А.Х. Шахмейстер

Уравнения и неравенства с параметрами

математика

Для тех, кто хочет учиться

А. Х. Шахмейстер

Уравнения и неравенства с параметрами

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ, АБИТУРИЕНТОВ И УЧИТЕЛЕЙ

Под редакцией Б. Г. Зива

Издательство Московского университета
ЧеРо на Неве
МЦНМО

С.-Петербург
Москва
2004

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Рецензенты:

Доктор физ.-мат. наук профессор МГУ **Г. Ю. Ризниченко**
Заслуженный Учитель Российской Федерации,
Соросовский Учитель **Т. И. Курсиш**
Заслуженный Учитель Росийской Федерации,
Соросовский Учитель **А. Р. Майзелис**
Заслуженный Соросовский Учитель **И. Я. Веребейчик**

Книга издана при участии
книготорговой корпорации «Абрис-Д»

Шахмейстер А. Х.
Ш 32 Уравнения и неравенства с параметрами. —
1-е изд. — СПб.: «ЧеРо-на-Неве», 2004. — 304 с. —
ISBN 5-79130-062-X

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических ВУЗов, учителей.

ISBN 5-79130-062-X

© Шахмейстер А. Х., 2004
© Герасимчук Е. И., обложка, 2004
© «Петроглиф», 2004

Предисловие редактора

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики. По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасный самоучитель, который позволит ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к выпускным экзаменам в школе и вступительным экзаменам в ВУЗ.

Книги серии содержат задачи разной степени сложности, которые могут быть использованы учителем для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Автор не претендует на то, что каждое из представленных решений является наиболее рациональным, — он дает универсальные алгоритмы для решения целых классов задач, что, на мой взгляд, гораздо важнее.

Предложенные задачи могут быть использованы учителями и учениками в процессе усвоения той или иной темы или для параллельного повторения.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив

Предисловие автора

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических ВУЗов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т. д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы.

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

1

Линейные уравнения с параметрами

Рассмотрим уравнение $a^2(x-5)=25(x-a)$.

1. Пусть $a=1$, — тогда $x-5=25(x-1)$, и $x=\frac{5}{6}$.
2. Пусть $a=5$, — тогда $25(x-5)=25(x-5)$, и $\forall x$ — решение.
3. Пусть $a=-5$, $25(x-5)=25(x+5)$, — тогда $0=10$; и $x \in \varnothing$.

Следовательно, сам факт существования решения зависит от значения параметра a.

Определение.

Исследовать и решить уравнение с параметром — это значит:

1. *Найти все системы значений параметров, при которых данное уравнение имеет решение.*
2. *Найти все решения для каждой найденной системы значений параметров, т.е. для неизвестного и параметра должны быть указаны свои области допустимых значений.*

$\forall$ — символ, обозначающий всякого, любого и т.д.

$\varnothing$ — обозначение пустого множества, т.е. множества, не содержащего ни одного элемента; в данном случае этот значит, что нет такого значения x, для которого уравнение имело бы решение.

Практикум 1

Исследовать и решить уравнения с параметром.

1. $a^2(x-5)=25(x-a)$.

Выполнив ряд преобразований, приведем уравнение к виду, наиболее удобному для исследования:

$$a^2x-5a^2=25x-25a\,;\ \left(a^2-25\right)x=5a^2-25a\,.$$

Стандартный канонический вид линейного уравнения с параметром:

$$\boxed{(a-5)(a+5)x=5a(a-5)}\,.$$

а) При $\begin{cases} a\neq 5 \\ a\neq -5 \end{cases}$ $\exists$ ед. $x \;\Big|\; x=\dfrac{5a(a-5)}{(a+5)(a-5)}$;

после сокращения $x=\dfrac{5a}{a+5}$.

б) Если $a=5$, то $0\cdot x=0$, следовательно, любое x есть решение.

в) Если $a=-5$, то $0\cdot x=250$, следовательно, решений нет.

Графическая иллюстрация исследования по параметру a:

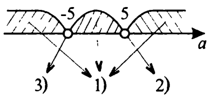


Рис. 1.

Ответ:

1) При $\begin{cases} a\neq 5 \\ a\neq -5 \end{cases}$ $\exists$ ед. $x \;\Big|\; x=\dfrac{5a}{a+5}$.

2) При $a=5$ $\forall x$ — решение.

3) При $a=-5$ $x\in\varnothing$.

$\exists$ — символ существования.

$|$ — вертикальная черта, обозначает «такой, что»; в данном случае $\exists$ ед. $x \;\Big|\; x=\dfrac{5a}{a+5}$ значит, что существует единственное решение x, такое, что $x=\dfrac{5a}{a+5}$.

2. $\dfrac{k(x+2)-3(k-1)}{x+1}=1$; $\quad D(y):\ x \neq -1$.

$kx+2k-3k+3=x+1$;

$(k-1)\cdot x=k-2$ — вид уравнения, наиболее удобный для исследования.

а) Пусть $k \neq 1$, тогда $\exists$ ед. $x \,\Big|\, x=\dfrac{k-2}{k-1}$.

б) Выясним, при каких значениях параметра k $x=-1$, и исключим их.

Для этого решим уравнение:

$\dfrac{k-2}{k-1}=-1$, тогда $k=1,5$.

в) Если $k=1$, то $0\cdot x=-1$, значит $x \in \varnothing$.

Графическая иллюстрация исследования по параметру k:

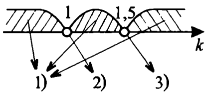


Рис. 2.

Ответ: 1) При $\begin{cases} k \neq 1 \\ k \neq 1,5 \end{cases}$ $\exists$ ед. $x \,\Big|\, x=\dfrac{k-2}{k-1}$.

2) При $k=1$ $\quad x \in \varnothing$.

3) При $k=1,5$ $\quad x \in \varnothing$.

3. $\dfrac{3mx-5}{(m-1)(x+3)}+\dfrac{3m-11}{m-1}=\dfrac{2x+7}{x+3}$; $\qquad D(y):\ \begin{cases} m \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases}$.

Данное уравнение равносильно с учетом $D(y)$:

$3mx-5+(3m-11)(x+3)=(2x+7)(m-1)$;

$3mx-5+3mx-11x+9m-33=2xm+7m-2x-7$;

$(4m-9)x = 31-2m$ — канонический вид линейного уравнения с параметром, наиболее удобный для исследования.

а) Если $\begin{cases} m \neq 2,25 \\ m \neq 1 \end{cases}$, то $\exists$ ед. $x \,\Big|\, x = \frac{31-2m}{4m-9}$.

б) Выясним, при каких значениях параметра m $x=-3$.

$\frac{31-2m}{4m-9} = -3$, следовательно, $m=-0,4$,

т.е., при $m=-0,4$ $x \notin D(y)$.

в) Если $m = 2,25$, то $0 \cdot x = 26,5$, следовательно, $x \in \varnothing$.

Графическая иллюстрация исследования уравнения с параметром m.

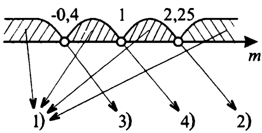


Рис. 3.

Ответ: 1) При $\begin{cases} m \neq 2,25 \\ m \neq -0,4 \\ m \neq 1 \end{cases}$ $\exists$ ед. $x \,\Big|\, x = \frac{31-2m}{4m-9}$.

2) При $m = 2,25$ $x \in \varnothing$.

3) При $m = -0,4$ $x \in \varnothing$.

4) При $m = 1$ уравнение не определено или не имеет смысла.

4. $\dfrac{3mx-5}{(m+2)\left(x^2-9\right)}=\dfrac{2m+1}{(m+2)(x-3)}-\dfrac{5}{x+3}$;

$$D(y):\ \begin{cases} m\neq -2 \\ x\neq 3 \\ x\neq -3 \end{cases}.$$

Выполним необходимые преобразования для приведения уравнения к целочисленному виду, получаем:

$$3mx-5=(2m+1)(x+3)-5(m+2)(x-3).$$

Тогда $3(2m+3)x=21m+38$ **— канонический вид линейного уравнения с параметром** m.

а) **Если** $\begin{cases} m\neq -1{,}5 \\ m\neq -2 \end{cases}$, **то** $\exists$ **ед.** $x \;\Big|\; x=\dfrac{21m+38}{3(2m+3)}$.

б) $\dfrac{21m+38}{3(2m+3)}=-3$; **тогда** $21m+38=-3\cdot 3\cdot(2m+3)$,

т.е. $m=-\dfrac{5}{3}$.

в) $\dfrac{21m+38}{3(2m+3)}=3$; **тогда** $21m+38=3\cdot 3\cdot(2m+3)$,

т.е. $m=-\dfrac{11}{3}$.

г) $m=-1{,}5$; **тогда** $0=-6{,}5$, **следовательно** $x\in\varnothing$.

Графическая иллюстрация исследования уравнения с параметром m.

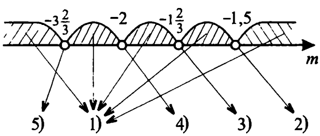


Рис. 4.

Ответ: 1) При $\begin{cases} m \neq -1,5 \\ m \neq -1\frac{2}{3} \\ m \neq -3\frac{2}{3} \\ m \neq -2 \end{cases}$ существует

единственное решение $x = \frac{21m+38}{3(2m+3)}$.

2) При $m = -1,5$ $x \in \varnothing$.

3) При $m = -1\frac{2}{3}$ $x \in \varnothing$.

4) При $m = -2$ уравнение не определено.

5) При $m = -3\frac{2}{3}$ $x \in \varnothing$.

5. $m = \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m(x-1)}$;

$D(y)$: $\begin{cases} m \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Данное уравнение запишем в виде

$m^2x - m^2 = x - 1 + m - 1$, или $(m^2 - 1)x = m^2 + m - 2$.

а) Если $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$, то $\exists$ ед. $x \; \Big| \; x = \frac{(m+2)(m-1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{m+2}{m+1}$.

б) Выясним, при каких значениях параметра m $x = 1$, и исключим эти значения, т.е. $\frac{m+2}{m+1} = 1$, или $2 = 1$. Следовательно, не существует такого значения параметра m, при котором $x = 1$, т.е. дополнительных ограничений на значение параметра m нет.

в) Если $m = 1$, то $0 \cdot x = 0 \cdot 3$, следовательно, любое $x \in D(y)$ есть решение уравнения, т.е. это случай бесконечного множества решений.

г) Если $m = -1$, то $0 \cdot x = 1 \cdot (-2)$, т.е. $x \in \varnothing$.

д) Если $m = 0$ — уравнение не определено.

Ответ: а) При $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$ $\exists$ ед. $x \;\Big|\; x = \frac{m+2}{m+1}$.

б) При $m = 1$ $\forall x \neq 1$ есть решение.

в) При $m = -1$ $x \in \varnothing$.

г) При $m = 0$ уравнение не определено.

6. $\frac{a}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$;

$D(y)$: $x \neq \pm 1$.

Запишем уравнение в виде $a(x+1) + 2(x-1) = 2$, или $(a+2)x = 4 - a$.

а) Если $a \neq -2$, то $\exists$ ед. $x \;\Big|\; x = \frac{4-a}{a+2}$.

б) Выясним, при каких значениях параметра a $x = 1$, и исключим их.
$\frac{4-a}{a+2} = 1$, т.е. $a = 1$.

в) Выясним, при каких значениях параметра a $x = -1$.
$\frac{4-a}{a+2} = -1$, т.е. $4 = -2$, или $a \in \varnothing$.
Следовательно, не существует такого значения параметра a, при котором $x = -1$.

г) Если $a = -2$, то $0 \cdot x = 6$, т.е. $x \in \varnothing$.

Графическая иллюстрация исследования уравнения с параметром a.

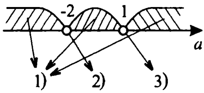


Рис. 5.

Ответ: 1) При $\begin{cases} a \neq -2 \\ a \neq 1 \end{cases}$ $\exists$ ед. $x \;\Big|\; x = \dfrac{4-a}{a+2}$.

2) При $a = -2$ $\quad x \in \varnothing$.

3) При $a = 1$ $\quad x \in \varnothing$.

7. $m + \dfrac{m-8}{m+1} = \dfrac{3(m+4)}{x+3}$; $\qquad D(y)$: $\begin{cases} m \neq -1 \\ x \neq -3 \end{cases}$.

Запишем уравнение в виде

$(x+3)\left(m^2 + 2m - 8\right) = 3(m+4)(m+1)$, или

$(m+4)(m-2)\cdot x = 9(m+4)$.

а) Если $\begin{cases} m \neq -4 \\ m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$, то $\exists$ ед. $x \;\Big|\; x = \dfrac{9}{m-2}$.

б) Выясним, при каких значениях параметра m $x = -3$.

$\dfrac{9}{m-2} = -3$, т.е. $m \neq -1$.

в) Если $m = -4$, то $0 \cdot x = 9 \cdot 0$, следовательно, любое $x \in D(y)$ есть решение.

г) Если $m = 2$, то $0 \cdot x = 54$, т.е. $x \in \varnothing$.

д) Если $m = -1$ — уравнение не определено.

Ответ: 1) При $\begin{cases} m \neq -4 \\ m \neq 2 \\ m \neq -1 \end{cases}$ $\exists$ ед. $x \mid x = \dfrac{9}{m-2}$.

2) При $m = -4$ любое $x \neq -3$ есть решение.

3) При $m = 2$ $x \in \varnothing$.

4) При $m = -1$ уравнение не определено.

8. $\dfrac{3x^2-8a}{2ax-2a-3x+3} = \dfrac{3x}{2a-3} - \dfrac{x}{x-1}$; $\quad D(y)$: $\begin{cases} x \neq 1 \\ a \neq 1,5 \end{cases}$.

Запишем уравнение в виде

$\dfrac{3x^2-8a}{(2a-3)(x-1)} = \dfrac{3x(x-1)-x(2a-3)}{(2a-3)(x-1)}$;

$3x^2 - 8a = 3x^2 - 3x - 2ax + 3x$;

$ax = 4a$.

а) Если $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1,5 \end{cases}$, то $\exists$ ед. $x \mid x = 4$.

б) Если $a = 0$, то $0 = 0$.

Следовательно, любое $x \in D(y)$ есть решение.

Ответ: 1) При $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1,5 \end{cases}$ $\exists$ ед. $x \mid x = 4$.

2) При $a = 0$ любое $x \neq 1$ — есть решение.

3) При $a = 1,5$ уравнение не определено.

9. Исследовать уравнение, выяснить, при каких значениях параметра m существует единственное решение, меньшее 1?

$\dfrac{m+1}{m(x+2)} - \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{mx+5}{m\left(x^2+5x+6\right)}$; $\quad D(y)$: $\begin{cases} m \neq 0 \\ x \neq -2 \\ x \neq -3 \end{cases}$.

Запишем уравнение в виде

$(m+1)(x+3)-2m(x+2)=mx+5$;

$(2m-1)\cdot x=-m-2$.

I. а) Если $\begin{cases} m \ne 0 \\ m \ne \frac{1}{2} \end{cases}$, то $\exists$ ед. $x \;\Big|\; x=\frac{m+2}{1-2m}$.

б) Выясним, при каком значении параметра m $x=-2$.
$\frac{m+2}{1-2m}=-2$, т.е. $m=\frac{4}{3}$.

в) Выясним, при каком значении параметра m $x=-3$.
$\frac{m+2}{1-2m}=-3$, т.е. $m=1$.

II. Решим неравенство $\frac{m+2}{1-2m}<1$.

Перенесем 1 в левую часть, тогда
$\frac{3m+1}{1-2m}<0$.

Графическая иллюстрация:

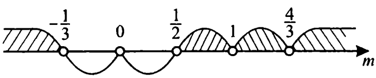


Рис. 6.

Ответ: при $m \in \left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)\cup\left(1;\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3};\infty\right)$

существует единственное решение $x=\frac{m+2}{1-2m}$, такое что $x<1$.

10. Исследовать уравнение, выяснить, при каких значениях параметра m существует единственное положительное решение.

$$\frac{3}{5+m-3x}=\frac{2}{3-x+mx}; \qquad D(y):\ \begin{cases} x\neq\dfrac{m+5}{3} \\ x(m-1)\neq -3 \end{cases}.$$

Запишем уравнение в виде $9-3x+3mx=10+2m-6x$;

$3x(m+1)=1+2m$.

I. а) Если $m\neq -1$, то $\exists$ ед. $x \,\Big|\, x=\dfrac{1+2m}{3(m+1)}$.

б) Выясним, при каком значении параметра m

$x=\dfrac{m+5}{3}$.

$\dfrac{1+2m}{3(m+1)}=\dfrac{5+m}{3}$, тогда $m=-2$.

в) При $x(m-1)=-3$ найдем дополнительное ограничение на значение параметра m.

Тогда уравнение имеет вид

$\dfrac{1+2m}{3(m+1)}\cdot(m-1)=-3$; $m^2+4m-5=-9$, т.е. $m=-2$.

II. $\dfrac{1+2m}{3(m+1)}>0$.

Графическая иллюстрация:

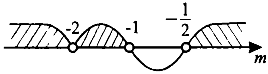


Рис. 7.

Ответ: при $m\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup\left(-\dfrac{1}{2};\infty\right)$

$\exists$ ед. $x \,\Big|\, x=\dfrac{1+2m}{3(m+1)}>0$.

11. $\frac{b-5}{x+1}-\frac{7+3b}{x-2}=\frac{2bx-5}{x^2-x-2}$;

$D(y)$: $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$.

В результате ряда преобразований получаем

$4(b+3)x = 8-5b$ — вид уравнения, наиболее удобный для исследования.

а) Если $b \neq -3$, то $\exists$ ед. $x \mid x=\frac{8-5b}{4(b+3)}$.

б) Выясним, при каком значении параметра b $x=-1$.
$\frac{8-5b}{4(b+3)}=-1$; $b=20$.

в) Выясним, при каком значении параметра b $x=2$.
$\frac{8-5b}{4(b+3)}=2$; $b=-\frac{16}{13}$.

г) Если $b=-3$, то $0 \cdot x = 23$; $x \in \varnothing$.

Ответ: 1) При $\begin{cases} b \neq -3 \\ b \neq -\frac{16}{13} \\ b \neq 20 \end{cases}$ $\exists$ ед. $x \mid x=\frac{8-5b}{4(b+3)}$.

2) При $b=-3$ $x \in \varnothing$.

3) При $b=20$ $x \in \varnothing$.

4) При $b=-\frac{16}{13}$ $x \in \varnothing$.

12. $\frac{x-1}{5(n-5)x}+\frac{x+1}{n(n-5)x}=\frac{1}{n^2\cdot x}$;

$$D(y):\ \begin{cases} x\neq 0 \\ n\neq 5\,. \\ n\neq 0 \end{cases}$$

$$n^2(x-1)+5n(x+1)=5(n-5);$$

$$n(n+5)x=(n-5)(n+5)\,.$$

а) Если $\begin{cases} n\neq 5 \\ n\neq 0 \\ n\neq -5 \end{cases}$, то $\exists$ ед. $x \;\Big|\; x=\frac{n-5}{n}$.

б) Выясним, при каком значении параметра n $x=0$.
$\frac{n-5}{n}=0$; $n=5$.

в) Если $n=-5$, то $0\cdot x=0$; любое $x\in D(y)$ — есть решение.

г) Если $n=0$, уравнение не определено.

д) Если $n=5$, уравнение не определено.

Ответ: 1) При $\begin{cases} n\neq 5 \\ n\neq 0 \\ n\neq -5 \end{cases}$ $\exists$ ед. $x \;\Big|\; x=\frac{n-5}{n}$.

2) При $n=-5$ любое $x\neq 0$ есть решение.

3) При $n=0$ уравнение не определено.

4) При $n=5$ уравнение не определено.

Тренировочная работа 1

Решить и исследовать уравнения с параметром:

1. $\dfrac{x-3m}{x^2-9}-\dfrac{2m+3}{x+3}=\dfrac{m-5}{x-3}$;

2. $m+2+\dfrac{2-m}{x+2}=\dfrac{8}{m}$;

3. $\dfrac{t^2+3}{t+1}=\dfrac{t+3}{t(x-4)}-\dfrac{4t}{t+1}$;

4. $\dfrac{x}{2a+x}-\dfrac{2a+x}{x-2a}=\dfrac{16a^2}{4a^2-x^2}$;

5. $\dfrac{4\left(x^2-b\right)}{2bx-b-2x+1}=\dfrac{2x}{b-1}-\dfrac{2x}{2x-1}$;

6. $\dfrac{m(x-1)+3}{x+2}=4$; $\exists$ ед. $x \mid x\leqslant 3$, m — ?

7. $\dfrac{x-4}{x+1}+\dfrac{2}{k}=\dfrac{1}{k(x+1)}$; $\exists$ ед. $x \mid -2<x<3$, k — ?

8. $\dfrac{a-1}{x+4}=\dfrac{2x+3}{x^2-x-20}$; $\exists$ ед. $x \mid x\leqslant 2$, a — ?

9. $\dfrac{ax+2}{a\left(x^2+x-2\right)}-\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{a-5}{a(x+2)}$; $\exists$ ед. $x \mid -3<x<2$, a — ?

10. $3-\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{3z-4}{(x+1)(2z-1)}$; $\exists$ ед. $x \mid |x|<3$, z — ?

Решение тренировочной работы 1

1. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{x-3m}{x^2-9}-\frac{2m+3}{x+3}=\frac{m-5}{x-3}.$$

$D(y)$: $x \neq \pm 3$.

Приведем уравнение к целочисленному виду:

$x-3m-(2m+3)(x-3)=(m-5)(x+3)$;

$x(-3m+3)=-24$;

$x(m-1)=8$ — вид уравнения, наиболее удобный для исследования.

а) Если $m \neq 1$, то $\exists$ ед. $x \;\Big|\; x=\frac{8}{m-1}$.

б) Выясним, при каких значениях параметра m $x \notin D(y)$.

1) $x=3$, тогда $\frac{8}{m-1}=3$ и $m=\frac{11}{3}$.

2) $x=-3$, тогда $\frac{8}{m-1}=-3$ и $m=\frac{5}{3}$.

в) Если $m=1$, то $0 \cdot x=8$, и $x \in \varnothing$.

Ответ: 1) При $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq \frac{11}{3} \\ m \neq \frac{5}{3} \end{cases}$ $\exists$ ед. решение $x=\frac{8}{m-1}$.

2) При $m=1$ $x \in \varnothing$.

3) При $m=3\frac{2}{3}$ $x \in \varnothing$.

4) При $m=1\frac{2}{3}$ $x \in \varnothing$.

2. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$m + 2 + \frac{2-m}{x+2} = \frac{8}{m}.$$

$$D(y):\ \begin{cases} m \neq 0 \\ x \neq -2 \end{cases}.$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель, получаем:

$$(m+2)\cdot m(x+2) + (2-m)\cdot m - 8(x+2) = 0;$$

$$x\left(m^2 + 2m - 8\right) = m^2 - 2m - 2\left(m^2 + 2m\right) + 16;$$

$$x(m+4)(m-2) = -\left(m^2 + 6m - 16\right);$$

$$x(m+4)(m-2) = -(m+8)(m-2).$$

а) Если $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \\ m \neq -4 \end{cases}$, то $\exists$ ед. $x \mid x = -\frac{m+8}{m+4}$.

б) Выясним, при каких значениях параметра m $x \notin D(y)$.

Когда $x = -2$, $-\frac{m+8}{m+4} = -2$; $m = 0$.

в) Если $m = 2$, то $0 \cdot x = 0$, следовательно, любое значение $x \in D(y)$ — решение.

г) Если $m = -4$, то $0 \cdot x = 24$, т. е. $x \in \varnothing$.

Ответ: 1) При $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \\ m \neq -4 \end{cases}$ $\exists$ ед. $x \,\Big|\, x = -\frac{m+8}{m+4}$.

2) При $m = 0$ уравнение не определено.

3) При $m = 2$ любое $x \neq -2$ — есть решение.

4) При $m = -4$ $x \in \varnothing$.

3. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{t^2+3}{t+1}=\frac{t+3}{t(x-4)}-\frac{4t}{t+1}. \qquad D(y):\ \begin{cases} t\neq -1 \\ x\neq 4 \\ t\neq 0 \end{cases}.$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель, получаем:

$$\left(t^2+3\right)\cdot t\cdot(x-4)=(t+3)(t+1)-4t^2(x-4);$$

$$\left(t^2+3\right)\cdot t\cdot x-4\cdot\left(t^2+3\right)\cdot t=(t+3)(t+1)-4t^2x+16t^2.$$

Перенесем $-4\cdot\left(t^2+3\right)\cdot t$ в правую часть, $-4t^2\cdot x$ в левую часть, тогда

$$x\left(t^3+3t+4t^2\right)=(t+3)(t+1)+4\left(t^3+3t\right)+16t^2;$$

$$t(t+1)(t+3)\cdot x=(t+1)\left(4t^2+13t+3\right);$$

$$t(t+1)(t+3)\cdot x=(t+1)(4t+1)(t+3).$$

а) Если $\begin{cases} t\neq 0 \\ t\neq -1 \\ t\neq -3 \end{cases}$, то $\exists$ ед. $x \;\Big|\; x=\frac{4t+1}{t}$.

б) Выясним, при каких значениях параметра t $x\notin D(y)$.

$\frac{4t+1}{t}=4;\quad 1=0$ — ложно.

в) Если $t=-3$, то $0\cdot x=0$, т.е. любое значение $x\in D(y)$ — решение.

Ответ: 1) При $\begin{cases} t\neq 0 \\ t\neq -1 \\ t\neq -3 \end{cases}$ $\exists$ ед. $x \;\Big|\; x=\frac{4t+1}{1}$.

2) При $t=0$ уравнение не определено.

3) При $t=-1$ уравнение не определено.

4) При $t=-3$ любое $x\neq 4$ — решение.

4. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{x}{2a+x}-\frac{2a+x}{x-2a}=\frac{16a^2}{4a^2-x^2}. \qquad D(y):\quad x\neq \pm 2a.$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель, получаем:

$$x(x-2a)-(2a+x)^2=-16a^2;$$

$$x^2-2ax-4a^2-4ax-x^2=-16a^2;$$

$$6ax=12a^2; \quad 6a(x-2a)=0.$$

а) Если $a\neq 0$, то $x=2a\notin D(y)$.

б) Если $a=0$, то $0\cdot x=0$,
следовательно, $\forall x\in D(y)$ — есть решение.

Ответ: 1) При $a\neq 0$, $x\in\varnothing$.

2) При $a=0$ решение уравнения $\forall x\neq 0$.

5. Исследовать и решить уравнение с параметром:

$$\frac{4\left(x^2-b\right)}{2bx-b-2x+1}=\frac{2x}{b-1}-\frac{2x}{2x-1}.$$

$$D(y):\ \begin{cases} b\neq 1 \\ x\neq \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\frac{4x^2-4b}{(2x-1)(b-1)}-\frac{2x(2x-1)}{(b-1)(2x-1)}+\frac{2x(b-1)}{(2x-1)(b-1)}=0;$$

$$4x^2-4b-4x^2+2x+2xb-2x=0;$$

$$2b(x-2)=0;$$

$$bx=2b.$$

а) Если $\begin{cases} b \neq 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$, то $\exists$ ед. $x \mid x = 2$.

б) Если $b = 0$, то $0 \cdot x = 0$,
$\forall x \in D(y)$ — есть решение.

в) Если $b = 1$, то уравнение не определено.

Ответ: 1) При $\begin{cases} b \neq 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$ $\exists$ ед. решение $x = 2$.

2) При $b = 0$ любое $x \neq \frac{1}{2}$ — есть решение.

3) При $b = 1$ уравнение не определено.

6. Исследовать и решить уравнение с параметром $\frac{m(x-1)+3}{x+2} = 4$. Выяснить, при каком значении параметра m существует единственное решение $x \leqslant 3$.

$D(y)$: $x \neq -2$.

Исходное уравнение запишем в виде
$mx - m + 3 = 4x + 8$ или $x(m-4) = m + 5$.

I. а) Если $m \neq 4$, то $\exists$ ед. $x \,\Big|\, x = \frac{m+5}{m-4}$.

б) Выясним, при каком значении m $x \notin D(y)$?

$\frac{m+5}{m-4} = -2$, т.е. $m = 1$.

в) Если $m = 4$, то $0 \cdot x = 9$, т.е. $x \in \varnothing$.

II. Если $x \leqslant 3$, то решаем неравенство $\frac{m+5}{m-4} \leqslant 3$.

$\frac{m+5-3m+12}{m-4} \leqslant 0$; $\frac{17-2m}{m-4} \leqslant 0$.

Иллюстрируем полученный результат, исключив значение $m = 1$.

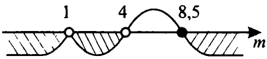


Рис. 8.

Ответ: при $m \in (-\infty; 1) \cup (1; 4) \cup [8,5; \infty)$ существует единственное решение $x = \frac{m+5}{m-4}$, такое что $x \leqslant 3$.

7. Исследовать уравнение с параметром $\frac{x-4}{x+1} + \frac{2}{k} = \frac{1}{k(x+1)}$. Выяснить, при каком значении параметра k существует единственное решение $-2 < x < 3$.

$D(y)$: $\begin{cases} x \neq -1 \\ k \neq 0 \end{cases}$.

Исходное уравнение после преобразований запишем в виде $k(x-4) + 2(x+1) = 1$, или $x(k+2) = 4k - 1$.

I. а) Если $\begin{cases} k \neq -2 \\ k \neq 0 \end{cases}$, то $\exists$ ед. $x \;\Big|\; x = \frac{4k-1}{k+2}$.

б) Выясним, при каком значении k $x \notin D(y)$.

$\frac{4k-1}{k+2} = -1$, т.е. $k = -\frac{1}{5}$.

II. Если $-2 < x < 3$, то решаем двойное неравенство $-2 < \frac{4k-1}{k+2} < 3$.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{4k-1-3k-6}{k+2} < 0 \\ \frac{4k-1+2k+4}{k+2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{k-7}{k+2} < 0 \\ \frac{6k+3}{k+2} > 0 \end{cases}.$$

Графическая иллюстрация решения:

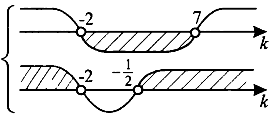


Рис. 9.

$k \in \left(-\frac{1}{2}; 7\right)$, но $k \neq 0$; $k \neq -\frac{1}{5}$.

Ответ: при $k \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}; 0\right) \cup (0; 7)$ существует единственное решение $x = \frac{4k-1}{k+2}$, такое что $-2 < x < 3$.

8. Исследовать уравнение с параметром $\frac{a-1}{x+4} = \frac{2x+3}{x^2-x-20}$. Выяснить, при каких значениях параметра a существует единственное решение $x \leqslant 2$.

$D(y)$: $\begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq 5 \end{cases}$.

Исходное уравнение запишем в виде:
$(a-1)(x-5) = 2x+3$; $(a-1)\cdot x - 2x = 5(a-1)+3$;
$x(a-3) = 5a-2$.

I. а) Если $a \neq 3$, то $\exists$ ед. $x \;\Big|\; x = \frac{5a-2}{a-3}$.

б) Выясним, при каком значении параметра a $x \notin D(y)$.

1) $x = -4$; $\frac{5a-2}{a-3} = -4$; $5a-2 = -4a+12$; $a = \frac{14}{9}$.

2) $x = 5$; $\frac{5a-2}{a-3} = 5$; $5a-2 = 5a-15$; $a \in \varnothing$.

в) Если $a = 3$, то $0 \cdot x = 18$, $x \in \varnothing$.

II. Если $x \leqslant 2$, то решим неравенство $\frac{5a-2}{a-3} \leqslant 2$,

при этом учтем, что $\begin{cases} a \neq 3, \\ a \neq 1\frac{5}{9}, \end{cases}$ тогда $\begin{cases} \frac{5a-2-2a+6}{a-3} \leqslant 0 \\ a \neq 3 \\ a \neq 1\frac{5}{9} \end{cases}$

Значит, $\begin{cases} \frac{3a+4}{a-3} \leqslant 0 \\ a \neq 3 \\ a \neq 1\frac{5}{9} \end{cases}$, $a \in \left[-1\frac{1}{3}; 1\frac{5}{9}\right) \cup \left(1\frac{5}{9}; 3\right)$.

Графическая иллюстрация решения:

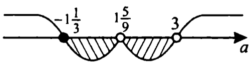


Рис. 10.

Ответ: при $a \in \left[-1\frac{1}{3}; 1\frac{5}{9}\right) \cup \left(1\frac{5}{9}; 3\right)$ существует единственное решение $x = \frac{5a-2}{a-3}$, где $x \leqslant 2$.

9. Исследовать уравнение с параметром

$\frac{ax+2}{a\left(x^2+x-2\right)} - \frac{3}{x-1} = \frac{a-5}{a(x+2)}$. Выяснить, при каких значениях параметра a существует единственное решение $-3 < x < 2$.

$$D(y): \begin{cases} a \neq 0 \\ x \neq -2. \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Исходное уравнение запишем в виде

$ax + 2 - 3a(x+2) = (a-5)(x-1)$;

$x(a - 3a - a + 5) = 5 - a + 6a - 2$; $x(5-3a) = 5a + 3$.

I. а) Если $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq \frac{5}{3} \end{cases}$, то $\exists$ ед. $\Big| \; x = \frac{5a+3}{5-3a}$.

б) Выясним, при каком значении параметра a $x \notin D(y)$.

1) $x = -2$; $\frac{5a+3}{5-3a} = -2$; $5a + 3 = -10 + 6a$; $a = 13$.

2) $x = 1$; $\frac{5a+3}{5-3a} = 1$; $5a + 3 = 5 - 3a$; $a = 0{,}25$.

в) Если $a = \frac{5}{3}$, то $0 \cdot x = \frac{34}{3}$, т. е. $x \in \varnothing$.

г) Если $a = 0$, то уравнение не определено.

II. Выясним, при каком значении параметра a $-3 < x < 2$.

$$-3 < \frac{5a+3}{5-3a} < 2.$$

Полученное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{5a+3-10+6a}{5-3a} < 0 \\ \frac{5a+3+15-9a}{5-3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{11a-7}{5-3a} < 0 \\ \frac{18-4a}{5-3a} > 0 \end{cases}.$$

Графическая иллюстрация решения:

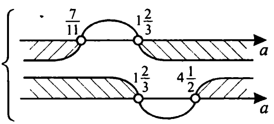


Рис. 11.

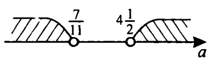


Рис. 12.

Но $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 13 \\ a \neq 0{,}25 \end{cases}$.

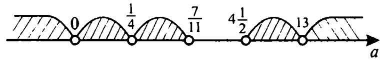
Тогда 

Рис. 13.

Ответ:

при $a \in (-\infty;\, 0) \cup (0;\, 0{,}25) \cup \left(0{,}25;\, \frac{7}{11}\right) \cup (4{,}5;\, 13) \cup (13;\, \infty)$

существует единственное значение $x = \frac{5a+3}{5-3a}$,

такое что $-3 < x < 2$.

10. Исследовать уравнение с параметром $3 - \frac{1}{z-1} = \frac{3z-4}{(x+1)(2z-1)}$. Выяснить, при каком значении параметра z существует единственное решение $x \in (-3;\, 3)$.

$$D(y):\ \begin{cases} x \neq -1 \\ z \neq 1 \\ z \neq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Запишем исходное уравнение после преобразований в виде:

$$3(z-1)(2z-1)(x+1) - (x+1)(2z-1) = (3z-4)(z-1);$$

$$(3z-4)(2z-1) \cdot x = -z(3z-4)$$

I. а) Если $\begin{cases} z \neq 1 \\ z \neq \frac{1}{2} \\ z \neq 1\frac{1}{3} \end{cases}$, то $\exists$ ед. $x \;\Big|\; x = -\frac{z}{2z-1}$.

б) Выясним, при каком значении параметра z $x \notin D(y)$?

Пусть $x = -1$, т.е. $-\frac{z}{2z-1} = -1$; $z = 1$.

в) Если $z = 1\frac{1}{3}$, то $0 \cdot x = 0$; любое $x \in D(y)$ — есть решение.

II. Если $x \in (-3;\, 3)$, то

$\left|-\dfrac{z}{2z-1}\right| < 3$, значит

$$\begin{cases} \dfrac{z}{2z-1} < 3 \\ \dfrac{z}{2z-1} > -3 \end{cases}; \qquad \begin{cases} \dfrac{5z-3}{2z-1} > 0 \\ \dfrac{7z-3}{2z-1} > 0 \end{cases}.$$

Графическая иллюстрация решения:

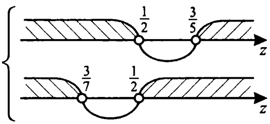


Рис. 14.

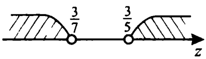


Рис. 15.

Но $z \neq 1$ и $z \neq 1\dfrac{1}{3}$.

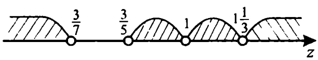


Рис. 16.

При $z = 1\dfrac{1}{3}$ — есть бесконечное множество решений.

Ответ: при $z \in \left(-\infty;\, \dfrac{3}{7}\right) \cup \left(\dfrac{3}{5};\, 1\right) \cup \left(1;\, 1\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(1\dfrac{1}{3};\, \infty\right)$

существует единственное решение $x = \dfrac{z}{1-2z}$, такое что $x \in (-3;\, 3)$.

2 Квадратные уравнения с параметром

Практикум 2

1. Исследовать и решить уравнение с параметром $x^2-(m-2)\cdot x-(m-2)=0$.

$x^2+px+q=0$ — канонический вид приведенного квадратного уравнения с параметром,

где $p=-(m-2)$, а $q=-(m-2)$.

Квадратное уравнение имеет решения, если дискриминант больше или равен нулю, т.е.

$D=(m-2)^2+4(m-2)=(m-2)(m+2)\geqslant 0$.

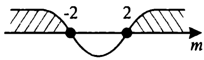


Рис. 17.

Ответ: 1) При $m\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$

$$\exists\, x_1\neq x_2 \;\Big|\; x_{1,2}=\frac{m-2\pm\sqrt{m^2-4}}{2}.$$

2) При $m\in(-2;2)$ $x\notin\mathbb{R}$, т.е. $x\in\varnothing$.

3) При $m=-2$ $x=-2$ (единственное решение).

4) При $m=2$ $x=0$ (единственное решение).

а) $\exists\, x_1\neq x_2$ — значит, существуют два различных корня.

б) При $D=0$ $x_1=x_2$ есть единственый корень, но двойной кратности.

в) $\mathbb{R}$ — множество всех реальных — действительных чисел; $x\notin\mathbb{R}$ — значит, корень не является действительным числом.

2. Исследовать и решить уравнение с параметром $(n+20)\cdot x^2+(n+5)x+1=0$.

Канонический вид квадратного уравнения общего вида с параметром $ax^2+bx+c=0$, где $\begin{cases} n+20=a\neq 0 \\ n+5=b \\ c=1 \end{cases}$.

а) Если $n\neq -20$, то

$D=(n+5)^2-4(n+20)=(n-5)(n+11)\geqslant 0$.

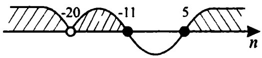


Рис. 18.

При $n\in(-\infty;-20)\cup(-20;-11)\cup(5;\infty)$

$\exists\ x_1\neq x_2 \;\Big|\; x_{1,2}=\dfrac{-(n+5)\pm\sqrt{n^2+6n-55}}{2(n+20)}$

б) $D=0$ при $\left[\begin{array}{l} n=5 \\ n=-11 \end{array}\right.$.

1) $n=5$; $x_1=x_2=-\dfrac{1}{5}$.

2) $n=-11$; $x_1=x_2=\dfrac{1}{3}$.

в) Если $n=-20$; $0\cdot x^2+(-15)\cdot x+1=0$; $x=\dfrac{1}{15}$ (уравнение является линейным).

Ответ: 1) При $n\in(-\infty;-20)\cup(-20;-11)\cup(5;\infty)$

$\exists\ x_1\neq x_2 \;\Big|\; x_{1,2}=\dfrac{-(n+5)\pm\sqrt{n^2+6n-55}}{2(n+20)}$.

2) При $n=5$ существует единственый корень (двойной кратности) $x=-1/5$.

3) При $n = -11$ существует единственый корень (двойной кратности) $x = \frac{1}{3}$.

4) При $n = -20$ существует единственый корень $x = 1/15$.

5) При $n \in (-11; 5)$ $x \in \varnothing$.

Примечание. В дальнейшем мы не будем уточнять кратность корней.

3. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$(m+3)x^2 - (3m+1)x + m = 0.$$

Уравнение уже канонического вида.

а) Если $m \neq -3$, то

$$D = (3m+1)^2 - 4m(m+3) = 5(m-1)\left(m - \frac{1}{5}\right) > 0,$$

тогда при $\begin{cases} m \neq -3 \\ \left[\begin{array}{l} m < \frac{1}{5} \\ m > 1 \end{array}\right. \end{cases}$ $\exists\, x_1 \neq x_2 \;\Big|\; x_{1,2} = \frac{3m+1 \pm \sqrt{5m^2 - 6m + 1}}{2(m+3)}$.

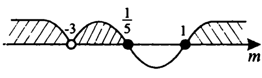
Графическая иллюстрация: 

Рис. 19.

б) Рассмотрим условие существования единственности решения. $D = 0$ при $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \frac{1}{5}, \end{array}\right.$ тогда

1) Пусть $m = \frac{1}{5}$; значит $x_1 = x_2 = \frac{1}{4}$.

2) Пусть $m = 1$; значит $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.

в) Если $m = -3$, то $0 \cdot x^2 - (-8)x - 3 = 0$; $x = \frac{3}{8}$ (уравнение линейное).

Ответ: 1) При $m \in (-\infty; -3) \cup \left(-3; \frac{1}{5}\right) \cup (1; \infty)$,

$$\exists\, x_1 \neq x_2 \;\Big|\; x_{1,2} = \frac{3m+1 \pm \sqrt{5m^2-6m+1}}{2(m+3)}.$$

2) При $m = 0,2$ $\quad x = \frac{1}{4}$.

3) При $m = 1$ $\quad x = \frac{1}{2}$.

4) При $m = -3$ $\quad x = \frac{3}{8}$.

5) При $m \in (0,2; 1)$ $\quad x \notin \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ — множество действительных чисел).

4. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{x+2}{(a-1)(x+3)} - \frac{2}{x+4} = \frac{2-a^2+2a}{(a-1)(x+3)(x+4)}.$$

$$D(y):\ \begin{cases} a \neq 1 \\ x \neq -3. \\ x \neq -4 \end{cases}$$

После преобразований приведем уравнение к каноническому виду.

$(x+2)(x+4) - 2(a-1)(x+3) = 2 - a^2 + 2a$;

$x^2 - 2(a-4)\cdot x + a^2 - 8a + 12 = 0$ — значит, данное уравнение всегда квадратное.

$D = (a-4)^2 - a^2 + 8a - 12 = 4$,

тогда $x_1 = a - 2$; $x_2 = a - 6$.

Выясним, при каких значениях параметра a $x \notin D(y)$?

а) Если $x_1 = a - 2 = -3$, то $a = -1$, тогда $x_2 = a - 6$; $x_2 = -7$.

б) Если $x_1 = a - 2 = -4$, то $a = -2$, тогда $x_2 = a - 6$; $x_2 = -8$.

в) Если $x_2 = a - 6 = -3$, то $a = 3$, тогда $x_1 = a - 2$; $x_1 = 1$.

г) Если $x_2 = a - 6 = -4$, то $a = 2$, тогда $x_1 = a - 2$; $x_1 = 0$.

Ответ: 1) При $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -1 \\ a \neq -2 \\ a \neq 3 \\ a \neq 2 \end{cases}$ $\exists$ различные корни $x_1 \neq x_2$,

такие что $x_1 = a - 2$; $x_2 = a - 6$.

2) При $a = 1$ уравнение не определено.

3) При $a = -1$ $x = -7$.

4) При $a = -2$ $x = -8$.

5) При $a = 3$ $x = 1$.

6) При $a = 2$ $x = 0$.

5. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{x-4}{m-1} = \frac{m-6}{x}.$$

$D(y)$: $\begin{cases} x \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

$x(x-4) = (m-6)(m-1)$;

Приведем уравнение к каноническому виду:

$x^2 - 4x - m^2 + 7m - 6 = 0$.

$D = 4 + m^2 - 7m + 6 = (m-2)(m-5)$.

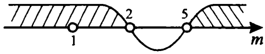


Рис. 20.

Если $D > 0$, тогда $x_1 = 2 + \sqrt{(m-2)(m-5)}$,

$$\left(\text{при } \left[\begin{array}{l} m > 5 \\ m < 2 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{(m-2)(m-5)} \\ x = 2 - \sqrt{(m-2)(m-5)} \end{array}\right. \right)$$

$x_2 = 2 - \sqrt{(m-2)(m-5)}$.

Выясним, при каких значениях параметра m $x \notin D(y)$?

а) Если $x = 0$, то $-m^2 + 7m - 6 = 0$. Тогда $\left[\begin{array}{l} m = 1, \\ m = 6. \end{array}\right.$

Но $m_1 = 1 \notin D(y)$.

б) Пусть $m = 6$, тогда $x_1 = 4$, $x_2 = 0 \notin D(y)$.

$$\left(\begin{array}{l} x_1 = 2 + \sqrt{(6-2)(6-5)} \\ x_2 = 2 - \sqrt{(6-2)(6-5)} \end{array} \right)$$

в) Если $m = 2$, то $x_1 = x_2 = 2$ $(D = 0)$.

г) Если $m = 5$, то $x_1 = x_2 = 2$ $(D = 0)$.

Ответ: 1) При $m \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (5; 6) \cup (6; \infty)$

$\exists\, x_1 \neq x_2 \;\Big|\; x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{(m-2)(m-5)}$.

2) При $m = 1$ уравнение не определено.

3) При $m = 2$ $\quad x = 2$.

4) При $m \in (2; 5)$ $\quad x \notin \mathbb{R}$.

5) При $m = 5$ $\quad x = 2$.

6) При $m = 6$ $\quad x = 4$.

6. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{(m+1)(z+1)^2}{m(z-1)}-\frac{2(m-1)(z+1)}{(m-2)(z-1)}=\frac{5}{m(m-2)}+\frac{12+m-m^2}{m(m-2)(z-1)}.$$

$$D(y):\ \begin{cases} m\neq 0\\ m\neq 2\,.\\ z\neq 1\end{cases}$$

После приведения к общему знаменателю получим

$$(m+1)(m-2)(z+1)^2-2m(m-1)(z+1)=5(z-1)+12+m-m^2.$$

После преобразований исходное уравнение запишем в виде:

$$\boxed{(m+1)(m-2)z^2-9z-9=0}.$$

а) При $\begin{cases} m\neq -1\\ m\neq 2\\ m\neq 0\end{cases}$

$$D=9^2+36(m+1)(m-2)=9(2m-1)^2\geqslant 0.$$

$$D>0\ \left(m\neq\frac{1}{2}\right),\quad z_{1,2}=\frac{9\pm3(2m-1)}{2(m+1)(m-2)}.$$

Значит, $z_1=\dfrac{3}{m-2}$; $z_2=-\dfrac{3}{m+1}$.

б) Выясним, при каком значении параметра m $z\notin D(y)$?

Если $z=1$, то $(m+1)(m-2)-9-9=0$,

$m^2-m-20=0$; $\left[\begin{array}{l} m=5\\ m=-4\end{array}\right.$.

в) Если $D=0$, то $m=\dfrac{1}{2}$, тогда $z_1=z_2=-2$.

г) Если $m=-1$, то $0\cdot z^2-9z-9=0$, т.е. $z=-1$.

д) Если $m = 5$, то $z_1 = 1 \notin D(y)$; $z_2 = -\frac{1}{2}$.

е) Если $m = -4$, то $z_1 = -\frac{1}{2}$; $z_2 = 1 \notin D(y)$.

Ответ: 1) При $\begin{cases} m \neq 5 \\ m \neq 2 \\ m \neq \frac{1}{2} \\ m \neq 0 \\ m \neq -1 \\ m \neq -4 \end{cases}$ существуют

два различных корня $\left[\begin{array}{l} z = \frac{3}{m-2} \\ z = -\frac{3}{m+1} \end{array}\right.$.

2) При $m = 2$ уравнение не определено.

3) При $m = -1$ $z = -1$.

4) При $m = 0$ уравнение не определено.

5) При $m = \frac{1}{2}$ $z = -2$.

6) При $m = 5$ $z = -\frac{1}{2}$.

7) При $m = -4$ $z = -\frac{1}{2}$.

7. Исследовать и решить уравнение с параметром

$\frac{x-k}{k+3} = \frac{k-4}{x-k}$. $D(y)$: $\begin{cases} x \neq k \\ k \neq -3 \end{cases}$.

$(x-k)^2 = (k-4)(k+3)$;

$x^2 - 2kx + k + 12 = 0$ (квадратное уравнение).

$D = k^2 - k - 12 = (k-4)(k+3) > 0$, тогда

$$x_{1,2} = k \pm \sqrt{k^2 - k - 12} \quad \left(\text{при } \left[\begin{array}{l} k > 4 \\ k < -3 \end{array}\right. \right).$$

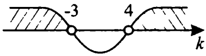


Рис. 21.

Выясним, при каких значениях параметра k $x \notin D(y)$?

а) Пусть $k = x$, тогда $(k-k)^2 = (k-4)(k+3)$,

т.е. $\left[\begin{array}{l} k = 4 \\ k = -3 \end{array}\right.$.

б) Если $k = 4$, то $x_{1,2} = 4 \pm 0 = 4 \notin D(y)$.

в) При $k = -3$ уравнение не определено, так как $-3 \notin D(y)$.

Ответ: 1) При $k \in (-\infty; -3) \cup (4; \infty)$ существуют $x_1 \neq x_2 \,\Big|\, x_{1,2} = k \pm \sqrt{k^2 - k - 12}$.

2) При $k = -3$ уравнение не определено.

3) При $k = 4$ $x \in \varnothing$.

4) При $k \in (-3; 4)$ $x \in \varnothing$, так как $x \notin \mathbb{R}$.

8. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{x-a}{x-2} + \frac{10}{x+2} + \frac{44}{x^2-4} = 0. \qquad D(y): \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2 \end{cases}.$$

$(x-a)(x+2) + 10(x-2) + 44 = 0$;

$\boxed{x^2 - x(a-12) + 24 - 2a = 0}$.

$D=(a-12)^2-4(24-2a)=(a-4)(a-12)>0$, тогда

$\exists\, x_1 \neq x_2 \;\Big|\; x_{1,2}=\dfrac{a-12\pm\sqrt{a^2-16a+48}}{2}$.

$\left(\text{При} \left[\begin{array}{l} a>12 \\ a<4 \end{array}\right.\right)$

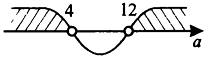


Рис. 22.

а) Если $a=4$, то $x_1=x_2=-4$.

б) Если $a=12$, то $x_1=x_2=0$.

Выясним, при каком значении параметра a $x \notin D(y)$?

в) Пусть $x=2$, тогда $2^2-2(a-12)+24-2a=0$, т.е. $a=13$.

Если $a=13$, то $x_1=2 \notin D(y)$; $x_2=-1$.

$\left(x_{1,2}=\dfrac{13-12\pm\sqrt{(13-4)(13-12)}}{2}\right)$

г) Пусть $x=-2$, тогда $(-2)^2-(-2)(a-12)+24-2a=0$, т.е. $4=0$, следовательно, не существует значения параметра a, при котором $x=-2$.

Ответ: 1) При $a\in(-\infty;4)\cup(12;13)\cup(13;\infty)$

$\exists\, x_1 \neq x_2 \;\Big|\; x_{1,2}=\dfrac{a-12\pm\sqrt{a^2-16a+48}}{2}$.

2) При $a=4$ $\quad x=-4$.

3) При $a=12$ $\quad x=0$.

4) При $a=13$ $\quad x=-1$.

5) При $a\in(4;12)$ $\quad x\in\varnothing$, т.е. $x\notin\mathbb{R}$.

9. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{ax+1}{x(x+a)}=-1.$$

$$D(y):\ \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq -a \end{cases}.$$

$ax+1=-x^2-ax$; $\boxed{x^2+2ax+1=0}$.

Если $D=a^2-1>0$, то $x_{1,2}=-a\pm\sqrt{a^2-1}$.

$\left(\text{При } \left[\begin{array}{l} a>1 \\ a<1 \end{array}\right.\right)$

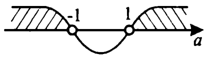


Рис. 23.

Выясним, при каком значении параметра a $x\notin D(y)$?

а) Пусть $x=0$, тогда $0^2+2\cdot 0\cdot a+1=0$; $1=0$, т.е. $a\in\varnothing$.

Значит, нет такого значения a, при котором $x=0$.

б) Пусть $x=-a$, тогда $a^2-2a^2+1=0$ или $a^2-1=0$,

т.е. $\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right.$.

1) Если $a=1$, то $x_{1,2}=-1\pm 0=-1\notin D(y)$.

2) Если $a=-1$, то $x_{1,2}=1\pm 0=1\notin D(y)$.

Ответ: 1) При $a\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$

$$\exists\, x_1\neq x_2 \;\Big|\; x_{1,2}=-a\pm\sqrt{a^2-1}.$$

2) При $a=1$ $x\in\varnothing$.

3) При $a=-1$ $x\in\varnothing$.

4) При $a\in(-1;1)$ $x\in\varnothing$, так как $x\notin\mathbb{R}$.

10. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{1}{k}-\frac{2}{x-k}+\frac{2k+1}{x(x-k)}=\frac{1}{kx(x-k)}. \qquad D(y):\ \begin{cases} x\neq k \\ k\neq 0 \\ x\neq 0 \end{cases}.$$

$$x(x-k)-2kx+(2k+1)k=1;\quad \boxed{x^2-3kx+2k^2+k-1=0}$$

Если $D=9k^2-8k^2-4k+4=(k-2)^2>0$, тогда

$$x_{1,2}=\frac{3k\pm(k-2)}{2},$$

т.е. $x_1=2k-1$; $x_2=k+1$ (при $k\neq 2$).

Выясним, при каких значениях параметра k $x\notin D(y)$?

а) $x_1=2k-1=k$; $k=1$; тогда $x_2=k+1$; $x_2=2$.

б) $x_1=2k-1=0$; $k=\frac{1}{2}$; $x_2=k+1$; $x_2=1{,}5$.

в) $x_2=k+1=k$; $1=0$; $k\in\varnothing$.

г) $x_2=k+1=0$; $k=-1$; тогда $x_1=2k-1$; $x_1=-3$.

д) Если $k=2$, то $x_1=x_2=3$.

Ответ: 1) При $\begin{cases} k\neq 0 \\ k\neq 1 \\ k\neq 2 \\ k\neq \frac{1}{2} \\ k\neq -1 \end{cases}$ $\exists\, x_1\neq x_2 \mid x_1=2k-1;\ x_2=k+1$.

2) При $k=0$ уравнение не определено.

3) При $k=1$ $x=2$.

4) При $k=\frac{1}{2}$ $x=1{,}5$.

5) При $k=-1$ $x=-3$.

6) При $k=2$ $x=3$.

Тренировочная работа 2

Исследовать и решить уравнения с параметром:

1. $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{a}{x^2+2x}+\dfrac{1}{2x-x^2}=0$;

2. $\dfrac{x-3}{m-2}=\dfrac{m-7}{x+1}$;

3. $\dfrac{x}{m(x+1)}-\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{3-m^2}{m(x+1)(x+2)}$;

4. $4(b-2)^2\cdot x+4b(b-2)+\dfrac{3b+4}{x}=0$;

5. $\dfrac{(k+2)x^2}{(k+1)(x-2)}-\dfrac{2kx}{(k-1)(x-2)}=\dfrac{5}{k^2-1}+\dfrac{12-k^2-k}{(k^2-1)(x-2)}$;

Решение тренировочной работы 2

1. $\frac{x}{x^2-4}+\frac{a}{x^2+2x}+\frac{1}{2x-x^2}=0$.

$$D(y):\ \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель, получаем:

$$\boxed{x^2+(x-2)a-(x+2)=0};$$

$$x^2+(a-1)x-2a-2=0.$$

Если $D=(a-1)^2+8a+8=(a+3)^2>0$,
тогда, при $a \neq -3$,

$$\exists\, x_1 \neq x_2 \ \Bigg|\ x_{1,2}=\frac{1-a\pm\sqrt{(a+3)^2}}{2},$$

т.е. $x_1=-a-1$; $x_2=2 \notin D(y)$.

а) Пусть $x_1=-a-1=0$, тогда $a=-1$.

б) Пусть $x_1=-a-1=2$, тогда $a=-3$.

в) Пусть $x_1=-a-1=-2$, тогда $a=1$.

Ответ: 1) При $\begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq 1 \\ a \neq -3 \end{cases}$ $\exists$ ед. решение $x=-a-1$.

2) При $a=-1$ $x \in \varnothing$.

3) При $a=1$ $x \in \varnothing$.

4) При $a=-3$ $x \in \varnothing$.

2. $\frac{x-3}{m-2}=\frac{m-7}{x+1}$. $\qquad D(y):\ \begin{cases} x\ne -1 \\ m\ne 2 \end{cases}$.

$(x-3)(x+1)=(m-7)(m-2)$;

$\boxed{x^2-2x-m^2+9m-17=0}$.

Если $D=1+m^2-9m+17=(m-3)(m-6)>0$, то

при $\left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<3 \end{array}\right.\ \exists\, x_1\ne x_2 \mid x_{1,2}=1\pm\sqrt{(m-3)(m-6)}$.

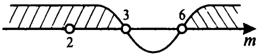


Рис. 24.

Выясним, при каких значениях параметра m $x\notin D(y)$?

а) Пусть $x=-1$, тогда $1+2-m^2+9m-17=0$,

тогда $\left[\begin{array}{l} m_1=2 \\ m_2=7 \end{array}\right.$.

Но $m_1=2\notin D(y)$, тогда $m_2=7$.

б) Если $m=7$, то $x_1=1+\sqrt{(7-3)(7-6)}=3$,

$x_2=1-\sqrt{(7-3)(7-6)}=-1\notin D(y)$.

в) Если $m=3$, то $x_1=x_2=1$.

г) Если $m=6$, то $x_1=x_2=1$.

Ответ: 1) При $m\in(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(6;7)\cup(7;\infty)$

$\exists\, x_1\ne x_2 \mid x_1=1+\sqrt{(m-3)(m-6)}$;

$x_2=1-\sqrt{(m-3)(m-6)}$.

2) При $m = 2$ уравнение не определено.

3) При $m = 3$ $x = 1$.

4) При $m \in (3; 6)$ $x \notin \mathbb{R}$.

5) При $m = 6$ $x = 1$.

6) При $m = 7$ $x = 3$.

3. $\frac{x}{m(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3 - m^2}{m(x+1)(x+2)}$.

$$D(y): \begin{cases} m \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{cases}.$$

$x(x + 2) - 2m(x + 1) = 3 - m^2$;

$\boxed{x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 2m - 3 = 0}$.

Если $D = (m - 1)^2 - m^2 + 2m + 3 = 4 > 0$, тогда $x_{1,2} = m - 1 \pm \sqrt{4}$, т.е. $x_1 = m + 1$; $x_2 = m - 3$.

Выясним, при каких значениях параметра m $x \notin D(y)$?

а) Пусть $x_1 = m + 1 = -2$, тогда $m = -3$, значит $x_2 = m - 3 = -6$.

б) Пусть $x_1 = m + 1 = -1$, тогда $m = -2$, значит $x_2 = m - 3 = -5$.

в) Пусть $x_2 = m - 3 = -2$, тогда $m = 1$, значит $x_1 = m + 1 = 2$.

г) Пусть $x_2 = m - 3 = -1$, тогда $m = 2$, значит $x_1 = m + 1 = 3$.

Ответ: 1) При $\begin{cases} m \neq -3 \\ m \neq -2 \\ m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$

$\exists\, x_1 \neq x_2 \mid x_1 = m+1;\ x_2 = m-3.$

2) При $m = 0$ уравнение не определено.

3) При $m = -3$ $\quad x = -6$.

4) При $m = -2$ $\quad x = -5$.

5) При $m = 1$ $\quad x = 2$.

6) При $m = 2$ $\quad x = 3$.

4. $4(b-2)^2 x + 4b(b-2) + \frac{3b+4}{x} = 0.$ $\qquad D(y):\ x \neq 0.$

$4(b-2)^2 x^2 + 4b(b-2)x + 3b + 4 = 0.$

а) При $b \neq 2$:

$$D = \left[2b(b-2)\right]^2 - 4(b-2)^2(3b+4) = 4(b-2)^2(b-4)(b+1).$$

$D > 0$ при $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b > 4 \\ b < -1 \end{array}\right. \\ b \neq 2. \end{cases}$

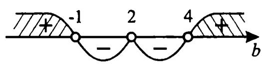


Рис. 25.

$$\exists\, x_1 \neq x_2 \;\Big|\; x_1 = \frac{-2b+2\sqrt{(b-4)(b+1)}}{4(b-2)};\ x_2 = \frac{-2b-2\sqrt{(b-4)(b+1)}}{4(b-2)}.$$

б) Выясним, при каком значении параметра b $x \notin D(y)$.

Пусть $x = 0$, тогда $b = -\frac{4}{3}$,

значит $x_1 = -\frac{2}{5}$; $\qquad x_2 = 0 \notin D(y)$.

в) Если $b = 2$, то $10 = 0$, т.е. $x \in \varnothing$.

г) Если $b = -1$, то $x_1 = x_2 = -\frac{1}{6}$.

д) Если $b = 4$, то $x_1 = x_2 = -1$.

Ответ: 1) При $b \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup (4; \infty)$

$$\exists\, x_1 \neq x_2 \;\Bigg|\; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b-4)(b+1)}}{2(b-2)}.$$

2) При $b = -\frac{4}{3}$ $\quad x = -0{,}4$.

3) При $b = -1$ $\quad x = -\frac{1}{6}$.

4) При $b \in (-1; 2) \cup (2; 4)$ $\quad x \notin \mathbb{R}$.

5) При $b = 2$ $\quad x \in \varnothing$.

6) При $b = 4$ $\quad x = -1$.

5. $$\frac{(k+2)x^2}{(k+1)(x-2)} - \frac{2kx}{(k-1)(x-2)} = \frac{5}{k^2-1} + \frac{12-k^2-k}{\left(k^2-1\right)(x-2)}.$$

$$D(y):\ \begin{cases} k \neq \pm 1 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

$$(k+2)(k-1)x^2 - 2k(k+1)x = 5(x-2) + 12 - k^2 - k;$$

$$\boxed{(k+2)(k-1)x^2 - \left(2k^2 + 2k + 5\right)x + k^2 + k - 2 = 0}.$$

а) При $\begin{cases} k \neq -2 \\ k \neq \pm 1 \end{cases}$, $x_{1,2} = \dfrac{2k^2+2k+5 \pm \sqrt{\left(2k^2+2k+5\right)^2 - 4\left(k^2+k-2\right)^2}}{2(k+2)(k-1)}$.

Под знаком корня применим формулу «разности квадратов», получаем:

$$x_{1,2} = \frac{2k^2+2k+5 \pm 3(2k+1)}{2(k+2)(k-1)}, \text{ т.е. } x_1 = \frac{2k^2+8k+8}{2(k+2)(k-1)} = \frac{k+2}{k-1};$$

$$x_2 = \frac{2k^2-4k+2}{2(k+2)(k-1)} = \frac{k-1}{k+2}.$$

б) Выясним, при каких значениях параметра k $x \notin D(y)$?

1) $x_1 = \frac{k+2}{k-1} = 2$, тогда $k = 4$; значит $x_2 = \frac{k-1}{k+2} = \frac{1}{2}$.

2) $x_2 = \frac{k-1}{k+2} = 2$, тогда $k = -5$; значит $x_1 = \frac{k+2}{k-1} = \frac{1}{2}$.

в) Если $\begin{cases} k \neq \pm 1 \\ k \neq -2 \\ k \neq 4 \\ k \neq -5 \end{cases}$, то $\exists\, x_1 \neq x_2 \;\Big|\; x_1 = \frac{k+2}{k-1}$; $x_2 = \frac{k-1}{k+2}$.

г) Если $k = -2$, тогда
$0 \cdot x^2 - (2 \cdot 4 - 4 + 5) \cdot x + 4 - 2 - 2 = 0$, т.е. $x = 0$.

Ответ: 1) При $\begin{cases} k \neq \pm 1 \\ k \neq -2 \\ k \neq 4 \\ k \neq -5 \end{cases}$ $\exists\, x_1 \neq x_2 \;\left|\; \begin{matrix} x_1 = \frac{k+2}{k-1} \\ x_2 = \frac{k-1}{k+2} \end{matrix}\right.$.

2) При $k = -2$ $x = 0$.

3) При $k = 4$ $x = \frac{1}{2}$.

4) При $k = -5$ $x = \frac{1}{2}$.

5) При $k = -1$ уравнение не определено.

6) При $k = 1$ уравнение не определено.

Применение теорем Виета для выяснения знаков корней $y = ax^2 + bx + c$

Если $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$, то $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$

I. $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$, если $\begin{cases} D > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \\ \dfrac{b}{a} < 0 \end{cases}$. Представим графически:

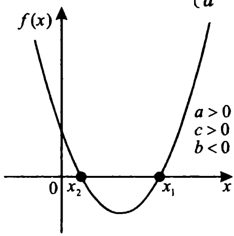


Рис. 26.

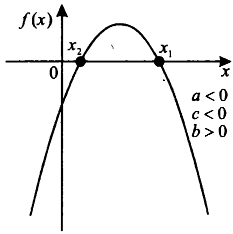


Рис. 27.

II. $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$, если $\begin{cases} D > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \\ \dfrac{b}{a} > 0 \end{cases}$. Представим графически:

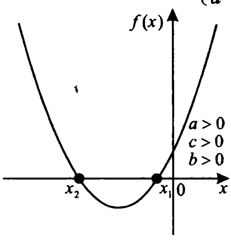


Рис. 28.

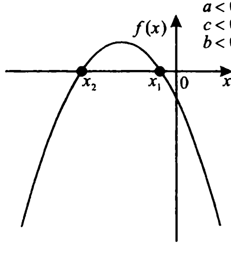


Рис. 29.

III. $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| > |x_2| \end{cases}$, если $\begin{cases} \dfrac{c}{a} < 0 \\ \dfrac{b}{a} < 0 \end{cases}$. Представим графически:

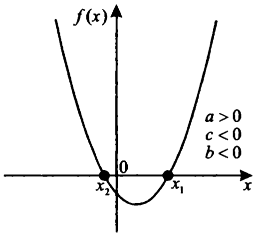


Рис. 30.

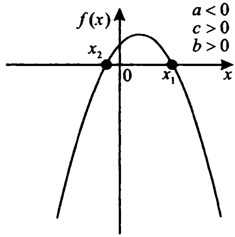


Рис. 31.

IV. $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_2| > |x_1| \end{cases}$, если $\begin{cases} \dfrac{c}{a} < 0 \\ \dfrac{b}{a} > 0 \end{cases}$. Представим графически:

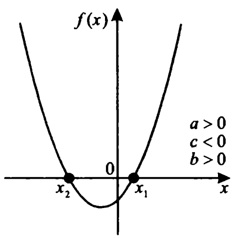


Рис. 32.

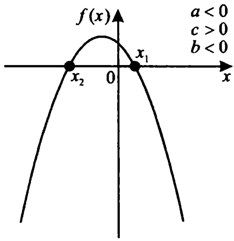


Рис. 33.

Практикум 3 (примеры исследования)

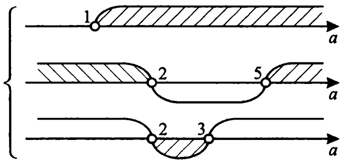
1. Исследовать уравнение на знаки корней в зависимости от значений параметра a.

$(a-2)x^2+2(a-3)x+a-5=0$.

$D=(a-3)^2-(a-2)(a-5)=a-1$.

а) $\begin{cases} x_1>0 \\ x_2>0 \end{cases}$, если $\begin{cases} a-1>0 \\ \dfrac{a-5}{a-2}>0 \\ \dfrac{a-3}{a-2}<0 \end{cases}$.

Графическая иллюстрация:

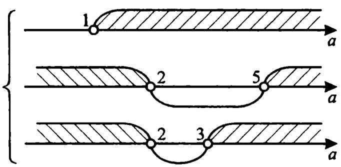


$\varnothing$

Рис. 34.

б) $\begin{cases} x_1<0 \\ x_2<0 \end{cases}$, если $\begin{cases} a-1>0 \\ \dfrac{a-5}{a-2}>0 \\ \dfrac{a-3}{a-2}>0 \end{cases}$.

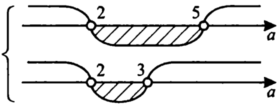
Графическая иллюстрация:



$(1;2)\cup(5;\infty)$

Рис. 35.

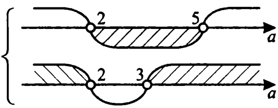
в) $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| > |x_2| \end{cases}$, если $\begin{cases} \dfrac{a-5}{a-2} < 0 \\ \dfrac{a-3}{a-2} < 0 \end{cases}$.



(2; 3)

Рис. 36.

г) $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| < |x_2| \end{cases}$, если $\begin{cases} \dfrac{a-5}{a-2} < 0 \\ \dfrac{a-3}{a-2} > 0 \end{cases}$.



(3; 5)

Рис. 37.

Ответ: 1) При $a \in (1;\ 2) \cup (5;\ \infty)$ $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$.

2) При $a \in (3;\ 5)$ $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_2| > |x_1| \end{cases}$.

3) При $a \in (2;\ 3)$ $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| > |x_2| \end{cases}$

4) При $a \in \varnothing$ $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$.

Не существует значения параметра a, при котором оба корня были бы положительны.

2. **Исследовать уравнение и определить знаки корней в зависимости от значений параметра t.**

$$\left(t^2-1\right)x^2+2(t-1)x+2=0.$$

$$D=(t-1)^2-2\left(t^2-1\right)=-(t+3)(t-1).$$

а) $\begin{cases} x_1>0 \\ x_2>0 \end{cases}$, если $\begin{cases} -(t+3)(t-1)>0 \\ \dfrac{2}{t^2-1}>0 \\ \dfrac{t-1}{t^2-1}<0. \end{cases}$ $\quad t\in(-3;\ -1).$

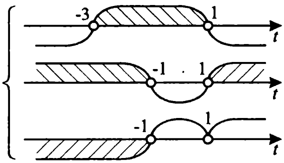


Рис. 38.

б) $\begin{cases} x_1<0 \\ x_2<0 \end{cases}$, если $\begin{cases} -(t+3)(t-1)>0 \\ \dfrac{2}{t^2-1}>0 \\ \dfrac{t-1}{t^2-1}>0. \end{cases}$ $\quad t\in\varnothing.$

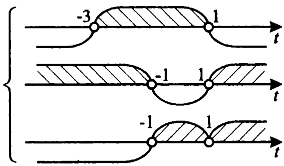


Рис. 39.

в) $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| > |x_2| \end{cases}$, если $\begin{cases} \dfrac{2}{t^2-1} < 0 \\ \dfrac{t-1}{t^2-1} < 0. \end{cases}$ $t \in \varnothing$.

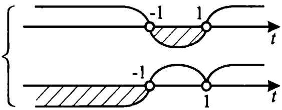


Рис. 40.

г) $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| < |x_2| \end{cases}$, если $\begin{cases} \dfrac{2}{t^2-1} < 0 \\ \dfrac{t-1}{t^2-1} > 0. \end{cases}$ $t \in (-1;\ 1)$.

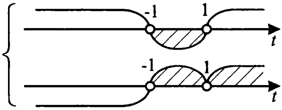


Рис. 41.

Ответ: 1) **При** $t \in (-3;\ -1)$

$$x_{1,\,2} = \frac{1-t\pm\sqrt{-t^2-2t+3}}{t^2-1}; \quad \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0. \end{cases}$$

2) **При** $t \in (-1;\ 1)$

$$x_{1,\,2} = \frac{1-t\pm\sqrt{-t^2-2t+3}}{t^2-1}; \quad \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_2| > |x_1|. \end{cases}$$

3) **При** $t \in (-\infty;\ -3) \cup (1;\ \infty)$ $x \in \varnothing$.

4) **При** $t = 1$ $x \in \varnothing$.

5) **При** $t = -1$ $x = \dfrac{1}{2}$.

6) **При** $t = -3$ $x = \dfrac{1}{2}$.

3. **Исследовать уравнение и определить знаки корней в зависимости от значений параметра a.**

$$(a+5)x^2+(2a-3)x+a-10=0.$$

$$D=(2a-3)^2-4(a+5)(a-10)=8a+209;$$

$$D=8a+209>0 \text{ при } a>-26\frac{1}{8}.$$

а) $\begin{cases} x_1>0 \\ x_2>0 \end{cases}$; $\begin{cases} a>-26\frac{1}{8} \\ \frac{a-10}{a+5}>0 \\ \frac{2a-3}{a+5}<0. \end{cases}$; $a\in\varnothing$.

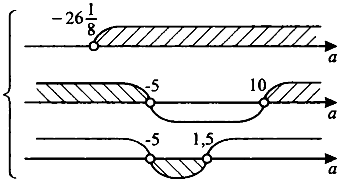


Рис. 42.

б) $\begin{cases} x_1<0 \\ x_2<0 \end{cases}$; $\begin{cases} a>-26\frac{1}{8} \\ \frac{a-10}{a+5}>0 \\ \frac{2a-3}{a+5}>0. \end{cases}$ $a\in\left(-26\frac{1}{8};-5\right)\cup(10;\infty)$.

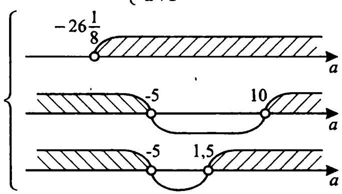


Рис. 43.

в) $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_2| > |x_1| \end{cases}$; $\begin{cases} a > -26\dfrac{1}{8} \\ \dfrac{a-10}{a+5} < 0 \\ \dfrac{2a-3}{a+5} > 0. \end{cases}$ $a \in (1{,}5;\ 10)$.

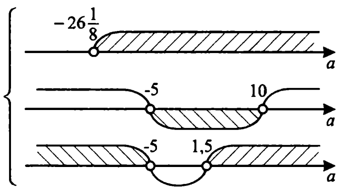


Рис. 44.

г) $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \\ |x_2| > |x_1| \end{cases}$; $\begin{cases} a > -26\dfrac{1}{8} \\ \dfrac{a-10}{a+5} < 0 \\ \dfrac{2a-3}{a+5} < 0. \end{cases}$ $a \in (-5;\ 1{,}5)$.

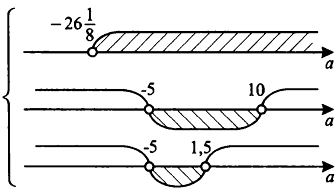


Рис. 45.

Ответ: 1) При $a \in \left(-26\frac{1}{8};\ -5\right) \cup (10;\ \infty)$

$$x_{1,2} = \frac{3-2a \pm \sqrt{8a+209}}{2(a+5)},\ \text{где} \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}.$$

2) При $a \in (1,5;\ 10)$

$$x_{1,2} = \frac{3-2a \pm \sqrt{8a+209}}{2(a+5)}, \quad \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_2| > |x_1| \end{cases}.$$

3) При $a \in \left(-\infty;\ -26\frac{1}{8}\right)$ $\quad x \in \varnothing$.

4) При $a \in \left(-5;\ 1\frac{1}{2}\right)$

$$x_{1,2} = \frac{3-2a \pm \sqrt{8a+209}}{2(a+5)}, \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_2| < |x_1| \end{cases}.$$

5) При $a = -26\frac{1}{8}$ $\quad x = -1\frac{4}{13}$.

6) При $a = -5$ $\quad x = -1\frac{2}{13}$.

7) При $a = 1,5$ $\quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{17}{13}}, \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| = |x_2| \end{cases}.$

8) При $a = 10$ $\quad x_1 = 0,\ x_2 = -1\frac{2}{15}$.

Практикум 4

Рассмотрим и иные задачи для квадратных уравнений с параметром.

1. $ax^2+bx+c=0$; найти $x_1^{-2}+x_2^{-2}=?$ (x_1, x_2 — корни заданного уравнения).

$$x_1^{-2}+x_2^{-2}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1^2x_2^2}.$$

Используя теорему Виета, запишем полученное уравнение так:

$$\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}, \text{ где } \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases},$$

т.е. $x_1^{-2}+x_2^{-2}=\dfrac{b^2-2ac}{c^2}$.

2. $ax^2+bx+c=0$; x_1, x_2 — корни данного уравнения.

Составить уравнение с корнями $x_1'=\dfrac{1}{x_1}$, $x_2'=\dfrac{1}{x_2}$.

$$x_1'+x_2'=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}.$$

Используем теорему Виета, получаем:

$\dfrac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\dfrac{b}{c}$. Пусть $-\dfrac{b}{c}=-p$. $x_1'\cdot x_2'=\dfrac{1}{x_1}\cdot\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{x_1\cdot x_2}$.

Используем теорему Виета еще раз, получаем:

$\dfrac{1}{\frac{c}{a}}=\dfrac{a}{c}$. Пусть $\dfrac{a}{c}=g$.

Тогда $x^2+px+g=0$, или $x^2+\dfrac{b}{c}x+\dfrac{a}{c}=0$, следовательно, $cx^2+bx+a=0$.

Ответ: $cx^2+bx+a=0$.

3. $ax^2 + bx + c = 0$; x_1, x_2 — корни данного уравнения.

Составить уравнение, корни которого $x_1' = x_1 + 1$ и $x_2' = x_2 + 1$.

Так как $x_1' = x_1 + 1$, $x_2' = x_2 + 1$,

то $x_1' + x_2' = x_1 + 1 + x_2 + 1 = x_1 + x_2 + 2$.

Используя теорему Виета, получаем:

$x_1' + x_2' = -\dfrac{b}{a} + 2$.

$x_1' \cdot x_2' = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 + 1$.

Используем теорему Виета еще раз, получаем:

$x_1' \cdot x_2' = \dfrac{c}{a} - \dfrac{b}{a} + 1$..

Следовательно, $x^2 + \left(\dfrac{b}{a} - 2\right)x + \dfrac{c}{a} - \dfrac{b}{a} + 1 = 0$,

т.е. $ax^2 + (b - 2a)x + c - b + a = 0$.

Ответ: $ax^2 + (b - 2a)x + c - b + a = 0$.

4. $4x^2 - (3k + 2)x + k^2 - 1 = 0$; x_1, x_2 — корни данного уравнения. При каких значениях параметра k $x_1 = 3 \cdot x_2$?

По теореме Виета запишем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{3k+2}{4} = 3x_2 + x_2 = 4x_2 \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{k^2-1}{4} = 3x_2 \cdot x_2 = 3x_2^2, \end{cases}$$

тогда $x_2 = \dfrac{3k+2}{16}$; $x_2^2 = \dfrac{k^2-1}{12}$.

Составим уравнение: $\left(\dfrac{3k+2}{16}\right)^2 = \dfrac{k^2-1}{12}$,

тогда $27k^2 + 36k + 12 = 64(k^2 - 1)$,

или $37k^2 - 36k - 76 = 0$.

$k_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 + 37 \cdot 76}}{37}$; $\quad k_{1,2} = \frac{18 \pm 56}{37}$,

т.е. $\left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = -1\frac{1}{37}. \end{array}\right.$

Сделав проверку, убедимся, что при $\left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = -1\frac{1}{37} \end{array}\right.$ существуют действительные корни x_1 и x_2, такие, что $x_1 = 3x_2$.

Можно иначе, т.е. вычислить D исходного уравнения $4x^2 - (3k + 2)x + k^2 - 1 = 0$, а затем проверить, удовлетворяют ли данные значения условию $D \geqslant 0$, но это значительно сложнее.

5. $x^2 + (m - 1)x + m - 2 = 0$.

При каком значении параметра m сумма квадратов корней $x_1^2 + x_2^2$ — наименьшая?

Так как $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$,

то $x_1^2 + x_2^2 = (m-1)^2 - 2(m-2) = m^2 - 2m + 1 - 2m + 4 = (m-2)^2 + 1$.

Пусть $A = 1$, т. е. $x_1^2 + x_2^2 = A = 1$ при $m = 2$.

Проверим, $x \in \mathbb{R}$?

При $m = 2$ уравнение имеет вид $x^2 + x = 0$,

т.е. $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Ответ: $x_1^2 + x_2^2$ — достигает наименьшего значения при $m = 2$, где x_1; x_2 — корни уравнения $x^2 + (m - 1)x + m - 2 = 0$.

6. Найти область изменения наибольших и наименьших значений для данной функции

$y=(2+a)x^2+(3a-4)x+2(a-2)$ (т.е. какие значения может принимать ордината вершины параболы).

Напомним, что $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

При $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, если $a>0$, то $y_{\text{наим}}=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

Если $a<0$, то $y_{\text{наиб}}=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

Для данной функции при $a+2>0$ получаем

$y_{\text{наим}}=-\dfrac{(3a-4)^2-8(a-2)(a+2)}{4(a+2)}=-\dfrac{a^2-24a+48}{4(a+2)}=t$

при $a+2<0$ получаем $y_{\text{наиб}}=\dfrac{-a^2+24a-48}{4(a+2)}=t$.

Тогда $-a^2+24a-48=4at+8t$;

$a^2-4(6-t)a+48+8t=0$.

$D=4(6-t)^2-48-8t=4(t-12)(t-2)\geqslant 0$.

Графическое решение:

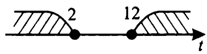


Рис. 46.

а) $\dfrac{-a^2+24a-48}{4(a+2)}\leqslant 2$; $\dfrac{-a^2+24a-48-8a-16}{4(a+2)}\leqslant 0$; $\dfrac{-(a-8)^2}{4(a+2)}\leqslant 0$.

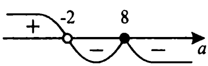


Рис. 47.

Таким образом, $a>-2$, значит $y_{\text{наим}}\in(-\infty;2]$.

б) $\dfrac{-a^2+24a-48}{4(a+2)} \geqslant 12$;

$\dfrac{-a^2+24a-48-48a-96}{4(a+2)} \geqslant 0$;

$\dfrac{-(a+12)^2}{4(a+2)} \geqslant 0$.

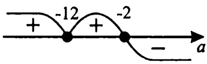


Рис. 48.

Таким образом, $a < -2$, значит $y_{наиб} \in [12;\infty)$.

Ответ: 1) При $a \in (-2;\ \infty)$ $y_{наим} \in (-\infty;2]$.

2) При $a \in (-\infty;\ -2)$ $y_{наиб} \in [12;\infty)$.

Расположение корней квадратного трехчлена

Рассмотрим некоторые теоремы, связанные с расположением корней квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ относительно точек M и N таких, что $M < N$.

I. $\begin{cases} x_1 < M \\ x_2 < M \end{cases}$, что возможно при $\begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < M \\ a \cdot f(M) > 0. \end{cases}$

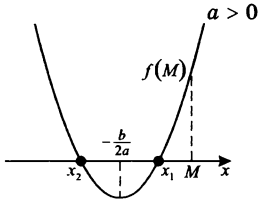


Рис. 49.

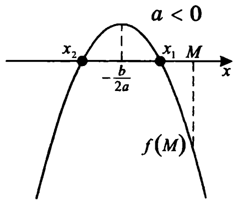


Рис. 50.

II. $\begin{cases} x_1 > M \\ x_2 < M, \end{cases}$ т.е. $M \in (x_2;\ x_1)$, что возможно при

$a \cdot f(M) < 0.$

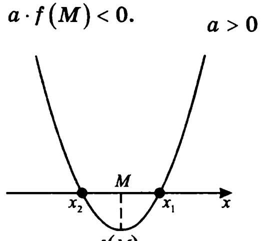


Рис. 51.

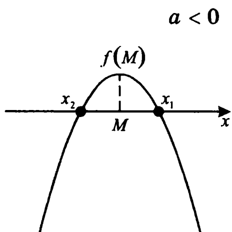


Рис. 52.

III. $\begin{cases} x_1 > M \\ x_2 > M, \end{cases}$ что возможно при $\begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > M \\ a \cdot f(M) > 0. \end{cases}$

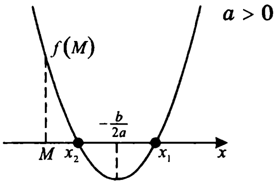


Рис. 53.

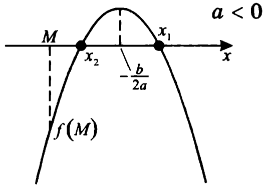


Рис. 54.

IV. $M < x_2 < x_1 < N$, т.е. $(x_2;\ x_1) \subset (M;\ N)$,

что возможно при $\begin{cases} D > 0 \\ M < -\dfrac{b}{2a} < N \\ a \cdot f(M) > 0 \\ a \cdot f(N) > 0. \end{cases}$

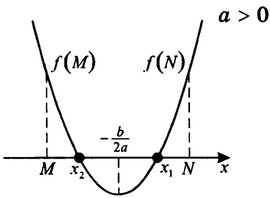


Рис. 55.

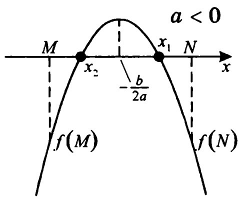


Рис. 56.

V. $\begin{cases} x_2 < x_1 \\ x_1 \in (M;\ N) \\ x_2 \notin (M;\ N), \end{cases}$ что возможно при $\begin{cases} f(M) \cdot f(N) < 0 \\ a \cdot f(M) < 0 \end{cases}$ или

$\begin{cases} a \cdot f(N) > 0 \\ a \cdot f(M) < 0 \end{cases}.$

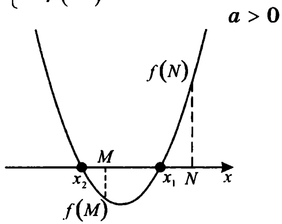


Рис. 57.

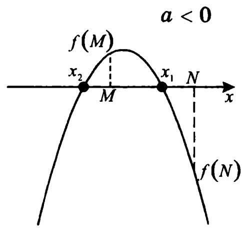


Рис. 58.

VI. $\begin{cases} x_1 > x_2 \\ x_2 \in (M;\ N) \\ x_1 \notin (M;\ N), \end{cases}$ что возможно при $\begin{cases} f(M) \cdot f(N) < 0 \\ a \cdot f(M) > 0 \end{cases}$

или $\begin{cases} a \cdot f(N) < 0 \\ a \cdot f(M) > 0 \end{cases}.$

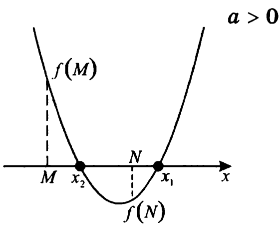


Рис. 59.

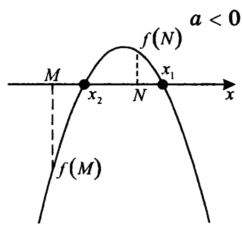


Рис. 60.

VII. $x_2 < M < N < x_1$, что возможно при $\begin{cases} a \cdot f(N) < 0 \\ a \cdot f(M) < 0 \end{cases}$.

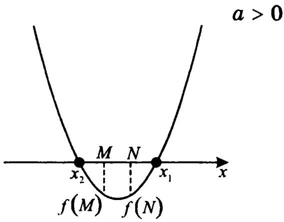


Рис. 61.

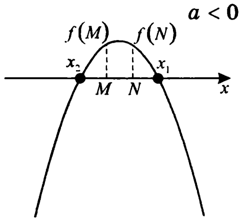


Рис. 62.

Практикум 5 (примеры использования теорем)

1. Выяснить, при каких значениях параметра a $(x_1 \neq x_2)$ оба корня уравнения $(a-1)x^2+(2a-3)x+a-3=0$ меньше единицы.

По теореме I это возможно только при $\begin{cases} D>0 \\ -\dfrac{b}{2a}<M \\ a\cdot f(M)>0. \end{cases}$

Найдем $D=(2a-3)^2-4(a-1)(a-3)=4a-3>0$.

Тогда $\begin{cases} 4a-3>0 \\ -\dfrac{2a-3}{2(a-1)}<1 \\ (a-1)\cdot(a-1+2a-3+a-3)>0; \end{cases}$

$\begin{cases} a>\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{4a-5}{a-1}>0 \\ (a-1)(4a-7)>0. \end{cases}$

Графическая йллюстрация решения:

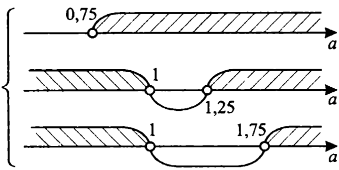


Рис. 63.

Рис. 64.

Ответ: оба корня уравнения $(a-1)x^2+(2a-3)x+a-3=0$ меньше единицы при $a\in(0{,}75;\ 1)\cup(1{,}75;\ \infty)$.

2. Выяснить, при каких значениях параметра k $1 \in (x_2;\ x_1)$ для уравнения $(k-1)x^2 + (k+4)x + k + 7 = 0$?

По теореме II это возможно только при $a \cdot f(M) < 0$, т.е. $(k-1)(3k+10) < 0$.

Иллюстрируем решение графически:

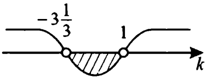


Рис. 65.

Ответ: для уравнения $(k-1)x^2 + (k+4)x + k + 7 = 0$

$$1 \in (x_2;\ x_1) \text{ при } k \in \left(-3\frac{1}{3};\ 1\right).$$

3. Выяснить, при каких значениях параметра a оба корня уравнения $(a+2)x^2 + 3ax - 2a = 0$ больше $0,5$?

По теореме III это возможно только при $\begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > M \\ a \cdot f(M) > 0. \end{cases}$

$$D = (3a)^2 + 8(a+2)a = a(17a+16).$$

Тогда $\begin{cases} a(17a+16) > 0 \\ -\dfrac{3a}{2(a+2)} > \dfrac{1}{2} \\ (a+2) \cdot \left((a+2) \cdot \dfrac{1}{4} + 3a \cdot \dfrac{1}{2} - 2a\right) > 0 \end{cases}$

$$\text{или}\quad \begin{cases} a(17a+16)>0 \\ \dfrac{2a+1}{a+2}<0 \\ \dfrac{a+2}{4}(2-a)>0. \end{cases}$$

Иллюстрируем решение графически:

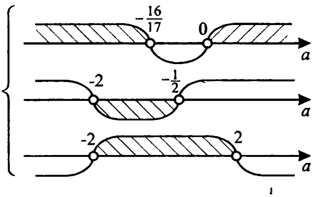


Рис. 66.

$a \in \left(-2;\ -\dfrac{16}{17}\right)$.

Ответ: для уравнения $(a+2)x^2+3ax-2a=0$

$x_1>0{,}5$; $x_2>0{,}5$ при $a \in \left(-2;\ -\dfrac{16}{17}\right)$.

4. Выяснить, при каких значениях параметра b $(x_2;\ x_1) \subset (-1;\ 1)$, где x_1, x_2 — корни уравнения $(b-2)x^2+(b+3)x+b+6=0$?

По теореме IV это возможно только при

$$\begin{cases} D>0 \\ M<-\dfrac{b}{2a}<N \\ a\cdot f(M)>0 \\ a\cdot f(N)>0. \end{cases}$$

$D=(b+3)^2-4(b-2)(b+6)=-(b-3)(3b+19)>0$.

$$\text{Тогда} \begin{cases} -(b-3)(3b+19) > 0 \\ -1 < -\dfrac{b+3}{2(b-2)} < 1 \\ (b-2)(b-2-b-3+b+6) > 0 \\ (b-2)(b-2+b+3+b+6) > 0; \end{cases}$$

$$\text{значит} \begin{cases} (-b-3)(3b+19) > 0 \\ \dfrac{3b-1}{2(b-2)} > 0 \\ \dfrac{7-b}{2(b-2)} < 0 \\ (b-2)(3b+7) > 0 \\ (b-2)(b+1) > 0. \end{cases}$$

Графическая иллюстрация решения:

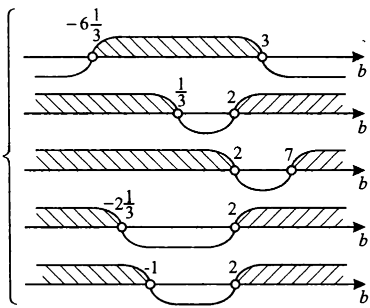


Рис. 67.

$b \in \left(-6\dfrac{1}{3};\ -2\dfrac{1}{3}\right)$.

Ответ: для уравнения $(b-2)x^2 + (b+3)x + b + 6 = 0$

$(x_2;\ x_1) \subset (-1;\ 1)$ при $b \in \left(-6\dfrac{1}{3};\ -2\dfrac{1}{3}\right)$.

5. Выяснить, при каких значениях параметра k

$$\begin{cases} x_1 > x_2 \\ x_1 \in (1;\ 2) \\ x_2 \notin (1;\ 2), \end{cases}$$ где x_1, x_2 — корни уравнения

$$(k+1)x^2 + (k-4)x + k - 7 = 0.$$

По теореме V это возможно только при $\begin{cases} a \cdot f(N) > 0 \\ a \cdot f(M) < 0 \end{cases}$

и $M < N$.

Тогда $\begin{cases} (k+1)\big((k+1)\cdot 2^2 + (k-4)\cdot 2 + k - 7\big) > 0 \\ (k+1)(k+1+k-4+k-7) < 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} (k+1)(7k-11) > 0 \\ (k+1)(3k-10) < 0. \end{cases}$$

Графическая иллюстрация решения:

$k \in \left(1\frac{4}{7};\ 3\frac{1}{3}\right)$.

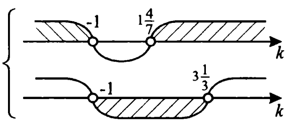


Рис. 68.

Ответ: для уравнения $(k+1)x^2 + (k-4)x + k - 7 = 0$

при $k \in \left(1\frac{4}{7};\ 3\frac{1}{3}\right)$ $\begin{cases} x_2 < x_1 \\ x_1 \in (1;\ 2) \\ x_2 \notin (1;\ 2). \end{cases}$

6. Выяснить, при каких значениях параметра k

$$\begin{cases} x_1 > x_2 \\ x_2 \in (1;\ 2) \\ x_1 \notin (1;\ 2), \end{cases}$$ где x_1, x_2 — корни уравнения

$$(k-2)x^2 + (k+2)x + k - 5 = 0.$$

По теореме VI это возможно

только при $\begin{cases} a \cdot f(N) < 0 \\ a \cdot f(M) > 0. \end{cases}$

Тогда

$$\begin{cases} (k-2)(k-2+k+2+k-5) > 0 \\ (k-2)(4k-8+2k+4+k-5) < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (k-2)(3k-5) > 0 \\ (k-2)(7k-9) < 0, \end{cases}$$

т.е. $k \in \left(1\frac{2}{7};\ 1\frac{2}{3}\right)$.

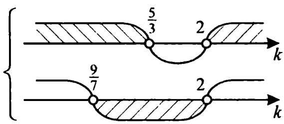


Рис. 69.

Ответ: при $k \in \left(1\frac{2}{7};\ 1\frac{2}{3}\right)$ $\begin{cases} x_1 > x_2 \\ x_2 \in (1;\ 2) \\ x_1 \notin (1;\ 2) \end{cases}$

для $(k-2)x^2 + (k+2)x + k - 5 = 0$.

7. Выяснить, при каких значениях параметра k $(-1;\ 2) \subset (x_2;\ x_1)$, где x_1, x_2 — корни уравнения $(k+2)x^2 + (k-3)x + k - 6 = 0$.

По теореме VII это возможно только при $\begin{cases} a \cdot f(M) < 0 \\ a \cdot f(N) < 0. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} (k+2)(k+2-k+3+k-6) < 0 \\ (k+2)(4k+8+2k-6+k-6) < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} (k+2)(k-1) < 0 \\ (k+2)(7k-4) < 0, \end{cases}$ т.е. $k \in \left(-2;\ \frac{4}{7}\right)$.

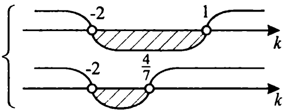


Рис. 70.

Ответ: при $k \in \left(-2;\ \frac{4}{7}\right)$ $(-1;\ 2) \subset (x_2;\ x_1)$ для $(k+2)x^2 + (k-3)x + k - 6 = 0$.

8. Выяснить, при каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 - 2x - a^2 + 1 = 0$ лежат между корнями $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - a = 0$.

Найдем корни $x^2 - 2x - a^2 + 1 = 0$.

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + a^2 - 1} = 1 \pm |a|$, т.е. $x_1 = 1 + |a|$, $x_2 = 1 - |a|$.

Очевидно, что $x_2 < x_1$.

Тогда $(1-|a|;\ 1+|a|) \subset (x_4;\ x_3)$, где x_3, x_4 — корни $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - a = 0$.

Используем теорему VII, получаем:

$$\begin{cases} (1-|a|)^2 - 2(a+1)(1-|a|) + a^2 - a < 0 \\ (1+|a|)^2 - 2(a+1)(1+|a|) + a^2 - a < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 + 2|a| \cdot a - 3a - 1 < 0 \\ 2a^2 - 2|a| \cdot a - 3a - 1 < 0, \end{cases}$$

что равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geqslant 0 \\ 4a^2 - 3a - 1 < 0 \\ -3a - 1 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ 4a^2 - 3a - 1 < 0 \\ -3a - 1 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geqslant 0 \\ 4(a-1)\left(a + \frac{1}{4}\right) < 0 \\ a > -\frac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ (a-1)\left(a + \frac{1}{4}\right) < 0 \\ a > -\frac{1}{3}. \end{cases} \end{array}\right. \qquad a \in \left(-\frac{1}{4};\ 1\right)$$

Графическая иллюстрация решения:

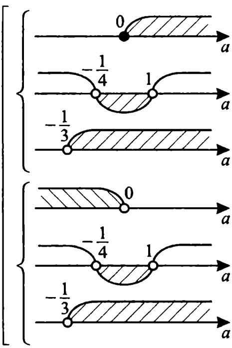


Рис. 71.

Ответ: при $a \in \left(-\frac{1}{4};\ 1\right)$ $(x_2;\ x_1) \subset (x_4;\ x_3)$,

где x_1; x_2 — корни $x^2 - 2x - a^2 + 1 = 0$,

а x_3; x_4 — корни $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - a = 0$.

Тренировочная работа 3

1. Исследуйте уравнение $(a+2)x^2-2(a+3)x+a+5=0$ на знаки корней в зависимости от значений параметра a.
2. Для уравнения $2ax^2-3(a-1)x+a+1=0$, где x_1, x_2 — корни, составьте квадратное уравнение с корнями, равными $x_1'=\frac{1}{x_1}+1$, $x_2'=\frac{1}{x_2}+1$.
3. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2+(m+1)x+2m-2=0$ будет наименьшей?
4. Найти области изменения наибольших и наименьших значений функции $y=(1+a)x^2+(3a-7)x+2(a-3)$ (т.е. какие значения может принимать ордината вершины параболы).
5. Выяснить, при каких значениях параметра a оба корня уравнения $(a+1)x^2+(2a+1)x+a-1=0$ ($x_1\neq x_2$) меньше единицы?
6. Выяснить, при каких значениях параметра k $1\in(x_2;x_1)$, где x_1, x_2 — корни уравнения $(k-2)x^2+(k+3)x+k+6=0$?
7. Выяснить, при каких значениях параметра m оба корня уравнения $(m+3)x^2+3(m+1)x-2(m+1)=0$ больше $\frac{1}{2}$.
8. Выяснить, при каких значениях параметра b $(x_2;x_1)\subset(-1;1)$, где x_1, x_2 — корни уравнения $(b-3)x^2+(b+2)x+b+5=0$.
9. Выяснить, при каких значениях параметра k $\begin{cases} x_1>x_2 \\ x_1\in(1;2) \\ x_2\notin(1;2) \end{cases}$, где x_1, x_2 — корни уравнения $(k+2)x^2+(k-3)x+k-6=0$.
10. Выяснить, при каких значениях параметра t $(-1;2)\subset(x_2;x_1)$, где x_1, x_2 — корни уравнения $(t+3)x^2+(t-2)x+t-5=0$.

