Справочная Математическая Библиотека

# Математический анализ

## Дифференцирование и интегрирование

Физматгиз · 1961

# СПРАВОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ

Л. А. ЛЮСТЕРНИКА

И

А. Р. ЯНПОЛЬСКОГО

И. Г. АРАМАНОВИЧ, Р. С. ГУТЕР,
Л. А. ЛЮСТЕРНИК, И. Л. РАУХВАРГЕР,
М. И. СКАНАВИ, А. Р. ЯНПОЛЬСКИЙ

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

## ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

## АННОТАЦИЯ

Настоящий выпуск серии *СМБ* посвящен основным операциям математического анализа (дифференцированию и интегрированию функций одного и нескольких переменных) и комплексу вопросов, связанных непосредственно с этими операциями. Изложение конспективное, в логически связной форме, без доказательств, но с многими подробно разобранными примерами.

Книга рассчитана на лиц, пользующихся в своей работе математическим анализом (математиков, физиков, инженеров), а также на студентов и аспирантов, изучающих математический анализ.

Справочная математическая библиотека, под общей редакцией Л. А. Люстерника и А. Р. Янпольского.

Математический анализ (дифференцирование и интегрирование).

Редактор *А. Ф. Лапко.*

Техн. редактор *А. П. Колесникова.* Корректор *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 31/V 1961 г. Подписано к печати 2/XII 1961 г. Бумага 84×108 1/32. Физ. печ. л. 11. Условн. печ. л. 18,04. Уч.-изд. л. 17,15. Тираж 25 000 экз. Т-12350. Цена книги 96 коп. Заказ № 2618.

Государственное издательство физико-математической литературы. Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза. Ленинград, Измайловский пр., 29.

## СОДЕРЖАНИЕ


Предисловие . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

Глава I. **Дифференцирование функций одного переменного** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

§ 1. Производные и дифференциалы первого порядка . . 9
§ 2. Производные и дифференциалы высших порядков. Ряд Тейлора . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29
§ 3. Применение производных к исследованию функций. Экстремум . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
§ 4. Дифференциальные операторы . . . . . . . . . . 50

Глава II. **Дифференцирование функций $n$ переменных** . 58

§ 1. Производные и дифференциалы первого порядка . . 58
§ 2. Производные и дифференциалы высших порядков. Ряд Тейлора . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67
§ 3. Многочлены от дифференциальных операторов . . . 74
§ 4. Дифференцирование операторов из $E_n$ в $E_m$ . . . . 76
§ 5. Экстремум . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79
§ 6. Стационарные точки . . . . . . . . . . . . . . . 85

Глава III. **Сложные и неявные функции $n$ переменных** . 90

§ 1. Преобразование переменных. Сложные функции . . 90
§ 2. Неявные функции. Функции, зависящие от параметра 95
§ 3. Диаграмма Ньютона . . . . . . . . . . . . . . . 103
§ 4. Представления функций $n$ переменных в виде суперпозиций . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 109

Глава IV. **Системы функций и криволинейных координат на плоскости и в пространстве** . . . . . . . 114

§ 1. Отображения. Якобиан . . . . . . . . . . . . . 114
§ 2. Криволинейные координаты на плоскости . . . . . 124
§ 3. Криволинейные координаты в пространстве . . . . 134

**Глава V. Интегрирование функций** . . . . . . . . . . . . 150

§ 1. Неопределенный интеграл . . . . . . . . . . . . . 150
§ 2. Интегрирование элементарных функций . . . . . . . 152
§ 3. Определенный интеграл . . . . . . . . . . . . . . 170
§ 4. Интегрирование функций $n$ переменных . . . . . . 181
§ 5. Приложения определенных интегралов к задачам геометрии и механики . . . . . . . . . . . . . . . 195

**Глава VI. Несобственные интегралы. Интегралы, зависящие от параметра. Интеграл Стилтьеса** . . . 210

§ 1. Несобственные интегралы . . . . . . . . . . . . 210
§ 2. Предельный переход под знаком интеграла. Интегралы, зависящие от параметра . . . . . . . . . . 234
§ 3. Интеграл Стилтьеса для функций одного переменного . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 244
§ 4. Интегралы и производные дробных порядков . . . 249

**Глава VII. Преобразование дифференциальных и интегральных выражений** . . . . . . . . . . . . . 251

§ 1. Преобразование дифференциальных выражений . . 251
§ 2. Преобразование интегральных выражений . . . . . 264
§ 3. Формулы преобразования интегралов . . . . . . . 272

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

1. Производные элементарных функций . . . . . . . . . . 280
2. Разложение элементарных функций в степенной ряд . . . . 283
3. Интегралы от элементарных функций . . . . . . . . . . 286
4. Специальные функции, определяемые интегралами . . . . . 311

Библиография . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 336

Указатель обозначений . . . . . . . . . . . . . . . . . 338

Алфавитный указатель . . . . . . . . . . . . . . . . . . 340

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий выпуск серии *СМБ* посвящен двум основным операциям математического анализа — дифференцированию и интегрированию. В нем изложен комплекс вопросов, связанных непосредственно с операциями дифференцирования и интегрирования функций одного и нескольких переменных, понимаемыми в классическом смысле, а также простейшие обобщения этих операций. Дальнейшие обобщения будут даны в последующих выпусках серии *СМБ*, посвященных теории функций действительного переменного и функциональному анализу.

Вместе с предыдущим выпуском серии *СМБ* «Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби)» настоящий выпуск включает материал курса математического анализа, который изложен в логически связной форме, конспективно, без доказательств, но с многими подробно разобранными примерами.

В главе I «Дифференцирование функций одного переменного» (авторы Л. А. Люстерник и Р. С. Гутер) и в главе II «Дифференцирование функций $n$ переменных» (автор Л. А. Люстерник) даны сведения о производных и дифференциалах, об их свойствах и применении к исследованию функций, о формуле и ряде Тейлора, дифференциальных операторах и их простейших свойствах, стационарных точках, а также об экстремуме функций одного переменного (автор И. Г. Араманович) и $n$ переменных (автор И. Л. Раухваргер).

Глава III «Сложные и неявные функции $n$ переменных» (авторы Р. С. Гутер и И. Л. Раухваргер) содержит изложение общих вопросов теории функций $n$ переменных, связанных с дифференцированием. Сюда относятся сложные и неявные функции, представление функций в виде суперпозиций и т. д. Отдельный параграф (автор В. А. Треногин) посвящен диаграмме Ньютона.

Ввиду особой важности для приложений вопросов анализа функций двух и трех переменных, они выделены в отдельную главу IV «Системы функций и криволинейных координат на плоскости и в пространстве» (автор М. И. Сканави), где детально изложены свойства отображений области в область (в частности, аффинных отображений) и описаны различные системы криволинейных координат. Эта глава, а также глава VII составлены на основе книги А. Ф. Бермачта [2].

Глава V «Интегрирование функций» (авторы Р. С. Гутер, И. Л. Раухваргер и А. Р. Янпольский) содержит сведения об интегралах, о методах интегрирования элементарных функций и о приложениях интегралов к задачам геометрии и механики.

Некоторые обобщения понятия интеграла приведены в главе VI «Несобственные интегралы. Интегралы, зависящие от параметра. Интеграл Стилтьеса» (авторы И. Г. Арамапович, Р. С. Гутер и И. Л. Раухваргер). Здесь подробно изложены сведения о несобственных интегралах и их свойствах, дано понятие об интеграле Стилтьеса и об интегралах и производных дробного порядка.

В главе VII «Преобразование дифференциальных и интегральных выражений» (автор М. И. Сканави) классифицированы различные случаи преобразований указанных в наименовании главы выражений, даны общие правила замены переменных в дифференциальных и интегральных выражениях, а также приведена сводка выражений для основных дифференциальных операций (градиента, дивергенции, вихря, лапласиана) при преобразовании прямоугольных декартовых координат к разным криволинейным ортогональным координатам (составлена В. И. Битюцковым). Здесь же систематизированы сведения об интегралах по мере области и по координатам и приведены формулы Грина с разными обобщениями.

В виде приложений даны таблицы производных первого и $n$-го порядков элементарных функций, разложений функций в степенной ряд и интегралов (неопределенных, определенных и кратных). Приведены также таблицы специальных функций, определяемых интегралами от элементарных функций (эллиптических интегралов, интегральных функций, интегралов Френеля, гамма-функции и др.).

# ГЛАВА I
# ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Основными операциями математического анализа являются взаимно обратные операции над функциями — дифференцирование и интегрирование. Настоящая глава посвящена операции дифференцирования функций одного переменного. Понятия функции, предельного перехода, свойства непрерывных функций и т. п. вопросы, предшествующие в курсах анализа изучению операции дифференцирования, освещены в выпуске серии *СМБ* «Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби)».

## § 1. Производные и дифференциалы первого порядка

**1.** Пусть функция одного переменного $y=f(x)$ определена на множестве $X$, которое является отрезком, или интервалом, или полуинтервалом. Если нет специальных указаний, то точки $x_0$, $x_0+h$ предполагаются внутренними точками множества $X$.

*Производной* функции $y=f(x)$, определенной на множестве $X$, в точке $x=x_0 \in X$ называется предел отношения $\frac{\Delta y}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (приращения $\Delta y$ функции $y$ к приращению $h$ аргумента $x$) при $h \to 0$, если этот предел существует. Производная функции $f(x)$ в точке $x=x_0$ обозначается через $f'(x_0)$. Таким образом,

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad (1.1)$$

где $x_0+h \in X$, $\Delta_h f(x_0)$ — приращение функции $f(x)$ в точке $x=x_0$.

Если точка $x_0$ является концом отрезка, то предел (1.1), определяющий производную, рассматривается как односторонний: правый, когда точка $x_0$ является левым концом, и левый, когда точка $x_0$ является правым концом отрезка.

Геометрически производная $f'(x_0)$ представляет собой тангенс угла наклона (*угловой коэффициент*) касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $x=x_0$.

Отношение $\frac{\Delta y}{h}$ в окрестности точки $x=x_0$ может оказаться бесконечно большим. Если при $h \to 0$ отношение $\frac{\Delta y}{h}$ стремится к бесконечности *определенного знака*, то говорят, что функция имеет в данной точке *бесконечную производную* $f'(x)=+\infty$ или $f'(x)=-\infty$. Геометрически это означает, что кривая $y=f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ вертикальную (параллельную оси $Oy$) касательную. Например, кривая $y=\sqrt[3]{x}$ в точке $x_0=0$ имеет вертикальную касательную, так как

$$y'\Big|_{x=0}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Big|_{x=0}=+\infty.$$

Функцию $f(x)$ называют *дифференцируемой* в точке $x=x_0$, если она имеет в точке $x_0$ конечную производную. Если $f(x)$ дифференцируема в каждой точке $x$ множества $X$, то говорят, что она *дифференцируема на множестве* $X$; ее производная $f'(x)$ есть функция точки $x$ множества $X$ — *производная функция*. Операция (или оператор) дифференцирования относит функции $f(x)$ ее производную $f'(x)$; исходная функция $f(x)$ называется *первообразной* по отношению к своей производной.

Пример 1. Для функции $f(x)=C$ ($C$ — постоянное) производная равна нулю:

$$(C)'=0.$$

Пример 2. Если $f(x)=x$, то производная равна единице:

$$(x)'=1.$$

Пример 3. Производная функции $f(x)=\sin x$ равна

$$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x.$$

Для обозначения производной функции $y=f(x)$ употребляются также символы $y'$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $Df(x)$.

Если аргумент $t$ означает время, то производную функции $u(t)$ обозначают также символом $\dot{u}=\dot{u}(t)$ (*обозначение Ньютона*). Производная $\dot{u}(t)$ означает скорость изменения величины $u(t)$ в момент времени $t$. Например, если $x(t)$ — путь, пройденный прямолинейно движущейся точкой за время $t$, то $\dot{x}(t)$ означает скорость движения точки в момент времени $t$.

*Операция дифференцирования относит сумме функций сумму их производных и сохраняет постоянный множитель* (*свойство линейности*):

$$[f(x)+\varphi(x)]'=f'(x)+\varphi'(x), \tag{1.2}$$

$$[cf(x)]'=cf'(x) \qquad (c=\mathrm{const}). \tag{1.3}$$

Формулы для производных произведения и частного функций $u(x)$ и $v(x)$ имеют вид

$$(uv)'=u'v+uv', \tag{1.4}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}. \tag{1.5}$$

Эти формулы могут быть записаны и в виде

$$u'v+uv'=(uv)',$$

$$u'v-uv'=v^2(uv^{-1})'.$$

2. Одним из основных правил дифференцирования является правило дифференцирования сложной функции.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве $X$, а $Y$ есть множество ее возможных значений. Рассмотрим функцию $z=\varphi(y)$, определенную на множестве $Y$, т. е. функцию, аргумент которой в свою очередь является функцией одного переменного. Тогда каждому значению $x$ множества $X$ соответствует некоторое определенное значение $z$, т. е. переменное $z$ есть функция от $x$. Ее можно записать в виде

$$z=\varphi[f(x)].$$

Такое выражение называют *функцией от функции* или *сложной функцией*, определенной на $X$. Говорят также, что функция $\varphi[f(x)]$ есть *суперпозиция функций* $f(x)$ и $\varphi(y)$.

Например, если $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $z = e^{ay}$, $y \in [-1, 1]$, то $z = e^{a \sin x}$ есть сложная функция от $x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

*Правило дифференцирования сложной функции* выражается следующей теоремой.

Теорема 1. *Если функция $y = f(x)$ имеет в точке $x \in X$ производную $y'_x = f'(x)$, а функция $z = \varphi(y)$ в соответствующей точке $y \in Y$ имеет производную $z'_y = \varphi'(y)$, то сложная функция $z = \varphi[f(x)]$ также имеет в точке $x \in X$ производную $z'_x$, которая равна произведению производных от функций $\varphi(y)$ и $f(x)$:*

$$z'_x = \{\varphi[f(x)]\}' = \varphi'_y(y) \cdot f'_x(x) \equiv \varphi'_y[f(x)]\, f'_x(x)$$

*или кратко:*

$$z'_x = z'_y \cdot y'_x. \tag{1.6}$$

Пример 4. Для функции $z = e^{\sin x}$, т. е. $y = \sin x$, $z = e^y$, имеем

$$z'_x = e^y \cos x = e^{\sin x} \cos x.$$

Важную роль в технике вычисления производных играют некоторые следствия, которые могут быть получены из этой теоремы.

Следствие 1. *Производная обратной функции.* Пусть для функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = \varphi(y)$. Тогда, если функция $\varphi(y)$ имеет производную $\varphi'(y)$, отличную от нуля, то функция $f(x)$ имеет производную

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\varphi'[f(x)]}.$$

Коротко это записывают в виде

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \tag{1.7}$$

где индексы у производных указывают на то, по какому переменному производится дифференцирование, т. е. какое из переменных считается независимым.

Пример 5. Пусть $y = \arcsin x$; тогда $x = \sin y$,

$$y'_x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Знак у корня следует брать «+», так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$. В точках $y = \pm\frac{\pi}{2}$ производная $x'_y = 0$, соответственно в точках $x = \pm 1$ производная $y'_x$ обращается в $+\infty$.

Следствие 2. *Производная функции, заданной параметрически.* Если функции $x(t)$ и $y(t)$ определены и дифференцируемы на множестве $T$ и существует дифференцируемая обратная функция $t = t(x)$, определенная на множестве $X$, то функция $y = y(t)$ является сложной функцией от $x$:

$$y = y[t(x)],$$

определенной на множестве $X$. В таком случае говорят, что пара функций

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

определяет на множестве $X$ функцию $y(x)$, *заданную параметрически.* Функция $y = y[t(x)]$ дифференцируема на $X$, и ее производная может быть найдена с помощью формул (1.6) и (1.7):

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{1.9}$$

Следствие 3. *Логарифмическая производная.* Под *логарифмической производной* функции $f(x)$ в точке $x = x_0 \in X$ понимают производную в точке $x = x_0$ натурального логарифма функции $f(x)$ (или логарифма ее модуля при $f(x) < 0$), если эта производная существует. Обычно пишут

$$\left.\frac{d\ln f(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \quad \text{или} \quad \left.\frac{d\ln|f(x)|}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

В силу (1.6) находим (при $f(x) > 0$)

$$\left.\frac{d\ln f(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = [\ln f(x)]'\Big|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}. \tag{1.10}$$

Точно так же (при $f(x) < 0$)

$$\left.\frac{d\ln|f(x)|}{dx}\right|_{x=x_0} = [\ln|f(x)|]'\Big|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Если, например, $t$ — время изменения некоторой величины $y=f(t)$, то $f'(t)$ — скорость изменения величины $y=f(t)$, а $\frac{d\ln f(t)}{dt}=[\ln f(t)]'$ есть *относительная скорость* изменения этой величины.

В ряде случаев логарифмическая производная может быть использована для нахождения обычной производной.

Найдем, например, производную от функции

$$f(x)=u_1(x)\,u_2(x)\,\ldots\,u_n(x),\ \text{где}\ u_i(x)\neq 0\ (i=1,\,2,\,\ldots,\,n).$$

Пользуясь формулой (1.10), получим

$$f'(x)=f(x)\frac{d\ln|f(x)|}{dx}=u_1(x)\,u_2(x)\ldots u_n(x)\left(\sum_{k=1}^{n}\ln|u_k(x)|\right)'=$$
$$=u_1(x)\,u_2(x)\,\ldots\,u_n(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k'(x)}{u_k(x)}.$$

Частным случаем полученной формулы является формула (1.4). Аналогично может быть выведена также и формула (1.5).

Функцию вида

$$f(x)=u(x)^{v(x)},\ \text{где}\ u(x)>0,$$

называют *сложной показательной функцией*. Ее производная равна

$$f'(x)=f(x)[\ln f(x)]'=u(x)^{v(x)}[v(x)\ln u(x)]'=$$
$$=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

Таким образом,

$$(u^v)'=u^v\ln u\cdot v'+vu^{v-1}u'. \qquad (1.11)$$

**3.** Под *элементарными функциями* принято понимать класс функций, содержащий степенные, рациональные (целые и дробные), показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, а также их комбинации в виде различных суперпозиций. Для строгого определения этого класса функций можно ограничиться рассмотрением некоторых из них, принимаемых за основные.

Назовем *элементарной операцией* любую из следующих операций:

а) арифметические операции;

б) операции нахождения по заданному $x$ значений функций $e^x$, $\ln x$ $(x > 0)$, $\sin x$, $\arcsin x$ (при $|x| \leqslant 1$).

Функцию $f(x)$ будем называть *элементарной*, если при задании $x$, принадлежащего области определения функции $f$, значение $f(x)$ определяется конечной последовательностью элементарных операций, не зависящей от $x$.

В качестве примеров элементарных функций можно указать:

1) все функции, упомянутые в п. б);

2) любые многочлены $P_n(x)$ и рациональные функции $R(x)$;

3) функции $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, $\operatorname{arctg} x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ и др.;

4) более сложные комбинации, вроде $\operatorname{arctg}(e^x + \sin x^3)$ и т. д.

Формулы (1.2)—(1.7) позволяют найти выражение для производной любой элементарной функции, благодаря чему можно убедиться, что *производная элементарной функции всегда является элементарной функцией*. Таким образом, *операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций.*

*Интегрирование* — операция, обратная операции дифференцирования, — этим свойством не обладает. Например, рассматриваемые в п. 4 приложения функции $\operatorname{si}(x)$, $\operatorname{ci}(x)$, $\operatorname{Ei}(x)$, $\operatorname{li}(x)$, $\Phi(x)$, $S(x)$, $C(x)$ и др., полученные интегрированием элементарных функций $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x^2)$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(x^2)$ и др., не являются элементарными функциями.

4. Ниже приводится ряд теорем, позволяющих по свойствам функции судить о производной, или наоборот. Из них весьма важными являются *теоремы о среднем* в дифференциальном исчислении (*теоремы Ролля, Лагранжа, Коши*).

а) Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $X$ и имеет конечную производную $y'_x = f'(x_0)$ в точке $x = x_0 \in X$.

Тогда приращение

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) \qquad (x_0 + h \in X)$$

может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0) \equiv f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) h + o(h)$$

или

$$\Delta y = y'_x h + o(h) \tag{1.12}$$

(о символе $o(h)$ см. в выпуске «Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби)»).

б) Если $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в точке $x = x_0 \in X$, то $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$.

в) Если функция $f(x)$ в окрестности точки $x = x_0$ имеет производную и при $x \to x_0$ стремится к бесконечности, то ее производная не может при этом оставаться ограниченной.

г) Теорема 2 (Ролля). *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, имеет конечную производную в каждой точке интервала $(a, b)$ и $f(a) = f(b)$. Тогда найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, в которой производная обращается в нуль:* $f'(\xi) = 0$.

д) Теорема 3 (Лагранжа). *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную в каждой точке интервала $(a, b)$, то найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi),$$

*или*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{1.13}$$

Формула (1.13) носит название *формулы Лагранжа* или *формулы конечных приращений*. В частности, для отрезка $[x, x + h]$, лежащего внутри $[a, b]$, формулу (1.13) записывают в виде

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \vartheta h),$$

где $0 < \vartheta < 1$.

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что у кривой $y = f(x)$ (рис. 1), имеющей в каждой точке касательную, в интервале $(a, b)$ найдется по крайней мере одна точка, в которой касательная к кривой $y=f(x)$ параллельна хорде $MN$, проходящей через точки $M(a, f(a))$, $N(b, f(b))$ (на рис. 1 таких точек две: $K_1$ и $K_2$).

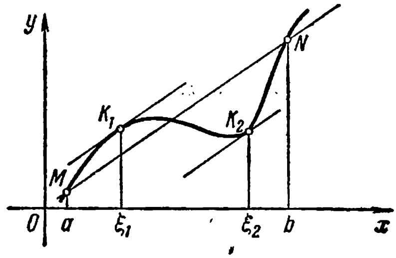

Рис. 1.

Обобщением теоремы Лагранжа является

е) Теорема 4 (Коши). *Пусть функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$, имеют конечные производные $f'(t)$ и $\varphi'(t)$ в каждой точке интервала $(a, b)$ и $\varphi'(t)\neq 0$. Тогда найдется такая точка $\xi\in(a, b)$, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \qquad (1.14)$$

*или*

$$[f(b)-f(a)]\,\varphi'(\xi)=[\varphi(b)-\varphi(a)]\,f'(\xi).$$

Геометрический смысл теоремы Коши: кривую (рис. 1) задают в параметрической форме $x=\varphi(t)$, $y=f(t)$; точка $M$ соответствует значению параметра $t=a$ и имеет координаты $(\varphi(a), f(a))$, а точка $N$ — координаты $(\varphi(b), f(b))$. Угловой коэффициент касательной к кривой в точке $\xi$ равен

$$\operatorname{tg}\alpha=y'_x=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

а угловой коэффициент хорды

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.$$

Таким образом, теорема Коши утверждает равенство угловых коэффициентов, т. е. параллельность касательной и хорды.

Теорема Лагранжа может быть получена как частный случай теоремы Коши, если положить в ней $t=x$ и $\varphi(x)=x$.

Отметим еще свойства производных для четных и нечетных функций.

ж) *Производная четной функции есть функция нечетная*; наоборот, *производная нечетной функции является четной*. В качестве простейших примеров укажем равенства

$$(\sin x)'=\cos x, \quad (\cos x)'=-\sin x.$$

**5.** Пусть $f(x)$ получена в результате применения элементарных операций (в смысле п. 3) над непрерывными функциями $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$. Тогда, вообще говоря, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ может быть получен в результате применения тех же операций над значениями $\varphi_1(x_0)$, $\varphi_2(x_0)$, ..., $\varphi_n(x_0)$. Например,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{e^x-\sin x}{x^2+x+1} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}-\sin\frac{\pi}{4}}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{\pi}{4}+1}.$$

Если эти операции или хотя бы одна из них оказываются невыполнимыми, то может случиться, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ находится на основании теорем об арифметических действиях над бесконечно малыми или бесконечно большими. Например,

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{\ln x}=0,$$

ибо, хотя функция $\ln x$ не определена при $x=0$, известно, что $\lim\limits_{x\to+0}\ln x=-\infty$, т. е. $\ln x$ есть величина бесконечно большая, а величина, обратная бесконечно большой, стремится к нулю.

Однако, например,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{1-\cos x}$$

и вообще

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

где

$$\varphi(x_0)=\psi(x_0)=0,$$

не может быть найден на основании таких теорем. В этом случае говорят, что получается «неопределенность», или неопределенное выражение, вида $\frac{0}{0}$.

В аналогичном смысле употребляются и другие неопределенные выражения вида

$$\frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 1^\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0.$$

Во многих случаях пределы функций, приводящих к неопределенным выражениям, могут быть найдены с помощью элементарных преобразований заданной функции, например:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \lim_{x \to a} \frac{x + a}{x^2 + ax + a^2} = \frac{2}{3a}.$$

Общий метод нахождения пределов неопределенных выражений основан на применении одной из приводимых ниже теорем. Обычно все они объединяются под общим наименованием *правила Лопиталя*. Первые из этих теорем относятся к неопределенным выражениям вида $\frac{0}{0}$.

Теорема 5. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в окрестности точки $a$ и $f(a) = \varphi(a) = 0$. Если существуют конечные производные $f'(a)$ и $\varphi'(a)$, причем $\varphi'(a) \neq 0$, то*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Если обе производные обращаются в нуль в точке $x = a$, то теорема 5 неприменима. Тогда следует обратиться к ее обобщениям. Такие обобщения могут быть проведены в различных направлениях. Первое из них требует обращения к производным высших порядков (см. § 2).

Теорема 6. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в окрестности точки $a$ и обращаются в нуль в точке $a$ вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно, а производные $f^{(n)}(a)$ и $\varphi^{(n)}(a)$ существуют и конечны, причем $\varphi^{(n)}(a) \neq 0$. Тогда*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)}.$$

В обоих рассмотренных случаях существование предела гарантируется выполнением условий соответствующих теорем. Другое направление обобщения теоремы 5 представляется следующей теоремой, в которой нахождение предела отношения функций сводится к нахождению предела отношения их производных.

Теорема 7. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в полуинтервале $(a, b]$ и удовлетворяют следующим условиям: 1) $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$; 2) в полуинтервале $(a, b]$*

*существуют конечные производные* $f'(x)$ *и* $\varphi'(x)$, *причем* $\varphi'(x) \neq 0$. *Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел отношения производных* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, *то предел отношения функций существует и равен*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{1.15}$$

Эта теорема представляет более широкие возможности, поскольку предел отношения производных часто может быть найден элементарными приемами. Она предоставляет также возможность повторного ее применения. При этом допустимы всякие упрощения получаемых выражений, сокращение общих множителей, использование уже известных пределов. Возможно также распространение этой теоремы на случай $a = \infty$.

Теорема 8. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *определены в полуинтервале* $[c, +\infty)$ *и удовлетворяют следующим условиям:* 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$; 2) *в полуинтервале* $[c, +\infty)$ *существуют конечные производные* $f'(x)$ *и* $\varphi'(x)$, *причем* $\varphi'(x) \neq 0$. *Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел отношения производных* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, *то предел отношения функций существует и равен*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Необходимо иметь в виду, что если предел отношения производных не существует, то теоремы 7 и 8 не могут быть использованы, хотя предел отношения функций может тем не менее существовать.

Пример 6. Найти предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2 \sin x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2 \cos x}\Big|_{x=0} = 1.$$

Здесь мы воспользовались теоремой 5.

Пример 7. Найти предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

Здесь $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$, $f(0) = 0$. Далее,

$$f'(0) = (e^x + e^{-x} - 2)\,|_{x=0} = 0,$$
$$f''(0) = (e^x - e^{-x})\,|_{x=0} = 0,$$
$$f'''(0) = (e^x + e^{-x})\,|_{x=0} = 2.$$

Точно так же

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x - \sin x, \quad \varphi(0) = 0, \\ \varphi'(0) &= (1 - \cos x)\big|_{x=0} = 0, \\ \varphi''(0) &= \sin x\big|_{x=0} = 0, \\ \varphi'''(0) &= \cos x\big|_{x=0} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, применяя теорему 6 при $n = 3$, находим, что искомый предел равен 2.

Пример 8. Найти предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}.$$

Здесь возможно применение теоремы 6 (при $n = 3$). Однако более короткий путь дает применение теоремы 7:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \left( \frac{1}{\cos^2 x} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} \right) = \\ = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2.$$

Пример 9. Предел отношения

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

не может быть найден по правилу Лопиталя, хотя оно и представляет пример неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Отношение производных имеет вид

$$\frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

и при $x \to 0$ не стремится ни к какому пределу. Между тем предел первоначального отношения существует и равен нулю, в чем легко убедиться, представляя это выражение в виде

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \left\{ x \frac{x}{\sin x} \sin \frac{1}{x} \right\} = 0.$$

Действительно, первый из этих множителей стремится к нулю, второй — к единице, а третий остается ограниченным.

Пример 10. Может случиться, что предел отношения производных существует без того, чтобы существовал предел отношения функций. Например, при $x \to +\infty$ отношение

$$\frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)}{e^{-x}(\cos x + \sin x)}$$

имеет вид $\frac{0}{0}$. Отношение производных равно

$$\frac{-5e^{-2x}\sin x}{-2e^{-x}\sin x} = \frac{5}{2}e^{-x}$$

и при $x \to +\infty$ имеет предел, равный 0. Представив же отношение функций в виде

$$\frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)}{e^{-x}(\cos x + \sin x)} = e^{-x}\left(1 + \frac{1}{1+\operatorname{ctg} x}\right),$$

легко убедиться в том, что это отношение не стремится при $x \to +\infty$ ни к какому пределу, поскольку множитель $\left(1 + \frac{1}{1+\operatorname{ctg} x}\right)$ все время колеблется между $-\infty$ и $+\infty$.

Теорема 8 здесь неприменима, так как производная $\varphi'(x)$ содержит множитель $\sin x$, обращающийся в нуль на любом полуинтервале $[c, +\infty)$, и условие 2) теоремы 8 не выполняется.

Следующие теоремы относятся к неопределенным выражениям вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 9. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в полуинтервале $(a, b]$ и удовлетворяют условиям:* 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$; 2) *в полуинтервале $(a, b]$ существуют конечные производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$. Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел отношения производных* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, *то предел отношения функций существует и равен*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Теорема 10. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в полуинтервале $[c, +\infty)$ и удовлетворяют условиям:* 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \infty$; 2) *в полуинтервале $[c, +\infty)$ существуют конечные производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$. Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел отношения производных* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, *то предел отношения функций существует и равен*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Неопределенные выражения других видов обычно преобразуют предварительно к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, что можно сделать с помощью элементарных преобразований. Например, произведение $f(x)\varphi(x)$, где $f(x)\to 0$ и $\varphi(x)\to\infty$, представляющее неопределенность вида $0\cdot\infty$, можно записать в виде

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} \quad \text{или} \quad \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Здесь первое представляет неопределенность вида $\frac{0}{0}$, а второе — $\frac{\infty}{\infty}$. Аналогично выражение $f(x)-\varphi(x)$, в котором $f(x)\to\infty$, $\varphi(x)\to\infty$ (неопределенность типа $\infty-\infty$), можно привести к виду

$$\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{\varphi(x)}\right):\frac{1}{f(x)\varphi(x)},$$

представляющему неопределенность типа $\frac{0}{0}$.

Неопределенные выражения вида $1^\infty$, $0^0$, $\infty^0$ рекомендуется предварительно логарифмировать, в результате чего они приводятся к рассмотренным ранее.

6. Как было указано в п. 4, функция, дифференцируемая на множестве $X$, непрерывна на нем. Обратное заключение неверно: существуют функции, непрерывные всюду на $E_1$ и не имеющие производной ни в какой точке. Первый из таких примеров был построен Б. Больцано. Приведем примеры таких функций.

*Функция Вейерштрасса* определяется рядом

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

где $0<a<1$, а $b$ — нечетное натуральное число, которое подбирается так, чтобы $ab>1+\frac{3}{2}\pi$. Ряд, определяющий функцию Вейерштрасса, мажорируется прогрессией $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$, а потому равномерно сходится на $E_1$, вследствие чего $f(x)$ непрерывна всюду. Однако ни в одной точке функция $f(x)$ не имеет конечной производной. Вместе с тем $f(x)$ имеет в каждой точке бесконечную производную.

*Функция Ван-дер-Вардена* определяется с помощью функции $u_0(x)$. Положим $u_0(x)=|s-x|$, где $s$ — ближайшее к $x$ целое число. Функция $u_0(x)$ непрерывна; график ее представляет собой ломаную, угловые коэффициенты звеньев которой равны $\pm 1$.

Определим функции $u_k(x)$ для $k = 1, 2, \ldots$ равенствами

$$u_k(x) = \frac{u_0(4^k x)}{4^k}.$$

Тогда $u_k(x)$ линейна на отрезках $\left[\frac{s}{2 \cdot 4^k}, \frac{s+1}{2 \cdot 4^k}\right]$. Функция Ван-дер-Вардена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

непрерывна всюду и не имеет ни в одной точке ни конечной, ни бесконечной производной.

**7.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на множестве $X$ и в каждой точке его имеет *конечную* производную $f'(x)$. Эта производная может быть при этом как непрерывной функцией, так и разрывной.

Рассмотрим, например, функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна при всех значениях $x$. Если $x \neq 0$, то

$$\varphi'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

При $x = 0$

$$\varphi'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = 0.$$

Таким образом, $\varphi'(x)$ существует для всех значений $x$.

Но так как при $x \to 0$ функция $2x \sin \frac{1}{x}$ стремится к нулю, а $\cos \frac{1}{x}$ колеблется между $-1$ и $+1$, то $\varphi'(x)$ не имеет предела при $x \to 0$ и, следовательно, $\varphi'(x)$ разрывна в точке $x = 0$. При этом $x = 0$ будет точкой разрыва второго рода. Если, как мы и предположили, функция $f(x)$ дифференцируема во всех точках множества $X$, то ее производная не может иметь точек разрыва первого рода: все ее точки разрыва, если они имеются, будут точками разрыва второго рода.

Производная, даже будучи разрывной, обладает свойством, присущим непрерывным функциям, именно имеет место следующая теорема:

Теорема 11 (Дарбу). *Если функция $\varphi(x)$ в каждой точке отрезка $[a, b]$ имеет определенную производную $\varphi'(x)$, то $\varphi'(x)$ принимает на отрезке $[a, b]$ все значения, заключенные между $\varphi'(a)$ и $\varphi'(b)$.*

В частности, отсюда следует, что если в точках $a$ и $b$ производная имеет разные знаки, то внутри отрезка $[a, b]$ найдется по крайней мере одна точка $\xi$, в которой $\varphi'(\xi)=0$.

**8.** Дифференциал функции одного переменного может быть определен двумя различными путями.

а) *Дифференциал как главная линейная часть приращения.* Для функции $y=f(x)$, определенной на множестве $X$ и непрерывной в точке $x=x_0 \in X$, приращение

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0), \quad x_0+h \in X,$$

является бесконечно малой величиной вместе с $h$. Если имеет место представление

$$\Delta y = Ah + o(h), \tag{1.16}$$

где $A$ постоянно относительно $h$, то выражение $Ah$ называется *дифференциалом* функции $f(x)$ в точке $x_0$ и обозначается

$$dy \equiv df(x_0) \equiv df(x_0, h).$$

Таким образом,

$$df(x_0, h) = Ah. \tag{1.17}$$

Чтобы представление приращения функции в виде (1.16) было возможно, необходимо и достаточно существование у функции $f(x)$ в точке $x_0$ конечной производной $f'(x_0)$, т. е. ее *дифференцируемость*. Такое представление является *единственным*, т. е. может иметь место лишь при одном возможном значении $A$. Этим значением оказывается $A=f'(x_0)$, и равенство (1.16) переписывается в виде

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f'(x_0)\,h + o(h) \tag{1.18}$$

и

$$df(x_0, h) = f'(x_0)\,h. \tag{1.19}$$

Полагая дифференциал независимого переменного *по определению* равным его приращению, можно воспользоваться обозначением $dx=h$. Тогда вместо (1.19) пишут

$$dy = f'(x_0)\,dx. \tag{1.20}$$

Выражение $f'(x_0)\,dx$ является *главной линейной частью* приращения $\Delta f(x)$, так как оно является линейной функцией относительно $dx$ и совпадает с приращением $\Delta f(x)$ с точностью до величин высшего порядка малости относительно $dx = h$.

Этим пользуются в приближенных вычислениях, когда приращение $\Delta y$ заменяют дифференциалом $f'(x_0)\,h$; при этом допускается ошибка $\alpha = o(h)$.

Пример 11.

$$\sin 46^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180} = 0{,}7194,$$

тогда как истинное значение $\sin 46^\circ = 0{,}7193\ldots$

б) *Дифференциал как производная по параметру.* Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x = x_0$, а $t$ и $h$ — действительные числа (предполагается, что точка $x = x_0 + th$ принадлежит множеству $X$ при $t \in [0, 1]$). Тогда при фиксированных $x_0$ и $h$ функция $f(x) = f(x_0 + th)$ является функцией $t$. Если у функции $f(x)$ существует производная $f'(x_0)$, то существует также и

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + th)\Big|_{t=0} = f'(x_0)\,h = df(x_0, h) \equiv df(x_0). \quad (1.21)$$

Если интерпретировать параметр $t \in [0, 1]$ как время, то точка $x_t = x_0 + th$ будет двигаться равномерно по оси $Ox$ от точки $x_0$ до точки $x_0 + h$ со скоростью $|h|$. При таком движении точки $x_t$ левая часть равенства (1.20) означает скорость изменения функции $f(x_t)$ в начальный момент $t = 0$.

Таким образом, дифференциал $df(x_0, h)$ можно определить как производную по параметру $\frac{d}{dt} f(x_0 + th)\big|_{t=0}$. Это определение легко обобщается на функции нескольких переменных (см. гл. II, § 1), а также и на функции более общей природы. Рассмотрим теперь дифференциал сложной функции $y = f[\varphi(t)]$, являющейся суперпозицией функций $x = \varphi(t)$ и $y = f(x)$. Если существуют производные $y'_x = f'(x)$ и $x'_t = \varphi'(t)$, то в силу теоремы п. 2 существует также и производная $y'_t = y'_x x'_t$ (см. (1.6)).

Если считать $x$ независимым переменным, то дифференциал $dy$ функции $y=f(x)$ выразится по формуле (1.20):

$$dy=y'_x\,dx=f'(x)\,dx.$$

Если же считать независимым переменным $t$, а $y$ и $x$—функциями от $t$, то

$$dy=y'_t\,dt=y'_x\,dx, \quad \text{где} \quad dx=x'_t\,dt.$$

Таким образом, форма выражения дифференциала

$$dy=f'(x)\,dx \tag{1.20'}$$

не изменяется при замене независимого переменного $x$ на $t$; изменяется лишь смысл обозначения $dx$: в формуле (1.20) $dx$ означает произвольное приращение $h$ переменного $x$, а в формуле (1.20′) — дифференциал функции $x=\varphi(t)$ переменного $t$. Это свойство называют *инвариантностью формы первого дифференциала*.

**9. Простейшие обобщения понятия производной.** Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве $X$, $x_0\in X$ и

$$\Delta y\equiv\Delta f(x_0)\equiv f(x_0+h)-f(x_0)$$

— приращение функции $f(x)$ в точке $x=x_0$ $(x_0+h\in X)$. При $h\to 0$ отношение $\dfrac{\Delta f(x_0)}{h}$ может не иметь определенного предела. Если для этого отношения существует предел слева (см., например, выпуск *СМБ* «Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби)»), то он называется *левой производной* или *производной слева* функции $f(x)$ в точке $x=x_0$ и обозначается $f'_-(x_0)$:

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to -0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{1.22}$$

Аналогично предел справа отношения $\dfrac{\Delta f(x_0)}{h}$, если он существует, называется *производной справа* или *правой производной* функции $f(x)$ в точке $x=x_0$:

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to +0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{1.23}$$

Левую и правую производные функции $f(x)$ называют *односторонними производными*. Если соответствующий односторонний предел равен бесконечности определенного знака, то функция имеет в данной точке *бесконечную одностороннюю производную*.

Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{для} \quad x\leqslant 1, \\ x-1 & \text{для} \quad x>1 \end{cases}$$

имеет в точке $x_0=1$ левую и правую производные, которые равны соответственно

$$f'_-(1)=0, \qquad f'_+(1)=+1.$$

Функция $f(x)=|x|\equiv x\operatorname{sing} x$, определенная для всех $x\in E_1$, имеет в точке $x_0=0$ обе односторонние производные, причем

$$f'_-(0)=-1, \qquad f'_+(0)=+1.$$

Функция $y=x^{2/3}$ имеет при $x_0=0$ односторонние производные:

$$f'_-(0)=-\infty, \qquad f'_+(0)=+\infty.$$

Некоторые предложения об односторонних производных:

а) Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=x_0\in X$ и имеет равные между собой односторонние производные (конечные или бесконечные) $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=a$, то $f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$ в точке $x=x_0$ и $f'(x_0)=a$.

б) Если функция $f(x)$ непрерывна в точках $a$ и $b$ из $X$, дифференцируема для всех $x\in(a, b)$ и существуют правый и левый пределы $f'(a+0)$ и $f'(b-0)$, то функция $f(x)$ имеет односторонние производные $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$, причем

$$f'_+(a)=f'(a+0), \qquad f'_-(b)=f'(b-0).$$

Эти равенства можно принять за определение односторонних производных. Оно более удобно для обобщений (см. § 2), но уже первоначального.

Если у функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0\in X$ обе односторонние производные существуют и различны: $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$, то такая

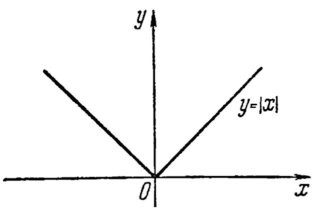


Рис. 2.

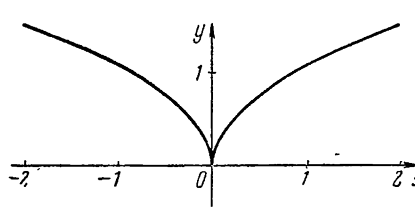


Рис. 3.

точка называется *угловой точкой*. Если производные слева и справа равны бесконечности различных знаков, то точка называется *точкой возврата* (точнее, *точкой возврата первого рода*).

Например, точка $x=0$ для функции $y=|x|$ является угловой точкой (рис. 2), а для функции $y=x^{2/3}$ — точкой возврата первого рода (рис. 3).

Другим обобщением понятия производной является *симметрическая производная* (*производная Шварца*). Симметрической производной $f^{[']}(x)$ функции $f(x)$ в точке $x = x_0 \in X$ называется предел отношения

$$f^{[']}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{\Delta}_h f(x_0)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h},$$

если этот предел существует и конечен.

Если у функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ существует обычная производная $f'(x_0)$, то симметрическая производная $f^{[']}(x)$ также существует и совпадает с обычной:

$$f^{[']}(x_0) = f'(x_0).$$

Обратное заключение неверно: симметрическая производная может существовать в данной точке без того, чтобы существовала обычная. Например, у функции

$$y = \begin{cases} -x & \text{при} \quad x < 0, \\ 2x & \text{при} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

при $x_0 = 0$ обычной производной не существует, тогда как ее производная Шварца в точке $x_0 = 0$ существует и равна $\frac{1}{2}$. У функции $y = |x|$ при $x_0 = 0$ симметрическая производная существует и равна нулю, а обычной производной также нет.

Вообще, если $f(x)$ — любая четная функция, то ее производная Шварца в точке $x_0 = 0$ всегда существует и равна нулю даже в том случае, когда $f(x)$ разрывна в этой точке. Например, для функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{x^2} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

симметрическая производная

$$f^{[']}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0 - h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\cos h}{h^2} - \dfrac{\cos h}{h^2}}{2h} = 0.$$

## § 2. Производные и дифференциалы высших порядков. Ряд Тейлора

**1.** Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $(a, b)$ точки $x = x_0 \in (a, b)$ и имеет в этой окрестности первую производную $f'(x)$. Тогда *второй последовательной производной*, или просто *второй производной*, $f''(x_0) = \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x = x_0}$

функции $f(x)$ в точке $x=x_0$ называют производную в точке $x=x_0$ от производной $f'(x)$, если последняя дифференцируема:

$$f''(x_0)=[f'(x)]'\big|_{x=x_0}.$$

Например, при $x\neq 0$ можем написать $(\ln x)''=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

*Второй разностью* $\Delta_h^2 f(x_0)$ функции $f(x)$ в точке $x=x_0$ называют приращение $\Delta_h u(x_0)$, где $u(x_0)=\Delta_h f(x_0)$:

$$\Delta_h^2 f(x_0)=\Delta_h(\Delta_h f(x_0))=f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0).$$

При этом функция $f(x)$ предполагается определенной на множестве $X$ и $x_0+kh\in X$ для $k=0,\ 1,\ 2.$

*Второй разностной производной* $\tilde{f}''(x_0)$ функции $f(x)$ в точке $x=x_0\in X$ называют предел отношения $\frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{h^2}$ при $h\to 0$, если этот предел существует:

$$\tilde{f}''(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}. \tag{1.24}$$

Если функция $f(x)$ обладает в окрестности точки $x\in X$ непрерывной второй последовательной производной $f''(x)$, то в этой окрестности у нее существует и вторая разностная производная $\tilde{f}''(x)$ и эти производные совпадают. Наоборот, если в окрестности $(a,\ b)$ точки $x=x_0$ существует *непрерывная* вторая разностная производная $\tilde{f}''(x_0)$, к которой отношение $\frac{\Delta_h^2 f(x)}{h^2}$ стремится *равномерно* в $(a,\ b)$, то в интервале $(a,\ b)$ для функции $f(x)$ существует вторая последовательная производная $f''(x)$ и $f''(x)=\tilde{f}''(x)$, т. е. оба определения второй производной совпадают.

Если отказаться от указанных дополнительных предположений, то из существования второй производной в смысле одного определения не следует ее существование в смысле другого. Например, у функции

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x} & \text{при}\quad x\neq 0,\\ 0 & \text{при}\quad x=0\end{cases}$$

для любого $x \in E_1$ существует первая производная

$$f'(x) = 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x},$$

причем $f'(0) = 0$. В точке $x_0 = 0$ функция $f(x)$ имеет вторую разностную производную, равную нулю, так как

$$\frac{\Delta_h^2 f(0)}{h^2} = \frac{8h^3 \sin\frac{1}{2h} - 2h^3 \sin\frac{1}{h}}{h^2} \to 0$$

при $h \to 0$. В то же время вторая последовательная производная при $x_0 = 0$ не существует, потому что выражение

$$\frac{\Delta_h f'(0)}{h} = \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = 3h\sin\frac{1}{h} - \cos\frac{1}{h}$$

не имеет предела при $h \to 0$.

**2.** Аналогично предыдущему *$n$-й последовательной производной* или просто *$n$-й производной* (иначе — *производной $n$-го порядка*)

$$f^{(n)}(x_0) \equiv \left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=x_0}$$

функции $f(x)$ в точке $x = x_0 \in X$ называют производную в этой точке от $(n-1)$-й производной $f^{(n-1)}(x)$, если $f^{(n-1)}(x)$ существует в некоторой окрестности точки $x_0$ и дифференцируема в ней. Иначе говоря, $n$-ю производную определяют рекуррентно через производную $(n-1)$-го порядка

$$f^{(n)}(x_0) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'\Big|_{x=x_0}. \tag{1.25}$$

Например, $(\sin x)''' = (\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$ при $x \in (-\infty, +\infty)$.

Если функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ производную $f^{(n)}(x_0)$, то она в окрестности точки $x = x_0 \in X$ непрерывна и имеет производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-2)}(x)$, непрерывные в *окрестности* точки $x = x_0$, и производную $f^{(n-1)}(x)$, непрерывную в *точке* $x = x_0$.

Также рекуррентно определяется в точке $x = x_0 \in X$ *$n$-я разность* (*$n$-е приращение*) $\Delta_h^n f(x_0)$ функции $f(x)$ как приращение $\Delta_h u(x_0)$, где $u(x_0) = \Delta_h^{n-1} f(x_0)$ есть $(n-1)$-я разность функции $f(x)$ в точке $x = x_0 \in X$:

$$\Delta_h^n f(x_0) = \Delta_h\left(\Delta_h^{n-1} f(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(x_0 + kh), \quad (1.26)$$

причем $f(x)$ определена на $X$, $x_0 + kh \in X$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n$ и $C_n^k$ означают биномиальные коэффициенты.

По определению, *$n$-й разностной производной* $\tilde{f}^{(n)}(x_0)$ функции $f(x)$ в точке $x = x_0 \in X$ назовем предел отношения $\frac{\Delta_h^n f(x_0)}{h^n}$ при $h \to 0$, если этот предел существует.

Из существования в некоторой точке $x = x_0 \in X$ разностной производной $\tilde{f}^{(n)}(x_0)$ функции $f(x)$, вообще говоря, не следует существование $n$-й последовательной производной. Обратное заключение имеет место при дополнительном предположении, как это показывает следующая теорема.

Теорема 12. *Если функция $f(x)$ обладает в окрестности точки $x = x_0 \in X$ последовательной $n$-й производной $f^{(n)}(x_0)$, непрерывной в точке $x = x_0$, то в этой точке $f(x)$ имеет также $n$-ю разностную производную.*

Если у функции $f(x)$ существует на множестве $X$ конечная последовательная $n$-я производная $f^{(n)}(x)$, то говорят, что эта функция *$n$ раз дифференцируема на $X$*. Если, кроме того, $f^{(n)}(x)$ непрерывна на $X$, то $f(x)$ называют *$n$ раз непрерывно дифференцируемой на $X$*. Как это было указано выше, в этом случае оба определения $n$-й производной эквивалентны и $f^{(n)}(x)$ совпадает также с $n$-й разностной производной.

3. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют $n$ непрерывных производных на множестве $X$. Для $n$-й производной их произведения имеет место *формула Лейбница*

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} = uv^{(n)} + \frac{n}{1} u' v^{(n-1)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} u^{(k)} v^{(n-k)} + \ldots + u^{(n)} v. \quad (1.27)$$

Эта формула может быть получена заменой в формуле разложения бинома $(u+v)^n$ каждого показателя степени $n_i$ символом $(n_i)$ дифференцирования порядка $n_i$, если условиться дополнительно, что $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$.

Формула для $n$-й степени суммы имеет вид

$$(u_1+u_2+\ldots+u_s)^n = \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_s \geqslant 0 \\ n_1+n_2+\ldots+n_s=n}} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_s!} u_1^{n_1} u_2^{n_2} \ldots u_s^{n_s}. \tag{1.28}$$

Если функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_s(x)$ непрерывно дифференцируемы $n$ раз на множестве $X$, то имеет место обобщение формулы Лейбница

$$(u_1 u_2 \ldots u_s)^{(n)} = \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_s \geqslant 0, \\ n_1+n_2+\ldots+n_s=n}} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_s!} u_1^{(n_1)} u_2^{(n_2)} \ldots u_s^{(n_s)}. \tag{1.29}$$

Правая часть формулы (1.29) получается из правой части формулы (1.28) заменой показателя степени $n_i$ символом $(n_i)$ дифференцирования порядка $n_i$.

**4.** Формулы для нахождения производных высших порядков сложной функции $F(x)=f[\varphi(x)]$ через производные функций $f(y)$ и $\varphi(x)$ могут быть получены последовательным дифференцированием равенства

$$F'(x)=f'(y)\,\varphi'(x),$$

выражающего правило дифференцирования сложной функции:

$$F''(x)=f''(y)\,[\varphi'(x)]^2+f'(y)\,\varphi''(x),$$

$$F'''(x)=f'''(y)\,[\varphi'(x)]^3+3f''(y)\,\varphi'(x)\,\varphi''(x)+f'(y)\,\varphi'''(x),$$

$$F^{\mathrm{IV}}(x)=f^{\mathrm{IV}}(y)\,[\varphi'(x)]^4+6f'''(y)\,[\varphi'(x)]^2\,\varphi''(x)+ \\ +f''(y)\,\{3\,[\varphi''(x)]^2+4\varphi'(x)\,\varphi'''(x)\}+f'(y)\,\varphi^{\mathrm{IV}}(x)$$

и т. д.; существование всех указанных производных предполагается.

**5.** Пусть функция $y=f(x)$ определена и дифференцируема в некоторой окрестности $(\alpha, \beta)$ точки $x_0$. Дифференциал $df(x, h)$ при фиксированном $h$ является в этой окрестности некоторой функцией $\varphi(x)$ от переменного $x$:

$$\varphi(x)=df(x, h)=f'(x)\,h.$$

Если в точке $x = x_0$ существует дифференциал $d\varphi(x_0, h)$ от функции $\varphi(x)$ (от дифференциала функции $f(x)$), то он называется *вторым дифференциалом* функции $f(x)$ в точке $x = x_0$. Второй дифференциал функции $f(x)$ обозначается одним из символов $d^2y = d^2f(x_0) = d^2f(x_0, h)$. По определению

$$d^2f(x_0, h) \equiv d\varphi(x_0, h) = d\{df(x, h)]|_{x=x_0} = d[f'(x)h]|_{x=x_0}.$$

Если в точке $x = x_0$ у функции $f(x)$ существует второй дифференциал, то в этой точке существует также вторая производная $f''(x_0)$ функции $f(x)$; верно и обратное утверждение; при этом

$$d^2y = d^2f(x_0, h) = f''(x_0)h^2 = f''(x_0)dx^2,$$
$$f''(x_0) = \frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=x_0} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}\bigg|_{x=x_0}$$

*Дифференциал n-го порядка* ($n$-й дифференциал) $d^ny = d^nf(x_0) = d^nf(x_0, h)$ от функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ определяется рекуррентно как дифференциал от ее $(n-1)$-го дифференциала $d^{n-1}f(x_0, h)$, если дифференциал $d^{n-1}f(x_0, h)$ определен в некоторой окрестности точки $x = x_0$:

$$d^ny \equiv d^nf(x_0) \equiv d^nf(x_0, h) = d\left[d^{n-1}f(x, h)\right]\Big|_{x=x_0}.$$

Если у функции $f(x)$ в точке $x = x_0 \in X$ существует $n$-й дифференциал $d^nf(x_0)$, то в этой точке у нее существует также $n$-я производная $f^{(n)}(x_0)$ и

$$d^nf(x_0, h) = f^{(n)}(x_0)h^n = f^{(n)}(x_0)dx^n. \tag{1.30}$$

У функции $f(x)$, обладающей $n$-й производной $f^{(n)}(x_0)$ в точке $x = x_0 \in X$, существует также и $n$-й дифференциал $d^nf(x_0, h)$, причем

$$f^{(n)}(x_0)h^n = f^{(n)}(x_0)dx^n = d^nf(x_0, h).$$

Дифференциал $n$-го порядка может быть определен как $n$-я производная по параметру аналогично тому, как это было сделано в § 1, п. 7. Имеет место формула

$$d^n f(x_0,\ h) = \frac{d^n}{dt^n}\left[f(x_0 + th)\right]\Big|_{t=0}, \tag{1.31}$$

обобщающая формулу (1.19) предыдущего параграфа.

6. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X$ и в интервалах $(x_0,\ x_0+h) \subset X$, $(x_0-h,\ x_0) \subset X$ имеет $k$ производных. Если в точке $x = x_0$ существует предел справа производной $f^{(s)}(x)$, $s \leqslant k$, то он называется *s-й правой производной* $f_+^{(s)}(x_0)$ функции $f(x)$ в точке $x = x_0 \in X$:

$$f_+^{(s)}(x_0) = f^{(s)}(x_0+0) = \lim_{x \to x_0+0} f^{(s)}(x). \tag{1.32}$$

Аналогично предел слева производной $f^{(s)}(x)$, $s \leqslant k$, в точке $x = x_0$, если он существует, называется *s-й левой производной* $f_-^{(s)}(x_0)$ функции $f(x)$ в точке $x = x_0 \in X$:

$$f_-^{(s)}(x_0) = f^{(s)}(x_0-0) = \lim_{x \to x_0-0} f^{(s)}(x).$$

Левые и правые производные функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называют ее *односторонними производными*.

Если у функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ существует $k$ производных $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(k)}(x_0)$, то в этой точке существуют все левые и правые производные $f(x)$ до порядка $k$ включительно, причем

$$\begin{gathered} f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0), \\ f''_-(x_0) = f''_+(x_0) = f''(x_0), \\ \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f^k_-(x_0) = f^{(k)}_+(x_0) = f^{(k)}(x_0). \end{gathered}$$

Если у функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ существуют равные между собой левые и правые производные до $k$-го порядка включительно, то существуют также и обычные производные $f^{(i)}(x_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ и

$$f^{(i)}(x_0) = f_-^{(i)}(x_0) = f_+^{(i)}(x_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Левые и правые производные в данной точке могут не совпадать. Например, у функции $f(x) = e^{-|x|}$, $x \in E_1$, в точке $x_0 = 0$ существуют левые и правые производные любого порядка и

$$f_+^{(k)}(0) = (-1)^k, \quad f_-^{(k)}(0) = +1 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Обычной производной в точке $x_0 = 0$ эта функция не имеет.

Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, то под ее производными в точках $a$ и $b$ понимают односторонние производные: левые при $x = b$ и правые при $x = a$.

*Вторую производную Шварца* (или *вторую симметрическую производную*) $f^{['']}(x_0)$ от функции $f(x)$ в точке $x = x_0 \in X$ можно определить двумя способами: *последовательно*, как симметрическую производную в точке $x = x_0$ от первой симметрической производной функции $f(x)$:

$$f^{['']}(x_0) = [f^{[']}(x)]^{[']}\Big|_{x=x_0}, \tag{1.33}$$

если $f^{[']}(x)$ существует в некоторой окрестности точки $x = x_0$, и *через вторую разность*

$$\overline{\Delta}_h^2 f(x_0) = \overline{\Delta}_h[\overline{\Delta}_h f(x_0)] = f(x_0 + 2h) - 2f(x_0) + f(x_0 - 2h), \tag{1.34}$$

как предел отношения $\dfrac{\overline{\Delta}_h^2 f(x_0)}{4h^2}$ при $h \to 0$, если этот предел существует и конечен:

$$f^{['']}(x_0) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_0 + h_1) - 2f(x_0) + f(x_0 - h_1)}{h_1^2}, \tag{1.35}$$

где положено $h_1 = 2h$.

Аналогично *n-ю производную Шварца* (*n-ю симметрическую производную*) от функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ также можно определить последовательно и через $n$-ю разность. В первом случае она определится как производная Шварца в точке $x = x_0$ от $(n-1)$-й симметрической производной функции $f(x)$:

$$f^{[n]}(x_0) = [f^{[n-1]}(x)]^{[']}\Big|_{x=x_0}, \tag{1.36}$$

если $f^{[n-1]}(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0 \in X$. Во втором случае определяется предварительно $n$-я разность функции $f(x)$ равенством

$$\overline{\Delta}_h^n f(x_0) = \overline{\Delta}_h\left[\overline{\Delta}_h^{n-1} f(x_0)\right] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\left[x_0 + \left(k - \frac{n}{2}\right)h\right], \tag{1.37}$$

что дает возможность определить $n$-ю симметрическую производную как предел отношения $\dfrac{\Delta_h^n f(x_0)}{h^n}$ при $h \to 0$, если этот предел существует и конечен:

$$f^{[n]}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^n f(x_0)}{h^n}. \tag{1.38}$$

**7.** Пусть $P_n(x)$ — многочлен степени $n$:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Тогда его коэффициенты можно выразить через значения самого многочлена и его производных в точке $x=0$ по формулам

$$a_i=\frac{P_n^{(i)}(0)}{i!}\quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$$P_n^{(0)}(0)=P_n(0),$$

и следовательно, многочлен можно записать в виде

$$P_n(x)=P_n(0)+\frac{P'_n(0)}{1!}x+\frac{P''_n(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n=$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{P_n^{(i)}(0)}{i!}x^i. \quad (1.39)$$

Если многочлен $P_n(x)$ разложен по степеням разности $(x-x_0)$:

$$P_n(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_n(x-x_0)^n,$$

то

$$A_i=\frac{P_n^{(i)}(x_0)}{i!}\quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),\qquad P_n^{(0)}(x_0)=P_n(x_0).$$

Таким образом,

$$P_n(x)=P_n(x_0)+\frac{P'_n(x_0)}{1}(x-x_0)+\frac{P''_n(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$+\frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\sum_{i=0}^{n}\frac{P_n^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i. \quad (1.40)$$

Формулу (1.40), как и ее частный случай (1.39), называют *формулой Тейлора* для многочлена. Формулу (1.39) часто называют также *формулой Маклорена*.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция, определенная на отрезке $[a,\ b]$ и имеющая $n$ непрерывных производных $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$. Тогда в окрестности любой точки $x=x_0\in(a,\ b)$ для $x_0+h\in(a,\ b)$ справедливо разложение

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+o(h^n). \quad (1.41)$$

Если функция $f(x)$ имеет производную порядка $n+1$ (не обязательно непрерывную), то вместо (1.41) разложение можно записать в виде

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+O(h^{n+1}). \quad (1.42)$$

Если в окрестности точки $x=x_0\in(a, b)$ функция $f(x)$ представлена в виде

$$f(x_0+h)=a_0+a_1h+a_2h^2+\ldots+a_nh^n+o(h^n),$$

то такое разложение единственно, в точке $x=x_0$ существует $n$ первых разностных производных (см. п. 2) и коэффициенты $a_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют соотношениям

$$a_0=f(x_0),\quad a_1=f'(x_0),\quad a_2=\frac{\tilde{f}''(x_0)}{2!},\ \ldots,\ a_n=\frac{\tilde{f}^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Формулы (1.41) и (1.42) называются *формулами Тейлора*. В частном случае при $x_0=0$ их называют также *формулами Маклорена*. Их можно переписать иначе, пользуясь дифференциалами:

$$\Delta f(x_0)\equiv f(x_0+h)-f(x_0)=df(x_0, h)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0, h)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0, h)+o(h^n), \quad (1.43)$$

$$\Delta f(x_0)=df(x_0, h)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0, h)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0, h)+O(h^{n+1}). \quad (1.44)$$

В тех случаях, когда точка $x_0$ является одним из концов отрезка $[a, b]$, под производными функциями $f(x)$ в этой точке следует понимать односторонние производные, существование которых предполагается. При этом $h$ должно быть таким, чтобы $x_0+h\in[a, b]$.

8. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве $X \subset E_1$. Эту функцию называют *бесконечно дифференцируемой* в точке $x = x_0 \in X$, если она имеет в точке $x = x_0$ конечные производные всех порядков. Для функции, бесконечно дифференцируемой в каждой точке $X$, по формуле Тейлора (1.42) можно написать

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x), \tag{1.45}$$

где $r_n(x) = O\left[(x - x_0)^{n+1}\right]$ называется *остаточным* или *дополнительным членом*. Число членов $n$ в формуле (1.45) можно брать сколь угодно большим. В результате этого в правой части равенства (1.45) приходят формально к *степенному ряду*

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots, \tag{1.46}$$

который называют *рядом Тейлора функции* $f(x)$. Коэффициенты этого ряда

$$a_0 = f(x_0), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.47}$$

называются *коэффициентами Тейлора* функции $f(x)$ (*тейлоровские коэффициенты*).

Степенной ряд (1.46) соответствует функции $f(x)$, однако в общем случае нельзя утверждать, что этот ряд сходится, а в случае сходимости, — что его сумма равна функции $f(x)$. Если обозначить через $S_n(f)$ частичную сумму ряда (1.46):

$$S_n(f) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

то $f(x) - S_n(f) = r_n(x)$. Отсюда следует, что *для того, чтобы ряд Тейлора* (1.46) *сходился к функции* $f(x)$ *в точке* $x \in X$, *необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора* $r_n(x)$ *стремился в данной* *точке $x$ к нулю при $n \to \infty$:*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

При выполнении этого условия имеет место разложение бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд (ряд Тейлора)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \tag{1.48}$$

Таким образом, для исследования возможности представления функции степенным рядом необходимо исследование поведения остаточного члена формулы Тейлора. Простейшая форма — *форма Пеано*:

$$r_n(x) = o[(x - x_0)^n]$$

была приведена выше (см. (1.41)). Ниже приводятся различные формы остаточного члена, содержащие $(n+1)$-ю производную:

а) *форма Лагранжа*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \vartheta(x - x_0)]}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1};$$

б) *форма Коши*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \vartheta(x - x_0)]}{n!}(1 - \vartheta)^n (x - x_0)^{n+1};$$

в) *форма Шлёмильха и Роша* $(p > 0)$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \vartheta(x - x_0)]}{n!\,p}(1 - \vartheta)^{n+1-p}(x - x_0)^{n+1};$$

г) *интегральная форма*

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n\,dt.$$

Множитель $\vartheta$, встречающийся в формулах а), б) и в), удовлетворяет условию $0 < \vartheta < 1$. Кроме того, $\vartheta$ зависит от $x$, $n$ и формы остаточного члена. Формы Лагранжа и Коши для остаточного члена могут быть получены как частные случаи более общей формы Шлёмильха, если в ней положить соответственно $p=n+1$ и $p=1$.

Большое применение находит частный случай разложения (1.48), который называют *рядом Маклорена*; он получается из (1.48) при $x_0=0$:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\\ +\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \quad (1.49)$$

Коэффициенты ряда Маклорена можно получить из формул (1.47), положив $x_0=0$:

$$a_0=f(0), \quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (1.50)$$

Представление функции степенным рядом является единственным. Именно, *если функция $f(x)$ представляется сходящимся к ней на некотором интервале степенным рядом*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k,$$

$x_0\in X$, *то $f(x)$ бесконечно дифференцируема на $X$, этот ряд является ее рядом Тейлора и его коэффициенты связаны с $f(x)$ формулами* (1.47).

Функция $f(x)$, допускающая в окрестности точки $x=x_0\in X$ разложение в сходящийся к ней степенной ряд, или, что то же самое, функция, ряд Тейлора которой сходится к ней в окрестности точки $x=x_0\in X$, называется *аналитической в точке* $x=x_0$. Если $f(x)$ является аналитической в точке $x=x_0\in X$, то она *аналитическая в некотором интервале*, содержащем точку $x_0$.

Функция $f(x)$, аналитическая в точке $x=x_0\in X$, бесконечно дифференцируема в этой точке. Обратное заключение неверно. Даже в том случае, когда ряд Тейлора сходится, его сумма может оказаться отличной от $f(x)$, т. е. функция не разлагается в сходящийся к ней степенной ряд.

Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при} \quad x\neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x=0 \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. При $x_0 = 0$ все ее производные обращаются в нуль. Поэтому ряд Тейлора для этой функции будет сходиться всюду, но его сумма всюду равна нулю (все коэффициенты ряда равны нулю) и не совпадает с функцией $f(x)$. Следовательно, функция $f(x)$ в окрестности точки $x = x_0$ не разлагается в сходящийся к ней степенной ряд и не является аналитической.

## § 3. Применение производных к исследованию функций. Экстремум

**1.** Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет во всех его точках, кроме, быть может, концов, производную (конечную или бесконечную). Имеет место следующая теорема, связывающая характер изменения функции со знаком ее производной.

Теорема 13. *Для того чтобы функция $f(x)$ была монотонно неубывающей* [1] *(невозрастающей), необходимо и достаточно, чтобы ее производная была неотрицательна (неположительна):*

$$f'(x) \geqslant 0 \qquad (f'(x) \leqslant 0).$$

Геометрически это означает, что касательная к графику неубывающей (невозрастающей) функции ни в одной точке не может быть наклонена к оси абсцисс под тупым (острым) углом.

Теорема 14. *Для того чтобы функция $f(x)$ была монотонно возрастающей (убывающей) в строгом смысле, достаточно, чтобы ее производная была неотрицательна (неположительна):*

$$f'(x) \geqslant 0 \qquad (f'(x) \leqslant 0)$$

*и ни на каком интервале, заключенном внутри $[a, b]$, не обращалась в нуль тождественно.*

Например, функция $y = x^3$ имеет производную $y' = 3x^2$, которая положительна всюду, кроме точки $x = 0$, где она

---

[1] Напомним, что функция называется *монотонно неубывающей (невозрастающей)* на отрезке $[a, b]$, если для любых точек $x_1$ и $x_2$, принадлежащих $[a, b]$ и таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$. Функция называется *монотонно возрастающей (убывающей)* в строгом смысле, если при тех же условиях $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

равна нулю. Эта функция монотонно возрастает на любом отрезке числовой оси (коротко — на всей числовой оси).

Функция $y = x - \sin x$ имеет производную $y' = 1 - \cos x$, обращающуюся в нуль в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) и положительную во всех остальных точках. Следовательно, эта функция является возрастающей на всей числовой оси.

В применении к неравенствам из сформулированных теорем следует, что если $f'(x) > 0$ в интервале $(a, b)$ и $f(a) \geqslant 0$, то $f(x)$ положительна в интервале $(a, b)$. Например, для функции $f(x) = x - \ln(1 + x)$ имеем $f(0) = 0$ и $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0$ при $x > 0$. Следовательно, $x > \ln(1 + x)$ для всех $x > 0$.

В случае, когда функция $f(x)$ не во всех точках интервала $(a, b)$ имеет определенную производную, сформулированные признаки допускают следующее обобщение.

Теорема 15. *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и одна из ее обобщенных производных* (см. § 1, п. 9) *остается все время неотрицательной (неположительной), не обращаясь, однако, тождественно в нуль ни на каком интервале, принадлежащем $[a, b]$, то функция $f(x)$ строго возрастает (убывает) на отрезке $[a, b]$.*

**2.** Локальное поведение функции во внутренних точках множества $X$ характеризуется следующей теоремой.

Теорема 16. *Если $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то найдется такая окрестность точки $x_0$, что для всех точек этой окрестности, лежащих справа от $x_0$,*

$$f(x) > f(x_0) \qquad (f(x) < f(x_0)),$$

*а для всех точек, лежащих слева от $x_0$,*

$$f(x) < f(x_0) \qquad (f(x) > f(x_0)).$$

В этом случае говорят, что функция $f(x)$ *возрастает (убывает) в точке $x_0$.*

Следует иметь в виду, что функция $f(x)$ может при этом и *не быть монотонной* ни в каком интервале, окружающем точку $x_0$. Так, для функции

$$y = x^2 \sin\frac{1}{x} + \alpha x \qquad (0 < \alpha < 1)$$

в точке $x=0$ производная равна (см. пример на стр. 24)

$$y'_{x=0} = \alpha > 0.$$

В то же время в остальных точках

$$y' = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + \alpha,$$

а это выражение при $x \to 0$ имеет нижний и верхний пределы, равные $\alpha - 1$ и $\alpha + 1$. Так как $\alpha - 1 < 0$, а $\alpha + 1 > 0$, то в любой близости к точке $x_0$ найдутся точки, в которых $y' < 0$, и точки, в которых $y' > 0$. Поэтому не существует никакого интервала, содержащего точку $x = 0$, в котором функция была бы монотонной.

3. Определение. Говорят, что непрерывная функция $f(x)$ имеет *максимум* (*минимум*) во внутренней точке $x_0$ множества $X$, если существует такая окрестность точки $x_0$, для всех точек которой выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0) \qquad (f(x) > f(x_0)).$$

Точка $x_0$ называется при этом *точкой максимума* (*минимума*) *функции*. Точки максимума и минимума называются *точками экстремума функции*. Значения функции в этих точках называются *экстремальными значениями функции*.

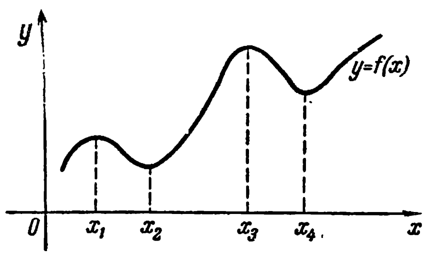


Рис. 4.

Так, на рис. 4 точки $x_1$ и $x_3$ — точки максимума, а точки $x_2$ и $x_4$ — точки минимума.

Указанные неравенства определяют *точки строгого экстремума* (обычно их называют просто точками экстремума).

Если в этих неравенствах заменить знаки $<$ и $>$ на $\leqslant$ и $\geqslant$, то точка $x_0$ будет точкой нестрогого экстремума.

Определение точек экстремума носит локальный характер. Функция может иметь сколько угодно точек максимума и минимума, причем значения ее в некоторых точках минимума могут оказаться бо́льшими, чем в некоторых точках максимума (на рис. 4 $f(x_4) > f(x_1)$).

Необходимый признак экстремума. *Функция $f(x)$ может иметь экстремумы только в тех точках, в которых ее производная $f'(x)$ либо обращается в нуль, либо не существует.*

Геометрическая иллюстрация различных возможных случаев представлена на рис. 5. В точках $x_1$ и $x_2$ имеет место

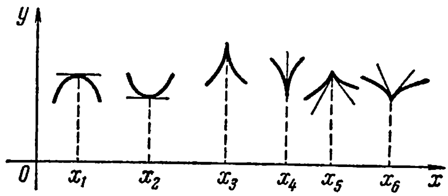


Рис. 5.

гладкий экстремум; в этих точках касательная к графику функции параллельна оси абсцисс. Точки $x_3$ и $x_4$ являются точками возврата графика с вертикальной касательной; точки $x_5$ и $x_6$ — угловые точки графика.

Примеры функций $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$, из которых первая имеет производную, равную нулю при $x = 0$, а вторая при $x = 0$ производной не имеет ($y' = +\infty$ при $x = 0$), показывают, что необходимый признак не является достаточным.

Первый достаточный признак. *Пусть непрерывная функция $f(x)$ имеет первую производную $f'(x)$ в некоторой окрестности точки $x_0$, за исключением, быть может, самой точки $x_0$, причем производная сохраняет знак как для $x < x_0$, так и для $x > x_0$, где $x$ — точка указанной окрестности.*

*Тогда, если для $x < x_0$ производная положительна (отрицательна), а для $x > x_0$ производная отрицательна (положительна), то точка $x_0$ является точкой максимума (минимума) функции $f(x)$.*

В самой точке $x_0$, в соответствии с необходимым признаком экстремума, производная равна нулю или не существует.

Коротко этот признак формулируется так. Если при переходе через точку $x_0$ производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то точка $x_0$ является точкой максимума, а если с минуса на плюс, то — точкой минимума.

Если и слева и справа от точки $x_0$ производная $f'(x)$ сохраняет один и тот же знак, то точка $x_0$ не может являться точкой экстремума.

С геометрической точки зрения первый достаточный признак означает, что если интервал возрастания функции сменяется интервалом ее убывания (или наоборот), то точка, отделяющая друг от друга эти интервалы, является точкой максимума (минимума).

Обратное, однако, не всегда справедливо, т. е. точка экстремума может и не отделять друг от друга интервалы монотонности функции противоположного смысла.

Так, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(\sin^2 \dfrac{1}{x} + \alpha\right) & \text{при} \quad x \neq 0, \quad \alpha > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

положительна при $x \neq 0$; следовательно, точка $x = 0$ является точкой минимума. Производная в этой точке существует и равна нулю:

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2\left(\sin^2 \dfrac{1}{h} + \alpha\right)}{h} = 0.$$

Однако в соседних точках производная

$$f'(x) = 2x\left(\sin^2 \frac{1}{x} + \alpha\right) - \sin \frac{2}{x}$$

при $x \to 0$ имеет верхний и нижний пределы соответственно $+1$ и $-1$, т. е. в любой близости к точке $x_0$ существуют точки, где $f'(x) > 0$, и точки, где $f'(x) < 0$; это означает, что никакой интервал с концом в точке $x = 0$ не является интервалом монотонности. (Конструкция этого примера аналогична конструкции примера п. 2.)

Второй достаточный признак. *Пусть в точке $x_0$ имеем $f'(x_0) = 0$. Вычислим последовательные производные $f^{(k)}(x_0)$, предполагая, что они существуют. Если первая не равная нулю производная $f^{(k)}(x_0)$ нечетного порядка, то точка $x_0$ не является точкой экстремума; если же эта производная четного порядка, то при $x = x_0$ будет максимум, если она отрицательна, и минимум, если она положительна.*

На практике обычно этот признак применяют при $f''(x_0) \neq 0$.

Заметим, что первый признак предполагает известным поведение первой производной в окрестности точки $x_0$; второй признак требует только знания частных значений некоторых последовательных производных.

При исследовании функции $f(x)$ на экстремум часто оказывается полезным следующее замечание. Если $a$ — корень производной $f'(x)$ кратности $\lambda$, то ее можно представить в виде

$$f'(x) = (x-a)^{\lambda} \varphi(x), \qquad (1.51)$$

где $\varphi(x)$ не обращается в нуль в точке $a$. Точка $a$ будет точкой экстремума, если $\lambda$ — нечетное число, и не будет ею, если $\lambda$ — четное число. В первом случае точка $a$ — точка максимума при $\varphi(a) < 0$ и точка минимума при $\varphi(a) > 0$.

Точка $a$ также будет являться точкой экстремума, если в представлении (1.51) $\lambda$ имеет вид $\frac{p}{q}$, где $p$ и $q$ — нечетные числа $\left(\text{дробь } \frac{p}{q} \text{ несократима}\right)$.

Пример 12. Если $y = x^n e^{-x}$ ($n$ — натуральное число), то производная $y'$ равна $y' = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$.

В соответствии с предыдущим замечанием точка $x = n$ при любом $n$ является точкой экстремума, и притом точкой максимума. Значение функции в этой точке $y|_{x=n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Точка $x = 0$ будет экстремальной *только* при $n$ четном; в этом случае она будет точкой минимума. При $n$ нечетном точка $x = 0$ не является экстремальной [1]).

Пример 13. Производные функции $y = e^x \sin x$ равны:

$$y' = e^x(\sin x + \cos x), \qquad y'' = 2e^x \cos x.$$

Производная $y'$ обращается в нуль, когда $\sin x + \cos x = 0$, т. е. когда $\operatorname{tg} x = -1$. При этом $x = \pi n - \frac{\pi}{4}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Подставим эти значения во вторую производную.

Так как $\cos\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} > 0$ и $\cos\left[(2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}\right] = -\cos\frac{\pi}{4} < 0$, то согласно второму достаточному признаку точки $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$ будут точками минимума, а точки $x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}$ — точками максимума ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

[1]) Точка $O(0, 0)$ оказывается при этом точкой *перегиба*.

**4.** Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Согласно свойствам непрерывных функций она достигает на этом отрезке *своего абсолютного максимума* и *минимума*, или, иначе, своего *наибольшего* и *наименьшего значений*. Отыскание их производится обычно на основе исследования функции на экстремум. Именно функция $f(x)$ может принимать свое наибольшее (наименьшее) значение на отрезке $[a, b]$ либо в точках максимума (минимума), либо на концах отрезка.

На рис. 6 показаны различные возможные случаи.

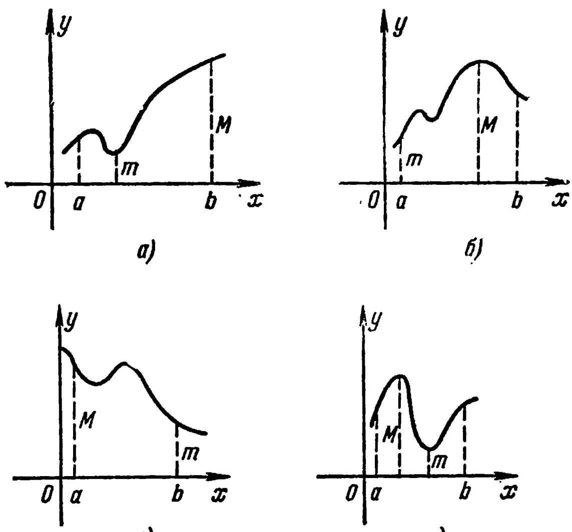


Рис. 6.

Особенно просто отыскание наибольшего и наименьшего значений функции производится в двух случаях:

а) Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ монотонно возрастает (убывает), то она принимает на левом (правом) конце отрезка наименьшее значение, а на правом (левом) конце отрезка — наибольшее.

б) Если функция имеет в интервале $(a, b)$ только одну точку экстремума, то в этой точке достигается в случае максимума наибольшее значение функции, а в случае минимума — наименьшее.

Пример 14. Найдем наибольшее ($M$) и наименьшее ($m$) значения функции $y=\frac{x}{1+x^2}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$.

Производная $y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ обращается в нуль на данном отрезке в точке $x=1$. Сравнивая значения функции в этой точке и на концах отрезка:

$$y\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}, \quad y|_{x=1}=\frac{1}{2}, \quad y|_{x=3}=\frac{3}{10},$$

находим, что $M=\frac{1}{2}$ и $m=\frac{3}{10}$.

Пример 15. Функция $y=\sin 2x-x$ задана на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Производная $y'=2\cos 2x-1$ обращается в нуль на данном отрезке при $x=\pm\frac{\pi}{6}$. Сравнивая значения функции в точках $x=\pm\frac{\pi}{6}$ и в точках $x=\pm\frac{\pi}{2}$:

$$y\Big|_{x=\pm\frac{\pi}{6}}=\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\approx\pm 0{,}34, \quad y\Big|_{x=\pm\frac{\pi}{2}}=\mp\frac{\pi}{2}\approx\mp 1{,}57,$$

находим, что $M=1{,}57$, $m=-1{,}57$. Оба эти значения принимаются функцией на концах отрезка.

5. Установление критериев *выпуклости* [1]) функции также основано на применении производных.

---

[1]) Непрерывная функция $f(x)$ называется *выпуклой книзу* или просто *выпуклой* на отрезке $[a, b]$, если для любых двух точек $x_1$ и $x_2$ этого отрезка

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Если выполняется неравенство противоположного смысла, т. е. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, то функция называется *выпуклой кверху*. Часто встречается и другая терминология, именно говорят, что в первом случае график функции обращен выпуклостью вниз, т. е. *вогнут*, а во втором случае, что график обращен выпуклостью вверх, т. е. *выпукл*.

Теорема 17. *Если функция $f(x)$ во всех точках отрезка $[a, b]$ имеет первую производную $f'(x)$, то для того, чтобы функция $f(x)$ была выпукла (выпукла кверху), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)$ была неубывающая (невозрастающая) функция.*

Как следствие отсюда получается следующая

Теорема 18. *Если функция $f(x)$ во всех точках отрезка $[a, b]$ имеет вторую производную $f''(x)$, то для того, чтобы функция $f(x)$ была выпукла (выпукла кверху), необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geqslant 0$ $(f''(x) \leqslant 0)$ для всякого $x$ из отрезка $[a, b]$.*

Если выпуклая на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ не во всех точках имеет обыкновенную производную, то имеют место следующие *свойства выпуклых функций*:

1) В любой точке интервала $(a, b)$ существуют правая и левая производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$, причем

$$f'_-(x) \leqslant f'_+(x).$$

2) Производная $f'_+(x)$ — неубывающая непрерывная справа функция.

3) Производная $f'_-(x)$ — неубывающая непрерывная слева функция.

Аналогично формулируются свойства функций, выпуклых кверху.

## § 4. Дифференциальные операторы

**1.** В различных разделах анализа, например в вариационном исчислении, приходится рассматривать классы (множества) функций, удовлетворяющих тем или иным условиям.

Через $C = C[X]$ обозначают класс (множество) функций $f(x)$, определенных и непрерывных на множестве $X$. Символом $C_n = C_n[X]$ обозначают класс функций $f(x)$, определенных на множестве $X$ и $n$ раз непрерывно дифференцируемых на $X$. Последнее означает (см. § 2), что $f(x)$ непрерывна на $X$ и имеет производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$, которые также непрерывны на $X$.

Например, функция $f(x) = e^x$ принадлежит любому классу $C_n$; функция $|x|$ принадлежит классу $C[-1, +1]$, но не принадлежит классу $C_1[-1, +1]$; функция $|x|^{2n+1}$ принадлежит классу $C_{2n}[-1, +1]$, но не принадлежит классу $C_{2n+1}[-1, +1]$.

Все указанные здесь классы являются *линейными системами*, т. е.: 1) вместе с функциями $f_1$ и $f_2$, принадлежащими данному классу, ему принадлежит также функция $f_1+f_2$ и 2) при любом действительном числе $\lambda$ функция $\lambda f$ принадлежит тому же классу, что и сама функция $f$.

2. Пусть $X$ и $Y$ — два произвольных множества (например, классы функций) и дан закон (правило), по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствии единственный вполне определенный элемент $y \in Y$. Тогда говорят, что задан *оператор* (или *абстрактная функция*) $y=Ax$ (иначе, $y=A(x)$), определенный на множестве $X$. При этом множество $X$ называют *областью определения оператора* $A$, элемент $y=A(x)$ — *образом* элемента $x$, множество $Y_A \subset Y$ всех образов элементов $X$ — *областью значений* оператора. Для каждого элемента $y \in Y_A$ элемент $x \in X$, для которого $A(x)=y$, называют *прообразом* этого элемента.

Пусть множества $X$ и $Y$ являются линейными системами; тогда оператор $y=Ax$, действующий из $X$ в $Y$, называется *линейным*, если он:

а) *аддитивен*, т. е. для любых $x_1$ и $x_2$ из $X$

$$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2; \tag{1.52}$$

б) *однороден*, т. е. для любого действительного числа $\lambda$

$$A(\lambda x)=\lambda A(x). \tag{1.53}$$

3. Для случая, когда $X$ и $Y$ — конечномерные системы, линейный оператор был рассмотрен в гл. II выпуска *СМБ* «Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби)». В настоящем параграфе будут рассматриваться линейные операторы, действующие на функции $f(x)$ некоторого класса.

Примером такого линейного оператора может служить оператор $A=[x]$ умножения на аргумент

$$Af(x) \equiv [x]\,f(x)=xf(x).$$

Другим примером линейного оператора является оператор дифференцирования $D=\dfrac{d}{dx}$ (см. формулы (1.2), (1.3)).

*Оператором дифференцирования* $D=\frac{d}{dx}$ называют такой оператор, который каждой функции $f(x)$ из класса $C_1[X]$ ставит в соответствие функцию $\varphi(x)=Df(x)=f'(x)$ (*ее производную*) из класса $C[X]$, т. е. любую функцию $f(x)\in C_1$ превращает в некоторую функцию (производную) $f'(x)\in C$. Таким образом, $D=\frac{d}{dx}$ есть *оператор, действующий из класса* $C_1$ *в класс* $C$.

Аналогично оператор $D^n=\frac{d^n}{dx^n}$ превращает любую функцию $f(x)$ из класса $C_n$ в функцию $\varphi(x)=D^n f(x)=f^{(n)}(x)$ класса $C$, т. е. *оператор* $D^n=\frac{d^n}{dx^n}$ *действует из класса* $C_n$ *в класс* $C$.

Пусть $P_n(t)$ — многочлен степени $n$ с действительными коэффициентами

$$P_n(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k t^k. \tag{1.54}$$

Через $P_n(D)$ обозначают оператор

$$P_n(D)=\sum_{k=0}^{n} a_k D^k; \tag{1.55}$$

его называют *дифференциальным многочленом* или *многочленом от оператора дифференцирования.*

Оператор

$$P_n(D)=\sum_{k=0}^{n} a_k D^k$$

действует из класса $C_n$ в класс $C$, т. е. для любой функции $f(x)$ из класса $C_n$ функция

$$P_n(D)f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(x)$$

принадлежит классу $C$.

Некоторые *свойства дифференциального многочлена*:

а) $$P_n(D)e^{\lambda x}=P_n(\lambda)e^{\lambda x}. \tag{1.56}$$

б) Обобщение формулы Лейбница. Если $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, то

$$P_n(D)(u_1u_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k(u_1u_2) = [P_n(D)u_1]u_2 + [P_n'(D)u_1]Du_2 + \frac{1}{2!}[P_n''(D)u_1]D^2u_2 + \frac{1}{3!}[P_n'''(D)u_1]D^3u_2 + \ldots + \frac{1}{k!}[P_n^{(k)}(D)u_1]D^ku_2 + \frac{1}{n!}[P_n^{(n)}(D)u_1]D^nu_2, \quad (1.57)$$

или, короче,

$$P_n(D)(u_1u_2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}[P_n^{(k)}(D)u_1]D^ku_2, \quad (1.58)$$

где $P_n^{(k)}(t)$ означает $k$-ю производную многочлена $P_n(t)$.

Из а) и б) следует

в) $$P_n(D)(x^m e^{\lambda x}) = \{x^m P_n(\lambda) + mx^{m-1}P_n'(\lambda) + \ldots \ldots + C_m^k x^{m-k} P_n^{(k)}(\lambda) + \quad + P_n^{(m)}(\lambda)\} e^{\lambda x}. \quad (1.59)$$

Пример 16. При $P_3(t) = t^3 - 2t + 1$ имеем

$$P_3'(t) = 3t^2 - 2, \quad P_3''(t) = 6t, \quad P_3'''(t) = 6, \quad P_3^{IV}(t) = 0.$$

Поэтому

$$P_3(D)e^{\lambda x} \equiv \left(\frac{d^3}{dx^3} - 2\frac{d}{dx} + 1\right)e^{\lambda x} = (\lambda^3 - 2\lambda + 1)e^{\lambda x}.$$

Точно так же

$$P_3(D)(x^4e^{\lambda x}) \equiv \left(\frac{d^3}{dx^3} - 2\frac{d}{dx} + 1\right)(x^4e^{\lambda x}) = \{x^4P_3(\lambda) + 4x^3P_3'(\lambda) + 6x^2P_3''(\lambda) + 4xP_3'''(\lambda)\}e^{\lambda x} = \{x^4(\lambda^3 - 2\lambda + 1) + 4x^3(3\lambda^2 - 2) + 36x^2\lambda + 24x\}e^{\lambda x}.$$

г) Если число $\lambda_0$ является корнем многочлена $P_n(t)$ кратности $k$, т. е.

$$P_n(\lambda_0) = P_n'(\lambda_0) = \ldots = P_n^{(k-1)}(\lambda_0) = 0, \quad P_n^{(k)}(\lambda_0) \neq 0,$$

то имеют место равенства

$$P_n(D)\,e^{\lambda_0 x}=P_n(D)\left(xe^{\lambda_0 x}\right)=\ldots=P_n(D)\left(x^{n-1}e^{\lambda_0 x}\right)=0. \qquad (1.60)$$

Пример 17. $\lambda=1$ — тройной корень многочлена

$$P_4(t)=t^4-3t^3+3t^2-t=t\,(t-1)^3,$$

вследствие чего

$$P_3(D)\,e^x=P_3(D)\,(xe^x)=P_3(D)\,(x^2e^x)=0.$$

д) Если

$$P_n(t)\,P_m(t)\equiv P_{n+m}(t)=P_m(t)\,P_n(t),$$

то и

$$P_n(D)\,P_m(D)=P_{n+m}(D)=P_m(D)\,P_n(D). \qquad (1.61)$$

Пример 18. Для $P_1(t)=t+1$, $P_2(t)=t^2-t+1$ находим

$$P_{1+2}(t)=P_1(t)\,P_2(t)=(t+1)\,(t^2-t+1)=$$
$$=t^3+1=(t^2-t+1)\,(t+1),$$

поэтому

$$P_1(D)\,P_2(D)=(D+1)\,(D^2-D+1)=P_2(D)\,P_1(D)=$$
$$=(D^2-D+1)\,(D+1)=D^3+1=P_3(D).$$

4. Множество операторов, действующих из множества $E$ в множество $E_1$, образует *линейную систему*, если для любых двух таких операторов $A$ и $B$ можно определить их сумму $A+B$ как оператор из $E$ в $E_1$ и для любого оператора $A$ можно определить *произведение оператора $A$ на действительное постоянное* $\lambda$ — оператор $\lambda A$, действующий из $E$ в $E_1$. При этом эти действия над операторами должны быть определены так, чтобы для любого элемента $x$ из $E$ выполнялись условия

$$(A+B)\,x=Ax+Bx\in E_1, \qquad (1.62)$$

$$(\lambda A)\,x=\lambda Ax\in E_1. \qquad (1.63)$$

Пусть, далее, оператор $A$ действует из $E_1$ в $E$, а оператор $B$ — из $E_2$ в $E_1$. Тогда под *произведением $AB$ операторов $A$ и $B$* понимают оператор, действующий из $E_2$ в $E$, причем для любого элемента $x\in E_2$ имеем

$$AB\,(x)=A\,(Bx). \qquad (1.64)$$

Таким образом, *произведение операторов $AB$ означает последовательное применение сначала оператора $B$, а затем оператора $A$.*

Если $E \subset E_1 \subset E_2$, оператор $A$ переводит $E$ в $E_1$ и $E_1$ в $E_2$, то оператор $A^2 = A \cdot A$ действует из $E_2$ в $E$. В частности, $D^2 = D \cdot D$ — оператор, действующий из класса $C_2$ в класс $C$.

Аналогично определяется *произведение $n$ операторов* $A_n A_{n-1} \ldots A_2 A_1$ как последовательное применение операторов $A_1$, $A_2$, $A_{n-1}$, $A_n$ и *$n$-я степень $A^n$ оператора $A$*:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}.$$

(Например, рассмотренные выше операторы $P_n(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k$ получаются возведением $D$ в степень $k$ ($k \leqslant n$), умножением на постоянные $a_k$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) и сложением.)

Если определены операторы $BA$ и $AB$, причем $BA = AB$, т. е. для любого $x$, для которого это выражение имеет смысл, имеет место равенство

$$A(Bx) = B(Ax), \tag{1.65}$$

то операторы $A$ и $B$ называют *коммутирующими* или *перестановочными*. Говорят также, что операторы $A$ и $B$ *коммутируют между собой*. Например, любые операторы $P_n(D)$ и $P_m(D)$ перестановочны, как это видно из (1.61).

Оператор $[x]$ умножения на аргумент (см. п. 3) не коммутирует с оператором $D$. Действительно, для функции $f(x)$ из класса $C_1$ имеем

$$[x](Df(x)) = [x]f'(x) = xf'(x);$$

с другой стороны,

$$D([x]f(x)) = D(xf(x)) = (xf(x))' = f(x) + xf'(x).$$

Таким образом, $[x]Df(x) \neq D[x]f(x)$. Из выражений для левой и правой частей находим

$$(D[x] - [x]D)f(x) = f(x). \tag{1.66}$$

Обозначим через $I$ единичный оператор, не меняющий функции $f(x)$, на которую он воздействует, т. е.

$$If(x) = f(x). \tag{1.67}$$

Тогда из (1.66) следует, что на классе $C_1$

$$D[x] - [x]D = I. \tag{1.68}$$

Аналогично

$$P_n(D)[x] - [x]P_n(D) = P'_n(D). \tag{1.69}$$

**5. Линейный дифференциальный оператор.** Всякий оператор вида

$$A = \sum_{k=0}^{n} [\psi_k(x)] D^k, \tag{1.70}$$

где $[\psi_k(x)]$ — оператор умножения на непрерывную функцию $\psi_k(x)$, $\psi_n(x) \not\equiv 0$, непрерывные функции на множестве $X$, называется *линейным дифференциальным оператором*. Число $n$ называют *порядком оператора*. Линейный дифференциальный оператор (1.70) отображает любую функцию из класса $C_n$ в некоторую функцию класса $C$:

$$Af(x) = \sum_{k=0}^{n} [\psi_k(x)] D^k f(x) = \sum_{k=0}^{n} \psi_k(x) f^{(k)}(x). \tag{1.71}$$

Всякий линейный дифференциальный оператор

$$B = \sum_{k=n}^{n+m} [\psi_k(x)] D^k$$

обращает любой многочлен

$$P_{n-1}(x) = \sum_{s=0}^{n-1} a_s x^s$$

степени $n-1$ в нуль. Действительно,

$$BP_{n-1}(x) = \sum_{k=n}^{n+m} \psi_k(x) D^k P_{n-1}(x) = \sum_{l=0}^{m} \psi_{n+l}(x) D^{n+l} P_{n-1}(x) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m} \psi_{n+l} \frac{d^{n+l}}{dx^{n+l}} P_{n-1}(x) = 0.$$

При замене независимого переменного $t$ на переменное $x$ посредством подстановки $t = \alpha(x)$ (и $\alpha \neq 0$) дифференциальный оператор $A(D_t)$ по переменной $t$ переходит в дифференциальный оператор

$$\tilde{A}(D) \qquad \left(\text{где } D = D_x = \frac{d}{dx}\right)$$

по переменной $x$ того же порядка, что и оператор $D_t$, если только $\alpha(x) \in C_n$. Иначе говоря, *порядок дифференциального оператора не меняется при замене независимого переменного новым.*

ГЛАВА II

# ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ $n$ ПЕРЕМЕННЫХ

## § 1. Производные и дифференциалы первого порядка

**1.** Пусть $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ означает элемент $n$-мерного пространства $E_n$, который можно трактовать как точку или как вектор с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Через $e_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ обозначаются орты в $E_n$ — единичные векторы в направлении осей $x_i$:

$$X(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Функция $f(X)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция $n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, или, что то же самое, функция точки (вектора) $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $E_n$.

*Норма* (евклидова) $\|X\|$ вектора $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяется равенством

$$\|X\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \tag{2.1}$$

а *расстояние* между точками $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — равенством

$$\rho(X, Y)=\|X-Y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}. \tag{2.2}$$

*Сфера* $S(X^0, r)$ радиуса $r\,(>0)$ с центром в точке $X^0$ есть множество точек $X$, для которых $\rho(X^0, X)=\|X-X^0\|<r$. Прямой, соединяющей точки $X^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и $X^0+h$, где $h=(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, в $E_n$ является множество точек $\{X_t=X^0+th\}$, $-\infty<t<+\infty$. То же множество при $0\leqslant t\leqslant 1$ называют *отрезком*, соединяющим точки $X^0$

(начало) и $X^0+h$ (конец). Конечное множество отрезков, у которых начало следующего совпадает с концом предыдущего, называют *ломаной*.

*Область* $G$ в $E_n$ есть такое множество точек, которое вместе с любой точкой $X^0$ содержит и некоторую сферу $S(X^0, r)$. При этом область предполагается связной, т. е. любые две ее точки могут быть соединены ломаной, все точки которой лежат внутри области.

*Окрестностью* точки $X^0$ в $E_n$ называется любая область из $E_n$, содержащая $X^0$. Каждая окрестность точки $X^0$ содержит некоторую сферу $S(X^0, r)$.

2. Пусть $X(x_1, x_2, \quad x_n)$ и $X'(x'_1, x'_2, \quad x'_n) = X+h_ie_i$ — точки $E_n$; очевидно, что

$$x'_j = x_j \qquad \text{при } j \neq i,$$
$$x'_i = x_i + h_i,$$

т. е. $i$-я координата получила приращение $h_i$.

Если $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция, определенная в точках $X$ и $X' = X+h_ie_i$, то разность

$$\Delta_{h_i}^{x_i} f(X) = f(X+h_ie_i) - f(X) \tag{2.3}$$

называется *частным приращением*, а оператор $\Delta_{h_i}^{x_i}$ — *оператором частного приращения*, соответствующим приращению $h_i$ переменного $x_i$.

Например, для случая плоскости $E_2$ (двух переменных)

$$\Delta_{h_1}^{x} f(X) = \Delta_{h_1}^{x} f(x, y) = f(x+h_1, y) - f(x, y),$$
$$\Delta_{h_2}^{y} f(X) = \Delta_{h_2}^{y} f(x, y) = f(x, y+h_2) - f(x, y).$$

*Частной производной* $\frac{\partial}{\partial x_i} f(X^0)$ функции $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по переменной $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в точке $X^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется предел

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(X^0) = \lim_{h_i \to 0} \frac{F(X^0+h_ie_i) - F(X^0)}{h_i} = \lim_{h_i \to 0} \frac{\Delta_{h_i}^{x_i} F(X^0)}{h_i}, \tag{2.4}$$

если он существует. Например, для функции двух переменных $f(X)=f(x, y)$ частные производные в точке $X^0(x_0, y_0)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) &= \lim_{h_1\to 0} \frac{f(x_0+h_1, y_0)-f(x_0, y_0)}{h_1}, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) &= \lim_{h_2\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h_2)-f(x_0, y_0)}{h_2}. \end{aligned}\right\} \quad (2.5)$$

Если все координаты $x_j$ точек $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $j \neq i$ фиксировать, то функция $f(X)$ превращается в функцию одного переменного $x_i$ и $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть производная этой функции по переменному $x_i$.

Для удобства формулировки теорем вводятся следующие определения. Говорят, что функция $f(X)$, определённая в области $G$, принадлежит классу $C_G$, если $f(X)$ непрерывна в $G$. Функция $f(X)$ принадлежит классу $C_1=C_{1,G}$, если в каждой точке $G$ определены все частные производные $\frac{\partial}{\partial x_i} f(X)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, причем $\frac{\partial}{\partial x_i} f(X)$, как функции $X$, непрерывны в $G$.

На классе функций $C_{1,G}$ определены *операторы частного дифференцирования* $D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, переводящие $f(X) \subset C_{1,G}$ в функцию

$$D_i f(X)=\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$$

из $C_G$. Эти операторы линейны.

3. Оба определения дифференциала функции одного переменного обобщаются на случай $n$ переменных. Пусть функция $f(X)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в точке $X^0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in E_n$ и в ее окрестности, т. е. для всех точек вида $X^0+h$, где $h=(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ и $\|h\|<r$ ($r$ — некоторое фиксированное положительное число).

а) Дифференциал как главная линейная часть приращения функции. Приращение функции $f(X)$

$$f(X+h)-f(X)=f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n)-f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (2.6)$$

отвечает вектору — приращению $h(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ аргумента — вектора $X$. Пусть для любого вектора $h$, у которого $0 < \|h\| < r$, приращение (2.6) функции $f$ представимо в виде

$$f(X+h) - f(X) = L(h) + \varepsilon(h), \tag{2.7}$$

где

$$L(h) = \sum_{i=1}^{n} l_i h_i \tag{2.8}$$

есть линейная функция вектора—приращения $h(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ и $\varepsilon(h)$ — величина высшего порядка малости по сравнению с $\|h\|$:

$$\varepsilon(h) = o(\|h\|).$$

В этом случае $L(h)$ называется *дифференциалом функции* $f(X)$ в точке $X$ и обозначается

$$L(h) = df(X) = df(X, h). \tag{2.9}$$

*Свойства дифференциала* $df$. 1°. Если в точке $X^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ существует дифференциал $df(X^0, h)$, то в ней существуют все частные производные $\frac{\partial}{\partial x_i} f(X^0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и

$$df(X^0, h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_i} h_i, \tag{2.10}$$

т. е. коэффициенты $l_i$ в (2.8) равны частным производным $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ в точке $X^0$.

Говорят, что функция $f(X)$ *дифференцируема* в точке $X^0$, если в этой точке существует дифференциал $df(X^0, h)$.

Иногда $df(X^0, h)$ называют *полным дифференциалом* функции $f$ в точке $X^0$, а слагаемые $\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_i} h_i$ $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$ — ее *частными дифференциалами*. Так как для функции $f(X) = x_i$ имеем $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 1$ и частный дифференциал, отвечающий приращению $h_i$ этой координаты, равен $dx_i = h_i$, то, обозначая через $dX$ вектор $h$ с координатами $dx_i = h_i$, записывают (2.10) в виде

$$df(X^0, dX) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_i} dx_i.$$

Пример 1. Пусть $X(x, y)$ — точка плоскости и $f(X) = f(x, y) = xy$. Тогда, если $X^0 = (x_0, y_0)$ и $h = (h_1, h_2)$, то

$$f(X^0 + h) - f(X^0) = (x_0 + h_1)(y_0 + h_2) - x_0 y_0 = \\ = (y_0 h_1 + x_0 h_2) + h_1 h_2.$$

Здесь $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, $|h_1 h_2| \leqslant \|h\|^2 = o(h)$, поэтому

$$df(X^0, h) = y_0 h_1 + x_0 h_2,$$

причем $y_0 = \dfrac{\partial f(X^0)}{\partial x}$, $x_0 = \dfrac{\partial f(X^0)}{\partial y}$.

Предложение, обратное свойству 1°, вообще говоря, неверно: существование всех частных производных $\dfrac{\partial f(X)}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в точке $X^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ или даже в некоторой окрестности этой точки не обеспечивает существование дифференциала $df(X^0, h)$. Однако имеет место утверждение

2°. Если в некоторой окрестности точки $X^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ частные производные $\dfrac{\partial f(X)}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ существуют и непрерывны, то в точке $X^0$ существует дифференциал $df(X^0, h)$.

б) Другое определение дифференциала функции $n$ переменных. Рассмотрим функцию $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и отрезок прямой $\{X^0 + th\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, соединяющий точки $X^0$ и $X^0 + h$, где $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, предполагая, что весь этот отрезок лежит внутри области определения функции $f$. На этой прямой функция $f(X^0 + th)$ превращается в функцию одного переменного $t$. Назовем *дифференциалом* $\overline{df(X^0, h)}$ функции $f$ в точке $X^0$ при приращении $h$ производную

$$\overline{df(X^0, h)} = \frac{d}{dt} f(X^0 + th)\Big|_{t=0}, \qquad (2.11)$$

если она существует при любых $h$.

Для единичного вектора $h$, $\|h\|=1$, эту производную

$$\frac{d}{dt} f(X^0+th)\Big|_{t=0}$$

называют *производной функции* $f(X)$ в точке $X^0$ по направлению вектора $h$. Она показывает скорость изменения функции в данном направлении. В частности, если $h$ равен одному из ортов $e_i$ ($i=1, 2, \quad n$), то

$$\overline{df(X^0, e_i)}=\frac{d}{dt} f(X^0+te_i)\Big|_{t=0}=\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_i},$$

т. е. частные производные суть производные по направлениям соответствующих осей. Таким образом, как и при определении а), из существования дифференциала следует существование всех частных производных. Обратное заключение неверно.

Пример 2. Пусть при переходе к полярным координатам на плоскости функция $f(x, y)$ имеет вид

$$f=\rho\sin\left[\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)(\pi-\varphi)\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)\frac{1}{\rho}\right].$$

На осях $x$ и $y$, т. е. при $\varphi=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, имеем $f\equiv 0$, следовательно, в точке $\Theta$ (0, 0) частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$; если же вектор $h$ не лежит на осях, то производной $\frac{df(\Theta+th)}{dt}\Big|_{t=0}=\frac{df(th)}{dt}\Big|_{t=0}$ не существует.

Если в окрестности точки $X^0$ все производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($i=1, 2, \ldots, n$) не только существуют, но и непрерывны, то для любого $h=(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ существуют равные между собой дифференциалы $df(X^0, h)=\overline{df(X^0 h)}$, т. е.

$$\frac{df(X^0+th)}{dt}\Big|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_i}h_i. \tag{2.12}$$

Если в точке $X^0$ существует дифференциал $df(X^0, h)$ в смысле определения а), то в ней существует также равный ему дифференциал $\overline{df(X^0, h)}$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: из существования дифференциала $\overline{df(X^0, h)}$ в смысле определения б) еще не следует существование $df(X^0, h)$. В этом легко убедиться на следующих примерах.

Пример 3. Пусть на плоскости определена функция $f(X) = f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Тогда в точке $\Theta(0, 0)$ для любого вектора $h = (h_1, h_2)$ имеем $\Theta + th = th$ и

$$f(\Theta + th) = f(th) = t\sqrt[3]{h_1^3 + h_2^3},$$

откуда

$$\frac{d}{dt} f(\Theta + th) = \sqrt[3]{h_1^3 + h_2^3}.$$

В частности, для ортов $h = e_1(1, 0)$ и $h = e_2(0, 1)$ получаем

$$\frac{d}{dt} f(\Theta + te_1)\Big|_{t=0} = \frac{\partial f(\Theta)}{\partial x} = 1,$$

$$\frac{d}{dt} f(\Theta + te_2)\Big|_{t=0} = \frac{\partial f(\Theta)}{\partial y} = 1.$$

Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ существуют во всей плоскости, но терпят разрыв в точке $\Theta$. Например, для любого $x \neq 0$ производная $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3y^2(x^3 + y^3)^{-\frac{2}{3}}$, и при $y = 0$ имеем

$$\frac{\partial f(x, 0)}{\partial y} = 0.$$

В данном случае выражение

$$\overline{df(\Theta, h)} = \frac{d}{dt} f(\Theta + th)\Big|_{t=0} = \sqrt[3]{h_1^3 + h_2^3}$$

не является линейной функцией от $h_1$ и $h_2$, а значит, не может совпадать с $df(\Theta, h)$ в смысле определения а). Такой дифференциал в точке $\Theta$ не существует.

Пример 4. Определим на плоскости функцию $f(X) = f(x, y)$ следующим образом. Пусть $f = 0$ на оси $Oy$ и на параболе $q_1$ (рис. 7), уравнение которой $x = 2y^2$, а также во всей области $G_1$, внутренней относительно этой параболы, т. е. для всех точек $X$, для которых $x > 2y^2$ (на рис. 7 эта область заштрихована). На параболе $q$, уравнение которой $x = y^2$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Наконец, на каждой паре отрезков $AB$ и $BC$ прямой $y = \text{const}$, где точка $A$ лежит на оси $Oy$, точка $B$ — на параболе $q$ и точка $C$ — на параболе $q_1$, будем считать $f(X)$ линейной функцией от $x$. Для отрицательных $x$ положим $f(x, y) = f(-x, y)$, и в точке $\Theta(0, 0)$ пусть $f(\Theta) = 0$.

При любом $h$ имеем

$$\frac{d}{dt} f(\Theta + th)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(th)\Big|_{t=0} = 0.$$

В самом деле, если $h$ лежит на оси $Oy$, то $f(th) \equiv 0$. Если $h$ лежит вне $Oy$, то для некоторого $t_1 > 0$, зависящего от $h$, при $0 \leqslant t < t_1$ отрезок $\Theta + th$ лежит целиком в области $G_1$ или симметричной ей относительно оси $Oy$, где снова $f(th) \equiv 0$ по построению функции. Итак, у функции $f$ существует дифференциал в смысле определения б) и

$$\overline{df(\Theta, h)} = 0.$$

Как тождественный нуль, $\overline{df}$ есть линейная функция $h_1$ и $h_2$. Тем не менее дифференциал $df(\Theta, h)$ в смысле определения а) не существует.

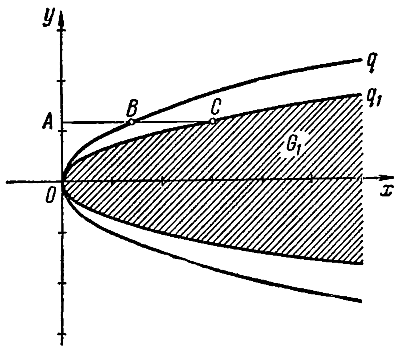

Рис. 7.

Действительно, если бы $df(\Theta, h)$ в точке $\Theta$ существовал, то имело бы место равенство

$$df(\Theta, h) = \overline{df(\Theta, h)} = 0.$$

Так как $f(\Theta) = 0$, то должно было быть

$$f(h) = f(\Theta + h) = f(\Theta + h) - f(\Theta) = \varepsilon(h) = o(\|h\|).$$

Однако последнее неверно для $h$ на параболе $q$, потому что там $f(h) \doteq \|h\|$. Таким образом, дифференциал $df(\Theta, h)$ не существует, хотя $\overline{df(\Theta, h)}$ и есть линейная функция $h$.

**4.** *Градиентом* функции $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $X^0$ называется вектор с компонентами $\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_i}$:

$$\operatorname{grad} f(X^0) = \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n}\right). \quad (2.13)$$

Отсюда

$$\|\operatorname{grad} f(X^0)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_i}\right)^2}.$$

Из определений градиента и дифференциала следует, что при наличии дифференциала $\overline{df(X^0, h)}$

$$\left.\frac{df(X^0+th)}{dt}\right|_{t=0}=\overline{df(X^0,\ h)}=(\operatorname{grad} f(X^0),\ h),$$

т. е. дифференциал $\overline{df}$ равен скалярному произведению градиента на вектор $h$. В силу неравенства Коши

$$\left|\frac{df(X^0+th)}{dt}\right|_{t=0}\leqslant\|\operatorname{grad} f(X^0)\|\ \|h\|. \qquad (2.14)$$

Будем считать, что $\operatorname{grad} f\neq 0$, т. е. $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\neq 0$. Равенство в (2.14) будет иметь место, когда вектор $h$ коллинеарен вектору $\operatorname{grad} f$. В частности, если $h=h_0$ — единичный вектор, т. е. $\|h_0\|=1$, то

$$\frac{df(X^0+th_0)}{dt}\leqslant\|\operatorname{grad} f(X^0)\|.$$

Пусть $h_0$ — единичный вектор, направление которого совпадает с направлением градиента: $h_0=\frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|}\operatorname{grad} f$. Тогда

$$\left.\frac{df(X^0+th_0)}{dt}\right|_{t=0}=\|\operatorname{grad} f(X^0)\|. \qquad (2.15)$$

Это означает, что направление градиента есть направление, производная по которому максимальна, т. е. *направление быстрейшего роста функции* $f(X)$ в данной точке $X^0$.

*Линейным касательным многообразием* к поверхности уровня $f(X)=c$ в точке $X^0$ называется $(n-1)$-мерное многообразие $L_f(X^0)$ векторов $g(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, ортогональных вектору градиента, т. е. удовлетворяющих уравнению

$$df(X^0,\ g)=(\operatorname{grad} f,\ g)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_i}g_i=0.$$

В окрестности точки $X^0$ каждый элемент $X$ поверхности уровня имеет вид

$$X=X^0+g+\varepsilon\operatorname{grad} f, \qquad (2.16)$$

где $g$ — элемент касательного многообразия $L$ и $\varepsilon=o(\|g\|)$. Обратно, при достаточно малом $\|g\|$ каждому элементу $g\in L$

соответствует элемент $X$ поверхности уровня, представимый в виде (2.16) с $\varepsilon = o(\|g\|)$.

Множество точек вида $X^0 + g$ с $g \in L$ образует линейную касательную гиперплоскость к гиперповерхности уровня $f(X) = c$ в точке $X^0$. В смысле сказанного выше, в окрестности точки $X^0$ гиперповерхность уровня с точностью до величин высшего порядка малости совпадает с касательной гиперплоскостью. Направление градиента есть направление нормали к гиперповерхности уровня в точке $X^0$.

*Ортогональной траекторией* семейства поверхностей уровня называется кривая $X = X(t)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{dX}{dt} = \operatorname{grad} f(X)$$

или, в координатной форме, системе уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Если в каждой точке множества $\mathfrak{M}$ (области, замкнутой области) $\operatorname{grad} f \neq 0$, то через каждую точку $\mathfrak{M}$ проходит одна и только одна ортогональная траектория. Касательная к ортогональной траектории в каждой ее точке имеет направление градиента в той же точке.

## § 2. Производные и дифференциалы высших порядков. Ряд Тейлора

**1.** Пусть функция $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и ее частная производная $U_i(X) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ определены в каждой точке области $G$. Если функция $U_i$ в свою очередь имеет в каждой точке $G$ частную производную $\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$, то говорят, что в каждой точке области $G$ определена *последовательная вторая частная производная*

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_j\, \partial x_i} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j},$$

или *частная производная второго порядка*.

Последовательные частные производные $m$-го порядка определяются рекуррентно. Пусть для функции $f(X) =$

$=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в области $G$ определены производные $(m-1)$-го порядка и существует производная

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{\partial^{m-1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{i_2}\, \partial x_{i_3} \ldots \partial x_{i_m}}.$$

Тогда, если в $G$ существует производная $\frac{\partial U}{\partial x_{i_1}}$, то она *называется $m$-й последовательной частной производной*

$$\frac{\partial^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}}=\frac{\partial U}{\partial x_{i_1}}$$

функции $f$. Она получается последовательным дифференцированием функции $f$ по переменным $x_{i_m}, x_{i_{m-1}}, \ldots, x_{i_2}, x_{i_1}$.

**2.** Частные производные высших порядков могут быть определены с помощью разностей. Для этой цели нужно рассматривать произведение операторов разностей.

Произведение операторов $\Delta_{h_k}^{x_k} \Delta_{h_{k-1}}^{x_{k-1}} \ldots \Delta_{h_2}^{x_2} \Delta_{h_1}^{x_1}$ есть оператор, заключающийся в последовательном применении операторов $\Delta_{h_1}^{x_1}, \Delta_{h_2}^{x_2}, \qquad \Delta_{h_k}^{x_k}$. Например, для функции $f(x, y)$ имеем

$$\begin{aligned}\Delta_{h_2}^{y} \Delta_{h_1}^{x} f(x, y) &= \Delta_{h_2}^{y}\left(\Delta_{h_1}^{x} f(x, y)\right)=\Delta_{h_2}^{y}[f(x+h_1, y)-f(x, y)]= \\ &=[f(x+h_1, y+h_2)-f(x, y+h_2)]- \\ &\quad -[f(x+h_1, y)-f(x, y)]=f(x+h_1, y+h_2)- \\ &\qquad -f(x, y+h_2)-f(x+h_1, y)+f(x, y).\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\Delta_{h_1}^{x} \Delta_{h_2}^{y} f(x, y) &= \Delta_{h_1}^{x}\left(\Delta_{h_2}^{y} f(x, y)\right)=\Delta_{h_1}^{x}[f(x, y+h_2)-f(x, y)]= \\ &=[f(x+h_1, y+h_2)-f(x+h_1, y)]- \\ &\quad -[f(x, y+h_2)-f(x, y)]=f(x+h_1, y+h_2)- \\ &\qquad -f(x+h_1, y)-f(x, y+h_2)+f(x, y).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\Delta_{h_2}^{y} \Delta_{h_1}^{x} f(x, y)=\Delta_{h_1}^{x} \Delta_{h_2}^{y} f(x, y),$$

т. е. операторы $\Delta^x_{h_1}$ и $\Delta^y_{h_2}$ переместительны. Вообще, операторы $\Delta^{x_i}_{h_i}$ и $\Delta^{x_j}_{h_j}$ переместительны. Произведение $k$ операторов $\Delta^{x_i}_{h_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) есть разностный оператор $k$-го порядка.

*Разностной производной $k$-го порядка*

$$\overline{\frac{\partial^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{i_1}^{k_1} \partial x_{i_2}^{k_2} \ldots \partial x_{i_m}^{k_m}}} \qquad (k_1 + k_2 + \ldots + k_m = k)$$

функции $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется предел (если он существует) отношения

$$\overline{\frac{\partial^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{i_1}^{k_1} \partial x_{i_2}^{k_2} \ldots \partial x_{i_m}^{k_m}}} = \lim_{\substack{h_1 \to 0, \\ h_2 \to 0, \ldots, h_m \to 0}} \frac{\left(\Delta^{x_{i_1}}_{h_1}\right)^{k_1} \left(\Delta^{x_{i_2}}_{h_2}\right)^{k_2} \ldots \left(\Delta^{x_{i_n}}_{h_n}\right)^{k_m} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h_1^{k_1} h_2^{k_2} \ldots h_m^{k_m}}. \tag{2.17}$$

Из переместительности операторов $\Delta^{x_{i_j}}_{h_j}$ следует, что в символе дифференцирования в левой части (2.17) можно как угодно менять порядок символов $\partial x_{i_1}, \partial x_{i_2}, \ldots, \partial x_{i_m}$, например:

$$\overline{\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}} = \overline{\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}}.$$

Если в области $G$ существует непрерывная $k$-я последовательная производная в смысле определения п. 1

$$\frac{\partial^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{i_1}^{k_1} \partial x_{i_2}^{k_2} \ldots \partial x_{i_m}^{k_m}}, \tag{2.18}$$

то существует и совпадающая с ней $k$-я разностная производная $\overline{\frac{\partial^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_{i_1}^{k_1} \partial x_{i_2}^{k_2} \ldots \partial x_{i_m}^{k_m}}}$. При этих условиях вместе с производной (2.18) существуют и равные ей все $k$-е производные, отличающиеся от (2.18) лишь порядком выполнения операций дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial}{\partial x_{i_2}}, \ldots$ Например, если $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y}$ непрерывна, то существуют и совпадают с ней производные

$$\overline{\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y}} = \overline{\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\, \partial x}} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y}.$$

В этом смысле говорят о *перестановочности* операций частного дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$, примененных к функции $f(x, y)$, и вообще о перестановочности операций частного дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, примененных к функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Принято обозначать символом

$$\frac{\partial^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{k_1}\, \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} \tag{2.19}$$

любую производную порядка $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ (где некоторые $k_i$ могут быть равными нулю), получаемую применением $k_1$ раз дифференцирования по $x_1$, $k_2$ раз — по $x_2, \ldots, k_n$ раз — по $x_n$, независимо от того, в каком порядке это дифференцирование производится. Например, символ

$$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2\, \partial y}$$

означает любую из равных между собой производных

$$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x\, \partial x\, \partial y} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x\, \partial y\, \partial x} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y\, \partial x\, \partial x}.$$

Функцию $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенную в области $G$, называют *функцией класса* $C_n = C_{n, G}$, если она имеет все последовательные производные первых $n$ порядков, которые непрерывны в $G$. Эти производные, во-первых, совпадают с соответствующими разностными производными, и, во-вторых, производные порядка $k$ при $2 \leqslant k \leqslant n$, отличающиеся лишь последовательностью применения операторов частного дифференцирования, совпадают.

**3.** Как уже было сказано, операторы частного дифференцирования $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ переводят функцию $f$ из класса $C_1$ в функцию

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

из класса $C$.

Оператор $D_{i_1} D_{i_2} \ldots D_{i_k}$ (среди $i_1, \ldots, i_k$ могут быть и равные) есть оператор из $C_{k,G}$ в $C$: для любой функции $f \in C_k$

$$D_{i_1} D_{i_2} \ldots D_{i_k} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}.$$

Операторы $D_i$ и $D_j$ для функции $f \in C_2$ перестановочны:

$$D_i D_j f = D_j D_i f$$

(см. п. 2).

Пользуясь этими обозначениями, записывают дифференциал в виде

$$df(X, h) = \left( \sum_{i=1}^{n} h_i D_i \right) f(X).$$

Тогда для функции $f \in C_2$ полагают по определению

$$d^2 f(X, h) = d\{d[f(X, h)]\} = \left( \sum_{i=1}^{n} h_i D_i \right)^2 f(X) \tag{2.20}$$

и вообще для $f \in C_k$

$$d^k f(X, h) = \left( \sum_{i=1}^{n} h_i D_i \right)^k f(X). \tag{2.21}$$

Например, для функции двух переменных $f(x, y)$ при $h = (h_1, h_2)$ имеем

$$d^k f(X, h) = (h_1 D_x + h_2 D_y)^k f(x, y) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m h_1^m h_2^{k-m} D_k^m D_y^{k-m} f(x, y) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m \frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^m \partial y^{k-m}} h_1^m h_2^{k-m}. \tag{2.22}$$

Формула (2.11) допускает обобщение

$$\overline{d^k f(X, h)} = \frac{d^k}{dt^k} f(X+th)\Big|_{t=0}. \tag{2.23}$$

**4. Формула Тейлора.** Как и для функции одного переменного, формула Тейлора для функции $n$ переменных имеет целью приближенно представить эту функцию многочленом.

Теорема 1. *Каждый многочлен $P(X)$ степени $k$ от $n$ переменных $x_1, x_2, \quad x_n$*

$$P(X) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i_1, i_2=1}^{n} a_{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2} +$$
$$+ \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{n} a_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$$

*удовлетворяет тождеству*

$$P(x_1+h_1, x_2+h_2, \quad x_n+h_n) = P(x_1, x_2, \quad x_n) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{s!} (h_1 D_1 + h_2 D_2 + \ldots + h_n D_n)^s P(x_1, x_2, \quad x_n), \tag{2.24}$$

*или, короче,*

$$P(X+h) = P(X) + \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{s!} (h_1 D_1 + \quad + h_n D_n)^s P(X) =$$
$$= P(X) + dP(X, h) + \frac{1}{2!} d^2 P(X, h) + \quad + \frac{1}{k!} d^k P(X, h). \tag{2.25}$$

Теорема 2. *Пусть $G$ — область $E_n$, $F(X)$ — функция класса $C_{k, G}$ и $X \in G$. Тогда для $X+h \in G$*

$$F(X+h) - F(X) = \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{s!} \left( \sum_{i=1}^{n} h_i D_i \right)^s F(X) + \varepsilon(h), \tag{2.26}$$

*где* $\varepsilon(h) = o(\|h\|^k)$.

Сумма в правой части (2.26) представляет многочлен $k$-й степени относительно координат $h_1, h_2, \ldots, h_n$ вектора $h$. Справедлива и обратная

Теорема 3. *Если* $f(X+h)=P_k(h)+\varepsilon(h)$, *где* $P_k(h)$ — *многочлен* $k$-*й степени относительно* $h_1, h_2, \ldots, h_n$ *и* $\varepsilon(h)=o(\|h\|^k)$, *то*

$$P_k(h)=f(X)+\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{s!}(h_1D_1+\quad+h_nD_n)^s f(X). \tag{2.27}$$

Теорема 2 допускает следующее уточнение.

