Ю. Н. БИБИКОВ,
В. Р. БУКАТЫ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Учебное пособие

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
МОСКВА • КРАСНОДАР
2020

УДК 517.9
ББК 22.151.5я73

Б 59 **Бибиков Ю. Н.** Дифференциальные уравнения Пфаффа на плоскости и в пространстве : учебное пособие / Ю. Н. Бибиков, В. Р. Букаты. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 68 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература). — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-8114-3914-0

В учебном пособии излагаются положения теории и методы интегрирования дифференциальных уравнений Пфаффа на плоскости и в пространстве. Обычно уравнения Пфаффа на плоскости называют обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка в симметричной форме. В отличие от общепринятого, подход к изложению материала основан на понимании решения как параметризованной кривой или поверхности.

Излагаются различные методы построения интегральных поверхностей, сопровождаемые рассмотрением примеров. Кроме того, пособие содержит представляющие значительный интерес исследования Л. Эйлера дифференциального уравнения Пфаффа с тремя переменными.

Пособие предназначено для студентов направлений подготовки и специальностей, входящих в УГСН: «Математика и механика», «Компьютерные и информационные науки», «Физика и астрономия», а также преподавателей физико-математических отделений университетов.

УДК 517.9
ББК 22.151.5я73

Рецензент

Н. Х. РОЗОВ — доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета педагогического образования Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Обложка

П. И. ПОЛЯКОВА

Оглавление

Предисловие

В учебном пособии излагаются основные положения теории и методы интегрирования дифференциальных уравнений Пфаффа на плоскости и в пространстве. Обычно уравнения Пфаффа на плоскости называют обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка в симметричной форме.

Дифференциальное уравнение Пфаффа в трехмерном пространстве исследовал еще Л. Эйлер, который заметил, что «дифференциальное уравнение между двумя переменными всегда реально и всегда им определяются некоторые соотношения между этими переменными, и что иначе дело обстоит с дифференциальным уравнением, содержащем три переменных» (см. [5] списка литературы).

Работа состоит из двух частей. Первая посвящена дифференциальному уравнению Пфаффа с двумя переменными и представляет собой переработанную первую главу учебного пособия [1]. Во второй части подход к изложению материала, разработанный в первой части, применяется к уравнению Пфаффа с тремя переменными. Излагаются различные методы построения интегральных поверхностей, сопровождаемые рассмотрением примеров. В последнем параграфе излагаются исследования Л. Эйлера дифференциального уравнения Пфаффа с тремя переменными, принятые за основу и в современных учебниках. В отличие от общепринятого, наш подход основан на понимании решения как параметризованной кривой или поверхности.

В пособии приняты следующие обозначения: производная функции по переменной t обозначается точкой, остальные производные — штрихом, частная производная функции по переменной, например, x обозначается индексом x внизу.

Глава I. Уравнение Пфаффа на плоскости

§ 1. Регулярная параметризованная кривая

Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ с прямоугольными координатами Oxy. Пусть $\overline{r} = (x, y)$ — вектор, $<\alpha, \beta> \subset \mathbb{R}$ — промежуток (связное множество на числовой прямой).

Определение 1.1. Непрерывное отображение $\overline{r}: <\alpha, \beta> \to \mathbb{R}^2$ называется параметризованной кривой. Параметризованная кривая называется гладкой, если существует и непрерывна производная $\dot{\overline{r}}(t)$, $t \in <\alpha, \beta>$. Гладкая кривая называется регулярной, если $\dot{\overline{r}}(t) \neq 0$, $t \in <\alpha, \beta>$.

Таким образом, параметризованная кривая на плоскости задается парой непрерывных функций $(x(t), y(t))$, а регулярность требует, чтобы эти функции были непрерывно дифференцируемы и чтобы было $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) > 0$.

Множество, образованное концами векторов $\overline{r}(t)$, отложенных от точки O, назовем графиком параметризованной кривой и обозначим $\Gamma_{\overline{r}}$. Если рассматривать график как след движущейся точки со временем $t \in <\alpha, \beta>$, то движение вдоль регулярной кривой происходит без остановок и изменения направления движения.

Допустима терминология: график $\overline{r}(t)$ — кривая, а функция $\overline{r}(t)$ — ее параметризация.

Рассмотрим замену параметра $t \in <\alpha, \beta>$ по формуле $\tau = \varphi(t)$. Замену параметра будем называть допустимой, если $\dot{\varphi}(t)$ существует, непрерывна и отлична от нуля.

Определение 1.2. Говорят, что регулярная кривая $\overline{\rho}(\tau)$, $\tau \in <\gamma, \delta>$, эквивалентна кривой $\overline{r}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, если существует допустимая замена параметра $\tau = \varphi(t)$, для которой $\varphi(<\alpha, \beta>) = <\gamma, \delta>$ и $\overline{\rho}(\varphi(t)) = \overline{r}(t)$.

Очевидно, что кривая $\overline{r}(t)$ тоже регулярна.

Все регулярные кривые разбиваются по отношению эквивалентности на непересекающиеся классы эквивалентности. Каждый такой класс будем называть геометрической кривой.

Так как эквивалентные кривые согласно определению имеют одинаковые графики, то каждой геометрической кривой соответствует некоторый график.

Обратное утверждение верно при дополнительных ограничениях на понятие параметризованной кривой.

Определение 1.3. Параметризованная кривая $\overline{r}(t)$ называется простой, если обратное отображение $(\overline{r}(t))^{-1}$: $\Gamma_{\overline{r}} \to <\alpha, \beta>$ определено и непрерывно.

Пример 1.1. Параметризация $\overline{r}(x) = (x, f(x))$ графика гладкой функции $y = f(x)$, $x \in <\alpha, \beta>$, — простая кривая.

Очевидно, что регулярная кривая, эквивалентная простой, тоже простая.

Теорема 1.1. Регулярные простые кривые, имеющие одинаковые графики, эквивалентны.

Доказательство. Пусть регулярные кривые $\overline{\rho}(\tau)$, $\tau \in <\gamma, \delta>$ и $\overline{r}(t), t \in <\alpha, \beta>$, имеют одинаковые графики. Тогда определена композиция отображений $\overline{r}$ и $(\overline{\rho})^{-1}$ и тем самым непрерывная функция $\varphi(t) = (\overline{\rho})^{-1}(\overline{r}(t))$, $t \in <\alpha, \beta>$.

Осталось доказать, что $\dot{\varphi}(t)$ существует, непрерывна и $\dot{\varphi}(t) \neq 0$.

Пусть $t_0 \in <\alpha, \beta>$, $\tau_0 = \varphi(t_0)$. Если положить $\overline{r}(t) = (x(t), y(t))$, $\overline{\rho}(\tau) = (u(\tau), v(\tau))$, то $u(\varphi(t)) = x(t)$, $v(\varphi(t)) = y(t)$. Так как $(u'(\tau))^2 + (v'(\tau))^2 > 0$, то, не нарушая общности, можно считать, что $u'(\tau_0) \neq 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $u'(\varphi(t)) \neq 0$, если $\mid t - t_0 \mid < \delta$. Следовательно, при таких t функция $\varphi(t) = u^{-1}(x(t))$ —

гладкая как композиция гладких функций. Ввиду произвольности $t_0 \in <\alpha, \beta>$ заключаем, что $\varphi(t)$ — гладкая на промежутке $<\alpha, \beta>$.

Меняя ролями $\overline{r}(t)$ и $\overline{\rho}(\tau)$, найдем, что обратная функция $\varphi^{-1}(\tau)$ — гладкая при $\tau \in (\gamma, \delta)$. Следовательно, $\dot{\varphi}(t) \neq 0$. $\Box$

Следствие. Для простых регулярных кривых понятия «геометрическая кривая» и «график кривой» однозначно определяют друг друга.

Теорема 1.2. Пусть $\overline{r}(t) = (x(t), y(t))$ — регулярная кривая. Для любой точки $t_0 \in <\alpha, \beta>$ можно указать ее окрестность, сужение на которую функции $\overline{r}(t)$ эквивалентно простой регулярной кривой, график которой является графиком гладкой функции $y = f(x)$, если $\dot{x}(t_0) \neq 0$, либо функции $x = g(y)$, если $\dot{y}(t_0) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\dot{x}(t_0) \neq 0$, $x_0 = x(t_0)$. Существует окрестность точки x_0, в которой определена гладкая функция $t(x)$, обратная к $x(t)$. Положим $\overline{\rho}(x) = (x(t(x)), y(t(x)) = (x, f(x))$. Замена параметра $x(t)$ является допустимой в некоторой окрестности точки t_0. $\Box$

Пример 1.2. Параметризованная кривая $\overline{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, — регулярная. Ее график — окружность $x^2 + y^2 = 1$.

Пример 1.3. Параметризованная кривая $\overline{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in (0, \pi)$, — простая кривая. Ее график — график кривой $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1, 1)$.

Если в определении допустимости замены параметра условие $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ заменить на условие $\dot{\varphi}(t) > 0$, то снова получим некоторый класс эквивалентности, составляющий «половину» геометрической кривой.

Наглядно эта «половина» изображается стрелочкой на графике, указывающей на направление движения по графику кривой при возрастании t. Указанный класс эквивалентности называется ориентированной кривой.

График регулярной кривой часто задается уравнением $U(x,y)=C$, если частные производные U_x и U_y существуют, непрерывны и удовлетворяют условию $U_x^2+U_y^2>0$, а постоянная C принадлежит множеству значений функции $U(x,y)$.

Если $U(x,y)$ определена на открытом множестве, то к равенству $U(x,y)=C$ применима теорема о неявной функции.

Теорема о неявной функции. Пусть функция $\Phi(x,y)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), причем $\Phi(x_0,y_0)=0$, $\Phi_y(x_0,y_0)\neq 0$. Тогда равенство $\Phi(x,y)=0$ определяет единственную кривую $y=\varphi(x)$, обладающую свойствами: функция $\varphi(x)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, $\varphi(x_0)=y_0$, и $\Phi(x,\varphi(x))=0$ при всех x из указанной окрестности.

Замечание. Переменная x может быть многомерной.

Полагая $\Phi(x,y)=U(x,y)-C$, на основании теоремы о неявной функции заключаем, что кривая $U(x,y)=C$ покрыта графиками гладких функций вида $y=\varphi(x)$ либо $x=\psi(y)$. Если $U(x(t),y(t))=C,\ t\in<\alpha,\beta>$, то $\overline{r}(t)=(x(t),y(t))$ — ее параметризация на промежутке $<\alpha,\beta>$.

Для регулярной кривой $\overline{r}(t)$ вектор $\dot{\overline{r}}(t_0)$ называется касательным вектором в точке графика, соответствующей $t=t_0$. У эквивалентной кривой $\overline{\rho}(\tau)$ в той же точке графика касательный вектор $\overline{\rho}'(\tau_0)$ коллинеарен вектору $\dot{\overline{r}}(t_0)$, так как $\dot{\overline{r}}(t)=\overline{\rho}'(\tau)\dot{\tau}(t)$. Следовательно, геометрическая кривая, а значит, и график кривой определяют в каждой точке t_0 прямую с направляющим вектором $\dot{\overline{r}}(t_0)$. Эта прямая называется касательной к графику функции $\overline{r}(t)$ в точке $\overline{r}(t_0)$.

Если $(x(t), y(t))$ — параметризация кривой, определяемой равенством $U(x, y) = C$, то, дифференцируя тождество $U(x(t), y(t)) = C$ по t, в точке t_0 находим $U_x(x(t_0), y(t_0))\dot{x}(t_0) + U_y(x(t_0), y(t_0))\dot{y}(t_0) = 0$. Следовательно, вектор (U_x, U_y) в точке (x_0, y_0) ортогонален касательному вектору в той же точке.

§ 2. *Интегральные кривые уравнения Пфаффа*

Дифференциальным уравнением Пфаффа на плоскости называется уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{2.1}$$

где M и N — непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в области $D \subset \mathbb{R}^2$ функции, $M^2(x, y) + N^2(x, y) > 0$.

Определение 2.1. Решением уравнения (2.1) называется регулярная кривая $\overline{r}(t) = (x(t), y(t)),\ t \in <\alpha, \beta>$, если при всех $t \in <\alpha, \beta>$ имеет место равенство

$$M(x(t), y(t))\dot{x}(t) + N(x(t), y(t))\dot{y}(t) = 0. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. Регулярная кривая, эквивалентная решению уравнения (2.1), тоже является решением этого уравнения.

Доказательство. Пусть кривая $\overline{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in <\alpha, \beta>$ — решение уравнения (2.1), а кривая $\overline{\rho}(\tau) = (u(\tau), v(\tau)),\ \tau \in (\gamma, \delta)$, — ей эквивалентная с заменой параметра $\tau = \varphi(t)$. По определению эквивалентности в силу (2.2):

$$M(u(\varphi(t)), v(\varphi(t)))u'(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) + \\ + N(u(\varphi(t)), v(\varphi(t)))v'(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = 0.$$

Сокращая на $\dot{\varphi}(t) \neq 0$, получим требуемое. $\square$

Все эквивалентные кривые имеют одинаковые графики. График решения уравнения (2.1) называется интегральной кривой. Решить уравнение (2.1) — значит найти все интегральные кривые в области D.

