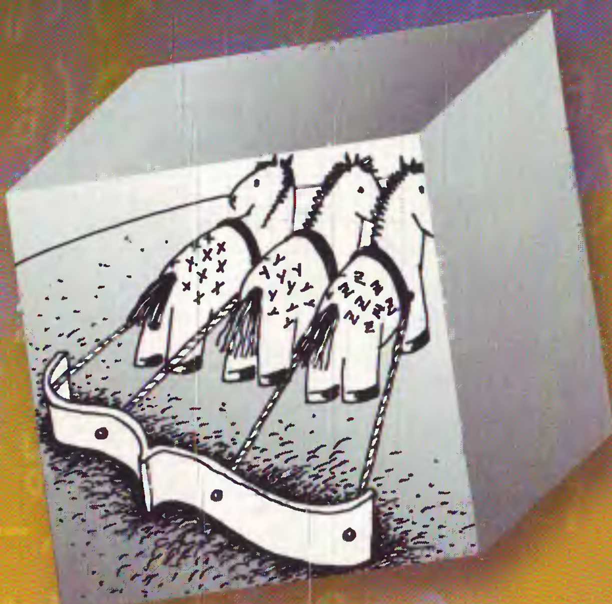
А. Х. Шахмейстер

Системы уравнений



Практикум
Тренинг
Контроль

А. Х. Шахмейстер

Системы уравнений

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И УЧИТЕЛЕЙ

**Под общей редакцией
заслуженного учителя РФ Б. Г. Зива**

С.-Петербург
Москва
2008

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Редакторы:

Кандидат физ.-мат. наук, доцент РГПУ им. Герцена, заслуженный учитель РФ С. Е. Рукшин.

Кандидат пед. наук, доцент кафедры математики МИОО А. В. Семенов.

Рецензенты:

Доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ Г. Ю. Ризниченко, заслуженный учитель РФ Т. И. Курсиш, заслуженный учитель РФ Е. Б. Лившиц.

Шахмейстер А.Х.

Ш32 Системы уравнений. — 3-е изд., исправленное и дополненное — М.: Издательство МЦНМО : СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс», 2008. — 184 с.: илл. — ISBN 978-5-94057-389-0, ISBN 978-5-98712-023-1, ISBN 978-5-91281-051-0.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

ISBN 978-5-94057-389-0 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-98712-023-1 (ООО «Петроглиф»)
ISBN 978-5-91281-051-0 (ООО «Виктория плюс»)

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Программа элективного курса для учащихся 8-10 классов (22 – 25 уроков).

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1 – 5 (+1)	**Основные методы решения систем линейных уравнений (стр. 5–28)** Практикум 1. Практикум 2. Тренировочная работа 1 (4, 6, 8). Практикум 3. Тренировочная работа 2 (1, 6, 7). Практикум 4 (облегченный метод Гаусса). Тренировочная работа 3 (4, 6, 7).
6 – 12 (+1)	**Нелинейные системы уравнений (стр. 29–89)** Практикум 5. Тренировочная работа 4 (2, 7). Практикум 6. Тренировочная работа 5 (3, 5, 8). Практикум 7. Тренировочная работа 6 (2, 10, 12, 16). Практикум 8 (1, 2, 3) показать возможность решения примеров методом алгебраических действий. Практикум 9. Тренировочная работа 7 (1, 3, 6, 7). Проверочная работа 3 (2, 5).
13 – 16	**Решение систем уравнений с тремя неизвестными (стр. 90–105)** Практикум 11 (обобщенная теорема Виета). Практикум 12.
17 – 22 (+1)	**Обобщение основных методов решения систем уравнений (стр. 95–182)** Тренировочные карточки: 1 (2, 3, 4); 2 (1, 4); 3 (1, 3, 4); 5 (3); 6 (1, 4); 8 (3, 4). Проверочная работа 1 (3, 4). Проверочная работа 2 (1, 8). Проверочная работа 3 (3, 4). Зачетная карточка 3 (2, 4). Зачетная карточка 6 (1, 2, 4).

Программа подготовлена, составлена и апробирована на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1

Основные методы решения систем линейных уравнений

Определение

Система уравнений вида

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, *где* $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

называется ***системой двух линейных уравнений (первой степени) с двумя неизвестными.***

Рассмотрим методы решения систем линейных уравнений.

Способ подстановки

Практикум 1

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$.

Выразим y через x во втором уравнении и подставим получившееся выражение вместо y в первое уравнение:

$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + 3(3x - 2) = 5 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + 9x - 6 = 5 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$;

$\begin{cases} 11x = 11 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \cdot 1 - 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Ответ: (1; 1).

2. $\begin{cases} 26x - 15y = -45 \\ 21x + 2y = 6 \end{cases}.$

$$\begin{cases} 26x - 15 \cdot \frac{6-21x}{2} = -45 \\ y = \frac{6-21x}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 52x - 90 + 315x = -90 \\ y = \frac{6-21x}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 367x = 0 \\ y = \frac{6-21x}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{6-21 \cdot 0}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Ответ: $\{(0; 3)\}$*.

3. $\begin{cases} \frac{3}{4x+13} - \frac{1}{y} = 0 \\ 7x + 24y = 65 \end{cases}.$

Эта система внешне выглядит как нелинейная, но легк преобразуется к линейной:

$$\begin{cases} 3y = 4x + 13 \\ 7x + 24y = 65 \\ x \neq -3{,}25 \\ y \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \frac{4x+13}{3} \\ 7x + 24\frac{4x+13}{3} = 65 \\ x \neq -3{,}25 \\ y \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \frac{4x+13}{3} \\ 7x + 8(4x + 13) = 65 \\ x \neq -3{,}25 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

Тогда $7x + 32x + 104 = 65$; $39x = -39$; $x = -1$.

Далее

$$\begin{cases} y = \frac{4x+13}{3} \\ x = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \frac{4(-1)+13}{3} \\ x = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = -1 \end{cases}; \quad \left(\begin{cases} y \neq 0 \\ x \neq -3{,}25 \end{cases} \right).$$

Ответ: $(-1; 3)$.

*Эта запись обозначает множество всех пар, обращающих си тему уравнений в систему тождеств. В данном случае пар одна, но в дальнейшем их может быть значительно больш (не для линейных систем, разумеется).
Если существует только одна пара решений, то знак множ ства можно опустить.

Метод алгебраического сложения

Практикум 2

1. $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases}.$

а) Сложим уравнения, т. е. левую часть сложим с левой, а правую с правой.

б) Вычтем из первого уравнения второе уравнение.

$\begin{cases} (x + y) + (x - y) = 4 - 2 \\ (x + y) - (x - y) = 4 - (-2) \end{cases}; \quad \begin{cases} x + y + x - y = 2 \\ x + y - x + y = 6 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$

Ответ: (1; 3).

2. $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}. \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} + \boxed{2} \\ \boxed{1} - \boxed{2} \end{pmatrix}^* \begin{cases} 6x = 4 \\ -8y = 6 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases}.$

Ответ: $\left(\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}\right)$.

3. $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 7x - 5y = -5 \end{cases}.$

Чтобы воспользоваться методом алгебраического сложения, необходимо приравнять коэффициенты при x, а затем при y. Для этого первое уравнение умножим на 7, а второе на 2.

Тогда $\begin{array}{r} _{-}14x - 21y = 56 \\ 14x - 10y = -10 \\ \hline -11y = 66; \end{array} \quad y = -6.$

Затем первое уравнение умножим на 5, а второе на 3.

Тогда $\begin{array}{r} _{-}10x - 15y = 40 \\ 21x - 15y = -15 \\ \hline -11x = 55; \end{array} \quad x = -5.$

Ответ: (–5; –6).

**Примечание*: $\boxed{1}$ — первое уравнение предыдущей системы; $\boxed{2}$ — второе уравнение; $\boxed{3}$ — третье уравнение (здесь нет) и т.д. «+» означает сложение уравнений, «–» — вычитание.

Тренировочная работа 1

1. $\begin{cases} 2y + 3x = 5 \\ 3y - x = 2 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} 75y - 15x = 1{,}5 \\ 21y + 2x = 6 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} \dfrac{3}{4y+13} + \dfrac{1}{x} = 0 \\ 7y - 24x = 65 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ 4x + 5y = -3 \end{cases}.$

5. $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{3} + \dfrac{2x+y}{6} = 1 \\ \dfrac{-x+2y}{6} + \dfrac{2x+y}{2} = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$

6. $\begin{cases} \dfrac{3}{4x+9} + \dfrac{1}{y-1} = 0 \\ 7x - 24y = 48 \end{cases}.$

7. $\begin{cases} 2(y - 3{,}5x) - \dfrac{1}{3}(y - 2x) = 1 \\ 3(2x - y) - \dfrac{1}{2}(2x + y) = 2 \end{cases}.$

8. $\begin{cases} \dfrac{2x+9}{x-1} = \dfrac{4y+3}{2y-1} \\ \dfrac{3y+1}{2x-1} = \dfrac{3y-2}{2x+3} \end{cases}.$

Решение тренировочной работы 1

1. $\begin{cases} 2y + 3x = 5 \\ 3y - x = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2y + 3x = 5 \\ x = 3y - 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2y + 3(3y - 2) = 5 \\ x = 3y - 2 \end{cases}$;

$\begin{cases} 2y + 3y - 6 = 5 \\ x = 3y - 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 11y = 11 \\ x = 3y - 2 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \cdot 1 - 2 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Ответ: $(1; 1)$.

2. $\begin{cases} 75y - 15x = 1,5 \\ 21y + 2x = 6 \end{cases}$; $\begin{cases} 75y - 15x = 1,5 \\ 2x = 6 - 21y \end{cases}$; $\begin{cases} 75y - \frac{15(6-21y)}{2} = 1,5 \\ x = \frac{6-21y}{2} \end{cases}$.

Решим: $\begin{cases} 150y - 90 + 315y = 3 \\ x = \frac{6-21y}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} 465y = 93 \\ x = \frac{6-21y}{2} \end{cases}$;

$\begin{cases} y = \frac{93}{465} \\ x = \frac{6-21y}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} y = \frac{1}{5} \\ x = \frac{6-21\cdot\frac{1}{5}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} y = \frac{1}{5} \\ x = \frac{9}{10} \end{cases}$.

Ответ: $(0,9; 0,2)$.

3. $\begin{cases} \frac{3}{4y+13} + \frac{1}{x} = 0 \\ 7y - 24x = 65 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x + 4y + 13 = 0 \\ 7y - 24x = 65 \\ x \neq 0 \\ 4y + 13 \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -\frac{4y+13}{3} \\ 7y - 24\left(-\frac{4y+13}{3}\right) = 65 \\ x \neq 0 \\ 4y \neq -13 \end{cases}$;

$\begin{cases} x = -\frac{4y+13}{3} \\ 7y + 8(4y + 13) = 65 \\ x \neq 0 \\ y \neq -3\frac{1}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} x = -\frac{4y+13}{3} \\ 7y + 32y + 104 = 65 \\ x \neq 0 \\ y \neq -3,25 \end{cases}$;

$$\begin{cases} x = -\frac{4y+13}{3} \\ y = -\frac{39}{39} \\ x \neq 0 \\ y \neq -3{,}25 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\frac{-4+13}{3} \\ y = -1 \\ x \neq 0 \\ y \neq -3{,}25 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \\ x \neq 0 \\ y \neq -3{,}25 \end{cases}.$$

Ответ: $(-3; -1)$.

4. $\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ 4x + 5y = -3 \end{cases}$. Умножим $\boxed{1}$ уравнение на 5, а $\boxed{2}$ на 3.

$\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ 4x + 5y = -3 \end{cases}\left|\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix}\right.$; получим $\begin{cases} 25x - 15y = 10 \\ 12x + 15y = -9 \end{cases}$ $(\boxed{1} + \boxed{2})$;

$37x = 1 \quad x = \frac{1}{37}$.

Затем умножим $\boxed{1}$ уравнение на 4, а $\boxed{2}$ на 5.

$\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ 4x + 5y = -3 \end{cases}\left|\begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}\right.$; получим $\begin{cases} 20x - 12y = 8 \\ 20x + 25y = -15 \end{cases}$ $(\boxed{1} - \boxed{2})$;

$-37y = 23 \quad y = -\frac{23}{37}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{37}; -\frac{23}{37}\right)$.

5. $\begin{cases} \frac{x-2y}{3} + \frac{2x+y}{6} = 1 \\ \frac{-x+2y}{6} + \frac{2x+y}{2} = \frac{2}{3} \end{cases}\left|\begin{matrix} \cdot 6 \\ \cdot 6 \end{matrix}\right.$.

Для того, чтобы привести исходные уравнения к виду уравнений с целыми коэффициентами, умножим обе части уравнений на общий знаменатель.

$$\begin{cases} 2(x - 2y) + 2x + y = 6 \\ -x + 2y + 3(2x + y) = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x - 4y + 2x + y = 6 \\ -x + 2y + 6x + 3y = 4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 5x + 5y = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ x + y = \frac{4}{5} \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x - 3\left(\frac{4}{5} - x\right) = 6 \\ y = \frac{4}{5} - x \end{cases};$$

$$\begin{cases}4x - \frac{12}{5} + 3x = 6\\ y = \frac{4}{5} - x\end{cases}; \quad \begin{cases}7x = 8{,}4\\ y = \frac{4}{5} - x\end{cases}; \quad \begin{cases}x = 1{,}2\\ y = 0{,}8 - 1{,}2\end{cases};$$

$$\begin{cases}x = 1{,}2\\ y = -0{,}4\end{cases}.$$

Ответ: $(1{,}2; -0{,}4)$.

6. $$\begin{cases}\frac{3}{4x+9} + \frac{1}{y-1} = 0\\ 7x - 24y = 48\end{cases}.$$

Приведем $\boxed{1}$ уравнение к уравнению с целыми коэффициентами, для этого умножим обе части уравнения на $(y-1)(4x+9)$; получим

$$\begin{cases}3(y-1) + 4x + 9 = 0\\ 7x - 24y = 48\\ y - 1 \neq 0\\ 4x + 9 \neq 0\end{cases}; \quad \begin{cases}4x + 3y = -6\\ 7x - 24y = 48\\ y - 1 \neq 0\\ 4x + 9 \neq 0\end{cases}\left|\begin{matrix}\cdot 8\\ \\ \end{matrix}\right.;$$

$$\begin{cases}32x + 24y = -48\\ 7x - 24y = 48\end{cases} (\boxed{1} + \boxed{2}); \quad 39x = 0; \quad x = 0.$$

Итак $$\begin{cases}x = 0\\ 7x - 24y = 48\end{cases}; \quad \begin{cases}x = 0\\ 0 - 24y = 48\end{cases}; \quad \begin{cases}x = 0 \neq -2{,}28\\ y = -2 \neq 1\end{cases}.$$

Ответ: $(0; -2)$.

7. $$\begin{cases}2(y - 3{,}5x) - \frac{1}{3}(y - 2x) = 1\\ 3(2x - y) - \frac{1}{2}(2x + y) = 2\end{cases}\left|\begin{matrix}\cdot 3\\ \cdot 2\end{matrix}\right.;$$

$$\begin{cases}6(y - 3{,}5x) - (y - 2x) = 3\\ 6(2x - y) - (2x + y) = 4\end{cases}; \quad \begin{cases}6y - 21x - y + 2x = 3\\ 12x - 6y - 2x - y = 4\end{cases};$$

$$\begin{cases}5y - 19x = 3\\ -7y + 10x = 4\end{cases}\left|\begin{matrix}\cdot 7\\ \cdot 5\end{matrix}\right.; \quad \begin{cases}35y - 133x = 21\\ -35y + 50x = 20\end{cases} (\boxed{1} + \boxed{2});$$

$$-83x = 41; \quad x = -\frac{41}{83};$$

$$\begin{cases}5y - 19x = 3\\ -7y + 10x = 4\end{cases}\left|\begin{matrix}\cdot 10\\ \cdot 19\end{matrix}\right.;\quad \begin{cases}50y - 190x = 30\\ -133y + 190x = 76\end{cases}\quad (\boxed{1} + \boxed{2});$$

$$-83y = 106;\quad y = -\frac{106}{83} = -1\frac{23}{83}.$$

Ответ: $\left(-\frac{41}{83}; -1\frac{23}{83}\right)$.

8. $\begin{cases}\dfrac{2x+9}{x-1} = \dfrac{4y+3}{2y-1}\\ \dfrac{3y+1}{2x-1} = \dfrac{3y-2}{2x+3}\end{cases}.$

Приведем систему к системе уравнений с целочисленными коэффициентами.

$$\begin{cases}(2x + 9)(2y - 1) = (4y + 3)(x - 1)\\ (3y + 1)(2x + 3) = (3y - 2)(2x - 1)\\ x \ne 1;\ x \ne 0,5\\ y \ne 0,5;\ y \ne -1,5\end{cases};$$

$$\begin{cases}4xy + 18y - 2x - 9 = 4xy + 3x - 4y - 3\\ 6xy + 9y + 2x + 3 = 6xy - 4x - 3y + 2\\ x \ne 1;\ x \ne 0,5\\ y \ne 0,5\ y \ne -1,5\end{cases};$$

$$\begin{cases}18y - 2x - 9 = 3x - 4y - 3\\ 9y + 2x + 3 = -4x - 3y + 2\end{cases}\quad \begin{cases}22y - 5x = 6\\ 12y + 6x = -1\end{cases}\left|\begin{matrix}\cdot 6\\ \cdot 5\end{matrix}\right.;$$

$$\begin{cases}132y - 30x = 36\\ 60y + 30x = -5\end{cases}(\boxed{1} + \boxed{2});\quad 192y = 31;\quad y = \frac{31}{192}.$$

$$\begin{cases}22y - 5x = 6\\ 12y + 6x = -1\end{cases}\left|\begin{matrix}\cdot 12\\ \cdot 22\end{matrix}\right.;\quad \begin{cases}264y - 60x = 72\\ 264y + 132x = -22\end{cases}\quad (\boxed{1} - \boxed{2});$$

$$-192x = 94;\quad x = -\frac{94}{192} = -\frac{47}{96}.$$

Ответ: $\left(-\frac{47}{96}; \frac{31}{192}\right)$.

Комбинированные способы

Практикум 3

1. $\begin{cases} \dfrac{6}{x+y} + \dfrac{5}{x-y} = 7 \\ \dfrac{3}{x+y} - \dfrac{2}{x-y} = -1 \end{cases}.$

Пусть $\dfrac{3}{x+y} = a$; $\dfrac{1}{x-y} = b$. Получаем $\begin{cases} 2a + 5b = 7 \\ a - 2b = -1 \end{cases}.$

Второе уравнение умножим на 2 и вычтем из первого:

$$-\begin{array}{r} 2a + 5b = 7 \\ 2a - 4b = -2 \\ \hline 9b = 9; \end{array} \qquad b = 1, \quad \text{тогда } a = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

Возвращаясь к переменным x и y, получаем $\begin{cases} \dfrac{3}{x+y} = 1 \\ \dfrac{1}{x-y} = 1 \end{cases}.$

Тогда $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}.$

а) Сложим уравнения $(\boxed{1} + \boxed{2})$.

б) Вычтем из первого уравнения второе уравнение: $(\boxed{1} - \boxed{2})$.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} + \boxed{2} \\ \boxed{1} - \boxed{2} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2x = 4 \\ 2y = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Ответ: (2; 1).

2. $\begin{cases} (x + 2y - 1)(2y - x + 1) = 0 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}.$

Ясно, что данная система не является линейной, но легко решается как совокупность линейных уравнений.

Так как $\begin{cases} a \cdot b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \end{array}\right.$, то $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} 2y - x + 1 = 0 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases} \end{array}\right.$.

Решая первую систему уравнений, получаем:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases} \quad \left(\boxed{1} \cdot 3 - \boxed{2}\right); \quad \begin{array}{r} - \begin{array}{r} 3x + 6y = 3 \\ 3x - 4y = 7 \end{array} \\ \hline 10y = -4; \end{array} \quad y = -0{,}4.$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases} \quad \left(\boxed{1} \cdot 2 + \boxed{2}\right); \quad \begin{array}{r} + \begin{array}{r} 2x + 4y = 2 \\ 3x - 4y = 7 \end{array} \\ \hline 5x = 9; \end{array} \quad x = 1{,}8.$$

$(1{,}8; -0{,}4)$ — решение системы.

Решая вторую систему, получим:

$$\begin{cases} 2y - x + 1 = 0 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases} \quad \left(\boxed{1} \cdot 3 + \boxed{2}\right); \quad \begin{array}{r} + \begin{array}{r} -3x + 6y = -3 \\ 3x - 4y = 7 \end{array} \\ \hline 2y = 4; \end{array} \quad y = 2.$$

$$\begin{cases} 2y - x + 1 = 0 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases} \quad \left(\boxed{1} \cdot 2 + \boxed{2}\right); \quad \begin{array}{r} + \begin{array}{r} -2x + 4y = -2 \\ 3x - 4y = 7 \end{array} \\ \hline x = 5; \end{array} \quad x = 5.$$

$(5; 2)$ — решение системы.

Ответ: $\{(1{,}8; -0{,}4); (5; 2)\}$.

3. $\begin{cases} |x + 5| = 3y - 4 \\ |3y - 4| = 2x + 8 \end{cases}.$

Так как $|a| \geqslant 0$ $(\forall a)$, то $3y - 4 \geqslant 0 \;\Rightarrow\; |3y - 4| = 3y - 4$.

$2x + 8 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -4 \Rightarrow |x + 5| = x + 5$.

Тогда исходная система приобретает вид

$$\begin{cases} x + 5 = 3y - 4 \\ 3y - 4 = 2x + 8 \end{cases}; \quad \begin{array}{r} - \begin{array}{r} x - 3y = -9 \\ 2x - 3y = -12 \end{array} \\ \hline -x = 3; \end{array} \quad -3 - 3y = -9; \quad y = 2.$$

Ответ: $(-3; 2)$.

Тренировочная работа 2

1. $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{4} - \dfrac{4x-2y}{3} = -1\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{x+3y}{6} + \dfrac{2x-y}{4} = \dfrac{7}{12} \end{cases}.$

2. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{10}{x-y} = 1 \\ \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{2}{x-y} = -\dfrac{3}{5} \end{cases}.$

3. $\begin{cases} \dfrac{1}{3x+7y} = 1 \\ \dfrac{11}{x-3y} = 3x + 7y \end{cases}.$

4. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = \dfrac{5}{6} \\ (2x - 3y)\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3}\right) = 22{,}5 \end{cases}.$

5. $\begin{cases} (2x + y - 1)(2x - y + 1) = 0 \\ 3y - 4x = 7 \end{cases}.$

6. $\begin{cases} (3x - y + 5)^2 = (x + 2y - 3)^2 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}.$

7. $\begin{cases} |x - 5| = 3y + 4 \\ |3y + 5| = 2x - 10 \end{cases}.$

Решение тренировочной работы 2

1. $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{4} - \dfrac{4x-2y}{3} = -1\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{x+3y}{6} + \dfrac{2x-y}{4} = \dfrac{7}{12} \end{cases} \left|\begin{array}{l} \cdot 12 \\ \\ \cdot 12 \end{array}\right.;$

$\begin{cases} 3(x+3y) - 4(4x-2y) = -14 \\ 2(x+3y) + 3(2x-y) = 7 \end{cases};\quad \begin{cases} 3x + 9y - 16x + 8 = -14 \\ 2x + 6y + 6x - 3y = 7 \end{cases};$

$\begin{cases} 17y - 13x = -14 \\ 3y + 8x = 7 \end{cases} \left|\begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 17 \end{array}\right.;\quad \begin{cases} 51y - 39x = -42 \\ 51y + 136x = 119 \end{cases} \quad (\boxed{2} - \boxed{1});$

$175x = 161; \quad x = \dfrac{161}{175} = \dfrac{23}{25}.$

$\begin{cases} 17y - 13x = -14 \\ 3y + 8x = 7 \end{cases} \left|\begin{array}{l} \cdot 8 \\ \cdot 13 \end{array}\right.;\quad \begin{cases} 136y - 104x = -112 \\ 39y + 104x = 91 \end{cases} \quad (\boxed{1} + \boxed{2});$

$175y = -21; \quad y = -\dfrac{21}{175} = -\dfrac{3}{25}.$

$\begin{cases} x = \dfrac{23}{25} \\ y = -\dfrac{3}{25} \end{cases}.$

Ответ: $\left(\dfrac{23}{25}; -\dfrac{3}{25}\right)$.

2. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{10}{x-y} = 1 \\ \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{2}{x-y} = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$ Положим $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = a \\ \dfrac{2}{x-y} = b \end{cases}$, тогда

$\begin{cases} a - 5b = 1 \\ a + b = -\dfrac{3}{5} \end{cases} (\boxed{1} - \boxed{2}); \quad -6b = 1 + \dfrac{3}{5}; \quad b = -\dfrac{8}{5} \cdot \dfrac{1}{6} = -\dfrac{4}{15};$

$a + \left(-\dfrac{4}{15}\right) = -\dfrac{3}{5}; \quad a = \dfrac{4}{15} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{4-9}{15} = -\dfrac{1}{3},$ тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{x-y} = -\frac{4}{15} \end{cases} \quad (x \neq \pm y); \quad \begin{cases} x + y = -3 \\ 4y - 4x = 30 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot\ 2 \\ :\ 2 \end{matrix} \right. ;$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = -6 \\ -2x + 2y = 15 \end{cases} (\boxed{1} + \boxed{2}); \quad 4y = 9; \quad y = 2\frac{1}{4};$$

$$x + 2\frac{1}{4} = -3;$$

$x = -5\frac{1}{4}$; причем $x \neq \pm 2\frac{1}{4}$.

Ответ: $\left(-5\frac{1}{4}; 2\frac{1}{4}\right)$.

3. $$\begin{cases} \frac{1}{3x+7y} = 1 \\ \frac{11}{x-3y} = 3x + 7y \end{cases}; \begin{cases} 3x + 7y = 1 \\ 11 = (3x + 7y)(x - 3y) \\ x - 3y \neq 0 \end{cases}; \begin{cases} 3x + 7y = 1 \\ 11 = 1 \cdot (x - 3y) \\ x - 3y \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3x + 7y = 1 \\ x - 3y = 11 \\ x - 3y \neq 0 \end{cases} \Bigg| \cdot 3; \quad \begin{cases} 3x + 7y = 1 \\ 3x - 9y = 33 \end{cases} \quad (\boxed{1} - \boxed{2});$$

$16y = -32$; $y = -2$; $x - 3(-2) = 11$; $x = 5$,

причем $5 \neq 3 \cdot (-2)$.

Ответ: $(5; -2)$.

4. $$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{5}{6} \\ (2x - 3y)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = 22{,}5 \end{cases} \Bigg| \cdot 6; \quad \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ (2x - 3y)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = 22{,}5 \end{cases} \Bigg| \cdot 6;$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5 \cdot (3x + 2y) = 135 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 2x + 2y = 27 \end{cases}; \quad \text{а)} \left| \begin{matrix} \cdot\ 2 \\ \cdot\ 3 \end{matrix} \right.; \quad \text{б)} \left| \begin{matrix} \cdot\ 3 \\ \cdot\ 2 \end{matrix} \right. .$$

а) $\begin{cases}4x - 6y = 10\\ 9x + 6y = 81\end{cases}$ $(\boxed{1} + \boxed{2})$; $13x = 91$; $x = 7$.

б) $\begin{cases}6x - 9y = 15\\ 6x + 4y = 54\end{cases}$ $(\boxed{1} - \boxed{2})$; $-13y = -39$;

$y = 3$; $\begin{cases}x = 7\\ y = 3\end{cases}$.

Ответ: (7;3).

5. $\begin{cases}(2x + y - 1)(2x - y + 1) = 0\\ 3y - 4x = 7\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x + y - 1 = 0\\ 3y - 4x = 7\end{cases}\\ \begin{cases}2x - y + 1 = 0\\ 3y - 4x = 7\end{cases}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y = 1 - 2x\\ 3(1 - 2x) - 4x = 7\end{cases}\\ \begin{cases}y = 2x + 1\\ 3(1 + 2x) - 4x = 7\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y = 1 - 2x\\ 3 - 10x = 7\end{cases}\\ \begin{cases}y = 1 + 2x\\ 3 + 2x = 7\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y = 1 - 2x\\ x = -0,4\end{cases}\\ \begin{cases}y = 1 + 2x\\ x = 2\end{cases}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y = 1 - 2(-0,4)\\ x = -0,4\end{cases}\\ \begin{cases}y = 1 + 2 \cdot 2\\ x = 2\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y = 1,8\\ x = -0,4\end{cases}\\ \begin{cases}y = 5\\ x = 2\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ: $\{(-0,4;1,8);(2;5)\}$.

6. $\begin{cases}(3x - y + 5)^2 = (x + 2y - 3)^2\\ 2x - 3y = 4\end{cases}$

$\begin{cases}(3x - y + 5)^2 - (x + 2y - 3)^2 = 0\\ 2x - 3y = 4\end{cases}$

Учитывая, что в $\boxed{1}$ уравнении есть разность квадратов, получим

$$\begin{cases}(3x - y + 5 + x + 2y - 3)(3x - y + 5 - x - 2y + 3) = 0\\ 2x - 3y = 4\end{cases}$$

$$\begin{cases}(y + 4x + 2)(2x - 3y + 8) = 0\\ 2x - 3y = 4\end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y + 4x + 2 = 0\\ 2x - 3y = 4\end{cases} \Big| \cdot 2\\ \begin{cases}2x - 3y + 8 = 0\\ 2x - 3y = 4\end{cases} \quad (\boxed{1} - \boxed{2})\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y + 4x = -2\\ -6y + 4x = 8\end{cases} (\boxed{1} - \boxed{2})\\ \begin{cases}2x - 3y = 4\\ 8 = -4\end{cases} \varnothing\end{array}\right. \qquad \begin{cases}y + 4x = -2\\ 7y = -10\end{cases} \qquad \begin{cases}-\frac{10}{7} + 4x = -2\\ y = -\frac{10}{7}\end{cases}$$

$$4x = -2 + \frac{10}{7}; \quad 4x = -\frac{4}{7}; \quad x = -\frac{1}{7}$$

О т в е т: $\left(-\frac{1}{7};-1\frac{3}{7}\right)$.

7. $\begin{cases}|x - 5| = 3y + 4\\ |3y + 5| = 2x - 10\end{cases}$ Так как $|a| \geqslant 0$, то $3y + 4 \geqslant 0$

и $2x - 10 \geqslant 0$; $y \geqslant -\frac{4}{3}$ и $x \geqslant 5$,

т.е. $\begin{cases}x - 5 \geqslant 0\\ 3y + 5 \geqslant 0\end{cases}$, $\begin{cases}x \geqslant 5\\ y \geqslant -1\frac{2}{3}\end{cases}$

значит $\begin{cases}|x - 5| = x - 5\\ |3y + 5| = 3y + 5\end{cases}$, тогда $\begin{cases}x - 5 = 3y + 4\\ 3y + 5 = 2x - 10\end{cases}$

$$\begin{cases}x = 3y + 9\\ 2x = 3x + 15\end{cases} (\boxed{2} - \boxed{1}); \quad \begin{cases}x = 6\\ x = 3y + 9\end{cases}; \quad \begin{cases}x = 6\\ 6 = 3y + 9\end{cases}$$

$$\begin{cases}x = 6 \geqslant 5\\ y = -1 > -1\frac{2}{3}\end{cases}$$

О т в е т: $(6;-1)$.

Метод алгебраического сложения при решении систем трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

Практикум 4

1. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+3y+2z=3 \\ 2x+2y+z=1 \end{cases}.$

а) Вычтем из первого уравнения второе уравнение:

$$\begin{array}{r} _{-}\begin{array}{r} x+\ y+\ z=1 \\ x+3y+2z=3 \end{array} \\ \hline -2y-z=-2. \end{array}$$

В исходной системе заменим второе уравнение на уравнение $-2y-z=-2$.

б) Умножим первое уравнение на 2 и вычтем из него третье уравнение:

$$\begin{array}{r} _{-}\begin{array}{r} 2x+2y+2z=2 \\ 2x+2y+\ z=1 \end{array} \\ \hline z=1. \end{array}$$

В исходной системе заменим третье уравнение на уравнение $z=1$.

Система приобретет следующий вид:

$$\begin{cases} x+y+z=\ 1 \\ -2y-z=-2 \\ \qquad z=1 \end{cases}.$$

Тогда, подставляя $z=1$ в первые два уравнения, получаем:

$$\begin{cases} x+y+1=\ 1 \\ -2y-1=-2 \\ \qquad z=1 \end{cases}.$$

Подставляя $y=\frac{1}{2}$ в первое уравнение, получаем: $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=1 \end{cases}.$

Ответ: (–0,5; 0,5; 1).

2. $\begin{cases} x+8y-2z=-10 \\ 3x-2y+5z=-4 \\ 5x+2y+z=-12 \end{cases}$. $\left(\begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{1}\cdot 3-\boxed{2} \\ \boxed{1}\cdot 5-\boxed{3} \end{array}\right)$

Здесь: а) первое уравнение оставляем неизменным; б) вместо второго уравнения записываем уравнение, получающееся умножением первого уравнения на 3 и вычитанием из произведения второго уравнения; в) вместо третьего уравнения записываем уравнение, получающееся умножением первого уравнения на 5 и вычитанием из произведения третьего уравнения.

$\begin{cases} x+8y-2z=-10 \\ 0+26y-11z=-26 \\ 0+38y-11z=-38 \end{cases}$. $\left(\begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{2}-\boxed{3} \end{array}\right)$ То есть вычитаем из второго уравнения третье уравнение.

Получаем $\begin{cases} x+8y-2z=-10 \\ 26y-11z=-26 \\ -12y+\ \ 0=12 \end{cases}$. Значит, $y=-1$.

Тогда $\begin{cases} x-8-2z=-10 \\ 26(-1)-11z=-26 \\ y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x-2z=-2 \\ z=0 \\ y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2 \\ z=0 \\ y=-1 \end{cases}$.

Ответ: $(-2; -1; 0)$.

3. $\begin{cases} \frac{8}{x+y}-\frac{4}{y+z}+\frac{1}{x+z}=3 \\ \frac{2}{x+y}-\frac{3}{y+z}-\frac{3}{x+z}=-13 \\ \frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{2}{x+z}=9 \end{cases}$. Пусть $\frac{1}{x+y}=a$; $\frac{1}{y+z}=b$; $\frac{1}{x+z}=c$.

Получаем $\begin{cases} 8a-4b+c=3 \\ 2a-3b-3c=-13 \\ a+b+2c=9 \end{cases}$; $\left(\begin{array}{l} \boxed{1}-8\cdot\boxed{3} \\ \boxed{2}-2\cdot\boxed{3} \\ \boxed{3} \end{array}\right)$

То есть: а) из первого уравнения вычитаем третье, умноженное на 8; б) из второго уравнения вычитаем третье, умноженное на 2.

Получаем:

$$\begin{cases} 0-12b-15c=-69 \\ 0-5b-7c=-31 \\ a+b+2c=9 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4b+5c=23 \\ 5b+7c=31 \\ a+b+2c=9 \end{cases} \quad \left(5\cdot\boxed{1}-4\cdot\boxed{2}\right).$$

Здесь первое уравнение умножаем на 5 и вычитаем из него второе уравнение, умноженное на 4. Получаем:

$$\begin{cases} 0-3c=-9 \\ 5b+7c=31 \\ a+b+2c=9 \end{cases}; \quad \begin{cases} c=3 \\ 5b=10 \\ a+b=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} c=3 \\ b=2 \\ a=1 \end{cases}.$$

То есть $\begin{cases} \frac{1}{x+z}=3 \\ \frac{1}{y+z}=2 \\ \frac{1}{x+y}=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=\frac{1}{2} \\ x+z=\frac{1}{3} \end{cases}. \quad \begin{pmatrix} \boxed{1}-\boxed{2} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{pmatrix}$

Вычитаем из первого уравнения второе.

Получаем $\begin{cases} x-z=\frac{1}{2} \\ y+z=\frac{1}{2} \\ x+z=\frac{1}{3} \end{cases}. \quad \begin{pmatrix} \boxed{1}+\boxed{3} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3}-\boxed{1} \end{pmatrix}$

Сложим первое и третье уравнения:

$$2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}; \quad x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right); \quad x=\frac{5}{12}.$$

Из третьего уравнения получим $z=\frac{1}{3}-\frac{5}{12}=-\frac{1}{12}$, из второго — $y=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{7}{12}$.

Тогда $\begin{cases} x=\frac{5}{12} \\ y=\frac{7}{12} \\ z=-\frac{1}{12} \end{cases}.$

Ответ: $\left(\frac{5}{12}; \frac{7}{12}; -\frac{1}{12}\right)$.

Тренировочная работа 3

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-3y} + \dfrac{2}{3x-2y} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{3}{2x-3y} + \dfrac{4}{3x-2y} = \dfrac{7}{4} \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{6} = \dfrac{1}{2} \\ (6x+4y)\left(x + \dfrac{1}{2}y\right) = -12 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} 1 = \dfrac{1}{8x-3y} \\ \dfrac{12}{x+2y} = 8x - 3y \end{cases}$.

4. $\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 2x - 6y + 2z = 3 \\ 4x - 4y + z = 1 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} (3x - 2y + 1)^2 = (2x + y - 2)^2 \\ (2x - y)^2 = (x + y - 3)^2 \end{cases}$.

6. $\begin{cases} 2|x+5| = y + 4 \\ |7 + y| = 15 + 3x \end{cases}$.

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{8}{y+2} + \dfrac{2}{2z-1} = -8 \\ \dfrac{3}{1-x} - \dfrac{2}{y+2} - \dfrac{5}{2z-1} = -9 \\ \dfrac{5}{1-x} + \dfrac{2}{y+2} - \dfrac{1}{2z-1} = -13 \end{cases}$.

Решение тренировочной работы 3

1. $\begin{cases} \frac{1}{2x-3y} + \frac{2}{3x-2y} = \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2x-3y} + \frac{4}{3x-2y} = \frac{7}{4} \end{cases}$.

Пусть $\frac{1}{2x-3y} = a$ и $\frac{2}{3x-2y} = b$,

тогда $\begin{cases} a + b = \frac{3}{4} \\ 3a + 2b = \frac{7}{4} \end{cases} \Big| \cdot 2$; $\begin{cases} 2a + 2b = \frac{3}{2} \\ 3a + 2b = \frac{7}{4} \end{cases}$ $(\boxed{2} - \boxed{1})$;

$a = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$;

т.е. $\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{3}{4} - a \end{cases}$; $\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$;

а) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{vmatrix}$; $\begin{cases} 6x - 9y = 12 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases}$ $(\boxed{1} - \boxed{2})$;

$-5y = 4$; $y = -\frac{4}{5}$.

б) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{vmatrix}$; $\begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ 9x - 6y = 12 \end{cases}$ $(\boxed{2} - \boxed{1})$;

$5x = 4$; $x = \frac{4}{5}$.

Ответ: $\left(\frac{4}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.

2. $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = \frac{1}{2} \\ (6x + 4y)\left(x + \frac{1}{2}y\right) = -12 \end{cases} \Big| \cdot 12$;

$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 2(3x + 2y)\left(x + \frac{1}{2}y\right) = -12 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 6(2x + y) = -12 \end{cases}$;

$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x + 2(-2 - 2x) = 6 \\ y = -2 - 2x \end{cases}$; $\begin{cases} 3x - 4 - 4x = 6 \\ y = -2 - 2x \end{cases}$;

$$\begin{cases}-x = 10\\ y = -2 - 2x\end{cases}; \quad \begin{cases}x = -10\\ y = -2 - 2(-10)\end{cases}; \quad \begin{cases}x = -10\\ y = 18\end{cases}.$$

Ответ: $(-10;18)$.