Теорема 4. *Если* $f(X)\in C_{k+1,G}$ *и* $X\in G$, *то для* $X+h\in G$

$$f(X+h)=f(X)+\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{s!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_iD_i\right)^s f(X)+\varepsilon(h), \tag{2.28}$$

*где* $\varepsilon(h)=O\left(\|h\|^{k+1}\right)$.

Если $f(X)$ имеет в окрестности точки $X^0$ все производные любого порядка, то можно формально определить степенной ряд по степеням $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — координатам вектора $\boldsymbol{h}$:

$$\begin{aligned} f(X^0)&+(h_1D_1+h_2D_2+\quad+h_nD_n)f(X^0)+\\ &+\frac{1}{k!}(h_1D_1+\quad+h_nD_n)^k f(X^0)+ \end{aligned} \tag{2.29}$$

Ряд (2.29) называют *рядом Тейлора* для $f(X)$. Например, для функции двух переменных $f(X)=f(x, y)$ этот ряд имеет вид

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0)&+\left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}h_1+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}h_2\right)+\\ &\ldots+\frac{1}{k!}\sum_{s=0}^{k}C_k^s\frac{\partial^k f(x_0, y_0)}{\partial x^s\,\partial y^{k-s}}h_1^s h_2^{k-s}+ \end{aligned} \tag{2.30}$$

Ограничившись первыми $m$ членами ряда (2.29), имеем

$$f(X^0+h)=$$

$$=f(X^0)+\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_iD_i\right)^s f(X^0)+r_n(X, h), \tag{2.31}$$

где $r_n(X, h)$ — *остаточный член*:

$$r_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_iD_i\right)^{n+1} f(X^0+\theta h), \qquad 0<\theta<1.$$

Если для данного $X^0$ и $\|h\| < \rho$ имеет место $r_n(X, h) \to 0$ при $n \to \infty$, то функция $f(X)$ при $X = X^0 + h$, $\|h\| < \rho$, представима рядом Тейлора

$$f(X) = f(X^0 + h) = f(X^0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{i=0}^{n} h_i D_i \right)^k f(X^0). \quad (2.32)$$

Сравнив правую часть (2.32) с разложением функции $e^t$, легко заметить, что ее можно записать символически в виде

$$e^{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i D_i} f(X^0).$$

Благодаря этому равенство (2.32) можно записать так:

$$f(X^0 + h) = f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_n^0 + h_n) =$$
$$= e^{h_1 D_1 + \ldots + h_n D_n} f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0). \quad (2.33)$$

## § 3. Многочлены от дифференциальных операторов

1. Пусть $P_k(t) = P_k(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — многочлен степени $k$ относительно $t_1, t_2, \ldots, t_n$:

$$P_k(t) = \sum_{s=0}^{k} \left( \sum_{k_1 + k_2 + \ldots + k_n = s} a_{k_1 k_2 \ldots k_n} t_1^{k_1} t_2^{k_2} \ldots t_n^{k_n} \right)$$

и $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ — оператор частного дифференцирования. Под многочленом $P_k(D)$ от операторов $D_i$ понимается оператор из $C_k$ в $C$, определяемый равенством

$$P_k(D) = P_k(D_1, D_2, \ldots, D_n) =$$
$$= \sum_{s=0}^{k} \left( \sum_{k_1 + k_2 + \ldots + k_n = s} a_{k_1 k_2 \ldots k_n} D_1^{k_1} D_2^{k_2} \ldots D_n^{k_n} \right). \quad (2.34)$$

Например, многочлену от двух переменных $P_5(t) = 3t_1^3 t_2^2 + t_1^4 t_2$ соответствует оператор

$$P_5(D) = 3D_1^3 D_2^2 + D_1^4 D_2.$$

Введем следующие обозначения для производных порядка $m < k$ от многочлена $P_k(t)$

$$P_{k,\, r_1,\, r_2,\, \ldots,\, r_n}(t) = \frac{\partial^m P_k(t)}{\partial t_1^{r_1}\, \partial t_2^{r_2} \ldots \partial t_n^{r_n}} \qquad (r_1 + \ldots + r_n = m). \tag{2.35}$$

Мы приходим к новому многочлену от оператора, т. е. к новому оператору из $C_{k-m}$ в $C$, обозначаемому символом $P_{k,\, r_1,\, r_2,\, \ldots,\, r_n}(D)$ или $P_{r_1,\, r_2,\, \ldots,\, r_n}(D)$ (первоначальный индекс $k$, показывающий степень исходного многочлена, т. е. порядок исходного оператора, можно опускать).

Так, для многочлена $P(t) = 3t_1^3 t_2^2 + t_1^4 t_2$ получаем

$$P_{2,1}(t) = 36 t_1 t_2 + 12 t_1^2,$$

$$P_{1,2}(t) = 18 t_1^2.$$

Следовательно,

$$P_{2,1}(D) = 36 D_1 D_2 + 12 D_1^2 = 36 \frac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial x_2} + 12 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2},$$

$$P_{1,2}(D) = 18 D_1^2 = 18 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}.$$

Если $P(t)$ — многочлен степени $k$, $Q(t)$ — многочлен степени $l$ и

$$R(t) = P(t)\, Q(t),$$

то

$$R(D) = P(D)\, Q(D) = Q(D)\, P(D).$$

Например, многочлену $t_1^4 - t_2^4 = (t_1^2 + t_2^2)(t_1^2 - t_2^2)$ отвечает оператор

$$\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right).$$

Для *оператора Лапласа*

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} D_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \tag{2.36}$$

$$\Delta^2 = \left( \sum_{i=1}^{n} D_i^2 \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} D_i^4 + 2 \sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i>j}}^{n}{}' D_i^2 D_j^2, \tag{2.37}$$

где знак $'$ у суммы означает, что суммирование производится не по всем значениям $i$ и $j$, а лишь по тем, которые удовлетворяют условию $i > j$, или же

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^4}{\partial x_i^4} + 2 \sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i>j}}^{n}{}' \frac{\partial^4}{\partial x_i^2\, \partial x_j^2} \tag{2.38}$$

(*бигармонический оператор*).

Для многочлена от оператора имеет место следующее *обобщение формулы Лейбница*. Пусть $P(t) = P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — многочлен степени $k$ от $t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда

$$P(D)(uv) =$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \sum_{r_1+r_2+\ldots+r_n=r} P_{r_1, r_2, \ldots, r_n}(D)\, u\, \frac{D_1^{r_1} D_2^{r_2} \ldots D_n^{r_n} v}{r_1!\, r_2! \ldots r_n!}. \tag{2.39}$$

## § 4. Дифференцирование операторов из $E_n$ в $E_m$

1. Если каждому вектору $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства $E_n$ ставится в соответствие определенный вектор $Y(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ пространства $E_m$, то говорят, что определен *оператор* или *отображение* из $E_n$ в $E_m$. Это записывают в виде

$$Y = f(X) \tag{2.40}$$

или, в координатной форме,

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \qquad m). \tag{2.41}$$

Таким образом, задание оператора (2.40) из $E_n$ в $E_m$ равносильно заданию системы (2.41) $m$ функций $n$ переменных. Оператор $f(X)$ называют *непрерывным*, если непрерывны все определяющие его функции.

2. Аналогично дифференциалу функции можно определить *дифференциал оператора* $F$. Пусть $X^0$ и $X^0 + H$, где $H = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, — векторы из $E_n$. Разность

$$f(X^0 + H) - f(X^0), \tag{2.42}$$

«приращение значения» оператора $f$, есть $m$-мерный вектор, компоненты которого

$$f_i(X^0+H)-f_i(X^0)=$$
$$=f_i(x_1^0+h_1,\ x_2^0+h_2,\ \ldots,\ x_n^0+h_n)-f_i(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \qquad (2.43)$$

Предположим, что приращение (2.42) представимо в виде

$$f(X^0+H)-f(X^0)=AH+\varepsilon(H), \qquad (2.44)$$

где $A$ — линейный оператор из $E_n$ в $E_m$ и

$$\|\varepsilon(H)\|=o(\|H\|). \qquad (2.45)$$

Тогда $AH$ — линейный оператор относительно $H$ — «главная часть» приращения — называется *дифференциалом оператора* $f$ в точке $X^0 \in E_n$ и обозначается

$$df(X^0,\ H)=AH. \qquad (2.46)$$

Оператор $f$ называется *дифференцируемым в точке* $X^0$. Для дифференцируемого оператора

$$f(X^0+H)-f(X^0)=df(X^0,\ H)+\varepsilon(H),$$

причем $\|\varepsilon(H)\|=o(\|H\|)$.

Компоненты линейного оператора $AH$ суть линейные функции от $H=(h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n)$:

$$A_iH=df_i(X^0,\ H)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(X^0)}{\partial x_j}h_j \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \qquad (2.47)$$

Таким образом, линейный оператор $AH=df(X^0,\ H)$ определяется матрицей

$$\|A\|=\left(\frac{\partial f_i(X^0)}{\partial x_j}\right)_{j=1,\ 2,\ \ldots,\ n}^{i=1,\ 2,\ \ldots,\ m}, \qquad (2.48)$$

имеющей $m$ строк и $n$ столбцов. Эта матрица называется *якобиевой матрицей* или *матрицей Якоби*.

Если якобиеву матрицу оператора $f$ обозначить через $f'(X^0)$, то выражение для дифференциала оператора может быть записано в форме

$$df(X^0,\ H)=f'(X^0)H, \qquad (2.49)$$

что представляет собой аналог связи между дифференциалом и производной функции одного переменного. Таким образом, якобиева матрица оператора является аналогом производной. Дальнейшие аналогии будут рассмотрены в следующей главе.

В частном случае отображения $E_1$ в $E_1$, т. е. при $m=n=1$, оператор $f$ сводится к функции $f(x)$ одного переменного и его матрица Якоби сводится к скаляру $\frac{df}{dx}$. Если $m=1$, $n>1$, то оператор $f$ сводится к функции $n$ переменных. Его дифференциал будет тогда дифференциалом этой функции. Матрица Якоби в этом случае есть матрица-строка

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\|.$$

При $m>1$, $n=1$ оператор $f$ сводится к вектор-функции скалярного аргумента. Его матрица Якоби есть матрица-столбец

$$\left\| \begin{matrix} \frac{df_1}{dx} \\ \frac{df_2}{dx} \\ \cdots \\ \frac{df_m}{dx} \end{matrix} \right\|.$$

**3.** При фиксированных $X$ и $H$ оператор $f$ на прямой $X+tH$ есть вектор-функция от скалярного аргумента $t$. Имеем

$$df(X, H) = \frac{d}{dt} f(X+tH)\Big|_{t=0}$$

(ср. формулу (1.20)).

Говорят, что оператор $f=(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ есть *оператор класса* $C_k$, если функции $f_i (i=1, 2, \ldots, m)$ принадлежат классу $C_k$ (см. § 2). Если $f \in C_k$, то для оператора $f$ можно определить дифференциал $k$-го порядка

$$d^k f(X, H) = \frac{d^k}{dt^k} f(X, tH)\Big|_{t=0}.$$

Дифференциал $d^k f(X, H)$ можно рассматривать как оператор от вектора $H$. В этом случае компонентами оператора $d^k f(X, H)$ будут функции $d^k f_i(X, H)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ этого вектора.

## § 5. Экстремум

**1.** Пусть функция $f(X)$ определена на некотором множестве пространства $E_n$.

Если среди значений функции есть *наибольшее значение*, то оно называется *абсолютным максимумом* функции, а точка, в которой достигается максимум, называется *точкой абсолютного максимума*. Аналогично определяется *абсолютный минимум* как *наименьшее значение функции* (в области ее определения). *Точка абсолютного минимума* — это точка, в которой функция принимает наименьшее возможное значение. Абсолютный минимум и абсолютный максимум называют *абсолютными экстремумами*, а точки, в которых функция принимает эти значения, — *точками абсолютного экстремума*.

Абсолютный максимум есть верхняя грань, а абсолютный минимум — нижняя грань значений функции в области ее определения. Поэтому иметь абсолютный максимум могут лишь функции ограниченные, т. е. ограниченность функции является необходимым условием существования абсолютного экстремума. Однако ограниченности функции недостаточно для существования экстремума. Так, например, функция $z = \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}$ ограничена снизу, ибо $z > 0$, причем $\lim\limits_{x \to \infty} z = 0$ и $\lim\limits_{y \to \infty} z = 0$; значит, 0 есть нижняя грань функции, но 0 не является значением функции, и таким образом, среди значений функции нет наименьшего.

Наиболее общие *условия существования абсолютного* экстремума дает

Теорема 5 (Вейерштрасса). *Функция, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве, принимает наименьшее и наибольшее значения.*

Отсюда вытекают следующие теоремы.

Теорема 6. *Если непрерывная функция определена во всем пространстве и при* $\|X\| \to \infty$ *имеем* $\lim f(X) = +\infty$

($\lim f(X) = -\infty$), *то функция достигает абсолютного минимума* (*максимума*).

Теорема 7. *Если функция непрерывна на неограниченном замкнутом множестве и при* $\|X\| \to \infty$ *имеем* $f(X) \to +\infty$ ($f(X) \to -\infty$), *то функция достигает абсолютного минимума* (*максимума*).

Теорема 8. *Если функция* $y = f(X)$ *непрерывна на ограниченном множестве* $E$, *содержащем такую точку* $X^0$, *что для всякой граничной точки множества* $E$ *найдется окрестность, в которой* $f(X) > f(X^0)$ ($f(X) < f(X^0)$), *то функция* $f(X)$ *на* $E$ *достигает абсолютного минимума* (*максимума*).

Пользуясь этими теоремами, можно во многих случаях доказать существование экстремума функции.

Абсолютный экстремум функции может достигаться как во внутренних, так и в граничных точках области. Ниже рассматриваются лишь методы отыскания *внутренних* точек экстремума. Отыскание *граничных* точек экстремума обычно сопряжено с большими трудностями[1]).

**2.** Пусть функция $y = f(X)$ определена на открытом множестве $G$. Если для точки $X^0$ найдется окрестность, для всех точек $X$ которой выполняется неравенство

$$f(X^0) > f(X) \qquad (X \neq X^0), \tag{2.50}$$

то точка $X^0$ называется точкой *строгого относительного максимума*. Если в некоторой окрестности точки $X^0$ выполняется неравенство

$$f(X^0) < f(X) \qquad (X \neq X^0), \tag{2.51}$$

то $X^0$ есть точка *строгого относительного минимума*. Точки относительного максимума и минимума называют *точками относительного экстремума*, а значения функции в этих точках — *относительными экстремумами*. Если в некоторой окрестности точки $X^0$ выполняется неравенство

$$f(X^0) \geqslant f(X) \qquad (f(X^0) \leqslant f(X)),$$

то $X^0$ — точка *нестрогого относительного экстремума*.

---

[1]) Некоторые случаи отыскания таких экстремумов составляют одну из основных задач *линейного программирования*.

Из приведенных определений следует, что в некоторой окрестности точки относительного экстремума приращение функции $\Delta f = f(X) - f(X^0)$ сохраняет знак.

Точки относительного экстремума иногда удается находить с помощью искусственных приемов. Для дифференцируемых функций имеются общие методы нахождения экстремальных точек с помощью необходимых и достаточных условий[1]).

**3.** Необходимые условия экстремума даны ниже.

Теорема 9. *Если в точке относительного экстремума $X^0$ первый дифференциал существует, то он тождественно равен нулю, т. е.*

$$df(X^0) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_i} dx_i \equiv 0. \tag{2.52}$$

Точками относительного экстремума могут быть и такие точки $X^0$, в которых первый дифференциал не существует.

Необходимое условие означает, что если в точке относительного экстремума функция дифференцируема, то все ее производные первого порядка равны нулю:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2, \qquad n). \tag{2.53}$$

Вообще точки, удовлетворяющие условиям (2.53), называются *стационарными*.

Теорема 10. *Если в точке относительного максимума (минимума) функция дважды непрерывно дифференцируема, то второй дифференциал является неположительной (неотрицательной) формой.*

Второй дифференциал функции

$$d^2 f(X^0) = \sum \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_i \, \partial x_k} dx_i \, dx_k \tag{2.54}$$

является квадратичной формой от дифференциалов аргументов. Неположительность (неотрицательность) квадратичной формы означает, что она ни при каких значениях переменных не может быть положительной (отрицательной).

---

[1]) Необходимые и достаточные условия экстремума для функций одного переменного рассмотрены в гл. I, § 3.

Теорема 9 устанавливает только необходимые условия экстремума.

**4.** Достаточные условия экстремума основываются на представлении дважды непрерывно дифференцируемой функции в окрестности стационарной точки $X^0$ в виде

$$f(X^0+h)=f\left(x_1^0+h_1,\ x_2^0+h_2,\ \ldots,\ x_n^0+h_n\right)=$$
$$=f(X_0)+\frac{1}{2}d^2f(X^0,\ h)+o(\|h\|^2), \quad (2.55)$$

где

$$\frac{1}{2}\,d^2f(X^0,\ h)=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_i\,\partial x_j}h_ih_j. \quad (2.56)$$

Отсюда следует, что в достаточно малой окрестности точки $X^0$ знак разности $f(X^0+h)-f(X^0)$ совпадает со знаком второго дифференциала, т. е. со знаком квадратичной формы (если она знакопостоянна)

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_i\,\partial x_j}h_ih_j.$$

Теорема 11. *Если функция $y=f(X)$ дважды непрерывно дифференцируема в стационарной точке $P_0$ и второй дифференциал есть отрицательно определенная форма, т. е.*

$$d^2f(X^0)=\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_i\,\partial x_j}h_ih_k<0, \quad (2.57)$$

*то точка $X^0$ является точкой относительного максимума.*

Теорема 12. *Если функция $y=f(X)$ дважды непрерывно дифференцируема в стационарной точке $X^0$ и второй дифференциал в этой точке есть форма положительно определенная, т. е.*

$$d^2f(X^0)=\sum\frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_i\,\partial x_j}h_ih_k>0, \quad (2.58)$$

*то $X^0$ является точкой относительного минимума.*

Для исследования знака квадратичной формы можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 13 (Сильвестра). *Для того чтобы квадратичная форма*

$$I_n = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k \tag{2.59}$$

***была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее дискриминанта***

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.60}$$

*были положительны.*

Покажем, как применить условия экстремума для исследования функции двух переменных $z = f(x, y)$. Для нахождения стационарных точек решим систему уравнений

$$z_x = 0, \quad z_y = 0. \tag{2.61}$$

Затем вычислим для каждой стационарной точки $X^0$ коэффициенты второго дифференциала:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x^2}, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x\, \partial y}, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial y^2},$$

составим дискриминант $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ и определим его знак. Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то $X^0$ есть точка экстремума, причем при $a_{11} > 0$ точка $X^0$ есть точка минимума, при $a_{11} < 0$ точка $X^0$ — точка максимума (при положительном дискриминанте $a_{11}$ и $a_{22}$ имеют одинаковые знаки). Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то в точке $X^0$ экстремума нет, так как нарушается второе необходимое условие существования экстремума. Если же $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, то для исследования точки $X^0$ на экстремум придется рассматривать дифференциал третьего порядка.

Абсолютный и относительный экстремумы называют *безусловными экстремумами*. При решении задач на безусловный экстремум рассматривается функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от $n$ независимых переменных.

**5.** Пусть функция $y = f(X) = f(x_1, \dots, x_n)$ определена на $(n-k)$-мерном многообразии $E$, заданном системой уравнений связи

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, k). \tag{2.62}$$

Точка $X^0$ многообразия $E$ называется точкой *условного относительного максимума* (*минимума*), если найдется такая окрестность $X^0$ в многообразии $E$, что значение функции в точке $X^0$ будет наибольшим (наименьшим) в этой окрестности. Определение условного относительного экстремума подобно определению относительного экстремума, но только окрестность экстремальной точки функции от $n$ переменных надо брать не в $n$-мерном евклидовом пространстве $R_n$, а в заданном многообразии $E$ (т. е. рассматривать совокупность точек $E$, близких к точке $X^0$).

Точка $X^0$ многообразия $E$ называется *точкой условного абсолютного максимума* (*минимума*), если значение функции в этой точке $f(X^0)$ является наибольшим (наименьшим) среди всех значений ее на многообразии $E$. Для нахождения точек условного экстремума пользуются следующим *правилом множителей Лагранжа*: составим вспомогательную функцию $F$ с помощью заданной функции $f(X)$, уравнений связи (2.62) и вспомогательных множителей (*множителей Лагранжа*) $\lambda_i$:

$$F = f + \sum \lambda_i \varphi_i. \tag{2.63}$$

Найдем частные производные $\frac{\partial F}{\partial x_m}$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, приравняем их нулю и добавим к этой системе $n$ уравнений систему $k$ уравнений связи. Получим систему $n + k$ уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_m} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, n), \\ &\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{2.64}$$

Решив ее, найдем координаты всех *условно-стационарных* точек, среди которых находятся искомые точки условного экстремума. Этим правилом можно воспользоваться в случае, если заданные функции $f$ и $\varphi_i$ дифференцируемы, а многообразие $(n - k)$-мерно, т. е. если матрица

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

имеет ранг $k$. При этих условиях система (2.64) однозначно определяет множители Лагранжа $\lambda_i$, следовательно, и функция $F$ (*функция Лагранжа*) также определяется однозначно. Задача исследования функции $f$ на условный экстремум в этом случае сводится к задаче исследования на безусловный экстремум функции Лагранжа $F = f + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i$.

Правило множителей Лагранжа опирается на необходимое условие экстремума.

Теорема 14. *Точка условного экстремума функции $f$ является стационарной точкой функции Лагранжа.*

Для выяснения вопроса о том, действительно ли условно-стационарная точка является точкой условного экстремума, пользуются следующей теоремой.

Теорема 15. *Если в условно-стационарной точке $X^0$ функции $f$, определенной на многообразии $E$,*

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \qquad (2.65)$$

*второй дифференциал от функции Лагранжа*

$$J = \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_m \partial x_j} h_m h_j \qquad (2.66)$$

*является формой, положительно (отрицательно) определенной на линейном $(n-k)$-мерном многообразии,*

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m} h_m = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \qquad (2.67)$$

*то $X^0$ есть точка условного минимума (максимума).*

## § 6. Стационарные точки

1. Пусть $G$ — область $n$-мерного пространства $E_n$, в которой определена функция $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ класса $C_2$, т. е. имеющая непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Точку $X^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ области $G$ называют *стационарной*, если в ней (см. 2.53)

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2.68)$$

Точки относительного минимума и максимума $f$ на $G$ являются стационарными. Как будет видно ниже, существуют стационарные точки иного рода.

Свойство точки $X^0$ быть стационарной для данной функции сохраняется при замене переменных: если

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и, в частности, $x_i^0 = \varphi_i(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$, то функция $f(X)$ представляется в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= f[\varphi_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \varphi_n(y_1, \ldots, y_n)] = \bar{f}(y_1, \ldots, y_n).$$

Из правила дифференцирования сложной функции и (2.68) следует

$$\frac{\partial \bar{f}(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)}{\partial y_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.69}$$

Обозначим через $z_0$ значение функции в стационарной точке

$$z_0 = f(X^0) = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0). \tag{2.70}$$

Тогда, полагая $f(X^0 + h) = f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_n^0 + h_n)$ и считая, что $X^0 + h \in G$, имеем

$$f(X^0 + h) = z_0 + \frac{1}{2} d^2 f(X^0, h) + o(\|h\|^2), \tag{2.71}$$

где

$$\frac{1}{2} d^2 f(X^0, h) = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j. \tag{2.72}$$

Определитель $n$-го порядка, составленный из вторых производных функции $f$ в точке $X^0$,

$$H(X^0) = \left| \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.73}$$

называется *определителем Гесса* или *гессианом* функции $f(X)$ в точке $X^0$. Стационарная точка $X^0$ называется *невырожденной*, если $H(X^0) \neq 0$, и *вырожденной*, если в ней гессиан равен нулю. Мы ограничимся рассмотрением невырожденных стационарных точек.

Для случая функции $f(x)$ одного переменного стационарной точкой является точка, в которой $f'(x)=0$. Условие невырожденности имеет вид $f''(x)\neq 0$, так как определитель Гесса совпадает здесь со второй производной. Уже в этом простейшем случае исследование вырожденной стационарной точки, в которой $f''(x)=0$, представляет дополнительные трудности.

Свойство стационарной точки быть невырожденной сохраняется при невырожденном в окрестности $X^0$ преобразовании переменных класса $C_2$.

2. Линейным преобразованием

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}h_j \qquad (i=1,\ 2, \qquad n)$$

можно привести квадратичную форму (2.72) к сумме квадратов

$$\frac{1}{2}\sum_{i,\ j}\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i\,\partial x_j}h_ih_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\eta_i^2. \tag{2.74}$$

Из условия невырожденности $H(X^0)\neq 0$ следует, что все $\alpha_i\neq 0$. Если координаты вектора $h$ в новой системе суть $\eta_1$, $\eta_2, \ldots, \eta_n$, то из (2.71) и (2.74) вытекает

$$f(X^0+h)=z_0+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\eta_i^2+o(\|h\|^2). \tag{2.75}$$

Точка $X^0$ называется *стационарной точкой порядка* $k$, $0\leqslant k\leqslant n$, если среди коэффициентов $\alpha_i$ имеется $k$ отрицательных и, значит, $n-k$ положительных. Свойство точки $X^0$ быть стационарной точкой $k$-го порядка сохраняется при невырожденном преобразовании переменных. Стационарная точка порядка 0 есть точка *минимума*, а порядка $n$ — точка *максимума* данной функции.

В случае функции одного переменного при $f''>0$ получаем точку нулевого порядка (минимум) и при $f''<0$ — точку первого порядка (максимум). Если число аргументов функции $n>1$, то могут появиться также и стационарные точки промежуточного порядка $k$, $1<k<n$, отличные от точек минимума и максимума.

Пусть $X^0$ — стационарная точка промежуточного порядка $k$. Тогда $n$-мерное пространство $E_n$ можно представить в виде прямой суммы $E_k \dot{+} E_{n-k}$ так, что для $h \in E_k$ функция $f(X^0+h)$ будет иметь в $X^0$ (при $h=\theta$) минимум, а для $h' \in E_{h-k}$ функция $f(X^0+h')$ — максимум в точке $X^0$ (при $h'=\theta$). Такие точки называются *точками минимакса порядка* $k$.

При $n=2$ невырожденные стационарные точки $X^0=(x_0, y_0)$ функции $f(X)=f(x, y)$ суть те, в которых

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0\,,\; H(x^0,\, y^0)=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]_{X^0}\neq 0. \quad (2.76)$$

Они могут иметь порядок $k=0, 1, 2$.

Стационарная точка порядка $k=0$ есть точка минимума. Условия этого:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0, \qquad H(x^0,\, y^0)>0, \qquad (2.77)$$

откуда следует также $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$. Если $f(x^0, y^0)=z_0$, то для линии уровня $f=z_0$ точка $X^0(x^0, y^0)$ является *изолированной*. В окрестности этой точки отсутствуют линии $f=z$ при $z<z_0$, а линии уровня $f=z'$ при $z'>z_0$ близки к эллипсам с центром в $X^0$.

При $k=1$ получается точка минимакса. Условием для этого является неравенство

$$H(X^0)<0. \qquad (2.78)$$

Точка $X^0$ будет тогда *двойной точкой* линии уровня $f=z_0$. Эта линия делит окрестность точки $X^0$ на *четыре* части $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, из которых $A_1$ и $A_3$ заполнены линиями уровня $f=z$ при $z>z_0$, а $A_2$ и $A_4$ — линиями уровня $f=z'$ при $z'<z_0$.

Наконец, при $k=2$ имеем точку максимума. Условия для этого:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0, \qquad H(X^0)>0, \qquad (2.79)$$

а значит, и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$. Если $f(x^0, y^0)=z_0$, то линия уровня $f=z_0$ имеет точку $X^0$ изолированной точкой. В окрестности этой точки линии уровня $f=z'$ при $z'>z_0$ отсутствуют, а линии уровня $f(z)$ при $z < z_0$ близки к эллипсам с центром в точке $X^0$.

**3.** Топологическое исследование поведения функции в окрестности стационарных точек любого порядка было проведено М. Морсом. Им же доказана теорема о соотношении между количествами стационарных точек различных порядков. Приведем простейший случай этой теоремы.

Пусть $G$ — ограниченная плоская область, граница которой $q$ — гладкая замкнутая кривая, а $f(x, y)$ — функция класса $C_2$, имеющая внутри $G$ лишь невырожденные стационарные точки и не имеющая стационарных точек на $q$. Пусть, далее, $f(x, y) = \text{const}$ на $q$, т. е. $q$ есть линия уровня для $f$ (или ее часть). Обозначим через $m_i$ $(i = 0, 1, 2)$ число стационарных точек порядка $i$ функции $f$ в $G$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 16. *Числа $m_0$, $m_1$, $m_2$ связаны соотношением*

$$m_0 - m_1 + m_2 = 1,$$

*т. е. число точек экстремума функции двух переменных на единицу превосходит число точек минимакса.*

Наглядную иллюстрацию этой теоремы можно дать следующим образом. Пусть $G$ — остров и функция $f$ означает высоту точек острова над уровнем моря. Тогда $m_2$ — число вершин всех возвышенностей, $m_0$ — число наинизших точек всех углублений и $m_1$ — число точек перевала. Приведенная выше теорема утверждает, что числа точек перевала на единицу меньше числа вершин и углублений на острове.

ГЛАВА III

# СЛОЖНЫЕ И НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ $n$ ПЕРЕМЕННЫХ

## § 1. Преобразование переменных. Сложные функции

1. Пусть в области $G$ пространства $E_n$ определен непрерывный оператор
$$Y = f(X), \tag{3.1}$$
отображающий область $G$ в пространство того же числа измерений. Задание такого оператора равносильно заданию системы $n$ непрерывных функций $n$ переменных
$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.2}$$

Множество $D$ всех возможных значений $Y$ есть область, которую называют *образом* области $G$ при данном отображении. В свою очередь область $G$ называют *прообразом* или *оригиналом* области $D$.

Оператор $f$ из $E_n$ в $E_n$ можно рассматривать как преобразование координат в пространстве $E_n$, т. е. как переход от системы координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к системе $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Обычно при этом предполагается, что образ $D$ вместе со своим прообразом $G$, или по крайней мере хотя бы одна из этих областей, совпадает со всем пространством $E_n$.

Простейшими примерами таких преобразований служат:

а) переход на плоскости $E_2$ от *полярных* координат к декартовым, определяемый парой функций
$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cos x_2, \\ y_2 &= x_1 \sin x_2; \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

б) переход в пространстве $E_3$ от *цилиндрических* координат к декартовым, определяемый системой функций

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cos x_2, \\ y_2 &= x_1 \sin x_2, \\ y_3 &= x_3; \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

в) переход в пространстве $E_3$ от *сферических* координат к декартовым, определяемый системой функций

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cos x_2 \sin x_3, \\ y_2 &= x_1 \sin x_2 \sin x_3, \\ y_3 &= x_1 \cos x_3. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Эти примеры рассмотрены в гл. IV. Там же приведены и другие примеры.

**2.** В более общем случае система

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.6}$$

$m$ дифференцируемых функций от $n$ переменных ставит в соответствие вектору $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства $E_n$ вектор $Y(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ пространства $E_m$, т. е. определяет непрерывный оператор, отображающий $E_n$ в $E_m$.

Если $m < n$, то имеет место отображение в пространство меньшего числа измерений. В этом случае прообразом каждой точки $D \in E_m$ будет, вообще говоря, множество пространства $E_n$, имеющее размерность $n - m$. В частности, при $m = 1$ одна функция $n$ переменных отображает $E_n$ в прямую. Прообразом точки прямой будет гиперповерхность уровня. При отображении в пространство меньшего числа измерений возможно, чтобы образ $D$ области $G \subset E_n$ совпадал со всем пространством $E_m$.

При отображении $E_n$ в $E_m$ при $m > n$ образ $D$ области $G \subset E_n$ не может совпадать со всем пространством $E_m$ даже тогда, когда $G = E_n$. Область $D$ необходимо будет в $E_m$ многообразием $n$ измерений. Так, при $n = 1$ непрерывный оператор отобразит отрезок $G \subset E_1$ в *линию* пространства $E_m$, например в плоскую кривую при $m = 2$. При $n = 2$ и $m = 3$ непрерывным образом области $G$ плоскости является *параметрически заданная поверхность*.

**3.** Если в области $D$ задана функция $z=\varphi(Y)$, то оператор $Y=f(X)$, переводящий область $G$ в ее образ $D$, переводит эту функцию в функцию

$$z=\varphi[f(X)]=\psi(X), \tag{3.7}$$

определенную в области $G$. Такую функцию называют *сложной*. Для того чтобы сложная функция $\psi(X)=\varphi[f(X)]$ была дифференцируемой, достаточно потребовать дифференцируемость функции $\varphi(Y)$ и оператора $f(X)$.

Оператор $Z=\Phi(Y)$, определенный в области $D$, переводится оператором $Y=f(X)$ в новый оператор

$$Z=\Phi[f(X)]=\Psi(X), \tag{3.8}$$

который определен в области $G$. Введенную выше сложную функцию можно рассматривать как частный случай такого составного оператора. При этом, если оператор $f(X)$ отображает $E_n$ в $E_m$, а оператор $\Phi(Y)$ отображает $E_m$ в $E_k$, то составной оператор $\Psi(X)$ отображает пространство $E_n$ в $E_k$. Сложная функция получается при $k=1$.

Якобиева матрица составного оператора $\Psi(X)$ может быть получена из якобиевых матриц операторов $f(X)$ и $\Phi(Y)$ (см. стр. 78) с помощью правила умножения матриц по формуле

$$(\Psi)=(\Phi)(f). \tag{3.9}$$

Например, при $n=m=k=2$ имеем

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{Vmatrix}. \tag{3.10}$$

При $k=1$ составной оператор является сложной функцией и ее матрица Якоби вырождается в матрицу-строку, состоящую из частных производных. Формула (3.9) дает

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z}{\partial x_n} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial z}{\partial y_1} & \frac{\partial z}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial z}{\partial y_n} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{Vmatrix}. \tag{3.11}$$

Отсюда вытекает формула для частных производных сложной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}. \qquad (3.12)$$

Если вектор $dX$ есть приращение $X$, то дифференциал оператора $\Psi(X)$, как было указано в § 4 предыдущей главы, имеет вид

$$d\Psi(X, dX) = \Psi'(X)\, dX, \qquad (3.13)$$

где $\Psi'(X)$ означает якобиеву матрицу $(\Psi)$ оператора $\Psi(X)$. Воспользовавшись аналогичным равенством

$$dY = df(X, dX) = f'(X)\, dX$$

и формулой (2.9), приведем выражение для дифференциала составного оператора к виду

$$dZ = \Phi'(Y)\, dY, \qquad (3.14)$$

где $dY$ означает не приращение оператора $Y$, а его дифференциал.

Равенство (3.14) показывает, что дифференциал оператора сохраняет свою форму и в том случае, когда оператор является составным, т. е. когда его аргумент в свою очередь является оператором от некоторого другого независимого вектора. Это свойство называют *инвариантностью дифференциала*. Инвариантность дифференциала имеет место, в частности, и для сложной функции (т. е. при $k = 1$).

**4.** Пусть $Y = f(X)$ — оператор, отображающий $E_n$ в $E_n$. Тогда якобиева матрица этого оператора будет квадратной. Определитель этой матрицы называют *определителем Якоби* или *якобианом* отображения. Якобиан системы функций (3.2) принято обозначать символом

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \qquad (3.15)$$

сходным с обозначением производной.

Рассмотрим оператор $Z = \Phi(Y)$, также отображающий $E_n$ в $E_n$. Так как определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей, то из (3.9) для якобиана составного оператора получаем

$$\frac{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \quad (3.16)$$

Более общая формула: пусть оператор $Y = f(X)$ отображает $E_n$ в $E_m$, а оператор $Z = \Phi(Y) - E_m$ в $E_n$, причем $m > n$. Тогда

$$\frac{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \frac{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{D(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n})} \frac{D(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \quad (3.17)$$

где сумма распространяется на все возможные группы из индексов $1, 2, \ldots, m$ по $n$ в каждой. В частности, при $n = 2$, $m = 3$ получаем

$$\frac{D(z_1, z_2)}{D(x_1, x_2)} = \frac{D(z_1, z_2)}{D(y_1, y_2)} \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} +$$

$$+ \frac{D(z_1, z_2)}{D(y_2, y_3)} \frac{D(y_2, y_3)}{D(x_1, x_2)} + \frac{D(z_1, z_2)}{D(y_3, y_1)} \frac{D(y_3, y_1)}{D(x_1, x_2)}. \quad (3.18)$$

Аналогия между якобианом и производной функции одного переменного обнаруживается и в геометрическом смысле якобиана. Пусть $G$ — некоторая окрестность точки $X$, а $D$ — образ $G$ при отображении $Y = f(X)$. Обозначим через $V_n(G)$ и $V_n(D)$ соответственно $n$-мерные объемы областей $G$ и $D$. Тогда якобиан отображения в точке $X$ равен *предел у отношения объемов* $\frac{V_n(D)}{V_n(G)}$, когда окрестность $G$ стягивается в точку. В частности, при $n = 2$ якобиан есть коэффициент искажения площадей при отображении.

5. Переменные $z_1, z_2, \ldots, z_n$ могут оказаться тождественными переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В этом случае речь идет об *обращении* оператора $Y = f(X)$. Здесь следует прежде всего позаботиться о возможности такого обращения.

Теорема 1. *Если якобиан отображения $Y = f(X)$ отличен от нуля в некоторой точке $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,* *непрерывен в этой точке и ее окрестности и*

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0,$$

*то существует окрестность $G$ этой точки, в которой отображение взаимно однозначно и допускает обращение.*

Это означает, что каждая точка образа $D$ области $G$ имеет прообразом в $G$ одну и только одну точку. Якобиан обратного отображения может быть найден по формуле

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{1}{\dfrac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}}. \tag{3.19}$$

Теорема об обращении отображения является частным случаем теоремы существования неявной функции.

## § 2. Неявные функции. Функции, зависящие от параметра

**1.** Допустим, что значения переменных $x$ и $y$ связаны между собой уравнением вида

$$F(x, y) = 0.$$

Если каждому значению $x$ из некоторого интервала соответствует одно или несколько значений $y$, совместно с $x$ удовлетворяющих этому уравнению, то последнее определяет (однозначную или многозначную) функцию $y = f(x)$, обращающую уравнение $F(x, y) = 0$ в тождество. Например, уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$ определяет двузначную функцию $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$. Говорят, что уравнение $F(x, y) = 0$ определяет *неявную функцию* одного переменного.

Условия существования, непрерывности и дифференцируемости неявной функции одного переменного устанавливаются следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть $F(x, y)$ — функция двух переменных, непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности точки $(a, b)$. Если $F(a, b) = 0$ и $F'_y(a, b) \neq 0$, то существует такое число $\delta > 0$, что уравнение $F(x, y) = 0$ определяет в интервале $(a - \delta, a + \delta)$ однозначную, непрерывную и дифференцируемую функцию $y = f(x)$,* *обращающую это уравнение в тождество и удовлетворяющую равенству* $b = f(a)$.

Производная неявной функции может быть найдена по формуле

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{3.20}$$

Последующие производные могут быть найдены по формулам

$$\left.\begin{aligned}
y'' &= -\frac{F''_{xx}(F'_y)^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}(F'_x)^2}{(F'_y)^3},\\
y''' &= -(F'_y)^{-5}\left[F'''_{xxx}(F'_y)^4 - 3F'''_{xxy}(F'_y)^3F'_x + \right.\\
&+ 3F'''_{xyy}(F'_y)^2(F'_x)^2 - F'''_{yyy}F'_y(F'_x)^3 - 3F''_{xx}F''_{xy}(F'_y)^3 +\\
&+ 3F''_{xx}F''_{yy}F'_x(F'_y)^2 + 6(F''_{xy})^2F'_x(F'_y)^2 +\\
&\left. + 3(F''_{yy})^2(F'_x)^3 - 9F''_{xy}F''_{yy}(F'_x)^2F'_y\right] \text{ и т. д.}
\end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

Все они получаются дифференцированием тождества $F(x, y) = 0$ как сложной функции и использованием уже известных производных. Для существования каждой из них достаточно, чтобы имела смысл соответствующая правая часть, т. е. чтобы существовали все входящие в нее производные и знаменатель был отличен от нуля.

Геометрически речь идет о том, чтобы линию нулевого уровня функции $F(x, y) = 0$ представить в виде графика явно заданной функции $y = f(x)$. Это оказывается возможным локально, т. е. в окрестности любой точки, кроме тех точек, в которых касательная к линии уровня оказывается параллельной оси ординат.

**2.** Аналогично обстоит дело и для одной неявной функции нескольких переменных. Уравнение

$$F(x_1, x_2, \qquad x_n, y) = 0 \tag{3.22}$$

определяет $n$-мерную гиперповерхность уровня функции $n$ переменных в $(n+1)$-мерном пространстве. Если каждому вектору $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ соответствует значение $y$, удовлетворяющее, вместе с $X$, уравнению (3.22), то последнее определяет неявную функцию вектора $X$ — неявную функцию $n$ переменных.

Условия существования такой неявной функции по существу не отличаются от условий существования неявной функции одного переменного.

Теорема 3. *Пусть* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ — *функция* $n+1$ *переменных, непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности точки* $X(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y^0)$. *Если* $F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y^0) = 0$ *и* $F'_y(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \neq 0$ *в рассматриваемой точке, то существует такое число* $\delta > 0$, *что уравнение* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ *определяет в* $\delta$*-окрестности точки* $X$ *однозначную, непрерывную и дифференцируемую функцию* $y = f(X)$, *обращающую это уравнение в тождество и удовлетворяющую равенству* $y^0 = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Частные производные этой функции находятся по тем же формулам (3.20), (3.21).

**3.** В самом общем случае можно рассматривать систему $m$ уравнений с $n+m$ переменными

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

как оператор

$$F(X, Y) = 0, \tag{3.24}$$

отображающий $(n+m)$-мерный вектор, или, что то же самое, пару векторов соответственно размерности $n$ и $m$, в нулевой вектор $m$-мерного пространства.

Система (3.23) определяет $y_1, y_2, \ldots, y_m$ как неявные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Иначе говоря, оператор (3.24) определяет $m$-мерный вектор $Y$ как неявную функцию $n$-мерного вектора $X$. Условия существования неявной функции аналогичны условиям теорем 2 и 3, причем роль производной играет здесь якобиан

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \ldots & & \ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}. \tag{3.25}$$

7 Зак. 2618. И. Г. Араманович и др.

Теорема 4. *Пусть функции* $F_1, F_2, \ldots, F_m$ *от* $n+m$ *переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ *непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0$ *и имеют якобиан* $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)}$, *отличный от нуля в этой точке. Тогда существует окрестность точки* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *(вектора* $X^0$*), в которой система уравнений* (3.23) *(операторное равенство* (3.24)*) определяет* $m$ *функций*

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \quad x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.26}$$

*(оператор* $Y = f(X)$*), непрерывных и дифференцируемых в окрестности этой точки и таких, что*

$$y_i^0 = f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$(Y^0 = f(X^0)).$$

Элементы матрицы Якоби оператора $Y = f(X)$, определяемого неявно равенством (3.24), находятся по формулам

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_j, y_{i+1}, \ldots, y_m)}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_m)}} \tag{3.27}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n).$$

Равенство (3.27) еще раз демонстрирует аналогию между якобианом и производной функции одного переменного.

Рассматривая, в частности, $n$ уравнений с $2n$ неизвестными

$$F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \quad y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.28}$$

найдем

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = (-1)^n \frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}}. \tag{3.29}$$

Если предполагать уравнения (3.28) разрешенными относительно переменных $y_1, \ldots, y_n$, то теорема существования неявной функции превращается в теорему о возможности обращения оператора, приведенную в § 1, п. 5. Формула

(3.29) содержит в качестве частного случая приведенную там формулу (3.19).

4. Якобиева матрица находит применение также в вопросе о зависимости функций. Пусть

$$y_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.30}$$

— система $m$ функций $n$ переменных. Функции предполагаются непрерывными вместе со своими частными производными в некоторой области $G$.

Функция $y_j$ называется *зависящей от остальных функций системы*, если в $G$ тождественно относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполняется соотношение

$$y_j = \varphi(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_m). \tag{3.31}$$

Функции $y_1, y_2, \ldots, y_m$ называют *зависимыми* в области $G$, если какая-либо одна из них зависит от остальных.

Если, наоборот, ни в области $G$, ни в какой-либо из ее частей не имеет места тождество вида (3.31), то говорят, что функции $y_1, \ldots, y_m$ *независимы* в $G$.

Для установления независимости системы функций (3.30) следует обратиться к матрице Якоби этой системы. Имеет место следующая

Теорема 5. *Для того чтобы система функций* (3.30) *при $m < n$ была независимой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из определителей $m$-го порядка, составленный из элементов ее якобиевой матрицы, был отличен от нуля в области $G$.*

Более точный результат можно получить, воспользовавшись понятием ранга матрицы Якоби. Назовем *рангом* наивысший из порядков определителей, образованных из якобиевой матрицы и не обращающихся в нуль тождественно в $G$. Иначе говоря, если ранг матрицы равен $\mu$, то $\mu \leqslant n$, $\mu \leqslant m$ и в матрице существует определитель порядка $\mu$, отличный от тождественного нуля, тогда как все определители порядка выше $\mu$, которые можно выделить из данной якобиевой матрицы, равны нулю тождественно.

Теорема 6. *Система $m$ функций* (3.30) *содержит ровно $\mu$ независимых* ($\mu \leqslant m$, $\mu \leqslant n$) *в области $G$ или некоторой ее части тогда и только тогда, когда якобиева матрица системы имеет ранг $\mu$.*

**5.** Частным случаем неявных функций являются функции, определяемые уравнениями, зависящими от параметра.

Пусть, например, $X$ — вектор $n$-мерного пространства и $F(X)$ — оператор, отображающий $E_n$ в $E_n$. Уравнение

$$F(X)=0 \tag{3.32}$$

определяет фиксированный вектор из $E_n$. Если же оператор зависит от параметра, то уравнение

$$F_t(X)=0 \tag{3.33}$$

определяет вектор $X$, являющийся функцией параметра $t$, $X=X(t)$.

Теорема 7. *Если непрерывный оператор $F$ непрерывно зависит от параметра $t$ и якобиан оператора отличен от нуля при некотором значении $t=t_0$ и в его окрестности, то решение $X=X(t)$ уравнения* (3.33) *является непрерывной функцией параметра $t$ в некоторой окрестности $t_0$.*

Положение не изменяется, если параметров будет несколько.

**6.** Теоремы предыдущих пунктов, относившиеся лишь к первым производным, могут быть перенесены на более общий случай. Именно пусть функции $F_1, F_2, \ldots, F_m$ от $n+m$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ принадлежат классу $C_k$ в окрестности точки $x_1^0, \quad x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0$ и имеют якобиан $\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}$, отличный от нуля в этой точке. Тогда система уравнений (2.23)

$$F_1(x_1, \quad x_n, y_1, \quad y_m)=0,$$

$$F_m(x_1, \quad x_n, y_1, \quad y_m)=0$$

определяет в некоторой окрестности точки $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ систему $m$ функций

$$y_i=f(x_1, \quad x_n) \quad (i=1, 2, \ldots, m), \tag{3.34}$$

также принадлежащих классу $C_k$. Это утверждение может быть записано и в операторной форме.

Теорема 8. *Если оператор $F$ принадлежит классу $C_k$, то уравнение* (3.24)

$$F(X, Y)=0$$

*определяет $m$-мерный вектор $Y$ как неявную функцию $n$-мерного вектора $X$ в некоторой окрестности вектора $X^0$, принадлежащую классу $C_k$, при условии, что якобиан $\frac{D(F)}{D(Y)}$ отличен от нуля для $X=X^0$, $Y=Y^0$.*

Аналогично этому, если функции $F_i$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ являются *аналитическими*, т. е. представимы степенными рядами (оператор $F$ является аналитическим), то система уравнений (3.23) (операторное уравнение (3.24)) при тех же предположениях относительно якобиана определяют систему неявных функций (оператор), являющихся *аналитическими*. Последнее утверждение остается справедливым и в том случае, когда речь идет о функциях комплексного переменного.

**7. Метод неопределенных коэффициентов.** Пусть дано уравнение

$$F(x, y)=0. \tag{3.35}$$

Будем считать $x$ параметром, а $y$ — корнем уравнения (3.35), зависящим от параметра $x$. Пусть $F$ — аналитическая функция переменных $x$ и $y$ (которые можно пока считать комплексными) в окрестности точки (0, 0). Далее, положим $F(0, 0)=0$ и

$$F'_y(0, 0)\neq 0. \tag{3.36}$$

В силу теоремы о неявных функциях в окрестности точки (0, 0) уравнение (3.35) определяет однозначную аналитическую функцию $y=y(x)$, представимую при достаточно малых $|x|$ степенным рядом

$$y(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k. \tag{3.37}$$

Возьмем разложение

$$F(x, y)=\sum_{r, s=0}^{\infty} b_{rs} x^r y^s. \tag{3.38}$$

Из (3.36) следует, что

$$b_{00}=0, \quad b_{01}\neq 0. \tag{3.39}$$

Подставив (3.37) в (3.38), получим в силу (3.35)

$$0=F(x,\ y)=\sum_{r,\ s=0}^{\infty} b_{r,s}x^r\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k\right)^s=\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \quad (3.40)$$

где коэффициенты $c_n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ выражаются через $b_{r,s}$ и $a_k$ по формулам

$$c_1=b_{10}+b_{01}a_1, \quad (3.41_1)$$

$$c_2=b_{20}+b_{01}a_2+b_{02}a_1^2=b_{01}a_2+z_2, \quad (3.41_2)$$

$$c_n=b_{01}a_n+z_n \quad (3.41_n)$$

(где $z_2=b_{20}+b_{02}a_1^2$ зависит от $b_{20}$, $b_{02}$ и $a_1$, а $z_n$ зависит от некоторых коэффициентов $b_{rs}$, а также от $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1}$).

Из (3.40) следует, что все коэффициенты $c_n$ равны нулю. Тогда из $(3.41_1)$ получим

$$a_1=-\frac{b_{10}}{b_{01}},$$

что возможно вследствие (3.39). Найдя $a_1$, определим $z_2$, а из условия $c_2=0$ в силу $(3.41_2)$ и (3.39) найдем $a_2$.

Получаем рекуррентный процесс последовательного определения коэффициентов $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ разложения (3.37): пусть $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1}$ уже известны, тогда из $(3.41_n)$ можно определить $z_n$, а затем, учитывая равенство $c_n=0$, найти $a_n$.

Ряд (3.37) с найденными таким образом коэффициентами сходится при достаточно малых $|x|$ и представляет функцию $y$.

Если все коэффициенты $b_{rs}$ суть действительные числа, то и числа $a_k$ будут действительными и разложение (3.37) является разложением функции $y(x)$ в действительной области.

Если функция $F(x,\ y)$ принадлежит классу $C_n$, т. е. представима в виде

$$F(x,\ y)=\sum_{r,\ s=0}^{n} b_{rs}x^r y^s+r_n, \quad (3.42)$$

где $r_n=o(|x|+|y|)^n$, $b_{00}=0$, $b_{01}\neq 0$, то из уравнения $F(x,\ y)=0$ можно найти таким же образом коэффициенты $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ представления

$$y=y(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k x^k+\varepsilon, \quad \varepsilon=o(|x|^n).$$

Пример 1. Дано уравнение

$$F(x, y) \equiv x + y + xy + x^3y^2 + y^5 = 0.$$

Здесь $F(0, 0) = 0$, $F'_y(0, 0) = 1 \neq 0$. Следовательно, в силу теоремы о неявных функциях в окрестности точки $(0, 0)$ при достаточно малых $|x|$ можно представить $y$ рядом

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k.$$

Подставив это выражение в исходное уравнение и приведя подобные члены, получим

$$0 = F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \equiv (a_1 + 1)\, x + (a_2 + a_1)\, x^2 + (a_3 + a_2)\, x^3 +$$
$$+ \left(a_4 + a_3\right) x^4 + \left(a_5 + a_4 + a_1^2 + a_1^5\right) x^5 + \left(a_6 + a_5 + 2a_1a_2 + 5a_1^4a_2\right) x^6 +$$
$$+ \left(a_7 + a_6 + a_2^2 + 2a_1a_3 + 5a_1^4a_3 + 10a_1^3a_2^2\right) x^7 +$$
$$+ \left(a_8 + a_7 + 2a_1a_4 + 2a_2a_3 + a_1^4a_4 + 16a_1^3a_2a_3 + 10a_1^2a_2^3\right) x^8 + \ldots,$$

откуда следует система уравнений для определения $a_1, a_2, \ldots$:

$$\begin{aligned}
&c_1 \equiv a_1 + 1 = 0,\\
&c_2 \equiv a_2 + a_1 = 0,\\
&c_3 \equiv a_3 + a_2 = 0,\\
&c_4 \equiv a_4 + a_3 = 0,\\
&c_5 \equiv a_5 + a_4 + a_1^2 + a_1^5 = 0,\\
&c_6 \equiv a_6 + a_5 + 2a_1a_2 + 5a_1^4a_2 = 0,\\
&c_7 \equiv a_7 + a_6 + a_2^2 + 2a_1a_3 + 5a_1^4a_3 + 10a_1^3a_2^2 = 0,\\
&c_8 \equiv a_8 + a_7 + 2a_1a_4 + 2a_2a_3 + a_1^4a_4 + 16a_1^3a_2a_3 + 10a_1^2a_3^3 = 0,\\
&\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}$$

Решая эту систему последовательно, получим

$$a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1,\ a_4 = 1,\ a_5 = -1,\ a_6 = -2,$$
$$a_7 = 14,\ a_8 = -17,\ \ldots$$

и, таким образом, в окрестности точки $(0, 0)$ будем иметь

$$y = -x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 - 2x^6 + 14x^7 - 17x^8 + \ldots$$

## § 3. Диаграмма Ньютона

**1.** Описанный выше метод неопределенных коэффициентов неприменим, если нарушается условие (3.36), т. е. если $F'_y(0, 0) = b_{01} = 0$. В самом деле, в уравнении $(3.41_1)$ коэффициент при $a_1$ равен 0, и оно в общем случае неразрешимо.

В этом случае уравнение (3.35) имеет при заданном $x$, вообще говоря, несколько корней $y = y(x)$, которые разлагаются в степенные ряды по степеням $x^{1/q}$, причем целое число $q$ для разных корней бывает разное. Например, при $F(x, y) = y^5 - y^3x - y^2x + x^2$ уравнение $F(x, y) = 0$ имеет 5 корней $y = y(x)$:

$$y_1 = x^{1/2}, \quad y_2 = -x^{1/2}, \quad y_3 = x^{1/3}, \quad y_4 = \omega x^{1/3},$$

$$y_5 = \omega^2 x^{1/3} \qquad \left(\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Из них два разлагаются по степеням $x^{1/2}$ и три — по степеням $x^{1/3}$.

К Ньютону восходит названный его именем метод определения знаменателей $q$ в разложениях корней $y = y(x)$ по степеням $x^{1/q}$ и коэффициентов этих разложений.

Ограничимся вначале случаем, когда функция $F(x, y)$ в (3.35) есть многочлен степени $N$ относительно $y$:

$$F(x, y) = \sum_{s=0}^{N} F_s(x)\, y^s, \tag{3.43}$$

причем

$$F_N(x) \not\equiv 0. \tag{3.44}$$

Предположим, что каждая функция $F_s(x)$ представима рядом по степеням $x^{1/p}$, общѐе,

$$F_s(x) = x^{\rho_s} \sum_{r=0}^{\infty} F_{rs} x^{r/p}. \tag{3.45}$$

При этом, если $F_s(x) \not\equiv 0$, то первый коэффициент $F_{0s}$ можно считать отличным от нуля. Далее, уравнения $\Phi(x, y) = 0$ и $y^m \Phi(x, y) = 0$ имеют при каждом $x$ одинаковые корни $y = y(x)$, если отвлечься от корней $y \equiv 0$. Поскольку такие корни неинтересны, то можно считать, что

$$F_0(x) \not\equiv 0. \tag{3.46}$$

Из (3.44) и (3.46) следует, что

$$F_{00} \neq 0, \quad F_{N0} \neq 0. \tag{3.47}$$

Будем искать решения $y=y(x)$ уравнения (3.35) порядка $x^{\varepsilon}$, т. е. вида

$$y=y_{\varepsilon}x^{\varepsilon}+Y, \tag{3.48}$$

где $y_{\varepsilon}\neq 0$ и $Y=o(x^{\varepsilon})$ при $x\to 0$. Для определения возможных значений $\varepsilon$ и $y_{\varepsilon}$ нужно подставить (3.48) в (3.35) и приравнять нулю главный член, т. е. коэффициент при низшей степени $x$. Пока показатель $\varepsilon$ останется неизвестным, нельзя сказать, какие из членов (после этой подстановки) будут низшими. Ясно, однако, что члены наинизшего порядка содержатся среди следующих:

$$F_{00}x^{\rho_0},\ F_{0k}y_{\varepsilon}^{k}x^{\rho_k+k\varepsilon},\ F_{0N}y_{\varepsilon}^{N}x^{\rho_N+N\varepsilon}, \tag{3.49}$$

где $k$ пробегает те из значений $1, 2, \ldots, N-1$, для которых $F_k(x)\not\equiv 0$. Так как в силу (3.47) и (3.48) по крайней мере два коэффициента $F_{0s}\neq 0$, то для сокращения членов наинизшего порядка необходимо подобрать $\varepsilon$ так, чтобы по меньшей мере два из показателей

$$\rho_0,\ \rho_k+k\varepsilon,\ \rho_N+N\varepsilon$$

совпали, а остальные были не меньше их. Это соображение позволяет отыскивать все возможные значения $\varepsilon$ и соответствующие им значения $y_{\varepsilon}$.

Для нахождения значений $\varepsilon$ используется диаграмма Ньютона. Нанесем на прямоугольной координатной сетке точки с координатами

$$(0,\ \rho_0),\ (k,\ \rho_k),\ (N,\ \rho_N),$$

где $k$ пробегает те же значения, что и в (3.49). Приставим к точке $(0,\ \rho_0)$ линейку так, чтобы она совпала с осью ординат, и станем ее вращать вокруг точки $(0,\ \rho_0)$ против часовой стрелки до тех пор, пока она впервые не попадет на другую из нанесенных точек, например $(l,\ \rho_l)$. Тангенс угла между линейкой и отрицательным направлением оси абсцисс равен одному из возможных значений $\varepsilon$, ибо $\operatorname{tg}\alpha=(\rho_0-\rho_l):l=\varepsilon$. Если под таким углом провести прямые через точки $(s,\ \rho_s)$, отличные от попавших на линейку, то эти прямые будут лежать выше линейки, а потому $\rho_s+s\varepsilon>\rho_l+l\varepsilon$.

Отметим, что на линейке, соединяющей точки $(0,\ \rho_0)$ и $(l,\ \rho_l)$, могут оказаться и другие точки $(k,\ \rho_k)$.

Будем теперь вращать линейку в том же направлении вокруг той оказавшейся на линейке точки $(l, \rho_l)$, у которой абсцисса наибольшая, до совпадения ее с какой-нибудь другой из нанесенных точек $(p, \rho_p)$. Тангенс угла между новым направлением линейки и отрицательным направлением оси даст другое возможное значение $\operatorname{tg}\alpha = (\rho_l - \rho_p):(p - l) = \varepsilon$, а прямые, проходящие через другие точки $(s, \rho_s)$ параллельно данному направлению линейки, будут лежать выше, а значит, $\rho_s + \varepsilon s > \rho_l + \varepsilon l = \rho_p + \varepsilon p$. Продолжая этот процесс, получим всевозможные значения $\varepsilon$. Выпуклая ломаная, соединяющая точки поворота линейки, называется *диаграммой Ньютона.*

Перейдем к нахождению значений коэффициента $y_\varepsilon$. Пусть $(l, \rho_l)$ и $(j, \rho_j)$ — крайние точки отрезка диаграммы, определяющего одно из возможных значений $\varepsilon$. Для того чтобы после подстановки (3.48) в (3.35) уничтожились низшие члены, необходимо и достаточно, чтобы

$$P(y_\varepsilon) = \sum_{\substack{s \\ \rho_s + s\varepsilon = \rho_l + l\varepsilon}}' F_{0s} y_\varepsilon^s, \tag{3.50}$$

где знак $'$ у суммы означает, что суммирование проводится лишь по тем $s$, которые удовлетворяют указанному под знаком суммы соотношению. Уравнение (3.50) имеет $j - l$ отличных от нуля корней (с учетом их кратности), т. е. столько корней, какова длина проекции взятого отрезка диаграммы. Отсюда видно, что этим методом получаются все $N$ значений главного члена $y_\varepsilon x^\varepsilon$ в разложении (3.46).

Для нахождения следующего члена разложения $y$ нужно подставить (3.48) в (3.35) и тем же приемом определить низший член разложения, полагая

$$Y = y_{\varepsilon'} x^{\varepsilon'} + o(x^{\varepsilon'}).$$

Продолжая этот процесс, придем к следующему предложению (см. [33]).

Теорема 9. *Все $N$ решений уравнения* (3.35) *имеют вид*

$$y = y_\varepsilon x^\varepsilon + y_{\varepsilon'} x^{\varepsilon'} + y_{\varepsilon''} x^{\varepsilon''} + \ldots, \tag{3.51}$$

*где* $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' < \ldots$

Числа $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ являются дробями с конечным общим знаменателем. Ряды (3.51) сходятся в некоторой окрестности точки $x = 0$, за исключением самой точки $x = 0$, если $\varepsilon < 0$.

Для иллюстрации метода рассмотрим два примера.

