \lambda \rho v S \Delta t,$$

где ρ − плотность пара, S − сечение сосуда. Плотность пара: $\rho = p\mu/(RT)$, откуда для мощности получим

$$N = Mg\mu\lambda v/(RT).$$

Ответ: $N = Mg\mu\lambda v/(RT)$.

Задача № 6. В центре трубки с газом, запаянной с обоих концов, находится пробка, разделяющая трубку на две части длиной L каждая. Трубку медленно нагревают. Когда температура достигает значения T, пробка начинает перемещаться влево. При температуре $2T$ она сдвинется на $l/3$. При какой температуре пробка окажется сдвинутой влево на расстояние $2l/5$? Считать, что сила трения не зависит от температуры.

Решение.

Пусть при температуре T давление справа p_1, слева $p_2 < p_1$. Разность давлений уравновешивается трением:

$$p_1 - p_2 = F/S. \qquad (1)$$

Для газа в каждой части трубки выполняется условие

$$pV = const \times T.$$

Поэтому давление при температуре $2T$ для правой части равно

$$2p_1L(L + L/3) = (3/2)p_1,$$

для левой части

$$2p_2L(L - L/3) = 3p_2.$$

Условие равновесия (1) в этом случае переходит в

$$(3/2)p_1 + 3p_2 = F/S. \qquad (2)$$

Из (1), (2) получим

$$p_1 = (4/3)F/S, p_2 = (1/3)F/S. \qquad (3)$$

Пусть искомая температура равна xT. Тогда при температуре xT давление в правой части

$$xp_1L/(L + 2L/5) = (5/7)xp_1,$$

а в левой части

$$xp_2L/(L - 2L/5) = (5/3)xp_2.$$

Условие равновесия для этой температуры есть

$$(5/7)xp_1 - (5/3)xp_2 = F/S,$$

или с учетом (3)

$$x(20/21 - 5/9)F/S = F/S.$$

Откуда $x = 63/25 = 2{,}52$, $xT = 2{,}52T$.

Ответ: $x = 63/25 = 2{,}52$, $xT = 2{,}52T$.

Задача № 7. Цилиндрический теплоизолированный сосуд высотой $2L$ и площадью основания S стоит вертикально в поле тяжести (ускорение свободного падения g). Сосуд в начальный момент разделен на две одинаковые части теплопроводящим поршнем массы m, а в каждой из половинок находится газ с давлением $p_о$. Затем поршень отпускают, и он после затухания колебаний опускается на расстояние h от первоначального положения. Найти массу m поршня. Толщиной и теплоемкостью поршня пренебречь. Внутренняя энергия газа с давлением p и объемом V равна $E = \alpha pV$, где α – некоторая константа.

Решение.

Пусть в верхней части сосуда установится давление p_1, а в нижней p_2. В конечном положении сила, действующая на поршень, равна нулю, откуда

$$p_2 = p_1 + mg/S. \qquad (1)$$

Сосуд теплоизолирован, поэтому полная внутренняя энергия газа меняется только за счет уменьшения потенциальной энергии поршня:

$$\alpha p_о 2LS + mgh = \alpha p_1(L + h)S + \alpha p_2(L - h)S. \qquad (2)$$

Число молей ν в каждой половинке сосуда одинаково. Из объединенного газового закона

$$\nu = p_оLS/(RT_о) = p_1(L + h)S/(RT) = p_2(L - h)S/(RT). \qquad (3)$$

Здесь $T_о$ − начальная, а T − конечная температура газа.

Из (3) следует

$$p_1(L + h) = p_2(L - h). \qquad (4)$$

Система линейных уравнений (1), (2), (4) записана для трех неизвестных p_1, p_2, m. Решая ее относительно массы поршня, получим

$$m = 2p_оL^2S\alpha/[g(\alpha L^2 - (\alpha + 1)h^2)].$$

Ответ: $m = 2p_оL^2S\alpha/[g(\alpha L^2 - (\alpha + 1)h^2)]$.

Задача № 8. В трубке, закрытой с одной стороны и закрепленной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, находится поршень массы $m = 1$ кг. Площадь сечения трубки $S = 8$ см^2. Поршень передвинули, увеличив объем воздуха под ним в $n = 2$ раза. Найти начальное ускорение поршня после того, как его отпустили. Трением пренебречь. Наружное давление воздуха $p_о = 760$ мм рт. ст.

Решение.

Искомое ускорение определяется из уравнения

$$ma = pS - p_1S, \qquad (1)$$

где p и p_1 – давления воздуха под поршнем в исходном состоянии и после передвижения поршня соответственно. Условие равновесия поршня в исходном состоянии:

$$p_oS + mg\sin\alpha = pS. \qquad (2)$$

Считая процесс перемещения поршня изотермическим, на основании закона Бойля – Мариотта находим

$$p = 2p_1. \qquad (3)$$

Уравнения (1)–(3) дают

$$a = (g/2)(\sin\alpha + \rho h_oS/m) \approx 36 \text{ м/с}^2.$$

Здесь $\rho = 13{,}6$ г/см^3, $h_o = 760$ мм.

Ответ: $a \approx 36$ м/с^2.

Задача № 9. В закрытом с обоих торцов горизонтальном цилиндре объемом $V = 0{,}0012$ м^3 находится воздух при давлении $p_o = 100$ кПа. Цилиндр разделен на две равные части тонким поршнем массой $m = 0{,}1$ кг. Длина цилиндра $2l = 0{,}4$ м. Цилиндр привели во вращение с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. Найдите величину ω, если поршень оказался на расстоянии $r = 0{,}1$ м от оси вращения.

Решение.

Второй закон Ньютона для движущегося по окружности поршня запишется в виде

$$m\omega^2r = (p_2 - p_1)S,$$

где p_1 – давление сжатого (по сравнению с первоначальным состоянием) газа, а p_2 – давление разреженного газа. Давления p_1 и p_2 можно найти из условия, что температура газа остается неизменной:

$$p_1(l + r) = p_ol,\ p_2(l - r) = p_ol.$$

Тогда угловая скорость

$$\omega = \sqrt{\{p_oV/[m(l^2 - r^2)]\}} = 200 \text{ рад/с}.$$

Ответ: ω = 200 рад/с.

Задача № 10. Давление воздуха внутри плотно закупоренной бутылки при температуре 7°C равно 150 кПа. До какой температуры (по шкале Цельсия) надо нагреть бутылку, чтобы из нее вылетела пробка, если известно, что для вынимания пробки до нагревания бутылки требовалась минимальная сила 90 Н? Площадь поперечного сечения пробки 8 см^2.

Решение.

Чтобы пробка пришла в движение, увеличение силы давления газа на пробку должно быть равно силе F, с которой вытаскивали пробку без нагревания:

$$(p_2 - p_1)S = F.$$

Конечное давление связано с начальным уравнением изохорного процесса:

$$p_2/p_1 = T_2/T_1.$$

Получаем

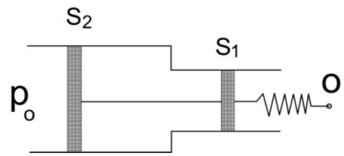
$$T_2 = T_1(1 + F/(p_1S)) = 217°\text{C}.$$

Ответ: $T_2 = 217°$C.

Задача № 11. В гладкой горизонтально закрепленной трубке, профиль которой показан на рисунке (см. в решении), находятся два поршня, соединенных жестким тонким стержнем. Площади поршней S_1 = 10 см^2 и S_2 = 40 см^2. Правый поршень соединен с точкой O пружиной жесткостью k = 400 Н/м. В первоначальном состоянии температура всюду равна T_o= 300 К, давление воздуха между поршнями равно внешнему p_o = 100 кПа и пружина не деформирована. Затем газ между поршнями нагрели на ΔT = 100 K, а точку O переместили вправо на такое расстояние x, чтобы положение поршней не изменилось. Найдите x.

Решение.

Запишем условия равновесия поршней после нагревания газа и перемещения точки O:



$$kx + p_1S_1 - p_oS_1 - F = 0.$$

$$p_oS_2 + F - pS_2 = 0.$$

Здесь сила F − сила натяжения стержня, p − новое давление газа, которое можно найти из условия неизменности объема газа:

$$p/p_o = T/T_o = (T_o + \Delta T)/T_o.$$

Исключая из полученных равенств F и p, находим искомое расстояние

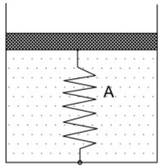
$$x = [p_o(S_2 - S_1)/k] \cdot \Delta T/T_o = 0{,}25 \text{ м}.$$

Ответ: x = 0,25 м.

Задача № 12. В цилиндре под поршнем массы M = 20 кг находится m = 1 г гелия при температуре T = 400 К (рис. смотри в решении задачи). Удлинение пружины A составляет x = 20 см, а энергия ее деформации E = 60 Дж. Определите высоту поршня над дном цилиндра. Давлением газа вне цилиндра пренебречь.

Решение.

Условие равновесия поршня



$$Mg + kx = pS$$

и уравнение газового состояния для гелия

$$phS = (m/\mu)RT,$$

с учетом того, что энергия деформации пружины равна $E = kx^2/2$, позволяют найти высоту поршня над дном цилиндра:

$$h = (m/\mu) \times RT/(Mg + 2E/x) \approx 1{,}04 \text{ м.}$$

Ответ: $h = 1{,}04$ м.

Задача № 13. В трубке, запаянной с одного конца, находится столбик ртути длиной $l = 0{,}3$ см. Трубку вращают в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через ее закрытый конец. При какой угловой скорости вращения ртуть достигнет открытого конца, если в неподвижной горизонтальной трубке она находится на расстоянии $d = 64$ см от закрытого конца? Длина трубки $b = 80$ см. Внешнее давление $p_o = 100$ кПа. Температура постоянна. Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3. Капиллярными эффектами пренебречь.

Решение.

Запишем для столбика ртути второй закон Ньютона:

$$m\omega^2 b = p_o S - pS.$$

Здесь $m = \rho l S$ − масса ртути, ω − угловая скорость вращения трубки, b − радиус окружности, по которой движется капелька ртути (l по сравнению с b можно пренебречь), S − площадь сечения трубки и p − давление воздуха в трубке, которое находим из закона Бойля – Мариотта $p_o dS = pbS$.

Отсюда получаем

$$\omega = \sqrt{(p_o/(\rho l b)) \cdot (1 - d/b)} \approx 25 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $\omega \approx 25$ с$^{-1}$.

Задача № 14. Два одинаковых баллона соединены короткой трубкой, в которой имеется клапан давления, пропускающий газ из одного баллона в другой при разности давлений $\Delta p \geq 80$ см рт. ст. Один баллон наполнен газом, имеющим при температуре $t_1 = 17$°C давление $p = 760$ мм рт. ст., в другом баллоне – вакуум. Какое давление установится в баллонах, если их нагреть до температуры $t_2 = 109$°C?

Решение.

Уравнение состояния для газа при температуре t_1 связывает неизвестные постоянные (V – объем баллона, m – массу газа в нем и $A = const$) с известными величинами p и T_1:

$$pV/T_1 = Am.$$

При температуре t_2 масса перераспределится:

$$p_1V/T_2 = Am_1,$$
$$p_2V/T_2 = Am_2,$$
$$m_1 + m_2 = m,$$
$$p_1 - p_2 = \Delta p.$$

Отсюда

$$p_1 = p_2 + \Delta p = Am_1T_2/V, \quad p_2 = A(m - m_1)T_2.$$

Находим p_2:

$$2p_2 + \Delta p = pT_2/T_1.$$

Таким образом,

$$p_2 = (1/2)(pT_2/T_1 - \Delta p).$$

После подстановки

$$p_2 = (1/2)(760 \times 382/290 - 800) \approx 100 \text{ мм рт. ст.},$$
$$p_1 = (1/2)(pT_2/T_1 + \Delta p) \approx 900 \text{ мм рт. ст.}$$

Ответ: $p_1 \approx 900$ мм рт. ст., $p_2 \approx 100$ мм рт. ст.

Задача № 15. Внутри стеклянного шара радиуса $r = 10$ см содержится газ при давлении $p_1 = 0{,}1$ мм рт. ст. и температуре $t_1 = 17$°C. При такой температуре стенки шара полностью покрыты мономолекулярным слоем адсорбированного газа. Насколько изменится давление в шаре, если его нагреть до температуры $t_2 = 300$°C? Считать, что при таком нагреве все адсорбированные молекулы газа переходят со стенок в шар, а каждая адсорбированная молекула занимала поверхность $S = 10^{-19}$ м^2.

Решение.

Поскольку при начальной температуре адсорбированные молекулы газа полностью покрывают внутреннюю поверхность шара $S = 4\pi r^2$ монокулярным слоем, причем одна молекула занимает площадь s, число адсорбированных молекул равно $N_1 = S/s$. Кроме этих молекул внутри шара, если, как обычно, газ считать идеальным, согласно уравнению Клапейрона – Менделеева должно находиться еще

$$N_2 = 4\pi r^3 p_1 N_а/(3RT_1) \text{ молекул},$$

где $N_а \approx 6{,}02 \times 10^{23}$ моль$^{-1}$ − число Авогадро, $R \approx 8{,}31$ Дж/(моль·К) – газовая постоянная, а $T_1 \approx 273 + t_1$ – температура газа по шкале Кельвина. При нагревании шара до абсолютной температуры $T_2 \approx 273 + t_2$ по условию задачи на внутренних стенках не остается молекул газа и, следовательно, давление внутри шара должно стать равным

$$p_2 = 3(N_1 + N_2)RT_2/(4\pi r^3 N_а).$$

Отсюда следует, что при нагревании до заданной температуры давление внутри шара должно увеличиться на

$$\Delta p = p_2 - p_1 = p_1(T_2/T_1 - 1) + 3RT_2/(rsN_a) \approx 15{,}4 \text{ Па}.$$

Ответ: $\Delta p \approx 15{,}4$ Па.

Задача № 16. Идеальный газ в исходном состоянии имел температуру T_o. Затем давление газа уменьшили в $n = 2$ раза, увеличив его объем во столько же раз так, что объем изменялся в зависимости от давления по линейному закону. Найти максимальную температуру газа при этом процессе.

Решение.

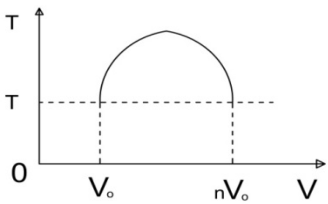
Давление p идеального газа, занимаемый им объем V и его абсолютная температура T согласно уравнению Клапейрона – Менделеева должны удовлетворять соотношению: $pV = BT$, где величина B равна произведению газовой постоянной на число молей газа. Поскольку при рассматриваемом процессе число молей газа следует считать неизменным, то величина B должна оставаться постоянной. Если давление газа и занимаемый им объем в исходном состоянии обозначить p_o и V_o, соответственно, то по условию задачи зависимость давления газа от занимаемого им объема можно представить в виде

$$p = p_o - a(V - V_o),$$

где a − положительная постоянная величина, определяющая скорость изменения давления газа при изменении занимаемого газом объема. Отсюда следует, что температура газа T является квадратичной функцией занимаемого им объема:

$$BT = (p_o + aV)V - aV^2.$$

График этой зависимости показан на рисунке.



При построении графика было учтено, что температура газа в исходном и конечном состояниях одинакова, так как произведения давления газа на занимаемый им объем по условию в этих состояниях равны. Из полученной выше зависимости температуры газа от занимаемого им объема и приведенного графика следует, что при температурах, меньших максимальной T_m, газ может занимать два разных объема:

$$V_{1,2} = (p_o + aV_o \pm \sqrt{\{(p_o + aV_o)^2 - 4aBT\}})/(2a),$$

величины которых стремятся друг к другу по мере приближения температуры газа к максимальной. Следовательно, искомая температура равна

$$T_m = (p_o + aV_o)^2/(4aB).$$

Учитывая, что в конечном состоянии давление газа в n раз меньше, а объем во столько же раз больше, чем в исходном состоянии, получим

$$a = p_o/(nV_o).$$

Подставляя это значение в предыдущее выражение и учитывая, что

$$B = p_oV_o/T_o,$$

$$T_m = (n + 1)^2T_o/(4n) = (9/8)T_o.$$

Ответ: $T_m = (9/8)T_o$.

Задача № 17. В цилиндре под поршнем содержится воздух с относительной влажностью $r = 80\%$ при температуре 100°C и нормальном атмосферном давлении. Каким будет давление в цилиндре, если объем воздуха изотермически уменьшить в $n = 2$ раза?

Решение.

Давление в цилиндре $p_а$ складывается из парциального давления паров $p_п$ и парциального давления сухого воздуха $p_в$. Как это обычно и подразумевается, будем считать, что речь идет о влажности по парам воды. Вспоминая, что давление насыщенных паров воды при температуре 100°C равно нормальному атмосферному давлению $p_а$, в соответствии с определением относительной влажности, используемым в метеорологии, получим

$$p_п = rp_а.$$

Отсюда, в соответствии со сказанным выше, найдем

$$p_в = (1 - r)p_а.$$

Поскольку объем влажного воздуха уменьшают в n раз изотермически, а сухой воздух можно считать подчиняющимся уравнению состояния идеального газа, его парциальное давление увеличится в n раз. При заданном уменьшении объема давление паров воды, если бы и к ним был применим закон Бойля – Мариотта, должно было бы стать равным

$$nrp_а = 1,6p_а,$$

т. е. превысить давление насыщенных паров. Поэтому следует считать, что часть паров сконденсируется, а влажность воздуха в цилиндре будет равна 100%. Учитывая, что плотность воды при 100°C примерно в 1700 раз больше плотности насыщенного пара, объемом образовавшейся воды следует пренебречь, а потому искомое давление будет равно

$$p = n(1 - r)p_а + p_а = 1,4p_а \approx 0,14 \text{ МПа}.$$

Ответ: $p \approx 0,14$ МПа.

Задача № 18. В высокий цилиндрический сосуд с внутренним диаметром $D = 7$ см налито $m = 50$ г воды. В сосуд медленно опускают подвешенный на нити стержень массой $M = 5$ кг, имеющий форму прямого кругового цилиндра длиной $L = 218,3$ см. Плотность материала стержня $\rho = 600$ кг/м^3. Оси сосуда и стержня вертикальны и совпадают. Найдите изменение силы натяжения подвеса, когда расстояние между нижним основанием стержня и дном сосуда станет равным $h = 3$ мм, по сравнению со случаем, когда стержень еще не касался воды.

Решение.

Изменение силы натяжения подвеса, после того как стержень коснется поверхности воды, обусловлено действием сил со стороны воды на стержень. Поскольку диаметр стержня равен $d = 2\sqrt{M/(\pi\rho L)}$, толщина зазора между стенками цилиндра и стержнем составляет

$$\delta = 0{,}5(D - d) \approx 0{,}1416 \text{ мм}$$

(оси стержня и цилиндра совпадают) и высота столба воды, отсчитываемая от нижнего основания стержня, при заданной толщине слоя воды между нижним основанием стержня и дном цилиндра (без учета капиллярных явлений) равна

$$H = [m/\rho_в - 0{,}25\pi D_2 h]/[0{,}25\pi(D_2 - d_2)] \approx 1{,}238 \text{ м},$$

где $\rho_в = 1$ г/см^3 − плотность воды. Так как в условии задачи не оговорено иное, будем считать, что цилиндр покоится относительно лабораторной системы отсчета и эту систему можно считать инерциальной. Тогда сила натяжения подвеса (считая величину ускорения свободного падения равной $g = 9{,}81$ м/с^2) уменьшится, без учета сил поверхностного натяжения, на величину

$$\Delta F = 0{,}25\pi d^2\rho_в gH = Mg(4m - \pi D^2 h\rho_в)/(\pi D^2 L\rho - 4M).$$

После вычислений $\Delta F \approx 0{,}9448Mg \approx 46{,}34$ Н.

Как известно, давление под искривленной поверхностью жидкости за счет действия сил поверхностного натяжения при условии смачивания стенок меньше (а не смачивания – больше) давления над плоской поверхностью при тех же внешних условиях на величину, определяемую формулой Лапласа:

$$\Delta p = (1/R_1 + 1/R_2)\sigma,$$

где R_1 и R_2 − так называемые главные радиусы кривизны поверхности, а σ − коэффициент поверхностного натяжения. В рассматриваемом случае при полном смачивании или не смачивании цилиндра и стержня $R_1 = \delta/2$, а $R_2 \approx D/2$. Поскольку $D \geq \delta$, максимальная поправка на изменение силы натяжения подвеса, обусловленная действием сил поверхностного натяжения, при заданном погружении цилиндра должна быть равна

$$F_n = (2\sigma/\delta)(\pi d^2/4) = [4\sigma/(D\sqrt{M/(\pi\rho L)}] \times [M/(\rho L)] \approx 3{,}92 \text{ Н}.$$

(коэффициент поверхностного натяжения воды при температуре $t = 20$°C и давлении $p = 760$ мм рт. ст. равен $\sigma \approx 0{,}0728$ Н/м). В этом расчете мы не учитывали силу, с которой на цилиндр действует верхняя кромка жидкости: при смачивании – вниз, а при не смачивании – вверх. Читатель может убедиться самостоятельно, что величина этой силы составляет долю $2\delta/d$ от величины F_n, т. е. приблизительно 0,4%.