3. $$\begin{cases}1 = \frac{1}{8x-3y}\\ \frac{12}{x+2y} = 8x - 3y\end{cases}. \qquad D(C)^*: \begin{cases}8x - 3y \neq 0\\ x + 2y \neq 0\end{cases}; \quad \begin{cases}x \neq \frac{3}{8}y\\ x \neq -2y\end{cases}.$$

$$\begin{cases}8x - 3y = 1\\ 12 = (8x - 3y)(x + 2y)\end{cases}; \quad \begin{cases}8x - 3y = 1\\ x + 2y = 12\end{cases};$$

$$\begin{cases}x = -2y + 12\\ 8(-2y + 12) - 3y = 1\end{cases};$$

$$\begin{cases}96 - 18y - 3y = 1\\ x = 12 - 2y\end{cases}; \quad \begin{cases}y = 5\\ x = 12 - 2y\end{cases}; \quad \begin{cases}y = 5\\ x = 2\end{cases} \in D(C).$$

Ответ: $(2;5)$.

4. $$\begin{cases}2x - 2y + z = 1\\ 2x - 6y + 2z = 3\\ 4x - 4y + z = 1\end{cases}\left|\begin{matrix}\cdot 2\\ \cdot 2\\ \end{matrix}\right.;$$

$$\begin{cases}4x - 4y + 2z = 2\\ 4x - 12y + 4z = 6\\ 4x - 4y + z = 1\end{cases} \begin{pmatrix}\boxed{1} - \boxed{2}\\ \boxed{1} - \boxed{3}\end{pmatrix}; \quad \begin{cases}2x - 2y + z = 1\\ 8y - 2z = -4\\ z = 1\end{cases};$$

$$\begin{cases}2x - 2y + z = 1\\ 8y - 2 = -4\\ z = 1\end{cases}; \quad \begin{cases}2x - 2\left(-\frac{1}{4}\right) = 0\\ y = -\frac{1}{4}\\ z = 1\end{cases}; \quad \begin{cases}x = -\frac{1}{4}\\ y = -\frac{1}{4}\\ z = 1\end{cases}.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; 1\right)$.

$^*D(C)$ — область определения системы уравнений.

5. $\begin{cases}(3x-2y+1)^2=(2x+y-2)^2\\(2x-y)^2=(x+y-3)^2\end{cases};$

$$\begin{cases}(3x-2y+1+2x+y-2)(3x-2y+1-2x-y+2)=0\\(2x-y+x+y-3)(2x-y-x-y+3)=0\end{cases};$$

$$\begin{cases}(5x-y-1)(x-3y+3)=0\\(3x-3)(x-2y+3)=0\end{cases};$$

а) $\begin{cases}5x-y-1=0\\3x-3=0\end{cases};$ $\begin{cases}y=4\\x=1\end{cases};$

б) $\begin{cases}x-3y+3=0\\3x-3=0\end{cases};$ $\begin{cases}y=\dfrac{4}{3}\\x=1\end{cases};$

в) $\begin{cases}5x-y-1=0\\x-2y+3=0\end{cases};$ $\begin{cases}5(2y-3)-y-1=0\\x=2y-3\end{cases};$

$\begin{cases}9y=16\\x=2y-3\end{cases};$ $\begin{cases}y=1\dfrac{7}{9}\\x=\dfrac{5}{9}\end{cases};$

г) $\begin{cases}x-3y+3=0\\x-2y+3=0\end{cases}$ $(\boxed{2}-\boxed{1});$ $\begin{cases}y=0\\x=-3\end{cases}.$

Ответ: $\left\{(1;4);\left(1;1\frac{1}{3}\right);\left(\frac{5}{9};1\frac{7}{9}\right);(-3;0)\right\}.$

6. $\begin{cases}2|x+5|=y+4\\|7+y|=15+3x\end{cases}$

а) так как $|x+5|\geqslant 0$, то $y+4\geqslant 0$, значит $y+7\geqslant 0$, тогда $|y+7|=y+7$;

б) так как $|7+y|\geqslant 0$, то $15+3x\geqslant 0$; $x+5\geqslant 0$, значит $|x+5|=x+5$.

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases}2x+10=y+4\\7+y=15+3x\end{cases};\quad \begin{cases}2x-y=-6\\3x-y=-8\end{cases}\quad (\boxed{2}-\boxed{1});$$

$$\begin{cases}x=-2\\2(-2)-y=-6\end{cases};\quad \begin{cases}x=-2>-5\\y=2\ \ >-4\end{cases}.$$

Ответ: $(-2;\,2)$.

7. $$\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{8}{y+2}+\dfrac{2}{2z-1}=-8\\ \dfrac{3}{1-x}-\dfrac{2}{y+2}-\dfrac{5}{2z-1}=-9\\ \dfrac{5}{1-x}+\dfrac{2}{y+2}-\dfrac{1}{2z-1}=-13\end{cases}\quad \text{Пусть}\ \begin{matrix}\dfrac{1}{1-x}=a\\ \dfrac{2}{y+2}=b\\ \dfrac{1}{2z-1}=c\end{matrix},$$

тогда система приобретет вид:

$$\left.\begin{cases}a+4b+2c=-8\\3a-b-5c=-9\\5a+b-c=-13\end{cases}\right|\begin{matrix}\\ \cdot 4\\ \cdot 4\end{matrix};\quad \begin{cases}a+4b+2c=-8\\12a-4b-20c=-36\\20a+4b-4c=-52\end{cases}\begin{pmatrix}\boxed{1}+\boxed{2}\\ \boxed{2}+\boxed{3}\end{pmatrix};$$

$$\left.\begin{cases}a+4b+2c=-8\\13a+0-18c=-44\\32a+0-24c=-88\end{cases}\right|\begin{matrix}\\ \cdot 4\\ \cdot 3\end{matrix};\quad \begin{cases}a+4b+2c=-8\\52a\quad -72c=-176\\96a\quad -72c=-264\end{cases}\ (\boxed{3}-\boxed{2});$$

$$\begin{cases}a+4b+2c=-8\\13a\quad -18c=-44\\44a\qquad\quad =-88\end{cases};\quad \begin{cases}-2+4b+2c=-8\\-18c=-44-13(-2)\\a=-2\end{cases};\quad \begin{cases}4b=-8\\c=1\\a=-2\end{cases};$$

$$\begin{cases}b=-2\\c=1\\a=-2\end{cases}.\ \text{Подставив}\ \begin{cases}\dfrac{1}{1-x}=-2\\ \dfrac{2}{y+2}=-2\\ \dfrac{1}{2z-1}=1\end{cases};\quad \begin{cases}-\frac{1}{2}=1-x\\-1=y+2\\1=2z-1\end{cases};\quad \begin{cases}x=1{,}5\\y=-3\\z=1\end{cases}.$$

Ответ: $(1{,}5;\,-3;\,1)$.

Проверочная работа 1

1. $\begin{cases} 7x - 2y = 1 \\ 5x + 3y = 14 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} \dfrac{3y-6x-25}{5x+8y} = 1 \\ 8x + 25y = 110 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} \dfrac{7x-3y}{5} = \dfrac{5x-y}{3} - \dfrac{x+y}{2} \\ \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+1}{3} \end{cases}.$

4. $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y} + \dfrac{18}{3x-2y} = 13 \\ \dfrac{27}{3x-2y} - \dfrac{2}{2x-3y} = 1 \end{cases}.$

5. $\begin{cases} (2x - 3y - 8)(3x + 4y + 2) = 0 \\ (7x - 5y + 5)(12x + 16y + 1) = 0 \end{cases}.$

6. $\begin{cases} 3|x - 5| = y - 4 \\ |7 - y| = 15 - 3x \end{cases}.$

7. $\begin{cases} 4x - 7y + 8z = 0 \\ x - 2y - z = -3 \\ 6x + 2y + 3z = -9 \end{cases}.$

8. $\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y+z} + \dfrac{3}{2y-x-z} - \dfrac{1}{2z+y-3x} = 2 \\ \dfrac{4}{2x-y+z} - \dfrac{1}{2y-x-z} + \dfrac{1}{2z+y-3x} = 3 \\ \dfrac{2}{2x-y+z} + \dfrac{2}{2y-x-z} - \dfrac{3}{2z+y-3x} = -3 \end{cases}.$

2

Нелинейные системы уравнений

Метод подстановки

Практикум 5

1. $\begin{cases} x^2 + xy = 2 \\ y - 3x = 7 \end{cases}.$

Из второго уравнения выразим y через x и подставим в первое уравнение: $\begin{cases} x^2 + x(3x+7) = 2 \\ y = 3x + 7 \end{cases}.$

Числа $x = -2$ и $x = \frac{1}{4}$ являются корнями уравнения $4x^2 + 7x - 2 = 0$, тогда:

а) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3x + 7 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 3x + 7 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 7\frac{3}{4} \end{cases}.$

Ответ: $\left\{(-2; 1); \left(\frac{1}{4}; 7\frac{3}{4}\right)\right\}$.

2. $\begin{cases} (x-1)(y+1) = -2 \\ x + y = 1 \end{cases}.$

$\begin{cases} xy - y + x - 1 = -2 \\ x + y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} (1-y)y - y + 1 - y + 1 = 0 \\ x = 1 - y \end{cases}$;

$\begin{cases} -y^2 - y + 2 = 0 \\ x = 1 - y \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 1 \end{array}\right. \\ x = 1 - y \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

Ответ: $\{(3; -2); (0; 1)\}$.

3. $\begin{cases} 4x^2 + 3xy - 4x - 3y = 0 \\ 5x + 3y = 17 \end{cases}.$

Левую часть первого уравнения разложим на множители:

$$\begin{cases} x(4x + 3y) - (4x + 3y) = 0 \\ 5x + 3y = 17 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (4x + 3y)(x - 1) = 0 \\ 5x + 3y = 17 \end{cases};$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 5x + 3y = 17 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 5x + 3y = 17 \end{cases} \end{array}\right. \quad (\boxed{2} - \boxed{1}) \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -22\frac{2}{3} \\ x = 17 \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{(1;\ 4);\ \left(17;\ -22\frac{2}{3}\right)\right\}$.

4. $\begin{cases} x^2y + 9x - 9xy = 81 \\ \frac{2x+3y-15}{x-9} = 1 \end{cases}.$

$$\begin{cases} x(xy + 9) - 9(xy + 9) = 0 \\ x \neq 9 \\ 2x + 3y - 15 = x - 9 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (xy + 9)(x - 9) = 0 \\ x \neq 9 \\ x = 6 - 3y \end{cases}; \quad \begin{cases} xy + 9 = 0 \\ x \neq 9 \\ x = 6 - 3y \end{cases};$$

$$\begin{cases} y(6 - 3y) + 9 = 0 \\ x \neq 9 \\ x = 6 - 3y \end{cases}; \quad \begin{cases} -3y^2 + 6y + 9 = 0 \\ x \neq 9 \\ x = 6 - 3y \end{cases};$$

$$\begin{cases} y^2 - 2y - 3 = 0 \\ x \neq 9 \\ x = 6 - 3y \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3 \\ x = 6 - 3y \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1 \\ x = 6 - 3y \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3 \\ x = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1 \\ x = 9, \text{ но } x \neq 9. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-3;\ 3)$.

5. $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ 2y + 3x = 5 \end{cases}$.

Решим уравнение $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$.

$x_{1,2} = \frac{3y \pm \sqrt{9y^2 - 8y^2}}{4} = \frac{3y \pm y}{4}$; $\left[\begin{array}{l} x = y \\ x = \frac{y}{2} \end{array}\right.$.

Тогда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ 2y + 3x = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ 2y + 3x = 5 \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ y = \frac{10}{7} \end{cases} \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{(1; 1); \left(\frac{5}{7}; 1\frac{3}{7}\right)\right\}$.

6. $\begin{cases} x^3 + x^2y = 12 \\ x + y = 3 \end{cases}$.

$\begin{cases} x^2(x + y) = 12 \\ x + y = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \end{array}\right.$.

Ответ: $\{(2; 1); (-2; 5)\}$.

7. $\begin{cases} x + y^2 = 2 \\ 2y^2 + x^2 = 3 \end{cases}$.

$\begin{cases} y^2 = 2 - x \\ 2(2 - x) + x^2 = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} y^2 = 2 - x \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \end{array}\right.$.

Ответ: $\{(1; -1); (1; 1)\}$.

8. $\begin{cases} \dfrac{1 + x + x^2}{1 + y + y^2} = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$.

$\begin{cases} 1 + x + x^2 = 3 + 3y + 3y^2 \\ x = 6 - y \end{cases}$; $\begin{cases} 1 + 6 - y + (6 - y)^2 = 3 + 3y + 3y^2 \\ x = 6 - y \end{cases}$;

$$\begin{cases} 7 - y + 36 - 12y + y^2 = 3 + 3y + 3y^2 \\ x = 6 - y \end{cases};$$

$$\begin{cases} y^2 + 8y - 20 = 0 \\ x = 6 - y \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = -10 \\ y = 2 \end{array}\right. \\ x = 6 - y \end{cases}.$$

Ответ: $\{(4;\ 2);\ (16;\ -10)\}$.

9. $\begin{cases} \frac{3}{x+5} + \frac{2}{y-3} = 2 \\ \frac{4}{x-2} = \frac{1}{y-6} \end{cases}.$

$$\begin{cases} \frac{3}{x+5} + \frac{2}{y-3} = 2 \\ 4(y-6) = x - 2 \\ x \neq 2 \\ y \neq 6 \end{cases}; \qquad \begin{cases} \frac{3}{4y-17} + \frac{2}{y-3} = 2 \\ x = 4y - 22 \\ x \neq 2;\ x \neq -5 \\ y \neq 6;\ y \neq 3 \end{cases}.$$

Решаем первое уравнение системы:

$$3(y-3) + 2(4y-17) = 2(y-3)(4y-17);$$

$$3y - 9 + 8y - 34 = 8y^2 - 58y + 102;$$

$$8y^2 - 69y + 145 = 0.$$

$$y_{1,2} = \frac{69 \pm \sqrt{4761 - 4640}}{16} = \frac{69 \pm 11}{16}; \qquad \left[\begin{array}{l} y = 5 \\ y = \frac{29}{8} \end{array}\right..$$

Тогда $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 5 \\ y = \frac{29}{8} \end{array}\right. \\ x = 4y - 22 \end{cases}.$

Ответ: $\left\{(5;\ -2);\ \left(-7{,}5;\ 3\frac{5}{8}\right)\right\}$.

Примечание. Обратите внимание, что решения системы удовлетворяют условиям: $x \neq 2$; $x \neq -5$; $y \neq 6$; $y \neq 3$.

Тренировочная работа 4

1. $\begin{cases} 4x^2 - 36y^2 = 15 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ x^2 + 3xy + 9 = 0 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} 3x + y = -4 \\ \frac{7}{x+2} - \frac{10}{y} = 6 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} (x - 1)(2y - 1) = 0 \\ 4xy - x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}.$

5. $\begin{cases} \frac{x+5}{y-3} = 0 \\ 2y^2 + x^2 - y = 40 \end{cases}.$

6. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3y + xy^3 = 10 \end{cases}.$

7. $\begin{cases} \frac{3}{2x+3} + \frac{2}{y-1} = 2 \\ \frac{2}{x-2} = \frac{1}{y-4} \end{cases}.$

Решение тренировочной работы 4

1. $\begin{cases}4x^2 - 36y^2 = 15\\ 2x + 6y = 3\end{cases}$; $\begin{cases}(2x + 6y)(2x - 6y) = 15\\ 2x + 6y = 3\end{cases}$;

$\begin{cases}3(2x - 6y) = 15\\ 2x + 6y = 3\end{cases}$; $\begin{cases}2x - 6y = 5\\ 2x + 6y = 3\end{cases}$ $\left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right)$; $\begin{cases}x = 2\\ y = -\dfrac{1}{6}\end{cases}$.

Ответ: $\left(2; -\frac{1}{6}\right)$.

2. $\begin{cases}x - 2y = 7\\ x^2 + 3xy + 9 = 0\end{cases}$; $\begin{cases}x = 2y + 7\\ (2y + 7)^2 + 3y(2y + 7) + 9 = 0\end{cases}$;

$4y^2 + 28y + 49 + 6y^2 + 21y + 9 = 0$;

$10y^2 + 49y + 58 = 0$;

$y_{1,2} = \dfrac{-49 \pm \sqrt{2401 - 2320}}{20} = \dfrac{-49 \pm 9}{20}$.

$\begin{cases}x = 2y + 7\\ \left[\begin{array}{l}y = -2\\ y = -2{,}9\end{array}\right.\end{cases}$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 2y + 7\\ y = -2\end{cases}\\ \begin{cases}x = 2y + 7\\ y = -2{,}9\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 3\\ y = -2\end{cases}\\ \begin{cases}x = 1{,}2\\ y = -2{,}9\end{cases}\end{array}\right.$.

Ответ: $\{(1{,}2; -2{,}9); (3; -2)\}$.

3. $\begin{cases}3x + y = -4\\ \dfrac{7}{x+2} - \dfrac{10}{y} = 6\end{cases}$; $\begin{cases}y = -3x - 4\\ \dfrac{7}{x+2} - \dfrac{10}{-3x-4} = 6\end{cases}$ $D(C)$: $\begin{cases}x \neq -2\\ y \neq 0\end{cases}$.

$\dfrac{7}{x+2} + \dfrac{10}{3x+4} = 6$;

$7(3x + 4) + 10(x + 2) = 6(x + 2)(3x + 4)$;

$21x + 28 + 10x + 20 = 18x^2 + 60x + 48$;

$\begin{cases}18x^2 + 29x = 0\\ y = -3x - 4\end{cases}$;

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x = 0\\ x = -\frac{29}{18}\end{array}\right.\\ y = -3x - 4\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 0\\ y = -3x - 4\end{cases}\\ \begin{cases}x = -\frac{29}{18}\\ y = -3x - 4\end{cases}\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 0\\ y = -4\end{cases}\\ \begin{cases}x = -1\frac{11}{18}\\ y = \frac{5}{6}\end{cases}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{(0; -4); \left(-1\frac{11}{18}; \frac{5}{6}\right)\right\}$.

4. $\begin{cases}(x - 1)(2y - 1) = 0\\ 4xy - x^2 - 2y^2 = 1\end{cases}$;

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x - 1 = 0\\ 2y - 1 = 0\end{array}\right.\\ 4xy - x^2 - 2y^2 = 1\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 1\\ 4xy - x^2 - y^2 = 1\end{cases}\\ \begin{cases}y = 0,5\\ 4xy - x^2 - y^2 = 1\end{cases}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 1\\ 2y^2 - 4y + 2 = 0\end{cases}\\ \begin{cases}y = 0,5\\ 2x^2 - 4x + 3 = 0\end{cases}\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 1\\ y = 1\end{cases}\\ \begin{cases}y = 0,5\\ 2(x - 1)^2 + 1 = 0\end{cases}\end{array}\right..$$

Ответ: $(1; 1)$.

5. $\begin{cases}\frac{x+5}{y-3} = 0\\ 2y^2 + x^2 - y = 40\end{cases}$; $\begin{cases}x = -5\\ y \neq 3\\ 2y^2 + x^2 - y = 40\end{cases}$;

$\begin{cases}x = -5\\ y \neq 3\\ 2y^2 - y - 15 = 0\end{cases}$; $2y^2 - y - 15 = 0$;

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{4} = \frac{1 \pm 11}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l}y = 3 \notin D(C)\\ y = -\frac{5}{2}\end{array}\right.;\qquad \begin{cases}x = -5\\ y = -2,5\end{cases}.$$

Ответ: $(-5; -2,5)$.

6. $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^3y+xy^3=10 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy(x^2+y^2)=10 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 5xy=10 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases} \Big| \cdot 2$; $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 2xy=4 \end{cases} \pm$ $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9 \\ x^2-2xy+y^2=1 \end{cases}$;

$$\begin{cases} (x+y)^2=9 \\ (x-y)^2=1 \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \pm\ (2;1) \\ \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases} \pm\ (1;2) \\ \begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=1 \end{cases} \pm\ (-1;-2) \\ \begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=-1 \end{cases} \pm\ (-2;-1) \end{array}\right. .$$

Ответ: $\{(2;1);(1;2);(-1;-2);(-2;-1)\}$.

7. $\begin{cases} \frac{3}{2x+3}+\frac{2}{y-1}=2 \\ \frac{2}{x-2}=\frac{1}{y-4} \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{3}{2x+3}+\frac{2}{y-1}=2 \\ 2(y-4)=x-2 \end{cases}$; $D(C)$: $\begin{cases} x \neq -1{,}5 \\ x \neq 2 \\ y \neq 1 \\ y \neq 4 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3}{2(2y-6)+3}+\frac{2}{y-1}=2 \\ x=2y-6 \end{cases}$; $\frac{3}{4y-9}+\frac{2}{y-1}=2$;

$3(y-1)+2(4y-9)=2(4y-9)(y-1)$;

$3y-3+8y-18=8y^2-26y+18$;

$8y^2-37y+39=0$;

$y_{1,2}=\frac{37\pm\sqrt{1369-1248}}{16}=\frac{37\pm 11}{16}$; $\left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=\frac{13}{8} \end{array}\right.$;

$$\begin{cases} x=2y-6 \\ \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=1\frac{5}{8} \end{array}\right. \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=3 \\ x=2\cdot 3-6 \end{cases} \\ \begin{cases} y=1\frac{5}{8} \\ x=2\cdot\frac{13}{8}-6 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=3 \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=1\frac{5}{8} \\ x=-2\frac{3}{4} \end{cases} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{\left(-2\frac{3}{4};1\frac{5}{8}\right);(0;3)\right\}$.

Метод алгебраических действий

Практикум 6

1. $\begin{cases} x - y + xy = 5 \\ x - y - xy = -7 \end{cases}$. $\quad \begin{matrix} (\boxed{1} + \boxed{2}) : 2 \\ (\boxed{1} - \boxed{2}) : 2 \end{matrix}$

1) Сложим почленно первое и второе уравнение.
2) Вычтем из первого уравнения второе уравнение.
3) Поделив на 2 обе части уравнений, получаем:

$\begin{cases} x - y = -1 \\ xy = 6 \end{cases}$; $\begin{cases} x = y - 1 \\ y(y-1) = 6 \end{cases}$; $\begin{cases} x = y - 1 \\ \left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = -2 \end{array}\right. \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3 \\ x = y - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2 \\ x = y - 1 \end{cases} \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2 \\ x = -3 \end{cases} \end{array}\right.$.

Ответ: $\{(2; 3); (-3; -2)\}$.

2. $\begin{cases} 2x^8 = x^4y^4 + 1 \\ 3y^8 = x^4y^4 + 2 \end{cases}$. $\quad \boxed{1} \cdot \boxed{2}$

Перемножим уравнения системы, получим

$6x^8y^8 = x^8y^8 + 3x^4y^4 + 2;\ \ 5x^8y^8 - 3x^4y^4 - 2 = 0.$

Пусть $x^4y^4 = a$ $(a \geqslant 0)$, тогда $5a^2 - 3a - 2 = 0$;

$\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -\frac{2}{5} \notin [0; \infty) \end{array}\right.$.

Возвращаясь к переменным x и y, получаем систему:

$\begin{cases} x^4y^4 = 1 \\ 3y^8 = x^4y^4 + 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^4y^4 = 1 \\ 3y^8 = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x^4y^4 = 1 \\ y^8 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$,

то есть $\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$.

Ответ: $\{(1; 1); (1; -1); (-1; 1); (-1; -1)\}$.

3. $\begin{cases} x + y^2 = 2 \\ 2y^2 + x^2 = 3 \end{cases}$ $\left(\boxed{1} \cdot 2\right)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2x + 2y^2 = 4 \\ 2y^2 + x^2 = 3 \end{cases}$ $\left(\boxed{2} - \boxed{1}\right)$

$$\begin{cases} x + y^2 = 2 \\ x^2 - 2x = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\{(1; -1); (1; 1)\}$.

4. $\begin{cases} x^3 + xy^2 = 10 \\ y^3 + x^2y = 5 \end{cases}$.

Разделим почленно первое уравнение на второе, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{x^3 + xy^2}{y^3 + x^2y} = \dfrac{10}{5} \\ y^3 + x^2y = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{x\left(x^2 + y^2\right)}{y\left(x^2 + y^2\right)} = 2 \\ y^3 + x^2y = 5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ y^3 + 4y^2y = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2y \\ y^3 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Ответ: $(2; 1)$.

5. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26 \\ 3x^2y + 3xy^2 = -18 \end{cases}$.

Сложим почленно первое и второе уравнение, получим:

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 8 \\ 3xy(x + y) = -18 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (x + y)^3 = 8 \\ xy(x + y) = -6 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases}.$$

По теореме, обратной теореме Виета, эта система порождает уравнение $m^2 - 2m - 3 = 0$, корни которого образуют решения системы.

Получаем $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 3 \\ y = -1\end{cases} \\ \begin{cases}x = -1 \\ y = 3\end{cases}\end{array}\right.$.

Ответ: $\{(3; -1); (-1; 3)\}$.

6. $\begin{cases}x + y = 5xy \\ x - y = xy\end{cases}$. $\left(\begin{array}{l}\boxed{1} + \boxed{2} \\ \boxed{2} - \boxed{1}\end{array}\right)$

$\begin{cases}x = 3xy \\ y = 2xy\end{cases}$; $\qquad \begin{cases}x(1-3y) = 0 \\ y(1-2x) = 0\end{cases}$.

а) $\begin{cases}x = 0 \\ y = 0\end{cases}$; $\qquad$ б) $\begin{cases}x = 0 \\ 1 - 2x = 0\end{cases}$ $\varnothing$;

в) $\begin{cases}1 - 3y = 0 \\ y = 0\end{cases}$ $\varnothing$; $\qquad$ г) $\begin{cases}1 - 3y = 0 \\ 1 - 2x = 0\end{cases}$; $\begin{cases}x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3}\end{cases}$.

Ответ: $\left\{(0;\ 0); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)\right\}$.

7. $\begin{cases}x^2 = 2x + 3y \\ y^2 = 2y + 3x\end{cases}$ $\left(\boxed{1} - \boxed{2}\right)$.

Вычтем из первого уравнения второе уравнение, получим:

$\begin{cases}x^2 - y^2 = y - x \\ y^2 = 2y + 3x\end{cases}$; $\qquad \begin{cases}(x - y)(x + y + 1) = 0 \\ y^2 = 2y + 3x\end{cases}$;

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = y \\ y(y-5) = 0\end{cases} \\ \begin{cases}x = -y - 1 \\ y^2 = 2y - 3y - 3\end{cases}\end{array}\right.$; $\qquad \left[\begin{array}{l}(0;\ 0);\ (5;\ 5) \\ \begin{cases}x = -y - 1 \\ y^2 + y + 3 = 0 \quad (D < 0)\end{cases}\end{array}\right.$.

Ответ: $\{(0; 0); (5; 5)\}$.

8. $\begin{cases}x^2 - xy + y^2 = 3 \\ x^2 + xy + y^2 = 7\end{cases}$. $\left(\begin{array}{l}\left(\boxed{1} + \boxed{2}\right) : 2 \\ \boxed{2} - \boxed{1}\end{array}\right)$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 2xy=4 \end{cases}; \quad \begin{cases} (x+y)^2=9 \\ (x-y)^2=1 \end{cases}.$$

а) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$.

Ответ: $\{(2;1);(1;2);(-1;-2);(-2;-1)\}$.

9. $\begin{cases} (x+xy^2+y^2)(x+y^2)^2=225 \\ (x-xy^2+y^2)(x+y^2)^2=25 \end{cases}$. $(\boxed{1}+\boxed{2})$

$$\begin{cases} (x+y^2)^2(x+xy^2+y^2+x-xy^2+y^2)=250 \\ (x-xy^2+y^2)(x+y^2)^2=25 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (x+y^2)^3=125 \\ (x-xy^2+y^2)(x+y^2)^2=25 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y^2=5 \\ (5-xy^2)25=25 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x+y^2=5 \\ xy^2=4 \end{cases}.$$

Используя теорему, обратную теореме Виета, получим:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y^2=4 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $\{(1;2);(1;-2);(4;1);(4;-1)\}$.

Тренировочная работа 5

1. $\begin{cases} 3y + x + 1 = 0 \\ 2x^2 - xy - y = 35 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} \dfrac{4}{x-2} + \dfrac{3}{y+1} = 5 \\ x - 3y = 4 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} (2x - 5)(y + 2) = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 4 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} \dfrac{2y-3}{x+2} = 0 \\ x^2 + xy + 4y^2 = 10 \end{cases}.$

5. $\begin{cases} xy - x + y = 7 \\ xy + x - y = 13 \end{cases}.$

6. $\begin{cases} x^2 - y = 0{,}75 \\ y^2 + x = 0{,}75 \end{cases}.$

7. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}.$

8. $\begin{cases} 2y^4 = x^2y^2 + 1 \\ 3x^4 = x^2y^2 + 2 \end{cases}.$

Решение тренировочной работы 5

1. $\begin{cases} 3y + x + 1 = 0 \\ 2x^2 - xy - y = 35 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -3y - 1 \\ 2(-3y-1)^2 - (-3y-1)y - y = 35 \end{cases}$;

$2(9y^2 + 6y + 1) + 3y^2 + y - y = 35$;

$21y^2 + 12y - 33 = 0$; $\qquad 7y^2 + 4y - 11 = 0$;

$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+77}}{7} = \frac{-2 \pm 9}{7}$; $\qquad \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\frac{11}{7} \end{array}\right.$;

$\begin{cases} x = -3y - 1 \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\frac{11}{7} \end{array}\right. \end{cases}$; $\qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 \\ x = -3y - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\frac{11}{7} \\ x = -3y - 1 \end{cases} \end{array}\right.$; $\qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 \\ x = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1\frac{4}{7} \\ x = 3\frac{5}{7} \end{cases} \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{(-4;\ 1);\ \left(3\frac{5}{7};\ -1\frac{4}{7}\right)\right\}$.

2. $\begin{cases} \frac{4}{x-2} + \frac{3}{y+1} = 5 \\ x - 3y = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{4}{3y+4-2} + \frac{3}{y+1} = 5 \\ x = 3y + 4 \end{cases}$; $\qquad D(C)$: $\begin{cases} x \neq 2 \\ y \neq -1 \end{cases}$

$\frac{4}{3y+2} + \frac{3}{y+1} = 5$; $\qquad 4(y+1) + 3(3y+2) = 5(y+1)(3y+2)$;

$4y + 4 + 9y + 6 = 15y^2 + 25y + 10$;

$\begin{cases} 15y^2 + 12y = 0 \\ x = 3y + 4 \end{cases}$; $\qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -\frac{4}{5} \end{array}\right. \\ x = 3y + 4 \end{cases}$; $\qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ x = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -0{,}8 \\ x = 1{,}6 \end{cases} \end{array}\right.$.

Ответ: $\{(4;\ 0);\ (1{,}6;\ -0{,}8)\}$.

3. $\begin{cases}(2x-5)(y+2)=0\\x^2+xy+y^2=4\end{cases}$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2,5\\x^2+xy+y^2=4\end{cases}\\\begin{cases}y=-2\\x^2+xy+y^2=4\end{cases}\end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2,5\\6,25+2,5y+y^2=4\end{cases}\\\begin{cases}y=-2\\x^2-2x+4=4\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2,5\\4y^2+10y+9=0\quad(D<0)\end{cases}\\\begin{cases}y=-2\\x^2-2x=0\end{cases}\end{array}\right.$;

$\begin{cases}y=-2\\\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.\end{cases}$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=-2\\x=0\end{cases}\\\begin{cases}y=-2\\x=2\end{cases}\end{array}\right.$.

Ответ: $\{(4;\,0);\,(1,6;\,-0,8)\}$.

4. $\begin{cases}\frac{2y-3}{x+2}=0\\x^2+xy+4y^2=10\end{cases}$; $\begin{cases}2y-3=0\\x\neq-2\\x^2+xy+4y^2=10\end{cases}$;

$\begin{cases}y=1,5\\x\neq-2\\x^2+1,5x+4\cdot2,25=10\end{cases}$; $\begin{cases}y=1,5\\x\neq-2\\x^2+1,5x+9=10\end{cases}$;

$\begin{cases}y=1,5\\x\neq-2\\2x^2+3x-2=0\end{cases}$; $\begin{cases}y=1,5\\x\neq-2\\\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}$; $\begin{cases}y=1,5\\x=0,5\end{cases}$.

Ответ: $(0,5;\,1,5)$.

5. $\begin{cases}xy-x+y=7\\xy+x-y=13\end{cases}$; $\left(\begin{array}{l}\boxed{1}+\boxed{2}\\\boxed{2}-\boxed{1}\end{array}\right):2$;

$\begin{cases}xy=10\\x-y=3\end{cases}$; $\begin{cases}(3+y)y=10\\x=3+y\end{cases}$

$$\begin{cases} y^2 + 3y - 10 = 0 \\ x = 3 + y \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} y &= -5 \\ y &= 2 \end{aligned}\right. \\ x = 3 + y \end{cases}; \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} y = -5 \\ x = -2 \end{cases} \\ &\begin{cases} y = 2 \\ x = 5 \end{cases} \end{aligned}\right. .$$

Ответ: $\{(5;\ 2);\ (-2;\ -5)\}$.

6. $$\begin{cases} x^2 - y = 0,75 \\ y^2 + x = 0,75 \end{cases} \boxed{1} - \boxed{2}; \quad \begin{cases} x^2 - y^2 - (x + y) = 0 \\ y^2 + x = 0,75 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (x + y)(x - y - 1) = 0 \\ y^2 + x = 0,75 \end{cases}; \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x = -y \\ y^2 + x = 0,75 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = y + 1 \\ y^2 + x = 0,75 \end{cases} \end{aligned}\right.;$$

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x = -y \\ y^2 - y - 0,75 = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = y + 1 \\ y^2 + y + 1 = 0,75 \end{cases} \end{aligned}\right.; \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x = -y \\ 4y^2 - 4y - 3 = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = y + 1 \\ y^2 + y + \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \end{aligned}\right.;$$

$$\begin{aligned} &y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{4} = \frac{2 \pm 4}{4} \\ &y^2 + y + \frac{1}{4} = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}; \quad \left[\begin{aligned} y &= \frac{3}{2} \\ y &= -\frac{1}{2} \end{aligned}\right.;$$

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x = -y \\ \left[\begin{aligned} y &= 1,5 \\ y &= -0,5 \end{aligned}\right. \end{cases} && \begin{aligned} &(-1,5;\ 1,5) \\ &(0,5;\ -0,5) \end{aligned} \\ &\begin{cases} x = y + 1 \\ y = -0,5 \end{cases} && (0,5;\ -0,5) \end{aligned}\right. .$$

Ответ: $\{(-1,5;\ 1,5);\ (0,5;\ -0,5)\}$.

7. $$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}; \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} + \boxed{2} \\ \boxed{2} - \boxed{1} \end{pmatrix} : 2; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ -2xy = 4 \end{cases} \left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right);$$

$$\begin{cases}(x+y)^2=1\\(x-y)^2=9\end{cases};\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=1\\x-y=3\end{cases}\\\begin{cases}x+y=1\\x-y=-3\end{cases}\\\begin{cases}x+y=-1\\x-y=3\end{cases}\\\begin{cases}x+y=-1\\x-y=-3\end{cases}\end{array}\right.\quad \begin{array}{l}(2;-1)\\ \\(-1;2)\\ \\(1;-2)\\ \\(-2;1)\end{array}.$$

Ответ: $\{(2;-1);(-1;2);(1;-2);(-2;1)\}$.

8. $\begin{cases}2y^4=x^2y^2+1\\3x^4=x^2y^2+2\end{cases}$ $(\boxed{1}\cdot\boxed{2})$; $6y^4x^4=x^4\cdot y^4+3x^2y^2+2$;

$5y^4x^4-3x^2y^2-2=0$. Пусть $x^2y^2=t\,(t\geqslant 0)$;

$5t^2-3t-2=0$; $\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-\frac{2}{5}\notin[0;\infty)\end{array}\right.$; $\begin{cases}x^2y^2=1\\2y^4=x^2y^2+1\end{cases}$;

$\begin{cases}x^2y^2=1\\2y^4=1+1\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}xy=1\\xy=-1\end{array}\right.\\y^4=1\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}xy=1\\xy=-1\end{array}\right.\\y^2=1\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}xy=1\\xy=-1\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-1\end{array}\right.\end{cases}$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=1\\y=1\end{cases}\\\begin{cases}xy=1\\y=-1\end{cases}\\\begin{cases}xy=-1\\y=1\end{cases}\\\begin{cases}xy=-1\\y=-1\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\\\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}\\\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}\\\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\end{array}\right..$$

Ответ: $\{(1;1);(-1;-1);(-1;1);(1;-1)\}$.

Метод замены переменной

Практикум 7

1. $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}.$

Пусть $\frac{x}{y} = t$, тогда $t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6}$; $6t^2 - 5t - 6 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2} \\ t = -\frac{2}{3} \end{array}\right.$.

а) $t = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ x + y = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ \frac{3}{2}y + y = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}.$

б) $t = -\frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y \\ x + y = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y \\ y - \frac{2}{3}y = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = -10 \\ y = 15 \end{cases}.$

Ответ: $\{(3; 2); (-10; 15)\}$.

2. $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3} \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}.$

Пусть $\frac{x}{y} = t$, тогда $t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}$; $3t^2 - 10t + 3 = 0$;

$\left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = +\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

а) $t = 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 3 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}; \begin{cases} x = 3y \\ 9y^2 - y^2 = 8 \end{cases}; \begin{cases} x = 3y \\ y^2 = 1 \end{cases}; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right.$.

б) $t = +\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}y \\ \frac{1}{9}y^2 - y^2 = 8 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{1}{3}y \\ y^2 = -9 \end{cases}; \varnothing.$

Ответ: $\{(3; 1); (-3; -1)\}$.

3. $\begin{cases}(x+y)^2-5(x+y)+4=0\\(x-y)^2-(x-y)-2=0\end{cases}.$

Пусть $\begin{cases}x+y=t\\x-y=z\end{cases}$, тогда $\begin{cases}t^2-5t+4=0\\z^2-z-2=0\end{cases}$; $\begin{cases}(t-1)(t-4)=0\\(z-2)(z+1)=0\end{cases}.$

а) $\begin{cases}t-1=0\\z-2=0\end{cases}$; $\begin{cases}t=1\\z=2\end{cases}.$

Возвращаясь к переменным x и y, получаем:

$\begin{cases}x+y=1\\x-y=2\end{cases}$; $\begin{cases}x=1{,}5\\y=-0{,}5\end{cases}.$

б) $\begin{cases}t-1=0\\z+1=0\end{cases}$; $\begin{cases}t=1\\z=-1\end{cases}$; $\begin{cases}x+y=1\\x-y=-1\end{cases}$; $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}.$

в) $\begin{cases}t-4=0\\z-2=0\end{cases}$; $\begin{cases}t=4\\z=2\end{cases}$; $\begin{cases}x+y=4\\x-y=2\end{cases}$; $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}.$

г) $\begin{cases}t-4=0\\z+1=0\end{cases}$; $\begin{cases}t=4\\z=-1\end{cases}$; $\begin{cases}x+y=4\\x-y=-1\end{cases}$; $\begin{cases}x=1{,}5\\y=2{,}5\end{cases}.$

Ответ: $\{(1{,}5;\ -0{,}5);\ (0;\ 1);\ (3;\ 1);\ (1{,}5;\ 2{,}5)\}$.

4. $\begin{cases}\frac{x+y}{x-y}+6\frac{x-y}{x+y}=5\\xy=2\end{cases}.$

Пусть $\frac{x+y}{x-y}=t$, тогда $t+\frac{6}{t}=5$; $t^2-5t+6=0$; $\left[\begin{array}{l}t=2\\t=3\end{array}\right.$.