В области D для любого решения $(x(t), y(t))$ справедливо следующее:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \neq 0 \Leftrightarrow N(x(t), y(t)) \neq 0, \\ \dot{y}(t) \neq 0 \Leftrightarrow M(x(t), y(t)) \neq 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Действительно, ввиду симметричности утверждений (2.3) достаточно проверить первое из них. Запишем его в эквивалентном виде:

$$\dot{x}(t) = 0 \Leftrightarrow N(x(t), y(t)) = 0.$$

В силу (2.2) и регулярности кривой $(x(t), y(t))$ имеем:

$$\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow N(x(t), y(t))\dot{y}(t) = 0 \Rightarrow N(x(t), y(t)) = 0,$$
$$N(x(t), y(t)) = 0 \Rightarrow M(x(t), y(t))\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = 0.$$

Геометрическая интерпретация

Пусть $(x_0, y_0) \in D$. Вектор $(M(x_0, y_0), N(x_0, y_0))$ ортогонален прямой с направляющим вектором $(-N(x_0, y_0), M(x_0, y_0))$, проходящей через точку (x_0, y_0). В силу (2.2) вектор $(-N(x_0, y_0), M(x_0, y_0))$ коллинеарен вектору $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ в точке (x_0, y_0). Назовем прямую с направляющим вектором $(-N(x_0, y_0), M(x_0, y_0))$ направлением в точке (x_0, y_0). Получаем поле направлений в области D. Интегральная кривая — это регулярная кривая, которая в каждой точке касается направления поля в этой точке.

Задача Коши с начальной точкой (x_0, y_0) ставится так: найти интегральную кривую, проходящую через данную точку $(x_0, y_0) \in D$.

Теорема 2.2. Для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ найдется решение задачи Коши с начальной точкой (x_0, y_0). При этом для любых двух решений этой задачи интегральные кривые совпадают в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

Теорема 2.2 будет доказана в § 7.

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение $xdx + ydy = 0$. Здесь $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Поле направлений состоит из прямых $x_0x + y_0y - (x_0^2 + y_0^2) = 0,\ x_0^2 + y_0^2 > 0$. Это касательные к окружностям $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$. Регулярные кривые $\overline{r}(t) = (C\cos t, C\sin t),\ C \neq 0,\ t \in \mathbb{R},$ — решения данного уравнения. Интегральные кривые — окружности с центром в начале координат.

Пример 2.2. Рассмотрим уравнение $ydx - xdy = 0$. По-прежнему $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Поле направлений состоит из прямых, проходящих через начало координат. Соответственно интегральные кривые — это полупрямые, проходящие через начало координат, без начала координат. В качестве параметризаций можно взять $\overline{r}(t) = (\alpha t, \beta t)$, $t \neq 0,\ \alpha^2 + \beta^2 > 0$. Очевидно, $\overline{r}(t)$ — решение рассматриваемого уравнения.

Пример 2.3. Задача об изогональных траекториях. Найти кривые, которые пересекают окружности с центром в начале координат под одним и тем же углом $\alpha = 45°$ в положительном направлении, считая от касательных к окружностям.

Решение. Из примера 2.1 видим, что семейство окружностей задается дифференциальным уравнением в симметричной форме $xdx + ydy = 0$. Известно, что вектор с координатами $M_1 = M\cos\alpha - N\sin\alpha,\ N_1 = M\sin\alpha + {}$ $+ N\cos\alpha$ образует с вектором (M, N) угол, равный α. В рассматриваемом случае $M = x,\ N = y,\ \alpha = 45°$. Чтобы построить искомые кривые, нужно решить дифференциальное уравнение:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)dx + \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)dy = 0.$$

Удобно перейти к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r > 0$. Получим уравнение $rdr + r^2 d\varphi = 0 \Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = -r$, $r = Ce^{-\varphi}$, $C > 0$. Это спирали, закручивающиеся к началу координат.

§ 3. *Интеграл уравнения Пфаффа*

Функцию $U(x,y)$ будем называть *допустимой*, если в области ее определения частные производные U_x и U_y существуют, непрерывны и $U_x^2 + U_y^2 > 0$.

Определение 3.1. Допустимая функция $U(x,y)$, определенная в области $D_0 \subset D$, называется интегралом дифференциального уравнения (2.1), если она обращается в постоянную вдоль любой интегральной кривой в области D_0.

Согласно этому определению, в области D_0 $U(x(t), y(t)) = C$, где $(x(t), y(t))$, $t \in <\alpha, \beta>$, — решение (2.1), график которого принадлежит области D_0.

Отсюда следует, что для интеграла U и любого решения $(x(t), y(t))$:

$$U_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + U_y(x(t), y(t))\dot{y}(t) = 0. \tag{3.1}$$

Рассуждая так же, как при доказательстве эквивалентностей (2.3), можно доказать эквивалентности

$$\begin{cases} \dot{x} \neq 0 \Leftrightarrow U_y(x,y) \neq 0, \\ \dot{y} \neq 0 \Leftrightarrow U_x(x,y) \neq 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Из (2.3) и (3.2) вытекают эквивалентности

$$\begin{cases} U_x(x,y) \neq 0 \Leftrightarrow M(x,y) \neq 0, \\ U_y(x,y) \neq 0 \Leftrightarrow N(x,y) \neq 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Пусть $N \neq 0$. Тогда $U_y \neq 0$ и $-\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{M}{N} = \frac{U_x}{U_y}$. Если же $M \neq 0$, то в той же точке $-\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{N}{M} = \frac{U_y}{U_x}$. В обоих случаях

$$U_x N - U_y M = 0 \tag{3.4}$$

— необходимое и достаточное условие того, что допустимая функция $U(x, y)$ есть интеграл уравнения (2.1).

Пусть $U_y \neq 0$. Выполним в уравнении (2.1) обратимую замену переменных: перейдем от переменных (x, y) к переменным (x, z) по формуле $z = U(x, y)$, где $U(x, y)$ — интеграл уравнения (2.1). Имеем

$$dz = U_x dx + U_y dy = U_x dx + U_y(-\frac{M}{N}dx).$$

В силу (3.4) получим уравнение $dz = 0$, откуда $z = C$. Выбирая в качестве параметра x, получим интегральную кривую (x, C). Рассуждая аналогично в случае $U_x \neq 0$, заключаем, что равенство $U(x, y) = C$ определяет решение любой задачи Коши в области D_0 существования интеграла U.

Равенство $U(x, y) = C$ называется общим интегралом уравнения (2.1) в области D_0.

Теорема 3.1. Для любой точки области D можно указать окрестность, в которой определен интеграл, и следовательно, и общий интеграл.

Теорема 3.1 будет доказана в § 8. Там же показано, как этот интеграл распространить на окрестность интегральной кривой, проходящей через эту точку.

Замечание 3.1. Любая функция от интеграла с ненулевой производной также является интегралом в своей области определения.

Приведем примеры уравнений (2.1), для которых интеграл можно построить в виде квадратур от известных функций.

Пример 3.1. Уравнение с разделенными переменными.

Это уравнение вида

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \tag{3.5}$$

где $M,\ N$ — непрерывные в интервалах (α,β) и (γ,δ) соответственно функции, $M^2+N^2>0$. Легко найти интеграл этого уравнения, определенный во всей области $D=(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$:

$$U(x,y)=\int M(x)dx+\int N(y)dy,$$

где каждое слагаемое — это некоторая первообразная подынтегральной функции. Для этой функции условие (3.4) выполняется. Решение задачи Коши с начальной точкой (x_0,y_0), $x_0\in(\alpha,\beta)$, $y_0\in(\gamma,\delta)$, можно задать следующим образом:

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(s)ds+\int\limits_{y_0}^{y} N(s)ds=0. \tag{3.6}$$

Если уравнение (2.1) можно с помощью умножения на функцию, не обращающуюся в ноль в области $D_0\subset D$, превратить в уравнение с разделенными переменными («разделить переменные»), то уравнение (2.1) называется *уравнением с разделяющимися переменными*. Примером такого уравнения является линейное однородное уравнение

$$p(x)ydx-dy=0, \tag{3.7}$$

где $p(x)$ — непрерывная в интервале (α,β) функция. Разделяя переменные умножением на y^{-1} при $y\neq 0$, получим уравнение *с разделенными переменными* $p(x)dx-$ $-y^{-1}dy=0$, т.е. фактически два уравнения: одно при $y>0$, другое — при $y<0$. И в том и в другом случае общий интеграл можно представить в виде $\ln\mid y\mid-$ $-\int p(x)dx=C$, где C — произвольная постоянная. Заметим, что $(x,0)$, $x\in(\alpha,\beta)$, — решение уравнения (3.7), но оно не содержится в формуле общего интеграла. Полагая $e^C = C_1$ и приписывая C_1 любой знак, получаем формулу

$$y = Ce^{\int p(x)dx}, \tag{3.8}$$

где C — произвольная постоянная.

Пример 3.2. Однородное уравнение.

Так называется дифференциальное уравнение (2.1), у которого функции M и N являются однородными функциями одного и того же порядка k, т.е. выполняются равенства:

$$M(tx, ty) = t^k M(x, y),\ N(tx, ty) = t^k N(x, y),\ t \in \mathbb{R}.$$

Выполняя любую из замен $y = zx$ или $x = zy$, придем после сокращения на x^k в первом случае и на y^k во втором к уравнению с разделяющимися переменными. Например, в первом случае получим уравнение $P(z)dx + xQ(z)dz = 0$, где $P(z) = M(1, z) + N(1, z)z$, $Q(z) = N(1, z)$.

§ 4. *Интегрирующий множитель*

Определение 4.1. Дифференциальное уравнение (2.1) называется уравнением в полных дифференциалах в области $D_0 \subset D$, если существует дважды непрерывно дифференцируемая в области D_0 функция $U(x, y)$, для которой левая часть уравнения (2.1) является ее полным дифференциалом, т.е. если $M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y)$. Функция $U(x, y)$ является интегралом уравнения в полных дифференциалах, так как равенство (3.4) выполняется.

Известно, что $U_{xy} = U_{yx}$. Так как $U_x = M,\ U_y = N$, то равенство

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \tag{4.1}$$

является необходимым условием того, что уравнение (2.1) является уравнением в полных дифференциалах.

Покажем, что это условие является достаточным, если область D_0, в которой выполнено (4.1), — прямоугольник $a < x < b,\ c < y < d$. Определим $U(x,y)$ формулой

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(s,y_0)ds + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,s)ds, \qquad (4.2)$$

где $(x_0,y_0) \in \overline{D}_0$ — фиксированная точка; $(x,y) \in D_0$ — переменная точка.

Покажем, что $U(x,y)$ — интеграл, т.е. что $U_x = M$, $U_y = N$. Имеем в силу (4.2):

$$U_x = M(x,y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} N_x(x,s)ds =$$

$$= M(x,y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} M_y(x,s)ds =$$

$$= M(x,y_0) + M(x,y) - M(x,y_0) = M(x,y).$$

Кроме того, $U_y = N(x,y)$, что и требовалось.

Замечание 4.1. В формуле (4.2) x и y можно поменять ролями, т.е. положить

$$U(x,y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,s)ds + \int\limits_{x_0}^{x} M(s,y)ds. \qquad (4.3)$$

Попытаемся произвольное уравнение (2.1) превратить в уравнение в полных дифференциалах, умножая его левую часть на гладкую функцию $\mu(x,y) \neq 0$. Такая функция называется интегрирующим множителем.

Например, разделение переменных в уравнении с разделяющимися переменными выполняется умножением на интегрирующий множитель, так как уравнение с разделенными переменными является уравнением в полных дифференциалах в силу (4.1).

Вообще, интегрирующий множитель существует в той же области D_0, в которой существует интеграл $U(x,y)$.

Действительно, в силу (3.4) в D_0 $\frac{U_x}{M}=\frac{U_y}{N}\neq 0$, где хотя бы один знаменатель не равен нулю. Обозначая эту дробь через $\mu(x,y)$, получим $U_x=\mu M,\ U_y=\mu N$.

В силу (4.1) необходимым и достаточным условием того, что гладкая функция $\mu(x,y)\neq 0$ является интегрирующим множителем, является равенство

$$\mu_x N-\mu_y M=\mu(M_y-N_x). \tag{4.4}$$

Вообще говоря, решить такое уравнение не проще, чем непосредственно решить уравнение (2.1). Однако в некоторых случаях удается найти интегрирующий множитель с помощью (4.4).

Пример 4.1. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение.

Так называется уравнение

$$(p(x)y+q(x))dx-dy=0. \tag{4.5}$$

Равенство (4.4) при $M=p(x)y+q(x),\ N=-1$ принимает вид

$$\mu_x+(p(x)y+q(x))\mu_y=-\mu p(x).$$

Если предположить, что $\mu(x,y)$ зависит только от переменной x, то получим уравнение $\mu_x=-\mu p(x)$, откуда следует, что можно принять $\mu=e^{-\int p(x)dx}$.

После умножения на $\mu(x)$ получим уравнение, которое можно представить в виде

$$d\left(e^{-\int p(x)dx}y-\int e^{-\int p(x)dx}q(x)dx\right)=0.$$

Следовательно,

$$e^{-\int p(x)dx}y - \int e^{-\int p(x)dx}q(x)dx = C$$

— общий интеграл уравнения (4.5). Общий интеграл удобно записать в виде

$$y = e^{\int p(x)dx}\left(C + \int e^{-\int p(x)dx}q(x)dx\right). \tag{4.6}$$

Равенство (4.6) называется *общим решением* уравнения (4.5).

§ 5. *Автономная система двух дифференциальных уравнений*

Так называется система

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y), \\ \dot{y} = Q(x,y), \end{cases} \tag{5.1}$$

где $P,\ Q$ — непрерывные вместе с частными производными в области $G \subset \mathbb{R}^2$ функции. Решением этой системы называется гладкая параметризованная кривая $(x(t), y(t))$, $t \in <\alpha, \beta>$, обращающая каждое из равенств (5.1) в тождество, т.е. если

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = P(x(t), y(t)), \\ \dot{y}(t) = Q(x(t), y(t)),\ t \in <\alpha, \beta>. \end{cases} \tag{5.2}$$

Задача Коши ставится следующим образом: для заданных $t_0 \in \mathbb{R},\ (x_0, y_0) \in G$, найти решение $(x(t), y(t))$, для которого $x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0$.