Решение тренировочной работы 3

1. Исследуйте уравнение $(a+2)x^2-2(a+3)x+a+5=0$ на знаки корней в зависимости от значений параметра a.

а) $\begin{cases} x_1>0 \\ x_2>0 \end{cases}$, тогда $\begin{cases} D>0 \\ \dfrac{c}{a}>0 \\ \dfrac{b}{a}<0 \end{cases}$.

$$D=(a+3)^2-(a+2)(a+5)=a^2+6a+9-a^2-7a-10=-a-1,$$

значит $\begin{cases} -a-1>0 \\ \dfrac{a+5}{a+2}>0 \\ \dfrac{-2(a+3)}{a+2}<0 \end{cases}$

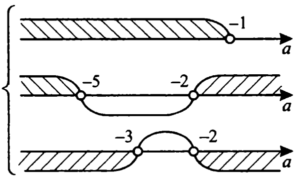
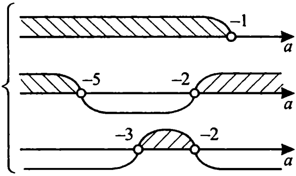


Рис. 72.

т.е. при $a\in(-\infty;-5)\cup(-2;-1)$ $\begin{cases} x_1>0 \\ x_2>0 \end{cases}$.

б) $\begin{cases} x_1<0 \\ x_2<0 \end{cases}$, тогда $\begin{cases} D>0 \\ \dfrac{c}{a}>0 \\ \dfrac{b}{a}>0 \end{cases}$,

значит $\begin{cases} -a-1>0 \\ \dfrac{a+5}{a+2}>0 \\ \dfrac{-2(a+3)}{a+2}>0 \end{cases}$

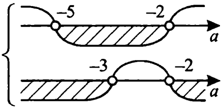


$\varnothing$

Рис. 73.

Такого случая нет.

в) $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| > |x_2| \end{cases}$, тогда $\begin{cases} \dfrac{c}{a} < 0 \\ \dfrac{b}{a} < 0 \end{cases}$, значит $\begin{cases} \dfrac{a+5}{a+2} < 0 \\ \dfrac{-2(a+3)}{a+2} < 0 \end{cases}$



т.е. при $a \in (-5;-3)$ $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| > |x_2| \end{cases}$.

Рис. 74.

г) $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| < |x_2| \end{cases}$, тогда $\begin{cases} \dfrac{c}{a} < 0 \\ \dfrac{b}{a} > 0 \end{cases}$,

значит $\begin{cases} \dfrac{a+5}{a+2} < 0 \\ \dfrac{-2(a+3)}{a+2} > 0 \end{cases}$

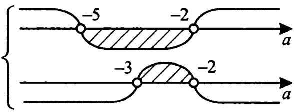


Рис. 75.

т.е. при $a \in (-3;-2)$ $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| < |x_2| \end{cases}$.

Ответ: 1) при $a \in (-\infty;-5) \cup (-2;1)$ $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$;

2) при $a \in (-5;-3)$ $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| > |x_2| \end{cases}$;

3) при $a \in (-3;-2)$ $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| < |x_2| \end{cases}$;

4) случай $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$ невозможен.

2. Для уравнения $2ax^2 - 3(a-1)x + a + 1 = 0$, где x_1, x_2 — корни, составьте квадратное уравнение с корнями, равными $x_1' = \frac{1}{x_1} + 1$, $x_2' = \frac{1}{x_2} + 1$.

$$x_1 + x_2 = \frac{3(a-1)}{2a}.$$

По теореме Виета тогда $x_1 \cdot x_2 = \frac{a+1}{2a}$.

$$x_1' + x_2' = \frac{1}{x_1} + 1 + \frac{1}{x_2} + 1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} + 2,$$

учтя предыдущие соображения, имеем

$$x_1' + x_2' = \frac{\frac{3(a-1)}{2a}}{\frac{a+1}{2a}} + 2 = \frac{3(a-1)}{a+1} = \frac{3a-3+2a+2}{a+1} = \frac{5a-1}{a+1};$$

$$x_1' \cdot x_2' = \left(\frac{1}{x_1} + 1\right)\left(\frac{1}{x_2} + 1\right) = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) + 1.$$

Так как $x_1 \cdot x_2 = \frac{a+1}{2a}$, то

$$x_1' \cdot x_2' = \frac{1}{\frac{a+1}{2a}} + \frac{3(a-1)}{a+1} + 1 = \frac{2a+3a-3+a+1}{a+1} = \frac{6a-2}{a+1},$$

значит $\begin{cases} x_1' + x_2' = \frac{5a-1}{a+1} \\ x_1' \cdot x_2' = \frac{6a-2}{a+1} \end{cases}$.

По теореме, обратной теореме Виета, составим квадратное уравнение, корнями которого будут x_1' и x_2':

$x^2 - \frac{5a-1}{a+1}x + \frac{6a-2}{a+1} = 0$, т.е. $(a+1)x^2 - (5a-1)x + 6a - 2 = 0$.

Ответ: $(a+1)x^2 - (5a-1)x + 6a - 2 = 0$ — уравнение, корни которого $x_1' = \frac{1}{x_1} + 1$, $x_2' = \frac{1}{x_2} + 1$, где x_1, x_2 — корни уравнения $2ax^2 - 3(a-1)x + a + 1 = 0$.

3. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (m+1)x + 2m - 2 = 0$ будет наименьшей?

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$, но $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 2 \end{cases}$, тогда

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-(m+1)\right)^2 - 2(2m-2) = m^2 + 2m + 1 - 4(m-1) =$$
$$= m^2 - 2m + 5 = (m-1)^2 + 4.$$

Очевидно, что для $y = (m-1)^2 + 4$ $\quad y_{\text{наим}} = 4$ при $m = 1$.

Ответ: для уравнения $x^2 + (m+1)x + 2m - 2 = 0$ наименьшая сумма квадратов его корней равна 4 при $m = 1$.

4. Найти области изменения наибольших и наименьших значений функции $y=(1+a)x^2+(3a-7)x+2(a-3)$ (т.е. какие значения может принимать ордината вершины параболы).

Учтем, что $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ при $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, если

а) $a>0$, то $y_{\text{наим}}=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$, т.е. в данном примере

при $a+1>0$ $x_0=-\dfrac{3a-7}{2(1+a)}$, значит,

$$y_{\text{наим}}=-\frac{(3a-7)^2-4(1+a)\cdot 2(a-3)}{4\cdot(1+a)}=$$

$$=-\frac{9a^2-42a+49-8a^2+16a+24}{4(1+a)}=-\frac{a^2-26a+73}{4(1+a)}=t,$$

тогда $a^2-26a+73+4at+4t=0$,

т.е. $a^2-2(13-2t)a+4t+73=0$

$D=(13-2t)^2-4t-73=4t^2-56t+96=4(t-2)(t-12)$;

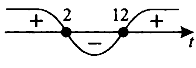
$D\geqslant 0$ 

Рис. 76.

Значит, $\left[\begin{array}{l} -\dfrac{a^2-26a+73}{4(1+a)}\leqslant 2 \\ -\dfrac{a^2-26a+73}{4(1+a)}\geqslant 12 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \dfrac{(a-9)^2}{4(1+a)}\geqslant 0 \\ \dfrac{(a+11)^2}{4(a+1)}\leqslant 0 \end{array}\right.$.

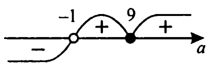
Так как $a+1>0$, то $\dfrac{(a-9)^2}{4(a+1)}\geqslant 0$ 

Рис. 77.

Верно всегда при $a>-1$, значит, $y_{\text{наим}} \in (-\infty;2]$ при $a>-1$, а $\frac{(a+11)^2}{4(a+1)} \leqslant 0$ при $a>-1$ выполняться не может.

б) при $a<0$ $y_{\text{наиб}} = -\frac{b^2-4ac}{4a}$, т.е. в данном примере при $a<-1$.

Тогда $\left[\begin{array}{l} \frac{(a-9)^2}{4(a+1)} \geqslant 0 \text{ — утверждение ложно} \\ \frac{(a+11)^2}{4(a+1)} \leqslant 0 \text{ — утверждение истинно,} \end{array}\right.$

значит, $y_{\text{наиб}} \in (12;\infty]$ при $a<-1$.

Ответ: 1) при $a \in (-1;\infty)$ $y_{\text{наим}} \in (-\infty;2]$;

2) при $a \in (-\infty;-1)$ $y_{\text{наиб}} \in (12;\infty]$.

5. Выяснить, при каких значениях параметра a оба корня уравнения $(a+1)x^2+(2a+1)x+a-1=0$ ($x_1 \neq x_2$) меньше единицы?

Чтобы $\begin{cases} x_1<1 \\ x_2<1 \end{cases}$ требуется $\begin{cases} D>0 \\ -\frac{b}{2a}<1 \\ a\cdot f(1)>0 \end{cases}$.

Так как
$D=(2a+1)^2-4(a+1)(a-1)=4a^2+4a+1-4a^2+4=4a+5$,

то $\begin{cases} 4a+5>0 \\ -\frac{2a+1}{2(a+1)}<1 \\ (a+1)(a+1+2a+1+a-1)>0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} a > -1,25 \\ \frac{2(a+1)+2a+1}{2(a+1)} > 0 \\ (a+1)(4a+1) > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a > -1,25 \\ \frac{4a+3}{2(a+1)} > 0 \\ (a+1)(4a+1) > 0 \end{cases}$$

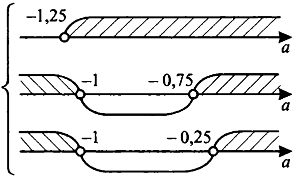


Рис. 78.

$a \in (-1,25;-1) \cup (-0,25;\infty)$.

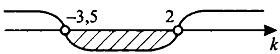
Ответ: при $a \in (-1,25;-1) \cup (-0,25;\infty)$ оба корня уравнения $(a+1)x^2 + (2a+1)x + a - 1 = 0$ меньше единицы.

6. **Выяснить, при каких значениях параметра** k $1 \in (x_2; x_1)$, **где** x_1, x_2 **— корни уравнения** $(k-2)x^2 + (k+3)x + k + 6 = 0$**?**

Чтобы $1 \in (x_2; x_1)$, требуется $a \cdot f(1) < 0$, т.е.

$(k-2)(k-2+k+3+k+6) < 0$;

$(k-2)(2k+7) < 0$, значит



$k \in (-3,5;2)$.

Рис. 79.

Ответ: при $k \in (-3,5;2)$ для уравнения $(k-2)x^2 + (k+3)x + k + 6 = 0$ $1 \in (x_2; x_1)$, где x_1, x_2 — корни уравнения.

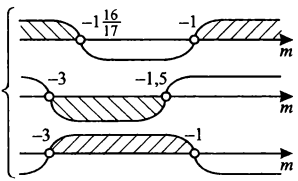
7. **Выяснить, при каких значениях параметра** m **оба корня уравнения** $(m+3)x^2+3(m+1)x-2(m+1)=0$ **больше** $\frac{1}{2}$**.**

Чтобы $\begin{cases} x_1 > \frac{1}{2} \\ x_2 > \frac{1}{2} \end{cases}$, требуется $\begin{cases} D>0 \\ -\frac{b}{2a} > \frac{1}{2} \\ a\cdot f(\frac{1}{2})>0 \end{cases}$.

Так как $D=9(m+1)^2+8(m+1)(m+3)=$
$=9m^2+18m+9+8m^2+32m+24=17m^2+50m+33$,
$D=0$;

$m_{1,2}=\frac{-25\pm\sqrt{25^2-17\cdot 33}}{17}=\frac{-25\pm 8}{17}$; $\left[\begin{array}{l} m=-\frac{33}{17}, \\ m=-1 \end{array}\right.$ тогда

$$\begin{cases} \left(m+\frac{33}{17}\right)(m+1)>0 \\ -\frac{3(m+1)}{2(m+3)}>\frac{1}{2} \\ (m+3)\left(\frac{1}{4}(m+3)+\frac{3}{2}(m+1)-2(m+1)\right)>0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left(m+\frac{33}{17}\right)(m+1)>0 \\ \frac{2(2m+3)}{m+3}<0 \\ \frac{1}{4}(m+3)(1-m)>0 \end{cases}$$



$m\in\left(-3;-1\frac{16}{17}\right)$.

Рис. 80.

Ответ: **для уравнения** $(m+3)x^2+3(m+1)x-2(m+1)=0$ **оба корня уравнения больше** $\frac{1}{2}$ **при** $m\in\left(-3;-1\frac{16}{17}\right)$.

8. **Выяснить, при каких значениях параметра b $(x_2;x_1)\subset(-1;1)$, где x_1, x_2 — корни уравнения $(b-3)x^2+(b+2)x+b+5=0$.**

Чтобы $(x_2;x_1)\subset(-1;1)$, требуется $\begin{cases} D>0 \\ M<-\dfrac{b}{2a}<N \\ a\cdot f(M)>0 \\ a\cdot f(N)>0 \end{cases}$.

Так как $D=(b+2)^2-4(b-3)(b+5)=$

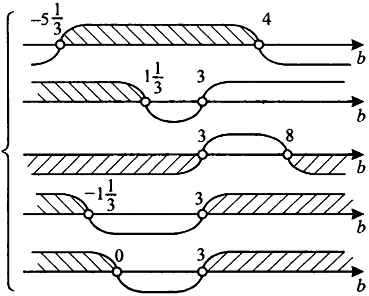
$=b^2+4b+4-4b^2-8b+60=-3b^2-4b+64$;

$D=0$; $3b^2+4b-64=0$;

$b_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{2+192}}{3}=\dfrac{-2\pm14}{3}$ $\left[\begin{array}{l} b=4 \\ b=-5\frac{1}{3} \end{array}\right.$, то

$$\begin{cases} -3\left(b+5\frac{1}{3}\right)(b-4)>0 \\ -1<-\dfrac{b+2}{2(b-3)}<1 \\ (b-3)(b-3+b+2+b+5)>0 \\ (b-3)(b-3-b-2+b+5)>0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -3\left(b+5\frac{1}{3}\right)(b-4)>0 \\ \dfrac{3b-4}{2(b-3)}>0 \\ \dfrac{8-b}{2(b-3)}<0 \\ (b-3)(3b+4)>0 \\ (b-3)\cdot b>0 \end{cases};$$



$b \in \left(-5\frac{1}{3}; -1\frac{1}{3}\right).$

Рис. 81.

Ответ: для уравнения $(b-3)x^2 + (b+2)x + b + 5 = 0$ $(x_2; x_1) \subset (-1;1)$, где x_1, x_2 — корни уравнения, при $b \in \left(-5\frac{1}{3}; -1\frac{1}{3}\right)$.

9. Выяснить, при каких значениях параметра k

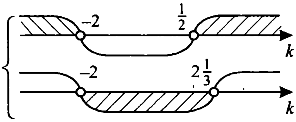
$\begin{cases} x_1 > x_2 \\ x_1 \in (1;2) \\ x_2 \notin (1;2) \end{cases}$, где x_1, x_2 — корни уравнения

$(k+2)x^2 + (k-3)x + k - 6 = 0$.

Чтобы $\begin{cases} x_1 > x_2 \\ x_1 \in (1;2) \\ x_2 \notin (1;2) \end{cases}$, требуется $\begin{cases} a \cdot f(2) > 0 \\ a \cdot f(1) < 0 \end{cases}$, значит

$$\begin{cases} (k+2)\big((k+2)\cdot 4 + (k-3)\cdot 2 + k - 6\big) > 0 \\ (k+2)(k+2+k-3+k-6) < 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (k+2)(8k-4) > 0 \\ (k+2)(3x-7) < 0 \end{cases};$$



$k \in \left(\frac{1}{2}; 2\frac{1}{3}\right)$.

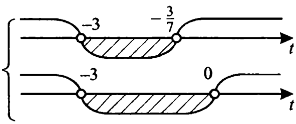
Рис. 82.

Ответ: для уравнения $(k+2)x^2+(k-3)x+k-6=0$ при $k \in \left(\frac{1}{2}; 2\frac{1}{3}\right)$ $\begin{cases} x_1 > x_2 \\ x_1 \in (1;2) \\ x_2 \notin (1;2) \end{cases}$, где x_1, x_2 — корни уравнения.

10. **Выяснить, при каких значениях параметра t $(-1;2) \subset (x_2;x_1)$, где x_1, x_2 — корни уравнения $(t+3)x^2+(t-2)x+t-5=0$.**

Чтобы $(-1;2) \subset (x_2;x_1)$, требуется $\begin{cases} a \cdot f(2) < 0 \\ a \cdot f(-1) < 0 \end{cases}$, значит

$$\begin{cases} (t+3)\big((t+3)\cdot 4+(t-2)\cdot 2+t-5\big)<0 \\ (t+3)\big((t+3)\cdot 1-(t-2)+t-5\big)<0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (t+3)(7t+3)<0 \\ (t+3)\cdot t<0 \end{cases}, \text{ тогда}$$



$t \in \left(-3; -\frac{3}{7}\right)$.

Рис. 83.

Ответ: для уравнения $(t+3)x^2+(t-2)x+t-5=0$ $(-1;2) \subset (x_2;x_1)$, где x_1, x_2 — корни уравнения, при $t \in \left(-3; -\frac{3}{7}\right)$.

3

Исследование и решение систем линейных уравнений

Дано: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

Умножим первое уравнение на a_2, второе — на a_1 и вычтем из второго уравнения первое, получаем:

$$
\begin{array}{l}
-\begin{array}{l} a_1a_2x + a_2b_1y = c_1a_2 \\ a_1a_2x + a_1b_2y = c_2a_1 \end{array} \\
\hline
(a_1b_2 - a_2b_1)\,y = a_1c_2 - a_2c_1 .
\end{array}
$$

При этом учитываем, что $a_1 \cdot a_2 \neq 0$, $b_1 \cdot b_2 \neq 0$.

Умножим первое уравнение на b_2, второе — на b_1 и вычтем из первого уравнения второе, получаем

$$
\begin{array}{l}
-\begin{array}{l} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ a_2b_1x + b_1b_2y = c_2b_1 \end{array} \\
\hline
(a_1b_2 - a_2b_1)\,x = c_1b_2 - c_2b_1 .
\end{array}
$$

Пусть $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Тогда существует единственное решение системы:

$$
\begin{cases} x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{cases}.
$$

Напомним, что прямоугольная таблица чисел называется определителем.

$\begin{vmatrix} m & n \\ p & k \end{vmatrix} = \Delta$ (определитель второго порядка).

Значение определителя вычисляется по правилу:

$\begin{vmatrix} m & n \\ p & k \end{vmatrix} = mk - pn$ (разность произведений чисел по диагонали, рассмотренная в определенном порядке).

Пример 1.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 7\,.$$

Составим для системы линейных уравнений определители и при этом учтем, что a_1, a_2 — коэффициенты в столбце при неизвестной x;

b_1, b_2 — коэффициенты в столбце при неизвестном y;

c_1, c_2 — коэффициенты, не содержащие неизвестных x и y, т.е. столбец свободных членов.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ — это главный определитель,

где a_1, a_2, b_1, b_2 — коэффициенты при неизвестных x и y в столбцах; c_1, c_2 — коэффициенты в столбцах, не содержащих неизвестных x и y.

Для того, чтобы найти Δ_x, вместо столбца, содержащего неизвестное x, ставится столбец, не содержащий неизвестных, т.е. столбец свободных членов.

$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$, где b_1, b_2, c_1, c_2 —

коэффициенты в столбцах, не содержащих неизвестное x.

Для того, чтобы найти Δ_y, вместо столбца, содержащего неизвестное y, ставится столбец, не содержащий неизвестных, т. е. столбец свободных членов.

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$; где a_1, a_2, c_1, c_2 — коэффициенты в столбцах, не содержащих неизвестное y.

Тогда, используя определители, получим решение системы:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}. \end{cases}$$

$$\Delta_x = c_1b_2 - c_2b_1; \quad \Delta_y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Пример 2.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 5x - y = 7. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 15 = -17;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -13 - 21 = -34;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 65 = -51.$$

Тогда $x = \dfrac{-34}{-17} = 2$; $y = \dfrac{-51}{-17} = 3$.

Ответ: $(2;\ 3)$.

Пример 3.

$$\begin{cases} 3x - 8y = 5 \\ -5x + 4y = -2. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-5)\cdot(-8) = -28;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot 4 - (-2)\cdot(-8) = 4;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) - (-5)\cdot 5 = 19.$$

Тогда $x = \frac{4}{-28} = -\frac{1}{7}$; $y = -\frac{19}{28}$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{7};\ -\frac{19}{28}\right)$.

Пример 4.

$$\begin{cases} 0,2x + 0,3y = 0,1 \\ 0,3x - 0,2y = 0,1. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & -0,2 \end{vmatrix} = 0,2\cdot(-0,2) - 0,3\cdot 0,3 = -0,13;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & -0,2 \end{vmatrix} = 0,1\cdot(-0,2) - 0,1\cdot 0,3 = -0,05;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 \end{vmatrix} = 0,2\cdot 0,1 - 0,3\cdot 0,1 = -0,01.$$

Тогда $x = \frac{-0,05}{-0,13} = \frac{5}{13}$; $y = \frac{-0,01}{-0,13} = \frac{1}{13}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{13};\ \frac{1}{13}\right)$.

Исследование систем линейных уравнений

Дана система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$

I. Пусть $\Delta \neq 0$, тогда существует единственное решение:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{cases} \text{ при } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\,.$$

II. Пусть $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0, \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \\ c_1b_2 - c_2b_1 = 0 \\ a_1c_2 - a_2c_1 = 0. \end{cases}$

Следовательно, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = t$,

где t — коэффициент пропорциональности.

Тогда $\begin{cases} a_1 = a_2t \\ b_1 = b_2t \\ c_1 = c_2t \end{cases}$, т.е. система будет иметь вид:

$$\begin{cases} a_2tx + b_2ty = c_2t \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow a_2x + b_2y = c_2\,.$$

Так как $t \neq 0$, то система имеет бесконечное множество решений.

Пусть $x = k$, тогда $y = \dfrac{c_2 - a_2k}{b_2}$,

т.е. $\left(k;\ \dfrac{c_2 - a_2k}{b_2}\right)$ — бесконечное множество решений системы, где k — любое число.

III. Пусть $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x^2 + \Delta_y^2 \neq 0, \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = t \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} \\ \dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{a_1}{a_2}. \end{array} \right. \end{cases}$

Тогда система будет иметь вид

$$\begin{cases} a_2tx + b_2ty = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

Поделив первое уравнение на t, получаем:

$$\begin{cases} a_2x + b_2y = \dfrac{c_1}{t} \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Таким образом, $c_2 = \dfrac{c_1}{t}$, т.е. $\dfrac{c_1}{c_2} = t$, но $\dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

Следовательно, система решения не имеет.

Практикум 6

1. Решить и исследовать систему

$$\begin{cases}(m-5)x-2y=m-7\\(m+1)x+my=3m.\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}m-5 & -2\\ m+1 & m\end{vmatrix}=m(m-5)+2(m+1)=m^2-3m+2=$$

$$=(m-1)(m-2);$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}m-7 & -2\\ 3m & m\end{vmatrix}=m(m-7)+6m=m^2-m=m(m-1);$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}m-5 & m-7\\ m+1 & 3m\end{vmatrix}=$$

$$=3m(m-5)-(m-7)(m+1)=2m^2-9m+7=(m-1)(2m-7).$$

I. $\Delta\neq 0$, $\begin{cases}m\neq 1\\ m\neq 2.\end{cases}$ Тогда

$$x=\frac{m(m-1)}{(m-1)(m-2)}=\frac{m}{m-2};\qquad y=\frac{(m-1)(2m-7)}{(m-1)(m-2)}=\frac{2m-7}{m-2}.$$

Следовательно, существует единственное решение:

$$\left(\frac{m}{m-2};\ \frac{2m-7}{m-2}\right)\ \text{при}\ \begin{cases}m\neq 1\\ m\neq 2.\end{cases}$$

II. $m=1$, тогда $\begin{cases}\Delta=0\\ \Delta_x=0\\ \Delta_y=0.\end{cases}$

Следовательно, $\begin{cases}-4x-2y=-6\\ 2x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow 2x+y=3$.

Пусть $x=k$, тогда $y=3-2k$, т.е. бесконечное множество решений вида $(k;\ 3-2k)$, где k — любое.

III. $m = 2$, тогда $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x \neq 0 \\ \Delta_y \neq 0. \end{cases}$

Следовательно, $(x;\ y) \in \varnothing$.

Ответ: 1) При $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$ $\left(\frac{m}{m-2};\ \frac{2m-7}{m-2}\right)$.

2) При $m = 1$ $(k;\ 3-2k)$ для $\forall k$.

3) При $m = 2$ нет решений.

2. $\begin{cases} (a+5)x + (2a+3)y = 3a+2 \\ (3a+10)x + (5a+6)y = 2a+4. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+5 & 2a+3 \\ 3a+10 & 5a+6 \end{vmatrix} = (a+5)(5a+6) - (2a+3)(3a+10) =$$
$$= -a(a-2);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3a+2 & 2a+3 \\ 2a+4 & 5a+6 \end{vmatrix} = (3a+2)(5a+6) - (2a+3)(2a+4) =$$
$$= a(11a+14);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a+5 & 3a+2 \\ 3a+10 & 2a+4 \end{vmatrix} = (a+5)(2a+4) - (3a+2)(3a+10) =$$
$$= -a(7a+22).$$

I. $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 2, \end{cases}$ то $\left(-\frac{11a+14}{a-2};\ \frac{7a+22}{a-2}\right)$ —

единственное решение системы.

II. Если $a = 2$, то $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x \neq 0 \\ \Delta_y \neq 0 \end{cases}$, тогда решений нет.

III. Если $a = 0$, то $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0 \end{cases}$, тогда $5x + 3y = 2$.

Пусть $x = t$, тогда $y = \frac{2-5t}{3}$, где t — любое число.

$\left(t;\ \frac{2-5t}{3}\right)$ — бесконечное множество решений системы.

Ответ: 1) При $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 2 \end{cases}$ $\left(-\frac{11a+14}{a-2};\ \frac{7a+22}{a-2}\right)$.

2) При $a = 2$ нет решений.

3) При $a = 0$ $\left(t;\ \frac{2-5t}{3}\right)$ для $\forall t$.

3. $\begin{cases} (a-1)x + 2ay = -2 \\ 2ax + (a-1)y = a - 1. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-1 & 2a \\ 2a & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 - 4a^2 = (a-1-2a)\cdot(a-1+2a) =$$
$$= (a+1)(1-3a);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 2a \\ a-1 & a-1 \end{vmatrix} = 2 - 2a - 2a^2 + 2a = 2(1+a)(1-a);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a-1 & -2 \\ 2a & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 + 4a = (a+1)^2.$$

I. Если $\Delta \neq 0$, $\begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq \dfrac{1}{3}, \end{cases}$ то $\begin{cases} x = \dfrac{2(1-a)}{1-3a} \\ y = \dfrac{a+1}{1-3a}. \end{cases}$.

II. Если $a = -1$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0, \end{cases}$ то $-2x - 2y = -2$.

Пусть $x = t$, тогда $y = 1 - t$.
Существует бесконечное множество решений вида $(t; 1-t)$, где t — любое число.

III. Если $a = \dfrac{1}{3}$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x \neq 0 \\ \Delta_y \neq 0. \end{cases}$

Решений нет.

Ответ: 1) При $\begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq \dfrac{1}{3} \end{cases}$ $\left(x = \dfrac{2(1-a)}{1-3a};\ y = \dfrac{a+1}{1-3a}\right)$.

2) При $a = -1$ $(t;\ 1-t)$ для $\forall t$.

3) При $a = \dfrac{1}{3}$ нет решений.

4. $\begin{cases} (a-1)x + (a+1)y = 2\left(a^2 - 1\right) \\ \left(a^2 - 1\right)x + \left(a^2 + 1\right)y = 2\left(a^3 - 1\right). \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-1 & a+1 \\ a^2-1 & a^2+1 \end{vmatrix} = (a-1)\left(a^2+1\right) - (a-1)(a+1)^2 =$$

$$= (a-1)\left[a^2 + 1 - (a+1)^2\right] = (a-1)\left(a^2 + 1 - a^2 - 2a - 1\right) =$$

$$= (a-1)(-2a);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2(a^2-1) & a+1 \\ 2(a^3-1) & a^2+1 \end{vmatrix} = 2(a^2-1)(a^2+1) - 2(a^2-1)(a^2+a+1) =$$

$$= 2(a^2-1)\left[a^2+1-a^2-a-1\right] = -2(a^2-1)a;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a-1 & 2(a^2-1) \\ a^2-1 & 2(a^3-1) \end{vmatrix} = 2(a-1)^2(a^3+a+1) - 2(a-1)^2(a+1)^2 =$$

$$= 2(a-1)^2\left[a^2+a+1-(a+1)^2\right] = -2a(a-1)^2.$$

I. Если $\Delta \neq 0$, $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1, \end{cases}$ то $\begin{cases} x = a+1 \\ y = a-1. \end{cases}$.

II. Если $a = 0$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0. \end{cases}$

Заданная система равносильна уравнению $-x + y = -2$. Пусть $x = t$; $y = -2 + t$, следовательно, существует бесконечное множество решений вида $(t;\ t-2)$, где t — любое число.

III. Если $a = 1$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0, \end{cases}$ то $0 \cdot x + 2y = 0$; $y = 0$ для $\forall x$.

Полагая $x = k$, где k — любое число, получим бесконечное множество решений вида $(k;0)$.

Ответ: 1) При $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1, \end{cases}$ $\exists$ ед. решение $(a+1;\ a-1)$.

2) При $a = 0$ бесконечное множество решений вида $(t;\ t-2)$ для $\forall t$.

3) При $a = 1$ бесконечное множество решений вида $(k;\ 0)$ для $\forall k$.

5. $\begin{cases}(a-1)^2x+(a^2-1)y=(a+1)^2\\(2a-1)x+(a+1)y=a^2-1.\end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}(a-1)^2 & a^2-1\\2a-1 & a+1\end{vmatrix}=(a-1)^2(a+1)-(a^2-1)(2a-1)=$$

$$=(a^2-1)(a-1-2a+1)=-a(a+1)(a-1);$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}(a+1)^2 & a^2-1\\a^2-1 & a+1\end{vmatrix}=(a+1)^2(a+1)-(a^2-1)(a^2-1)=$$

$$=(a+1)^2\left(a+1-(a-1)^2\right)=(a+1)^2\left(a+1-a^2+2a-1\right)=-(a+1)^2a(a-3);$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}(a-1)^2 & (a+1)^2\\2a-1 & a^2-1\end{vmatrix}=(a-1)^2(a^2-1)-(a+1)^2(2a-1)=$$

$$=(a+1)\cdot\left((a-1)^3-(2a-1)(a+1)\right)=$$

$$=(a+1)\left(a^3-3a^2+3a-1-2a^2-a+1\right)=$$

$$=(a+1)\cdot\left(a^3-5a^2+2a\right)=a(a+1)(a-2)(2a-1).$$

I. Если $\Delta\neq 0$, $\begin{cases}a\neq 0\\a\neq 1\\a\neq -1,\end{cases}$ то $\exists$ ед. $(x;\ y)$.

$$\begin{cases}x=\dfrac{-a(a+1)^2(a-3)}{-a(a+1)(a-1)}\\[2ex] y=\dfrac{a(a+1)(a-2)(2a-1)}{-a(a+1)(a-1)},\end{cases}\quad \text{т.е.}\quad \begin{cases}x=\dfrac{(a+1)(a-3)}{a-1}\\[2ex] y=\dfrac{-(a-2)(2a-1)}{a-1}.\end{cases}$$

II. Если $a=0$, $\begin{cases}\Delta=0\\\Delta_x=0\\\Delta_y=0.\end{cases}$ то, подставляя в систему

$a=0$, получаем $x-y=1$.

Так как все определители равны нулю, то система равносильна одному уравнению.

Пусть $y = t$, тогда получаем бесконечное множество решений вида $(1+t;\ t)$, где t — любое число.

III. Если $a = -1$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0, \end{cases}$ то система равносильна

$4 \cdot x + 0 \cdot y = 0$, т.е. $x = 0$.

Пусть $y = k$, тогда получаем бесконечное множество решений вида $(0;\ k)$, где k — любое число.

IV. Если $a = 1$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x \neq 0 \\ \Delta_y \neq 0, \end{cases}$

тогда система решений не имеет.

Ответ: 1) При $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq -1, \end{cases}$ $\exists$ ед. решение

$$\left(x = \frac{(a+1)(a-3)}{a-1};\ y = \frac{-(a-2)(2a-1)}{a-1}\right).$$

2) При $a = 0$ бесконечное множество решений вида $(1+t;t)$ для $\forall t$.

3) При $a = -1$ бесконечное множество решений вида $(0;k)$ для $\forall k$.

4) При $a = 1$ $\varnothing$.

6. $\begin{cases} a(a-1)x + a(a+1)y = a^3 + 2 \\ (a^2-1)x + (a^3+1)y = a^4 - 1. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(a-1) & a(a+1) \\ a^2-1 & a^3+1 \end{vmatrix} = a(a-1)(a^3+1) - (a^2-1)\cdot a\cdot(a+1) =$$
$$= a(a-1)(a+1)\left[a^2 - a + 1 - (a+1)\right] =$$
$$= a^2(a-1)(a+1)(a-2);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a^3+2 & a(a+1) \\ a^4-1 & a^3+1 \end{vmatrix} = (a^3+2)(a^3+1) - a(a+1)(a^4-1) =$$
$$= (a+1)\cdot\left[(a^3+2)(a^2-a+1) - a(a^4-1)\right] =$$
$$= (a+1)(a^5 + 2a^2 - a^4 - 2a + a^3 + 2 - a^5 + a) =$$
$$= (a+1)(-a^4 + a^3 + 2a^2 - a + 2) =$$
$$= -(a+1)(a-2)(a^3 + a^2 + 1);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a(a-1) & a^3+2 \\ a^2-1 & a^4-1 \end{vmatrix} = a(a-1)(a^4-1) - (a^2-1)(a^3+2) =$$
$$= (a+1)(a-1)\cdot\left[(a^2+1)a(a-1) - (a^3+2)\right] =$$
$$= (a+1)(a-1)(a^4 - 2a^3 + a^2 - a - 2) =$$
$$= (a+1)(a-1)(a-2)(a^3 + a + 1).$$

I. Если $\Delta \neq 0$, $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq -1 \\ a \neq 2, \end{cases}$ то существует единственное решение системы $\begin{cases} x = \dfrac{-\left(a^3+a^2+1\right)}{a^2(a-1)} \\ y = \dfrac{a^3+a+1}{a^2}. \end{cases}$

II. Если $a = 0$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x \neq 0 \\ \Delta_y \neq 0 \end{cases}$, следовательно, система решений не имеет.

III. Если $a = 1$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x \neq 0 \\ \Delta_y = 0 \end{cases}$, следовательно, система решений не имеет.

IV. Если $a = -1$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0, \end{cases}$ то $\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \\ 2 \cdot x + 0 \cdot y = 1. \end{cases}$

Тогда $x = \dfrac{1}{2}$, y — любое число.

Пусть $y = t$, тогда $\left(\dfrac{1}{2};\ t\right)$ — бесконечное множество решений системы, где t — любое число.

V. Если $a = 2$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0, \end{cases}$, то $\begin{cases} 2x + 6y = 10 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$.

Следовательно, $x = 5 - 3y$.

Пусть $y = t$, тогда $(5 - 3t;\ t)$ — бесконечное множество решений системы, где t — любое число.

Ответ: 1) При $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq -1 \\ a \neq 2 \end{cases}$ $\exists$ ед. решение

$$\left(x = \frac{-\left(a^3+a^2+1\right)}{a^2(a-1)};\ y = \frac{a^3+a+1}{a^2} \right).$$

2) При $a = 1$ $\varnothing$.

3) При $a = 0$ $\varnothing$.

4) При $a = -1$ бесконечное множество решений вида $\left(\frac{1}{2}; t\right)$ для $\forall t$.

5) При $a = 2$ бесконечное множество решений вида $(5 - 3t; t)$ для $\forall t$.

Тренировочная работа 4

Исследовать и решить системы уравнений с параметром.

1. $\begin{cases} 3x + (m-1)y = 12 \\ (m-1)\cdot x + 12y = 24. \end{cases}$

2. $\begin{cases} (m-4)x - 2y = m - 6 \\ (m+2)x + (m+1)y = 3(m+1). \end{cases}$

3. $\begin{cases} (a+4)x + (2a+1)y = 3a - 1 \\ (3a+7)x + (5a+1)y = 2(a+1). \end{cases}$

4. $\begin{cases} (a+1)x + (a+3)y = 2(a+3)(a+1) \\ (a+3)(a+1)x + (a^2 + 4a + 5)y = a^3 + 6a^2 + 12a + 7. \end{cases}$

Решение тренировочной работы 4

1. $\begin{cases} 3x + (m-1)y = 12 \\ (m-1)\cdot x + 12y = 24. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & m-1 \\ m-1 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot 12 - (m-1)^2 = (6+m-1)(6-m+1) = (m+5)(7-m);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & m-1 \\ 24 & 12 \end{vmatrix} = 12\cdot 12 - 24(m-1) = 24(6-m+1) = 24(7-m);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ m-1 & 24 \end{vmatrix} = 3\cdot 24 - 12(m-1) = 12(6-m+1) = 12(7-m).$$

I. Если $\Delta \neq 0$, $\begin{cases} m \neq 7 \\ m \neq -5, \end{cases}$ то существует единственное

решение системы $\begin{cases} x = \dfrac{24}{m+5} \\ y = \dfrac{12}{m+5}. \end{cases}$

II. Если $m = 7$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0, \end{cases}$ то система

равносильна уравнению $3x + 6y = 12$,

т.е. $x + 2y = 4$.

Пусть $x = t$, $y = \dfrac{4-t}{2}$, где t — любое число,

тогда $\left(t;\ \dfrac{4-t}{2}\right)$ — бесконечное множество решений системы.

III. Если $m = -5$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x \neq 0 \\ \Delta_y \neq 0 \end{cases}$, тогда система решений не имеет.

Ответ: 1) При $\begin{cases} m = -5 \\ m = 7 \end{cases}$ $\exists$ ед. решение $\left(\frac{24}{m+5};\ \frac{12}{m+5}\right)$.

2) При $m = 7$ бесконечное множество решений вида $\left(t;\ \frac{4-t}{2}\right)$, где t — любое число.

3) При $m = -5$ $(x_0;\ y_0) \in \varnothing$.

2. $\begin{cases} (m-4)x - 2y = m - 6 \\ (m+2)x + (m+1)y = 3(m+1). \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m-4 & -2 \\ m+2 & m+1 \end{vmatrix} = (m-4)(m+1) + 2(m+2) =$$

$$= m^2 - 3m - 4 + 2m + 4 = m(m-1);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} m-6 & -2 \\ 3(m+1) & m+1 \end{vmatrix} = (m-6)(m+1) + 6(m+1) = m(m+1);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m-4 & m-6 \\ m+2 & 3(m+1) \end{vmatrix} = 3(m-4)(m+1) - (m-6)(m+2) =$$

$$= 3m^2 - 9m - 12 - m^2 + 4m + 12 = 2m^2 - 5m = m(2m-5).$$

I. Если $\Delta \neq 0$, $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$, то существует единственное решение системы $(x;\ y)$: $\begin{cases} x = \frac{m+1}{m-1} \\ y = \frac{2m-5}{m-1}. \end{cases}$

II. Если $m = 0$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0, \end{cases}$, то система равносильна

уравнению $2x + y = 3$.

Пусть $x = t$, $y = 3 - 2t$, тогда существует бесконечное множество решений вида $(t;\ 3-2t)$, где t — любое число.

III. Если $m = 1$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x \neq 0 \\ \Delta_y \neq 0, \end{cases}$ то система решений не имеет,

т.е. $(x_0; y_0) \in \varnothing$.

Ответ: 1) При $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$ $\exists$ ед. решение $\left(\frac{m+1}{m-1};\ \frac{2m-5}{m-1}\right)$.

2) При $m = 0$ есть бесконечное множество решений вида $(t;\ 3-2t)$, где t — любое.

3) При $m = 1$ $(x_0;\ y_0) \in \varnothing$.

3. $\begin{cases} (a+4)x + (2a+1)y = 3a - 1 \\ (3a+7)x + (5a+1)y = 2(a+1). \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+4 & 2a+1 \\ 3a+7 & 5a+1 \end{vmatrix} = (a+4)(5a+1) - (2a+1)(3a+7) =$$

$$= 5a^2 + 21a + 4 - 6a^2 - 17a - 7 = -a^2 + 4a - 3 = -(a-1)(a-3);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3a-1 & 2a+1 \\ 2(a+1) & 5a+1 \end{vmatrix} = (3a-1)(5a+1) - (2a+1)\cdot 2(a+1) =$$

$$= 15a^2 - 2a - 1 - 4a^2 - 6a - 2 =$$

$$= 11a^2 - 8a - 3 = (a-1)(11a+3);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a+4 & 3a-1 \\ 3a+7 & 2(a+1) \end{vmatrix} = 2(a+4)(a+1)-(3a-1)(3a+7) =$$

$$= 2a^2+10a+8-9a^2-18a+7 =$$

$$= -7a^2-8a+15 = -(a-1)\cdot(7a+15).$$

I. Если $\Delta \neq 0$, $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 3 \end{cases}$,

то $\exists$ ед. $(x;\ y) \left| \begin{cases} x = \dfrac{11a+3}{3-a} \\ y = \dfrac{7a+15}{a-3} \end{cases} \right.$.

II. Если $a=1$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0, \end{cases}$ то заданная система

равносильна уравнению $5x+3a=2$.

Пусть $x=t$, тогда существует бесконечное множество решений вида $\left(t;\ \dfrac{2-5t}{3}\right)$, где t — любое число.

III. Если $a=3$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x \neq 0 \\ \Delta_y \neq 0 \end{cases}$, то система решений не имеет.

Ответ: 1) При $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 3 \end{cases}$ $\exists$ ед. $\left(-\dfrac{11a+3}{a-3};\ \dfrac{7a+15}{a-3}\right)$.

2) При $a=1$ бесконечное множество решений вида $\left(t;\ \dfrac{2-5t}{3}\right)$, где t — любое.

3) При $a=3$ $(x_0;\ y_0) \in \varnothing$.

4. $$\begin{cases}(a+1)x+(a+3)y=2(a+3)(a+1)\\(a+3)(a+1)x+\left(a^2+4a+5\right)y=a^3+6a^2+12a+7.\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a+1 & a+3\\(a+3)(a+1) & \left(a^2+4a+5\right)\end{vmatrix}=$$

$$=(a+1)\left(a^2+4a+5\right)-(a+3)^2(a+1)=$$

$$=(a+1)\left(a^2+4a+5-a^2-6a-9\right)=$$

$$=(a+1)(-2a-4)=$$

$$=-2(a+1)(a+2);$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}2(a+3)(a+1) & a+3\\a^3+6a^2+12a+7 & a^2+4a+5\end{vmatrix}=$$

$$=2(a+3)(a+1)\left(a^2+4a+5\right)-(a+3)\left(a^3+6a^2+12a+7\right)=$$

$$=(a+3)\left(2a^3+10a^2+18a+10-a^3-6a^2-12a-7\right)=$$

$$=(a+3)\left(a^3+4a^2+6a+3\right)=$$

$$=(a+3)(a+1)\left(a^2+3a+3\right);$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}a+1 & 2(a+3)(a+1)\\(a+3)(a+1) & a^3+6a^2+12a+7\end{vmatrix}=$$

$$=(a+1)\left(a^3+6a^2+12a+7\right)-2(a+3)^2(a+1)^2=$$

$$=(a+1)\left(a^3+6a^2+12a+7-2(a+3)^2(a+1)\right)=$$

$$=(a+1)\left(-a^3-8a^2-18a-11\right)=$$

$$=-(a+1)^2\left(a^2+7a+11\right).$$

I. Если $\Delta \neq 0$, $\begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq -2, \end{cases}$ то существует единственное

решение системы $\begin{cases} x = \dfrac{-(a+3)\left(a^2+3a+3\right)}{2(a+2)} \\ y = \dfrac{(a+1)\left(a^2+7a+11\right)}{2(a+2)}. \end{cases}$

II. Если $a = -1$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0, \end{cases}$ то система равносильна

уравнению $0 \cdot x + 2y = 0$.

Пусть $x = t$, $y = 0$, тогда система имеет бесконечное множество решений вида $(t;\ 0)$, где t — любое число.

III. Если $a = -2$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x \neq 0 \\ \Delta_y \neq 0, \end{cases}$ то система решений не имеет.

Ответ: 1) При $\begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq -2 \end{cases}$ $\exists$ ед.

$$\left(x = \frac{-(a+3)\left(a^2+3a+3\right)}{2(a+2)};\ y = \frac{(a+1)\left(a^2+7a+11\right)}{2(a+2)} \right).$$

2) При $a = -1$ бесконечное множество решений вида $(t;\ 0)$, где t — любое.

3) При $a = -2$ $(x_0;\ y_0) \in \varnothing$.

Обобщающая тренировочная работа 5

Исследовать и решить уравнения с параметрами:

1. $\frac{x+1}{6x}+\frac{a-x}{2a^2x}=\frac{1}{a^2}$;

2. $\frac{1-2a}{x-1}=\frac{2x+2}{a+1}$;

3. $\frac{x+1}{(m-1)(x+2)}-\frac{2}{x+3}=\frac{3-(m-1)^2}{(m-1)(x+2)(x+3)}$.

4. Исследовать и решить систему уравнений с параметром

$$\begin{cases}(a+1)x-(1-a)y=2\left(1-a^2\right)\\ \left(a^2-1\right)x+\left(a^2+1\right)y=-2\left(a^3+1\right)\end{cases}.$$

5. Исследовать и решить уравнение с параметром:

$(k-1)x^2+5kx+7k+11=0$.

Выяснить, при каких значениях параметра k

а) $(x_2;\, x_1)\subset(-3;\,-1)$;

б) $\begin{cases}x_1>0\\ x_2<0\\ |x_1|>|x_2|\end{cases}$, где x_1, x_2 — корни уравнения.

Решение обобщающей тренировочной работы 5

1. Исследовать и решить уравнение с параметром

$\frac{x+1}{6x}+\frac{a-x}{2a^2x}=\frac{1}{a^2}$. $\quad D(y)$: $\begin{cases} a\ne 0 \\ x\ne 0 \end{cases}$.

$(x+1)a^2+3(a-x)=6x$;

$(a+3)(a-3)x=-a(a+3)$.

а) Если $\begin{cases} a\ne 3 \\ a\ne -3 \\ a\ne 0 \end{cases}$, то существует единственное значение

$x=\frac{a}{3-a}$.

б) Если $a=3$, то $0\cdot x=-18$, т.е. $x\in\varnothing$.

в) Если $a=-3$, то $0\cdot x=0$, т.е. $x\in D(y)$.

г) Если $a=0$, то уравнение не определено.

Ответ: 1) При $\begin{cases} a\ne 3 \\ a\ne -3 \\ a\ne 0 \end{cases}$ $\exists$ ед. $x \,\Big|\, x=\frac{a}{3-a}$.

2) При $a=3$ $\quad x\in\varnothing$.

3) При $a=-3$ любое $x\ne 0$ — есть решение.

4) При $a=0$ уравнение не определено.

2. Исследовать и решить уравнение с параметром

$\frac{1-2a}{x-1}=\frac{2x+2}{a+1}$. $\quad D(y)$: $\begin{cases} a\ne -1 \\ x\ne 1 \end{cases}$.

$(1-2a)(a+1)=2(x+1)(x-1)$;

$2x^2=-2a^2-a+3$.

а) Если $-2a^2 - a + 3 > 0$, то $a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-4}$,

т.е. $\left[\begin{array}{l} a = -1,5 \\ a = 1 \end{array}\right.$.

Графическая иллюстрация решения:

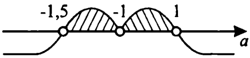


Рис. 84.

Тогда $x_1 = \sqrt{\frac{-2a^2 - a + 3}{2}}$; $x_2 = -\sqrt{\frac{-2a^2 - a + 3}{2}}$

для $a \in (-1,5; -1) \cup (-1; 1)$.

б) Если $a = 1$, то $x = 0$.

в) Если $a = -1,5$, то $x = 0$.

г) Выясним, при каких значениях параметра a $x = 1$?

$$2 = -2a^2 - a + 3 \text{ или } 2a^2 + a - 1 = 0, \text{ т.е. } \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = \frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: 1) При $a \in (-1,5; -1) \cup \left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

$\exists x_1 \neq x_2$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-2a^2 - a + 3}{2}}$.

2) При $a = -1,5$ $x = 0$.

3) При $a = -1$ уравнение не определено.

4) При $a = \frac{1}{2}$ $x = -1$.

5) При $a = 1$ $x = 0$.

6) При $a \in (-\infty; -1,5) \cup (1; \infty)$ $x \notin \mathbb{R}$.

3. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{x+1}{(m-1)(x+2)}-\frac{2}{x+3}=\frac{3-(m-1)^2}{(m-1)(x+2)(x+3)}.$$

$$D(y):\ \begin{cases} m\neq 1\\ x\neq -2\\ x\neq -3\end{cases}.$$

$$(x+1)(x+3)-2(m-1)(x+2)=3-(m-1)^2;$$

$$x^2-2(m-3)x+m^2-6m+5=0.$$

а) Если $m\neq 1$, то $D=(m-3)^2-(m^2-6m+5)=4$, тогда $x_1=m-1;\quad x_2=m-5$.

б) Если $x_1=m-1=-2$ при $m=-1$, то $x_2=m-5=-6$.

в) Если $x_1=m-1=-3$ при $m-2$, то $x_2=m-5=-7$.