а) $t=2\Rightarrow\begin{cases}\frac{x+y}{x-y}=2\\xy=2\end{cases}$; $\begin{cases}x+y=2x-2y\\xy=2\end{cases}$;

$\begin{cases}x=3y\\xy=2\end{cases}$; $\begin{cases}x=3y\\3y^2=2\end{cases}$; $\begin{cases}x=3y\\y^2=\frac{2}{3}\end{cases}$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\sqrt{\frac{2}{3}}\\y=\sqrt{\frac{2}{3}}\end{cases}\\\begin{cases}x=-3\sqrt{\frac{2}{3}}\\y=-\sqrt{\frac{2}{3}}\end{cases}\end{array}\right..$

б) $t=3 \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{x+y}{x-y}=3 \\ xy=2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y=3x-3y \\ xy=2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=2y \\ xy=2 \end{cases};$

$\begin{cases} x=2y \\ y^2=1 \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right..$

Ответ: $\left\{(2;\,1);\,(-2;\,-1);\,\left(\sqrt{6};\,\frac{\sqrt{6}}{3}\right);\,\left(-\sqrt{6};\,-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}.$

5. $\begin{cases} (x+y+1)^2+(x+y)^2=25 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}.$

Пусть $x+y=t$, тогда первое уравнение приобретает вид: $(t+1)^2+t^2=25;\quad t^2+2t+1+t^2=25,$

то есть $t^2+t-12=0;\quad \left[\begin{array}{l} t=-4 \\ t=3 \end{array}\right..$

а) $t=-4 \Rightarrow \quad \begin{cases} x+y=-4 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y=-4 \\ (x+y)(x-y)=3 \end{cases};$

$\begin{cases} x+y=-4 \\ x-y=-\frac{3}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x=-2\frac{3}{8} \\ y=-1\frac{5}{8} \end{cases}.$

б) $t=3 \Rightarrow \quad \begin{cases} x+y=3 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y=3 \\ (x+y)(x-y)=3 \end{cases};$

$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$

Ответ: $\left\{(2;\,1);\,\left(-2\frac{3}{8};\,-1\frac{5}{8}\right)\right\}.$

6. $\begin{cases} x^3+xy^2=10y \\ x+x^2y+y^3=7y \end{cases}. \quad \begin{cases} x(x^2+y^2)=10y \\ x+y(x^2+y^2)=7y \end{cases};$

а) Если $y=0$, то $x=0$.

б) Положим $y \neq 0$, тогда $\begin{cases} \frac{x}{y}(x^2+y^2)=10 \\ \frac{x}{y}+(x^2+y^2)=7 \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} x^2+y^2=t \\ \frac{x}{y}=z \end{cases}$, тогда $\begin{cases} t\cdot z=10 \\ t+z=7 \end{cases}$.

Используя теорему, обратную теореме Виета, получаем

$m^2-7m+10=0;$ $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=5 \end{array}\right.$, то есть $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=2 \\ z=5 \end{cases} \\ \begin{cases} t=5 \\ z=2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Возвращаясь к переменным x и y, получим:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ \frac{x}{y}=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ \frac{x}{y}=2 \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=5y \\ 25y^2+y^2=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2y \\ 4y^2+y^2=5 \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=5y \\ y^2=\frac{1}{13} \end{cases} \\ \begin{cases} x=2y \\ y^2=1 \end{cases} \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} \left(5\frac{\sqrt{13}}{13};\ \frac{\sqrt{13}}{13}\right) \\ \left(-5\frac{\sqrt{13}}{13};\ -\frac{\sqrt{13}}{13}\right) \\ (2;\ 1) \\ (-2;\ -1) \end{array}$.

О т в е т: $\left\{\left(5\frac{\sqrt{13}}{13};\frac{\sqrt{13}}{13}\right);\ \left(-5\frac{\sqrt{13}}{13};-\frac{\sqrt{13}}{13}\right);\ (2;1);\ (-2;-1);\ (0;0)\right\}$.

7. $\begin{cases} x^2+xy+x+y=-2 \\ y^2+xy+x+y=1 \end{cases}$; $\left(\boxed{1}+\boxed{2}\right)$ $\begin{cases} x^2+2xy+y^2+2(x+y)=-1 \\ y^2+xy+x+y=1 \end{cases}$;

$\begin{cases} (x+y)^2+2(x+y)+1=0 \\ y^2+xy+x+y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+y+1)^2=0 \\ y^2+xy+x+y=1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x+y+1=0 \\ y^2+xy+x+y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=-1 \\ y(x+y)+(x+y)=1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x+y=-1 \\ y(-1)+(-1)=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=-1 \\ y=-2 \end{cases}$.

О т в е т: (1; –2).

8. $\begin{cases} 2\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)-9\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+14=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}.$

Пусть $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=t;$

$\frac{x^2}{y^2}+2+\frac{y^2}{x^2}=t^2;\quad \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=t^2-2.$

Тогда первое уравнение примет вид

$2\left(t^2-2\right)-9t+14=0;\qquad 2t^2-9t+10=0;$

$t_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{4}=\frac{9\pm1}{4};\quad \left[\begin{array}{l} t=\frac{5}{2} \\ t=2 \end{array}\right..$

а) $t=\frac{5}{2};\quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2};$

$2x^2-5xy+2y^2=0.$

$x_{1,2}=\frac{5y\pm\sqrt{25y^2-16y^2}}{4}=\frac{5y\pm3y}{4};\quad \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=\frac{y}{2} \end{array}\right..$

$\begin{cases} x=2y \\ x^2+y^2=5 \end{cases};\quad \begin{cases} x=2y \\ 5y^2=5 \end{cases};\quad \begin{cases} x=2y \\ y^2=1 \end{cases}\quad \begin{array}{c} (2;\,1) \\ (-2;\,-1) \end{array}.$

$\begin{cases} x=\frac{y}{2} \\ x^2+y^2=5 \end{cases};\quad \begin{cases} y=2x \\ 5x^2=5 \end{cases};\quad \begin{cases} y=2x \\ x^2=1 \end{cases}\quad \begin{array}{c} (1;\,2) \\ (-1;\,-2) \end{array}.$

б) $t=2;\quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2;$

$y^2-2xy+y^2=0;\qquad x=y\ (y\neq0);$

$\begin{cases} x=y \\ x^2+y^2=5 \end{cases};\quad \begin{cases} x=y \\ x^2=2{,}5 \end{cases}\quad \begin{array}{c} \left(\sqrt{2{,}5};\,\sqrt{2{,}5}\right) \\ \left(-\sqrt{2{,}5};\,-\sqrt{2{,}5}\right) \end{array}.$

Ответ: $\left\{(2;\,1);\,(-2;\,-1);\,(1;\,2);\,(-1;\,-2);\,\left(\sqrt{2{,}5};\,\sqrt{2{,}5}\right);\right.$
$\left.\left(-\sqrt{2{,}5};\,-\sqrt{2{,}5}\right)\right\}.$

Тренировочная работа 6

1. $\begin{cases} 9y^2 - 16x^2 = 9 \\ 3y - 4x = -3 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} |x - 5| = 3y + 4 \\ |3y + 5| = 2x - 12 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} (3x - y + 5)^2 = (x + 2y - 3)^2 \\ (3x - 3y)^2 = 4 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x + y = -8 \\ xy = 15 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 14 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$.

6. $\begin{cases} 4x^2 - 3xy + 8x - 6y = 0 \\ 3x - 11y = -17 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} 3xy^2 + 15y + 5xy = -25 \\ \frac{3x+12y+11}{3y+5} = 1 \end{cases}$.

8. $\begin{cases} \frac{x^2+y+1}{y^2+x+1} = \frac{3}{2} \\ x - y = 1 \end{cases}$.

9. $\begin{cases} x^2 + 2xy + 4y^2 = 7 \\ x^3 - 8y^3 = 35 \end{cases}$.

10. $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$.

11. $\begin{cases} \frac{2x}{y} + \frac{y}{2x} = \frac{10}{3} \\ 4x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$.

12. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^4 + x^2y^2 = 90 \end{cases}$.

13. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 124 \\ x^2 + xy + y^2 = 31 \end{cases}$.

14. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$.

15. $\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 - 3x + 6y = 54 \\ 4x^2 - 4xy + y^2 - 24x + 12y = 189 \end{cases}$.

16. $\begin{cases} x^2 = 4x + 5y \\ y^2 = 4y + 5x \end{cases}$.

Решение тренировочной работы 6

1. $\begin{cases} 9y^2 - 16x^2 = 9 \\ 3y - 4x = -3 \end{cases}$; $\begin{cases} (3y + 4x)(3y - 4x) = 9 \\ 3y - 4x = -3 \end{cases}$;

$\begin{cases} (3y + 4x)(-3) = 9 \\ 3y - 4x = -3 \end{cases}$; $\begin{cases} 3y + 4x = -3 \\ 3y - 4x = -3 \end{cases}$ $(\boxed{1} \pm \boxed{2})$; $\begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$.

Ответ: $(0; -1)$.

2. $\begin{cases} |x - 5| = 3y + 4 \\ |3y + 5| = 2x - 12 \end{cases}$ $|a| \geqslant 0$ $\begin{cases} y \geqslant -\frac{4}{3}, \\ x \geqslant 6 \end{cases}$

тогда $|x - 5| = x - 5$, $|3y + 5| = 3y + 5$;

система примет вид: $\begin{cases} x - 5 = 3y + 4 \\ 2x - 12 = 3y + 5 \end{cases}$ $(\boxed{2} - \boxed{1})$;

$\begin{cases} x - 7 = 1 \\ x - 5 = 3y + 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 8 \geqslant 6 \\ 8 - 5 = 3y + 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 8 \\ y = -\frac{1}{3} \geqslant -\frac{4}{3} \end{cases}$.

Ответ: $\left(8; -\frac{1}{3}\right)$.

3. $\begin{cases} (3x - y + 5)^2 = (x + 2y - 3)^2 \\ (2x - 3y)^2 = 4 \end{cases}$;

$\alpha^2 = \beta^2$ равносильно $\left[\begin{array}{l} \alpha = \beta \\ \alpha = -\beta \end{array}\right.$;

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x - y + 5 = x + 2y - 3 \\ 3x - y + 5 = -x - 2y + 3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2x - 3y = 2 \\ 2x - 3y = -2 \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x - 3y = -8 \\ 4x + y = -2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2x - 3y = 2 \\ 2x - 3y = -2 \end{array}\right. \end{cases}$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-3y=-8\\2x-3y=2\end{cases}\ \varnothing\\ \begin{cases}2x-3y=-8\\2x-3y=-2\end{cases}\ \varnothing\\ \begin{cases}4x+y=-2\\2x-3y=2\end{cases}\Big|\cdot 2\\ \begin{cases}4x+y=-2\\2x-3y=-2\end{cases}\Big|\cdot 2\end{array}\right.;\quad \begin{array}{l}\begin{cases}4x+y=-2\\4x-6y=4\end{cases}\ (\boxed{1}-\boxed{2});\ \left(-\frac{2}{7};\ -\frac{6}{7}\right);\\ \begin{cases}4x+y=-2\\4x-6y=-4\end{cases}\ (\boxed{1}-\boxed{2});\ \left(-\frac{4}{7};\ \frac{2}{7}\right).\end{array}$$

Ответ: $\left\{\left(-\frac{2}{7};\ -\frac{6}{7}\right);\ \left(-\frac{4}{7};\ \frac{2}{7}\right)\right\}$.

4. $\begin{cases}x+y=-8\\xy=15\end{cases}$

Система порождает по теореме обратной теореме Виета уравнение $m^2+8m+15=0$, корни которого образуют пары решений системы

$\begin{array}{l}m_1=-3;\ m_2=-5\\m_1'=-5;\ m_2'=-3\end{array}$, т.е. $(-3;\ -5)$ и $(-5;\ -3)$.

Ответ: $\{(-3;\ -5);\ (-5;\ -3)\}$.

5. $\begin{cases}2x^2+3y^2=14\\x+2y=5\end{cases}$. $\begin{cases}3y^2+2(5-2y)^2=14\\x=5-2y\end{cases}$.

Решим отдельно первое уравнение:

$3y^2+2\cdot(25-20y+4y^2)=14;\quad 11y^2-40y+36=0;\quad \left[\begin{array}{l}y=2\\y=\frac{18}{11}\end{array}\right.$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2\\x=5-2y\end{cases}\\ \begin{cases}y=\frac{18}{11}\\x=5-2y\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2\\x=1\end{cases}\quad (1;\ 2)\\ \begin{cases}y=\frac{18}{11}\\x=\frac{19}{11}\end{cases}\quad \left(1\frac{8}{11};\ 1\frac{7}{11}\right).\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{(1;\ 2);\ \left(1\frac{8}{11};\ 1\frac{7}{11}\right)\right\}$.

6. $\begin{cases} 4x^2 - 3xy + 8x - 6y = 0 \\ 3x - 11y = -17 \end{cases}.$

Разложим на множители левую часть первого уравнения.

$4x^2 - 3xy + 2(4x - 3y) = 0;$

$x(4x - 3y) + 2(4x - 3y) = 0;$

$(4x - 3y)(x + 2) = 0.$

Тогда $\begin{cases} (4x - 3y)(x + 2) = 0 \\ 3x - 11y = -17 \end{cases};$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x - 3y = 0 & \Big| \cdot 3 \\ 3x - 11y = -17 & \Big| \cdot 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 2 = 0 \\ 3x - 11y = -17 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 12x - 9y = 0 \\ 12x - 44y = -68 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ -11y = -11 \end{cases} \end{array} \right.$ $(\boxed{1} - \boxed{2})$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{3}{4}y \\ y = \frac{68}{35} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \end{array} \right. .$

Ответ: $\left\{(-2; 1); \left(1\frac{16}{35}; 1\frac{33}{35}\right)\right\}.$

7. $\begin{cases} 3xy^2 + 15y + 5xy = -25 \\ \frac{3x+12y+11}{3y+5} = 1 \end{cases}.$

Перенесем в первом уравнении все члены в левую часть и разложим на множители:

$3xy^2 + 15y + 5xy + 25 = 0;$ $\quad xy(3y + 5) + 5(3y + 5) = 0;$

$\begin{cases} (3y + 5)(xy + 5) = 0 \\ 3x + 12y + 11 = 3y + 5 \\ 3y + 5 \neq 0 \end{cases};$ $\begin{cases} xy + 5 = 0 \\ 3x + 9y + 6 = 0 \\ y \neq -\frac{5}{3} \end{cases};$ $\begin{cases} y(-3y - 2) + 5 = 0 \\ x = -3y - 2 \\ y \neq -\frac{5}{3} \end{cases};$

$$\begin{cases} 3y^2+2y-5=0 \\ x=-3y-2 \\ y\neq -\frac{5}{3} \end{cases};\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-\frac{5}{3} \end{array}\right. \\ x=-3y-2 \\ y\neq -\frac{5}{3} \end{cases};\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ x=-3y-2 \\ y\neq -\frac{5}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\frac{5}{3} \\ x=-3y-2 \\ y\neq -\frac{5}{3} \end{cases} \end{array}\right.;\quad \begin{cases} y=1 \\ x=-5 \\ y\neq -\frac{5}{3} \end{cases}.$$

Ответ: $(-5;\ 1)$.

8. $\begin{cases} \frac{x^2+y+1}{y^2+x+1}=\frac{3}{2} \\ x-y=1 \end{cases}$. $\begin{cases} 2x^2+2y+2=3y^2+3x+3 \\ x=y+1 \end{cases}$;

$$\begin{cases} 2(y+1)^2+2y+2=3y^2+3(y+1)+3 \\ x=y+1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2y^2+4y+2+2y+2=3y^2+3y+3+3 \\ x=y+1 \end{cases};\quad \begin{cases} y^2-3y+2=0 \\ x=y+1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=2 \end{array}\right. \\ x=y+1 \end{cases};\quad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y=1 \\ x=y+1 \end{cases} & (2;\ 1) \\ \begin{cases} y=2 \\ x=y+1 \end{cases} & (3;\ 2). \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(2;\ 1);\ (3;\ 2)\}$.

9. $\begin{cases} x^2+2xy+4y^2=7 \\ x^3-8y^3=35 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+2xy+4y^2=7 \\ (x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=35 \end{cases}$;

$$\boxed{x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)}$$

$$\begin{cases} x^2+2xy+4y^2=7 \\ (x-2y)\cdot 7=35 \end{cases};\quad \begin{cases} x^2+2xy+4y^2=7 \\ x-2y=5 \end{cases};$$

$$\begin{cases}(5+2y)^2+2y(5+2y)+4y^2=7\\ x=5+2y\end{cases};$$

$$\begin{cases}25+20y+4y^2+10y+4y^2+4y^2=7\\ x=5+2y\end{cases};$$

$$\begin{cases}12y^2+30y+18=0\\ x=5+2y\end{cases}; \quad \begin{cases}2y^2+5y+3=0\\ x=5+2y\end{cases};$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=-1\\ y=-\frac{3}{2}\end{array}\right.\\ x=5+2y\end{cases}; \quad \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}y=-1\\ x=5-2\end{cases} & (3;\,-1)\\ \begin{cases}y=-1,5\\ x=2\end{cases} & (2;\,-1,5)\end{array}\right..$$

Ответ: $\{(3;\,-1);\,(2;\,-1,5)\}$.

10. $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{25}{12}\\ x^2+y^2=25\end{cases}.$

Пусть $\frac{x}{y}=t$, тогда первое уравнение будет иметь вид

$$t+\frac{1}{t}=\frac{25}{12}; \quad 12t^2-25t+12=0; \quad \left[\begin{array}{l}t=\frac{4}{3}\\ t=\frac{3}{4}\end{array}\right..$$

а) $t=\frac{4}{3}$.

$$\begin{cases}x=\frac{4}{3}y\\ x^2+y^2=25\end{cases}; \quad \begin{cases}x=\frac{4}{3}y\\ \frac{16}{9}y^2+y^2=25\end{cases}; \quad \begin{cases}x=\frac{4}{3}y\\ y^2=9\end{cases} \quad \begin{array}{l}(4;\,3)\\ (-4;\,-3)\end{array}.$$

б) $t=\frac{3}{4}$.

$$\begin{cases}x=\frac{3}{4}y\\ x^2+y^2=25\end{cases}; \quad \begin{cases}x=\frac{3}{4}y\\ \frac{9}{16}y^2+y^2=25\end{cases}; \quad \begin{cases}x=\frac{3}{4}y\\ y^2=16\end{cases} \quad \begin{array}{l}(3;\,4)\\ (-3;\,-4)\end{array}.$$

Ответ: $\{(4;\,3);\,(-4;\,-3);\,(-3;\,-4);\,(3;\,4)\}$.

11. $\begin{cases} \dfrac{2x}{y} + \dfrac{y}{2x} = \dfrac{10}{3} \\ 4x^2 - y^2 = 8 \end{cases}.$

Пусть $\dfrac{2x}{y} = t$, тогда $\boxed{1}$ уравнение примет вид: $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{10}{3}$;

$3t^2 - 10t + 3 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

а) $t = 3$; $\begin{cases} \dfrac{2x}{y} = 3 \\ 4x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x = 3y \\ 9y^2 - y^2 = 8 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x = 3y \\ y^2 = 1 \end{cases}$;

$\begin{cases} 2x = 3y \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -1 \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{array}{l} (1.5;\ 1) \\ (-1,5;\ -1) \end{array}$..

б) $t = \dfrac{1}{3}$; $\begin{cases} \dfrac{2x}{y} = \dfrac{1}{3} \\ 4x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$; $\begin{cases} 6x = y \\ 4x^2 - 36x^2 = 8 \end{cases}$;

$\begin{cases} 6x = y \\ -4y^2 = 1 \end{cases}$ $\varnothing$

Ответ: $\{(1,5;\ 1);\ (-1,5;\ -1)\}$.

12. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^4 + x^2y^2 = 90 \end{cases}.$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2\left(x^2 + y^2\right) = 90 \end{cases}.$

Разделим второе уравнение на первое уравнение почленно:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 = 9 \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x = -3 \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = -3 \end{cases} \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} (3;\ 1) \\ (3;\ -1) \\ (-3;\ 1) \\ (-3;\ -1) \end{array}$.

Ответ: $\{(3;\ 1);\ (-3;\ 1);\ (3;\ -1);\ (-3;\ -1)\}$.

13. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 124 \\ x^2 + xy + y^2 = 31 \end{cases}.$

$\begin{cases} (x - y)\left(x^2 + xy + y^2\right) = 124 \\ x^2 + xy + y^2 = 31 \end{cases}$;

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 31 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y + 4 \\ (y+4)^2 + y(y+4) + y^2 = 31 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y + 4 \\ y^2 + 8y + 16 + y^2 + 4y + y^2 = 31 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y + 4 \\ 3y^2 + 12y - 15 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y + 4 \\ y^2 + 4y - 5 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = y + 4 \\ \left[\begin{array}{l} y = -5 \\ y = 1 \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{array}{c} (5; 1) \\ (-1; -5) \end{array}.$$

Ответ: $\{(5; 1); (-1; -5)\}$.

14. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases} \left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right);$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = -6 \end{cases} \left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right);$

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 4 \\ (x-y)^2 = 16 \end{cases}.$$

а) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$ $(3; -1)$. б) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -4 \end{cases}$ $(-1; 3)$.

в) $\begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = 4 \end{cases}$ $(1; -3)$. г) $\begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = -4 \end{cases}$ $(-3; 1)$.

Ответ: $\{(3; -1); (-1; 3); (1; -3); (-3; 1)\}$.

15. $\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 - 3x + 6y = 54 \\ 4x^2 - 4xy + y^2 - 24x + 12y = 189 \end{cases}.$

$$\begin{cases} (x-2y)^2 - 3(x-2y) = 54 \\ (2x-y)^2 - 12(2x-y) = 189 \end{cases}.$$

Пусть $\begin{cases} x - 2y = t \\ 2x - y = z \end{cases}.$

Тогда $\begin{cases} t^2 - 3t - 54 = 0 \\ z^2 - 12z - 189 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (t+6)(t-9) = 0 \\ (z-21)(z+9) = 0 \end{cases}.$

а) $\begin{cases} t+6=0 \\ z-21=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-2y=-6 \\ 2x-y=21 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=11 \\ x=16 \end{cases} \quad (16;\ 11).$

б) $\begin{cases} t+6=0 \\ z+9=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-2y=-6 \\ 2x-y=-9 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=1 \\ x=-4 \end{cases} \quad (-4;\ 1).$

в) $\begin{cases} t-9=0 \\ z-21=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-2y=9 \\ 2x-y=21 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=1 \\ x=11 \end{cases} \quad (11;\ 1).$

г) $\begin{cases} t-9=0 \\ z+9=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-2y=9 \\ 2x-y=-9 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=-9 \\ x=-9 \end{cases} \quad (-9;\ -9).$

О т в е т: $\{(16;\ 11);\ (-4;\ 1);\ (11;\ 1);\ (-9;\ -9)\}$.

16. $\begin{cases} x^2 = 4x + 5y \\ y^2 = 4y + 5x \end{cases} \left(\boxed{1} - \boxed{2}\right);$

$\begin{cases} (x^2 - y^2) = (y - x) \\ y^2 = 4y + 5x \end{cases}; \quad \begin{cases} (x-y)(x+y+1) = 0 \\ y^2 = 4y + 5x \end{cases}.$

а) $\begin{cases} x = y \\ y^2 = 4y + 5x \end{cases}; \quad \begin{cases} x = y \\ y(y-9) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (0;\ 0) \\ (9;\ 9) \end{matrix}.$

б) $\begin{cases} x = -y-1 \\ y^2 = 4y + 5x \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -y-1 \\ y^2 - 4y - 5(-y-1) = 0 \end{cases};$

$\begin{cases} x = -y-1 \\ y^2 + y + 5 = 0, \quad D < 0 \end{cases}.$

О т в е т: $\{(0;\ 0);\ (9;\ 9)\}$.

Проверочная работа 2

1. $\begin{cases} 16y^2 - 25x^2 = 8 \\ 4y + 5x = -2 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} (3x + y - 5)^2 = (x - 2y - 3)^2 \\ (2x + 3y)^2 = 4 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} 2|x + 5| = 3y - 4 \\ |3y - 2| = x + 4 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -8 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x^2 - 9y^2 + x + 3y = -11 \end{cases}$.

6. $\begin{cases} xy^2 - xy - 3y + 3 = 0 \\ \frac{x+4y-7}{y-1} = 3 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} \frac{x}{3y} + \frac{3y}{x} = \frac{10}{3} \\ x^2 - 9y^2 = 8 \end{cases}$.

8. $\begin{cases} \frac{2x+3y}{2x-3y} + \frac{2x-3y}{2x+3y} = \frac{13}{6} \\ 6xy = 5 \end{cases}$.

9. $\begin{cases} xy - 2(x + y) = 2 \\ xy + x + y = 29 \end{cases}$.

10. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 49 \\ x^2 - xy + y^2 = 19 \end{cases}$.

11. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x^2y + xy^2 = -2 \end{cases}$.

12. $\begin{cases} x^3 + (2y + 1)x - 2 = 0 \\ x^3 + (y - 3)x + 2 = 0 \end{cases}$.

13. $\begin{cases} 3x + 2y + \frac{x}{x+y} = 5{,}5 \\ x + 3y - \frac{2x}{x+y} = 3 \end{cases}$.

14. $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 2 \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = -22 \end{cases}$.

15. $\begin{cases} x + xy + xy^2 = 6 \\ x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 12 \end{cases}$.

16. $\begin{cases} (x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1) = 3 \\ (1 - x)(1 - y) = 6 \end{cases}$.

17. $\begin{cases} xy - \frac{x}{y} = 2 \\ xy - \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \end{cases}$.

18. $\begin{cases} x^3 - x = y^3 - y \\ 2x^2 + 3y^2 = 5xy \end{cases}$.

Системы однородных уравнений

Определение. *Уравнение называется* ***однородным,*** *если сумма степеней неизвестных в каждом из слагаемых содержащих неизвестные одинакова.*

Общий вид однородного уравнения:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_kx^{n-k}y^k + \ldots + a_ny^n = d$$

Почему же мы выделяем такие системы? Оказывается, существует стандартная подстановка $x = ty$ $(y \neq 0)$, которая позволяет решить систему.

Практикум 8

1. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21 \\ y^2 - 2xy = -15 \end{cases}.$

Пусть $x = ty$ $(y \neq 0)$, тогда

$$\begin{cases} y^2(t^2 - t + 1) = 21 \\ y^2(1 - 2t) = -15 \end{cases}; \quad \begin{cases} y^2 = \dfrac{21}{t^2-t+1} \\ y^2 = \dfrac{15}{2t-1} \end{cases};$$

$$\frac{21}{t^2-t+1} = \frac{15}{2t-1}; \quad 7(2t-1) = 5(t^2 - t + 1); \quad 5t^2 - 19t + 12 = 0.$$

$$t_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361-240}}{10} = \frac{19 \pm 11}{10}; \quad \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \frac{4}{5} \end{array}\right..$$

Зная t, легко сразу найти y^2, учитывая, что $y^2 = \frac{15}{2t-1}$. Используя это, найдем y, а затем и x.

а) $t = 3$.

$$\begin{cases} x = 3y \\ y^2 = \dfrac{15}{2 \cdot 3 - 1} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 3y \\ y^2 = 3 \end{cases}; \quad \begin{array}{c} \left(3\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right) \\ \left(-3\sqrt{3};\ -\sqrt{3}\right) \end{array}.$$

б) $t = \frac{4}{5}$.

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}y \\ y^2 = \dfrac{15}{2\cdot\frac{4}{5} - 1} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{4}{5}y \\ y^2 = 25 \end{cases}; \quad \begin{matrix} (4;\ 5) \\ (-4;\ -5) \end{matrix}.$$

При $y = 0$ решения нет.

Ответ: $\left\{\left(3\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right);\ \left(-3\sqrt{3};\ -\sqrt{3}\right);\ (4;\ 5);\ (-4;\ -5)\right\}$.

2. $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ x^2 - 4xy + 5y^2 = 5 \end{cases}.$

Пусть $x = ty$ $(y \neq 0)$, тогда

$$\begin{cases} t^2y^2 - 2ty^2 + 3y^2 = 9 \\ t^2y^2 - 4ty^2 + 5y^2 = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} y^2 = \dfrac{9}{t^2-2t+3} \\ y^2 = \dfrac{5}{t^2-4t+5} \end{cases};$$

$$\frac{9}{t^2-2t+3} = \frac{5}{t^2-4t+5}; \quad 9t^2 - 36t + 45 = 5t^2 - 10t + 15;$$

$$4t^2 - 26t + 30 = 0; \quad \left[\begin{matrix} t = 5 \\ t = 1{,}5 \end{matrix}\right..$$

а) $t = 5$.

$$\begin{cases} x = 5y \\ y^2 = \dfrac{5}{25-20+5} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 5y \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} \left(\frac{5\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{matrix}.$$

б) $t = 1{,}5$.

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ y^2 = \dfrac{5}{\frac{9}{4} - \frac{4\cdot3}{2} + 5} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ y^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} (3;\ 2) \\ (-3;\ -2) \end{matrix}.$$

При $y = 0$ решения нет.

Ответ: $\left\{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ (3;\ 2);\ (-3;\ -2)\right\}$.

3. $\begin{cases} 2x^2+3xy+3y^2=2 \\ 3x^2-2xy-2y^2=3 \end{cases}.$

Пусть $x=ty$ $(y\neq 0)$, тогда $\begin{cases} 2t^2y^2+3ty^2+3y^2=2 \\ 3t^2y^2-2ty^2-2y^2=3 \end{cases};$

$\begin{cases} y^2=\frac{2}{2t^2+3t+3} \\ y^2=\frac{3}{3t^2-2t-2} \end{cases};$ $\quad \frac{2}{2t^2+3t+3}=\frac{3}{3t^2-2t-2};$

$6t^2-4t-4=6t^2+9t+9;\qquad t=-1.$

а) $t=-1.$

$\begin{cases} x=-y \\ y^2=\frac{3}{3+2-2} \end{cases};$ $\quad \begin{cases} x=-y \\ y^2=1 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} (-1;\ 1) \\ (1;\ -1) \end{matrix}.$

Казалось бы все в порядке, но ведь подстановка $x=ty$ имеет смысл, только если $y\neq 0$, а если $y=0$, то такого $t\neq 0$ найти нельзя при $x\neq 0$.

б) Проверим случай равенства y нулю (не используя подстановку).

Если $y=0$, тогда $\begin{cases} 2x^2=2 \\ 3x^2=3 \end{cases}$, то есть $x^2=1$.

Значит, есть еще решения $(1;\ 0)$; $(-1;\ 0)$.

Ответ: $\{(-1;\ 1);\ (1;\ -1);\ (1;\ 0);\ (-1;\ 0)\}$.

4. $\begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=70 \\ x\sqrt{xy}+y^2=105 \end{cases}$. Пусть $x=ty$ $(y\neq 0)$, тогда

$\begin{cases} t^2y^2+y\sqrt{ty^2}=70 \\ ty\sqrt{ty^2}+y^2=105 \end{cases};$ $\quad \begin{cases} y^2t^2+y\cdot|y|\sqrt{t}=70 \\ y\cdot|y|t\sqrt{t}+y^2=105 \end{cases}.$

Тогда $t \geqslant 0$ (чтобы существовал корень).

а) $\begin{cases} y \geqslant 0 \\ y^2 = \frac{70}{t^2+\sqrt{t}} \\ y^2 = \frac{105}{t\sqrt{t}+1} \end{cases}$; $\quad 70\left(t\sqrt{t}+1\right) = 105\left(t^2+\sqrt{t}\right)$;

$2\left(t\sqrt{t}+1\right) = 3\sqrt{t}\left(t\sqrt{t}+1\right)$; $\quad \sqrt{t} = \frac{2}{3}$; $\quad \begin{cases} t = \frac{4}{9} \\ y^2 = \frac{70}{\frac{16}{81}+\frac{2}{3}} \end{cases}$;

$\begin{cases} x = \frac{4}{9}y \\ y^2 = 81 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} x = \frac{4}{9}y \\ \left[\begin{array}{l} y = 9 \\ y = -9 \notin [0;\infty] \end{array}\right. \end{cases}$; $\quad \begin{cases} x = \frac{4}{9}y \\ y = 9 \end{cases}$; $\quad$ (4; 9).

б) $\begin{cases} y \leqslant 0 \\ y^2 = \frac{70}{t^2-\sqrt{t}} \\ y^2 = \frac{105}{-t\sqrt{t}+1} \end{cases}$; $\quad 70\left(-t\sqrt{t}+1\right) = 105\left(t^2-\sqrt{t}\right)$;

$\left(3\sqrt{t}+2\right)\left(t\sqrt{t}-1\right) = 0$; $\quad t\sqrt{t} = 1$; $\quad \begin{cases} t = 1 \\ y^2 - y^2 = 70 \end{cases}$ $\quad \varnothing$.

При $y = 0$ решения нет.

Ответ: (4; 9).

Системы симметричных уравнений

Определение

Выражение с двумя неизвестными называется ***симметричным****, если при замене одного неизвестного на другое и наоборот выражение не изменяется.*

Теорема

Любое симметричное выражение с двумя неизвестными может быть представлено, как алгебраическая комбинация, через два простейших симметричных выражения: $a+b=t$ и $ab=z$.

Примеры:

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=t^2-2z;$$

$$a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab=t^2-z;$$

$$a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab=t^2-3z;$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=$$

$$=(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)=t(t^2-3z)$$

и так далее.

Практикум 9

1. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}.$

Пусть $\begin{cases} x+y=t \\ xy=z \end{cases}$, тогда система имеет вид: $\begin{cases} t^2-z=13 \\ t^2-3z=7 \end{cases}.$

Вычтем из первого уравнения второе уравнение:

$\begin{cases} z=3 \\ t^2-z=13 \end{cases};$ $\begin{cases} z=3 \\ t^2=16 \end{cases}.$

а) $\begin{cases} z=3 \\ t=4 \end{cases};$ $\begin{cases} xy=3 \\ x+y=4 \end{cases}.$

По теореме, обратной теореме Виета, данная система порождает квадратное уравнение $m^2 - 4m + 3 = 0$, корнями которого являются x и y. В силу симметричности имеем: $(1;\ 3);\ (3;\ 1)$.

б) $\begin{cases} z = 3 \\ t = -4 \end{cases}$; $\begin{cases} xy = 3 \\ x + y = -4 \end{cases}$.

Из порожденного квадратного уравнения

$n^2 + 4n + 3 = 0$ следуют решения $(-3;\ -1);\ (-1;\ -3)$.

Ответ: $\{(1;\ 3);\ (3;\ 1);\ (-3;\ -1);\ (-1;\ -3)\}$.

2. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 152 \\ x^2y + xy^2 = 120 \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} x + y = t \\ xy = z \end{cases}$.

Так как $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)\left((x+y)^2 - 3xy\right)$ и $x^2y + xy^2 = xy(x+y)$, то получаем

$$\begin{cases} t(t^2 - 3z) = 152 \\ tz = 120 \end{cases}; \quad \begin{cases} t^3 - 3tz = 152 \\ tz = 120 \end{cases}; \quad \begin{cases} t^3 = 512 \\ tz = 120 \end{cases};$$

$$\begin{cases} t = 8 \\ tz = 120 \end{cases}; \quad \begin{cases} t = 8 \\ z = 15 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}.$$

Последняя система порождает уравнение $k^2 - 8k + 15 = 0$, тогда $(3;\ 5);\ (5;\ 3)$ — решения системы

Ответ: $\{(3;\ 5);\ (5;\ 3)\}$.

3. $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14 \\ x^2 + y^2 + xy = 84 \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} x + y = t \\ \sqrt{xy} = z \end{cases}$, тогда $\begin{cases} t + z = 14 \\ t^2 - z^2 = 84 \end{cases}$; $\begin{cases} t + z = 14 \\ t - z = 6 \end{cases}$.

Так как $t^2 - z^2 = (t-z)(t+z) = 84$,

то $\begin{cases} t = 10 \\ z = 4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y = 10 \\ \sqrt{xy} = 4 \end{cases}$.

$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 16 \end{cases}$ порождает $k^2 - 10k + 16 = 0$,

тогда $(2; 8); (8; 2)$ — решения.

Ответ: $\{(2; 8); (8; 2)\}$.

4. $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5 \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} x + y = t \\ xy = z \end{cases}$.

Система примет вид: $\begin{cases} t\left(t^2 - 3z\right) + z^3 = 17 \\ t + z = 5 \end{cases}$;

$\begin{cases} t^3 - 3tz + z^3 = 17 \\ t = 5 - z \end{cases}$; $\begin{cases} (5 - z)^3 - 3(5 - z) \cdot z + z^3 = 17 \\ t = 5 - z \end{cases}$;

$\begin{cases} z^2 - 5z + 6 = 0 \\ t = 5 - z \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{aligned} z = 2 \\ z = 3 \end{aligned}\right. \\ t = 5 - z \end{cases}$.

а) $\begin{cases} z = 2 \\ t = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} xy = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$.

Последняя порождает $n^2 - 3n + 2 = 0$, отсюда $(1; 2); (2; 1)$.

б) $\begin{cases} z = 3 \\ t = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} xy = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

Последняя порождает $k^2 - 2k + 3 = 0$, где $D < 0$ — решений нет.

Ответ: $\{(1; 2); (2; 1)\}$.

Комбинированные приемы решения систем

Практикум 10

1. $\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y^2 + 5y - 2 = 0 \\ 2xy + y^2 + y - 3 = 0 \end{cases}.$

Попробуем решить первое уравнение, как квадратное, полагая, что y — параметр.

$2x^2 - yx - 3y^2 + 5y - 2 = 0.$

$$x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 8\left(3y^2 - 5y + 2\right)}}{4} = \frac{y \pm \sqrt{(5y-4)^2}}{4} = \frac{y \pm (5y-4)}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{2}y - 1 \\ x = 1 - y \end{array}\right.$$

а) $\begin{cases} x = \frac{3}{2}y - 1 \\ 2xy + y^2 + y - 3 = 0 \end{cases};$

$$\begin{cases} x = \frac{3y-2}{2} \\ 2 \cdot \frac{3y-2}{2} \cdot y + y^2 + y - 3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{3y-2}{2} \\ 4y^2 - y - 3 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{3y-2}{2} \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\frac{3}{4} \end{array}\right. \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\frac{3}{4} \\ x = -2\frac{1}{8} \end{cases} \end{array}\right..$$

б) $\begin{cases} x = 1 - y \\ 2xy + y^2 + y - 3 = 0 \end{cases};$

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ 2(1-y)y + y^2 + y - 3 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ -y^2 + 3y - 3 = 0 \quad (D < 0) \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{1}{2};\ 1\right);\ \left(-2\frac{1}{8};\ -\frac{3}{4}\right)\right\}.$

2. $\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0 \\ 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0 \end{cases}.$

Попробуем решить данную систему аналогично предыдущему способу.

Представим первое уравнение системы в виде стандартного квадратного уравнения:

$x^2 - 2(y-1)x + 2y^2 - 8y + 10 = 0.$

Решая его как приведенное квадратное уравнение, имеем

$x_{1,2} = y - 1 \pm \sqrt{(y-1)^2 - 2y^2 + 8y - 10} = y - 1 \pm \sqrt{-(y-3)^2}.$

Вот это да! Так как $D = -(y-3)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (y-3)^2 \leqslant 0,$
то есть $y = 3.$

Но тогда существует единственное $x = 3 - 1 + 0,$
то есть $x = 2.$

Остается проверить пару (2; 3) для второго уравнения:
$2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 13 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 7 = 0.$

Убеждаемся, что это тождество, других решений быть не может.

Ответ: (2; 3).

3. $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 + y + 2 = 0 \\ 2x^2 + 3xy + y^2 - 3y - 5 = 0 \end{cases}. \quad \left(\boxed{1} + \boxed{2}\right)$

$\begin{cases} x^2 - xy - y^2 + y + 2 = 0 \\ 3x^2 + 2xy - 2y - 3 = 0 \end{cases}.$

Решим $3x^2 + 2xy - 2y - 3 = 0$ как квадратное уравнение:

$x_{1,2} = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 3(-2y-3)}}{3} = \frac{-y \pm \sqrt{(y+3)^2}}{3} = \frac{-y \pm (y+3)}{3};$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{2y+3}{3} \end{array}\right. \\ x^2 - xy - y^2 + y + 2 = 0 \end{cases}.$

а) $\begin{cases} x = 1 \\ x^2 - xy - y^2 + y + 2 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 3 \end{cases}$ $\begin{matrix} \left(1; \sqrt{3}\right) \\ \left(1; -\sqrt{3}\right) \end{matrix}$.