Пример 2 (см. стр. 104).

$$F(x, y) \equiv x^2 - xy^2 - xy^3 + y^5 =$$
$$= F_0(x) + F_2(x)\,y^2 + F_3(x)\,y^3 + F_5(x)\,y^5,$$
$$F_0(x) = x^2 \quad (\rho_0 = 2), \qquad F_2(x) = -x \quad (\rho_2 = 1),$$
$$F_3(x) = -x \quad (\rho_3 = 1), \qquad F_5(x) = 1 \quad (\rho_5 = 0).$$

Построим точки $A_0(0, 2)$, $A_1(2, 1)$, $A_2(3, 1)$, $A_3(5, 0)$ (рис. 8). Из диаграммы Ньютона видно, что имеются два значения $\varepsilon$: $\varepsilon = {}^1/_2$

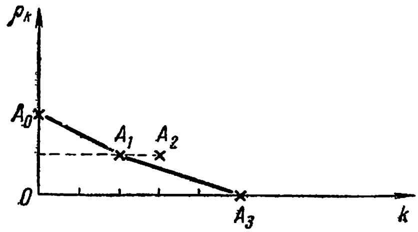


Рис. 8.

(отвечающее отрезку $A_0A_1$) и $\varepsilon = {}^1/_3$ (отвечающее отрезку $A_1A_3$) Им отвечают соответственно найденные выше два корня порядка $x^{1/2}$ и три корня порядка $x^{1/3}$.

Пример 3. $F(x, y) \equiv x - y + y^2 + x^3y^3 - 2x^2y^7 + x^4y^{12}$.

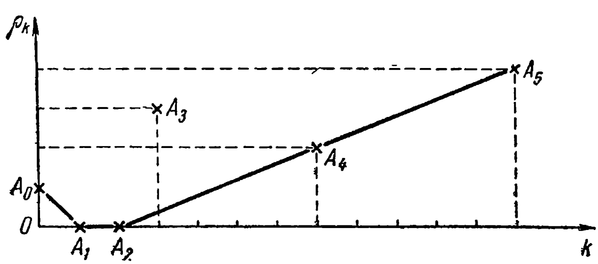


Рис. 9.

При помощи диаграммы Ньютона (рис. 9) получаем следующие значения $\varepsilon$: $\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_2 = 0$; $\varepsilon_3 = -\frac{2}{5}$. Уравнения для нахождения $y_1$, $y_0$ и $y_{-2/5}$ будут:

$$1 - y_1 = 0, \quad -y_0 + y_0^2 = 0, \quad y_{-2/5}^2 - 2y_{-2/5}^7 + y_{-2/5}^{12} = 0;$$

отсюда $y_1=1$; $y_0=1$; $y_{-2/5}=\sqrt[5]{1}$, причем $y_{-2/5}$ — двукратный корень. Следовательно, имеем решения:

$$y=x+o(x),\quad y=1+o(1),\quad y=x^{-2/5}+o(x^{-2/5}).$$

Замечание 1. Если $\varepsilon=\frac{\alpha}{\beta}$ — несократимая дробь ($\alpha\neq 0$), найденная посредством диаграммы Ньютона, и $\bar{y}_\varepsilon$ — простой корень уравнения (3.50), т. е.

$$\left.\frac{dP(y_\varepsilon)}{dy_\varepsilon}\right|_{y_\varepsilon=\bar{y}_\varepsilon}\neq 0,$$

то знаменатели чисел $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, совпадают.

Это позволяет сочетать метод диаграммы Ньютона с методом неопределенных коэффициентов. Именно пусть $\bar{y}_\varepsilon x^\varepsilon$ — главный член разложения и $\bar{y}_\varepsilon$ — простой корень уравнения (3.50). Тогда $y$ можно искать в виде

$$y=\bar{y}_\varepsilon x^\varepsilon+\sum_{i=1}^{\infty} y_{\varepsilon+\frac{i}{\beta}} x^{\varepsilon+\frac{i}{\beta}},$$

где $\beta$ — знаменатель дроби $\varepsilon$, а $y_{\varepsilon+\frac{i}{\beta}}$ могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов.

В примере 3 одно решение следует искать в виде

$$y=x+\sum_{k=2}^{\infty} y_k x^k,$$

а для нахождения следующих членов разложения других решений нужно вновь применить метод диаграммы Ньютона.

Замечание 2. Диаграмму можно разбить на три участка: убывающий, постоянный и возрастающий.

Убывающий участок доставляет решение задачи о неявных функциях уравнения (3.35) с условием $y(0)=0$. Постоянный участок дает решения задачи о неявных функциях уравнения (3.35) с условием $y(0)=y_0$, где $y_0$ — нетривиальные решения уравнения $F(0,\ y)=0$. Наконец, возрастающий участок доставляет особые решения уравнения (3.35), для которых

$$\lim_{x\to 0} y(x)=\infty.$$

**2.** Рассмотрим теперь уравнение (3.35) в случае, когда $F(x, y) = \sum_{s=0}^{\infty} F_s(x) y^s$. Этот случай отличается от предыдущего лишь тем, что здесь построение диаграммы может потребовать бесконечного числа шагов. Однако, каков бы ни был вид диаграммы, убывающий участок диаграммы состоит из конечного числа отрезков, а это обстоятельство позволяет утверждать, что число решений уравнения (3.35), удовлетворяющих условию $y(0) = 0$, конечно, и дает возможность найти все эти решения.

Изложенные рассуждения частично могут быть перенесены на тот случай, когда в (3.35) $y$ и $F$ суть $n$-мерные векторы, т. е. когда система (3.35) совпадает с системой (3.23).

Выражение $F_s(x) y$ следует тогда понимать как вектор-функцию векторного аргумента, однородную, порядка $s$ относительно $y$.

Главный член решения находится тем же методом (если только разрешима система (3.50)), но теоремы, аналогичной теореме 9, для случая системы пока нет. Можно лишь утверждать, что справедливо замечание 1. (Корень $\bar{y}_в$ называется простым, если не вырождена матрица $\frac{dP(\bar{y}_в)}{dy_в}$.)

В действительной области все рассуждения справедливы при $x \geqslant 0$; для нахождения решений при $x < 0$ следует предварительно заменить в уравнении (3.35) $x$ на $-x$.

## § 4. Представления функций $n$ переменных в виде суперпозиций

**1.** Пусть $y = \varphi(x)$ — непрерывная функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и отображающая его на отрезок $[\alpha, \beta]$, а $z = f(y)$ — непрерывная функция, определенная на отрезке $[\alpha, \beta]$. Переменная $z$ может быть представлена как функция переменного $x$ в виде комбинации

$$z = f[\varphi(x)], \tag{3.52}$$

которая называется *суперпозицией функций* $\varphi(x)$ и $f(y)$.

Аналогично можно определить суперпозиции функций любого числа аргументов. В самом деле, пусть $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ и $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_l)$ —

точки соответствующих пространств $E_n$, $E_m$ и $E_l$. Пусть, далее, $Y = \Phi(X)$ — функция (оператор), отображающая некоторую область $G$ пространства $E_n$ на область $D$ пространства $E_m$, и $Z = F(Y)$ — функция, определенная на $D$. Отображение области $G$ в пространство $E_l$ осуществляется функцией, которую можно записать в виде комбинации

$$Z = F[\Phi(X)], \tag{3.53}$$

которая и является *суперпозицией функций* $\Phi(X)$ и $F(Y)$. При этом число аргументов, входящих в суперпозиции функций, не связывается никакими соотношениями, так что можно рассматривать самые различные комбинации.

Представление функции нескольких переменных в виде суперпозиций функций меньшего числа переменных играет существенную роль в номографии, а также при табулировании функций. Так, например, для табулирования функции двух переменных

$$z = \ln(e^x + e^y), \tag{3.54}$$

которая может быть представлена в виде суперпозиции функций одного переменного

$$z = \chi[\varphi(x) + \psi(y)], \tag{3.55}$$

где $\varphi(t) = \psi(t) = e^t$, $\chi(u) = \ln u$, достаточно иметь таблицы функций $\varphi(t) = e^t$ и $\chi(u) = \ln u$ и нет надобности составлять таблицу с двумя входами.

Аналогично функция трех переменных

$$u = \frac{z^2 + \sin xy}{z^2 - \sin xy} \tag{3.56}$$

может быть представлена в виде суперпозиций функций двух переменных

$$u = f[\varphi(x, y), z], \tag{3.57}$$

причем

$$f(s, t) = \frac{s^2 + t}{s^2 - t}, \quad \varphi(v, w) = \sin vw. \tag{3.58}$$

Отметим, что в суперпозиции (3.57), в соответствии с определением, участвуют лишь функции $\varphi$ и $f$, тогда как в суперпозиции (3.55), кроме функций $\varphi$, $\psi$, $\chi$, участвует также еще и операция сложения — аргументом функции $\chi$ является сумма $\varphi(x) + \psi(y)$. Такие суперпозиции мы назовем *суперпозициями со сложением.* Они являются частным случаем суперпозиций с применением арифметических операций. Пользуясь последними, можно сказать, что функция

$$u = \frac{z^2 + \sin xy}{z^2 - \sin xy}$$

представляется в виде суперпозиций функций одного и двух переменных

$$u = \frac{\psi(z) + \varphi(x, y)}{\psi(z) - \varphi(x, y)},$$

где $\psi(z) = z^2$, с арифметическими операциями сложения, вычитания и деления.

2. Вопрос о возможности представления функции в общем случае суперпозициями функций меньшего числа переменных был поставлен Д. Гильбертом. Естественно, что большую роль играют классы рассматриваемых функций. Для различных классов вопрос о возможности представления суперпозициями решается различным образом.

Первой из теоремы в этом направлении является теорема Гильберта, относящаяся к классу аналитических функций. Функция $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *аналитической* функцией $n$ действительных переменных в данной области, если она принадлежит классу $C_k$ при любом $k$ и в каждой внутренней точке области ее ряд Тейлора сходится к ней (см. гл. I, § 2).

Теорема 10 (Д. Гильберта). *Существуют аналитические функции трех действительных переменных, которые не могут быть представлены в виде суперпозиций аналитических функций двух переменных.*

Таким образом, «сложность» аналитических функций характеризуется числом аргументов этих функций. Для функций, принадлежащих классу $C_k$ с фиксированным $k$, это уже не так. «Характеристикой сложности» функции $n$ переменных из класса $C_k$ является отношение $\frac{n}{k}$. Это подтверждается следующей теоремой.

Теорема 11 (А. Г. Витушкина). *Для любых $n$ и $k$ существуют функции $n$ переменных из класса $C_k$, непредставимые суперпозициями функций $m$ переменных из* *класса $C_l$, если только*

$$\frac{m}{l} < \frac{n}{k}. \tag{3.59}$$

Приведенные теоремы носят негативный характер и утверждают невозможность представления в виде суперпозиций. Если же в качестве составляющих допускать произвольные непрерывные функции и рассматривать суперпозиции со сложением, то представления непрерывных функций в виде таких суперпозиций уже оказываются возможными.

Теорема 12. *Всякая непрерывная функция $n$ переменных может быть представлена в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения.*

Этот результат был получен благодаря работам В. И. Арнольда и А. Н. Колмогорова. Окончательная теорема в этом направлении может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 13. *При любом целом $n \geqslant 2$ существуют такие определенные на единичном отрезке $E_1 = [0, 1]$ непрерывные действительные функции $\psi_p^q(x)$, что каждая определенная на $n$-мерном единичном кубе $E_n$ непрерывная действительная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представима в виде*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \chi_q \left[ \sum_{p=1}^{n} \psi_p^q(x) \right], \tag{3.60}$$

*где функции $\chi_q(y)$ действительны и непрерывны.*

В частности, любая непрерывная функция двух переменных представляется как сумма пяти слагаемых вида

$$\chi[\varphi(x) + \psi(y)],$$

а непрерывная функция трех переменных — суммой семи слагаемых вида

$$\xi[\varphi(x) + \psi(y) + \chi(z)].$$

**3.** Наряду с точным изображением функции с помощью суперпозиций функций меньшего числа переменных, бывает важно иметь возможность приблизить функцию такими суперпозициями. В этом отношении наибольший интерес представляет следующая

Теорема 14 (А. Н. Колмогорова). *При любых $n \geqslant 2$ и $\varepsilon > 0$ для каждой функции $n$ переменных*

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *заданной и непрерывной в единичном кубе* $E_n$, *существуют такие многочлены*

$$b(u_1, u_2, \quad u_{n-1}), \; a_r(x), \; c_r(x) \qquad (r = 1, 2, \quad n+1)$$

*от* $n-1$ *переменного и от одного переменного, что в любой точке* $P$ *этого куба*

$$|f(P) - \tilde{f}(P)| < \varepsilon,$$

*где*

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \quad x_n) = \\ = \sum_{r=1,\,2} a_r(x_n)\, b\,[c_r(x_n) + x_1, \ldots, c_r(x_n) + x_{n-1}]. \quad (3.61)$$

В частности, полагая при $n = 3$

$$c_r(x) + x' = h_r(x, x'), \; a_r(x)\, y = g_r(x, y), \; u + v = d(u, v),$$

запишем (3.61) в виде

$$\tilde{f}(x, y, z) = \\ = d\,(g_1\{z, b\,[h_1(z, x), h_1(z, y)]\}, \; g_2\{z, b\,[h_2(z, x), h_2(z, y)]\}). \quad (3.62)$$

Таким образом, любая непрерывная функция трех переменных аппроксимируется с любой степенью точности выражением вида (3.62), где $d$, $g_r$, $b$ и $h_r$ — многочлены от двух переменных.

## ГЛАВА IV

# СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ И КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

## § 1. Отображения. Якобиан

**1. Отображения в линейном, плоском и пространственном случаях.** В предыдущей главе (гл. III, § 1, пп. 1, 2) излагался вопрос об отображениях, осуществляемых системой $n$ функций от $n$ независимых переменных. В настоящей главе будут рассмотрены отображения, представляющие особый практический интерес: линейные, плоские и пространственные случаи ($n=1$, 2 и 3 соответственно).

а) Линейный случай. Если $n=1$, то говорят, что имеет место *линейный* случай отображения, которое при этом осуществляется одной функцией

$$u=f(x). \tag{4.1}$$

Пусть функция (4.1) определена, однозначна и непрерывна на интервале $l$ оси $Ox$. Тогда всякой точке $p(x)$ (оригиналу, прообразу) этого интервала она отнесет единственную точку $q(u)$ (отображение, образ) интервала $\lambda$ оси $O'u$, который явится отображением, образом интервала $l$, служащего для него оригиналом, прообразом.

Если функция

$$x=\varphi(u) \tag{4.2}$$

является обратной для функции (4.1), то говорят, что она дает *обратное отображение* по отношению к тому, которое осуществляется функцией (4.1). Обратное отображение (4.2) отображает точки интервала $\lambda$ на точки интервала $l$; теперь уже $\lambda$ служит оригиналом (прообразом) для отображения (образа) $l$. Обратное отображение может быть и неоднозначным.

б) Плоский случай. При $n=2$ имеет место *плоский* случай отображения. Оно в этом случае осуществляется системой функций

$$\left.\begin{aligned} u&=f(x, y),\\ v&=g(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Пусть функции $f$ и $g$ определены, однозначны и непрерывны в области $D$ плоскости, снабженной системой декартовых координат $Oxy$. Тогда всякой точке $p(x, y)$ области $D$ система (4.3) отнесет единственную точку $q(u, v)$ области $\Delta$ плоскости, снабженной системой декартовых координат $O'uv$. Область $\Delta$ явится отображением (образом) области $D$, служащей для нее оригиналом (прообразом).

Если систему (4.3) разрешить относительно $x$ и $y$ и получить новую систему

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(u, v),\\ y&=\psi(u, v), \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

то говорят, что система (4.4) дает *обратное* отображение по отношению к тому, которое осуществлялось системой (4.3). Обратное отображение может быть и неоднозначным.

в) Пространственный случай. При $n=3$ имеет место *пространственный* случай отображения, осуществляемого системой функций

$$\left.\begin{aligned} u&=f(x, y, z),\\ v&=g(x, y, z),\\ w&=h(x, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Пусть функции $f$, $g$ и $h$ определены, однозначны и непрерывны в области $Q$ пространства, снабженного системой декартовых координат $Oxyz$. Тогда всякой точке $p(x, y, z)$ области $Q$ система (4.5) отнесет единственную точку $q(u, v, w)$ области $\Omega$ пространства, снабженного системой декартовых координат $O'uvw$. Область $\Omega$ явится отображением (образом) области $Q$, служащей для нее оригиналом (прообразом).

Если систему (4.5) разрешить относительно $x$, $y$ и $z$, то говорят, что вновь полученная система

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v, w), \\ y &= \psi(u, v, w), \\ z &= \chi(u, v, w) \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

дает *обратное* отображение по отношению к тому, которое осуществлялось системой (4.5). Обратное отображение может быть и неоднозначным.

**2. Гомеоморфные отображения (гомеоморфизм).** Если (для всякого $n$) не только данное (прямое) отображение, но и ему обратное являются однозначными, то данное отображение называется ***взаимно однозначным***. Если все функции, участвующие и в данном и в обратном ему отображениях, являются непрерывными, то говорят, что данное отображение ***взаимно непрерывно***.

Взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение называется *гомеоморфным*. Гомеоморфное отображение обладает тем свойством, что каждой точке прообраза оно ставит в соответствие единственную точку образа и каждым двум различным точкам прообраза оно ставит в соответствие две различные же точки образа.

**3. Аффинные отображения.** Если каждая из функций системы, участвующих в отображении (для всякого $n$), является *линейной* функцией, то соответствующее отображение называется *аффинным*.

а) Линейный случай. Аффинное отображение в линейном случае осуществляется функцией

$$u = ax + b. \tag{4.7}$$

Если $a \neq 0$, то отображение (4.7) *обратимо*:

$$x = \frac{1}{a}u - \frac{1}{a}b. \tag{4.8}$$

*Обратное* отображение (4.8) будет также аффинным. Из (4.7) и (4.8) замечаем, что $u$ как функция $x$ и, наоборот, $x$ как функция $u$ всюду однозначны и непрерывны. Следовательно, при $a \neq 0$ аффинное отображение оказывается всюду гомеоморфным.

Пусть отрезок $[x_1, x_2]$ оси $Ox$ посредством функции (4.7) отобразится на отрезок $[u_1, u_2]$ оси $O'u$. Тогда

$$a = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}$$

и, следовательно, $|a|$ показывает отношение длины отрезка-образа к длине отрезка-прообраза. По этой причине $|a|$ называется *коэффициентом искажения* (длины) при аффинном отображении (4.7).

Знак $a$ обусловливает направление перемещения отображенной точки: если $a > 0$, то точка-образ движется вдоль отрезка $[u_1, u_2]$ в том же направлении, в каком точка-прообраз движется вдоль отрезка $[x_1, x_2]$; если $a < 0$, то направления перемещений точки-образа и точки-прообраза противоположны.

Если $a = 0$, то отображение (4.7) необратимо и поэтому, конечно, негомеоморфно. При этом функция (4.7) запишется в виде $u = b$. Она отображает всю ось $Ox$ в одну бесконечно много раз покрытую точку $b$ оси $O'u$. В случае $a = 0$ отображение (4.7) называется *вырожденным* или *несобственным*.

Если взять на оси $Ox$ точки, *равномерно распределенные* (т. е. с неизменным расстоянием между двумя соседними точками), то невырожденное ($a \neq 0$) аффинное отображение (4.7) отобразит их также в равномерно распределенные точки оси $O'u$.

б) Плоский случай. Аффинное отображение в плоском случае осуществляется системой функций

$$\left.\begin{aligned} u &= a_1x + b_1y + c_1, \\ v &= a_2x + b_2y + c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (4.9)$$

Если определитель системы отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \qquad (4.10)$$

то систему (4.9) можно разрешить относительно $x$ и $y$:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1'u + b_1'v + c_1', \\ y &= a_2'u + b_2'v + c_2', \end{aligned}\right\} \qquad (4.11)$$

а это показывает, что отображение, обратное аффинному, есть также аффинное отображение. Следовательно, при выполнении условия (4.10) аффинное отображение (4.9) оказывается гомеоморфным.

Если условие (4.10) не выполнено, то, оказавшись необратимым, отображение (4.9) при этом перестает быть гомеоморфным и называется *вырожденным* или *несобственным*: оно может отобразить всю плоскость $Oxy$ в прямую или в точку плоскости $O'uv$.

Ниже кратко излагаются *основные свойства аффинных отображений*.

1°. Если в плоскости построить две системы прямых, каждая из которых состоит из прямых, параллельных и равноотстоящих одна от другой, то плоскость разрежется на области, ограниченные равными между собой параллелограммами. Говорят, что точки, лежащие в вершинах этих параллелограммов, *равномерно распределены* в плоскости.

Оказывается, что при выполнении условия (4.10) аффинное отображение (4.9) преобразует системы точек, равномерно распределенных в плоскости $Oxy$, в систему точек, равномерно распределенных в плоскости $O'uv$. Никакому другому отображению вида (4.3) это свойство не присуще.

2°. Под *алгебраической величиной площади* области понимают ее площадь, взятую со знаком «+», если обход по контуру области совершается в положительном направлении (т. е. так, что при этом сама область остается слева), и площадь, взятую со знаком «—», если этот обход происходит в отрицательном (т. е. противоположном указанному) направлении.

Обозначим через $\Delta\sigma$ и $\Delta s$ алгебраические величины площадей области-образа (в плоскости $O'uv$) и области-прообраза (в плоскости $Oxy$), а через $k$ — модуль их отношения

$$k = \left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right|. \qquad (4.12)$$

Оказывается, что при невырожденном аффинном отображении (4.9) этот *коэффициент искажения* (площади) $k$ есть величина *постоянная*, не зависящая от формы отображаемой области, равная *модулю определителя* отображения (4.9):

$$k = |a_1b_2 - a_2b_1|. \qquad (4.13)$$

Знак определителя отображения (4.9) также допускает наглядное истолкование: если $a_1b_2 - a_2b_1 > 0$, то это означает, что перемещению точки-прообраза по контуру отображаемой области в определенном направлении (положительном или отрицательном) соответствует перемещение точки-образа по контуру отображенной области *в том же* направлении; если $a_1b_2 - a_2b_1 < 0$, то точка-образ движется в направлении, *противоположном* направлению движения точки-прообраза.

3°. К важному частному виду аффинных отображений относятся аффинные отображения, *сохраняющие расстояния между точками*. Такие отображения сохраняют также и *форму* области, а значит, и ее *площадь*. Отсюда следует, что такого рода аффинные отображения нужно искать среди отображений вида (4.9), у которых

$$k = |a_1b_2 - a_2b_1| = 1. \tag{4.14}$$

Оказывается, что *сохраняют расстояния* те и только те аффинные отображения, которые можно представить в одном из следующих *четырех* видов:

$$\left.\begin{aligned} u &= x\cos\varphi \mp y\sin\varphi + c_1, \\ v &= \pm x\sin\varphi + y\cos\varphi + c_2 \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

и

$$\left.\begin{aligned} u &= x\cos\varphi \mp y\sin\varphi + c_1, \\ v &= \mp x\sin\varphi - y\cos\varphi + c_2, \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

где $\varphi$ — произвольный угол.

Равенства (4.15) представляют собой формулы *преобразования координат* на плоскости: параллельного переноса осей координат с новым началом в точке $O'(c_1, c_2)$ и поворота системы координат либо на угол $\varphi$ (при верхних знаках), либо на угол $-\varphi$ (при нижних знаках). Следовательно, при отображениях вида (4.15) образ данной области получается передвижением ее как твердого тела — сначала вращением вокруг начала координат, а затем переносом параллельно самой себе. Поэтому аффинные отображения вида (4.15) называют *плоским движением твердой пластины* (области) или просто *движением*. (Отображения вида (4.16) не имеет смысла называть движением, так как они требуют еще и симметричного отражения области относительно оси координат, чего одним передвижением области в плоскости достигнуть нельзя.)

4°. К другому часто встречаемому типу аффинных отображений относится отображение

$$\left.\begin{aligned} u &= ax, \\ v &= ay, \quad a \neq 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

которое определяет преобразование *гомотетии* с центром в точке $O(0, 0)$. Число $a$ называется *коэффициентом гомотетии*. Пусть плоскость $O'uv$ совмещена с плоскостью $Oxy$. Тогда в случае $a > 0$ точка $p(x, y)$ отобразится в точку $q(u, v)$, лежащую на том же луче, что и сама точка $p(x, y)$, а в случае $a < 0$ она отобразится в точку, лежащую на противоположном луче, причем в обоих этих случаях отношение отрезков $Oq$ и $Op$ (расстояний образа и прообраза от центра гомотетии) остается постоянным, равным $|a|$. Преобразование гомотетии отображает любую фигуру (область) в *подобную* ей фигуру (область) с коэффициентом подобия $|a|$.

в) Пространственный случай. Аффинное отображение в пространственном случае осуществляется системой

$$\left.\begin{aligned} u &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ v &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ w &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3. \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

Если предположить, что определитель системы (4.18) отличен от нуля:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{4.19}$$

то систему (4.18) можно разрешить относительно $x$, $y$ и $z$:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1'u + b_1'v + c_1'w + d_1', \\ y &= a_2'u + b_2'v + c_2'w + d_2', \\ z &= a_3'u + b_3'v + c_3'w + d_3', \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

а это показывает, что отображение, обратное аффинному, есть также аффинное отображение. Следовательно, при выполнении условия (4.19) аффинное отображение (4.18) оказывается гомеоморфным.

Если условие (4.19) не выполнено, то, оказавшись необратимым, отображение (4.18) при этом перестает быть гомеоморфным и называется *вырожденным* или *несобственным*: оно может все пространство $Oxyz$ отобразить в одну плоскость пространства $Ouvw$.

Если в пространстве построить три системы плоскостей, каждая из которых состоит из плоскостей, параллельных и равноотстоящих одна от другой, то пространство разрежется на области, ограниченные равными между собой параллелепипедами. Говорят, что точки, лежащие в вершинах этих параллелепипедов, *равномерно распределены* в пространстве.

Оказывается, что невырожденное аффинное отображение (4.18) преобразует систему точек, равномерно распределенных в пространстве $Oxyz$, в систему точек, равномерно распределенных в пространстве $O'uvw$. Никакому другому отображению вида (4.5) это свойство не присуще.

При невырожденном аффинном отображении (4.18) *коэффициент искажения* (объема) $k$, т. е. отношение объема области-образа к объему области-прообраза, есть величина *постоянная*, не зависящая от формы области, равная *модулю определителя* системы (4.18):

$$k = |\delta|. \tag{4.21}$$

**4. Коэффициент искажения. Якобиан.** Постоянство коэффициента искажения (длины, площади, объема) во всех точках (оси, плоскости, пространства) имеет место при невырожденных аффинных отображениях и только при них. Для неаффинных отображений возникает необходимость *локального* определения коэффициента искажения.

а) Линейный случай. *Коэффициентом искажения* $k(x_0)$ в точке $p_0(x_0)$ отображения (4.1), гомеоморфного в точке $p_0$, называется *предел отношения* длины отображенного интервала (на оси $O'u$) к длине отображаемого интервала (на оси $Ox$) с началом в точке $p_0$ при неограниченном стягивании этого интервала к точке $p_0$.

В предположении *дифференцируемости* функции $f(x)$ из этого определения следует, что коэффициент искажения равен *модулю производной* отображающей функции, взятой в данной точке:

$$k(x_0) = |f'(x_0)|. \tag{4.22}$$

б) Плоский случай. *Коэффициентом искажения* $k(x_0, y_0)$ в точке $p_0(x_0, y_0)$ отображения (4.3), гомеоморфного в точке $p_0$, называется *предел отношения* площади отображенной области (в плоскости $O'uv$) к площади отображаемого прямоугольника (в плоскости $Oxy$) с вершиной в точке $p_0$ и со сторонами, параллельными осям $Ox$ и $Oy$, при неограниченном стягивании этого прямоугольника к точке $p_0$.

В предположении *дифференцируемости* функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ из определения следует, что коэффициент искажения равен *модулю якобиана* отображения (4.3):

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}. \tag{4.23}$$

Таким образом,

$$k(x_0, y_0) = \left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}. \tag{4.24}$$

в) Пространственный случай. *Коэффициентом искажения* $k(x_0, y_0, z_0)$ в точке $p_0(x_0, y_0, z_0)$ отображения (4.5), гомеоморфного в точке $p_0$, называется *предел отношения* объема отображенной области (в пространстве $O'uvw$) к объему отображаемого прямоугольного параллелепипеда (в пространстве $Oxyz$) с вершиной в точке $p_0$ и с гранями, параллельными плоскостям $xOy$, $yOz$ и $zOx$, при неограниченном стягивании этого параллелепипеда к точке $p_0$.

В предположении *дифференцируемости* функций $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ и $h(x, y, z)$ из определения следует, что коэффициент искажения равен *модулю якобиана* отображения (4.5):

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}. \tag{4.25}$$

Таким образом,

$$k(x_0, y_0, z_0) = \left| \frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)} \right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0}}. \tag{4.26}$$

**5. Конформные отображения.** Пусть функции $u$ и $v$, определяемые отображением (4.3), являются *гармоническими*, т. е. пусть они дважды непрерывно дифференцируемы и каждая из них удовлетворяет *уравнению Лапласа*:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.27}$$

и пусть они связаны между собой одним из следующих соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

Тогда отображение (4.3) в случае выполнения условия (4.28) называется *конформным* (или *регулярным*) *первого рода*, а в случае выполнения условия (4.29) — *конформным отображением второго рода*.

Конформные отображения обладают тем свойством, что они всякую бесконечно малую область плоскости $Oxy$ отображают в ей *подобную* бесконечно малую область плоскости $O'uv$. При этом коэффициент подобия оказывается равным квадратному корню из якобиана отображения (предполагается, что последний не равен нулю). Часто в основу определения конформных отображений кладутся именно эти их геометрические свойства[1]).

[1]) Под конформными отображениями нередко понимают только взаимно однозначные отображения («однолистные»). Иногда различают понятия конформности и регулярности отображений, называя конформными лишь взаимно однозначные отображения.

Примечание. В трехмерном случае (а тем более при $n > 3$) конформные отображения сводятся только к преобразованиям сдвига, подобия и инверсии (*теорема Лиувилля*).

## § 2. Криволинейные координаты на плоскости

1. Рассмотрим отображение

$$\left.\begin{aligned} u &= f(x, y), \\ v &= g(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

гомеоморфное в некоторой области $D$ плоскости $Oxy$, и ему обратное отображение

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \\ y &= \psi(u, v), \end{aligned}\right\} \tag{4.31}$$

которое будет также гомеоморфным в области $\Delta$ плоскости $O'uv$ ($\Delta$ — образ области $D$).

*Криволинейными координатами* точки $p$, принадлежащей области $D$ и имеющей в качестве прямоугольных декартовых координат числа $x$ и $y$, называются числа $u$ и $v$, служащие прямоугольными декартовыми координатами точки $q$ из области $\Delta$, являющейся образом точки $p$ при указанном гомеоморфном отображении.

Эти числа $u$, $v$ могут быть названы *координатами* точки $p(x, y)$, так как они по выбранным $x$, $y$ (по выбранной точке $p$) однозначно определяются с помощью системы (4.30) и, наоборот, по каждой выбранной паре чисел $u$, $v$ с помощью системы (4.31) однозначно определится пара чисел $x$, $y$, а значит, и единственная точка $p(x, y)$.

Множество точек области $D$, имеющих одну из своих криволинейных координат постоянной ($u = u_0 = \text{const}$ или $v = v_0 = \text{const}$), называется соответствующей *координатной линией* в данной системе криволинейных координат. Координатные линии $u = u_0$ и $v = v_0$ в плоскости $Oxy$ определяются уравнениями

$$f(x, y) = u_0 \tag{4.32}$$

и

$$g(x, y) = v_0 \tag{4.33}$$

соответственно.

При различных значениях $u_0$ и $v_0$ (однако таких, что определяемая ими точка $p_0$ не выходит из области $D$) образуются *две системы* координатных линий, покрывающих область $D$ и разбивающих ее на криволинейные четырехугольники (в случае аффинного отображения последние имеют форму параллелограммов).

**2. Системы ортогональных криволинейных координат на плоскости. Условия ортогональности.** Обозначим через $U$ и $V$ множества координатных линий вида $u = u_0$ и вида $v = v_0$ соответственно.

Если всякие две координатные линии, из которых одна взята из множества $U$, а другая — из множества $V$, пересекаются под прямым углом, то обладающая таким свойством система криволинейных координат называется *прямоугольной* или *ортогональной*.

Отображение (4.30) определяет ортогональную систему криволинейных координат при условии, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{4.34}$$

Это условие ортогональности системы записывают в следующей форме:

$$S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0, \tag{4.35}$$

где под символом $S$ понимают *сумму* двух слагаемых: выражения, стоящего в скобках, и выражения, ему аналогичного, получающегося из первого при замене $x$ на $y$.

Можно получить еще и другое условие ортогональности:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}=0 \tag{4.36}$$

или

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=0. \tag{4.37}$$

Всякое конформное отображение (см. § 1, п. 5) определяет систему ортогональных криволинейных координат. Обратное утверждение, однако, несправедливо.

**3. Коэффициенты Ламе и дифференциальные параметры первого порядка системы криволинейных координат в плоскости.** В различных применениях криволинейных координат используются так называемые *коэффициенты Ламе* $l_u$ *и* $l_v$ *и дифференциальные параметры первого порядка* $h_u$ *и* $h_v$, определяемые следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} l_u &= \sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}, \\ l_v &= \sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

$$\left.\begin{aligned} h_u &= \sqrt{S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}, \\ h_v &= \sqrt{S\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

Для криволинейных координат ортогональной системы коэффициенты Ламе обратны по величине соответствующим дифференциальным параметрам первого порядка, т. е.

$$l_u = \frac{1}{h_u}, \quad l_v = \frac{1}{h_v}.$$

**4. Элемент длины и элемент площади в системе криволинейных координат на плоскости.** Для элемента $ds$ длины кривой в системе (4.30) ортогональных криволинейных координат имеет место формула

$$ds = \sqrt{l_u^2\,du^2 + l_v^2\,dv^2} = \sqrt{\frac{1}{h_u^2}du^2 + \frac{1}{h_v^2}dv^2}. \tag{4.40}$$

Выражения для элементов $ds_u$ и $ds_v$ длины координатных линий $u = u_0$ и $v = v_0$ таковы:

$$ds_u = l_u\,du, \quad ds_v = l_v\,dv. \tag{4.41}$$

Для *элемента* $dq$ *площади области* в системе ортогональных криволинейных координат на плоскости справедлива формула

$$dq = l_u l_v\,du\,dv = \frac{1}{h_u h_v}\,du\,dv. \tag{4.42}$$

С другой стороны, известно, что коэффициентом искажения площади при отображении служит модуль якобиана (см. § 1). Обозначив через $J$ якобиан отображения (4.31), т. е. положив

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \tag{4.43}$$

можно записать, что

$$dq=|J|\,du\,dv. \tag{4.44}$$

Отсюда следует, что для системы ортогональных криволинейных координат

$$|J|=l_u l_v=\frac{1}{h_u h_v}. \tag{4.45}$$

**5. Некоторые системы криволинейных координат на плоскости.** Ниже приводится описание распространенных систем криволинейных координат на плоскости по следующей схеме. Даются: а) их определение (т. е. выражения прямоугольных декартовых координат $x$ и $y$ через криволинейные координаты $u$ и $v$), б) координатные линии, в) формулы для коэффициентов Ламе $l_u$ и $l_v$ (дифференциальные параметры первого порядка $h_u$ и $h_v$ для ортогональных систем вычисляются, как величины, им обратные), г) формула для элемента $ds$ длины, д) формула для элемента $dq$ площади.

### 1°. Декартовы координаты

а)
$$\left.\begin{aligned} x&=a_1'u+b_1'v+c_1', \\ y&=a_2'u+b_2'v+c_2', \end{aligned}\right\} \tag{4.46}$$

где постоянные величины $a'$, $b'$, $c'$ выбраны так, что якобиан $J_1=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ отличен от нуля.

Система (4.46) обращается в следующую:

$$\left.\begin{aligned} u&=a_1x+b_1y+c_1, \\ v&=a_2x+b_2y+c_2 \end{aligned}\right\} \tag{4.47}$$

($a$, $b$, $c$ постоянны), причем якобиан $J=\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ обращенной системы также отличен от нуля; он обратен по величине $J_1$:

$$J=\frac{1}{J_1},$$

б) Координатными линиями служат прямые, параллельные прямым

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{array}\right\} \tag{4.48}$$

и пересекающиеся под углом $\omega$, для которого $\operatorname{tg}\omega=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1a_2+b_1b_2}$. Так как

$$S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)=a_1a_2+b_1b_2, \tag{4.49}$$

то декартова система, вообще говоря, не ортогональна. Она будет ортогональной лишь в случае, когда $a_1a_2+b_1b_2=0$; при этом $\omega=\frac{\pi}{2}$. В остальных случаях она называется *косоугольной.*

Условием одинаковости масштабов в системах $Oxy$ и $O'uv$ является выполнение равенств

$$a_1^2+b_1^2=a_2^2+b_2^2=a_1'^2+a_2'^2=b_1'^2+b_2'^2=1.$$

в)
$$\left.\begin{array}{l} l_u=\sqrt{a_1'^2+a_2'^2}=\dfrac{1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}, \\ l_v=\sqrt{b_1'^2+b_2'^2}=\dfrac{1}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}. \end{array}\right\} \tag{4.50}$$

При неизменяемости масштабов $l_u=l_v=1$.

г)
$$ds=\sqrt{\left(a_1'^2+a_2'^2\right)du^2+\left(b_1'^2+b_2'^2\right)dv^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{du^2}{a_1^2+b_1^2}+\frac{dv^2}{a_2^2+b_2^2}}. \tag{4.51}$$

При неизменяемости масштабов $ds = \sqrt{du^2 + dv^2}$.

д)
$$dq = \sqrt{(a_1'^2 + a_2'^2)(b_1'^2 + b_2'^2)}\, du\, dv = \frac{1}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}}\, du\, dv. \qquad (4.52)$$

При неизменяемости масштабов $dq = du\, dv$.

### 2°. Полярные координаты

а)
$$\left.\begin{aligned} x &= u \cos v, \\ y &= u \sin v, \end{aligned}\right\} \qquad (4.53)$$

$$0 \leqslant u < +\infty, \quad 0 \leqslant v < 2\pi.$$

Обычно употребляются иные обозначения для полярных координат: $u \equiv \rho$, $v \equiv \varphi$; $\rho$ — *полярный радиус*, $\varphi$ — *полярный угол*.

Система ортогональна.

В точке (0, 0) якобиан полярной системы координат равен нулю. Следовательно, соответствующее отображение в ней перестает быть гомеоморфным: в указанной точке координата $u$ равна нулю, а координата $v$ может принять любое значение в полуинтервале $[0, 2\pi)$. Начало координат является *особой точкой* для системы полярных координат.

б) Координатными линиями служат концентрические окружности

$$x^2 + y^2 = u_0^2 \qquad (4.54)$$

с центром в начале координат и радиусом $u_0$ и лучи

$$x = u \cos v_0, \quad y = u \sin v_0, \qquad (4.55)$$

исходящие из начала координат и наклоненные к оси $Ox$ под углом $v_0$. Приведенные выше параметрические уравнения этих лучей в случае $v_0 \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ могут быть записаны в форме

$$y = (\operatorname{tg} v_0)\, x. \qquad (4.56)$$

в)
$$\left.\begin{aligned} l_u &= 1, \\ l_v &= u. \end{aligned}\right\} \tag{4.57}$$

г)
$$ds = \sqrt{du^2 + u^2\,dv^2}. \tag{4.58}$$

д)
$$dq = u\,du\,dv. \tag{4.59}$$

3°. Обобщенные полярные координаты

а)
$$\left.\begin{aligned} x &= au\cos v, \\ y &= bu\sin v, \end{aligned}\right\} \tag{4.60}$$

$$0 \leqslant u < +\infty, \quad 0 \leqslant v < 2\pi, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad a \neq b.$$

Точка (0, 0) является особой точкой системы обобщенных полярных координат.

Система не ортогональна (она будет ортогональной лишь в случае $a = b$).

б) Координатными линиями служат концентрические эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = u_0^2 \tag{4.61}$$

с центром в начале координат и с полуосями $au_0$, $bu_0$ и лучи

$$x = au\cos v_0, \quad y = bu\sin v_0, \tag{4.62}$$

исходящие из начала координат с угловым коэффициентом $\frac{b}{a}\operatorname{tg} v_0$.

в)
$$\left.\begin{aligned} l_u &= \sqrt{a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v}, \\ l_v &= u\sqrt{a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v}; \end{aligned}\right\} \tag{4.63}$$

$$\left.\begin{aligned} h_u &= \sqrt{\frac{\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 v}{b^2}}, \\ h_v &= \frac{1}{u}\sqrt{\frac{\sin^2 v}{a^2} + \frac{\cos^2 v}{b^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.64}$$

При $a \neq b$ в настоящем случае $l_u h_u \neq 1$ и $l_v h_v \neq 1$, так как при этом система обобщенных полярных координат не ортогональна.

г) $$ds = \left( (a^2\cos^2 v + b^2 \sin^2 v)\, du^2 + (b^2 - a^2)\, u \sin 2v\, du\, dv + \right. \\ \left. + (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)\, u^2\, dv^2 \right)^{1/2}. \tag{4.65}$$

д) $$dq = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv = abu\, du\, dv. \tag{4.66}$$

4°. Общие эллиптические координаты

а) $$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{(u+a^2)(v+a^2)}{a^2-b^2}, \\ y^2 &= \frac{(u+b^2)(v+b^2)}{b^2-a^2}, \end{aligned}\right\} \tag{4.67}$$

$$0 \leqslant b^2 < a^2, \quad -a^2 < v < -b^2, \quad -b^2 < u < +\infty.$$

Каждой паре координат $u$ и $v$ соответствуют четыре точки $p(x, y)$ (по одной точке в каждом квадранте), симметричные друг с другом относительно осей координат. Поэтому для гомеоморфизма необходимо ограничиться одним из квадрантов плоскости $Oxy$, например первым: $x > 0$, $y > 0$. Весь этот квадрант является областью гомеоморфизма системы эллиптических координат.

Система ортогональна.

б) Координатными линиями служат софокусные эллипсы

$$\frac{x^2}{u_0 + a^2} + \frac{y^2}{u_0 + b^2} = 1 \tag{4.68}$$

и гиперболы

$$\frac{x^2}{v_0 + a^2} - \frac{y^2}{-(v_0 + b^2)} = 1, \quad -(v_0 + b^2) > 0, \tag{4.69}$$

с фокусами в точках $F_1\left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ и $F_2\left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$.

в) $$\left.\begin{aligned} l_u^2 &= \frac{1}{4} \frac{u - v}{m(u)}, \\ l_v^2 &= \frac{1}{4} \frac{u - v}{-m(v)}, \end{aligned}\right\} \tag{4.70}$$

где $m(t) = (t + a^2)(t + b^2)$. Заметим, что $m(v) < 0$ для всех допустимых значений $v$.

г) $$ds = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u-v}{m(u)}\,du^2 + \frac{u-v}{-m(v)}\,dv^2}. \qquad (4.71)$$

д) $$dq = \frac{u-v}{4\sqrt{-m(u)\,m(v)}}\,du\,dv. \qquad (4.72)$$

5°. Вырожденные эллиптические координаты

а) $$\left.\begin{aligned} x &= \operatorname{ch} u \cos v, \\ y &= \operatorname{sh} u \sin v, \end{aligned}\right\} \qquad (4.73)$$

$$0 \leqslant u < +\infty, \quad 0 \leqslant v < 2\pi.$$

Вырожденные эллиптические координаты представляют собой частный случай общих эллиптических координат, получающийся при $a = 1$ и $b = 0$ и при замене $u$ и $v$ на $\operatorname{sh}^2 u$ и $-\sin^2 v$ соответственно.

Система равенств, определяющих вырожденные эллиптические координаты, гомеоморфно отображает всю плоскость $Oxy$, из которой удален интервал $(-1, +\infty)$ оси $Ox$, в бесконечную полуполосу плоскости $Ouv$, ограниченную тремя полупрямыми:

$$v = 0,\ u \geqslant 0; \quad v = 2\pi,\ u \geqslant 0; \quad u = 0,\ v \geqslant 0. \qquad (4.74)$$

Вырожденные эллиптические координаты $u$ и $v$ и общие эллиптические координаты $\bar{u}$ и $\bar{v}$ связаны между собой следующим образом:

$$u = \int\limits_{-b^2}^{\bar{u}} \frac{dt}{\sqrt{4m(t)}}, \quad v = \int\limits_{-b^2}^{\bar{v}} \frac{dt}{\sqrt{-4m(t)}}, \qquad (4.75)$$

где функция $m(t)$ имеет тот же смысл, что и выше.

Система ортогональна.

б) Координатными линиями служат софокусные эллипсы

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_0} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_0} = 1, \quad u_0 \neq 0, \qquad (4.76)$$

и гиперболы

$$\frac{x^2}{\cos^2 v_0} - \frac{y^2}{\sin^2 v_0} = 1, \quad v_0 \neq 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}, \qquad (4.77)$$

с фокусами в точках $F_1(-1, 0)$ и $F_2(1, 0)$.

в) $$l_u = l_v = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v}. \tag{4.78}$$

г) $$ds = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v}\sqrt{du^2 + dv^2}. \tag{4.79}$$

д) $$dq = (\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v)\, du\, dv. \tag{4.80}$$

## 6°. Параболические координаты

а) $$\left.\begin{aligned} x &= u^2 - v^2, \\ y &= 2uv, \end{aligned}\right\} \tag{4.81}$$

$$-\infty < u < +\infty, \quad 0 \leqslant v < +\infty.$$

Система равенств, определяющих параболические координаты, гомеоморфно отображает всю плоскость $Oxy$, из которой удалена положительная полуось $Ox$, в верхнюю полуплоскость $v > 0$ плоскости $Ouv$. Это отображение конформно (см. § 1, п. 5).

Система ортогональна.

б) Координатными линиями служат параболы

$$x = u_0^2 - \frac{y^2}{4u_0^2} \tag{4.82}$$

и

$$x = \frac{y^2}{4v_0^2} - v_0^2 \tag{4.83}$$

с параметрами $2u_0^2$ и $2v_0^2$ соответственно. Осью первой из парабол служит луч $(-\infty,\ u_0^2)$, а второй — луч $(-v_0^2,\ +\infty)$.

в) $$l_u = l_v = 2\sqrt{u^2 + v^2}. \tag{4.84}$$

г) $$ds = 2\sqrt{u^2 + v^2}\sqrt{du^2 + dv^2}. \tag{4.85}$$

д) $$dq = 4(u^2 + v^2)\, du\, dv. \tag{4.86}$$

## 7°. Биполярные координаты

а) $$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v}, \\ y &= \frac{\sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v}, \end{aligned}\right\} \tag{4.87}$$

$$-\infty < u < +\infty, \quad 0 \leqslant v < 2\pi.$$

Система, определяющая биполярные координаты, гомеоморфно отображает всю плоскость $Oxy$, из которой удален отрезок $[-1, 1]$ оси $Ox$, в бесконечную полосу плоскости $Ouv$, ограниченную прямыми $v=0$ и $v=2\pi$. Это отображение конформно (см. § 1, п. 5). Система ортогональна.

б) Координатными линиями служат окружности

$$(x-\operatorname{cth} u_0)^2+y^2=\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u_0} \tag{4.88}$$

и

$$x^2+(y+\operatorname{ctg} v_0)^2=\frac{1}{\sin^2 v_0} \tag{4.89}$$

радиусов $\frac{1}{|\operatorname{sh} u_0|}$ и $\frac{1}{|\sin v_0|}$ соответственно. Центр первой из них лежит в точке $(\operatorname{cth} u_0, 0)$, а второй — в точке $(0, -\operatorname{ctg} v_0)$.

в) $$l_u=l_v=\frac{1}{\operatorname{ch} u+\cos v}. \tag{4.90}$$

г) $$ds=\frac{1}{\operatorname{ch} u+\cos v}\sqrt{du^2+dv^2}. \tag{4.91}$$

д) $$dq=\frac{1}{(\operatorname{ch} u+\cos v)^2}\,du\,dv. \tag{4.92}$$

## § 3. Криволинейные координаты в пространстве

1. *Криволинейными координатами* точки $p$, имеющей в качестве прямоугольных декартовых координат числа $x$, $y$, $z$, называются прямоугольные декартовы координаты $u$, $v$, $w$ точки $q$, служащей образом точки $p$ при отображении

$$\left.\begin{aligned} u&=f(x, y, z),\\ v&=g(x, y, z),\\ w&=h(x, y, z), \end{aligned}\right\} \tag{4.93}$$

гомеоморфном в некоторой области $Q$, содержащей точку $p$.

Множество точек области $Q$, имеющих одну из своих криволинейных координат постоянной ($u=u_0=\text{const}$, или $v=v_0=\text{const}$, или $w=w_0=\text{const}$), называется *координат-*

*ной поверхностью* в данной системе координат, а множество точек области $Q$, имеющих две из своих криволинейных координат постоянными ($u=u_0$ и $v=v_0$, или $u=u_0$ и $w=w_0$, или $v=v_0$ и $w=w_0$), называется *координатной линией* в данной системе координат.

Координатные поверхности $u=u_0$, $v=v_0$, $w=w_0$ в пространстве $Oxyz$ определяются уравнениями

$$f(x,\ y,\ z)=u_0,\quad g(x,\ y,\ z)=v_0,\quad h(x,\ y,\ z)=w_0. \tag{4.94}$$

Координатные линии образуются при попарном пересечении координатных поверхностей и определяются такими системами уравнений:

$$\left.\begin{aligned} f(x,\ y,\ z)&=u_0,\\ g(x,\ y,\ z)&=v_0,\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} f(x,\ y,\ z)&=u_0,\\ h(x,\ y,\ z)&=w_0,\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} g(x,\ y,\ z)&=v_0,\\ h(x,\ y,\ z)&=w_0.\end{aligned}\right\} \tag{4.95}$$

При различных $u_0$, $v_0$, $w_0$ (однако таких, что определяемая ими точка не выходит из области $Q$) образуются три системы координатных поверхностей, покрывающих область $Q$ и разбивающих ее на кривые шестигранники (в случае аффинного отображения последние имеют форму параллелепипедов). Обозначим через $U$, $V$ и $W$ множества координатных поверхностей вида $u=u_0$, вида $v=v_0$ и вида $w=w_0$ соответственно. Если всякие три координатные поверхности, из которых одна взята из множества $U$, другая — из множества $V$, а третья — из множества $W$, попарно пересекаются под прямым углом, то обладающая таким свойством система криволинейных координат называется *прямоугольной* или *ортогональной*.

Условием ортогональности системы координат служит одновременное выполнение равенств

$$S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0,\quad S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0,\quad S\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0, \tag{4.96}$$

в которых символ $S$ означает сумму *трех* слагаемых: выражения, стоящего в скобках, и подобных ему, получающихся при замене в нем $x$ сначала на $y$, а затем на $z$.

Иначе условие ортогональности можно выразить в следующей форме:

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=0,\quad S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}\right)=0,\quad S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}\right)=0 \tag{4.97}$$

(символ $S$ имеет прежний смысл).

*Коэффициенты Ламе* $L_u$, $L_v$, $L_w$ *и дифференциальные параметры первого порядка* $H_u$, $H_v$, $H_w$ для системы криволинейных координат в пространстве выражаются следующим образом:

$$L_u=\sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}\quad L_v=\sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2},\quad L_w=\sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2}; \tag{4.98}$$

$$H_u=\sqrt{S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\quad H_v=\sqrt{S\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}\quad H_w=\sqrt{S\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}. \tag{4.99}$$

Если система координат ортогональна, то ее коэффициенты Ламе обратны по величине соответствующим дифференциальным параметрам первого порядка:

$$L_u=\frac{1}{H_u},\quad L_v=\frac{1}{H_v},\quad L_w=\frac{1}{H_w}. \tag{4.100}$$

Элементы $ds$ длины пространственной кривой, $d\sigma$ площади поверхности и $d\omega$ объема тела в системе ортогональных криволинейных координат выражаются следующим образом:

$$ds=\sqrt{L_u^2\,du^2+L_v^2\,dv^2+L_w^2\,dw^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{H_u^2}du^2+\frac{1}{H_v^2}dv^2+\frac{1}{H_w^2}dw^2}, \tag{4.101}$$

$$d\sigma=\sqrt{(L_uL_v\,du\,dv)^2+(L_uL_w\,du\,dw)^2+(L_vL_w\,dv\,dw)^2}, \tag{4.102}$$

$$d\omega=L_uL_vL_w\,du\,dv\,dw. \tag{4.103}$$

В частности, для элементов $ds_u$, $ds_v$ и $ds_w$ — длин координатных линий — получаются формулы

$$ds_u=L_u\,du,\quad ds_v=L_v\,dv,\quad ds_w=L_w\,dw. \tag{4.104}$$

Если поверхность $S$ в пространстве $Oxyz$ определяется параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v), \quad z=\chi(u, v), \tag{4.105}$$

то элемент $d\sigma$ ее площади можно выразить формулой

$$d\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \tag{4.106}$$

где

$$E=S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad F=S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right), \quad G=S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \tag{4.107}$$

Величины $E$, $F$ и $G$ называются *коэффициентами Гаусса* поверхности $S$ в данной системе криволинейных координат $u$, $v$. Элемент $ds$ длины линии на поверхности $S$ равен

$$ds=\sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)^2}=\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}. \tag{4.108}$$

Подрадикальное выражение называется *первой дифференциальной формой Гаусса*. Условие $F=0$ является необходимым и достаточным для ортогональности *координатных линий* $u=u_0$ и $v=v_0$ на поверхности $S$.

**2. Некоторые системы криволинейных координат в пространстве.** Ниже приводится описание распространенных систем криволинейных координат в пространстве по следующей схеме. Для ортогональных систем даются: а) их определение (т. е. выражения прямоугольных декартовых координат $x$, $y$, $z$ через криволинейные координаты $u$, $v$, $w$), б) координатные поверхности, в) формулы для коэффициентов Ламе $L_u$, $L_v$, $L_w$ (дифференциальные параметры первого порядка $H_u$, $H_v$, $H_w$ для ортогональных систем вычисляются как величины, им обратные), г) формула для элемента $ds$ длины линии, д) формула для элемента $d\sigma$ площади поверхности, е) формула для элемента $d\omega$ объема. Для неортогональных систем дается описание их важнейших свойств. В необходимых случаях в тексте приводятся некоторые объяснения.

## 1°. Декартовы координаты

a)
$$\left.\begin{aligned} x &= a_1'u + b_1'v + c_1'w + d_1', \\ y &= a_2'u + b_2'v + c_2'w + d_2', \\ z &= a_3'u + b_3'v + c_3'w + d_3', \end{aligned}\right\} \qquad (4.109)$$

где $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ постоянны и якобиан $J_1 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ отличен от нуля. Эта система обращается в следующую:

$$\left.\begin{aligned} u &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ v &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ w &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3, \end{aligned}\right\} \qquad (4.110)$$

где $a$, $b$, $c$, $d$ постоянны и якобиан $J = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{J_1}$ также отличен от нуля.

Система декартовых координат в общем случае не является ортогональной, так как величины

$$\left.\begin{aligned} S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right) &= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2, \\ S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right) &= a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3, \\ S\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right) &= a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 \end{aligned}\right\} \qquad (4.111)$$

не для всяких $a$, $b$, $c$ равны нулю.

Условием неизменяемости масштабов ортогональной системы служит выполнение следующих равенств:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 =$$
$$= \left(a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 = b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2 = c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2\right) = 1. \qquad (4.112)$$

б) Координатными поверхностями служат *плоскости*, параллельные плоскостям

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,\\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0.\end{aligned}\right\} \tag{4.113}$$

в)
$$\left.\begin{aligned} L_u=\sqrt{a_1'^2+a_2'^2+a_3'^2}=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}},\\ L_v=\sqrt{b_1'^2+b_2'^2+b_3'^2}=\frac{1}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}},\\ L_w=\sqrt{c_1'^2+c_2'^2+c_3'^2}=\frac{1}{\sqrt{a_3^2+b_3^2+c_3^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{4.114}$$

(Здесь и ниже предполагается, что система ортогональна.)

г)
$$ds^2=\left(a_1'^2+a_2'^2+a_3'^2\right)du^2+\left(b_1'^2+b_2'^2+b_3'^2\right)dv^2+$$
$$+\left(c_1'^2+c_2'^2+c_3'^2\right)dw^2=\frac{1}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}du^2+$$
$$+\frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}dv^2+\frac{1}{a_3^2+b_3^2+c_3^2}dw^2. \tag{4.115}$$

д)
$$d\sigma^2=\left(a_1'^2+a_2'^2+a_3'^2\right)\left(b_1'^2+b_2'^2+b_3'^2\right)(du\,dv)^2+$$
$$+\left(a_1'^2+a_2'^2+a_3'^2\right)\left(c_1'^2+c_2'^2+c_3'^2\right)(du\,dw)^2+$$
$$+\left(b_1'^2+b_2'^2+b_3'^2\right)\left(c_1'^2+c_2'^2+c_3'^2\right)(dv\,dw)^2=$$
$$=\frac{(du\,dv)^2}{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)}+\frac{(du\,dw)^2}{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_3^2+b_3^2+c_3^2\right)}+$$
$$+\frac{(dv\,dw)^2}{\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)\left(a_3^2+b_3^2+c_3^2\right)}. \tag{4.116}$$

е)
$$d\omega^2=\left(a_1'^2+a_2'^2+a_3'^2\right)\left(b_1'^2+b_2'^2+b_3'^2\right)\left(c_1'^2+c_2'^2+c_3'^2\right)\times$$
$$\times du^2\,dv^2\,dw^2=\frac{du^2\,dv^2\,dw^2}{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)\left(a_3^2+b_3^2+c_3^2\right)}. \tag{4.117}$$

2°. Цилиндрические координаты

а)
$$\left.\begin{aligned} x &= u\cos v,\\ y &= u\sin v,\\ z &= w, \end{aligned}\right\} \tag{4.118}$$

$$0 \leqslant u < +\infty, \quad 0 \leqslant v < 2\pi, \quad -\infty < w < +\infty.$$

Система ортогональна.

б) Координатными поверхностями служат *круговые цилиндры*

$$x^2 + y^2 = u_0^2, \tag{4.119}$$

оси которых совпадают с осью $Oz$, а радиус равен $u_0$, *полуплоскости*

$$x = u\cos v_0, \quad y = u\sin v_0, \tag{4.120}$$

проходящие через ось $Oz$ и образующие угол $v_0$ с плоскостью $Oxz$, и *плоскости*

$$z = w_0, \tag{4.121}$$

параллельные плоскости $Oxy$.

в) $$L_u = 1, \quad L_v = u, \quad L_w = 1. \tag{4.122}$$

г) $$ds = \sqrt{du^2 + u^2\,dv^2 + dw^2}. \tag{4.123}$$

д) $$d\sigma = \sqrt{u^2(du\,dv)^2 + (du\,dw)^2 + u^2(dv\,dw)^2}. \tag{4.124}$$

е) $$d\omega = u\,du\,dv\,dw. \tag{4.125}$$

Часто употребляются *обобщенные цилиндрические координаты* $u$, $v$, $w$ точки $p(x, y, z)$, связанные с $x$, $y$, $z$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x &= au\cos v,\\ y &= bu\sin v,\\ z &= cw, \end{aligned}\right\} \tag{4.126}$$

$$0 \leqslant u < +\infty, \quad 0 \leqslant v < 2\pi, \quad -\infty < w < +\infty,$$

где $a$, $b$, $c$ — положительные константы. При $a \neq b$ система не ортогональна. Для нее

$$d\omega = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw = abcu\,du\,dv\,dw. \tag{4.127}$$

Вообще, ортогональной *цилиндрической* можно назвать всякую систему криволинейных координат вида

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = w, \tag{4.128}$$

где первые два соотношения определяют какую-либо ортогональную систему координат в плоскости $Oxy$. Для таких пространственных систем координатными поверхностями будут служить *плоскости*, параллельные плоскости $Oxy$ ($w = \text{const}$), и *цилиндрические* поверхности, образующие которых параллельны оси $Oz$, а направляющими являются координатные линии указанной плоской системы ($u = \text{const}$ и $v = \text{const}$).

### 3°. Сферические координаты

а)
$$\left.\begin{aligned} x &= u \cos v \sin w, \\ y &= u \sin v \sin w, \\ z &= u \cos w, \end{aligned}\right\} \tag{4.129}$$

$$0 \leqslant u < +\infty, \quad 0 \leqslant v < 2\pi, \quad 0 \leqslant w \leqslant \pi.$$

Система ортогональна.

б) Координатными поверхностями служат *сферы*

$$x^2 + y^2 + z^2 = u_0^2 \tag{4.130}$$

с центром в начале координат и радиусом $u_0$, *полуплоскости*

$$x = u \cos v_0 \sin w, \quad y = u \sin v_0 \sin w, \tag{4.131}$$

проходящие через ось $Oz$ и образующие с плоскостью $Oxz$ угол $v_0$, и *круговые конусы*

$$x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 w_0 \tag{4.132}$$

$\left(z = 0 \text{ при } w_0 = \frac{\pi}{2}\right)$ с вершиной в начале координат и образующей, наклоненной к оси $Oz$ под углом $w_0$.

в)
$$L_u = 1, \quad L_v = u \sin w, \quad L_w = u. \tag{4.133}$$

г)
$$ds = \sqrt{du^2 + u^2 \sin^2 w\, dv^2 + u^2\, dw^2}. \tag{4.134}$$

д)
$$d\sigma = \sqrt{u^2 \sin^2 w\,(du\, dv)^2 + u^2 (du\, dw)^2 + u^4 \sin^2 w\,(dv\, dw)^2}. \tag{4.135}$$

е)
$$d\omega = u^2 \sin w\, du\, dv\, dw. \tag{4.136}$$

Часто употребляются *обобщенные* сферические координаты $u$, $v$, $w$ точки $p(x, y, z)$, связанные с $x$, $y$, $z$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x &= au\cos v\sin w, \\ y &= bu\sin v\sin w, \\ z &= cu\cos w, \end{aligned}\right\} \tag{4.137}$$

$$0 \leqslant u < +\infty, \quad 0 \leqslant v < 2\pi, \quad 0 \leqslant w \leqslant \pi,$$

где $a$, $b$, $c$ — положительные константы. При $a \neq b$ система не ортогональна. Для нее

$$d\omega = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw = abcu^2\sin w\,du\,dv\,dw. \tag{4.138}$$

4°. Общие эллипсоидальные координаты

а)
$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{(u+a^2)(v+a^2)(w+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}, \\ y^2 &= \frac{(u+b^2)(v+b^2)(w+b^2)}{(a^2-b^2)(c^2-b^2)}, \\ z^2 &= \frac{(u+c^2)(v+c^2)(w+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}, \end{aligned}\right\} \tag{4.139}$$

$$0 \leqslant c^2 < b^2 < a^2, \quad -a^2 < w < -b^2 < v < -c^2 < u < +\infty.$$

Система ортогональна.