Итак, в зависимости от степени смачивания цилиндра и стержня водой сила натяжения подвеса может уменьшиться на любую величину от

$$\Delta F - F_n \approx 42{,}4\ H \text{ до } Mg \approx 49{,}05 \text{ Н}$$

(нить не может давить на стержень). В последнем случае необходимо считать, что $R_1 > \delta/2$, т. е. модуль косинуса краевого угла отличен от единицы.

Следует отметить, что при решении данной задачи было необходимо правильно выбрать точность числовых расчетов.

Задача № 19. Объем тонкостенного цилиндрического сосуда высотой H = 40 см равен V = 400 см^3, его вес P = 3,3 Н. При температуре t = 47°С и атмосферном давлении p_o = 100 кПа сосуд переворачивают вверх дном и погружают в жидкость плотностью ρ = 1000 кг/м^3. При какой температуре t_1 сосуд утонет? Атмосферное давление считать неизменным, ускорение свободного падения принять g = 10 м/с^2.

Решение.

При понижении температуры объем воздуха в сосуде уменьшается и он погружается в воду. Сосуд будет оставаться на плаву до тех пор, пока его дно не окажется на одном уровне с поверхностью воды. Силы, действующие на сосуд, при этом еще будут уравновешены. При дальнейшем понижении температуры равновесие сил станет невозможным, и сосуд начнет тонуть. Это произойдет из-за того, что объем воздуха в сосуде и, следовательно, архимедова сила еще больше уменьшатся, а сила, действующая вниз на дно сосуда, увеличится, поскольку к силе давления атмосферного воздуха добавится сила давления воды на дно.

Исходя из этих рассуждений, рассмотрим случай, когда сосуд еще плавает, но его дно уже находится вровень с поверхностью воды.

Обозначим через p_x давление воздуха в сосуде, а через V_x − объем воздуха. Учитывая, что площадь сечения сосуда $S = V/H$, запишем условие равновесия сосуда под действием приложенных к нему сил:

$$(p_x - p_o)V/H = P.$$

Из закона Архимеда следует, что

$$P = \rho V_x g.$$

Из этих равенств легко найти p_x и V_x:

$$p_x = p_o + PH/V, \quad V_x = P/(\rho g).$$

Уравнения начального и конечного состояния воздуха в сосуде имеют вид:

$$p_o V = \nu RT, \quad p_x V_x = \nu RT_1.$$

Отсюда $T_1 = p_x V_x T/(p_o V)$.

Подставляя сюда найденные p_x и V_x, получаем

$$t_1 < (t + 273°\text{C}) \times P/(\rho g V) \times (1 + PH/(p_o V)) - 273°\text{C} = 16{,}8°\text{C}.$$

Ответ: $t_1 < 16{,}8$°С.

Задача № 20. В расположенном горизонтально теплоизолированном цилиндре может перемещаться поршень, слева от которого находится идеальный газ, а справа − вакуум. Между поршнем и дном цилиндра расположена пружина. В начальный момент поршень закреплен, а пружина находится в недеформированном состоянии. Затем поршень освобождают. После установления равновесия объем, занимаемый газом, оказался в два раза больше начального, а температура − равной 10/11 от начальной. Определить молярную теплоемкость газа при постоянном объеме.

Решение.

Запишем условие равновесия поршня в конечном состоянии и закон сохранения энергии:

$$kx = p_2S = p_2(V_2 - V_1)/x.$$
$$\nu C_V(T_1 - T_2) = kx^2/2.$$

Здесь $kx^2/2$ − потенциальная энергия пружины, ν − число молей. Кроме того, для идеального газа

$$p_1V_1 = \nu RT_1 \quad \text{и} \quad p_2V_2 = \nu RT_2.$$

Отсюда $C_V = (5/2)R \approx 21$ Дж/(моль·К).

Задача № 21. В цилиндре под легким поршнем находится 14 г азота при 27°C. Какое количество теплоты необходимо ему сообщить при изотермическом увеличении объема на 4%? Относительная молекулярная масса азота равна 28.

Указание. При небольших изменениях объема $\Delta V/V \ll 1$ воспользоваться приближенной формулой

$$(1 + \Delta V/V)^{-1} \approx 1 - \Delta V/V.$$

Решение.

Согласно первому закону термодинамики, количество теплоты Q, которое необходимо сообщить газу при изотермическом расширении, равно работе A газа. Поскольку относительное увеличение объема мало, можно считать, что давление при расширении уменьшается по линейному закону. Тогда

$$A = p_{\text{ср}}\Delta V = (1/2)(p_1 + p_2)\Delta V.$$

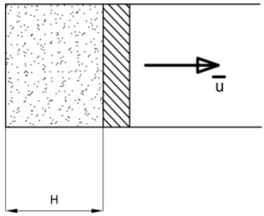
Из закона Бойля – Мариотта

$$p_2 = p_1V_1/(V_1 + \Delta V) = p_1/(1 + \Delta V/V_1) \approx p_1(1 - \Delta V/V_1).$$

Следовательно,

$$Q = A \approx p_1\Delta V(1 - \Delta V/(2V_1)) = (m/\mu)RT(\Delta V/V_1)(1 - \Delta V/(2V_1)) \approx 4{,}88 \text{ Дж}.$$

Задача № 22. В цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем, находится разреженный газ, все молекулы которого имеют равные по абсолютной величине скорости $v = 200$ м/с. Первоначально поршень отстоит от дна сосуда на расстоянии $H = 50$ см (рис.). Затем его быстро, со скоростью $u = 25$ м/с, смещают направо на расстояние 3/5H. Определить, в каком интервале будут находиться скорости молекул газа. Столкновения молекул со стенками и поршнем считать абсолютно упругими.



Решение.

После каждого соударения с движущимся поршнем скорость молекул газа уменьшается на $2u$. А сколько соударений возможно? Обозначим через t время между первым и вторым соударениями, тогда

$$t = (2H - x)/v_1 = (2H - x)/(v - 2u),$$

где $x = ut$ − соответствующее смещение поршня.

Отсюда

$$x = 2uH/(v - 3u) = 2H/5 < 3H/5,$$

следовательно, часть молекул претерпит два соударения, и их скорости после второго соударения

$$v_2 \geq v - 4u = 100 \text{ м/с}.$$

Аналогично можно показать, что третье соударение невозможно. Поэтому окончательно

$$100 \text{ м/с} \leq v_2 \leq 200 \text{ м/с}.$$

Задача № 23. В герметичном сосуде объемом $V = 5{,}6$ л содержится воздух при давлении $p = 760$ мм рт. ст. Какое давление установится в сосуде, если воздуху сообщить $Q = 1430$ Дж тепла? Молярную теплоемкость воздуха при постоянном объеме принять равной $C_V = 21$ Дж/(моль·град).

Решение.

Из уравнения теплового баланса

$$Q = C_V m(T_1 - T)/\mu$$

и уравнений состояния идеального газа

$$pV = (m/\mu)RT \quad \text{и} \quad p_1V = (m/\mu)RT_1,$$

найдем установившееся в сосуде давление:

$$p_1 = p(1 + RQ/(C_V pV)) \approx 2p = 1520 \text{ мм рт. ст.}$$

Задача № 24. Одинаковые по массе количества водорода ($\mu(H_2)$ = = 2 г/моль) и гелия ($\mu(He)$ = 4 г/моль) поместили в сосуд объемом V_1, который отделен от пустого сосуда объемом V_2 полупроницаемой перегородкой, свободно пропускающей молекулы водорода и не пропускающей гелий. После установления равновесия давление в первом сосуде упало в 2 раза. Определите V_3/V_1. Температура постоянна.

Решение.

Условием равновесия является равенство парциальных давлений водорода в первом и втором сосудах. Пусть p – начальное давление в первом сосуде. Оно складывается из парциальных давлений гелия и водорода. Так как массы и температуры газов одинаковы, отношение давлений гелия и водорода обратно отношению их молярных масс. Таким образом,

$$p_{He} + p_{H2} = p, \quad p_{He}/p_{H2} = \mu_{He}/\mu_{H2} = 1/2.$$

Откуда $p_{He} = p/3$, $p_{H2} = 2p/3$.

Чтобы суммарное давление гелия и оставшейся части водорода в первом сосуде было вдвое меньше начального, парциальное давление водорода должно уменьшиться до величины

$$p_{H2}' = p/6.$$

Поскольку давление водорода обратно пропорционально объему, который он занимает, получаем

$$p_{He}/p_{H2}' = (V_1 + V_2)/V_1, \quad V_2/V_1 = 3.$$

Задача № 25. В воздухе комнаты объемом $V = 75$ м^3 находится $m = 20$ кг кислорода. Найти величину средней квадратичной скорости молекул кислорода. Воздух в комнате состоит из кислорода и азота. Концентрация молекул кислорода в $\beta = 4$ раза меньше концентрации молекул азота. Атмосферное давление $p = 10^5$ Па.

Решение.

Атмосферное давление в комнате равно

$$p = p_{O_2} + p_N,$$

или

$$p = p_{O_2} + \beta p_{O_2}.$$

Откуда парциальное давление кислорода

$$p_{O_2} = p/(1 + \beta).$$

С другой стороны,

$$p_{O2} = (1/3) n_{O2} m_{O2} v^2,$$

где n_{O_2} – концентрация, а m_{O_2} – масса молекулы кислорода.

$$p_{O_2} = (1/3) m v^2/V = p/(1 + \beta).$$

Теперь для v получим

$$v = \sqrt{3pV/((1 + \beta)m)} = 474 \text{ м/с}.$$

Задача № 26. В закрытом баллоне находится гелий под давлением $p_1 = 100$ кПа и при температуре $T_1 = 300$ К. Массу гелия в баллоне уменьшили вдвое, а оставшийся газ нагрели так, что давление гелия в конечном состоянии составило $p_2 = 90{,}0$ кПа. Чему равна температура T_2 оставшегося в баллоне гелия?

Решение.

Запишем уравнение Менделеева – Клапейрона для первого состояния

$$p_1 V = (m/M) \cdot RT_1. \qquad (1)$$

Массу гелия в баллоне уменьшили в два раза, а оставшийся газ нагрели, тогда уравнение Менделеева – Клапейрона для нового состояния

$$p_2V = (m/(2M) \cdot RT_2. \quad (2)$$

Разделим уравнение (2) на (1)

$$p_2/p_1 = T_2/(2T_1).$$

Откуда искомая температура

$$T_2 = 2T_1 \cdot (p_2/p_1).$$

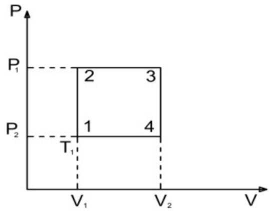
Подставим численные значения

$$T_2 = 2 \cdot 300 \cdot (90{,}0/100) = 540 \text{ К}.$$

Ответ: $T_2 = 540$ К.

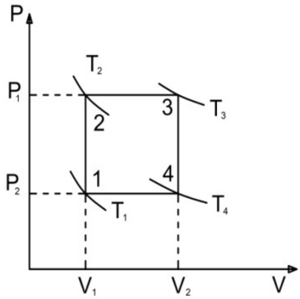
2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ. КПД

Задача № 1. Один моль азота ($M = 28$ г/моль) является рабочим веществом в замкнутом цикле 1–2–3–4 (см. рис.). Известны: $p_1 = 2$ атм., $V_1 = 10$ л, $T_1 = 244$ К; $p_2 = 4$ атм., $V_2 = 20$ л и удельные теплоемкости $c_V = 0{,}179$ кал/(г·град) и $c_p = 0{,}25$ кал/(г·град). Какое количество тепла и на каких участках цикла поступает в систему?



Решение.

Проведем изотермы $pV = const$ через точки 1, 2, 3 и 4 (рис.).



Из рисунка видно, что

$$T_1 < T_2 < T_3, \quad T_3 > T_4 > T_1.$$

Следовательно, тепло поступает в систему на участках 1–2 и 2–3.

$$Q_{12} = Mc_V(T_2 - T_1),$$
$$Q_{23} = Mc_p(T_3 - T_2).$$

По изохоре 1–2 определим T_2:

$$p_1/T_1 = p_2/T_2, \quad T_2 = 2T_1.$$

По изобаре 2–3 определим T_3:

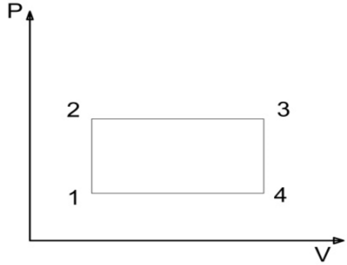
$$V_1/T_2 = V_2/T_3, \quad T_3 = 4T_1.$$

Количество тепла, поступившего в систему,

$$Q = Q_{12} + Q_{23} = 5 \cdot 244 + 7 \cdot 488 = 4636 \text{ (кал)}.$$

Ответ: Q = 4636 кал.

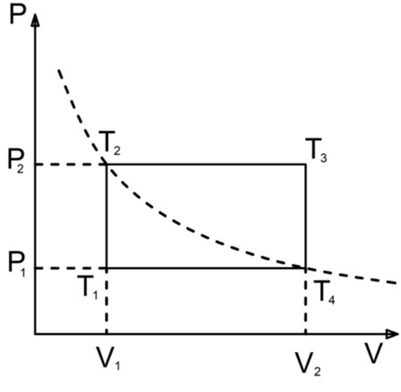
Задача № 2. Цикл состоит из двух изохор и двух изобар (рис.). Температуры газа в точках 1 и 3 равны соответственно T_1 и T_2. Определить работу, совершенную одной грамм-молекулой газа за цикл, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.



Решение.

Работа на изохорах равна нулю. Работа на изобаре 2–3 (рис.) совершается газом:

$$A_1 = p_2(V_2 - V_1).$$



Воспользуемся уравнением состояния газа $pV = RT$ в точках 2 и 3. Тогда

$$A_1 = R(T_3 - T_2),$$

где T_2 – температура изотермы 2–4.

Работа на изобаре 4–1 совершается над газом:

$$A_2 = R(T_2 - T_1).$$

Полная работа, совершенная газом:

$$A = A_1 - A_2 = R(T_3 + T_1 - 2T_2).$$

Температуру изотермы T_2 найдем, воспользовавшись законом Шарля:

$$p_2/p_1 = T_2/T_1 = T_3/T_2,$$

т. е. $T_2 = \sqrt{T_1T_3}$.

Окончательно получим:

$$A = R(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2.$$

Ответ: $A = R(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2$.

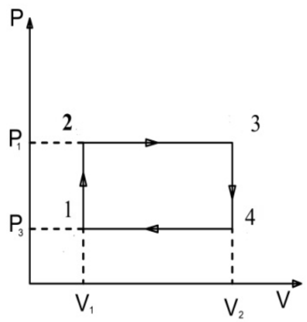
Задача № 3. Идеальный одноатомный газ, имевший температуру T_1, изобарически переводят в состояние 2 с температурой $T_2 > T_1$, затем изохорически – в состояние 3 с температурой $T_3 < T_2$, а после изобарического сжатия – в такое состояние 4, из которого его переводят в исходное состояние изохорически. Найти КПД этого цикла.

Решение.

КПД тепловой машины по определению равен: $\eta = A/Q_1$, где A – работа, совершенная за один цикл, а Q_1 – количество теплоты, полученное при этом рабочим веществом от нагревателя.

С учетом обозначений на рисунке, где приведена pV-диаграмма заданного цикла, работа газа за один цикл

$$A = (p_1 - p_3)(V_2 - V_1).$$



Учитывая, что согласно уравнению Клапейрона – Менделеева произведение давления p газа на занимаемый им объем V равно газовой постоянной R, умноженной на число молей ν и его абсолютную температуру T, искомая работа может быть найдена по формуле

$$A = \nu R(T_2 - T_1 - T_3 + T_4).$$

При переходе из точки 1 в точку 2 газ совершает положительную работу. Одновременно с этим возрастает и внутренняя энергия газа, так как увеличивается его температура ($T_2 > T_1$). Следовательно, на участке 1–2 газ должен получать тепло от нагревателя. Учитывая, что молярная теплоемкость идеального одноатомного газа при изобарическом нагревании равна $2{,}5R$, полученное количество теплоты равно

$$Q_{12} = 2{,}5\nu R(T_2 - T_1).$$

На участке 2–3 температура газа по условию задачи уменьшается, а его объем остается постоянным. Поэтому на этом участке газ отдает тепло холодильнику. На следующем участке газ также должен отдавать тепло. Наконец на участке 4–1 при неизменном объеме давление газа увеличивается и, следовательно, увеличивается его температура. Поскольку молярная теплоемкость одноатомного газа при изохорическом процессе равна $1{,}5R$, на этом участке газ получает от нагревателя количество теплоты

$$Q_{41} = 1{,}5\nu R(T_1 - T_4).$$

Таким образом, полученное газом за один цикл количество теплоты

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{41}.$$

Объемы газа в точках 1 и 4 и, соответственно, 2 и 3 по условию задачи равны, а поэтому должны выполняться следующие соотношения:

$$p_1/p_3 = T_1/T_4 = T_2/T_3.$$

Из этих соотношений следует, что неизвестная температура газа

$$T_4 = T_1T_3/T_2.$$

Подставляя это в ранее полученные выражения, находим, что искомый КПД равен

$$\eta = [T_2(T_2 - T_1 - T_3) + T_1T_3]/[T_2(2{,}5T_2 - T_1) - 1{,}5T_1T_3].$$

Ответ: $\eta = [T_2(T_2 - T_1 - T_3) + T_1T_3]/[T_2(2{,}5T_2 - T_1) - 1{,}5T_1T_3]$.

Задача № 4. Холодильник, работающий по циклу Карно, поддерживает в камере температуру $T_к = 260$ К, отводя из нее за цикл работы энергию $Q_к = 400$ Дж. Температура радиатора холодильника равна $T_р = 300$ К. Какую среднюю мощность потребляет холодильник, если длительность его цикла равна $\tau = 1{,}5$ с?

Решение.

Если работу, совершенную тепловой машиной за один цикл, обозначить A, Q_1 – количество теплоты, полученное от нагревателя, и Q_2 – переданное машиной холодильнику так же за цикл, то на основании закона сохранения энергии можно утверждать, что $A = Q_1 - Q_2$, а КПД машины можно определить из соотношения:

$$\eta = A/(A + Q_2).$$

С другой стороны, согласно второму закону термодинамики (в формулировке Карно) КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно, определяется только абсолютными температурами нагревателя T_1 и холодильника T_2 и равно

$$\eta = (T_1 - T_2)/T_1.$$

Поскольку цикл Карно является обратимым, то те же соотношения должны быть справедливы и для холодильника, работающего по указанному циклу. Обозначив искомую мощность N и учитывая, что

$$A = N\tau, \quad T_1 = T_р, \quad T_2 = T_к \quad \text{и} \quad Q_2 = Q_к,$$

после алгебраических преобразований получим:

$$N = (T_р/T_к - 1)Q_к/\tau \approx 41 \text{ Вт}.$$

Ответ: $N \approx 41$ Вт.

Задача № 5. Тепловая машина с максимально возможным КПД имеет в качестве нагревателя резервуар с кипящей водой при $t_1 = 100^oC$, а в качестве холодильника − сосуд со льдом при $t_2 = 0^oC$. Какая масса льда m растает при совершении машиной работы $A = 10$ Дж? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 334$ Дж/г.

Решение.

Максимально возможный КПД достигается, если тепловая машина работает по циклу Карно. Он равен

$$\eta = (T_1 - T_2)/T_1,$$

где $T_1 = t_1 + 273^oC$, $T_2 = t_2 + 273^oC$ − абсолютные температуры нагревателя и холодильника.

С другой стороны, по определению КПД

$$\eta = A/Q_1,$$

где $A = Q_1 - |Q_2|$ − работа газа за цикл, Q_1 − количество теплоты, полученное за цикл от нагревателя, Q_2 − количество теплоты, отданное за цикл холодильнику.

Из равенства

$$(T_1 - T_2)/T_1 = (Q_1 - Q_2)/Q_1,$$

находим, что

$$|Q_2| = Q_1 \times T_2/T_1 = (A/\eta) \times T_2/T_1.$$

Отданная холодильнику теплота расходуется на таяние льда при температуре плавления. Следовательно,

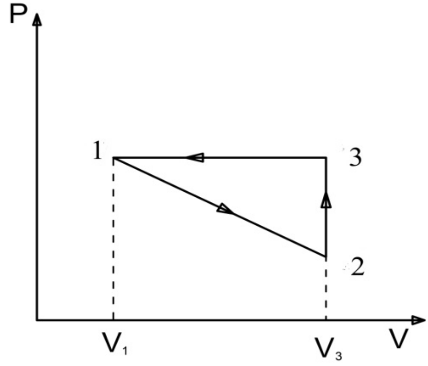
$$|Q_2| = m\lambda.$$

Решая записанные уравнения совместно, получаем

$$m = (t_2 + 273^oC)A/(\lambda(t_1 - t_2)) = 0{,}11 \text{ г}.$$

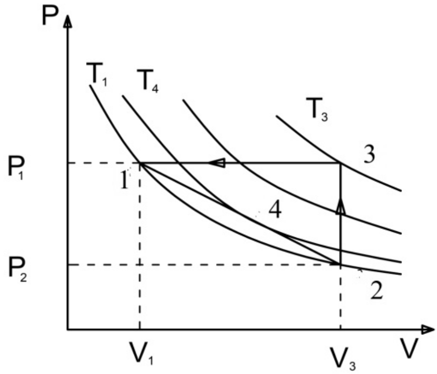
Ответ: $m = 0{,}11$ г.