б) $\begin{cases} x = -\frac{2y+3}{3} \\ x^2 - xy - y^2 + y + 2 = 0 \end{cases}$;

$4y^2 + 12y + 9 + 6y^2 + 9y - 9y^2 + 9y + 18 = 0;$

$y^2 + 30y + 27 = 0;$

$y = -15 \pm \sqrt{225 - 27} = -15 \pm \sqrt{198} = -15 \pm 3\sqrt{22};$

$\left(9 - 2\sqrt{22}; -15 + 3\sqrt{22}\right)$

$\left(9 + 2\sqrt{22}; -15 - 3\sqrt{22}\right).$

Ответ: $\left\{\left(1; \sqrt{3}\right); \left(1; -\sqrt{3}\right); \left(9 - 2\sqrt{22}; -15 + 3\sqrt{22}\right);\right.$

$\left.\left(9 + 2\sqrt{22}; -15 - 3\sqrt{22}\right)\right\}.$

4. $\begin{cases} 8\left(x^2 + xy + y^2\right) = (x - y)^3 \\ 2\left(x^2 - xy + y^2\right) = 3(x - y) \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} x - y = t \\ xy = z \end{cases}$.

Тогда представим: $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab = t^2 + 2z;$

$a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab = t^2 + 3z;$

$a^2 - ab + b^2 = (a - b)^2 + ab = t^2 + z.$

Значит, система приобретает вид

$\begin{cases} 8\left(t^2 + 3z\right) = t^3 \\ 2\left(t^2 + z\right) = 3t \end{cases}$; $\begin{cases} 8\left(t^2 + \frac{3\left(3t-2t^2\right)}{2}\right) = t^3 \\ z = \frac{3t-2t^2}{2} \end{cases}$;

$8t^2 + 12\left(3t - 2t^2\right) = t^3;$ $t^3 + 16t^2 - 36t = 0;$

$t\left(t^2 + 16t - 36\right) = 0;$ $t(t + 18)(t - 2) = 0.$

То есть $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2 \\ t=-18 \end{array}\right. \\ z=\dfrac{3t-2t^2}{2} \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=0 \\ z=\dfrac{3t-2t^2}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} t=2 \\ z=\dfrac{3t-2t^2}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} t=-18 \\ z=\dfrac{3t-2t^2}{2} \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=0 \\ z=0 \end{cases} \\ \begin{cases} t=2 \\ z=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} t=-18 \\ z=-351 \end{cases} \end{array}\right.$

а) $\begin{cases} x-y=0 \\ xy=0 \end{cases}$ $(0;\ 0)$.

б) $\begin{cases} x-y=2 \\ xy=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2+y \\ (2+y)y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2+y \\ (y+1)^2=0 \end{cases}$ $(1;\ -1)$.

в) $\begin{cases} x-y=-18 \\ xy=-351 \end{cases}$; $\begin{cases} x=y-18 \\ (y-18)y=-351 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=y-18 \\ y^2-18y+351=0 \quad (D<0) \end{cases}$.

Ответ: $\{(0;\ 0);\ (1;\ -1)\}$.

5. $\begin{cases} y^2(x^2-3)+xy+1=0 \\ y^2(3x^2-6)+xy+2=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2y^2+xy-3y^2+1=0 \\ 3x^2y^2+xy-6y^2+2=0 \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} xy=u \\ y^2=v \end{cases}$. Тогда $\begin{cases} u^2-3v+u+1=0 \\ 3u^2-6v+u+2=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} 3v=u^2+u+1 \\ 3u^2+u+2-2(u^2+u+1)=0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3v=u^2+u+1 \\ u^2-u=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} 3v=u^2+u+1 \\ \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=1 \end{array}\right. \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=0 \\ v=\frac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right.$;

а) $\begin{cases} xy=1 \\ y^2=1 \end{cases}$ $\begin{array}{l} (1;\ 1) \\ (-1;\ -1) \end{array}$. б) $\begin{cases} xy=0 \\ y^2=\frac{1}{3} \end{cases}$ $\begin{array}{l} \left(0;\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ \left(0;\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{array}$.

Ответ: $\left\{(1;\ 1);\ (-1;\ -1);\ \left(0;\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right);\ \left(0;\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$.

6. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x-y) \\ x^3 + y^3 = 7(x+y) \end{cases}$; $\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2-19) = 0 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2-7) = 0 \end{cases}$.

а) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $(0;\ 0)$.

б) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 19 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y^2 = 19 \\ x = -y \end{cases}$ $\begin{matrix} \left(\sqrt{19};\ -\sqrt{19}\right) \\ \left(-\sqrt{19};\ \sqrt{19}\right) \end{matrix}$.

в) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$; $\begin{cases} x = y \\ x^2 - x^2 + x^2 = 7 \end{cases}$ $\begin{matrix} \left(\sqrt{7};\ \sqrt{7}\right) \\ \left(-\sqrt{7};\ -\sqrt{7}\right) \end{matrix}$.

г) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$ $\left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right)$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 2xy = 12 \end{cases}$ $\left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right)$

$\begin{cases} (x+y)^2 = 25 \\ (x-y)^2 = 1 \end{cases}$;

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad (3;\ 2) \\ \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases} \quad (2;\ 3) \\ \begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad (-2;\ -3) \\ \begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = -1 \end{cases} \quad (-3;\ -2). \end{array}\right.$

Ответ: $\left\{(0;\ 0);\ \left(\sqrt{7};\ \sqrt{7}\right);\ \left(-\sqrt{7};\ -\sqrt{7}\right);\ \left(\sqrt{19};\ -\sqrt{19}\right);\right.$
$\left.\left(-\sqrt{19};\ \sqrt{19}\right);\ (3;\ 2);\ (2;\ 3);\ (-2;\ -3);\ (-3;\ -2)\right\}$.

7. $\begin{cases}\sqrt{\frac{x+y}{2}}+\sqrt{\frac{x-y}{3}}=14\\ \sqrt{\frac{x+y}{8}}-\sqrt{\frac{x-y}{12}}=3\end{cases}.$

Обратим внимание, что $\sqrt{\frac{x+y}{8}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+y}{2}}$; $\sqrt{\frac{x-y}{12}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-y}{3}}$.

Обозначим $\sqrt{\frac{x+y}{2}}=a$ $(a\geqslant 0)$; $\sqrt{\frac{x-y}{3}}=b$ $(b\geqslant 0)$.

Тогда имеем

$$\begin{cases}a+b=14\\ \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b=3\end{cases};\quad \begin{cases}a+b=14\\ a-b=6\end{cases}\quad \left(\boxed{1}\pm\boxed{2}\right)\quad \begin{cases}a=10\\ b=4\end{cases}.$$

Возвращаясь к переменным x и y, получаем

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{x+y}{2}}=10\\ \sqrt{\frac{x-y}{3}}=4\end{cases}\quad \begin{pmatrix}\boxed{1}^2\cdot 2\\ \boxed{2}^2\cdot 3\end{pmatrix}\quad \begin{cases}x+y=200\\ x-y=48\end{cases}\left(\boxed{1}\pm\boxed{2}\right)\quad \begin{cases}x=124\\ y=76\end{cases}.$$

Ответ: (124; 76).

8. $\begin{cases}(x^2+y^2)\frac{x}{y}=6\\ (x^2-y^2)\frac{y}{x}=1\end{cases}.$

Вначале перемножим почленно первое и второе уравнение, а затем поделим:

$$\begin{cases}(x^2+y^2)\frac{x}{y}(x^2-y^2)\frac{y}{x}=6\cdot 1\\ \dfrac{(x^2+y^2)\frac{x}{y}}{(x^2-y^2)\frac{y}{x}}=\dfrac{6}{1}\end{cases};\quad \begin{cases}x^4-y^4=6\\ \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{x^2}{y^2}=6\end{cases};$$

$$\begin{cases}x^4-y^4=6\\ \dfrac{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)}\cdot\dfrac{x^2}{y^2}=6\end{cases};\quad \begin{cases}x^4-y^4=6\\ \dfrac{1+\frac{y^2}{x^2}}{\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)\frac{y^2}{x^2}}=6\end{cases}.$$

Полагая $\frac{y^2}{x^2}=t$, получим из второго уравнения $\frac{1+t}{(1-t)t}=6$, то есть $1+t=6t(1-t)$; $6t^2-5t+1=0$, тогда

$$\begin{cases} x^4-y^4=6 \\ \left[\begin{array}{l} \frac{y^2}{x^2}=\frac{1}{2} \\ \frac{y^2}{x^2}=\frac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} x^4-y^4=6 \\ \left[\begin{array}{l} x^2=3y^2 \\ x^2=2y^2 \end{array}\right. \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^4-y^4=6 \\ x^2=3y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^4-y^4=6 \\ x^2=2y^2 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^4=\frac{3}{4} \\ x^2=3y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y^4=2 \\ x^2=2y^2 \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x^2=3y^2=\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y^2=\sqrt{2} \\ x^2=2\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right..$$

Имеем восемь пар:

$$\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}};\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right);\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}};-\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right);\left(\sqrt{2\sqrt{2}};\sqrt[4]{2}\right);\left(\sqrt{2\sqrt{2}};-\sqrt[4]{2}\right);$$

$$\left(-\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}};\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right);\left(-\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}};-\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right);\left(-\sqrt{2\sqrt{2}};\sqrt[4]{2}\right);\left(-\sqrt{2\sqrt{2}};-\sqrt[4]{2}\right).$$

Приведя ответы к более удобному виду, получим:

$$\left\{\left(\sqrt[4]{\frac{27}{4}};\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right);\left(\sqrt[4]{\frac{27}{4}};-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right);\left(\sqrt[4]{8};\sqrt[4]{2}\right);\left(\sqrt[4]{8};-\sqrt[4]{2}\right);\left(-\sqrt[4]{\frac{27}{4}};\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right);\right.$$

$$\left.\left(-\sqrt[4]{\frac{27}{4}};-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right);\left(-\sqrt[4]{8};\sqrt[4]{2}\right);\left(-\sqrt[4]{8};-\sqrt[4]{2}\right)\right\}.$$

9. $$\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x \\ \frac{1+y^2}{1+x^2}=5 \end{cases}. \quad \begin{cases} x^3-16x=y^3-4y \\ 5x^2=y^2-4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^3-16x=y(y^2-4) \\ 5x^2=y^2-4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^3-16x=y\cdot 5x^2 \\ 5x^2=y^2-4 \end{cases}.$$

а) $x \neq 0.$ $\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 16}{5x} \\ 5x^2 = y^2 - 4 \end{cases}$; $5x^2 = \left(\dfrac{x^2 - 16}{5x}\right)^2 - 4;$

$125x^4 = x^4 - 32x^2 + 256 - 100x^2;$

$31x^4 + 33x^2 - 64 = 0;$

$\left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -\dfrac{64}{31} \quad \varnothing \end{array}\right.$. Тогда $\begin{cases} x^2 = 1 \\ y = \dfrac{x^2 - 16}{5x} \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \end{array}\right.$.

б) $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 4 \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Ответ: $\{(1; -3); (-1; 3); (0; 2); (0; -2)\}$.

10. $\begin{cases} \sqrt{1 - 16y^2} - \sqrt{1 - 16x^2} = 2(x + y) \\ x^2 + y^2 + 4xy = \dfrac{1}{5} \end{cases}$.

$D(C)$ — область определения системы: $\begin{cases} |y| \leqslant \dfrac{1}{4} \\ |x| \leqslant \dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Отметим, что

А) если $x + y \geq 0$, то $\sqrt{1 - 16y^2} - \sqrt{1 - 16x^2} \geqslant 0$, то есть

$\sqrt{1 - 16y^2} \geqslant \sqrt{1 - 16x^2}$; $1 - 16y^2 \geqslant 1 - 16x^2$; $\begin{cases} x^2 \geqslant y^2 \\ x + y \geqslant 0 \end{cases}$.

Б) если $x + y \leqslant 0$, то $\sqrt{1 - 16y^2} - \sqrt{1 - 16x^2} \leqslant 0$, то есть

$\sqrt{1 - 16y^2} \leqslant \sqrt{1 - 16x^2}$; $1 - 16y^2 \leqslant 1 - 16x^2$; $\begin{cases} x^2 \leqslant y^2 \\ x + y \leqslant 0 \end{cases}$.

Учтем эти соображения при отборе решений системы.

Возведя обе части первого уравнения в квадрат, получим:

$$2-16\left(x^2+y^2\right)-2\sqrt{1-16\left(x^2+y^2\right)+256x^2y^2}=4\left(x^2+y^2\right)+8xy.$$

Учитывая, что $x^2+y^2=\frac{1}{5}-4xy$, выполним подстановку:

$$2-16\left(\frac{1}{5}-4xy\right)-2\sqrt{1-16\left(\frac{1}{5}-4xy\right)+256x^2y^2}=4\left(\frac{1}{5}-4xy\right)+8xy.$$

Выполнив ряд преобразований, получим:

$$\sqrt{-\frac{11}{5}+64xy+256x^2y^2}=36xy-1.$$

Учитывая, что $xy\geqslant\frac{1}{36}$, возведем в квадрат обе части полученного уравнения:

$$-\frac{11}{5}+64xy+256x^2y^2=1296x^2y^2-72xy+1,$$

то есть

$$650x^2y^2-85xy+2=0,$$

где $\left[\begin{array}{l} xy=\frac{1}{10} \\ xy=\frac{2}{65} \end{array}\right.$, но так как $\left.\begin{array}{l} |x|\leqslant\frac{1}{4} \\ |y|\leqslant\frac{1}{4} \end{array}\right| \Rightarrow |xy|\leqslant\frac{1}{16}$,

а $\frac{1}{10}\notin\left[-\frac{1}{16};\frac{1}{16}\right]$, $\frac{2}{65}\in\left[-\frac{1}{16};\frac{1}{16}\right]$,

то $\begin{cases} xy=\frac{2}{65} \\ x^2+y^2=\frac{1}{5}-4xy \end{cases}$; $\begin{cases} xy=\frac{2}{65} \\ (x+y)^2=\frac{9}{65} \end{cases}$.

а) $\begin{cases} xy=\frac{2}{65} \\ x+y=\frac{3}{\sqrt{65}} \end{cases}$ порождает уравнение

$$k^2-\frac{3}{\sqrt{65}}k+\frac{2}{65}=0, \text{ то есть } 65k^2-3\sqrt{65}k+2=0.$$

Обозначим $\sqrt{65}k = a$.

$a^2 - 3a + 2 = 0;$ $\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 2 \end{array}\right.$ и $\left[\begin{array}{l} k = \dfrac{1}{\sqrt{65}} \\ k = \dfrac{2}{\sqrt{65}} \end{array}\right.$.

Значит

1) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{65}} \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{65}} \end{cases}$.

Так как $x + y \geqslant 0$; то $x^2 \geqslant y^2$, но $\frac{1}{65} < \frac{4}{65}$.

Смотри условия отбора корней.

2) $\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{65}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{65}} \end{cases}$.

Здесь все удовлетворяет условиям,

то есть $\left(\frac{2}{\sqrt{65}}; \frac{1}{\sqrt{65}}\right)$ — решение системы.

б) $\begin{cases} xy = \dfrac{2}{65} \\ x + y = -\dfrac{3}{\sqrt{65}} \end{cases}$ порождает уравнение $p^2 + \frac{3}{\sqrt{65}}p + \frac{2}{65} = 0$.

Решая аналогично варианту а), получаем:

1) $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{65}} \\ y = -\dfrac{2}{\sqrt{65}} \end{cases}$.

Так как $x + y \leqslant 0$, то $x^2 \leqslant y^2$, т. к. $\frac{1}{65} \leqslant \frac{4}{65}$.

2) $\begin{cases} x = -\dfrac{2}{\sqrt{65}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{65}} \end{cases}$.

Это решение не удовлетворяет $D(C)$.

Ответ: $\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{65}}; \frac{1}{\sqrt{65}}\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{65}}; -\frac{2}{\sqrt{65}}\right)\right\}$.

11. $\begin{cases} x - \sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{6}{y} \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}.$

Здесь есть подвох, так как необходимо учитывать, что $y\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \begin{cases} \sqrt{xy}; & y > 0 \\ -\sqrt{xy}; & y < 0 \end{cases}.$

а) $\begin{cases} y > 0 \\ xy - \sqrt{xy} - 6 = 0 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}; \quad \begin{cases} y > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{xy} = -2 \notin [0; \infty) \end{array}\right. \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}; \quad \begin{cases} y > 0 \\ xy = 9 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases};$

$\left(2 \cdot \boxed{2}\right) \quad \begin{cases} y > 0 \\ 2xy = 18 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases} \quad \left(\boxed{3} \pm \boxed{2}\right) \quad \begin{cases} y > 0 \\ (x+y)^2 = 35 \\ (x-y)^2 = -1 \quad \varnothing \end{cases}.$

б) $\begin{cases} y < 0 \\ xy + \sqrt{xy} - 6 = 0 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}; \quad \begin{cases} y < 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{xy} = 2 \\ \sqrt{xy} = -3 \notin [0; \infty) \end{array}\right. \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases};$

$\begin{cases} y < 0 \\ xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases} \quad \left(2 \cdot \boxed{2}\right); \quad \begin{cases} y < 0 \\ 2xy = 8 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases} \quad \left(\boxed{3} \pm \boxed{2}\right); \quad \begin{cases} y < 0 \\ (x+y)^2 = 25 \\ (x-y)^2 = 9 \end{cases}.$

$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases} & \text{(4; 1), но должно выполняться } y < 0, \\ \begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = 3 \end{cases} & \text{(–1; –4) — решение,} \\ \begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = -3 \end{cases} & \text{(–4; –1) — решение,} \\ \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -3 \end{cases} & \text{(1; 4), но должно выполняться } y < 0. \end{array}\right.$

Ответ: $\{(-1; -4); (-4; -1)\}$.

12. $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt[3]{x-y}=6\\ \sqrt[6]{(x+3)^3(x-y)^2}=8\end{cases}$. $D(C)\colon\ x+y\geqslant 0.$

Система тоже очень не простая, так как важно понимать,

что $\sqrt[3]{x-y}=\begin{cases}\sqrt[6]{(x-y)^2};\quad x\geqslant y\\ -\sqrt[6]{(x-y)^2};\quad x<y\end{cases}.$

а) Пусть $\begin{cases}x\geqslant y\\ x+y\geqslant 0\end{cases}$. Так как $x+y\geq 0$ по $D(C)$, то

$$\sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=\sqrt[6]{(x+y)^3}\cdot\sqrt[6]{(x-y)^2}.$$

Тогда обозначим $\begin{cases}\sqrt[6]{x+y}=a\\ \sqrt[6]{x-y}=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x+y}=a^3\\ \sqrt[3]{x-y}=b^2\end{cases}.$

Исходная система будет иметь следующий вид:

$\begin{cases}a^3-b^2=6\\ a^3\cdot b^2=8\end{cases};\quad \begin{cases}a^3=6+b^2\\ (6+b^2)b^2=8\end{cases};\quad b^4+6b^2-8=0;$

$\left(b^2\right)_{1,2}=-3\pm\sqrt{17}$, тогда $b^2=-3+\sqrt{17}$;

$a^3=3+\sqrt{17};\quad b^2=-3-\sqrt{17};\quad \varnothing.$

$\begin{cases}b^2=-3+\sqrt{17}\\ a^3=3+\sqrt{17}\end{cases}.$

$\begin{cases}x+y=a^6\\ x-y=b^6\end{cases}$ принимает вид $\begin{cases}x-y=\left(-3+\sqrt{17}\right)^3\\ x+y=\left(3+\sqrt{17}\right)^2\end{cases}$

с решениями $\begin{cases}x=\dfrac{\left(-3+\sqrt{17}\right)^3+\left(3+\sqrt{17}\right)^2}{2}\\ y=\dfrac{\left(3+\sqrt{17}\right)^2-\left(-3+\sqrt{17}\right)^3}{2}\end{cases}.$

После упрощения выражений получаем:

$\left(25\sqrt{17}-77;\ 103-19\sqrt{17}\right).$

Проверим, что $x \geqslant y$. Допустим, что

$25\sqrt{17} - 77 \geqslant 103 - 19\sqrt{17} \Leftrightarrow 44\sqrt{17} \geqslant 180 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11\sqrt{17} \geqslant 45 \Leftrightarrow 121 \cdot 17 \geqslant 45^2 \Leftrightarrow 2057 \geqslant 2025.$

Истина!

А истинно ли $x + y \geqslant 0$?

$25\sqrt{17} - 77 + 103 - 19\sqrt{17} = 26 + 6\sqrt{17};$

$26 + 6\sqrt{17} \geqslant 0$ (истинно).

То есть $\left(25\sqrt{17} - 77;\, 103 - 19\sqrt{17}\right)$ — решение системы.

б) $\begin{cases} x < y \\ x + y \geqslant 0 \end{cases}.$

$$\begin{cases} \sqrt[6]{y - x} = b \\ \sqrt[6]{y + x} = a \end{cases}; \quad \begin{cases} \sqrt[3]{y - x} = b^2 \\ \sqrt{y + x} = a^3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{x - y} = -b^2.$$

Учтем, что $\begin{cases} b^6 = y - x \\ a^6 = y + x \end{cases}.$

$$\sqrt[6]{(x + y)^3 (x - y)^2} = \sqrt[6]{(x + y)^3} \cdot \sqrt[6]{(x - y)^2} = a^3 \cdot b^2.$$

Тогда система имеет вид:

$$\begin{cases} a^3 + b^2 = 6 \\ a^3 b^2 = 8 \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^3 = 4 \\ b^2 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a^3 = 2 \\ b^2 = 4 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^6 = 16 \\ b^6 = 8 \end{cases} \\ \begin{cases} a^6 = 4 \\ b^6 = 64 \end{cases} \end{array}\right..$$

Возвращаясь к переменным x и y, получаем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y + x = 16 \\ y - x = 8 \end{cases} & (4;\, 12) \\ \begin{cases} y + x = 4 \\ y - x = 64 \end{cases} & (-30;\, 34). \end{array}\right.$$

Так как условия $x < y$ и $x + y \geqslant 0$ выполняются, то это решения системы.

Ответ: $\left\{\left(25\sqrt{17} - 77;\, 103 - 19\sqrt{17}\right);\, (4;\, 12);\, (-30;\, 34)\right\}.$

13. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 + x + y = 57 \\ \dfrac{(x+y)^5 + (x-y)^5}{(x+y)^5 - (x-y)^5} = \dfrac{1025}{1023} \end{cases}$

Для решения этой системы можно применить производную пропорцию, то есть:ы

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c}{k} \Leftrightarrow \frac{(a+b)+(a-b)}{(a+b)-(a-b)} = \frac{c+k}{c-k}, \quad (k \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq b,\ c \neq k.)$$

При желании это утверждение можно доказать.

Тогда $\dfrac{(x+y)^5 + (x-y)^5}{(x+y)^5 - (x-y)^5} = \dfrac{1025}{1023} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\left((x+y)^5 + (x-y)^5\right) + \left((x+y)^5 - (x-y)^5\right)}{\left((x+y)^5 + (x-y)^5\right) - \left((x+y)^5 - (x-y)^5\right)} = \frac{1025+1023}{1025-1023};$$

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^5 = \frac{2048}{2}; \quad \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^5 = 1024; \quad \frac{x+y}{x-y} = 4; \quad \left(1024 = 2^{10}\right).$$

Получим: $3x = 5y$.

Итак: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 + x + y = 57 \\ y = \frac{3}{5}x \end{cases}$;

$$x^2 + \frac{3}{5}x^2 + \frac{9}{25}x^2 + x + \frac{3}{5}x = 57;$$

$$9x^2 + 15x^2 + 25x^2 + 40x = 57 \cdot 25;$$

$$49x^2 + 40x - 1425 = 0; \qquad x_{1,\,2} = \frac{-20 \pm 5\sqrt{16 + 49 \cdot 57}}{49};$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 5; \quad y = 3 \\ x = -\frac{285}{49}; \quad y = -3\frac{24}{49}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{(5;\ 3);\ \left(-5\frac{40}{49};\ -3\frac{24}{49}\right)\right\}$.

Примечание. Возможен также другой способ решения: во втором уравнении исходной системы поделить числитель и знаменатель на $(x-y)^5$.

14. $\begin{cases} 2\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)-9\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+14=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}.$

Пусть $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=t;\quad \dfrac{x^2}{y^2}+2\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}=t^2;$

$\dfrac{x^2}{y^2}+2+\dfrac{y^2}{x^2}=t^2;\quad \dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=t^2-2.$

Тогда $2(t^2-2)-9t+14=0;\quad 2t^2-4-9t+14=0;$

$2t^2-9t+10=0;\quad t_{1,\,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{81-80}}{4}=\dfrac{9\pm1}{4}.$

Получаем $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{5}{2} \\ t=2 \end{array}\right.$.

Возвращаясь к переменным x и y, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{2} \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2-5xy+2y^2=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-2xy+y^2=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=\dfrac{y}{2} \end{array}\right. \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=y \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2y \\ 4y^2+y^2=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{y}{2} \\ x^2+4x^2=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=y \\ 2x^2=5 \end{cases} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x=2y \\ y^2=1 \end{cases} & (2;\,1);\ (-2;\,-1) \\ \begin{cases} x=\dfrac{y}{2} \\ x^2=1 \end{cases} & (1;\,2);\ (-1;\,-2) \\ \begin{cases} x=y \\ x^2=\dfrac{5}{2} \end{cases} & \left(\dfrac{\sqrt{10}}{2};\,\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right);\ \left(-\dfrac{\sqrt{10}}{2};\,-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right) \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{(2;\,1);\ (-2;\,-1);\ (1;\,2);\ (-1;\,-2);\ \left(\dfrac{\sqrt{10}}{2};\,\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right);\ \left(-\dfrac{\sqrt{10}}{2};\,-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)\right\}.$

Тренировочная работа 7

1. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ x^2 - 2xy = -3 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} x^2 + 3xy - 3y^2 = 1 \\ 2x^2 - xy + y^2 = 2 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 1 \\ x^2y + xy^2 = 16 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \end{cases}.$

5. $\begin{cases} x^4 + 4y^4 - 5x^2y^2 = 45 \\ x^2 + 2y^2 + 3xy = 15 \end{cases}.$

6. $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2 + xy} + \dfrac{4}{y^2 + xy} = \dfrac{16}{3} \\ \dfrac{8}{x^2 + xy} - \dfrac{1}{y^2 + xy} = 1 \end{cases}.$

7. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 65 \\ x^2y - xy^2 = -20 \end{cases}.$

8. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x^2y = 2xy + 9 \\ x + 3 = x^2y + y \end{cases}.$

Решение тренировочной работы 7

1. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ x^2 - 2xy = -3 \end{cases}.$

Пусть $x = ty$ $(y \neq 0)$, тогда $\begin{cases} t^2y^2 + 2y^2 = 17 \\ t^2y^2 - 2ty^2 = -3 \end{cases}$;

$\begin{cases} y^2 = \dfrac{17}{t^2 + 2} \\ y^2 = -\dfrac{3}{t^2 - 2t} \end{cases}$; $\quad \dfrac{17}{t^2 + 2} = -\dfrac{3}{t^2 - 2t}$;

$17t^2 - 34t = -3t^2 - 6$; $\quad 20t^2 - 34t + 6 = 0$;

$10t^2 - 17t + 3 = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{2} \\ t = \dfrac{1}{5} \end{array}\right.$.

а) $t = \dfrac{3}{2}$. $\quad \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y \\ y^2 = \dfrac{17}{\frac{9}{4} + 2} \end{cases}$; $\quad \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y \\ y^2 = 4 \end{cases}$ $\quad \begin{array}{l} (3;\ 2) \\ (-3;\ -2) \end{array}$.

При $y = 0$ решений нет.

б) $t = \dfrac{1}{5}$. $\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{5}y \\ y^2 = \dfrac{17}{\frac{1}{25}+2} \end{cases}$; $\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{5}y \\ y^2 = \dfrac{25}{3} \end{cases}$ $\quad \begin{array}{l} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};\ \dfrac{5}{3}\sqrt{3}\right) \\ \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\ -\dfrac{5}{3}\sqrt{3}\right) \end{array}$.

Ответ: $\left\{(3;\ 2);\ (-3;\ -2);\ \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};\ \dfrac{5}{3}\sqrt{3}\right);\ \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\ -\dfrac{5}{3}\sqrt{3}\right)\right\}$.

2. $\begin{cases} x^2 + 3xy - 3y^2 = 1 \\ 2x^2 - xy + y^2 = 2 \end{cases}.$

Пусть $x = ty$ $(y \neq 0)$, тогда $\begin{cases} t^2y^2 + 3ty^2 - 3y^2 = 1 \\ 2t^2y^2 - ty^2 + y^2 = 2 \end{cases}$;

$\begin{cases} y^2 = \dfrac{1}{t^2 + 3t - 3} \\ y^2 = \dfrac{2}{2t^2 - t + 1} \end{cases}$;

$$\frac{1}{t^2+3t-3}=\frac{2}{2t^2-t+1};$$

$$2t^2-t+1=2t^2+6t-6; \qquad 7t=7; \qquad t=1.$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\begin{cases} x=y \\ y^2=\dfrac{2}{2-1+1} \end{cases}; \quad \begin{cases} x=y \\ y^2=1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1;\,1) \\ (-1;\,-1) \end{matrix}.$$

Проверим, что будет, если $y=0$?

$\begin{cases} x^2=1 \\ y=0 \end{cases}$ имеет решения $(1;\ 0);\ (-1;\ 0)$.

Ответ: $\{(1;\,0);\,(-1;\,0);\,(1;\,1);\,(-1;\,-1)\}$.

3. $\begin{cases} (x-1)(y-1)=1 \\ x^2y+xy^2=16 \end{cases}.$

Похоже, что дана система симметричных уравнений:

$$\begin{cases} xy-(x+y)+1=1 \\ xy(x+y)=16 \end{cases}.$$

Действительно, пусть $\begin{cases} x+y=t \\ xy=z \end{cases}.$

Тогда $\begin{cases} z-t=0 \\ tz=16 \end{cases}; \quad \begin{cases} t=z \\ t^2=16 \end{cases}; \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} z=4 \\ t=4 \end{cases} \\ &\begin{cases} z=-4 \\ t=-4 \end{cases} \end{aligned}\right.;$

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases} \\ &\begin{cases} x+y=-4 \\ xy=-4 \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \begin{matrix} (2;\,2) \\ \left(-2+2\sqrt{2};\,-2-2\sqrt{2}\right). \\ \left(-2-2\sqrt{2};\,-2+2\sqrt{2}\right) \end{matrix}$$

Ответ: $\left\{(2;\,2);\,\left(-2+2\sqrt{2};\,-2-2\sqrt{2}\right);\,\left(-2-2\sqrt{2};\,-2+2\sqrt{2}\right)\right\}$.

4. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \end{cases}.$

Так как можно доказать, что

$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$,

то разделим второе уравнение на первое уравнение.

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \boxed{2} - \boxed{1} \\ (\boxed{1} + \boxed{2}) : 2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 16 \\ (x-y)^2 = 4 \end{cases}.$$

а) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ $(3;\ 1)$; б) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases}$ $(1;\ 3)$;

в) $\begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ $(-1;\ -3)$; г) $\begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = -2 \end{cases}$ $(-3;\ -1)$.

Ответ: $\{(3;1);(1;3);(-1;-3);(-3;-1)\}$.

5. $\begin{cases} x^4 + 4y^4 - 5x^2y^2 = 45 \\ x^2 + 2y^2 + 3xy = 15 \end{cases}.$

Заметим, что $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2$.

Пусть $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = t \\ xy = z \end{cases}.$

Система приобретает вид:

$$\begin{cases} t^2 - 9z^2 = 45 \\ t + 3z = 15 \end{cases}; \quad \begin{cases} (t - 3z)(t + 3z) = 45 \\ t + 3z = 15 \end{cases}; \quad \begin{cases} t - 3z = 3 \\ t + 3z = 15 \end{cases};$$

$$(\boxed{1} \pm \boxed{2}) \quad \begin{cases} t = 9 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Тогда $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 9 \\ xy = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \dfrac{2}{y} \\ \dfrac{4}{y^2} + 2y^2 = 9 \end{cases}.$

Корни уравнения $2y^4 - 9y^2 + 4 = 0$ — $\left[\begin{array}{l} y^2 = 4 \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Тогда $\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x = \frac{2}{y} \\ y^2 = 4 \end{cases} & \begin{array}{l} (1;\ 2) \\ (-1;\ -2) \end{array} \\ \begin{cases} x = \frac{2}{y} \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} & \begin{array}{l} \left(2\sqrt{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \left(-2\sqrt{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{array} \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{(1;\ 2);\ (-1;\ -2);\ \left(2\sqrt{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ \left(-2\sqrt{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

6. $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2 + xy} + \dfrac{4}{y^2 + xy} = \dfrac{13}{6} \\ \dfrac{8}{x^2 + xy} - \dfrac{1}{y^2 + xy} = 1 \end{cases}$.

Пусть $\dfrac{1}{x^2 + xy} = a$; $\dfrac{1}{y^2 + xy} = b$. Получаем:

$\begin{cases} 5a + 4b = \frac{13}{6} \\ 8a - b = 1 \end{cases} \left(\boxed{2} \cdot 4\right)$; $\begin{cases} 5a + 4b = \frac{13}{6} \\ 32a - 4b = 4 \end{cases} \left(\left(\boxed{1} + \boxed{2}\right) : 37\right)$;

$\begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Возвращаясь к переменным x и y, получаем:

$\begin{cases} x^2 + xy = 6 \\ y^2 + xy = 3 \end{cases} \left(\boxed{1} + \boxed{2}\right)$; $\begin{cases} (x + y)^2 = 9 \\ y^2 + xy = 3 \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 3 \\ y(y + x) = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -3 \\ y(x + y) = 3 \end{cases} \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x + y = 3 \\ y = 1 \end{cases} & (2;\ 1) \\ \begin{cases} x + y = -3 \\ y = -1 \end{cases} & (-2;\ -1). \end{array}\right.$

Ответ: $\{(2;\ 1);\ (-2;\ -1)\}$.

7. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 65 \\ x^2y - xy^2 = -20 \end{cases}$. $\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2) = 65 \\ xy(x-y) = -20 \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} x - y = t \\ xy = z \end{cases}$.

Так как $x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$, то

$\begin{cases} t(t^2+3z) = 65 \\ t \cdot z = -20 \end{cases}$; $\begin{cases} t^3 + 3tz = 65 \\ tz = -20 \end{cases}$; $\begin{cases} t^3 = 125 \\ tz = -20 \end{cases}$; $\begin{cases} t = 5 \\ z = -4 \end{cases}$;

$\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = -4 \end{cases}$; $\begin{cases} x = y + 5 \\ y^2 + 5y + 4 = 0 \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y + 5 \\ y = -1 \end{cases} \quad (4;\ -1) \\ \begin{cases} x = y + 5 \\ y = -4 \end{cases} \quad (1;\ -4). \end{array}\right.$

Ответ: $\{(4; -1); (1; -4)\}$.

8. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x^2y = 2xy + 9 \\ x + 3 = x^2y + y \end{cases}$. $\begin{cases} (x-y)^2 + 2x^2y = 9 \\ (x-y) - x^2y = -3 \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} x - y = t \\ x^2y = z \end{cases}$.

Тогда $\begin{cases} t^2 + 2z = 9 \\ t - z = -3 \end{cases}$; $\begin{cases} t^2 + 2(t+3) - 9 = 0 \\ z = t + 3 \end{cases}$;

$\begin{cases} t^2 + 2t - 3 = 0 \\ z = t + 3 \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 1 \end{array}\right. \\ z = t + 3 \end{cases}$.

а) $\begin{cases} t = -3 \\ z = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x - y = -3 \\ x^2y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2(x+3) = 0 \end{cases}$ $\begin{array}{l} (0;\ 3) \\ (-3;\ 0). \end{array}$

б) $\begin{cases} t = 1 \\ z = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2y = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} y = x - 1 \\ x^2(x-1) - 4 = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} y = x - 1 \\ x^3 - x^2 - 4 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = x - 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 + x + 2 = 0 \end{array}\right. \end{cases}$ $(2;\ 1)$.

Ответ: $\{(0; 3); (-3; 0); (2; 1)\}$.

Проверочная работа 3

Решите системы уравнений.

1. $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29 \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} x^3y + xy^3 = \frac{10}{9}(x+y)^2 \\ x^4y + xy^4 = \frac{2}{3}(x+y)^3 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} \dfrac{2x^2 - xy}{y^2} + \dfrac{3y^2}{2x^2 - xy} = 4 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}.$

5. $\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2 - xy} + \dfrac{x^2}{y^2 - xy} = 1 \\ x^3 - y^3 = 2 \end{cases}.$

6. $\begin{cases} (x^2 - x)(y^2 - y) = 72 \\ (x+1)(y+1) = 20 \end{cases}.$

7. $\begin{cases} 2x^4 = 3x^2y + 20 \\ 3y^2 = 2x^2y - 5 \end{cases}.$

8. $\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0 \\ 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0 \end{cases}.$

Решение систем уравнений с тремя неизвестными

Рассмотрим системы симметричных уравнений.

Для решения систем симметричных уравнений необходимо использовать обобщенную теорему Виета для кубических уравнений.

Если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, то по теореме Виета справедливо выражение

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}.$$

Практикум 11

1. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + xz + yz = -1 \\ xyz = -2 \end{cases}.$

По теореме, обратной теореме Виета, имеем

$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0.$

По теореме Безу: $\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Так как система состоит из симметричных уравнений, то решение — тройки из корней в возможных комбинациях:

(1; –1; 2); (–1; 2; 1); (2; 1; –1); (–1; 1; 2); (2; –1; 1); (1; 2; –1).

Чтобы использовать этот прием, нужно помнить следующие тождества:

$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc);$

$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + ac + bc) + 3abc;$

$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$

Используя эти идеи, можно решать следующие виды систем:

а) $\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b; \\ xyz=c \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a \\ xy+xz+yz=b; \\ xyz=c \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b; \\ x^3+y^3+z^3=c \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a \\ xy+xz+yz=b. \\ x^3+y^3+z^3=c \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+xz+yz=-4. \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$

Так как

$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz,$

то $1^3 = 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-4) - 3xyz;$ $xyz = -4.$

Тогда $\begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+xz+yz=-4; \\ xyz=-4 \end{cases}$ $t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0;$

$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \\ t=-2 \end{array}\right.$ (по теореме Безу).

Комбинируя корни, получаем о т в е т:

$\{(1;2;-2);(1;-2;2);(2;1;-2);(2;-2;1);(-2;1;2);(-2;2;1)\}.$

3. $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=6. \\ x^3+y^3+z^3=8 \end{cases}$

Так как $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz),$ то $6=2^2-2(xy+xz+yz)$ и $xy + xz + yz = -1.$

Но так как

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(xy + xz + yz) + 3xyz,$$

то $8 = 2^3 - 3 \cdot 2 \cdot (-1) + 3xyz;$ $xyz = -2.$

Получаем $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + xz + yz = -1 \\ xyz = -2 \end{cases}.$

Эта система порождает уравнение

$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0,$

корни которого — $\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{(1; -1; 2); (1; 2; -1); (-1; 1; 2); (-1; 2; 1); (2; 1; -1);$
$(2; -1; 1)\}.$

Примеры решения более сложных систем с тремя неизвестными

Практикум 12

1. $\begin{cases} x^2 + xy + xz = 70 \\ xy + y^2 + yz = 28 \\ xz + yz + z^2 = 98 \end{cases}$. $\begin{cases} x(x + y + z) = 70 \\ y(x + y + z) = 28 \\ z(x + y + z) = 98 \end{cases}$.

$\left(\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3}\right)$ — сложим почленно эти уравнения.

Получаем уравнение $(x + y + z)(x + y + z) = 196$.

а) $x + y + z = 14 \Rightarrow \begin{cases} x \cdot 14 = 70 \\ y \cdot 14 = 28; \\ z \cdot 14 = 98 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2; \\ z = 7 \end{cases}$ $(5;\ 2;\ 7)$.

б) $x + y + z = -14 \Rightarrow$ $\begin{cases} x = -5 \\ y = -2; \\ z = -7 \end{cases}$ $(-5;\ -2;\ -7)$.

Ответ: $\{(5;\ 2;\ 7);\ (-5;\ -2;\ -7)\}$.

2. $\begin{cases} xy = 12 \\ xz = 15 \\ yz = 20 \end{cases}$.

Перемножим почленно все три уравнения: $x^2y^2z^2 = 60^2$.

а) $xyz = 60$ разделим на каждое из трех предыдущих уравнений. Получаем:

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4; \\ z = 5 \end{cases}$ $(3;\ 4;\ 5)$.