б) Координатными поверхностями служат софокусные *эллипсоиды*

$$\frac{x^2}{u_0+a^2} + \frac{y^2}{u_0+b^2} + \frac{z^2}{u_0+c^2} = 1, \tag{4.140}$$

*однополостные гиперболоиды*

$$\frac{x^2}{v_0+a^2} + \frac{y^2}{v_0+b^2} - \frac{z^2}{-(v_0+c^2)} = 1 \tag{4.141}$$

и *двуполостные гиперболоиды*

$$\frac{x^2}{w_0+a^2} - \frac{y^2}{-(w_0+b^2)} - \frac{z^2}{-(w_0+c^2)} = 1. \tag{4.142}$$

в)
$$\left.\begin{aligned} L_u^2 &= \frac{1}{4}\frac{(u-v)(u-w)}{M(u)}, \quad L_v^2 = \frac{1}{4}\frac{(u-v)(v-w)}{-M(v)}, \\ L_w^2 &= \frac{1}{4}\frac{(u-w)(v-w)}{M(w)}, \end{aligned}\right\} \tag{4.143}$$

где $M(t)=(t+a^2)(t+b^2)(t+c^2)$, так что $M(u)>0$, $M(v)<0$, $M(w)>0$.

г) $ds=$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(u-v)(u-w)}{M(u)}du^2+\frac{(u-v)(v-w)}{-M(v)}dv^2+\frac{(u-w)(v-w)}{M(w)}dw^2}. \tag{4.144}$$

д) $$d\sigma=\frac{1}{4}\left[\frac{(u-v)^2(u-w)(v-w)}{-M(u)M(v)}(du\,dv)^2+\right.$$
$$+\frac{(u-v)(u-w)^2(v-w)}{M(u)M(w)}(du\,dw)^2+$$
$$\left.+\frac{(u-v)(u-w)(v-w)^2}{-M(v)M(w)}(dv\,dw)^2\right]^{1/2}. \tag{4.145}$$

е) $$d\omega=\frac{1}{8}\frac{(u-v)(u-w)(v-w)}{\sqrt{-M(u)M(v)M(w)}}du\,dv\,dw. \tag{4.146}$$

Эллипсоидальные координаты зависят от параметров $a^2$, $b^2$, $c^2$, которые подчинены условиям $a^2>b^2>c^2\geqslant 0$. Распространяя определение координат на предельные случаи, т. е. на случаи, когда из этих неравенств одно, два или три заменяются на равенства, можно прийти к системам координат, которые целесообразно считать *вырождениями системы общих эллипсоидальных координат.* Эти вырожденные системы остаются ортогональными. В частности, сферические координаты (см. § 3, п. 2, 3°) являются вырожденными эллипсоидальными координатами в указанном смысле: первые получаются из последних, если взять $c=0$, положить $\bar{u}=u^2$, $\bar{v}=-b^2\sin^2 v$, $\bar{w}=-(a^2-b^2)\sin^2 w-b^2$, где $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ — общие эллипсоидальные координаты, после чего по очереди устремить к нулю сначала $b$, а затем $a$.

Другие случаи вырожденных эллипсоидальных координат приводятся в двух следующих пунктах.

### 5°. Вырожденные эллипсоидальные «вытянутые» координаты

а) $$\left.\begin{aligned} x&=\operatorname{sh}u\cos v\sin w,\\ y&=\operatorname{sh}u\sin v\sin w,\\ z&=\operatorname{ch}u\cos w,\end{aligned}\right\} \tag{4.147}$$

$$0\leqslant u<+\infty,\quad 0\leqslant v<2\pi,\quad 0\leqslant w\leqslant\pi.$$

Система ортогональна. Она получается из общих эллипсоидальных координат $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, если взять $c=0$, положить

$$\bar{u}=a^2\operatorname{sh}^2 u,\quad \bar{v}=-b^2\sin^2 v,\quad \bar{w}=-(a^2-b^2)\sin^2 w-b^2 \tag{4.148}$$

и считать, что $b\to 0$ и $a=1$. (После этого нужно еще поменять обозначение координат $x$, $y$, $z$).

б) Координатными поверхностями служат «вытянутые» *эллипсоиды вращения*

$$\frac{x^2+y^2}{\operatorname{sh}^2 u_0}+\frac{z^2}{\operatorname{ch}^2 u_0}=1,\qquad u_0\neq 0, \tag{4.149}$$

*полуплоскости*

$$y=(\operatorname{tg} v_0)\,x,\qquad v_0\neq\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}, \tag{4.150}$$

и *двуполостные гиперболоиды вращения*

$$-\frac{x^2+y^2}{\sin^2 w_0}+\frac{z^2}{\cos^2 w_0}=1,\quad w_0\neq 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi. \tag{4.151}$$

в)
$$\left.\begin{aligned} L_u=\sqrt{\operatorname{sh}^2 u+\sin^2 w},\quad L_v=\operatorname{sh} u\sin w,\\ L_w=\sqrt{\operatorname{sh}^2 u+\sin^2 w}.\end{aligned}\right\} \tag{4.152}$$

г) $$ds=\sqrt{(\operatorname{sh}^2 u+\sin^2 w)(du^2+dw^2)+\operatorname{sh}^2 u\sin^2 w\,dv^2}. \tag{4.153}$$

д) $$d\sigma=\sqrt{(\operatorname{sh}^2 u+\sin^2 w)\operatorname{sh}^2 u\sin^2 w\,(du^2+dw^2)\,dv^2+(\operatorname{sh}^2 u+\sin^2 w)^2\,(du\,dw)^2}. \tag{4.154}$$

е) $$d\omega=(\operatorname{sh}^2 u+\sin^2 w)\operatorname{sh} u\sin w\,du\,dv\,dw. \tag{4.155}$$

### 6°. Вырожденные эллипсоидальные «сплюснутые» координаты

а)
$$\left.\begin{aligned} x&=\operatorname{ch} u\cos v\sin w,\\ y&=\operatorname{ch} u\sin v\sin w,\\ z&=\operatorname{sh} u\cos w,\end{aligned}\right\} \tag{4.156}$$

$$0\leqslant u<+\infty,\quad 0\leqslant v<2\pi,\quad 0\leqslant w\leqslant\pi,$$

Система ортогональна. Она получится из системы общих эллипсоидальных координат $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, если взять $c=0$, положить

$$\bar{u}=a^2\,\mathrm{sh}^2 u,\quad \bar{v}=-b^2\cos^2 v,\quad \bar{w}=-(a^2-b^2)\cos^2 w-b^2 \tag{4.157}$$

и считать, что $b=1$ и $a\to 1$.

б) Координатными поверхностями служат «сплюснутые» *эллипсоиды вращения*

$$\frac{x^2+y^2}{\mathrm{ch}^2 u_0}+\frac{z^2}{\mathrm{sh}^2 u_0}=1,\quad u_0\neq 0, \tag{4.158}$$

*полуплоскости*

$$y=(\mathrm{tg}\, v_0)\,x,\quad v_0\neq\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}, \tag{4.159}$$

и *однополостные гиперболоиды вращения*

$$\frac{x^2+y^2}{\sin^2 w_0}-\frac{z^2}{\cos^2 w_0}=1,\quad w_0\neq 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi. \tag{4.160}$$

в)
$$\left.\begin{aligned} L_u&=\sqrt{\mathrm{sh}^2 u+\cos^2 w},\quad L_v=\mathrm{ch}\, u\sin w,\\ L_w&=\sqrt{\mathrm{sh}^2 u+\cos^2 w}.\end{aligned}\right\} \tag{4.161}$$

г) $$ds=\sqrt{(\mathrm{sh}^2 u+\cos^2 w)(du^2+dw^2)+\mathrm{sh}^2 u\sin^2 w\, dv^2}. \tag{4.162}$$

д) $$d\sigma=[(\mathrm{sh}^2 u+\cos^2 w)\,\mathrm{ch}^2 u\sin^2 w\,(du^2+dw^2)\,dv^2+ \\ +(\mathrm{sh}^2 u+\cos^2 w)^2(du\,dw)^2]^{1/2}. \tag{4.163}$$

е) $$d\omega=(\mathrm{sh}^2 u+\cos^2 w)\,\mathrm{ch}\, u\sin w\, du\, dv\, dw. \tag{4.164}$$

### 7°. Сферо-конические координаты

а)
$$\left.\begin{aligned} x^2&=\frac{u(v+a^2)(w+a^2)}{(a^2-b^2)\,a^2},\\ y^2&=\frac{u(v+b^2)(w+b^2)}{(b^2-a^2)\,b^2},\\ z^2&=\frac{uvw}{a^2b^2},\end{aligned}\right\} \tag{4.165}$$

$$-a^2<w<-b^2<v<0<u<+\infty.$$

Система ортогональна.

б) Координатными поверхностями служат *сферы*

$$x^2+y^2+z^2=u_0 \tag{4.166}$$

с центром в начале координат, *эллиптические конусы*

$$\frac{x^2}{v_0+a^2}+\frac{y^2}{v_0+b^2}-\frac{z^2}{-v_0}=0 \tag{4.167}$$

с вершиной в начале координат и осью, расположенной на оси $Oz$, и *эллиптические конусы*

$$\frac{x^2}{w_0+a^2}-\frac{y^2}{-(w_0+b^2)}-\frac{z^2}{-w_0}=0 \tag{4.168}$$

с вершиной в начале координат и осью, расположенной на оси $Ox$.

в)
$$\left.\begin{aligned} L_u=\frac{1}{2\sqrt{u}},\quad L_v=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u(v-w)}{-N(v)}},\\ L_w=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u(v-w)}{N(w)}},\end{aligned}\right\} \tag{4.169}$$

где $N(t)=t(t+a^2)(t+b^2)$, так что $N(v)<0$, $N(w)>0$.

г) $$ds=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{du^2}{u}+\frac{u(v-w)}{-N(v)}dv^2+\frac{u(v-w)}{N(w)}dw^2}. \tag{4.170}$$

д) $d\sigma=$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{v-w}{-N(v)}(du\,dv)^2+\frac{v-w}{N(w)}(du\,dw)^2+\frac{u^2(v-w)^2}{-N(v)N(w)}(dv\,dw)^2}. \tag{4.171}$$

е) $$d\omega=\frac{u(v-w)}{8\sqrt{-uN(v)N(w)}}du\,dv\,dw. \tag{4.172}$$

### 8°. Параболоидальные координаты

а)
$$\left.\begin{aligned} x&=2uw\cos v,\\ y&=2uw\sin v,\\ z&=u^2-w^2,\end{aligned}\right\} \tag{4.173}$$

$$0\leqslant u<+\infty,\quad 0\leqslant v<2\pi,\quad 0\leqslant w<+\infty.$$

Система ортогональна.

б) Координатными поверхностями служат *параболоиды вращения*

$$\frac{x^2+y^2}{4u_0^2}=u_0^2-z, \qquad u_0\neq 0, \tag{4.174}$$

с вершиной в точке $(0,\ 0,\ u_0^2)$, полученные при вращении парабол $\frac{y^2}{4u_0^2}=u_0^2-z$ вокруг луча $(-\infty,\ u_0^2)$ оси $Oz$, *полуплоскости*

$$y=(\operatorname{tg} v_0)\,x, \qquad v_0\neq\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}, \tag{4.175}$$

проходящие через ось $Oz$ и образующие угол $v_0$ с положительной $(x>0)$ полуплоскостью $Oxz$, и *параболоиды вращения*

$$\frac{x^2+y^2}{4w_0^2}=w_0^2+z, \qquad w_0\neq 0, \tag{4.176}$$

с вершиной в точке $(0,\ 0,\ -w_0^2)$, полученные при вращении парабол $\frac{y^2}{4w_0^2}=w_0^2+z$ вокруг луча $(-w_0^2,\ +\infty)$ оси $Oz$.

в) $$L_u=2\sqrt{u^2+w^2}, \quad L_v=2uw, \quad L_w=2\sqrt{u^2+w^2}. \tag{4.177}$$

г) $$ds=2\sqrt{(u^2+w^2)(du^2+dw^2)+u^2w^2\,dv^2}. \tag{4.178}$$

д)

$$d\sigma=4\sqrt{(u^2+w^2)\,u^2w^2\,(du^2+dw^2)\,dv^2+(u^2+w^2)^2\,(du\,dw)^2}. \tag{4.179}$$

е) $$d\omega=8\,(u^2+w^2)\,uw\,du\,dv\,dw. \tag{4.180}$$

### 9°. Тороидальные координаты

а)

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{\operatorname{sh}u\cos v}{\operatorname{ch}u-\cos w},\\ y&=\frac{\operatorname{sh}u\sin v}{\operatorname{ch}u-\cos w},\\ z&=\frac{\sin w}{\operatorname{ch}u-\cos w},\end{aligned}\right\} \tag{4.181}$$

$$0\leqslant u<+\infty, \quad 0\leqslant v<2\pi, \quad -\pi\leqslant w\leqslant\pi.$$

Система ортогональна.

б) Координатными поверхностями служат *торы*

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{cth} u_0\right)^2+z^2=\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u_0}, \quad u_0 \neq 0, \tag{4.182}$$

полученные при вращении окружности $(y-\operatorname{cth} u_0)^2+z^2=$ $=\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u_0}$ вокруг оси $Oz$ $\left(\text{окружность эта не пересекает оси } Oz,\right.$ $\left.\text{так как } \operatorname{cth} u_0>\frac{1}{\operatorname{sh} u_0}\right)$, *полуплоскости*

$$y=(\operatorname{tg} v_0)\, x, \quad v_0 \neq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \tag{4.183}$$

проходящие через ось $Oz$ и образующие угол $v_0$ с положительной $(x>0)$ полуплоскостью $Oxz$, и *сферы*

$$x^2+y^2+(z-\operatorname{ctg} w_0)^2=\frac{1}{\sin^2 w_0}, \quad w_0 \neq 0, \tag{4.184}$$

с центром в точке $(0,\ 0,\ \operatorname{ctg} w_0)$ и радиусом, равным $\frac{1}{|\sin w_0|}$.

в) $$L_u=\frac{1}{\operatorname{ch} u-\cos w}, \quad L_v=\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u-\cos w}, \quad L_w=\frac{1}{\operatorname{ch} u-\cos w}. \tag{4.185}$$

г) $$ds=\frac{1}{\operatorname{ch} u-\cos w}\sqrt{du^2+\operatorname{sh}^2 u\, dv^2+dw^2}. \tag{4.186}$$

д) $$d\sigma=\frac{1}{(\operatorname{ch} u-\cos w)^2}\sqrt{\operatorname{sh}^2 u\,(du^2+dw^2)\, dv^2+(du\, dw)^2}. \tag{4.187}$$

е) $$d\omega=\frac{\operatorname{sh} u}{(\operatorname{ch} u-\cos w)^3}\, du\, dv\, dw. \tag{4.188}$$

## 10°. Биполярные координаты

а) $$\left.\begin{aligned} x&=\frac{\sin u \cos v}{\operatorname{ch} w-\cos u}, \\ y&=\frac{\sin u \sin v}{\operatorname{ch} w-\cos u}, \\ z&=\frac{\operatorname{sh} w}{\operatorname{ch} w-\cos u}, \end{aligned}\right\} \tag{4.189}$$

$$0 \leqslant u<\pi, \quad 0 \leqslant v<2\pi, \quad -\infty<w<+\infty.$$

Система ортогональна.

б) Координатными поверхностями служат *поверхности вращения*

$$(\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{ctg} u_0)^2+z^2=\frac{1}{\sin^2 u_0}, \qquad u_0 \neq 0, \qquad (4.190)$$

полученные при вращении окружности $(y-\operatorname{ctg} u_0)^2+z^2= =\frac{1}{\sin^2 u_0}$ вокруг оси $Oz$ $\left(\text{эта окружность пересекает ось } Oz, \text{ так как } |\operatorname{ctg} u_0| < \frac{1}{\sin u_0}\right)$, *полуплоскости*

$$y=(\operatorname{tg} v_0)\, x, \qquad v_0 \neq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \qquad (4.191)$$

проходящие через ось $Oz$ и образующие с положительной ($x>0$) полуплоскостью $Oxz$ угол $v_0$, и *сферы*

$$x^2+y^2+(z-\operatorname{cth} w_0)^2=\frac{1}{\operatorname{sh}^2 w_0}, \qquad w_0 \neq 0, \qquad (4.192)$$

с центром в точке $(0,\ 0,\ \operatorname{cth} w_0)$ и радиусом, равным $\frac{1}{|\operatorname{sh} w_0|}$.

в) $$L_u=\frac{1}{\operatorname{ch} w-\cos u}, \quad L_v=\frac{\sin u}{\operatorname{ch} w-\cos u}, \quad L_w=\frac{1}{\operatorname{ch} w-\cos u}. \qquad (4.193)$$

г) $$ds=\frac{1}{\operatorname{ch} w-\cos u}\sqrt{du^2+\sin^2 u\, dv^2+dw^2}. \qquad (4.194)$$

д) $$d\sigma=\frac{1}{(\operatorname{ch} w-\cos u)^2}\sqrt{\sin^2 u\,(du^2+dw^2)\,dv^2+(du\,dw)^2}. \qquad (4.195)$$

е) $$d\omega=\frac{\sin u}{(\operatorname{ch} w-\cos u)^3}\,du\,dv\,dw. \qquad (4.196)$$

ГЛАВА V

# ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

## § 1. Неопределенный интеграл

1. *Первообразной функцией* (иначе, *первообразной* или *примитивной*) функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$, называется функция $F(x)$, определенная на том же отрезке и удовлетворяющая условию

$$F'(x) = f(x) \quad \text{или} \quad dF(x) = f(x)\,dx.$$

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$, то ее первообразная существует и непрерывна в каждой точке этого отрезка. Если функция $f(x)$ имеет разрывы в отдельных точках отрезка $[a, b]$, то ее первообразная существует и непрерывна всюду на $[a, b]$, кроме, быть может, точек разрыва $f(x)$.*

В точках устранимого разрыва или разрыва первого рода (конечного скачка) первообразная непрерывна. При бесконечном разрыве $f(x)$ первообразная $F(x)$ может быть непрерывной или иметь разрыв.

Данная функция $f(x)$ имеет бесчисленное множество первообразных, которые отличаются друг от друга лишь постоянным слагаемым, т. е. *разность между двумя первообразными для одной функции есть величина постоянная.* Графики всех первообразных могут быть получены из одного из них путем параллельного сдвига вдоль оси $Oy$.

Общее выражение $F(x)+C$, где $C$ — произвольное постоянное, для всех первообразных данной функции $f(x)$ называется ее *неопределенным интегралом*

$$F(x)+C = \int f(x)\,dx.$$

**2.** Неопределенные интегралы от основных элементарных функций могут быть получены обращением формул производных. В более сложных случаях интеграл от данной функции может быть преобразован к интегралу от других функций с помощью следующих *свойств неопределенного интеграла*:

а) $$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \qquad (k = \text{const},\ k \neq 0),$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла;

б) $$\int [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx - \int \psi(x)\,dx,$$

т. е. интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен сумме интегралов от отдельных слагаемых;

в) $$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

где $x = \varphi(t)$; это равенство называют *правилом подстановки* или *замены переменных*;

г) $$\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx = f(x)\,\varphi(x) - \int \varphi(x)\,f'(x)\,dx$$

— *формула интегрирования по частям.*

Следует иметь в виду, что равенства а), б), в), г) означают, что обе части каждого из них являются совокупностями первообразных от одной и той же функции. Для проверки такого равенства достаточно убедиться, что производные левой и правой частей равны между собой.

**3.** Формула интегрирования по частям допускает обобщение, с помощью которого нахождение интеграла от произведения $f(x)\,\varphi^{(n)}(x)$ сводится к интегрированию произведения $f^{(n)}(x)\,\varphi(x)$. Такая формула называется *формулой кратного интегрирования по частям* и имеет вид

$$\int f(x)\,\varphi^{(n)}(x)\,dx = f(x)\,\varphi^{(n-1)}(x) - f'(x)\,\varphi^{(n-2)}(x) + \\ + f''(x)\,\varphi^{(n-3)}(x) - \ldots + (-1)^{n-1} f^{(n-1)}(x)\,\varphi(x) + \\ + (-1)^n \int f^{(n)}(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

В качестве примера применения этой формулы вычислим интеграл

$$\int e^{ax} P_n(x)\,dx,$$

где $P_n(x)$ есть многочлен степени $n$. Положив $\varphi(x)=\frac{e^{ax}}{a^n}$, заметим, что $\varphi^{(n)}(x)=e^{ax}$, откуда применением формулы кратного интегрирования по частям находим

$$\int e^{ax} P_n(x)\,dx =$$

$$= e^{ax}\left\{\frac{P_n(x)}{a}-\frac{P'_n(x)}{a^2}+\frac{P''_n(x)}{a^3}+\ldots+(-1)^n\frac{P_n^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right\}+C.$$

Часто приходится находить для функции $f(x)$ несколько *последовательных первообразных*; надобность в этом возникает, например, при интегрировании дифференциального уравнения вида $y^{(n)}=f(x)$.

Выражение для $n$-й последовательной первообразной дается *формулой Коши*

$$\int dx \int dx \quad \int f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int (x-t)^{n-1} f(t)\,dt + P_{n-1}(x),$$

где после интегрирования справа $t$ заменяется на $x$, а $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$ с произвольными коэффициентами.

## § 2. Интегрирование элементарных функций

**1.** Как известно (см. гл. I), операция дифференцирования элементарных функций всегда приводит к элементарным функциям. Совсем не так обстоит дело, когда производится интегрирование — действие, обратное дифференцированию. Интегрирование рациональных функций всегда приводит к сумме конечного числа элементарных функций, но интегралы от других элементарных функций часто не могут быть выражены конечным числом элементарных функций. В этих случаях они получили название «неберущиеся интегралы». Неберущиеся интегралы служат одним из источников возникновения новых неэлементарных функций, так называемых *высших трансцендентных функций*. Те из них, которые часто встречаются на практике, хорошо изучены, протабулированы и используются в математике и ее приложениях как и элементарные.

**2.** Интеграл от рациональной функции либо рационален, либо представляет собой сумму рациональной функции и конечного числа логарифмов и арктангенсов от рациональных функций с постоянными коэффициентами перед знаком логарифма и арктангенса.

1°. Целая рациональная функция $n$-й степени интегрируется непосредственно и приводит также к целой рациональной функции степени $n+1$:

$$\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)\,dx = \\ = \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \frac{a_2}{n-1}x^{n-1} + \ldots \\ \ldots + \frac{a_{n-1}}{2}x^2 + a_nx + C. \tag{5.1}$$

2°. Интеграл от простейшей дроби с линейным знаменателем есть логарифмическая функция

$$\int \frac{dx}{x - x_0} = \ln|x - x_0| + C, \tag{5.2}$$

а от простейшей дроби с квадратичным знаменателем, имеющим комплексные корни, есть сумма логарифмической функции и арктангенса

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \\ = \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C. \tag{5.3}$$

$$\left(q - \frac{p^2}{4} > 0\right);$$

3°. Если знаменатель является линейным двучленом в степени $k$, то интеграл есть дробная рациональная функция

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^k} = -\frac{1}{(k-1)(x-x_0)^{k-1}} + C \qquad (k \neq 1). \tag{5.4}$$

Если же знаменатель имеет комплексные сопряженные корни кратности $k$, то можно применить рекуррентную формулу, предварительно преобразовав подынтегральную дробь таким образом:

$$\frac{M_k x + N_k}{(x^2+px+q)^k} = \frac{M_k}{2}\frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^k} + \left(N_k - \frac{M_k p}{2}\right)\frac{1}{(x^2+px+q)^k}$$

и разбив интеграл на два слагаемых. Первое слагаемое интегрируется непосредственно и приводит к дробной рациональной функции

$$\frac{M_k}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx = -\frac{M_k}{2(k-1)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + C, \tag{5.5}$$

а интеграл от второго слагаемого приводится к сумме дробной рациональной функции и аналогичного интеграла от дроби со знаменателем $(x^2+px+q)^{k-1}$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{x+\frac{p}{2}}{2(k-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}}. \tag{5.6}$$

Повторное применение этой рекуррентной формулы приводит к интегралу

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C \qquad \left(q-\frac{p^2}{4} > 0\right). \tag{5.7}$$

и следовательно, интеграл $\int \frac{M_k x + N_k}{(x^2+px+q)^k}\,dx$ есть также элементарная функция.

4°. Интегрирование рациональных дробей в общем случае производится следующим образом. Если рациональная дробь $\frac{F(x)}{Q(x)}$ неправильная (т. е. степень многочлена $F(x)$ больше или равна степени многочлена $Q(x)$), то, разделив $F(x)$ на $Q(x)$ по правилу деления многочлена на многочлен, можно представить дробь $\frac{F(x)}{Q(x)}$ в виде суммы некоторого многочлена и правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, в которой *коэффициент при старшей степени знаменателя всегда можно сделать равным единице.*

Правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно разложить на сумму простейших дробей вида $\frac{A_{ik}}{(x-x_i)^k}$ и $\frac{M_{ik}x+N_{ik}}{(x^2+p_ix+q_i)^k}$, которые интегрируются, как указано выше.

В частности, если все корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ многочлена $n$-й степени $Q(x)$ действительны и различны, то

$$Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

и

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}, \tag{5.8}$$

где коэффициенты $A_i$ могут быть определены по формулам

$$A_1 = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}, \quad A_2 = \frac{P(x_2)}{Q'(x_2)}, \quad \ldots, \quad A_n = \frac{P(x_n)}{Q'(x_n)}. \tag{5.9}$$

На практике коэффициенты $A_{ik}$, $M_{ik}$, $N_{ik}$ часто находят методом неопределенных коэффициентов.

В общем случае подынтегральную дробь представляют в виде суммы простейших дробей таким образом:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \qquad + \frac{A_l}{(x-x_1)^l} + \frac{B_1}{x-x_2} + \\ &+ \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(x-x_2)^m} + \qquad + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \\ &+ \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \qquad + \frac{M_rx+N_r}{(x^2+px+q)^r} + \end{aligned} \tag{5.10}$$

где
$$Q(x)=(x-x_1)^l(x-x_2)^m\ldots(x^2+px+q)^r$$

Пример 1. Вычислить интеграл
$$\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}.$$

Имеем
$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2},$$

откуда
$$1\equiv A(x+1)(x^2+1)^2+B(x^2+1)^2+(Cx+\\+D)(x+1)^2(x^2+1)+(Ex+F)(x+1)^2.$$

Перепишем последнее тождество в виде
$$1\equiv(A+C)x^5+(A+B+2C+D)x^4+(2A+2C+2D+E)x^3+\\+(2A+2B+2C+2D+2E+F)x^2+(A+C+2D+E+2F)x+\\+(A+B+D+F).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях тождества, получим систему уравнений
$$\begin{aligned}A+C&=0,\\A+B+2C+D&=0,\\2A+2C+2D+E&=0,\\2A+2B+2C+2D+2E+F&=0,\\A+C+2D+E+2F&=0,\\A+B+D+F&=1,\end{aligned}$$

откуда находим
$$A=\frac{1}{2},\quad C=-\frac{1}{2},\quad B=D=\frac{1}{4},\quad E=-\frac{1}{2},\quad F=0.$$

Следовательно,
$$\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}=\\=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\\+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1}+C.$$

При интегрировании рациональных дробей можно применить также метод Остроградского, который позволяет свести интегрирование произвольной правильной рациональной дроби к интегрированию дроби, знаменатель которой имеет только простые корни. Для этого знаменатель правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ следует представить в виде

$$Q(x) = X_1(x) \cdot X_2^2(x) \ldots X_p^p(x), \tag{5.11}$$

где $X_1(x)$ — произведение линейных и квадратичных множителей, соответствующих простым корням, а $X_i(x)$ — произведение линейных и квадратичных множителей, соответствующих корням кратности $i$. Тогда

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \equiv \frac{H(x)}{U(x)} + \int \frac{G(x)}{V(x)} dx, \tag{5.12}$$

где

$$U(x) = X_2 X_3^2 \ldots X_p^{p-1}, \tag{5.13}$$

$$V(x) = X_1 X_2 \ldots X_p, \tag{5.14}$$

а $H(x)$ и $G(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами степеней соответственно на единицу меньше, чем степени многочленов $U(x)$ и $V(x)$.

Многочлены $U(x)$ и $V(x)$ можно найти, не производя разложения $Q(x)$ на простейшие множители: $U(x)$ есть общий наибольший делитель многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$, а $V(x) = \frac{Q(x)}{U(x)}$.

Коэффициенты многочленов $H(x)$ и $G(x)$ можно найти путем дифференцирования тождества (5.12), что приводит к новому тождеству

$$P \equiv \frac{(UH' - HU')V}{U} + GU, \tag{5.15}$$

в обеих частях которого следует сравнить коэффициенты при одинаковых степенях $x$ и получить систему алгебраических уравнений для нахождения искомых коэффициентов многочленов $H(x)$ и $G(x)$.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2} dx.$$

Здесь

$$Q(x) = (x^5 + x + 1)^2,$$
$$Q'(x) = 2(x^5 + x + 1)(5x^4 + 1),$$
$$U(x) = x^5 + x + 1,$$
$$V(x) = \frac{Q(x)}{U(x)} = x^5 + x + 1$$

и

$$\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2}\,dx = \frac{H(x)}{x^5 + x + 1} + \int \frac{G(x)}{x^5 + x + 1}\,dx.$$

Положив

$$H(x) = A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4,$$
$$G(x) = B_0x^4 + B_1x^3 + B_2x^2 + B_3x + B_4,$$

имеем

$$\begin{aligned}4x^5 - 1 \equiv (x^5 + x + 1)(B_0x^4 + B_1x^3 + B_2x^2 + B_3x + B_4) +\\ + (x^5 + x + 1)(4A_0x^3 + 3A_1x^2 + 2A_2x + A_3) -\\ - (5x^4 + 1)(A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4).\end{aligned}$$

Сравнив коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в обеих частях последнего тождества, находим

$$A_0 = A_1 = A_2 = A_4 = 0, \quad A_3 = -1,$$
$$B_0 = B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 0,$$

и, следовательно,

$$\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2}\,dx = -\frac{x}{x^5 + x + 1} + C.$$

**3.** Интеграл от алгебраической функции, т. е. функции, определенной уравнением $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — многочлен от $x$ и $y$, может быть и неэлементарным.

В том случае, когда интеграл $\int R(x, y)\,dx$, где $R$ — рациональная функция, а $y$ — алгебраическая функция от $x$, элементарен, он будет либо алгебраической функцией, либо суммой алгебраической функции и конечного числа логарифмов и арктангенсов от алгебраических функций с постоянными коэффициентами перед знаком логарифма и арктангенса, причем все входящие в это выражение алгебраические функции рациональны относительно $x$ и $y$.

Чтобы выяснить, будет ли интеграл $\int R(x, y)\,dx$ элементарной функцией или нет, необходимо исследовать кривую, уравнение которой $f(x, y)=0$ определяет функцию $y$. Если эта кривая *уникурсальна*, т. е. координаты $x$ и $y$ точек этой кривой могут быть выражены как рациональные функции некоторого параметра $t$, то соответствующая подстановка приводит $\int R(x, y)\,dx$ к интегралу от рациональной функции, вследствие чего интеграл оказывается элементарной функцией.

В том случае, когда кривая $f(x, y)=0$ не уникурсальна, интеграл $\int R(x, y)\,dx$, вообще говоря, не является элементарной функцией. Необходимо иметь в виду, что уникурсальность кривой достаточна для элементарности интеграла $\int R(x, y)\,dx$, но не необходима.

Некоторые типы интегралов от иррациональных функций с помощью указанных подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций.

1°. Интеграл

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \quad \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right] dx \tag{5.16}$$

или, в частном случае,

$$\int R\left[x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, (ax+b)^{\frac{m_p}{n_p}}\right] dx, \tag{5.17}$$

где $R$ — рациональная функция от своих аргументов, а $m_1$, $m_2, \ldots, m_p, n_1, n_2, \ldots, n_p$ — целые числа, приводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^N \tag{5.18}$$

(в указанном частном случае: $ax+b=t^N$), где $N$ — общее наименьшее кратное чисел $n_1$, $n_2$, $\quad n_p$.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$.

Полагая $\frac{1-x}{1+x}=t^2$, имеем

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx=-\frac{4t\,dt}{(1+t^2)^2}$$

и, следовательно,

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x} = \int \frac{-4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\,dt.$$

Разложив подынтегральную функцию на простейшие дроби получим

$$\frac{-4t^2}{(1+t)(1-t)(1+t^2)} = -\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1-t} + \frac{2}{1+t^2}$$

и далее

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x} = 2\operatorname{arctg} t - \ln|1+t| + \ln|1-t| + C =$$
$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}.$$

Полагая $1+x=t^6$, имеем $dx = 6t^5\,dt$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}} = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1} =$$
$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$
$$= 2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + 6\sqrt[6]{1+x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{1+x}+1\right) + C.$$

Интеграл $\int R\left[x,\ (x-a)^{\frac{p}{n}},\ (x-b)^{\frac{q}{n}}\right]dx$, где $R$ — рациональная функция, а $p, q, n$ — целые числа, является элементарной функцией, если $p+q=kn$, где $k$ — целое число.

2°. Интеграл $\int R(x, y)\,dx$, где $R$ — рациональная функция от $x$ и $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, приводится к интегралу от рациональной дроби одной из следующих трех подстановок (*подстановки Эйлера*):

$$y = t \pm x\sqrt{a} \quad (a>0), \tag{5.19}$$

$$y = tx \pm \sqrt{c} \quad (c>0), \tag{5.20}$$

$$y = t(x-x_1) \quad (4ac-b^2<0), \tag{5.21}$$

где $x_1$ — один из корней трехчлена $ax^2+bx+c$.

Интеграл $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ можно привести к виду $\int R_1(\sin t, \cos t)\,dt$, где $R_1$ — также рациональная функция от $\sin t$ и $\cos t$, при помощи тригонометрических подстановок

$$x+\frac{b}{2a}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sin t,\\ \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cos t\end{cases} \quad (a<0,\ 4ac-b^2<0); \tag{5.22}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sec t,\\ \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\operatorname{cosec} t\end{cases} \quad (a>0,\ 4ac-b^2<0); \tag{5.23}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\operatorname{tg} t,\\ \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\operatorname{ctg} t\end{cases} \quad (a>0,\ 4ac-b^2>0). \tag{5.24}$$

Подстановки Эйлера и тригонометрические подстановки иногда приводят к сложным выкладкам. Поэтому для вычисления интеграла $\int R(x, y)\,dx$, где $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, можно применить метод разложения подынтегральной функции на слагаемые.

Рациональная функция $R(x, y)$ всегда может быть представлена в виде

$$R(x, y)=\frac{P_1(x)+P_2(x)\,y}{P_3(x)+P_4(x)\,y}, \tag{5.25}$$

где $P_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ — целые многочлены. Умножая числитель и знаменатель дроби на $P_3(x)-P_4(x)\,y$, получим

$$R(x, y)=R_1(x)+R_2(x)\,y,$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — рациональные функции от $x$.

Интеграл от первого слагаемого берется в конечном виде. Второе слагаемое умножим и разделим на $y$; будем иметь функцию

$$\frac{R_3(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{5.26}$$

Из рациональной функции $R_3(x)$ выделим целую часть $P_n(x)$, а оставшуюся правильную дробь разложим на простейшие. Тогда интеграл от второго слагаемого сведется к интегралам следующих трех типов:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \tag{5.27}$$

$$\int \frac{dx}{(x-x_1)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{5.28}$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \tag{5.29}$$

где все коэффициенты действительны, а корни трехчлена $x^2+px+q$ мнимые.

Интеграл (5.27) берется методом неопределенных коэффициентов по формуле

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$

$$= Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{5.30}$$

где

$$Q_{n-1}(x) = A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+A_3x^{n-3}+\ldots+A_{n-1}x+A_n.$$

Дифференцируя обе части тождества по $x$ и умножая обе части полученного тождества на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получим

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c)+\frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b)+\lambda.$$

В обеих частях этого тождества содержатся многочлены. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, придем к системе $n+1$ линейных уравнений, из которых определяем коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и постоянное $\lambda$.

Таким образом произведено выделение алгебраической части интеграла $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Остается взять интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, рассмотренный выше.

Интеграл (5.28) подстановкой $x - x_1 = \frac{1}{t}$ приводится к интегралу типа (5.27).

Интеграл (5.29) в случае, когда трехчлен $ax^2+bx+c$ отличается от трехчлена $x^2+px+q$ лишь постоянным множителем, принимает вид

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2k+1}{2}}}dx \tag{5.31}$$

и представляется суммой двух интегралов

$$\frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2k+1}{2}}}dx + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2k+1}{2}}}, \tag{5.32}$$

из которых первый берется непосредственно подстановкой $t=ax^2+bx+c$, а второй *подстановкой Абеля*

$$t=\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' = \frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

сводится к интегралу от многочлена.

В более общем случае можно дробно-линейной подстановкой $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$, где $\alpha$ и $\beta$ — неопределенные коэффициенты, при $\frac{b}{a}\neq p$ и линейной подстановкой $x=t-\frac{p}{2}$ при $\frac{b}{a}=p$ уничтожить члены первой степени в подынтегральной функции и получить сумму интегралов вида

$$\int \frac{At+B}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt \qquad (m=1, 2, \ldots, k). \tag{5.33}$$

Каждый из этих интегралов разлагается на два:

$$\frac{A}{\alpha}\int\frac{\alpha t\,dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}}+B\int\frac{dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}},$$

из которых первый берется подстановкой $u=\sqrt{\alpha t^2+\beta}$, а второй — подстановкой Абеля $u=\dfrac{\alpha t}{\sqrt{\alpha t^2+\beta}}$.

Итак, интегралы типа $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ всегда берутся в конечном виде и выражаются теми же функциями, что и интегралы от рациональных функций, а также квадратными корнями.

В частности, интеграл $\displaystyle\int\frac{\alpha x^2+\beta x+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ представляет собой алгебраическую функцию, если выполнено условие

$$4a(c\alpha+b\beta)=8a^2\gamma+3b^2\alpha \qquad (a\neq 0). \tag{5.34}$$

3°. Интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, где $m$, $n$, $p$ — рациональные числа (*интеграл от биномиального дифференциала*), выражается через элементарные функции только при выполнении одного из следующих условий (*условия Чебышева интегрируемости биномиального дифференциала*): а) если $p$ — целое число, б) если $\dfrac{m+1}{n}$ — целое число, в) если $\dfrac{m+1}{n}+p$ — целое число.

В случае а) при $p>0$ получается сумма степенных интегралов; если же $p<0$, то подстановка $x=z^N$, где $N$ — общий знаменатель дробей $m$ и $n$, приводит к интегралу от рациональной функции.

В случае б) полагаем $a+bx^n=z^N$, где $N$ — знаменатель дроби $p$.

В случае в) применяется подстановка $a+bx^n=z^Nx^n$, где $N$ — знаменатель дроби $p$.

Пример 5. Вычислить интеграл

$$\int\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$$

Здесь $\dfrac{m+1}{n}=2$, и следовательно, полагаем

$$1+3\sqrt[3]{x^2}=z^3,$$

откуда

$$x=\frac{(z^3-1)^{3/2}}{3\sqrt{3}}, \qquad dx=\frac{\sqrt{3}}{2}(z^3-1)^{1/2}z^2\,dz$$

и

$$\int \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\frac{1}{2}\int z^3(z^3-1)\,dz=\frac{z^7}{14}-\frac{z^4}{8}+C=$$
$$=\frac{\left(1+3\sqrt[3]{x^2}\right)^{7/3}}{14}-\frac{\left(1+3\sqrt[3]{x^2}\right)^{4/3}}{8}+C.$$

Пример 6. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}.$$

Здесь $\frac{m+1}{n}+p=-3$; положив

$$1+x^4=z^2x^4,$$

имеем

$$x=\frac{1}{(z^2-1)^{1/4}}, \qquad dx=-\frac{z\,dz}{2(z^2-1)^{5/4}}$$

и

$$\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}=-\frac{1}{2}\int (z^2-1)^2\,dz=-\frac{z^5}{10}+\frac{z^3}{3}-\frac{z}{2}+C=$$
$$=-\frac{1}{10}\frac{\sqrt{(1+x^4)^5}}{x^{10}}+\frac{1}{3}\frac{\sqrt{(1+x^4)^3}}{x^6}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}+C.$$

Интеграл $\int \sqrt{1+x^m}\,dx$, где $m$ — рациональное число, представляет собой элементарную функцию, если $m=\frac{2}{k}$, где $k=\pm 1,\ \pm 2$.

4. Общей теории интегрирования других элементарных функций не существует. Известны отдельные случаи, когда интеграл с помощью соответствующей подстановки может быть преобразован в интеграл от рациональной или алгебраической функции. Однако число классов элементарных функций, интегралы от которых элементарны, весьма ограничено. Такие интегралы, как, например,

$$\int f(x,\ e^x)\,dx, \qquad \int f(x,\ \ln x)\,dx, \qquad \int f(x,\ \sin x,\ \cos x)\,dx,$$
$$\int f(e^x,\ \sin x,\ \cos x)\,dx,$$

где $f$ — алгебраическая или даже рациональная функция, представляют собой, вообще говоря, новые неэлементарные функции.

Интеграл $\int R(x)e^{ax}\,dx$, где $R$ — рациональная функция, знаменатель которой имеет лишь действительные корни, выражается через элементарные функции и неэлементарную функцию

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \operatorname{li}(e^{ax}) + C, \tag{5.35}$$

где введено обозначение

$$\operatorname{li}(x) = \int \frac{dx}{\ln x}. \tag{5.36}$$

Интеграл $\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x\,dx$, где $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots$ $\ldots + \frac{a_n}{x^n}$, а $a_0$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ — постоянные, представляет собой элементарную функцию, если выполнено условие $a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \ldots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0$.

## Некоторые частные случаи

1°. Интеграл

$$\int F(e^{ax}, e^{bx}, \ldots, e^{kx})\,dx, \tag{5.37}$$

где $F$ — алгебраическая функция, а $a$, $b$, ..., $k$ — соизмеримые числа, приводится к интегралу от алгебраической функции. В частности, интеграл

$$\int R(e^{ax}, e^{bx}, \ldots, e^{kx})\,dx, \tag{5.38}$$

где $R$ — рациональная функция, всегда элементарен. Подстановкой $x = ay$ он приводится к интегралу $\int R_1(e^y)\,dy$, который новой подстановкой $e^y = z$ преобразуется в интеграл от рациональной функции. Так как $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ — рациональные функции от $e^x$, а $\sin x$ и $\cos x$ — рациональные функции от $e^{ix}$, то отсюда следует, что интегралы

$$\int R(\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x)\,dx, \qquad \int R(\sin x,\ \cos x)\,dx \tag{5.39}$$

представляют собой элементарные функции. Для второго из этих интегралов указанная выше подстановка будет мнимой; для него удобнее применить так называемую *универсальную подстановку*

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t, \tag{5.40}$$

также приводящую к интегралу от рациональной функции, ибо

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}. \tag{5.41}$$

Аналогичная подстановка

$$\operatorname{th}\frac{x}{2}=t \tag{5.42}$$

может быть применена и к первому интегралу. При этом

$$\operatorname{sh} x=\frac{2t}{1-t^2},\quad \operatorname{ch} t=\frac{1+t^2}{1-t^2},\quad dx=\frac{2\,dt}{1-t^2}. \tag{5.43}$$

Если выполняется равенство

$$R(\sin x,\ -\cos x)=-R(\sin x,\ \cos x)$$

или

$$R(-\sin x,\ \cos x)=-R(\sin x,\ \cos x),$$

то целесообразно применить подстановку

$$\sin x=t \tag{5.44}$$

или соответственно

$$\cos x=t. \tag{5.45}$$

Если выполняется равенство

$$R(-\sin x,\ -\cos x)=R(\sin x,\ \cos x),$$

то проще воспользоваться подстановкой

$$\operatorname{tg} x=t. \tag{5.46}$$

То же самое имеет место и в отношении первого интеграла.

Интегралы

$$\int R(\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x,\ \operatorname{sh} 2x, \qquad \operatorname{ch} mx)\,dx, \tag{5.47}$$

$$\int R(\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x, \qquad \cos mx)\,dx \tag{5.48}$$

принадлежат к указанным двум типам.

2°. Интеграл

$$\int P(x,\ e^{ax},\ e^{bx},\ \ldots,\ e^{kx})\,dx, \tag{5.49}$$

где $a, b, \ldots, k$ — произвольные числа, а $P$ — многочлен, всегда является элементарной функцией, ибо его можно представить в виде суммы конечного числа интегралов вида $\int x^p e^{ax}\,dx$, которые вычисляются по формуле, указанной на стр. 152.

К этому типу могут быть приведены интегралы

$$\left.\begin{aligned} &\int x^m (\sin px)^\mu (\cos qx)^\nu\,dx, && \int x^m (\operatorname{sh} px)^\mu (\operatorname{ch} qx)^\nu\,dx,\\ &\int x^m e^{-ax} (\sin px)^\mu\,dx, && \int x^m e^{-ax} (\cos qx)^\nu\,dx, \end{aligned}\right\} \tag{5.50}$$

где $m$, $\mu$, $\nu$ — целые числа.

Точно так же интегралы

$$\int P(x,\ \ln x)\,dx, \quad \int P(x,\ \arcsin x)\,dx \text{ и др.,} \tag{5.51}$$

где $P$ — многочлен, подстановками $x = e^y$, $x = \sin y$ и др. приводятся к указанным выше типам интегралов.

3°. Интеграл

$$\int \sin^\mu x \cos^\nu x\,dx \tag{5.52}$$

приводится к сумме степенных интегралов подстановкой $\sin x = z$, если $\mu > 0$ и нечетное, и подстановкой $\cos x = z$, если $\nu > 0$ и нечетное.

В случае, если оба числа $\mu$ и $\nu$ четные и положительные можно понизить степень, применяя тождества

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2},$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Подстановкой $\cos x = y$ можно привести интеграл (5.52) к интегралу от биномиального дифференциала $\int y^{\mu}(1-y^2)^{\frac{\nu-1}{2}}\,dx$. Интеграл берется в конечном виде только когда $\mu$ или $\nu$ — целое нечетное число или когда сумма $\mu+\nu$ — целое четное число или нуль. Так, например, $\int \sqrt{\sin x}\,dx$ — интеграл неберущийся, а $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$ — интеграл берущийся.

4°. Интегралы

$$\left.\begin{aligned} &\int \operatorname{tg}^{\mu} x \sec^{\nu} x\,dx, \quad \int \operatorname{ctg}^{\mu} x \sec^{\nu} x\,dx, \\ &\int \operatorname{tg}^{\mu} x \operatorname{cosec}^{\nu} x\,dx, \quad \int \operatorname{ctg}^{\mu} x \operatorname{cosec}^{\nu} x\,dx, \end{aligned}\right\} \tag{5.53}$$

где $\nu > 0$ и четное, а $\mu$ — любое, приводятся к сумме степенных интегралов: первые два — подстановкой $\operatorname{tg} x = z$, вторые два — подстановкой $\operatorname{ctg} x = z$.

Способом неопределенных коэффициентов можно вычислить указанные ниже интегралы, применяя следующие формулы:

$$\int \frac{\alpha \sin x + \beta \cos x}{a \sin x + b \cos x}\,dx = Ax + B \ln|a \sin x + b \cos x| + C_1, \tag{5.54}$$

$$\int \frac{\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma}{a \sin x + b \cos x + c}\,dx =$$

$$= Ax + B \ln|a \sin x + b \cos x + c| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}, \tag{5.55}$$

$$\int \frac{\alpha \sin^2 x + 2\beta \sin x \cos x + \gamma \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx =$$
$$= A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}, \quad (5.56)$$

$$\int \frac{\alpha \sin x + \beta \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} dx =$$
$$= A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2}, \quad (5.57)$$

где $A$, $B$, $C$ — неопределенные коэффициенты, $\lambda_1$, $\lambda_2$ — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2),$$

$$u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x, \qquad k_i = \frac{1}{a - \lambda_i} \qquad (i = 1, 2).$$

Аналогично

$$\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n} =$$
$$= \frac{A \sin x + B \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}}, \quad (5.58)$$

$$\int \frac{dx}{(a + b \cos x)^n} =$$
$$= \frac{A \sin x}{(a + b \cos x)^{n-1}} + B \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-1}} +$$
$$+ C \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-2}} \qquad (|a| \neq |b|). \quad (5.59)$$

## § 3. Определенный интеграл

1. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$. Разобьем этот отрезок на $n$ элементарных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ и выберем в каждом из них произвольную точку. Сумма произведений значений функции в выбранных точках на длины соответствующих участков разбиения

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta_k x, \quad (5.60)$$

где $\xi_k$ — выбранная точка отрезка $[x_{k-1}, x_k]$, а $\Delta_k x = x_k - x_{k-1}$ — длина этого отрезка, называется *интегральной суммой* (*суммой Коши — Римана*) для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Если при неограниченном увеличении числа участков разбиения, при котором длина каждого из участков стремится к нулю, предел интегральных сумм существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ и выбора точек $\xi_k$, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой на отрезке* $[a, b]$. Предел интегральных сумм

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta_k x = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (5.61)$$

называют *определенным интегралом от функции* $f(x)$ по отрезку $[a, b]$.

Это определение означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения, длины элементарных отрезков которого меньше $\delta$, т. е. $\max \Delta_k x < \delta$, и при любом выборе точек $\xi_k$ будет выполняться неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta_k x - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

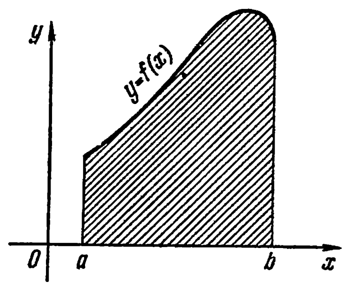


Рис. 10.

Геометрически определенный интеграл при $f(x) > 0$ выражает площадь криволинейной трапеции (рис. 10).

*Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она интегрируема на нем*, т. е. определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ существует. Функция интегрируема также, если она *ограничена на отрезке* $[a, b]$ *и имеет на нем конечное число точек разрыва первого рода* (*конечных скачков*).

Определенный интеграл по отрезку $[a, b]$ можно определить также и при $a > b$. При этом разности $\Delta_k x = x_{k+1} - x_k$, входящие в интегральную сумму, не являются уже длинами соответствующих участков разбиения, а отличаются от них знаком.

2. Определенный интеграл от интегрируемых функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ обладает следующими свойствами:

а) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{5.62}$$

б) $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{5.63}$$

в) $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad (k = \text{const}). \tag{5.64}$$

г) $$\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{5.65}$$

д) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{5.66}$$

е) *Если* $a < b$ *и* $f(x) \geqslant 0$, *то* $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$; *если* $f(x) > 0$, *то* $\int_a^b f(x)\,dx > 0$; *для непрерывных функций из* $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ *и* $f(x) \geqslant 0$ *следует* $f(x) \equiv 0$.

ж) *Если* $a < b$ *и* $f(x) \geqslant \varphi(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b \varphi(x)dx. \tag{5.67}$$

з) $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{5.68}$$

Этими свойствами пользуются для вычислений или для оценок величины определенных интегралов. Часто используются также *теоремы о среднем*.

Теорема 2 (первая теорема о среднем). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ $(a < b)$, *а функция* $\varphi(x)$ *интегрируема и сохраняет на* $[a, b]$ *постоянный знак, то в интервале* $(a, b)$ *существует такая точка* $\xi$, *что*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx \qquad (a < \xi < b). \tag{5.69}$$

В частности, при $\varphi(x) \equiv 1$ первая теорема о среднем дает для непрерывной функции $f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \qquad (a < \xi < b). \tag{5.70}$$

Значение

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{5.71}$$

называют *средним значением функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$. Геометрически среднее значение функции равно высоте прямоугольника, равновеликого криволинейной трапеции и имеющего с нею общее основание (рис. 11).

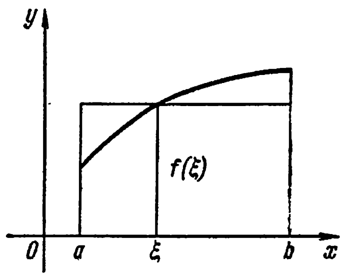

Рис. 11.

Теорема 3 (вторая теорема о среднем). *Если функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *ограничены и интегрируемы на* $[a, b]$, $a < b$, *а функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяет на* $[a, b]$ *неравенствам* $A \leqslant \varphi(x) \leqslant B$ *и не убывает, то существует такая точка* $\xi$ *отрезка* $[a, b]$, *что*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = A\int_a^\xi f(x)\,dx + B\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{5.72}$$

*Если функция* $\varphi(x)$ *не возрастает, то*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = B\int_a^\xi f(x)\,dx + A\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{5.73}$$

В частности, в этих формулах можно полагать $A=\varphi(a+0)$, $B=\varphi(b-0)$, т. е. для неубывающей функции $\varphi(x)$ имеем

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(a+0)\int_a^{\xi} f(x)\,dx+\varphi(b-0)\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx. \tag{5.74}$$

Такая же формула справедлива для случая, когда $\varphi(x)$ не возрастает, так как в этом случае можно принять, наоборот, $A=\varphi(b-0)$, $B=\varphi(a+0)$.

Если функция $\varphi(x)$ строго монотонна, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx+\varphi(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx. \tag{5.75}$$

**3.** Неопределенный интеграл, рассмотренный в § 1, есть функция переменного интегрирования $x$. В противоположность этому определенный интеграл от данной функции по данному отрезку есть фиксированное число, не зависящее от переменного интегрирования. Поэтому переменное интегрирования может быть обозначено любой буквой:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(u)\,du=\int_a^b f(t)\,dt.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $x$ — произвольная точка отрезка, то интеграл $\int_a^x f(t)\,dt$ существует (переменное интегрирования обозначено другой буквой, чтобы отличать его от верхнего предела интегрирования), вполне определен выбором точки $x$ и изменяется при изменении $x$. Таким образом, *определенный интеграл является функцией своего верхнего предела*:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt. \tag{5.76}$$

*Определенный интеграл есть непрерывная и дифференцируемая функция своего верхнего предела, причем*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \qquad (5.77)$$

$$d\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\,dx \qquad (5.78)$$

*во всех точках непрерывности $f(x)$, т. е. определенный интеграл, как функция своего верхнего предела, является одной из первообразных для функции, находящейся под знаком интеграла.* Именно, это та первообразная, которая обращается в нуль при значении $x$, равном нижнему пределу интегрирования.

Так как все первообразные отличаются лишь постоянным слагаемым, то, обозначив через $\Phi(x)$ произвольную первообразную для функции $f(x)$, найдем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b \qquad (5.79)$$

(*формула Ньютона — Лейбница*), т. е. *определенный интеграл равен приращению первообразной интегрируемой функции на отрезке интегрирования.*

Формула Ньютона — Лейбница является основным средством для вычисления определенных интегралов; она сводит их нахождение к отысканию неопределенного интеграла, т. е. первообразных функций. В тех случаях, когда для отыскания первообразной приходится преобразовывать неопределенный интеграл тем или иным способом, пользуются формулами *подстановки* (*замены переменных*) или *интегрирования по частям* для определенного интеграла.

Формула подстановки. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ знакопостоянна и непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, причем $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (5.80)$$

Формула интегрирования по частям

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - \int_a^b \varphi(x) f'(x)\,dx. \tag{5.81}$$

или

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{5.82}$$

Формула кратного интегрирования по частям

$$\int_a^b uv^{(n)}\,dx = [uv^{(n-1)} + u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} + \\ + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v]_a^b - (-1)^n \int_a^b u^{(n)}v\,dx. \tag{5.83}$$

Формула Коши

$$\int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} dx_2 \ldots \int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_{t}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\,dt. \tag{5.84}$$

Замечание. Если каждой функции $y = y(x)$ некоторой линейной системы $M$ функций отнести число $J[y(x)]$, то говорят, что на $M$ задан *функционал* $J$. При этом, если $J$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $J[y_1+y_2] = J[y_1]+J[y_2]$, 2) $J[\lambda y] = \lambda J[y]$, где $\lambda$ — любое действительное число, то $J[y]$ называется *линейным функционалом* на $M$.

Определенный интеграл $J[y] = \int_a^b y\,dx$ есть линейный функционал на классе интегрируемых функций $y = y(x)$, определенных на $[a, b]$.

**4.** Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда она имеет верхнюю и нижнюю грани как на всем отрезке, так и на любой его части. Разобьем отрезок $[a, b]$ на элементарные участки. Обозначим длину $k$-го элементарного участка через $\Delta_k x$, а верхнюю и нижнюю грани функции на этом участке соответственно через $M_k$ и $m_k$.

*Верхней и нижней интегральными суммами* (*суммами Дарбу*) называют суммы произведений соответственно верхних и нижних граней функции на элементарных участках на длины последних:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k x, \tag{5.85}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k x. \tag{5.86}$$

Для любого разбиения отрезка суммы Дарбу и суммы Коши — Римана связаны между собой соотношением

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k x \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta_k x \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k x. \tag{5.87}$$

*Верхним интегралом* $I^*$ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел[1]) верхних интегральных сумм

$$I^* = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta_k x \to 0}} \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k x. \tag{5.88}$$

Аналогично, *нижним интегралом* $I_*$ называется предел нижних интегральных сумм

$$I_* = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta_k x \to 0}} \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k x. \tag{5.89}$$

Существование верхнего и нижнего интегралов устанавливается следующей теоремой.

Теорема 4 (теорема Дарбу). *Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$, то ее нижние и верхние интегральные суммы имеют предел, т. е. всякая ограниченная функция обладает нижним и верхним интегралами.*

Доказательство теоремы Дарбу опирается на два важных свойства верхних и нижних сумм:

а) при переходе от данного разбиения к новому, которое получается добавлением новых точек разбиения, нижняя

---

[1]) Пределы интегральных сумм понимаются в смысле, указанном в п. 1.

интегральная сумма не уменьшается, а верхняя не увеличивается;

б) нижняя интегральная сумма для любого разбиения не больше верхней интегральной суммы для любого другого разбиения.

**5.** Верхний и нижний интегралы, определенные в п. 4, могут иметь различные значения или совпадать. Если верхний и нижний интегралы функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ совпадают, то их общее значение называют *интегралом Римана функции* $f(x)$ *по этому отрезку* и пишут:

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = I^* = I_*. \tag{5.90}$$

Функции, для которых $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ существует, называются *интегрируемыми по Риману.*

Наиболее просто формулируемым *условием интегрируемости* является следующее: функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда она ограничена и

$$\lim_{\max \Delta_k x \to 0} (S_n - s_n) = 0, \tag{5.91}$$

т. е. предел разности верхней и нижней интегральных сумм равен нулю.

Ограниченность функции недостаточна для ее интегрируемости по Риману. Так, функция, определенная на отрезке $[0, 1]$ равенством

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ — число рациональное, } x = \dfrac{p}{q}, \\ 0, \text{ если } x \text{ иррационально} \end{cases} \tag{5.92}$$

(*функция Дирихле*), ограничена. Однако для любого участка при любом разбиении имеем $M_k = 1$, тогда как $m_k = 0$. Вследствие этого верхняя сумма всегда равна

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k x = 1,$$

а нижняя сумма

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k x = 0.$$

Таким образом, для функции Дирихле $I^* = 1$, $I_* = 0$ и интеграл Римана не существует.

Интегрируемыми по Риману являются, в частности, непрерывные на данном отрезке функции и, более общо, имеющие на нем конечное число точек разрыва первого рода, а также ограниченные монотонные функции и, более общо, функции ограниченной вариации.

Так как суммы Коши — Римана заключены между суммами Дарбу, то *интеграл Римана есть общий предел интегральных сумм Дарбу и Коши — Римана.* Поэтому интеграл Римана совпадает с обычным определенным интегралом, рассмотренным в п. 1, вследствие чего знак $(R)$ перед интегралом обычно опускается. Отсюда следует также, что свойства интеграла Римана совпадают со свойствами определенного интеграла, рассмотренными в п. 1.

Суммы Дарбу могут быть построены также и для функции, не обязательно определенной в каждой точке отрезка, тогда как для сумм Коши такое предположение необходимо. Поэтому формально можно считать, что класс функций, интегрируемых по Риману, шире, нежели интегрируемых в смысле определения п. 1.

**6.** Числовую последовательность $\{x_n\}$, все точки которой принадлежат отрезку $[0, 1]$, называют *равномерно распределенной* на отрезке, если число точек последовательности с номерами, меньшими данного $n$, попавших на участок $[\alpha, \beta]$ отрезка $[0, 1]$, в пределе пропорционально длине отрезка. Более точно, *если* $\nu_n(\alpha, \beta)$ *означает число точек последовательности с номерами, меньшими* $n$, *принадлежащих участку* $[\alpha, \beta]$, *то*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\nu_n(\alpha, \beta)}{n} = \beta - \alpha. \tag{5.93}$$

В терминах теории вероятностей это определение означает, что *вероятность попадания взятого наудачу элемента последовательности на участок* $[\alpha, \beta]$ *равна длине* *этого участка.* (См. также выпуск *СМБ* «Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби)», стр. 43—44.)

Простейшим примером равномерно распределенной последовательности является последовательность всех обыкновенных правильных дробей, именно дробей вида $\frac{m}{n}$ ($n=2, 3, \ldots$; $m=1, 2, \quad n-1$). Эта последовательность имеет вид

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4},$$

Большое число примеров равномерно распределенных последовательностей можно построить с помощью следующей теоремы.

Теорема 5. *Если $\vartheta$ иррационально, то последовательность $x_n = n\vartheta - [n\vartheta]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ является равномерно распределенной на отрезке* $[0, 1]$, *где символ* $[n\vartheta]$ *означает целую часть числа $n\vartheta$, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее $n\vartheta$.*

Последовательности, равномерно распределенные по отрезку, можно использовать для вычисления интегралов. Их роль при вычислении интегралов основывается на следующей теореме.

Теорема 6. *Если числовая последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена на отрезке* $[0, 1]$, *то для любой функции $f(x)$, интегрируемой на* $[0, 1]$, *выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ \ldots\ +f(x_n)}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx. \qquad (5.94)$$

Наоборот, из выполнения этого предельного соотношения вытекает, что последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена на отрезке. Таким образом, выполнение этого соотношения является необходимым и достаточным условием равномерного распределения последовательности, так что его можно принять за определение равномерного распределения.