Задача № 6. Один моль одноатомного идеального газа совершает замкнутый цикл, состоящий из процесса с линейной зависимостью давления от объема, изохоры и изобары (рис.). Найдите количество теплоты, подведенное к газу на участках цикла, где температура газа растет. Температура газа в состояниях 1 и 2 равна T_1 = 300 К, отношение объемов на изобаре V_3/V_1 = 5/2, направление обхода цикла указано стрелками. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль·К).



Решение.

Для нахождения участков цикла, где температура растет, проведем ряд изотерм (рис.). Теперь наглядно видно, что температура растет на участке 2−3 и на участке 1−4 − части процесса 1−2. Причем температура T_4 является максимальной для процесса 1−2.



Пусть T_3 − температура газа в точке 3, а p_1 и p_2 − давление в точках 1 и 2. Выразим T_3 и p_2 через T_1 и p_1.

Для точек 3 и 1

$$V_3/T_3 = V_1/T_1,$$

откуда

$$T_3 = T_1V_3/V_1.$$

По условию

$$V_3/V_1 = 5/2,$$

поэтому

$$T_3 = 5T_1/2.$$

Для точек 2 и 1

$$p_2V_3 = p_1V_1,$$

таким образом,

$$p_2 = p_1V_1/V_3 = 2p_1/5.$$

Используя первый закон термодинамики для участка 2−3, найдем количество теплоты, подведенное к газу на этом участке:

$$Q_{23} = (3/2)R(T_3 - T_1) = (9/4)RT_1.$$

Для определения температуры T_4, давления p_4 и объема V_4 запишем уравнение прямой для процесса 1−2 в виде

$$p = AV + B,$$

где

$$A = (p_1 - p_2)/(V_1 - V_3) = -2p_1/(5V_1), \quad B = (p_2V_1 - p_1V_3)/(V_1 - V_3) = 7p_1/5.$$

Итак, искомое уравнение прямой линии

$$p = -(2/5)p_1V/V_1 + 7p_1/5.$$

Исключая из этого уравнения давление p с помощью уравнения Менделеева − Клапейрона

$$pV = RT,$$

записанного для одного моля газа, получаем зависимость температуры от объема в процессе 1−2:

$$T = -(2/5)p_1V_2/(V_1R) + 7p_1V/(5R).$$

Исследование на экстремум этой зависимости дает, что температура максимальна при

$$V = V_4 = 7V_1/4$$

и равна

$$T = T_4 = 49T_1/40.$$

При этом

$$p_4 = RT_4/V_4 = 7p_1/10.$$

Согласно первому закону термодинамики подведенное к газу на участке 1−4 количество теплоты

$$Q_{14} = \Delta U + A,$$

где ΔU − изменение внутренней энергии газа, а A − работа газа.

Поскольку

$$\Delta U = (3/2)R(T_4 - T_1) = 27RT_1/80,$$

$$A = (p_1 + p_4)(V_4 - V_1)/2 = 51p_1V_1/80 = 51RT_1/80,$$

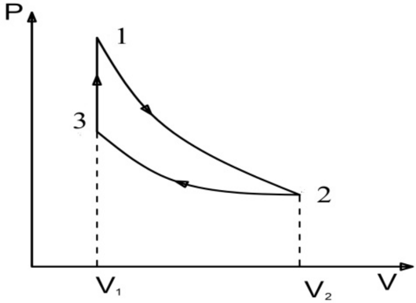
имеем

$$Q_{14} = (27/80)RT_1 + (51/80)RT_1 = (39/40)RT_1.$$

Окончательно суммарное количество теплоты, подведенное к газу на участках, где его температура растет, равно

$$Q = Q_{23} + Q_{14} = (129/40)RT_1 \approx 8 \text{ кДж}.$$

Задача № 7. Внутренняя энергия U неидеального газа зависит от температуры T и объема V по формуле $U = cT - a/V$, где c и a − заданные константы. Над таким газом из состояния с объемом V_1 совершают замкнутый процесс (цикл), состояний из адиабаты 1−2, изотермы 2−3 и изохоры 3−1 (рис.). Найдите разность конечной и начальной температур газа в изохорическом процессе, если работа газа в адиабатическом процессе оказалась в η раз больше работы изотермического сжатия. Известно, что $V_2 = \alpha V_1$, а суммарное количество теплоты, подведенное к газу за цикл, равно Q.



Решение.

Работа на адиабате равна изменению внутренней энергии газа:

$$A_{12} = -\Delta U_{12} = -(\Delta U_{13} + \Delta U_{32}) = c(T_1 - T_3) - (\alpha - 1)a/(\alpha V_1).$$

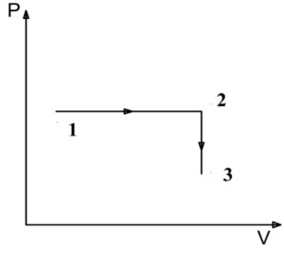
К газу за цикл подводится количество теплоты

$$Q = A_{23} + \Delta U_{23} + \Delta U_{31} = -A_{12}/\beta + A_{12}.$$

Из этих равенств находим

$$T_1 - T_3 = (1/c)(\beta Q/(\beta - 1) + (\alpha - 1)a/(\alpha V_1)).$$

Задача № 8. Моль идеального газа переводится из состояния 1 в состояние 3 путем изобарического нагрева 1−2 и изохорического охлаждения 2−3 (рис.). На участке 1−2 газ совершает работу A = 1250 Дж. В процессе всего перехода 1−2−3 к газу подводится количество теплоты Q = 750 Дж. Найдите разность температур T_2 и T_3.



Решение.

Работа на изобаре 1−2 равна $A = p_1(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1)$.

Количество теплоты Q, подведенное в процессе перехода 1−2−3, составляет

$$Q = A + \Delta U_{12} + \Delta U_{23},$$

где ΔU_{12}, ΔU_{23} − изменение внутренней энергии газа в изобарическом процессе соответственно.

В свою очередь

$$\Delta U_{12} + \Delta U_{23} = (3/2)R(T_3 - T_1),$$

где R − газовая постоянная.

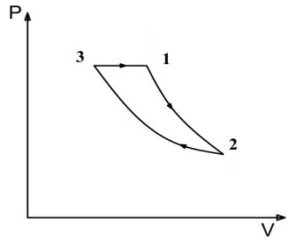
Тогда

$$Q = A + (3/2)R(T_3 - T_1).$$

Исключив из выражений для A и Q неизвестную начальную температуру T_1, получим

$$T_2 - T_3 = A/R - 2(Q - A)/(3R) = 190\ \text{K}.$$

Задача № 9. Моль гелия совершает работу величиной A в замкнутом цикле (см. рис.), состоящем из адиабаты 1−2, изотермы 2−3, изобары 3−1. Найти величину работы, совершенной в изотермическом процессе, если разность максимальной и минимальной температуры газа в цикле равна ΔT градусов.



Решение.

Пусть температура гелия на диаграмме P, V в 1 равна T_1. Так как точки 2 и 3 лежат на изотерме, то $T_2 = T_3$.

Точка 1 лежит выше точек 2 и 3. Следовательно, $\Delta T = T_1 - T_2$.

Запишем уравнение первого начала термодинамики для адиабатического процесса 1−2:

$$0 = A_{12} - C_V\Delta T. \tag{1}$$

Соответствующее уравнение для изотермы (участок 2−3):

$$Q_{23} = A_{23}. \tag{2}$$

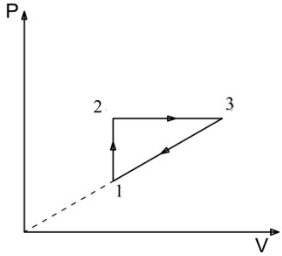
Наконец для изобары 3−1 имеем:

$$R\Delta T = A_{31}. \tag{3}$$

В силу того, что работа газа в замкнутом цикле 1−2−3−1 равна $A = A_{12} + A_{23} + A_{31}$, из уравнений (1), (2), (3) получим:

$$A_{23} = A - (5/2)R\Delta T.$$

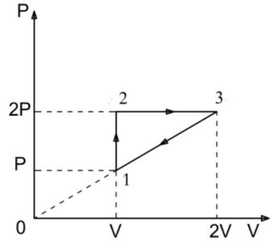
Задача № 10. Тепловая машина работает по циклу, состоящему из изохоры 1−2, изобары 2−3 и участка 3−1 прямо пропорциональной зависимости давления от объема. Найти КПД цикла, если объем на изобаре изменяется в 2 раза. Рабочее вещество − идеальный одноатомный газ.



Решение.

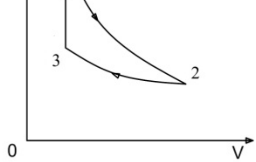
$$\eta = A/Q_+,$$

где $Q_+ = Q_{123}$ − полученное тепло, $A = A_{1231} = pV/2$ − работа газа за цикл.



$$Q_{123} = A_{123} + U_3 - U_1 = 2pV + (3/2)(2p \cdot 2V - pV) = (13/2)pV,$$
$$\eta = (1/2)pV/((13/2)pV) = 1/13 \approx 0{,}077.$$

Задача № 11. Тепловая машина работает по замкнутому циклу, состоящему из процесса адиабатического расширения 1−2, изотермического процесса 2−3 и изохорического процесса 3−1. Рабочее вещество − ν молей идеального одноатомного газа. В процессе, где тепло к газу подводится, давление газа увеличивается в $\alpha = 3$ раза. В процессе сжатия от газа отводится количество теплоты Q ($Q > 0$). Во всем цикле 1−2−3−1 машина совершает работу A. Найдите максимальную температуру газа в цикле.



Решение.

Пусть

$$T_2 = T_3 = T,$$

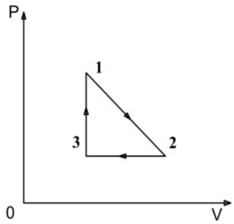
тогда

$$T_1 = Tp_1/p_3 = 3T,$$
$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31},$$
$$A_{12} = -\Delta U = \nu c_V(T_1 - T_2) = 3\nu RT,$$
$$A_{23} = -Q, \quad A_{31} = 0.$$
$$A = 3\nu RT - Q.$$

Следовательно,

$$T_{\max} = T_1 = 3T = (A + Q)/(\nu R).$$

Задача № 12. С газообразным гелием проводится циклический процесс, состоящий из процесса 1−2 с линейной зависимостью давления от объема, изобарического сжатия 2−3 и изохорического нагревания 3−1. Известно, что объем в состоянии 2 в три раза больше, чем в состоянии 1. Найдите отношение работы газа в цикле 1−2−3−1 к количеству теплоты, подведённой к газу в изохорическом процессе 3−1.



Решение.

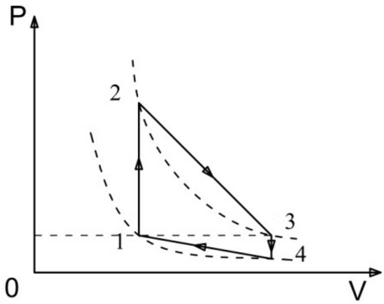
Работа газа за цикл равна площади цикла:

$$A = (1/2)(p_1 - p_3)(V_2 - V_1) = (1/2)(p_1 - p_3)2V_1 = (p_1 - p_3)V_1.$$

Тепло в процессе 3−1 равно изменению внутренней энергии, так как работа в этом процессе не совершается:

$$Q = (3/2)\nu RT_1 - (3/2)\nu RT_3 = (3/2)p_1V_1 - (3/2)p_3V_3 = (3/2)(p_1 - p_3)V_1.$$
$$A/Q = (p_1 - p_3)V_1/((3/2)(p_1 - p_3)V_1) = 2/3.$$

Задача № 13. С молями идеального газа проводится циклический процесс, состоящий из двух изохор 1−2 и 3−4 и двух процессов 2−3 и 4−1 с линейной зависимостью давления от объема. Температура газа в состояниях 1 и 4 равна T, а в состояниях 2 и 3 равна $2T$. Найдите работу, совершаемую газом в цикле 1−2−3−4−1, если давления в состояниях 1 и 3 равны.



Решение.

Так как $V_3/V_1 = T_3/T_1 = 2$,

$$p_1/p_4 = p_2/p_3 = V_4/V_1 = 2,$$

можно ввести удобные обозначения:

$$V_1 = V_2 = V, \quad V_3 = V_4 = 2V,$$

$$p_4 = p, \quad p_1 = p_3 = 2p, \quad p_2 = 4p.$$

Тогда

$$2pV = \nu RV$$

и

$$A_{23} = (1/2)(p_2 + p_3)(V_3 - V_2) = (1/2)(4p + 2p)(2V - V) = 3pV = (3/2)\nu RT.$$

$$A_{14} = (1/2)(2p + p)V = (3/2)pV = (3/4)\nu RT.$$

$$A = A_{23} - A_{14} = (3/2)\nu RT.$$

3. ЭНЕРГИЯ И РАБОТА

Задача № 1. В цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находится насыщенный пар при температуре T. Определить, какая масса пара сконденсировалась, если при движении поршня совершена работа A. Молекулярный вес пара μ, газовая постоянная R.

Решение.

Так как пар насыщенный и есть жидкая фаза, то при сжатии его давление постоянно. Работа по сжатию равна

$$A = F\Delta l = pS\Delta l = p\Delta V = p(V_2 - V_1).$$

К пару можно применить уравнение газового состояния:

$$pV_1 = (m_1/M)RT; \quad pV_2 = (m_2/M)RT;$$

это дает

$$A = p(V_2 - V_1) = (m_2 - m_1)RT/M.$$

Отсюда

$$\Delta m = m_2 - m_1 = AM/(RT).$$

Ответ: $\Delta m = AM/(RT)$.

Задача № 2. В теплоизолированной трубе под поршнем содержится один моль газа при давлении в два раза меньшем внешнего и температуре T. Поршень может свободно передвигаться в сторону увеличения объема и удерживается стопором от противоположного движения. Внутренняя энергия газа $U = cT$. Газовая постоянная R. Какое количество теплоты надо подвести к газу, чтобы его объем увеличился в два раза?

Решение.

Количество теплоты Q переходит в изменение внутренней энергии ΔU и в работу $A^/$по расширению газа:

$$Q = \Delta U + A^/ = c\Delta T + p\Delta V.$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона, записанного для начального состояния газа: $(p/2)V = RT$ и для конечного: $p2V = RT_1$, найдем

$$\Delta U = c\Delta T = c(T_1 - T) = 3cT,$$

$$A^/ = p\Delta V = pV = RT_1/2 = 2RT.$$

Тогда окончательно

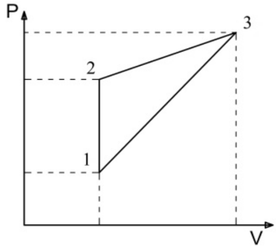
$$Q = (3c + 2R)T.$$

Ответ: $Q = (3c + 2R)T$.

Задача № 3. Давление идеального одноатомного газа изохорно увеличивают в 4 раза, затем объем газа увеличивают в 2,5 раза так, что давление линейно зависит от объема и возрастает в 2 раза, после чего газ возвращают в исходное состояние в процессе, в котором давление линейно зависит от объема. Найдите КПД (в процентах) такого цикла.

Решение.

Работа за цикл равна площади треугольника (рис.).



$$A = (1/2)(p_2 - p_1)(V_3 - V_2) = (1/2)(4p_1 - p_1)(2{,}5V_1 - V_1) = 2{,}25\nu RT_1.$$

Газ получает тепло на участках 1–2 и 2–3. Полученное количество теплоты равно

$$Q = Q_{13} = (U_3 - U_1) + A_{31},$$

$$Q = (3/2)\nu R(T_3 - T_2) + (1/2)(p_2 + p_3)(V_1 - V_2),$$

$$Q = (3/2)\nu R(2 \times 2{,}25 \times 4T_1 - T_1) + (1/2)\,(4p_1 + 4 \times 2p_1)(2{,}5V_1 - V_2) = 37{,}5\nu RT_1.$$

Получаем, что КПД цикла равен $\eta = A/Q = 0{,}06$, т. е. 6%.

Ответ: $\eta = 6\%$.

Задача № 4. В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится идеальный одноатомный газ. Вначале поршень закреплен и соединен с дном цилиндра недеформированной пружиной. После того как поршень освободили и система пришла в равновесие, объем газа увеличился в 1,25 раза. На сколько процентов при этом уменьшилось давление? Над поршнем газа нет.

Решение.

Запишем закон сохранения энергии

$$(3/2)\nu RT_1 = (3/2)\nu RT_2 + kx^2/2,$$

условие механического равновесия поршня:

$$p_2S = kx$$

и уравнение Клапейрона – Менделеева для конечного состояния газа:

$$p_2(Sh_2) = \nu RT_2.$$

Из последних двух уравнений исключим p_2S и получим

$$kxh_2 = \nu RT_2.$$

По условию задачи объем и, соответственно, высота поршня изменяются в 1,25 раза:

$$h_2 = 1{,}25(h_2 - x),$$

откуда находим

$$h_2 = 5x \quad \text{и} \quad 5kx^2 = \nu RT_2.$$

Подставив $kx^2 = \nu RT_2/5$ в закон сохранения энергии, получим

$$T_2 = (3/3{,}2)T_1$$

и выразим отношение давлений:

$$p_2/p_1 = (T_2/T_1) \times (V_1/V_2) = (3/3{,}2) \times (1/1{,}25) = 0{,}75.$$

Значит, давление понизилось на 25%.

Ответ: давление понизилось на 25%.

Задача № 5. Тяжелый поршень массой M может свободно перемещаться внутри вертикального теплоизолированного цилиндра сечением S, верхний торец которого закрыт, а нижний открыт в атмосферу. Внутри цилиндра имеется горизонтальная перегородка с маленьким отверстием, отсекающая от атмосферы 1 моль воздуха, который занимает объем V при атмосферном давлении p_a. Поршень, который вначале снизу к перегородке, отпускают. Полагая, что внутренняя энергия газа равна cT, найдите, насколько опустится поршень.

Решение.

Если действующая на поршень сила тяжести Mg превышает действующую на него снизу силу атмосферного давления p_aS, то поршень, очевидно, выпадет из трубы, какой бы длинной она не была. Если же $Mg < p_aS$, то происходит следующее. Проникающий через отверстие воздух создает в отсеке между перегородкой цилиндра и поршнем давление. Когда оно достигнет величины p такой, что

$$Mg + pS = p_aS,$$

поршень начинает двигаться вниз. По мере его движения в этот отсек попадают дополнительные порции воздуха, поддерживая там постоянное давление p. Поскольку отверстие маленькое, поршень движется медленно. Он остановится, когда давление над перегородкой упадет до величины p.

При смещении поршня на расстояние x газ, находящийся в цилиндре, совершает работу $A = pSx$, а внутренняя энергия его уменьшается. Будем считать, что перегородка между образовавшимися в цилиндре отсеками не препятствует теплообмену между ними, так что температуры воздуха в них все время одинаковы. Обозначив температуру воздуха в начальный момент через T_o, а в момент остановки через T, получаем

$$cT_o = cT + A.$$

Запишем также уравнения состояния газа для этих моментов:

$$p_aV = RT_o, \quad (p_a + Sx)V = RT.$$

Полученных уравнений достаточно для определения величины x:

$$x = (V/S) \times [c/(c + R)] \times Mg/(p_aS - Mg),$$

при $Mg < p_aS$.

Ответ: $x = (V/S) \times [c/(c + R)] \times Mg/(p_aS - Mg)$.

Задача № 6. Пластилиновый шар бросают со скоростью $v_o = 10$ м/с под углом $\alpha = 60°$ к горизонту по направлению к вертикальной стенке, расположенной на расстоянии $l = 6{,}3$ м от точки бросания. Шар прилипает к стенке. Считая, что вся кинетическая энергия шара пошла на его нагревание, найдите приращение температуры шара. Удельная теплоемкость пластилина $c = 2{,}5 \times 103$ Дж/(кг·К).

Решение.

Скорость шара v в момент удара о стенку можно найти из кинематических соотношений

$$v^2 = (v_o\cos\alpha)^2 + (v_o\sin\alpha - gt)^2,$$
$$l = v_o\cos\alpha \times t.$$

Тогда из закона сохранения энергии

$$mv^2/2 = cm\Delta T$$

найдем приращение ΔT температуры шара:

$$\Delta T = \{(v_o\cos\alpha)^2 + [v_o\sin\alpha - gt/(v_o\cos\alpha)]^2\}/(2c) \approx 8 \times 10^{-3}\ \text{К}.$$

Ответ: $\Delta T \approx 8 \times 10^{-3}$ К.

Задача № 7. В вертикальном цилиндре под массивным поршнем находится одноатомный газ. Сколько теплоты необходимо сообщить газу, чтобы он при расширении совершил работу ΔA? Теплообменом газа с окружающей средой пренебречь.

Решение.

Считая, что нагревание газа в цилиндре происходит достаточно медленно, можно утверждать, что давление p газа в цилиндре остается неизменным.