Аналогично теореме 2.2 (см. § 7) доказывается

Теорема 5.1. Решение задачи Коши существует, и любое другое решение той же задачи совпадает с первым в общей области определения.

Легко найти стационарное решение $x(t) = x^*,\ y(t) = y^*$ системы (5.1), так как тогда должно быть $P(x^*, y^*) = 0$, $Q(x^*, y^*) = 0$ и дело сводится к решению алгебраической системы двух уравнений. Такие решения называются положениями равновесия системы или точками покоя.

С геометрической точки зрения система (5.1) эквивалентна заданию векторного поля $(P(x,y), Q(x,y))$ в области G. Положениям равновесия соответствуют особые точки векторного поля, а остальные решения — это регулярные кривые, касательные векторы которых совпадают с векторами поля в соответствующих точках.

Других решений нет, так как если при некотором t_0 $x(t_0) = x^*$, $y(t_0) = y^*$, то по теореме 5.1 $x(t) = x^*$, $y(t) = y^*$ для всякого $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $(x(t), y(t))$ — регулярное решение. Будет ли эквивалентная ему кривая $(u(\tau), v(\tau))$ тоже решением?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим допустимую замену параметра $\tau = \varphi(t)$, для которой $u(\varphi(t)) = x(t)$, $v(\varphi(t)) = y(t)$, и, соответственно, $u'(\varphi(t))\dot\varphi(t) = \dot x(t)$, $v'(\varphi(t))\dot\varphi(t) = \dot y(t)$. В силу (5.2):

$$\begin{cases} u'(\tau)\dot\varphi = P(u(\tau), v(\tau)), \\ v'(\tau)\dot\varphi = Q(u(\tau), v(\tau)), \end{cases}$$

что совпадает с (5.2) тогда и только тогда, когда $\varphi(t) = t + C$.

Получили класс эквивалентности регулярных кривых — частный случай ориентированной кривой. График кривых этого класса будем называть траекторией. Таким образом, понятие траектории допускает только сдвиги параметра.

Особую точку, т.е. положение равновесия, также будем считать траекторией. Траектории разбиваются на два класса: положения равновесия и траектории регулярных кривых.

Теорема 5.2. Если траектории двух решений имеют общую точку, то они совпадают в некоторой окрестности этой точки.

Доказательство. Пусть $(x(t), y(t))$ и $(u(t), v(t))$ — решения, причем $x(t_1) = u(t_2) = x_0$, $y(t_1) = v(t_2) = y_0$. Если $t_1 = t_2$, то утверждение справедливо по теореме 5.1.

Пусть теперь $t_2 > t_1$. Положим $C = t_2 - t_1$, $\widetilde{u}(t) = u(t+C)$, $\widetilde{v}(t) = v(t+C)$. Тогда $\widetilde{u}(t_1) = u(t_2) = x_0$, $\widetilde{v}(t_1) = v(t_2) = y_0$. По теореме 5.1 $\widetilde{u}(t) = x(t)$, $\widetilde{v}(t) = y(t)$ на общем промежутке определения, т.е. $x(t) = u(t+C)$, $y(t) = v(t+C)$. $\square$

Теорема 5.3. Траектории, отличные от точки, разбиваются на два класса: замкнутые кривые и кривые без самопересечений.

Доказательство. Пусть траектория регулярной кривой имеет самопересечение: при $t_1 \neq t_2$ $x(t_1) = x(t_2) = x_0$, $y(t_1) = y(t_2) = y_0$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 5.2, получим $x(t) = x(t+C)$, $y(t) = y(t+C)$, где $C = t_2 - t_1$. Следовательно, $x(t)$ и $y(t)$ — периодические функции с периодом C. $\square$

Рассмотрим систему (5.1) при условии

$$P^2(x,y) + Q^2(x,y) > 0,$$

а также дифференциальное уравнение Пфаффа:

$$Q(x,y)dx - P(x,y)dy = 0, \ P^2 + Q^2 > 0. \qquad (5.3)$$

Будем называть это уравнение дифференциальным уравнением, соответствующим системе (5.1).

Теорема 5.4. 1. Всякое непостоянное решение системы (5.1) является решением уравнения (5.3).

2. Всякая интегральная кривая уравнения (5.3) является траекторией системы (5.1).

Доказательство. 1. Если $\dot{x}(t) = P(x(t), y(t))$, $\dot{y} = Q(x(t), y(t))$, то в силу (5.2):

$$Q(x(t), y(t))\dot{x}(t) - P(x(t), y(t))\dot{y}(t) = 0,$$

причем по условию $P^2 + Q^2 > 0$.

2. Пусть $(x(t), y(t))$, $t \in <\alpha, \beta>$, — решение уравнения (5.3). Пусть $Q(x(t), y(t)) \neq 0$ (если $P(x(t), y(t)) \neq 0$, то рассуждение аналогично). Требуется найти решение системы (5.1), эквивалентное решению $(x(t), y(t))$.

Положим при $t \in <\alpha, \beta>$

$$K(t) = \frac{\dot{y}(t)}{Q(x(t), y(t))}. \tag{5.4}$$

Выполним замену параметра $\tau = \varphi(t)$, где $\varphi(t) = \int K(t)dt$. Так как $\dot{\varphi}(t) = K(t) \neq 0$ в силу (2.3), то замена параметра допустима. Положим также $u(\tau) = x(\varphi^{-1}(\tau))$, $v(\tau) = y(\varphi^{-1}(\tau))$. Кривые $u(\tau, v(\tau))$ и $(x(t), y(t))$ эквивалентны, так как $u(\varphi(t)) = x(t)$, $v(\varphi(t)) = y(t)$, $t \in <\alpha, \beta>$.

Покажем, что

$$\begin{cases} u'(\tau) = P(u(\tau), v(\tau)), \\ v'(\tau) = Q(u(\tau), v(\tau)). \end{cases}$$

Так как $(x(t), y(t))$ — решение уравнения (5.3), то

$$\dot{x}(t) = u'(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = \frac{P(x(t), y(t))}{Q(x(t), y(t))}\dot{y}(t).$$

В силу (5.4) $u'(\tau) = P(u(\tau), v(\tau))$.

Аналогично, $v'(\tau) = Q(u(\tau), v(\tau))$, так как $v'(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = \dot{y}(t) = K(t)Q(x(t), y(t))$. $\square$

Следствие. В области G без точек покоя траектории системы (5.1) совпадают с интегральными кривыми уравнения (5.3).

Замечание 5.1. Если к области определения D уравнения (2.1) добавить особые точки (x, y), для которых $M(x, y) = N(x, y) = 0$, то, добавляя эти точки к интегральным кривым, можно получить интегральные кривые, для которых свойство единственности нарушается.

Рассмотрим пример 2.2. Если к интегральным кривым добавить начало координат, то получим семейство прямых, проходящих через начало координат. Следовательно, в начале координат нарушается единственность.

Пример 5.1. Круговой математический маятник. Круговой математический маятник — это тяжелая точка, которая движется в вертикальной плоскости по окружности. Обозначая через $x(t)$ угол поворота маятника в момент t от его нижнего положения, получим при определенном радиусе окружности дифференциальное уравнение второго порядка $\ddot{x} + \sin x = 0$. Полагая $\dot{x} = y$, получаем автономную систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x, \end{cases}$$

положения равновесия которой — это точки $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Остальные траектории — это интегральные кривые дифференциального уравнения в симметричной форме $\sin x dx + y dy = 0$, интеграл которого имеет вид

$$U(x, y) = \int \sin x dx + \int y dy.$$

Рассмотрим движения с начальной точкой $(2\pi k, y_0)$, $k \in \mathbb{Z}$, $y_0 \neq 0$. Их траектории определяются в силу (3.6) уравнением

$$\int\limits_{2\pi k}^{x} \sin s ds + \int\limits_{y_0}^{y} s ds = 0$$

или

$$y^2 + 4\sin^2 \frac{x}{2} = y_0^2.$$

При $0 <| y_0 |< 2$ траектории — замкнутые кривые, охватывающие положения равновесия $(2\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, и лежащие внутри замкнутых кривых

$y^2 + 4\sin^2\frac{x}{2} = 4$. Последние разбиваются положениями равновесия $((2k+1)\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, на две траектории.

При $\mid y_0 \mid > 2$ траектории — это графики периодических функций переменной x в полуплоскостях $y > 0$, либо $y < 0$.

Величины y_0 — это начальные скорости. Таким образом, движения маятника либо колебательные (при $0 <\mid y_0 \mid < 2$), либо вращательные (при $\mid y_0 \mid > 2$), либо положения равновесия.

Движения, соответствующие $y_0 = \pm 2$, на практике не реализуются ввиду их неустойчивости.

§ 6. *Сведение к дифференциальному уравнению, разрешенному относительно производной*

Рассмотрим решение $(x(t), y(t))$ уравнения (2.1). По теореме 1.2, если $\dot{x}(t_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки t_0 за параметр можно принять x, причем интегральная кривая окажется графиком гладкой функции $\varphi(x)$, определенной в некоторой окрестности точки $x_0 = x(t_0)$.

Так как $(x, \varphi(x))$ является решением уравнения (2.1), то в указанной окрестности

$$M(x, \varphi(x)) + N(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0,$$

откуда

$$\varphi'(x) = -\frac{M(x, \varphi(x))}{N(x, \varphi(x))}.$$

При этом в силу (2.3) $N(x, \varphi(x)) \neq 0$.

Положим $f(x, y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$. Функция $f(x, y)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности G точки (x_0, y_0), где $y_0 = \varphi(x_0)$.

Итак, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению вида

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

с неизвестной функцией $y(x)$. Такое уравнение называется дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной. Любое его решение $y = \varphi(x),\ x \in <\alpha, \beta>$, определяет в силу (2.2) решение $(x, \varphi(x))$ дифференциального уравнения в симметричной форме $f(x,y)dx - dy = 0$, так как $f(x, \varphi(x)) - \varphi'(x) = 0$.

Если $\dot{y}(t_0) \neq 0$, то интегральная кривая уравнения (2.1) является графиком гладкой функции $\psi(y)$, определенной в некоторой окрестности точки $y_0 = y(t_0)$. Аналогично предыдущему оказывается, что функция $\psi(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dy} = g(x(y), y), \tag{6.1}$$

где $g(x,y) = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}$ — гладкая в некоторой окрестности H точки (x_0, y_0), где $x_0 = x(t_0)$, так как можно считать, что $M(x,y) \neq 0$ в области H.

Итак, для каждой точки области D можно указать ее окрестность, в которой уравнение (2.1) эквивалентно по крайней мере одному из двух уравнений, разрешенных относительно производной. Например, линейное неоднородное дифференциальное уравнение (4.5) эквивалентно уравнению

$$y' = p(x)y + q(x).$$

Следовательно, теоремы 2.2 и 3.1 достаточно доказать для дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной.

Это будет сделано в следующих двух параграфах.

§ 7. *Существование и единственность решения задачи Коши*

В этом параграфе мы докажем теорему 2.2. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной с неизвестной дифференцируемой функцией $y(x),\ x \in <\alpha, \beta>$:

$$y'(x) = f(x, y(x)). \tag{7.1}$$

Мы предполагаем, что функция $f(x, y)$ непрерывна в области $G \subset \mathbb{R}^2$. В дальнейшем на f будут наложены дополнительные ограничения. Будем решать задачу Коши с начальной точкой $(x_0, y_0) \in G$, т.е. будем искать решение уравнения (7.1), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Наряду с задачей Коши для уравнения (7.1) рассмотрим интегральное уравнение

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \tag{7.2}$$

с неизвестной непрерывной функцией $y(x),\ x \in <\alpha, \beta>$.

Очевидно, задача Коши для уравнения (7.1) эквивалентна решению уравнения (7.2).

Рассмотрим прямоугольник

$$R = \{(x, y) :\mid x - x_0 \mid\leq a,\ \mid y - y_0 \mid\leq b\}.$$

Выберем $a > 0$ и $b > 0$ столь малыми, чтобы было $R \subset G$. Положим $M = \max\limits_{(x,y)\in R} \mid f(x, y) \mid,\ h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. Отрезок $\mid x - x_0 \mid\leq h$ называется отрезком Пеано.

Теорема 7.1. Пусть частная производная f_y существует и непрерывна. Тогда:

I) решение задачи Коши существует на отрезке Пеано;

II) любые два решения задачи Коши совпадают на общем промежутке существования.

Доказательство.

I. Пусть $L = \max\limits_{(x,y)\in R} \mid f_y(x,y) \mid$. Рассмотрим последовательные приближения по Пикару:

$$\varphi_0(x) = y_0,$$
$$\varphi_k(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, \varphi_{k-1}(s))ds, \;\; k \in \mathbb{N}. \qquad (7.3)$$

Покажем, что при всех $k \in \mathbb{N}$:

1) $\varphi_k(x)$ определена на отрезке Пеано, причем $(x, \varphi_k(x)) \in R$;

2) на отрезке Пеано выполняется неравенство

$$\mid \varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x) \mid \leq \frac{M(L \mid x - x_0 \mid)^k}{Lk!}. \qquad (7.4)$$

Доказательство проведем индукцией по k. При $k = 1$ утверждение 1 выполняется, так как на отрезке Пеано $\mid x - x_0 \mid \leq h \leq a$,

$$\mid \varphi_1(x) - y_0 \mid \leq \mid \int\limits_{x_0}^{x} \mid f(s, y_0) \mid ds \mid \leq M \mid x - x_0 \mid \leq b.$$

Этим доказано и неравенство (7.4) при $k = 1$, так как $\varphi_0 = y_0$.

Предполагая справедливость сделанных утверждений для первых k приближений, докажем их справедливость и для φ_{k+1}.