г) Если $x_2=m-5=-2$ при $m=3$, то $x_1=m-1=2$.

д) Если $x_2=m-5=-3$ при $m=2$, то $x_1=m-1=1$.

Ответ: 1) При $\begin{cases} m\neq 1\\ m\neq 2\\ m\neq 3\\ m\neq -1\\ m\neq -2\end{cases}\quad \exists x_1\neq x_2\ \left|\ \begin{matrix} x_1=m-1\\ x_2=m-5\end{matrix}\right.$.

2) При $m=1$ уравнение не определено.

3) При $m=2\quad x=1$.

4) При $m=3\quad x=2$.

5) При $m=-1\quad x=-6$.

6) При $m=-2\quad x=-7$.

8-1140

4. **Исследовать и решить систему уравнений с параметром**

$$\begin{cases}(a+1)x-(1-a)y=2\left(1-a^2\right)\\ \left(a^2-1\right)x+\left(a^2+1\right)y=-2\left(a^3+1\right).\end{cases}$$

Составим и вычислим главный и вспомогательные определители:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a+1 & -(1-a)\\ a^2-1 & a^2+1\end{vmatrix}=(a+1)\left(a^2+1\right)-(a-1)\left(a^2-1\right)=$$

$$=a^3+a^2+a+1-a^3+a^2+a-1=2a(a+1);$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}2\left(1-a^2\right) & a-1\\ -2\left(a^3+1\right) & a^2+1\end{vmatrix}=2\left(1-a^2\right)\left(a^2+1\right)+2\left(a^3+1\right)(a-1)=$$

$$=2-2a^4+2a^4-2a^3+2a-2=-2a(a+1)(a-1);$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}a+1 & 2\left(1-a^2\right)\\ a^2-1 & -2\left(a^3+1\right)\end{vmatrix}=-2(a+1)\left(a^3+1\right)-2\left(1-a^2\right)\left(a^2-1\right)=$$

$$=-2a^4-2a^3-2a-2+2a^4-4a^2+2=$$

$$=-2a\left(a^2+2a+1\right)=-2a(a+1)^2.$$

а) Если $\Delta\neq 0$, при $\begin{cases}a\neq 0\\ a\neq -1\end{cases}$

$$\exists\text{ ед. }(x_0;\,y_0)\left|\begin{array}{l}x_0=\dfrac{\Delta_x}{\Delta};\ \ x_0=1-a,\\[2mm] y_0=\dfrac{\Delta_y}{\Delta};\ \ y_0=-1-a.\end{array}\right.$$

б) Если $a = 0$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0 \end{cases}$, т.е. существует бесконечное множество решений.

Данная система равносильна уравнению $x - y = 2$.

Пусть $x = t$, тогда $y = t - 2$, где t — любое число.

в) Если $a = -1$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0 \end{cases}$, т.е. существует бесконечное множество решений.

Система равносильна уравнению $0 \cdot x - 2y = 0$.

Пусть $x = K$, $y = 0$, где K — любое число.

Ответ: 1) При $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{cases}$ $\exists$ ед. решение $(1 - a; -1 - a)$.

2) При $a = 0$ бесконечное множество решений вида $(t; t - 2)$ для $\forall t$.

3) При $a = -1$ бесконечное множество решений вида $(K; 0)$ для $\forall K$.

5. Исследовать и решить уравнение с параметром $(k - 1)x^2 + 5kx + 7k + 11 = 0$.

а) Выяснить, при каких значениях параметра k $(x_2; x_1) \subset (-3; -1)$, где x_2, x_1 — корни уравнения $(x_2 \neq x_1)$.

б) Выяснить, при каких значениях параметра k $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| > |x_2| \end{cases}$, где x_1, x_2 — корни уравнения.

а) Если $k \neq 1$, то

$$D = 25k^2 - 4(k-1)(7k+11) = -3(k-2)\left(k+7\frac{1}{3}\right).$$

$D > 0$, т.е.

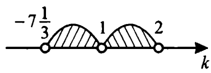


Рис. 85.

Если $(x_2;\, x_1) \subset (-3;\, -1)$, то получим:

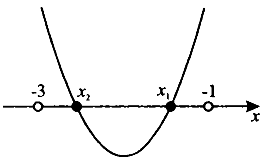


Рис. 86.

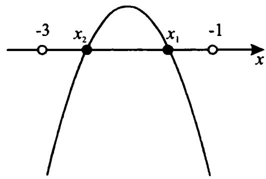


Рис. 87.

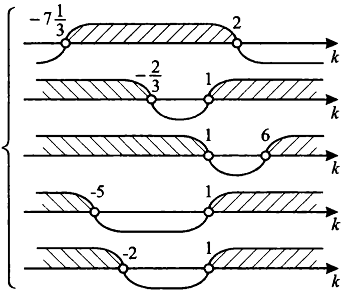
Для $ax^2 + bx + c = 0$ это возможно только при

$$\begin{cases} D \geqslant 0 \\ M < -\dfrac{b}{2a} < N \\ a \cdot f(M) > 0 \\ a \cdot f(N) > 0 \end{cases}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} -3(k-2)\left(k+7\dfrac{1}{3}\right) > 0 \\ -3 < \dfrac{-5k}{2(k-1)} < -1 \\ (k-1)(k-1-5k+7k+11) > 0 \\ (k-1)(9k-9-15k+7k+11) > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -3(k-2)\left(k+7\frac{1}{3}\right) > 0 \\ \frac{-2-3k}{2(k-1)} < 0 \\ \frac{k-6}{2(k-1)} > 0 \\ (k-1)(k+5) > 0 \\ (k-1)(k+2) > 0 \end{cases}$$

Графическая иллюстрация:



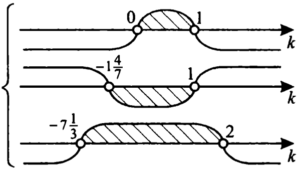
$$k \in \left(-7\frac{1}{3}; -5\right).$$

Рис. 88.

б) При каких значениях параметра k

$$\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| > |x_2| \end{cases}, \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} -\frac{5k}{k-1} > 0 \\ \frac{7k+11}{k-1} < 0 \\ D > 0 \end{cases} ?$$

Графическая иллюстрация решения:



$k \in (0; 1)$.

Рис. 89.

Ответ: 1) При $k \in \left(-7\frac{1}{3}; -5\right)$ $(x_2; x_1) \subset (-3; -1)$,

где x_1, x_2 — корни

$(k-1)x^2 + 5kx + 7k + 11 = 0$.

2) При $k \in (0; 1)$ корни уравнения

$$(k-1)x^2 + 5kx + 7k + 11 = 0: \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| > |x_2| \end{cases}.$$

Проверочная работа 1

Исследовать и решить уравнения с параметром:

1. $m+1-\dfrac{4(m+3)}{x-3}=\dfrac{8}{m-1}$;

2. $\dfrac{3-2k}{x-2}=\dfrac{2x}{k}$;

3. $\dfrac{x+2}{(a-1)(x+3)}-\dfrac{2}{x+4}=\dfrac{2-a^2+2a}{(a-1)(x+3)(x+4)}$.

4. Исследовать и решить систему уравнений с параметром

$$\begin{cases} a(a+1)x-a(1-a)y=2-a^3 \\ \left(a^2-1\right)x+\left(1-a^3\right)y=a^4-1 \end{cases}.$$

5. Исследовать и решить уравнение с параметром

$\left(m-3\right)x^2+\left(14-3m\right)x+3m-11=0$.

Выяснить, при каких значениях параметра m

а) $\left(x_2;\, x_1\right)\subset\left(1;\, 3\right)$;

б) $\begin{cases} x_1>0 \\ x_2<0 \\ \left|x_1\right|<\left|x_2\right| \end{cases}$, где x_1, x_2 — корни уравнения.

4

Линейные неравенства с параметрами

Исследование и решение неравенств с параметрами вида $ax > b$

1. Если $a > 0$, то $x > \dfrac{b}{a}$.

2. Если $a < 0$, то $x < \dfrac{b}{a}$.

3. Если $\begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \end{cases}$, то $\forall x$.

4. Если $\begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$, то $x \in \varnothing$.

Практикум 7 (примеры исследования линейных неравенств с параметром)

1. $\left(a^2 - 1\right)x \geqslant a + 1$.

а) $a^2 - 1 > 0$;

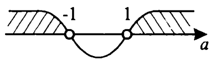


Рис. 90.

$a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$;

$x \geqslant \frac{a+1}{a^2-1}$, т.е. $x \geqslant \frac{1}{a-1}$.

б) $a^2 - 1 < 0$; $-1 < a < 1$; $x \leqslant \frac{1}{a-1}$.

в) $a = 1$, тогда $0 \cdot x \geqslant 2$; $x \in \varnothing$.

г) $a = -1$, тогда $0 \cdot x \geqslant 0$; $\forall x$.

Ответ: 1) При $a < -1$ $x \geqslant \frac{1}{a-1}$.

2) При $a = -1$ $\forall x$.

3) При $a \in (-1; 1)$ $x \leqslant \frac{1}{a-1}$.

4) При $a = 1$ $x \in \varnothing$.

5) При $a > 1$ $x \geqslant \frac{1}{a-1}$.

2. $ax + 4 > 2x + a^2$.

$(a-2)x > a^2 - 4$.

а) $a > 2$; $x > \frac{a^2-4}{a-2}$; $x > a + 2$.

б) $a = 2$; $0 \cdot x > 0$; $x \in \varnothing$.

в) $a < 2$; $x < \frac{a^2-4}{a-2}$; $x < a + 2$.

Ответ: 1) При $a > 2$ $x > a + 2$.

2) При $a = 2$ $x \in \varnothing$.

3) При $a < 2$ $x < a + 2$.

3. $a(3x-1) > 3x-2$.

$3(a-1)x > a-2$.

а) $a > 1$; $x > \dfrac{a-2}{3(a-1)}$.

б) $a = 1$; $0 \cdot x > -1$, $\forall x$.

в) $a < 1$; $x < \dfrac{a-2}{3(a-1)}$.

Ответ: 1) При $a > 1$ $x > \dfrac{a-2}{3(a-1)}$. .

2) При $a = 1$ $\forall x$.

3) При $a < 1$ $x < \dfrac{a-2}{3(a-1)}$.

4. $\dfrac{2x}{m+1} - \dfrac{x+1}{2(m-1)} > \dfrac{2x-3}{m-1}$.

Перенесем $\dfrac{2x-3}{m-1}$ в левую часть и умножим части неравенства на общий знаменатель, получаем:

$$\frac{4x(m-1)-(x+1)(m+1)-2(2x-3)(m+1)}{2(m+1)(m-1)} > 0.$$

Вид неравенства, наиболее удобный для исследования:

$$\frac{-(m+9)x+5m+5}{2(m+1)(m-1)} > 0.$$

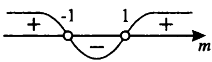


Рис. 91.

I. $m < -1$, значит $(m+1)(m-1) > 0$, $\Rightarrow$

$-(m+9)x + 5m + 5 > 0$; $\quad -(m+9)x > -5m - 5$.

а) $-(m+9) > 0$; $m + 9 < 0$;

$x > \frac{-5m-5}{-(m+9)}$, т.е. $x > \frac{5m+5}{m+9}$.

б) $\begin{cases} m > -9 \\ m < -1 \end{cases}$; $\quad x < \frac{5m+5}{m+9}$.

в) $m = -9$; $0 \cdot x > 40$; $x \in \varnothing$.

II. $m \in (-1; 1)$; $\Rightarrow$ $-(m+9)x + 5m + 5 < 0$,

т.е. при $\begin{cases} m + 9 > 0 \\ (m+1)(m-1) < 0 \end{cases}$ $\quad x > \frac{5m+5}{m+9}$.

III. $m > 1$; $\Rightarrow$ $-(m+9)x + 5m + 5 > 0$,

т.е. при $\begin{cases} (m+1)(m-1) > 0 \\ m + 9 > 0 \end{cases}$ $\quad x < \frac{5m+5}{m+9}$.

Ответ: 1) При $m < -9$ $\quad x > \frac{5m+5}{m+9}$.

2) При $m = -9$ $\quad x \in \varnothing$.

3) При $m \in (-9; -1)$ $\quad x < \frac{5m+5}{m+9}$.

4) При $m = -1$ неравенство не определено.

5) При $m \in (-1; 1)$ $\quad x > \frac{5m+5}{m+9}$.

6) При $m = 1$ неравенство не определено.

7) При $m > 1$ $\quad x < \frac{5m+5}{m+9}$.

5. $\frac{mx}{m-2}-\frac{x-1}{3}<\frac{2x+3}{4}$.

Перенесем $\frac{2x+3}{4}$ в левую часть и умножим части неравенства на общий знаменатель, тогда

$$\frac{12mx-4(x-1)(m-2)-3(2x+3)(m-2)}{12(m-2)}<0;$$

$\frac{2(m-10)x-5m+10}{2(m-2)}<0$ — вид неравенства, наиболее удобный для исследования.

Тогда

I. Если $m<2$, то $2(m-10)x-5m+10>0$.

$m<2 \Rightarrow m<10$; тогда $x<\frac{5m-10}{2(m-10)}$.

II. Если $m>2$, то $2(m-10)x-5m+10<0$.

а) $2<m<10$; $x>\frac{5m-10}{2(m-10)}$.

б) $m=10$; $0>40$; $x\in\varnothing$.

в) $m>10$; $x<\frac{5m-10}{2(m-10)}$.

Ответ: 1) При $m<2$ $x<\frac{5m-10}{2(m-10)}$.

2) При $m=2$ неравенство не определено.

3) При $2<m<10$ $x>\frac{5m-10}{2(m-10)}$.

4) При $m=10$ $x\in\varnothing$.

5) При $m>10$ $x<\frac{5m-10}{2(m-10)}$.

6. $\frac{x}{m}-\frac{3}{m-1}>\frac{x}{2}$.

$$\frac{2(m-1)x-6m-m(m-1)x}{2m(m-1)}>0; \qquad \frac{-(m-1)(m-2)x-6m}{2m(m-1)}>0.$$

Графическое решение для $(m-1)(m-2)$:

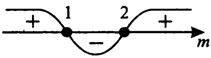


Рис. 92.

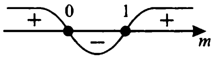
для $m(m-1)$: 

Рис. 93.

а) Если $m<0$, $\Rightarrow$ $2m(m-1)>0$, $\Rightarrow$
$-(m-1)(m-2)x-6m>0$.

Так как $(m-1)(m-2)>0$, то $x<\frac{6m}{-(m-1)(m-2)}$.

б) Если $m\in(0;1)$, $\Rightarrow$ $2m(m-1)<0$
и $(m-1)(m-2)>0$.

Так как $-(m-1)(m-2)<0$, $\Rightarrow$
$-(m-1)(m-2)x-6m<0$, то $x>\frac{6m}{-(m-1)(m-2)}$.

в) Если $m\in(1;2)$, $\Rightarrow$ $2m(m-1)>0$,
$(m-1)(m-2)<0$; $\Rightarrow$ $-(m-1)(m-2)x-6m>0$;
$x<\frac{6m}{-(m-1)(m-2)}$.

г) Если $m=2$, то $\frac{0\cdot x-12}{4\cdot 1}>0$, т.е. $x\in\varnothing$.

д) Если $m > 2$, $\Rightarrow$ $2m(m-1) > 0$, $(m-1)(m-2) > 0$;

$\Rightarrow$ $-(m-1)(m-2)x - 6m > 0$, т.е. $x < \dfrac{6m}{-(m-1)(m-2)}$.

Ответ: 1) При $m < 0$ $\quad x < \dfrac{6m}{-(m-1)(m-2)}$.

2) При $m = 0$ уравнение не определено.

3) При $0 < m < 1$ $\quad x > \dfrac{6m}{-(m-1)(m-2)}$.

4) При $m = 1$ уравнение не определено.

5) При $1 < m < 2$ $\quad x < \dfrac{6m}{-(m-1)(m-2)}$.

6) При $m = 2$ $\quad x \in \varnothing$.

7) При $m > 2$ $\quad x < \dfrac{6m}{-(m-1)(m-2)}$.

7. $\dfrac{a}{x-a} + \dfrac{a}{x+a} < 0$.

$\dfrac{2ax}{(x-a)(x+a)} < 0$.

а) Если $a > 0$, то $x < -a$; $0 < x < a$ (см. рис. 94)

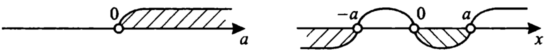


Рис. 94.

б) Если $a < 0$, то $a < x < 0$; $x > -a$ (см. рис. 95)

Рис. 95.

в) Если $a = 0$, то $x \in \varnothing$.

Ответ: 1) При $a > 0$ $\quad x < -a$; $0 < x < a$.

2) При $a < 0$ $\quad a < x < 0$; $x > -a$.

3) При $a = 0$ $\quad x \in \varnothing$

8. $\frac{2}{x+a}-\frac{x}{x^2-a^2}<\frac{1}{a-x}$.

Перенесем $\frac{1}{a-x}$ в левую часть и умножим части неравенства на общий знаменатель, тогда получаем:

$\frac{2x-a}{(x-a)(x+a)}<0$.

а) Если $a>0$, то $x<-a$;

$\frac{a}{2}<x<a$.

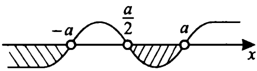


Рис. 96.

б) Если $a=0$, то $\frac{2x}{x^2}<0$; $x<0$.

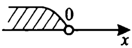


Рис. 97.

в) Если $a<0$, то $x<a$;

$\frac{a}{2}<x<-a$.

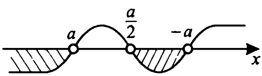


Рис. 98.

Ответ: 1) При $a>0$ $x<-a$; $\frac{a}{2}<x<a$.

2) При $a=0$ $x<0$.

3) При $a<0$ $x<a$; $\frac{a}{2}<x<-a$.

9. $\frac{x}{a}+\frac{1-3x}{2}>\frac{x+2}{4a}$.

Перенесем $\frac{x+2}{4a}$ в левую часть и умножим части неравенства на общий знаменатель, приведем неравенство к виду, наиболее удобному для исследования, т.е. $\frac{3(1-2a)x+2a-2}{4a}>0$.

а) Если $0<a<\frac{1}{2}$, то

$3(1-2a)x>2-2a$, $\Rightarrow$ $1-2a>0$;

$x>\frac{2(a-1)}{3(1-2a)}$.

б) Если $a=\frac{1}{2}$, то $0\cdot x>\frac{1}{2}$; $x\in\varnothing$.

в) Если $a>\frac{1}{2}$, то $1-2a<0$; $x<\frac{2(a-1)}{3(1-2a)}$.

г) Если $a<0$, то $3(1-2a)x<2-2a$.

Тогда $1-2a>0$; $x<\frac{2(a-1)}{3(1-2a)}$.

Ответ: 1) При $a<0$ $x<\frac{2(a-1)}{3(2a-1)}$.

2) При $a=0$ неравенство не определено.

3) При $0<a<\frac{1}{2}$ $x>\frac{2(a-1)}{3(1-2a)}$.

4) При $a=\frac{1}{2}$ $x\in\varnothing$.

5) При $a>\frac{1}{2}$ $x<\frac{2(a-1)}{3(2a-1)}$.

10. $\frac{ax+1}{a-1} > \frac{ax-1}{a}$.

$$\frac{a^2x+a-a^2x+a+ax-1}{a(a-1)} > 0;$$

$$\frac{ax+2a-1}{a(a-1)} > 0;$$

для $a(a-1)$ выясним распределение знаков

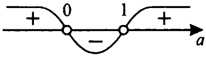


Рис. 99.

а) Если $a < 0$, $a(a-1) > 0$, тогда $ax + 2a - 1 > 0$,

т.е. $x < \frac{1-2a}{a}$.

б) Если $0 < a < 1$, $a(a-1) < 0$, тогда $ax + 2a - 1 < 0$,

т.е. $x < \frac{1-2a}{a}$.

в) Если $a > 1$, $a(a-1) > 0$, тогда $ax + 2a - 1 > 0$,

т.е. $x > \frac{1-2a}{a}$.

Ответ: 1) При $a < 0$ $x < \frac{1-2a}{a}$.

2) При $a = 0$ неравенство не определено.

3) При $0 < a < 1$ $x < \frac{1-2a}{a}$.

4) При $a = 1$ неравенство не определено.

5) При $a > 1$ $x > \frac{1-2a}{a}$.

5

Исследование и решение неравенств II степени с параметром

I. $ax^2 + bx + c > 0$

$a > 0$; $D > 0$

Графическая иллюстрация

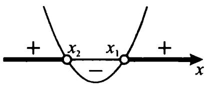


Рис. 100.

Решение

$$\left[\begin{array}{l} x < \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a} \\ x > \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} \end{array}\right.$$

$a > 0$; $D = 0$

Графическая иллюстрация

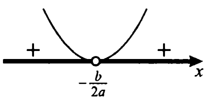


Рис. 101.

Решение

$$x \neq -\frac{b}{2a}$$

$a > 0;\ D < 0$

Графическая иллюстрация

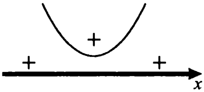


Рис. 102.

Решение

x — любое число

$a = 0;\ bx + c > 0;\ b > 0$

Графическая иллюстрация

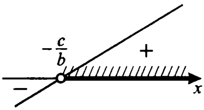


Рис. 103.

Решение

$x > -\frac{c}{b}$

$a = 0;\ bx + c > 0;\ b < 0$

Графическая иллюстрация

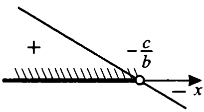


Рис. 104.

Решение

$x < -\frac{c}{b}$

$a < 0;\ D > 0$

Графическая иллюстрация

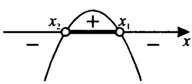


Рис. 105.

Решение

$$\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} < x < \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

$a < 0;\ D = 0$

Графическая иллюстрация — Нет решений

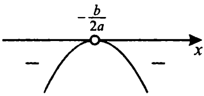


Рис. 106.

$a < 0;\ D < 0$

Графическая иллюстрация — Нет решений

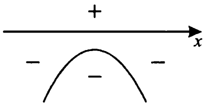
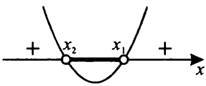


Рис. 107.

II. $ax^2 + bx + c < 0$

$a > 0;\ D > 0$

Графическая иллюстрация — Решение



$$\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} < x < \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

Рис. 108.

$a > 0;\ D = 0$

Графическая иллюстрация — Нет решений

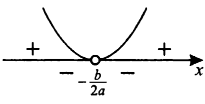


Рис. 109.

$a > 0$; $D < 0$

Графическая иллюстрация

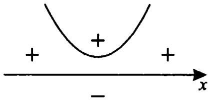


Рис. 110.

Нет решений

$a = 0$; $bx + c < 0$; $b > 0$

Графическая иллюстрация

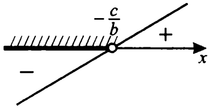


Рис. 111.

Решение

$x < -\frac{c}{b}$

$a = 0$; $bx + c < 0$; $b < 0$

Графическая иллюстрация

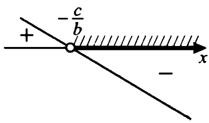


Рис. 112.

Решение

$x > -\frac{c}{b}$

$a < 0$; $D < 0$

Графическая иллюстрация

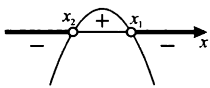


Рис. 113.

Решение

$$\left[\begin{array}{l} x < \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} \\ x > \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a} \end{array}\right.$$

$a < 0$; $D = 0$

Графическая иллюстрация

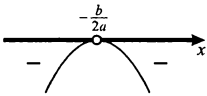


Рис. 114.

Решение

$$x \neq -\frac{b}{2a}$$

$a < 0$; $D < 0$

Графическая иллюстрация

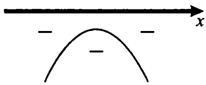


Рис. 115.

Решение

x — любое число

Практикум 8

1. $mx^2+(2m+1)x+m+2>0$.

$m\neq 0$; $D=(2m+1)^2-4m(m+2)=1-4m$.

I. Если $m>0$, то:

а) $m\in\left(0;\,\frac{1}{4}\right)$, тогда $\left[\begin{array}{l} x<\frac{-(2m+1)-\sqrt{1-4m}}{2m} \\ x>\frac{-(2m+1)+\sqrt{1-4m}}{2m} \end{array}\right.$;

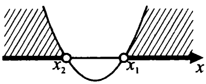


Рис. 116.

б) $m=\frac{1}{4}$, тогда $x_1=x_2=\frac{-(2m+1)}{2m}=\frac{-\left(2\cdot\frac{1}{4}+1\right)}{2\cdot\frac{1}{4}}=-3$,

т.е. $\forall x\neq -3$ — есть решение;

в) $m\in\left(\frac{1}{4};\,\infty\right)$, тогда x — любое число $(D<0)$.

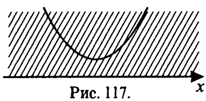


Рис. 117.

II. Если $m=0$, то $0\cdot x^2+x+2>0$, т.е. $x>-2$.

III. Если $m<0$, тогда

$$\frac{-(2m+1)+\sqrt{1-4m}}{2m}<x<\frac{-(2m+1)-\sqrt{1-4m}}{2m}.$$

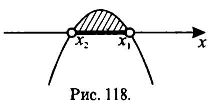


Рис. 118.

Ответ: 1) При $m < 0$

$$\frac{-(2m+1)+\sqrt{1-4m}}{2m} < x < \frac{-(2m+1)-\sqrt{1-4m}}{2m}.$$

2) При $m = 0$ $\quad x > -2$.

3) При $0 < m < \frac{1}{4}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{-(2m+1)-\sqrt{1-4m}}{2m} \\ x > \dfrac{-(2m+1)+\sqrt{1-4m}}{2m} \end{array}\right.$

4) При $m = \frac{1}{4}\sqrt{b^2 - 4ac}$

$\forall x \neq -3$ — есть решение.

5) При $m > \frac{1}{4}$ $\quad \forall x$ — есть решение.

2. $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 > 0$.

$m \neq 1$; $\frac{D}{4} = (m+1)^2 - (m-1)(m-3) = 2(3m-1)$.

$D > 0$:

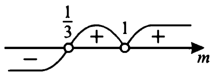


Рис. 119.

а) Если $m > 1$, тогда $\left[\begin{array}{l} x < \dfrac{m+1-\sqrt{2(3m-1)}}{m-1} \\ x > \dfrac{m+1+\sqrt{2(3m-1)}}{m-1} \end{array}\right.$.

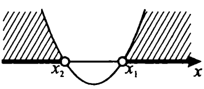


Рис. 120.

б) Если $m = 1$, то $0 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 2 > 0$ или $x < -\frac{1}{2}$.

в) Если $\frac{1}{3} < m < 1$, $\frac{m+1+\sqrt{2(3m-1)}}{m-1} < x < \frac{m+1-\sqrt{2(3m-1)}}{m-1}$.

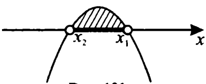


Рис. 121.

Необходимо учесть, что

$$\frac{m+1+\sqrt{2(3m-1)}}{m-1} < \frac{m+1-\sqrt{2(3m-1)}}{m-1} \text{ при } m < 1.$$

г) Если $m = \frac{1}{3}$, то $x \in \varnothing$ ($x_1 = x_2$ и $m - 1 < 0$).

д) Если $m < \frac{1}{3}$, то $x \in \varnothing$ ($D < 0$).

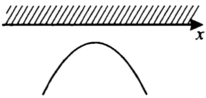


Рис. 122.

Ответ: 1) При $m > 1$ $\left[\begin{array}{l} x < \dfrac{m+1-\sqrt{2(3m-1)}}{m-1} \\ x > \dfrac{m+1+\sqrt{2(3m-1)}}{m-1} \end{array}\right.$

2) При $m = 1$ $x < -\frac{1}{2}$.

3) При $\frac{1}{3} < m < 1$

$$\frac{m+1+\sqrt{2(3m-1)}}{m-1} < x < \frac{m+1-\sqrt{2(3m-1)}}{m-1}.$$

4) При $m = \frac{1}{3}$ $x \in \varnothing$.

5) При $m < \frac{1}{3}$ $x \in \varnothing$.

3. $3(m+1)x^2 - 6(m^2+m+1)x + 7(m^3-1) < 0$.

$m \neq -1$;

$D = 9(m^2+m+1)^2 - 21(m+1)(m^3-1) =$

$= -3(m^2+m+1)(4m+5)(m-2)$.

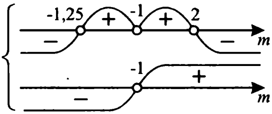


Рис. 123.

I. Если $m+1>0$, то:

а) $m \in (-1;\, 2)$,

тогда $\dfrac{3(m^2+m+1)-\sqrt{D}}{3(m+1)} < x < \dfrac{3(m^2+m+1)+\sqrt{D}}{3(m+1)}$;

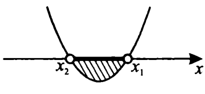


Рис. 124.

б) $m=2$, тогда $x \in \varnothing$, так как $D=0$;

в) $m>2$, $x \in \varnothing$, так как $D<0$.

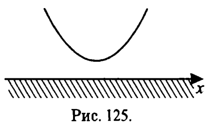


Рис. 125.

II. Если $m=-1$, то $0 \cdot x^2 - 6x - 14 < 0$, т.е. $x > -2\dfrac{1}{3}$.

III. Если $m \in (-1,25;\, -1)$, тогда $\left[\begin{array}{l} x < \dfrac{3\left(m^2+m+1\right)+\sqrt{D}}{3(m+1)} \\ x > \dfrac{3\left(m^2+m+1\right)-\sqrt{D}}{3(m+1)} \end{array}\right.$.

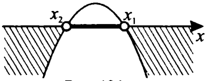


Рис. 126.

IV. Если $m = -1,25$, то $x_{1,2} = -5\frac{1}{4}$, тогда $x \neq -5\frac{1}{4}$.

V. Если $m < -1,25$, тогда x — любое число.

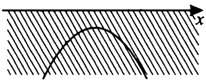


Рис. 127.

Ответ: 1) При $m < -1,25 \quad \forall x$.

2) При $m = -1,25 \quad \forall x \neq -5\frac{1}{4}$.

3) При $-1,25 < m < -1$

$$\left[\begin{array}{l} x < \dfrac{3\left(m^2+m+1\right)+\sqrt{-3\left(m^2+m+1\right)(4m+5)(m-2)}}{3(m+1)} \\ x > \dfrac{3\left(m^2+m+1\right)-\sqrt{-3\left(m^2+m+1\right)(4m+5)(m-2)}}{3(m+1)} \end{array}\right..$$

4) При $m = -1 \quad x > -2\frac{1}{3}$.

5) При $m \in (-1;\, 2)$

$$\left\{\begin{array}{l} x < \dfrac{3\left(m^2+m+1\right)+\sqrt{-3\left(m^2+m+1\right)(4m+5)(m+2)}}{3(m+1)} \\ x > \dfrac{3\left(m^2+m+1\right)-\sqrt{-3\left(m^2+m+1\right)(4m+5)(m-2)}}{3(m+1)} \end{array}\right..$$

6) При $m = 2 \quad x \in \varnothing$.

7) При $m > 2 \quad x \in \varnothing$.

4. $\left(a^2-1\right)x^2-2ax+1<0$.

$a^2-1\neq 0$; $D=a^2-\left(a^2-1\right)=1$.

Тогда $x_1=\dfrac{1}{a-1}$, $x_2=\dfrac{1}{a+1}$ — корни уравнения

$\left(a^2-1\right)x^2-2ax+1=0$.

Выясним, при каких значениях параметра a

$\dfrac{1}{a-1}<\dfrac{1}{a+1}$?

$\dfrac{a+1-a+1}{(a-1)(a+1)}<0$ или $\dfrac{2}{(a-1)(a+1)}<0$.

Графическое решение:

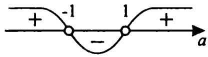


Рис. 128.

Тогда $\dfrac{1}{a-1}<\dfrac{1}{a+1}$ при $a\in(-1;1)$,

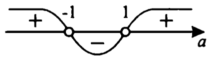


Рис. 129.

$\dfrac{1}{a-1}>\dfrac{1}{a+1}$ при $a\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$.

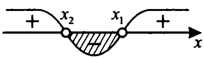


Рис. 130.

I. Если $a^2-1>0$, то

а) при $a<-1$ следует, что $\dfrac{1}{a+1}<x<\dfrac{1}{a-1}$;

б) при $a>1$ следует, что $\dfrac{1}{a+1}<x<\dfrac{1}{a-1}$.

II. Если $a = 1$, то $0 \cdot x^2 - 2x + 1 < 0$, тогда $x > \frac{1}{2}$.

III. Если $a = -1$, то $0 \cdot x^2 + 2x + 1 < 0$, тогда $x < -\frac{1}{2}$.

IV. Если $-1 < a < 1$, тогда $\left[\begin{array}{l} x < \dfrac{1}{a-1} \\ x > \dfrac{1}{a+1} \end{array}\right.$.

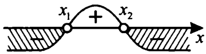


Рис. 131.

Ответ: 1) При $a < -1$ $\quad \frac{1}{a+1} < x < \frac{1}{a-1}$.

2) При $a = -1$ $\quad x < -\frac{1}{2}$.

3) При $-1 < a < 1$ $\quad x < \frac{1}{a-1}$ или $x > \frac{1}{a+1}$.

4) При $a = 1$ $\quad x > \frac{1}{2}$.

5) При $a > 1$ $\quad \frac{1}{a+1} < x < \frac{1}{a-1}$.

5. $(a^2 + a - 2)x^2 + (2a^2 + a + 3)x + a^2 - 1 > 0$

При $\begin{cases} a \neq -2 \\ a \neq 1 \end{cases}$

$$D = (2a^2 + a + 3)^2 - 4(a^2 + a - 2)(a^2 - 1) = (5a + 1)^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{-(2a^2 + a + 3) \pm (5a + 1)}{2(a^2 + a - 2)}.$$

Тогда $x_1 = \frac{1-a}{2+a}$; $x_2 = \frac{a+1}{1-a}$ — корни уравнения

$(a^2 + a - 2)x^2 + (2a^2 + a + 3)x + a^2 - 1 = 0$.

Выясним, при каких значениях параметра a

$$\frac{1-a}{a+2}<\frac{a+1}{1-a}?$$

$$\frac{(1-a)^2-(a+1)(a+2)}{(a+2)(1-a)}<0 \text{ или } \frac{-(5a+1)}{(a+2)(1-a)}<0.$$

Графическое решение:

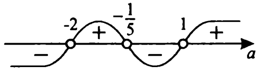


Рис. 132.

Тогда $\dfrac{1-a}{a+2}<\dfrac{a+1}{1-a}$ **при** $a\in(-\infty;-2)\cup\left(-\dfrac{1}{5};1\right)$,

$\dfrac{1-a}{a+2}>\dfrac{a+1}{1-a}$ **при** $a\in\left(-2;-\dfrac{1}{5}\right)\cup(1;\infty)$.

I. Если $a^2+a-2>0$, **то** $a>1$ **или** $a<-2$.

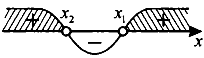


Рис. 133.

а) $a>1$, **тогда** $x<\dfrac{a+1}{1-a}$ **или** $x>\dfrac{1-a}{a+2}$;

б) $a<-2$, **тогда** $x<\dfrac{1-a}{a+2}$ **или** $x>\dfrac{a+1}{1-a}$.

II. Если $a=1$, **то** $0\cdot x^2+6x+0>0$, **тогда** $x>0$.

III. Если $a=-2$, **то** $0\cdot x^2+9x+3>0$, **тогда** $x>-\dfrac{1}{3}$.

IV. Если $-2<a<1$, **то**

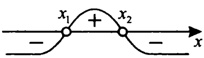


Рис. 134.

а) $-2 < a < -\frac{1}{5}$, тогда $\frac{a+1}{1-a} < x < \frac{1-a}{a+2}$;

б) $a = -\frac{1}{5}$, то $x_1 = x_2 = -\frac{17}{27}$, следовательно, $x \in \varnothing$.

в) $a \in \left(-\frac{1}{5}; 1\right)$, тогда $\frac{1-a}{a+2} < x < \frac{a+1}{1-a}$.

Ответ: 1) При $a < -2$ $\quad x < \frac{1-a}{a+2}$ или $x > \frac{1+a}{1-a}$.

2) При $a = -2$ $\quad x > -\frac{1}{3}$.

3) При $-2 < a < -0,2$ $\quad \frac{a+1}{1-a} < x < \frac{1-a}{a+2}$.

4) При $a = -0,2$ $\quad x \in \varnothing$.

5) При $-0,2 < a < 1$ $\quad \frac{1-a}{a+2} < x < \frac{a+1}{1-a}$.

6) При $a = 1$ $\quad x > 0$.

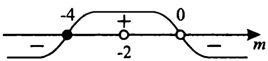
7) При $a > 1$ $\quad x < \frac{a+1}{1-a}$ или $x > \frac{1-a}{a+2}$.

6. $m(m+2)x^2 + 2mx + 2 > 0$.

$m(m+2) \neq 0$; $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \end{cases}$.

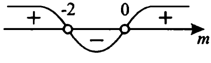
$\frac{D}{4} = m^2 - 2m(m+2) = -m(m+4)$.

Тогда распределение знаков будет таким, что:



для (D)

Рис. 135



для $m(m+2)$

Рис. 136.

а) Если $m < -4$, то $\begin{cases} m(m+2) > 0 \\ D < 0 \end{cases}$, следовательно,

$\forall x$ — решение.

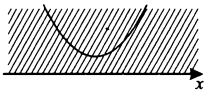


Рис. 137.

б) Если $m = -4$, то $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, следовательно,

$\forall x \neq \frac{1}{2}$ — решение.

в) Если $m \in (-4; -2)$, то $\begin{cases} m(m+2) > 0 \\ D > 0 \end{cases}$, следовательно,

$$x < \frac{-m-\sqrt{-m(m+4)}}{m(m+2)} \text{ или } x > \frac{-m+\sqrt{-m(m+4)}}{m(m+2)}.$$

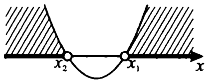


Рис. 138.

г) Если $m = -2$, то $0 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 2 > 0$, т.е. $x < \frac{1}{2}$.

д) Если $m \in (-2; 0)$, то $\begin{cases} m(m+2) < 0 \\ D > 0 \end{cases}$, тогда

$$\frac{-m+\sqrt{-m(m+4)}}{m(m+2)} < x < \frac{-m-\sqrt{-m(m+4)}}{m(m+2)}.$$

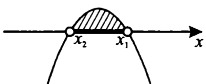


Рис. 139.

е) Если $m = 0$, то $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 2 > 0$,
т.е. $\forall x$ — решение.

ж) Если $m > 0$, то $\begin{cases} m(m+2) > 0 \\ D < 0 \end{cases}$,

т.е. $\forall x$ — решение.

Рис. 140.

Ответ: 1) При $m < -4$ $\quad \forall x$ — решение.

2) При $m = -4$ $\quad \forall x \neq \frac{1}{2}$ — решение..

3) При $m \in (-4; -2)$ $\left[\begin{array}{l} x < \frac{-m-\sqrt{-m(m+4)}}{m(m+2)} \\ x > \frac{-m+\sqrt{-m(m+4)}}{m(m+2)} \end{array}\right.$.

4) При $m = -2$ $\quad x < \frac{1}{2}$.

5) При $m \in (-2; 0)$

$$\frac{-m+\sqrt{-m(m+4)}}{m(m+2)} < x < \frac{-m-\sqrt{-m(m+4)}}{m(m+2)}.$$

6) При $m = 0$ $\quad \forall x$ — решение.

7) При $m > 0$ $\quad \forall x$ — решение.

7. $\frac{2 - ax - x^2}{1 - x + x^2} \leqslant 3$.

Так как $1 - x + x^2 > 0$ при любом значении x (коэффициент при x^2 положителен, $D = -3 < 0$), то $2 - ax - x^2 \leqslant 3 - 3x + 3x^2$;

$4x^2 + (a-3)x + 1 \geqslant 0$.

$$D=(a-3)^2-16=(a-7)(a+1).$$

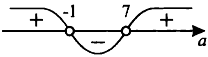


Рис. 141.

$D>0$ при $a<-1$ или $a>7$, тогда

$$\exists x_1 \neq x_2 \; \Bigg| \; x_{1,2}=\frac{-(a-3)\pm\sqrt{(a-7)(a+1)}}{8}.$$

а) Если $a<-1$, тогда $\left[\begin{array}{l} x<\dfrac{-(a+3)-\sqrt{(a-7)(a+1)}}{8} \\ x>\dfrac{-(a+3)+\sqrt{(a-7)(a+1)}}{8} \end{array}\right.$.

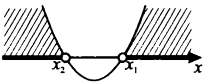


Рис. 142.

б) Если $a>7$, тогда $\left[\begin{array}{l} x<\dfrac{3-a-\sqrt{(a-7)(a+1)}}{8} \\ x>\dfrac{3-a+\sqrt{(a-7)(a+1)}}{8} \end{array}\right.$.

в) Если $a=-1$, то $x_1=x_2=\dfrac{1}{2}$; $\forall x \neq \dfrac{1}{2}$.

г) Если $a=7$, то $x_1=x_2=-\dfrac{1}{2}$; $\forall x \neq -\dfrac{1}{2}$.

д) Если $a \in (-1;7)$, $\forall x$ — решение.

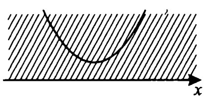


Рис. 143.

Ответ: 1) При $a < -1$

$$\left[\begin{array}{l} x < \dfrac{3-a-\sqrt{(a-7)(a+1)}}{8} \\ x > \dfrac{3-a+\sqrt{(a-7)(a+1)}}{8} \end{array}\right..$$

2) При $a > 7$

$$\left[\begin{array}{l} x < \dfrac{3-a-\sqrt{(a-7)(a+1)}}{8} \\ x > \dfrac{3-a+\sqrt{(a-7)(a+1)}}{8} \end{array}\right..$$

3) При $a = -1$ $\quad \forall x \neq \dfrac{1}{2}$.

4) При $a = 7$ $\quad \forall x \neq -\dfrac{1}{2}$.

5) При $a \in (-1; 7)$ $\quad \forall x$.

6

Исследование неравенств с параметром с начальными условиями

I. Найти все значения параметров, при которых неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ справедливо для любого значения $x \in (M; N)$.

Проиллюстрируем все возможные случаи и запишем условия их выполнения.

1.

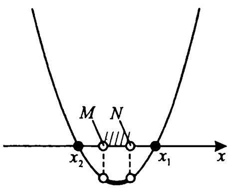
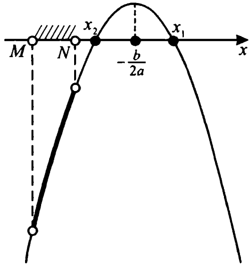


Рис. 144.

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(M) \leqslant 0 \\ f(N) \leqslant 0 \end{cases}$$

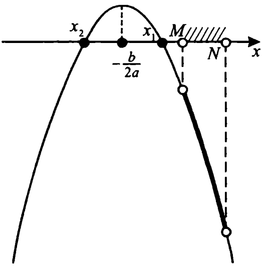
2.



$$\begin{cases} a < 0 \\ f(N) \leqslant 0 \\ N < -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

Рис. 145.

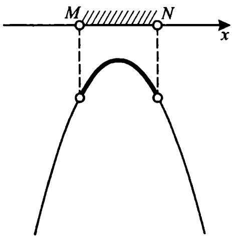
3.



$$\begin{cases} a < 0 \\ f(M) \leqslant 0 \\ M > -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

Рис. 146.

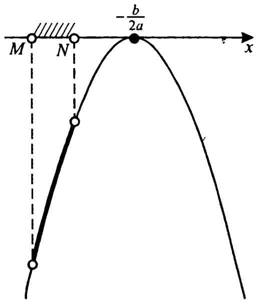
4.



$$\begin{cases} a < 0 \\ D < 0 \end{cases}$$

Рис. 147.

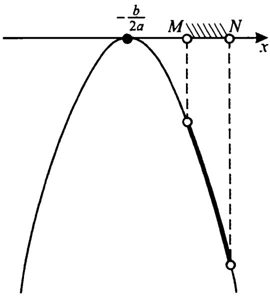
5.



$$\begin{cases} a < 0 \\ D = 0 \\ N < -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

Рис. 148.

6.



$$\begin{cases} a < 0 \\ D = 0 \\ M > -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

Рис. 149.

Примечание.

$$\begin{cases} a < 0 \\ D = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} \notin [M; N] \end{cases}$$ объединяет случаи 5 и 6.

7. $a = 0;\ bx + c < 0$.

а) $b > 0;\ x < -\dfrac{c}{b}$

$$\begin{cases} a = 0 \\ N \leqslant -\dfrac{c}{b} \end{cases}$$

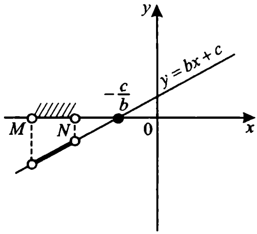


Рис. 150.

б) $b < 0; x > -\dfrac{c}{b}$.

$$\begin{cases} a = 0 \\ M \geqslant -\dfrac{c}{b} \end{cases}$$

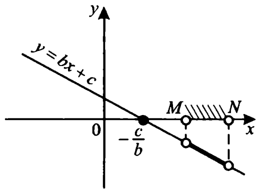


Рис. 151.

8. $a = 0,\ b = 0;\ c < 0$.

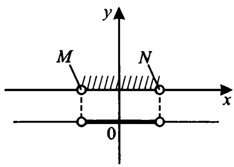


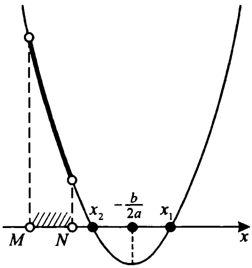
Рис. 152.

Вывод. Объединяя решения всех случаев, получим ответ на вопрос, при каких значениях параметров неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ справедливо для любого значения $x \in (M; N)$.

II. При каких значениях параметров неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ справедливо для любого значения $x \in (M;\, N)$?

Проиллюстрируем все возможные случаи и запишем условия их выполнения.

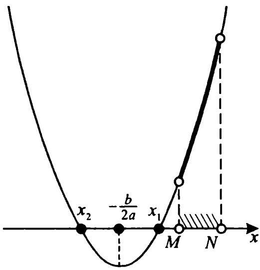
1.



$$\begin{cases} a > 0 \\ f(N) \geqslant 0 \\ N < -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

Рис. 153.

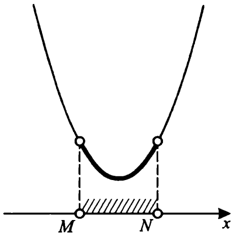
2.



$$\begin{cases} a > 0 \\ f(M) \geqslant 0 \\ M > -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

Рис. 154.

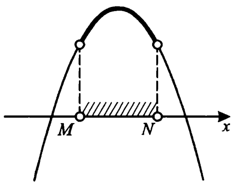
3.



$$\begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases}$$

Рис. 155.

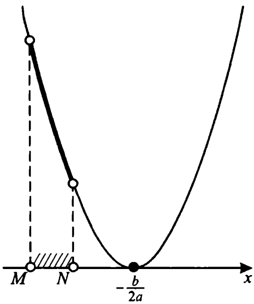
4.



$$\begin{cases} a < 0 \\ f(N) \geqslant 0 \\ f(M) \geqslant 0 \end{cases}$$

Рис. 156.

5.



$$\begin{cases} a > 0 \\ D = 0 \\ N < -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

Рис. 157.

6.

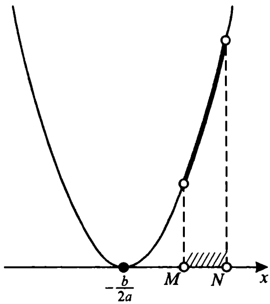


Рис. 158.

$$\begin{cases} a > 0 \\ D = 0 \\ M > -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

Примечание.

$$\begin{cases} a > 0 \\ D = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} \notin (M;\, N) \end{cases}$$ — условие, объединяющее 5 и 6 случай.

7. $a = 0$; $bx + c > 0$.

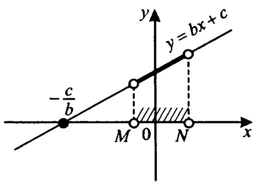


Рис. 159.

а) $b > 0$; $x > -\dfrac{c}{b}$

$$\begin{cases} a = 0 \\ M \geqslant -\dfrac{c}{b} \end{cases}$$

б) $b < 0$; $x < -\frac{c}{b}$

$$\begin{cases} a = 0 \\ N \leqslant -\frac{c}{b} \end{cases}$$

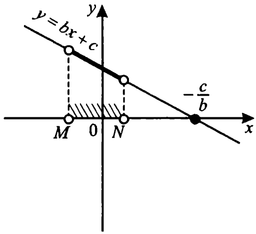


Рис 160

8. $a = 0$, $b = 0$; $c > 0$.

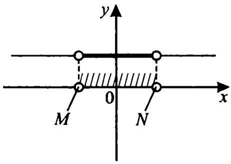


Рис. 161.

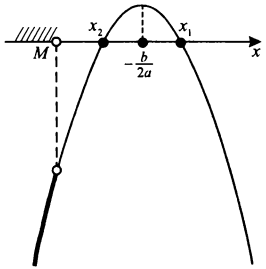
$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

Вывод. Объединяя решения всех случаев, получим ответ на вопрос, при каких значениях параметров неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ справедливо для любого значения $x \in (M; N)$.

III. При каких значениях параметров неравенство $ax^2+bx+c<0$ справедливо для $x\in(-\infty;\,M)$?

Проиллюстрируем возможные случаи и запишем условия их выполнения.

1.



$$\begin{cases} a<0 \\ f(M)\leqslant 0 \\ M<-\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

Рис. 162.А.

2. Если $a>0$, то неравенство решений не имеет, так как $(-\infty;\,M)\not\subset(x_2;\,x_1)$.