Поэтому работу газа можно найти из соотношения: $\Delta A = p\Delta V$, где ΔV − изменение объема газа. При изобарическом изменении объема ν молей газа, согласно уравнению Менделеева – Клапейрона, его температура должна измениться на величину

$$\Delta T = p\Delta V/(\nu R),$$

где R – газовая постоянная. Учитывая, что при изобарическом процессе молярная теплоемкость идеального одноатомного газа равна $2{,}5R$, получим, что искомое количество теплоты равно

$$\Delta Q = (5/2)\nu R\Delta T = (5/2)\Delta A.$$

Ответ: $\Delta Q = (5/2)\Delta A$.

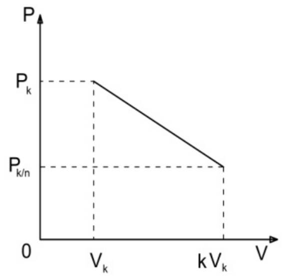
Задача № 8. Давление моля идеального одноатомного газа уменьшают с увеличением объема по линейному закону так, что в конечном состоянии его давление уменьшилось в n раз, а объем увеличился в k раз. Найти отношение суммарного количества переданного газу тепла к приращению его температуры при переходе газа из исходного состояния в конечное.

Решение.

Абсолютная температура T моля идеального газа, заполняющего объем V под давлением p, согласно уравнению Клапейрона – Менделеева, равна $T = pV/R$, где R – газовая постоянная. Поэтому разность температур газа в конечном и начальном состояниях должна быть равна

$$\Delta T = (p_н V_н/R)(k/n - 1),$$

где $p_н$ и $V_н$ — давление и объем газа в исходном состоянии. Поскольку внутренняя энергия моля идеального одноатомного газа равна $W = (3/2)RT$, то ее изменение при рассматриваемом процессе равно $\Delta W = (3/2)R\Delta T$. Количество теплоты ΔQ, переданное газу при изменении его состояния, согласно первому закону термодинамики, превышает изменение его внутренней энергии на величину совершенной газом работы, которую можно найти с помощью pV-диаграммы данного процесса, показанного на рисунке.



Действительно, силы, действующие на стенки сосуда со стороны газа при квазиравновесном изменении его состояния, направлены перпендикулярно стенкам. Поэтому работа газа при изменении его объема на величину ΔV при постоянном давлении p равна $\Delta A = p\Delta V$. На основании этого можно утверждать, что работа газа при квазиравновесном изменении давления определяется площадью pV-диаграммы, ограниченной графиком $p(V)$, перпендикулярами, восстановленными к оси V в точках, соответствующих начальному и конечному объему газа, и осью V. Используя формулу для вычисления площади трапеции, получим

$$A = p_{н}V_{н}(k - 1)(n + 1)/(2n).$$

Таким образом, искомое отношение

$$\Delta Q/\Delta T = \{(k - 1)(n + 1)/(2(k - n)) + 1{,}5\}R.$$

Отметим, что искомое отношение можно рассматривать как среднюю молярную теплоемкость газа. Если температуры газа в начальном и конечном состояниях одинаковы (что будет иметь место при $n = k$), то, как следует из полученного выражения, средняя теплоемкость получается равной бесконечности, как и теплоемкость тела при изотермическом нагревании.

Ответ: $\Delta Q/\Delta T = \{(k - 1)(n + 1)/(2(k - n)) + 1{,}5\}R$.

Задача № 9. Давление моля одноатомного газа в объеме V_1 равно p_1. Из этого состояния газ изобарически переводят в состояние 2, увеличив объем в $n = 2$ раза. Затем объем газа увеличивают еще в $k = 1{,}5$ раза так, что его давление уменьшается по линейному закону с ростом объема и становится в kn раз меньше p_1. Найти изменение внутренней энергии газа при переходе из состояния 2 в состояние 3.

Решение.

Поскольку произведение занимаемого газом объема на его давление в состоянии 1 по условию задачи равно соответствующему произведению в состоянии 3 и количество газа – 1 моль – остается неизменным, то температуры газа в этих состояниях, согласно уравнению Клапейрона – Менделеева, должны быть равны:

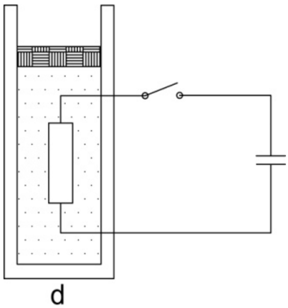
$$T_1 = T_3 = p_1V_1/R.$$

Учитывая, что в состояние 2 газ переводят из состояния 1 изобарически и объем газа в состоянии 2 в n раз больше, чем в состоянии 1, температура газа во втором состоянии $T_2 = nT_1$. Внутренняя энергия моля одноатомного идеального газа, как известно, равна $W = (3/2)RT$, где R – газовая постоянная. Поэтому искомое изменение внутренней энергии газа при переводе его из состояния 2 в состояние 3 равно

$$\Delta W = (3/2)R(T_3 - T_2) = (3/2)(1 - n)p_1V_1/R = -(3/2)p_1V_1.$$

Ответ: $\Delta W = -(3/2)p_1V_1$.

Задача № 10. Вертикально расположенная цилиндрическая теплоизолированная трубка диаметром $d = 1$ см, закрытая подвижным невесомым поршнем, содержит идеальный одноатомный газ. Внутри трубки содержится резистор с большим сопротивлением, соединенный через ключ с конденсатором емкостью $C = 1$ мкФ, заряженным до напряжения $U = 200$ В. Подводящие провода имеют ничтожно малое сопротивление и не нарушают герметичность трубки. На какое расстояние h поднимется поршень после замыкания ключа и установления теплового равновесия? Атмосферное давление $p_o = 10^5$ Па.



Решение.

При разрядке конденсатора в резисторе выделится количество тепла, равное первоначальной энергии конденсатора:

$$Q = CU^2/2.$$

Поскольку давление газа в трубке постоянно и равно p_o,

$$Q = (5/2)\nu R\Delta T,$$

где ν – количество газа, ΔT – изменение его температуры. Из уравнения изобарного процесса следует, что

$$\nu R\Delta T = p_o\Delta V,$$

где $\Delta V = h\pi d^2/4$ – изменение объема газа.

Объединяя записанные выражения, получаем

$$h = 4CU^2/(5p_o\pi d^2) \approx 1 \text{ мм}.$$

Ответ: $h \approx 1$ мм.

Задача № 11. Спираль, сопротивление которой $r = 9$ Ом, помещена в замкнутый сосуд. Сосуд содержит идеальный одноатомный газ, который занимает объем $V = 6$ л. В течение времени $t = 1$ мин по спирали пропускали постоянный ток, после чего давление возросло на величину $\Delta p = 6 \times 10^4$ Па. Найти силу тока I.

Решение.

По закону Джоуля – Ленца количество теплоты, выделяющееся в спирали за время t, равно

$$Q = I^2rt.$$

Эта теплота идет на нагрев газа, происходящий при постоянном объеме:

$$Q = (3/2)\nu R\Delta T,$$

где ν – количество газа, R – универсальная газовая постоянная, ΔT – изменение температуры газа. Из уравнения изохорного процесса следует, что $\Delta pV = \nu R\Delta T$.

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$I = \sqrt{\{3V\Delta p/(2rt)\}} = 1 \text{ А}.$$

Ответ: $I = 1$ А.

Задача № 12. В гладком вертикальном цилиндре под подвижным поршнем площадью S и массой M в объеме V содержится газ при температуре T. На сколько увеличится температура газа, если на его нагревание затратить количество теплоты Q, атмосферное давление $p_о$, а теплоемкость газа при изохорическом процессе равна C_V?

Решение.

Из условия задачи следует, что масса газа m и его давление остаются постоянными, причем

$$p = p_о + Mg/S.$$

Пусть в исходном состоянии объем газа V_1, а после нагревания − V_2. Тогда согласно уравнению Клапейрона – Менделеева:

$$V_1 = mRT/(Mp), \quad V_2 = mR(T + \Delta T)/(Mp).$$

Поэтому $V_2 - V_1 = mR\Delta T/(Mp)$.

На основании первого закона термодинамики, количество теплоты Q, полученное газом, расходуется на изменение его внутренней энергии ΔU и на совершение работы $\Delta A = p\Delta V$:

$$Q = \Delta U + p\Delta V = C_V\Delta T + mR\Delta T/M.$$

Откуда изменение температуры

$$\Delta T = Q/(C_V + mR/M) = QT/(C_VT + (p_о + Mg/S)V).$$

Задача № 13. Моль идеального газа нагревается при постоянном давлении, а затем при постоянном объеме переводится в состояние с температурой, равной начальной температуре $T_о = 300$ К. Оказалось, что в итоге газу передано количество теплоты $Q = 5000$ Дж. Во сколько раз изменился объем, занимаемый газом? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

Решение.

По условию задачи конечная температура газа равна начальной $T_о$. Это означает, что внутренняя энергия газа не изменилась, а все подведенное количество теплоты Q пошло на совершение газом работы A по расширению во время нагревания при постоянном давлении $p_о$ (при изохорном охлаждении работа газа равна нулю):

$$Q = A = p_о(V - V_о) = p_оV_о(V/V_о - 1) = RT_о(V/V_о - 1).$$

Отсюда отношение объемов равно

$$V/V_о = Q/(RT_о) + 1 \approx 3.$$

Ответ: объем газа увеличился приблизительно в 3 раза.

Задача № 14. В цилиндрическом сосуде, разделенном свободно перемещающимся поршнем на две части, в каждой части находится по одному молю идеального одноатомного газа. Температура газа в левой части сосуда поддерживается постоянной. Найдите теплоемкость газа в правой части сосуда при таком положении поршня, когда он делит сосуд пополам. Поршень тепла не проводит.

Решение.

Состояние 1 моля идеального газа в правой части сосуда в начальный момент описывается уравнением Менделеева − Клапейрона:

$$p_1V_1 = RT_1.$$

Здесь и в дальнейшем индекс «1» будет относиться к параметрам газа в правой части сосуда, а «2» − в левой.

Когда мы подведем к правой части сосуда небольшое количество теплоты ΔQ, параметры газа изменятся, но по-прежнему будут удовлетворять уравнению состояния:

$$(p_1 + \Delta p_1)(V_1 + \Delta V_1) = R(T_1 + \Delta T_1).$$

Вычитая одно равенство из другого, получим:

$$p_1\Delta V_1 + V_1\Delta p_1 + \Delta p_1\Delta V_1 = R\Delta T_1.$$

Как обычно, предполагая, что в проводимом нами процессе все параметры газа изменяются на малую величину

$$\Delta T_1 << T_1, \quad \Delta p_1 << p_1, \quad \Delta V_1 << V_1,$$

мы можем пренебречь малым членом $\Delta p_1\Delta V_1$ по сравнению с другими и записать:

$$p_1\Delta V_1 + V_1\Delta p_1 = R\Delta T_1. \qquad (1)$$

Аналогичное выражение мы можем получить и для 1 моля газа в левой части сосуда:

$$p_2\Delta V_2 + V_2\Delta p_2 = 0. \qquad (2)$$

По определению теплоемкость

$$C = \Delta Q/\Delta T.$$

Используя первое начало термодинамики, для газа в правой части сосуда можно записать:

$$\Delta Q = C\Delta T_1 = \Delta U_1 + p_1\Delta V_1,$$

или

$$C\Delta T_1 = (3/2)R\Delta T_1 + p_1\Delta V_1.$$

Поскольку давления в обеих частях сосуда все время остаются равными:

$$p_1 = p_2 = p \quad \text{и} \quad \Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p,$$

а изменения объемов связаны очевидным соотношением

$$\Delta V_1 = -\Delta V_2$$

из равенств (1) и (2) легко получить, что

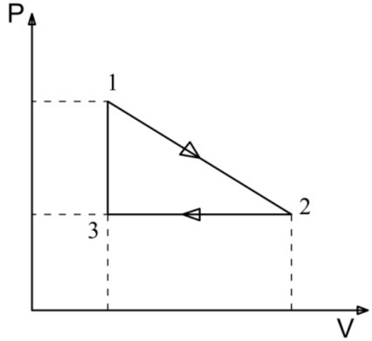
$$p_1\Delta V_1 = R\Delta T_1/(1 + V_1/V_2),$$

и, следовательно:

$$C = (3/2)R + R/(1 + V_1/V_2).$$

В момент, когда поршень делит сосуд пополам, $V_1 = V_2$, откуда $C = (3/2)R + R/2 = 2R$.

Задача № 15. Идеальный газ расширяется до удвоенного объема в процессе 1−2 с линейной зависимостью давления от объема (рис.). Затем его изобарически сжимают в процессе 2–3 до первоначального объема. Найдите отношение работ, совершенных газом в процессах расширения и сжатия. Известно, что температуры в состояниях 1 и 2 одинаковы.



Решение.

Пусть

$$V_1 = V_3 = V, \quad V_2 = 2V, \quad p_2 = p_3 = p.$$

Тогда из условия $T_1 = T_2$ получаем, что $p_1 = 2p$.

Считая работу на участке 1−2 как площадь заштрихованной на рисунке трапеции:

$$A_{12} = (p_1 + p_2)(V_2 - V_1)/2 = (p + 2p)V/2 = 3pV/2$$

и имея очевидное

$$A_{23} = -pV,$$

получаем

$$A_{12}/A_{23} = -3/2.$$

Задача № 16. В цилиндре под поршнем находится смесь ν молей жидкости и ν молей ее насыщенного пара при температуре $T_о$. При медленном изобарическом нагреве содержимого цилиндра к нему подвели количество теплоты Q, и температура внутри цилиндра увеличилась на ΔT. Найдите изменение внутренней энергии содержимого цилиндра. Объемом жидкости можно пренебречь.

Решение.

Процесс состоит из двух этапов. На первом происходит испарение жидкости при неизменной температуре $T_о$. При этом объем насыщенного пара увеличивается вдвое, и совершается работа

$$A_1 = p\Delta V_1 = pV_1 = \nu RT_о,$$

где V_1 − объем, занимаемый молями насыщенного пара.

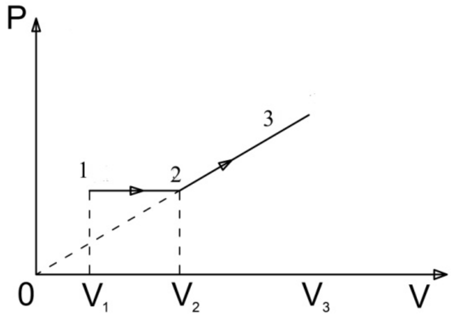
На втором этапе происходит изобарический нагрев 2ν молей пара, и совершается работа

$$A_2 = p\Delta V_2 = 2\nu R\Delta T.$$

Из первого начала термодинамики изменение внутренней энергии содержимого цилиндра равно

$$\Delta U = Q - A = Q - (A_1 + A_2) = Q - \nu RT_o - 2\nu R\Delta T.$$

Задача № 17. Моль идеального одноатомного газа расширяется сначала в изобарическом процессе, а затем в процессе с линейной зависимостью давления от объема (рис.). Известно, что $V_2/V_3 = V_3/V_2$, а прямая 2−3 проходит через начало координат. Найдите отношение объемов V_2/V_1, если количество теплоты Q_{12}, подведенное к газу на участке 1−2, в четыре раза меньше работы A_{23}, совершенной газом на участке 2−3.



Решение.

Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты

$$Q_{12} = \Delta U + p\Delta V = (3/2)R(T_2 - T_1) + p(V_2 - V_1) = (5/2)RT_2(\alpha - 1)/\alpha,$$

где $\alpha = V_2/V_1 = V_3/V_2$.

Работа газа на участке 2−3 равна

$$A_{23} = (p_2 + p_3)(V_3 - V_2)/2 = RT_2(\alpha^2 - 1)/2.$$

По условию задачи 4

$$A_{23} = Q_{12},$$

откуда получаем $\alpha = V_2/V_1 = V_3/V_2 = 4$.

Очевидно, что второй корень квадратного уравнения ($\alpha = 1$) не отвечает условию задачи.

Задача № 18. Гелий (He) и водород (H_2) находятся в теплоизолированном цилиндре под поршнем. Объем, занимаемый смесью газов, $V_o = 1$ л, давление $p_o = 37$ атм. При адиабатическом расширении смеси относительное уменьшение температуры составило 75%. Найдите работу, совершенную при этом смесью газов, если масса водорода в 1,5 раза больше массы гелия. Внутренняя энергия моля гелия равна $U_1 = (3/2)RT$, водорода − $U_2 = (5/2)RT$, где T − абсолютная температура, R − газовая постоянная. Молярные массы гелия и водорода равны соответственно $M_1 = 4$ г/моль и $M_2 = 2$ г/моль.

Решение.

Молярная масса водорода вдвое меньше молярной массы гелия, поэтому число молей водорода втрое больше числа молей гелия:

$$\nu_2 = 3\nu_1.$$

Так как процесс расширения смеси адиабатический, согласно закону сохранения энергии, работа, совершенная в этом процессе, равна уменьшению внутренней энергии смеси:

$$A = -(3R\nu_1/2 + 5R\nu_2/2)(T - T_о),$$

где $T_о$ и T − начальная и конечная температуры смеси.

Для начального состояния можно записать

$$p_оV_о = (\nu_1 + \nu_2)RT_о.$$

Таким образом,

$$A = -p_оV_о(3/2 + \nu_2/(\nu_1 + \nu_2))(T - T_о)/T_о = 6250 \text{ Дж}.$$

Задача № 19. В модели «адиабатической» атмосферы температура воздуха меняется с высотой h по линейному закону $T(h) = T(0) - 2Mgh/(7R)$, где $T(0)$ − температура у поверхности Земли, $M = 29$ г/моль − средняя молярная масса воздуха, $g = 9{,}8$ м/с^2 − ускорение свободного падения, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) − газовая постоянная. В той же модели температура $T(h)$ и плотность $\rho(h)$ на высоте h связаны с температурой $T(0)$ и плотностью $\rho(0)$ у поверхности Земли формулой $T^5(h)/\rho^2(h) = T^5(0)/\rho^2(0)$. Найдите массу воздуха, содержащегося в объеме 1 л на высоте Эльбруса $h = 5{,}5$ км. Воздух у поверхности Земли находится при нормальных условиях.

Указание: для $x << 1$ справедлива формула $(1 - x)\alpha = 1 - \alpha x$.

Решение.

Из условия следует, что

$$\rho(h) \text{ и } \rho(0)$$

связаны формулой

$$\rho(h) = \rho(0)(1 - 2Mgh/(7RT(0)))^{5/2}.$$

Численная оценка показывает, что величина

$$2Mgh/(7RT(0)) = 0{,}2$$

мала, так что можно воспользоваться указанным приближением.

Окончательно получим

$$\rho(h) = \rho(0)(1 - 5 \cdot 0{,}2/2) = 0{,}65 \text{ г/л},$$

где

$$\rho(0) = 1{,}29 \text{ г/л}.$$

Задача № 20. В вакуумной теплоизолированной камере находятся два пузыря одинаковых размеров, один из которых наполнен гелием, а другой водородом, оба до давления $p_о$. Найдите отношение давления, установившегося в камере после того, как пузыри лопнули, к начальному давлению газа в пузырях. Отношение температуры гелия к температуре водорода составляет $T_1/T_2 = 0{,}6$.

Молярная теплоемкость гелия при постоянном объеме равна $C_{V1}= (3/2)R$, водорода − $C_{V2} = (3/2)R$, где R − газовая постоянная. Объем пузыря в 160 раз меньше объема камеры. Изменением поверхностной энергии пленок при разрыве пузырей пренебречь.

Решение.

Число молей гелия в первом пузыре равно

$$\nu = p_o V_o/(RT_1),$$

где V_o − объем пузыря.

Во втором пузыре число нолей водорода равно соответственно

$$\nu = p_o V_o/(RT_2).$$

После того как пузыри лопнут и в камере установится равновесное состояние, смесь гелия и водорода будет иметь некоторую температуру T и давление p.

Температуру смеси можно найти по закону сохранения энергии:

$$\nu_1 C_{V1}(T - T_1) = \nu_2 C_{V2}(T_2 - T),$$

откуда

$$T = (\nu_1 C_{V1} T_1 + \nu_2 C_{V2} T_2)/(\nu_1 C_{V1} + \nu_2 \mathrm{C}_{V2}).$$

Новое установившееся давление смеси будет складываться из давлений гелия и водорода

$$p = \nu_1 RT/V + \nu_2 RT/V,$$

где V − объем камеры. После подстановки выражений для ν_1, ν_2 и T получим

$$p = p_o V_o(C_{V1} + C_{V2})(1 + T_1/T_2)/(V(C_{V1} + C_{V2}T_1/T_2)) = (32/15)p_o V_o/V.$$

Отсюда

$$p/p_o= 32V_o/(15V) = 1/75.$$

Задача № 21. Моль гелия сжимают в адиабатическом процессе так, что относительные изменения давления $\Delta p/p$, объема $\Delta V/V$ и температуры $\Delta T/T$ газа малы. Найти относительное изменение давления газа, если над ним была совершена работа A = 15 Дж. Начальная температура газа T = 300 К.

Решение.