В качестве следствия основного предельного соотношения можно указать, что для последовательности $\{x_n\}$, равномерно распределенной на отрезке [0, 1], для каждого целого положительного $k$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k}{n}=\frac{1}{k+1}. \qquad (5.95)$$

Его можно получить, полагая $f(x)=x^k$.

Справедливо также и более общее предельное соотношение. Если последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена на отрезке [0, 1] и $\{\alpha_n\}$ — монотонно убывающая последовательность положительных чисел с расходящейся суммой, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+\ldots+\alpha_n f(x_n)}{\alpha_1+\alpha_2+\ \ \ +\alpha_n}=\int_0^1 f(x)\,dx. \qquad (5.96)$$

## § 4. Интегрирование функций $n$ переменных

**1.** Для функций нескольких переменных оказывается возможным определить различные понятия интеграла в зависимости от числа измерений области интегрирования и числа аргументов функции. Рассмотрим в первую очередь функции двух переменных.

Ограниченная замкнутая область $G$ плоскости $xOy$ называется *квадрируемой*, если верхняя грань площадей вписанных в нее многоугольников совпадает с нижней гранью площадей многоугольников, описанных около $\bar{G}$. Общее значение $Q$ этих граней называют *площадью* области. *Диаметром* $\delta$ области $\bar{G}$ называется верхняя грань расстояний между любыми двумя точками области $\bar{G}$.

Пусть функция точки области $z=f(P)$ или $z=f(x, y)$ определена на квадрируемой области $\bar{G}$. Разобьем область $\bar{G}$ на конечное число элементарных квадрируемых частей, площади которых $\Delta_k q$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Выберем на каждой элементарной площадке произвольную точку $(\xi_k, \eta_k)$ и составим *сумму произведений значений функции в выбранных точках на площади элементарных площадок*

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta_k q. \qquad (5.97)$$

Эту сумму называют (*двойной*) *интегральной суммой* для функции $f(x, y)$ по области $G$. Для ограниченной функции $f(x, y)$ можно, кроме того, построить (*двойные*) *верхние и нижние суммы Дарбу*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k q, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k q, \tag{5.98}$$

где $M_k$ и $m_k$ означают соответственно *верхнюю и нижнюю грани функции* $f(x, y)$ на соответствующих элементарных площадках.

*Двойным интегралом* $\iint\limits_G f(x, y)\,dq$ или $\iint\limits_G f(P)\,dq$ от функции $f(x, y)$ по области $G$ называется предел интегральных сумм, когда диаметры всех элементарных областей разбиения стремятся к нулю:

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dq = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\delta_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta_k q =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\delta_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k q = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\delta_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k q. \tag{5.99}$$

Это означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\eta > 0$, что для любого разбиения области $G$, при котором наибольший диаметр элементарной области будет меньше $\eta$, $\max\delta_k < \eta$, будет выполняться неравенство

$$\left| \iint\limits_G f(x, y)\,dq - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta_k q \right| < \varepsilon.$$

Аналогичное неравенство справедливо также и для сумм Дарбу.

Иногда, как и для функции одного переменного, определяют *верхний и нижний интегралы* как пределы соответственно верхних и нижних сумм Дарбу и их общее значение, если они совпадают, называют *двойным интегралом Римана*.

Двойные интегралы обладают свойствами, аналогичными свойствам определенного интеграла:

а) $$\iint\limits_G kf(x, y)\,dq = k\iint\limits_G f(x, y)\,dq \quad (k = \text{const}). \tag{5.100}$$

б) $$\iint\limits_G [f(x, y) \pm \varphi(x, y)]\,dq = \iint\limits_G f(x, y)\,dq \pm \iint\limits_G \varphi(x, y)\,dq. \tag{5.101}$$

в) *Если область $G$ разбита на части $G_1$ и $G_2$, то*

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dq = \iint\limits_{G_1} f(x, y)\,dq + \iint\limits_{G_2} f(x, y)\,dq. \tag{5.102}$$

г) *Если во всех точках области $G$ справедливо неравенство $f(x, y) \geqslant \varphi(x, y)$, то*

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dq \geqslant \iint\limits_G \varphi(x, y)\,dq. \tag{5.103}$$

д) *Если $f(x, y) \equiv 1$, то*

$$\iint\limits_G dq = Q, \tag{5.104}$$

*где $Q$ означает площадь области $G$.*

е) *Если во всех точках области $G$ имеют место неравенства $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$, то*

$$mQ \leqslant \iint\limits_G f(x, y)\,dq \leqslant MQ. \tag{5.105}$$

ж) *Если $f(x, y)$ непрерывна в области $G$, включая границу, то существует точка $(\xi, \eta)$, лежащая внутри $G$, для которой*

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dq = f(\xi, \eta)\,Q$$

(*теорема о среднем*).

Значение $f(\xi, \eta)$, определенное последним равенством, называют *средним значением* функции $f(x, y)$ в области $G$.

Существование двойного интеграла можно гарантировать для классов функций, указанных в следующих теоремах, где *область интегрирования всегда предполагается ограниченной и квадрируемой.*

Теорема 7. *Двойной интеграл от непрерывной функции существует.*

Теорема 8. *Если функция $f(x, y)$ ограничена и ее точки разрыва лежат на конечном числе кривых, являющихся графиками непрерывных функций $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$, то она интегрируема.*

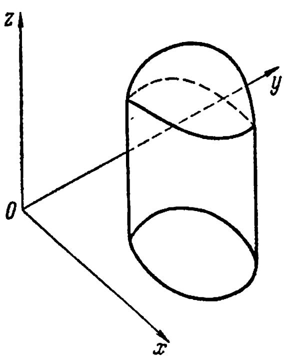

Рис. 12.

Эта теорема является частным случаем следующей, более общей теоремы.

Теорема 9. *Если функция $f(x, y)$ ограничена и множество точек разрыва функции имеет нулевую площадь, то двойной интеграл от такой функции существует.*

Геометрически двойной интеграл от положительной функции выражает объем тела, которое принято называть *цилиндроидом* (рис. 12). Для вычисления двойных интегралов их сводят к повторным; при этом их обычно записывают в виде $\int\limits_G\int f(x, y)\,dx\,dy$.

*Повторным* (или *двукратным*) *интегралом*

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \quad \text{или} \quad \int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx$$

называют определенный интеграл от определенного интеграла

$$\int\limits_a^b \Phi(x)\,dx, \quad \text{где} \quad \Phi(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy, \qquad (5.106$$

или

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Psi(y)\,dy, \quad \text{где} \quad \Psi(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx. \tag{5.107}$$

Чтобы найти повторный интеграл, сначала вычисляют *внутренний интеграл*, интегрируя функцию $f(x, y)$ по $y$ (или по $x$), а затем интегрируют полученную функцию $\Phi(x)$ (или $\Psi(y)$).

*Если область $G$ ограничена непрерывными кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x))$ и ординатами $x=a$, $x=b$* (рис. 13), *существуют двойной*

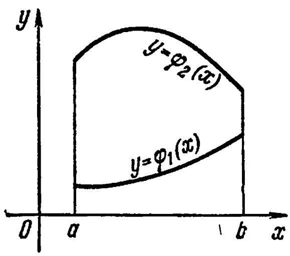


Рис. 13.

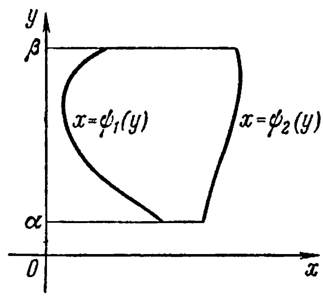


Рис. 14.

*интеграл* $\iint_G f(x, y)\,dx\,dy$ *и определенный интеграл*

$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$ *для любого $x$ из $[a, b]$, то существует повторный интеграл* $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$ *и справедливо равенство*

$$\iint_G f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{5.108}$$

Аналогично, *если область $G$ ограничена непрерывными кривыми $x=\psi_1(y)$ и $x=\psi_2(y)$ $(\alpha \leqslant y \leqslant \beta,\ \psi_1(y) \leqslant \psi_2(y))$* (рис. 14) *и прямыми $y=\alpha$, $y=\beta$, то при тех же* *условиях*

$$\iint_G f(x, y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx. \qquad (5.109)$$

Если область $G$ имеет более сложные границы, то для сведения двойного интеграла к повторному ее следует разбивать на части, имеющие вид, изображенный на рис. 13 или рис. 14.

Пусть функция $f(x, y)$ определена в области $G$ и задано отображение области $\Delta$ плоскости $u$, $v$ на область $G$ с помощью функций

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v).$$

Тогда двойной интеграл по области $G$ преобразуется по формуле

$$\iint_G f(x, y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f[x(u, v), y(u, v)] \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\,dv, \qquad (5.110)$$

которую называют формулой *замены переменных в двойном интеграле*. Как и в гл. III, $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ означает якобиан отображения. В частности, при переходе к полярным координатам формула замены переменных приобретает вид

$$\iint_G f(x, y)\,dx\,dy = \iint_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi. \qquad (5.111)$$

Более подробно преобразования двойных интегралов рассмотрены в гл. VII.

**2.** Объем трехмерной области $V$ можно определить с помощью объемов вписанных и описанных многогранников подобно тому, как это сделано в п. 1 для площади. Области, имеющие объем, называют *кубируемыми*.

Для функции $f(x, y, z)$, определенной на кубируемой области, строится (*тройная*) *интегральная сумма Коши — Римана*

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta_k v. \qquad (5.112)$$

Когда функция ограничена, то, кроме суммы Коши — Римана, можно построить также *верхние и нижние суммы Дарбу* (см. п. 1).

Если интегральные суммы имеют общий предел, когда диаметры всех элементарных областей стремятся к нулю, не зависящий от способов разбиения и выбора точек $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ (для сумм Коши — Римана), то этот предел называют *тройным интегралом* от функции $f(x, y, z)$ по данной области $V$. Его записывают с помощью символов

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv, \qquad \iiint\limits_V f(P)\,dv$$

или

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \tag{5.113}$$

Для вычисления тройного интеграла его сводят к трехкратному, который находится путем трех последовательных интегрирований по каждой из переменных в отдельности:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{5.114}$$

Как и для двойных интегралов, *формула замены переменных* в тройном интеграле имеет вид

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \iiint\limits_\Omega f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \times$$
$$\times \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du\,dv\,dw, \tag{5.115}$$

если область $\Omega$ отображается на область $V$ функциями

$$x = x(u, v, w), \qquad y = y(u, v, w), \qquad z = z(u, v, w).$$

**3.** Предположим, что в $n$-мерном пространстве определена некоторая *мера*, которая ставит в соответствие некоторым $n$-мерным областям определенные положительные числа — $n$-мерные объемы. Для функций, определенных на таких измеримых (т. е. имеющих $n$-мерный объем) $n$-мерных областях, можно определить интегральные суммы Коши — Римана и интеграл, как предел этих сумм.

Если функция ограничена, то, кроме сумм Коши — Римана, можно строить также верхние и нижние суммы Дарбу и определять *$n$-мерный интеграл Римана*, как общий предел верхних и нижних сумм Дарбу.

На $n$-мерный случай почти автоматически переносится вся теория двойных и тройных интегралов.

**4.** В пп. 1—3 рассматривалось интегрирование функций $n$ переменных ($n = 2, 3, \ldots$) по области, имеющей $n$ измерений. Возможно, однако, интегрирование по многообразиям меньшего числа измерений. Рассмотрим частные случаи.

Пусть функция $f(x, y)$ определена в точках плоской кривой $L$. Разобьем ее на $m$ участков и выберем на каждом из них точку $(\xi_k, \eta_k)$. Тогда можно построить *интегральную сумму*

$$\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k s, \tag{5.116}$$

где $\Delta_k s$ означает длину соответствующего участка кривой, предел которой при стремлении к нулю длин всех участков разбиения называют *криволинейным интегралом* (более точно, *криволинейным интегралом первого типа* или *криволинейным интегралом по длине дуги*) от функции $f(x, y)$ по дуге $L$. Его обозначают

$$\int_L f(x, y)\,ds = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta_k s \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k s. \tag{5.117}$$

Кривую $L$ называют *путем* или *контуром интегрирования*.

Определение криволинейного интеграла $\int\limits_L f(x, y, z)\,ds$ от функции *трех* переменных по пространственной кривой не требует никаких изменений.

Для вычисления криволинейного интеграла первого типа его приводят к обычному определенному. Так, если пространственная кривая задана параметрически уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

то

$$\int\limits_L f(x, y, z)\,ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt. \quad (5.118)$$

Эта же формула, содержащая лишь $x$ и $y$, может быть использована для вычисления криволинейного интеграла по плоской кривой.

Функция $f(x, y, z)$ может быть задана также на поверхности $S$. Разобьем поверхность на элементарные площадки, площади которых обозначим через $\Delta_k\sigma$. Тогда, выбрав на каждой из элементарных площадок точку $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$, построим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta_k\sigma, \quad (5.119)$$

предел которой называют *интегралом (первого типа) по поверхности $S$ от функции $f(x, y, z)$*. Его обозначают символом

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,d\sigma \quad (5.120)$$

и вычисляют путем сведения к двойному интегралу. Если поверхность $S$ задается явным уравнением $z = z(x, y)$ в области $G$ плоскости $xOy$, то

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,d\sigma =$$

$$= \iint\limits_G f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dx\,dy. \quad (5.121)$$

Более общие случаи рассмотрены в гл. VII.

Дадим общее определение интеграла по многообразию меньшего числа измерений. Пусть функция $n$ переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена на $m$-мерном многообразии $R$ $(m < n)$, обладающем $m$-мерным объемом (см. п. 3). Разобьем $R$ на элементарные части, $m$-мерные объемы которых обозначим через $\Delta_k v$, и выберем в каждой из них точку $\left(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\right)$. Тогда можно построить *интегральную сумму*

$$\sum f\left(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\right)\Delta_k v, \tag{5.122}$$

предел которой называют *интегралом* функции $n$ переменных по $m$-мерному многообразию *по мере области.* Свойства интегралов по мере области вполне аналогичны свойствам обычных определенных, двойных и т. д. интегралов (см. гл. VII, § 2, п. 1).

**5.** Наряду с интегралами по мере области (интегралами первого типа) можно определить также *интегралы второго типа* по $m$-мерному многообразию — *интегралы по координатам.* Интегральные суммы, предел которых дает интегралы второго типа, могут быть получены из интегральных сумм п. 4 путем замены $m$-мерного объема элементарной части многообразия $R$ $m$-мерным объемом проекции этой части на $m$-мерные координатные гиперплоскости. Приведем частные случаи при $n=2$ и $n=3$.

Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, определенная по плоской кривой $L$. Разобьем кривую $L$ на элементарные участки, каждый из которых спроектируем соответственно на оси координат $Ox$ и $Oy$. Тогда можно построить две интегральные суммы

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k x \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k y, \tag{5.123}$$

пределы которых, если они существуют, дают два *криволинейных интеграла по координатам* (*второго типа*)

$$\int_L f(x, y)\,dx \quad \text{и} \quad \int_L f(x, y)\,dy. \tag{5.124}$$

Обычно в качестве криволинейного интеграла второго типа рассматривают *составной* интеграл

$$\int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \tag{5.125}$$

где $P$ и $Q$ — произвольные интегрируемые функции.

Для пространственной кривой элементарные участки дуги можно проектировать на оси $Ox$, $Oy$ и $Oz$, что дает три интегральные суммы

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)\,\Delta_k x, \quad \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)\,\Delta_k y,\\ \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)\,\Delta_k z\end{array}\right\} \tag{5.126}$$

и, следовательно, три интеграла

$$\int_L f(x,\ y,\ z)\,dx, \quad \int_L f(x,\ y,\ z)\,dy, \quad \int_L f(x,\ y,\ z)\,dz. \tag{5.127}$$

Как и для плоской кривой, часто рассматривают составной интеграл

$$\int_L P(x,\ y,\ z)\,dx + Q(x,\ y,\ z)\,dy + R(x,\ y,\ z)\,dz. \tag{5.128}$$

Путь интегрирования в обоих случаях предполагается *ориентированным*. Это означает, что на кривой задано определенное направление движения, которое считается положительным. Если кривая не замкнута, то указывается, какая из двух ограничивающих точек является ее началом, а какая — концом. Для замкнутой кривой в плоском случае в качестве положительного обычно выбирается направление, противоположное направлению движения часовой стрелки, т. е. такое, при обходе контура по которому ограниченная им область остается слева.

Если функция $f(x,\ y,\ z)$ задана на поверхности $S$, то вместо интеграла $\int\limits_S\int f(x,\ y,\ z)\,d\sigma$ можно рассматривать составной интеграл

$$\int\limits_S\int P(x,\ y,\ z)\,dy\,dz + Q(x,\ y,\ z)\,dz\,dx + R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy, \tag{5.129}$$

где $P$, $Q$, $R$ — интегрируемые функции трех переменных. Интеграл $\int\limits_S\int P\,dy\,dz$ определяется как предел интегральной суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)\,\Delta_k\sigma_{(xy)}$, причем $\Delta_k\sigma_{(xy)}$ означает площадь проекции элементарной площади на плоскость $xOy$. Аналогично определяются два других интеграла.

Поверхность $S$ должна быть двусторонней. Это свойство определяется следующим образом. Выберем в каждой точке поверхности определенное направление нормали, непрерывно меняющееся при движении точки по поверхности. Пусть подвижная точка опишет произвольную замкнутую кривую, не пересекающую границы поверхности. Если при возвращении точки в прежнее положение направление нормали в ней совпадает с первоначальным, то поверхность называют *двусторонней* или *ориентируемой*.

Для построения интеграла по поверхности последнюю следует *ориентировать*, т. е. выбрать одну из сторон, которая будет считаться положительной. Выбор стороны обусловливается выбором в каждой точке одного из двух возможных направлений нормали к поверхности, который в свою очередь обусловливает знак, приписываемый величине проекции $\Delta_k\sigma$. Эта величина берется со знаком плюс, если нормаль образует с осью, перпендикулярной к соответствующей координатной плоскости, острый угол, и со знаком минус в противном случае.

Для замкнутой поверхности в качестве положительной выбирается обычно сторона, соответствующая направлению нормали вне области, ограниченной этой поверхностью.

Свойства и способы вычисления интегралов по координатам, как и их связь с интегралами по мере области, рассмотрены в гл. VII. Здесь будет показано лишь применение криволинейных интегралов второго типа для восстановления функции нескольких переменных по полному дифференциалу.

**6.** Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — функции двух переменных, непрерывные вместе со своими частными производными в *односвязной* замкнутой квадрируемой области $G$. Дифференциальное выражение $P\,dx+Q\,dy$ называется *интегрируемым в области* $G$, если оно представляет собой полный дифференциал функции двух переменных, или, что то же самое, если существует дифференцируемая в области $G$ функция $U$ такая, что

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q(x, y). \tag{5.130}$$

Теорема 10. *Для того чтобы выражение $P\,dx+Q\,dy$ было интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке области $G$ выполнялось равенство*

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Это равенство называют *условием интегрируемости*.

Условие интегрируемости оказывается также необходимым и достаточным условием независимости криволинейного интеграла $\int\limits_L P\,dx+Q\,dy$ от пути интегрирования. Таким образом, имеет место

Теорема 11. *Криволинейный интеграл $\int\limits_L P\,dx+Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда выражение $P\,dx+Q\,dy$ является полным дифференциалом функции двух переменных.*

Так как интеграл не зависит от пути, то вместо указания пути интегрирования достаточно указать точки $(x_0, y_0)$ и $(x, y)$, служащие концами дуги кривой $L$.

Теорема 12. *Интеграл $\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx+Q\,dy$, рассматриваемый как функция точки $(x, y)$, является первообразной функцией для выражения $P\,dx+Q\,dy$, стоящего под знаком интеграла. Если $U(x, y)$ — одна из таких первообразных, то*

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=U(x, y)-U(x_0, y_0), \tag{5.131}$$

*т. е. криволинейный интеграл от полного дифференциала равен приращению первообразной функции (формула Ньютона — Лейбница).*

Аналогичное свойство имеет место и для интеграла по пространственной кривой. Дифференциальное выражение $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$, где $P$, $Q$, $R$ — функции трех переменных, непрерывные вместе со своими частными производными в кубируемой *односвязной* области $G$, называется *интегрируемым в* $G$, если оно является полным дифференциалом функции трех переменных.

Для того чтобы выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ было интегрируемым, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \tag{5.132}$$

в каждой точке $G$ (*условия интегрируемости*). Эти же условия необходимы и достаточны для независимости криволинейного интеграла $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ от пути интегрирования.

Теорема 13. *Криволинейный интеграл*

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

*не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда выражение* $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ *является полным дифференциалом функции трех переменных. Интеграл*

$$\int\limits_{(x_0,\, y_0,\, z_0)}^{(x,\, y,\, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

*рассматриваемый как функция точки* $(x, y, z)$, *является первообразной функцией для выражения* $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, *стоящего под знаком интеграла. Если* $U(x, y, z)$ — *одна из таких первообразных, то*

$$\int\limits_{(x_0,\, y_0,\, z_0)}^{(x,\, y,\, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0), \tag{5.133}$$

*т. е. криволинейный интеграл от полного дифференциала равен приращению первообразной функции (формула Ньютона — Лейбница).*

Криволинейный интеграл от функции $n$ переменных может быть таким же образом использован для восстановления функции $n$ переменных по ее полному дифференциалу.

## § 5. Приложения определенных интегралов к задачам геометрии и механики

**1. Вычисление площадей плоских фигур.** 1°. Площадь $Q$ криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной знакоположительной на отрезке $[a, b]$ функции $y = y(x)$, осью $Ox$ и двумя прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 15), равна

$$Q = \int_a^b y(x)\,dx. \tag{5.134}$$

Если функция $y(x)$ знакопеременна, то формулу для вычисления площади следует применять отдельно для каждого

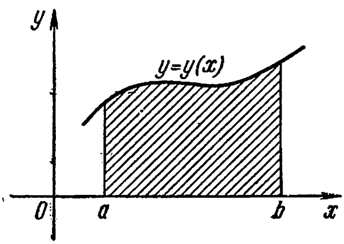


Рис. 15.

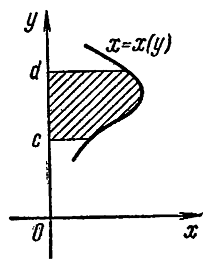


Рис. 16.

отрезка, где $y(x)$ сохраняет постоянный знак, и сложить абсолютные величины полученных чисел.

2°. Если уравнения кривой заданы в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, причем $a = x(t_0)$, $b = x(T)$, то площадь $Q$ трапеции равна[1])

$$Q = \int_{t_0}^{T} y(t)\,x'(t)\,dt. \tag{5.135}$$

3°. Если трапеция ограничена графиком функции $x = x(y)$, осью $Oy$ и двумя прямыми $y = c$, $y = d$ (рис. 16), то

$$Q = \int_c^d x(y)\,dy. \tag{5.136}$$

[1]) Здесь и далее предполагается, что подынтегральная функция положительна и верхний предел интегрирования больше нижнего.

4°. Площадь $Q$ фигуры $AMNB$ (рис. 17), ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ ($y_2(x) \geqslant y_1(x)$) и двумя прямыми $x = a$, $x = b$, равна

$$Q = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\,dx. \tag{5.137}$$

5°. Если $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t_0 \leqslant t \leqslant T$) — параметрические уравнения кусочно-гладкой простой замкнутой кривой,

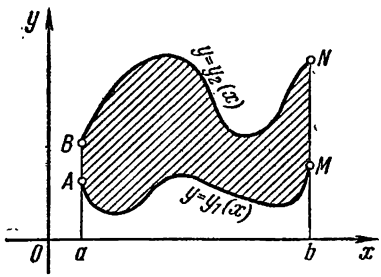

Рис. 17.

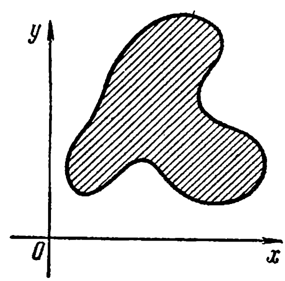

Рис. 18.

ограничивающей слева от себя фигуру площадью $Q$ (рис. 18), то

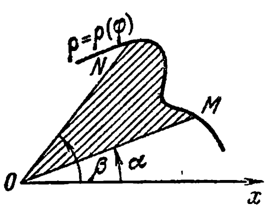

Рис. 19.

$$Q = -\int_{t_0}^{T} y(t)\,x'(t)\,dt = \int_{t_0}^{T} x(t)\,y'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} [x(t)\,y'(t) - y(t)\,x'(t)]\,dt. \tag{5.138}$$

6°. Площадь $Q$ криволинейного сектора $OMN$ (рис. 19), ограниченного непрерывной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, равна

$$Q = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [\rho(\varphi)]^2\,d\varphi. \tag{5.139}$$

7°. Площадь $Q$ плоской области $D$, расположенной в плоскости $xOy$, равна

$$Q=\iint\limits_{D} dq=\iint\limits_{D} dx\,dy=\iint\limits_{D} \rho\, d\rho\, d\varphi. \qquad (5.140)$$

8°. Площадь $Q$ плоской области $D$, ограниченной простым кусочно-гладким замкнутым контуром $C$, равна

$$Q=-\oint\limits_{C} y\,dx=\oint\limits_{C} x\,dy=\frac{1}{2}\oint\limits_{C} x\,dy-y\,dx. \qquad (5.141)$$

**2. Вычисление длин дуг кривых.** 1°. Длина $s$ дуги $AB$ (рис. 20) отрезка гладкой (непрерывно дифференцируемой) кривой $y=y(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ равна

$$s=\int\limits_{a}^{b}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx, \qquad (5.142)$$

а кривой $x=x(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$

$$s=\int\limits_{c}^{d}\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy. \qquad (5.143)$$

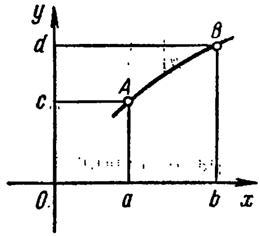


Рис. 20.

2°. Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant T)$, где $x(t)$, $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые на отрезке $[t_0, T]$ функции, то длина $s$ дуги кривой равна

$$s=\int\limits_{t_0}^{T}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt. \qquad (5.144)$$

3°. В полярных координатах длина $s$ дуги отрезка кривой $\rho=\rho(\varphi)$ $(\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta)$, где $\rho(\varphi)$ — функция, непрерывная вместе со своей производной $\rho'(\varphi)$, равна

$$s=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\rho(\varphi)]^2+[\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi. \qquad (5.145)$$

**3. Вычисление площадей поверхностей.** 1°. Площадь $Q$ гладкой криволинейной поверхности $z=z(x, y)$ равна

$$Q=\iint\limits_D \frac{dq}{\cos\gamma}=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy, \quad (5.146)$$

где $D$ — проекция поверхности на плоскость $xOy$, а $\gamma$ — угол, образованный нормалью к элементу поверхности с осью $Oz$ (угол между элементом поверхности и плоскостью $xOy$).

2°. Если поверхность задана параметрическими уравнениями $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$, где точка $(u, v)\in D$ и $D$ — ограниченная замкнутая квадрируемая область, в которой функции $x$, $y$, $z$ непрерывно дифференцируемы, то площадь $Q$ поверхности равна

$$Q=\iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \quad (5.147)$$

где

$$\left.\begin{aligned} E&=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\\ G&=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,\\ F&=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \quad (5.148)$$

3°. Если поверхность задана уравнением в цилиндрических координатах $z=z(\rho, \varphi)$, то площадь $Q$ равна

$$Q=\iint\limits_D \sqrt{\rho^2+\rho^2\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\,d\rho\,d\varphi. \quad (5.149)$$

4°. Площадь $Q$ поверхности, образованной вращением дуги $\breve{AB}$ гладкой плоской кривой $y=y(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ вокруг оси $Ox$ (рис. 21), равна

$$Q=2\pi\int\limits_{(A)}^{(B)} y\,ds=2\pi\int\limits_a^b y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx. \quad (5.150)$$

5°. Если плоская кривая задана уравнениями в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$, то

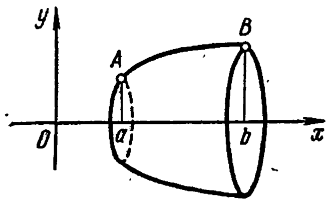


Рис. 21.

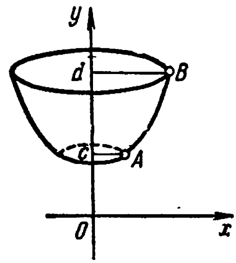


Рис. 22.

площадь $Q$ поверхности вращения (вокруг оси $Ox$) равна

$$Q = 2\pi \int\limits_{(A)}^{(B)} y\,ds =$$

$$= 2\pi \int\limits_{t_0}^{T} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt. \qquad (5.151)$$

6°. Площадь $Q$ поверхности, образованной вращением дуги $\smile{AB}$ плоской гладкой кривой $x = x(y)$ $(c \leqslant y \leqslant d)$ вокруг оси $Oy$ (рис. 22), равна

$$Q = 2\pi \int\limits_{(A)}^{(B)} x\,ds = 2\pi \int\limits_{c}^{d} x(y)\sqrt{1 + [x'(y)]^2}\,dy. \qquad (5.152)$$

**4. Вычисление объемов тел.** 1°. Объем $v$ цилиндроида, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = z(x, y)$, или в цилиндрических координатах $z = z(\rho, \varphi)$, снизу — плоскостью $z = 0$ и с боков — прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости $xOy$ квадрируемую область $D$ (рис. 23), равен

$$v = \iint\limits_{D} z\,dq = \iint\limits_{D} z\,dx\,dy = \iint\limits_{D} z\rho\,d\rho\,d\varphi. \qquad (5.153)$$

2°. Объем $v$ замкнутой пространственной области $V$ (рис. 24) равен

$$v = \iiint\limits_V dv, \tag{5.154}$$

при этом, если поверхности, ограничивающие область, заданы

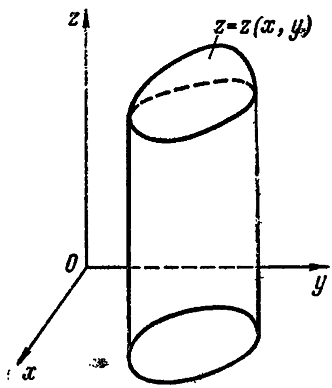


Рис. 23.

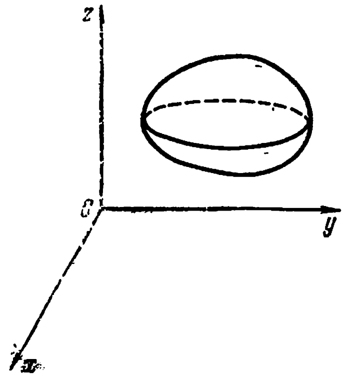


Рис. 24.

в декартовых координатах, то

$$v = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz; \tag{5.155}$$

если — в цилиндрических координатах, то

$$v = \iiint\limits_V \rho\,dz\,d\rho\,d\varphi, \tag{5.156}$$

а если — в сферических координатах, то

$$v = \iiint\limits_V \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta. \tag{5.157}$$

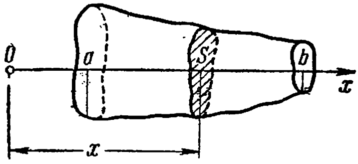


Рис. 25.

3°. Объем $v$ тела произвольной формы, заключенного между двумя плоскостями $x = a$, $x = b$, перпендикулярными к оси $Ox$, с площадью $S = Q(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси $Ox$ в точке $x$ (рис. 25), равен

$$v = \int_a^b Q(x)\,dx. \tag{5.158}$$

4°. Объем $v$ тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ плоской фигуры, ограниченной кривой $y = y(x)$, где $y(x)$ — непрерывная неотрицательная функция, осью $Ox$ и двумя прямыми $x = a$, $x = b$, равен

$$v = \pi \int_a^b [y(x)]^2\,dx. \tag{5.159}$$

5°. В более общем случае объем $v$ кольца, образованного вращением вокруг оси $Ox$ плоской фигуры, ограниченной двумя кривыми $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные неотрицательные функции, и двумя прямыми $x = a$, $x = b$, равен

$$v = \pi \int_a^b \left\{[y_2(x)]^2 - [y_1(x)]^2\right\} dx. \tag{5.160}$$

6°. Аналогично при вращении вокруг оси $Oy$ плоской фигуры, ограниченной кривой $x = x(y)$, где $x(y)$ — непрерывная неотрицательная функция, осью $Oy$ и двумя прямыми $y = c$, $y = d$, объем $v$ тела вращения равен

$$v = \pi \int_c^d [x(y)]^2\,dy.$$

**5. Теоремы Гюльдена.** Теорема 14 (1-я теорема Гюльдена). *Если дуга плоской кривой длины $L$ вращается около оси, не пересекающей эту дугу и лежащей с ней в одной плоскости, то площадь поверхности образованного при этом тела вращения вычисляется по формуле*

$$Q = L \cdot 2\pi d, \tag{5.161}$$

*где $d$ — расстояние центра тяжести дуги от оси вращения.*

Теорема 15 (2-я теорема Гюльдена). *Если плоская фигура площади $Q$ вращается около оси, не* *пересекающей эту фигуру и лежащей с ней в одной плоскости, то объем образованного при этом тела вращения вычисляется по формуле*

$$v = Q \cdot 2\pi d, \tag{5.162}$$

*где $d$ — расстояние центра тяжести площади фигуры от оси вращения.*

**6. Вычисление массы.** 1°. Вычисление массы $M$ криволинейного отрезка $l$ с переменной линейной плотностью $\delta$ производится по формуле

$$M = \int_l \delta\, ds, \tag{5.163}$$

где $\delta = \delta(x, y)$ для плоской кривой и $\delta = \delta(x, y, z)$ для пространственной кривой.

2°. Масса $M$ плоской фигуры $D$ с переменной поверхностной плотностью $\delta$ равна

$$M = \int\limits_D\!\!\int \delta\, dq. \tag{5.164}$$

В декартовых координатах эта формула принимает вид

$$M = \int\limits_D\!\!\int \delta(x, y)\, dx\, dy, \tag{5.165}$$

а в полярных координатах

$$M = \int\limits_D\!\!\int \delta(\rho, \varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi. \tag{5.166}$$

3°. Масса $M$ криволинейной фигуры $S$ с переменной поверхностной плотностью $\delta = \delta(x, y, z)$ равна

$$M = \int\limits_S\!\!\int \delta(x, y, z)\, d\sigma. \tag{5.167}$$

4°. Масса $M$ тела $V$ с переменной объемной плотностью $\delta$ равна

$$M = \int\!\!\int\limits_V\!\!\int \delta\, dv. \tag{5.168}$$

В декартовых координатах эта формула принимает вид

$$M = \iiint_V \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \tag{5.169}$$

в цилиндрических координатах

$$M = \iiint_V \delta(\rho, \varphi, z)\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz, \tag{5.170}$$

а в сферических координатах

$$M = \iiint_V \delta(\rho, \varphi, \theta)\, \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta. \tag{5.171}$$

**7. Вычисление координат центра тяжести.** 1°. Координаты центра тяжести $C$ дуги однородной плоской кривой $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ длины $L$ определяются по формулам

$$x_C = \frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx}{L}, \quad y_C = \frac{\int\limits_a^b y(x)\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx}{L}. \tag{5.172}$$

Для замкнутой кривой

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\int\limits_a^b x\left\{\sqrt{1+[y_1'(x)]^2} + \sqrt{1+[y_2'(x)]^2}\right\} dx}{L}, \\ y_C &= \frac{\int\limits_a^b \left\{y_1(x)\sqrt{1+[y_1'(x)]^2} + y_2(x)\sqrt{1+[y_2'(x)]^2}\right\} dx}{L}, \end{aligned}\right\} \tag{5.173}$$

где $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ — уравнения верхней и нижней частей контура соответственно, а $L$ — длина всего контура.

2°. Координаты центра тяжести $C$ дуги кривой $l$ с переменной плотностью $\delta$ и массой $M$ равны:

для плоской кривой

$$x_C = \frac{\int\limits_l \delta x\, ds}{M}, \quad y_C = \frac{\int\limits_l \delta y\, ds}{M}, \tag{5.174}$$

где $\delta = \delta(x, y)$;

для пространственной кривой

$$x_C=\frac{\int\limits_l \delta x\,ds}{M},\quad y_C=\frac{\int\limits_l \delta y\,ds}{M},\quad z_C=\frac{\int\limits_l \delta z\,ds}{M},\tag{5.175}$$

где $\delta=\delta(x, y, z)$.

3°. Координаты центра тяжести $C$ плоской пластинки $D$ с переменной плотностью $\delta$ и массой $M=\int\limits_D\int \delta\,dq$ равны:

в декартовых координатах

$$x_C=\frac{\int\limits_D\int \delta x\,dx\,dy}{\int\limits_D\int \delta\,dx\,dy},\quad y_C=\frac{\int\limits_D\int \delta y\,dx\,dy}{\int\limits_D\int \delta\,dx\,dy},\tag{5.176}$$

где $\delta=\delta(x, y)$;

в полярных координатах

$$x_C=\frac{\int\limits_D\int \delta\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi}{\int\limits_D\int \delta\rho\,d\rho\,d\varphi},\quad y_C=\frac{\int\limits_D\int \delta\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi}{\int\limits_D\int \delta\rho\,d\rho\,d\varphi},\tag{5.177}$$

где $\delta=\delta(\rho, \varphi)$.

Если пластинка однородна, то в этих формулах следует положить $\delta=1$.

4°. Координаты центра тяжести $C$ тела $V$ с переменной плотностью $\delta$ и массой $M=\int\int\limits_V\int \delta\,dv$ равны

$$x_C=\frac{\int\int\limits_V\int \delta x\,dv}{M},\quad y_C=\frac{\int\int\limits_V\int \delta y\,dv}{M},\quad z_C=\frac{\int\int\limits_V\int \delta z\,dv}{M};\tag{5.178}$$

в частности, в декартовых координатах

$$\left.\begin{aligned} x_C=\frac{\iiint\limits_V \delta x\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \delta\,dx\,dy\,dz},\quad y_C=\frac{\iiint\limits_V \delta y\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \delta\,dx\,dy\,dz},\\ z_C=\frac{\iiint\limits_V \delta z\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \delta\,dx\,dy\,dz},\end{aligned}\right\}\quad(5.179)$$

где $\delta=\delta(x, y, z)$.

Если тело однородно, то в этих формулах следует положить $\delta=1$.

**8. Вычисление моментов инерции.** 1°. Моменты инерции $I_x$ и $I_y$ относительно координатных осей $Ox$ и $Oy$ плоской пластинки $D$ с переменной плотностью $\delta=\delta(x, y)$ определяются формулами

$$I_x=\iint\limits_D \delta y^2\,dx\,dy,\quad I_y=\iint\limits_D \delta x^2\,dx\,dy,\quad(5.180)$$

а момент инерции $I_0$ относительно начала координат $O$ равен

$$I_0=\iint\limits_D \delta(x^2+y^2)\,dx\,dy.\quad(5.181)$$

2°. Момент инерции $I_x$ относительно полярной оси $Ox$ плоской пластинки $D$ с переменной плотностью $\delta=\delta(\rho, \varphi)$ равен

$$I_x=\iint\limits_D \delta\rho^3\sin^2\varphi\,d\rho\,d\varphi,\quad(5.182)$$

а момент инерции $I_0$ относительно полюса $O$ равен

$$I_0=\iint\limits_D \delta\rho^3\,d\rho\,d\varphi.\quad(5.183)$$

3°. Если $I_l$, $I_{l_0}$ — моменты инерции плоской фигуры $D$ площади $Q$ относительно двух параллельных осей $l$ и $l_0$, из которых $l_0$ проходит через центр тяжести фигуры, и $d$ — расстояние между этими осями, то

$$I_l = I_{l_0} + Qd^2. \tag{5.184}$$

4°. Момент инерции $I$ плоской фигуры $D$ относительно прямой, проходящей через центр тяжести $O(0, 0)$ и составляющей угол $\alpha$ с осью $Ox$, равен

$$I = I_x \cos^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_y\sin^2\alpha, \tag{5.185}$$

где $I_x$ и $I_y$ — моменты инерции фигуры относительно осей $Ox$ и $Oy$, а $I_{xy}$ — центробежный момент, равный

$$I_{xy} = \iint\limits_D \delta xy\,dx\,dy. \tag{5.186}$$

5°. Моменты инерции $I_{xy}$, $I_{yz}$, $I_{zx}$ тела $V$ с переменной плотностью $\delta = \delta(x, y, z)$ относительно координатных плоскостей определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint\limits_V \delta z^2\,dx\,dy\,dz, \\ I_{yz} &= \iiint\limits_V \delta x^2\,dx\,dy\,dz, \\ I_{zx} &= \iiint\limits_V \delta y^2\,dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{5.187}$$

Момент инерции $I_l$ относительно оси $l$ тела $V$ с переменной плотностью $\delta$ равен

$$I_l = \iiint\limits_V \delta r^2\,dx\,dy\,dz, \tag{5.188}$$

где $r$ — расстояние переменной точки $(x, y, z)$ от оси $l$.

В частности, для координатных осей имеем

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{yx} + I_{yz}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}, \tag{5.189}$$

например, в декартовых координатах

$$I_z = \iiint\limits_V \delta(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz, \text{ где } \delta = \delta(x, y, z), \tag{5.190}$$

в цилиндрических координатах

$$I_z = \iiint\limits_V \delta\rho^3 d\rho\, d\varphi\, dz, \quad \text{где} \quad \delta = \delta(\rho, \varphi, z), \tag{5.191}$$

а в сферических координатах

$$I_z = \iiint\limits_V \delta\rho^4 \sin^3\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta, \quad \text{где} \quad \delta = \delta(\rho, \varphi, \theta). \tag{5.192}$$

6°. Момент инерции $I_0$ относительно полюса $O$ тела $V$ с переменной плотностью $\delta$ равен

$$I_0 = \iiint\limits_V \delta r^2 dv. \tag{5.193}$$

В частности, в декартовых координатах

$$I_0 = \iiint\limits_V \delta(x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz, \quad \text{где} \quad \delta = \delta(x, y, z), \tag{5.194}$$

в цилиндрических координатах

$$I_0 = \iiint\limits_V \delta(\rho^2 + z^2)\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz, \quad \text{где} \quad \delta = \delta(\rho, \varphi, z), \tag{5.195}$$

а в сферических координатах

$$I_0 = \iiint\limits_V \delta\rho^4 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta, \quad \text{где} \quad \delta = \delta(\rho, \varphi, \theta). \tag{5.196}$$

7°. Имеет место соотношение

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}. \tag{5.197}$$

8°. Если $I_l$ — момент инерции тела относительно некоторой оси $l$, $I_{l0}$ — момент инерции относительно оси, параллельной $l$ и проходящей через центр тяжести $O$ тела, $d$ — расстояние между осями и $M$ — масса тела, то

$$I_l = I_{l_0} + Md^2. \tag{5.198}$$

9°. Момент инерции тела $V$ относительно оси $l$, проходящей через его центр тяжести $O(0, 0, 0)$ и образующей углы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ с осями координат, равен

$$I_l = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta - \\ - 2K_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma, \quad (5.199)$$

где $I_x$, $I_y$, $I_z$ — моменты инерции тела относительно осей координат, а

$$\left.\begin{aligned} K_{xy} &= \iiint\limits_V \delta xy\,dx\,dy\,dz, \\ K_{xz} &= \iiint\limits_V \delta xz\,dx\,dy\,dz, \\ K_{yz} &= \iiint\limits_V \delta yz\,dx\,dy\,dz \end{aligned}\right\} \quad (5.200)$$

— центробежные моменты.

**9. Вычисление потенциала поля тяготения.** Потенциалом $u(x, y, z)$ поля тяготения, или ньютоновым потенциалом тела $V$ в точке $P(x, y, z)$, называется интеграл

$$u(x, y, z) = \iiint\limits_V \delta(\xi, \eta, \zeta)\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}, \quad (5.201)$$

где $\delta = \delta(\xi, \eta, \zeta)$ — плотность тела, а

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}. \quad (5.202)$$

Материальная точка массы $m$ притягивается телом с силой $F$, проекции которой $X$, $Y$, $Z$ на оси координат $Ox$, $Oy$, $Oz$ равны

$$\left.\begin{aligned} X &= km\frac{\partial u}{\partial x} = km\iiint\limits_V \delta\frac{\xi - x}{r^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \\ Y &= km\frac{\partial u}{\partial y} = km\iiint\limits_V \delta\frac{\eta - y}{r^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \\ Z &= km\frac{\partial u}{\partial z} = km\iiint\limits_V \delta\frac{\zeta - z}{r^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \end{aligned}\right\} \quad (5.203)$$

где $k$ — постоянная тяготения.

**10. Вычисление работы, пути и силы давления.** 1°. Работа $A$ силы $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x)$ при перемещении материальной точки по прямой $Ox$ от $x=a$ до $x=b$ $(a<b)$, если направление силы совпадает с направлением оси $Ox$, равна

$$A=\int_a^b F(x)\,dx. \tag{5.204}$$

Работа $A$, которую производит сила $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ в пространственном силовом поле при перемещении материальной точки по кривой $l$, равна

$$A=\int_l \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}=\int_l X\,dx+Y\,dy+Z\,dz, \tag{5.205}$$

где $X(x,\ y,\ z)$, $Y(x,\ y,\ z)$, $Z(x,\ y,\ z)$ — проекции силы $\boldsymbol{F}$ на координатные оси.

В плоском силовом поле

$$A=\int_l X\,dx+Y\,dy, \tag{5.206}$$

где $X(x,\ y)$ и $Y(x,\ y)$ — проекции силы $\boldsymbol{F}$ на координатные оси.

2°. Путь $s$, пройденный точкой, движущейся прямолинейно со скоростью $v=v(t)$, за время от $t=t_0$ до $t=T$, равен

$$s=\int_{t_0}^{T} v(t)\,dt. \tag{5.207}$$

3°. Сила давления $p$, производимого жидкостью с удельным весом $\gamma$ на одну сторону погруженной в нее вертикальной пластинки, если расстояние $x$ точек пластинки до уровня жидкости изменяется от $x=a$ до $x=b$, а длина $y$ горизонтального сечения пластинки есть функция от $x$: $y=y(x)$, равна

$$p=\int_a^b \gamma x y(x)\,dx. \tag{5.208}$$

ГЛАВА VI

# НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА. ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА

## § 1. Несобственные интегралы

**1.** При определении интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, данном в гл. V, § 3, предполагалось, что отрезок интегрирования $[a, b]$ *конечен* и функция $f(x)$ непрерывна на этом отрезке или имеет *конечное* число точек разрыва первого рода. Распространение понятия определенного интеграла на тот случай, когда функция $f(x)$ имеет *произвольное множество* точек разрыва, оставаясь, однако, *ограниченной*, приводит к интегралу Римана (гл. V, § 3) и к дальнейшим его обобщениям, изучаемым в теории функций действительного переменного.

В настоящем параграфе рассматриваются случаи, когда или становится *бесконечным* интервал интегрирования, или подынтегральная функция перестает быть ограниченной; при этом она не ограничена в окрестности лишь *конечного* числа точек, которые могут быть как концами отрезка, так и его внутренними точками. Во всех этих случаях для определения интеграла нужно совершить еще один предельный переход. Интегралы, получающиеся в результате этого нового предельного перехода, называются *несобственными*; интегралы, понимаемые в обычном смысле, в дальнейшем называются *собственными*.

**2.** Пусть функция $f(x)$ определена в бесконечном полуинтервале $[a, +\infty)$ и собственно интегрируема на отрезке $[a, l]$, где $l$ — любое число, большее $a$.

*Несобственным интегралом* от функции $f(x)$ на полуинтервале $[a, +\infty)$ называется предел собственного интеграла, взятого по отрезку $[a, l]$ при условии, что $l$ стремится к бесконечности, т. е.

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{l\to\infty} \int_a^{l} f(x)\,dx, \tag{6.1}$$

где символ $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ является обозначением несобственного интеграла.

Если этот предел существует, то несобственный интеграл называется *сходящимся*. В противном случае интеграл *не существует* или *расходится*. При этом следует различать две возможности:

1) $\lim\limits_{l\to\infty} \int\limits_a^{l} f(x)\,dx$ равен $+\infty$ или $-\infty$,

2) $\int\limits_a^{l} f(x)\,dx$ вообще не стремится к пределу (ни к конечному, ни к бесконечному), т. е. является колеблющейся функцией от своего верхнего предела $l$.

Если первообразная функция $F(x)$ для функции $f(x)$ известна, то легко непосредственно проверить, является ли несобственный интеграл сходящимся или нет. Так как

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{l\to\infty} [F(l) - F(a)] = F(\infty) - F(a), \tag{6.2}$$

то вопрос о сходимости интеграла сводится к выяснению существования предела функции $F(x)$ при $x \to \infty$.

Пример 1.

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{l\to\infty} (-e^{-l} + 1) = 1,$$

следовательно, $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ сходится.

Пример 2.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{l \to \infty} \ln l = \infty.$$

Пример 3.

$$\int_0^\infty \sin x\, dx = \lim_{l \to \infty} (1 - \cos l) \text{ — не существует.}$$

Во втором и третьем примерах несобственный интеграл расходится, причем во втором примере он стремится к бесконечности, а в третьем колеблется между 0 и 2.

Геометрически несобственный интеграл рассматриваемого типа в случае его сходимости выражает площадь между кривой и ее асимптотой.

Аналогично определяется и несобственный интеграл на полуинтервале $(-\infty, a]$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \lim_{l \to -\infty} \int_{l}^{a} f(x)\, dx. \tag{6.3}$$

Если оба предела интегрирования бесконечны (при этом предполагается, что функция $f(x)$ определена на всей числовой оси и собственно интегрируема на любом конечном интервале), то, по определению,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx, \tag{6.4}$$

где $a$ — любое число, от выбора которого несобственный интеграл не зависит. Последнее определение можно записать также в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{\substack{l \to -\infty, \\ l' \to +\infty}} \int_{l}^{l'} f(x)\, dx, \tag{6.5}$$

причем предельные переходы $l \to -\infty$ и $l' \to +\infty$ совершаются *независимо* друг от друга. Если первообразная функция $F(x)$ известна и ее пределы при $x \to +\infty$ и

$x \to -\infty$ существуют, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(-\infty). \qquad (6.6)$$

Если хотя бы один из указанных пределов не существует, то интеграл расходится.

Пример. 4.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty) = \pi.$$

В приведенных примерах в случаях сходимости интеграла подынтегральная функция стремилась к нулю при $x \to \infty$. Однако это вовсе *не является необходимым условием* сходимости интеграла. Геометрически ясно, что если несобственный интеграл сходится и подынтегральная функция при этом стремится к какому-то пределу, то этим пределом может быть только нуль (то, что стремление подынтегральной функции к нулю не является достаточным условием сходимости интеграла, показывает пример 2).

Однако интеграл может сходиться и тогда, когда подынтегральная функция не стремится ни к какому пределу. Пример этого дают интегралы дифракции (*интегралы Френеля*)

$$\int_{0}^{\infty} \sin x^2\,dx = \int_{0}^{\infty} \cos x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Более того, можно показать, что, например, интеграл $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x}\,dx$ сходится несмотря на то, что подынтегральная функция, будучи все время положительной, даже не является ограниченной ($f(k\pi) = k\pi$). График этой функции имеет бесконечно большое число «шпилей», высота которых неограниченно возрастает, а ширина «основания» стремится к нулю. В точках, лежащих вне оснований указанных шпилей, функция очень быстро стремится к нулю при $x \to \infty$ (рис. 26).

В тех случаях, когда первообразная функция $F(x)$ неизвестна, исследование вопроса о сходимости интеграла может

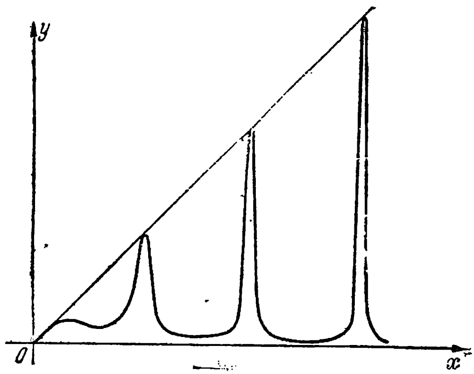


Рис. 26.

вызвать значительные затруднения. Обычно при таком исследовании пользуются признаками сходимости (или существования) несобственного интеграла.

**3.** В дальнейшем рассматривается лишь несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$, так как признаки сходимости в двух остальных случаях формулируются совершенно аналогично.

Сходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ эквивалентна сходимости интеграла $\int\limits_N^{\infty} f(x)\,dx$, где $N$ — любое число, большее $a$, так как разность этих интегралов есть собственный интеграл.

Признак сходимости Коши. Для сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы каждому сколь угодно малому положительному числу $\varepsilon$ можно было поставить в соответствие такое число $l$, чтобы при любых $q > p > l$ имело место неравенство

$$\left| \int_p^q f(x)\, dx \right| < \varepsilon. \tag{6.7}$$

Этот признак является непосредственным следствием общего признака Коши для сходимости числовых последовательностей.

Вообще, следует заметить, что между признаками сходимости несобственных интегралов и признаками сходимости числовых рядов (или последовательностей) имеется очень много общего. Сходимость несобственного интеграла с положительной подынтегральной функцией эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\, dx$, где $a_0 = a$ и последовательность $\{a_n\}$, монотонно возрастая, стремится к бесконечности (в остальном выбор последовательности $\{a_n\}$ произволен). Это следует из монотонного возрастания интеграла $\int\limits_a^l f(x)\, dx$ вместе с возрастанием $l$, вследствие чего для любого числа $l$ можно указать такое $k$, что

$$s_k \leqslant \int_a^l f(x)\, dx \leqslant s_{k+1},$$

где $s_k$ — частичная сумма ряда. Условие положительности подынтегральной функции при этом существенно, что показывает пример интеграла $\int\limits_0^{\infty} \sin x\, dx$, который расходится, в то время как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \sin x\, dx = 0.$$

В этом примере легко усмотреть аналогию с расходящимся рядом $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, который после объединения двух соседних членов становится сходящимся.

Так же как и при изучении числовых рядов, важную роль играет понятие *абсолютной сходимости* несобственных интегралов. Несобственный интеграл называется *абсолютно сходящимся*, если он сходится после замены подынтегральной функции $f(x)$ ее абсолютной величиной, т. е. если $\int\limits_0^\infty |f(x)|\,dx$ сходится.

*Всякий абсолютно сходящийся интеграл сходится.* Это следует из неравенства

$$\left|\int\limits_p^q f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_p^q |f(x)|\,dx$$

и признака сходимости Коши.

Интеграл, который сходится, но не сходится абсолютно, называется *условно сходящимся.*

Признаки абсолютной сходимости интеграла, как правило, основаны на том, что если $\int\limits_a^l |f(x)|\,dx$ остается ограниченным при $l \to \infty$, то в силу признака сходимости Вейерштрасса он сходится.

Признаки сравнения. 1°. *Предположим, что для всех значений $x > N \geqslant a$ выполняется неравенство*

$$|f(x)| \leqslant |\varphi(x)|.$$

*Если второй из интегралов $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$ абсолютно сходится, то абсолютно сходится и первый. Если первый интеграл не сходится абсолютно, то и второй не может абсолютно сходиться.*

2°. *Если функция $\varphi(x)$ не меняет знака при достаточно больших $x$ и*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A \neq 0, \tag{6.8}$$

*то либо оба интеграла абсолютно сходятся, либо они оба расходятся.*

Признак 2° на практике обычно оказывается более удобным, чем признак 1°. В качестве функции сравнения чаще всего употребляют функцию $\frac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$. Для этой функции $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ $(a > 0)$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Если функция $f(x)$ имеет вид $\frac{\psi(x)}{x^\alpha}$, где $\psi(x)$ — функция, ограниченная при $x \to \infty$, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ $(a > 0)$ абсолютно сходится при $\alpha > 1$. Если же $\alpha \leqslant 1$ и функция $\psi(x)$ сохраняет постоянный знак и не стремится к нулю, то указанный интеграл расходится.

Пользуясь приведенным признаком, можно установить, например, сходимость интегралов $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$, $\int\limits_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx$ при $n > 0$, $a > 0$. Применяя этот же признак, можно установить, что интегралы $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$ и $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x\,dx}{x(1+\sqrt{x})}$ сходятся абсолютно и т. д. В применении к интегралу $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ признак ответа не дает, так как хотя $\alpha = 1$, но функция $\sin x$ меняет знак.

Особенно просто применяется указанный признак, если $f(x)$ — рациональная функция; в этом случае для сходимости интеграла необходимо и достаточно, чтобы степень знаменателя была больше степени числителя по крайней мере *на две единицы*.

Признаки неабсолютной сходимости интеграла. 1°. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в полуинтервале $[a, \infty)$, причем $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится, а $g(x)$ монотонна и ограничена. Тогда $\int\limits_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx$ сходится.*

Действительно, в силу второй теоремы о среднем (см. гл. V, § 3)

$$\int_p^q f(x)\,g(x)\,dx = g(p)\int_p^\xi f(x)\,dx + g(q)\int_\xi^q f(x)\,dx,$$

где $p < \xi < q$. Из признака Коши, примененного к сходящемуся интегралу $\int_a^\infty f(x)\,dx$, вытекает приведенный признак.

2°. *Если функция $f(x)$ собственно интегрируема на любом отрезке $[a, l]$ $(l > a)$ и интеграл $\left|\int_a^l f(x)\,dx\right| < M$, где $M$ — постоянная, а функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to \infty$, то интеграл $\int_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx$ сходится.*

Оба приведенных признака являются аналогами признаков сходимости *Абеля* и *Дирихле* для числовых рядов. В силу признака 2° сходятся, например, интегралы

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx \quad \text{при } \alpha > 0.$$

В частности, при $\alpha = 1$ получаем сходимость интеграла $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ (*интеграл Дирихле*), который равен

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{6.9}$$

Докажем, что этот интеграл сходится условно, т. е. что $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ расходится. Воспользуемся сделанным выше замечанием и рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$. Оценивая произвольный член этого ряда

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx > \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{(n+1)\pi},$$

убедимся, что он больше члена расходящегося ряда $\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

При исследовании интегралов, содержащих периодические функции, часто оказывается полезным следующий признак.

3°. Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a, \infty)$ и имеет период $\omega > 0$, а функция $g(x)$ монотонна и стремится к нулю при $x \to \infty$.

Если $\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx = 0$, то $\int_0^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ сходится. Если $\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx \neq 0$, то $\int_0^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ сходится или расходится вместе с интегралом $\int_0^{\infty} g(x)\,dx$.

Дополнительные замечания. Многие несобственные интегралы в случаях, когда соответствующая первообразная функция не выражается через элементарные, могут быть вычислены при помощи специальных приемов (к числу наиболее важных из них относятся интегрирование и дифференцирование по параметру (см. § 2, пп. 3, 4) и применение теории вычетов).

Некоторые несобственные интегралы могут быть сведены к *интегралам Фруллани*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx \qquad (a > 0,\ b > 0), \tag{6.10}$$

которые легко вычисляются при следующих предположениях относительно функции $f(x)$.

1°. Если $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant 0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = f(\infty)$, то

$$I = [f(0) - f(\infty)] \ln \frac{b}{a}. \tag{6.11}$$

2°. Если $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant 0$ и интеграл $\int\limits_A^\infty \frac{f(x)}{x} dx$ сходится при любом $A > 0$, то

$$I = f(0) \ln \frac{b}{a}. \tag{6.12}$$

**4. Интегралы от неограниченных функций.** При рассмотрении интегралов от неограниченных функций достаточно ограничиться случаем, когда на отрезке $[a, b]$ имеется только одна точка бесконечного разрыва; в противном случае отрезок $[a, b]$ следует разбить на части, каждая из которых будет содержать только одну точку указанного типа.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, за исключением одной его точки $c$ $(a \leqslant c \leqslant b)$, при приближении к которой она неограниченно возрастает. Точку $c$ будем называть *особенной.*

*Несобственным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется сумма пределов собственных интегралов, взятых по отрезкам $[a, c - \delta']$ и $[c + \delta'', b]$, при условии, что $\delta'$ и $\delta''$ стремятся к нулю независимо друг от друга:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta' \to 0} \int\limits_a^{c-\delta'} f(x)\,dx + \lim_{\delta'' \to 0} \int\limits_{c+\delta''}^b f(x)\,dx. \tag{6.13}$$

Если точка $c$ совпадает с концом отрезка $a$, то остается только второй предел, а если с концом $b$, то — первый.

Если оба указанных предела существуют, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; в противном случае — *расходящимся.* Согласно этому определению $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-c)^\alpha}$ сходится и равен $\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(b-c)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(a-c)^{\alpha-1}}\right]$, если $\alpha < 1$, и расходится, если $\alpha \geqslant 1$.

Так же как и раньше, вопрос о сходимости интеграла может быть легко решен, если известна первообразная функция $F(x)$. Именно, имеет место

Теорема 1. *Если функция $F(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, включая особенную точку $c$, то несобственный интеграл сходится и*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{6.14}$$

*т. е. справедлива формула Ньютона — Лейбница.*

В приложениях чаще всего встречаются случаи, когда при стремлении $x$ к $c$ справа или слева функция $f(x)$ стремится к бесконечности определенного знака. При этом условии, *если несобственный интеграл сходится, то он сходится абсолютно*, т. е. сходится и интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Геометрический смысл несобственных интегралов указанного типа показан на рис. 27. Если несобственный

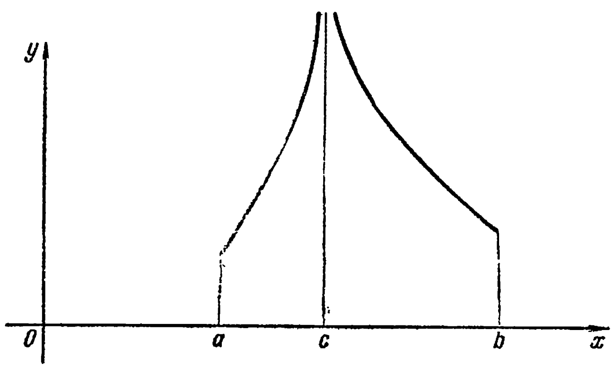


Рис. 27.

интеграл сходится, то площади, заключенные между графиком функции и его асимптотой, имеют конечные значения.