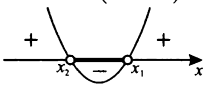
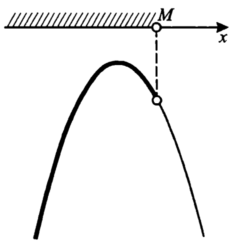


Рис. 162.Б.

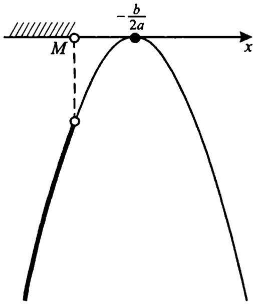
3.



$$\begin{cases} a<0 \\ D<0 \end{cases}$$

Рис. 163.

4.



$$\begin{cases} a < 0 \\ D = 0 \\ M \leqslant -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

Рис. 164.

5. $a = 0$; $bx + c < 0$.

а) $b > 0$; $x < -\dfrac{c}{b}$

$$\begin{cases} a = 0 \\ M \leqslant -\dfrac{c}{b} \end{cases}$$

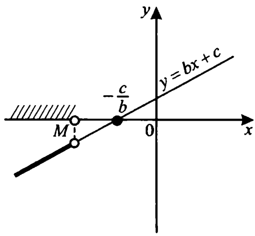


Рис. 165.

б) $b < 0$; $x > -\dfrac{c}{b}$.

Неравенство решений не имеет, так как $(-\infty; M) \not\subset \left(-\dfrac{c}{b}; \infty\right)$.

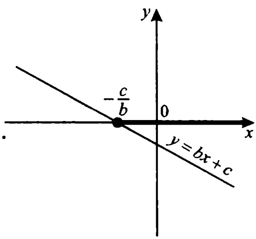


Рис. 166.

6. $a = 0$, $b = 0$; $c < 0$.

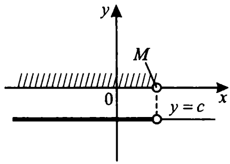


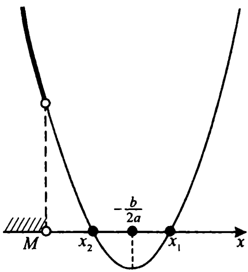
Рис. 167.

Вывод. Объединяя решения всех случаев, получим ответ на вопрос, при каких значениях параметров неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ для $x \in (-\infty; M)$.

IV. При каких значениях параметров неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ справедливо для любого значения $x \in (-\infty; M)$?

Проиллюстрируем возможные случаи и запишем условия их выполнения.

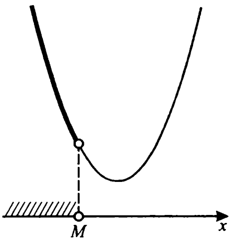
1.



$$\begin{cases} a > 0 \\ f(M) \geqslant 0 \\ M < -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

Рис. 168.

2.



$$\begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases}$$

Рис. 169.А.

3. Если $a < 0$, то неравенство решений не имеет, так как $(-\infty; M) \not\subset (x_2; x_1)$.

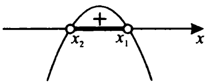
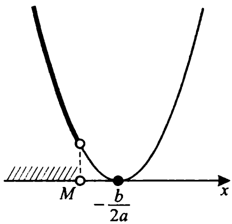


Рис. 169.Б.

4.



$$\begin{cases} a > 0 \\ D = 0 \\ M \leqslant -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

Рис. 170.А.

5. $a = 0; bx + c > 0.$

а) $b > 0$; $x > -\frac{c}{b}$.

Неравенство решений не имеет,

так как $(-\infty; M) \not\subset \left(-\frac{c}{b}; \infty\right)$.

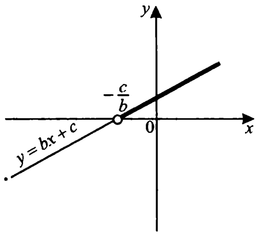


Рис. 170.Б.

б) $b < 0$; $x < -\frac{c}{b}$.

$$\begin{cases} a = 0 \\ M \leqslant -\frac{c}{b} \end{cases}$$

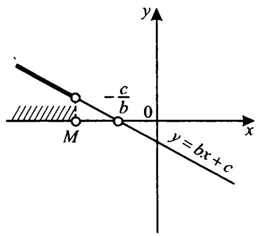


Рис. 171.

6. $a = 0$, $b = 0$; $c > 0$.

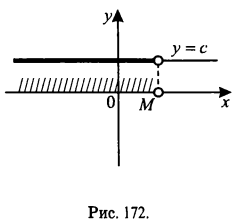
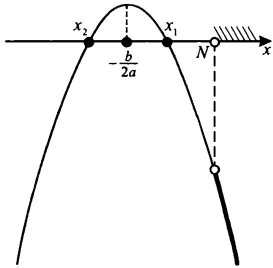


Рис. 172.

Вывод. Объединяя решения всех случаев, получим ответ на вопрос, при каких значениях параметров неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ справедливо для $x \in (-\infty; M)$.

V. При каких значениях параметров неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ справедливо для любого значения $x \in (N; \infty)$?

Проиллюстрируем возможные случаи и запишем условия их выполнения.

1. 

$$\begin{cases} a < 0 \\ f(N) \leqslant 0 \\ N > -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

Рис. 173.А.

2. Если $a > 0$, то неравенство решений не имеет, так как $(N; \infty) \not\subset (x_2; x_1)$.

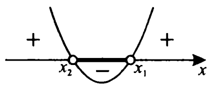
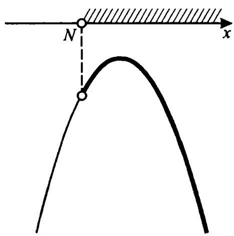
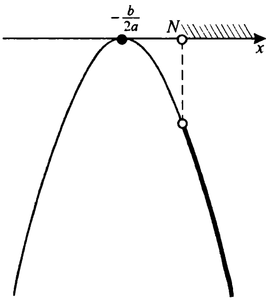


Рис. 173.Б.

3. 

$$\begin{cases} a < 0 \\ D < 0 \end{cases}$$

Рис. 174.

4. 

$$\begin{cases} a<0 \\ D=0 \\ N \geqslant -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

Рис. 175.

5. $a=0$; $bx+c<0$.

а) $b>0$, $x<-\frac{c}{b}$. Неравенство решений не имеет, так как $(N;\infty)\not\subset\left(-\infty;-\frac{c}{b}\right)$.

б) $b<0$, $x>-\frac{c}{b}$.

$$\begin{cases} a=0 \\ N \geqslant -\frac{c}{b} \end{cases}$$

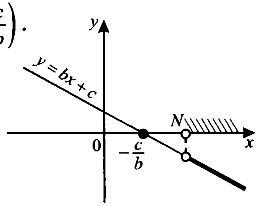


Рис. 176.

6. $a=0$, $b=0$; $c<0$.

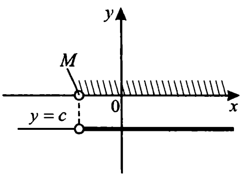


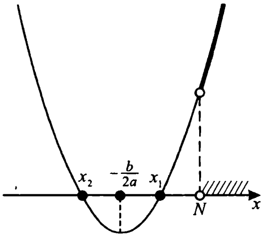
Рис. 177.

Вывод. Объединяя решения всех случаев, получим ответ на вопрос, при каких значениях параметров неравенство $ax^2+bx+c<0$ справедливо для любого значения $x\in(N;\infty)$.

VI. При каких значениях параметров неравенство $ax^2+bx+c>0$ справедливо для любого значения $x\in(N;\infty)$?

Проиллюстрируем возможные случаи и запишем условия их выполнения.

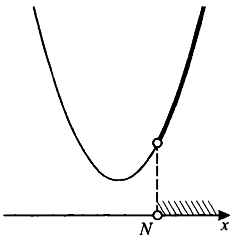
1.



$$\begin{cases} a>0 \\ f(N)\geqslant 0 \\ N>-\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

Рис. 178.

2.



$$\begin{cases} a>0 \\ D<0 \end{cases}$$

Рис. 179.А.

3. Если $a<0$, то неравенство решений не имеет, так как $(N;\infty)\not\subset(x_2;x_1)$.

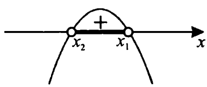


Рис. 179.Б.

4.

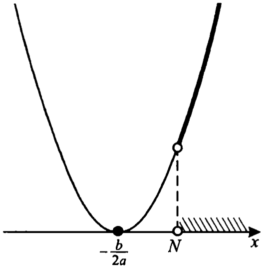


Рис. 180.

$$\begin{cases} a > 0 \\ D = 0 \\ N > -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

5. $a = 0$; $bx + c > 0$.

а) $b > 0$; $x > -\frac{c}{b}$.

$$\begin{cases} a = 0 \\ N \geqslant -\frac{c}{b} \end{cases}$$

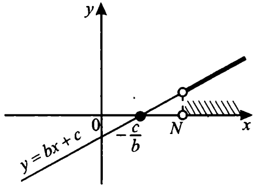


Рис. 181.

б) $b < 0$; $x < -\frac{c}{b}$.

Неравенство решений

не имеет, так как $(N;\, \infty) \not\subset \left(-\infty;\, -\frac{c}{b}\right)$.

6. $a = 0$, $b = 0$; $c > 0$.

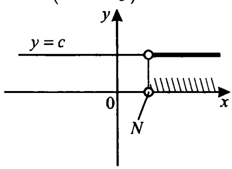


Рис. 182.

Вывод. Объединяя решения всех случаев, получим ответ на вопрос, при каких значениях параметров неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ справедливо для любого значения $x \in (N;\, \infty)$.

VII. При каких значениях параметров неравенство $ax^2+bx+c<0$ справедливо для любого значения $x\in(-\infty;\ M)\cup(N;\ \infty)$?

Проиллюстрируем возможные случаи и запишем условия их выполнения.

1. $$\left[\begin{cases} a<0 \\ f(M)\leqslant 0 \\ M<-\dfrac{b}{2a} \end{cases}\right.$$ $$\left.\begin{cases} a<0 \\ f(N)\leqslant 0 \\ N>-\dfrac{b}{2a} \end{cases}\right.$$

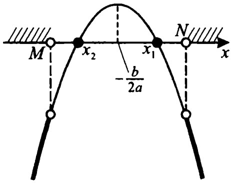
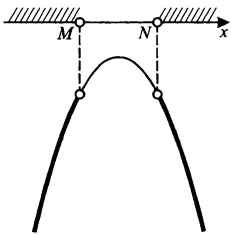


Рис. 183.

2. Если $a>0$, то неравенство решений не имеет, так как $(-\infty;\ M)\cup(N;\ \infty)\not\subset(x_2;\ x_1)$.



3. $\begin{cases} a<0 \\ D<0 \end{cases}$

Рис. 184.

4. $\begin{cases} a<0 \\ D=0 \\ -\dfrac{b}{2a}\in[M;\ N] \end{cases}$

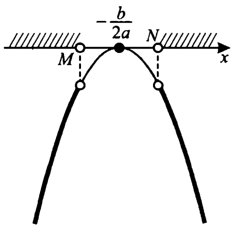
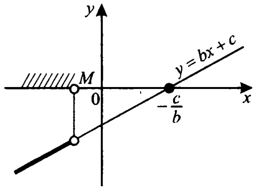


Рис. 185.

5. $a=0;\ bx+c<0$.

а) $b>0;\ x<-\frac{c}{b};$

$$\begin{cases} a=0 \\ f(M)\leqslant 0. \\ M<-\frac{c}{b} \end{cases}$$

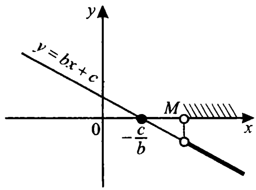


Но $(-\infty;\ M)\cup(N;\ \infty)\not\subset\left(-\infty;\ -\frac{c}{b}\right)$, значит $x\in\varnothing$.

Рис. 186.

б) $b<0;\ x>-\frac{c}{b};$

$$\begin{cases} a=0 \\ f(M)\leqslant 0. \\ M>-\frac{c}{b} \end{cases}$$



Но $(-\infty;\ M)\cup(N;\ \infty)\not\subset\left(-\frac{c}{b};\ \infty\right)$, значит $x\in\varnothing$.

Рис. 187.

6. $a=0,\ b=0;\ c<0$.

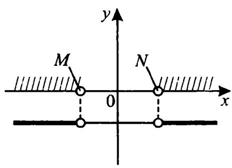


Рис. 188.

Вывод. Объединяя решения всех случаев, получим ответ на вопрос, при каких значениях параметров неравенство $ax^2+bx+c<0$ справедливо для любого значения $x\in(-\infty;\ M)\cup(N;\ \infty)$.

VIII. При каких значениях параметров неравенство $ax^2+bx+c>0$ справедливо для любого значения $x\in(-\infty;\,M)\cup(N;\,\infty)$?

Проиллюстрируем возможные случаи и запишем условия их выполнения.

1. $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ f(M)\geqslant 0\\ M<-\dfrac{b}{2a}\end{cases}\\ \begin{cases}a>0\\ f(N)\geqslant 0\\ N>-\dfrac{b}{2a}\end{cases}\end{array}\right.$$

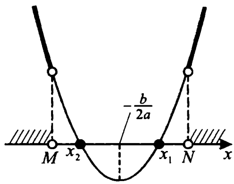


Рис. 189.А.

2. Если $a<0$, то неравенство решений не имеет, так как $(-\infty;\,M)\cup(N;\,\infty)\not\subset(x_2;\,x_1)$.

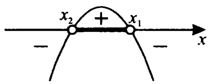


Рис. 189.Б.

3. $\begin{cases}a>0\\ D<0\end{cases}$;

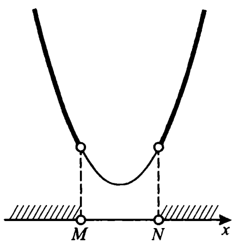


Рис. 190.

4. $\begin{cases} a > 0 \\ D = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} \in (M;\ N) \end{cases}$

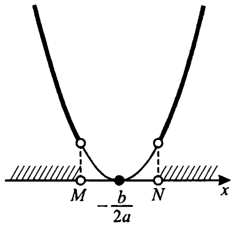
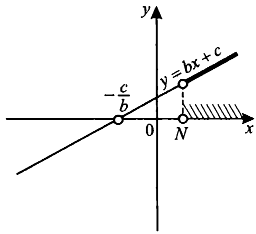


Рис. 191.

5. $a = 0;\ bx + c > 0.$

а) $b > 0;\ x > -\dfrac{c}{b};$



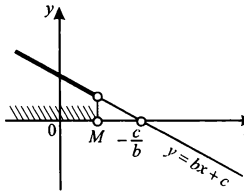
$\begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \\ f(N) \geqslant 0 \\ N > -\dfrac{c}{b} \end{cases};$

Рис. 192.

$(-\infty;\ M) \cup (N;\ \infty) \not\subset \left(-\dfrac{c}{b};\ \infty\right),$

тогда $x \in \varnothing$.

б) $b < 0;\ x < -\dfrac{c}{b}.$



$\begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \\ f(M) \geqslant 0 \\ M < -\dfrac{c}{b} \end{cases};$

Рис. 193.

$(-\infty;\ M) \cup (N;\ \infty) \not\subset \left(-\infty;\ -\dfrac{c}{b}\right)$, тогда $x \in \varnothing$.

6. $a = 0$, $b = 0$; $c > 0$.

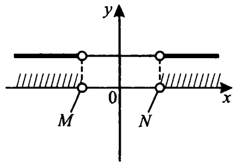


Рис. 194.

Вывод. Объединяя решения всех случаев, получим ответ на вопрос, при каких значениях параметров неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ справедливо для любого значения $x \in (-\infty; M) \cup (N; \infty)$.

Упражнения на применение теорем

1. При каких значениях параметра p неравенство $(3-p)x^2-3(p-1)x+2(p+1)>0$ справедливо для $\forall x \in (-\infty; 1)$?

По теореме IV:

а) $\begin{cases} a>0 \\ f(M)\geqslant 0, \\ M<-\dfrac{b}{2a} \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} 3-p>0 \\ 3-p-3p+3+2p+2\geqslant 0; \\ 1<\dfrac{3(p-1)}{2(3-p)} \end{cases}$ $\begin{cases} p<3 \\ p\leqslant 4 \\ \dfrac{5p-9}{2(p-3)}<0 \end{cases}$;

$1{,}8<p<3$.

б) $\begin{cases} a>0 \\ D<0 \end{cases}$; т.е. $\begin{cases} 3-p>0 \\ D=\left[3(p-1)\right]^2-4\cdot 2\cdot (p+1)(3-p) \end{cases}$;

$\begin{cases} p<3 \\ 17p^2-34p-15<0 \end{cases}$.

Убеждаясь, что числа $\dfrac{17-\sqrt{544}}{17}$ и $\dfrac{17+\sqrt{544}}{17}$ являются решениями уравнения $17p^2-34p-15=0$, изобразим графическое решение системы неравенств:

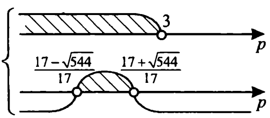


Рис. 195.

$p \in \left(\dfrac{17-\sqrt{544}}{17};\quad \dfrac{17+\sqrt{544}}{17}\right)$.

в) $\begin{cases} a>0 \\ D=0 \\ M<-\dfrac{b}{2a} \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} 3-p>0 \\ 17p^2-34p-15=0; \\ 1<\dfrac{3(p-1)}{2(3-p)} \end{cases}$ $\begin{cases} p<3 \\ \left[\begin{array}{l} p=\dfrac{17+\sqrt{544}}{17} \\ p=\dfrac{17-\sqrt{544}}{17} \end{array}\right. . \\ \dfrac{5p-9}{2(3-p)}<0 \end{cases}$

$p=\dfrac{17+\sqrt{544}}{17}>1{,}8.$

г) $\begin{cases} a=0 \\ f(M)\geqslant 0, \\ M<-\dfrac{c}{b} \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} p=3 \\ p\leqslant 4 \\ 1<\dfrac{2(p+1)}{3(p-1)} \end{cases}$; $\begin{cases} p=3 \\ p\leqslant 4 \\ \dfrac{p-5}{p-1}<0 \end{cases}$; $p=3$.

д) $\begin{cases} a=0 \\ b=0; \\ c<0 \end{cases}$ $\varnothing$, так как при $p=3$ $3(p-1)\neq 0$.

Ответ: при $p\in\left(\dfrac{17-\sqrt{544}}{17};3\right)$ неравенство $(3-p)x^2-3(p-1)x+2(p+1)>0$ справедливо для $\forall x\in(-\infty;-1)$.

2. При каких значениях параметра m неравенство $(m-1)x^2+2mx+9m-5>0$ справедливо для $\forall x\in(2;\infty)$?

По теореме VI:

а) $\begin{cases} a>0 \\ f(N)\geqslant 0, \\ N>-\dfrac{b}{2a} \end{cases}$

т.е. $\begin{cases} m-1>0 \\ (m-1)\cdot 4+2m\cdot 2+9m-5\geqslant 0; \\ 2>-\dfrac{m}{m-1} \end{cases}$ $\begin{cases} m>1 \\ m\geqslant \dfrac{9}{17} \\ \dfrac{3m-2}{m-1}>0 \end{cases}$.

Графическая иллюстрация решения:

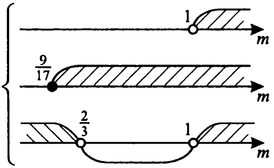
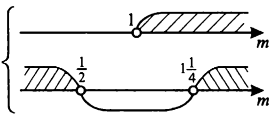


Рис. 196.

б) $\begin{cases} a>0 \\ D<0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} m-1>0 \\ -\left(8m^2-14m+5\right)<0 \end{cases}$.

Убеждаясь, что числа $1\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$ — решения уравнения $8m^2-14m+5=0$, изобразим решение графически:



$m>1\frac{1}{4}$.

Рис. 197.

в) $\begin{cases} a>0 \\ D=0 \\ N>-\dfrac{b}{2a} \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} m-1>0 \\ 8m^2-14m+5=0; \\ 2>-\dfrac{m}{m-1} \end{cases}$ $\begin{cases} m>1 \\ \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{2} \\ m=1\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \\ \dfrac{3m-2}{m-1}>0 \end{cases}$;

$m=1\frac{1}{4}$.

г) $\begin{cases} a=0 \\ f(N)\geqslant 0, \\ N>-\dfrac{c}{b} \end{cases}$ $\begin{cases} m-1=0 \\ m\geqslant \dfrac{9}{17} \\ 2>-\dfrac{9m-5}{2m} \end{cases}$; $\begin{cases} m=1 \\ m\geqslant \dfrac{9}{17} \\ \dfrac{13m-5}{m}>0 \end{cases}$; $m=1$.

д) $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c>0 \end{cases}$ $\varnothing$, т.е. при $m=1$, $2m\neq 0$.

Ответ: при $m\in[1;\infty)$ неравенство $(m-1)x^2+2mx+9m-5>0$ справедливо для $\forall x\in(2;\infty)$.

3. При каких значениях параметра a неравенство $(3+a)x^2-3(a+1)x+2(a-1)<0$ справедливо для $\forall x\in(-\infty;1)$?

По теореме III:

а) $\begin{cases} a<0 \\ f(M)\leqslant 0, \\ M<-\dfrac{b}{2a} \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} 3+a<0 \\ 3+a-3a-3+2a-2\leqslant 0; \\ 1<\dfrac{3(a+1)}{2(3+a)} \end{cases}$ $\begin{cases} a<-3 \\ -2\leqslant 0 \\ \dfrac{a-3}{a+3}>0 \end{cases}$;

$a<-3$.

б) $\begin{cases} a<0 \\ D<0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} a+3<0 \\ D=a^2+2a+33<0 \end{cases}$; $\varnothing$.

в) $\begin{cases} a<0 \\ D=0 \\ M<-\dfrac{b}{2a} \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} a<-3 \\ a^2+2a+33=0; \\ 1<\dfrac{3(a+1)}{2(3+a)} \end{cases}$ $\varnothing$.

г) $\begin{cases} a = 0 \\ f(M) \leqslant 0, \\ M < -\frac{c}{b} \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} a = -3 \\ -2 \leqslant 0 \\ 1 < \frac{2(a-1)}{3(a+1)} \end{cases}$; $\begin{cases} a = -3 \\ \frac{a+5}{a+1} < 0 \end{cases}$; $a = -3$.

д) $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0; \\ c < 0 \end{cases}$ $\varnothing$, так как при $a = -3$ $3(a+1) \neq 0$.

Ответ: при $a \in (-\infty; -3]$ неравенство $(3+a)x^2 - 3(a+1)x + 2(a-1) < 0$ справедливо для $\forall x \in (-\infty; 1)$.

4. При каких значениях параметра m неравенство $(m+1)x^2 - 2mx + 9m + 5 < 0$ справедливо для $\forall x \in (2; \infty)$?

По теореме V:

а) $\begin{cases} a < 0 \\ f(N) \leqslant 0, \\ N > -\frac{b}{2a} \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} m + 1 < 0 \\ (m+1) \cdot 4 - 2m \cdot 2 + 9m + 5 \leqslant 0; \\ 2 > \frac{m}{m+1} \end{cases}$

$\begin{cases} m < -1 \\ m \leqslant -1 \\ \frac{m+2}{m+1} > 0 \end{cases}$; $m < -2$.

б) $\begin{cases} a < 0 \\ D < 0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} m + 1 < 0 \\ -(8m^2 + 14m + 5) < 0 \end{cases}$.

Убеждаясь, что числа $-\frac{1}{2}$ и $-1\frac{1}{4}$ — решения уравнения $8m^2+14m+5=0$, изобразим графическое решение системы неравенств:

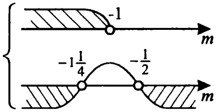


Рис. 198.

$m<-1\frac{1}{4}$.

в) $\begin{cases} a<0 \\ D=0 \\ N>-\frac{b}{2a} \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} m+1<0 \\ 8m^2+14m+5=0; \\ \frac{m+2}{m+1}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} m<-1 \\ \left[\begin{array}{l} m=-1\frac{1}{4} \\ m=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ \frac{m+2}{m+1}>0 \end{cases}$; $\varnothing$.

г) $\begin{cases} a=0 \\ f(N)\leqslant 0, \\ N>-\frac{c}{b} \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} m+1=0 \\ m\leqslant -1 \\ \frac{9m+5}{2m}<2 \end{cases}$; $\begin{cases} m=-1 \\ m\leqslant -1 \\ \frac{5(m+1)}{2m}<0 \end{cases}$; $\varnothing$.

д) $\begin{cases} a=0 \\ b=0; \\ c<0 \end{cases}$ $\varnothing$, так как при $m=-1$ $\quad 2m\neq 0$.

Ответ: при $m\in\left(-\infty;-1\frac{1}{4}\right)$ неравенство $(m+1)x^2-2mx+9m+5<0$ справедливо для $\forall x\in(2;\infty)$.

5. При каких значениях параметра k неравенство $3(2k-1)x^2+(4k+1)x+5k+4>0$ справедливо для $\forall x\in(-1;1)$?

По теореме II:

а) $\begin{cases} a>0 \\ f(N)\geqslant 0, \\ N<-\dfrac{b}{2a} \end{cases}$

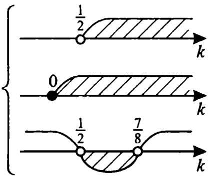
т. е. $\begin{cases} 2k-1>0 \\ 3(2k-1)+4k+1+5k+4\geqslant 0; \\ 1<-\dfrac{4k+1}{6(2k-1)} \end{cases}$

$\begin{cases} k>\dfrac{1}{2} \\ k\geqslant -\dfrac{2}{15} \\ \dfrac{16k-5}{6(2k-1)}<0 \end{cases}$; $\varnothing$.

б) $\begin{cases} a>0 \\ f(M)\geqslant 0, \\ M>-\dfrac{b}{2a} \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} 2k-1>0 \\ 3(2k-1)-4k-1+5k+4\geqslant 0; \\ -1>-\dfrac{4k+1}{6(2k-1)} \end{cases}$

$\begin{cases} k>\dfrac{1}{2} \\ 7k\geqslant 0 \\ \dfrac{8k-7}{6(2k-1)}<0 \end{cases}$.

Изобразим решение графически:



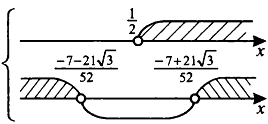
$k \in \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{8}\right)$.

Рис. 199.

в) $\begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases}$,

т. е. $\begin{cases} 2k - 1 > 0 \\ -\left(104k^2 + 28k - 49\right) < 0 \end{cases}$.

Убеждаясь, что числа $\frac{-14-42\sqrt{3}}{104}$ и $\frac{-14+42\sqrt{3}}{104}$ — корни уравнения $104k^2 + 28k - 49 = 0$, изобразим решение системы неравенств графически.



$k > \frac{-14+\sqrt{5292}}{104}$.

Рис. 200.

Примечание.

Так как $\sqrt{5292} > 72$ $\left(42\sqrt{3} > 72,\right.$ так как $\left.7\sqrt{3} > 12\right)$,

то $\frac{-14+\sqrt{5292}}{104} > \frac{1}{2}$.

г) $\begin{cases} a > 0 \\ D = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} \notin [M;\, N] \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} 2k - 1 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{-7+21\sqrt{3}}{52} \\ k = \dfrac{-7-21\sqrt{3}}{52} \end{array}\right. ; \\ \dfrac{-4k+1}{6(2k-1)} \notin [-1;\, 1] \end{cases}$

$k = \dfrac{-7+21\sqrt{3}}{52} \in \left(\dfrac{1}{2};\, \dfrac{7}{8}\right).$

$-\dfrac{4k+1}{6(2k-1)} \notin [-1;\, 1]$, т.е. $\left[\begin{array}{l} -\dfrac{4k+1}{6(2k-1)} > 1 \\ -\dfrac{4k+1}{6(2k-1)} < -1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \dfrac{16k-5}{6(2k-1)} < 0 \\ \dfrac{8k-7}{6(2k-1)} < 0 \end{array}\right.$.

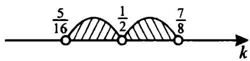


Рис. 201.

д) $\begin{cases} a < 0 \\ f(N) \geqslant 0 \\ f(M) \geqslant 0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} 2k - 1 < 0 \\ k \geqslant -\dfrac{2}{15} \\ k \geqslant 0 \end{cases}$. $k \in \left[0;\, \dfrac{1}{2}\right).$

е) $\begin{cases} a = 0 \\ f(M) \geqslant 0 \\ M > -\dfrac{c}{a} \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} 2k - 1 = 0 \\ k \geqslant 0 \\ -1 > -\dfrac{5k+4}{4k+1} \end{cases}$; $\begin{cases} k = \dfrac{1}{2} \\ k \geqslant 0 \\ \dfrac{k+3}{4k+1} > 0 \end{cases}$; $k = \dfrac{1}{2}$.

ж) $\begin{cases} a = 0 \\ f(N) \geqslant 0 \\ N < -\dfrac{c}{a} \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} k = \dfrac{1}{2} \\ k \geqslant -\dfrac{2}{15} \\ 1 < -\dfrac{5k+4}{4k+1} \end{cases}$; $\varnothing$.

Примечание. Последнюю систему можно было бы не решать, так как $k = \dfrac{1}{2}$ уже исследовано.

з) $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0; \\ c > 0 \end{cases}$ $\varnothing$, так как при $k = \frac{1}{2}$ $4k + 1 \neq 0$.

Ответ: при $k \geqslant 0$ неравенство $3(2k-1)x^2 + (4k+1)x + 5k + 4 > 0$ справедливо для $\forall x \in (-1; 1)$.

6. При каких значениях параметра t неравенство $(t-1)x^2 + 2tx + 9t - 5 < 0$ справедливо для $\forall x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$?

По теореме VII:

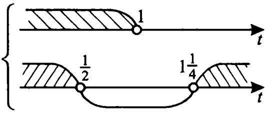
а) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0 \\ f(M) \leqslant 0 \\ M < -\dfrac{b}{2a} \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ f(N) \leqslant 0 \\ N > -\dfrac{b}{2a} \end{cases} \end{array}\right.$; т.е. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t - 1 < 0 \\ t - 1 - 2t + 9t - 5 \leqslant 0 \\ -1 < -\dfrac{t}{t-1} \end{cases} \\ \begin{cases} t - 1 < 0 \\ 25(t-1) + 10t + 9t - 5 \leqslant 0 \\ 5 > -\dfrac{t}{t-1} \end{cases} \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t < 1 \\ t \leqslant \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{t-1} < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t < 1 \\ t \leqslant \dfrac{15}{22} \\ \dfrac{6t-5}{t-1} > 0 \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} t \leqslant \dfrac{3}{4} \\ t \leqslant \dfrac{15}{22} \end{array}\right.$; $t \leqslant \dfrac{15}{22}$.

б) $\begin{cases} a < 0 \\ D < 0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} t - 1 < 0 \\ -\left(8t^2 - 14t + 5\right) < 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} t < 1 \\ 8t^2 - 14t + 5 > 0 \end{cases}$.

Графическое решение:



$t < \frac{1}{2}$.

Рис. 202.

в) $\begin{cases} a < 0 \\ D = 0 \\ -\frac{b}{2a} \in [M; N] \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} t < 1 \\ \left[\begin{array}{l} t = 1\frac{1}{4} \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \\ -\frac{t}{t-1} \in [-1; 5] \end{cases}$; $\begin{cases} t < 1 \\ \left[\begin{array}{l} t = 1\frac{1}{4} \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \\ t \leqslant \frac{5}{6} \end{cases}$; $t = \frac{1}{2}$.

г) $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0 \end{cases}$; $\varnothing$, так как $\begin{cases} t = 1 \\ 2t = 0 \end{cases}$; $\varnothing$.

Итак, осталось: $\left[\begin{array}{l} t \leqslant \frac{15}{22} \\ t \leqslant \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Ответ: при $t \leqslant \frac{15}{22}$ неравенство

$(t-1)x^2 + 2tx + 9t - 5 < 0$ справедливо

для $\forall x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$.

7. При каких значениях параметра p неравенство $(p+1)x^2+(2p+1)x+p-1>0$ справедливо для $\forall x \in (-\infty;-1)\cup(1;\infty)$?

По теореме VIII:

а) $$\left[\begin{cases} a>0 \\ f(N)\geqslant 0 \\ M<-\dfrac{b}{2a} \end{cases} \atop \begin{cases} a>0 \\ f(M)\geqslant 0 \\ N>-\dfrac{b}{2a} \end{cases}\right., \text{ т. е. } \left[\begin{cases} p+1>0 \\ p+1-2p-1+p-1\geqslant 0 \\ -1<-\dfrac{2p+1}{2(p+1)} \end{cases} \atop \begin{cases} p+1>0 \\ p+1+2p+1+p-1\geqslant 0 \\ 1>-\dfrac{2p+1}{2(p+1)} \end{cases}\right.;$$

$$\left[\begin{cases} p>-1 \\ -1\geqslant 0 \\ \dfrac{2(p+1)-2p-1}{2(p+1)}>0 \end{cases} \atop \begin{cases} p>-1 \\ p\geqslant -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{2p+2+2p+1}{2(p+1)}>0 \end{cases}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ p\geqslant -\dfrac{1}{4} \end{array}\right.; \quad \varnothing.$$

б) $$\begin{cases} a>0 \\ D<0 \end{cases}, \quad \text{т. е. } \begin{cases} p+1>0 \\ D=4p^2+4p+1-4p^2+4<0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} p>-1 \\ p<-\dfrac{5}{4} \end{cases}; \quad \varnothing.$$

в) $\begin{cases} a > 0 \\ D = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} \in (M; N) \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} p > -1 \\ p = -\dfrac{5}{4} \\ -\dfrac{2p+1}{2(p+1)} \in (-1; 1) \end{cases}$; $\varnothing$.

г) $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0 \end{cases}$, так как при $\begin{cases} p = -1 \\ p = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$; $\varnothing$.

Ответ: $p \in \varnothing$.

8. При каких значениях параметра m неравенство $3(2m+1)x^2 - (4m-1)x + 5m - 4 < 0$ справедливо для $\forall x \in (-1; 1)$?

По теореме I:

а) $\begin{cases} a > 0 \\ f(M) \leqslant 0 \\ f(N) \leqslant 0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} 2m+1 > 0 \\ 3(2m+1) + 4m - 1 + 5m - 4 \leqslant 0 \\ 3(2m+1) - 4m + 1 + 5m - 4 \leqslant 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} m > -\dfrac{1}{2} \\ m \leqslant \dfrac{2}{15} \\ m \leqslant 0 \end{cases}$; $-\dfrac{1}{2} < m \leqslant 0$.

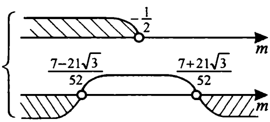
б) $\begin{cases} a < 0 \\ f(N) \leqslant 0 \\ N < -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} 2m+1 < 0 \\ m \leqslant 0 \\ 1 < \dfrac{4m-1}{6(2m+1)} \end{cases}$; $\begin{cases} m < -\dfrac{1}{2} \\ m \leqslant 0 \\ \dfrac{8m+7}{6(2m+1)} < 0 \end{cases}$;

$-\dfrac{7}{8} < m < -\dfrac{1}{2}$.

в) $\begin{cases} a<0 \\ f(M)\leqslant 0, \\ M>-\dfrac{b}{2a} \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} 2m+1<0 \\ m\leqslant \dfrac{2}{15} \\ -1>\dfrac{4m-1}{6(2m+1)} \end{cases}$; $\begin{cases} m<-\dfrac{1}{2} \\ m\leqslant \dfrac{2}{15} \\ -\dfrac{1}{2}<m<-\dfrac{5}{16} \end{cases}$; $\varnothing$.

г) $\begin{cases} a<0 \\ D<0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} m<-\dfrac{1}{2} \\ D=-104m^2+28m+49<0 \end{cases}$.

Убеждаясь, что числа $\dfrac{7+21\sqrt{3}}{52}$ и $\dfrac{7-21\sqrt{3}}{52}$ — корни уравнения $-104m^2+28m+49=0$, изобразим графическое решение системы неравенств:



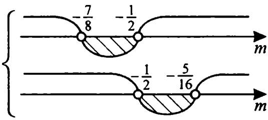
$$\frac{7-21\sqrt{3}}{52}<m<-\frac{1}{2}.$$

Рис. 203.

д) $\begin{cases} a<0 \\ D=0 \\ -\dfrac{b}{2a}\notin(M;\,N) \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} m<-\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{7-21\sqrt{3}}{52} \\ m=\dfrac{7+21\sqrt{3}}{52} \end{array}\right. \\ \dfrac{4m-1}{6(2m+1)}\notin(-1;\,1) \end{cases}$;

$$\begin{cases} m=\dfrac{7-21\sqrt{3}}{52} \\ \dfrac{4m-1}{6(2m+1)}\notin(-1;\;1) \end{cases}.$$

Графическое решение:



$\varnothing$

Рис. 204.

е) $\begin{cases} a = 0 \\ f(N) \leqslant 0 \\ N < -\frac{c}{b} \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m \leqslant 0 \\ 1 < \frac{5m-4}{4m-1} \end{cases}$; $\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m \leqslant 0 \\ \frac{m-3}{4m-1} > 0 \end{cases}$; $m = -\frac{1}{2}$.

Нет необходимости рассматривать случай,

когда $\begin{cases} a = 0 \\ f(M) \leqslant 0 \\ M > -\frac{c}{b} \end{cases}$.

ж) $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0 \end{cases}$; $\varnothing$, так как при $m = -\frac{1}{2}$ $4m - 1 \neq 0$.

Ответ: при $-\frac{7}{8} < m \leqslant 0$ неравенство $3(2m+1)x^2 - (4m-1)x + 5m - 4 < 0$ справедливо для $\forall x \in (-1; 1)$.

7

Решение более сложных неравенств с параметрами

Практикум 9

1. Исследовать и решить неравенство $\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{2a}{x+a}<\dfrac{8a^2}{x^2-a^2}$.

В результате ряда преобразований получаем вид неравенства, наиболее удобный для исследования:

$$\frac{x(x+a)-2a(x-a)-8a^2}{(x-a)(x+a)}<0; \quad \frac{x^2-ax-6a^2}{(x-a)(x+a)}<0.$$

Убеждаемся, что $x_1=3a$ и $x_2=-2a$ — корни уравнения $x^2-ax-6a^2=0$, тогда $\dfrac{(x-3a)(x+2a)}{(x-a)(x+a)}<0$.

Полученное неравенство решим методом интервалов.

а) Если $a>0$, то $x\in(-2a;-a)\cup(a;3a)$.

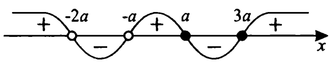


Рис. 205.

б) Если $a<0$, то $x\in(3a;\ a)\cup(-a;\ -2a)$.

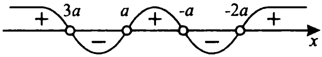


Рис. 206.

в) Если $a=0$, то $\dfrac{x^2}{x^2}<0$; $1<0$, $\Rightarrow$ решений нет.

Ответ: 1) При $a>0$ $x\in(-2a;\ -a)\cup(a;\ 3a)$.

2) При $a=0$ $x\in\varnothing$.

3) При $a<0$ $x\in(3a;\ a)\bigcup(-a;\ -2a)$.

2. При каких значениях параметра a неравенство $\dfrac{x-2a-1}{x-a}<0$ справедливо для $\forall x\in[1;\ 2]$?

а) Пусть $a>0$.

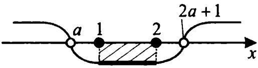


Рис. 183.

$[1;\ 2]\subset(a;\ 2a+1)$, значит: $\begin{cases}2<2a+1\\ a<1\end{cases}$ $\Rightarrow$

$a\in\left(\dfrac{1}{2};\ 1\right)$.

б) Пусть $a<0$.

1) $a<2a+1$, $\Rightarrow$ $a>-1$.

Но $2a+1<1$ при $a<0$.

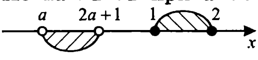


Рис. 208.

$[1;\ 2]\not\subset(a;\ 2a+1)$.

2) $a > 2a+1$, $\Rightarrow$ $a < -1$.

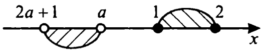


Рис. 209

$[1;\ 2] \not\subset (2a+1;\ a)$.

Ответ: неравенство $\frac{x-2a-1}{x-a} < 0$ справедливо

для $\forall x \in [1;\ 2]$ при $a \in \left(\frac{1}{2};\ 1\right)$.

3. Исследовать и решить неравенство $ax > \frac{1}{x}$.

$\frac{ax^2-1}{x} > 0$ — вид неравенства, наиболее удобный для исследования.

а) Пусть $a < 0$; $ax^2 - 1 < 0$ для $\forall x$, значит $x < 0$.

б) Пусть $a > 0$; $\frac{ax^2-1}{x} > 0$.

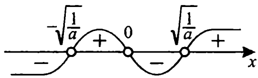


Рис. 210.

Убеждаемся, что $x_1 = \sqrt{\frac{1}{a}}$ и $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{a}}$ — корни уравнения $ax^2 - 1 = 0$. $x \in \left(-\sqrt{\frac{1}{a}};\ 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{a}};\ \infty\right)$.

в) Пусть $a = 0$; $0 \cdot x > \frac{1}{x}$, $\Rightarrow$ $x < 0$.

Ответ: 1) При $a \leqslant 0$ $x \in (-\infty;\ 0)$.

2) При $a > 0$ $x \in \left(-\sqrt{\frac{1}{a}};\ 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{a}};\ \infty\right)$.

4. Исследовать и решить неравенство $\frac{ax^2}{x-1} - 2a < a^2 + 1$.

$$\frac{ax^2 - (a+1)^2 x + (a+1)^2}{x-1} < 0.$$

Пусть $a \neq 0$, тогда $x_1 = a + 1$; $x_2 = \frac{a+1}{a}$ — корни уравнения $ax^2 - (a+1)^2 x + (a+1)^2 = 0$.

Таким образом, $\frac{a(x-(a+1))\left(x-\frac{a+1}{a}\right)}{x-1} < 0$.

Очевидно, что в зависимости от расположения корней будем иметь разные решения.

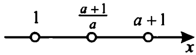
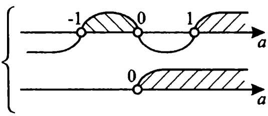
а) 

Рис. 211.

Но тогда $\begin{cases} \frac{a+1}{a} < a+1 \\ \frac{a+1}{a} > 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{(a+1)(a-1)}{a} > 0 \\ a > 0 \end{cases}$



$a > 1$.

Рис. 212.

Значит, при $a > 1$ $x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{a+1}{a}; a+1\right)$.

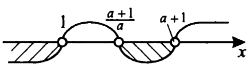


Рис. 213.

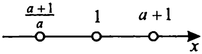
б) 

Рис. 214.

Но тогда $\begin{cases} \frac{a+1}{a} < 1 \\ a+1 > 1 \end{cases}$; $\begin{cases} a < 0 \\ a > 0 \end{cases}$; $\varnothing$.

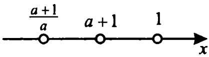
в) 

Рис. 215.

Но тогда $\begin{cases} \frac{a+1}{a} < a+1 \\ a+1 < 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{(a+1)(a-1)}{a} > 0 \\ a < 0 \end{cases}$.

Рис. 216.

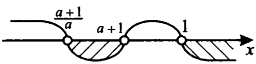


Рис. 217.

При $a \in (-1; 0)$, $x \in \left(\frac{a+1}{a}; a+1\right) \cup (1; \infty)$.

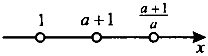
г) 

Рис. 218.

Но тогда $\begin{cases} 1 < a+1 \\ a+1 < \frac{a+1}{a} \end{cases}$; $\begin{cases} a > 0 \\ \frac{(a-1)(a+1)}{a} < 0 \end{cases}$.

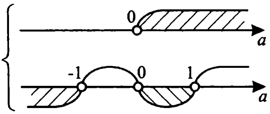
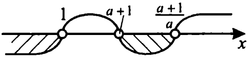


Рис. 219.

Таким образом, при $a \in (0; 1)$ получим



$x \in (-\infty; 1) \cup \left(a+1; \frac{a+1}{a}\right)$.

Рис. 220.

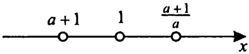
д) 

Рис. 221.

Но тогда $\begin{cases} a+1<1 \\ 1<\frac{a+1}{a} \end{cases}$; т.е. $\begin{cases} a<0 \\ a>0 \end{cases}$; $\varnothing$.

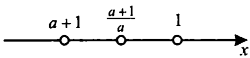
е) 

Рис. 222.

Но тогда $\begin{cases} a+1<\frac{a+1}{a} \\ \frac{a+1}{a}<1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{(a+1)(a-1)}{a}<0 \\ a<0 \end{cases}$; $a<-1$.

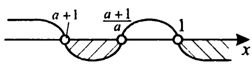
При $a<-1$, 

Рис. 223.

$x \in \left(a+1; \frac{a+1}{a}\right) \cup (1; \infty)$.

ж) Если $a+1=\frac{a+1}{a}$, тогда $\begin{cases} a^2-1=0 \\ a\neq 0 \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right.$.

1) Если $a=1$, то:

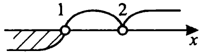


Рис. 224.

Значит, $a+1=\frac{a+1}{a}=2$; $x\in(-\infty;1)$.

2) Если $a=-1$, то:

Рис. 225.

Значит, $a+1=\frac{a+1}{a}=0$; $x\in(1;\infty)$.

з) Если $a=0$, то $\frac{0}{x-1}<1$; $0<1$

для $\forall x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$.

Ответ: 1) При $a<-1$ $x\in\left(a+1;\frac{a+1}{a}\right)\cup(1;\infty)$.

2) При $a=-1$ $x\in(1;\infty)$.

3) При $-1<a<0$ $x\in\left(\frac{a+1}{a};a+1\right)\cup(1;\infty)$.

4) При $a=0$ $x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$.

5) При $0<a<1$ $x\in(-\infty;1)\cup\left(a+1;\frac{a+1}{a}\right)$.

6) При $a=1$ $x\in(-\infty;1)$.

7) При $a>1$ $x\in(-\infty;1)\cup\left(\frac{a+1}{a};a+1\right)$.

5. **Исследовать и решить неравенство**

$$\frac{3(2m-1)x^2-2(4m+1)x+5m+4}{x+1} \geqslant 0 .$$

Пусть $m \neq \frac{1}{2}$, тогда $x_{1,2} = \frac{4m+1 \pm \sqrt{-(m+1)(14m-13)}}{3(2m-1)}$ — корни уравнения $3(2m-1)x^2 - 2(4m+1)x + 5m + 4 = 0$. Очевидно, что в зависимости от расположения корней решения будут разными.

а) Выясним, при каких значениях параметра m справедливо неравенство $-1 < x_2 < x_1$.

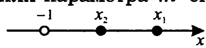


Рис. 226.

По теореме III: $\begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > M \\ a \cdot f(M) > 0 \end{cases}$;

т. е. $\begin{cases} -(m+1)(14m-13) > 0 \\ -1 < \dfrac{4m+1}{3(2m-1)} \\ 3(2m-1)(3(2m-1)+2(4m+1)+5m+4) > 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} -(m+1)(14m-13) > 0 \\ \dfrac{10m-2}{3(2m-1)} > 0 \\ (2m-1)(19m+3) > 0 \end{cases}$;

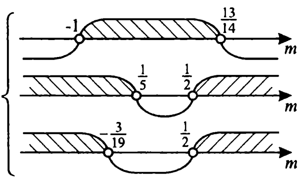


Рис. 227.

$$m \in \left(-1; -\frac{3}{19}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{13}{14}\right).$$

1) При $m \in \left(-1; -\dfrac{3}{19}\right)$ вид неканонический,

так как $m < \dfrac{1}{2}$:

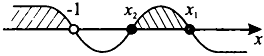


Рис. 228.

$$x \in (-\infty; -1) \cup \left[\frac{4m+1+\sqrt{-(m+1)(14m-13)}}{3(2m-1)}; \frac{4m+1-\sqrt{-(m+1)(14m-13)}}{3(2m-1)}\right].$$

2) При $m \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{13}{14}\right)$,

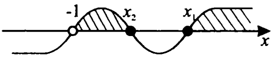


Рис. 229.

$$x \in \left(-1; \frac{4m+1-\sqrt{-(m+1)(14m-13)}}{3(2m-1)}\right] \cup \left[\frac{4m+1+\sqrt{-(m+1)(14m-13)}}{3(2m-1)}; \infty\right).$$

б) Выясним, при каких значениях параметра m $x_2 < -1 < x_1$. По теореме II:

$af(M) < 0$, т.е.

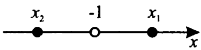


Рис. 230.

$$3(2m-1)(3(2m-1)+2(4m+1)+5m+4) < 0;$$

$$(2m-1)(19m+3) < 0;$$

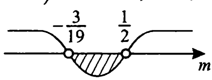


Рис. 231.

Тогда:

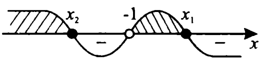


Рис. 232.

Значит, при $m \in \left(-\frac{3}{19}; \frac{1}{2}\right)$

$$x \in \left(-\infty; \frac{4m+1+\sqrt{-(m+1)(14m-13)}}{3(2m-1)}\right] \cup \left(-1; \frac{4m+1-\sqrt{-(m+1)(14m-13)}}{3(2m-1)}\right]$$

в) Выясним, при каких значениях параметра m

$x_2 < x_1 < -1$.

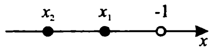
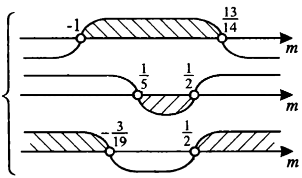


Рис. 233.

По теореме I: $\begin{cases} D > 0 \\ -\frac{b}{2a} < M \\ a \cdot f(M) > 0 \end{cases}$;



$\varnothing$

Рис. 234.

г) Если $\begin{cases} 2m-1 > 0 \\ D < 0 \end{cases}$, то

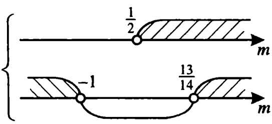


Рис. 235.