1. На отрезке Пеано:

$$\mid \varphi_{k+1} - y_0 \mid \leq \mid \int\limits_{x_0}^{x} \mid f(s, \varphi_k) \mid ds \mid \leq M \mid x - x_0 \mid \leq b.$$

2. По формуле Лагранжа:

$$\mid f(x, y_1) - f(x, y_2) \mid \leq L \mid y_1 - y_2 \mid,$$

если $(x,y_1)\in R$, $(x,y_2)\in R$. Используя индукционное предположение, находим

$$|\,\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)\,|\le\Big|\int\limits_{x_0}^{x}|\,f(s,\varphi_k(s))-f(s,\varphi_{k-1}(s))\,|\,ds\,\Big|\le$$

$$\le L\int\limits_{x_0}^{x}|\,\varphi_k(s)-\varphi_{k-1}(s)\,|\,ds.$$

В силу (7.4)

$$|\,\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)\,|\le\frac{M(L\,|\,x-x_0\,|)^{k+1}}{L(k+1)!}.$$

Итак, утверждения 1 и 2 справедливы при всех натуральных k.

Осталось доказать, что последовательность (7.3) сходится к решению интегрального уравнения (7.2) при $k\to\infty$. Сходимость этой последовательности эквивалентна сходимости ряда $y_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x))$. Этот ряд мажорируется в силу (7.4) сходящимся числовым рядом $|\,y_0\,|+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{M(Lh)^k}{Lk!}$. Следовательно, последовательность пикаровых приближений сходится равномерно на отрезке Пеано к непрерывной функции $\varphi(x)$. Переходя в (7.3) к пределу при $k\to\infty$, заключаем, что $\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (7.2), а значит, и задаче Коши для уравнения (7.1). Тем самым доказано утверждение I.

Докажем утверждение II. Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — решения, определенные на промежутке $<\alpha,\beta>$, содержащем точку x_0, причем $\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)=y_0$. Пусть $E\subset$ $\subset\ <\alpha,\beta>$ — множество точек x, на котором $\varphi_1(x)=$ $=\varphi_2(x)$. Покажем, что точка x_0 — внутренняя для множества E.

Действительно, рассмотрим разность

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \int\limits_{x_0}^{x} (f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s)))ds.$$

Существует окрестность точки x_0, в которой

$$\mid f(x, \varphi_1(x)) - f(x, \varphi_2(x)) \mid \leq L \mid \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \mid .$$

Положим $u(x) = \mid \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \mid$. Тогда

$$0 \leq u(x) \leq L \mid \int\limits_{x_0}^{x} u(s)ds \mid .$$

Отсюда следует, что $u(x) = 0$.

Действительно, пусть $x \geq x_0$. Положим $U(x) = \int\limits_{x_0}^{x} u(s)ds$. Умножим неравенство $U'(x) \leq LU(x)$ на интегрирующий множитель $\mu(x) = e^{-L(x-x_0)}$. Получим неравенство $\frac{d}{dx}\left(e^{-L(x-x_0}U(x)\right) \leq 0$. Интегрируя его в пределах от x_0 до x, получим $U(x) \leq 0$. Следовательно, $u(x) = 0$.

Таким образом, точка x_0 — внутренняя для множества E. Но это относится и к любой другой точке множества E. Следовательно, множество E открыто. Но оно и замкнуто в силу непрерывности $u(x)$ на промежутке $< \alpha, \beta >$. Следовательно, $E = < \alpha, \beta >$. $\square$

Тем самым доказана и теорема 2.2. Похожим образом доказывается и теорема 5.1.

Вообще говоря, постоянная h, определяющая длину отрезка Пеано, зависит от выбора начальной точки (x_0, y_0). В этом отношении теорему 7.1 можно уточнить следующим образом.

Теорема 7.2. Для любой точки $(x^*, y^*) \in G$ можно указать окрестность $V \subset G$, для которой постоянная $h > 0$ не зависит от выбора начальной точки $(x_0, y_0) \in V$.

В качестве V можно взять внутренность прямоугольника R с центром в точке (x^*, y^*), если прямоугольник с тем же центром и вдвое большими сторонами принадлежит множеству G. При этом постоянную M следует определять по большему прямоугольнику.

Следствие. Таким же, как и окрестность V, свойством обладает любое компактное подмножество K области G.

Действительно, рассмотрим открытое покрытие K окрестностями V его точек, обладающих свойством, указанным в теореме 7.2. Рассмотрим конечное подпокрытие K окрестностями $V_1, \dots, V_N$, существующее в силу компактности K. Каждой окрестности $V_i,\ i = 1, \dots, N$, соответствует постоянная $h_i > 0$. Тогда $h = \min\{h_1, \dots, h_N\}$.

Продолжение интегральной кривой. Рассмотрим решение $\varphi(x)$, определенное на отрезке Пеано $| x - x_0 | \leq h$. Примем точку $(x_0 + h, \varphi(x_0 + h))$ за начальную в задаче Коши. Положим $x_1 = x_0 + h$, $y_1 = \varphi(x_0 + h)$. По теореме 7.1 существует единственное решение $\psi(x)$, определенное на отрезке $| x - x_1 | \leq h_1$ и удовлетворяющее условию $y_1 = \psi(x_1)$. В результате получим решение

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x \in [x_0 - h, x_0 + h], \\ \psi(x) & \text{при } x \in [x_0 + h, x_0 + h + h_1], \end{cases} \tag{7.5}$$

определенное на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h + h_1]$. Решение $\varphi_1(x)$ называется продолжением решения $\varphi(x)$ вправо за точку $x_0 + h$. Такую процедуру можно выполнять неограниченное количество раз.

Аналогично определяется продолжение решения влево.

Для продолжения интегральных кривых уравнения (2.1) можно использовать не только уравнение (7.1), но и уравнение (6.1).

§ 8. *Существование интеграла*

Пусть выполнены условия теоремы 7.1, в частности частная производная $f_y(x, y)$ существует и непрерывна в области определения G функции $f(x, y)$. В этом параграфе мы для каждой точки $(x^*, y^*) \in G$ построим окрестность, в которой определен интеграл дифференциального уравнения (7.1). Тем самым будет доказана теорема 3.1.

Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — решения уравнения (7.1), определенные на интервале (a, b), содержащем точку x^*, для которых $\varphi_1(x^*) < y^* < \varphi_2(x^*)$. Рассмотрим окрестность

$$A = \{(x, y) : a < x < b,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$$

точки (x^*, y^*), и пусть $\overline{A}$ — замыкание A, $\overline{A} \subset G$.

Обозначим через $y(x, x_0, y_0)$ решение с начальными данными $(x_0, y_0) \in A$. В силу единственности решения задачи Коши графики этих решений и решений $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ не имеют общих точек. По следствию из теоремы 7.2 решение $y(x, x_0, y_0)$ может быть продолжено на отрезок $[a, b]$. Следовательно, решение $y(x, x_0, y_0)$ определено при $x = x^*$, и пусть

$$C = y(x^*, x_0, y_0).$$

Очевидно, $\varphi_1(x^*) < C < \varphi_2(x^*)$. Следовательно, при $x \in [a, b]$

$$y(x, x_0, y_0) = y(x, x^*, C), \tag{8.1}$$

так как слева и справа стоят решения, совпадающие при $x = x^*$. Положим

$$U(x_0, y_0) = y(x^*, x_0, y_0),\ \varphi(x, C) = y(x, x^*, C) \tag{8.2}$$

при $(x_0, y_0) \in A$, $x \in [a, b]$, $C \in (\varphi_1(x^*), \varphi_2(x^*))$. Равенство $U(x_0, y_0) = C$ верно не только в точке (x_0, y_0), но и на всей интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0), т.е. в силу (8.1) и (8.2):

$$C = U(x, \varphi(x, C)),\ x \in [a, b]. \tag{8.3}$$

Таким образом, $U(x, y)$ обращается в постоянную вдоль любой интегральной кривой в области A. Функции $y = \varphi(x, C)$ и $C = U(x, y)$ — взаимно обратные функции переменных C и y.

Так как интегральные кривые заполняют всю область A и не имеют общих точек, то функция $\varphi(x, C)$ непрерывна при $x \in [a, b]$, $\varphi_1(x^*) \leq C \leq \varphi_2(x^*)$, и строго возрастает по C. Функция $y = \varphi(x, C)$ называется *общим решением* дифференциального уравнения (7.1) в области A.

Осталось доказать, что $U(x, y)$ непрерывно дифференцируема по x и y и $U_x^2 + U_y^2 > 0$. При этом достаточно доказать, что $U_y \neq 0$. По теореме о неявной функции это вытекает из существования и непрерывности $\varphi_C \neq 0$.

Теорема 8.1. Если в уравнении (7.1) f_y существует и непрерывна, то φ_C существует, непрерывна и $\varphi_C > 0$.

Доказательство. Воспользуемся определением частной производной. Составим приращение $\Delta\varphi = \varphi(x, C + \Delta C) - \varphi(x, C)$. Так как $\varphi(x, C)$ — решение уравнения (5.1), то

$$\frac{d(\Delta\varphi)}{dx} = f(x, \varphi(x, C + \Delta C)) - f(x, \varphi(x, C)).$$

Следовательно,

$$\frac{d(\Delta\varphi)}{dx} = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds} f(x, \varphi(x, C) + s(\Delta\varphi))ds.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$\frac{d(\Delta\varphi)}{dx} = (\Delta\varphi) \int\limits_0^1 f_y(x, \varphi(x, C) + s(\Delta\varphi))ds.$$

Положим $z(x, \Delta C) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta C}$, $\Delta C \neq 0$. Тогда $z(x, \Delta C)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dx} = p(x, \Delta C)z,$$

где

$$p(x, \Delta C) = \int\limits_0^1 f_y(x, \varphi(x, C) + s(\Delta\varphi))ds$$

при начальном условии $z(x^*, \Delta C) = 1$, так как в силу (8.2):

$$\varphi(x^*, C) = C,\ \varphi(x^*, C + \Delta C) = C + \Delta C.$$

Однако функция $p(x, \Delta C)$ определена и при $\Delta C = 0$, причем $p(x, 0) = f_y(x, \varphi(x, C))$. В силу (3.8)

$$\varphi_C(x, C) = \lim_{\Delta C \to 0} z(x, \Delta C) = \lim_{\Delta C \to 0} e^{\int\limits_{x^*}^{x} p(s, \Delta C)ds},$$

т.е. φ_C существует и

$$\varphi_C = e^{\int\limits_{x^*}^{x} f_y(s, \varphi(s, C))ds} > 0. \quad \square$$

Продолжение интеграла. Мы построили интеграл в окрестности A интегральной кривой $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$, уравнения (7.1), проходящей через точку (x^*, y^*). Обозначим этот интеграл через $U_1(x, y)$, $(x, y) \in A$. Меняя ролями x и y, можно построить интеграл в окрестности интегральной кривой $x = \psi(y)$ уравнения (6.1).

Пусть $M(b, \varphi(b)) \neq 0$ и разность $\varphi_2(b) - \varphi_1(b)$ достаточно мала (случай $N(b, \varphi(b)) \neq 0$ рассмотрен выше). Продолжим интегральную кривую $y = \varphi(x)$ за точку b с помощью интегральной кривой $x = \psi(y)$ уравнения (6.1), определенной на отрезке $[c, d]$, содержащем отрезок $[\varphi_1(b), \varphi_2(b)]$ внутри себя.

По аналогии с областью A, меняя x и y ролями, построим область B и интеграл $U_2(x,y),\ (x,y)\in B$. Область $B\cap$ $\cap A=D_0$ не пуста по построению. В ней определено общее решение $y=\widetilde{\varphi}(x,C)$, являющееся сужением общего решения (8.2) на D_0. В силу (8.3) $U_1(x,\widetilde{\varphi}(x,C))=C$, а по определению интеграла $U_2(x,\widetilde{\varphi}(x,C))=\Phi(C)$, причем $\Phi'\neq 0$. Следовательно, $U_2(x,\widetilde{\varphi}(x,C))=\Phi\left(U_1(x,,\widetilde{\varphi}(x,C))\right)$. Положим

$$U(x,y)=\begin{cases}U_2(x,y), & \text{если } (x,y)\in B,\\ \Phi(U_1(x,y)), & \text{если } (x,y)\in A.\end{cases}$$

Очевидно, $U(x,y)$ — интеграл уравнения (2.1). Его естественно назвать продолжением интеграла $U_2(x,y)$ в область $B\cup A$ вдоль интегральной кривой, проходящей через точку (x^*,y^*).

Замечание 8.1. Если поменять ролями области A и B, то получим продолжение интеграла $U_1(x,y)$ в область $A\cup B$ по формуле

$$U(x,y)=\begin{cases}U_1(x,y), & \text{если } (x,y)\in A,\\ \Phi^{-1}(U_2(x,y)), & \text{если } (x,y)\in B.\end{cases}$$

Замечание 8.2. Попутно доказано, что любые два интеграла $U_1(x,y)$ и $U_2(x,y)$ уравнения (2.1) связаны соотношением $U_2=\Phi(U_1)$ в общей области определения, причем $\Phi'\neq 0$.

§ 9. *Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной*

Дифференциальным уравнением, не разрешенным относительно производной в симметричной форме, называется уравнение

$$F(x,y;dx,dy)=0, \tag{9.1}$$

где функция F определена и непрерывно дифференцируема в области $H\times\mathbb{R}^2,\ (x,y)\in H\subset\mathbb{R}^2$, и однородна степени k по dx, dy, т.е.

$$F(x,y;tdx,tdy) = t^k F(x,y;dx,dy),\ t \in \mathbb{R}.$$

Определение 9.1. Решением уравнения (9.1) называется регулярная кривая $(x(t), y(t))$, $t \in <\alpha, \beta>$, если при $t \in <\alpha, \beta>$

$$F(x(t), y(t); \dot{x}(t), \dot{y}(t)) = 0. \tag{9.2}$$

Теорема 9.1. Регулярная кривая, эквивалентная решению уравнения (9.1), также является решением этого уравнения.