Признаки сходимости интегралов от неограниченных функций аналогичны соответствующим признакам для интегралов с бесконечными пределами. Так как определение несобственного интеграла в случае, когда $c$ — внутренняя точка отрезка, требует существования интегралов на обоих полуинтервалах $[a, c)$ и $(c, b]$, то при формулировках признаков сходимости достаточно ограничиться рассмотрением одного из случаев. В дальнейшем будем считать, что особенной точкой является правый конец.

Признак Коши. Для сходимости интеграла $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы каждому сколь угодно малому числу $\varepsilon > 0$ можно было поставить в соответствие такое число $\delta$, чтобы при всех $\delta' < \delta$ и $\delta'' < \delta$ имело место неравенство

$$\left| \int\limits_{c-\delta'}^{c-\delta''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon. \tag{6.15}$$

Признаки сравнения. 1° Если, исключая особенную точку $c$,

$$|f(x)| \leqslant |\varphi(x)|,$$

то из абсолютной сходимости $\int\limits_a^c \varphi(x)\,dx$ следует абсолютная сходимость $\int\limits_a^c f(x)\,dx$; если же интеграл от $f(x)$ не сходится абсолютно, то и интеграл от $\varphi(x)$ не может абсолютно сходиться.

2°. Если $\varphi(x)$ не меняет знака при $x \to c$ и

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A \neq 0,$$

то оба интеграла одновременно или абсолютно сходятся, или расходятся.

3°. Если $f(x) = \dfrac{\psi(x)}{(c-x)^\alpha}$ и $\psi(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a, c]$, причем $\psi(c) \neq 0$, то интеграл сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Если на интервале интегрирования, который может быть и бесконечным, имеется конечное число особенных точек, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ определяется как сумма несобственных интегралов, взятых по интервалам, каждый из которых содержит лишь одну особенную точку (если крайние интервалы полубесконечны, то предполагается, что на них особенных точек нет). Если в окрестности каждой особенной точки и на бесконечности выполняются условия признака Коши, то интеграл будет сходящимся и его величина не будет зависеть от способа разбиения интервала на части.

Пример 5. Интегралом

$$\int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx \qquad (a>0) \tag{6.16}$$

определяется так называемая *гамма-функция Эйлера* $\Gamma(a)$. Представив его в виде $\int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty$, легко убедиться в сходимости обоих интегралов. Первый интеграл сходится в силу свойства 3°, а во втором подынтегральная функция $x^{a-1}e^{-x} < \frac{1}{x^2}$.

**5.** Ввиду того, что общие свойства несобственных интегралов относятся к интегралам обоих типов, в дальнейшем употребляется запись $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, при этом, подразумевается, что $a$ может быть равно $-\infty$, а $b$ может быть равно $+\infty$.

На несобственные интегралы без всяких изменений переносятся свойства а) — ж) гл. V, § 3 (при этом предполагается, что все интегралы, находящиеся в правых частях, сходятся).

Если $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, то $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(x)\,dx$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Если при этом $b = +\infty$, то это означает, что существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \Phi(+\infty)$.

Если в точке $x_0$ функция $f(x)$ непрерывна, то

$$\Phi'(x_0) = f(x_0).$$

Первая теорема о среднем на несобственные интегралы не переносится, а вторая по-прежнему имеет место в следующем виде.

*Если $f(x)$ монотонна и ограничена на отрезке $[a, b]$, а $g(x)$ интегрируема, то $f(x)g(x)$ также интегрируема и*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx. \qquad (6.17)$$

**6. Интегрирование по частям. Замена переменных.** Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, производные которых $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют всюду, кроме конечного числа точек, причем производные имеют, быть может, изолированные точки разрыва. Тогда равенство

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = [f(x)\varphi(x)]_a^b - \int_a^b \varphi(x)f'(x)\,dx \qquad (6.18)$$

(где $a$ и $b$ могут обращаться в $-\infty$ и $+\infty$) справедливо, если любые два из трех членов формулы имеют определенное значение.

Пример 6. Интеграл, определяющий гамма-функцию Эйлера $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx$, легко вычисляется, если $a$ — целое число ($a = n$):

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx = -[x^{n-1}e^{-x}]_0^\infty + (n-1)\int_0^\infty x^{n-2}e^{-x}\,dx,$$

т. е.

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1). \qquad (6.19)$$

Продолжая интегрирование по частям, получим

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad (6.20)$$

Формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \qquad (6.21)$$

где $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, имеет место, если производная $\varphi'(t)$ непрерывна и отлична от нуля внутри интервала $(\alpha, \beta)$. На концах этого интервала как сама функция $\varphi(t)$, так и ее производная $\varphi'(t)$ могут иметь разрывы.

Правило сохраняется, если $\alpha$ и $\beta$ обращаются в бесконечность; при этом как $a = \lim\limits_{t \to \alpha} \varphi(t)$, так и $b = \lim\limits_{t \to \beta} \varphi(t)$ также могут обращаться в бесконечность. Пределы эти, конечные или бесконечные, всегда существуют, так как функция $\varphi(t)$ монотонна.

Пример 7. С помощью этого правила подстановкой можно установить сходимость интегралов дифракции

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt;$$

интеграл в правой части сходится на основании аналога признака Дирихле.

С помощью соответствующих подстановок интегралы от неограниченных функций часто сводятся к интегралам по бесконечным интервалам.

**7.** В некоторых случаях несобственные интегралы могут быть определены (а иногда и приближенно вычислены) при помощи бесконечных сумм специального вида.

Пусть $f(x)$ непрерывна и монотонна в интервале $(0, 1)$, концы которого могут быть особенными точками.

Если несобственный интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ сходится, то

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right). \quad (6.22)$$

Если функция $f(x)$ монотонна при $x \geqslant 0$ и интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ сходится, то

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{h \to +0} h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh). \quad (6.23)$$

**8. Главное значение интеграла.** Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет одну особенную точку $c$.

Если оба предела

$$\lim_{\delta\to 0}\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx \text{ и } \lim_{\delta'\to 0}\int_{c+\delta'}^{b} f(x)\,dx$$

не существуют, то $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *особым*.

Во многих случаях оказывается возможным придать этому не существующему в обычном смысле интегралу вполне определенное значение.

Определение. *Главным значением по Коши особого интеграла* называется предел (если он существует)

$$\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx\right\}. \tag{6.24}$$

Главное значение особого интеграла обычно обозначается тем же символом, что и сам интеграл:

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

так как если интеграл собственный или несобственный, но сходящийся, то его главное значение совпадает со значением самого интеграла.

Примечание. В более ранних работах для обозначения главного значения особого интеграла применялись символы: $p\int$ или v. p. $\int$ (valeur principale).

Главное значение особого интеграла не может существовать, если функция $f(x)$ при $x\to c\pm 0$ стремится к бесконечности *одного знака*. Также, если не существует *только один* из двух пределов, то предел, определяющий главное значение интеграла, не существует.

Обычно рассматриваются лишь такие функции, которые при $x \to c$ слева и справа стремятся к бесконечности определенного знака (рис. 28). В этом случае смысл главного значения интеграла как раз в том и заключается, что оба слагаемых стремятся к бесконечностям разных знаков, а сумма их — к вполне определенному пределу.

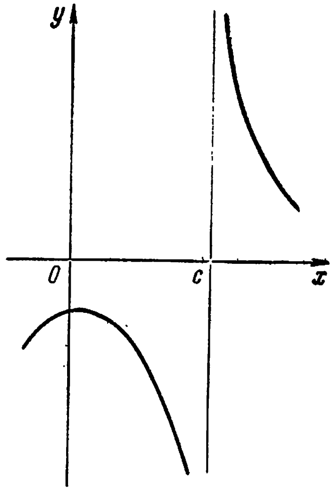


Рис. 28.

В качестве примера рассмотрим особый интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}, \quad a < c < b.$$

Этот интеграл в обычном смысле расходится, так как

$$\int_a^{c-\delta'} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\delta''}^b \frac{dx}{x-c} = \\ = \ln\frac{b-c}{c-a} + \ln\frac{\delta'}{\delta''}$$

и предел второго слагаемого зависит от способа стремления $\delta'$ и $\delta''$ к нулю. Главное же значение интеграла существует, так как

$$\lim_{\delta\to 0}\left[\int_a^{c-\delta} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\delta}^b \frac{dx}{x-c}\right] = \ln\frac{b-c}{c-a}.$$

Таким же образом можно доказать, что существует главное значение интеграла $\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}$, если $n$ — *нечетное* число. Если же $n$ — *четное* число, то главное значение интеграла не существует, так как при $x \to c \pm 0$ функция $\frac{1}{(x-c)^n}$ стремится к $+\infty$.

В приложениях часто встречаются интегралы типа

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}\,dx.$$

Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера[1]), то главное значение этого интеграла существует и

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}\,dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}\,dx + \varphi(c)\ln\frac{b-c}{c-a},$$

где несобственный интеграл в правой части сходится.

Аналогично, главное значение интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ определяется как предел (если он существует)

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f(x)\,dx.$$

При этом предполагается, что функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном интервале.

Часто приходится рассматривать интегралы, в которых главное значение понимается сразу в обоих смыслах.

Например,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x-c} = \lim_{\substack{N\to\infty\\ \delta\to 0}}\left[\int_{-N}^{c-\delta} + \int_{c+\delta}^{N}\right] = 0.$$

Здесь имеется следующее достаточное условие существования главного значения интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{x-c}\,dx.$

Если $f(x)$ в окрестности точки $c$ удовлетворяет условию Гёльдера, а при больших значениях $|x|$ имеет вид

$$f(x) = A + O\left(\frac{1}{|x|^{\mu}}\right)^{2)} \quad (\mu > 0), \tag{6.25}$$

то главное значение интеграла существует.

---

[1]) Функция $\varphi(x)$ называется удовлетворяющей *условию Гёльдера* на отрезке $[a, b]$, если для любых двух точек $x_1$ и $x_2$ этого отрезка

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| < A\,|x_2 - x_1|^{\alpha},$$

где $A > 0$ и $0 < \alpha \leqslant 1$. Иногда это условие называют *условием Липшица порядка* $\alpha$ и пишут $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$.

[2]) Отсюда, между прочим, следует, что при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ функция $f(x)$ стремится к одному и тому же пределу $A$.

**9.** *Несобственные двойные интегралы* получаются аналогично случаю обыкновенных интегралов, если рассматривать бесконечные области интегрирования или неограниченные функции; интегралы, понимаемые в смысле § 4, в дальнейшем называются *собственными*.

Пусть область интегрирования $D$ простирается в бесконечность во всех направлениях или же в некоторых (например, полоса или угол между двумя прямыми), а функция $f(x, y)$ *неотрицательна* в этой области и *собственно интегрируема* в любой ее конечной части.

*Несобственным интегралом* $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ называется предел собственного интеграла, взятого по любой конечной части $D'$ области $D$ при условии, что $D'$ стремится к $D$:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{D' \to D} \iint\limits_{D'} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (6.26)$$

При этом $D'$ может стремиться к $D$ произвольным образом: либо сразу во всех направлениях, либо же в различных направлениях последовательно. Из условия неотрицательности функции $f(x, y)$ следует, что если предел (конечный или бесконечный) существует для какой-либо одной последовательности областей $\{D'\}$, то он существует и для любой другой последовательности и эти пределы равны между собой. Если этот предел конечный, то интеграл называется *сходящимся*; в противном случае — *расходящимся*.

Рассмотрение *неположительной* функции приводится к предыдущему изменением знака. Пусть функция $f(x, y)$ *не сохраняет* постоянного знака. Тогда интеграл

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$$

*считается существующим только тогда, когда он абсолютно сходится*, т. е. когда существует интеграл

$$\iint |f(x, y)|\,dx\,dy.$$

Если это условие выполнено, то предельный переход может совершаться произвольным образом.

На двойные несобственные интегралы не распространяется понятие условной сходимости. Положим $f(x, y) = f^+ - f^-$, где $f^+ = f$, если $f > 0$, и $f^+ = 0$, если $f \leqslant 0$; аналогично $f^- = -f$, если $f < 0$, и $f^- = 0$, если $f \geqslant 0$. Тогда

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_D f^+(x, y)\,dx\,dy - \iint_D f^-(x, y)\,dx\,dy, \tag{6.27}$$

а

$$\iint_D |f(x, y)|\,dx\,dy = \iint_D f^+\,dx\,dy + \iint_D f^-\,dx\,dy. \tag{6.28}$$

Если интегралы от функций $f^+$ и $f^-$ существуют, то интеграл сходится, и к тому же абсолютно. Если один из указанных интегралов расходится (при этом обязательно к бесконечности), то данный интеграл тоже расходится к бесконечности определенного знака. Если оба интеграла от функций $f^+$ и $f^-$ расходятся, то их разность *неопределенна*. Если при этом функция $f(x, y)$ ограничена, то всегда можно подобрать такую последовательность областей $D' \to D$, что предел $\iint_{D'} f(x, y)\,dx\,dy$ окажется равным любому наперед заданному числу (*аналог теоремы Римана* для условно сходящихся рядов).

Пусть теперь область интегрирования $D$ конечна и ограничена квадрируемым контуром $C$, а функция $f(x, y)$ *неотрицательна* и имеет точки или линии разрыва, которые удовлетворяют условиям, приведенным в гл. V, § 4, но в окрестности которых функция уже может быть неограниченной. Такие точки разрыва, как и раньше, называются *особенными*. Полагают, по определению,

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{D' \to D} \iint_{D'} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{6.29}$$

где область $D'$ получена из области $D$ исключением всех особенных точек и линий; при этом изолированные особенные точки и линии разрыва, не разбивающие область $D$, окружают замкнутыми контурами, а линии разрыва, разбивающие область, — двумя бесконечно близкими контурами. Как и в случае бесконечной области, из условия неотрицательности функции $f(x, y)$ следует, что предел в правой части не зависит от способа стремления $D'$ к $D$ и для его существования достаточно потребовать *ограниченности* интеграла по любой области $D'$.

Если функция $f(x, y)$ переменного знака, то несобственный двойной интеграл от нее считают существующим только тогда, когда сходится $\iint\limits_D |f(x, y)|\,dx\,dy$. На несобственные интегралы по конечным областям понятие условной сходимости также не распространяется.

Пример 8. Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_D \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}\,dx\,dy,$$

где $D$ — прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Выделим начало координат, отсекая маленький прямоугольник прямыми $x = \alpha$, $y = \beta$. Тогда, обозначая через $D'$ оставшуюся область, найдем, что

$$\iint\limits_{D'} \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}\,dx\,dy = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Предел этого двойного интеграла зависит от предела отношения $\frac{\beta}{\alpha}$ при $\alpha$ и $\beta$, стремящихся к нулю, т. е. интеграл расходится.

Сведение несобственных двойных интегралов к двукратным в обоих рассмотренных выше случаях основано на следующем правиле.

*Если функция $f(x, y)$ не изменяет знака в области $D$, то несобственный двойной интеграл приводится к двукратному интегралу по обычному правилу, если только интегрирование по одной из переменных приводит к такой функции от второй переменной, которая была бы интегрируемой собственно или несобственно.*

Если $f(x, y)$ изменяет знак в области $D$, то для того, чтобы убедиться в законности сведения к двукратному интегралу, достаточно разложить область $D$ на части, в каждой из которых функция знакопостоянна, и проверить выполнение условий приведенного правила в каждой из них.

Формула преобразования двойных интегралов

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Delta} |I|\,\Phi(u, v)\,du\,dv \qquad (6.30)$$

имеет тот же смысл, что и формула (5.110), т. е. если существует один из интегралов, то существует и второй и они равны. При этом области $D$ и $\Delta$ могут быть как конечными, так и бесконечными.

С помощью преобразования к полярным координатам устанавливается, что если область $D$ бесконечна, не содержит начала координат и подынтегральная функция имеет вид

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{(x^2 + y^2)^{\alpha}}, \qquad 0 < m < |\psi(x, y)| < M, \quad (6.31)$$

то интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Наоборот, если область интегрирования конечна и функция имеет только одну особенную точку, например начало координат, в окрестности которой она имеет вид (6.31), то интеграл сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Если от функции $\psi(x, y)$ требовать только ее ограниченности, т. е. $|\psi(x, y)| < M$, то интеграл сходится, если $\alpha > 1$ в первом случае и $\alpha < 1$ во втором.

Пользуясь этими признаками, можно доказать, например, что сходятся следующие интегралы:

$\iint\limits_{D} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, взятый по любой бесконечной области;

$\iint\limits_{D} (x+y)\,e^{-(x+y)}\,dx\,dy$, взятый по первому квадранту $x > 0$, $y > 0$;

интеграл $\iint\limits_{D} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, взятый по кругу $x^2 + y^2 \leqslant 1$, сходится, а интеграл $\iint\limits_{D} \frac{e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, взятый по той же области, расходится.

Пример 9. Вычислим, переходя к полярным координатам, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$.

Выбирая в качестве последовательности областей $D'$ круги радиуса $R$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dy = \lim_{R\to\infty}\left[\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} e^{-r^2} r\,dr\right] = \pi.$$

Взяв области $D'$ в виде квадратов $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$, в силу независимости перехода к пределу найдем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \pi,$$

т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{6.32}$$

Последний интеграл играет большую роль в теории вероятностей и называется *интегралом Пуассона.*

Если функция $f(x, y)$ обращается в бесконечность при приближении к границе области, то часто можно воспользоваться следующим признаком.

*Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области $D$: $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant g(x)$, где $g(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, то интеграл*

$$\iint\limits_D \frac{\psi(x, y)}{[g(x)-y]^\alpha}\,dx\,dy, \quad 0 < m < |\psi(x, y)| < M,$$

*сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.*

Несобственные кратные интегралы, где число переменных больше двух, определяются совершенно аналогично тому, как и двойные. Отметим для них достаточные условия сходимости.

*Интеграл*

$$\underbrace{\int\int \ldots \int}_{n} \frac{\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^\alpha}\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n, \tag{6.33}$$

*где* $|\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)| < M$, *взятый по бесконечной области, не содержащей начало координат, сходится, если* $\alpha > \frac{n}{2}$; *тот же интеграл, взятый по любой конечной области, содержащей начало координат, сходится, если* $\alpha < \frac{n}{2}$.

## § 2. Предельный переход под знаком интеграла. Интегралы, зависящие от параметра

**1.** Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность функций, определенных на одном и том же отрезке $[a, b]$. Можно ли из сходимости этой последовательности заключить о сходимости последовательностей $\left\{\int\limits_a^b f_n(x)\,dx\right\}$ или $\left\{\int\limits_a^x f_n(t)\,dt\right\}$ $(a \leqslant x \leqslant b)$? Существует ли, если последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\left\{\int\limits_a^b f_n(x)\,dx\right\}$ сходятся, связь между их пределами? Эти вопросы обычно называют вопросами о возможности предельного перехода под знаком интеграла.

Простые примеры показывают, что сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ в каждой точке отрезка не обеспечивает сходимости последовательности интегралов $\left\{\int\limits_a^b f_n(x)\,dx\right\}$.

Пример 10. Определим члены последовательности $\{f_n(x)\}$ на отрезке $[0, 1]$, как показано на рис. 29, т. е.

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 2n^2 - n^3x & \text{при } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{при } \frac{2}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в каждой точке отрезка $[0, 1]$, потому что для любой точки $x$, кроме $x = 0$, найдется такое $N$, что для всех $n > N$ имеем $x > \frac{2}{n}$, откуда следует, что $f_n(x) = 0$ при $n > N$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, что выполняется также и для $x = 0$, так как $f_n(0) = 0$ при всех $n$.

С другой стороны, интеграл

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^3 x\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} (2n^2 - n^3 x)\,dx = n,$$

откуда вытекает, что последовательность $\left\{\int_0^1 f_n(x)\,dx\right\}$ расходится.

Так же просто указать пример последовательности $\{f_n(x)\}$, сходящейся в каждой точке, для которой последовательность интегралов $\left\{\int_a^b f_n(x)\,dx\right\}$ сходится, но

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \neq \int_a^b \left\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\} dx.$$

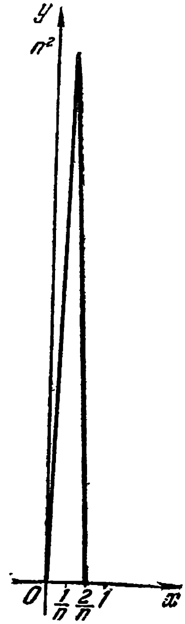

Рис. 29.

Пример 11. Пусть дана последовательность функций, определенных, как на рис. 29, но со значением в точке $\frac{1}{n}$, равным $n$, а не $n^2$, т. е.

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2 x & \text{при } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{при } \frac{2}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Как и выше, легко доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ в каждой точке отрезка $[0, 1]$ и, следовательно,

$$\int_0^1 \left\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\} dx = 0.$$

Однако

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} (2n - n^2 x)\,dx = 1,$$

вследствие чего $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 1.$

Итак, сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ в каждой точке отрезка не гарантирует допустимости предельного перехода под знаком интеграла, для этого необходимы более жесткие требования.

Для интеграла Римана возможность предельного перехода под знаком интеграла гарантируется равномерной сходимостью.

Теорема 2. *Если последовательность функций* $\{f_n(x)\}$, *непрерывных на отрезке* $[a, b]$, *равномерно сходится на этом отрезке к функции* $f(x)$, *то последовательность функций* $\left\{\int\limits_a^x f_n(t)\,dt\right\}$ *равномерно сходится на отрезке* $[a, b]$ *к функции* $\int\limits_a^x f(t)dt$.

Рассматривая функции $f_n(x)$ как частичные суммы функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, можно вывести следующее утверждение.

Теорема 3. *Если функции последовательности* $\{u_n(x)\}$ *непрерывны при* $a \leqslant x \leqslant b$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на* $[a, b]$ *к функции* $f(x)$, *то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)\,dt \tag{6.34}$$

*также равномерно сходится при* $a \leqslant x \leqslant b$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{6.35}$$

*В частности,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{6.36}$$

*Так как ряд положительных непрерывных функций, имеющих непрерывную сумму, всегда сходится равномерно, то такой ряд всегда можно интегрировать почленно.*

**2.** Интегралы от функций последовательности $\int_a^b f_n(x)\,dx$ являются частным случаем *интегралов* $\int_a^b f(x, \alpha)\,dx$, *зависящих от параметра.*

Пусть $f(x, \alpha)$ — функция переменного $x$ и параметра $\alpha$, определенная в замкнутом прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$. Интегрируя эту функцию по переменному $x$ по отрезку $[a, b]$, получим интеграл, который называют *интегралом, зависящим от параметра.*

*Интеграл*

$$\int_a^b f(x, \alpha)\,dx = F(\alpha), \tag{6.37}$$

*зависящий от параметра, есть функция параметра* $\alpha$. Важным способом аналитического задания функции является ее задание с помощью интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 4. *Если функция* $f(x, \alpha)$ *непрерывна в замкнутом прямоугольнике* $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, *то интеграл* $F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\,dx$, *зависящий от параметра, есть непрерывная функция параметра* $\alpha$ *на отрезке* $[\alpha_0, \alpha_1]$.

Возможность дифференцирования интеграла по параметру устанавливается следующей теоремой.

Теорема 5 (правило Лейбница). *Если функция $f(x, \alpha)$ имеет частную производную по $\alpha$, непрерывную в замкнутом прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, то интеграл $F(\alpha) = \int\limits_a^b f(x, \alpha)\,dx$, зависящий от параметра, есть дифференцируемая функция параметра $\alpha$ и его производная может быть получена путем дифференцирования по параметру под знаком интеграла.*

Иначе говоря, справедлива формула

$$F'(\alpha) = \int\limits_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\,dx. \tag{6.38}$$

Применение правила Лейбница может облегчить вычисление некоторых определенных интегралов.

Пример 12. Известно, что

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{1}{a}.$$

Считая $a$ параметром и дифференцируя это равенство по $a$, причем интеграл слева дифференцируется по параметру $a$ под знаком интеграла, найдем

$$\int\limits_0^1 \frac{-2a\,dx}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{a^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \frac{1}{1 + \frac{1}{a^2}} \frac{1}{a^2},$$

откуда

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2(a^2 + 1)}.$$

Аналогично после следующего дифференцирования находим

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{1}{a} + \frac{3}{8a^4(a^2 + 1)} + \frac{1}{4a^2(a^2 + 1)^2}$$

и т. д., таким образом, с помощью дифференцирования по $a$ можно получить значение интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ при любом целом $n$.

Правило Лейбница может быть распространено также и на более сложный случай, когда пределы интегрирования также зависят от параметра $\alpha$.

Теорема 6. *Если*

$$F(\alpha) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x, \alpha)\,dx,$$

*где функция* $f(x, \alpha)$ *имеет частную производную по* $\alpha$, *непрерывную при* $\varphi(\alpha) \leqslant x \leqslant \psi(\alpha)$, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, *а функции* $\varphi(\alpha)$ *и* $\psi(\alpha)$ *непрерывны и непрерывно дифференцируемы при* $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, *то функция* $F(\alpha)$ *дифференцируема и*

$$F'(\alpha) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha)\,dx + f[\psi(\alpha), \alpha]\,\psi'(\alpha) - f[\varphi(\alpha), \alpha]\,\varphi'(\alpha). \quad (6.39)$$

Возможность интегрирования по параметру под знаком интеграла обеспечивается существованием двойного интеграла от функции $f(x, \alpha)$ по рассматриваемому прямоугольнику (см. § 4). В этом случае

$$\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left( \int\limits_a^b f(x, \alpha)\,dx \right) d\alpha = \int\limits_a^b \left( \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\,d\alpha \right) dx. \quad (6.40)$$

**3.** Правила и утверждения, сформулированные в п. 2, справедливы без дополнительных оговорок лишь для *собственных* (см. § 1) интегралов. Для интегралов с бесконечными пределами или для функций, не ограниченных на участке интегрирования, необходимы дополнительные предположения.

В случае несобственных интегралов, зависящих от параметра, с бесконечными пределами можно, как было указано в § 1, ограничиться рассмотрением лишь интеграла с бесконечным *верхним* пределом

$$F(\alpha)=\int_a^\infty f(x,\ \alpha)\,dx. \qquad (6.41)$$

Предположим, что функция $f(x,\ \alpha)$ определена при $x \geqslant a$, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ и несобственный интеграл $F(\alpha)$ существует для всех $\alpha$ на отрезке $[\alpha_0,\ \alpha_1]$. Несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ называется *равномерно сходящимся относительно параметра $\alpha$ на отрезке* $[\alpha_0,\ \alpha_1]$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $A \geqslant a$, что

$$\left|\int_c^\infty f(x,\ \alpha)\,dx\right| < \varepsilon \qquad (6.42)$$

для всех $c > A$ при любом $\alpha$ из отрезка $[\alpha_0,\ \alpha_1]$.

Определение равномерно сходящегося интеграла представляет аналогию с определением равномерно сходящегося ряда. Более того, *равномерно сходящийся несобственный интеграл может быть представлен в виде суммы ряда равномерно сходящихся собственных интегралов*. Указанная аналогия облегчает установление следующих свойств равномерно сходящихся несобственных интегралов.

а) *Если несобственный интеграл*

$$F(\alpha)=\int_a^\infty f(x,\ \alpha)\,dx, \qquad (6.43)$$

*где $f(x,\ \alpha)$ определена и непрерывна при $x \geqslant a$, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, существует и равномерно сходится на отрезке* $[\alpha_0,\ \alpha_1]$, *то он является непрерывной функцией параметра $\alpha$.*

б) *При тех же предположениях справедливо равенство*

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^\infty f(x,\ \alpha)\,dx = \int_a^\infty dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\ \alpha)\,d\alpha, \qquad (6.44)$$

*причем существование интеграла справа гарантируется.*

в) *Если функция* $f(x, \alpha)$ *удовлетворяет предыдущим условиям и обладает частной производной по* $\alpha$, *непрерывной при* $x \geqslant a$, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, *причем несобственный интеграл* $\int\limits_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\,dx$ *существует и равномерно сходится, то несобственный интеграл* (6.43), *зависящий от параметра, имеет на отрезке* $[\alpha_0, \alpha_1]$ *непрерывную производную по* $\alpha$, *которая может быть получена дифференцированием по параметру под знаком интеграла*

$$F'(\alpha) = \int\limits_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\,dx. \tag{6.45}$$

Для установления равномерной сходимости несобственного интеграла достаточно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 7. *Если существует функция* $\varphi(x)$, *для которой сходится интеграл* $\int\limits_a^\infty |\varphi(x)|\,dx$, *и для всех* $x \geqslant a$ *и всех* $\alpha$ *из отрезка* $[\alpha_0, \alpha_1]$ *выполняется неравенство* $|f(x, \alpha)| \leqslant |\varphi(x)|$, *то несобственный интеграл* $\int\limits_a^\infty f(x, \alpha)\,dx$ *равномерно сходится относительно* $\alpha$ *на отрезке* $[\alpha_0, \alpha_1]$.

Пример 13. Интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x} \sin \alpha x\,dx$ сходится равномерно относительно $\alpha$ на любом отрезке, потому что

$$|e^{-x} \sin \alpha x| \leqslant e^{-x}$$

и интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx$ существует, как это показано в § 1. Непосредственным интегрированием получаем

$$\int\limits_0^\infty e^{-x} \sin \alpha x\,dx = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}. \tag{6.46}$$

Так как интеграл равномерно сходится, то его можно проинтегрировать по параметру $\alpha$ в пределах от 0 до $y$. Тогда

$$\int_0^y d\alpha \int_0^\infty e^{-x} \sin \alpha x \, dx =$$

$$= \int_0^\infty dx \int_0^y e^{-x} \sin \alpha x \, d\alpha = \int_0^\infty e^{-x} \frac{1 - \cos xy}{x} \, dx,$$

откуда

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{1 - \cos xy}{x} \, dx = \frac{1}{2} \ln (1 + y^2). \tag{6.47}$$

Дифференцирование первоначального интеграла по $\alpha$ дает интеграл $\int_0^\infty xe^{-x} \cos \alpha x \, dx$, который также сходится равномерно, так как $|xe^{-x} \cos \alpha x| \leqslant xe^{-x}$ и интеграл $\int_0^\infty xe^{-x} \, dx$ существует. Поэтому дифференцирование по параметру под знаком интеграла возможно и

$$\int_0^\infty xe^{-x} \cos \alpha x \, dx = \frac{1 - \alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2}. \tag{6.48}$$

Пример 14. Пусть требуется вычислить интеграл $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}$. Так как $\frac{1}{x^2 + \alpha^2} \leqslant \frac{1}{x^2 + 1}$ и интеграл $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1}$ сходится, то наш интеграл сходится равномерно. Непосредственное вычисление дает

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha}. \tag{6.49}$$

Интегрируя по $\alpha$ от 1 до $y$, найдем

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \ln y. \tag{6.50}$$

Действительно,

$$\int_1^y d\alpha \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha^2} = \int_0^\infty dx \int_1^y \frac{d\alpha}{x^2+\alpha^2} = \int_0^\infty \left[\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{x}\right]_{\alpha=1}^{\alpha=y} dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x}\, dx.$$

4. Все определения и теоремы п. 3 легко переносятся на случай несобственных интегралов от неограниченных функций. В дальнейшем рассмотрим лишь случай, когда функция $f(x, \alpha)$ обращается в бесконечность в конечном числе точек $x$ из отрезка $[a, b]$, не зависящих от $\alpha$, т. е. или в изолированных точках прямоугольника $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, или вдоль отрезков прямых, параллельных оси $\alpha$. В остальных точках прямоугольника, в окрестности которых функция $f(x, \alpha)$ ограничена, будем предполагать ее непрерывной.

Пусть сначала функция $f(x, \alpha)$ может обращаться в бесконечность лишь при $x = b$. Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x, \alpha)\, dx$ называется *равномерно сходящимся относительно* $\alpha$ *на отрезке* $[\alpha_0, \alpha_1]$, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, не зависящие от $\alpha$, что для всех чисел $\eta$, удовлетворяющих условию $0 < \eta < \delta$, и для всех рассматриваемых значений $\alpha$ справедливо неравенство

$$\left| \int_{b-\eta}^b f(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Если $f(x, \alpha)$ может обращаться в бесконечность лишь при $x = a$, то вместо последнего неравенства следует требовать выполнения неравенства

$$\left| \int_a^{a+\eta} f(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon.$$

При наличии нескольких точек разрыва отрезок $[a, b]$ следует разбить на части таким образом, чтобы на каждой из них $f(x, \alpha)$ имела лишь одну точку, в которой она может обращаться в бесконечность. Если каждый из составляющих интегралов сходится равномерно, то это же говорят и относительно первоначально данного интеграла.

Приведенные в п. 3 свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра, переносятся также на случай интегралов от неограниченных функций.

а) *Несобственный интеграл, зависящий от параметра $\alpha$, есть непрерывная функция этого параметра на каждом отрезке, на котором он сходится равномерно. Если функция, стоящая под знаком интеграла, положительна, то для непрерывности интеграла по параметру необходимо и достаточно, чтобы он сходился равномерно.*

б) *Интегрирование по параметру $\alpha$ под знаком несобственного интеграла возможно по всякому конечному отрезку, сходимость на котором равномерна. Полученный таким образом интеграл также равномерно сходится относительно параметра $\alpha$.*

в) *Если дифференцирование по параметру под знаком интеграла приводит к равномерно сходящемуся несобственному интегралу, то правило Лейбница (теорема 5), приведенное в п. 2, сохраняет силу.*

## § 3. Интеграл Стилтьеса для функций одного переменного

1. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на $n$ элементарных частей и, взяв на каждом из них по произвольной точке $\xi_k$, составим *интегральную сумму Стилтьеса*

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta_k\varphi(x), \qquad (6.51)$$

где $\Delta_k\varphi(x) = \varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})$ есть приращение функции $\varphi(x)$ на $k$-м элементарном отрезке.

Предел интегральных сумм Стилтьеса, когда длины всех элементарных отрезков разбиения стремятся к нулю, называется *интегралом Стилтьеса от функции* $f(x)$ *по функции* $\varphi(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta_k x \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta_k\varphi(x). \qquad (6.52)$$

Интеграл Стилтьеса есть обобщение интеграла Римана; за меру отрезка (см. гл. V, § 3) здесь принимается приращение на этом отрезке некоторой *интегрирующей функции* $\varphi(x)$.

Если указанный предел существует, то говорят, что функция $f(x)$ *интегрируема по функции* $\varphi(x)$. Существование интеграла Стилтьеса устанавливается следующими теоремами.

Теорема 8. *Если функция $f(x)$ непрерывна, а $\varphi(x)$ имеет на данном отрезке ограниченную вариацию*[1]*, то интеграл* $\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ *существует.*

Теорема 9. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ в смысле Римана, а функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| < K\,|x_2 - x_1|$$

*($x_1$, $x_2$—произвольные точки отрезка $[a, b]$, а $K$—фиксированная постоянная), то функция $f(x)$ интегрируема по функции $\varphi(x)$.*

Теорема 10. *Если $f(x)$ интегрируема по Риману, а функция $\varphi(x)$ дифференцируема и имеет интегрируемую на $[a, b]$ производную, то $f(x)$ интегрируема по $\varphi(x)$ и*

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = (R)\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx. \qquad (6.53)$$

---

[1]) Говорят, что функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ *ограниченную вариацию* (или *ограниченное изменение*), если существует такое число $M > 0$, что для любой системы точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ этого отрезка выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < M.$$

Последняя теорема может быть использована также и для вычисления интеграла Стилтьеса путем сведения его к интегралу Римана.

*Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ по функции $\varphi(x)$, то и, наоборот, $\varphi(x)$ интегрируема по $f(x)$.*

Благодаря этому свойству функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в теоремах 8 и 9 можно поменять местами.

**2.** Интеграл Стилтьеса обладает свойствами, аналогичными свойствам определенного интеграла Римана. При формулировке этих свойств предполагается, что все рассматриваемые интегралы существуют.

а)
$$\int_a^b d\varphi(x) = \varphi(b) - \varphi(a). \tag{6.54}$$

б) *Если $c$ и $k$ — постоянные, то*
$$\int_a^b cf(x)\,dk\varphi(x) = ck\int_a^b f(x)\,d\varphi(x). \tag{6.55}$$

в)
$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,d\varphi(x) = \int_a^b f(x)\,d\varphi(x) \pm \int_a^b g(x)\,d\varphi(x). \tag{6.56}$$

г)
$$\int_a^b f(x)\,d[\varphi(x) \pm \psi(x)] = \int_a^b f(x)\,d\varphi(x) \pm \int_a^b f(x)\,d\psi(x). \tag{6.57}$$

д) *Если существует интеграл $\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ и $a < c < b$, то*
$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \int_a^c f(x)\,d\varphi(x) + \int_c^b f(x)\,d\varphi(x), \tag{6.58}$$

*причем интегралы справа существуют.* Необходимо иметь в виду, что из существования интегралов справа существование интеграла слева не вытекает, т. е. функция может быть интегрируема на двух частях отрезка, без того чтобы быть интегрируемой на всем отрезке.

е) Теорема 11 (о среднем). *Если функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ неравенствам $m \leqslant f(x) \leqslant M$ и интегрируема по возрастающей функции $\varphi(x)$, то*

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \mu\,[\varphi(b) - \varphi(a)], \tag{6.59}$$

*где $m < \mu < M$.*

Если $f(x)$ непрерывна, то существует точка $\xi$ отрезка $[a, b]$, для которой $f(\xi) = \mu$, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = f(\xi)\,[\varphi(b) - \varphi(a)]. \tag{6.60}$$

ж) Теорема 12 (об оценке интеграла). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а $\varphi(x)$ имеет на нем ограниченную вариацию, то*

$$\left| \int_a^b f(x)\,d\varphi(x) \right| \leqslant MV, \tag{6.61}$$

*где $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$ и $V$ — полная вариация функции $\varphi(x)$.*

**3.** Условия предельного перехода под знаком интеграла Стилтьеса мало отличаются от условий предельного перехода для интеграла Римана, которые рассматривались в § 2, п. 1. Их можно сформулировать в виде двух теорем.

Теорема 13. *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных функций равномерно сходится на $[a, b]$ к функции $f(x)$ и функция $\varphi(x)$ имеет ограниченную вариацию, то*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,d\varphi(x) = \int_a^b f(x)\,d\varphi(x), \tag{6.62}$$

*причем существование предела последовательности*

$$\left\{ \int_a^b f_n(x)\,d\varphi(x) \right\}$$

*гарантируется.*

Теорема 14. *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$ ограниченной вариации сходится к функции $\varphi(x)$, причем полные вариации функций $\varphi_n(x)$ ограничены в совокупности, то*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x)\, d\varphi_n(x) = \int_a^b f(x)\, d\varphi(x), \tag{6.63}$$

*причем существование предела слева гарантируется.*

**4.** Интеграл Стилтьеса удобно использовать для нахождения статических моментов, моментов инерции или изгибающих моментов масс, распределенных по отрезку $[a, b]$, если, наряду с непрерывным распределением, имеются также массы, сосредоточенные в отдельных точках.

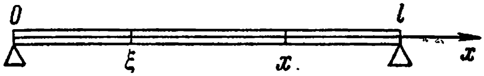


Рис. 30.

Пусть $\varphi(x)$ означает сумму всех масс на отрезке $[a, x]$. Тогда для статического момента $M$ относительно оси $Oy$ имеем

$$M = \int_a^b x\, d\varphi(x). \tag{6.64}$$

Момент инерции $I$ отрезка $[a, b]$ оси $Ox$ относительно оси $Oy$ равен

$$I = \int_a^b x^2\, d\varphi(x). \tag{6.65}$$

Аналогично для балки, опертой на концах $(0, l)$ (рис. 30), изгибающий момент $M$, действующий в сечении $\xi$, равен

$$M = \int_a^{\xi} (\xi - x)\, d\varphi(x), \tag{6.66}$$

где $\varphi(x)$ означает перерезывающее усилие в сечении $x$, т. е. сумму всех сил, действующих на отрезке $[0, x]$, как распределенных, так и сосредоточенных, включая и реакции опор.

## § 4. Интегралы и производные дробных порядков

1. В операционном исчислении и некоторых других областях математики приходится встречаться с понятием интегралов и производных дробных порядков. Наиболее простое и естественное определение может быть дано с помощью формулы Коши для $n$-й последовательной первообразной, которая приводилась в гл. V, § 1.

Действительно, опуская в этой формуле многочлен $P_{n-1}(x)$ с произвольными коэффициентами, можно полагать, по определению, $n$-кратный интеграл от функции $f(x)$ равным

$$\underbrace{\int_a^x dx \int_a^x dx \quad \int_a^x}_{n \text{ раз}} f(x)\,dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt. \tag{6.67}$$

Последнее равенство можно рассматривать при любом, в том числе и не целом, значении $n$, если заменить факториал гамма-функцией: $(n-1)! = \Gamma(n)$. Тогда для любого числа $n$ *интегралом $n$-го порядка функции* $f(x)$ называется выражение вида

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt. \tag{6.68}$$

Теоремы существования могут быть получены из теорем гл. V, §§ 1 и 3. Так, *если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для всех $n > 1$ ее интеграл $n$-го порядка на этом отрезке существует.* Для $0 < n < 1$ следует дополнительно предположить, что $f(x)$ имеет в точке $a$ нуль не менее чем первого порядка.

2. Важную роль играет возможность дифференцирования интегралов. Если для функции $f(x)$ существует интеграл $n$-го порядка, то существует также и интеграл порядка $n+1$. Этот последний *является дифференцируемой функцией, и его производная равна интегралу $n$-го порядка.*

Последнее утверждение позволяет определить также производные любого порядка $k$, в том числе и дробного. Для получения производной порядка $k > 0$ следует взять от функции $f(x)$ интеграл порядка $1 - \{k\}$, а затем от полученного интеграла — производную порядка $[k]+1$ в обычном смысле ($[k]$ означает целую часть числа $k$, а $\{k\} = k - [k]$ — его дробную часть). Ясно, что порядки интеграла и производной могут быть увеличены одновременно на любое целое число.

Для существования производной дробного порядка $k > 0$ достаточно предположить у функции $f(x)$ существование обычной производной $([k]+1)$-го порядка. В предположении существования получающихся производных и интегралов операции дифференцирования и интегрирования дробного порядка переместительны.

Пример 15. Пусть функция $f(x) = x$ определена на отрезке $[0, 1]$. Так как она обращается в нуль на левом конце отрезка, то для нее существует интеграл любого порядка $n > 0$. При $n = \frac{1}{2}$, например, получим интеграл, равный

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x \frac{t\, dt}{\sqrt{x-t}} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}.$$

Дифференцируя интеграл порядка $\frac{1}{2}$, получим производную порядка $\frac{1}{2}$ функции $f(x) = x$, равную

$$f^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}}.$$

## ГЛАВА VII

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

## § 1. Преобразование дифференциальных выражений

**1. Линейный случай.** Пусть дано *дифференциальное выражение*

$$V = F(x, y, y', y'', \ldots), \tag{7.1}$$

в котором функция $y = f(x)$ и ее производные $y', y'', \ldots$ определены на некотором интервале $l$ оси $Ox$. При преобразовании $V$ к каким-либо другим переменным приходится производить замену: а) независимой переменной $x$, б) функции $y$, в) и независимой переменной $x$, и функции $y$. Во всех этих случаях получить формулу для выражения $y^{(n)}_{x^n}$ через новые переменные затруднительно. Поэтому приходится находить $y'_x$, $y''_{x^2}$, $y'''_{x^3}$, ... последовательно с помощью правил дифференцирования.

а) Пусть

$$x = \varphi(u), \tag{7.2}$$

где функция $\varphi(u)$ непрерывна со своими производными до требуемого порядка, и $x' = \varphi'(u) \neq 0$. Тогда (в правых частях следующих равенств штрихами обозначены производные по $u$)

$$\left.\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'}{x'}, \\ y''_{x^2} &= \frac{y''x' - x''y'}{x'^3}, \\ y'''_{x^3} &= \frac{y'''x'^2 - x'''y'x' - 3y''x''x' + 3x''^2 y'}{x'^5}, \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

Найдя одно за другим выражения для производных всех нужных порядков, получаем возможность составить искомое новое выражение для $V$:

$$V = F\left[\varphi(u),\ f(\varphi(u)),\ \frac{y'}{x'},\ \frac{y''x' - x''y'}{x'^3},\ \quad\right] = \\ = F_1(u,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots). \qquad (7.4)$$

б) Пусть

$$y = \psi(v), \qquad (7.5)$$

где функции $\psi(v)$ и $v(x)$ непрерывны по своим аргументам вместе с производными до требуемого порядка. Тогда

$$\left.\begin{aligned} y'_x &= y'_v v', \\ y''_{x^2} &= y''_{v^2} v'^2 + y'_v v'', \\ y'''_x &= y'''_v v'^3 + 3y''_{v^2} v' v'' + y'_v v''', \end{aligned}\right\} \qquad (7.6)$$

Найдя производные всех порядков, получим возможность составить искомое новое выражение для $V$:

$$V = F\left[x,\ \psi(v),\ \psi'_v v',\ \psi''_{v^2} v'^2 + \psi'_v v'',\ \ldots\right] = \\ = F_2(x,\ v,\ v',\ v'',\ \ldots). \qquad (7.7)$$

в) Пусть

$$x = \varphi(u,\ v), \qquad y = \psi(u,\ v), \qquad (7.8)$$

где функции $\varphi(u,\ v)$ и $\psi(u,\ v)$ непрерывны вместе со своими производными до требуемого порядка. Считая, что $v$ — новая функция новой независимой переменной $u$, найдем

$$\left.\begin{aligned} y'_x &= \frac{\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial y}{\partial v} v'}{\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial x}{\partial v} v'}, \\ y''_{x^2} &= \frac{\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} v' + \dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} v'^2 + \dfrac{\partial y}{\partial v} v''\right)\left(\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial x}{\partial v} v'\right)}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial x}{\partial v} v'\right)^3} - \\ &\quad - \frac{\left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} v' + \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} v'^2 + \dfrac{\partial x}{\partial v} v''\right)\left(\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial y}{\partial v} v'\right)}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial x}{\partial v} v'\right)^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.9)$$

Последовательно дифференцируя и дальше, получим возможность составить искомое новое выражение для $V$:

$$V = F\left[\varphi(u,\ v),\ \psi(u,\ v),\ \frac{y'_u + y'_v v'}{x'_u + x'_v v'},\ \quad\right] = \\ = F_3(u,\ v,\ v',\ v'',\ \ldots). \quad (7.10)$$

**2. Плоский случай.** Пусть дано *дифференцальное выражение*

$$W = F\left(x,\ y,\ z,\ z'_x,\ z'_y,\ z''_{x^2},\ z''_{xy},\ z''_{y^2},\ \ldots\right), \quad (7.11)$$

в котором $x$ и $y$ — независимые переменные, $z$ — функция от $x$ и $y$, которая вместе со своими производными определена в некоторой области $D$ плоскости $Oxy$. При преобразовании $W$ к новым переменным встречаются случаи, когда нужно произвести замену: а) независимых переменных $x$ и $y$, б) функции $z$, в) и независимых переменных $x$, $y$, и функции $z$. Всякий раз при этом приходится производить выкладки последовательно с помощью правил дифференцирования, так как получение каких-либо общих формул затруднительно.

а) Пусть

$$x = \varphi(u,\ v), \quad y = \psi(u,\ v), \quad (7.12)$$

где функции $\varphi(u,\ v)$ и $\psi(u,\ v)$ непрерывны вместе со своими производными до требуемого порядка, и якобиан $\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} \neq 0$. Тогда

$$z'_x = \frac{\dfrac{\partial(z,\ y)}{\partial(u,\ v)}}{\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}}, \quad z'_y = \frac{\dfrac{\partial(x,\ z)}{\partial(u,\ v)}}{\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}}. \quad (7.13)$$

Для получения выражений через $u$ и $v$ высших производных от $z$ можно указанные равенства дифференцировать по $x$ и $y$, всякий раз заменяя $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\dfrac{\partial y}{\partial v}}{\dfrac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\dfrac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\dfrac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}}. \end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

Преобразовав к новым переменным производные всех требуемых порядков, получим возможность составить искомое новое выражение для $W$:

$$W = F\left[\varphi(u, v), \psi(u, v), z, z'_x, z'_y, \ldots\right] = \\ = F_1\left(u, v, z, z'_u, z'_v, \ldots\right). \tag{7.15}$$

б) Пусть

$$z = \psi(w), \tag{7.16}$$

где $\psi(w)$ и $w(x, y)$ непрерывны вместе со своими производными до требуемого порядка. Тогда

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= \psi'(w)\,w'_x, \quad z'_y = \psi'(w)\,w'_y, \\ z''_{x^2} &= \psi''(w)\,w'^2_x + \psi'(w)\,w''_{x^2}, \\ z''_{xy} &= \psi''(w)\,w'_x w'_y + \psi'(w)\,w''_{xy}, \\ z''_{y^2} &= \psi''(w)\,w'^2_y + \psi'(w)\,(w)''_{y^2}, \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

Последовательно дифференцируя и дальше, получим возможность составить искомое новое выражение для $W$:

$$W = F\left[(x, y, \psi(w), \psi'(w)\,w'_x, \psi'(w)\,w'_y, \ldots\right] = \\ = F_2\left(x, y, w, w'_x, w'_y, \ldots\right). \tag{7.18}$$

в) Пусть

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w), \tag{7.19}$$

где функции $\varphi$, $\psi$, $\chi$ непрерывны вместе со своими производными до требуемого порядка. Дифференцируя третье из указанных равенств по $x$ и $y$, получим

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}, \\ z'_y &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \quad (7.20)$$

В этих равенствах нужно еще заменить $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ их выражениями через новые переменные, которые можно найти из систем, получающихся при дифференцировании первых двух из выбранных равенств по $x$ и $y$:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 &= \left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}; \end{aligned}\right\} \quad (7.21)$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}, \\ 1 &= \left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \quad (7.22)$$

Указанным приемом можно получить выражения в новых переменных для производных и следующих порядков. Это даст возможность составить искомое новое выражение для $W$:

$$\begin{aligned} W &= F\left[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w), z'_x, z'_y, \ldots\right] = \\ &= F_3\left(u, v, w, w'_u, w'_v, \ldots\right). \quad (7.23) \end{aligned}$$

**3. Пространственный случай.** Пусть дано *дифференциальное выражение*

$$W = F\left(x, y, z, t, t'_x, t'_y, t'_z, \ldots\right), \quad (7.24)$$

в котором $x$, $y$, $z$ — независимые переменные, а $t$ — функция от $x$, $y$, $z$, определенная вместе со своими производными до требуемого порядка в некоторой области $V$ пространства $Oxyz$.

Если нужно преобразовать $W$ к новым переменным $u$, $v$, $w$, связанным с $x$, $y$, $z$ соотношениями

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w); \quad z = \chi(u, v, w), \quad (7.25)$$

то при этом можно пользоваться следующими формулами:

$$t'_x = \frac{\dfrac{\partial(t, y, z)}{\partial(u, v, w)}}{\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}}, \quad t'_y = \frac{\dfrac{\partial(x, t, z)}{\partial(u, v, w)}}{\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}}, \quad t'_z = \frac{\dfrac{\partial(x, y, t)}{\partial(u, v, w)}}{\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}}. \tag{7.26}$$

Получить выражения для производных от $t$ высших порядков можно последовательным дифференцированием указанных равенств по $x$, $y$ и $z$, всякий раз заменяя в результате $u'_x$, $v'_x$, $w'_x$ по формулам

$$u'_x = \frac{\dfrac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)}}{\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}}, \quad v'_x = -\frac{\dfrac{\partial(y, z)}{\partial(u, w)}}{\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}}, \quad w'_x = \frac{\dfrac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}}{\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}}, \tag{7.27}$$

а $u'_y$, $v'_y$, $w'_y$ и $u'_z$, $v'_z$, $w'_z$ по формулам, аналогичным указанным. Это даст возможность составить искомое новое выражение для $W$:

$$W = F\left[\varphi(u, v, w),\ \psi(u, v, w),\ \chi(u, v, w),\ t,\ t'_x,\ t'_y,\ t'_z,\ \ldots\right] = \\ = F_1\left(u, v, w, t, t'_u, t'_v, t'_w, \ldots\right). \tag{7.28}$$

**4.** Ниже приводятся выражения для основных дифференциальных операций (градиент, дивергенция, вихрь, лапласиан), получаемые при преобразовании прямоугольных декартовых координат к различным криволинейным ортогональным координатам.

1°. П л о с к и й с л у ч а й. Пусть $z = Z(x, y)$ есть дважды дифференцируемая функция от $x$ и $y$ и $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x, y)$ — дифференцируемая вектор-функция от $x$ и $y$. Основные дифференциальные операции определяются следующими соотношениями:

$$\textit{градиент}:\ \operatorname{grad} z = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right\}; \tag{7.29}$$

$$\textit{дивергенция}:\ \operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}; \tag{7.30}$$

$$\textit{лапласиан}:\ \Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \tag{7.31}$$

При преобразовании к новым независимым переменным $u$ и $v$ (при условии, что они составляют систему криволинейных ортогональных координат, см. гл. IV, § 2, п. 5):

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v) \tag{7.32}$$

можно получить для этих дифференциальных операций следующие выражения:

$$\operatorname{grad}_u z=\frac{1}{l_u}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \operatorname{grad}_v z=\frac{1}{l_v}\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{7.33}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}=\frac{1}{l_u l_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(l_v a_u)+\frac{\partial}{\partial v}(l_u a_v)\right], \tag{7.34}$$

$$\Delta z=\frac{1}{l_u l_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{l_v}{l_u}\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{l_u}{l_v}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right], \tag{7.35}$$

где $l_u$ и $l_v$ — соответствующие коэффициенты Ламе. Отсюда имеем:

а) в полярных координатах (гл. IV, § 2, п. 5, 2°):

$$\operatorname{grad}_u z=\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \operatorname{grad}_v z=\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{7.36}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}=\frac{1}{u}a_u+\frac{\partial a_u}{\partial u}+\frac{1}{u}\frac{\partial a_v}{\partial v}, \tag{7.37}$$

$$\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}; \tag{7.38}$$

б) в вырожденных эллиптических координатах (гл. IV, § 2, п. 5, 5°):

$$\operatorname{grad}_u z=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 u-\cos^2 v}}\frac{\partial z}{\partial u}; \quad \operatorname{grad}_v z=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 u-\cos^2 v}}\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{7.39}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 u-\cos^2 v}}\left(\frac{\partial a_u}{\partial u}+\frac{\partial a_v}{\partial v}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{(\operatorname{ch}^2 u-\cos^2 v)^3}}(a_u \operatorname{ch} u \operatorname{sh} u+a_v \cos v \sin v), \tag{7.40}$$

$$\Delta z=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 u-\cos^2 v}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right); \tag{7.41}$$

в) в параболических координатах (гл. IV, § 2, п. 5, 6°):

$$\operatorname{grad}_u z = \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \operatorname{grad}_v z = \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{7.42}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}\left(\frac{\partial a_u}{\partial u}+\frac{\partial a_v}{\partial v}\right)+\frac{1}{2\sqrt{(u^2+v^2)^3}}(ua_u+va_v), \tag{7.43}$$

$$\Delta z = \frac{1}{4(u^2+v^2)}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right); \tag{7.44}$$

г) в биполярных координатах (гл. IV, § 2, п. 5, 7°):

$$\operatorname{grad}_u z = (\operatorname{ch} u+\cos v)\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \operatorname{grad}_v z = (\operatorname{ch} u+\cos v)\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{7.45}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = (\operatorname{ch} u+\cos v)\left(\frac{\partial a_u}{\partial u}+\frac{\partial a_v}{\partial v}\right)+a_v\sin v - a_u \operatorname{sh} u, \tag{7.46}$$

$$\Delta z = (\operatorname{ch} u+\cos v)^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right). \tag{7.47}$$

2°. Пространственный случай. Пусть $t = t(x, y, z)$ есть дважды дифференцируемая функция от $x$, $y$ и $z$ и $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x, y, z)$ — дифференцируемая вектор-функция от $x$, $y$ и $z$. Основные дифференциальные операции определяются следующими соотношениями:

$$\textit{градиент}: \ \operatorname{grad} t = \left\{\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial z}\right\}, \tag{7.48}$$

$$\textit{дивергенция}: \ \operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}, \tag{7.49}$$

$$\textit{вихрь}: \ \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left\{\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right\}, \tag{7.50}$$

$$\textit{лапласиан}: \ \Delta t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}. \tag{7.51}$$

При преобразовании к новым независимым переменным $u$, $v$ и $w$ (при условии, что они составляют систему криволинейных ортогональных координат, см. гл. IV, § 3, п. 2):

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w) \tag{7.52}$$

можно получить для этих дифференциальных операций следующие выражения:

$$\operatorname{grad}_u t = \frac{1}{L_u}\frac{\partial t}{\partial u}, \quad \operatorname{grad}_v t = \frac{1}{L_v}\frac{\partial t}{\partial v}, \quad \operatorname{grad}_w t = \frac{1}{L_w}\frac{\partial t}{\partial w}, \tag{7.53}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{L_u L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(L_v L_w a_u) + \frac{\partial}{\partial v}(L_w L_u a_v) + \frac{\partial}{\partial w}(L_u L_v a_w)\right], \tag{7.54}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}_u \boldsymbol{a} &= \frac{1}{L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(L_w a_w) - \frac{\partial}{\partial w}(L_v a_v)\right], \\ \operatorname{rot}_v \boldsymbol{a} &= \frac{1}{L_w L_u}\left[\frac{\partial}{\partial w}(L_u a_u) - \frac{\partial}{\partial u}(L_w a_w)\right], \\ \operatorname{rot}_w \boldsymbol{a} &= \frac{1}{L_u L_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(L_v a_v) - \frac{\partial}{\partial v}(L_u a_u)\right], \end{aligned}\right\} \tag{7.55}$$

$$\Delta t = \frac{1}{L_u L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L_v L_w}{L_u}\frac{\partial t}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L_w L_u}{L_v}\frac{\partial t}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{L_u L_v}{L_w}\frac{\partial t}{\partial w}\right)\right], \tag{7.56}$$

где $L_u$, $L_v$, $L_w$ — соответствующие коэффициенты Ламе. Отсюда имеем:

а) в цилиндрических координатах (гл. IV, § 3, п. 2, 2°):

$$\operatorname{grad}_u t = \frac{\partial t}{\partial u}, \quad \operatorname{grad}_v t = \frac{1}{u}\frac{\partial t}{\partial v}, \quad \operatorname{grad}_w t = \frac{\partial t}{\partial w}, \tag{7.57}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{u} a_u + \frac{\partial a_u}{\partial u} + \frac{1}{u}\frac{\partial a_v}{\partial v} + \frac{\partial a_w}{\partial w}, \tag{7.58}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}_u \boldsymbol{a} &= \frac{1}{u}\frac{\partial a_w}{\partial v} - \frac{\partial a_v}{\partial w}, \\ \operatorname{rot}_v \boldsymbol{a} &= \frac{\partial a_u}{\partial w} - \frac{\partial a_w}{\partial u}, \\ \operatorname{rot}_w \boldsymbol{a} &= \frac{1}{u} a_v + \frac{\partial a_v}{\partial u} - \frac{1}{u}\frac{\partial a_u}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{7.59}$$

$$\Delta t = \frac{1}{u}\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2}; \tag{7.60}$$

б) в сферических координатах (гл. IV, § 3, п. 2, 3°):

$$\operatorname{grad}_u t = \frac{\partial t}{\partial u}, \quad \operatorname{grad}_v t = \frac{1}{u \sin w}\frac{\partial t}{\partial v}, \quad \operatorname{grad}_w t = \frac{1}{u}\frac{\partial t}{\partial w}, \tag{7.61}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{2}{u} a_u + \frac{1}{u \operatorname{tg} w} a_w + \frac{\partial a_u}{\partial u} + \frac{1}{u \sin w}\frac{\partial a_v}{\partial v} + \frac{1}{u}\frac{\partial a_w}{\partial w}, \tag{7.62}$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{rot}_u a &= \frac{1}{u\sin w}\frac{\partial a_w}{\partial v} - \frac{1}{u}\frac{\partial a_v}{\partial w} - \frac{1}{u\operatorname{tg} w}a_v,\\
\operatorname{rot}_v a &= \frac{1}{u}\frac{\partial a_u}{\partial w} - \frac{\partial a_w}{\partial u} - \frac{a_w}{u},\\
\operatorname{rot}_w a &= \frac{\partial a_v}{\partial u} + \frac{1}{u}a_v - \frac{1}{u\sin w}\frac{\partial a_u}{\partial v},
\end{aligned}\right\} \tag{7.63}$$

$$\Delta t = \frac{2}{u}\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{1}{u^2\sin^2 w}\frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \\
+ \frac{1}{u^2\operatorname{tg} w}\frac{\partial t}{\partial w} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 t}{\partial w^2}; \tag{7.64}$$

в) в вырожденных эллипсоидальных «вытянутых» координатах (гл. IV, § 3, п. 2, 5°):

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{grad}_u t &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w}}\frac{\partial t}{\partial u},\\
\operatorname{grad}_v t &= \frac{1}{\operatorname{sh} u \sin w}\frac{\partial t}{\partial v},\\
\operatorname{grad}_w t &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w}}\frac{\partial t}{\partial w},
\end{aligned}\right\} \tag{7.65}$$

$$\operatorname{div} a = \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{sh}^2 u+\sin^2 w)^3}}\left(\frac{2\operatorname{sh}^2 u+\sin^2 w}{\operatorname{th} u}a_u + \frac{2\sin^2 w+\operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{tg} w}a_w\right) + \\
+ \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w}}\left(\frac{\partial a_u}{\partial u} + \frac{\partial a_w}{\partial w}\right) + \frac{1}{\operatorname{sh} u\sin w}\frac{\partial a_v}{\partial v}, \tag{7.66}$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{rot}_u a &= \frac{1}{\operatorname{sh} u\sin w}\frac{\partial a_w}{\partial v} - \\
&\qquad - \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w}}\left(\frac{\partial a_v}{\partial w} + \frac{1}{\operatorname{tg} w}a_v\right),\\
\operatorname{rot}_v a &= \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{sh}^2 u+\sin^2 w)^3}}(a_u \sin w\cos w - a_w \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u) + \\
&\qquad + \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w}}\left(\frac{\partial a_u}{\partial w} - \frac{\partial a_w}{\partial u}\right),\\
\operatorname{rot}_w a &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w}}\left(\frac{1}{\operatorname{th} u}a_v + \frac{\partial a_v}{\partial u}\right) - \\
&\qquad - \frac{1}{\operatorname{sh} u\sin w}\frac{\partial a_u}{\partial v},
\end{aligned}\right\} \tag{7.67}$$

$$\Delta t = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w}\left[\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{1}{\operatorname{th} u}\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\operatorname{tg} w}\frac{\partial t}{\partial w} + \left(\frac{1}{\sin^2 w} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u}\right)\frac{\partial^2 t}{\partial v^2}\right]; \qquad (7.68)$$