Запишем уравнение Менделеева − Клапейрона

$$PV = RT \qquad (1)$$

в приращениях (считаем, что состояние гелия незначительно изменилось)

$$p\Delta V + V\Delta p = R\Delta T. \qquad (2)$$

Из первого начала термодинамики в случае адиабатического процесса следует, что

$$\delta Q = \Delta A + \delta U, \quad \text{или} \quad 0 = p\Delta V + C_V\Delta T. \qquad (3)$$

Работа, совершаемая газом,

$$A_1 = p\Delta V.$$

Тогда из уравнения (2) следует, что

$$V\Delta p/p = (R\Delta T - A_1)/p. \qquad (4)$$

Выразив p из уравнения (1) и подставив в (2), получим

$$\Delta p/p = \Delta T/T - A_1/(RT). \qquad (5)$$

Согласно (3), работа газа равна

$$p\Delta V = A_1 = -CV\Delta T,$$

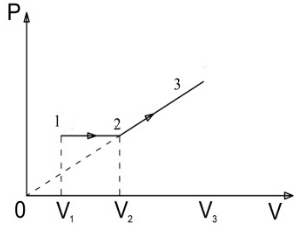
откуда

$$\Delta T = -A_1/C_V.$$

Учитывая, что $A = -A_1$, окончательно получаем

$$\Delta p/p = A(CV + R)/(RTC_V) = AC_P/(RTC_V) = 0{,}01.$$

Задача № 22. Идеальный одноатомный газ, количество вещества которого постоянно, переводят из начального состояния (1) в конечное состояние (3) так, что на участке 1 → 2 давление остается постоянным, а на участке 2 → 3 давление прямо пропорционально объему. Известно, что $V_2 = 3V_1$, а $V_3 = 2V_2$, а на участке 1 → 2 изменение внутренней энергии газа составило ΔU = 30 кДж. Определите работу A, совершенная силой давления газа на участке 2 → 3.



Решение.

Работа, совершенная силой давления газа на участке 2 → 3, численно равна площади под графиком − площади трапеции

$$S = (p_1 + p_2)/2 \times (V_3 - V_2) = (p_1 + p_2)/2(2V_2 - V_2) = (p_1 + p_2)/2V_2 =$$
$$= (p_1 + p_2)/2 \cdot 3V_1, \qquad (1)$$

где p_2 − давление в точке 3.

Так как на участке 2 → 3 давление прямо пропорционально объему

$$p_2/V_3 = p_1/V_2, \quad \text{или} \quad p_2 = p_1V_3/V_2 = p_1 2V_2/V_2 = 2p_1. \qquad (2)$$

Перепишем формулу (1) с учетом (2)

$$A = S = (p_1 + 2p_1)/2 \cdot 3V_1 = (9/2)p_1V_1. \qquad (3)$$

На участке 1 → 2 изменение внутренней энергии газа ΔU = 30 кДж, тогда

$$\Delta U = (3/2)p_1\Delta V = (3/2)p_1(V_2 - V_1) = (3/2)p_1(3V_1 - V_1) = 3p_1V_1.$$

Откуда

$$p_1V_1 = \Delta U/3. \qquad (4)$$

Сделаем замену (4) в (3)

$$A = (9/2)\Delta U/3 = (3/2)\Delta U.$$

Вычислим искомую работу

$$A = (3/2)30 \text{ кДж} = 45 \text{ кДж}.$$

Ответ: A = 45 кДж.

Задача № 23. Определите максимальное значение внутренней энергии U_{max} газа в процессе, при котором газ, переводят из состояния с параметрами p_1 = 30,0 кПа и V_1 = 4,00 л в состояние с параметрами p_2 =10,0 кПа и V_2 = 12,0 л так, что зависимость давления газа от его объема является линейной ($p = aV + b$). Считать, что количество вещества в этом процессе остается постоянным.

Решение.

Внутренняя энергия – функция температуры:

$$U = (3/2)\nu RT.$$

Максимальное значение внутренней энергии определяется максимальной температурой. Для ответа на вопрос задачи найдем максимальную температуру при этом переходе. Есть несколько способов определения температуры.

1 способ.

Согласно уравнению Менделеева – Клапейрона

$$pV = \nu RT.$$

Значит, следует отыскать наибольшее значение произведения давления на объем pV в ходе процесса.

Воспользуемся математическим утверждением: если прямая лежит в плоскости xOy и проходит через точки (x_o, 0) и (0, y_o), то ее уравнение имеет вид

$$(x/x_o) + (y/y_o) = 1.$$

Тогда для нашего случая

$$(V/V_o) + (p/p_o) = 1,$$

где p_o= 40 кПа, при V = 0, V_o = 12 л, при p = 0.

Если сумма двух положительных величин постоянна, их произведение максимально, когда эти величины равны друг другу. Следовательно, pV максимально при условии $(V/V_o) = (p/p_o) = 1/2$, что будет соответствовать

$$T_{max} = pV/(\nu R) = (1/4)p_oV_o/(\nu R) = 160/(\nu R). \quad (1)$$

Максимальная внутренняя энергия будет равна

$$U_{max} = (3/2)\nu RT_{max}.$$

После замены (1), получим

$$U_{max} = (3/2)\nu R160/(\nu R) = (3/2)160 = 240 \text{ Дж}.$$

2 способ.

Уравнение прямой $p = aV + b$, или, после замены $p = \nu RT/V$, имеем $T = aV^2/(\nu R) + bV/(\nu R)$.

После нахождения производной и приравнивания ее к нулю, с учетом того, что при p = 0, $V_o = -(b/a)$; при V = 0, $p_o = b$.

Тогда при объеме $V = V_o/2$ и давлении $p = p_o/2$, имеем максимальную температуру равную

$$T_{max} = pV/(\nu R) = (1/4)p_oV_o/(\nu R) = 160/(\nu R). \quad (1)$$

Далее, как и в пункте 1, находим внутреннюю энергию.

Примечание:

• можно не находить производную уравнения прямой, а исследовать функцию методом дискриминантов.

• на тестировании самым оптимальным вариантом будет знание того, что максимальной температуре будет соответствовать середина отрезка прямой.

Тогда $p = (p_1 + p_2)/2 = 20$ кПа, а $V = (V_1 + V_2)/2 = 8$ л. Максимальная температура будет равна

$$T_{max} = pV/(\nu R) = 160/(\nu R). \quad (1)$$

И, максимальная внутренняя энергия равна 240 Дж.

Ответ: $U_{max} = 240$ Дж.

Задача № 24. При соблюдении необходимых предосторожностей вода может быть переохлаждена до температуры $t_1 = -10$°С. Сколько льда образуется из такой воды массой $m_о = 1$ кг, если в нее бросить кусочек льда и этим вызвать замерзание воды? Какую температуру должна иметь переохлажденная вода, чтобы она целиком превратилась в лед? Удельная теплоемкость переохлажденной воды $c_в = 4{,}19$ кДж/(кг · К), льда $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг · К). Удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг.

Решение.

Чтобы вода замерзла при охлаждении, в ней должны находиться неоднородные включения − центры кристаллизации, около которых начинается рост кристалликов льда.

При отсутствии центров кристаллизации воду можно охладить до температуры значительно ниже 0°С. Такая вода называется переохлажденной. Если в переохлажденной воде искусственно создать центры кристаллизации, в ней начнет образовываться лед. Молекулы станут переходить в состояние, соответствующее минимуму их потенциальной энергии. Уменьшение потенциальной энергии одной части молекул воды, образующих лед, вызывает увеличение теплового движения остальных молекул, которое регистрируется нами как нагревание воды. По условию задачи можно пренебречь взаимодействием переохлажденной воды с окружающей средой, поэтому в результате частичной кристаллизации воды в ней произойдет только перераспределение энергии. Полная внутренняя энергия останется неизменной, и, следовательно, уменьшение потенциальной энергии части молекул приведет к соответствующему увеличению кинетической энергии хаотического движения − повышению температуры системы.

Задача сводится к составлению уравнения теплового баланса при условии, что $Q = 0$, $A = 0$ с учетом агрегатного превращения. При образовании из переохлажденной воды льда массой m_2 потенциальная энергия молекул уменьшится на величину

$$\Delta U_1 = \lambda m_2.$$

Эта энергия частично пойдет на нагревание образовавшегося льда от начальной температуры t_1 до температуры $t_о$ = 0°С и частично на нагревание оставшейся после кристаллизации воды массой m_1 на $t_о - t_1$ (дальнейшее нагревание невозможно, так как при 0°С кристаллизация воды прекратится). Таким образом, вследствие нагревания внутренняя энергия теплового движения молекул увеличится на

$$\Delta U_2 = c_л m_2(t_о - t_1) + c_в m_1(t_о - t_1).$$

По закону сохранения энергии $\Delta U_1 = \Delta U_2$, поэтому уравнение теплового баланса будет иметь вид:

$$\lambda m_2 = c_л m_2(t_о - t_1) + c_в m_1(t_о - t_1). \qquad (1)$$

Кроме того,

$$m_1 + m_2 = m_о. \qquad (2)$$

Из соотношений (1)−(2) находим массу образовавшегося льда:

$$m_2 = c_в(t_о - t_1)m_о/(\lambda + (c_в - c_л)(t_о - t_1));$$

$m_2 \approx 0{,}12$ кг.

Чтобы замерзла вся переохлажденная вода, энергия, выделившаяся при кристаллизации, должна полностью пойти на нагревание образовавшегося льда, т. е.

$$\lambda m_о = c_л m_о(t_о - t_х),$$

где $t_х$ − начальная температура переохлажденной воды.

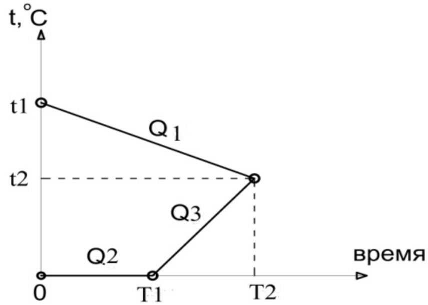
Из последнего уравнения находим:

$$t_х = -\lambda/c_л; \quad t_х = -160^\circ\text{C}.$$

Задача № 25. Чтобы охладить V = 4,5 л воды от температуры t_1 = 30°С до t_2 = 10°С, в воду бросают кусочки льда при температуре t_3 = 0°С. Найти массу льда, необходимого для охлаждения воды. Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3, удельная теплоемкость воды c = 4190 Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Решение.

Построим качественный график зависимости температуры от времени.



Для охлаждения воды необходимо у нее забрать количество теплоты Q_1. Для плавления льда и последующего его нагревания до температуры t_2, необходимо сообщить количество теплоты, равное сумме Q_2 и Q_3. Составим уравнение теплового баланса

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0,$$

или

$$cm_в(t_2 - t_1) + \lambda m_л + cm_л(t_2 - t_о) = 0.$$

В этом уравнении $m_в = \rho V$. С учетом последнего выразим искомую массу льда

$$m_л = -c\rho V(t_2 - t_1)/(\lambda + c(t_2 - t_о)).$$

Перепишем последнюю формулу с учетом того, что $t_о = 0°C$, а значение –

$$(t_2 - t_1) = t_1 - t_2.$$

$$m_л = c\rho V(t_1 - t_2)/(\lambda + ct_2).$$

Подставим численные значения

$$m_л = 4190 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot (30 - 10)/(3{,}3 \cdot 10^5 + 4190 \cdot 10) =$$
$$= 1{,}0 \text{ кг}.$$

Задача № 26. Какое количество энергии освобождается при слиянии мелких водных капель радиусом $r = 2\cdot10^{-3}$ мм в одну большую каплю радиусом $R = 2$ мм?

Решение.

Обозначим число мелких капель, которые сливаясь, образуют одну большую каплю, через n. Тогда общая поверхность S всех n малых капель равна

$$S = 4\pi r^2 \cdot n.$$

Поверхность большой капли

$$S_о = 4\pi R^2,$$

откуда количество энергии, выделившейся за счет уменьшения поверхности при слиянии капель

$$\Delta W = \sigma(S - S_о) = 4\pi\sigma(r^2 n - R^2), \qquad (1)$$

где σ − коэффициент поверхностного натяжения.

Число малых капель определим из того соображения, что сумма их объемов равна объему большой капли

$$(4/3)\pi r^3 n = (4/3)\pi R^3,$$

откуда $n = R^3/r^3$.

Подставив в (1)

$$\Delta W = 4\pi\sigma(r^2(R^3/r^3) - R^2) = 4\pi\sigma R^2(R/r - 1).$$

Подставим численные значения

$$\Delta W = 4\cdot3{,}14\cdot0{,}073\cdot(0{,}002)^2(2/0{,}002 - 1) = 3{,}66\cdot10^{-3} \text{ Дж}.$$

Вывод:

1. Таким образом, за счет уменьшения поверхности воды при слиянии мелких капель в одну большую освободится $3{,}66 \cdot 10^{-3}$ Дж. Эта энергия пойдет на нагревание капли.

2. Обратно, при разбивании большой капли на малые происходит увеличение энергии поверхностной пленки, которое влечет за собой некоторое охлаждение капель.

4. ВЛАЖНЫЙ ВОЗДУХ И ПАР

Задача № 1. В откачанный сосуд объемом $V = 5$ л поместили $m = 1$ г воды. Найдите давление паров воды в сосуде при температурах $t_1 = 20°C$ и $t_2 = 100°C$. Давление насыщенных паров воды при этих температурах равно соответственно $p_{н1} = 2{,}33$ кПа и $p_{н2} = 100$ кПа.

Решение.

Прежде чем применять уравнение Менделеева – Клапейрона, выясним, будет ли водяной пар насыщенным и если да, то какая часть воды при этом перейдет в газовое состояние.

Начнем с первой температуры. Предположим, что вся жидкость испарилась. Тогда плотность пара будет равна

$$\rho = m/V = 0{,}2 \text{ кг/м}^3.$$

Заглянув в таблицу плотностей насыщенных паров воды при различных температурах, увидим, что при 20°C $\rho_{н1} \approx 0{,}017$ кг/м^3 − наше значение плотности гораздо больше. Это означает, что не вся жидкость испарится и пар над ней будет ненасыщенным. Поэтому давление паров в сосуде будет

$$p_1 = p_{н1} = 2{,}33 \text{ кПа}.$$

Если бы мы сразу применили формулу $p_1 = mRT_1/(MV) \approx 27$ кПа, а это значение давления больше чем в 10 раз давления насыщенного пара при данной температуре.

Очевидно, что при дальнейшем нагревании жидкость продолжает испаряться. При полном ее испарении плотность получившегося пара станет равной вычисленному ранее значению $\rho = 0{,}2$ кг/м^3. Если вновь заглянуть в таблицу плотностей, то увидим, что это произойдет при температуре $t_3 = 70°C$ и давлении, равном давлению насыщенного пара $p_{н3} = 31{,}7$ кПа. Дальнейшее увеличение давления при нагревании от $t_3 = 70°C$ до $t_2 = 100°C$ происходит в соответствии с законом Шарля $p_3/T_3 = p_2/T_2$.

Отсюда окончательно получаем

$$p_2 = p_{н3}T_2/T_3 \approx 34{,}5 \text{ кПа}.$$

Давление пара можно было найти и проще из уравнения Менделеева – Клапейрона

$$p_2 = \rho RT_2/M \approx 34{,}5 \text{ кПа}.$$

Однако применение этой формулы к первому состоянию с температурой $t_1 = 20°C$ без предварительной оценки, показавшей, что пар насыщенный, привело бы к абсурдному результату.

Ответ: $p_1 = 2{,}33$ кПа, $p_2 \approx 34{,}5$ кПа.

Задача № 2. Найти относительную влажность воздуха, если при давлении p и температуре T отношение его плотности к плотности сухого воздуха при том же давлении и температуре равно n, давление насыщенных паров воды при данной температуре равно $p_н$, молярная масса сухого воздуха равна μ, а воды − $\mu_в$.

Решение.

Плотность сухого воздуха, имеющего температуру T и находящегося под давлением p, согласно уравнению Клапейрона − Менделеева, должна быть равна

$$\rho = p\mu/(RT),$$

где R − газовая постоянная.

Поскольку давление влажного воздуха p равно сумме парциальных давлений входящего в него сухого воздуха $p_с$ и паров воды $p_в$, а давление последних (в соответствии с определением относительной влажности, используемом в метеорологии) равно $rp_н$, плотность сухого воздуха в данном влажном может быть найдена из соотношения:

$$\rho_с = (p - rp_н)\mu/(RT).$$

Учитывая, что плотность смеси равна сумме плотностей входящих в ее состав компонент, согласно условию задачи

$$n\rho = \rho_с + \rho_в.$$

Подставляя сюда написанные ранее соотношения, получим, что искомая относительная влажность

$$r = (1 - n)p\mu/[(\mu - \mu_в)p_н].$$

Ответ: $r = (1 - n)p\mu/[(\mu - \mu_в)p_н]$.

Задача № 3. Два баллона, содержащие влажный воздух при $T_н$, соединены тонкой трубкой с закрытым краном. Объемы баллонов равны V_1 и V_2, а относительные влажности воздуха в них – r_1 и r_2, соответственно. Какая относительная влажность воздуха установится в баллонах после открытия крана и нагреве баллонов до температуры $T_к$, если давление насыщенных паров при температурах $T_н$ и $T_к$ равны $p_{нн}$ и $p_{нк}$?

Решение.

Поскольку находящиеся в баллонах пары не являются насыщенными, число молей паров, содержащихся в баллонах, найдем, воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева и определением относительной влажности, применяемым в метеорологии:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 = (r_1V_1 + r_2V_2)p_{нн}/(RT_н),$$

где R – газовая постоянная.

Считая, что после открытия крана объем, занятый влажным воздухом, не изменяется, и, учитывая, что при нагревании давление насыщенных паров увеличивается, и, следовательно, пары не могут конденсироваться, получим, что искомая относительная влажность равна

$$r = p_{нн}T_к(r_1V_1 + r_2V_2)/[p_{нк}T_н(V_1 + V_2)].$$

Ответ: $r = p_{нн}T_к(r_1V_1 + r_2V_2)/[p_{нк}T_н(V_1 + V_2)]$.

Задача № 4. Два баллона соединены тонкой трубкой с закрытым краном. Объемы баллонов одинаковы и равны $V = 1$ л. В первом баллоне находится сухой воздух под давлением $p = 750$ мм рт. ст., а в другой после откачки помещена капелька воды массой $m = 0{,}1$ г. Какое давление установится в баллонах после открытия крана, если температура баллонов постоянна и равна $t = 22°C$, а давление насыщенных паров воды при этой температуре равно $p_н = 20$ мм рт. ст.?

Решение.

После открытия крана воздух из первого баллона начнет перетекать во второй. При этом находящаяся во втором баллоне капля будет испаряться до тех пор, пока либо пары в баллонах не станут насыщенными, либо она полностью не испариться. Для того чтобы определить, какая из этих двух возможностей реализуется, с помощью уравнения Клапейрона – Менделеева найдем массу паров воды в баллонах при условии, что пары являются насыщенными:

$$m_н = 2Vp_н\mu/(RT).$$

Поскольку газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К), молярная масса воды $\mu = 18$ г/моль и $T \approx t + 273$, то $m_н \approx 0{,}02$ г. Таким образом, находившаяся во втором баллоне вода может испариться при заданных условиях лишь частично. Учитывая это и пренебрегая объемом оставшейся сконденсированной воды, получим, что установившееся давление в баллонах должно быть равно

$$p_к = p/2 + p_н = 395 \text{ мм рт. ст.} \approx 53 \text{ Па}.$$

Ответ: $p_к \approx 53$ Па.

Задача № 5. Утром температура воздуха в комнате была равна $T_о$ при относительной влажности $r_о$. Днем воздух нагрелся до температуры T_1, а его относительная влажность стала равна r_1. Насколько изменилась плотность влажного воздуха в комнате, если его давление оставалось неизменным и равным $p_а$, давление насыщенных паров при утренней и дневной температурах равно $p_о$ и p_1, молярная масса воздуха равна μ, а воды – $\mu_в$?

Решение.

Будем считать, как обычно, что к ненасыщенным парам и воздуху применимо уравнение Клапейрона – Менделеева. Тогда масса паров воды, находившихся в комнате утром, должна быть равна

$$m_{во} = r_о p_о \mu_в V/(RT_о),$$

где R – газовая постоянная, а V – объем комнаты.

Поскольку давление влажного воздуха $p_а$ равно сумме давлений паров воды и сухого воздуха, его масса утром должна быть равна

$$m_{со} = (p_а - r_о p_о)\mu V/(RT_о).$$

Написанные соотношения позволяют найти плотность $\rho_о$ влажного воздуха утром в комнате, так как

$$\rho_о = (m_{во} + m_{со})/V.$$

Записав аналогичные выражения для плотности влажного воздуха утром в комнате и днем, найдем, что интересующее нас изменение плотности влажного воздуха в комнате определяется выражением:

$$\Delta\rho = \rho_1 - \rho_o = \mu_в(r_1p_1/(RT_1) - r_op_o/(RT_o)) + \mu[(p_a - r_1p_1)/(RT_1) - (p_a - r_op_o)/(RT_o)].$$

Задача № 6. Вода и водяной пар находятся в цилиндре под поршнем при температуре 110°C. Вода занимает при этом 0,1% объема цилиндра. При медленном изотермическом увеличении объема вода начинает испаряться. К моменту, когда она вся испарилась, пар совершил работу величиной $A = 177$ Дж, а объем, который он занимал, увеличился на $\Delta V = 1{,}25$ л. Найти давление, при котором производился опыт. Сколько воды и пара было в цилиндре в начальном состоянии?