Доказательство. Пусть регулярная кривая $(u(\tau),\, v(\tau))$, $\tau \in <\gamma,\, \delta>$, эквивалентна решению $(x(t), y(t))$, $t \in <\alpha,\, \beta>$. Согласно определению эквивалентности существует допустимая замена параметра $\tau = \tau(t)$, при которой тождество (9.2) принимает вид

$$F(u(\tau(t)), v(\tau(t)); u'(\tau(t)\tau', v'(\tau(t))\tau') = 0.$$

Используя однородность F и условие $\tau' \neq 0$, получаем

$$F(u(\tau), v(\tau); u'(\tau), v'(\tau)) = 0. \quad \square$$

Геометрическая кривая, порождаемая решением уравнения (9.1), определяет интегральную кривую. Локально интегральная кривая является графиком гладкой функции.

Если, например, $\dot{x}(t_0) \neq 0$, то в окрестности точки $x_0 = x(t_0)$ интегральная кривая является графиком функции $y = \varphi(x)$ с параметризацией $(x, \varphi(x))$. По определению решения $F(x, \varphi(x); 1, \varphi'(x)) = 0$. Положим $F(x, y; 1, v) = f(x, y, v)$. Следовательно, функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$f(x, y, y') = 0, \tag{9.3}$$

которое называется дифференциальным уравнением первого порядка, не разрешенным относительно производной.

При $k = 1$ уравнение (9.1) превращается в уравнение Пфаффа (2.1). Рассмотрим подробнее случай $k = 2$, т.е. случай, когда F является квадратичной формой переменных dx, dy. Уравнение (9.1) запишем в виде

$$a(x,y)dx^2 + 2b(x,y)dxdy + c(x,y)dy^2 = 0, \qquad (9.4)$$

где функции a, b, c определены и непрерывно дифференцируемы в области H. Рассмотрим дискриминант $d(x,y) = b^2 - ac$. Возможны три случая: $d > 0$; $d = 0$; $d < 0$.

В последнем случае уравнение (9.4) не имеет решений, так как равенство (9.2) вырождается в $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$.

Обозначим подмножество области H, определяемое равенством $d = 0$, через Δ, а область, определяемую неравенством $d > 0$, через D. Множество Δ называется дискриминантной кривой. В области D уравнение (9.4) раскладывается на множители:

$$(M_1(x,y)dx + N_1(x,y)dy)(M_2(x,y)dx + N_2(x,y)dy) = 0,$$

и, следовательно, распадается на два дифференциальных уравнения вида (2.1). Каждое из этих уравнений задает в D поле направлений. На множестве Δ эти поля сливаются в одно.

Поэтому при постановке задачи Коши следует фиксировать не только начальную точку $(x_0, y_0) \in D$, но и одно из двух возможных направлений поля, т.е. фиксировать угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в точке (x_0, y_0).

Пример 9.1. Рассмотрим уравнение

$$ydx^2 - xdxdy + dy^2 = 0. \qquad (9.5)$$

Здесь $H = \mathbb{R}^2$, дискриминантная кривая — это парабола $y = \frac{x^2}{4}$, область D определяется неравенством $y < \frac{x^2}{4}$.

Так как кривая $(x, \frac{x^2}{4})$ удовлетворяет уравнению (9.5), то дискриминантная кривая является интегральной кривой этого уравнения.

В области D уравнение (9.5) распадается на два уравнения Пфаффа:

$2dy-(x+\sqrt{x^2-4y})dx = 0$ и $2dy-(x-\sqrt{x^2-4y})dx = 0$.

Каждое из этих уравнений подстановкой $y = zx^2$ $(z < \frac{1}{4})$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Перейдем к рассмотрению случая, когда интегральная кривая является графиком функции переменной x. Дифференциальное уравнение можно представить в виде (9.3).

Пусть $f(x, y, v)$ определена и непрерывно дифференцируема в области $Q \subset \mathbb{R}^3$, причем $(f_x)^2 + (f_y)^2 + (f_v)^2 > 0$.

Будем искать решение $y = \varphi(x)$ с начальными данными $(x_0, y_0, v_0) \in Q,\ f(x_0, y_0, v_0) = 0$, т.е. решение, удовлетворяющее условиям $\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi'(x_0) = v_0$.

Возможны три случая:

1)$f_v(x_0, y_0, v_0) \neq 0$; 2)$f_y(x_0, y_0, v_0) \neq 0$; 3)$f_x(x_0, y_0, v_0) \neq 0$.

По теореме о неявной функции в каждом из этих случаев равенство $f(x, y, v) = 0$ порождает непрерывно дифференцируемую функцию двух переменных. В первом случае получаем уравнение $y' = p(x, y)$, во втором — $y = g(x, y')$, в третьем — $x = h(y, y')$.

Случаи 2 и 3 сводятся один к другому изменением ролей переменных x и y. Первый случай был изучен ранее. Рассмотрим случай 2, т.е. рассмотрим уравнение

$$y = g(x, y'), \tag{9.6}$$

где функция $g(x, v)$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), $y_0 = g(x_0, v_0)$.

Предположим сначала, что $g_v(x_0, v_0) \neq 0$. Тем самым имеет место также и случай 1. Следовательно, решение рассматриваемой задачи Коши существует и единственно.

Сопоставим с (9.6) систему

$$\begin{cases} y = g(x, v), \\ (g_x - v)dx + g_v dv = 0. \end{cases} \tag{9.7}$$

Рассмотрим второе уравнение в (9.7) в окрестности точки (x_0, v_0), где $g_v(x, v) \neq 0$. Тогда оно примет вид

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v - g_x}{g_v}.$$

Это дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной. Пусть $v(x)$ — решение этого уравнения с начальными данными (x_0, v_0).

Образуем функцию $\varphi(x) = g(x, v(x))$.

Теорема 9.2. Функция $\varphi(x)$ является решением уравнения (9.6) с начальными данными $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = v_0$.

Доказательство. Имеем $\varphi(x_0) = g(x_0, v_0) = y_0$. Далее,

$$\varphi' = g_x + g_v v' = g_x + g_v \frac{v - g_x}{g_v} = v.$$

Итак, $\varphi(x) = g(x, \varphi'(x))$ и $\varphi'(x_0) = v(x_0) = v_0$. $\square$

Пусть теперь $g_v(x_0, v_0) = 0$. Рассмотрим множество Δ на плоскости Oxy, определяемое системой

$$\begin{cases} y = g(x, v), \\ g_v(x, v) = 0, \end{cases} \tag{9.8}$$

где v — параметр, изменяющийся в окрестности точки v_0. Множество Δ называется дискриминантной кривой. Оно совпадает с дискриминантной кривой уравнения (9.4).

Предположим, что вторая производная существует, непрерывна и $g_{vv}(x_0, v_0) \neq 0$. Тогда второе уравнение (9.8) определяет в окрестности точки x_0 функцию $v = v(x)$, $v(x_0) = v_0$. Как и ранее, полагаем $\varphi(x) = g(x, v(x))$.

Теорема 9.3. Если $g_x(x, v(x)) = v(x)$, то $\varphi(x)$ — решение уравнения (9.6) с начальными данными (x_0, y_0, v_0).

Доказательство. Имеем

$$\varphi(x_0) = g(x_0, v_0) = y_0,$$

$$\varphi'(x) = g_x(x, v(x)) + g_v(x, v(x))v'(x) = v(x). \tag{9.9}$$

Следовательно, $\varphi(x) = g(x, \varphi'(x))$ и $\varphi'(x_0) = v(x_0) = v_0$. $\square$

Построенное в теореме 9.3 решение называется особым. Вдоль особого решения оба коэффициента при dx и dy второго уравнения (9.7) обращаются в 0.

Частный случай — уравнение Клеро $y = xy' + p(y')$, где $p(v)$ — дважды непрерывно дифференцируемая на интервале (a, b) функция. Уравнение (9.7) имеет вид $(x + p'(v))dv = 0$. Следовательно, либо $\dot{v} = 0$, тогда $v = C$, либо $p'(v) + x = 0$, тогда

$$x = -p'(v), \quad y = -p'(v)v + p(v), \tag{9.10}$$

что совпадает с дискриминантной кривой (9.8).

В первом случае получаем семейство прямых $y = Cx + p(C)$, $C \in (a, b)$. Это общее решение уравнения Клеро.

Рассмотрим второй случай. Уравнения (9.10) задают дискриминантную кривую. Если $p_{vv} \neq 0$, то первое уравнение (9.10) определяет обратную функцию $v(x)$, причем по теореме 9.3 $\varphi(x) = xv(x) + p(v(x))$ является особым решением уравнения Клеро. В силу (9.9) прямая $y = Cx + p(C)$ является касательной к графику особого решения в точке с абсциссой x_0 при $C = v(x_0)$.

Вернемся к рассмотрению примера 9.1. Это уравнение Клеро. В этом случае второе уравнение (9.7) имеет вид $(x - 2v)dv = 0$. Общее решение — семейство прямых $y =$

$= Cx - C^2$. Особое решение — дискриминантная кривая $\begin{cases} y = vx - v^2 \\ x - 2v = 0 \end{cases}$, откуда $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$.

Формула $y = Cx - C^2$ содержит в себе общее решение уравнения $2y' = x + \sqrt{x^2 - 4y}$ (при $x < 2C$) и уравнения $2y' = x - \sqrt{x^2 - 4y}$ (при $x > 2C$). При этом $2C$ является абсциссой точки касания графика особого решения и прямой $y = Cx - C^2$.

Глава II. УРАВНЕНИЕ ПФАФФА В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Регулярная параметризованная поверхность

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3$ с прямоугольными координатами $Oxyz$. Пусть $\overline{r} = (x, y, z)$ — вектор, U — область в $\mathbb{R}^2$ с координатами u, v.

Определение 1.1. Непрерывное отображение $\overline{r}\colon U \to \mathbb{R}^3$ называется параметризованной поверхностью. Параметризованная поверхность называется гладкой, если существуют и непрерывны частные производные $\overline{r}_u(u, v)$ и $\overline{r}_v(u, v),\ (u, v) \in U$. Гладкая поверхность называется регулярной, если векторы $\overline{r}_u$ и $\overline{r}_v$ линейно независимы.

Если $\overline{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, то линейная независимость $\overline{r}_u$ и $\overline{r}_v$ эквивалентна условию

$$rank \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2.$$

Множество, образованное концами векторов $\overline{r}(u, v)$, отложенных от начала координат, называется графиком параметризованной поверхности $\overline{r}(u, v)$.

Допустима терминология: график поверхности — поверхность, а параметризованная поверхность — параметризация поверхности.

График гладкой функции $z = f(x, y), (x, y) \in U$, в обычной терминологии — это график регулярной поверхности $(x, y, f(x, y))$.

Рассмотрим замену параметров $T\colon\ t = \varphi(u, v),\ \tau = \psi(u, v),\ (u, v) \in U$. Замена T называется *диффеоморфизмом* области U на область $V = T(U)$, если существует обратное отображение $T^{-1}\colon\ u = f(t, \tau),\ v = g(t, \tau),$

$(t, \tau) \in V$, и оба отображения T и T^{-1} непрерывно дифференцируемы. В курсах анализа доказывается, что гладкое биективное отображение T — диффеоморфизм тогда и только тогда, когда

$$J(u, v) = \det \begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{pmatrix} \neq 0, \ (u, v) \in U.$$

Если же T гладкое, но не обязательно биективное отображение, то справедлива

Теорема об обратной функции. Если T — непрерывно дифференцируемое отображение и $J(u_0, v_0) \neq 0$, $(u_0, v_0) \in U$, то существует окрестность $\widetilde{U}$ точки (u_0, v_0) такая, что сужение T на $\widetilde{U}$ — диффеоморфизм в $\widetilde{U}$.

Определение 1.2. Говорят, что регулярная поверхность $\overline{\rho}(t, \tau)$, $(t, \tau) \in V$, эквивалентна поверхности $\overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in U$, если существует диффеоморфизм области U на область V такой, что $\overline{\rho}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = \overline{r}(u, v)$.

Очевидно, что поверхность $\overline{r}(u, v)$ тоже регулярна.

Множество регулярных поверхностей разбивается на классы эквивалентности. Класс эквивалентности называется геометрической поверхностью. Геометрическая поверхность порождает график.

Определение 1.3. Параметризованная поверхность называется простой, если $\overline{r}(u, v)$ — биекция и обратное отображение непрерывно.

Поверхность, эквивалентная простой, тоже простая.

Пример 1.1. Регулярная параметризация $(x, y, f(x, y))$ графика гладкой функции $z = f(x, y)$ является простой поверхностью.

С помощью теоремы об обратной функции доказываются следующие аналоги теорем 1.1 и 1.2 главы I.

Теорема 1.1. Если $\overline{\rho}(t, \tau)$ и $\overline{r}(u, v)$ — простые регулярные поверхности с одинаковыми графиками, то они эквивалентны.

Теорема 1.2. Для любой точки $(u_0, v_0) \in U$ можно указать окрестность, сужение на которую регулярной в U поверхности эквивалентно простой поверхности, график которой является графиком непрерывно дифференцируемой функции двух переменных.