Числитель неравенства всегда положительный, следовательно, $x + 1 > 0$, т.е. при $m > \frac{13}{14}$

$x \in (-1; \infty)$.

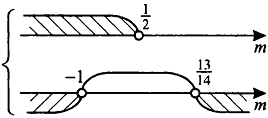
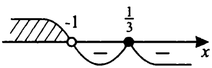
д) Если $\begin{cases} 2m-1<0 \\ D<0 \end{cases}$, то 

Рис. 236.

Числитель неравенства всегда отрицательный, следовательно, $x+1<0$, т.е. при $m<-1$, $x \in (-\infty; -1)$.

е) Если $D=0$, то:

1) $m=-1$; $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{3}$;



$x \in (-\infty; -1) \cup \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

Рис. 237.

2) $m = \dfrac{13}{14}$; $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$, где $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4m+1}{3(2m-1)}$;

$$x_1 = x_2 = \frac{4\cdot\frac{13}{14}+1}{3\left(2\cdot\frac{13}{14}-1\right)} = \frac{52+14}{3(26-14)} = 1\frac{5}{6},$$

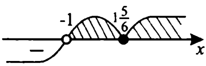
т.е. $x \in (-1; \infty)$. 

Рис. 238.

ж) Если $m = \dfrac{1}{2}$, тогда $\dfrac{0\cdot x^2-6x+6{,}5}{x+1} \geqslant 0$; $\dfrac{\frac{13}{12}-x}{x+1} \geqslant 0$,

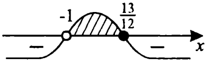
т.е. $x \in \left(-1; 1\dfrac{1}{12}\right]$. 

Рис. 239.

з) Если $m=-\dfrac{3}{19}$, то $\dfrac{3\left(-\frac{6}{19}-1\right)x^2-2\left(-\frac{12}{19}+1\right)x-\frac{15}{19}+4}{x+1}\geqslant 0$;

$\dfrac{75x^2+14x-61}{x+1}\geqslant 0$; $\dfrac{(x+1)(75x-61)}{x+1}\geqslant 0$; $x\in\left[\dfrac{61}{75};\infty\right)$.

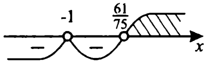


Рис. 240.

Ответ:

1) При $m<-1$ $x\in(-\infty;-1)$.

2) При $m=-1$ $x\in(-\infty;-1)\cup\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

3) При $-1<m<-\dfrac{3}{19}$

$$x\in(-\infty;-1)\cup\left[\frac{4m+1+\sqrt{-(m+1)(14m-13)}}{3(2m-1)};\ \frac{4m+1-\sqrt{-(m+1)(14m-13)}}{3(2m-1)}\right].$$

4) При $m=-\dfrac{3}{19}$ $x\in\left[\dfrac{61}{75};\infty\right)$.

5) При $m\in\left(-\dfrac{3}{19};\dfrac{1}{2}\right)$

$$x\in\left(-\infty;\frac{4m+1+\sqrt{-(m+1)(14m-13)}}{3(2m-1)}\right]\cup\left(-1;\frac{4m+1-\sqrt{-(m+1)(14m-13)}}{3(2m-1)}\right].$$

6) При $m=\dfrac{1}{2}$ $x\in\left(-1;1\dfrac{1}{12}\right]$.

7) При $m\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{13}{14}\right)$

$$x\in\left(-1;\frac{4m+1-\sqrt{-(m+1)(14m-13)}}{3(2m-1)}\right]\cup\left[\frac{4m+1+\sqrt{-(m+1)(14m-13)}}{3(2m-1)};\infty\right).$$

8) При $m=\dfrac{13}{14}$ $x\in(-1;\infty)$.

9) При $m>\dfrac{13}{14}$ $x\in(-1;\infty)$.

6. Исследовать и решить неравенство с параметром

$$\frac{(m-1)x^2+2mx+9m-5}{x^2-4x-5}>0.$$

Пусть $m \neq 1$, тогда

$$x_1=\frac{-m+\sqrt{-(4m-5)(2m-1)}}{m-1} \text{ и } x_2=\frac{-m-\sqrt{-(4m-5)(2m-1)}}{m-1} \text{ —}$$

корни уравнения $(m-1)x^2+2mx+9m-5=0$.

Числа -1 и 5 — корни уравнения

$x^2-4x-5=0$.

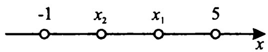
а) 

Рис. 241.

Выясним, при каких значениях параметра m $(x_2;\, x_1)\subset(-1;\,5)$.

По теореме IV:

$$\begin{cases} D<0 \\ M<-\dfrac{b}{2a}<N \\ a\cdot f(M)>0 \\ a\cdot f(N)>0 \end{cases},$$

т.е.

$$\begin{cases} -(4m-5)(2m-1)>0 \\ -1<-\dfrac{m}{m-1}<5 \\ (m-1)(m-1-2m+9m-5)>0 \\ (m-1)\left[25(m-1)+10m+9m-5\right]>0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -(4m-5)(2m-1) > 0 \\ \dfrac{6m-5}{m-1} > 0 \\ \dfrac{1}{m-1} < 0 \\ (m-1)(4m-3) > 0 \\ (m-1)(22m-15) > 0 \end{cases};$$

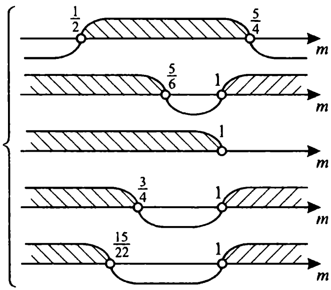


Рис. 242.

$$m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{15}{22}\right) \subset (-\infty; 1),$$

тогда вид неканонический.

Тогда:

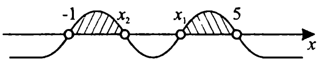


Рис. 243.

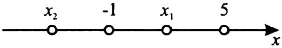
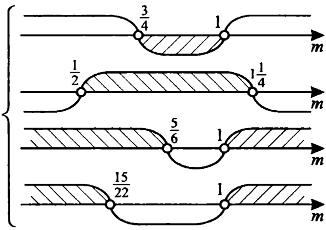
б) 

Рис. 244.

Воспользовавшись теоремой II для $x_2 < -1 < x_1$ и теоремой I для $x_2 < x_1 < 5$, получаем:

$$\begin{cases} a \cdot f(M) < 0 \\ \begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < N \\ a \cdot f(N) > 0 \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} (m-1)(4m-3) < 0 \\ -(4m-5)(2m-1) > 0 \\ \dfrac{6m-5}{m-1} > 0 \\ (m-1)(22m-15) > 0 \end{cases}.$$

Графическое решение:



$\varnothing$

Рис. 245.

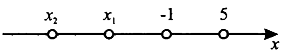
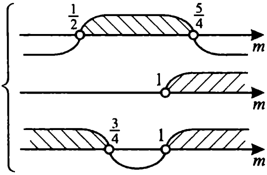
в) 

Рис. 246.

Воспользовавшись теоремой I для $x_2 < x_1 < -1$, получаем:

$$\begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < M \\ a \cdot f(M) > 0 \end{cases}, \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} -(4m-5)(2m-1) > 0 \\ \dfrac{1}{m-1} > 0 \\ (m-1)(4m-3) > 0 \end{cases}$$



$$m \in \left(1;\, 1\frac{1}{4}\right).$$

Рис. 247

Тогда:

Рис. 248.

$$x \in \left(-\infty;\, \frac{-m-\sqrt{-(4m-5)(2m-1)}}{m-1}\right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{-m+\sqrt{-(4m-5)(2m-1)}}{m-1};\, -1\right) \cup (5;\, \infty).$$

г)

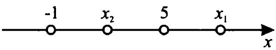


Рис. 249.

Воспользовавшись теоремой II для $x_2 < 5 < x_1$ и теоремой III для $-1 < x_2 < x_1$, получаем:

$$\begin{cases} a \cdot f(N) < 0 \\ \begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > M \\ a \cdot f(M) > 0 \end{cases} \end{cases}, \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} (m-1)(22m-15) < 0 \\ -(4m-5)(2m-1) > 0 \\ \dfrac{1}{m-1} < 0 \\ (m-1)(4m-3) > 0 \end{cases};$$

$$m \in \left(\frac{15}{22};\, \frac{3}{4}\right).$$

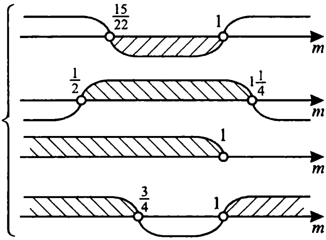


Рис. 250.

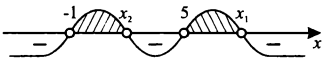
Тогда: 

Рис. 251.

$$x \in \left(-1;\ \frac{-m+\sqrt{-(4m-5)(2m-1)}}{m-1}\right) \cup \left(5;\ \frac{-m-\sqrt{-(4m-5)(2m-1)}}{m-1}\right).$$

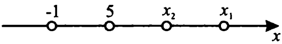
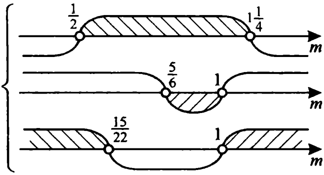
д) 

Рис. 252.

По теореме III:

$$\begin{cases} D<0 \\ -\dfrac{b}{2a}>N \\ a\cdot f(N)>0 \end{cases}, \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} -(4m-5)(2m-1)>0 \\ -\dfrac{m}{m-1}>5 \\ (m-1)(22m-15)>0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -(4m-5)(2m-1)>0 \\ \dfrac{6m-5}{m-1}<0 \\ (m-1)(22m-15)>0 \end{cases}$$



$\varnothing$

Рис. 253.

е)

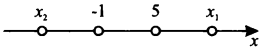


Рис. 254.

По теореме VII:

$$\begin{cases} a\cdot f(M)<0 \\ a\cdot f(N)<0 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} (m-1)(4m-3)<0 \\ (m-1)(22m-15)<0 \end{cases}; \ \frac{3}{4}<m<1.$$

Тогда:

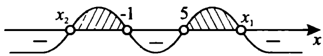
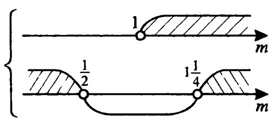


Рис. 255.

$$x\in\left(\frac{-m+\sqrt{-(4m-5)(2m-1)}}{m-1};-1\right)\cup\left(5;\frac{-m-\sqrt{-(4m-5)(2m-1)}}{m-1}\right).$$

ж) $\begin{cases} a>0 \\ D<0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} m-1>0 \\ -(4m-5)(2m-1)<0 \end{cases}$.



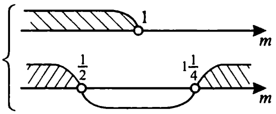
$m>1\frac{1}{4}$.

Рис. 256.

Тогда $x^2-4x-5>0$, т.е. $x\in(-\infty;-1)\cup(5;\infty)$.

з) $\begin{cases} a < 0 \\ D < 0 \end{cases}$,

т.е. $\begin{cases} m - 1 < 0 \\ -(4m-5)(2m-1) < 0 \end{cases}$.



$m < \frac{1}{2}$.

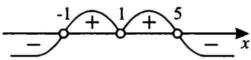
Рис. 257.

Тогда $x^2 - 4x - 5 < 0$, т.е. $x \in (-1; 5)$.

и) $m = \frac{1}{2}$,

тогда $x_1 = x_2 = -\frac{m}{m-1}$, т.е. $x_{1,2} = 1$.

$\left(m = \frac{1}{2} < 1\right)$, тогда



$x \in (-1; 1) \cup (1; 5)$.

Рис. 258.

к) $m = 1$,

тогда $\frac{2(x+2)}{(x+1)(x-5)} > 0$; $x \in (-2; -1) \cup (5; \infty)$.

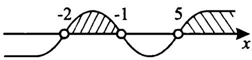


Рис. 259.

л) $m=\dfrac{15}{22}$,

тогда $\dfrac{\left(\frac{15}{22}-1\right)x^2+\frac{15}{11}x+\frac{9\cdot 15}{22}-4}{(x+1)(x-5)}>0$;

$\dfrac{-7x^2+30x+25}{(x+1)(x-5)}>0$; $\dfrac{-7(x-5)\left(x+\frac{5}{7}\right)}{(x+1)(x-5)}>0$; $x\in\left(-1;-\dfrac{5}{7}\right)$.

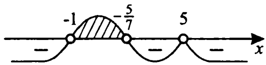
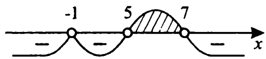


Рис. 260.

м) $m=\dfrac{3}{4}$,

тогда $\dfrac{\left(\frac{3}{4}-1\right)x^2+\frac{2\cdot 3}{4}\cdot x+\frac{9\cdot 3}{4}-5}{(x+1)(x-5)}>0$; $\dfrac{-x^2+6x+7}{(x+1)(x-5)}>0$.



$x\in(5;7)$.

Рис. 261.

н) $m=\dfrac{5}{4}$,

тогда $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$; $x_1=x_2=\dfrac{-\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}-1}=-5$.

Значит, $\dfrac{(x+5)^2}{(x+1)(x-5)}>0$;

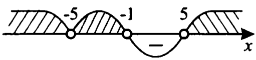


Рис. 262.

$x\in(-\infty;-5)\cup(-5;-1)\cup(5;\infty)$.

Ответ:

1) При $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ $x \in (-1; 5)$.

2) При $m = \frac{1}{2}$ $x \in (-1; 1) \cup (1; 5)$.

3) При $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{15}{22}\right)$

$$x \in \left(-1; \frac{-m+\sqrt{-(4m-5)(2m-1)}}{m-1}\right) \cup \left(\frac{-m-\sqrt{-(4m-5)(2m-1)}}{m-1}; 5\right).$$

4) При $m = \frac{15}{22}$ $x \in \left(-1; -\frac{5}{7}\right)$.

5) При $m \in \left(\frac{15}{22}; \frac{3}{4}\right)$

$$x \in \left(-1; \frac{-m+\sqrt{-(4m-5)(2m-1)}}{m-1}\right) \cup \left(5; \frac{-m-\sqrt{-(4m-5)(2m-1)}}{m-1}\right).$$

6) При $m = \frac{3}{4}$ $x \in (5; 7)$.

7) При $m \in \left(\frac{3}{4}; 1\right)$

$$x \in \left(\frac{-m+\sqrt{-(4m-5)(2m-1)}}{m-1}; -1\right) \cup \left(5; \frac{-m-\sqrt{-(4m-5)(2m-1)}}{m-1}\right).$$

8) При $m = 1$ $x \in (-2; -1) \cup (5; \infty)$.

9) При $m \in \left(1; \frac{5}{4}\right)$

$$x \in \left(-\infty; \frac{-m-\sqrt{-(4m-5)(2m-1)}}{m-1}\right) \cup \left(\frac{-m+\sqrt{-(4m-5)(2m-1)}}{m-1}; -1\right) \cup (5; \infty)$$

10) При $m = \frac{5}{4}$ $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; -1) \cup (5; \infty)$.

11) При $m \in \left(\frac{5}{4}; \infty\right)$ $x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$.

Зачетная карточка 1

1. При каких значениях параметра a существует единственное решение уравнения $\frac{a-1}{x-4}=\frac{2x+3}{x^2+x-20}$ такое, что $x\leqslant 6$?

2. Исследовать и решить уравнение с параметром
$$\frac{x-1-a}{x-3}+\frac{10}{x+1}+\frac{44}{(x-1)^2-4}=0.$$

3. При каких значениях параметра a уравнение $x^2+ax+1=0$ имеет корни x_1 и x_2 такие, что $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2<7$?

4. Исследовать и решить систему уравнений с параметром $\begin{cases}(t+1)x+\left(t^2+4t+3\right)y=(t+3)^2\\ (2t+1)x+(t+3)y=t^2+4t+3\end{cases}$.

5. При каких значениях параметра k уравнение $kx^2-(k+1)x+2=0$ имеет корни x_1 и x_2 такие, что $|x_1|<1$, $|x_2|<1$?

6. Исследовать уравнение $(a-5)x^2+(2a+3)x+a+10=0$ на знаки корней.

7. Исследовать и решить неравенство с параметром
$$\frac{\left(a^2-a-2\right)x+3a}{\sqrt{x^2-x-6}}\leqslant 0.$$

8. Исследовать и решить неравенство с параметром
$$\frac{(b+2)x^2+(b-3)x+b-6}{\sqrt{1-x^2}}<0.$$

Зачетная карточка 2

1. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{a+1}{4-x}=\frac{3-2x}{x^2+x-20}.$$

Выяснить, при каких значениях параметра a существует единственное решение уравнения такое, что $x \geqslant 2$.

2. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{x+1+a}{x+3}+\frac{10}{1-x}=\frac{44}{-(x+1)^2+4}.$$

3. При каких значениях параметра m уравнение $x^2+mx+m-1=0$ имеет корни x_1 и x_2 такие, что сумма квадратов этих корней принимает наименьшее значение?

4. Исследовать и решить систему уравнений

с параметром $\begin{cases}(1-t)x+\left(t^2-4t+3\right)y=(t-3)^2\\(1-2t)x+(3-t)y=t^2-4t+3\end{cases}.$

5. При каких значениях параметра k уравнение $(k-3)x^2+(k+2)x+k+5=0$ имеет корни x_1 и x_2 такие, что $|x_1|<1$, $|x_2|<1$?

6. Исследовать уравнение с параметром $(a-4)x^2-(2a+5)x+a+2=0$ на знаки корней.

7. Исследовать и решить неравенство с параметром

$$\frac{(b-2)x^2+(b+3)x+b+6}{\sqrt{4-x^2}}\geqslant 0.$$

8. Исследовать и решить неравенство с параметром

$$\frac{\left(a^2+a-2\right)x+3a-1}{\sqrt{x^2+x-6}}\leqslant 0.$$

Зачетная карточка 3

1. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{ax+2}{a\left(x^2+x-2\right)}-\frac{3}{x-1}=\frac{a-5}{a(x+2)}.$$

Выяснить, при каких значениях параметра a существует единственное решение уравнения, такое что $x \leqslant 2$.

2. Исследовать уравнение с параметром $\frac{1-2a}{x-1}=\frac{2ax+2}{x+1}$ на знаки корней.

3. При каких значениях параметра k уравнение

$(k-2)x^2+(k+2)x+k-5=0$ имеет корни x_1 и x_2 такие, что $x_1^2+x_2^2 \leqslant 1$?

4. Исследовать и решить систему уравнений

с параметром $\begin{cases} m(x+y)+m^2(2x-3y)=2m^2+m+3 \\ m(x+y)-m^2(3x-2y)=3m^2+m-2. \end{cases}$

5. При каких значениях параметра m уравнение

$3(m+1)x^2+(7m+6)x+2m+1=0$ имеет корни x_1 и x_2

такие, что $\begin{cases} x_1 > x_2 \\ x_1 \in (1,2) \\ x_2 \notin (1,2) \end{cases}$?

6. Найти область изменения наибольших и наименьших значений квадратного трехчлена

$$y=f(x)=(3+a)x^2+(3a-1)x+2(a-1).$$

7. Исследовать и решить неравенство с параметром

$$\frac{(a+1)x^2-(2a+1)x+a-1}{\sqrt{x+1}} \geqslant 0.$$

8. Исследовать и решить неравенство с параметром

$$\frac{x+1}{m-1}-\frac{3}{m-2}>\frac{x+1}{2}.$$

Зачетная карточка 4

1. Исследовать и решить уравнение с параметром
$$\frac{1}{m-2}-\frac{1}{m(m-2)}=\frac{2}{(m-2)x}+\frac{1}{mx(m-2)}.$$
Выяснить, при каких значениях параметра m существует единственное решение уравнения такое, что $x \leqslant 3$.

2. Иследовать и решить уравнение $\frac{x-1}{b+2}+\frac{2x-2}{x-3}=\frac{3b-1}{(b+2)(x-3)}$.

3. При каких значениях параметра k уравнение $\frac{3-2k}{x-2}=\frac{2x}{k}$ имеет действительные корни x_1 и x_2 такие, что $x_1^2+x_2^2 \leqslant 2$?

4. Исследовать и решить систему уравнений с параметром $\begin{cases} m^2(x-y)+m(2x+3y)=3 \\ m^2(x-y)-m(3x+2y)=-2 \end{cases}$ при условии, что точки решения находятся ниже прямой $y=-x+1$, т. е. решение удовлетворяет условию $x_0+y_0<1$.

5. Исследовать и решить уравнение $(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$. Выяснить, при каком значении параметра a $(2;\ 3)\subset(x_2;\ x_1)$.

6. Исследовать уравнение $\frac{3-2b}{x-3}=\frac{2(x-1)}{b}$.

Определить знаки корней в зависимости от параметра b.

7. Исследовать и решить неравенство
$$\frac{(k-1)x^2+(k-4)x+k-7}{x^2-3x+2} \geqslant 0.$$

8. Исследовать и решить неравенство $\frac{(a^2-a-6)x+a}{x^2-x-2}<0$.

8 Решения

Решение проверочной работы 1

1. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$m+1-\frac{4(m+3)}{x-3}=\frac{8}{m-1}. \quad D(y):\ \begin{cases} x\neq 3 \\ m\neq 1 \end{cases};$$

$$(m+1)(m-1)(x-3)-4(m+3)(m-1)=8(x-3);$$

$$(m+3)(m-3)x=7m^2+8m-39.$$

Так как $m_{1,2}=-\frac{4\pm17}{7}$ — корни уравнения

$7m^2+8m-39=0$, то $(m+3)(m-3)x=(7m-13)(m+3)$.

а) При $\begin{cases} m\neq 3 \\ m\neq 1 \\ m\neq -3 \end{cases}$ $\exists$ ед. $x \,\Big|\, x=\frac{7m-13}{m-3}$.

Выясним, при каких значениях параметра m $x=3$?
$\frac{7m-13}{m-3}=3$; $m=1$.

б) Если $m=3$, то $0\cdot x=48$, т.е. $x\in\varnothing$.

в) Если $m=-3$, то $0\cdot x=0$, т.е. $x\in D(y)$.

Ответ: 1) При $\begin{cases} m\neq 3 \\ m\neq 1 \\ m\neq -3 \end{cases}$ $\exists$ ед. $x \,\Big|\, x=\frac{7m-13}{m-3}$.

2) При $m=3$ нет решений.
3) При $m=1$ уравнение не определено.
4) При $m=-3$ $\forall x\neq 3$.

2. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{3-2k}{x-2}=\frac{2x}{k}. \qquad D(y):\ \begin{cases} k\neq 0 \\ x\neq 2 \end{cases};$$

$$2x^2-4x=3k-2k^2;$$

$$2x^2-4x+2k^2-3k=0.$$

а) При $k\neq 0$ $D=4-4k^2+6k=-2(k-2)(2k+1)$.

Тогда $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{-2(k-2)(2k+1)}}{2}$. $D>0$;

$k\in\left(-\frac{1}{2};\,0\right)\cup(0;\,2)$.

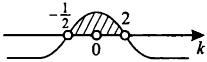


Рис. 263.

б) Если $k=2$, то $x_1=x_2=1$.

в) Если $k=-\frac{1}{2}$, то $x_1=x_2=1$.

г) Если $x=2$, то $2k^2-3k=0$; $\left[\begin{array}{l} k=0\notin D(y) \\ k=1,5 \end{array}\right.$.

д) Если $k=1,5$, то $\begin{cases} x=2\notin D(y) \\ x=0 \end{cases}$.

Ответ: 1) При $k\in\left(-\frac{1}{2};\,0\right)\cup(0;\,1,5)\cup(1,5;\,2)$ $\exists x_1\neq x_2$;

$$x_{1,2}-\frac{2\pm\sqrt{-2(k-2)(2k+1)}}{2}.$$

2) При $k=-\frac{1}{2}$ $x=1$.

3) При $k=0$ уравнение не определено.

4) При $k=1,5$ $x=0$.

5) При $k=2$ $x=1$.

6) При $k\in\left(-\infty;\,-\frac{1}{2}\right)\cup(2;\,\infty)$ $x\notin\mathbb{R}$.

3. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{x+2}{(a-1)(x+3)}-\frac{2}{x+4}=\frac{2-a^2+2a}{(a-1)(x+3)(x+4)}. \qquad D(y):\ \begin{cases} a\neq 1 \\ x\neq -3; \\ x\neq -4 \end{cases}$$

Умножим части уравнения на общий знаменатель:

$(x+2)(x+4)-2(a-1)(x+3)=2-a^2+2a;$

$x^2-2(a-4)x+a^2-8a+12=0.$

а) $a\neq 1;\ D=(a-4)^2-a^2+8a-12=4;\ x_{1,2}=a-4\pm 2.$

Тогда $x_1=a-6;\ x_2=a-2.$

б) $x_1=a-6=-3$ при $a=3,\ \Rightarrow x_2=a-2;\ x_2=1.$

в) $x_1=a-6=-4$ при $a=2,\ \Rightarrow x_2=a-2;\ x_2=0.$

г) $x_2=a-2=-3$ при $a=-1,\ \Rightarrow x_1=a-6;\ x_1=-7.$

д) $x_2=a-2=-4$ при $a=-2,\ \Rightarrow x_1=a-6;\ x_1=-8.$

Ответ: 1) При $\begin{cases} a\neq 3 \\ a\neq 2 \\ a\neq 1 \\ a\neq -1 \\ a\neq -2 \end{cases}$ $\exists\, x_1\neq x_2;\ x_1=a-6;\ x_2=a-2.$

2) При $a=3$ $x=1.$

3) При $a=2$ $x=0.$

4) При $a=1$ уравнение не определено.

5) При $a=-1$ $x=-7.$

6) При $a=-2$ $x=-8.$

4. Исследовать и решить систему уравнений с параметром

$$\begin{cases} a(a+1)x - a(1-a)y = 2-a^3 \\ \left(a^2-1\right)x + \left(1-a^3\right)y = a^4-1 \end{cases}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(a+1) & a^2-a \\ a^2-1 & 1-a^3 \end{vmatrix} = a(a+1)\left(1-a^3\right) + \left(a^2-1\right)a(1-a) =$$

$$= \left(1-a^2\right)\left[a\left(a^2+a+1\right) - a + a^2\right] = \left(1-a^2\right)\left(a^3+2a^2\right) =$$

$$= a^2(1-a)(1+a)(a+2);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2-a^3 & a(a-1) \\ a^4-1 & 1-a^3 \end{vmatrix} = \left(2-a^3\right)\left(1-a^3\right) - \left(a^4-1\right)a(a-1) =$$

$$= (a-1)\left[-\left(2-a^3\right)\left(a^2+a+1\right) - a^5 + a\right] =$$

$$= (a-1)\left(a^5+a^4+a^3-2a^2-2a-2-a^5+a\right) =$$

$$= (a-1)\left(a^4+a^3-2a^2-a-2\right) =$$

$$= (a-1)\left[a^2\left(a^2+a-2\right) - (a+2)\right] =$$

$$= (a-1)(a+2)\left[a^2(a-1)-1\right] = (a-1)(a+2)\left(a^3-a^2-1\right);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a(a+1) & 2-a^3 \\ a^2-1 & a^4-1 \end{vmatrix} = a(a+1)\left(a^4-1\right) + \left(a^3-2\right)\left(a^2-1\right) =$$

$$= \left(a^2-1\right)\cdot\left[a(a+1)\cdot\left(a^2+1\right) + a^3 - 2\right] =$$

$$= \left(a^2-1\right)\left(a^4+a^3+a^2+a+a^3-2\right) =$$

$$= \left(a^2-1\right)\left(a^4+2a^3+a^2+a-2\right) =$$

$$= \left(a^2-1\right)\left[a^3(a+2) + (a+2)(a-1)\right] =$$

$$= \left(a^2-1\right)(a+2)\left(a^3+a-1\right).$$

I. Если $\Delta \neq 0$, $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq -1 \\ a \neq -2 \end{cases}$, $\exists$ ед. $(x_0; y_0)$ $\Bigg|$ $\begin{cases} x_0 = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y_0 = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \end{cases}$,

т.е. $\left(-\dfrac{a^3-a^2-1}{a^2(a+1)};\quad -\dfrac{a^3+a-1}{a^2}\right)$.

II. Если $a = 0$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x^2 + \Delta_y^2 \neq 0 \end{cases}$, то решений нет.

III. Если $a = 1$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0 \end{cases}$, тогда существует бесконечное множество решений.

Исходная система равносильна уравнению $2x + 0 \cdot y = 1$, тогда $x = \dfrac{1}{2}$, y — любое число.

Пусть $y = t$, тогда $\left(\dfrac{1}{2};\ t\right)$ — множество решений системы для $\forall t$.

IV. Если $a = -1$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x^2 + \Delta_y^2 \neq 0 \end{cases}$, то решений нет.

V. Если $a = -2$, $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0 \end{cases}$, тогда существует бесконечное множество решений.

Исходная система равносильна уравнению $2x + 6y = 10$ или $x + 3y = 5$.

Пусть $y = k$; $x = 5 - 3k$, тогда $(5-3k;\quad k)$ — множество решений системы для $\forall k$.

Ответ: 1) При $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq -1 \\ a \neq -2 \end{cases}$ $\exists$ ед. $\left(-\dfrac{a^3-a^2-1}{a^2(1+a)};\quad -\dfrac{a^3+a-1}{a^2}\right)$.

2) При $a = 0$ $(x_0;\, y_0) \in \varnothing$.

3) При $a = 1$ бесконечное множество решений вида $\left(\dfrac{1}{2};\, t\right)$ для $\forall t$.

4) При $a = -1$ $(x_0;\, y_0) \in \varnothing$.

5) При $a = -2$ бесконечное множество решений вида $(5-3k;\, k)$ для $\forall k$.

5. Исследовать и решить уравнение с параметром

$(m-3)x^2 + (14-3m)x + 3m - 11 = 0$.

а) Выяснить, при каких значениях параметра m $(x_2;\, x_1) \subset (1;\, 3)$, где x_1, x_2 — корни уравнения.

б) Выяснить, при каких значениях параметра m,

$\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| < |x_2| \end{cases}$,

где x_1 и x_2 — корни уравнения.

$D = (14-3m)^2 - 4(m-3)(3m-11) = -3(m-4)\left(m + \dfrac{16}{3}\right)$.

$D > 0$, покажем это графически:

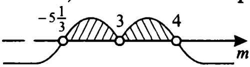


Рис. 264.

а) $(x_2, x_1) \subset (1, 3)$, когда

$$\begin{cases} D > 0 \\ M < -\dfrac{b}{2a} < N \\ a \cdot f(M) > 0 \\ a \cdot f(N) > 0, \end{cases} \text{, т.е.}$$

$$\begin{cases} -5\dfrac{1}{3} < m < 4 \\ m \neq 3 \\ \dfrac{-(3m-4)}{2(m-3)} < 0 \\ \dfrac{m-8}{2(m-3)} > 0 \\ (m-3)\cdot m > 0 \\ (m-3)\cdot(3m+4) > 0 \end{cases}; \quad m \in \left(-5\frac{1}{3}; -1\frac{1}{3}\right).$$

Графическая иллюстрация решения:

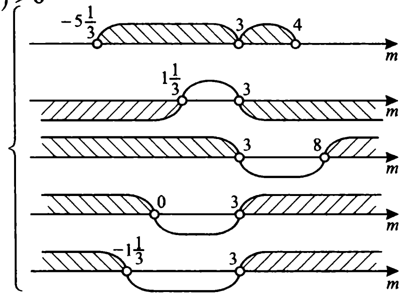


Рис. 265.

б) $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| < |x_2|, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3m-14}{m-3} < 0 \\ \dfrac{3m-11}{m-3} < 0 \\ -5\dfrac{1}{3} < m < 4 \end{cases}; \ m \in \left(3; 3\dfrac{2}{3}\right).$

Графическая иллюстрация решения:

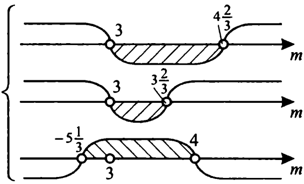


Рис. 266.

Ответ: 1) При $m \in \left(-5\dfrac{1}{3}; -1\dfrac{1}{3}\right)$ $(x_2; x_1) \subset (1; 3)$.

2) При $m \in \left(3; 3\dfrac{2}{3}\right)$ корни уравнения

$$(m-3)x^2 + (14-3m)x + 3m - 11 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| < |x_2| \end{cases}.$$

Решение зачетной карточки 1

1. При каких значениях параметра a существует единственное решение уравнения $\frac{a-1}{x-4}=\frac{2x+3}{x^2+x-20}$ такое, что $x \leqslant 6$?

$D(y)$: $\begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq -5 \end{cases}$.

Приведем уравнение к виду, наиболее удобному для исследования:

$\frac{a-1}{x-4}=\frac{2x+3}{(x-4)(x+5)}$; $(a-3)x=-5a+8$.

а) Если $a \neq 3$, то существует единственное решение $x=\frac{8-5a}{a-3}$.

Выясним, при каких значениях параметра a $x \notin D(y)$?

1) $\frac{8-5a}{a-3}=-5$; $8-5a=-5a+15$; $a \in \varnothing$.

2) $\frac{8-5a}{a-3}=4$; $8-5a=4a-12$; $a=2\frac{2}{9}$.

б) Если $x \leqslant 6$, то $\frac{8-5a}{a-3} \leqslant 6$; $\frac{26-11a}{a-3} \leqslant 0$.

Проиллюстрируем решение:

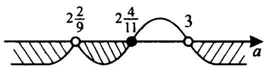


Рис. 267.

Ответ: при $a \in \left(-\infty; 2\frac{2}{9}\right) \cup \left(2\frac{2}{9}; 2\frac{4}{11}\right] \cup (3; \infty)$

$\exists$ ед. $x \mid x \leqslant 6$, где $x=\frac{8-5a}{a-3}$.

2. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{x-1-a}{x-3}+\frac{10}{x+1}+\frac{44}{(x-1)^2-4}=0. \qquad D(y):\ \begin{cases} x\neq 3 \\ x\neq -1 \end{cases}.$$

Учитывая, что $(x-1)^2-4=(x-3)(x+1)$, приведем уравнение к виду, наиболее удобному для исследования:

$$(x-a-1)(x+1)+10(x-3)+44=0;$$

$$x^2-(a-10)x+13-a=0.$$

а) Пусть $x=3$, $\Rightarrow$ $9-(a-10)\cdot 3+13-a=0$; $a=13$.

б) Пусть $x=-1$, $\Rightarrow$ $1+a-10+13-a=0$; $a\in\varnothing$.

в) $D=(a-10)^2-4(13-a)=(a-12)(a-4)$.

$D\geqslant 0$:

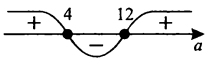


Рис. 268.

Тогда $x_1=\dfrac{a-10+\sqrt{(a-12)(a-4)}}{2}$; $x_2=\dfrac{a-10-\sqrt{(a-12)(a-4)}}{2}$.

г) Пусть $a=13$, $\Rightarrow$ $x_1=3\notin D(y)$; $x_2=0\in D(y)$.

д) Пусть $a=12$, $\Rightarrow$ $x_1=x_2=1$.

е) Пусть $a=4$, $\Rightarrow$ $x_1=x_2=-3$.

Ответ: 1) При $a\in(-\infty;4)\cup(12;13)\cup(13;\infty)$

$$\exists\, x_1\neq x_2 \ \Big|\ x_1=\frac{a-10+\sqrt{(a-12)(a-4)}}{2};$$

$$x_2=\frac{a-10-\sqrt{(a-12)(a-4)}}{2}.$$

2) При $a = 4$ $x = -3$.

3) При $a \in (4; 12)$ $x \notin R$.

4) При $a = 12$ $x = 1$.

5) При $a = 13$ $x = 0$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + ax + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2 такие, что $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 < 7$?

$x^2 + ax + 1 = 0$;

$D = a^2 - 4 \geqslant 0$.

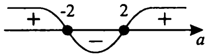


Рис. 269.

Тогда

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} - 2 =$$

$$= \frac{\left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2\right)^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} - 2.$$

Воспользовавшись теоремой Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$, получаем:

$$\frac{\left(a^2 - 2\right)^2}{1} - 2 < 7; \quad \left(a^2 - 2\right)^2 < 9; \quad \begin{cases} a^2 - 2 < 3 \\ a^2 - 2 > -3 \end{cases};$$

значит, $a^2 < 5$.

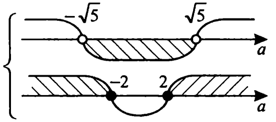


Рис. 270.

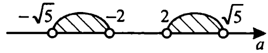


Рис. 271.

Ответ: при $a \in \left(-\sqrt{5}; -2\right] \cup \left[2; \sqrt{5}\right)$ $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 < 7$,

где x_1, x_2 — корни $x^2 + ax + 1 = 0$.

4. **Исследовать и решить систему уравнений**

с параметром $\begin{cases} (t+1)x + \left(t^2+4t+3\right)y = (t+3)^2 \\ (2t+1)x + (t+3)y = t^2+4t+3 \end{cases}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} t+1 & t^2+4t+3 \\ 2t+1 & t+3 \end{vmatrix} = (t+3)(t+1) - (t+3)(t+1)\cdot(2t+1) =$$

$$= (t+3)(t+1)(1-2t-1) = -2t(t+3)(t+1);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} (t+3)^2 & t^2+4t+3 \\ t^2+4t+3 & t+3 \end{vmatrix} = (t+3)^3 - (t+1)^2\cdot(t+3)^2 =$$

$$= (t+3)^2\cdot\left(t+3-t^2-2t-1\right) =$$

$$= (t+3)^2\cdot\left(-t^2-t+2\right) = -(t+3)^2\cdot(t+2)(t-1);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} t+1 & (t+3)^2 \\ 2t+1 & t^2+4t+3 \end{vmatrix} = (t+1)^2\cdot(t+3) - (t+3)^2\cdot(2t+1) =$$

$$= (t+3)\left(t^2+2t+1-2t^2-7t-3\right) = (t+3)\left(-t^2-5t-2\right).$$

I. $\Delta \neq 0$; $\begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq -1; \\ t \neq -3 \end{cases}$

$$\exists \text{ ед. } (x;\, y) \left| \begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{-(t+3)^2 \cdot (t+2)(t-1)}{-2t(t+3)(t+1)} = \dfrac{(t+3)(t+2)(t-1)}{2t(t+1)} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{-(t+3)\left(t^2+5t+2\right)}{-2t(t+3)(t+1)} = \dfrac{t^2+5t+2}{2t(t+1)} \end{cases} \right. ;$$

II. $t = -3$; $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0. \\ \Delta_y = 0 \end{cases}$

Тогда заданная система равносильна уравнению $-2x + 0 \cdot y = 0$. Пусть $y = Z$, следовательно, имеем бесконечное множество решений вида $(0;\, Z)$.

III. $t = 0$; $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x \neq 0; \\ \Delta_y \neq 0 \end{cases}$ $(x_0;\, y_0) \in \varnothing$ (система решений не имеет).

IV. $t = -1$; $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x \neq 0; \\ \Delta_y \neq 0 \end{cases}$ $(x_0;\, y_0) \in \varnothing$.

Ответ: 1) При $\begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq -1 \\ t \neq -3 \end{cases}$ $\exists$ ед. $(x;\, y) \left| \begin{cases} x = \dfrac{(t+3)(t+2)(t-1)}{2t(t+1)} \\ y = \dfrac{t^2+5t+2}{2t(t+1)} \end{cases} \right.$

2) При $t = -3$ бесконечное множество решений вида $(0;\, Z)$, где Z — любое.

3) При $t = 0$ $(x_0;\, y_0) \in \varnothing$.

4) При $t = -1$ $(x_0;\, y_0) \in \varnothing$.

5. При каких значениях параметра k уравнение $kx^2-(k+1)x+2=0$ имеет корни x_1 и x_2 такие, что $|x_1|<1$, $|x_2|<1$?

$kx^2-(k+1)x+2=0$.

Так как $|x_1|<1$, $|x_2|<1$, то $(x_2;\,x_1)\subset(-1;\,1)$.

$D=(k+1)^2-8k=k^2-6k+1$, тогда $\left[\begin{array}{l} k=3+2\sqrt{2} \\ k=3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

По теореме IV:

$$\begin{cases} D>0 \\ M<-\dfrac{b}{2a}<N \\ a\cdot f(M)>0 \\ a\cdot f(N)>0 \end{cases};\ \text{т.е.}\ \begin{cases} k^2-6k+1>0 \\ \dfrac{k+1}{2k}<1 \\ \dfrac{k+1}{2k}>-1 \\ k(k-k-1+2)>0 \\ k(k+k+1+2)>0 \end{cases};\ \begin{cases} k^2-6k+1>0 \\ \dfrac{1-k}{2k}<0 \\ \dfrac{3k+1}{2k}>0 \\ k>0 \\ k(2k+3)>0 \end{cases}$$

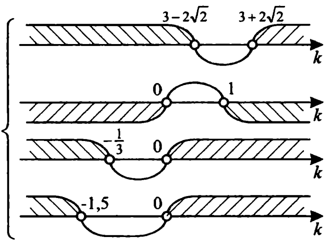


Рис. 272.

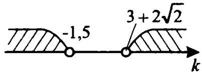


Рис. 273.

Ответ: при $k\in(-\infty;\,-1,5)\cup\left(3+2\sqrt{2}\,;\,\infty\right)$

$(x_2;\,x_1)\subset(-1;\,1)$ для $kx^2-(k+1)x+2=0$.

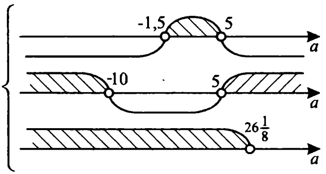
6. **Исследовать уравнение** $(a-5)x^2+(2a+3)x+a+10=0$ **на знаки корней.**

Пусть $a \neq 5$;

$D=(2a+3)^2-4(a-5)(a+10)=-8a+209>0$,

тогда $a<\dfrac{209}{8}$, **т. е.** $a<26\dfrac{1}{8}$.

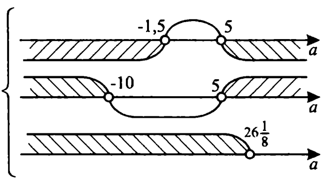
а) $\begin{cases} x_1>0 \\ x_2>0 \end{cases}$; $\begin{cases} -\dfrac{2a+3}{a-5}>0 \\ \dfrac{a+10}{a-5}>0 \\ a<26\dfrac{1}{8} \end{cases}$;



$\varnothing$

Рис. 274.

б) $\begin{cases} x_1<0 \\ x_2<0 \end{cases}$; $\begin{cases} -\dfrac{2a+3}{a-5}<0 \\ \dfrac{a+10}{a-5}>0 \\ a<26\dfrac{1}{8} \end{cases}$;

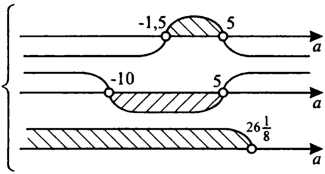


$a \in (-\infty;-10) \cup \left(5;26\dfrac{1}{8}\right)$.

Рис. 275.

в) $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| > |x_2| \end{cases}$;

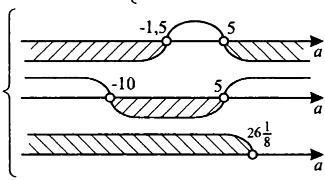
$$\begin{cases} -\dfrac{2a+3}{a-5} > 0 \\ \dfrac{a+10}{a-5} < 0 \\ a < 26\dfrac{1}{8} \end{cases};$$



$a \in (-1,5;\ 5)$.

Рис. 276.

г) $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| < |x_2| \end{cases}$; $\begin{cases} -\dfrac{2a+3}{a-5} < 0 \\ \dfrac{a+10}{a-5} < 0 \\ a < 26\dfrac{1}{8} \end{cases}$;



$a \in (-10;\ -1,5)$.

Рис. 277.

Ответ: для $(a-5)x^2+(2a+3)x+a+10=0$:

1) при $a\in(-\infty;-10)\cup\left(5;26\dfrac{1}{8}\right)$ $\begin{cases}x_1<0\\x_2<0\end{cases}$;

2) при $a\in(-1,5;5)$ $\begin{cases}x_1>0\\x_2<0\\|x_1|>|x_2|\end{cases}$;

3) при $a\in(-10;-1,5)$ $\begin{cases}x_1>0\\x_2<0\\|x_1|<|x_2|\end{cases}$;

где x_1, x_2 — корни уравнения.

7. Исследовать и решить неравенство с параметром

$$\frac{(a^2-a-2)x+3a}{\sqrt{x^2-x-6}}\leqslant 0.$$

$D(H)$: $x^2-x-6>0$, т.е. $\left[\begin{array}{l}x>3\\x<-2\end{array}\right.$.

а) $a^2-a-2>0$, $\Rightarrow$ $x\leqslant-\dfrac{3a}{a^2-a-2}$.

1) Если $x\leqslant-\dfrac{3a}{a^2-a-2}<-2$,

т.е. $\dfrac{2a^2-5a-4}{a^2-a-2}<0$, $\Rightarrow$

$\begin{cases}2a^2-5a-4<0\\a^2-a-2>0\end{cases}$.

Убеждаясь, что $\dfrac{5-\sqrt{57}}{4}$ и $\dfrac{5+\sqrt{57}}{4}$ — корни уравнения $2a^2-5a-4=0$ исходя из $D(H)$, т.е. что $x\in(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$, получаем графическое решение:

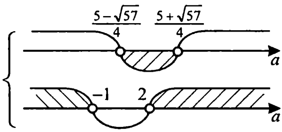


Рис. 278.

При $a \in \left(2; \frac{5+\sqrt{57}}{4}\right)$ $x \in \left(-\infty; -\frac{3a}{a^2-a-2}\right)$.

2) **Если** $3 < x \leqslant -\frac{3a}{a^2-a-2}$,

т.е. $3 < -\frac{3a}{a^2-a-2}$;

$$\frac{3a^2-6}{a^2-a-2} < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 2 < 0 \\ a^2 - a - 2 > 0 \end{cases}.$$

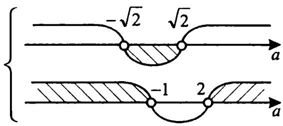


Рис. 279.

При $a \in \left(-\sqrt{2}; -1\right)$ $x \in \left(3; -\frac{3a}{a^2-a-2}\right]$.

б) $a^2 - a - 2 < 0 \Rightarrow x \geqslant -\frac{3a}{a^2-a-2}$.

1) **Если** $x \geqslant -\frac{3a}{a^2-a-2} > 3$,

значит $\frac{3a^2-6}{a^2-a-6} < 0$, $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a^2 - a > 0 \\ a^2 - a - 2 < 0 \end{cases}.$$

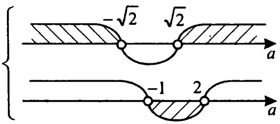


Рис. 280.

Исходя из $D(H)$, получаем:

при $a \in \left(\sqrt{2};\, 2\right)$ $\quad x \in \left[-\dfrac{3a}{a^2-a-2};\, \infty\right)$.

2) Если $-2 > x \geqslant -\dfrac{3a}{a^2-a-2}$,

т.е. $-2 > -\dfrac{3a}{a^2-a-2}$,

$$\frac{2a^2-5a-4}{a^2-a-2} < 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2a^2-5a-4>0 \\ a^2-a-2<0 \end{cases}.$$

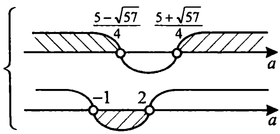


Рис. 281.

При $a \in \left(-1;\, \dfrac{5-\sqrt{57}}{4}\right)$ $\quad x \in \left[-\dfrac{3a}{a^2-a-2};\, -2\right)$.

в) $a^2-a-2=0$, тогда:

1) $a=2$, $\Rightarrow$ $\dfrac{0\cdot x+6}{\sqrt{x^2-x-6}} \leqslant 0$; $\varnothing$.

2) $a=-1$, $\Rightarrow$ $\dfrac{0\cdot x-3}{\sqrt{x^2-x-6}} \leqslant 0$; $\forall x \in D(H)$,

т.е. $x \in (-\infty;\, -2) \cup (3;\, \infty)$.

Ответ: 1) При $a \in \left(-\sqrt{2}; -1\right)$ $x \in \left(3; -\dfrac{3a}{a^2-a-2}\right]$.

2) При $a = -1$ $x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$.

3) При $a \in \left(-1; \dfrac{5-\sqrt{57}}{4}\right)$ $x \in \left[-\dfrac{3a}{a^2-a-2}; -2\right)$.

4) При $a \in \left(\sqrt{2}; 2\right)$ $x \in \left[-\dfrac{3a}{a^2-a-2}; \infty\right)$.

5) При $a \in \left(2; \dfrac{5+\sqrt{57}}{4}\right)$ $x \in \left(-\infty; -\dfrac{3a}{a^2-a-2}\right]$.

8. Исследовать и решить неравенство с параметром

$$\frac{(b+2)x^2+(b-3)x+b-6}{\sqrt{1-x^2}} < 0.$$

I. Пусть $(b+2)x^2+(b-3)x+b-6<0$ справедливо для $\forall x \in (-1; 1)$.

По теореме I:

1) $\begin{cases} a > 0 \\ f(M) \leqslant 0 \\ f(N) \leqslant 0 \end{cases}$;

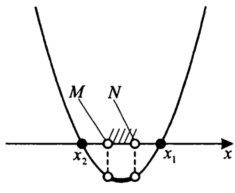


Рис. 282.

Таким образом $\begin{cases} b+2>0 \\ b+2-b+3+b-6 \leqslant 0 \\ b+2+b-3+b-6 \leqslant 0 \end{cases}$; $\begin{cases} b > -2 \\ b \leqslant 1 \\ b \leqslant \dfrac{7}{3} \end{cases}$.

Тогда $b \in (-2; 1]$; $x \in (-1; 1)$.