б) $xyz = -60$. Решая аналогично варианту а), получаем $(-3;\ -4;\ -5)$.

Ответ: $\{(3;\ 4;\ 5);\ (-3;\ -4;\ -5)\}$.

3. $\begin{cases} xy + xz = 7 \\ xy + yz = 15 \\ yz + xz = 16 \end{cases}$. $\left(\left(\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3}\right) : 2\right)$,

тогда $xy + xz + yz = 19 \Rightarrow \begin{cases} xy = 3 \\ xz = 4 \\ yz = 12 \end{cases}$.

По аналогии с приемом, использованном в предыдущем примере, получим ответ.

Ответ: $\{(1;\ 3;\ 4);\ (-1;\ -3;\ -4)\}$.

4. $\begin{cases} x^2 + xy - xz = 2 \\ y^2 + xy - yz = 3 \\ z^2 - zx - yz = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x(x+y-z) = 2 \\ y(y+x-z) = 3 \\ z(z-x-y) = 4 \end{cases} \Rightarrow (x + y - z)^2 = 9.$

а) $x + y - z = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 1 \\ z = -\frac{4}{3} \end{cases}$; б) $x + y - z = -3 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -1 \\ z = \frac{4}{3} \end{cases}$.

Ответ: $\left\{\left(\frac{2}{3};\ 1;\ -\frac{4}{3}\right);\ \left(-\frac{2}{3};\ -1;\ \frac{4}{3}\right)\right\}$.

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 + yx = 3 \\ y^2 + z^2 + yz = 7 \\ z^2 + x^2 + zx = 19 \end{cases} \begin{pmatrix} \boxed{2} - \boxed{1} \\ \boxed{3} - \boxed{1} \\ \boxed{3} - \boxed{2} \end{pmatrix}$; $\begin{cases} z^2 - x^2 + yz - xy = 4 \\ z^2 - y^2 + zx - xy = 16 \\ x^2 - y^2 + zx - yz = 12 \end{cases}$.

Раскладывая на множители уравнения системы, получаем:

$\begin{cases} (z-x)(z+x+y) = 4 \\ (z-y)(z+x+y) = 16 \\ (x-y)(z+x+y) = 12 \end{cases} \begin{pmatrix} \boxed{1} + \boxed{2} \\ \boxed{3} - \boxed{1} \\ \boxed{2} + \boxed{3} \end{pmatrix}$. Пусть $x + y + z = t$,

тогда $\begin{cases} (t - 3z)t = -20 \\ (3x - t)t = 8 \\ (t - 3y)t = 28 \end{cases}$; $\begin{cases} z = \dfrac{t^2 + 20}{3t} \\ x = \dfrac{8 + t^2}{3t} \\ y = \dfrac{t^2 - 28}{3t} \end{cases}$.

Подставляя в любое уравнение, (например в $\boxed{1}$), получаем:

$$\left(\frac{8+t^2}{3t}\right)^2+\left(\frac{t^2-28}{3t}\right)^2+\frac{8+t^2}{3t}\cdot\frac{t^2-28}{3t}=3;$$

$$64+16t^2+t^4+t^4-56t^2+784+t^4-20t^2-224=27t^2;$$

$$t^4-29t^2+208=0;\quad \left[\begin{array}{ll} t^2=13 & t_1=\sqrt{13},\ t_2=-\sqrt{13}, \\ t^2=16 & t_4=-4,\quad t_3=4. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменным x и y, находим решение.

Ответ: $\left\{(2;-1;3);(-2;1;-3);\left(-\frac{7}{13}\sqrt{13};\frac{5}{13}\sqrt{13};-\frac{11}{13}\sqrt{13}\right);\right.$
$\left.\left(\frac{7}{13}\sqrt{13};-\frac{5}{13}\sqrt{13};\frac{11}{13}\sqrt{13}\right)\right\}.$

6. $\begin{cases} 6x(y^2+z^2)=13yz \\ 3y(x^2+z^2)=5xz \\ 6z(x^2+y^2)=5xy \end{cases}.$

Пусть $xyz=0$, тогда

а) $x=0\Rightarrow\begin{cases} y=0 \\ z=c \end{cases}$ или $\begin{cases} y=b \\ z=0 \end{cases}$ $(c,\ b$ — любые$)$;

б) $z=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=b \end{cases}$ или $\begin{cases} x=a \\ y=0 \end{cases}$ $(a,\ b$ — любые$)$;

в) $z=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=b \end{cases}$ или $\begin{cases} x=a \\ y=0 \end{cases}$ $(a,\ b$ — любые$)$.

Решениями будут:
$(a;0;0);(0;b;0);(0;0;c)$, где a,b,c – любые.

Пусть $xyz\neq 0$, тогда

$$\begin{array}{l} \boxed{1}\cdot x \\ \boxed{2}\cdot y \\ \boxed{3}\cdot z \end{array}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2y^2+x^2z^2=\frac{13}{6}xyz \\ x^2y^2+z^2y^2=\frac{5}{3}xyz \\ x^2z^2+y^2z^2=\frac{5}{6}xyz \end{cases}$$

$$\left(\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}\right):2\Leftrightarrow x^2y^2+x^2z^2+z^2y^2=\frac{7}{3}xyz.$$

Сравнивая с каждым уравнением системы, получаем: $\begin{cases} x^2y^2 = \frac{3}{2}xyz \\ x^2z^2 = \frac{2}{3}xyz \\ y^2z^2 = \frac{1}{6}xyz \end{cases}$ $\left(\boxed{1}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{3}\right)$.

Получим $x^4y^4z^4 = \frac{1}{6}x^3y^3z^3$; $xyz = \frac{1}{6}$.

Подставляя полученное значение в каждое уравнение в правой части, получаем: $\begin{cases} x^2y^2 = \frac{1}{4} \\ z^2x^2 = \frac{1}{9} \\ y^2z^2 = \frac{1}{36} \end{cases}$.

Тогда $\left(1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right)$; $\left(-1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right)$; $\left(1;\ -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right)$; $\left(-1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right)$.

Учтем, что каждое неизвестное имеет только два значения.

Ответ: $\left\{\left(1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right);\ \left(-1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right);\ \left(1;\ -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right);\ \left(-1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right);\right.$ $\left.(a;\ 0;\ 0);\ (0;\ b;\ 0);\ (0;\ 0;\ c)\right\}$, где a, b, c — любые.

7. $\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{3}{4} \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{5}{6} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{15}{8} \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{4}{3} \\ \frac{x+z}{xz} = \frac{6}{5} \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{8}{15} \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{3} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{6}{5} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{8}{15} \end{cases}$ $\left(\left(\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}\right) : 2\right)$,

получим $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{23}{15}$.

Сравнивая с каждым уравнением, получаем: $\begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{z} = \frac{1}{5} \end{cases}$.

Ответ: (1; 3; 5).

8. Найдите целочисленные решения системы:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ xz + yz + yx = 47; \\ (z-x)(z-y) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ xz + xy + yz = 47 \\ z^2 - xz - yz + xy = 2 \end{cases}$ $\left(\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}\right)$;

$(x+y)^2 = 49;\quad \left[\begin{array}{l} x+y=7 \\ x+y=-7 \end{array}\right. \quad \left(\boxed{1}+2\cdot\boxed{2}\right),$

$(x+y)^2 + 2z(x+y) = 94 + z^2.$

а) $x + y = 7;\quad 7^2 + 2z\cdot 7 = 94 + z^2;$

$z^2 - 14z + 45 = 0;\quad \left[\begin{array}{l} z=5 \\ z=9 \end{array}\right..$

1) $\begin{cases} x+y=7 \\ z=5 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}.$ Тогда $\begin{array}{l}(4;\,3;\,5) \\ (3;\,4;\,5)\end{array}.$

2) $\begin{cases} x+y=7 \\ z=9 \\ x^2+y^2=81 \end{cases}.$ Тогда $\begin{array}{l}\left(\frac{7-\sqrt{113}}{2};\,\frac{7+\sqrt{113}}{2};\,9\right) \\ \left(\frac{7+\sqrt{113}}{2};\,\frac{7-\sqrt{113}}{2};\,9\right)\end{array};$

$x,\ y \notin \mathbb{Z}.$

б) $x + y = -7;\quad z^2 + 14z + 45 = 0;\quad \left[\begin{array}{l} z=-5 \\ z=-9 \end{array}\right..$

1) $\begin{cases} x+y=-7 \\ z=-5 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}.$ Тогда $\begin{array}{l}(-4;\,-3;\,-5) \\ (-3;\,-4;\,-5)\end{array}.$

2) $\begin{cases} x+y=-7 \\ z=-9 \\ x^2+y^2=81 \end{cases}.$ Тогда $\begin{array}{l}\left(-\frac{7-\sqrt{113}}{2};\,-\frac{7+\sqrt{113}}{2};\,-9\right) \\ \left(-\frac{7+\sqrt{113}}{2};\,-\frac{7-\sqrt{113}}{2};\,-9\right)\end{array}.$

$x,\ y \notin \mathbb{Z}.$

Ответ: $\{(4;\,3;\,5);\,(3;\,4;\,5);\,(-4;\,-3;\,-5);\,(-3;\,-4;\,-5)\}.$

9. $\begin{cases} x^2-6xy+6y^2=-2 \\ x^2-6xz+11z^2=3 \\ y^2-4yz+3z^2=0 \end{cases}.\quad \begin{cases} x^2-6xy+6y^2=-2 \\ x^2-6xz+11z^2=3 \\ (y-z)(y-3z)=0 \end{cases}.$

Подставляя вместо y переменную z, решим совокупность систем.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=z\\x^2-6xy+6y^2=-2\\x^2-6xz+11z^2=3\end{cases}\\\begin{cases}y=3z\\x^2-6xy+6y^2=-2\\x^2-6xz+11z^2=3\end{cases}\end{array}\right.;\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=z\\x^2-6xy+6y^2=-2\\x^2-6xz+11z^2=3\end{cases}\\\begin{cases}y=3z\\x^2-18xz+54z^2=-2\\x^2-6xz+11z^2=3\end{cases}\end{array}\right..$$

Будем решать как систему однородных уравнений.

а) При $y = z$ $\begin{cases}x^2-6xz+6z^2=-2\\x^2-6xz+11z^2=3\end{cases}$ $(\boxed{2}-\boxed{1})$;

$$\begin{cases}x^2-6xz+6z^2=-2\\5z^2=5\end{cases};\quad\begin{cases}x^2-6xz+6z^2=-2\\\left[\begin{array}{l}z=1\\z=-1\end{array}\right.\end{cases};$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}z=1\\x^2-6x+6=-2\end{cases}\\\begin{cases}z=-1\\x^2+6x+6=-2\end{cases}\end{array}\right.;\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}z=1\\x^2-6x+8=0\end{cases}\\\begin{cases}z=-1\\x^2+6x+8=0\end{cases}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}z=1\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=4\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}z=-1\\\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-4\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.;\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}z=1\\x=2\end{cases}\\\begin{cases}z=1\\x=4\end{cases}\\\begin{cases}z=-1\\x=-2\end{cases}\\\begin{cases}z=-1\\x=-4\end{cases}\end{array}\right..$$

Учитывая, что $z = y$, получим:

$\{(2;1;1);\ (4;1;1);\ (-2;-1;-1);\ (-4;-1;-1)\}$.

б) при $y = 3z$ $\begin{cases}x^2-18xz+54z^2=-2\\x^2-6xz+11z^2=3\end{cases}$.

Положим $x = tz$ $(z \neq 0)$

$\begin{cases} z^2\left(t^2 - 18t + 54\right) = -2 \\ z^2\left(t^2 - 6t + 11\right) = 3 \end{cases}$, тогда $\dfrac{t^2-18t+54}{t^2-6t+11} = -\dfrac{2}{3}$,

значит $5t^2 - 66t + 184 = 0$ $\left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = \dfrac{46}{5} \end{array}\right.$

1. при $t = 4$ $\begin{cases} x = 4z \\ z^2 = \dfrac{3}{4^2-6\cdot 4+11} \end{cases}$; $\begin{cases} x = 4z \\ z^2 = 1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x = 4z \\ \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = -1 \end{array}\right. \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} z = 1 \\ x = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} z = -1 \\ x = -4 \end{cases} \end{array}\right.$. Так как $y = 3z$,

то получим $(4; 3; 1)$; $(-4; -3; -1)$.

2. при $t = \dfrac{46}{5}$ $\begin{cases} x = \dfrac{46}{5}z \\ z^2 = \dfrac{3}{\left(\frac{46}{5}\right)^2 - 6\cdot\left(\frac{46}{5}\right)+11} = \dfrac{25}{337} \end{cases}$;

$\begin{cases} x = \dfrac{46}{5}z \\ \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{5}{337}\sqrt{337} \\ z = -\dfrac{5}{337}\sqrt{337} \end{array}\right. \end{cases}$. Так как $y = 3z$, то

$\left(\dfrac{46\sqrt{337}}{337}; \dfrac{15}{337}\sqrt{337}; \dfrac{5}{337}\sqrt{337}\right)$
$\left(-\dfrac{46\sqrt{337}}{337}; -\dfrac{15}{337}\sqrt{337}; -\dfrac{5}{337}\sqrt{337}\right)$.

Ответ: $\{(-4; -1; -1); (-2; -1; -1); (2; 1; 1); (4; 1; 1); (4; 3; 1);$
$(-4; -3; -1); \left(-\dfrac{46}{\sqrt{337}}; -\dfrac{15}{\sqrt{337}}; -\dfrac{5}{\sqrt{337}}\right); \left(\dfrac{46}{\sqrt{337}}; \dfrac{15}{\sqrt{337}}; \dfrac{5}{\sqrt{337}}\right)\}$.

10. $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=13 \\ (x^3+y^3)^2+(y^3+z^3)^2+(z^3+x^3)^2=364 \\ (x^3+z^3)^2=(x^3+y^3)(y^3+z^3) \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} x^3=a \\ y^3=b \\ z^3=c \end{cases}$, тогда $\begin{cases} a+b+c=13 \\ (a+b)^2+(b+c)^2+(a+c)^2=364; \\ (a+c)^2=(a+b)(b+c) \end{cases}$

$\begin{cases} a+b+c=13 \\ a^2+ab+b^2+bc+c^2+ac=182 \\ a^2-b^2+c^2+ac-ab-bc=0 \end{cases}$ $\left(\boxed{2}+\boxed{3}\right)$;

$\begin{cases} a+b+c=13 \\ (a+c)^2=91+ac \\ (a+c)^2=(a+b)(b+c) \end{cases}$; $\begin{cases} a+b+c=13 \\ (a+b)(b+c)=91+ac \\ (a+b)(b+c)=(a+c)^2 \end{cases}$;

$\begin{cases} a+b+c=13 \\ b(a+b+c)=91 \\ (a+b)(b+c)=(a+c)^2 \end{cases}$; $\begin{cases} a+b+c=13 \\ b=7 \\ (a+b)(b+c)=(a+c)^2 \end{cases}$;

$\begin{cases} a+c=6 \\ b=7 \\ 36=(a+7)(c+7) \end{cases}$; $\begin{cases} a+c=6 \\ b=7 \\ ac=-55 \end{cases}$.

а) $\begin{cases} a=11 \\ b=7 \\ c=-5 \end{cases}$. б) $\begin{cases} a=-5 \\ b=7 \\ c=11 \end{cases}$.

Ответ: $\left\{\left(\sqrt[3]{11};\ \sqrt[3]{7};\ -\sqrt[3]{5}\right);\ \left(-\sqrt[3]{5};\ \sqrt[3]{7};\ \sqrt[3]{11}\right)\right\}$.

11. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{x+z}=3 \\ \sqrt[3]{x+z}+\sqrt[3]{z+y}=1 \\ \sqrt[3]{z+y}+\sqrt[3]{y+x}=0 \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases}\sqrt[3]{x+y}=a\\ \sqrt[3]{x+z}=b\\ \sqrt[3]{z+y}=c\end{cases}$.

Тогда $\begin{cases}a+b=3\\ b+c=1\\ c+a=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=2\\ c=-1\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt[3]{x+y}=1\\ \sqrt[3]{x+z}=2\\ \sqrt[3]{z+y}=-1\end{cases}$;

$$\begin{cases}z+y=-1\\ x+z=8\\ x+y=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=-4\\ x=5\\ z=3\end{cases}.$$

Ответ: (5; –4; 3).

12. $\begin{cases}6x+y^2-z^2=6\\ x^2-y-4z=-4\\ 21x^2-2y^2+3y=22z^2\end{cases}$.

$\left(\begin{matrix}\boxed{1}\cdot 2\\ \boxed{2}\cdot 3\end{matrix}\right)$ $\begin{cases}12x+2y^2-2z^2=12\\ 3x^2-3y-12z=-12\\ 21x^2-2y^2+3y=22z^2\end{cases}$ $\left(\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}\right)$;

$24x^2+12x-2z^2-12z=22z^2$;

$2\left(x^2-z^2\right)+x-z=0$; $(x-z)(2x+2z+1)=0$;

$$\left[\begin{array}{l}x=z\\ x=-\frac{1}{2}-z\end{array}\right..$$

Подставляя в $\boxed{1}$, получаем:

а) $\begin{cases}x=z\\ 6x+y^2-x^2=6\\ x^2-y-4x=-4 \;\Big|\cdot 2\end{cases}$; $\begin{cases}x=z\\ 6x+y^2-x^2=6\\ 2x^2-2y-8x=-8\end{cases}$;

$$\left(\boxed{2}+\boxed{3}\right) \Rightarrow x^2-2x+y^2-2y=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=0\\ x=z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=1\end{cases}.$$

б) $\begin{cases}20x+4y^2-4x^2=25\\ x^2-y+4x=-6\\ x=-\frac{1}{2}-z\end{cases}$;

$$\begin{cases}4y^2=(2x-5)^2\\ x^2-y+4x+6=0;\\ x=-\frac{1}{2}-z\end{cases} \qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}2y=2x-5\\ 2y=-2x+5\end{array}\right.\\ x^2-y+4x+6=0;\\ x=-\frac{1}{2}-z\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\frac{1}{2}-z\\ y=\frac{1}{2}(2x-5)\\ x^2-y+4x+6=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=\frac{1}{2}(5-2x)\\ x^2-y+4x+6=0\\ x=-\frac{1}{2}-z\end{cases}\end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\frac{1}{2}-z\\ y=\frac{1}{2}(2x-5)\\ 2x^2+6x+17=0;\quad D<0\quad \varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\frac{1}{2}-z\\ y=\frac{1}{2}(5-2x)\\ 2x^2+10x+7=0\end{cases}\end{array}\right.;$$

$$\left(\frac{-5+\sqrt{11}}{2};\ \frac{10-\sqrt{4}}{2};\ \frac{4-\sqrt{11}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{-5-\sqrt{11}}{2};\ \frac{10+\sqrt{11}}{2};\ \frac{4+\sqrt{11}}{2}\right).$$

Ответ: $\left\{(1;\ 1;\ 1);\ \left(\frac{-51-\sqrt{11}}{2};\ \frac{10+\sqrt{11}}{2};\ \frac{4-\sqrt{11}}{2}\right);\right.$ $\left.\left(\frac{-5-\sqrt{11}}{2};\ \frac{10+\sqrt{11}}{2};\ \frac{4+\sqrt{4}}{2}\right)\right\}$.

13. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=12\\ xy+xz+yz=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2+z^2=12\\ 2xy+2xz+2yz=24\\ x^2+y^2+z^2=xy+xz+yz\end{cases}$ $\quad(\boxed{1}+\boxed{2})$;

$$\begin{cases}(x+y+z)^2=36\\(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0^{*}\\xy+xz+yz=12\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y+z=6\\(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0\\xy+xz+yz=12\end{cases}\\\begin{cases}x+y+z=-6\\xy+xz+yz=12\\(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0\end{cases}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y=z\\x=2\\x^2=4\end{cases};\quad(2;\ 2;\ 2).\\\begin{cases}x=y=z\\x=-2\\x^2=4\end{cases};\quad(-2;\ -2;\ -2).\end{array}\right.$$

Ответ: $\{(2;\ 2;\ 2);\ (-2;\ -2;\ -2)\}$.

14. $\begin{cases}y^3-9x^2+27x-27=0\\z^3-9y^2+27y-27=0\\x^3-9z^2+27z-27=0\end{cases}.$

$\left(\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}\right)$, $\quad(x-3)^3+(y-3)^3+(z-3)^3=0.$

Очевидно, что $(3;\ 3;\ 3)$ — решение системы.

Пусть $f(t)=t^2-3t+3;$

---

* Так как $x^2+y^2+z^2=xy+xz+zy \mid \cdot 2$,

то $2x^2+2y^2+2z^2=2xy+2xz+2yz \Rightarrow$

$\Rightarrow(x-y)^2+(x-z)^2+(z-y)^2=0.$

$$\begin{cases} y^3 = 9f(x) \\ x^3 = 9f(z) \\ z^3 = 9f(y) \end{cases} \quad \left(t^2 - 3t + 3 > 0 \ \forall t\right).$$

Тогда $\begin{cases} y^3 = 9f(x) > 0; \text{ значит } y > 0 \\ z^3 = 9f(y) > 0; \text{ значит } z > 0 \\ x^3 = 9f(z) > 0; \text{ значит } x > 0 \end{cases}.$

Проверим, есть ли еще решения.

а) пусть $x > 3$,

тогда из $\boxed{3}$ следует, что $x^3 = 9z^2 - 27z + 27 > 27$,

то есть $9z(z-3) > 0$ и $z > 3$ (т.к. $z > 0$).

Аналогично $z^3 = 9y^2 - 27y + 27 > 27$,

то есть $y > 3$, тогда $\begin{cases} (x-3)^3 > 0 \\ (y-3)^3 > 0 \\ (z-3)^3 > 0 \end{cases}.$

Получаем, что $(x - 3)^3 + (y - 3)^3 + (z - 3)^3 > 0$, следовательно, других решений в области, где $x > 3$; $y > 3$; $z > 3$, нет.

б) пусть $0 < x < 3$,

тогда $x^3 = 9z^2 - 27z + 27 < 27$,

следовательно, $9z(z-3) < 0$ и $0 < z < 3$.

$z^3 = 9y^2 - 27y + 27 < 27$,

следовательно, $9y(y-3) < 0$ и $0 < y < 3$.

Тогда $\begin{cases} (x-3)^3 < 0 \\ (y-3)^3 < 0 \\ (z-3)^3 < 0 \end{cases}.$

Но $(x - 3)^3 + (y - 3)^3 + (z - 3)^3 < 0$.

Значит, решений, где $0 < x < 3$; $0 < y < 3$; $0 < z < 3$, так же нет.

Ответ: (3; 3; 3).

3

Карточки заданий

Тренировочные карточки

Карточка 1

1. $\begin{cases} x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y - x = 2 \\ \frac{1}{4}x^2 - xy + y^2 + 2y - x = 3 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x^2 + y - 20 = 0 \\ y^2 + x - 20 = 0 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + y^2x = 20 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} = \frac{7}{12} \\ \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} = \frac{8}{15} \\ \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} = \frac{9}{20} \end{cases}$.

Карточка 2

1. $\begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 9 \\ \frac{(x+y)x}{y} = 20 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} (x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1) = 3 \\ (1 + x)(1 + y) = 6 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} x + \sqrt{x} = 12 - \sqrt{xy} \\ y + \sqrt{y} = 18 - \sqrt{xy} \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + xz + yz = -1 \\ xyz = -1 \end{cases}$.

Карточка 3

1. $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = -11 \\ (x^2 - y^2)xy = 180 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} xy - \frac{x^3}{y} = -24 \\ xy - \frac{y^3}{x} = 6 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} x^3 + x^2y^2 + y^3 = 11 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}.$

Для $x, y \in \mathbb{Z}$.

4. $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + xz + yz = -1 \\ xyz = -5 \end{cases}.$

Карточка 4

1. $\begin{cases} x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 136 \\ x^3y + xy^3 = 30 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} 8x + \dfrac{8}{y} = 3y^2 \\ y + \dfrac{1}{x} = 3x^2 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \end{cases}.$

4. $\begin{cases} 2x + y + 2z = -6 \\ xy + 2xz + yz = -2 \\ xyz = 6 \end{cases}.$

Карточка 5

1. $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2 + 3xy} + \dfrac{3}{y^2 - xy} = \dfrac{25}{14} \\ \dfrac{3}{x^2 + 3xy} - \dfrac{2}{y^2 - xy} = -\dfrac{4}{7} \end{cases}.$

2. $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} x^3 = 10x + y \\ y^3 = x + 10y \end{cases}.$

4. $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -8 \end{cases}.$

Карточка 6

1. $\begin{cases} \dfrac{2x^2 + 4xy}{3xy - y^2} + \dfrac{9xy - 3y^2}{x^2 + 2xy} = 5 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} x^2 - 10xy + 12y^2 = 17 \\ x^2 - 7xy + 8y^2 = 13 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} x - y + \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = \dfrac{20}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} xy + yz + xz = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases}.$

Карточка 7

1. $\begin{cases} x^3 + x^2y^2 + y^3 = 13 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$.

Для $x, y \in \mathbb{Z}$.

2. $\begin{cases} x - y - \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = \dfrac{20}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} xy + \dfrac{y}{x} = 2(x^2 + y^2) \\ xy - \dfrac{x}{y} = x^2 + y^2 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} y^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \\ z^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0 \\ x^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0 \end{cases}$.

Карточка 8

1. $\begin{cases} x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 136 \\ x^3y + xy^3 = -30 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x + y - \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{20}{x-y} \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \sqrt{x + \sqrt{y}} + \sqrt{x - \sqrt{y}} = 2 \\ \sqrt{y + \sqrt{x}} - \sqrt{y - \sqrt{x}} = 1 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} y^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \\ z^3 + 3y^2 + 3y + 1 = 0 \\ x^3 + 3z^2 + 3z + 1 = 0 \end{cases}$.

Решение тренировочной карточки 1

1. $\begin{cases} x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y - x = 2 \\ \frac{1}{4}x^2 - xy + y^2 + 2y - x = 3 \end{cases}$. $\begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y + x\right) - 2 = 0 \\ \left(\frac{1}{2}x - y\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x - y\right) - 3 = 0 \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = t \\ \frac{1}{2}x - y = z \end{cases}$,

тогда $\begin{cases} t^2 - t - 2 = 0 \\ z^2 - 2z - 3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} (t-2)(t+1) = 0 \\ (z-3)(z+1) = 0 \end{cases}$.

Последняя система порождает 4 системы:

1) $\begin{cases} t = 2 \\ z = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 2 \\ \frac{1}{2}x - y = 3 \end{cases} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \end{matrix}$; $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ $(\boxed{1} - \boxed{2})$

$\begin{cases} 2{,}5y = -4 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$; $\begin{cases} y = -1{,}6 \\ x = 2{,}8 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} t = 2 \\ z = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 2 \\ \frac{1}{2}x - y = -1 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \\ \end{matrix}$; $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ \frac{1}{2}x - y = -1 \end{cases}$ $(\boxed{1} + \boxed{2})$

$\begin{cases} 2{,}5x = 3 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1{,}2 \\ y = 1{,}6 \end{cases}$.

3) $\begin{cases} t = -1 \\ z = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = -1 \\ \frac{1}{2}x - y = 3 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \\ \end{matrix}$; $\begin{cases} 2x + y = -2 \\ \frac{1}{2}x - y = 3 \end{cases}$ $(\boxed{1} + \boxed{2})$

$\begin{cases} 2{,}5x = 1 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0{,}4 \\ y = -2{,}8 \end{cases}$.

4) $\begin{cases} t = -1 \\ z = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = -1 \\ \frac{1}{2}x - y = -1 \end{cases} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \end{matrix}$; $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = -1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$ $(\boxed{1} - \boxed{2})$

$\begin{cases} 2{,}5y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 0{,}4 \\ x = -1{,}2 \end{cases}$.

Ответ: $\{(2{,}8; -1{,}6); (1{,}2; +1{,}6); (0{,}4; -2{,}8); (-1{,}2; 0{,}4)\}$.

2. $\begin{cases} x^2 + y - 20 = 0 \\ y^2 + x - 20 = 0 \end{cases}$. $\left(\boxed{1} - \boxed{2}\right)$

$\begin{cases} (x-y)(x+y) - (x-y) = 0 \\ x^2 + y - 20 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} (x-y)(x+y-1) = 0 \\ x^2 + y - 20 = 0 \end{cases}$.

1) $\begin{cases} x = y \\ x^2 + x - 20 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = x \\ \left[\begin{array}{l} x = -5 \\ x = 4 \end{array}\right. \end{cases}$; $(-5; -5); (4; 4)$.

2) $\begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 + (1-x) - 20 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - x - 19 = 0 \end{cases}$;

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{77}}{2}$. $\left(\frac{1+\sqrt{77}}{2}; \frac{1-\sqrt{77}}{2}\right); \left(\frac{1-\sqrt{77}}{2}; \frac{1+\sqrt{77}}{2}\right)$.

Ответ: $\left\{(-5; -5); (4; 4); \left(\frac{1+\sqrt{77}}{2}; \frac{1-\sqrt{77}}{2}\right); \left(\frac{1-\sqrt{77}}{2}; \frac{1+\sqrt{77}}{2}\right)\right\}$.

3. $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + y^2x = 20 \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt{xy}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = 6 \\ xy(x+y) = 20 \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = t \\ \sqrt{xy} = z \end{cases}$.

С учетом $x + y = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 - 2\sqrt{xy}$ имеем

$\begin{cases} tz = 6 \\ z^2\left(t^2 - 2z\right) = 20 \end{cases}$; $\begin{cases} tz = 6 \\ z^2t^2 - 2z^3 = 20 \end{cases}$; $\begin{cases} tz = 6 \\ 6^2 - 2z^3 = 20 \end{cases}$;

$\begin{cases} tz = 6 \\ z^3 = 8 \end{cases}$; $\begin{cases} t = 3 \\ z = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{xy} = 2 \end{cases}$.

Эта система порождает $m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{y} = 1 \end{cases} & (4;\ 1) \\ \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{y} = 2 \end{cases} & (1;\ 4). \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(4; 1); (1; 4)\}$.

4. $\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} = \frac{7}{12} \\ \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} = \frac{8}{15} \\ \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} = \frac{9}{20} \end{cases}.$

Пусть $\begin{matrix} \frac{1}{x+y} = a \\ \frac{1}{x+z} = b \\ \frac{1}{y+z} = c \end{matrix}$. Тогда $+\begin{cases} a + b = \frac{7}{12} \\ a + c = \frac{8}{15} \\ c + b = \frac{9}{20} \end{cases}$;

$a + b + c = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{12} + \frac{8}{15} + \frac{9}{20}\right)$; $a + b + c = \frac{47}{60}$.

Итак:

1) $\begin{cases} a + b + c = \frac{47}{60} \\ a + b = \frac{7}{12} \end{cases}$ $(\boxed{1} - \boxed{2})$ $c = \frac{1}{5}$.

2) $\begin{cases} a + b + c = \frac{47}{60} \\ a + c = \frac{8}{15} \end{cases}$ $(\boxed{1} - \boxed{2})$ $b = \frac{1}{4}$.

3) $\begin{cases} a + b + c = \frac{47}{60} \\ c + b = \frac{9}{20} \end{cases}$ $(\boxed{1} - \boxed{2})$ $a = \frac{1}{3}$.

Значит, $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 4 \\ y + z = 5 \end{cases}$ $\left((\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3}) : 2 \right)$ $x + y + z = 6$.

Тогда:

1) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y = 3 \end{cases}$ $(\boxed{1} - \boxed{2})$ $z = 3$.

2) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + z = 4 \end{cases}$ $(\boxed{1} - \boxed{2})$ $y = 2$.

3) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \end{cases}$ $(\boxed{1} - \boxed{2})$ $x = 1$.

Ответ: (1; 2; 3).

Решение тренировочной карточки 2

1. $\begin{cases} x+y+\frac{x}{y}=9 \\ \frac{(x+y)x}{y}=20 \end{cases}.$

Пусть $\begin{matrix} x+y=z \\ \frac{x}{y}=t \end{matrix}.$

Тогда $\begin{cases} t+z=9 \\ tz=20 \end{cases}$ порождает $m^2 - 9m + 20 = 0$, значит,

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=5 \\ z=4 \end{cases} \\ \begin{cases} t=4 \\ z=5 \end{cases} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=5 \\ \frac{x}{y}=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=4 \\ \frac{x}{y}=5 \end{cases} \end{array}\right.\quad \begin{array}{l} (4;\ 1) \\ \left(3\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right). \end{array}$

Ответ: $\left\{(4;\ 1);\ \left(3\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)\right\}.$

2. $\begin{cases} (x^2-x+1)(y^2-y+1)=3 \\ (1+x)(1+y)=6 \end{cases}.$

$\begin{cases} x^2y^2+(y^2+x^2)+xy-(x+y)-(xy^2+yx^2)+1=3 \\ xy+x+y+1=6 \end{cases}.$

Пусть $\begin{cases} x+y=t \\ xy=z \end{cases}.$

Тогда $\begin{cases} z^2+t^2-2z+z-t-tz=2 \\ t+z=5 \end{cases};$

$\begin{cases} (t+z)^2-3tz-(t+z)=2 \\ t+z=5 \end{cases};\quad \begin{cases} 5^2-3tz-5=2 \\ t+z=5 \end{cases};\quad \begin{cases} tz=6 \\ t+z=5 \end{cases}.$

Последняя система порождает $n^2 - 5n + 6 = 0$.

Тогда $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t=2\\ z=3\end{cases}\\ \begin{cases}t=3\\ z=2\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=2\\ xy=3\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases}\end{array}\right.$ $\begin{array}{l}k^2-2k+3=0;\quad D<0;\\ \\ p^2-3p+2=0;\quad (1;\,2);\ (2;\,1).\end{array}$

Ответ: $\{(1;\,2);\,(2;\,1)\}$.

3. $\begin{cases}x+\sqrt{x}=12-\sqrt{xy}\\ y+\sqrt{y}=18-\sqrt{xy}\end{cases}$ $\left(\boxed{1}\pm\boxed{2}\right)$;

$$\begin{cases}x+y+\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\sqrt{xy}=30\\ (x-y)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=-6\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2+\sqrt{x}+\sqrt{y}-30=0\\ \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+1\right)=-6\end{cases};$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}+\sqrt{y}=-6\quad\varnothing\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5\end{array}\right.\\ \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+1\right)=-6\end{cases};\qquad\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\\ \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)(5+1)=-6\end{cases};$$

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=-1\end{cases}\ \left(\boxed{1}\pm\boxed{2}\right);\quad\begin{cases}\sqrt{x}=2\\ \sqrt{y}=3\end{cases}\quad(4;\ 9).$$

Ответ: $(4;\,9)$.

4. $\begin{cases}x+y+z=1\\ xy+xz+yz=-1\\ xyz=-1\end{cases}$.

По теореме, обратной теореме Виета, система:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

порождает кубическое уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, корнями которого является x_1; x_2; x_3.

Данная в задании система порождает

$t^3 - t^2 - t + 1 = 0;$

$t^2(t-1) - (t-1) = 0;$

$(t-1)(t-1)(t+1) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 1 \\ t_3 = -1 \end{array}\right. .$$

Комбинируя различные тройки чисел, получим ответ.

Ответ: $\{(1; 1; -1); (1; -1; 1); (-1; 1; 1)\}$.

Решение тренировочной карточки 3

1. $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = -11 \\ (x^2 - y^2)xy = 180 \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} x^2 - y^2 = t \\ xy = z \end{cases}$, тогда $\begin{cases} t - z = -11 \\ tz = 180 \end{cases}$.

$z^2 - 11z - 180 = 0$; $\left[\begin{aligned} z &= 20 \\ z &= -9 \end{aligned}\right.$.

1) $\begin{cases} z = 20 \\ t = 9 \end{cases}$; $\begin{cases} xy = 20 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \dfrac{20}{y} \\ 400 - y^4 = 9y^2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x = \dfrac{20}{y} \\ y^4 + 9y^2 - 400 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \dfrac{20}{y} \\ \left[\begin{aligned} y^2 &= 16 \\ y^2 &= -25 \quad \varnothing \end{aligned}\right. \end{cases}$ $(5;\ 4)$ $(-5;\ -4)$.

2) $\begin{cases} z = -9 \\ t = -20 \end{cases}$; $\begin{cases} xy = -9 \\ x^2 - y^2 = -20 \end{cases}$; $\begin{cases} y = -\dfrac{9}{x} \\ x^2 - \dfrac{81}{x^2} = -20 \end{cases}$;

$\begin{cases} y = -\dfrac{9}{x} \\ x^4 + 20x^2 - 81 = 0 \end{cases}$; $\left[\begin{aligned} x^2 &= -10 + \sqrt{181} \\ x^2 &= -10 - \sqrt{181} \notin [0; \infty) \end{aligned}\right.$.

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x = \sqrt{\sqrt{181} - 10} \\ y = -\dfrac{9}{\sqrt{\sqrt{181} - 10}} \end{cases} \\ &\begin{cases} x = -\sqrt{\sqrt{181} - 10} \\ y = \dfrac{-9}{-\sqrt{\sqrt{181} - 10}} \end{cases} \end{aligned}\right.; \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x = \sqrt{\sqrt{181} - 10} \\ y = -\sqrt{\sqrt{181} + 10} \end{cases} \\ &\begin{cases} x = -\sqrt{\sqrt{181} - 10} \\ y = \sqrt{\sqrt{181} + 10} \end{cases} \end{aligned}\right..$$

Ответ: $\left\{(5; 4); (-5; -4); \left(\sqrt{\sqrt{181} - 10}; -\sqrt{\sqrt{181} + 10}\right);\right.$
$\left.\left(-\sqrt{\sqrt{181} - 10}; \sqrt{\sqrt{181} + 10}\right)\right\}$.

2. $\begin{cases} xy - \dfrac{x^3}{y} = -24 \\ xy - \dfrac{y^3}{x} = 6 \end{cases}.$

$$\begin{cases} \frac{x}{y}\left(y^2 - x^2\right) = -24 \\ \frac{y}{x}\left(x^2 - y^2\right) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} : \boxed{2} \\ \boxed{1} \cdot \boxed{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} = 4 \\ \left(x^2 - y^2\right)^2 = 144 \end{cases}.$$

1) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} = 4 \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 = 4y^2 \\ 4y^2 - y^2 = 12 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 = 4y^2 \\ y^2 = 4 \end{cases}$;

$\begin{matrix} (4;\ 2);\ (-4;\ 2) \\ (-4;\ -2);\ (4;\ -2) \end{matrix}$ — решения системы.

Так как x и y одного знака, если $x^2 > y^2$, (из $\boxed{2}$ уравнения), то $(-4;\ 2)$; $(4;\ -2)$ не подходят.

2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} = 4 \\ x^2 - y^2 = -12 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 = 4y^2 \\ 3y^2 = -12 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 = 4y^2 \\ y^2 = -4 \end{cases}$ $\varnothing$.

Ответ: $\{(4;\ 2);\ (-4;\ -2)\}$.

3. $\begin{cases} x^3 + x^2y^2 + y^3 = 11 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$. Для $x, y \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right) + x^2y^2 = 11 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}.$$

Пусть $\begin{cases} x + y = t \\ xy = z \end{cases}$.

Тогда $\begin{cases} t\left(t^2 - 3z\right) + z^2 = 11 \\ t^2 - z = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} t^3 - 3tz + z^2 = 11 \\ z = t^2 - 3 \end{cases}$;

$t^3 - 3t\left(t^2 - 3\right) + \left(t^2 - 3\right)^2 = 11;$

$$t^3 - 3t^3 + 9t + t^4 - 6t^2 + 9 = 11;$$

$$t^4 - 2t^3 - 6t^2 + 9t - 2 = 0;$$

$$f(1) = 1 - 2 - 6 + 9 - 2 = 0;^*$$

$$\begin{array}{r|l}
-\underline{\begin{array}{l} t^4 - 2t^3 - 6t^2 + 9t - 2 \\ t^4 - t^3 \end{array}} & \begin{array}{l} t - 1 \\ \hline t^3 - t^2 - 7t + 2 \end{array} \\
-\underline{\begin{array}{l} -t^3 - 6t^2 \\ -t^3 + t^2 \end{array}} & \\
-\underline{\begin{array}{l} -7t^2 + 9t \\ -7t^2 + 7t \end{array}} & \\
-\underline{\begin{array}{l} 2t - 2 \\ 2t - 2 \end{array}} &
\end{array}$$

$$\varphi(t) = t^3 - t^2 - 7t + 2.$$

$\varphi(1) \neq 0$; $\varphi(-1) \neq 0$; $\varphi(2) \neq 0$; $\varphi(-2) \neq 0$ — то есть других целых корней нет.