Замечание 1.1. Пусть

$$\overline{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

Положим

$$\begin{aligned}
\Delta_1(u,v) &= \det\begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}, \\
\Delta_2(u,v) &= \det\begin{pmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{pmatrix}, \qquad (1.1) \\
\Delta_3(u,v) &= \det\begin{pmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Если $\Delta_1(u_0, v_0) \neq 0$, то график поверхности является графиком функции $z = f(x, y)$, определенной в некоторой окрестности точки $(x_0 = x(u_0, v_0),\ y_0 = y(u_0, v_0))$. Аналогично, если $\Delta_2(u_0, v_0) \neq 0$, то график поверхности является графиком функции $y = g(x, z)$, а если $\Delta_3(u_0, v_0) \neq 0$, то $z = h(x, y)$.

Рассмотрим регулярную поверхность $\overline{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ и точку a, соответствующую $u = u_0$, $v = v_0$ на ее графике. Плоскость, проходящая через точку a с направляющими векторами $\overline{r}_u(u_0, v_0)$ и $\overline{r}_v(u_0, v_0)$, называется касательной плоскостью поверхности $\overline{r}(u,v)$. Эквивалентные поверхности имеют одинаковые касательные плоскости. Следовательно, геометрическая поверхность определяет единственную касательную плоскость в каждой точке.

Если график поверхности задается уравнением $U(x, y, z) = C$, $U_x^2 + U_y^2 + U_z^2 > 0$, то градиент $gradU = (U_x, U_y, U_z)$ является нормалью поверхности.

§ 2. Интегральные поверхности уравнения Пфаффа

Дифференциальным уравнением Пфаффа в пространстве называется уравнение

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0, \qquad (2.1)$$

где P, Q, R — гладкие в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^3$ функции, не обращающиеся в ноль одновременно. Нам будет достаточно, чтобы $P, Q, R \in C^1(D)$.

Определение 2.1. Решением уравнения (2.1) называется регулярная поверхность

$$\overline{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \ (u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2,$$

для которой тождественно в области U выполняются равенства:

$$P(x(u,v), y(u,v)z(u,v))x_u +$$
$$+Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v))y_u +$$
$$+R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))z_u = 0; \qquad (2.2)$$

$$P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))x_v +$$
$$+Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v))y_v +$$
$$+R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))z_v = 0,$$

что эквивалентно

$$P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))dx(u,v) +$$
$$+Q(x(u,v), y(u,v)z(u,v))dy(u,v) +$$
$$+R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))dz(u,v) = 0.$$

Пример 2.1. Регулярная поверхность $\overline{r}(u,v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$, $U = \mathbb{R}^2$, является решением уравнения Пфаффа:

$$xdx + ydy + zdz = 0, \ D = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Пример 2.2. Регулярная поверхность

$$(x, y, y^2 - xy)$$

с параметрами $x,\ y \neq 0$ является решением уравнения

$$(z + xy)dx - (z + y^2)dy + ydz = 0.$$

Теорема 2.1. Поверхность, эквивалентная решению уравнения Пфаффа (2.1), тоже является решением этого уравнения.

Доказательство. Пусть $\overline{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in U$, — решение уравнения (1.1), а поверхность $\overline{\rho}(t, \tau) = (\xi(t, \tau), \eta(t, \tau), \zeta(t, \tau)), (t, \tau) \in V$, — эквивалентная ей поверхность. Следовательно, существует допустимая замена параметров (диффеоморфизм U на V) $t = \varphi(u, v)$, $\tau = \psi(u, v)$, такая, что $\xi(\varphi, \psi) = x(u, v)$, $\eta(\varphi, \psi) = y(u, v)$, $\zeta(\varphi, \psi) = z(u, v)$. Продифференцируем это по u и v и подставим в тождества (2.2). Получим тождества:

$$(P(\xi, \eta, \zeta)\xi_t + Q(\xi, \eta, \zeta)\eta_t + R(\xi, \eta, \zeta)\zeta_t)\varphi_u +$$
$$+(P(\xi, \eta, \zeta)\xi_\tau + Q(\xi, \eta, \zeta)\eta_\tau + R(\xi, \eta, \zeta)\zeta_\tau)\psi_u = 0;$$

$$(P(\xi, \eta, \zeta)\xi_t + Q(\xi, \eta, \zeta)\eta_t + R(\xi, \eta, \zeta)\zeta_t)\varphi_v +$$
$$+(P(\xi, \eta, \zeta)\xi_\tau + Q(\xi, \eta, \zeta)\eta_\tau + R(\xi, \eta, \zeta)\zeta_\tau)\psi_v = 0.$$

По свойству диффеоморфизма

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{pmatrix} \neq 0.$$

Следовательно,
$P\xi_t + Q\eta_t + R\zeta_t = 0$ и $P\xi_\tau + Q\eta_\tau + R\zeta_\tau = 0$. $\square$

Следствие. Понятие решения уравнения (2.1) распространяется на геометрическую поверхность. Ее график называется интегральной поверхностью уравнения Пфаффа. Например, интегральной поверхностью в примере 2.1 является сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Определение 2.2. Уравнение Пфаффа (2.1) называется вполне интегрируемым в области D, если через каждую точку области D проходит интегральная поверхность, причем две интегральные поверхности, проходящие через заданную точку, совпадают в некоторой окрестности этой точки.

Геометрическая интерпретация

Уравнение (2.1) задает в каждой точке $(x_0, y_0, z_0) \in D$ плоскость

$$P(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + Q(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) +$$
$$+ R(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

проходящую через эту точку и ортогональную вектору $(P(x_0, y_0, z_0),\ Q(x_0, y_0, z_0),\ R(x_0, y_0, z_0))$. Получается поле плоскостей. Интегральная поверхность — это поверхность, касательные плоскости которой совпадают в каждой точке поверхности с плоскостью поля в этой точке.

Задача Коши ставится так: найти интегральную поверхность, проходящую через данную точку области D.

Рассмотрим решение $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in U$, уравнения Пфаффа и функции $\Delta_k(u, v)$, $\quad k = 1, 2, 3$, определенные равенствами (1.1). В силу регулярности решения $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 > 0$. По условию также

$$P^2(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) + Q^2(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) +$$
$$+ R^2(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) > 0.$$

Лемма 2.1. Справедливы следующие эквивалентности:

$$\begin{cases} \Delta_1(u, v) \neq 0 \Longleftrightarrow R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \neq 0, \\ \Delta_2(u, v) \neq 0 \Longleftrightarrow Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \neq 0, \\ \Delta_3(u, v) \neq 0 \Longleftrightarrow P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \neq 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Доказательство. Ввиду симметрии переменных x, y, z достаточно доказать, что $\Delta_1 = 0 \Longleftrightarrow R = 0$.

Пусть $R=0$. Тогда в силу (2.2) система уравнений

$$\begin{cases} Px_u + Qy_u = 0, \\ Px_v + Qy_v = 0 \end{cases}$$

с неизвестными P, Q должна иметь ненулевое решение. Следовательно, $\Delta_1 = 0$.

Пусть теперь $\Delta_1 = 0$. Тогда либо $\Delta_2 \neq 0$, либо $\Delta_3 \neq 0$ при каждом $(u,v) \in U$. Пусть $\Delta_2 \neq 0$. Рассмотрим систему (2.2) как систему линейных неоднородных уравнений с неизвестными P и R. По формулам Крамера $R = \frac{-Q\Delta_1}{\Delta_2} = 0$. Аналогично, если $\Delta_3 \neq 0$, то $R = \frac{-P\Delta_1}{\Delta_3} = 0$. $\square$

§ 3. Интеграл уравнения Пфаффа

Дважды непрерывно дифференцируемую функцию $U(x,y,z)$ будем называть допустимой, если в области определения $U_x^2 + U_y^2 + U_z^2 > 0$.

Определение 3.1. Допустимая в области $D_0 \subset D$ функция называется интегралом уравнения (2.1), если она обращается в постоянную на любом решении уравнения (2.1), интегральная поверхность которого принадлежит D_0.

Пусть $U(x,y,z)$ — интеграл, $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ — решение уравнения (2.1). Дифференцируя тождество $U(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = C$ по u и v, получим два равенства, получающиеся из (2.2) при замене P, Q, R на U_x, U_y, U_z соответственно. Эквивалентности (2.3) принимают вид:

$$\begin{cases} \Delta_1(u,v) \neq 0 \Longleftrightarrow U_z(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \neq 0, \\ \Delta_2(u,v) \neq 0 \Longleftrightarrow U_y(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \neq 0, \\ \Delta_3(u,v) \neq 0 \Longleftrightarrow U_x(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда и из (2.3) следуют эквивалентности:

$$
\begin{aligned}
R \neq 0 &\Longleftrightarrow U_z \neq 0, \\
Q \neq 0 &\Longleftrightarrow U_y \neq 0, \\
P \neq 0 &\Longleftrightarrow U_x \neq 0.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Векторы $(P,\, Q,\, R)$ и $(U_x,\, U_y,\, U_z)$ коллинеарны, так как они перпендикулярны плоскости поля, определяемого уравнением (2.1) в данной точке. Следовательно,

$$\frac{U_x}{P} = \frac{U_y}{Q} = \frac{U_z}{R} \neq 0. \tag{3.2}$$

Равенство (3.2) дает необходимое и достаточное условие того, что функция $U(x, y, z)$ является интегралом уравнения (2.1).

Обозначим дробь (3.2) через $\mu(x, y, z)$. Функция $\mu(x, y, z)$ называется интегрирующим множителем. В силу (3.2):

$$U_x = \mu P,\ U_y = \mu Q,\ U_z = \mu R. \tag{3.3}$$

Выполним в (2.1) замену переменных, вводя вместо одной из переменных x, y или z новую переменную $w = U(x, y, z)$ в зависимости от того, по какой из переменных частная производная функции U не равна нулю. Получим уравнение $dw = 0$. Например, если $U_z \neq 0$, то

$$dw = U_x dx + U_y dy + U_z(-\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy) = 0$$

в силу (3.1) и (3.2). Следовательно, $w = C$. Так как при этом $\Delta_1 \neq 0$, то мы можем выбрать x и y в качестве параметров. Получим интегральную поверхность (x, y, C).

Рассуждая аналогично в остальных двух случаях, заключаем, что равенство $U(x, y, z) = C$ определяет все интегральные поверхности в области D_0. Оно называется *общим интегралом* уравнения (2.1).

Из равенств $U_{xy} = U_{yx},\ U_{xz} = U_{zx},\ U_{yz} = U_{zy}$ получаем, дифференцируя равенства (3.3):

$$\begin{cases} \mu_x Q - \mu_y P = \mu(P_y - Q_x), \\ \mu_x R - \mu_z P = \mu(P_z - R_x), \\ \mu_y R - \mu_z Q = \mu(Q_z - R_y). \end{cases} \tag{3.4}$$

Будем рассматривать эти равенства как систему уравнений с неизвестными $\frac{\mu_x}{\mu}$, $\frac{\mu_y}{\mu}$, $\frac{\mu_z}{\mu}$. По теореме Кронекера–Капелли условие разрешимости системы (3.4) имеет вид равенства

$$P(Q_z - R_y) - Q(P_z - R_x) + R(P_y - Q_x) = 0, \tag{3.5}$$

которое часто записывают в символической форме:

$$\det \begin{pmatrix} P & Q & P \\ P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = 0.$$

Это равенство называют условием полной интегрируемости уравнения Пфаффа (2.1).

Его выполнение является необходимым условием существования интеграла и интегрирующего множителя. Далее мы покажем, что равенство (3.5) является и достаточным условием существования интеграла в некоторой окрестности любой точки области D.

В этом состоит принципиальная разница между дифференциальными уравнениями Пфаффа на плоскости и в пространстве. Интегральные кривые на плоскости существуют без дополнительных условий, а интегральные поверхности — лишь в исключительных случаях.

§ 4. Уравнение в полных дифференциалах

Так называется уравнение (2.1), если существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $U(x, y, z)$, для которой левая часть уравнения (2.1) является полным дифференциалом функции U, т.е. $Pdx + Qdy + Rdz = dU$, что эквивалентно

$$U_x = P,\ U_y = Q,\ U_z = R. \tag{4.1}$$

Функция U является интегралом уравнения в полных дифференциалах, так как условие (3.3), очевидно, выполняется с $\mu(x, y, z) = 1$. Необходимым условием того, чтобы уравнение (2.1) было уравнением в полных дифференциалах, являются равенства вторых смешанных производных функции U, т.е. равенства:

$$P_y = Q_x,\ P_z = R_x,\ Q_z = R_y. \tag{4.2}$$

Оно же оказывается и достаточным (локально), так как если равенство (4.2) выполняется в окрестности D_0 произвольной точки области D, то функция U определяется формулой

$$U(x, y, z) = \\ = \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, t)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, t, z)dt + \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y, z)dt, \tag{4.3}$$

где (x_0, y_0, z_0) принадлежит замыканию D_0.

Используя (4.2), нетрудно убедиться, что равенства (4.1) имеют место.

Равенства (3.3) показывают, что умножение уравнения (2.1) на интегрирующий множитель превращает любое уравнение (2.1) в уравнение в полных дифференциалах.

Пример 4.1. Рассмотрим уравнение Пфаффа:

$$(2y^2z^3 + 3xyz)dx + (3xyz^3 + 2x^2z)dy + (4xy^2z^2 + 2x^2y)dz = 0$$

при $xyz \neq 0$ или

$$yz(2yz^2 + 3x)dx + xz(3yz^2 + 2x)dy + xy(4yz^2 + 2x)dz = 0.$$

Вид этого уравнения подсказывает, что интегрирующий множитель целесообразно искать в виде функции одной переменной $\omega = xyz$, т.е. $\mu = \mu(\omega)$. Система (3.4) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\mu'}{\mu} yz(3xyz^3 + 2x^2 z) - \dfrac{\mu'}{\mu} xz(2y^2 z^3 + 3xyz) = yz^3 - xz, \\ \dfrac{\mu'}{\mu} yz(4xy^2 z^2 + 2x^2 y) - \dfrac{\mu'}{\mu} xy(2y^2 z^3 + 3xyz) = 2y^2 z^2 - xy, \\ \dfrac{\mu'}{\mu} xz(4xy^2 z^2 + 2x^2 y) - \dfrac{\mu'}{\mu} xy(3xyz^3 + 2x^2 z) = xyz^2. \end{cases}$$

Следовательно, интегрирующий множитель удовлетворяет уравнению $\frac{\mu'}{\mu}\omega = 1$. Полагаем $\mu(\omega) = \omega$, т.е. $\mu = xyz$.