Решение.

Процесс испарения воды происходит при постоянном давлении, так как пар при этом остается насыщенным. Таким образом, работа, совершенная паром к моменту испарения всей воды,

$$A = p_п \Delta V.$$

Отсюда давление пара во время опыта

$$p_п = A/\Delta V = 1{,}5 \text{ атм}.$$

В этом процессе вся вода испарилась и, следовательно, заняла объем ΔV. Для определения количества испарившейся воды $m_в$ воспользуемся уравнением Клапейрона − Менделеева

$$p_п\Delta V = (m_в/\mu)RT = A.$$

Масса испарившейся воды равна

$$m_в = A\mu/(RT) = 1 \text{ г}.$$

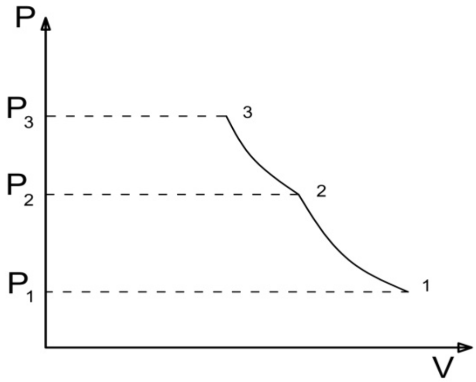
Следовательно, начальный объем цилиндра $V = 1$ л, используя уравнение газового состояния для пара

$$p_п(V - V_в) = (m_п/\mu)RT,$$

и полагая, что $V_в << V$, для массы пара получим

$$m_п = p_п\mu V/(RT) = p_п\mu V\Delta V/(RT\Delta V) = AV\mu/(RT\Delta V) = 0{,}8 \text{ г}.$$

Задача № 7. На рисунке изображена изотерма влажного воздуха. Давление воздуха в точках 1, 2 и 3 равно ρ_1, ρ_2 и ρ_3 соответственно. Определите относительную влажность воздуха в этих точках.



Решение.

Из данной изотермы ясно, что сначала водяной пар, содержащийся в воздухе, ненасыщенный.

В точке 2 он становится насыщенным и остается таким на всем участке 2−3. Таким образом, относительная влажность в точках 2 и 3 равна 100%:

$$\varphi_2 = \varphi_3 = 100\%.$$

Для точки 1 имеем

$$\varphi_1 = p_{н1}\cdot 100/p_{нп} = p_{н1}\cdot 100/p_{н2} = V_1 \cdot 100/V_2 = p_1 \cdot 100/p_2.$$

Задача № 8. При изотермическом сжатии $m = 9$ г водяного пара при температуре $T = 373$ К его объем уменьшился в 3 раза, а давление возросло вдвое. Найдите начальный объем пара.

Решение.

То, что давление пара возросло не втрое, а вдвое, означает, что в результате сжатия пар стал насыщенным и его давление

$$p = 10^5 \text{ Па}.$$

Тогда для параметров пара в начальном состоянии имеем уравнение

$$pV/2 = (m/M)RT,$$

откуда для начального объема получаем

$$V = 2mRT/(Mp) \approx 31\cdot 10^{-3} = 31 \text{ л}.$$

Задача № 9. Легкая подвижная перегородка делит герметичный теплопроводящий сосуд на две неравные части, в которых находится воздух при атмосферном давлении и комнатной температуре. В меньшую часть сосуда впрыснули легко испаряющуюся жидкость, давление насыщенного пара которой при комнатной температуре равно $p_n = 3{,}5$ атм. Спустя некоторое время перегородка перестала двигаться, а жидкость почти вся испарилась. Объем части сосуда, в которой находятся воздух и пары, увеличился при этом вдвое по сравнению с первоначальным. Какую часть объема сосуда составляла вначале его меньшая часть? Объемом, занимаемым жидкостью в начале и в конце опыта, можно пренебречь.

Решение.

В момент, когда перегородка перестала двигаться, давление паров равно давлению насыщенного пара $p_н$.

Из условия механического равновесия перегородки в этот момент имеем

$$p_o V_1/V_1^{/} + p_н = p_o V_2/V_2^{/},$$

где p_o = 1 атм − начальное атмосферное явление, V_1 и $V_1^{/}$ − начальный и конечный объемы меньшей части сосуда, а V_2 и $V_2^{/}$ − большей его части.

Обозначим $V_1^{/} = \alpha(V_1 + V_2)$, $V_1^{/} = 2\alpha(V_1 + V_2)$.

Окончательно получим $\alpha = 3/7$.

Задача № 10. В сосуде находятся водяной пар и вода при температуре 100°С. В процессе изотермического расширения вода начинает испаряться. К моменту, когда она вся испарилась, объем пара увеличился в β = 10 раз. Найдите отношение объемов пара и воды в начале опыта.

Решение.

Процесс идет при постоянном давлении $p = 10^5$ Па.

Пусть в начале опыта объемы пара и воды равны $V_п$ и $V_в$ соответственно. Тогда можно записать

$$pV_п = (m_п/M)RT, \quad p\beta V_п = (m_п + \rho_в V_в)RT/M,$$

где $m_п$ − начальная масса пара, $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль − молярная масса воды, T = 373 К, $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 − плотность воды.

Отсюда отношение объемов пара и воды в начале опыта составляет

$$V_п/V_в = \rho_в RT/(Mp(\beta - 1)) = 191.$$

Задача № 11. Летним днем перед грозой плотность влажного воздуха (масса пара и воздуха в м^3) ρ = 1140 г/м^3 при давлении p = 100 кПа и температуре 30°С. Найти отношение парциального давления водяного пара, содержащегося в воздухе, к парциальному давлению воздуха. Принять, что молярные массы воздуха и пара $\mu_в$ = 29 г/моль, $\mu_п$ = 18 г/моль, газовая постоянная R = = 8,31 Дж/(моль·К).

Решение.

Давление влажного воздуха складывается из парциальных давлений воздуха и пара

$$p = p_в + p_п. \tag{1}$$

Кроме того, очевидно, что плотность влажного воздуха равна

$$\rho = \rho_в + \rho_п. \tag{2}$$

Из уравнений Менделеева − Клапейрона следует, что

$$p_п = \rho_п RT/\mu_п \quad и \quad p_в = \rho_в RT/\mu_в. \tag{3}$$

Для давления p имеем

$$p = (\rho_п/\mu_п + \rho_в/\mu_в)RT. \tag{4}$$

Плотность водяного пара равна

$$\rho_п = \rho - \rho_в.$$

Подставляя $\rho_п$ в уравнение (4), получим

$$p/(RT) = \rho/\mu_в + \rho_в(1/\mu_в - 1/\mu_п),$$

откуда

$$\rho_в = ((p/(RT))\mu_п\mu_в - \rho\mu_в)/(\mu_п - \mu_в) \quad и \quad \rho_п = (\rho\mu_п - (p/(RT))\mu_п\mu_в)/(\mu_п - \mu_в).$$

Из уравнения (3)

$$p_п/p_в = \mu_в\rho_п/(\mu_п\rho_в).$$

Подставляя полученные значения для плотностей воздуха и пара, окончательно получаем

$$p_п/p_в = (1 - p\mu_п/(RT\rho))/(p\mu_в/(RT\rho) - 1) \approx 1/37.$$

Задача № 12. Тонкая пробирка частично заполнена водой и расположена вертикально открытым концом в атмосферу. Вследствие диффузии в пробирке устанавливается линейное изменение концентрации пара с высотой: вблизи поверхности воды пар оказывается насыщенным, а у верхнего открытого конца пробирки его концентрация в 2 раза меньше. Пробирку сверху закрывают крышкой. После установления равновесия оказалось, что плотность влажного воздуха внутри пробирки отличается от плотности сухого атмосферного воздуха вдали от пробирки на $\Delta\rho = 5$ г/м^3. Найдите давление насыщенного пара при температуре опыта $t = 27$°C. Молярная масса воздуха $M_в = 29$ г/моль, молярная масса воды $M_{воды} = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К). Указание. Изменением уровня жидкости в пробирке во время опыта пренебречь.

Решение.

При открытой пробирке общее давление воздуха и пара в любом сечении пробирки равно атмосферному давлению $p_о$. Следовательно, парциальное давление воздуха в пробирке так же, как и давление пара, изменяется с высотой по линейному закону: оно равно $p_о - p_н$ у поверхности воды и $p_о - p_н/2$ у открытого конца пробирки (здесь $p_н$ – искомое давление насыщенного пара).

Очевидно, что среднее (по высоте) давление воздуха будет равно

$$p_{ср} = p_о - (3/4)\rho_н.$$

Массу воздуха в пробирке найдем из уравнения состояния идеального газа:

$$m_в = M_в p_{ср} V/(RT),$$

где V – объем влажного воздуха в пробирке. После того как пробирку закроют, воздух равномерно распределится по высоте, но его общая масса сохранится, а пар во всем объеме будет насыщенным. Установившаяся плотность влажного воздуха равна сумме плотностей воздуха и насыщенного пара:

$$\rho_{вв} = \rho_в + \rho_н.$$

Поскольку

$$\rho_в = m_в/V = M_в p_{ср}/(RT) \quad и \quad \rho_в = M_{вод} p_н/(RT),$$

плотность влажного воздуха равна

$$\rho_{вв} = (M_в p_{ср} + M_{вод} p_н)/(RT) = (M_в(p_о - 3p_н/4) + M_{вод} p_н)/(RT).$$

Плотность сухого атмосферного воздуха составляет

$$\rho_{св} = M_в p_о/(RT).$$

Разность этих плотностей равна

$$\rho_н = 4\Delta\rho RT/(3M_в - 4M_{вод}) = 3{,}32\cdot 10^3 \text{ Па}.$$

Задача № 13. В цилиндре под поршнем находится ненасыщенный водяной пар под давлением $p = 1$ атм. В процессе изобарического сжатия конечный объем, который занимает пар, оказывается в $k = 4$ раза меньше по сравнению с объемом, который он занимал вначале. При этом часть пара сконденсировалась, а объем образовавшейся воды составил $\alpha = 1/1720$ от конечного объема пара. Во сколько раз уменьшилась температура пара в указанном процессе? Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, молярная масса пара $M = 18$ г/моль.

Решение.

В исходном состоянии имеется ненасыщенный водяной пар, который будем рассматривать как идеальный газ. Запишем уравнение состояния данного газа:

$$p_1V_1 = (m_1/M)RT_1,$$

где p – давление, V_1 – объем, m_1 – масса, T – температура пара.

В конечном состоянии мы имеем равновесное двухфазное состояние – вода и насыщенный водяной пар – при температуре $T_2 = 373$ К и том же давлении p. Насыщенный водяной пар также будем считать идеальным газом и запишем его уравнение состояния:

$$pV_2 = (m_2/M)RT_2,$$

где V_2 – объем и m_2 – масса пара в новом состоянии.

Масса образовавшейся воды равна

$$m = \rho\alpha V_2.$$

Закон сохранения количества вещества (H_2O) в цилиндре под поршнем позволяет записать

$$m_1 = m_2 + m,$$

или

$$pV_1M/(RT_1) = pV_2M/(kRT_2) + \rho\alpha V_1/k.$$

Отсюда получаем

$$T_1/T_2 = k/(1 + \rho\alpha RT_2/(Mp)) = 2.$$

Задача № 14. В закрытом баллоне находится смесь газов: водяной пар ($M_1 = 18$ г/моль) и азот ($M_2 = 28$ г/моль). Известо, что парциальное давление водяного пара в четыре раза больше парциального давления азота. Определите молярную массу M смеси.

Решение.

Из уравнения Менделеева – Клапейрона парциальное давление водяного пара

$$p_1V = (m_1/M_1)RT, \quad p_1 = (m_1/(VM_1))RT.$$

Из уравнения Менделеева − Клапейрона парциальное давление азота

$$p_2V = (m_2/M_2)RT, \quad p_2 = (m_2/(VM_2))RT.$$

Отношение давлений, по условию задачи

$$p_1/p_2 = 4 = (m_1/m_2) \cdot (M_2/M_1).$$

Отсюда

$$m_1/m_2 = 4M_1/M_2. \qquad (1)$$

Так как количество вещества в замкнутом объеме сохраняется

$$\nu = \nu_1 + \nu_2,$$

или

$$m/M = m_1/M_1 + m_2/M_2,$$
$$(m_1 + m_2)/M = m_1/M_1 + m_2/M_2.$$

Разделим последнее уравнение на m_2:

$$(m_1/m_2 + 1)/M = m_1/(M_1m_2) + 1/M_2.$$

Выразим искомую молярную массу смеси:

$$M = (m_1/m_2+ 1)/(m_1/(M_1m_2) + 1/M_2).$$

С учетом (1)

$$M = (4M_1/M_2 + 1)/(4/M_2 + 1/M_2) = (4M_1 + M_2)/5.$$

Подставляем численные значения молярных масс:

$$M = (4 \times 18 + 28)/5 = 20 \text{ (г/моль)}.$$

Ответ: молярная масса M смеси равна 20 г/моль.

Задача № 15. Сколько молекул содержится в насыщенном водяном паре массой m = 1 кг и сколько в ненасыщенном водяном паре, имеющем такую же массу? Молярная масса воды $M = 18 \times 10^{-3}$ кг/моль. Постоянная Авогадро $N_A =$ $= 6{,}02 \times 10^{23}$ моль.

Решение.

По условию задачи известна масса насыщенного водяного пара m = 1 кг. Отношение массы вещества к молярной массе дает нам возможность количественного сравнения, определения числа молей вещества:

$$\nu = m/M.$$

С другой стороны такое же количественное сравнение можно получить отношением числа частиц в данной массе к числу частиц, содержащихся в моле вещества − N_A,

$$\nu = N/N_A.$$

Приравняв правые части уравнений

$$m/M = N/N_A.$$

Выразим искомое количество молекул

$$N = mN_A/M.$$

Подставим численные значения

$$N = 1 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}/(18 \cdot 10^{-3}) = 3{,}3 \cdot 10^{25}.$$

Что касается второго вопроса: сколько молекул находится в ненасыщенном водяном паре, имеющем такую же массу? Какая разница, мы находим число молекул в заданной массе водяного пара, а насыщенный он или ненасыщенный, значения не имеет. Так что количество молекул одинаково и в насыщенном и в ненасыщенном паре при условии, что масса одинакова.

Задача № 16. Чему равна абсолютная влажность воздуха в комнате, если плотность водяного пара $\rho = 60$ г/м^3.

Решение.

Абсолютная влажность воздуха − масса водяного пара, содержащаяся в единице объема воздуха, т. е. плотность содержащегося в воздухе водяного пара.

По условию задачи плотность водяного пара $\rho = 60$ г/м^3, следовательно, абсолютная влажность воздуха равна 60 г/м^3.

5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача № 1. В модели «адиабатической» атмосферы температура воздуха меняется с высотой h по линейному закону $T(h) = T(0) - 2Mgh/(7R)$, где $T(0)$ − температура у поверхности Земли, $M = 29$ г/моль − средняя молярная масса воздуха, $g = 9{,}8$ м/с^2 − ускорение свободного падения, $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) − газовая постоянная. В той же модели температура $T(h)$ и плотность $\rho(h)$ на высоте h связаны с температурой $T(0)$ и плотностью $\rho(0)$ у поверхности Земли формулой $T^5(h)/\rho^2(h) = T^5(0)/\rho^2(0)$. Найдите массу воздуха, содержащегося в объеме 1 л на высоте Эльбруса $h = 5{,}5$ км. Воздух у поверхности Земли находится при нормальных условиях.

Указание: для $x << 1$ справедлива формула $(1 - x)\alpha = 1 - \alpha x$.

Задача № 2. Температура гелия уменьшилась в $k = 3$ раза в процессе $pV^2 = const$ (здесь p − давление газа, V − его объем). При этом его внутренняя энергия изменилась на 50 Дж. Найдите: 1) максимальное давление газа p_{max}; 2) объем газа V_2 в конечном состоянии. Минимальное давление газа в этом процессе составило $p_{min} = 10^5$ Па.

Задача № 3. Вертикально расположенной открытой с одного конца в атмосферу трубке легкий подвижный теплонепроницаемый поршень отделяет газообразный гелий (He) от жидкости, налитой поверх поршня. Какое количество теплоты необходимо подвести к гелию, чтобы при движении поршня вверх вся жидкость вылилась из трубки? Объемы, занятые в трубке гелием, жидкостью и атмосферным воздухом, равны $V_o = 0{,}5$ л, $V_o/2$ и $V_o/2$ соответственно. Атмосферное давление $p_o = 10^5$ Па. Давление столба жидкости, первоначально налитой в трубку, равно $p_o/8$.

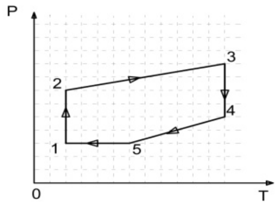
Задача № 4. С идеальным одноатомным газом проводят циклический процесс 1−2−3−1, состоящий из расширения в процессе 1−2, в котором теплоемкость газа оставалась постоянной, адиабатического расширения 2−3 и сжатия в процессе 3−1 с линейной зависимостью давления от объема. $T_1 = T_2/2 = T_3$, $V_3 = 4V_1$. Найдите молярную теплоемкость газа в процессе 1−2, если работа, совершенная газом в цикле, в 15 раз меньше работы, совершенной над газом в процессе 3−1.

Задача № 5. Астронавты, исследуя воздух открытой ими планеты, нагрели порцию воздуха массой $m = 200$ г на $\Delta T = 60$°С один раз при постоянном давлении, а другой − при постоянном объеме. Оказалось, что при постоянном давлении требуется подвести на 1 кДж больше тепла, чем при постоянном объеме. Найдите среднюю молярную массу воздуха, считая его идеальным газом.

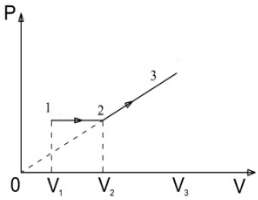
Задача № 6. Теплоизолированный горизонтальный цилиндр с гладкими стенками делится не проводящим теплоту поршнем на два объема, в которых находятся по одному молю гелия при температуре $T_о = 300$ К. В левой части цилиндра на некоторое время включается нагреватель. В результате поршень перемещается, и объем правой части цилиндра уменьшается в 2 раза. Найти количество теплоты Q, переданной газу нагревателем. Известно, что давление p и объем V газа в правой части цилиндра связаны соотношением $p^3V^5 = const$ (адиабатический процесс).

Задача № 7. Определите количество теплоты Q, полученное системой в некотором процессе, если над термодинамической системой совершили работу $A = 10$ Дж, при этом внутренняя энергия системы увеличилась на $\Delta U =$ $= 25$ Дж.

Задача № 8. С одним молем идеального газа провели процесс 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 1, изображенный на pV-диаграмме. На каком участке концентрация n молекул газа была постоянной?



Задача № 9. Идеальный одноатомный газ, количество вещества которого постоянно, переводят из начального состояния (1) в конечное состояние (3) так, что на участке 1 → 2 давление остается постоянным, а на участке 2 → 3 давление прямо пропорционально объему. Известно, что $V_2 = 3V_1$, а $V_3 = 2V_2$, а на участке 1 → 2 изменение внутренней энергии газа составило $\Delta U = 30$ кДж. Определите работу A, совершенную силой давления газа на участке 2 → 3.



Задача № 10. В стальном баллоне содержится 0,2 г водорода и 3,2 г кислорода при температуре 27°С. Водород соединяется с кислородом, и после того, как реакция закончилась, давление внутри баллона увеличилось в три раза. Какова будет при этом температура внутри баллона?

Задача № 11. Электрический утюг с терморегулятором, установленным в положение «шерсть», нагревается до температуры t_1 = 140°С. При этом в установившемся режиме регулятор включает утюг на время τ = 30 с через промежутки времени T_1 = 5 мин. В положении «лен» утюг включается на те же 30 с через более короткие промежутки времени T_2 = 3 мин. Определите температуру утюга при регуляторе, установленном в положение «лен». Температурной зависимостью сопротивления нагревателя пренебречь. Температура в комнате t_o = 20°С.

Задача № 12. В последние годы популярность приобретает катание на воздушных шарах. Воздух в таком шаре нагревается с помощью газового факела, расположенного у отверстия в нижней части шара. Какую температуру должен иметь воздух в шаре, чтобы поднять двух человек? Масса людей, оболочки шара, корзины и баллона с газом составляет m = 420 кг, диаметр шара D = 20 м, температура окружающего воздуха t_o = +17°С, средняя молярная масса воздуха M = 29 г/моль, универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль · К), атмосферное давление $p = 10^5$ Па.

Задача № 13. Резиновый шарик массой m = 2 г надувается гелием при температуре t = 17°С. При достижении в шарике давления p = 1,1 атм он лопается. Какая масса гелия была в шарике, если перед тем, как лопнуть, он имел сферическую форму? Известно, что резиновая пленка рвется при толщине δ = $= 2 \cdot 10^{-3}$ см. Плотность резины ρ = 1,1 г/см^3, молярная масса гелия M = 4 г/моль, универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль·К).

Задача № 14. Цилиндрический колокол для подводных работ высотой h = 2 м опускается вверх дном с борта катера на дно водоема глубиной H = 3 м. Найдите толщину воздушной подушки, образовавшейся у «потолка» колокола к моменту его касания дна водоема. Температуру считайте постоянной.