Тогда $\begin{cases} t = 1 \\ z = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$ порождает $m^2 - m - 2 = 0$,

т.е. $(-1; 2)$; $(2; -1)$ — решение системы.

Ответ: $\{(-1; 2); (2; -1)\}$.

4. $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + xz + yz = -1 \\ xyz = -5 \end{cases}$.

Порождает уравнение $t^3 - 5t^2 - t + 5 = 0$, тогда

$t^2(t-5) - (t-5) = 0$; $(t-5)(t^2-1) = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \\ t = 5 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{(1; -1; 5); (1; 5; -1); (5; 1; -1); (5; -1; 1); (-1; 1; 5); (-1; 5; 1)\}$.

---

*См. Шахмейстер А. Х. Уравнения. СПб.: «Петроглиф», 2008.

Решение тренировочной карточки 4

1. $\begin{cases} x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 136 \\ x^3y + xy^3 = 30 \end{cases}$. $\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2 = 136 \\ xy(x^2 + y^2) = 30 \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} x^2 + y^2 = t \\ xy = z \end{cases}$, тогда $\left.\begin{cases} t^2 + 4z^2 = 136 \\ tz = 30 \end{cases}\right|_{\cdot 4}$;

$\begin{cases} t^2 + 4z^2 = 136 \\ 4tz = 120 \end{cases}$ $(\boxed{1} \pm \boxed{2})$ $\begin{cases} (t + 2z)^2 = 256 \\ (t - 2z)^2 = 16 \end{cases}$.

1) $\begin{cases} t + 2z = 16 \\ t - 2z = 4 \end{cases}$ $(\boxed{1} \pm \boxed{2})$ $\begin{cases} t = 10 \\ z = 3 \end{cases}$; $\left.\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}\right|_{\cdot 2}$;

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases}$ $(\boxed{1} \pm \boxed{2})$ $\begin{cases} (x + y)^2 = 16 \\ (x - y)^2 = 4 \end{cases}$.

а) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ (3; 1). б) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases}$ (1; 3).

в) $\begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ (–1; –3). г) $\begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = -2 \end{cases}$ (–3; –1).

2) $\begin{cases} t + 2z = 16 \\ t - 2z = -4 \end{cases}$; $\begin{cases} t = 6 \\ z = 5 \end{cases}$; $\left.\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ xy = 5 \end{cases}\right|_{\cdot 2}$;

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ 2xy = 10 \end{cases}$ $(\boxed{1} \pm \boxed{2})$ $\begin{cases} (x + y)^2 = 16 \\ (x - y)^2 = -4 \end{cases}$ $\varnothing$.

3) $\begin{cases} t + 2z = -16 \\ t - 2z = 4 \end{cases}$ $(\boxed{1} \pm \boxed{2})$ $\begin{cases} t = -6 \\ z = -5 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + y^2 = -6 \\ xy = -5 \end{cases}$ $\varnothing$.

4) $\begin{cases} t + 2z = -16 \\ t - 2z = -4 \end{cases}$ $(\boxed{1} \pm \boxed{2})$ $\begin{cases} t = -10 \\ z = -3 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + y^2 = -10 \\ xy = -3 \end{cases}$ $\varnothing$.

Ответ: $\{(3; 1); (-3; -1); (1; 3); (-1; -3)\}$.

2. $\begin{cases} 8x + \dfrac{8}{y} = 3y^2 \\ y + \dfrac{1}{x} = 3x^2 \end{cases}.$

$\begin{cases} 8xy + 8 = 3y^3 \\ xy + 1 = 3x^3 \end{cases}$; $\left(\boxed{1} : \boxed{2}\right)$ $8 = \left(\dfrac{y}{x}\right)^3$; $\begin{cases} y = 2x \\ 2x^2 + 1 = 3x^3 \end{cases}$;

$3x^3 - 2x^2 - 1 = 0;$ $x = 1.$

$$\begin{array}{r|l} -\,3x^3 - 2x^2 - 1 & x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{3x^3 - 3x^2} & 3x^2 + x + 1 \\ -\,x^2 - 1 & \\ \underline{x^2 - x} & \\ -\,x - 1 & \\ \underline{x - 1} & \end{array}$$

Поскольку дискриминант частного $D < 0$, новых решений не появляется. Остается единственная пара — $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$

Ответ: (1; 2).

3. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}} = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} \end{cases}.$

$\boxed{1} \cdot \boxed{2}$ $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x} \cdot \dfrac{16x}{5y}} = \left(\sqrt{x + y}\right)^2 - \left(\sqrt{x - y}\right)^2 \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} \end{cases}$;

$\begin{cases} 8 = x + y - x + y \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} \end{cases}$;

$\begin{cases} y = 4 \\ \sqrt{\dfrac{4}{5}x} = \sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 4} \end{cases}$; $D(c)$: $x \geq 4$.

Решим отдельно уравнение

$$\sqrt{\frac{4}{5}x} = \sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}.$$

$$\frac{4}{5}x = x + 4 + x - 4 - 2\sqrt{x^2 - 16}; \qquad 2\sqrt{x^2-16} = \frac{6}{5}x;$$

$$\sqrt{x^2-16} = \frac{3}{5}x; \qquad x^2 - 16 = \frac{9}{25}x^2; \qquad x^2 = 25; \qquad x = 5.$$

Так как мы делали неравносильные преобразования, то проверкой убеждаемся, что (5; 4) — решение системы.

Ответ: (5; 4).

4. $\begin{cases} 2x + y + 2z = -6 \\ xy + 2xz + yz = -2 \\ xyz = 6 \end{cases}.$

$$\begin{cases} y = -2x - 2z - 6 \\ x(-2x - 2z - 6) + 2xz + z(-2x - 2z - 6) = -2 \\ xz(-2x - 2z - 6) = 6 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = -2x - 2z - 6 \\ -2x^2 - 2xz - 6x + 2xz - 2xz - 2z^2 - 6z = -2 \\ -2x^2z - 2xz^2 - 6xz = 6 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = -2x - 2z - 6 \\ 2(x^2 + z^2) + 6(x + z) + 2xz = 2 \\ xz(x + z) + 3xz = -3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = -2x - 2z - 6 \\ 2(x + z)^2 - 2xz + 6(x + z) = 2 \\ xz(x + z) + 3xz = -3 \end{cases}.$$

Пусть $\begin{cases} x + z = a \\ xz = b \end{cases}$. Тогда $\begin{cases} y = -2x - 2z - 6 \\ a^2 - b + 3a = 1 \\ ba + 3b = -3 \end{cases};$

$$\begin{cases} y = -2(x+z) - 6 \\ a(a+3) = 1 + b \\ b(a+3) = -3 \end{cases} \quad \left(\boxed{2} : \boxed{3}\right) \quad \frac{a}{b} = \frac{1+b}{-3}; \quad a = -\frac{b(b+1)}{3}$$

Тогда $b\left(-\dfrac{b^2 + b}{3} + 3\right) = -3;$

$-b^3 - b^2 + 9b = -9;$

$b^2(b + 1) - 9(b + 1) = 0;$

$(b + 1)(b - 3)(b + 3) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} b = -1 \\ b = 3 \\ b = -3 \end{array}\right. ; \quad \begin{array}{l} a = 0 \\ a = -4 \\ a = -2 \end{array}.$$

1) $\begin{cases} xz = -1 \\ x + z = 0 \\ y = -2x - 2z - 6 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ z = -x \\ y = -2x - 2z - 6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1;\ -6;\ -1) \\ (-1;\ -6;\ 1). \end{array}$

2) $\begin{cases} x + z = -4 \\ xz = 3 \\ y = -2x - 2z - 6 \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -3 \\ z = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ z = -3 \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} (-3;\ 2;\ -1) \\ (-1;\ 2;\ -3). \end{array}$

3) $\begin{cases} x + z = -2 \\ xz = -3 \\ y = -2x - 2z - 6 \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -3 \\ z = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ z = -3 \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} (-3;\ -2;\ 1) \\ (1;\ -2;\ -3). \end{array}$

Ответ: $\{(1; -6; -1); (-1; -6; 1); (-3; 2; -1); (-1; 2; -3);$
$(-3; -2; 1); (1; -2; -3)\}.$

Решение тренировочной карточки 5

1. $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+3xy}+\dfrac{3}{y^2-xy}=\dfrac{25}{14} \\ \dfrac{3}{x^2+3xy}-\dfrac{2}{y^2-xy}=-\dfrac{4}{7} \end{cases}.$

Пусть $\begin{matrix} \dfrac{1}{x^2+3xy}=a \\ \dfrac{1}{y^2-xy}=b \end{matrix},$

тогда $\begin{cases} 2a+3b=\frac{25}{14} \\ 3a-2b=-\frac{4}{7} \end{cases} \left|\begin{matrix} \cdot 3 \\ \\ \cdot 2 \end{matrix}\right. \Rightarrow -\begin{cases} 6a+9b=\frac{75}{14} \\ 6a-4b=-\frac{8}{7} \end{cases};$

$13b=\frac{75}{14}+\frac{8}{7}$; $\quad 13b=\frac{91}{14}$;

$b=\frac{1}{2}$; $\quad a=\frac{1}{2}\left(\frac{25}{14}-3b\right)$;

$a=\frac{1}{2}\left(\frac{25}{14}-\frac{3}{2}\right)$; $\quad a=\frac{1}{7}$.

Возвращаясь к переменным x и y, получим:

$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+3xy}=\dfrac{1}{7} \\ \dfrac{1}{y^2-xy}=\dfrac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2+3xy=7 \\ y^2-xy=2 \end{cases} \quad \left(\boxed{1}+\boxed{2}\right)$

$\begin{cases} (x+y)^2=9 \\ y^2-xy=2 \end{cases}.$

1) $\begin{cases} x+y=3 \\ y^2-xy=2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=3-y \\ y^2-y(3-y)=2 \end{cases};$

$\begin{cases} x=3-y \\ 2y^2-3y-2=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=3-y \\ \left[\begin{matrix} y=2 \\ y=-\frac{1}{2} \end{matrix}\right. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1;\ 2) \\ \left(3{,}5;\ -\frac{1}{2}\right). \end{matrix}$

2) $\begin{cases} x+y=-3 \\ y^2-xy=2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=-3-y \\ y^2-y(-3-y)=2 \end{cases};$

$$\begin{cases} x = -3 - y \\ 2y^2 + 3y - 2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -3 - y \\ \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = +\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{array}{l} (-1;\ -2) \\ \left(-3,5;\ \frac{1}{2}\right). \end{array}$$

Ответ: $\{(1;\ 2);\ (-1;\ -2);\ (3,5;\ -0,5);\ (-3,5;\ 0,5)\}$.

2. $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$.

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - x^2y^2 =$$
$$= \left(x^2 + xy + y^2\right)\left(x^2 - xy + y^2\right).$$

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} \left(\boxed{1} + \boxed{2}\right) : 2 \\ \boxed{2} - \boxed{1} \end{array}\right) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = -6 \end{cases}$$

$$\left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right) \quad \begin{cases} (x + y)^2 = 4 \\ (x - y)^2 = 16 \end{cases}.$$

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$ $\left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right)$ $(3;-1)$.

2. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -4 \end{cases}$ $\left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right)$ $(-1;\ 3)$.

3. $\begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = 4 \end{cases}$ $\left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right)$ $(1;-3)$.

4. $\begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = -4 \end{cases}$ $\left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right)$ $(-3;\ 1)$.

Ответ: $\{(3;\ -1);\ (1;\ -3);\ (-1;\ 3);\ (-3;\ 1)\}$.

3. $\begin{cases} x^3 = 10x + y \\ y^3 = x + 10y \end{cases}$. $\left(\boxed{1} \mp \boxed{2}\right)$

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 9(x - y) \\ (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right) - 11(x + y) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (x - y)\left(x^2 + xy + y^2 - 9\right) = 0 \\ (x + y)\left(x^2 - xy + y^2 - 11\right) = 0 \end{cases}.$$

1) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $\quad (0;\ 0).$

2) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 11 = 0 \end{cases};$ $\quad \begin{cases} x = y \\ y^2 = 11 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} \left(\sqrt{11};\ \sqrt{11}\right) \\ \left(-\sqrt{11};\ -\sqrt{11}\right). \end{matrix}$

3) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 9 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases};$ $\quad \begin{cases} x = -y \\ y^2 = 9 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} (3;\ -3) \\ (-3;\ 3). \end{matrix}$

4) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 9 \\ x^2 - xy + y^2 = 11 \end{cases}$ $\quad \left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right)$ $\quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = -2 \end{cases};$

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 8 \\ (x - y)^2 = 12 \end{cases}.$$

а) $\begin{cases} x + y = 2\sqrt{2} \\ x - y = 2\sqrt{3} \end{cases}$ $\quad \left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right)$ $\quad \begin{cases} x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ y = \sqrt{2} - \sqrt{3} \end{cases}.$

б) $\begin{cases} x + y = 2\sqrt{2} \\ x - y = -2\sqrt{3} \end{cases}$ $\quad \left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right)$ $\quad \begin{cases} x = \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ y = \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{cases}.$

в) $\begin{cases} x + y = -2\sqrt{2} \\ x - y = 2\sqrt{3} \end{cases}$ $\quad \left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right)$ $\quad \begin{cases} x = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{3} - \sqrt{2} \end{cases}.$

г) $\begin{cases} x + y = -2\sqrt{2} \\ x - y = -2\sqrt{3} \end{cases}$ $\quad \left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right)$ $\quad \begin{cases} x = -\sqrt{2} - \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{2} + \sqrt{3} \end{cases}.$

Ответ: $\left\{(0;\ 0);\ \left(\sqrt{11};\ \sqrt{11}\right);\ \left(-\sqrt{11};\ -\sqrt{11}\right);\ (3;\ -3);\ (-3;\ 3);\right.$
$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3};\ \sqrt{2} - \sqrt{3}\right);\ \left(\sqrt{2} - \sqrt{3};\sqrt{2} + \sqrt{3}\right);$
$\left.\left(-\sqrt{2} + \sqrt{3};\ -\sqrt{2} - \sqrt{3}\right);\ \left(-\sqrt{2} - \sqrt{3};\ -\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right\}.$

4. $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x^3+y^3+z^3=-8 \end{cases}$.

Так как $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=$
$=(-2)^2-2(xy+xz+yz)=6$, значит, $xy+xz+yz=-1$.

С другой стороны, $x^3+y^3+z^3=$
$=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz$,
то есть $-8=(-2)^3-3(-2)(-1)+3xyz$.

Иначе, система имеет вид:

$\begin{cases} x+y+z=-2 \\ xy+xz+yz=-1 \\ xyz=2 \end{cases}$,

что порождает кубическое уравнение $t^3+2t^2-t-2=0$;
$t^2(t+2)-(t+2)=0$; $(t+2)(t^2-1)=0$, то есть

$\left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=-1 \\ t=1 \end{array}\right.$.

О т в е т: $\{(-2;\ -1;\ 1);\ (-2;\ 1;\ -1);\ (-1;\ -2;\ 1);\ (-1;\ 1;\ -2);$
$(1;\ -2;\ -1);\ (1;\ -1;\ -2)\}$.

Решение тренировочной карточки 6

1. $\begin{cases} \dfrac{2x^2+4xy}{3xy-y^2}+\dfrac{9xy-3y^2}{x^2+2xy}=5 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}.$

Пусть $\dfrac{x^2+2xy}{3xy-y^2}=t$, тогда $\boxed{1}$ имеет вид: $2t+\dfrac{3}{t}=5$;

$2t^2-5t+3=0$; $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

1) $\begin{cases} \dfrac{x^2+2xy}{3xy-y^2}=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+2xy=3xy-y^2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2+y^2-xy=0 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$; $\left.\begin{cases} xy=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}\right|\cdot 2$; $\begin{cases} 2xy=4 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$;

$(\boxed{1}\pm\boxed{2})$ $\begin{cases} (x+y)^2=6 \\ (x-y)^2=-2 \end{cases}$ $\varnothing$.

2) $\begin{cases} \dfrac{x^2+2xy}{3xy-y^2}=\dfrac{3}{2} \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x^2+4xy=9xy-3y^2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$;

$\begin{cases} 2x^2-5xy+3y^2=0 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}.$

Решим уравнение $2x^2-5xy+3y^2=0$:

$x_{1,2}=\dfrac{5y\pm\sqrt{25y^2-24y^2}}{4}=\dfrac{5y\pm y}{4}$; $\left[\begin{array}{l} x=y \\ x=\dfrac{3}{2}y \end{array}\right.$.

а) $\begin{cases} x=y \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=y \\ x^2=1 \end{cases}$ $(1;\ 1)$ $(-1;\ -1)$.

б) $\begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ \frac{9}{4}y^2 + y^2 = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ y^2 = \frac{8}{13} \end{cases}$ $\left(3\sqrt{\frac{2}{13}};\ \sqrt{\frac{8}{13}}\right)$ $\left(-3\sqrt{\frac{2}{13}};\ -\sqrt{\frac{8}{13}}\right)$.

Ответ: $\left\{(1;\ 1);\ (-1;\ -1);\ \left(3\sqrt{\frac{2}{13}};\ \sqrt{\frac{8}{13}}\right);\ \left(-3\sqrt{\frac{2}{13}};\ -\sqrt{\frac{8}{13}}\right)\right\}$.

2. $\begin{cases} x^2 - 10xy + 12y^2 = 17 \\ x^2 - 7xy + 8y^2 = 13 \end{cases}$. (При $y = 0$ решения нет.)

Пусть $x = ty\ (y \neq 0)$.

$\begin{cases} t^2y^2 - 10ty^2 + 12y^2 = 17 \\ t^2y^2 - 7ty^2 + 8y^2 = 13 \end{cases}$;

$\begin{cases} y^2 = \dfrac{17}{t^2 - 10t + 12} \\ y^2 = \dfrac{13}{t^2 - 7t + 8} \end{cases}$; $\dfrac{17}{t^2 - 10t + 12} = \dfrac{13}{t^2 - 7t + 8}$;

$17t^2 - 119t + 136 = 13t^2 - 130t + 156$;

$4t^2 + 11t - 20 = 0$;

$t_{1,\,2} = \dfrac{-11 \pm \sqrt{121 + 320}}{8} = \dfrac{-11 \pm 21}{8}$; $\begin{cases} t = -4 \\ t = \frac{5}{4} \end{cases}$.

1) $t = -4$.

$\begin{cases} x = -4y \\ y^2 = \dfrac{17}{16 + 40 + 12} \end{cases}$; $\begin{cases} x = -4y \\ y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$ $(-2;\ 0{,}5)$ $(2;\ -0{,}5)$.

2) $t = \frac{5}{4}$.

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4}y \\ y^2 = \dfrac{17}{\frac{25}{16} - \frac{50}{4} + 12} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{5}{4}y \\ y^2 = 16 \end{cases} \quad \begin{matrix} (5;\ 4) \\ (-5;\ -4). \end{matrix}$$

Ответ: $\{(-2;\ 0{,}5);\ (2;\ -0{,}5);\ (5;\ 4);\ (-5;\ -4)\}$.

3. $$\begin{cases} x - y + \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = \dfrac{20}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}.$$

Необходимо учесть, что

$$a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b}; & a \geqslant 0;\ b \geqslant 0 \\ -\sqrt{a^2 b}; & a < 0;\ b \geqslant 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим $\boxed{1}$ и умножим обе части уравнения на $(x + y)$:

1) Пусть $x + y > 0$, тогда $x - y \geqslant 0$, так как $\frac{x-y}{x+y} \geqslant 0$.

$$x^2 - y^2 + \sqrt{\frac{(x+y)^2 (x-y)}{x+y}} = 20,$$

то есть $x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 - y^2} = 20$.

Пусть $\sqrt{x^2 - y^2} = t$ $(t \geqslant 0)$; $\quad x^2 - y^2 = t^2$,

то есть $t^2 + t - 20 = 0$; $\quad \left[\begin{aligned} &t = 4 \\ &t = -5 \notin [0;\ \infty) \end{aligned}\right.$.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} = 4 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 = 25 \\ y^2 = 9 \end{cases} \quad \begin{matrix} (5;\ 3) \\ (5;\ -3). \end{matrix}$$

Другие пары не удовлетворяют условию $\begin{cases} x + y > 0 \\ x - y \geqslant 0 \end{cases}$.

2) Пусть $x + y < 0$, тогда $x - y \leqslant 0$, так как $\frac{x-y}{x+y} \geqslant 0$.

$$x^2 - y^2 - \sqrt{\frac{(x+y)^2(x-y)}{x+y}} = 20,$$

то есть $x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 - y^2} = 20$.

Пусть $\sqrt{x^2 - y^2} = z \ (z \geqslant 0)$; $x^2 - y^2 = z^2$,

то есть $z^2 - z - 20 = 0$; $\left[\begin{array}{l} z = 5 \\ z = -4 \notin [0; \infty) \end{array}\right.$.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} = 5 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \quad \left(\boxed{1}^2\right) \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \quad \left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right)$$

$$\begin{cases} x^2 = 29{,}5 \\ y^2 = 4{,}5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \left(-\sqrt{29{,}5};\ -\sqrt{4{,}5}\right) \\ \left(-\sqrt{29{,}5};\ \sqrt{4{,}5}\right). \end{array}$$

Другие пары не подходят под условие $\begin{cases} x - y \leqslant 0 \\ x + y < 0 \end{cases}$.

Ответ: $\left\{(5; 3); (5; -3); \left(-\sqrt{29{,}5}; -\sqrt{4{,}5}\right); \left(-\sqrt{29{,}5}; \sqrt{4{,}5}\right)\right\}$.

4. $\begin{cases} xy + yz + xz = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases}$; $\quad x, y, z \in \mathbb{Z}$.

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$;

$(x + y + z)^2 = 6 + 2(-1)$;

$(x + y + z)^2 = 4$;

$\left[\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + y + z = -2 \end{array}\right.$.

а) $x + y + z = 2$;

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2^3 - 3 \cdot 2 \cdot (-1) + 3xyz = 8;$$

$xyz = -2.$

Т.е. $\begin{cases} x+y+z=2 \\ xy+xz+yz=-1 \\ xyz=-2 \end{cases}.$

Значит $t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0;$

$(t - 2)(t - 1)(t + 1) = 0$, тогда

$(2; 1; -1)$; $(2; -1; 1)$; $(1; 2; -1)$; $(-1; 2; 1)$; $(1; -1; 2)$; $(-1; 1; 2)$.

б) $x + y + z = -2;$

$x^3 + y^3 + z^3 = (-2)^3 - 3(-2)(-1) + 3xyz = 8;$

$xyz = \frac{22}{3};$

то есть $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ xy+xz+yz=-1 \\ xyz=\frac{22}{3} \end{cases}$

порождает $p^3 + 2p^2 - p - \frac{22}{3} = 0;$

$3p^3 + 6p^2 - 3p - 22 = 0;$

$f(1) \neq 0$; $f(-1) \neq 0$; $f(11) \neq 0$; $f(-11) \neq 0$; $f(2) \neq 0$;

$f(-2) \neq 0$; $f(22) \neq 0$; $f(-22) \neq 0$, то есть целых корней нет.

Ответ: $\{(2; 1; -1)$; $(2; -1; 1)$; $(1; 2; -1)$; $(-1; 2; 1)$; $(1; -1; 2)$; $(-1; 1; 2)\}$.

Решение тренировочной карточки 7

1. $\begin{cases} x^3+x^2y^2+y^3=13 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$, где $x, y \in \mathbb{Z}$.

$\begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)+x^2y^2=13 \\ (x+y)^2-xy=7 \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} x+y=t \\ xy=z \end{cases}$. $\begin{cases} t(t^2-3z)+z^2=13 \\ t^2-z=7 \end{cases}$;

$\begin{cases} t^3-3tz+z^2=13 \\ z=t^2-7 \end{cases}$; $\begin{cases} t^3-3t(t^2-7)+(t^2-7)^2=13 \\ z=t^2-7 \end{cases}$;

$t^3-3t^3+21t+t^4-14t^2+49=13;$

$t^4-2t^3-14t^2+21t+36=0;$

$f(t)=t^4-2t^3-14t^2+21t+36;$

$f(3)=81-2\cdot 27-14\cdot 9+63+36=0.$

Тогда

$$\begin{array}{r|l} t^4-2t^3-14t^2+21t+36 & t-3 \\ \cline{2-2} -\underline{t^4-3t^3} & t^3+t^2-11t-12 \\ t^3-14t^2 & \\ -\underline{t^3-3t^2} & \\ -11t^2+21t & \\ -\underline{-11t^2+33t} & \\ -12t+36 & \\ -\underline{-12t+36} & \end{array}$$

$\varphi(t) = t^3 + t^2 - 11t - 12$, если есть целые решения, то они делители числа 12: $d = \pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm12$.

Проверкой убеждаемся, что больше целых корней нет.

Итак: $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ (1; 2); (2; 1).

Ответ: $\{(1; 2); (2; 1)\}$.

2. $\begin{cases} x - y - \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = \dfrac{20}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$.

Здесь важно помнить, что $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b}; & a \geqslant 0;\ b \geqslant 0 \\ -\sqrt{a^2b}; & a < 0;\ b \geqslant 0 \end{cases}$.

Умножим обе части $\boxed{1}$ на $(x + y)$, получим два случая:

1) $x + y > 0$.

$$\begin{cases} (x - y)(x + y) - \sqrt{x^2 - y^2} = 20 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}.$$

Пусть $\sqrt{x^2 - y^2} = t$ $(t \geqslant 0)$, тогда $\boxed{1}$ будет иметь вид:

$t^2 - t - 20 = 0;$ $\left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = -4 \notin [0; \infty) \end{array}\right.$.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} = 5 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \quad \left(\boxed{1}^2\right) \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \quad \left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right)$$

$$\begin{cases} x^2 = 29{,}5 \\ y^2 = 4{,}5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \left(\sqrt{29{,}5};\ \sqrt{4{,}5}\right) \\ \left(\sqrt{29{,}5};\ -\sqrt{4{,}5}\right). \end{array}$$

Другие пары не удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} x + y > 0 \\ x - y \geqslant 0 \end{cases}.$$

2) $x + y < 0$. $\begin{cases} (x - y)(x + y) + \sqrt{x^2 - y^2} = 20 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$.

Пусть $\sqrt{x^2 - y^2} = z$ $(z \geqslant 0)$, тогда $\boxed{1}$ будет иметь вид:

$z^2 + z - 20 = 0;$ $\left[\begin{array}{l} z = -5 \notin [0; \infty) \\ z = 4 \end{array}\right.$.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} = 4 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \quad \left(\boxed{1}^2\right) \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \quad \left(\left(\boxed{1} \pm \boxed{2}\right) : 2 \right)$$

$$\begin{cases} x^2 = 25 & (-5;\ -3) \\ y^2 = 9 & (-5;\ 3). \end{cases}$$

Другие пары не удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} x + y < 0 \\ x - y \leqslant 0 \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\left(\sqrt{29{,}5};\ \sqrt{4{,}5}\right);\ \left(\sqrt{29{,}5};\ -\sqrt{4{,}5}\right);\ (-5;\ -3);\ (-5;\ 3)\right\}$.

3. $\pm\begin{cases} xy + \frac{y}{x} = 2\left(x^2 + y^2\right) \\ xy - \frac{x}{y} = x^2 + y^2 \end{cases}.$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \left(x^2 + y^2\right) \\ 2xy + \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 3\left(x^2 + y^2\right) \end{cases}; \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = xy\left(x^2 + y^2\right) \\ 2xy + \frac{y^2 - x^2}{xy} = 3\left(x^2 + y^2\right) \end{cases};$$

$$\begin{cases} xy = 1 \\ 2 + y^2 - x^2 = 3x^2 + 3y^2 \end{cases}; \qquad \begin{cases} xy = 1 \\ 4x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} xy = 1 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ 2x^2 + \frac{1}{x^2} = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ 2x^4 - x^2 + 1 = 0, \quad D < 0 \quad \varnothing \end{cases}.$$

Ответ: нет решений.

4. $\begin{cases} y^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \\ z^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0 \\ x^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0 \end{cases}. \quad \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3}:$

$$(x - 1)^3 + (y - 1)^3 + (z - 1)^3 = 0.$$

Очевидно, что $(1;\ 1;\ 1)$ — решение системы.

Проверим, есть ли еще решения.

$$y^3 = 3x^2 - 3x + 1 = 3\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\right] > 0$$
$$z^3 = 3y^2 - 3y + 1 = 3\left[\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\right] > 0, \quad \text{значит} \begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \\ z > 0 \end{cases}.$$
$$x^3 = 3z^2 - 3z + 1 = 3\left[\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\right] > 0$$

а) Пусть $x > 1$,

тогда из-за $x^3 = 3z^2 - 3z + 1 > 1 \Rightarrow 3z(z - 1) > 0$,

а тогда $z > 1$ $(z > 0)$,

но так как $z^3 = 3y^2 - 3y + 1 > 1 \Rightarrow 3y(y - 1) > 0$,

значит, $y > 1$ $(y > 0)$.

Так как $\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \\ z > 1 \end{cases}$, то $\begin{cases} (x-1)^3 > 0 \\ (y-1)^3 > 0 \\ (z-1)^3 > 0 \end{cases}$.

То есть $(x - 1)^3 + (y - 1)^3 + (z - 1)^3 > 0$,

но $(x - 1)^3 + (y - 1)^3 + (z - 1)^3 = 0$.

То есть решения при $x > 1$; $y > 1$; $z > 1$ нет.

б) Пусть $0 < x < 1$,

тогда по аналогичным причинам $0 < y < 1$, а из этого следует, что $0 < z < 1$.

Тогда $\begin{cases} (x-1)^3 < 0 \\ (y-1)^3 < 0 \\ (z-1)^3 < 0 \end{cases}$.

То есть $(x - 1)^3 + (y - 1)^3 + (z - 1)^3 < 0$,

но $(x - 1)^3 + (y - 1)^3 + (z - 1)^3 = 0$.

Значит, и в этом случае решения нет.

О т в е т: (1; 1; 1).

Решение тренировочной карточки 8

1. $\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4=136 \\ x^3y+xy^3=-30 \end{cases}.$

$\begin{cases} (x^2+y^2)^2+4x^2y^2=136 \\ xy(x^2+y^2)=-30 \end{cases}.$ Пусть $\begin{cases} x^2+y^2=t \\ xy=z \end{cases}.$

Тогда $\begin{cases} t^2+4z^2=136 \\ tz=-30 \end{cases}\Bigg|_{\cdot 4} \Rightarrow \begin{cases} t^2+4z^2=136 \\ 4tz=-120 \end{cases}$

$(\boxed{1}\pm\boxed{2})$ $\begin{cases} (t+2z)^2=16 \\ (t-2z)^2=256 \end{cases}.$

1) $\begin{cases} t+2z=4 \\ t-2z=16 \end{cases}$ $(\boxed{1}\pm\boxed{2})$ $\begin{cases} t=10 \\ z=-3 \end{cases};$ $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=-3 \end{cases}\Bigg|_{\cdot 2}$

$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ 2xy=-6 \end{cases}$ $(\boxed{1}\pm\boxed{2})$ $\begin{cases} (x+y)^2=4 \\ (x-y)^2=16 \end{cases}.$

а) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=4 \end{cases};$ $(3; -1)$. б) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=-4 \end{cases};$ $(-1; 3)$.

в) $\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=4 \end{cases};$ $(1; -3)$. г) $\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=-4 \end{cases};$ $(-3; 1)$.

2) $\begin{cases} t+2z=4 \\ t-2z=-16 \end{cases};$ $\begin{cases} t=-6 \\ z=5 \end{cases};$ $\begin{cases} x^2+y^2=-6 \\ xy=5 \end{cases}$ $\varnothing$.

3) $\begin{cases} t+2z=-4 \\ t-2z=16 \end{cases};$ $\begin{cases} t=6 \\ z=-5 \end{cases};$

$\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ xy=-5 \end{cases}\Bigg|_{\cdot 2}$ $\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ 2xy=-10 \end{cases}$ $(\boxed{1}\pm\boxed{2})$

$\begin{cases} (x+y)^2=-4 \\ (x-y)^2=16 \end{cases}$ $\varnothing$.

4) $\begin{cases} t + 2z = -4 \\ t - 2z = -16 \end{cases}$; $\begin{cases} t = -10 \\ z = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + y^2 = -10 \\ xy = 3 \end{cases}$ $\varnothing$.

Ответ: $\{(-1;\ 3);\ (-3;\ 1);\ (3;\ -1);\ (1;\ -3)\}$.

2. $\begin{cases} x + y - \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{20}{x-y} \Big| \cdot (x - y) \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - (x - y)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = 20 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$.

а) $x - y > 0$.

$\begin{cases} x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 - y^2} = 20 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2 - y^2} = 5 \\ \sqrt{x^2 - y^2} = -4 \notin [0;\ \infty) \end{array}\right. \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 = 29{,}5 \\ y^2 = 4{,}5 \end{cases}$ $\left(\sqrt{29{,}5};\ \sqrt{4{,}5}\right)$ $\left(\sqrt{29{,}5};\ -\sqrt{4{,}5}\right)$.

Остальные пары не отвечают условиям: $\begin{cases} x - y > 0 \\ x + y \geqslant 0 \end{cases}$.

б) $x - y < 0$.

$\begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 - y^2} = 20 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2 - y^2} = -5 \notin [0,\infty] \\ \sqrt{x^2 - y^2} = 4 \end{array}\right. \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 = 25 \\ y^2 = 9 \end{cases}$ $(-5;\ -3)$ $(-5;\ 3)$.

Остальные пары не отвечают условиям: $\begin{cases} x - y < 0 \\ x + y \leqslant 0 \end{cases}$.

Ответ: $\left\{\left(\sqrt{29{,}5};\ \sqrt{4{,}5}\right);\ \left(\sqrt{29{,}5};\ -\sqrt{4{,}5}\right);\ (-5;\ -3);\ (-5;\ 3)\right\}$.

3. $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2 \\ \sqrt{y+\sqrt{x}} - \sqrt{y-\sqrt{x}} = 1 \end{cases}.$

$$\begin{cases} x+\sqrt{y}+2\sqrt{x^2-y}+x-\sqrt{y}=4 \\ y+\sqrt{x}-2\sqrt{y^2-x}+y-\sqrt{x}=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+\sqrt{x^2-y}=2 \\ y-\sqrt{y^2-x}=\frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2-y=4-4x+x^2 \\ y^2-x=y^2-y+\frac{1}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x-y=4 \\ x-y=-\frac{1}{4} \end{cases} \quad (\boxed{1}-\boxed{2})$$

$$\begin{cases} 3x=\frac{17}{4} \\ y=x+\frac{1}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x=\frac{17}{12} \\ y=\frac{20}{12} \end{cases} \quad \left(1\frac{5}{12};\ 1\frac{2}{3}\right).$$

Условия существования системы и равносильности преобразований для данной пары подходят.

$$\begin{cases} x^2 \geqslant y \\ y^2 \geqslant x \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ \sqrt{y+\sqrt{x}} \geqslant \sqrt{y-\sqrt{x}} \\ x \leqslant 2 \\ y \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $\left(1\frac{5}{12};\ 1\frac{2}{3}\right)$.

4. $\begin{cases} y^3+3x^2+3x+1=0 \\ z^3+3y^2+3y+1=0 \\ x^3+3z^2+3z+1=0 \end{cases}.$

$(\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}) \Rightarrow (x+1)^3+(y+1)^3+(z+1)^3=0.$

Очевидно, что $(-1; -1; -1)$ — решение системы.

Проверим, есть ли еще решения.

Так как $\begin{cases} y^3 = -\left(3x^2 + 3x + 1\right) = -3\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\right) < 0 \\ z^3 = -\left(3y^2 + 3y + 1\right) = -3\left(\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\right) < 0 \\ x^3 = -\left(3z^2 + 3z + 1\right) = -3\left(\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\right) < 0 \end{cases}$,

то $\begin{cases} y < 0 \\ x < 0 \\ z < 0 \end{cases}$.

а) Пусть $x < -1$,

тогда из

$x^3 = -\left(3z^2 + 3z + 1\right) < -1 \Rightarrow -3z(z + 1) < 0$,

а тогда $z < -1$, но так как

$z^3 = -\left(3y^2 + 3y + 1\right) < -1 \Rightarrow -3y(y + 1) < 0$,

значит, $y < -1$.

Так как $\begin{cases} x < -1 \\ y < -1 \\ z < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^3 < 0 \\ (y+1)^3 < 0 \\ (z+1)^3 < 0 \end{cases}$.

То есть $(x + 1)^3 + (y + 1)^3 + (z + 1)^3 < 0$,

но $(x + 1)^3 + (y + 1)^3 + (z + 1)^3 = 0$.

То есть решения при $x < -1$; $y < -1$; $z < -1$ нет.

б) Пусть $0 > x > -1$,

тогда по аналогичным причинам $y > -1$,

а из этого следует, что $z > -1$,

то есть $(x + 1)^3 + (y + 1)^3 + (z + 1)^3 > 0$,

что противоречит $(x + 1)^3 + (y + 1)^3 + (z + 1)^3 = 0$.

Ответ: $(-1; -1; -1)$.

Зачетные карточки

Карточка 1

1. $\begin{cases} 3x+2y-\frac{x}{x+y}=5{,}5 \\ x+3y+\frac{2x}{x+y}=3 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} 3\sqrt[3]{xy}-2\sqrt{xy}=1 \\ x^2+y^2-x-y+3xy=3 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \left(x+y\sqrt{x}+y^2\right)\sqrt{x+y^2}=65 \\ \left(x-y\sqrt{x}+y^2\right)\sqrt{x+y^2}=185 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=3 \\ x^4+y^4+z^4=3 \end{cases}$.

Карточка 2

1. $\begin{cases} 4y^2-3xy=2x-y \\ 5x^2-3y^2=4x-2y \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3 \\ 2x+y=7 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \sqrt{2x+y}-\sqrt[3]{2x-y}=6 \\ \sqrt[6]{(2x+y)^3(2x-y)^2}=8 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x^3=xyz+2 \\ y^3=xyz+3 \\ z^3=xyz-3 \end{cases}$.

Карточка 3

1. $\begin{cases} x+y-\sqrt{y^2-4x^2}=5 \\ y^3\sqrt{y^2-4x^2}=0 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} (x-y)\left(x^2-y^2\right)=7 \\ (x+y)\left(x^2+y^2\right)=175 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \frac{2y-11{,}3}{\sqrt{x-4}}=3\sqrt{x-4} \\ |x-3{,}1|+|3{,}1-y|=7{,}7 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=2 \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y^2)}=8 \end{cases}$.

Карточка 4

1. $\begin{cases} x(x+1)(3x+5y)=144 \\ x^2+4x+5y=24 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=1 \\ \sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{y+1}=1 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} x-\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{6}{y} \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} \dfrac{1-5y}{\sqrt{-x-4}}=-\sqrt{-x-4} \\ 7|x|-4|y+1|=28{,}16 \end{cases}$.

Карточка 5

1. $\begin{cases} x^2+xy+x+y=-2 \\ y^2+xy+x+y=1 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x+\sqrt{y}=56 \\ y+\sqrt{x}=56 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} x-\sqrt{\dfrac{x}{x-y}}=\dfrac{12}{x-y} \\ x+xy=81 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} (x+y)^2-z^2=4 \\ (y+z)^2-x^2=2 \\ (z+x)^2-y^2=3 \end{cases}$.

Карточка 6

1. $\begin{cases} x^3+y^3=-61 \\ (xy+9)(x+y)=11 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \sqrt{2x-y+11}-\sqrt{3x+y-9}=3 \\ \sqrt[4]{2x-y+11}+\sqrt[4]{3x+y-9}=3 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} 2\left(\dfrac{4x^2}{9y^2}+\dfrac{9y^2}{4x^2}\right)-9\left(\dfrac{2x}{3y}+\dfrac{3y}{2x}\right)+14=0 \\ 4x^2+9y^2=5 \end{cases}$.