После умножения на интегрирующий множитель получим уравнение

$$(2xy^3z^4 + 3x^2y^2z^2)dx + (3x^2y^2z^4 + 2x^3yz^2)dy +$$
$$+ (4x^2y^3z^3 + 2x^3y^2z)dz = 0.$$

По формуле (4.3) с $x_0 = y_0 = z_0 = 0$:

$$U = \int\limits_0^x (2ty^3z^4 + 3t^2y^2z^2)dt = x^2y^3z^4 + x^3y^2z^2.$$

Частным случаем уравнения в полных дифференциалах является уравнение с разделенными переменными:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(z)dz = 0,$$

если выполняется условие $P_y = Q_x$. Тогда $U(x,y,z) = V(x,y) + \int R(z)dz$, где $V(x,y)$ — интеграл уравнения в полных дифференциалах $Pdx + Qdy = 0$ на плоскости.

Если уравнение (2.1) не является уравнением в полных дифференциалах, но с помощью некоторого интегрирующего множителя можно получить уравнение с разделенными переменными, то такое уравнение естественно назвать уравнением с разделяющимися переменными. К уравнению с разделяющимися переменными приводится однородное уравнение.

Однородным уравнением Пфаффа называется уравнение (2.1), где P, Q, R являются однородными функциями одного и того же порядка $k > 0$. Выполняя замену $x = zu$, $y = zv$ при $z \neq 0$ и сокращая на z^k, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$zP(u, v, 1)du + zQ(u, v, 1)dv +$$
$$+(uP(u, v, 1) + vQ(u, v, 1) + R(u, v, 1))dz = 0.$$

Пример 4.2. Решить уравнение

$$(yz - z^2)dx - xzdy + xydz = 0.$$

Условие (3.5) выполняется. Используя указанную выше замену, получим уравнение

$$(v - 1)zdu - uzdv + u(v - 1)dz = 0.$$

Умножая обе части на $\frac{1}{u(v-1)z}$ ($u \neq 0$, $v \neq 1$, $z \neq 0$), получим уравнение в полных дифференциалах $\frac{du}{u} - \frac{dv}{v-1} + {}$ $+\frac{dz}{z} = 0$, интегрируя которое и учитывая выполненную замену, придем к общему интегралу $\frac{xz}{y-z} = C$, $x \neq 0$, $y \neq z$, $z \neq 0$. Кроме того, интегральными являются плоскости $x = 0$, $z = 0$ и $y = z$, что проверяется непосредственно.

Упражнение 4.1. Найти интегрирующий множитель и общий интеграл уравнения

$$(2yz + 3x)dx + xzdy + xydz = 0.$$

Ответ: $x^3 + x^2yz = C$.

Упражнение 4.2. Найти общий интеграл уравнения

$$2zydx + 2xzdy - xydz = 0.$$

Ответ: $\frac{x^2y^2}{z} = C$.

§ 5. Построение интегральной поверхности

В этом параграфе предполагается, что условие полной интегрируемости (3.5) уравнения (2.1) выполнено. Кроме того, рассматривается случай $R \neq 0$. Это предположение не снижает общности рассмотрений ввиду симметричности переменных x, y, z.

Зафиксируем точку $(x_0, y_0, z_0) \in D$ такую, что $R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, и рассмотрим ее окрестность, где $R(x, y, z) \neq 0$. В силу (2.3) в этой окрестности

$$\det \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \neq 0.$$

По теореме 1.2 за параметры решения можно принять x, y, изменяющиеся в некотором прямоугольнике с центром в точке (x_0, y_0). Тогда решение примет вид $\overline{r}(x, y) = (x, y, z(x, y))$, где $z(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция. В силу (2.2) $P + Rz_x = 0$ и $Q + Rz_y = 0$. Следовательно, если $R \neq 0$, то интегральная поверхность $z = z(x, y)$ удовлетворяет системе двух дифференциальных уравнений с частными производными

$$\begin{cases} z_x = -\dfrac{P}{R}(x, y, z), \\ z_y = -\dfrac{Q}{R}(x, y, z). \end{cases} \tag{5.1}$$

Таким образом, в области $R \neq 0$ уравнение Пфаффа (2.1) эквивалентно системе (5.1). Так как для решения $z(x, y)$ системы (5.1) должно выполняться равенство $z_{xy} = z_{yx}$, то

$$-\left(\frac{P}{R}\right)_y + \left(\frac{P}{R}\right)_z \frac{Q}{R} = -\left(\frac{Q}{R}\right)_x + \left(\frac{Q}{R}\right)_z \frac{P}{R}.$$

Выполняя дифференцирование и домножая полученный результат на R^2, получим равенство (3.5). Следовательно, условие полной интегрируемости является необходимым условием существования решения $z(x, y)$ системы (5.1), удовлетворяющего условию $z(x_0, y_0) = z_0$, а значит, и существования интегральной поверхности уравнения (2.1), проходящей через точку (x_0, y_0, z_0), т.е. решения задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0, z_0).

Мы покажем, что оно оказывается и достаточным. Положим для краткости $-\frac{P}{R} = M$, $-\frac{Q}{R} = N$. Условие полной интегрируемости принимает вид

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y, z(x, y)) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y, z(x, y)). \tag{5.2}$$

Теорема 5.1. Непрерывная функция $z = z(x, y)$, $z_0 = z(x_0, y_0)$, является решением системы (5.1) тогда и только тогда, когда она является решением интегрального уравнения

$$z(x, y) = z_0 + \int\limits_{x_0}^{x} M(t, y_0, z(t, y_0))dt + \int\limits_{y_0}^{y} N(x, t, z(x, t))dt. \tag{5.3}$$

Доказательство. 1. *Необходимость.* Подставим решение $z(x, y)$ в систему (5.1), положим в первом тождестве $y = y_0$ и проинтегрируем его в пределах от x_0 до x. Получим

$$z(x, y_0) = z_0 + \int\limits_{x_0}^{x} M(t, y_0, z(t, y_0))dt, \;\; z_0 = z(x_0, y_0). \tag{5.4}$$

Считая x параметром, проинтегрируем второе тождество в пределах от y_0 до y. Получим

$$z(x,y) = z(x,y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,t,z(x,t))dt,$$

что вместе с (5.4) дает (5.3).

2. *Достаточность.* Продифференцируем (5.3) по x. Получим

$$z_x(x,y) = M(x,y_0,z(x,y_0)) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial N}{\partial x}(x,t,z(x,t))dt.$$

В силу (5.2):

$$z_x(x,y) = M(x,y_0,z(x,y_0)) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial M}{\partial y}(x,t,z(x,t))dt =$$

$$= M(x,y,z(x,y)).$$

Кроме того, дифференцируя (5.3) по y, получим

$$z_y(x,y) = N(x,y,z(x,y)). \quad \square$$

Таким образом, процедура решения уравнения (5.3) сводится к решению двух интегральных уравнений. Сначала уравнения

$$z(x) = z_0 - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{P}{R}(t,y_0,z(t))dt, \tag{5.5}$$

а затем уравнения

$$z(x,y) = z(x) - \int\limits_{y_0}^{y} \frac{Q}{R}(x,t,z(x,t))dt, \tag{5.6}$$

где x — параметр; $z(x)$ — решение уравнения (5.5).

Следовательно, построение интегральной поверхности уравнения Пфаффа (2.1), проходящей через точку (x_0, y_0, z_0), сводится к последовательному решению двух задач Коши для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Сначала с начальными данными (x_0, z_0) для дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{P}{R}(x, y_0, z), \tag{5.7}$$

а затем с начальными данными $(y_0, z(x, y_0))$ для дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{Q}{R}(x, y, z), \tag{5.8}$$

где x — параметр; $z(x, y_0)$ — решение задачи Коши (5.7) с начальными данными (x_0, z_0).

В результате получим решение в виде функции $z(x, y, x_0, y_0, z_0)$, $(x, y) \in V$, где V — прямоугольная окрестность точки (x_0, y_0), построенная с помощью отрезков Пеано. Принимая точки на границе области V за начальные, мы сможем продолжить решение вдоль любой гладкой кривой с началом в точке (x_0, y_0).

Замечание 5.1. Фиксируя x_0, y_0, будем считать $z_0 = C$ произвольной постоянной, изменяющейся в окрестности (C_1, C_2) фиксированного z_0. Если положить $\varphi(x, y, C) = z(x, y, x_0, y_0, C)$, то равенство $z = \varphi(x, y, C)$ называется общим решением, а эквивалентное ему равенство $C = U(x, y, z)$ является общим интегралом уравнения (2.1) в области $(x, y) \in V$, $\varphi(x, y, C_1) < z < \varphi(x, y, C_2)$. Существование и непрерывность необходимых производных доказаны в § 7 и 8 главы I. Общий интеграл можно продолжить вдоль интегральной поверхности аналогично § 8 главы I.

Пример 5.1. Решить уравнение

$$3yzdx + 2xzdy + xydz = 0.$$

Условие полной интегрируемости (3.5) выполняется. В уравнении (5.7) примем $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Тогда (5.7) примет вид $\frac{dz}{dx} = -\frac{3z}{x}$. Отсюда $z(x, z_0) = \frac{z_0}{x^3}$. Задача Коши для уравнения (5.8) принимает вид $\frac{dz}{dy} = -\frac{2xz}{xy} = -\frac{2z}{y}$ с начальными данными $\left(1, \frac{z_0}{x^3}\right)$. Имеем $z = \frac{z_0}{x^3} e^{-\int\limits_1^y \frac{2}{t}dt} = \frac{z_0}{x^3 y^2}$. Окончательно общий интеграл имеет вид $x^3 y^2 z = C$. Интегральные плоскости $x = 0$ и $y = 0$ входят в эту формулу при $C = 0$.

Другие способы решения задачи состоят в использовании очевидного интегрирующего множителя $\frac{1}{xyz}$ или однородности уравнения.

Замечание 5.2. Уравнение примера 5.1 является частным случаем линейного уравнения Пфаффа:

$$(p_1(x, y)z + q_1(x, y))dx + (p_2(x, y)z+$$
$$+q_2(x, y))dy + R(x, y)dz = 0,$$

которое интегрируется в квадратурах, так как дифференциальные уравнения (5.7) и (5.8) оказываются линейными (однородными или неоднородными) дифференциальными уравнениями первого порядка.

Пример 5.2. Решить уравнение

$$(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)dx + dy + 2zdz = 0.$$

Условие (3.5) выполняется. Меняя ролями z и y, получим линейное уравнение с неизвестной функцией $y = y(x, z)$. Зафиксируем $x_0 = z_0 = 0$ и пусть y_0 является произвольной постоянной. Уравнение (5.7) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = -2xy - 2x^2 - 1$$

с начальными данными $(0, y_0)$.

По формуле (4.6) главы I:

$$y(x, y_0) = e^{-x^2}(y_0 - \int\limits_0^x e^{t^2}(2t^2+1)dt).$$

Так как

$$\int\limits_0^x e^{t^2}(2t^2+1)dt = \int\limits_0^x e^{t^2} 2t^2 dt + \int\limits_0^x e^{t^2} dt =$$

$$= \int\limits_0^x t de^{t^2} + \int\limits_0^x e^{t^2} dt = xe^{x^2},$$

то $y(x, y_0) = e^{-x^2} y_0 - x$. Уравнение (5.8) имеет вид $\frac{dy}{dz} = -2z$ с начальными данными $(0, e^{-x^2} y_0 - x)$. Отсюда $y = e^{-x^2} C - x - z^2$ — общее решение, а $C = e^{x^2}(x + z^2 + y)$ — общий интеграл.

Упражнение 5.1. Найти общий интеграл уравнения

$$dz = \frac{1+yz}{1+xy} dx + \frac{zx - x^2}{1+xy} dy.$$

Ответ: $\frac{z-x}{1+xy} = C$.

§ 6. Интегральные кривые

Рассмотрим уравнение (2.1) без выполнения условия полной интегрируемости (3.5). Тогда (3.5) становится уравнением вида $\Phi(x, y, z) = 0$. Если это уравнение определяет некоторую гладкую функцию двух переменных, то может оказаться, что ее график является интегральной поверхностью. Такая ситуация имеет место в примере 2.2.

В этом примере равенство (3.5) имеет вид $\Phi = xy - y^2 + z = 0$. Это равенство определяет гладкую функцию $z = y^2 - xy$. Ее график является интегральной поверхностью, так как регулярная поверхность $\overline{r}(x, y) =$

$= (x, y, y^2 - xy)$ является решением рассматриваемого уравнения Пфаффа.

Но, вообще говоря, при нарушении условия полной интегрируемости интегральных поверхностей не существует.

Определение 6.1. Регулярная кривая $\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in < \alpha, \beta >$ называется решением уравнения Пфаффа (2.1) если при всех $t \in < \alpha, \beta >$ имеет место тождество

$$P(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t) + \\ + R(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t) = 0. \tag{6.1}$$

Аналогично доказательству теоремы 2.1 главы I доказывается, что кривая, эквивалентная решению, тоже решение. График соответствующего класса эквивалентности будем, как и ранее, называть интегральной кривой уравнения (2.1).

Рассмотрим точку A с координатами $(x_0, y_0, z_0) \in D$ и произвольную поверхность $\sum$, проходящую через эту точку и определяемую равенством $U(x, y, z) = 0$, где U — допустимая функция, определенная в некоторой окрестности точки A. Пусть $U_z \neq 0$. Тогда поверхность Σ задается уравнением $z = Z(x, y)$.