Задача № 15. Тонкий подвижный теплопроводящий поршень делит герметичный цилиндр на две части. С одной стороны от поршня находится m = 1 г воды, с другой стороны − воздух под давлением p = 0,28 атм. Начальная температура в цилиндре t_1 = 7°С. При медленном нагревании поршень в некоторый момент начинает двигаться, при температуре t_2 = 100°С останавливается и при дальнейшем нагревании остается неподвижным.

1) Какая масса воды находится в начальный момент в газообразном состоянии?

2) Найдите объем цилиндра.

Объемом жидкости можно пренебречь по сравнению с объемом цилиндра. Давление насыщенных паров воды при температуре 20°С равно p_{20} = 0,023 атм. Силу тяжести и трение поршня о цилиндр не учитывать.

Задача № 16. Смесь гелия ($\mu_г$ = 4 г/моль) и кислорода ($\mu_к$ = 32 г/моль) имеет при давлении $p = 10^5$ Па и температуре T = 300 К плотность ρ = 1 кг/м^3.

1) Найдите отношение числа молекул кислорода к числу молекул гелия.

2) Какой станет при том же объеме плотность смеси, если из неё удалить две трети молекул кислорода?

Задача № 17. Сферическая оболочка воздушного шара сделана из материала, квадратный метр которого имеет массу b = 1 кг/м^2. Шар наполнен гелием при нормальном атмосферном давлении. При каком минимальном радиусе шар поднимает сам себя? Температура гелия и температура окружающего воздуха одинаковы и равны 0°С. Молекулярная масса воздуха 29 кг/кмоль, молекулярная масса гелия 4 кг/кмоль.

Задача № 18. Объем воздушного шара равен V = 230 м^3, масса оболочки M = 145 кг. Шар наполнен горячим воздухом при нормальном атмосферном давлении. Какую температуру должен иметь воздух внутри оболочки, чтобы шар начал подниматься? Температура наружного воздуха $t_о$ = 0°С.

Задача № 19. Для удержания на поверхности Земли метеорологического шара-зонда с массой m = 20 кг необходимо приложить силу F = 1000 Н. Шар поднимается до такой высоты, где его объем увеличивается в два раза. Температура воздуха, измеренная на этой высоте с помощью зонда, оказалась равной t = −43°С. Вычислить давление воздуха на этой высоте, если на поверхности Земли давление $p_о$ = 754 мм рт. ст., а температура $t_о$ = +17°С.

Задача № 20. Шар-зонд, наполненный водородом, имеет герметичную оболочку постоянного объема V = 50 м^3. Масса шара вместе с водородом m = 5 кг. Определить, на какую максимальную высоту он сможет подняться, если известно, что атмосферное давление уменьшается в два раза через каждые h = 5 км высоты. Температура в стратосфере t = −60°С. Молекулярная масса воздуха 29 кг/кмоль. Давление у поверхности Земли $p_о$ = 1 атм.

Задача № 21. Нерастяжимая оболочка шара-зонда объема V = 75 м^3 имеет в нижней части небольшое отверстие. Масса оболочки m = 7 кг. Шар наполнен водородом. Определить, на какую максимальную высоту сможет подняться этот шар-зонд, если известно, что атмосферное давление уменьшается в два раза через каждые H = 5 км высоты. Температура воздуха в стратосфере t = −60°С, температура водорода равна температуре окружающего воздуха. Давление у поверхности Земли $p_о$ = 1 атм.

Задача № 22. Температура тела изменилась на $\Delta t = 60°C$, чему равно изменение его температуры ΔT по абсолютной шкале Кельвина?

Задача № 23. Вначале идеальный газ находился при температуре $t_1 = 27°C$, затем его изохорно нагрели до температуры $t_2 = 57°C$? Во сколько раз увеличилось давление газа?

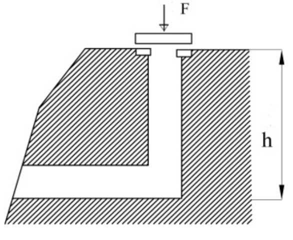
Задача № 24. Когда воздушный шарик заполнили водородом (M_2 = = 2,00 г/моль) под давлением p_2 = 115 кПа, то оказалось, что сила натяжения нити, удерживающей в воздухе (M_1 = 29,0 г/моль) этот воздушный шарик, равна нулю. Температуры водорода и атмосферного воздуха $t_1 = t_2 = 0°C$, атмосферное давление p_1 = 101 кПа. Какой объем V у шарика, если масса тонкой оболочки m = 11,9 г?

Задача № 25. Вертикальный цилиндрический сосуд, закрытый легкоподвижным поршнем массой m_1 = 6,00 кг заполнили гелием (M = 4,00 г/моль) и поместили в воздухе, давление которого p_o = 100 кПа. Когда гелий нагрели на ΔT = 6,00 K, занимаемый им объем увеличился на ΔV. Определите изменение объема ΔV, если масса гелия m_2 = 8,00 г, площадь поперечного сечения поршня S = 30,0 см^2.

Задача № 26. Капелька воды, взвешенная в воздухе, движется со средней квадратичной скоростью $v_{кв}$ = 1,5 мм/с. Радиус капельки $r = 1,1 \cdot 10^{-6}$ м. Определите температуру t воздуха.

Примечание. Объем шара определяется по формуле $V = (4/3)\pi R^3$, плотность воды ρ = 1,0 г/см^3.

Задача № 27. Шахта глубиной h = 229 м пройдена в склоне горы и имеет горизонтальный вход (штольня). Температура наружного воздуха $t_1 = 0°C$, температура воздуха внутри шахты t_2 = 14 °C. Вертикальный ствол шахты имеет сечение S = 3,5 м^2. Давление воздуха (M = 29 г/моль) на уровне горизонтального ствола шахты $p_o = 1,0 \cdot 10^5$ Па. Определите модуль минимальной силы F, которую необходимо приложить к крышке массой m = 35 кг, чтобы герметично закрыть сверху вертикальный ствол шахты.



Задача № 28. Баллончик для приготовления газированной воды имеет объем V = 5 см^3 и содержит углекислый газ под давлением p = 15 атм. Можно ли на технических весах с точностью взвешивания 10 мг заметить разницу в весе полного и пустого баллончиков?

6. ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ

Задача № 1. Из условия следует, что $\rho(h)$ и $\rho(0)$ связаны формулой

$$\rho(h) = \rho(0)(1 - 2Mgh/(7RT(0)))^{5/2}.$$

Численная оценка показывает, что величина

$$2Mgh/(7RT(0)) = 0{,}2$$

мала, поэтому можно воспользоваться указанным приближением.

Окончательно получим

$$\rho(h) = \rho(0)(1 - 5 \cdot 0{,}2/2) = 0{,}65 \text{ г/л},$$

где $\rho(0) = 1{,}29$ г/л.

Задача № 2. 1) Процесс $pV^2 = const$ с учетом уравнения состояния для идеального газа можно записать в переменных p и T в виде $T^2/p = const$.

Отсюда видно, что с уменьшением температуры давление газа также уменьшается. Следовательно, начальное давление гелия было максимальным, а конечное – минимальным. Исходя из этого, можно записать

$$T_1^2/p_{\max} = T_2^2/p_{\min},$$

где T_1 − начальная температура гелия, а T_2 − конечная.

Из этого равенства находим

$$p_{\max} = p_{\min}T_1^2/T_2^2 = k^2 p_{\min} = 9 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

2) Абсолютная величина изменения внутренней энергии гелия равна

$$|\Delta U| = c_V\nu(T_1 - T_2) = c_V\nu T_2(T_1/T_2 - 1) = c_V\nu T_2(k - 1),$$

где $c_V = 3R/2$ − молярная теплоемкость гелия при постоянном объеме, ν − число молей гелия.

Отсюда конечная температура равна

$$T_2 = |\Delta U|/(c_1\nu(k - 1)).$$

Для нахождения объема гелия в конечном состоянии воспользуемся уравнением состояния для идеального газа:

$$p_{\min}V_2 = \nu RT_2,$$

откуда $V_2 = \nu RT_2/p_{\min}$.

Подставляя сюда выражение для T_2, окончательно получаем

$$V_2 = 2|\Delta U|/(3(k - 1)p_{\min}) = 0.$$

Задача № 3. Подведенное к гелию тепло пойдет на изменение внутренней энергии гелия ΔU и на работу A, которую совершит гелий при вытеснении воды из трубки.

Запишем уравнения состояния для гелия в начальном и конечном состояниях:

$$(p_o + p_o/8)V_o = \nu RT_1, \quad p_o 2V_o = \nu RT_2,$$

где ν − число молей гелия, а T_1 и T_2 − температуры гелия в начальном и конечном состояниях.

Изменение внутренней энергии гелия равно

$$\Delta U = C_V\nu(T_2 - T_1) = (21/16)p_oV_o,$$

где $C_V = (3/2)R$ − молярная теплоемкость гелия при постоянном объеме.

Работа, совершенная гелием, равна сумме работы A_1 против силы тяжести и работы A_2 против внешнего атмосферного давления. Найдем сначала работу A_1:

$$A_1 = mgV_o/S - mgV_o/(4S) = (3/4)mgV_o/S.$$

Здесь m − масса жидкости, S − внутренняя площадь поперечного сечения трубки, g − ускорение свободного падения. Поскольку первоначальное давление столба жидкости равно $p_o/8$, можно записать $p_o/8 = mg/S$.

Тогда получим $A_1 = (3/32)p_oV_o$.

Работа против сил внешнего атмосферного давления равна

$$A_2 = p_oV_o.$$

Окончательно, подведенное количество теплоты будет равно

$$Q = \Delta U + A_1 + A_2 = (21/16 + 3/32 + 32/32)p_oV_o = (77/32)p_oV_o = 120 \text{ Дж}.$$

Задача № 4. Пусть

$$T_1 = T_3 = T, \quad T_2 = 2T.$$

Из условия следует, что

$$A_{123} = (16/15)A_{13}.$$

Первое начало для процесса 1−2−3

$$U_1 = 0, \quad U_1 = U_3, \quad Q_{23} = 0$$

дает

$$A_{123} = Q_{123} - \Delta U_{123} = Q_{123} = Q_{12} = \nu c(T_2 - T_1) = \nu cT.$$

Работа A_{13} равна площади трапеции

$$A_{13} = (1/2)(p_1 + p_3)(V_3 - V_1) = (1/2)(p_1 + p_3)3V = (3/2)(p_1V_1 + p_3V_3/4),$$

$$A_{12} = (3/2)(p_1V_1 + p_3V) = (3/2)(\nu RT_1 + \nu RT_3/4) = (15/8)\nu RT.$$

Из условия

$$\nu cT = (16/15)\cdot(15/8)\nu RT$$

находим $c = 2R$.

Задача № 5. Хотя теплоемкости c_p и c_V смеси неизвестных газов найти невозможно, задачу можно решить, воспользовавшись формулой Майера:

$$c_p - c_V = R,$$

$$Q_p = \nu c_p\Delta T,$$

$$Q_V = \nu c_V\Delta T,$$

$$\Delta Q = \nu(c_p - c_V)\Delta T = (m/\mu)R\Delta T,$$

$$\mu = mR\Delta T/(\Delta Q) = 100 \text{ г/моль}.$$

Задача № 6. В начальном состоянии в двух объемах равны p, T, ν, а следовательно, и V. Конечный объем правой части равен $V/2$. Конечное давление находим из уравнения адиабаты:

$$p = p_o2^{5/3}.$$

По первому началу термодинамики тепло равно изменению внутренней энергии всего газа. Так как давления в двух частях цилиндра всегда равны, можно записать:

$$Q = \Delta U = (3/2)(p - p_о)V_{об} = (3/2)(2^{5/3} - 1)p_о V_{об},$$

$$Q = 3(\sqrt[3]{32} - 1)\nu R T_о \approx 16 \text{ кДж}.$$

Задача № 7.

1. Формулировка I закона термодинамики.

Изменение внутренней энергии системы при переходе ее из одного состояния в другое равно сумме работы внешних сил и количества теплоты, переданного системе:

$$\Delta U = A + Q. \qquad (1)$$

2. Формулировка I закона термодинамики.

Количество теплоты, переданное системе, идет на изменение ее внутренней энергии и на совершение системой работы над внешними силами:

$$Q = \Delta U + A'. \qquad (2)$$

Неважно какой формулой вы воспользуетесь, главное понимать, что

$$A = -A'. \qquad (3)$$

A − это работа внешних сил над системой, а A' − работа самой системы.

По условию задачи над термодинамической системой совершили работу A = 10 Дж. Если вы воспользуетесь формулой (1), то в ней как раз и понимается под работой − работа внешних сил, тогда

$$Q = \Delta U - A = 25 \text{ Дж} - 10 \text{ Дж} = 15 \text{ Дж}.$$

Если же вы воспользуетесь формулой (2), то необходимо учесть (3), и

$$Q = \Delta U - A = 25 \text{ Дж} - 10 \text{ Дж} = 15 \text{ Дж}.$$

Задача № 8. Давление идеального газа зависит от температуры как $p = nkT$, где k − постоянная Больцмана, $n = const$ − по условию задачи. Давление пропорционально температуре, этому условию удовлетворяет переход 4 → 5, так как только в этом случае, если продлить отрезок, то его продолжение пройдет через начало координат, что как раз и соответствует пропорциональной зависимости.

Задача № 9. Работа, совершенная силой давления газа на участке 2 → 3, численно равна площади под графиком − площади трапеции

$$S = (p_1 + p_2)/2 \cdot (V_3 - V_2) = (p_1 + p_2)/2 \cdot (2V_2 - V_2) = (p_1 + p_2)/2 \cdot V_2 =$$
$$= (p_1 + p_2)/2 \cdot 3V_1, \qquad (1)$$

где p_2 − давление в точке 3.

Так как на участке 2 → 3 давление прямо пропорционально объему

$$p_2/V_3 = p_1/V_2, \quad \text{или} \quad p_2 = p_1V_3/V_2 = p_1 2V_2/V_2 = 2p_1. \qquad (2)$$

Перепишем формулу (1) с учетом (2)

$$A = S = (p_1 + 2p_1)/2 \cdot 3V_1 = (9/2)p_1V_1. \qquad (3)$$

На участке 1 → 2 изменение внутренней энергии газа $\Delta U = 30$ кДж, тогда

$$\Delta U = (3/2)p_1\Delta V = (3/2)p_1(V_2 - V_1) = (3/2)p_1(3V_1 - V_1) = 3p_1V_1.$$

Откуда

$$p_1V_1 = \Delta U/3. \qquad (4)$$

Сделаем замену (4) в (3)

$$A = (9/2) \cdot \Delta U/3 = (3/2) \cdot \Delta U.$$

Вычислим искомую работу

$$A = (3/2) \cdot 30 \text{ кДж} = 45 \text{ кДж}.$$

Ответ: $A = 45$ кДж.

Задача № 10. Многие считают, что слова «реакция закончилась» означают, что в баллоне образовалось 3,4 г воды. Однако из условия задачи следует, что в баллоне имеется избыток кислорода, так как для образования 1 г-моля воды необходимы 1 г-моль водорода и только 1/2 г-моля кислорода.

Пусть m_1 и m_2 – массы водорода и кислорода, M_1 и M_2 – их молекулярные веса. До реакции в баллоне было m_1/M_1 молей водорода и m_2/M_2 молей кислорода. После реакции в сосуде образовалось m_1/M_1 молей воды (весь водород прореагировал, число молей воды равно числу молей водорода). При этом на образование воды ушло $(1/2)m_1/M_1$ молей кислорода, и, следовательно, в баллоне осталось

$$m_2/M_2 - (1/2)m_1/M_1$$

молей кислорода. Применяя теперь закон газового состояния и закон Дальтона к газам до и после реакции, можно записать:

$$p_1V = (m_1/M_1 + m_2/M_2)RT_1; \quad p_2V = (m_1/M_1 + m_2/M_2 - (1/2)m_1/M_1)RT_2.$$

Следовательно,

$$p_2/p_1 = (T_2/T_1)(1 - m_1/(2M_1)/(m_1/M_1 + m_2/M_2)) =$$
$$= (T_2/T_1)(1 - (0{,}1/2)/0{,}2) = 3T_2/(4T_1).$$

Принимая во внимание, что $p_2/p_1 = 3$, получаем

$$T_2 = 4T_1 = 1200 \text{ R}.$$

Задача № 11. Во втором случае то же количество тепла, что и в первом случае, рассеивается за более короткое время. Скорость теплоотвода пропорциональна разности температур утюга и окружающего воздуха. Следовательно, время охлаждения утюга обратно пропорционально этой разности температур. Запишем это условие:

$$(t_2 - t_o)/(t_1 - t_o) = T_1/T_2.$$

Отсюда получаем, что

$$t_2 = 220°\text{C}.$$

Заметим, что при наличии терморегулятора утюг охлаждается весьма незначительно, обычно на несколько градусов, после чего нагреватель вновь включается. Поэтому, действительно, без заметной погрешности можно считать температуру утюга постоянной.

Задача № 12. По закону Архимеда вес шара mg численно равен выталкивающей силе:

$$mg = (\rho_{сн} - \rho_{вн})Vg,$$

где $\rho_{сн}$ и $\rho_{вн}$ − плотность воздуха снаружи и внутри оболочки объема $V = \pi D^3/6$.

С помощью уравнения состояния $p = \rho RT/M$ находим

$$m = (\rho VM/R)(1/T_{сн} - 1/T_{вн}).$$

Отсюда получаем, что температура внутри шара $T_{вн} \approx 316$ K ≈ 43°C.

Задача № 13. Площадь поверхности шарика равна $4\pi r^2$, объем оболочки $4\pi r^2\delta$, ее масса $m = \rho\cdot 4\pi r^2\delta$.

Масса M заключенного в шарик гелия определяется из уравнения Менделеева − Клапейрона

$$p(4/3)\pi r^3 = (m/M)RT.$$

Решая полученные уравнения совместно, находим

$$M = (\mu mp/(6RT\rho\delta)) \cdot \sqrt{m/(\pi\rho\delta)} \approx 0{,}47 \text{ г}.$$

Задача № 14. Пусть x − толщина воздушной прослойки, когда колокол коснулся дна. Тогда, согласно закону Бойля − Мариотта,

$$p_o h = (p_o + (H - (h - x))\rho g)x.$$

Учитывая, что начальное атмосферное давление p_o равно давлению слоя воды толщиной $H_o = 10{,}5$ м, имеем для определения x квадратное уравнение

$$x^2 + (H + H_o - h)x - H_o h = 0,$$

откуда находим $x = 196$ м.

Характерная ошибка при решении этой задачи состоит в том, что не учитывается давление слоя воды, зашедшей в колокол, и считается конечное давление в нем равным $p_o + \rho gH$.

При малой глубине водоема указанная поправка оказывается заметной величиной.

Задача № 15. 1) Давление насыщенного пара при температуре 7°C меньше давления при температуре 20°C и тем более меньше начального давления воздуха. Поэтому в начальный момент вода прижата поршнем к стенке цилиндра и количество пара равно нулю.

2) Давления и температуры по обе стороны от поршня одинаковы. В этих условиях отношение объемов равно отношению количеств вещества, поэтому поршень движется только тогда, когда испаряется вода, и то, что он остановился при 100°C, означает, что при этой температуре вся вода ($\nu_{пара} = 1/18$) уже испарилась, но пар еще насыщенный ($p_2 = 1$ атм.).

В начальный момент весь объем цилиндра занимает воздух. Из системы $pV = \nu_{воз}RT$,

$$p_2V = (\nu_{воз} + \nu_{пар})RT_2$$

находим

$$p_2V/(RT_2) - pV/(RT) = \nu_{пар},\ V = \nu_{пар}R/(p_2/T_2 - p/T) \approx 2{,}75 \text{ л.}$$

Задача № 16. 1) Пусть в смеси ν молей гелия и $x\nu$ молей кислорода. Тогда масса смеси

$$m = \mu_г\nu + \mu_к x\nu,$$

объем

$$V = (\nu + x\nu)RT/p$$

и плотность

$$\rho = m/V = (\mu_г + \mu_к)xp/((1 + x)RT).$$

Из уравнения

$$(\mu_г + \mu_к)x/(1 + x) = \rho RT/p$$

получаем

$$(4 + 32x) \cdot 10^{-3}/(1 + x) = 1 \cdot 8{,}31 \cdot 300/10^5 \approx 0{,}025,$$
$$(1 + 8x)/(1 + x) = 25/4, \quad x = 3.$$

2) Первоначально в смеси на каждый моль гелия приходилось 3 моля кислорода. Если удалить 2/3 кислорода, то на каждый моль гелия будет приходиться 1 моль кислорода. Поэтому если первоначальную массу смеси принять за $4 + 3 \cdot 32 = 100$ условных единиц, то новая масса смеси составит $4 + 32 = 36$ тех же единиц, во столько же раз изменится и плотность:

$$\rho_1 = 0{,}36\rho = 0{,}36 \text{ кг/м}^3.$$

Задача № 17. При увеличении радиуса шара выталкивающая сила растет пропорционально кубу радиуса, а вес оболочки − пропорционально квадрату радиуса. Следовательно, выталкивающая сила растет быстрее и, начиная с какого-то значения радиуса, станет больше, чем вес оболочки. Тогда шар начнет подниматься.