4 Решения

Решение проверочной работы 1

1. $\begin{cases} 7x - 2y = 1 \\ 5x + 3y = 14 \end{cases}$. $\left(\begin{matrix} \boxed{1} \cdot 5 - \boxed{2} \cdot 7 \\ \boxed{1} \end{matrix}\right)$

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 35x - 10y = 5 \\ 35x + 21y = 98 \end{array} \\ \hline -31y = -93; \end{array} \qquad \begin{cases} 31y = 93 \\ 7x - 2y = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 3 \\ 7x - 6 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y \\ x \end{cases}$$

Ответ: (1; 3).

2. $\begin{cases} \frac{3y-6x-25}{5x+8y} = 1 \\ 8x + 25y = 110 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 3y - 6x - 25 = 5x + 8y \\ x \neq -1{,}6y \\ 8x + 25y = 110 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5y = -11x - 25 \\ x \neq -1{,}6y \\ 8x + 25y = 110 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 5y = -11x - 25 \\ x \neq -1{,}6y \\ 8x - 5(11x + 25) = 110 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5y = 55 - 25 \\ x \neq -1{,}6y \\ x = -5 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 6 \\ x \neq -1{,}6y \\ x = -5 \end{cases}.$$

Ответ: (–5; 6).

3. $\begin{cases} \frac{7x-3y}{5} = \frac{5x-y}{3} - \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{3} \end{cases}$.

$$\begin{cases}6(7x-3y)=10(5x-y)-15(x+y)\\3(x-1)=5(y+1)\end{cases};$$

$$\begin{cases}42x-18y=50x-10y-15x-15y\\3x=5y+8\end{cases}; \quad \begin{cases}7x=-7y\\3x=5y+8\end{cases};$$

$$\begin{cases}x=-y\\8x=8\end{cases}; \quad \begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}.$$

Ответ: (1; –1).

4. $\begin{cases}\dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13\\\dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1\end{cases}.$

Пусть $\begin{cases}\dfrac{1}{2x-3y}=a\\\dfrac{9}{3x-2y}=b\end{cases}$. Получаем

$$\begin{cases}11a+2b=13\\-2a+3b=1\end{cases}; \quad \begin{pmatrix}\boxed{1}\cdot 3\\\boxed{2}\cdot 2\end{pmatrix} \quad \begin{cases}33a+6b=39\\-4a+6b=2\end{cases}; \quad \begin{pmatrix}\boxed{1}-\boxed{2}\\\boxed{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}37a=37\\-4a+6b=2\end{cases}; \quad \begin{cases}a=1\\-4+6b=2\end{cases}; \quad \begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}.$$

Возвращаясь к переменным x и y, получаем:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2x-3y}=1\\\dfrac{9}{3x-2y}=1\end{cases}; \quad \begin{cases}2x-3y=1\\3x-2y=9\end{cases}; \quad \begin{pmatrix}\boxed{1}\cdot 3\\\boxed{2}\cdot 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}6x-9y=3\\6x-4y=18\end{cases}; \quad \begin{pmatrix}\boxed{1}-\boxed{2}\\\boxed{2}\end{pmatrix} \quad \begin{cases}y=3\\2x-3y=1\end{cases}; \quad \begin{cases}y=3\\x=5\end{cases}.$$

Ответ: (5; 3).

5. $\begin{cases}(2x-3y-8)(3x+4y+2)=0\\(7x-5y+5)(12x+16y+1)=0\end{cases}.$

а) $\begin{cases}2x-3y-8=0\\7x-5y+5=0\end{cases}; \quad \begin{pmatrix}\boxed{1}\cdot 7-\boxed{2}\cdot 2\\\boxed{1}\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{r}14x-21y-56=0\\-\;14x-10y+10=0\\\hline -11y-66=0;\end{array}$$

$$\begin{cases}11y=-66\\2x-3y=8\end{cases};\quad \begin{cases}y=-6\\x=-5\end{cases}.$$

б) $\begin{cases}2x-3y-8=0\\12x+16y+1=0\end{cases}$; $\begin{pmatrix}\boxed{1}\cdot 6-\boxed{2}\\ \boxed{1}\end{pmatrix}$ $\begin{array}{r}-\begin{array}{r}12x-18y-48=0\\12x+16y+1=0\end{array}\\ \hline -34y-49=0;\end{array}$

$$\begin{cases}34y=-49\\2x-3y=8\end{cases};\quad \begin{cases}y=-\frac{49}{34}\\x=\frac{125}{68}\end{cases};\quad \begin{cases}y=-1\frac{15}{34}\\x=1\frac{57}{68}\end{cases}.$$

в) $\begin{cases}3x+4y+2=0\\7x-5y+5=0\end{cases}$; $\begin{pmatrix}\boxed{1}\cdot 7-\boxed{2}\cdot 3\\ \boxed{1}\end{pmatrix}$ $\begin{array}{r}-\begin{array}{r}21x+28y+14=0\\21x-15y+15=0\end{array}\\ \hline 43y-1=0;\end{array}$

$$\begin{cases}43y=1\\3x+4y+2=0\end{cases};\quad \begin{cases}y=\frac{1}{43}\\x=-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{43}+2\right)\end{cases};\quad \begin{cases}y=\frac{1}{43}\\x=-\frac{30}{43}\end{cases}.$$

г) $\begin{cases}3x+4y+2=0\\12x+16y+1=0\end{cases}$; $(\boxed{1}\cdot 4-\boxed{2})$

$\begin{array}{r}-\begin{array}{r}12x+16y+8=0\\12x+16y+1=0\end{array}\\ \hline 7=0;\end{array}$ $\quad 7=0;\quad \varnothing.$

Ответ: $\left\{(-5;-6);\left(1\frac{57}{68};-1\frac{15}{34}\right);\left(-\frac{30}{43};\frac{1}{43}\right)\right\}$.

6. $\begin{cases}3|x-5|=y-4\\|7-y|=15-3x\end{cases}$.

Из первого уравнения следует, что $y-4\geqslant 0$, из второго уравнения следует, что $15-3x\geqslant 0$.

То есть $\begin{cases}y\geqslant 4\\x\leqslant 5\end{cases}$, тогда $|x-5|=5-x$.

Следовательно, первое уравнение имеет вид $3(5-x)=y-4$, то есть $y=19-3x$.

Тогда $|7-y|=|7-(19-3x)|=|3x-12|=3|x-4|$.

а) $\begin{cases} y = 19 - 3x \\ 12 - 3x = 15 - 3x \\ x < 4 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 19 - 3x \\ 12 = 15 \\ x < 4 \end{cases}$; $\varnothing$.

б) $\begin{cases} y = 19 - 3x \\ x \geqslant 4 \\ x \leqslant 5 \\ 3x - 12 = 15 - 3x \end{cases}$; $\begin{cases} y = 19 - 3x \\ x \geqslant 4 \\ x \leqslant 5 \\ 6x = 27 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 19 - 3x \\ x \geqslant 4 \\ x \leqslant 5 \\ x = 4{,}5 \end{cases}$;

$\begin{cases} y = 19 - 3 \cdot 4{,}5 \\ x \geqslant 4 \\ x \leqslant 5 \\ x = 4{,}5 \end{cases}$.

Ответ: (4,5; 5,5).

7. $\begin{cases} 4x - 7y + 8z = 0 \\ x - 2y - z = -3 \\ 6x + 2y + 3z = -9 \end{cases}$. $\begin{pmatrix} \boxed{1} - 4 \cdot \boxed{2} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} - 6 \cdot \boxed{2} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 0 + y + 12z = 12 \\ x - 2y - z = -3 \\ 0 + 14y + 9z = 9 \end{cases}$; $\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} - 14 \cdot \boxed{1} \end{pmatrix}$ $\begin{cases} y + 12z = 12 \\ x - 2y - z = -3 \\ 0 - 159z = -159 \end{cases}$;

$\begin{cases} y + 12 = 12 \\ x - 2y - 1 = -3 \\ z = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 0 \\ x - 2y = -2 \\ z = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \\ z = 1 \end{cases}$.

Ответ: (–2; 0; 1).

8. $\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y+z} + \dfrac{3}{2y-x-z} - \dfrac{1}{2z+y-3x} = 2 \\ \dfrac{4}{2x-y+z} - \dfrac{1}{2y-x-z} + \dfrac{1}{2z+y-3x} = 3 \\ \dfrac{2}{2x-y+z} + \dfrac{2}{2y-x-z} - \dfrac{3}{2z+y-3x} = -3 \end{cases}$ $D(C): \begin{cases} 2x - y + z \neq 0 \\ 2y - x - z \neq 0 \\ 2z + y - 3x \neq 0 \end{cases}$

Пусть $\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y+z} = a \\ \dfrac{1}{2y-x-z} = b \\ \dfrac{1}{2z+y-3x} = c \end{cases}$, тогда $\begin{cases} a+3b-c=2 \\ 2a-b+c=3 \\ a+2b-3c=-3 \end{cases}$; $\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 2\cdot\boxed{1}-\boxed{2} \\ \boxed{1}-\boxed{3} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a+3b-c=2 \\ 0+7b-3c=1 \\ 0+b+2c=5 \end{cases}; \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{2}-7\cdot\boxed{3} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a+3b-c=2 \\ 7b-3c=1 \\ -17c=-34 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a+3b=4 \\ 7b=7 \\ c=2 \end{cases}; \quad \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases};$$

Возвращаясь к переменным x, y, z, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y+z} = 1 \\ \dfrac{1}{2y-x-z} = 1 \\ \dfrac{1}{2z+y-3x} = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x-y+z=2 \\ -x+2y-z=1 \\ -6x+2y+4z=1 \end{cases}; \quad \begin{pmatrix} \boxed{1}+2\cdot\boxed{2} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3}+3\cdot\boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0+3y-z=4 \\ -x+2y-z=1 \\ 0-y+7z=7 \end{cases}; \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ 3\cdot\boxed{3}+\boxed{1} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 0+3y-z=4 \\ -x+2y-z=1 \\ 0+20z=25 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3y = \dfrac{21}{4} \\ -x+2y = \dfrac{9}{4} \\ z = \dfrac{5}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \dfrac{7}{4} \\ -x = \dfrac{9}{4} - \dfrac{14}{4} \\ z = \dfrac{5}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \dfrac{7}{4} \\ x = \dfrac{5}{4} \\ z = \dfrac{5}{4} \end{cases} \in D(C).$$

Ответ: $\left(\frac{5}{4}; \frac{7}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

Решение проверочной работы 2

1. $\begin{cases}16y^2-25x^2=8\\4y+5x=-2\end{cases}$; $\begin{cases}(4y-5x)(4y+5x)=8\\4y+5x=-2\end{cases}$;

$\begin{cases}4y-5x=-4\\4y+5x=-2\end{cases}$ $\boxed{1}\pm\boxed{2}$; $\begin{cases}y=-\dfrac{3}{4}\\x=\dfrac{1}{5}\end{cases}$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{5};-\dfrac{3}{4}\right)$.

2. $\begin{cases}(3x+y-5)^2=(x-2y-3)^2\\(2x+3y)^2=4\end{cases}$; $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}3x+y-5=x-2y-3\\3x+y-5=-x+2y+3\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}2x+3y=2\\2x+3y=-2\end{array}\right.\end{array}\right.$;

$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}2x+3y=2\\4x-y=8\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}2x+3y=2\\2x+3y=-2\end{array}\right.\end{array}\right.$.

а) $\begin{cases}2x+3y=2\\2x+3y=2\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x+3y=2\\2x+3y=-2\end{cases}$ $\varnothing$

в) $\begin{cases}4x-y=8\\2x+3y=2\end{cases}$ г) $\begin{cases}4x-y=8\\2x+3y=-2\end{cases}$

а) $\begin{cases}2x+3y=2\\2x+3y=2\end{cases}$

Очень любопытная система она равносильна уравнению $2x+3y=2$, а так как решением системы является множество всех пар $(x_0;y_0)$, обращающих систему уравнений в систему тождеств, а решением уравнения с двумя неизвестными является также множество всех пар $(x_0;y_0)$ обращающих уравнение в тождество, то в данном случае эти множества совпадают. Итак. Пусть $x=t$ (t – любое число), тогда из уравнения $2x+3y=2$ $y=\frac{2-2t}{3}$ значит решением данной системы является бесконечное множество решений (пар) вида $\left(t;\frac{2}{3}(1-t)\right)$, где t – любое число.

в) $\begin{cases}4x-y=8\\2x+3y=2\end{cases}\Bigg|\cdot 2$; $\begin{cases}4x-y=8\\4x+6y=4\end{cases}$ $(\boxed{1}-\boxed{2})$;

$$\begin{cases} x = \frac{13}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \end{cases} \quad \left(1\frac{6}{7}; -\frac{4}{7}\right).$$

Так как $2x + 3y = 2$, то этот случай можно не рассматривать, учитывая, что это частный случай системы **а)**, при $t = 1\frac{6}{7}$

г) $\begin{cases} 4x - y = 8 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases} \Bigg| \cdot 2$;

$$\begin{cases} 4x - y = 8 \\ 4x + 6y = -4 \end{cases} \boxed{1} - \boxed{2}; \quad \begin{cases} x = \frac{11}{7} \\ y = -\frac{12}{7} \end{cases} \quad \left(1\frac{4}{7}; -1\frac{5}{7}\right).$$

Ответ: $\left\{\left(1\frac{4}{7}; -1\frac{5}{7}\right); \left(t; \frac{2}{3}(1 - t)\right)\text{, где } t \text{ – любое}\right\}$.

3. $\begin{cases} 2|x + 5| = 3y - 4 \\ |3y - 2| = x + 4 \end{cases}$ $|a| \geqslant 0\ (\forall a)$; $\begin{cases} 3y - 4 \geqslant 0 \\ x + 4 \geqslant 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y \geqslant 1\frac{1}{3} \\ x \geqslant -4 \end{cases}$.

Тогда $\begin{matrix} |3y - 2| = 3y - 2 \\ |x + 5| = x + 5 \end{matrix}$,

система приобретет следующий вид:

$$\begin{cases} 2x + 10 = 3y - 4 \\ 3y - 2 = x + 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x - 3y = -14 \\ x - 3y = -6 \end{cases} \quad (\boxed{2} - \boxed{1});$$

$$\begin{cases} x = -8 \\ x - 3y = -6 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -8 \\ -8 - 3y = -6 \end{cases}.$$

$\begin{cases} x = -8 \geqslant -4 - \\ -8 - 3y = -6 \end{cases}$ ложь, значит решения нет.

Ответ: $\varnothing$.

4. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -8 \end{cases}$

Система уравнений по теореме обратной теореме Виета порождает уравнение $m^2 - 2m - 8 = 0$, тогда $(4; -2)$ и $(-2; 4)$ — решения системы.

Ответ: $\{(4; -2); (-2; 4)\}$.

5. $\begin{cases}2x-3y=1\\2x^2-9y^2+x+3y=-11\end{cases}$. $\begin{cases}x=\frac{3y+1}{2}\\2\left(\frac{3y+1}{2}\right)^2-9y^2+\frac{3y+1}{2}+3y=-11\end{cases}$;

$\begin{cases}x=\frac{3y+1}{2}\\3y^2-5y-8=0\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{3y+1}{2}\\\left[\begin{array}{l}y=-1\\y=\frac{8}{3}\end{array}\right.\end{cases}$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=-1\\x=-1\end{cases}\\\begin{cases}y=2\frac{2}{3}\\x=4{,}5\end{cases}\end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{(-1;-1);\left(4{,}5;2\frac{2}{3}\right)\right\}$.

6. $\begin{cases}xy^2-xy-3y+3=0\\\frac{x+4y-7}{y-1}=3\end{cases}$; $\begin{cases}xy(y-1)-3(y-1)=0\\y\neq1\\x+4y-7=3y-3\end{cases}$;

$\begin{cases}(y-1)(xy-3)=0\\y\neq1\\x=4-y\end{cases}$; $\begin{cases}xy-3=0\\x=4-y\\y\neq1\end{cases}$;

$\begin{cases}(4-y)y-3=0\\x=4-y\\y\neq1\end{cases}$; $\begin{cases}y^2-4y+3=0\\x=4-y\\y\neq1\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=1\\y=3\end{array}\right.\\x=4-y\\y\neq1\end{cases}$ $(1;3)$.

Ответ: $\{(1;3)\}$.

7. $\begin{cases}\frac{x}{3y}+\frac{3y}{x}=\frac{10}{3}\\x^2-9y^2=8\end{cases}$. Пусть $\frac{x}{3y}=t$, тогда $t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3}$;

$3t^2-10t+3=0$; $\left[\begin{array}{l}t=3\\t=\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

а) $t=3$. $\begin{cases}\frac{x}{3y}=3\\x^2-9y^2=8\end{cases}$; $\begin{cases}x=9y\\81y^2-9y^2=8\end{cases}$;

$\begin{cases}x=9y\\y^2=\frac{1}{9}\end{cases}$; $\begin{cases}x=9y\\\left[\begin{array}{l}y=\frac{1}{3}\\y=-\frac{1}{3}\end{array}\right.\end{cases}$; $\begin{array}{l}\left(3;\frac{1}{3}\right)\\\left(-3;-\frac{1}{3}\right)\end{array}$.

б) $t=\frac{1}{3}$. $\begin{cases}\frac{x}{3y}=\frac{1}{3}\\ x^2-9y^2=8\end{cases}$; $\begin{cases}x=y\\ y^2-9y^2=8\end{cases}$; $\begin{cases}x=y\\ y^2=-1\end{cases}$ $\varnothing$

Ответ: $\left\{\left(3;\frac{1}{3}\right);\left(-3;-\frac{1}{3}\right)\right\}$.

8. $\begin{cases}\frac{2x+3y}{2x-3y}+\frac{2x-3y}{2x+3y}=\frac{13}{6}\\ 6xy=5\end{cases}$.

Пусть $\frac{2x+3y}{2x-3y}=t$, тогда первое уравнение примет вид:

$t+\frac{1}{t}=\frac{13}{6}$; $6t^2-13t+6=0$; $\left[\begin{array}{l}t=\frac{3}{2}\\ t=\frac{2}{3}\end{array}\right.$.

а) $t=\frac{3}{2}$.

$\begin{cases}\frac{2x+3y}{2x-3y}=\frac{3}{2}\\ 6xy=5\end{cases}$; $\begin{cases}4x+6y=6x-9y\\ 6xy=5\end{cases}$; $\begin{cases}2x=15y\\ 3\cdot 15y^2=5\end{cases}$;

$\begin{cases}2x=15y\\ y^2=\frac{1}{9}\end{cases}$; $\begin{cases}2x=15y\\ \left[\begin{array}{l}y=\frac{1}{3}\\ y=-\frac{1}{3}\end{array}\right.\end{cases}$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\ y=\frac{1}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\frac{5}{2}\\ y=-\frac{1}{3}\end{cases}\end{array}\right.$.

б) $t=\frac{2}{3}$.

$\begin{cases}\frac{2x+3y}{2x-3y}=\frac{2}{3}\\ 6xy=5\end{cases}$; $\begin{cases}6x+9y=4x-6y\\ 6xy=5\end{cases}$; $\begin{cases}2x=-15y\\ 3(-15)y^2=5\end{cases}$;

$\begin{cases}2x=-15y\\ -9y^2=1\end{cases}$ $\varnothing$.

Ответ: $\left\{\left(2{,}5;\frac{1}{3}\right);\left(-2{,}5;-\frac{1}{3}\right)\right\}$.

9. $\begin{cases}xy-2(x+y)=2\\ xy+x+y=29\end{cases}$ $\left(\begin{array}{l}\boxed{1}-\boxed{2}\\ \boxed{2}\cdot 2+\boxed{1}\end{array}\right)$; $\begin{cases}-3(x+y)=-27\\ 3xy=60\end{cases}$;

$\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = 20 \end{cases}$ $\quad n^2-9n+20=0 \quad (5; 4)$ и $(4; 5)$.

Ответ: $\{(5; 4); (4; 5)\}$.

10. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 49 \\ x^2 - xy + y^2 = 19 \end{cases} \begin{pmatrix} (\boxed{1} + \boxed{2}) : 2 \\ \boxed{1} - \boxed{2} \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ 2xy = 30 \end{cases}$ $(\boxed{1} \pm \boxed{2})$;

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 64 \\ (x - y)^2 = 4 \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases} & (5; 3) \\ \begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = -2 \end{cases} & (3; 5) \\ \begin{cases} x + y = -8 \\ x - y = 2 \end{cases} & (-3; -5) \\ \begin{cases} x + y = -8 \\ x - y = -2 \end{cases} & (-5; -3) \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(5; 3); (3; 5); (-3; -5); (-5; -3)\}$.

11. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x^2y + y^2x = -2 \end{cases} \Big| \cdot 3$; $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ 3x^2y + 3xy^2 = -6 \end{cases}$ $(\boxed{1} + \boxed{2})$;

$\begin{cases} (x + y)^3 = 1 \\ xy(x + y) = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy \cdot 1 = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$;

порождает $\quad n^2 - n - 2 = 0 \quad (2; -1)$ и $(-1; 2)$

Ответ: $\{(2; -1); (-1; 2)\}$.

12. $\begin{cases} x^3 + (2y + 1)x - 2 = 0 \\ x^3 + (y - 3)x + 2 = 0 \end{cases}$ $(\boxed{1} - \boxed{2})$ $\begin{cases} (2y + 1)x - 2 - (y - 3)x - 2 = 0 \\ x^3 + (y - 3)x + 2 = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} xy = 4 - 4x \\ x^3 + xy - 3x + 2 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} xy = 4 - 4x \\ x^3 + 4 - 4x - 3x + 2 = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} xy = 4 - 4x \\ x^3 - 7x + 6 = 0 \end{cases}$.

Пусть $f(x) = x^3 - 7x + 6$; $\quad f(1) = 1 - 7 + 6 = 0$.

Тогда

$$\begin{array}{r|l} \underline{-\begin{array}{l}x^3-7x+6\\ x^3-x^2\end{array}} & \begin{array}{l}x-1\\ \hline x^2+x-6\end{array}\\ \underline{-\begin{array}{l}x^2-7x\\ x^2-x\end{array}} & \\ \underline{-\begin{array}{l}-6x+6\\ -6x+6\end{array}} & \end{array}$$

$$\begin{cases} xy = 4(1-x) \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases}.$$

а) $\begin{cases} x = 1 \\ xy = 4(1-x) \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$. б) $\begin{cases} x = -3 \\ xy = 4(1-x) \end{cases}$; $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5\frac{1}{3} \end{cases}$.

в) $\begin{cases} x = 2 \\ xy = 4(1-x) \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$.

Ответ: $\left\{(1;\ 0);\ \left(-3;\ -5\frac{1}{3}\right);\ (2;\ -2)\right\}$.

13. $\begin{cases} 3x + 2y + \frac{x}{x+y} = 5{,}5 \\ x + 3y - \frac{2x}{x+y} = 3 \end{cases} \Big| \cdot 2$; $\begin{cases} 6x + 4y + \frac{2x}{x+y} = 11 \\ x + 3y - \frac{2x}{x+y} = 3 \end{cases}$ $(\boxed{1} + \boxed{2})$

$\begin{cases} 7x + 7y = 14 \\ x + 3y - \frac{2x}{x+y} = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y - \frac{2x}{2} = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Ответ: $(1;\ 1)$.

14. $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 2 \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = -22 \end{cases}$ $(\boxed{1} + \boxed{2})$.

$\begin{cases} 10(x-y) = -20 \\ 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} y = x + 2 \\ 2x^2 - 5x(x+2) + 3x - 2(x+2) = 2 \end{cases}$;

$\begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = x + 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases}$.

Ответ: $\{(-1;\ 1);\ (-2;\ 0)\}$.

15. $\begin{cases} x + xy + xy^2 = 6 \\ x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 12 \end{cases}.$

Так как $x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = x^2 + 2x^2y^2 + x^2y^4 - x^2y^2 =$
$= (x + xy^2)^2 - (xy)^2 = (x + xy^2 + xy)(x + xy^2 - xy)$, то

$\begin{cases} x + xy + xy^2 = 6 \\ (x + xy + xy^2)(x - xy + xy^2) = 12 \end{cases}$ $(\boxed{2} : \boxed{1})$;

$\begin{cases} x + xy + xy^2 = 6 \\ x - xy + xy^2 = 2 \end{cases}$ $\left((\boxed{1} \pm \boxed{2}) : 2\right)$; $\begin{cases} x + xy^2 = 4 \\ xy = 2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x = \dfrac{4}{1 + y^2} \\ x = \dfrac{2}{y} \end{cases}.$

Тогда $\dfrac{2}{y} = \dfrac{4}{1 + y^2}$; $1 + y^2 = 2y$; $(y - 1)^2 = 0$; $y = 1$; $\begin{cases} y = 1 \\ x = \dfrac{2}{y} \end{cases}.$

Ответ: (2; 1).

16. $\begin{cases} (x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1) = 3 \\ (1 - x)(1 - y) = 6 \end{cases}.$

$\begin{cases} x^2y^2 + xy^2 + y^2 + yx^2 + xy + y + x^2 + x + 1 = 3 \\ xy - (x + y) + 1 = 6 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2y^2 + xy(x + y) + x^2 + y^2 + xy + x + y = 2 \\ xy - (x + y) + 1 = 6 \end{cases}.$

Пусть $\begin{cases} x + y = t \\ xy = z \end{cases}.$

Учтем, что $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$, тогда:

$\begin{cases} z^2 + zt + t^2 - 2z + z + t = 2 \\ z - t = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} z^2 + tz + t^2 - z + t = 2 \\ z = t + 5 \end{cases}$;

$$\begin{cases}(t+5)^2+t(t+5)+t^2-(t+5)+t=2\\ z=t+5\end{cases};$$

$$\begin{cases}3t^2+15t+18=0\\ z=t+5\end{cases}; \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=-3\\ t=-2\end{array}\right.\\ z=t+5\end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t=-3\\ z=2\end{cases}\\ \begin{cases}t=-2\\ z=3\end{cases}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=-3\\ xy=2\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-2\\ xy=3\end{cases}\end{array}\right..$$

По теореме, обратной теореме Виета, получим:

$m^2+3m+2=0$, то есть $\left[\begin{array}{ll}x=-1; & y=-2\\ x=-2; & y=-1\end{array}\right.$;

$n^2+2n+3=0$; $\quad D<0$.

Ответ: $\{(-1;\ -2);\ (-2;\ -1)\}$.

17. $\begin{cases}xy-\frac{x}{y}=2\\ xy-\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\end{cases}$. $\quad (\boxed{1}-\boxed{2})$ $\begin{cases}\frac{y}{x}-\frac{x}{y}=\frac{3}{2}\\ xy-\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\end{cases}$.

Пусть $\frac{y}{x}=t$, $\quad 2t^2-3t-2=0$; $t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm5}{4}$; $\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

а) $t=2$. $\quad \begin{cases}\frac{y}{x}=2\\ xy-\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\end{cases}$; $\quad \begin{cases}y=2x\\ x\cdot 2x-\frac{2x}{x}=\frac{1}{2}\end{cases}$;

$$\begin{cases}y=2x\\ 2x^2=\frac{5}{2}\end{cases}; \quad \begin{cases}y=2x\\ x^2=\frac{5}{4}\end{cases}; \quad \begin{array}{l}\left(\frac{\sqrt5}{2};\ \sqrt5\right)\\ \left(-\frac{\sqrt5}{2};\ -\sqrt5\right)\end{array}.$$

б) $t=-\frac{1}{2}$. $\quad \begin{cases}\frac{y}{x}=-\frac{1}{2}\\ xy-\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\end{cases}$; $\quad \begin{cases}x=-2y\\ y(-2y)-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\end{cases}$; $\quad \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$;

$\varnothing$ $(xy\neq 0)$.

Ответ: $\left\{\left(\frac{\sqrt5}{2};\ \sqrt5\right);\ \left(-\frac{\sqrt5}{2};\ -\sqrt5\right)\right\}$.

18. $\begin{cases} x^3 - x = y^3 - y \\ 2x^2 + 3y^2 = 5xy \end{cases}.$

$\begin{cases} x^3 - y^3 + y - x = 0 \\ 2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$; $x_{1,2} = \frac{5y \pm \sqrt{25y^2 - 24y^2}}{4}$;

$\begin{cases} (y-x)(x^2 + xy + y^2 - 1) = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = \frac{3}{2}y \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2 - 1) = 0 \\ (x-y)\left(x - \frac{3}{2}y\right) = 0 \end{cases}.$

а) $\begin{cases} x = y \\ x = y \end{cases}$ $(\forall t)$; $(t;\ t)$.

б) $\begin{cases} x = y \\ x = \frac{3}{2}y \end{cases}$ $(0;\ 0)$.

в) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \\ x = y \end{cases}$; $\begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x = y \end{cases}$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

г) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \\ x = \frac{3}{2}y \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{9}{4}y^2 + \frac{3}{2}y^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x = \frac{3}{2}y \end{cases}$;

$\begin{cases} y^2 = \frac{4}{19} \\ x = \frac{3}{2}y \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = \frac{2\sqrt{19}}{19} \\ y = -\frac{2\sqrt{19}}{19} \end{array}\right. \\ x = \frac{3}{2}y \end{cases}$ $\left(3\frac{\sqrt{19}}{19};\ 2\frac{\sqrt{19}}{19}\right)$ $\left(-3\frac{\sqrt{19}}{19};\ -2\frac{\sqrt{19}}{19}\right)$.

Примечание: $(0;\ 0)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ — частные случаи $(t;\ t)$ $\forall t$.

Ответ: $\left\{\left(3\frac{\sqrt{19}}{19};\ 2\frac{\sqrt{19}}{19}\right);\ \left(-3\frac{\sqrt{19}}{19};\ -2\frac{\sqrt{19}}{19}\right);\ (t;\ t)\ (\forall t)\right\}$.

Решение проверочной работы 3

1. $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29 \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43 \end{cases}.$

Первый способ решения

Очевидно, что система однородная. Пусть $x = ty$, тогда:

$$\begin{cases} 5t^2y^2 - 6ty^2 + 5y^2 = 29 \\ 7t^2y^2 - 8ty^2 + 7y^2 = 43 \end{cases}; \quad \begin{cases} y^2 = \dfrac{29}{5t^2 - 6t + 5} \\ y^2 = \dfrac{43}{7t^2 - 8t + 7} \end{cases};$$

$$\frac{29}{5t^2 - 6t + 5} = \frac{43}{7t^2 - 8t + 7};$$

$$203t^2 - 232t + 203 = 215t^2 - 258t + 215;$$

$$12t^2 - 26t + 12 = 0; \quad 6t^2 - 13t + 6 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12}; \quad \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{2} \\ t = \dfrac{2}{3} \end{array}\right..$$

а) $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y \\ y^2 = \dfrac{29}{5 \cdot \frac{9}{4} - 6 \cdot \frac{3}{2} + 5} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y \\ y^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (3;\ 2) \\ (-3;\ -2) \end{array}.$

б) $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}y \\ y^2 = \dfrac{29}{5 \cdot \frac{4}{9} - 6 \cdot \frac{2}{3} + 5} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}y \\ y^2 = 9 \end{cases}; \quad \begin{array}{l} (2;\ 3) \\ (-2;\ -3) \end{array}.$

Второй способ решения

Данная система (это можно доказать) — система симметричных уравнений:

Так как $\begin{cases} 5(x^2 + y^2) - 6xy = 29 \\ 7(x^2 + y^2) - 8xy = 43 \end{cases}$

и $\begin{cases} 5\left((x + y)^2 - 2xy\right) - 6xy = 29 \\ 7\left((x + y)^2 - 2xy\right) - 8xy = 43 \end{cases}$, то пусть $\begin{cases} x + y = t \\ xy = z \end{cases}.$

$$\begin{cases} 5t^2 - 16z = 29 \\ 7t^2 - 22z = 43 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} \cdot 7 \\ \boxed{2} \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 35t^2 - 112z = 203 \\ 35t^2 - 110z = 215 \end{cases} \quad \left(\left(\boxed{2} - \boxed{1}\right) : 2 \right)$$

$z = 6.$

Тогда $\begin{cases} 5t^2 - 16z = 29 \\ z = 6 \end{cases}$; $\begin{cases} t^2 = 25 \\ z = 6 \end{cases}$;

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = -5 \end{array}\right. ; \\ z = 6 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 6 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Первая система порождает $m^2 - 5m + 6 = 0$, то есть $(2; 3)$; $(3; 2)$ — решения системы.

Вторая система порождает $n^2 + 5n + 6 = 0$, то есть $(-2; -3)$; $(-3; -2)$ — решения системы.

Третий способ решения

Используем метод алгебраического сложения:

$$\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29 \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} \cdot 7 \\ \boxed{2} \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 35x^2 - 42xy + 35y^2 = 203 \\ 35x^2 - 40xy + 35y^2 = 215 \end{cases} \quad \left(\boxed{2} - \boxed{1}\right) \qquad 2xy = 12.$$

$$\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29 \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} \cdot 4 \\ \boxed{2} \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 20x^2 - 24xy + 20y^2 = 116 \\ 21x^2 - 24xy + 21y^2 = 129 \end{cases} \quad \left(\boxed{2} - \boxed{1}\right)$$

$x^2 + y^2 = 13.$

То есть $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ 2xy=12 \end{cases}$ $(\boxed{1}\pm\boxed{2})$ $\begin{cases} (x+y)^2=25 \\ (x-y)^2=1 \end{cases}$.

а) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ (3; 2).

б) $\begin{cases} x+y=-5 \\ x-y=1 \end{cases}$ (–2; –3).

в) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$ (2; 3).

г) $\begin{cases} x+y=-5 \\ x-y=-1 \end{cases}$ (–3; –2).

Ответ: $\{(3;2);(2;3);(-3;-2);(-2;-3)\}$.

2. $\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} x+y=t \\ xy=z \end{cases}$

и, так как $x^3+y^3=(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)$,

то $\begin{cases} tz=30 \\ t(t^2-3z)=35 \end{cases}$; $\begin{cases} tz=30 \\ t^3-3tz=35 \end{cases}$;

$\begin{cases} tz=30 \\ t^3=125 \end{cases}$; $\begin{cases} tz=30 \\ t=5 \end{cases}$; $\begin{cases} z=6 \\ t=5 \end{cases}$.

Возвращаясь к переменным x и y, получаем:

$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$.

Ответ: $\{(2;3);(3;2)\}$.

3. $\begin{cases} x^3y+xy^3=\frac{10}{9}(x+y)^2 \\ x^4y+xy^4=\frac{2}{3}(x+y)^3 \end{cases}$; $\begin{cases} xy(x^2+y^2)=\frac{10}{9}(x+y)^2 \\ xy(x^3+y^3)=\frac{2}{3}(x+y)^3 \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} x+y=t \\ xy=z \end{cases}$, тогда $\begin{cases} z(t^2-2z)=\frac{10}{9}t^2 \\ z(t^3-3tz)=\frac{2}{3}t^3 \end{cases}$.

а) Пусть $t \neq 0$.

$\begin{cases} z(t^2-2z)=\frac{10}{9}t^2 \\ z(t^3-3tz)=\frac{2}{3}t^3 \end{cases}$; $\begin{cases} zt^2-2z^2=\frac{10}{9}t^2 \\ zt^2-3z^2=\frac{2}{3}t^2 \end{cases}$ $(\boxed{1}-\boxed{2})$

$z^2=\frac{4}{9}t^2$;

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} z=\frac{2}{3}t \\ z=-\frac{2}{3}t \end{array}\right. \\ zt^2-3z^2=\frac{2}{3}t^2 \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{2}{3}t\cdot t^2-3\cdot\frac{4}{9}t^2=\frac{2}{3}t^2 \\ z=\frac{2}{3}t \end{cases} \\ \begin{cases} z=-\frac{2}{3}t \\ -\frac{2}{3}t\cdot t^2-3\cdot\frac{4}{9}t^2=\frac{2}{3}t^2 \end{cases} \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6t^2(t-3)=0 \\ z=\frac{2}{3}t \end{cases} \\ \begin{cases} z=-\frac{2}{3}t \\ 6t^2(t+3)=0 \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=3 \\ z=2 \end{cases} \\ \begin{cases} t=-3 \\ z=2 \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=2 \end{cases} \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} (1;\ 2);\ (2;\ 1) \\ \\ (-1;\ -2);\ (-2;\ -1). \end{array}$

б) Пусть $t=0$, тогда $(0;\ 0)$ — решение системы.

Ответ: $\{(1;\ 2);\ (2;\ 1);\ (-1;\ -2);\ (-2;\ -1);\ (0;\ 0)\}$.

4. $\begin{cases} \dfrac{2x^2-xy}{y^2}+\dfrac{3y^2}{2x^2-xy}=4 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$.

Пусть $\dfrac{2x^2-xy}{y^2}=t$, тогда первое уравнение примет вид:

$t+\frac{3}{t}=4$; $t^2-4t+3=0$; $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$.

а) $\begin{cases} \dfrac{2x^2-xy}{y^2}=1 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$, то есть $\begin{cases} 2x^2-xy-y^2=0 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$;

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=y\\ x=-\frac{y}{2}\end{array}\right.\\ x^2+y^2=13\end{cases};\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y\\ y^2=6{,}5\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\frac{y}{2}\\ y^2=\frac{52}{5}\end{cases}\end{array}\right..$$

Тогда $\left(\sqrt{6{,}5};\ \sqrt{6{,}5}\right)$; $\left(-\sqrt{6{,}5};\ -\sqrt{6{,}5}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{10{,}4};\ \sqrt{10{,}4}\right)$; $\left(\frac{1}{2}\sqrt{10{,}4};\ -\sqrt{10{,}4}\right)$ — решения системы.

б) $\begin{cases}\dfrac{2x^2-xy}{y^2}=3\\ x^2+y^2=13\end{cases}$, то есть $\begin{cases}2x^2-xy-3y^2=0\\ x^2+y^2=13\end{cases}$;

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-y\\ x=+\frac{3}{2}y\end{array}\right.\\ x^2+y^2=13\end{cases};\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-y\\ x^2+y^2=13\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{3}{2}y\\ x^2+y^2=13\end{cases}\end{array}\right..$$

$\left(-\sqrt{6{,}5};\ \sqrt{6{,}5}\right)$; $\left(\sqrt{6{,}5};\ -\sqrt{6{,}5}\right)$; $(3;\ 2)$; $(-3;\ -2)$ — решения системы.

Ответ: $\left\{\left(\sqrt{6{,}5};\ \sqrt{6{,}5}\right); \left(-\sqrt{6{,}5};\ -\sqrt{6{,}5}\right); \left(-\frac{1}{2}\sqrt{10{,}4};\ \sqrt{10{,}4}\right); \left(\frac{1}{2}\sqrt{10{,}4};\ -\sqrt{10{,}4}\right); \left(-\sqrt{6{,}5};\ \sqrt{6{,}5}\right); \left(\sqrt{6{,}5};\ -\sqrt{6{,}5}\right); (3;\ 2); (-3;\ -2)\right\}$.

5. $\begin{cases}\dfrac{y^2}{x^2-xy}+\dfrac{x^2}{y^2-xy}=1\\ x^3-y^3=2\end{cases}$.

Преобразуем первое уравнение к виду $\dfrac{y^2}{x^2\left(1-\frac{y}{x}\right)}+\dfrac{x^2}{y^2\left(1-\frac{x}{y}\right)}=1$.

Пусть $\frac{x}{y}=t$, тогда $\dfrac{1}{t^2\left(1-\frac{1}{t}\right)}+\dfrac{t^2}{1-t}=1$; $\dfrac{1}{t(t-1)}-\dfrac{t^2}{t-1}=1$.

Если $\begin{cases}t\neq 0\\ t\neq 1\end{cases}$, то $1-t^3=t(t-1)$; $(1-t)\left(1+t+t^2+t\right)=0$;

$(1-t)(t+1)^2=0$, то есть $t=-1$.

Тогда $\begin{cases} x=-y \\ x^3-y^3=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-y \\ y^3=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-y \\ y=-1 \end{cases}$.

Ответ: (1; –1).

6. $\begin{cases} (x^2-x)(y^2-y)=72 \\ (x+1)(y+1)=20 \end{cases}$.

Очевидно, что это — система симметричных уравнений.