Теорема 6.1. Если в точке A функции $PU_z - RU_x$ и $QU_z - RU_y$ не обращаются в ноль одновременно, то существует единственная с точностью до продолжения интегральная кривая уравнения (2.1), проходящая через точку A и принадлежащая поверхности $\sum$.

Доказательство. Регулярная кривая $(x(t), y(t), z(t))$, $z(t) = Z(x(t), y(t))$, удовлетворяет поставленному условию тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$\begin{aligned} &U_x(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t) + U_y(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t) + \\ &+ U_z(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t) = 0; \\ &P(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t) + \\ &+ R(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t) = 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Выразим $\dot{z}$ из первого равенства и подставим во второе. Отсюда заключаем, что рассматриваемая кривая удовлетворяет уравнению Пфаффа на плоскости:

$$(P - R\frac{U_x}{U_z})dx + (Q - R\frac{U_y}{U_z})dy = 0.$$

Утверждение теоремы вытекает из теоремы 2.2 главы I. $\square$

Предположим теперь, что условие полной интегрируемости выполняется, а функция $U(x, y, z)$ — интеграл уравнения (2.1). Тогда поверхность $\sum$ — интегральная. В силу (3.2) второе из равенств (6.2) является следствием первого. Следовательно, любая регулярная кривая, график которой принадлежит интегральной поверхности, является интегральной кривой уравнения (2.1).

Из сказанного вытекает следующий метод построения интегральной поверхности уравнения (2.1), проходящей через данную точку (x_0, y_0, z_0). Пусть $R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Рассмотрим в плоскости переменных x, y семейство гладких путей $x = u(t, \alpha, \beta)$, $y = v(t, \alpha, \beta)$, $t \in [0, 1]$, $\mid \alpha - x_0 \mid < \Delta$, $\mid \beta - y_0 \mid < \Delta$, где $\Delta > 0$ достаточно мало, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} &u(0, \alpha, \beta) = x_0, \ u(1, \alpha, \beta) = \alpha, \ u(t, x_0, y_0) = x_0, \\ &v(0, \alpha, \beta) = y_0, \ v(1, \alpha, \beta) = \beta, \ v(t, x_0, y_0) = y_0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Так как $R(x, y, z)$ можно считать отличным от нуля, то интегральная поверхность, проходящая через точку

(x_0, y_0), является графиком гладкой функции $z = Z(x, y)$, определенной в Δ-окрестности точки (x_0, y_0).

На интегральной поверхности указанным путям соответствуют кривые $(u(t,\alpha,\beta), v(t,\alpha,\beta), w(t,\alpha,\beta))$, где $w = Z(u(t,\alpha,\beta), v(t,\alpha,\beta))$, причем

$$w(1,\alpha,\beta) = Z(\alpha,\beta),\ w(0,\alpha,\beta) = z_0. \tag{6.4}$$

Например, в качестве семейства путей можно взять отрезки прямых

$$u = x_0 + t(\alpha - x_0),\ v = y_0 + t(\beta - y_0),\ t \in [0,1].$$

Таким образом, для построения интегральной поверхности достаточно найти функцию $w(t,\alpha,\beta)$ и положить $t = 1$.

Из (6.2) следует, что функция $w(t,\alpha,\beta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \dot{z} = -\frac{P}{R}(u(t,\alpha,\beta), v(t,\alpha,\beta), z)\dot{u}- \\ -\frac{Q}{R}(u(t,\alpha,\beta), v(t,\alpha,\beta), z)\dot{v} \end{aligned} \tag{6.5}$$

с начальными данными $t = 0$, $z = z_0$. Так как при $\alpha = x_0$, $\beta = y_0$ уравнение (6.5) принимает в силу (6.3) вид $\dot{z} = 0$, а его решение $z(t) = z_0$ определено при $t \in [0,1]$, то это верно при достаточно малом Δ и для решения $w(t,\alpha,\beta)$. Следовательно, $w(t,\alpha,\beta)$ определено при $t = 1$.

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение Пфаффа из примера 5.1. Имеем $-\frac{P}{R} = -\frac{3z}{2}$, $-\frac{Q}{R} = -\frac{2z}{y}$. Положим $u = 1 + t(\alpha - 1)$, $v = 1 + t(\beta - 1)$. Уравнение (6.5) принимает вид

$$\dot{z} = -\frac{3(\alpha-1)z}{1+t(\alpha-1)} - \frac{2(\beta-1)z}{1+t(\beta-1)}.$$

Отсюда

$$z = z_0 e^{\int\limits_0^t \left(\frac{3(1-\alpha)}{1+s(\alpha-1)} + \frac{2(1-\beta)}{1+s(\beta-1)}\right)ds}.$$

Так как

$$\int_0^t \frac{ds}{1+s(\alpha-1)} = \frac{1}{\alpha-1}\ln(1+t(\alpha-1)),$$

$$\int_0^t \frac{ds}{1+s(\beta-1)} = \frac{1}{\beta-1}\ln(1+t(\beta-1)),$$

то $w = z_0(1+t(\alpha-1))^{-3}(1+t(\beta-1))^{-2}$. При $t = 1$ $w = z_0\alpha^{-3}\beta^{-2}$. Итак, интегральная поверхность задается уравнением $z = z_0x^{-3}y^{-2}$ или $z_0 = x^3y^2z$.

Упражнение 6.1. Построить интегральную поверхность уравнения

$$dz = e^{x+y}dx + zdy,$$

проходящую через начало координат.

Ответ: $z = e^{x+y} - e^y$.

§ 7. Историческое отступление — метод Эйлера

Уравнение (2.1) детально исследовал Л. Эйлер. Ниже дословно приводятся его рассуждения на эту тему из сочинения «Интегральное исчисление», т. III (пер. с лат.). Эйлер ставит следующую задачу.

«***Задача 1.*** Пусть z — какая угодно функция двух переменных x и y. Определить свойство дифференциального уравнения, которым выражается соотношение между дифференциалами dx, dy и dz.

Решение. Пусть $Pdx+Qdy+Rdz = 0$ — уравнение, выражающее соотношение между дифференциалами dx, dy и dz, где P, Q и R — какие угодно функции переменных x, y и z. Прежде всего необходимо, чтобы уравнение получалось из некоторого конечного уравнения между этими переменными путем дифференцирования и деления полученного дифференциала на некоторое количество.

Итак, пусть задан некоторый множитель, положим M, после умножения на который выражение $Pdx+Qdy+Rdz$ становится интегрируемым, ибо если бы такого множителя не было, то предложенное дифференциальное уравнение было бы бессмысленным и ничего бы не выражало. Следовательно, всё дело сводится к тому, чтобы указать *критерий*, с помощью которого можно было бы отличить такие бессмысленные и ничего не выражающие уравнения от реальных...»

Далее Эйлер выводит соотношения, аналогичные нашим соотношениям (3.4) при замене μ на M, и, умножая первое из них на R, второе — на $-Q$, третье — на P, и складывая полученные равенства, он приходит к равенству (3.5), которое он называет «критерием для отличия реального уравнения от бессмысленного», а также дает следующее:

«***Пояснение 1.*** В то время как дифференциальное уравнение между двумя переменными всегда реально и всегда им определяется некоторое соотношение между этими переменными, мы выясним, что иначе дело обстоит с дифференциальным уравнением, содержащем три переменные.»

Далее Эйлер предлагает следующий метод интегрирования дифференциального уравнения (2.1).

«***Задача 2.*** Пусть дано дифференциальное уравнение между тремя переменными x, y, z, которое является реальным. Найти его интеграл, из которого вытекает, какой функцией остальных двух переменных является одна из них.

Решение. Пусть предложенное дифференциальное уравнение $Pdx+Qdy+Rdz=0$, такое, что найденный выше критерий удовлетворяется, ибо если бы это уравнение не было реальным, было бы смешно его интегрировать.

Итак, примем, что уравнение реальное, так что существует соотношение между величинами x, y и z, удовлетворяющее заданному дифференциальному уравнению. Чтобы его найти, заметим, что если в интеграле считать постоянной одну из переменных, например z, то, приравнивая нулю дифференциал, мы должны получить уравнение $Pdx + Qdy = 0$. С другой стороны, если считать переменную z постоянной, то интегрирование уравнения $Pdx + Qdy = 0$, которое содержит только две переменные, приводит к некоторому интегралу, только если постоянная интегрирования соответствующим образом зависит от z. Отсюда мы извлекаем следующее правило для интегрирования заданного уравнения.

Будем рассматривать одну из переменных, например z, как постоянную, так что получается уравнение $Pdx + Qdy = 0$, содержащее только две переменные x и y. Находим его полный интеграл, который содержит, следовательно, произвольную постоянную C. Далее постоянная C рассматривается как некоторая функция z, а теперь, считая и z переменным, снова дифференцируем найденный интеграл. Полученное дифференциальное уравнение, в котором все три величины x, y и z рассматриваем как переменные, сравним с заданным уравнением $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Тогда функции P и Q возникают автоматически, а сравнение функции R с полученным коэффициентом при dz определяет зависимость буквы C от z. Таким образом получается искомый интеграл, который будет полным, поскольку буква C содержит произвольную постоянную, так как она определяется своей производной.

Следствие. Если попробовать применить этот метод к невозможному дифференциальному уравнению, то не удастся определить постоянную C таким образом, чтобы она зависела только от той переменной, которую мы выбрали за постоянную.

Пояснение 2. Чтобы легче понять эту операцию, испробуем ее вначале в применении к невозможному уравнению

$$zdx + xdy + ydz = 0.$$

Здесь, беря z за постоянное, получим уравнение $zdx + +xdy = 0$, интеграл которого есть $z \ln x + y = C$, где C зависит только от z. Дифференцируем теперь это уравнение, считая z за переменную. Тогда, положив $dC = Ddz$, получим

$$zdx + xdy + (x \ln x - Dx)dz = 0.$$

Таким образом, должно быть $x \ln x - Dx = y$ или $D = = \ln x - \frac{y}{x}$, что невозможно.

Теперь применим нашу операцию к реальному уравнению

$$2dx(y + z) + dy(x + 3y + 2z) + dz(x + y) = 0.$$

Принимая y за постоянную, получим

$$2dx(y + z) + dz(x + y) = 0.$$

Интегралом этого уравнения будет

$$2 \ln(x + y) + \ln(y + z) = C,$$

где C содержит еще y. Итак, пусть $dC = Ddy$. Тогда дифференцирование при переменной y дает

$$\frac{2dx + 2dy}{x + y} + \frac{dy + dz}{y + z} = Ddy,$$

а это выражение при сравнении с предложенным уравнением дает $D = 0$, откуда $dC = 0$ и C — действительно постоянная. Таким образом, интегралом будет $(x + y)^2(y + z) = \text{const}$.»

На этом цитирование Эйлера заканчивается.

Замечание 7.1. Выражение «*полный интеграл*» у Эйлера соответствует нашему «*общий интеграл*».

Замечание 7.2. Условие $P^2 + Q^2 + R^2 > 0$ Эйлером не предполагается, но фактически используется. Кроме того, функции P, Q и R предполагаются определенными и достаточно гладкими в $\mathbb{R}^3$.

Замечание 7.3. Метод Эйлера принципиально не отличается от описанного теоремой 5.1, но он носит несколько более общий характер, так как по методу Эйлера строится общий интеграл, т.е. интегральная поверхность определяется неявно, а не как график функции двух заранее определенных переменных.

Применим метод Эйлера к решению дифференциального уравнения из примера 5.2. Имеем уравнение

$$(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)dx + dy + 2zdz = 0.$$

Примем x за постоянное. Получим уравнение $dy + +2zdz = 0$. Его общий интеграл есть $y + z^2 = C$, где C зависит от параметра x. Полный дифференциал равенства $y + z^2 = C(x)$ имеет вид $-C'dx + dy + 2zdz = 0$. Сравнивая это с заданным уравнением и учитывая общий интеграл уравнения $dy + 2zdz = 0$, получим для определения $C(x)$ дифференциальное уравнение $C' = -2Cx - -2x^2 - 1$, общее решение которого есть

$$C(x) = e^{-x^2}(C - \int e^{x^2}(2x^2 + 1)dx),$$

где C — произвольная постоянная. Вычисляя неопределенный интеграл так же, как в примере 5.2, получаем общий интеграл

$$e^{x^2}(x + y + z^2) = \text{const}.$$

Упражнение 7.1. Решить методом Эйлера уравнение

$$(1 + x^2y^2z^2 - yz)dx - xzdy - xydz = 0.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}(xyz) - x = C$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бибиков,Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — СПб.: Лань, 2011. — 304 с.

2. *Грауерт,Г.* Дифференциальное и интегральное исчисление /Г. Грауерт, И. Либ, В. Фишер. — М.: Мир, 1971.

3. *Егоров,А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. — М.: Физматлит, 2007.

4. *Степанов,В.В.*Курс дифференциальных уравнений. — М. Изд-во УРСС, 2006.

5. *Эйлер Л.* Интегральное исчисление. — Т. III.— М.: Физматгиз, 1958.

6. *Боярчук, А.К.* Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Справочное пособие в высш. мат-ке. Т. 5. /А.К.Боярчук, Г.П.Головач. — М.: Изд-во УРСС, 2001.

Юрий Николаевич БИБИКОВ,
Вероника Ромуальдовна БУКАТЫ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПФАФФА НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Учебное пособие

Редакция
естественнонаучной литературы
Ответственный редактор *Т. С. Спирина*
Корректор *Т. А. Кошелева*
Выпускающий *Е. Е. Егорова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, д. 1, лит. А
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 27.09.19.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат $84 \times 108\ ^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 3,57.