2) $\begin{cases} a<0 \\ f(N)\leqslant 0 \\ N<-\dfrac{b}{2a} \end{cases};$

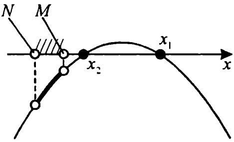


Рис. 283.

$$\begin{cases} b+2<0 \\ b+2+b-3+b-6\leqslant 0 \\ 1<-\dfrac{b-3}{2(b+2)} \end{cases};$$

$$\begin{cases} b<-2 \\ b\leqslant 2\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3b+1}{2(b+2)}<0 \end{cases}; \quad \varnothing.$$

3) $\begin{cases} a<0 \\ f(M)\leqslant 0 \\ M>-\dfrac{b}{2a} \end{cases};$

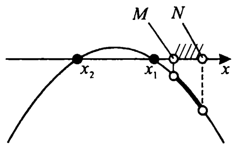


Рис. 284.

$$\begin{cases} b+2<0 \\ b+2-b+3+b-6\leqslant 0 \\ -1>-\dfrac{b-3}{2(b+2)} \end{cases};$$

$$\begin{cases} b<-2 \\ b\leqslant 1 \\ \dfrac{b+7}{2(b+2)}<0 \end{cases};$$

Тогда $b\in(-7;-2)$; $x\in(-1;1)$.

4) $\begin{cases} a < 0 \\ D = 0 \\ -\frac{b}{2a} \notin [M;\, N] \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} b + 2 < 0 \\ -3b^2 + 10b + 57 = 0 \\ -\frac{b-3}{2(b+2)} \notin [-1;\, 1] \end{cases}$;

$$\begin{cases} b < -2 \\ \left[\begin{array}{l} b = -3 \\ b = 6\frac{1}{3} \end{array}\right. \\ -\frac{b-3}{2(b+2)} \notin [-1;\, 1] \end{cases}; \quad \begin{cases} b = -3 \\ -3 \notin [-1;\, 1] \end{cases}.$$

Тогда $b = -3$; $x \in (-1;\, 1)$.

5) $\begin{cases} a < 0 \\ D < 0 \end{cases}$;

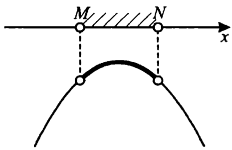


Рис. 285.

$\begin{cases} b + 2 < 0 \\ -2(b + 3)\left(b - 6\frac{1}{3}\right) < 0 \end{cases}$. Тогда $b < -3$; $x \in (-1;\, 1)$.

6) $\begin{cases} a = 0 \\ f(N) \leqslant 0; \\ N < -\frac{c}{b} \end{cases}$

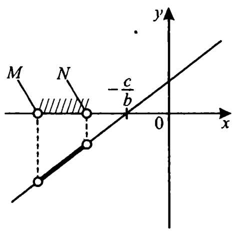


Рис. 258.

$$\begin{cases} b=-2 \\ b+2+b-3+b-6\leqslant 0 \\ 1>-\dfrac{b-6}{b-3} \end{cases};\quad \begin{cases} b=-2 \\ b\leqslant 2\dfrac{1}{3} \\ 1>-1{,}6 \end{cases}.$$

Тогда $b=-2$; $x\in(-1;1)$.

7) $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c<0 \end{cases}.$

Решений нет, так как при $b=-2$ $\quad b-3\neq 0$.
Значит при $b\in(-\infty;1]$ $\quad x\in(-1;1)$.

II. Корни могут быть расположены и по-другому. Рассмотрим такой случай:

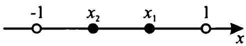


Рис. 287.

По теореме IV:

$$\begin{cases} D>0 \\ M<-\dfrac{b}{2a}<N \\ af(M)>0 \\ af(N)>0 \end{cases},\ \text{т.е.}\ \begin{cases} -3(b+3)\left(b-6\dfrac{1}{3}\right)>0 \\ -\dfrac{b-3}{2(b+2)}<1 \\ -\dfrac{b-3}{2(b+2)}>-1 \\ (b+2)(b+2-b+3+b-6)>0 \\ (b+2)(b+2+b-3+b-6)>0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -3(b+3)\left(b-6\frac{1}{3}\right)>0\,; \\ \frac{3b+1}{2(b+2)}>0 \\ \frac{b+7}{2(b+2)}>0 \\ (b+2)(3b-7)>0 \\ (b+2)(b-1)>0 \end{cases}$$

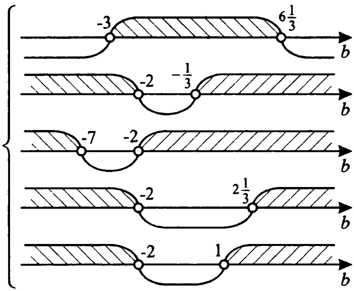


Рис. 288.

$$b \in \left(2\frac{1}{3};\, 6\frac{1}{3}\right);\ \ (b+2>0).$$

$$x \in \left(\frac{3-b-\sqrt{-3(b+3)\left(b-6\frac{1}{3}\right)}}{2(b+2)};\ \frac{3-b+\sqrt{-3(b+3)\left(b-6\frac{1}{3}\right)}}{2(b+2)}\right).$$

III. Возможен и такой случай расположения корней:

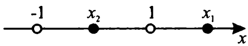


Рис 289

Для $x_2 < 1 < x_1$ воспользуемся теоремой II,
а для $-1 < x_2 < x_1$ — теоремой III, тогда

$$\begin{cases} a \cdot f(N) < 0 \\ \begin{cases} D > 0 \\ \dfrac{b}{2a} > M \\ a \cdot f(M) > 0 \end{cases} \end{cases},$$

т.е. $$\begin{cases} (b+2)(b+2+b-3+b-6) < 0 \\ -3(b+3)\left(b-6\dfrac{1}{3}\right) > 0 \\ -1 < -\dfrac{b-3}{2(b+2)} \\ (b+2)(b+2-b+3+b-6) > 0 \end{cases};$$

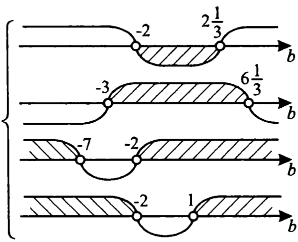


Рис. 290.

$b \in \left(1; 2\dfrac{1}{3}\right)$; $(b+2>0)$;

$$x \in \left(\frac{b-3-\sqrt{-3(b+3)\left(b-6\frac{1}{3}\right)}}{2(b+2)}; 1 \right).$$

IV. Рассмотрим последний возможный случай расположения корней.

Для $x_2 < -1 < x_1$ воспользуемся теоремой II, а для $x_2 < x < 1$ — теоремой I, тогда:

$$\begin{cases} a \cdot f(M) < 0 \\ \begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < N \\ a \cdot f(N) > 0 \end{cases} \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} (b+2)(b-1) < 0 \\ -3(b+3)\left(b - 6\dfrac{1}{3}\right) > 0 \\ -\dfrac{b-3}{2(b+2)} < 1 \\ (b+2)(b+2+b-3+b-6) > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (b+2)(b-1) < 0 \\ -3(b+3)\left(b - 6\dfrac{1}{3}\right) > 0 \\ \dfrac{3b+1}{2(b+2)} > 0 \\ (b+2)(3b-7) > 0 \end{cases} \qquad \varnothing.$$

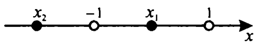


Рис. 291.

Ответ: 1) При $b \in (-\infty; 1]$ $\quad x \in (-1; 1)$.

2) При $b \in \left(1; 2\dfrac{1}{3}\right)$ $\quad x \in \left(\dfrac{b-3-\sqrt{-3(b+3)\left(b-6\frac{1}{3}\right)}}{2(b+2)}; 1\right)$.

3) При $b \in \left(2\dfrac{1}{3}; 6\dfrac{1}{3}\right)$

$$x \in \left(\dfrac{3-b-\sqrt{-3(b+3)\left(b-6\frac{1}{3}\right)}}{2(b+2)}; \dfrac{3-b+\sqrt{-3(b+3)\left(b-6\frac{1}{3}\right)}}{2(b+2)}\right).$$

Решение зачетной карточки 2

1. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{a+1}{4-x}=\frac{3-2x}{x^2+x-20}.$$

Выяснить, при каких значениях параметра a существует единственное решение уравнения такое, что $x \geqslant 2$.

$$\frac{a+1}{4-x}=\frac{3-2x}{x^2+x-20}; \quad x \geqslant 2; \quad a \text{ — ?}$$

$$D(y):\ \begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq -5 \end{cases}.$$

Перенесем $\frac{3-2x}{x^2+x-20}$ в левую часть и умножим части уравнения на общий знаменатель $-(x+5)(4-x)$, далее, выполнив ряд преобразований, приведем уравнение к виду, наиболее удобному для исследования:

$$(a+1)(x+5)+3-2x=0;\ (a-1)x=-5a-8.$$

а) Если $a \neq 1$, то $x=-\frac{5a+8}{a-1}$.

Выясним, при каких значениях параметра a корнями уравнения являются числа 4 и -5 и исключим эти значения параметра a из решения.

Если $x=4$, то $\frac{-5a-8}{a-1}=4$, т.е. $a=-\frac{4}{9}$.

Если $x=-5$, то $\frac{-5a-8}{a-1}=-5$, т.е. решений нет, так как $-8 \neq 5$.

б) Если $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -\frac{4}{9} \end{cases}$ и $x \geqslant 2$, т.е. $\frac{-5a-8}{a-1} \geqslant 2$, то $\frac{-7a-6}{a-1} \geqslant 0$.

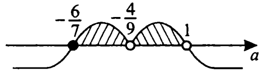
Графическое решение: 

Рис. 292.

Тогда $a \in \left[-\frac{6}{7}; -\frac{4}{9}\right) \cup \left(-\frac{4}{9}; 1\right)$.

в) Если $a = 1$, то $0 \cdot x = -5 - 8$, т.е. решений нет.

Ответ: при $a \in \left[-\frac{6}{7}; -\frac{4}{9}\right) \cup \left(-\frac{4}{9}; 1\right)$ уравнение $\frac{a+1}{4-x} = \frac{3-2x}{x^2+x-20}$ имеет единственное решение $x = \frac{5a+8}{1-a}$ такое, что $x \geqslant 2$.

2. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{x+a+1}{x+3} + \frac{10}{1-x} = \frac{44}{4-(x+1)^2}. \qquad D(y): \begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Выполним ряд преобразований для того, чтобы привести уравнение к виду, наиболее удобному для исследования:

$$\frac{x+a+1}{x+3} + \frac{10}{1-x} = \frac{44}{(2+x+1)(2-x-1)}; \quad \frac{x+a+1}{x+3} + \frac{10}{1-x} = \frac{44}{(x+3)(1-x)};$$

$$(x+a+1)(1-x) + 10(x+3) = 44;$$

$$-x^2 - x(a+1) + x + a + 1 + 10x + 30 - 44 = 0;$$

$$-x^2 - x(a+1-1-10) + a - 13 = 0;$$

$$x^2 + x(a-10) + 13 - a = 0.$$

$$D = (a-10)^2 - 4(13-a) = a^2 - 16a + 48.$$

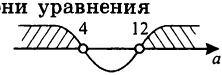
Так как числа 4 и 12 — корни уравнения $a^2 - 16a + 48 = 0$, то $D > 0$. 

Рис. 293.

Тогда $x_{1,2}=\frac{10-a\pm\sqrt{(a-4)(a-12)}}{2}$ — корни уравнения $x^2+(a-10)x+13-a=0$.

Выясним, при каких значениях параметра a $x=-3$; $x=1$?

а) Если $x=-3$, то $(-3)^2-3(a-10)+13-a=0$, т.е. $a=13$.

Вычислим значение другого корня при $a=13$:

$$x_{1,2}=\frac{-13+10\pm\sqrt{(13-4)(13-12)}}{2}=\frac{-3\pm3}{2},$$

т.е. $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3\notin D(y) \end{array}\right.$.

б) Если $x=1$, то $1+(a-10)+13-a=0$, т.е. решений нет, так как $4\neq0$.

Найдем корни уравнения, когда $D=0$.

1) Если $a=4$, то $x_1=x_2=\frac{10-4}{2}=3$.

2) Если $a=12$, то $x_1=x_2=\frac{10-12}{2}=-1$.

Ответ: 1) При $a\in(-\infty;4)\cup(12;13)\cup(13;\infty)$
$\exists x_1\neq x_2 \;\Big|\; x_{1,2}=\frac{10-a\pm\sqrt{(a-4)(a-12)}}{2}$.

2) При $a=4$ $x=3$.

3) При $a=12$ $x=-1$.

4) При $a=13$ $x=0$.

5) При $a\in(4;12)$ $x\notin\mathbb{R}$.

3. При каких значениях параметра m уравнение $x^2+mx+m-1=0$ имеет корни x_1 и x_2 такие, что сумма квадратов этих корней принимает наименьшее значение?

$x^2+mx+m-1=0$; $\quad x_1^2+x_2^2-\min$; $\quad m-?$

По теореме Виета: $\begin{cases} x_1+x_2=-m \\ x_1\cdot x_2=m-1 \end{cases}$.

Тогда

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=(-m)^2-2(m-1)=m^2-2m+2.$$

Напомним, что $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ для $y=ax^2+bx+c$, т.е.

x_0 — абсцисса точки минимума при $a>0$.

Тогда $m_0=\dfrac{2}{2}=1$, т.е. при $m=1$ сумма $x_1^2+x_2^2$ — наименьшая.

Убедимся, что при $m=1$ корни заданного уравнения действительные числа.

Если $m=1$, то $x^2+x+1-1=0$.

Решая уравнение $x^2+x=0$, убеждаемся, что корни 0 и -1 — действительные числа.

Ответ: при $m=1$ сумма $x_1^2+x_2^2$ — наименьшая для $x^2+mx+m-1=0$, где x_1, x_2 — корни.

4. Исследовать и решить систему уравнений

с параметром $\begin{cases} (1-t)x+(t^2-4t+3)y=(t-3)^2 \\ (1-2t)x+(3-t)y=t^2-4t+3 \end{cases}$.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1-t & t^2-4t+3 \\ 1-2t & 3-t \end{vmatrix}=(1-t)(3-t)-(1-2t)(t^2-4t+3)=$$

$$=(t-3)(t-1)+(2t-1)(t-1)(t-3)=(t-3)(t-1)(1+2t-1)=2t(t-3)(t-1);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} (t-3)^2 & t^2-4t+3 \\ t^2-4t+3 & 3-t \end{vmatrix} = (t-3)^2(3-t)-(t^2-4t+3)(t^2-4t+3)=$$

$$= (t-3)^2\left[3-t-(t-1)^2\right] = (t-3)^2\left(3-t-t^2+2t-1\right) =$$

$$= (t-3)^2\left(-t^2+t+2\right) = -(t-3)^2(t+1)(t-2);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1-t & (t-3)^2 \\ 1-2t & t^2-4t+3 \end{vmatrix} = (1-t)\left(t^2-4t+3\right)-(1-2t)(t-3)^2 =$$

$$=(t-3)\left[(1-t)(t-1)-(1-2t)(t-3)\right]=(t-3)\left(-t^2+2t-1+2t^2-7t+3\right)=$$

$$= (t-3)\left(t^2-5t+2\right).$$

1) $\Delta \neq 0;\quad 2t(t-3)(t-1) \neq 0.$

Значит, при $\begin{cases} t \neq 3 \\ t \neq 1 \\ t \neq 0 \end{cases}$ $\exists$ ед. $(x_0; y_0)$ $\left| \begin{array}{l} x_0 = \dfrac{\Delta_x}{\Delta_y} \\ y_0 = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \end{array} \right.$;

$$x_0 = -\frac{(t-3)(t+1)(t-2)}{2t(t-1)};\quad y_0 = \frac{t^2-5t+2}{2t(t-1)}.$$

2) $t = 3 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0, \\ \Delta_y = 0 \end{cases}$ т.е.

$$\begin{cases} (1-t)x+\left(t^2-4t+3\right)y = (t-3)^2 \\ (1-2t)x+(3-t)y = t^2-4t+3 \end{cases} \Leftrightarrow -2x+0\cdot y = 0.$$

Полагая $y = Z$, имеем бесконечное множество решений вида $(0; Z)$, где Z — любое.

3) $t=1, \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x \neq 0; \\ \Delta_y \neq 0 \end{cases} (x_0; y_0) \in \varnothing.$

4) $t=0, \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x \neq 0; \\ \Delta_y \neq 0 \end{cases} (x_0; y_0) \in \varnothing.$

Ответ: 1) При $\begin{cases} t \neq 3 \\ t \neq 1 \\ t \neq 0 \end{cases}$

$\exists$ ед. $(x_0; y_0)$: $\left(-\frac{(t-3)(t+1)(t-2)}{2t(t-1)}; \frac{t^2-5t+2}{2t(t-1)}\right)$.

2) При $t=3$ — бесконечное множество решений вида $(0; Z)$, где Z — любое.

3) При $t=1$ $(x_0; y_0) \in \varnothing$.

4) При $t=0$ $(x_0; y_0) \in \varnothing$.

5. При каких значениях параметра k уравнение $(k-3)x^2+(k+2)x+k+5=0$ имеет корни x_1 и x_2 такие, что $|x_1|<1$, $|x_2|<1$?

По теореме IV:

$$\begin{cases} D>0 \\ M < -\frac{b}{2a} < N \\ a \cdot f(M) > 0 \\ a \cdot f(N) > 0 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} (k+2)^2 - 4(k-3)(k+2) > 0 \\ -1 < -\frac{k+2}{2(k-3)} < 1 \\ (k-3)(k-3-k-2+k+5) > 0 \\ (k-3)(k-3+k+2+k+5) > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -3(k+2)\left(k-4\dfrac{2}{3}\right)>0 \\ \dfrac{k-8}{2(k-3)}>0 \\ \dfrac{3k-4}{2(k-3)}>0 \\ (k-3)k>0 \\ (k-3)(3k+4)>0 \end{cases}; \quad k\in\left(-2;\,-1\dfrac{1}{3}\right).$$

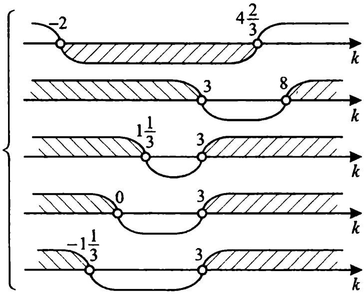


Рис. 294.

Ответ: при $k\in\left(-2;\,-1\dfrac{1}{3}\right)$ **корни уравнения** $(k-3)x^2+(k+2)k+k+5=0$: $|x_1|<1$; $|x_2|<1$.

6. Исследовать уравнение с параметром $(a-4)x^2-(2a+5)x+a+2=0$ **на знаки корней.**

а) $\begin{cases} x_1>0 \\ x_2>0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} D>0 \\ -\dfrac{b}{a}>0 \\ \dfrac{c}{a}>0 \end{cases}$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{2a+5}{a-4} > 0 \\ \dfrac{a+2}{a-4} > 0 \\ (2a+5)^2 - 4(a-4)(a+2) > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{2a+5}{a-4} > 0 \\ \dfrac{a+2}{a-4} > 0 \\ a > -\dfrac{57}{28} \end{cases}.$$

Графическое решение: $a \in (4;\ \infty)$.

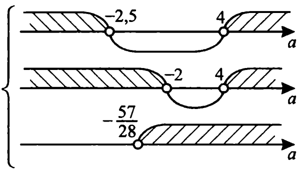


Рис. 295.

б) $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{a} < 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$. Тогда $\begin{cases} a > -\dfrac{57}{28} \\ \dfrac{2a+5}{a-4} < 0 \\ \dfrac{a+2}{a-4} > 0 \end{cases}$.

Графическое решение: $a \in \left(-2\dfrac{1}{28};\ -2\right)$.

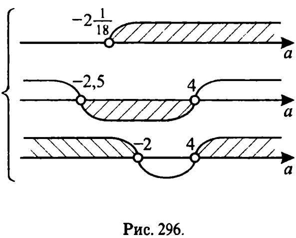


Рис. 296.

в) $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| > |x_2| \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} < 0 \end{cases}$.

Тогда $\begin{cases} \dfrac{2a+5}{a-4} > 0 \\ \dfrac{a+2}{a-4} < 0 \end{cases}$ или решений нет.

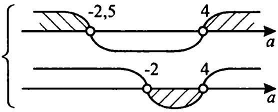


Рис. 297.

г) $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| < |x_2| \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} -\dfrac{b}{a} < 0 \\ \dfrac{c}{a} < 0 \end{cases}$.

Тогда $\begin{cases} \dfrac{2a+5}{a-4} < 0 \\ \dfrac{a+2}{a-4} < 0 \end{cases}$ или $a \in (-2;\, 4)$.

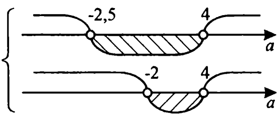


Рис. 298.

Ответ: 1) При $a \in (4;\, \infty)$ оба корня положительны.

2) При $a \in (-2;\, 4)$ корни разных знаков, отрицательный по абсолютной величине больше.

3) При $a \in \left(-2\dfrac{1}{28};\, -2\right)$ оба корня отрицательны.

7. Исследовать и решить неравенство с параметром

$$\frac{(b-2)x^2+(b+3)x+b+6}{\sqrt{4-x^2}} \geqslant 0. \qquad D(H):\ \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2 \end{cases};$$

$x \in (-2;\, 2)$.

$b \neq 2$, тогда $D = (b+3)^2 - 4(b-2)(b+6) = -3b^2 - 10b + 57$.

Если $D = 0$, то $b_{1,2} = \frac{-5 \pm 14}{3}$; $b_1 = 3$, $b_2 = -6\frac{1}{3}$.

Тогда $x_1 = \frac{-(b+3)+\sqrt{-3b^2-10b+57}}{2(b-2)}$;

$x_2 = \frac{-(b+3)-\sqrt{-3b^2-10b+57}}{2(b-2)}$ — корни уравнения

$(b-2)x^2 + (b+3)x + b + 6 = 0$.

Возможны различные случаи расположения корней:

а) 

Рис. 299.

Для $2 < x_2 < x_1$ по теореме III:

$$\begin{cases} D > 0 \\ -\frac{b}{2a} > N \\ a \cdot f(N) > 0 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} -3b^2 - 10b + 57 > 0 \\ -\frac{b+3}{2(b-2)} > 2 \\ (b-2)\left[4(b-2) + 2(b+3) + b + 6\right] > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -3b^2 - 10b + 57 > 0 \\ \frac{5(b-1)}{2(b-2)} < 0 \\ (b-2)(7b+4) > 0 \end{cases}$$

Система решений не имеет.

б) 

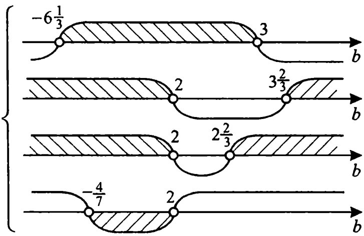
Рис. 300.

Для $-2 < x_2 < x_1$; $x_2 < 2 < 1$ по теореме III:

$$\left[\begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > M \\ a \cdot f(M) > 0 \end{cases} \atop a \cdot f(N) < 0\right., \text{ т.е. } \begin{cases} -3b^2 - 10b + 57 > 0 \\ -\dfrac{b+3}{2(b-2)} > -2 \\ (b-2)\left[4(b-2) - 2(b+3) + b + 6\right] > 0 \\ (b-2)\left[4(b-2) + 2(b+3) + b + 6\right] < 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -3b^2 - 10b + 57 > 0 \\ \dfrac{3b-11}{2(b-2)} > 0 \\ (b-2)(3b-8) > 0 \\ (b-2)(7b+4) < 0 \end{cases}.$$

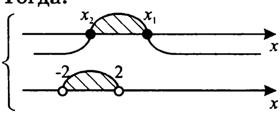
Графическое решение:



$$\Rightarrow \quad -\frac{4}{7} < b < 2.$$

Рис. 301.

Тогда:



$$x \in \left[\frac{-(b+3) - \sqrt{-3b^2 - 10b + 57}}{2(b-2)}; 2\right).$$

Рис. 302.

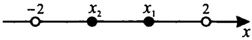
в) 

Рис. 303.

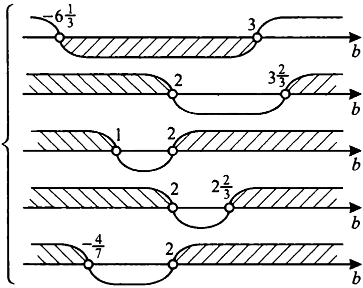
Для $(x_2; x_1) \subset (-2; 2)$ **по теореме IV:**

$$\begin{cases} D > 0 \\ M < -\dfrac{b}{2a} < N \\ a \cdot f(M) > 0 \\ a \cdot f(N) > 0 \end{cases};$$

т. е. $$\begin{cases} -3b^2 - 10b + 57 > 0 \\ -\dfrac{b+3}{2(b-2)} > -2 \\ -\dfrac{b+3}{2(b-2)} < 2 \\ (b-2)\left[4(b-2) - 2(b+3) + b + 6\right] > 0 \\ (b-2)\left[4(b-2) + 2(b+3) + b + 6\right] > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -3b^2 - 10b + 57 > 0 \\ \dfrac{3b-11}{2(b-2)} > 0 \\ \dfrac{5(b-1)}{2(b-2)} > 0 \\ (b-2)(3b-8) > 0 \\ (b-2)(7b+4) > 0 \end{cases}$$

Графическое решение:



$$\Rightarrow\ -6\frac{1}{3}<b<-\frac{4}{7}.$$

Рис. 304.

Тогда $x\in\left[\dfrac{-(b+3)+\sqrt{-3b^2-10b+57}}{2(b-2)};\dfrac{-(b+3)-\sqrt{-3b^2-10b+57}}{2(b-2)}\right].$

г) 

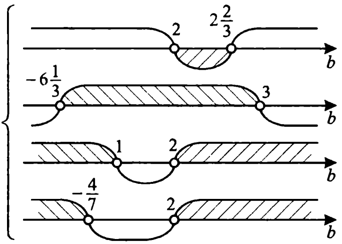
Рис. 305.

Для $x_2<-2<x_1$ по теореме II; для $x_2<x_1<2$ по теореме I:

$$\begin{cases} a\cdot f(M)<0\\ \begin{cases} D>0\\ -\dfrac{b}{2a}<N\\ f(N)>0\end{cases}\end{cases},\ \text{т.е.}\ \begin{cases}(b-2)\left[4(b-2)-2(b+3)+b+6\right]<0\\ -3b^2-10b+57>0\\ -\dfrac{b+3}{2(b-2)}<2\\ (b-2)\left[4(b-2)+2(b+3)+b+6\right]>0\end{cases};$$

$$\begin{cases}(b-2)(3b-8)<0\\ -3b^2-10b+57>0\\ \dfrac{5(b-1)}{2(b-2)}>0\\ (b-2)(7b+4)>0\end{cases}.$$

Графическое решение:



$b \in \left(2;\ 2\frac{2}{3}\right).$

Рис. 306.

Тогда:

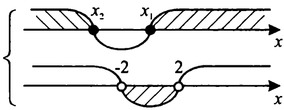


Рис. 307.

$$x \in \left[\frac{-(b+3)+\sqrt{-3b^2-10b+57}}{2(b-2)};\ 2\right).$$

д)

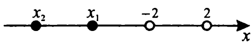


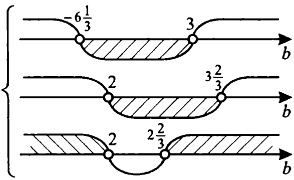
Рис. 308.

Для $x_2 < x_1 - 2$ по теореме I: $\begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < M \\ a \cdot f(M) > 0 \end{cases}$;

т.е. $\begin{cases} -3b^2 - 10b + 57 > 0 \\ -\dfrac{b+3}{2(b-2)} < -2 \\ (b-2)\left[4(b-2) - 2(b+3) + b + 6\right] > 0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} -3b^2 - 10b + 57 > 0 \\ \dfrac{3b-11}{2(b-2)} < 0 \\ (b-2)(3b-8) > 0 \end{cases}$$

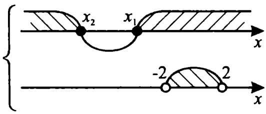
Графическое решение:



$2\frac{2}{3} < b < 3$.

Рис. 309.

Тогда



$x \in (-2;\ 2)$.

Рис. 310.

е) $\begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases}$; т.е. $\begin{cases} b - 2 > 0 \\ -3b^2 - 10b + 57 < 0 \end{cases}$.

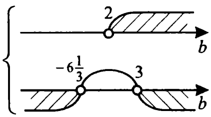


Рис. 311.

Если $b > 3$, то $(b-2)x^2 + (b+3)x + b + 6 > 0$ для $\forall x$, следовательно, исходное неравенство верно при $x \in (-2;\ 2)$.

ж) $\begin{cases} a < 0 \\ D < 0 \end{cases}$, т.е.

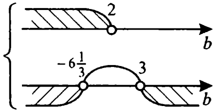


Рис. 312.

$b < -6\frac{1}{3}$, тогда $(b-2)x^2 + (b+3)x + b + 6 < 0$ для $\forall x$, следовательно, исходное неравенство решений не имеет, так как $\sqrt{4-x^2} > 0$.

з) $b = -6\frac{1}{3}$; $D = 0$; $x_1 = x_2 = -\frac{b+3}{2(b-2)}$.

Значит, $x_1 = x_2 = -\frac{-6\frac{1}{3}+3}{2\left(-6\frac{1}{3}-2\right)} = -\frac{\frac{10}{3}}{2\cdot\frac{25}{3}} = -\frac{1}{5} \in D(H)$.

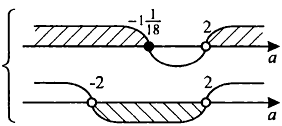
и) $b = 3$; $D = 0$; $x_1 = x_2 = -\frac{b+3}{2(b-2)}$.

$x_1 = x_2 = -\frac{3+3}{2(3-2)} = -3 \notin D(H)$.

к) $b = -\frac{4}{7}$; $\left(-\frac{4}{7}-2\right)x^2 + \left(-\frac{4}{7}+3\right)x - \frac{4}{7} + 6 \geqslant 0$;

$18x^2 - 17x - 38 \geqslant 0$.

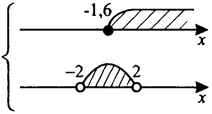
Убеждаемся, что числа 2 и $-1\frac{1}{18}$ — корни уравнения $18x^2 - 17x - 38 = 0$, тогда графическое решение:



$x \in \left(-2;\ -1\frac{1}{18}\right]$.

Рис. 313.

л) $b = 2$; $\dfrac{0 \cdot x^2 + 5x + 8}{\sqrt{4 - x^2}} \geqslant 0$.



$x \in [-1,6;\ 2)$.

Рис. 314.

м) $b = 2\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{\left(2\frac{2}{3} - 2\right)x^2 + \left(2\frac{2}{3} + 3\right)x + 2\frac{2}{3} + 6}{\sqrt{4 - x^2}} \geqslant 0$;

$2x^2 + 17x + 26 \geqslant 0$.

Убеждаемся, что числа -2 и $-6{,}5$ корни уравнения $2x^2 + 17x + 26 = 0$, тогда: $x \in (-2;\ 2)$.

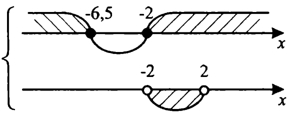


Рис. 315.

Ответ:

1) При $b < -6\dfrac{1}{3}$ $x \in \varnothing$.

2) При $b = -6\dfrac{1}{3}$ $x = -\dfrac{1}{5}$.

3) При $b \in \left(-6\dfrac{1}{3};\ -\dfrac{4}{7}\right)$

$$x \in \left[\frac{-(b+3)+\sqrt{-3b^2-10b+57}}{2(b-2)};\ \frac{-(b+3)-\sqrt{-3b^2-10b+57}}{2(b-2)}\right].$$

4) При $b = -\dfrac{4}{7}$ $x \in \left(-2;\ -1\dfrac{1}{8}\right]$.

5) При $b \in \left(-\frac{4}{7};\ 2\right)$ $x \in \left[\frac{-(b+3)-\sqrt{-3b^2-10b+57}}{2(b-2)};\ 2\right)$.

6) При $b = 2$ $x \in [-1{,}6;\ 2)$.

7) При $b \in \left(2;\ 2\frac{2}{3}\right)$ $x \in \left[\frac{-(b+3)+\sqrt{-3b^2-10b+57}}{2(b-2)};\ 2\right)$.

8) При $b = 2\frac{2}{3}$ $x \in (-2;\ 2)$.

9) При $b \in \left(2\frac{2}{3};\ 3\right)$ $x \in (-2;\ 2)$.

10) При $b = 3$ $x \in (-2;\ 2)$.

11) При $b \in (3;\ \infty)$ $x \in (-2;\ 2)$.

8. Исследовать и решить неравенство с параметром

$$\frac{(a^2+a-2)x+3a-1}{\sqrt{x^2+x-6}} \leqslant 0. \qquad D(\text{У}):\ x^2+x-6>0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-3. \end{array}\right.$$

Если $a^2+a-2 \neq 0$, то $x_1 = \frac{1-3a}{a^2+a-2}$.

Рассмотрим возможные случаи расположения корня и чисел 2 и -3 на числовой оси.

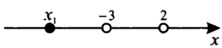
а) 

Рис. 316.

Если $x_1 < -3$, то $\frac{1-3a}{a^2+a-2} < -3$,

т.е. $\frac{3a^2+3a-6+1-3a}{a^2+a-2} < 0$; $\frac{3a^2-5}{a^2+a-2} < 0$.

Графическое решение:

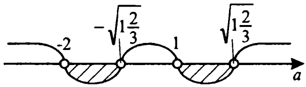
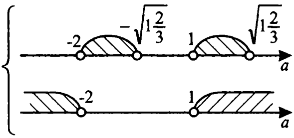


Рис. 317.

Далее возможны два случая:

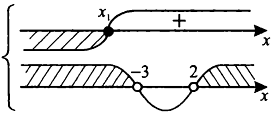
1) Если $a^2 + a - 2 > 0$, то



$$1 < a < \sqrt{1\frac{2}{3}}.$$

Рис. 318.

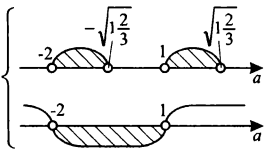
Тогда



$$x \in \left(-\infty;\ \frac{1-3a}{a^2+a-2}\right).$$

Рис. 319.

2) Если $a^2 + a - 2 < 0$, то



$$-2 < a < -\sqrt{1\frac{2}{3}}.$$

Рис. 320.

Тогда

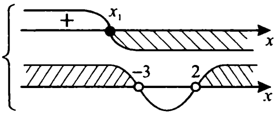


Рис. 321.

$$x \in \left[\frac{1-3a}{a^2+a-2};\ -3\right) \cup (2;\ \infty).$$

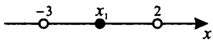
б) 

Рис. 322.

Если $-3 < x < 2$, то $-3 < \dfrac{1-3a}{a^2+a-2} < 2$,

т.е. $\begin{cases} \dfrac{2a^2+5a-5}{a^2+a-2} > 0 \\ \dfrac{3a^2-5}{a^2+a-2} > 0. \end{cases}$

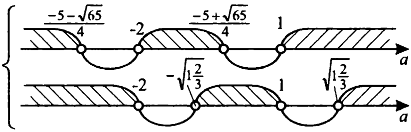


Рис. 323.

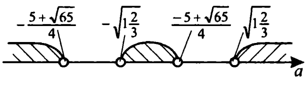


Рис. 324.

Далее возможны два случая.

1) Если $a^2+a-2>0$, то

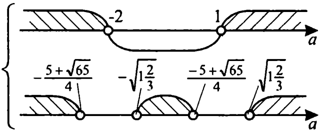
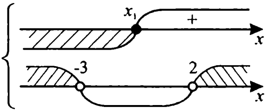


Рис. 325.

т.е. $a\in\left(-\infty;\ -\frac{5+\sqrt{65}}{4}\right)\cup\left(\sqrt{1\frac{2}{3}};\ \infty\right)$, тогда

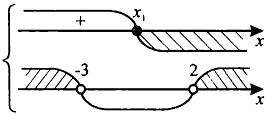


$x\in(-\infty;\ -3)$.

Рис. 326 .

2) Если $a^2+a-2<0$, то $a\in\left(-\sqrt{1\frac{2}{3}};\ \frac{-5+\sqrt{65}}{4}\right)$,

тогда



т.е. $x\in(2;\ \infty)$.

Рис. 327.

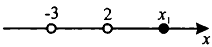
в) 

Рис. 328.

Если $x_1>2$, то $\frac{1-3a}{a^2+a-2}>2$; $\frac{2a^2+5a-5}{a^2+a-2}<0$.

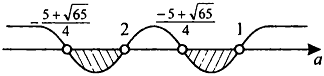


Рис. 329.

1) Если $a^2+a-2>0$, $\Rightarrow$ $a\in\left(-\frac{5+\sqrt{65}}{4};\ -2\right)$, тогда

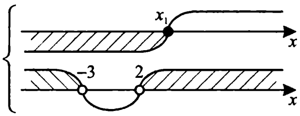


Рис. 330.

$x\in(-\infty;\ -3)\cup\left(2;\ \frac{1-3a}{a^2+a-2}\right)$.

2) Если $a^2+a-2<0$, то $a\in\left(-\frac{5+\sqrt{65}}{4};\ 1\right)$, тогда

$x\in\left[\frac{1-3a}{a^2+a-2};\ \infty\right)$.

г) $a=-2$, $\Rightarrow$ $\frac{0\cdot x-7}{\sqrt{x^2+x-6}}\leqslant 0$, т.е. $x\in(-\infty;\ -3)\cup(2,\ \infty)$.

д) $a=1$, $\Rightarrow$ $\frac{0\cdot x+2}{\sqrt{x^2+x-6}}\leqslant 0$, т.е. решений нет.

е) $x=-3$, $\Rightarrow$ $-3\left(a^2+a-2\right)+3a-1=0$; $3a^2-5=0$,

т.е. $a_1=\sqrt{1\frac{2}{3}}$; $a_2=-\sqrt{1\frac{2}{3}}$.

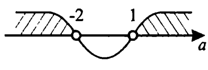
Если $a^2+a-2>0$, т.е. 

Рис. 331.

1) $a = \sqrt{1\frac{2}{3}} \in (1;\ \infty)$, тогда $\frac{x+3}{\sqrt{x^2+x-6}} \leqslant 0$,

т.е. $x = -3 \notin D(y)$.

$x \in (-\infty;\ -3)$, так как $\begin{cases} x+3 \leqslant 0 \\ x^2+x-6 > 0. \end{cases}$

2) $a = -\sqrt{1\frac{2}{3}} \notin (-\infty;\ -2)$,

т.е. при $a = -\sqrt{1\frac{2}{3}}$ $\frac{-(x+3)}{\sqrt{x^2+x-6}} \leqslant 0$.

$x \in (2;\ \infty)$, так как $\begin{cases} x+3 \geqslant 0 \\ x^2+x-6 > 0. \end{cases}$

ж) $x = 2$, $\Rightarrow$ $2\left(a^2+a-2\right)+3a-1=0$;

$2a^2+5a-5=0$,

т.е. $a_1 = \frac{-5+\sqrt{65}}{4}$; $a_2 = -\frac{5+\sqrt{65}}{4}$.

1) $a^2+a-2>0$ при $a = -\frac{5+\sqrt{65}}{4}$,

тогда $\frac{x-2}{\sqrt{x^2+x-6}} \leqslant 0$.

$x \in (-\infty;\ -3)$, так как $\begin{cases} x \leqslant 2 \\ x^2+x-6 > 0. \end{cases}$

2) $a^2+a-2<0$ при $a = \frac{-5+\sqrt{65}}{4}$, тогда $\frac{-(x-2)}{\sqrt{x^2+x-6}} \leqslant 0$.

$x \in (2;\ \infty)$, так как $\begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ x^2+x-6 > 0. \end{cases}$

Ответ: 1) При $a \in \left(-\infty;\ -\frac{5+\sqrt{65}}{4}\right)$ $x \in (-\infty;\ -3)$.

2) При $a = -\frac{5+\sqrt{65}}{4}$ $x \in (-\infty;\ -3)$.

3) При $a \in \left(-\frac{5+\sqrt{65}}{4};\ -2\right)$ $x \in (-\infty;\ -3) \cup \left(2;\ \frac{1-3a}{a^2+a-2}\right]$.

4) При $a = -2$ $x \in (-\infty;\ -3) \cup (2;\ \infty)$.

5) При $a \in \left(-2;\ -\sqrt{1\frac{2}{3}}\right)$ $x \in \left[\frac{1-3a}{a^2+a-2};\ -3\right) \cup (2;\ \infty)$.

6) При $a = -\sqrt{1\frac{2}{3}}$ $x \in (2;\ \infty)$.

7) При $a \in \left(-\sqrt{1\frac{2}{3}};\ \frac{-5+\sqrt{65}}{4}\right)$ $x \in (2;\ \infty)$.

8) При $a = \frac{-5+\sqrt{65}}{4}$ $x \in (2;\ \infty)$.

9) При $a \in \left(\frac{-5+\sqrt{65}}{4};\ 1\right)$ $x \in \left[\frac{1-3a}{a^2+a-2};\ \infty\right)$.

10) При $a = 1$ $x \in \varnothing$.

11) При $a \in \left(1;\ \sqrt{1\frac{2}{3}}\right)$ $x \in \left(-\infty;\ \frac{1-3a}{a^2+a-2}\right]$.

12) При $a = \sqrt{1\frac{2}{3}}$ $x \in (-\infty;\ -3)$.

13) При $a \in \left(\sqrt{1\frac{2}{3}};\ \infty\right)$ $x \in (-\infty;\ -3)$.

Решение зачетной карточки 3

1. При каких значениях параметра a $\exists$ ед. $x \mid x \leqslant 2$ для уравнения

$$\frac{ax+2}{a\left(x^2+x-2\right)}-\frac{3}{x-1}=\frac{a-5}{a(x+2)}?\qquad D(\text{У}):\begin{cases}x\neq -2\\ x\neq 1\\ a\neq 0\end{cases}.$$

Данное уравнение равносильно:

$ax+2-3a(x+2)=(a-5)(x-1)$ или $(3a-5)x=7a-3$ — вид уравнения, наиболее удобный для исследования.

а) Если $\begin{cases}3a-5\neq 0\\ a\neq 0\end{cases}$, то $x=\frac{7a-3}{3a-5}$, при этом $a\neq 1\frac{2}{3}$.

Выясним, при каких значениях параметра a корни уравнения не удовлетворяют $D(\text{У})$?

1) Если $x=-2$, то $\frac{7a-3}{3a-5}=-2$, т.е. $a=1$.

2) Если $x=1$, то $\frac{7a-3}{3a-5}=-1$, т.е. $a=-\frac{1}{2}$.

б) Если $a=1\frac{2}{3}$, то $0\cdot x=7\cdot 1\frac{2}{3}-3$.

Так как $0=8\frac{2}{3}$ — ложь, то $x\in\varnothing$.

в) Если $x\leqslant 2$, то $\frac{7a-3}{3a-5}\leqslant 2$, или $\frac{7a-3-6a+10}{3a-5}\leqslant 0$,

т.е. $\frac{a+7}{3a-5}\leqslant 0$. Изобразим решение последнего неравенства графически.

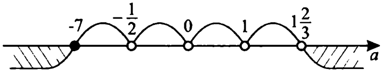


Рис. 332.

Ответ:

при $a\in(-\infty;\ 7]\cup\left(1\frac{2}{3};\ \infty\right)$ $\exists$ ед. решение $x=\frac{7a-3}{3a-5}\ \Big|\ x\leqslant 2$.

2. $\dfrac{1-2a}{x-1}=\dfrac{2ax+2}{x+1}$.

$D(\text{У}):\ \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1. \end{cases}$

Исследуем уравнение

$(1-2a)(x+1)=(2ax+2)(x-1)$.

$2ax^2+x+2a-3=0$ — вид уравнения, наиболее удобный для исследования.

$\text{D}=1-8a(2a-3)=-16a^2+24a+1$.

Убеждаемся, что числа $\dfrac{3\pm\sqrt{10}}{4}$ являются корнями уравнения $16a^2-24a-1=0$, тогда $\text{D}\geqslant 0$ при $a\in\left[\dfrac{3-\sqrt{10}}{4};\ \dfrac{3+\sqrt{10}}{4}\right]$.

Выясним, при каких значениях параметра a корни заданного уравнения не удовлетворяют $D(\text{У})$?

а) Если $x=1$, то $2a+1+2a-3=0$,

т.е. $a=\dfrac{1}{2}$ (по $D(\text{У})$ $a\neq\dfrac{1}{2}$).

б) Если $x=-1$, то $2a-1+2a-3=0$,

т.е. $a=1$ (по $D(\text{У})$ $a\neq 1$).

Графическая иллюстрация существования корней относительно параметра a:

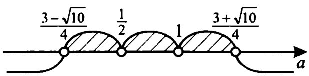
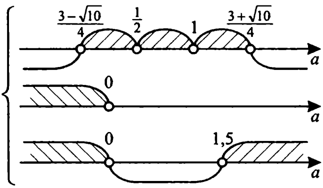


Рис. 333.

Исследуем уравнение на знаки корней.

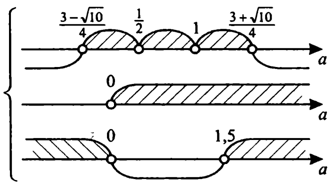
1) $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$. Тогда $\begin{cases} -16a^2 + 24a + 1 > 0 \\ -\dfrac{1}{2a} > 0 \\ \dfrac{2a-3}{2a} > 0 \end{cases}$



$a \in \left(\dfrac{3-\sqrt{10}}{4};\ 0 \right)$.

Рис. 334.

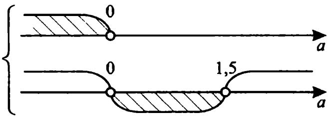
2) $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$. Тогда $\begin{cases} -16a^2 + 24a + 1 > 0 \\ -\dfrac{1}{2a} < 0 \\ \dfrac{2a-3}{2a} > 0. \end{cases}$



$a \in \left(1{,}5;\ \dfrac{3+\sqrt{10}}{4} \right)$.

Рис. 335.

3) $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| > |x_2| \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} < 0 \\ |x_1| > |x_2| \end{cases}$. Тогда $\begin{cases} -\dfrac{1}{2a} > 0 \\ \dfrac{2a-3}{2a} < 0 \end{cases}$.



$\varnothing$. Нет решений.

Рис. 336.

4) $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ x_1 < |x_2| \end{cases}$, т. е. $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} < 0 \\ \dfrac{c}{a} < 0. \end{cases}$. Тогда $\begin{cases} -\dfrac{1}{2a} < 0 \\ \dfrac{2a-3}{2a} < 0. \end{cases}$

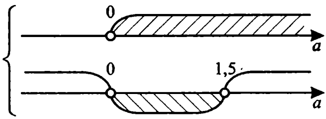


Рис. 337.

С учетом D(У)

$a \in \left(0;\ \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2};\ 1\right) \cup (1;\ 1{,}5)$.

Ответ: 1) При $a \in \left(\dfrac{3-\sqrt{10}}{4};\ 0\right)$ $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0. \end{cases}$

2) При $a \in \left(1{,}5;\ \dfrac{3+\sqrt{10}}{4}\right)$ $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0. \end{cases}$

3) Не существует такого a, чтобы $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| > |x_2|. \end{cases}$

4) При $a \in \left(a;\ \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2};\ 1\right) \cup (1;\ 1{,}5)$ $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \\ |x_1| < |x_2|. \end{cases}$

3. При каких значениях параметра k уравнение $(k-2)x^2+(k+2)x+k-5=0$ имеет корни x_1 и x_2 такие, что $x_1^2+x_2^2\leqslant 1$?

По теореме Виета: $\begin{cases} -\frac{k+2}{k-2}=x_1+x_2 \\ \frac{k-5}{k-2}=x_1\cdot x_2 \end{cases}$.

Тогда $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=\left(-\frac{k+2}{k-2}\right)^2-\frac{2(k-5)}{k-2}\leqslant 1$.

Полагая $k-2\neq 0$, получаем:

$(k+2)^2-2(k-5)(k-2)\leqslant(k-2)^2$.

Выполнив ряд преобразований, получаем вид неравенства, наиболее удобный для исследования:

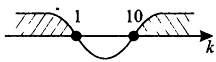
$k^2-11k+10\geqslant 0$. 

Рис. 338.

Выясним, при каких значениях параметра k корни уравнения — действительные числа.

$D=(k+2)^2-4(k-2)(k-5)=k^2+4k+4-4k^2+28k-40=$
$=-(3k^2-32k+36)\geqslant 0$.

$k_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{256-108}}{3}=\frac{16\pm 2\sqrt{37}}{3}$.

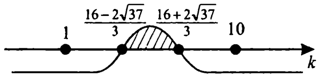
Тогда 

Рис. 339.

Но по условию $k\leqslant 1$ или $k\geqslant 10$.

Ответ: 1) Если корни уравнения — действительные числа, т.е. $x \in \mathbb{R}$, то $k \in \varnothing$.
Не существует таких значений параметра k, чтобы $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$.

2) Если корни уравнения — комплексные числа, т.е. $x \notin \mathbb{R}$, то $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$ при $k \in (-\infty;\ 1] \cup [10;\ \infty)$.