$\begin{cases} x^2y^2-xy^2-yx^2+xy=72 \\ xy+x+y+1=20 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2y^2-xy(x+y)+xy=72 \\ xy+x+y=19 \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} x+y=t \\ xy=z \end{cases}$, тогда $\begin{cases} z^2-tz+z=72 \\ t+z=19 \end{cases}$;

$\begin{cases} z^2-(19-z)z+z=72 \\ t=19-z \end{cases}$; $\begin{cases} 2z^2-18z-72=0 \\ t=19-z \end{cases}$; $z^2-9z-36=0$;

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} z=12 \\ z=-3 \end{array}\right. \\ t=19-z \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} z=12 \\ t=7 \end{cases} \\ \begin{cases} z=-3 \\ t=22 \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=12 \\ x+y=7 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-3 \\ x+y=22 \end{cases} \end{array}\right.$; $\begin{array}{l} (4;\ 3);\ (3;\ 4) \\ \\ \end{array}$.

Вторая система порождает $n^2-22n-3=0$;

$n_{1,\,2}=11\pm2\sqrt{31}$.

Ответ: $\left\{(3;\ 4);\ (4;\ 3);\ \left(11+2\sqrt{31};\ 11-2\sqrt{31}\right);\right.$
$\left.\left(11-2\sqrt{31};\ 11+2\sqrt{31}\right)\right\}$.

7. $\begin{cases} 2x^4=3x^2y+20 \\ 3y^2=2x^2y-5 \end{cases}$.

Умножим первое уравнение на второе уравнение:

$6x^4y^2=6x^4y^2+25x^2y-100$; $x^2y=4$.

Тогда $\begin{cases} 2x^4=3\cdot4+20 \\ 3y^2=2\cdot4-5 \end{cases}$; $\begin{cases} x^4=16 \\ y^2=1 \end{cases}$.

а) $\begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ $\begin{matrix} (2;\,1) \\ (-2;\,1) \end{matrix}$.

б) $\begin{cases} x^2 = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ $\begin{matrix} (2;\,-1) \\ (-2;\,-1) \end{matrix}$.

Ответ: $\{(2;\,1);\,(-2;\,1);\,(2;\,-1);\,(-2;\,-1)\}$.

8. $\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0 \\ 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0 \end{cases}$.

Преобразуем первое уравнение.

$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 6y + 9) + 2(x - y) + 1 = 0;$

$(x - y)^2 + (y - 3)^2 + 2(x - y) + 1 = 0;$

$(x - y + 1)^2 + (y - 3)^2 = 0$, то есть $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$.

Остается проверить, подходит ли эта пара для второго уравнения.

$2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 13 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 7 = 0.$

Ответ: $(2;\,3)$.

Решение зачетной карточки 1

1. $\begin{cases} 3x+2y-\frac{x}{x+y}=5{,}5 \\ x+3y+\frac{2x}{x+y}=3 \end{cases}$ $\boxed{1}\cdot 2$ $\begin{cases} 6x+4y-\frac{2x}{x+y}=11 \\ x+3y+\frac{2x}{x+y}=3 \end{cases}$ $(\boxed{1}+\boxed{2})$

$\begin{cases} 7(x+y)=14 \\ x+3y+\frac{2x}{x+y}=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=2 \\ x+3y+x=3 \end{cases}$;

$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$ $\boxed{1}\cdot 2$ $\begin{cases} 2x+2y=4 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$ $\boxed{2}-\boxed{1}$

$\begin{cases} y=-1 \\ x=3 \end{cases}$ $(3;\ -1)$.

Ответ: $(3;\ -1)$.

2. $\begin{cases} 3\sqrt[3]{xy}-2\sqrt{xy}=1 \\ x^2+y^2-x-y+3xy=3 \end{cases}$.

Пусть $\sqrt[6]{xy}=t\,(t\ge 0)$, тогда $\boxed{1}$ имеет вид: $3t^2-2t^3=1$, то есть $2t^3-3t^2+1=0$.

$f(t)=2t^3-3t^2+1$; $f(1)=0$, тогда

$$\begin{array}{r|l} 2t^3-3t^2+1 & t-1 \\ \underline{2t^3-2t^2} & 2t^2-t-1 \\ -t^2+1 & \\ \underline{-t^2+t} & \\ -t+1 & \\ \underline{-t+1} & \end{array}$$

$2t^2-t-1=0$; $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{1}{2}\notin[0;\ \infty) \end{array}\right.$.

Итак:

$$\begin{cases} \sqrt[6]{xy} = 1 \\ x^2 + y^2 - x - y + 3xy = 3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} xy = 1 \\ (x+y)^2 - (x+y) + xy = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} xy = 1 \\ (x+y)^2 - (x+y) - 2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} xy = 1 \\ \left[\begin{array}{l} x + y = 2 \\ x + y = -1 \end{array}\right. \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}; \quad m^2 - 2m + 1 = 0; \quad (1; 1); \\ \begin{cases} xy = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}; \quad n^2 + n + 1 = 0; \quad D < 0. \end{array}\right.$$

Ответ: (1; 1).

3. $$\begin{cases} \left(x + y\sqrt{x} + y^2\right)\sqrt{x + y^2} = 65 \\ \left(x - y\sqrt{x} + y^2\right)\sqrt{x + y^2} = 185 \end{cases}. \quad \left(\begin{array}{c} \boxed{1} + \boxed{2} \\ \boxed{1} \cdot \boxed{2} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \sqrt{x + y^2}\left(x + y^2\right) = 125 \\ \left[\left(x + y^2\right)^2 - y^2x\right]\left(x + y^2\right) = 5^2 \cdot 13 \cdot 37 \end{cases};$$

$$\left(\sqrt{a} \cdot a = \left(\sqrt{a}\right)^3\right); \quad \begin{cases} \sqrt{x + y^2} = 5 \\ \left(25^2 - y^2x\right) \cdot 25 = 5^2 \cdot 13 \cdot 37 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + y^2 = 25 \\ 625 - y^2x = 13 \cdot 37 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + y^2 = 25 \\ y^2x = 144 \end{cases};$$

$$m^2 - 25m + 144 = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 9 \\ y^2 = 16 \end{cases} \quad (9; 4); \quad (9; -4) \\ \begin{cases} x = 16 \\ y^2 = 9 \end{cases} \quad (16; 3); \quad (16; -3). \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(9; 4); (9; -4); (16; 3); (16; -3)\}$.

4. $\begin{cases} x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 3 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 3 \end{cases}$. $\begin{pmatrix} \boxed{1} \cdot 2 \\ \boxed{2} \cdot 2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 = 6 \\ 2x^4 + 2y^4 + 2z^4 = 6 \end{cases}$; $\left(\boxed{2} - \boxed{1}\right)$

$(x^2 - y^2)^2 + (x^2 - z^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 = 0,$

что возможно только если $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2 = z^2 \\ z^2 = y^2 \end{cases}$.

Очевидно, что тогда только 8 троек — есть решение.

Ответ: $\{(1; 1; 1); (1; -1; 1); (1; 1; -1); (1; -1; -1); (-1; 1; 1);$ $(-1; 1; -1); (-1; -1; 1); (-1; -1; -1)\}$.

Решение зачетной карточки 2

1. $\begin{cases} 4y^2 - 3xy = 2x - y \\ 5x^2 - 3y^2 = 4x - 2y \end{cases}$; $(\boxed{1} \cdot 2)$ $\begin{cases} 8y^2 - 6xy = 4x - 2y \\ 5x^2 - 3y^2 = 4x - 2y \end{cases}$; $(\boxed{1} - \boxed{2})$

$$\begin{cases} 11y^2 - 6xy - 5x^2 = 0 \\ 5x^2 - 3y^2 = 4x - 2y \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -\frac{11}{5}y \end{array}\right. \\ 5x^2 - 3y^2 = 4x - 2y \end{cases};$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ 5y^2 - 3y^2 = 4y - 2y \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{11}{5}y \\ 5 \cdot \frac{121}{25}y^2 - 3y^2 = -\frac{44}{5}y - 2y \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y & (0;\ 0) \\ 2y(y-1) = 0 & (1;\ 1) \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{11}{5}y \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -\frac{27}{53} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\frac{27}{53} \\ x = \frac{297}{265} \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{(0;\ 0);\ (1;\ 1);\ \left(1\frac{32}{265};\ -\frac{27}{53}\right)\right\}$.

2. $\begin{cases} \sqrt[3]{x + 2y} + \sqrt[3]{x - y + 2} = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} \sqrt[3]{x + 2y} = a \\ \sqrt[3]{x - y + 2} = b \end{cases}$;

$$\begin{cases} x + 2y = a^3 \\ x - y + 2 = b^3 \end{cases} \quad (\boxed{1} + \boxed{2})$$

$$2x + y + 2 = a^3 + b^3.$$

Тогда система имеет вид:

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a^3+b^3=9 \end{cases};\quad \begin{cases} a+b=3 \\ (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=9 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a^2-ab+b^2=3 \end{cases};\quad \begin{cases} a+b=3 \\ (a+b)^2-3ab=3 \end{cases};\quad \begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases};$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}=1 \\ \sqrt[3]{x-y+2}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}=2 \\ \sqrt[3]{x-y+2}=1 \end{cases} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2y=1 \\ x-y+2=8 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2y=8 \\ x-y+2=1 \end{cases} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{13}{3} \\ y=-\frac{5}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{(2;\,3);\,\left(4\frac{1}{3};\,-1\frac{2}{3}\right)\right\}$.

3. $$\begin{cases} \sqrt{2x+y}-\sqrt[3]{2x-y}=6 \\ \sqrt[6]{(2x+y)^3(2x-y)^2}=8 \end{cases}.$$

Здесь важно помнить, что $\sqrt[3]{a}=\begin{cases} \sqrt[6]{a^2};\ a\geqslant 0 \\ -\sqrt[6]{a^2};\ a<0 \end{cases}.$

а) $\begin{cases} 2x-y\geqslant 0 \\ 2x+y\geqslant 0 \end{cases}$, тогда система имеет вид:

$$\begin{cases} \sqrt[6]{(2x+y)^3}-\sqrt[6]{(2x-y)^2}=6 \\ \sqrt[6]{(2x+y)^3}\cdot\sqrt[6]{(2x-y)^2}=8 \end{cases}.$$

Пусть $\begin{cases} \sqrt[6]{2x+y}=t\ \ (t\geqslant 0) \\ \sqrt[6]{2x-y}=z\ \ (z\geqslant 0) \end{cases}$, тогда $\begin{cases} t^3-z^2=6 \\ t^3z^2=8 \end{cases};$

$$\begin{cases} t^3=6+z^2 \\ \left(6+z^2\right)z^2=8 \end{cases};\quad z^4+6z^2-8=0;\quad \left(z^2\right)_{1,\,2}=-3\pm\sqrt{17};$$

$z^2=-3-\sqrt{17}\notin[0;\,\infty)$.

Тогда $\begin{cases} z^2 = -3+\sqrt{17} \\ t^3 = 3+\sqrt{17} \end{cases}$; $\begin{cases} z^6 = \left(-3+\sqrt{17}\right)^3 \\ t^6 = \left(3+\sqrt{17}\right)^2 \end{cases}$;

$$\begin{cases} 2x+y = \left(3+\sqrt{17}\right)^2 \\ 2x-y = (-3+17)^3 \end{cases} \quad (\boxed{1} \pm \boxed{2})$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\left(3+\sqrt{17}\right)^2+\left(-3+\sqrt{17}\right)^3}{4} \\ y = \dfrac{\left(3+\sqrt{17}\right)^2-\left(-3+\sqrt{17}\right)^3}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = -38{,}5+12{,}5\sqrt{17} \\ y = 103-19\sqrt{17} \end{cases}.$$

б) $\begin{cases} 2x-y<0 \\ 2x+y \geqslant 0 \end{cases}$, тогда система имеет вид:

$$\begin{cases} \sqrt[6]{(2x+y)^3}+\sqrt[6]{(2x-y)^2} = 6 \\ \sqrt[6]{(2x+y)^3}\cdot\sqrt[6]{(2x-y)^2} = 8 \end{cases}.$$

Пусть $\begin{cases} \sqrt[6]{2x+y} = a \\ \sqrt[6]{y-2x} = b \end{cases}$;

$$\begin{cases} a^6 = 2x+y \\ b^6 = -(2x-y) \end{cases},$$

тогда $\begin{cases} a^3+b^2 = 6 \\ a^3b^2 = 8 \end{cases}$;

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} a^3 = 2 \\ b^2 = 4 \end{cases} \\ &\begin{cases} a^3 = 4 \\ b^2 = 2 \end{cases} \end{aligned}\right.; \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} 2x+y = 2^2 \\ 2x-y = -4^3 \end{cases} \\ &\begin{cases} 2x+y = 4^2 \\ 2x-y = -2^3 \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \begin{matrix} (\boxed{1} \pm \boxed{2}) \\ (\boxed{1} \pm \boxed{2}) \end{matrix} \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x = -15 \\ y = 34 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = 2 \\ y = 12 \end{cases} \end{aligned}\right..$$

Ответ: $\left\{(-15;\ 34);\ (2;\ 12);\ \left(-38{,}5+12{,}5\sqrt{17};\ 103-19\sqrt{17}\right)\right\}$.

4. $\begin{cases} x^3 = xyz + 2 \\ y^3 = xyz + 3 \\ z^3 = xyz - 3 \end{cases}.$

$\boxed{1} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{3} \Rightarrow x^3y^3z^3 = (xyz+2)(xyz+3)(xyz-3);$

$x^3y^3z^3 = (xyz+2)(x^2y^2z^2 - 9);$

$x^3y^3z^3 = x^3y^3z^3 + 2x^2y^2z^2 - 9xyz - 18;$

$2x^2y^2z^2 - 9xyz - 18 = 0;$

$(xyz)_{1,\,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+144}}{4} = \frac{9 \pm 15}{4};\quad \left[\begin{array}{l} xyz = 6 \\ xyz = -\frac{3}{2} \end{array}\right..$

а) $xyz = 6.$

$\begin{cases} x^3 = 6 + 2 \\ y^3 = 6 + 3 \\ z^3 = 6 - 3 \end{cases};\qquad \begin{cases} x^3 = 8 \\ y^3 = 9 \\ z^3 = 3 \end{cases}\qquad \left(2;\ \sqrt[3]{9};\ \sqrt[3]{3}\right).$

б) $xyz = -\frac{3}{2}.$

$\begin{cases} x^3 = -\frac{3}{2} + 2 \\ y^3 = -\frac{3}{2} + 3 \\ z^3 = -\frac{3}{2} - 3 \end{cases};\qquad \begin{cases} x^3 = 0{,}5 \\ y^3 = 1{,}5 \\ z^3 = -4{,}5 \end{cases}\qquad \left(\sqrt[3]{0{,}5};\ \sqrt[3]{1{,}5};\ -\sqrt[3]{4{,}5}\right).$

О т в е т: $\left\{\left(2;\ \sqrt[3]{9};\ \sqrt[3]{3}\right);\ \left(\sqrt[3]{0{,}5};\ \sqrt[3]{1{,}5};\ -\sqrt[3]{4{,}5}\right)\right\}.$

Решение зачетной карточки 3

1. $\begin{cases} x + y - \sqrt{y^2 - 4x^2} = 5 \\ y^3\sqrt{y^2 - 4x^2} = 0 \end{cases}.$

а) $y = 0$, так как $y^2 - 4x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x = 0$, т.е. $(0; 0)$, но эта пара не удовлетворяет $\boxed{1}$.

б) $\begin{cases} \sqrt{y^2 - 4x^2} = 0 \\ x + y - \sqrt{y^2 - 4x^2} = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2x \\ y = -2x \end{array}\right.; \\ x + y = 5 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y = 2x \\ x + y = 5 \end{cases} & \left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right) \\ \begin{cases} y = -2x \\ x + y = 5 \end{cases} & (-5; 10). \end{array}\right.$

О т в е т: $\left\{\left(1\frac{2}{3}; 3\frac{1}{3}\right); (-5; 10)\right\}$.

2. $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 7 \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 175 \end{cases}.$

$\begin{cases} (x - y)^2(x + y) = 7 \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 175 \end{cases}.$

Пусть $\begin{cases} (x - y)^2 = t \quad (t \geqslant 0) \\ x + y = z \end{cases}$, тогда $\begin{cases} (x - y)^2 = t \\ (x + y)^2 = z^2 \end{cases}.$

$\left[\boxed{1} + \boxed{2}\right] : 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{t + z^2}{2}$,

тогда система приобретает следующий вид:

$\begin{cases} tz = 7 \\ z\frac{t + z^2}{2} = 175 \end{cases}$; $\begin{cases} tz = 7 \\ tz + z^3 = 350 \end{cases}$; $\begin{cases} tz = 7 \\ z^3 = 343 \end{cases}$;

$\begin{cases} tz = 7 \\ z = 7 \end{cases}$; $\begin{cases} t = 1 \\ z = 7 \end{cases}.$

Возвращаясь к переменным x и y, получим:

$$\begin{cases}(x-y)^2=1\\ x+y=7\end{cases};$$

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x-y=1\\ x+y=7\end{cases} & (\boxed{1}\pm\boxed{2}) \quad (4;\ 3)\\ \begin{cases}x-y=-1\\ x+y=7\end{cases} & (\boxed{1}\pm\boxed{2}) \quad (3;\ 4)\end{array}\right..$$

Ответ: $\{(4;\ 3);\ (3;\ 4)\}$.

3. $$\begin{cases}\dfrac{2y-11{,}3}{\sqrt{x-4}}=3\sqrt{x-4}\\ |x-3{,}1|+|3{,}1-y|=7{,}7\end{cases}.$$

Для решения этой системы необходимо «раскрыть» модули. Посмотрим, может в условиях уже есть способ однозначно их раскрыть.

Действительно, $x-4\geqslant 0$ — условие существования корня, так как $x-4\geqslant 0 \Rightarrow |x-3{,}1|=x-3{,}1$.

С другой стороны, $2y-11{,}3\geqslant 0$, т.е. $y\geqslant 5{,}65$, так как $y\geqslant 5{,}65 \Rightarrow |3{,}1-y|=y-3{,}1$.

Тогда система приобретает вид:

$$\begin{cases}2y-11{,}3=3x-12\\ x-3{,}1+y-3{,}1=7{,}7\end{cases};$$

$$\begin{cases}2y-3x=-0{,}7\\ y+x=13{,}9\end{cases} \quad (\boxed{2}\cdot 2)$$

$$\begin{cases}2y-3x=-0{,}7\\ 2y+2x=27{,}8\end{cases} \quad (\boxed{2}-\boxed{1})$$

$$\begin{cases}2y-3x=-0{,}7\\ 5x=28{,}5\end{cases}; \quad \begin{cases}x=5{,}7\\ y=8{,}2\end{cases}.$$

Ответ: $(5{,}7;\ 8{,}2)$.

4. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=2 \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8 \end{cases}.$

Учтем, что $\sqrt[3]{x-y}=\begin{cases} \sqrt[6]{(x-y)^2}; & x \geqslant y \\ -\sqrt[6]{(x-y)^2}; & x<y \end{cases}.$

1) Если $\begin{cases} x-y \geqslant 0 \\ x+y \geqslant 0 \end{cases}$, тогда пусть

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x+y}=a; & \sqrt{x+y}=a^3 \ (a \geqslant 0) \\ \sqrt[6]{x-y}=b; & \sqrt[3]{x-y}=b^2 \ (b \geqslant 0) \end{cases}.$$

При этом система приобретает вид:

$$\begin{cases} a^3+b^2=2 \\ a^3b^2=8 \end{cases},$$

что порождает уравнение $m^2-2m+8=0$; $D<0$.

2) Если $\begin{cases} x-y<0 \\ x+y \geqslant 0 \end{cases}$, тогда пусть

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x+y}=t \ (t \geqslant 0) \\ \sqrt[6]{y-x}=z \ (z \geqslant 0) \end{cases}; \quad \begin{cases} \sqrt{x+y}=t^3 \ (t \geqslant 0) \\ \sqrt[3]{y-x}=z^2 \ (z \geqslant 0) \end{cases}.$$

При этом система будет несколько иной:

$$\begin{cases} t^3-z^2=2 \\ t^3z^2=8 \end{cases}; \quad \begin{cases} t^3=2+z^2 \\ z^2(2+z^2)=8 \end{cases}; \quad \begin{cases} t^3=2+z^2 \\ z^4+2z^2-8=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} t^3=2+z^2 \\ \left[\begin{array}{l} z^2=-4 \\ z^2=2 \end{array}\right. \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t^3=2+z^2 \\ z^2=-4 \end{cases} \varnothing \\ \begin{cases} t^3=2+z^2 \\ z^2=2 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \begin{cases} t^3=4 \\ z^2=2 \end{cases}; \quad \begin{cases} t^6=16 \\ z^6=8 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x+y=16 \\ y-x=8 \end{cases} \quad (\boxed{1} \pm \boxed{2}) \quad \begin{cases} x=4 \\ y=12 \end{cases}.$$

Ответ: (4; 12).

Решение зачетной карточки 4

1. $\begin{cases} x(x+1)(3x+5y)=144 \\ x^2+4x+5y=24 \end{cases}.$

$\begin{cases} x(x+1)(3x+5y)=144 \\ x(x+1)+3x+5y=24 \end{cases}.$

Пусть $\begin{cases} x(x+1)=t \\ 3x+5y=z \end{cases}$, тогда $\begin{cases} tz=144 \\ t+z=24 \end{cases}$ порождает квадратное уравнение: $m^2-24m+144=0$;

откуда $(m-12)^2=0$, то есть $t=z$.

Итак: $\begin{cases} x(x+1)=12 \\ 3x+5y=12 \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=3 \end{array}\right. \\ 3x+5y=12 \end{cases}$ $\begin{array}{l} (3;\ 0{,}6) \\ (-4;\ 4{,}8) \end{array}.$

О т в е т: $\{(3;\ 0{,}6);\ (-4;\ 4{,}8)\}$.

2. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=1 \\ \sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{y+1}=1 \end{cases}.$

С одной стороны решение (1; 0) — очевидно, с другой стороны, доказать, что оно единственное, весьма непросто.

Из $\boxed{1}$: $\begin{cases} y=\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^3 \\ y=\left(1-\sqrt[3]{x-1}\right)^3-1 \end{cases}$,
Из $\boxed{2}$:

тогда $\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^3=\left(1-\sqrt[3]{x-1}\right)^3-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-3\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{x^2}-x=1-3\sqrt[3]{x-1}+3\sqrt[3]{(x-1)^2}-x+1-1;$

$-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}=-\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2};$

$\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x^2}-\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}\right)=0;$

$\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}-1\right)=0;$

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{x}; \quad x-1=x; \quad -1=0; \quad \varnothing \\ \sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}-1=0\end{cases}; \quad \sqrt[3]{x-1}=1-\sqrt[3]{x};$$

$$x-1=1-3\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{x^2}-x; \qquad 2(x-1)=3\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right);$$

$$2\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)=3\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right);$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x}=1; \quad x=1 \Rightarrow y=0; \\ 2\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+2=3\sqrt[3]{x} \Rightarrow 2\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+2=0; \quad D<0\end{array}\right. .$$

Ответ: (1; 0).

3. $\begin{cases}x-\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{6}{y} \\ x^2+y^2=17\end{cases}.$

Учтем, что $a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b}; & a\geqslant 0; \ b\geqslant 0 \\ -\sqrt{a^2b}; & a<0; \ b\geqslant 0\end{cases}.$

а) $y>0$.

$$\begin{cases}xy-\sqrt{xy}-6=0 \\ x^2+y^2=17\end{cases}; \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{xy}=-2 \quad \varnothing\end{array}\right. \\ x^2+y^2=17\end{cases}; \quad \begin{cases}xy=9 \\ x^2+y^2=17\end{cases} \quad \left(\boxed{1}\cdot 2\right)$$

$$\begin{cases}2xy=18 \\ x^2+y^2=17\end{cases} \quad \left(\boxed{1}\pm\boxed{2}\right) \quad \begin{cases}(x+y)^2=35 \\ (x-y)^2=-1 \quad \varnothing\end{cases}.$$

б) $y<0$.

$$\begin{cases}xy+\sqrt{xy}-6=0 \\ x^2+y^2=17\end{cases}; \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{xy}=2 \\ \sqrt{xy}=-3 \quad \varnothing\end{array}\right. \\ x^2+y^2=17\end{cases}; \quad \begin{cases}xy=4 \\ x^2+y^2=17\end{cases} \quad \left(\boxed{1}\cdot 2\right)$$

$$\begin{cases}2xy=8 \\ x^2+y^2=17\end{cases} \quad \left(\boxed{1}\pm\boxed{2}\right) \quad \begin{cases}(x+y)^2=25 \\ (x-y)^2=9\end{cases}.$$

1) $\begin{cases}x+y=5 \\ x-y=3\end{cases}$ $\left(\boxed{1}\pm\boxed{2}\right)$ (4;1) — не подходит,

так как $y<0$.

2) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -3 \end{cases}$ $(\boxed{1} \pm \boxed{2})$ $(1; 4)$ — не подходит,

так как $y < 0$.

3) $\begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = 3 \end{cases}$ $(\boxed{1} \pm \boxed{2})$ $(-1;-4)$.

4) $\begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = -3 \end{cases}$ $(\boxed{1} \pm \boxed{2})$ $(-4;-1)$.

Ответ: $\{(-1; -4); (-4; -1)\}$.

4. $\begin{cases} \dfrac{1-5y}{\sqrt{-x-4}} = -\sqrt{-x-4} \\ 7|x| - 4|y+1| = 28{,}16 \end{cases}$.

Для решения этой системы необходимо «раскрыть» модуль:

а) так как $-x - 4 \geqslant 0$; $x \leqslant 0$, тогда $|x| = -x$;

б) так как $1 - 5y \leqslant 0$; $y \geqslant \frac{1}{5}$, тогда $|y+1| = y + 1$.

Система приобретает вид:

$$\begin{cases} 1 - 5y = -(-x - 4) \\ -7x - 4y - 4 = 28{,}16 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -x - 5y = 3 \\ -7x - 4y = 32{,}16 \end{cases} \quad (\boxed{1} \cdot 7)$$

$$\begin{cases} -7x - 35y = 21 \\ -7x - 4y = 32{,}16 \end{cases} \quad (\boxed{1} - \boxed{2})$$

$-31y = -11{,}16$; $y = 0{,}36$; $x = -4{,}8$.

Ответ: $(-4{,}8; 0{,}36)$.

Решение зачетной карточки 5

1. $\begin{cases} x^2 + xy + x + y = -2 \\ y^2 + xy + x + y = 1 \end{cases}$. $(\boxed{1} + \boxed{2})$

$x^2 + y^2 + 2xy + 2(x+y) = -1; \quad (x+y)^2 + 2(x+y) + 1 = 0;$

$(x+y+1)^2 = 0.$

То есть $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y^2 + xy + x + y = 1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x + y = -1 \\ y(x+y) + x + y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = -1 \\ -y - 1 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$.

Ответ: (1; –2).

2. $\begin{cases} x + \sqrt{y} = 56 \\ y + \sqrt{x} = 56 \end{cases}$. $(\boxed{1} \pm \boxed{2})$ $\begin{cases} x - y - \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) = 0 \\ x + y + \sqrt{x} + \sqrt{y} = 112 \end{cases}$;

$\begin{cases} \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1\right) = 0 \\ \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 - 2\sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{y} = 112 \end{cases}$.

а) $\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y} \\ y + \sqrt{y} = 56 \end{cases}$; $\begin{cases} x = y \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{y} = -8 \notin [0; \infty) \\ \sqrt{y} = 7 \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} x = y \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ y = 49 \end{cases}$;

$\begin{cases} x = 49 \\ y = 49 \end{cases}$.

б) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ 1 - 2\sqrt{xy} + 1 = 112 \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ 2\sqrt{xy} = -110; \quad \varnothing \end{cases}$.

Ответ: (49; 49).

3. $\begin{cases} x - \sqrt{\frac{x}{x-y}} = \frac{12}{x-y} \\ x + xy = 81 \end{cases}$. $\quad D(C): \frac{x}{x-y} \geqslant 0$

Учтем, что $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b}; & a \geqslant 0;\ b \geqslant 0 \\ -\sqrt{a^2b}; & a < 0;\ b \geqslant 0 \end{cases}$.

а) $x - y > 0 \Rightarrow x \geqslant 0$. (из $D(C)$)

$$\begin{cases} x(x-y) - \sqrt{x(x-y)} = 12 \\ x + xy = 81 \end{cases} \quad (\boxed{1} + \boxed{3})$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x(x-y)} = 4 \\ \sqrt{x(x-y)} = -3 \notin [0;\ \infty) \end{array}\right. \\ x(1+y) = 81 \end{cases}; \quad \begin{cases} x(x-y) = 16 \\ x + xy = 81 \end{cases};$$

$x^2 + x = 97; \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{389}}{2};$

$\frac{-1-\sqrt{389}}{2} \notin [0;\ \infty)$.

Пусть $x = \frac{-1+\sqrt{389}}{2} \Rightarrow y = \frac{81}{\frac{-1+\sqrt{389}}{2}} - 1;$

$y = \frac{162\left(1+\sqrt{389}\right)}{389-1} - 1;$

$$y = \frac{162\left(1+\sqrt{389}\right)-388}{388} = \frac{162\sqrt{389}-226}{388} = \frac{81\sqrt{389}-113}{194} \quad (x > y).$$

б) $x - y < 0 \Rightarrow x < 0$. (из $D(C)$)

$$\begin{cases} x(x-y) + \sqrt{x(x-y)} = 12 \\ x(1+y) = 81 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x(x-y)} = 3 \\ \sqrt{x(x-y)} = -4 \notin [0;\ \infty) \end{array}\right. \\ x(1+y) = 81 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x(x-y) = 9 \\ x(1+y) = 81 \end{cases} \quad (\boxed{1} + \boxed{2}) \quad x^2 + x = 90;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -10 \\ x = 9 \notin (-\infty;\ 0) \end{array}\right.; \quad \begin{cases} x = -10 \\ -10(1+y) = 81 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -10 \\ y = -9{,}1 \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{(-10;\ -9{,}1);\ \left(\frac{\sqrt{389}-1}{2};\ \frac{81\sqrt{389}-113}{194}\right)\right\}$.

4. $\begin{cases}(x+y)^2-z^2=4\\(y+z)^2-x^2=2\\(z+x)^2-y^2=3\end{cases}$. $\left(\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}\right)$

$$\begin{cases}(x+y+z)(x+y-z)=4\\(x+y+z)(y+z-x)=2\\(x+y+z)(z+x-y)=3\end{cases}.$$

$\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow (x+y+z)(x+y-z+y+z-x+z+x-y)=9;$

$(x+y+z)^2=9.$

а) $\begin{cases}x+y+z=3\\x+y-z=\frac{4}{3}\\y+z-x=\frac{2}{3}\\z+x-y=1\end{cases}$ $\begin{pmatrix}\boxed{1}-\boxed{2}\\\boxed{1}-\boxed{3}\\\boxed{1}-\boxed{4}\end{pmatrix}$ $\begin{cases}2z=\frac{5}{3}\\2x=\frac{7}{3}\\2y=2\end{cases}$; $\begin{cases}z=\frac{5}{6}\\x=\frac{7}{6}\\y=1\end{cases}$.

б) $\begin{cases}x+y+z=-3\\x+y-z=-\frac{4}{3}\\y+z-x=-\frac{2}{3}\\z+x-y=-1\end{cases}$ $\begin{pmatrix}\boxed{1}-\boxed{2}\\\boxed{1}-\boxed{3}\\\boxed{1}-\boxed{4}\end{pmatrix}$ $\begin{cases}z=-\frac{5}{6}\\x=-\frac{7}{6}\\y=-1\end{cases}$.

Ответ: $\left\{\left(\frac{7}{6};\ 1;\ \frac{5}{6}\right);\ \left(-\frac{7}{6};\ -1;\ -\frac{5}{6}\right)\right\}$.

Решение зачетной карточки 6

1. $\begin{cases} x^3 + y^3 = -61 \\ (xy+9)(x+y) = 11 \end{cases}$

$\begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = -61 \\ (xy+9)(x+y) = 11 \end{cases}$

Пусть $\begin{cases} x + y = t \\ xy = z \end{cases}$,

тогда $\begin{cases} t(t^2 - 3z) = -61 \\ (z+9)t = 11 \end{cases}$;

$\begin{cases} t^3 - 3tz = -61 \\ zt + 9t = 11 \end{cases}$; $\begin{cases} t^3 - 3(11 - 9t) = -61 \\ zt = 11 - 9t \end{cases}$;

$\begin{cases} t^3 + 27t + 28 = 0 \\ zt = 11 - 9t \end{cases}$.

Пусть $f(t) = t^3 + 27t + 28$; $\quad f(-1) = 0$;

$$\begin{array}{l|l} \underline{-}\,t^3 + 27t + 28 & t+1 \\ \underline{t^3 + t^2} & \overline{t^2 - t + 28 \quad (D<0)} \\ \quad \underline{-}\,-t^2 + 27t & \\ \quad \underline{-t^2 - \quad t} & \\ \qquad \underline{-}\,28t + 28 & \\ \qquad \underline{28t + 28} & \end{array}$$

тогда $\begin{cases} t = -1 \\ z = -20 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -20 \end{cases}$,

что порождает $m^2 + m - 20 = 0$.

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -5 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases} \end{array}\right.$.

О т в е т: $\{(-5;\ 4);\ (4;\ -5)\}$.

2. $\begin{cases} \sqrt{2x-y+11}-\sqrt{3x+y-9}=3 \\ \sqrt[4]{2x-y+11}+\sqrt[4]{3x+y-9}=3 \end{cases}.$

Пусть $\begin{array}{l} \sqrt[4]{2x-y+11}=a\ \ (a \geqslant 0);\ \ \sqrt{2x-y+11}=a^2 \\ \sqrt[4]{3x+y-9}=b\ \ (b \geqslant 0);\ \ \sqrt{3x+y-9}=b^2 \end{array},$

тогда $\begin{cases} a^2-b^2=3 \\ a+b=3 \end{cases};\quad \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=3 \end{cases};\quad \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}.$

То есть $\begin{cases} \sqrt[4]{2x-y+11}=2 \\ \sqrt[4]{3x+y-9}=1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1}^4 \\ \boxed{2}^4 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x-y+11=16 \\ 3x+y-9=1 \end{cases} \quad \left(\boxed{1}+\boxed{2}\right) \quad 5x+2=17.$

$x=3;\quad \begin{cases} x=3 \\ 3\cdot 3+y-9=1 \end{cases};$

$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}.$

Ответ: (3; 1).

3. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}. \quad \boxed{1}\cdot\sqrt{2}$

$\begin{cases} \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+2\sqrt{xy}=16 \\ x+y+2\sqrt{xy}=16 \end{cases} \quad \left(\boxed{1}-\boxed{2}\right)$

$\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=x+y;$

$2\left(x^2+y^2\right)=(x+y)^2;\ \ (x-y)^2=0.$

Итак: $\begin{cases} x=y \\ \sqrt{x}+\sqrt{x}=4 \end{cases};\quad \begin{cases} x=y \\ \sqrt{x}=2 \end{cases};\quad \begin{cases} x=y \\ x=4 \end{cases};\quad (4;\,4).$

Ответ: (4; 4).

4. $\begin{cases} 2\left(\dfrac{4x^2}{9y^2}+\dfrac{9y^2}{4x^2}\right)-9\left(\dfrac{2x}{3y}+\dfrac{3y}{2x}\right)+14=0 \\ 4x^2+9y^2=5 \end{cases}.$

Попробуем преобразовать $\boxed{1}$ к удобному для решения виду.

Положим $\dfrac{2x}{3y}+\dfrac{3y}{2x}=t$,

тогда $\dfrac{4x^2}{9y^2}+2\dfrac{2x}{3y}\cdot\dfrac{3y}{2x}+\dfrac{9y^2}{4x^2}=t^2$,

т.е. $\dfrac{4x^2}{9y^2}+\dfrac{9y^2}{4x^2}=t^2-2$,

тогда уравнение имеет вид

$2(t^2-2)-9t+14=0;\;\; 2t^2-9t+10=0;$

$t_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{81-80}}{4}=\dfrac{9\pm1}{4};\qquad \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{5}{2} \\ t=2 \end{array}\right..$

а) $t=\frac{5}{2}$.

$\begin{cases} \dfrac{2x}{3y}+\dfrac{3y}{2x}=\dfrac{5}{2} \\ 4x^2+9y^2=5 \end{cases};\qquad \begin{cases} 4x^2+9y^2=\dfrac{5}{2}\cdot 6xy \\ 4x^2+9y^2=5 \end{cases};$

$\begin{cases} 6xy=2 \\ 4x^2+9y^2=5 \end{cases}\quad \boxed{1}\cdot 2\quad \begin{cases} 12xy=4 \\ 4x^2+9y^2=5 \end{cases}\quad \begin{pmatrix} \boxed{1}+\boxed{2} \\ \boxed{2}-\boxed{1} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} (2x+3y)^2=9 \\ (2x-3y)^2=1 \end{cases}.$

1) $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 2x-3y=1 \end{cases}\quad \left(\boxed{1}\pm\boxed{2}\right)\quad \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases}.$

2) $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 2x-3y=-1 \end{cases}\quad \left(\boxed{1}\pm\boxed{2}\right)\quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{2}{3} \end{cases}.$

3) $\begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ $(\boxed{1} \pm \boxed{2})$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$.

4) $\begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$ $(\boxed{1} \pm \boxed{2})$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

б) $t = 2$.

$$\begin{cases} \frac{2x}{3y} + \frac{3y}{2x} = 2 \\ 4x^2 + 9y^2 = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 12xy \\ 4x^2 + 9y^2 = 5 \end{cases}; \quad \pm\begin{cases} 12xy = 5 \\ 4x^2 + 9y^2 = 5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (2x + 3y)^2 = 10 \\ (2x - 3y)^2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x = 3y \\ y^2 = \frac{5}{18} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{\frac{5}{18}} \\ y = -\sqrt{\frac{5}{18}} \end{array}\right. \end{cases}.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{18}} \\ y = \sqrt{\frac{5}{18}} \end{cases} & \left(\frac{\sqrt{2,5}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{6}\right) \\ \begin{cases} x = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{18}} \\ y = -\sqrt{\frac{5}{18}} \end{cases} & \left(-\frac{\sqrt{2,5}}{2}; -\frac{\sqrt{10}}{6}\right) \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\left(1; \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right); \left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right); \left(-1; -\frac{1}{3}\right); \left(\frac{\sqrt{2,5}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{6}\right);\right.$ $\left.\left(-\frac{\sqrt{2,5}}{2}; -\frac{\sqrt{10}}{6}\right)\right\}$.

Содержание

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович
СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Научный редактор серии *А.В. Семенов*
Художник *Е.И. Герасимчук*
Компьютерная верстка *С.П. Широкий*
Компьютерный набор *К.В. Шевяков*
Корректоры *Е.Г. Никитина, И.Б. Смирнов, А.Б. Смирнов*

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО
119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.
Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.
E-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»
В Санкт-Петербурге: (812) 516-5811, (812) 516-5805,
В Москве (филиал): (495) 488-3005.
E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; www.victory.sp.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»
193171, С.-Петербург, Фарфоровская 18, кв 1.
Тел.: (812) 560-0598; факс: (812) 560-0524.
E-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru.

Подписано к печати 14.05.2008 г. Формат 60x90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 11,5 печ. л. Тираж 3000 экз. Заказ № 572.

Отпечатано с диапозитивов в ГППО «Псковская областная типография».
180004, г. Псков, ул. Ротная, 34.

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики.

По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасные самоучители, которые позволят ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к экзаменам.

Естественная логика построения материала «от простого к сложному» позволит учителю использовать эти книги для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив.

Серия «МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ»

1. Дроби.
2. Корни.
3. Уравнения.
4. Дробно-рациональные неравенства.
5. Системы уравнений.
6. Иррациональные уравнения и неравенства.
7. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии.
8. Логарифмы.
9. Тригонометрия.
10. Построение графиков функций элементарными методами.
11. Уравнения и неравенства с параметрами.
12. Задачи с параметрами в ЕГЭ.
13. Введение в математический анализ.
14. Комплексные числа.

ISBN 978-5-98712-023-1

9 785987 120231