Обозначим этот радиус оболочки через r. При этом

$$\rho_в g(4/3)\pi r^3 = bg4\pi r^2 + \rho_{He}g(4/3)\pi r^3,$$

откуда

$$r = 3b/(\rho_в - \rho_{He}).$$

Плотности воздуха $\rho_в$ и гелия ρ_{He} при данных условиях найдем с помощью закона Менделеева − Клапейрона

$$pV = (m/M)RT,$$

и

$$\rho_в = m/V = pM_в/(RT), \quad \rho_{He} = pM_{He}/(RT).$$

Разность плотностей

$$\rho_в - \rho_{He} = (p/(RT) \cdot (M_в - M_{He}).$$

Окончательно получаем

$$r = 3bRT/(p(M_в - M_{He})).$$

После вычислений получим

$$r = 3 \cdot 1 \cdot 8{,}31 \cdot 273 \cdot 10^3/(10^5 \cdot (29 - 4)) = 2{,}7 \text{ (м)}.$$

Задача № 18. При нагревании воздуха его плотность уменьшается, так как из закона Менделеева − Клапейрона

$$pV = (m/M)RT, \quad p = (\rho/M)RT, \quad \rho = pM/(RT).$$

Шар начнет подниматься, если

$$\rho_o gV \geq mg + \rho gV,$$

ρ_o − плотность наружного воздуха.

Подставляя выражения для плотности наружного воздуха и воздуха внутри шара ρ, получаем

$$(pVM/R)(1/T_o - 1/T) \geq m.$$

Отсюда

$$1 - T_o/T_{min} = mRT_o/(MpV) \approx 0{,}5,$$

значит,

$$T_{min} \approx 2T_o = 546 \text{ K} = 273°\text{C}.$$

Задача № 19. Условие равновесия шара у поверхности Земли

$$F = \rho_o gV - mg. \qquad (1)$$

где V − объем шара у поверхности Земли, а $\rho_o = Mp_o/(RT)$, ρ_o − плотность воздуха.

При этом масса шара m включает в себя массу оболочки, приборов и газа, заключенного внутри оболочки. Из условия известно, что объем шара при подъеме увеличивается. Следовательно, оболочка шара мягкая и герметичная. Объем увеличивается потому, что при мягкой оболочке давление газа внутри должно быть таким же, как давление окружающего воздуха, которое уменьшается с высотой. Если оболочка герметичная, масса шара не изменяется при подъеме и максимальная высота его подъема определяется условием

$$\rho g \cdot 2V = mg, \qquad (2)$$

где

$$\rho = Mp/(RT).$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), находим

$$p = p_o T/(2T_o(1 + F/(mg))) \approx 79 \text{ мм рт. ст.}$$

Задача № 20. На максимальной высоте выталкивающая сила равна весу шара-зонда:

$$mg = \rho gV.$$

Выразив плотность окружающего воздуха через давление и температуру

$$\rho = pM/(RT) \quad \text{и} \quad \rho = m/V,$$

приравняв

$$pM/(RT) = m/V,$$

получим

$$m = pMV/(RT).$$

Таким образом, давление воздуха на этой высоте равно

$$p = (m/M) \cdot RT/V \approx 6{,}12 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

Посмотрим теперь, во сколько раз давление p меньше давления у поверхности Земли p_o:

$$p_o/p = 10^5/(6{,}12 \cdot 10^3) \approx 16.$$

Из условия известно, что давление падает в два раза через каждые 5 км подъема, т. е.

$$p_o/p = 2^{H/h},$$

где H − высота подъема, а h = 5 км.

В нашем случае

$$2^{H/h} = 16 = 2^4.$$

Отсюда $H = 4h$ = 20 км.

Задача № 21. Эта задача отличается от предыдущей тем, что оболочка шара не герметична, а имеет отверстие. Следовательно, давление внутри шара все время равно давлению в атмосфере, и по мере увеличения высоты подъема шара водород вытекает из отверстия. Будем, считать, что подъем происходит достаточно быстро и можно пренебречь диффузией воздуха внутрь оболочки, тогда условие равновесия шара на максимальной высоте

$$mg + \rho_{H2}gV = \rho_в gV.$$

Плотности водорода и воздуха можно найти из уравнения Менделеева − Клапейрона:

$$\rho_{H2} = M_{H2}p/(RT), \quad \rho_в = M_в p/(RT).$$

Таким образом, давление на максимальной высоте

$$p = mRT/((M_в - M_{H2})V) \approx 6{,}12 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

Отношение p_o/p = 16 и, следовательно, высота подъема H = 20 км (см. решение задачи № 20).

Высота подъема в задаче получилась такая же, как для герметичного шара в задаче № 65, но не следует забывать, что мы рассматривали разные шары, с разными объемами и массами. А если оба шара совершенно одинаковы и отличаются только тем, что у одного оболочка герметичная, а у другого имеется отверстие, − какой из шаров поднимется выше в этом случае?

Решение.

Выталкивающая сила будет одинакова для обоих шаров, так как их объемы равны. Если начальные массы шаров были одинаковы, то после подъема шар с отверстием окажется легче, так как часть наполняющего его газа вытечет при подъеме. Следовательно, шар с отверстием сможет подняться на большую высоту.

Обычно человеку, впервые задумавшемуся над этим вопросом, такой результат кажется странным.

Часто задают вопрос: «Как вообще в шаре с отверстием возникает подъемная сила? Ведь снизу, там, где отверстие, воздух и газ внутри шара находятся в равновесии».

Давайте рассмотрим верхнюю точку шара. Если в нижней точке шара давление воздуха и газа равно $p_о$, в верхней точке давление воздуха

$$p_1 = p_о - \rho_в g h,$$

а давление газа

$$p_2 = p_о - \rho_г g h,$$

h – высота шара.

Если $\rho_г < \rho_в$, то $p_2 > p_1$ и, следовательно, на оболочку снизу действует большая сила, чем сверху, – возникает подъемная сила. Легко убедиться (вы сможете это сделать сами для тела достаточно простой формы), что именно эта разница давлений и дает результирующую выталкивающую силу, определяемую законом Архимеда. Недоумение часто возникает потому, что при расчетах плотности газа внутри шара обычно считают давление в шаре всюду одинаковым. Не нужно забывать, что это всего лишь приближение. Если мы определяем саму величину

$$p_2 = p_о - \rho_г g h,$$

то, так как h мало – всего несколько метров,

$$\rho_г g h << p_о,$$

и мы можем считать

$$p_2 \approx p_о.$$

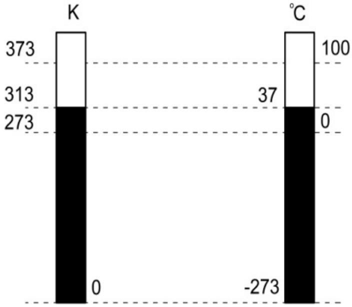
Если же нас интересует разность

$$p_2 - p_1 = \rho_г g h - \rho_в g h,$$

то здесь оба члена одинаковы по порядку величины, и учитывать их надо оба. Кстати сказать, то, что мы считаем $\rho_в$ и $\rho_г$ постоянными, – тоже приближение, на самом деле они уменьшаются с высотой по мере уменьшения давления. Но учет этого обстоятельства дал бы значительно меньшую поправку к выталкивающей силе, этой поправкой можно пренебречь.

Задача № 22. Английский ученый У. Кельвин ввел абсолютную шкалу температур. Нулевая температура по шкале Кельвина соответствует абсолютному нулю, и единица температуры по этой шкале равна градусу по шкале Цельсия, поэтому абсолютная температура T связана с температурой по шкале Цельсия формулой $T = t + 273$.

На рисунке для сравнения изображены абсолютная шкала и шкала Цельсия.



Единица абсолютной температуры в СИ называется Кельвином (сокращенно К). Следовательно, один градус по шкале Цельсия равен одному градусу по шкале Кельвина: $1°C = 1$ К.

Если температура тела изменилась на $\Delta t = 60°C$, то изменение его абсолютной температуры ΔT по шкале Кельвина также равно 60 К.

Задача № 23. Давление данной массы газа при постоянном объеме прямо пропорционально абсолютной температуре. Из этого утверждения следует, что

$$p_2/p_1 = T_2/T_1.$$

Абсолютная температура связана с температурой по шкале Цельсия уравнением

$$T = t + 273.$$

Тогда

$$p_2/p_1 = (t_2 + 273)/(t_1 + 273).$$

Подставим значения температур

$$p_2/p_1 = (57 + 273)/(27 + 273) = 11/10 = 1{,}1.$$

Задача № 24. По условию задачи сила натяжения нити, удерживающей в воздухе шар, равна нулю, следовательно, выполняется условие

$$(m + m_в)g = \rho gV. \qquad (1)$$

где из уравнения Менделеева – Клапейрона, $m_в = p_2VM_2/(RT_2)$ − масса водорода в воздушном шарике, $\rho = p_1M_1/(RT_1)$ − плотность атмосферного воздуха. Перепишем уравнение (1)

$$m + p_2VM_2/(RT_2) = Vp_1M_1/(RT_1).$$

Откуда выражаем искомый объем шарика

$$V = mRT/(p_1M_1 - p_2M_2),$$

где $T = T_1 = T_2 = 273$ К.

Вычислим искомый объем

$$V = 11{,}9 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 273/(101 \cdot 10^3 \cdot 29 \cdot 10^{-3} - 115 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}) =$$
$$= 0{,}0100 \text{ м}^3 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 10 \text{ дм}^3.$$

Ответ: $V = 10$ дм^3.

Задача № 25. Для первого и второго состояния запишем уравнение Менделеева – Клапейрона

$$p_1V_1 = (m_1/M)RT_1 \quad \text{и} \quad p_2V_2 = (m_1/M)RT_2. \qquad (1)$$

Из второго уравнения вычтем первое

$$p\Delta V = (m_1/M)R\Delta T, \qquad (2)$$

здесь учтено, что давление под поршнем одинаково

$$p_1 = p_2 = p = p_о + m_1g/S. \qquad (3)$$

Из третьего уравнения, с учетом (3), выразим искомое увеличение объема

$$\Delta V = (m_1/M)\cdot(R\Delta T/(p_о + mg/S)).$$

Подставим численные значения

$$\Delta V = (8{,}00/4{,}00)\cdot(8{,}3\cdot6{,}00/(100\cdot10^3 + 6{,}00\cdot10/30{,}0\cdot10^{-4})) = 830.$$

Ответ: $\Delta V = 830$ см^3.

Задача № 26. Размышления.

Предположим, что с капелькой воды сталкивается всего лишь одна молекула. Пусть u − скорость капельки до столкновения, а u' − после столкновения. Соответственно, скорости молекулы обозначим v_{1x} и v_{1x}', ось X выбираем по линии столкновения проходящей через центры. Массу капельки обозначим M. При ударе соблюдается закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии

$$m_1v_{1x} + Mu = m_1v_{1x}' + Mu',$$

$$m_1v_{1x}^2/2 + Mu^2/2 = m_1v_{1x}'^2/2 + Mu'^2/2.$$

Это в точности такие же уравнения, какие используются в механике при решении задач о столкновении идеально упругих шаров. Из них находим

$$v_{1x}' = [2Mu - (M - m_1)v_{1x}]/[M + m_1],$$

а для кинетической энергии движения молекулы вдоль оси X после удара

$$m_1v_{1x}'^2/2 = (m_1/2)\cdot[4M^2u^2 - 4M(M - m_1)uv_{1x} + (M - m_1)^2v_{1x}^2]/[M + m_1]^2.$$

Напишем такое соотношение для каждой молекулы воздуха, сталкивающейся с капелькой. Просуммируем по всем столкновениям и разделим их на число столкновений. Короче говоря, произведем усреднение по всем столкновениям. Если состояние всей системы установилось, т. е. макроскопический процесс теплообмена закончился, то средняя скорость капельки равна нулю. Капля совершает беспорядочные дрожания около положения равновесия, ее скорость u с одинаковой вероятностью принимает и положительные и отрицательные значения. Поэтому в результате усреднения произведения uv_{1x} получится нуль, и для средней кинетической энергии молекулы после столкновения можно записать

$$m_1(v_{1x}'^2)_{кв}/2 = (m_1/2)\cdot[4M^2(u^2)_{кв} + (M - m_1)(v_{1x}^2)_{кв}]/[M + m_1]^2.$$

Теплообмена между газами не будет, когда средняя кинетическая энергия молекулы в результате столкновения с капелькой не меняется. Поэтому в установившемся состоянии написанное выражение должно быть равно средней кинетической энергии молекулы до удара $m_1(v_{1x}^2)_{кв}/2$. Это дает

$$[4M^2(u^2)_{кв} + (M - m_1)(v_{1x}^2)_{кв}]/[M + m_1]^2 = (v_{1x}^2)_{кв},$$

откуда после элементарных преобразований находим

$$m_1(v_{1x}^2)_{кв}/2 = M(u^2)_{кв}/2.$$

Приведенные рассуждения применимы к любому газу.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы газа, таким образом, обладает основным свойством температуры − в состоянии теплового равновесия она одинакова для всех молекул газов, находящихся в тепловом контакте, а также для любых молекул газовой смеси. Она не зависит от массы и внутренней структуры молекулы. Поэтому среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы или любую монотонную функцию ее можно принять за меру температуры газа, а также тела, находящегося с ним в тепловом равновесии.

Решение.

$$E_{ср} = (3/2)kT = M(v^2)_{кв}/2,$$

где $M = \rho V = \rho(4/3)\pi r^3$.

Искомая температура

$$T = (2/3)\rho(4/3)\pi r^3(v^2)_{кв}/(2k)$$

или

$$T = (4/9)\rho\pi v^2_{кв}r^3/k.$$

Вычислим

$$T = (4/9) \cdot 1000 \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (1{,}1 \cdot 10^{-6})^3/(1{,}38 \cdot 10^{-23}) = 302{,}85\ К,$$

$$t = 29{,}85^{\circ}C.$$

Задача № 27. Поскольку горизонтальный ствол шахты сообщается с атмосферой, давление воздуха здесь равно атмосферному – $p_о = 1 \cdot 10^5$ Па. В верхней части шахты (под крышкой) давление воздуха будет равно

$$p_1 = p_о - \rho_1 gh, \quad (1)$$

где ρ_1 – плотность воздуха внутри шахты.

Аналогичным образом выразим давление воздуха над крышкой снаружи

$$p_2 = p_о - \rho_2 gh. \quad (2)$$

В соотношениях (1) и (2), очевидно, предполагается, что плотности воздуха ρ_1 и ρ_2 не меняются заметным образом при изменении высоты на величину h.

Это предположение справедливо, если изменения давления с высотой (т. е. $\rho_1 gh$ и $\rho_2 gh$) были малы по сравнению с $p_о$.

Плотности воздуха ρ_1 и ρ_2 могут быть определены из уравнения газового состояния

$$\rho_1 = Mp_о/(RT_1), \quad \rho_2 = Mp_о/(RT_2),$$

где T_1, T_2 – абсолютные температуры внутри и вне шахты соответственно.

Разность давлений

$$p_1 - p_2 = ghMp_о/(RT_1) \cdot (1 - T_1/T_2).$$

Запишем теперь выражение для силы, действующей на крышку из-за разности давлений

$$F = S(p_1 - p_2) = ghMp_оS/(RT_1) \cdot (1 - T_1/T_2).$$

Эта сила направлена вверх и равна

$$F = 10 \cdot 229 \cdot 3{,}5 \cdot 29 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{5}/(8{,}31 \cdot 273)(1 - 273/287) =$$
$$= 499{,}8\ Н.$$

Вес крышки составляет 35 · 10 = 350 Н. Чтобы крышка не приподнималась, нужно приложить силу 499,8 Н – 350 Н = 149,8 Н = 150 Н.

Ответ: модуль минимальной силы F, которую необходимо приложить к крышке массой m = 35 кг, чтобы герметично закрыть сверху вертикальный ствол шахты, равен 150 Н.

Примечание 1:

Воспользуемся барометрической формулой и определим давление воздуха внутри и снаружи шахты

$$p_h = p_o e^{-Mgh/(RT_1)} \quad \text{и} \quad p_h^{/} = p_o e^{-Mgh/(RT_2)}.$$

Тогда

$$F + Sp_o e^{-Mgh/(RT_1)} + mg = p_o e^{-Mgh/(RT_2)}.$$

Искомая сила для удержания крышки

$$F = p_o S\{e^{-Mgh/(RT_2)} - p_o e^{-Mgh/(RT_1)}\} - mg.$$

После вычислений

$$F = 1{,}0 \cdot 10^5 \cdot 3{,}5 \cdot \{e^{-29 \cdot 10-3 \cdot 10 \cdot 229/(8{,}31 \cdot 287)} - e^{-29 \cdot 10-3 \cdot 10 \cdot 229/(8{,}31 \cdot 273)}\} -$$
$$- 350 = 135{,}7 = 136 \text{ Н}.$$

136 Н и 150 Н два разных ответа (150 − 136) · 100%/136 = 10% к результату 136 Н.

Если бы задачу решал продвинутый студент, то он бы вписал ответ 136 Н.

Чтобы не было «двойных стандартов» в условие задачи надо добавить: считайте, что плотности воздуха внутри шахты и снаружи не меняются заметным образом в данной задаче.

Примечание 2: а какой ответ правильный?

Задача № 28. Запишем уравнение Менделеева – Клапейрона для случая, когда баллон заполнен

$$pV = (m_o/M)RT_o. \qquad (1)$$

Когда баллон открыт (пуст), то в нем находится газ при атмосферном давлении

$$p_oV = (m_o - \Delta m/M)RT_o. \qquad (2)$$

Газ из баллона при атмосферном давлении занимает объем

$$V_o p_o V_o = (m_o/M)RT_o. \qquad (3)$$

Из (2) вычтем (1)

$$(p - p_o)V = \Delta mRT_o/M$$

и, делая замену из (3)

$$M/(RT_o) = m_o/(p_oV_o),$$

находим

$$\Delta m = (p - p_o)Vm_o/(p_oV_o). \qquad (4)$$

Из отношения (1) к (3)

$$p/p_o = V_o/V.$$

Тогда в формуле (4)

$$\Delta m = (p - p_o)m_o/p = m_o(1 - p_o/p) = (pVM/(RT_o)) \cdot (1 - p_o/p).$$

Подставим численные значения

$$\Delta m = 15 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}044 \cdot (1 - 1/15)/(8{,}31 \cdot 273) =$$
$$= 1{,}35 \cdot 10^{-4} \text{ кг} = 0{,}135 \text{ г}.$$

Выпущенная масса воздуха больше чем 0,01 г, следовательно, можно ли на данных технических весах заметить разницу в весе полного и пустого баллончиков?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Формулы термодинамики идеального газа

1. Уравнение состояния идеального газа
(уравнение Клапейрона – Менделеева)

$$PV = \frac{m}{\mu}RT$$

2. Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = Q - A$$

3. Работа газа

$$A = \int PdV$$

4. Средняя энергия молекулы газа

$$W_{\text{ср}} = \frac{i}{2}kT$$

5. Средняя кинетическая энергия молекулы газа:

$$W_{K_{\text{ср}}} = \frac{3}{2}kT$$

6. Внутренняя энергия газа

$$U = \frac{i}{2}PV = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT$$

7. Теплоемкость газа при постоянном объеме

$$C_v = \frac{i}{2}R$$

8. Теплоемкость газа при постоянном давлении

$$C_p = \frac{i+2}{2}R$$

РЕКОМЕНДУЕМЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Базаров*, *И. П.* Термодинамика. – СПб., 2010. – 377 с.

2. *Нащокин*, *В. В.* Техническая термодинамика и теплопередача. – М., 1980. – 469 с.

3. *Сивухин*, *Д. В.* Термодинамика и молекулярная физика. – М., 2005. – 544 с.

4. *Базаров*, *И. П.* Заблуждения и ошибки в термодинамике. – М., 2003. – 120 с.

5. *Коробков*, *М. П.* Термодинамика: Варианты индивидуальных расчетных заданий. – СПб., 2009. – 15 с.

6. Термодинамика: сборник задач. – Якутск : «НИГЦ «Градиент», 2012. – 116 с.

7. FizPortal [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.FizPortal.ru. – Загл. с экрана. – Дата обращения: 21.05.2012.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение………………………………………………..…………3
1. Молекулярно-кинетическая теория. Газовые законы ………....4
2. Термодинамические циклы. КПД…..…………………… …19
3. Энергия и работа……………………..…………………… .30
4. Влажный воздух и пар……………………..…………………...48
5. Задачи для самостоятельного решения……..…………………57
6. Ответы на задачи……..……………………………………..…....62
Приложение……………..……………………………………....75
Рекомендуемый библиографический список………..…..…...76

Александр Федорович ГАЛКИН
ТЕРМОДИНАМИКА. СБОРНИК ЗАДАЧ
Учебное пособие

Зав. редакцией
естественнонаучной литературы *М. В. Рудкевич*
Ответственный редактор *Т. С. Спирина*
Выпускающие *Н. А. Крылова, О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com;
196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел.: (812) 412-92-72, 336-25-09.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 09.01.17.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 60×90 $^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 5,00. Тираж 100 экз.

Заказ № 050-17.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в ПАО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.