4. Исследовать и решить систему уравнений с параметром .

$$\begin{cases} m(x+y) + m^2(2x-3y) = 2m^2 + m + 3 \\ m(x+y) - m^2(3x-2y) = 3m^2 + m - 2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} m(x+y) + m^2(2x-3y) = 2m^2 + m + 3 \\ m(x+y) - m^2(3x-2y) = 3m^2 + m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx + my + 2m^2x - 3m^2y = 2m^2 + m + 3 \\ mx + my - 3m^2x + 2m^2y = 3m^2 + m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2m^2 + m\right)x - \left(3m^2 - m\right)y = 2m^2 + m + 3 \\ \left(m - 3m^2\right)x + \left(2m^2 + m\right)y = 3m^2 + m - 2. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2m^2+m & -\left(3m^2-m\right) \\ m-3m^2 & 2m^2+m \end{vmatrix} =$$

$$= \left(2m^2+m\right)^2 - \left(3m^2-m\right)^2 =$$

$$= \left(2m^2+m+3m^2-m\right)\left(2m^2+m-3m^2+m\right) = 5m^3(2-m);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2m^2+m+3 & -\left(3m^2-m\right) \\ 3m^2+m-2 & 2m^2+m \end{vmatrix} =$$

$$= \left(2m^2+m+3\right)\left(2m^2+m\right)+\left(3m^2+m-2\right)\left(3m^2-m\right) =$$

$$= \left(2m^2+m\right)^2+3\left(2m^2+m\right)+\left(3m^2+m\right)\left(3m^2-m\right)-2\left(3m^2-m\right) =$$

$$= 4m^4+4m^3+m^2+6m^2+3m+9m^4-m^2-6m^2+2m =$$

$$= 13m^4+4m^3+5m = m\left(13m^3+4m^2+5\right);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2m^2+m & 2m^2+m+3 \\ m-3m^2 & 3m^2+m-2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(2m^2+m\right)\left(3m^2+m-2\right)-\left(2m^2+m+3\right)\left(m-3m^2\right) =$$

$$= 6m^4+5m^3-3m^2-2m+6m^4+m^3+8m^2-3m =$$

$$= 12m^4+6m^3+5m^2-5m = m\left(12m^3+6m^2+5m-5\right).$$

а) $\Delta \neq 0$; $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$;

$$\exists \text{ ед. } \left(x_0;\ y_0\right) \left| \begin{array}{ll} x_0 = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}; & x_0 = \dfrac{13m^3+4m^2+5}{5m^2(2-m)} \\ y_0 = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}; & y_0 = \dfrac{12m^3+6m^2+5m-5}{5m^2\left(2-m\right)} \end{array} \right. .$$

б) $m = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0 \end{cases}$, т.е. система равносильна

уравнению $0 \cdot x - 0 \cdot y = 3$; решений нет.

в) $m = 2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x \neq 0 \\ \Delta_y \neq 0 \end{cases}$; $\left(x_0;\ y_0\right) \in \varnothing$.

Ответ: 1) При $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$

$\exists$ ед. $(x_0;\ y_0) \left| \left(\dfrac{13m^3+4m^2+5}{5m^2(2-m)};\ \dfrac{12m^3+6m^2+5m-5}{5m^2(2-m)} \right) \right.$.

2) При $m = 0$ $(x_0;\ y_0) \in \varnothing$.

3) При $m = 2$ $(x_0;\ y_0) \in \varnothing$.

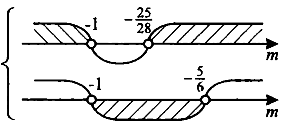
5. При каких значениях параметра m уравнение $3(m+1)x^2 + (7m+6)x + 2m + 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2 такие, что $\begin{cases} x_1 > x_2 \\ x_1 \in (1,\ 2) \\ x_2 \notin (1,\ 2). \end{cases}$?

По теореме V: $\begin{cases} af(N) > 0 \\ af(M) < 0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} (m+1)f(2) > 0 \\ (m+1)f(1) < 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} 3(m+1)\big(3(m+1)\cdot 4 + (7m+6)\cdot 2 + 2m + 1\big) > 0 \\ 3(m+1)\big(3(m+1) + (7m+6) + 2m + 1\big) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(m+1)(28m+25) > 0 \\ 3(m+1)(12m+10) < 0. \end{cases}$$

Графическая иллюстрация решения:



$m \in \left(-\dfrac{25}{28};\ -\dfrac{5}{6}\right)$.

Рис. 340.

Ответ: при $m \in \left(-\dfrac{25}{28};\ -\dfrac{5}{6}\right)$ $\begin{cases} x_1 > x_2 \\ x_1 \in (1;2) \\ x_2 \notin (1;2) \end{cases}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения.

6. Найти область изменения наибольших и наименьших значений квадратного трехчлена

$$y = f(x) = (3+a)x^2 + (3a-1)x + 2(a-1).$$

Напомним:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Тогда

$$y = f(x) = (a+3)\left(x + \frac{3a-1}{2(a+3)}\right)^2 - \frac{(3a-1)^2-8(a+3)(a-1)}{4(a+3)},$$

т.е. $y = (a+3)\left(x + \dfrac{3a-1}{2(a+3)}\right)^2 - \dfrac{a^2-22a+25}{4(a+3)}$.

а) Если $a+3>0$, то $y_{\text{наим}} = -\dfrac{a^2-22a+25}{4(a+3)}$.

Пусть $y_{\text{наим}} = t$, тогда $-\dfrac{a^2-22a+25}{4(a+3)} = t \Rightarrow$

$a^2 - 22a + 25 + 4at + 12t = 0;$

$a^2 - 2(11-2t)a + 12t + 25 = 0.$

$D = (11-2t)^2 - (12t+25);$

$D \geqslant 0.$

Выполнив ряд преобразований, получаем:

$t^2 - 14t + 24 \geqslant 0,$

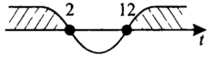


Рис. 341.

т.е. $-\dfrac{a^2-22a+25}{4(a+3)} \leqslant 2;$

$$\frac{a^2-22a+25+8a+24}{4(a+3)} \geqslant 0;$$

$$\frac{a^2-14a+49}{4(a+3)} \geqslant 0; \quad \frac{(a-7)^2}{4(a+3)} \geqslant 0.$$

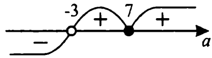


Рис. 342.

Следовательно, $E(t) = (-\infty;\ 2]$, где $t = y_{\text{наим}}$.

б) $-\dfrac{a^2-22a+25}{4(a+3)} \geqslant 12 \Rightarrow \dfrac{48a+144+a^2-22a+25}{4(a+3)} \leqslant 0;$

$$\frac{(a+13)^2}{4(a+3)} \leqslant 0.$$

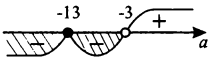


Рис. 343.

Следовательно, $a < -3$, т.е. $E(t) = [12;\ \infty)$, где $t = y_{\text{наиб}}$.

Ответ: 1) $E(y_{\text{наим}}) = (-\infty;\ 2]$.

2) $E(y_{\text{наиб}}) = [12;\ \infty)$.

7. Исследовать и решить неравенство с параметром

$$\frac{(a+1)x^2-(2a+1)x+a-1}{\sqrt{x+1}} \geqslant 0.$$

$D(У)$: $x+1>0$; $x>-1$. $(a+1)\neq 0$, тогда

$D=(2a+1)^2-4(a+1)(a-1)=4a+5$; $D \geqslant 0$.

$x_1 = \dfrac{2a+1+\sqrt{4a+5}}{2(a+1)}$; $x_2 = \dfrac{2a+1-\sqrt{4a+5}}{2(a+1)}$ — корни уравнения

$(a+1)x^2-(2a+1)x+a-1=0$.

Рассмотрим различные взаимоотношения между корнями числителя и знаменателя:

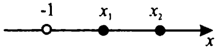
а) 

Рис. 344.

По теореме III:

$$\begin{cases} D>0 \\ -\dfrac{b}{2a}>M \\ af(M)>0 \end{cases}, \text{ т. е. } \begin{cases} 4a+5>0 \\ \dfrac{2a+1}{2(a+1)}>-1 \\ (a+1)(a+1-2a-1+a-1)>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>-1\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{4a+3}{2(a+1)}>0 \\ (a+1)(-1)>0. \end{cases}$$

Графическая иллюстрация решения

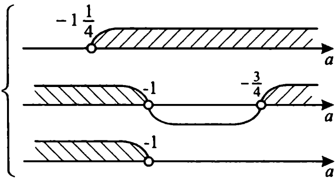


Рис. 345.

Значит $a \in \left(-1\dfrac{1}{4};\ -1\right) \subset (-\infty;\ -1)$.

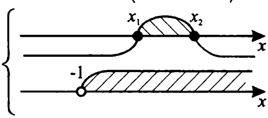
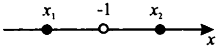


Рис. 346.

Тогда $x \in \left[\dfrac{2a+1+\sqrt{4a+5}}{2(a+1)};\ \dfrac{2a+1-\sqrt{4a+5}}{2(a+1)}\right]$.

б) 

$x_1 < -1 < x_2$.

Рис. 347.

По теореме II:

$af(M) < 0$, т.е. $(a+1)(a+1-2a-1+a-1) < 0$;

$-(a+1) < 0$, следовательно, $a > -1$.

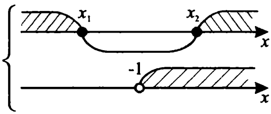
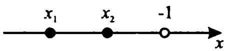


Рис. 348.

$$x \in \left[\frac{2a+1+\sqrt{4a+5}}{2(a+1)};\ \infty\right)$$

в) 

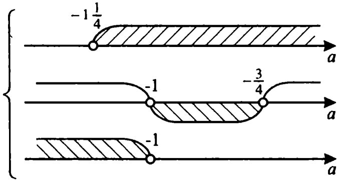
$x_1 < x_2 < -1$.

Рис. 349.

По теореме I:

$$\begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < M \\ af(M) > 0 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} 4a+5 > 0 \\ \dfrac{2a+1}{2(a+1)} < -1 \\ (a+1)(a+1-2a-1+a-1) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > -1\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{4a+3}{2(a+1)} < 0 \\ a < -1. \end{cases}$$



Решений нет.

Рис. 350.

г) Если $\begin{cases} a > 0 \\ D < 0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} a+1 > 0 \\ 4a+5 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a > -1 \\ a < -1\frac{1}{4}. \end{cases}$

Решений нет.

д) Если $\begin{cases} a < 0 \\ D < 0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} a+1 < 0 \\ 4a+5 < 0; \end{cases}$ $a < -1\frac{1}{4}$,

следовательно, $(a+1)x^2 - (2a+1)x + a - 1 < 0$ при любом значении x, но тогда

$$\frac{(a+1)x^2-(2a+1)x+a-1}{\sqrt{x+1}} \geqslant 0, \quad \sqrt{x+1} < 0,$$

значит, решений нет.

е) $a = -1\frac{1}{4}$; $D = 0$; $x_1 = x_2 = \frac{2a+1}{2(a+1)}$, т.е.

$$x_1 = x_2 = \frac{-2,5+1}{2\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-1,5}{-0,5} = 3.$$

$$a = -1\frac{1}{4} \in (-\infty;\ -1),$$

тогда $\frac{-(x-3)^2}{\sqrt{x+1}} \geqslant 0 \Rightarrow x = 3 \in D(y)$.

ж) $a = -1 \Rightarrow \frac{0 \cdot x^2 + x - 2}{\sqrt{x+1}} \geqslant 0$, т.е. $x \geqslant 2$.

Ответ: 1) При $a \in \left(-\infty;\ -1\frac{1}{4}\right)$ $x \in \varnothing$.

2) При $a = -1\frac{1}{4}$ $x = 3$.

3) При $a \in \left(-1\frac{1}{4};\ -1\right)$

$$x \in \left[\frac{2a+1+\sqrt{4a+5}}{2(a+1)};\ \frac{2a+1-\sqrt{4a+5}}{2(a+1)}\right].$$

4) При $a = -1$ $x \in [2;\ \infty)$.

5) При $a \in (-1;\ \infty)$ $x \in \left[\frac{2a+1+\sqrt{4a+5}}{2(a+1)};\ \infty\right)$.

8. Исследовать и решить неравенство с параметром

$$\frac{x+1}{m-1} - \frac{3}{m-2} > \frac{x+1}{2}.$$

$$D(\text{Н}):\ \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2. \end{cases}$$

Перенесем $\frac{x+1}{2}$ в левую часть и умножим части неравенства на знаменатель, получаем:

$$\frac{2(x+1)(m-2)-6(m-1)-(x+1)(m-1)(m-2)}{2(m-1)(m-2)} > 0.$$

Выполним ряд преобразований для того, чтобы привести неравенство к виду, наиболее удобному для исследования:

$$\frac{2x(m-2)-x(m-1)(m-2)+2(m-2)-6(m-1)-(m-1)(m-2)}{2(m-1)(m-2)} > 0;$$

$$\frac{(m-2)(3-m)x-m^2-m}{2(m-1)(m-2)} > 0;$$

$$\frac{(m-2)(3-m)}{2(m-1)(m-2)}x-\frac{m(m+1)}{2(m-1)(m-2)}>0.$$

Тогда $\dfrac{3-m}{2(m-1)}x>\dfrac{m(m+1)}{2(m-1)(m-2)}$.

а) $\dfrac{3-m}{2(m-1)}>0$.

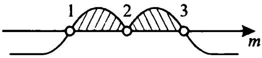


Рис. 351.

При $m\in(1;\ 2)\cup(2;\ 3)$ $x>\dfrac{m(m+1)}{(m-1)(m-2)}\cdot\dfrac{m-1}{3-m}$,

т.е. $x>\dfrac{m(m+1)}{(m-2)(3-m)}$.

б) $\dfrac{3-m}{2(m-1)}<0$; $x<\dfrac{m(m+1)}{(m-2)(3-m)}$

при $m\in(-\infty;\ 1)\cup(3;\ \infty)$.

в) $m=3$; $0>0$; решений нет.

Ответ: 1) При $m\in(-\infty;\ 1)$ $x<\dfrac{m(m+1)}{(m-2)(3-m)}$.

2) При $m=1$ неравенство не определено.

3) При $m\in(1;\ 2)$ $x>\dfrac{m(m+1)}{(m-2)(3-m)}$.

4) При $m=2$ неравенство не определено.

5) При $m\in(2;\ 3)$ $x>\dfrac{m(m+1)}{(m-2)(3-m)}$.

6) При $m=3$ $x\in\varnothing$.

7) При $m\in(3;\ \infty)$ $x<\dfrac{m(m+1)}{(m-2)(3-m)}$.

Решение зачетной карточки 4

1. Исследовать и решить уравнение с параметром

$$\frac{1}{m-2}-\frac{1}{m(m-2)}=\frac{2}{(m-2)x}+\frac{1}{mx(m-2)};$$

Выяснить, при каких значениях параметра m существует единственное решение уравнения такое, что $x \leqslant 3$.

Приведем уравнение к виду, наиболее удобному для исследования:

$$\frac{m-1}{m(m-2)}=\frac{2m+1}{x\cdot m(m-2)}; \qquad D(\text{У}): \begin{cases} x \neq 0 \\ m \neq 2 \\ m \neq 0. \end{cases}$$

$$x(m-1)=2m+1.$$

Рассмотрим следующие случаи.

а) Если $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2, \\ m \neq 1 \end{cases}$ то $x=\frac{2m+1}{m-1}$.

1) Если $x=0$, то $\frac{2m+1}{m-1}=0$, т.е. $m=-\frac{1}{2}$.

2) Если $x \leqslant 3$, то $\frac{2m+1}{m-1} \leqslant 3$,

т.е. $\frac{3m-3-2m-1}{m-1} \geqslant 0$; $\frac{m-4}{m-1} \geqslant 0$.

б) Если $m=1$, то $0=3$ — ложно.

Графическое решение:

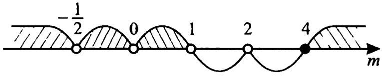


Рис. 352.

Ответ: При $m \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2};\ 0\right) \cup (0;\ 1) \cup [4;\ \infty)$

$$x=\frac{2m+1}{m-1} \leqslant 3.$$

2. Иследовать и решить уравнение

$$\frac{x-1}{b+2}+\frac{2x-2}{x-3}=\frac{3b-1}{(b+2)(x-3)}. \qquad D(\text{У}): \begin{cases} b \neq -2 \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Приведем уравнение к виду, наиболее удобному для исследования:

$(x-1)(x-3)+2(x-1)(b+2)=3b-1;$

$x^2-4x+3+2x(b+2)-2(b+2)-3b+1=0;$

$x^2-2(2-b-2)x-5b=0;$

$x^2+2bx-5b=0.$

Тогда $D=b^2+5b$.

а) $D \geqslant 0$

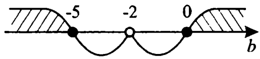


Рис. 353.

$b \in (-\infty;\ -5] \cup [0;\ \infty)$.

б) Выясним, при каком значении параметра b $x=3$.
$9+2\cdot b\cdot 3-5b=0$, т.е. $b=-9$.
Тогда $x_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2+5b}$;
$x_{1,2}=9\pm\sqrt{36}$; $x_1=3\notin D(y)$; $x_2=15$.

в) Если $b=0$; $D=0$, то $x_1=x_2=0$.

г) Если $b=-5$; $D=0$, то $x_1=x_2=5$.

Ответ: 1) При $b\in(-\infty;\ -9)\cup(-9;\ -5)\cup(0;\ \infty)$
$\exists\, x_1\neq x_2 \mid x_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2+5b}$.

2) При $b=-9$ $x=15$.

3) При $b=-5$ $x=5$.

4) При $b=0$ $x=0$.

5) При $b\in(-5;\ -2)\cup(-2;\ 0)$ $x\notin\mathbb{R}$.

6) При $b=-2$ уравнение не определено.

3. При каких значениях параметра k уравнение $\frac{3-2k}{x-2}=\frac{2x}{k}$ имеет действительные корни x_1 и x_2, такие, что $x_1^2+x_2^2\leqslant 2$?

$(3-2k)k=2x(x-2)$; $\qquad D(У):\begin{cases}x\neq 2\\ k\neq 0.\end{cases}$

а) $2x^2-4x+2k^2-3k=0$.

$D=4-2\left(2k^2-3k\right)=-2(k-2)(2k+1)$.

$D\geqslant 0$

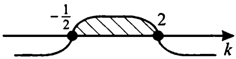


Рис. 354.

б) Найдем корни.

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{-2(k-2)(2k+1)}}{2}.$$

Выясним, при каких значениях параметра k $x=2$?

$$2\cdot 2^2-4\cdot 2+2k^2-3k=0;\ 2k^2-3k=0;\ \left[\begin{array}{l}k=0\notin D(y)\\ k=1,5.\end{array}\right.$$

Тогда $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{-2(1,5-2)(2\cdot 1,5+1)}}{2}=\frac{2\pm 2}{2}$,

т.е. $\left[\begin{array}{l}x=2\notin D(y)\\ x=0.\end{array}\right.$

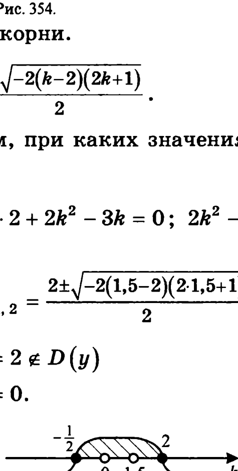
При  $\exists\,(x_1;x_2)\in\mathbb{R}$.

Рис. 355.

в) По теореме Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$, т.е.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2k^2-3k}{2}. \end{cases}$$

Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 2 - \frac{2(2k^2-3k)}{2} = -2k^2 + 3k + 2.$$

Но $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2$, т.е. $-2k^2 + 3k + 2 \leqslant 2$;

$2k^2 - 3k \geqslant 0$.

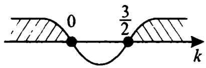


Рис. 356.

Учитывая условие существования действительных корней, получаем:

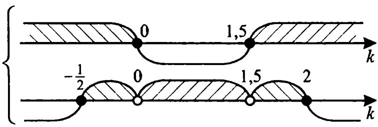


Рис. 357.

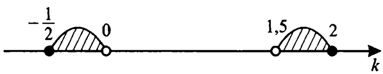


Рис. 358.

Необходимо также учесть, что

$x_1^2 + x_2^2 = -2k^2 + 3k + 2 \geqslant 0$.

$2k^2 - 3k - 2 \geqslant 0$;

$$D = 9 + 16 = 5^2; \; k_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4}; \; \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

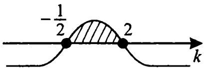


Рис. 359.

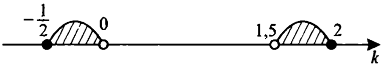


Рис. 360.

Ответ: при $k \in \left[-\frac{1}{2}; \; 0\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \; 2\right]$

$x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2$ для $\frac{3-2k}{x-2} = \frac{2x}{k}$, где x_1, x_2 — корни;

$x_1 \in \mathbb{R}$; $x_2 \in \mathbb{R}$.

4. Исследовать и решить систему уравнений с параметром $\begin{cases} m^2(x-y) + m(2x+3y) = 3 \\ m^2(x-y) - m(3x+2y) = -2 \end{cases}$ при условии, что

точки решения находятся ниже прямой $y = -x + 1$,

т.е. решение удовлетворяет условию $x_0 + y_0 < 1$.

$$\begin{cases} m^2(x-y) + m(2x+3y) = 3 \\ m^2(x-y) - m(3x+2y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(m^2 + 2m\right)x - \left(m^2 - 3m\right)y = 3 \\ \left(m^2 - 3m\right)x - \left(m^2 + 2m\right)y = 2. \end{cases}$$

Необходимо исследовать и решить систему при условии $x_0 + y_0 < 1$, т.е. если решения находятся ниже прямой $y = -x + 1$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} m^2+2m & -\left(m^2-3m\right) \\ m^2-3m & -\left(m^2+2m\right) \end{vmatrix} = -\left(m^2+2m\right)^2 + \left(m^2-3m\right)^2 =$$

$$= \left(m^2-3m+m^2+2m\right)\left(m^2-3m-m^2-2m\right) = -5m^2\left(2m-1\right);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -\left(m^2-3m\right) \\ 2 & -\left(m^2+2m\right) \end{vmatrix} = -3\left(m^2+2m\right)+2\left(m^2-3m\right) =$$

$$= -m^2-12m = -m\left(m+12\right);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m^2+2m & 3 \\ m^2-3m & 2 \end{vmatrix} = 2m^2+4m-3m^2+9m = -m\left(m-13\right).$$

а) $\Delta \neq 0$; при $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\exists \text{ед.} \left(x_0;\ y_0\right) \left| \begin{array}{l} x_0 = \dfrac{\Delta_x}{\Delta};\ \ x_0 = \dfrac{m+12}{5m(2m-1)} \\ y_0 = \dfrac{\Delta_y}{\Delta};\ \ y_0 = \dfrac{m-13}{5m(2m-1)} \end{array} \right. .$$

б) $m = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 0 \\ \Delta_y = 0 \end{cases}$, т.е. система равносильна

уравнению $0 \cdot x - 0 \cdot y = 3$, которое ложно.

Решения нет.

в) $m = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x \neq 0 \\ \Delta_y \neq 0 \end{cases}$, т.е. $\left(x_0;\ y_0\right) \in \varnothing$.

Но по условию $x_0 + y_0 < 1$. Подставляя значения x_0 и y_0, имеем

$$\frac{m+12}{5m(2m-1)} + \frac{m-13}{5m(2m-1)} < 1, \text{ т.е. } \frac{2m-1}{5m(2m-1)} < 1.$$

$$\frac{5m(2m-1)-(2m-1)}{5m(2m-1)} > 0; \ \frac{(5m-1)(2m-1)}{5m(2m-1)} > 0.$$

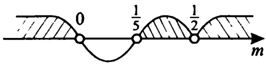


Рис. 361.

Ответ: при $m \in (-\infty;\ 0) \cup \left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\ \infty\right)$

$\exists$ ед. решение $\left(\frac{m+12}{5m(2m-1)};\ \frac{m-13}{5m(2m-1)}\right)$,

удовлетворяющее условию $x_0 + y_0 < 1$.

5. Исследовать и решить уравнение

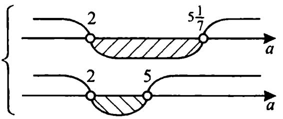
$(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$. Выяснить, при каком значении параметра a $(2;\ 3) \subset (x_2;\ x_1)$.

$$(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0;\ (2;\ 3) \subset (x_2,\ x_1).$$

По теореме VII: $\begin{cases} af(N) < 0 \\ af(M) < 0 \end{cases}$, т.е.

$$\begin{cases} (a-2)(9(a-2) - 6(a+3) + 4a) < 0 \\ (a-2)(4(a-2) - 4(a+3) + 4a) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-2)(7a-36) < 0 \\ (a-2)(4a-20) < 0. \end{cases}$$



$a \in (2;\ 5)$.

Рис. 362.

Ответ: при $a \in (2;\ 5)$ для

$(a-2)x^2 - 2(a+3)\cdot x + 4a = 0$

$(2;\ 3) \subset (x_2;\ x_1)$, где x_1, x_2 — корни уравнения.

6. Исследовать уравнение $\frac{3-2b}{x-3} = \frac{2(x-1)}{b}$. Определить знаки корней в зависимости от параметра b.

$(3-2b)b = 2(x-1)(x-3)$;

$2x^2 - 8x + 2b^2 - 3b + 6 = 0$; $\qquad D(\text{У}):\ \begin{cases} x \neq 3 \\ b \neq 0 \end{cases}$

а) $D = 16 - 2\left(2b^2 - 3b + 6\right) = -2\left(2b^2 - 3b - 2\right) \geqslant 0$.

Убеждаясь, что числа 2 и $-\frac{1}{2}$ — корни уравнения $2b^2 - 3b - 2 = 0$, представим графическое решение:

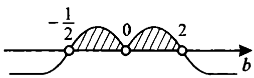


Рис. 363.

б) Выясним, при каких значениях параметра b $x = 3$?

Пусть $x = 3$, тогда $2\cdot 9 - 24 + 2b^2 - 3b + 6 = 0$ или

$\left[\begin{array}{l} b = 0 \notin D(y) \\ b = 1{,}5 \end{array}\right.$, тогда $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-2\left(2b^2 - 3b - 2\right)}}{2}$.

Если $b = 1,5$, то $x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-2(1,5-2)\left(1,5+\frac{1}{2}\right)}}{2}$,

т.е. $\left[\begin{array}{l} x = 3 \notin D(y) \\ x = 1 \in D(y). \end{array}\right.$

Следовательно, корни существуют

при $b \in \left(-\frac{1}{2};\ 0\right) \cup (0;\ 1,5) \cup (1,5;\ 2)$.

Если $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$, то $\begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$,

т.е. $\begin{cases} -2\left(2b^2 - 3b - 2\right) > 0 \\ 4 > 0 \\ \dfrac{2b^2 - 3b + 6}{2} > 0, \end{cases}$

следовательно, $-2\left(2b^2 - 3b - 2\right) > 0$

(так как $2b^2 - 3b + 6 > 0$ при любом значении b).

Учитывая исследования, проведенные выше, получаем:

$\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$ при $b \in \left(-\frac{1}{2};\ 0\right) \cup (0;\ 1,5) \cup (1,5;\ 2)$.

Других случаев нет, так как при исследовании уравнения были использованы все возможные случаи значения параметра b.

Ответ:

при $b \in \left(-\frac{1}{2};\ 0\right) \cup (0;\ 1,5) \cup (1,5;\ 2)$ $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$.

Других случаев нет.

7. Исследовать и решить неравенство

$$\frac{(k-1)x^2+(k-4)x+k-7}{x^2-3x+2} \geqslant 0.$$

Если $k \neq 1$, то $D=(k-4)^2-4(k-1)(k-7)=-3(k^2-8k+4)$.

Тогда $k_{1,2}=4\pm 2\sqrt{3}$ — корни уравнения

$-3(k^2-8k+4)=0$. $D \geqslant 0$.

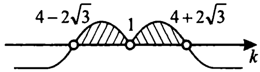


Рис. 364.

Тогда $x_1=\dfrac{4-k+\sqrt{-3(k^2-8k+4)}}{2(k-1)}$; $x_2=\dfrac{4-k-\sqrt{-3(k^2-8k+4)}}{2(k-1)}$ —

корни уравнения $(k-1)x^2+(k-4)x+k-7=0$.

а) Если $\begin{cases} k<0 \\ D<0 \end{cases}$, то

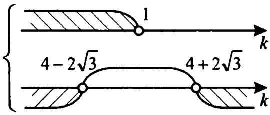


Рис. 365.

$(k-1)x^2+(k-4)x+k-7<0$ при $\forall x$, тогда $x\in(1,\ 2)$ — решение неравенства при $k<4-2\sqrt{3}$.

б) Если $\begin{cases} k>1 \\ D<0 \end{cases}$, то

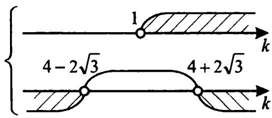


Рис. 366.

$(k-1)x^2+(k-4)x+k-7>0$ при любом значении x, (так как $x^2-3x+2>0$ при $x\in(-\infty;\ 1)\cup(2;\ \infty)$).

Значит, $x\in(-\infty;\ 1)\cup(2;\ \infty)$ — решение неравенства при $k > 4 + 2\sqrt{3}$. Другие решения зависят от взаимного расположения корней.

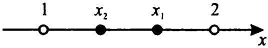
в) Если , то по теореме IV:

Рис. 367.

$$\begin{cases} D > 0 \\ M < -\dfrac{b}{2a} < N \\ af(M) \geqslant 0 \\ af(N) \geqslant 0 \\ a \neq 0 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} -3\left(k^2 - 8k + 4\right) > 0 \\ 1 < -\dfrac{k-4}{2(k-1)} < 2 \\ (k-1)\left(k - 1 + k - 4 + k - 7\right) > 0 \\ (k-1)\left(4(k-1) + 2k - 8 + k - 7\right) > 0. \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} -3\left(k^2 - 8k + 4\right) > 0 \\ \dfrac{3(k-2)}{2(k-1)} < 0 \\ \dfrac{5k-8}{2(k-1)} > 0 \\ (k-1)\cdot 3(k-4) > 0 \\ (k-1)\cdot(7k-19) > 0 \end{cases}. \text{ Решений нет.}$$

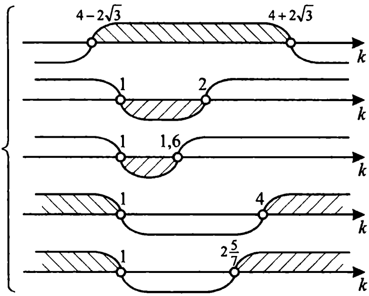


Рис. 368.

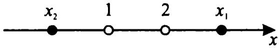
г) 

Рис. 369.

По теореме VII: $\begin{cases} af(N) < 0 \\ af(M) < 0 \end{cases}$,

т.е. $\begin{cases} (k-1)\big(4(k-1)+2(k-4)+k-7\big) < 0 \\ (k-1)(k-1+k-4+k-7) < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} (k-1)(7k-19) < 0 \\ (k-1)3(k-4) < 0 \end{cases}$.

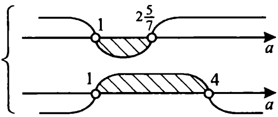
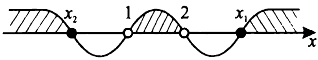


Рис. 370.

Тогда 

при $k \in \left(1;\ 2\frac{5}{7}\right)$.

Рис. 371.

$$x \in \left(-\infty;\ \frac{4-k-\sqrt{-3(k^2-8k+4)}}{2(k-1)}\right] \cup (1;2) \cup \left[\frac{4-k+\sqrt{-3(k^2-8k+4)}}{2(k-1)};\infty\right).$$

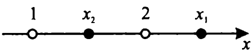
д) 

Рис. 372.

Для $1 < x_1$ по теореме III, для $x_2 < 2 < x_1$

по теореме II: $\begin{cases} \begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > M \\ af(M) > 0 \end{cases} \\ af(N) < 0. \end{cases}$

Таким образом, $\begin{cases} -3\left(k^2-8k+4\right)>0 \\ -\dfrac{k-4}{2(k-1)}>1 \\ (k-1)3(k-4)>0 \\ (k-1)(7k-19)<0; \end{cases}$

$$\begin{cases} -3\left(k^2-8k+4\right)>0 \\ \dfrac{3(k-2)}{2(k-1)}<0 \\ (k-1)3(k-4)>0 \\ (k-1)(7k-19)<0. \end{cases}$$

Решений нет.

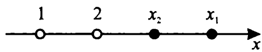
е) 

Рис. 373.

По теореме III: $\begin{cases} D>0 \\ -\dfrac{b}{2a}>N \\ a\cdot f(N)\geqslant 0 \\ a\neq 0. \end{cases}$.

Значит $\begin{cases} -3\left(k^2-8k+4\right)>0 \\ -\dfrac{k-4}{2(k-1)}>2 \\ (k-1)(7k-19)\geqslant 0 \\ k\neq 1 \end{cases}$; $\begin{cases} -3\left(k^2-8k+4\right)>0 \\ \dfrac{5k-8}{2(k-1)}<0 \\ (k-1)(7k-19)\geqslant 0 \end{cases}$

Решений нет.

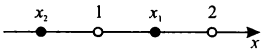
ж) 

Рис. 374.

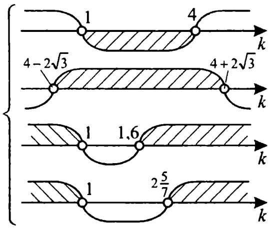


Рис. 375.

По теореме II для $x_2 < 1 < x_1$ и по теореме I для $x_2 < x_1 < 2$ получаем:

$$\begin{cases} af(M) < 0 \\ \begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < N \\ af(N) > 0 \end{cases} \end{cases},$$

т. е. $$\begin{cases} 3(k-1)(k-4) < 0 \\ -3\left(k^2 - 8k + 4\right) > 0 \\ \dfrac{5k-8}{2(k-1)} > 0 \\ (k-1)(7k-19) > 0 \end{cases}$$

$$k \in \left(2\frac{5}{7};\ 4\right)$$

Тогда: 

Рис. 376.

$$x \in \left(-\infty;\ \frac{4-k-\sqrt{-3\left(k^2-8k+4\right)}}{2(k-1)}\right] \cup$$

$$\cup \left(1;\ \frac{4-k+\sqrt{-3\left(k^2-8k+4\right)}}{2(k-1)}\right] \cup (2;\ \infty).$$

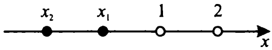
з) 

Рис. 377.

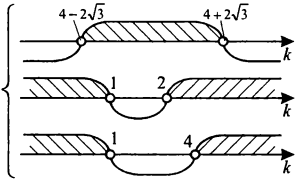


Рис. 378.

По теореме IV для $x_2 < x_1 < 1$ получаем:

$$\begin{cases} D > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < M \\ af(M) > 0 \end{cases}, \quad \text{т.е.} \begin{cases} -3\left(k^2 - 8k + 4\right) > 0 \\ 1 > -\dfrac{k-4}{2(k-1)} \\ 3(k-1)(k-4) > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -3\left(k^2 - 8k + 4\right) > 0 \\ \dfrac{3(k-2)}{k-1} > 0 \\ 3(k-1)(k-4) > 0 \end{cases};$$

$$k \in \left(4 - 2\sqrt{3};\ 1\right) \cup \left(4;\ 4 + 2\sqrt{3}\right).$$

1) Если $k \in \left(4 - 2\sqrt{3};\ 1\right)$,

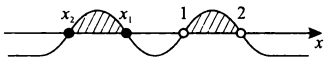
то  или

Рис. 379.

$$x \in \left[\frac{4-k+\sqrt{-3\left(k^2-8k+4\right)}}{2(k-1)}; \frac{4-k-\sqrt{-3\left(k^2-8k+4\right)}}{2(k-1)}\right] \cup (1;2).$$

2) Если $k \in \left(4;\ 4+2\sqrt{3}\right)$,

то 

или

Рис. 380.

$$x \in \left(-\infty; \frac{4-k-\sqrt{-3\left(k^2-8k+4\right)}}{2(k-1)}\right] \cup$$

$$\cup \left[\frac{4-k+\sqrt{-3\left(k^2-8k+4\right)}}{2(k-1)}; 1\right) \cup (2; \infty).$$

и) Если $k = 4-2\sqrt{3}$, то $x_1 = x_2 = \frac{4-k}{2(k-1)}$,

т.е. $x_1 = x_2 = \frac{4-4+2\sqrt{3}}{2\left(4-2\sqrt{3}-1\right)} = -2-\sqrt{3}$.

Так как $4-2\sqrt{3} \in (-\infty;\ 1)$;

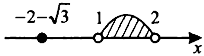
$D = 0$, то 

Рис. 381.

или $x \in (1;\ 2) \cup \left\{-2-\sqrt{3}\right\}$.

к) Если $k = 1$, то $\frac{0 \cdot x^2-3x-6}{x^2-3x+2} \geqslant 0$, т.е. $\frac{-3(x+2)}{(x-1)(x-2)} \geqslant 0$,

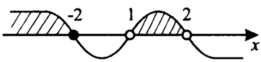
тогда 

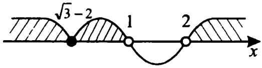
Рис. 382.

или $x \in (-\infty;\ -2] \cup (1;\ 2)$.

л) Если $k = 4 + 2\sqrt{3} \in (1;\ \infty)$, тогда $x_1 = x_2 = \dfrac{4-k}{2(k-1)}$,

т.е. $x_1 = x_2 = \dfrac{4-4-2\sqrt{3}}{2\left(4+2\sqrt{3}-1\right)} = \sqrt{3} - 2$.

Графически это выглядит так:



или $x \in (-\infty;\ 1) \cup (2;\ \infty)$.

Рис. 383.

м) Если $k = 2\dfrac{5}{7}$, то $\dfrac{\left(\frac{19}{7} - 1\right)x^2 + \left(\frac{19}{7} - 4\right)x + \frac{19}{7} - 7}{(x-1)(x-2)} \geqslant 0$;

$\dfrac{3\left(4x^2+3x-10\right)}{(x-1)(x-2)} \geqslant 0$ или

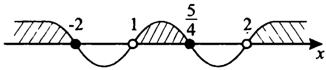


Рис. 384.

$x \in (-\infty;\ -2] \cup \left(1;\ 1\dfrac{1}{4}\right] \cup (2;\ \infty)$.

н) Если $k = 4$, то $\dfrac{3x^2-3}{(x-1)(x-2)} \geqslant 0$ или

$x \in (-\infty;\ -1] \cup (2;\ \infty]$.

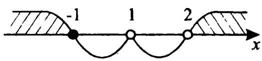


Рис. 385.

Ответ:

1) При $k \in \left(\infty;\ 4 - 2\sqrt{3}\right)$ $x \in (1;\ 2)$.

2) При $k = 4 - 2\sqrt{3}$ $x \in (1;\ 2) \cup \left\{-2 - \sqrt{3}\right\}$.

3) При $k \in \left(4 - 2\sqrt{3};\ 1\right)$

$$x \in \left[\frac{4-k+\sqrt{-3\left(k^2-8k+4\right)}}{2(k-1)};\ \frac{4-k-\sqrt{-3\left(k^2-8k+4\right)}}{2(k-1)}\right] \cup (1;\ 2).$$

4) При $k = 1$ $\quad x \in (-\infty;\ -2] \cup (1;\ 2)$.

5) При $k \in \left(1; 2\frac{5}{7}\right)$ $\quad x \in \left(-\infty; \frac{4 - k - \sqrt{-3\left(k^2 - 8k + 4\right)}}{2(k-1)}\right] \cup$

$$\cup (1; 2) \cup \left[\frac{4 - k + \sqrt{-3\left(k^2 - 8k + 4\right)}}{2(k-1)}; \infty\right).$$

6) При $k = 2\frac{5}{7}$ $\quad x \in (-\infty;\ -2] \cup \left(1;\ 1\frac{1}{4}\right] \cup (2;\ \infty)$.

7) При $k \in \left(2\frac{5}{7}; 4\right)$ $\quad x \in \left(-\infty; \frac{4 - k - \sqrt{-3\left(k^2 - 8k + 4\right)}}{2(k-1)}\right) \cup$

$$\cup \left(1; \frac{4 - k + \sqrt{-3\left(k^2 - 8k + 4\right)}}{2(k-1)}\right) \cup (2; \infty).$$

8) При $k = 4$ $\quad x \in (-\infty;\ -1] \cup (2;\ \infty)$.

9) При $k \in \left(4; 4 + 2\sqrt{3}\right)$ $x \in \left(-\infty; \frac{4 - k - \sqrt{-3\left(k^2 - 8k + 4\right)}}{2(k-1)}\right) \cup$

$$\cup \left[\frac{4 - k + \sqrt{-3\left(k^2 - 8 + 4\right)}}{2(k-1)}; 1\right) \cup (2; \infty).$$

10) При $k = 4 + 2\sqrt{3}$ $\quad x \in (-\infty;\ 1) \cup (2;\ \infty)$.

11) При $k \in \left(4 + 2\sqrt{3};\ \infty\right)$ $\quad x \in (-\infty;\ 1) \cup (2;\ \infty)$.

8. Исследовать и решить неравенство $\dfrac{(a^2-a-6)x+a}{x^2-x-2}<0$.

Если $a^2-a-6\neq 0$,

то $x_1=-\dfrac{a}{a^2-a-6}$ — корень уравнения

$(a^2-a-6)x+a=0$.

Числа -1 и 2 — корни уравнения $x^2-x-2=0$. Рассмотрим различные взаимоотношения между корнями числителя и знаменателя.

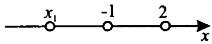
а) 

Рис. 386.

Если $x<-1$, то $-\dfrac{a}{a^2-a-6}<-1$, т.е. $\dfrac{a^2-2a-6}{a^2-a-6}<0$.

Изобразим решение графически.

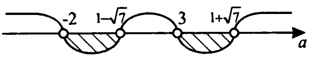


Рис. 387.

1) Если $a^2-a-6>0$:

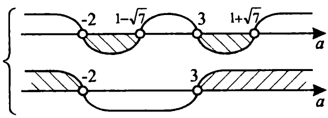
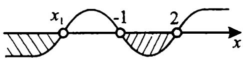


Рис. 388.

Значит $a\in(3;\ 1+\sqrt{7})$, тогда



$x\in\left(-\infty;-\dfrac{a}{a^2-a-6}\right)\cup(-1;2)$.

Рис. 389.

2) Если $a^2 - a - 6 < 0$:

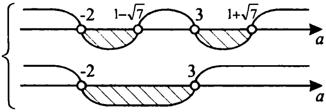


Рис. 390.

Значит $a \in \left(-2;\ 1-\sqrt{7}\right)$,

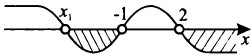
тогда 

Рис. 391.

$$x \in \left(-\frac{a}{a^2-a-6};\ -1\right) \cup (2;\ \infty).$$

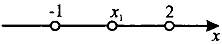
б) 

Рис. 392.

Если $-1 < x_1 < 2$, то $-1 < -\dfrac{a}{a^2-a-6} < 2$,

т. е. $\begin{cases} \dfrac{a^2-2a-6}{a^2-a-6} > 0 \\ \dfrac{2a^2-a-12}{a^2-a-6} > 0. \end{cases}$

Убеждаемся, что $\dfrac{1\pm\sqrt{97}}{4}$ — корни уравнения $2a^2 - a - 12 = 0$; $1 \pm \sqrt{7}$ — корни уравнения $a^2 - 2a - 6 = 0$; числа -2 и 3 — корни уравнения $a^2 - a - 6 = 0$.

Учитывая, что $\dfrac{1+\sqrt{97}}{4} < 3$ и $\dfrac{1-\sqrt{97}}{4} < -2 < 1 - \sqrt{7}$, приведем графическое решение:

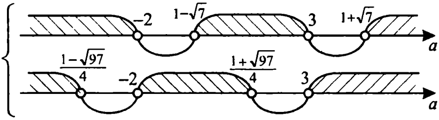


Рис. 393.

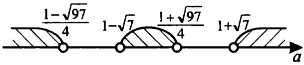
или 

Рис. 394.

1) Если $a^2 - a - 6 > 0$:

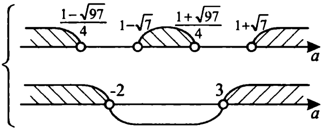
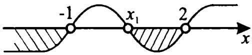


Рис. 395.

$a \in \left(-\infty;\ \dfrac{1-\sqrt{97}}{4}\right) \cup \left(1+\sqrt{7};\ \infty\right)$. Тогда



$x \in (-\infty;\ -1) \cup \left(-\dfrac{a}{a^2-a-6};\ 2\right)$.

Рис. 396.

2) Если $a^2 - a - 6 < 0$:

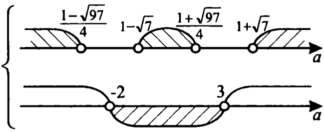


Рис. 397.

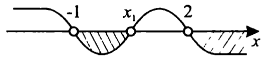
$a \in \left(1-\sqrt{7};\ \dfrac{1+\sqrt{97}}{4}\right)$, тогда 

Рис. 398.

$$x \in \left(-1;\ -\frac{a}{a^2-a-6}\right) \cup (2;\ \infty).$$

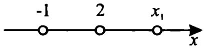
в) 

Рис. 399.

Если $x_1 > 2$, то $-\dfrac{a}{a^2-a-6} > 2$ или $\dfrac{2a^2-a-12}{a^2-a-6} < 0$,

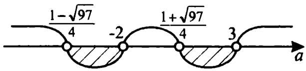
тогда 

Рис. 400.

1) Если $a^2-a-6>0$:

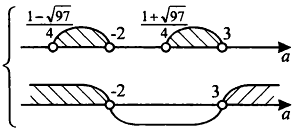


Рис. 401.

$\dfrac{1-\sqrt{97}}{4} < a < -2$,

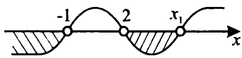
тогда 

Рис. 402.

$$x \in (-\infty;\ -1) \cup \left(2;\ -\frac{a}{a^2-a-6}\right).$$

2) Если $a^2 - a - 6 < 0$:

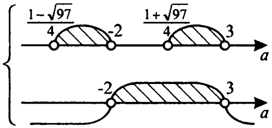


Рис. 403.

$$\frac{1+\sqrt{97}}{4} < a < 3,$$

тогда

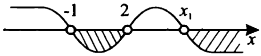


Рис. 404.

$$x \in (-1;\ 2) \cup \left(-\frac{a}{a^2-a-6};\ \infty\right).$$

г) Если $a = 3$, то $\frac{0 \cdot x + 3}{(x+1)(x-2)} < 0$,

т.е. $x \in (-1;\ 2)$.

д) Если $a = -2$, то $\frac{0 \cdot x - 2}{(x+1)(x-2)} < 0$,

т.е. $x \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ \infty)$.

е) Выясним, при каких значениях параметра a знаменатель данного неравенства равен нулю.

Пусть $x = -1$,

тогда $(a^2 - a - 6)(-1) + a = 0$,

т.е. $a^2 - 2a - 6 = 0$,

или $a_1 = 1 + \sqrt{7}$; $a_2 = 1 - \sqrt{7}$.

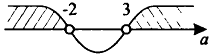
1) Если $a^2 - a - 6 > 0$: 

Рис. 405.

$1+\sqrt{7} \in (3;\ \infty)$; $1-\sqrt{7} \notin (-\infty;\ -2)$,

т.е. при $a = 1+\sqrt{7}$ неравенство $\frac{(x+1)}{(x+1)(x-2)} < 0$

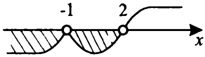
или  $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 2)$.

Рис. 406.

2) Если $a^2 - a - 6 < 0$, то $1-\sqrt{7} \in (-2;\ 3)$,

т.е. при $a = 1-\sqrt{7}$ неравенство $\frac{-(x+1)}{(x+1)(x-2)} < 0$

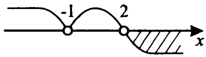
или  $x \in (2;\ \infty)$.

Рис. 407.

ж) Пусть $x = 2$, тогда $(a^2 - a - 6)\cdot 2 + a = 0$, т.е.

$2a^2 - a - 12 = 0$ или $a_1 = \frac{1+\sqrt{97}}{4}$; $a_2 = \frac{1-\sqrt{97}}{4}$.

1) Если $a^2 - a - 6 > 0$:

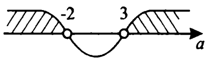


Рис. 408.

$\frac{1-\sqrt{97}}{4} \in (-\infty;\ -2)$, тогда $\frac{x-2}{(x+1)(x-2)} < 0$;

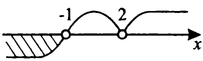
 $x \in (-\infty;\ -1)$.

Рис. 409.

2) Если $a^2 - a - 6 < 0$, то $\frac{1+\sqrt{97}}{4} \in (-2;\ 3)$, тогда

$-\frac{(x-2)}{(x+1)(x-2)} < 0$;

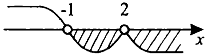


Рис. 410.

$x \in (-1;\ 2) \cup (2;\ \infty)$.

Ответ:

1) При $a \in \left(-\infty;\ \frac{1-\sqrt{97}}{4}\right)$ $x \in (-\infty;\ -1) \cup \left(-\frac{a}{a^2-a-6};\ 2\right)$.

2) При $a = \frac{1-\sqrt{97}}{4}$ $x \in (-\infty;\ -1)$.

3) При $a \in \left(\frac{1-\sqrt{97}}{4};\ -2\right)$ $x \in (-\infty;\ -1) \cup \left(2;\ -\frac{a}{a^2-a-6}\right)$.

4) При $a = -2$ $x \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ \infty)$.

5) При $a \in \left(-2;\ 1-\sqrt{7}\right)$ $x \in \left(-\frac{a}{a^2-a-6};\ -1\right) \cup (2;\ \infty)$.

6) При $a = 1-\sqrt{7}$ $x \in (2;\ \infty)$.

7) При $a \in \left(1-\sqrt{7};\ \frac{1+\sqrt{97}}{4}\right)$ $x \in \left(-1;\ -\frac{a}{a^2-a-6}\right) \cup (2;\ \infty)$.

8) При $a = \frac{1+\sqrt{97}}{4}$ $x \in (-1;\ 2) \cup (2;\ \infty)$.

9) При $a \in \left(\frac{1+\sqrt{97}}{4};\ 3\right)$ $x \in (-1;\ 2) \cup \left(-\frac{a}{a^2-a-6};\ \infty\right)$.

10) При $a = 3$ $x \in (-1;\ 2)$.

11) При $a \in \left(3;\ 1+\sqrt{7}\right)$ $x \in \left(-\infty;\ -\frac{a}{a^2-a-6}\right) \cup (-1;\ 2)$.

12) При $a = 1+\sqrt{7}$ $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 2)$.

13) При $a \in \left(1+\sqrt{7};\ \infty\right)$ $x \in (-\infty;\ -1) \cup \left(-\frac{a}{a^2-a-6};\ 2\right)$.

Содержание