г) в вырожденных эллипсоидальных «сплюснутых» координатах (гл. IV, § 3, п. 2, 6°):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{grad}_u t &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 w}}\frac{\partial t}{\partial u}, \\ \operatorname{grad}_v t &= \frac{1}{\operatorname{ch} u \sin w}\frac{\partial t}{\partial v}, \\ \operatorname{grad}_w t &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 w}}\frac{\partial t}{\partial w}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.69)$$

$$\operatorname{div} a = \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 w)^3}}\left[(\operatorname{sh}^2 u + \operatorname{ch}^2 u + \cos^2 w)\, a_u \operatorname{th} u + \right.$$
$$\left. + (\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 w - \sin^2 w)\, a_w \operatorname{ctg} w\right] +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 w}}\left(\frac{\partial a_u}{\partial u} + \frac{\partial a_w}{\partial w}\right) + \frac{1}{\operatorname{ch} u \sin w}\frac{\partial a_v}{\partial v}, \qquad (7.70)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}_u a &= \frac{1}{\operatorname{ch} u \sin w}\frac{\partial a_w}{\partial v} - \\ &\qquad - \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 w}}\left(\frac{\partial a_v}{\partial w} + \frac{1}{\operatorname{tg} w} a_v\right), \\ \operatorname{rot}_v a &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 w}}\left(\frac{\partial a_u}{\partial w} - \frac{\partial a_w}{\partial u}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 w)^3}}(a_u \sin w \cos w + a_w \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u), \\ \operatorname{rot}_w a &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 w}}\left(\frac{\partial a_v}{\partial u} + a_v \operatorname{th} u\right) - \\ &\qquad - \frac{1}{\operatorname{ch} u \sin w}\frac{\partial a_u}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.71)$$

$$\Delta t = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 w}\left[\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \operatorname{th} u \frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{ctg} w \frac{\partial t}{\partial w} + \left(\frac{1}{\sin^2 w} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}\right)\frac{\partial^2 t}{\partial v^2}\right]; \qquad (7.72)$$

д) в параболоидальных координатах (гл. IV, § 3, п. 2, 8°):

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{grad}_u t &= \frac{1}{2\sqrt{u^2+w^2}}\frac{\partial t}{\partial u},\\
\operatorname{grad}_v t &= \frac{1}{2uw}\frac{\partial t}{\partial v},\\
\operatorname{grad}_w t &= \frac{1}{2\sqrt{u^2+w^2}}\frac{\partial t}{\partial w},
\end{aligned}\right\} \tag{7.73}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} a = \frac{1}{2uw\sqrt{(u^2+w^2)^3}}\,[wa_u(2u^2+w^2)+ua_w(u^2+2w^2)]+\\
+\frac{1}{2\sqrt{u^2+w^2}}\left(\frac{\partial a_u}{\partial u}+\frac{\partial a_w}{\partial w}\right)+\frac{1}{2uw}\frac{\partial a_v}{\partial v},
\end{aligned} \tag{7.74}$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{rot}_u a &= \frac{1}{2uw}\frac{\partial a_w}{\partial v}-\frac{1}{2w\sqrt{u^2+w^2}}\left(a_v+w\frac{\partial a_v}{\partial w}\right),\\
\operatorname{rot}_v a &= \frac{1}{2\sqrt{(u^2+w^2)^3}}(wa_u-ua_w)+\\
&\qquad+\frac{1}{2\sqrt{u^2+w^2}}\left(\frac{\partial a_u}{\partial w}-\frac{\partial a_w}{\partial u}\right),\\
\operatorname{rot}_w a &= \frac{1}{2u\sqrt{u^2+w^2}}\left(a_v+u\frac{\partial a_v}{\partial u}\right)-\frac{1}{2uw}\frac{\partial a_u}{\partial v},
\end{aligned}\right\} \tag{7.75}$$

$$\begin{aligned}
\Delta t = \frac{1}{4uw(u^2+w^2)}\left(u\frac{\partial t}{\partial w}+w\frac{\partial t}{\partial u}\right)+\\
+\frac{1}{4(u^2+w^2)}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial w^2}\right)+\frac{1}{4u^2w^2}\frac{\partial^2 t}{\partial v^2};
\end{aligned} \tag{7.76}$$

е) в тороидальных координатах (гл. IV, § 3, п. 2, 9°):

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{grad}_u t &= (\operatorname{ch} u-\cos w)\frac{\partial t}{\partial u},\\
\operatorname{grad}_v t &= \frac{\operatorname{ch} u-\cos w}{\operatorname{sh} u}\frac{\partial t}{\partial v},\\
\operatorname{grad}_w t &= (\operatorname{ch} u-\cos w)\frac{\partial t}{\partial w},
\end{aligned}\right\} \tag{7.77}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} a = a_u\frac{1-\operatorname{sh}^2 u-\operatorname{ch} u\cos w}{\operatorname{sh} u}-2a_w\sin w+\\
+(\operatorname{ch} u-\cos w)\left(\frac{\partial a_u}{\partial u}+\frac{1}{\operatorname{sh} u}\frac{\partial a_v}{\partial v}+\frac{\partial a_w}{\partial w}\right),
\end{aligned} \tag{7.78}$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{rot}_u \boldsymbol{a} &= (\operatorname{ch} u - \cos w)\left(\frac{1}{\operatorname{sh} u}\frac{\partial a_w}{\partial v} - \frac{\partial a_v}{\partial w}\right) + a_v \sin w,\\
\operatorname{rot}_v \boldsymbol{a} &= (\operatorname{ch} u - \cos w)\left(\frac{\partial a_u}{\partial w} - \frac{\partial a_w}{\partial u}\right) - a_u \sin w + a_w \operatorname{sh} u,\\
\operatorname{rot}_w \boldsymbol{a} &= (\operatorname{ch} u - \cos w)\left(\frac{\partial a_v}{\partial u} - \frac{1}{\operatorname{sh} u}\frac{\partial a_u}{\partial v}\right) +\\
&\qquad\qquad + a_v \frac{1 - \operatorname{ch} u \cos w}{\operatorname{sh} u},
\end{aligned}\right\} \quad (7.79)$$

$$\begin{aligned}
\Delta t = (\operatorname{ch} u - \cos w)\left(\frac{(1 - \operatorname{ch} u \cos w)}{\operatorname{sh} u}\frac{\partial t}{\partial u} - \sin w \frac{\partial t}{\partial w}\right) + \\
+ (\operatorname{ch} u - \cos w)^2 \left(\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u}\frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2}\right);
\end{aligned} \quad (7.80)$$

ж) в биполярных координатах (гл. IV, § 3, п. 2, 10°):

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{grad}_u t &= (\operatorname{ch} w - \cos u)\frac{\partial t}{\partial u},\\
\operatorname{grad}_v t &= \frac{\operatorname{ch} w - \cos u}{\sin u}\frac{\partial t}{\partial v},\\
\operatorname{grad}_w t &= (\operatorname{ch} w - \cos u)\frac{\partial t}{\partial w},
\end{aligned}\right\} \quad (7.81)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \boldsymbol{a} = a_u \frac{\cos u \operatorname{ch} w - \sin^2 u - 1}{\sin u} - 2a_w \operatorname{sh} w + \\
+ (\operatorname{ch} w - \cos u)\left(\frac{\partial a_u}{\partial u} + \frac{1}{\sin u}\frac{\partial a_v}{\partial v} + \frac{\partial a_w}{\partial w}\right),
\end{aligned} \quad (7.82)$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{rot}_u \boldsymbol{a} &= (\operatorname{ch} w - \cos u)\left(\frac{1}{\sin u}\frac{\partial a_w}{\partial v} - \frac{\partial a_v}{\partial w}\right) - a_v \operatorname{sh} w,\\
\operatorname{rot}_v \boldsymbol{a} &= (\operatorname{ch} w - \cos u)\left(\frac{\partial a_u}{\partial w} - \frac{\partial a_w}{\partial u}\right) - a_u \operatorname{sh} w + a_w \sin u,\\
\operatorname{rot}_w \boldsymbol{a} &= (\operatorname{ch} w - \cos u)\left(\frac{\partial a_v}{\partial u} - \frac{1}{\sin u}\frac{\partial a_u}{\partial v}\right) +\\
&\qquad\qquad + a_v \frac{\cos u \operatorname{ch} w - 1}{\sin u},
\end{aligned}\right\} \quad (7.83)$$

$$\begin{aligned}
\Delta t = (\operatorname{ch} w - \cos u)\left(\frac{\cos u \operatorname{ch} w - 1}{\sin u}\frac{\partial t}{\partial u} - \operatorname{sh} w \frac{\partial t}{\partial w}\right) + \\
+ (\operatorname{ch} w - \cos u)^2 \left(\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin^2 u}\frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2}\right).
\end{aligned} \quad (7.84)$$

## § 2. Преобразование интегральных выражений

**1. Интеграл по мере области.** Пусть $f(P)$ — функция точки, определенная в области $E$. Интеграл по мере области (см. гл. V, § 4) обладает следующими свойствами:

а) *Линейность*:

$$\int\limits_E [C_1 f_1(P) + C_2 f_2(P) + \quad + C_k f_k(P)]\, de = \\ = C_1 \int\limits_E f_1(P)\, de + C_2 \int\limits_E f_2(P)\, de + \ldots + C_k \int\limits_E f_k(P)\, de, \tag{7.85}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — константы.

б) *Аддитивность*:

$$\int\limits_{E_1+E_2+\ldots+E_k} f(P)\, de = \int\limits_{E_1} f(P)\, de + \int\limits_{E_2} f(P)\, de + \ldots + \int\limits_{E_k} f(P)\, de, \tag{7.86}$$

где под $E_1 + E_2 + \ldots + E_k$ понимается совокупность всех областей $E_1, E_2, \ldots, E_k$.

в) *Ограниченность*:

$$m\Delta E \leqslant \int\limits_E f(P)\, de \leqslant M\Delta E, \tag{7.87}$$

где $\Delta E$ — мера области $E$, а $m$ и $M$ — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(P)$ в области $E$. Указанное неравенство выражает *теорему об оценке интеграла*; из нее следует *теорема о среднем*:

$$\int\limits_E f(P)\, de = f(P_c)\, \Delta E, \tag{7.88}$$

где $P_c$ — некоторая *средняя* точка области $E$.

г) *Дифференцируемость* по мере области:

$$\frac{d}{de} \int\limits_e f(P)\, de = f(P), \quad \text{или} \quad d \int\limits_e f(P)\, de = f(P)\, de, \tag{7.89}$$

где $e$ — переменная область, а $de$ — элемент (дифференциал) ее меры. Отсюда следует, что значение в данной области $E$

аддитивной и непрерывно дифференцируемой функции $F(e)$ от переменной области $e$ равно интегралу, взятому по области $E$ от производной данной функции:

$$F(E)=\int\limits_E \frac{dF(e)}{de}\,de=\int\limits_E dF(e). \tag{7.90}$$

Это равенство представляет собой аналог известной формулы Ньютона — Лейбница для интегралов по мере области.

Если в конкретных случаях в качестве области $E$, заданной в декартовых прямоугольных координатах, выбраны:

1) линия $l$ на плоскости $Oxy$,
2) линия $L$ в пространстве $Oxyz$,
3) область $D$ на плоскости $Oxy$,
4) поверхность $S$ в пространстве $Oxyz$,
5) область $V$ в пространстве $Oxyz$,

то соответственно интегралы по мере области обозначаются и называются следующим образом (см. гл. V):

1) $$\int\limits_l f(P)\,ds=\int\limits_l f(x,\ y)\sqrt{dx^2+dy^2} \tag{7.91}$$

— *криволинейный интеграл по длине линии* $l$,

2) $$\int\limits_L f(P)\,ds=\int\limits_L f(x,\ y,\ z)\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} \tag{7.92}$$

— *криволинейный интеграл по длине линии* $L$,

3) $$\iint\limits_D f(P)\,dq=\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy \tag{7.93}$$

— *двойной интеграл по площади области* $D$,

4) $$\iint\limits_S f(P)\,d\sigma=$$
$$=\iint\limits_S f(x,\ y,\ z)\sqrt{(dx\,dy)^2+(dy\,dz)^2+(dz\,dx)^2} \tag{7.94}$$

— *поверхностный интеграл по площади поверхности* $S$,

5) $$\iiint\limits_V f(P)\,dv=\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz \tag{7.95}$$

— *тройной интеграл по объему области* $V$.

Вычисляются интегралы по мере в указанных случаях следующим образом:

1) Если линия $l$ задана уравнениями

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u),$$

где $\varphi$ и $\psi$ — дифференцируемые функции параметра $u$ на отрезке $[u_1, u_2]$, $u_1 < u_2$, то

$$\int\limits_{l} f(P)\, ds = \int\limits_{u_1}^{u_2} f[\varphi(u), \psi(u)] \sqrt{\varphi'^2(u) + \psi'^2(u)}\, du. \quad (7.96)$$

2) Если линия $L$ задана уравнениями

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u), \quad z = \chi(u),$$

где $\varphi$, $\psi$ и $\chi$ — дифференцируемые функции параметра $u$ на отрезке $[u_1, u_2]$, $u_1 < u_2$, то

$$\int\limits_{L} f(P)\, ds =$$

$$= \int\limits_{u_1}^{u_2} f[\varphi(u), \psi(u), \chi(u)] \sqrt{\varphi'^2(u) + \psi'^2(u) + \chi'^2(u)}\, du. \quad (7.97)$$

3) Если область $D$ обладает тем свойством, что всякая прямая, параллельная оси $Oy$, пересекает ее границу не более чем в двух точках (в точке «входа» в область $D$ и в точке «выхода» из нее), то

$$\iint\limits_{D} f(P)\, dq = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy, \quad (7.98)$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — соответственно ординаты точек «входа» и «выхода» для линии $x = \text{const}$, $y_1(x) \leqslant y_2(x)$, а отрезок $[x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$, есть наибольший отрезок изменения абсциссы $x$ в области $D$. В правой части указанного равенства находится двукратный интеграл, к которому сводится данный двойной интеграл. Сведение двойного интеграла к двукратному можно выполнить и другими способами.

4) Если поверхность $S$ задана уравнениями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

где в правых частях — дифференцируемые функции параметров $u$ и $v$ в некоторой области $\Delta$, то

$$\iint\limits_S f(P)\,d\sigma = \iint\limits_\Delta f[x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)]\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \quad (7.99)$$

где $E$, $F$, $G$ — коэффициенты Гаусса поверхности $S$ для координат $u$, $v$. Далее, двойной интеграл, стоящий в правой части, вычисляется так, как об этом говорится в случае 3).

5) Если область $V$ обладает тем свойством, что всякая прямая, параллельная оси $Oz$, пересекает ее границу не более чем в двух точках (в точке «входа» в область $V$ и в точке «выхода» из нее), а проекция $V$ на плоскость $Oxy$ обладает свойством, указанным в случае 3) для плоской области $D$, то

$$\iiint\limits_V f(P)\,dv = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,\,y)}^{z_2(x,\,y)} f(x,\ y,\ z)\,dz, \quad (7.100)$$

где $z_1(x,\ y)$ и $z_2(x,\ y)$ — соответствующие аппликаты точек «входа» и «выхода» линии $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z_1(x,\ y) \leqslant z_2(x,\ y)$, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — соответственно ординаты точек «входа» и «выхода» для проекции области $V$ на плоскость $Oxy$ линии $x = \text{const}$, $z = 0$, а отрезок $[x_1,\ x_2]$, $x_1 < x_2$, есть наибольший отрезок изменения абсциссы $x$ в области $V$. В правой части указанного равенства находится трехкратный интеграл, к которому сводится данный тройной интеграл. Сведение тройного интеграла к трехкратному можно выполнить и другими способами.

Если в рассмотренных случаях область интегрирования не отвечает перечисленным требованиям, то она разбивается на отдельные части, каждая из которых этим требованиям подчиняется (предполагается, что это можно сделать), после чего используется свойство аддитивности интеграла по мере области.

**2. Замена переменных в интеграле по мере.** Интегралы (7.91) и (7.92) сводятся к обыкновенным («одномерным» определенным) интегралам, а (7.94) — к двойному интегралу. Поэтому вопрос о замене переменных достаточно рассмотреть применительно к следующим трем интегралам:

$$\int\limits_{l} f(x)\,dx, \quad \int\limits_{D}\int f(x,\,y)\,dx\,dy, \quad \int\int\limits_{V}\int f(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Пусть переменные (либо $x$, либо $x$, $y$, либо $x$, $y$, $z$) заменяются новыми переменными (либо $u$, либо $u$, $v$, либо $u$, $v$, $w$) по формулам

$$\left.\begin{aligned} &x=\varphi(u),\\ &x=\varphi(u,\,v), \quad y=\psi(u,\,v),\\ &x=\varphi(u,\,v,\,w), \quad y=\psi(u,\,v,\,w), \quad z=\chi(u,\,v,\,w). \end{aligned}\right\} \qquad (7.101)$$

Эти формулы замены переменных можно трактовать как формулы, дающие отображение в область интегрирования $E(l,\,D,\,V)$ в декартовой системе $Ox$ области интегрирования $E_1(\lambda,\,\Delta,\,\Omega)$ в декартовой системе $Ou\,\ldots$ При этом предполагается, что это отображение гомеоморфно и непрерывно дифференцируемо и что если его якобиан и обращается в нуль, то лишь в конечном числе точек.

Пусть точка $Q$ из области $E_1$ есть образ точки $P$ из области $E$ и функция $f_1(Q)$ есть результат преобразования функции $f(P)$ к новым переменным. Тогда, вообще,

$$\int\limits_{E} f(P)\,de=\int\limits_{E_1} f_1(Q)\,K(Q)\,de_1, \qquad (7.102)$$

где $K(Q)$ — коэффициент искажения при выбранном отображении, а $de_1$ — элемент меры в области $E_1$. Следовательно, в частности,

$$\left.\begin{aligned} \int\limits_{l} f(x)\,dx&=\int\limits_{\lambda} f_1(u)\,K(u)\,du,\\ \int\limits_{D}\int f(x,\,y)\,dx\,dy&=\int\limits_{\Delta}\int f_1(u,\,v)\,K(u,\,v)\,du\,dv,\\ \int\int\limits_{V}\int f(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz&=\\ &=\int\int\limits_{\Omega}\int f_1(u,\,v,\,w)\,K(u,\,v,\,w)\,du\,dv\,dw. \end{aligned}\right\}$$

(7.103)

Далее, известно (см. гл. IV), что $K(Q) = \left|\frac{\partial(x, \ldots)}{\partial(u, \ldots)}\right|$, где $\frac{\partial(x, \ldots)}{\partial(u, \ldots)}$ — якобиан отображения. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} &\int_l f(x)\,dx = \int_\lambda f_1(u)\left|\frac{dx}{du}\right|du, \\ &\int\int_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\int_\Delta f_1(u, v)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|du\,dv, \\ &\int\int\int_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \\ &\qquad = \int\int\int_\Omega f_1(u, v, w)\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right|du\,dv\,dw. \end{aligned}\right\} \tag{7.104}$$

Если формулы замены переменных определяют систему криволинейных ортогональных координат, то

1) $$\int_l f(P)\,ds = \int_l f_1(u, v)\sqrt{l_u^2\,du^2 + l_v^2\,dv^2}, \tag{7.105}$$

2) $$\int_L f(P)\,ds = \int_L f_1(u, v, w)\sqrt{L_u^2\,du^2 + L_v^2\,dv^2 + L_w^2\,dw^2}, \tag{7.106}$$

3) $$\int\int_D f(P)\,dq = \int\int_D f_1(u, v)\,l_u l_v\,du\,dv, \tag{7.107}$$

4) $$\int\int_S f(P)\,d\sigma = \int\int_S f_1(u, v, w)\sqrt{(L_u L_v\,du\,dv)^2 + (L_u L_w\,du\,dw)^2 + (L_v L_w\,dv\,dw)^2}, \tag{7.108}$$

5) $$\int\int\int_V f(P)\,dv = \int\int\int_V f_1(u, v, w)\,L_u L_v L_w\,du\,dv\,dw, \tag{7.109}$$

где $l_u$, $l_v$ и $L_u$, $L_v$, $L_w$ — соответствующие коэффициенты Ламе, при этом в интеграле слева $dv$ означает элемент объема, а в интеграле справа $du$, $dv$, $dw$ — дифференциалы переменных.

**3. Интеграл по координате.** Интегралы по координате рассматриваются главным образом в тех трех случаях, когда областью интегрирования служит: 1) линия $l$ в плоскости, 2) линия $L$ в пространстве, 3) поверхность $S$ в пространстве.

Интегралы по координате обладают теми же свойствами, что и интегралы по мере. Однако для них имеет место еще и следующее свойство: перемена ориентации области интегрирования изменяет знак интеграла на противоположный:

1) $$\int_L f(P)\,dx = -\int_{-L} f(P)\,dx, \tag{7.110}$$

где через $L$ и $-L$ обозначена одна и та же линия, но при противоположных ориентациях;

2) $$\int_S\int f(P)\,dx\,dy = -\int_{-S}\int f(P)\,dx\,dy, \tag{7.111}$$

где через $S$ и $-S$ обозначена одна и та же поверхность, но при противоположных ориентациях.

Вычисляются интегралы по координате следующим образом:

1) Если линия $l$ задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u), \quad u_1 \leqslant u \leqslant u_2,$$

где $\varphi$ и $\psi$ — дифференцируемые функции переменного $u$, то

$$\int_l f(P)\,dx = \int_{u_1}^{u_2} f[\varphi(u), \psi(u)]\,\varphi'(u)\,du. \tag{7.112}$$

2) Если линия $L$ задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u), \quad z = \chi(u), \quad u_1 \leqslant u \leqslant u_2,$$

где $\varphi$, $\psi$, $\chi$ — дифференцируемые функции переменного $u$, то

$$\int_L f(P)\,dx = \int_{u_1}^{u_2} f[\varphi(u), \psi(u), \chi(u)]\,\varphi'(u)\,du. \tag{7.113}$$

3) Если поверхность $S$ задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

где $\varphi$, $\psi$, $\chi$ — дифференцируемые функции переменных $u$, $v$ в ориентированной области $\Delta$ плоскости $Ouv$, соответствующей заданной ориентированной поверхности $S$, то

$$\int_S\int f(P)\,dx\,dy =$$

$$= \int_\Delta\int f[\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)]\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv, \quad (7.114)$$

где $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ — якобиан $x$, $y$ по $u$, $v$.

Подобным образом определяются и вычисляются криволинейные интегралы по другим координатам, как-то:

$$\int_l f(P)\,dy,$$

$$\int_L f(P)\,dy, \quad \int_L f(P)\,dz,$$

$$\int_S\int f(P)\,dx\,dz, \quad \int_S\int f(P)\,dy\,dz.$$

Часто применяются *составные* криволинейные интегралы по координатам:

1) $$\int_l X\,dx + Y\,dy \left(= \int_l X\,dx + \int_l Y\,dy\right), \quad (7.115)$$

2) $$\int_L X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \left(= \int_L X\,dx + \int_L Y\,dy + \int_L Z\,dz\right), \quad (7.116)$$

3) $$\int_S\int X\,dy\,dz + Y\,dx\,dz + Z\,dx\,dy$$

$$\left(= \int_S\int X\,dy\,dz + \int_S\int Y\,dx\,dz + \int_S\int Z\,dx\,dy\right), \quad (7.117)$$

где функции

в 1): $X = X(x, y)$ и $Y = Y(x, y)$,

в 2), 3): $X = X(x, y, z)$, $Y = Y(x, y, z)$ и $Z = Z(x, y, z)$

непрерывны в области интегрирования.

## § 3. Формулы преобразования интегралов

**1. Основная формула Грина.** Пусть дана конечная плоская область $D$, ограниченная линией $l$. Если функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ в области $D$ непрерывны вместе со своими производными первого порядка, то имеет место следующая *основная формула Грина*:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_l X\, dx + Y\, dy, \qquad (7.118)$$

где интегрирование по $l$ проводится в положительном направлении. Область $D$ может быть и многосвязной.

Если $(\widehat{n, x})$, $(\widehat{n, y})$ — углы, которые образует с осями $Ox$ и $Oy$ нормаль к линии $l$, направленная *вовне*, то тогда из основной формулы Грина можно получить другую формулу Грина, имеющую «симметричный» вид:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\, dy =$$

$$= \int\limits_l [X \cos(\widehat{n, x}) + Y \cos(\widehat{n, y})]\, ds, \qquad (7.119)$$

где $ds$ — элемент (дифференциал) длины линии $l$.

С помощью формулы Грина удобно вычислять некоторые криволинейные интегралы по замкнутому контуру, преобразуя их в двойные.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int\limits_C -x^2 y\, dx + xy^2\, dy,$$

где $C$ — окружность $x^2 + y^2 = R^2$, проходимая в положительном направлении.

Здесь

$$X = -x^2 y, \quad Y = xy^2.$$

Соответственно,

$$\frac{\partial X}{\partial Y} = -x^2, \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} = y^2$$

и поэтому

$$\int\limits_C -x^2y\,dx + xy^2\,dy = \iint\limits_D (y^2+x^2)\,dx\,dy,$$

где $D$ — круг $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

Полученный двойной интеграл можно вычислить повторным интегрированием в декартовых координатах (см. стр. 185), но в данном случае проще перейти к полярным координатам. Пользуясь второй формулой (7.104) и выражением для элемента площади в полярных координатах (4.59), находим

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3\,d\rho = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Формулу Грина можно применять лишь в том случае, когда функции $X$ и $Y$ непрерывны в области $D$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial X}{\partial y}$ и $\frac{\partial Y}{\partial x}$. При нарушении этих условий применение формулы Грина может привести к неверным результатам.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2},$$

где $C$ — произвольная замкнутая кривая.

Если применить формулу Грина, то вследствие равенства

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

получается, что интеграл равен нулю. Этот результат справедлив только тогда, когда начало координат не лежит внутри области $D$, ограниченной кривой $C$. Если же область $D$, ограниченная кривой $C$, содержит начало координат, то интеграл отличен от нуля. Например, для окружности

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

непосредственно получаем

$$\int\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

**2. Формула Стокса.** Пусть функции $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в пространственной области $V$, содержащей данную поверхность $S$ с границей $L$. Тогда имеет место *формула Стокса*:

$$\iint_S \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy = \\ = \int_L X\,dx + Y\,dy + Z\,dz. \quad (7.120)$$

При этом ориентации поверхности $S$ и линии $L$ согласованы между собой так, что при движении точки, взятой на той стороне $S$, по которой проводится поверхностное интегрирование, по $L$ в направлении криволинейного интегрирования поверхность $S$ остается слева.

Формулу Стокса можно записать с помощью интегралов по мере, а именно:

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(\widehat{n, x}) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos(\widehat{n, y}) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos(\widehat{n, z})\right] dq = \\ = \int_L [X\cos(\widehat{s, x}) + Y\cos(\widehat{s, y}) + Z\cos(\widehat{s, z})]\,ds, \quad (7.121)$$

где $(\widehat{n, x})$, $(\widehat{n, y})$, $(\widehat{n, z})$ — углы, образованные ориентированной нормалью к поверхности $S$ с осями $Ox$, $Oy$, $Oz$, а $(\widehat{s, x})$, $(\widehat{s, y})$, $(\widehat{s, z})$ — углы, образованные с этими осями ориентированной касательной к линии $L$.

Для независимости составного криволинейного интеграла

$$\int_L X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

от контура интегрирования $L$, принадлежащего односвязной области $V$, или, что равносильно, для равенства его нулю по любому замкнутому контуру, принадлежащему $V$, *необходимо и достаточно*, чтобы функции $X$, $Y$, $Z$, имеющие непрерывные частные производные первого порядка, во всех точках области $V$ удовлетворяли соотношениям

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}. \quad (7.122)$$

Выполнение этих равенств служит *необходимым и достаточным* условием того, что дифференциальное выражение $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ является *полным дифференциалом* некоторой функции $u=u(x, y, z)$:

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=du. \tag{7.123}$$

При этом функция $u$ называется *первообразной* для выражения $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ и может быть найдена по формуле

$$u(x, y, z)=\int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} X\,dx+Y\,dy+Z\,dz, \tag{7.124}$$

где интеграл берется по любому пути, принадлежащему $V$ и соединяющему точки $(x_0, y_0, z_0)$ и $(x, y, z)$.

Если функция $F(x, y, z)$ — какая-либо из первообразных для $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$, т. е. если $dF=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$, то

$$\int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} dF=F(x, y, z)-F(x_0, y_0, z_0).$$

Последняя формула служит аналогом формулы Ньютона — Лейбница для составных криволинейных интегралов в пространстве.

**3. Формула Остроградского.** Пусть $V$ — заданная пространственная область, ограниченная замкнутой поверхностью $S$. Если $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ — функции, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в области $V$, то имеет место *формула Остроградского*

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dv=$$

$$=\iint\limits_S X\,dy\,dz+Y\,dx\,dz+Z\,dx\,dy, \tag{7.125}$$

где интегрирование по поверхности $S$ производится по ее положительной (внешней) стороне.

Этой формуле можно придать другой вид, а именно:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint\limits_S [X\cos(\widehat{n, x})+Y\cos(\widehat{n, y})+Z\cos(\widehat{n, z})]\, dq, \quad (7.126)$$

где $(\widehat{n, x})$, $(\widehat{n, y})$, $(\widehat{n, z})$ — углы, образованные внешней нормалью к поверхности $S$ и осями $Ox$, $Oy$, $Oz$.

Для независимости составного поверхностного интеграла

$$\iint\limits_S X\, dy\, dz + Y\, dx\, dz + Z\, dx\, dy$$

от поверхности $S$, принадлежащей односвязной области $V$, или, что равносильно, для равенства его нулю по любой замкнутой поверхности, принадлежащей $V$, *необходимо и достаточно*, чтобы функции $X$, $Y$, $Z$, имеющие непрерывные частные производные первого порядка, во всех точках области $V$ удовлетворяли соотношению

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0.$$

**4. Формулы Грина и их обобщения.** Ниже приводится группа формул, носящих название *формул Грина*.

а) Линейный случай. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке $[x_1, x_2]$, то имеет место *формула Грина*

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \left(u\frac{d^2v}{dx^2}-v\frac{d^2u}{dx^2}\right) dx = \left(u\frac{dv}{dx}-v\frac{du}{dx}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} \quad (7.127)$$

Для ее обобщения вводится самосопряженный оператор $\mathscr{L}(\varphi)$ второго порядка

$$\mathscr{L}(\varphi)=\frac{d}{dx}\left(A\frac{d\varphi}{dx}\right)+C\varphi, \quad (7.128)$$

где $A$, $C$, $\varphi$ — какие-либо функции, заданные на отрезке $[x_1, x_2]$. Если сохранить требования, наложенные выше на функции $u$ и $v$, то для них окажется справедливой формула

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} [u\mathscr{L}(v) - v\mathscr{L}(u)]\,dx = A\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} \tag{7.129}$$

Эта формула называется *обобщенной формулой Грина в линейном случае.*

б) Плоский случай. Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции в области $D$, ограниченной замкнутой линией $l$. Тогда имеет место *формула Грина*

$$\iint\limits_{D} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dx\,dy = \int\limits_{l} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds, \tag{7.130}$$

где $\Delta u$, $\Delta v$ — лапласианы в точках области $D$, а $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ — *производные по направлению внешней нормали к линии $l$ от функций $u$ и $v$.*

Для ее обобщения вводится самосопряженный оператор $\mathscr{L}(\varphi)$ второго порядка

$$\mathscr{L}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + B\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial\varphi}{\partial x} + C\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + F\varphi, \tag{7.131}$$

где $A$, $B$, $C$, $F$, $\varphi$ — какие-либо функции, заданные в области $D$. Если сохранить требования, наложенные выше на функции $u$ и $v$, то для них окажется справедливой формула

$$\iint\limits_{D} [u\mathscr{L}(v) - v\mathscr{L}(u)]\,dx\,dy =$$
$$= \int\limits_{l} [X\cos(\widehat{n, x}) + Y\cos(\widehat{n, y})]\,ds, \tag{7.132}$$

где $(\widehat{n, x})$, $(\widehat{n, y})$ — углы, образованные внешней нормалью к линии $l$ и осями $Ox$ и $Oy$ соответственно, а $X$ и $Y$

определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} X&=A\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+B\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\ Y&=B\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+C\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right).\end{aligned}\right\}\quad(7.133)$$

Это и есть *обобщенная формула Грина в плоском случае.*

в) Пространственный случай. Пусть $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции в пространственной области $V$, ограниченной замкнутой поверхностью $S$. Тогда имеет место *формула Грина*

$$\iiint\limits_V (u\,\Delta v-v\,\Delta u)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_S\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dq,\quad(7.134)$$

где $\Delta u$, $\Delta v$ — лапласианы в точках области $V$, а $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ — *производные по направлению внешней нормали к поверхности* $S$ от функций $u$ и $v$.

Для обобщения этой формулы вводится самосопряженный оператор $\mathscr{L}(\varphi)$ второго порядка

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\varphi)=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+D\frac{\partial\varphi}{\partial y}+E\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)&+\\ +\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B\frac{\partial\varphi}{\partial y}+F\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)&+\\ +\frac{\partial}{\partial z}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial x}+F\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)&+H\varphi,\quad(7.135)\end{aligned}$$

где $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $H$, $\varphi$ — какие-либо функции, заданные в области $V$. Если сохранить требования, наложенные выше на функции $u$ и $v$, то для них окажется справедливой формула

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_V [u\mathscr{L}(v)-v\mathscr{L}(u)]\,dx\,dy\,dz=\\ &=\iint\limits_S [X\cos(\widehat{n,x})+Y\cos(\widehat{n,y})+Z\cos(\widehat{n,z})]\,dq,\quad(7.136)\end{aligned}$$

где $(\widehat{n, x})$, $(\widehat{n, y})$, $(\widehat{n, z})$ — углы, образованные внешней нормалью к поверхности $S$ и осями $Ox$, $Oy$, $Oz$ соответственно, а $X$, $Y$, $Z$ определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned}
X &= A\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + D\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \\
&\qquad\qquad + E\left(u\frac{\partial v}{\partial z} - v\frac{\partial u}{\partial z}\right),\\
Y &= D\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + B\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \\
&\qquad\qquad + F\left(u\frac{\partial v}{\partial z} - v\frac{\partial u}{\partial z}\right),\\
Z &= E\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \\
&\qquad\qquad + C\left(u\frac{\partial v}{\partial z} - v\frac{\partial u}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{7.137}$$

Это и есть *обобщенная формула Грина в пространственном случае.*

# ПРИЛОЖЕНИЕ

В виде дополнения к основному тексту здесь приводятся таблицы производных (первого и $n$-го порядков), разложений в степенной ряд и интегралов (неопределенных, определенных и кратных) от элементарных функций. Приводятся также числовые таблицы специальных функций, определяемых интегралами.

## 1. ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Производные первого порядка даны в таблице А. В первом столбце таблицы указано множество $X$, на котором дифференцируема функция $u(x)$, содержащаяся во втором столбце. В третьем столбце дается производная $u'(x)$, а в четвертом приводятся простейшие соотношения между функцией $u(x)$ и ее производной $u'(x)$ (дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет $u(x)$). Если $X$ совпадает со всей числовой прямой $E_1$, то обозначение $X$ в первом столбце опускается.

В таблице Б содержатся общие выражения производных $n$-го порядка некоторых элементарных функций.

Таблица А. **Производные первого порядка**

| $X$ | $u(x)$ | $u'(x)$ | Дифференциальное уравнение для $u(x)$ |
|---|---|---|---|
| $x \geqslant 0$ для $\alpha$ не целого | $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $u' = \dfrac{\alpha u}{x}$ |
| | $e^x$ | $e^x$ | $u' = u$ |
| | $a^x$ | $a^x \ln a$ | $u' = u \ln a$ |
| $x > 0$ | $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ | $u' = e^{-u}$ |
| $x \neq 0$ | $\ln\|x\|$ | $\dfrac{1}{x}$ | $u' = e^{-u}$ |
| $x > 0$ | $\log_a x \quad (a > 0)$ | $\dfrac{1}{x \ln a}$ <br> $\dfrac{\log_a e}{x}$ | $u' = \dfrac{a^{-u}}{\ln a}$ <br> $u' = a^{-u} \log_a e$ |

Продолжение

| $x$ | $u(x)$ | $u'(x)$ | Дифференциальное уравнение для $u(x)$ |
|---|---|---|---|
| | $\sin x$ | $\cos x$ | $u^2+(u')^2=1$ |
| | $\cos x$ | $-\sin x$ | |
| $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ | $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $u'=1+u^2$ |
| $x \neq \pi n$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ | $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ | $u'=-(1+u^2)$ |
| $\|x\|<1$ | $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $u'=\frac{1}{\cos u}$ |
| $\|x\|<1$ | $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $u'=-\frac{1}{\sin u}$ |
| | $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $u'=\cos^2 u$ |
| | $\operatorname{arcctg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ | $u'=-\sin^2 u$ |
| | $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x$ | $(u')^2=u^2+1$ |
| | $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{sh} x$ | $(u')^2=u^2-1$ |
| | $\operatorname{th} x$ | $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ | $u'=1-u^2$ |
| $x \neq 0$ | $\operatorname{cth} x$ | $-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ | |
| | $\operatorname{Arsh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $u'=\frac{1}{\operatorname{ch} u}$ |
| $\|x\|>1$ | $\operatorname{Arch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $u'=\frac{1}{\operatorname{sh} u}$ |
| $\|x\|<1$ | $\operatorname{Arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ | $\frac{1}{1-x^2}$ | $u'=\operatorname{ch}^2 u$ |
| $\|x\|>1$ | $\operatorname{Arcth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$ | $-\frac{1}{x^2-1}$ | $u'=-\operatorname{sh}^2 u$ |

Таблица Б. Производные $n$-го порядка

| $f(x)$ | $f^{(n)}(x)$ |
|---|---|
| $x^m$ | $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}$ (при целом $m$ и $n>m$ производная равна нулю) |
| $\dfrac{1}{x^m}$ | $(-1)^n m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)\,\dfrac{1}{x^{m+n}}$ |
| $\sqrt[m]{x}$ | $(-1)^{n-1}\dfrac{1}{m^n}(m-1)(2m-1)\ldots[(n-1)m-1]\dfrac{1}{\sqrt[m]{x^{mn-1}}}$ |
| $(ax+b)^m$ | $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,a^n(ax+b)^{m-n}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $e^{kx}$ | $k^n e^{kx}$ |
| $a^x$ | $a^x(\ln a)^n$ |
| $a^{kx}$ | $a^{kx}(k\ln a)^n$ |
| $\ln x$ | $(-1)^{n-1}(n-1)!\,\dfrac{1}{x^n}$ |
| $\log_a x$ | $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{\ln a}\,\dfrac{1}{x^n}$ |
| $\sin x$ | $\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin x & \text{при четном } n\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos x & \text{при нечетном } n\end{cases}$ |
| $\cos x$ | $\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\cos x & \text{при четном } n\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin x & \text{при нечетном } n\end{cases}$ |
| $\sin kx$ | $k^n\sin\left(kx+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ |
| $\cos kx$ | $k^n\cos\left(kx+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ |
| $\operatorname{sh} x$ | $\begin{cases}\operatorname{sh} x & \text{при четном } n\\ \operatorname{ch} x & \text{при нечетном } n\end{cases}$ |
| $\operatorname{ch} x$ | $\begin{cases}\operatorname{ch} x & \text{при четном } n\\ \operatorname{sh} x & \text{при нечетном } n\end{cases}$ |

## 2. РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННОЙ РЯД

Разложение элементарных функций в степенной ряд приведено в таблице В в первом столбце. Во втором столбце указана область сходимости ряда к разлагаемой функции.

Таблица В. **Разложение функций в степенной ряд**

| Разложение в ряд | Область сходимости ряда к заданной функции |
|---|---|
| $(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}a^{m-n}x^n + \dots$ | $-\lvert a\rvert < x < +\lvert a\rvert$ |
| $a^x = 1 + \frac{x\ln a}{1!} + \frac{x^2(\ln a)^2}{2!} + \dots + \frac{x^n(\ln a)^n}{n!} +$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \qquad + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} +$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} +$ | $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ |
| $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \dots\right)$ | $-\pi < x < \pi$ кроме $x = 0$ |

Продолжение

| Разложение в ряд | Область сходимости ряда к заданной функции |
|---|---|
| $\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$ $+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)(2n+1)} +$ | $-1 < x < 1$ |
| $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} +$ $+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} +$ | $-1 \leqslant x \leqslant 1$ |
| $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \quad + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} +$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \quad + \frac{x^{2n}}{(2n)!} +$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} +$ | $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ |
| $\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} +$ | $-\pi < x < \pi$ кроме $x = 0$ |
| $\operatorname{Arsh} x = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} +$ $+ (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)(2n+1)} +$ | $-1 \leqslant x \leqslant 1$ |
| $\operatorname{Arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \quad + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} +$ | $-1 < x < 1$ |
| $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$ $+ (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} +$ | $-1 < x \leqslant 1$ |

Продолжение

| Разложение в ряд | Область сходимости ряда к заданной функции |
|---|---|
| $\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1} + \ldots\right]$ | $x > 0$ |
| $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n+1} + \ldots\right)$ | $-1 < x < 1$ |
| $\ln\frac{x+1}{x-1} = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)\,x^{2n+1}} + \ldots\right]$ | $x < -1, \quad x > 1$ |
| $\operatorname{sh} x + \sin x = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots\right)$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\operatorname{sh} x - \sin x = 2\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} + \ldots\right)$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\operatorname{ch} x + \cos x = 2\left(1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots\right)$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\operatorname{ch} x - \cos x = 2\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} + \ldots\right)$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\operatorname{th} x + \operatorname{tg} x = 2\left(x + \frac{2}{15}x^5 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots\right)$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\operatorname{th} x - \operatorname{tg} x = -2\left(\frac{x^3}{3} + \frac{17}{315}x^7 + \frac{1382}{155925}x^{11} + \ldots\right)$ | $-\infty < x < +\infty$ |

## 3. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Интегралы от элементарных функций приведены в таблице Г (неопределенные интегралы), в таблице Д (определенные интегралы) и в таблице Е (кратные интегралы). Более подробные таблицы интегралов см. в [4], [10] и [22].

### Таблица Г. Неопределенные интегралы[1])

1. $$\int (ax+b)^\nu dx = \frac{1}{(\nu+1)a}(ax+b)^{\nu+1}+C \qquad (\nu \neq -1).$$

2. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.$$

3. $$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}}+\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}\ln|x-a|+C$$

($P_n(x)$ — многочлен $n$-й степени).

4. $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+C \qquad (a \neq 0).$$

5. $$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C = -\frac{1}{a}\operatorname{Arcth}\frac{x}{a}+C \qquad (|x|>a,\ a\neq 0).$$

6. $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C = \frac{1}{a}\operatorname{Arth}\frac{x}{a}+C \qquad (|x|<a,\ a\neq 0).$$

7. $$\int \frac{dx}{(a^2\pm x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2\pm x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int\frac{dx}{(a^2\pm x^2)^{n-1}} \qquad (n\neq 1,\ a\neq 0).$$

8. $$\int \frac{dx}{ax^2+b} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}\,x+C \qquad (ab>0).$$

---

[1]) Если для одного интеграла приведено несколько выражений, то $C$ могут быть разные.

9. $$\int \frac{dx}{ax^2 - b} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{ab} - ax}{\sqrt{ab} + ax} \right| + C \qquad (ab > 0).$$

10. $$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C & (4ac - b^2 > 0), \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \dfrac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| + C & (4ac - b^2 < 0), \\ -\dfrac{2}{2ax + b} + C & (4ac - b^2 = 0). \end{cases}$$

11. $$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{2ax + b}{(n-1)(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} +$$
$$+ \frac{2(2n-3)a}{(n-1)(4ac - b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \qquad (n \neq 1, \ a \neq 0).$$

12. $$\int \frac{Mx + N}{(x + a)(x + b)} dx =$$
$$= \frac{1}{b - a} [(N - Ma) \ln |x + a| - (N - Mb) \ln |x + b|] + C \quad (a \neq b).$$

13. $$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx =$$
$$= \frac{M}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2aN - Mb}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (a \neq 0).$$

14. $$\int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = -\frac{M}{2(n-1)a(ax^2 + bx + c)^{n-1}} +$$
$$+ \frac{2aN - bM}{2a} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} \qquad (n \neq 1, \ a \neq 0).$$

15. $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

16. $$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C =$$
$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} + C.$$

17. $$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C.$$

18. $$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

19. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C.$$

20. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C = \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C.$$

21. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C = \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C.$$

22. $$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} = -\frac{n}{a-b}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} + C$$

($n$ — натуральное число, $a \neq b$).

23. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right| + C \quad (a>0),$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{Arsh}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C \qquad (a>0,\ 4ac-b^2>0),$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C \qquad (a<0,\ 4ac-b^2<0),$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b| + C \qquad (a>0,\ 4ac-b^2=0).$$

24. $$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{2aN-Mb}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

25. $$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}}{na} - \frac{(n-1)c}{na}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{(2n-1)b}{2na}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

26. $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C.$

27. $\int a^{kx}\,dx = \frac{a^{kx}}{k\ln a} + C.$

28. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C.$

29. $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$

30. $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C.$

31. $\int \operatorname{tg} ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C.$

32. $\int \operatorname{ctg} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C.$

33. $\int \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{ch} ax + C.$

34. $\int \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sh} ax + C.$

35. $\int \operatorname{th} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{ch} ax| + C.$

36. $\int \operatorname{cth} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{sh} ax| + C.$

37. $\int \arcsin\frac{x}{a}\,dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

38. $\int \arccos\frac{x}{a}\,dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

39. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2 + x^2) + C.$

40. $\int \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2 + x^2) + C.$

41. $\int \operatorname{Arsh}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 + x^2} + C.$

42. $\int \operatorname{Arch}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arch}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2 - a^2} + C.$

19 Зак. 2618. И. Г. Араманович и др.

43. $\int \operatorname{Arth} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln |a^2 - x^2| + C.$

44. $\int \operatorname{Arcth} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln |x^2 - a^2| + C.$

45. $\int \operatorname{sh} ax \sin ax\, dx = \frac{1}{2a} (\operatorname{ch} ax \sin ax - \operatorname{sh} ax \cos ax) + C.$

46. $\int \operatorname{ch} ax \cos ax\, dx = \frac{1}{2a} (\operatorname{sh} ax \cos ax + \operatorname{ch} ax \sin ax) + C.$

47. $\int \operatorname{sh} ax \cos ax\, dx = \frac{1}{2a} (\operatorname{ch} ax \cos ax + \operatorname{sh} ax \sin ax) + C.$

48. $\int \operatorname{ch} ax \sin ax\, dx = \frac{1}{2a} (\operatorname{sh} ax \sin ax - \operatorname{ch} ax \cos ax) + C.$

49. $$\int \sin ax \sin bx\, dx = \frac{1}{2(a-b)} \sin (a-b) x - \frac{1}{2(a+b)} \sin (a+b) x + C \qquad (a^2 \neq b^2).$$

50. $$\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2(a-b)} \sin (a-b) x + \frac{1}{2(a+b)} \sin (a+b) x + C \quad (a^2 \neq b^2).$$

51. $$\int \sin ax \cos bx\, dx = -\frac{1}{2(a+b)} \cos (a+b) x - \frac{1}{2(a-b)} \cos (a-b) x + C \qquad (a^2 \neq b^2).$$

52. $$\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx\, dx = \frac{1}{2(a+b)} \operatorname{sh} (a+b) x - \frac{1}{2(a-b)} \operatorname{sh} (a-b) x + C \qquad (a^2 \neq b^2).$$

53. $$\int \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx\, dx = \frac{1}{2(a+b)} \operatorname{sh} (a+b) x + \frac{1}{2(a-b)} \operatorname{sh} (a-b) x + C \qquad (a^2 \neq b^2).$$

54. $$\int \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} bx\, dx = \frac{1}{2(a+b)} \operatorname{ch} (a+b) x + \frac{1}{2(a-b)} \operatorname{ch} (a-b) x + C \qquad (a^2 \neq b^2).$$

55. $\int \operatorname{sh} ax \sin bx\, dx = \frac{1}{a^2+b^2}(a \operatorname{ch} ax \sin bx - b \operatorname{sh} ax \cos bx) + C.$

56. $\int \operatorname{ch} ax \cos bx\, dx = \frac{1}{a^2+b^2}(a \operatorname{sh} ax \cos bx + b \operatorname{ch} ax \sin bx) + C.$

57. $\int \operatorname{sh} ax \cos bx\, dx = \frac{1}{a^2+b^2}(a \operatorname{ch} ax \cos bx + b \operatorname{sh} ax \sin bx) + C.$

58. $\int \operatorname{ch} ax \sin bx\, dx = \frac{1}{a^2+b^2}(a \operatorname{sh} ax \sin bx - b \operatorname{ch} ax \cos bx) + C.$

59. $\int \left(\arcsin \frac{x}{a}\right)^2 dx =$

$$= x\left(\arcsin \frac{x}{a}\right)^2 + 2\sqrt{a^2-x^2}\arcsin\frac{x}{a} - 2x + C.$$

60. $\int \left(\operatorname{arscos} \frac{x}{a}\right)^2 dx =$

$$= x\left(\arccos \frac{x}{a}\right)^2 - 2\sqrt{a^2-x^2}\arccos\frac{x}{a} - 2x + C.$$

61. $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx =$

$$= x\,[(\ln x)^n - n(\ln x)^{n-1} + n(n-1)(\ln x)^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} n(n-1)\ldots 2\ln x + (-1)^n n!] + C$$

($n$ — натуральное число).

62. $\int \sin^n ax\, dx = -\frac{1}{na}\sin^{n-1} ax \cos ax +$

$$+ \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\, dx \qquad (n \neq 0).$$

63. $\int \cos^n ax\, dx = \frac{1}{na}\cos^{n-1} ax \sin ax +$

$$+ \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\, dx \qquad (n \neq 0).$$

64. $\int \operatorname{tg}^n ax\, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} ax}{(n-1)a} - \int \operatorname{tg}^{n-2} ax\, dx \qquad (n \neq 1).$

65. $\int \operatorname{ctg}^n ax\, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} ax}{(n-1)a} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} ax\, dx \qquad (n \neq 1).$

66. $\int \operatorname{sh}^n ax\, dx = \frac{1}{an}\operatorname{sh}^{n-1} ax \operatorname{ch} ax - \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sh}^{n-2} ax\, dx \quad (n \neq 0).$

67. $\int \operatorname{ch}^n ax\,dx = \frac{1}{an}\operatorname{ch}^{n-1} ax \operatorname{sh} ax + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{ch}^{n-2} ax\,dx \quad (n \neq 0).$

68. $\int \operatorname{th}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{th}^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \operatorname{th}^{n-2} ax\,dx \quad (n \neq 1).$

69. $\int \operatorname{cth}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{cth}^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \operatorname{cth}^{n-2} ax\,dx \quad (n \neq 1).$

70. $\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right| + C.$

71. $\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

72. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{th}\frac{ax}{2}\right| + C.$

73. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} ax} = \frac{2}{a}\operatorname{arctg} e^{ax} + C.$

74. $\int \frac{dx}{b + c\sin ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{b\operatorname{tg}\frac{ax}{2}+c}{\sqrt{b^2-c^2}} + C \quad (b^2 > c^2),$

$$= \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\left|\frac{b\operatorname{tg}\frac{ax}{2}+c-\sqrt{c^2-b^2}}{b\operatorname{tg}\frac{ax}{2}+c+\sqrt{c^2-b^2}}\right| + C \quad (b^2 < c^2).$$

75. $\int \frac{dx}{b + c\cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right) + C \quad (b^2 > c^2),$

$$= \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\left|\frac{(c-b)\operatorname{tg}\frac{ax}{2}+\sqrt{c^2-b^2}}{(c-b)\operatorname{tg}\frac{ax}{2}-\sqrt{c^2-b^2}}\right| + C \quad (b^2 < c^2)$$

76. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax + C.$

77. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax + C.$

78. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{cth} ax + C.$ 78a. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{th} ax + C.$

79. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} =$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right| + C \quad [\sin(a-b) \neq 0].$$

80. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)} =$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \ln\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right| + C \qquad [\sin(a-b) \neq 0].$$

81. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)} = \frac{1}{\cos(a-b)} \ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right| + C$

$$[\cos(a-b) \neq 0].$$

82. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{(n-1)a}\frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax} \quad (n \neq 1).$

83. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{(n-1)a}\frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax} \quad (n \neq 1).$

84. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^n ax} = \frac{1}{(1-n)a}\frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh}^{n-1} ax} - \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{n-2} ax} \quad (n \neq 1).$

85. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^n ax} = \frac{1}{(n-1)a}\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch}^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n-2} ax} \quad (n \neq 1).$

86. $\displaystyle\int \sin^p x \cos^q x\, dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} +$

$$+ \frac{q-1}{p+q}\int \sin^p x \cos^{q-2} x\, dx = -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{p+q} +$$

$$+ \frac{p-1}{p+q}\int \sin^{p-2} x \cos^q x\, dx \quad (p \text{ и } q > 0).$$

87. $\displaystyle\int \sin^{-p} x \cos^q x\, dx = -\frac{\sin^{-p+1} x \cos^{q+1} x}{p-1} +$

$$+ \frac{p-q-2}{p-1}\int \sin^{-p+2} x \cos^q x\, dx \quad (p \neq 1).$$

88. $\displaystyle\int \sin^p x \cos^{-q} x\, dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{-q+1} x}{q-1} +$

$$+ \frac{q-p-2}{q-1}\int \sin^p x \cos^{-q+2} x\, dx \qquad (q \neq 1).$$

89. $\displaystyle\int x e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C.$

90. $\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$

91. $\int x \sin ax\, dx = -\frac{1}{a} x \cos ax + \frac{1}{a^2} \sin ax + C.$

92. $\int x \cos ax\, dx = \frac{1}{a} x \sin ax + \frac{1}{a^2} \cos ax + C.$

93. $\int x \operatorname{sh} ax\, dx = \frac{1}{a} x \operatorname{ch} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} ax + C.$

94. $\int x \operatorname{ch} ax\, dx = \frac{1}{a} x \operatorname{sh} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{ch} ax + C.$

95. $\int x \arcsin \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{4}\left[(2x^2 - a^2) \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right] + C.$

96. $\int x \arccos \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{4}\left[(2x^2 - a^2) \arccos \frac{x}{a} - x\sqrt{a^2 - x^2}\right] + C.$

97. $\int x \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{2}\left[(x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - ax\right] + C.$

98. $\int x \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{2}\left[(x^2 + a^2) \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + ax\right] + C.$

99. $\int x \operatorname{Arsh} \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{4}\left[(2x^2 + a^2) \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} - x\sqrt{a^2 + x^2}\right] + C.$

100. $\int x \operatorname{Arch} \frac{x}{a}\, dx =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4}\left[(2x^2 - a^2) \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - x\sqrt{x^2 - a^2}\right] + C & \left(\operatorname{Arch} \frac{x}{a} > 0\right), \\ \frac{1}{4}\left[(2x^2 - a^2) \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + x\sqrt{x^2 - a^2}\right] + C & \left(\operatorname{Arch} \frac{x}{a} < 0\right). \end{cases}$$

101. $\int e^{ax} \sin(\omega x + \varphi)\, dx =$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2 + \omega^2}\left[a \sin(\omega x + \varphi) - \omega \cos(\omega x + \varphi)\right] + C.$$

102. $\int e^{ax} \cos(\omega x + \varphi)\, dx =$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2 + \omega^2}\left[a \cos(\omega x + \varphi) + \omega \sin(\omega x + \varphi)\right] + C.$$

103. $\int xe^{ax}\sin(\omega x+\varphi)\,dx =$

$$= \frac{xe^{ax}}{a^2+\omega^2}[a\sin(\omega x+\varphi)-\omega\cos(\omega x+\varphi)] -$$

$$-\frac{e^{ax}}{(a^2+\omega^2)^2}[(a^2-\omega^2)\sin(\omega x+\varphi)-2a\omega\cos(\omega x+\varphi)]+C.$$

104. $\int xe^{ax}\cos(\omega x+\varphi)\,dx =$

$$= \frac{xe^{ax}}{a^2+\omega^2}[a\cos(\omega x+\varphi)+\omega\sin(\omega x+\varphi)] -$$

$$-\frac{e^{ax}}{(a^2+\omega^2)^2}[(a^2-\omega^2)\cos(\omega x+\varphi)+2a\omega\sin(\omega x+\varphi)]+C.$$

105. $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx.$

106. $\int x^n \ln x\,dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C.$

107. $\int x^n \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}x^n\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx.$

108. $\int x^n \cos ax\,dx = \frac{1}{a}x^n\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx.$

109. $\int x^n \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{1}{a}x^n\operatorname{ch} ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{ch} ax\,dx.$

110. $\int x^n \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{1}{a}x^n\operatorname{sh} ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{sh} ax\,dx.$

111. $\int x^n \arcsin\frac{x}{a}\,dx =$

$$= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\arcsin\frac{x}{a} - \int\frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) \qquad (n\neq -1).$$

112. $\int x^n \arccos\frac{x}{a}\,dx =$

$$= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\arccos\frac{x}{a} + \int\frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) \qquad (n\neq -1).$$

113. $$\int x^n \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - a\int\frac{x^{n+1}\,dx}{a^2+x^2}\right)$$

$(n \neq -1).$

114. $$\int x^n \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + a\int\frac{x^{n+1}\,dx}{a^2+x^2}\right)$$

$(n \neq -1).$

115. $$\int P(x)\,e^{ax}\,dx = e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \ldots + (-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right] + C$$

[$P(x)$ — многочлен степени $n$].

116. $$\int P(x)\sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{\mathrm{IV}}(x)}{a^4} - \ldots\right] + \frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{\mathrm{V}}(x)}{a^4} - \ldots\right] + C.$$

117. $$\int P(x)\cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{\mathrm{IV}}(x)}{a^4} - \ldots\right] + \frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{\mathrm{V}}(x)}{a^4} - \ldots\right] + C.$$

## Таблица Д. Определенные интегралы

118. $$\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \mathrm{B}\left(\frac{m+1}{n},\ p-\frac{m+1}{n}\right)$$ [1]

$$\left(0 < \frac{m+1}{n} < p, \qquad a>0,\ b>0,\ n>0\right).$$

119. $$\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(x+a)^{m+n}}\,dx = \frac{1}{a^n(1+a)^m}\,\mathrm{B}(m, n) \quad (m>0,\ n>0).$$

120. $$\int_a^b \frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}\,dx = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}\,\mathrm{B}(m+1, n+1) \quad (m>-1,\ n>-1).$$

---

[1] $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ — бета-функция Эйлера (см. стр. 329).

121. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx = \pi\operatorname{ctg}\pi p \qquad (0 < p < 1).$

122. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}} \qquad (0 < m < n).$

123. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}\,dx = \mathrm{B}(n-m,\ m) \qquad (0 < m < n).$

124. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} = \frac{1}{m}\mathrm{B}\left(\frac{1}{m},\ 1-\frac{1}{n}\right) \qquad (n < 0 \text{ или } n > 1,\ m > 0).$

125. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{\sqrt{3}}{\pi\sqrt[3]{4}}\Gamma^3\left(\frac{2}{3}\right)$[1].

126. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right).$

127. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$

128. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^n}\,dx = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n > 0).$

129. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

130. $\displaystyle\int_0^\infty x^m e^{-x^n}\,dx = \frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \qquad \left(\frac{m+1}{n} > 0\right).$

131. $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n! \qquad (n > 0 \text{ и целое}).$

---

[1]) $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера (см. стр. 329).

132. $$\int_0^\infty x^n e^{-x^2}\,dx = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{k+1}} & \text{при } n = 2k, \\ \dfrac{k!}{2} & \text{при } n = 2k+1. \end{cases}$$

133. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha} \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

134. $$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx = \ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}} \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

135. $$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}\operatorname{ch} bx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2}{4a}} \qquad (a > 0).$$

136. $$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}\operatorname{sh}^2 bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(e^{\frac{b^2}{a}} - 1\right) \qquad (a > 0).$$

137. $$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-2a} \qquad (a > 0).$$

138. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}\right) \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

139. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\beta x}\,dx = \frac{\pi}{2\beta}\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2\beta} \qquad (0 < \alpha < \beta).$$

140. $$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx = \Gamma(p+1) \qquad (p > -1).$$

141. $$\int_0^1 \ln(px+q)\,dx = \frac{p+q}{p}\ln(p+q) - \frac{q}{p}\ln q - 1.$$

142. $$\int_0^1 \ln x \ln(1-x)\,dx = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

143. $\int_0^1 \ln x \ln(1+x)\,dx = 2 - \frac{\pi^2}{12} - 2\ln 2.$

144. $\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\,dx = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$

145. $\int_0^\infty x^p e^{-ax}\ln x\,dx = \frac{d}{dp}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right] \qquad (p > -1,\ a > 0).$

146. $\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx = (-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$

147. $\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{1-x} = -\frac{\pi^2}{6}.$

148. $\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{1+x} = -\frac{\pi^2}{12}.$

149. $\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{1-x^2} = -\frac{\pi^2}{8}.$

150. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{8}\ln 2.$

151. $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx = -\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi} \qquad (0 < p < 1).$

152. $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}\,dx = \pi^3\frac{1+\cos^2 p\pi}{\sin^3 p\pi} \qquad (0 < p < 1).$

153. $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\,dx = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{p\pi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{q\pi}{2}}\right| \qquad (0 < p < 1,\ 0 < q < 1).$

154. $$\int_0^\infty \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|) \qquad (\beta\neq 0).$$

155. $$\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\pi\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right) \qquad (|\alpha|\leqslant 1).$$

156. $$\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2} \qquad (|\alpha|\leqslant 1).$$

157. $$\int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}\,dx=$$
$$=\frac{2\pi}{3}\left[\alpha\beta(\alpha-\beta)+\alpha^3\ln\alpha+\beta^3\ln\beta-(\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)\right]$$
$$(\alpha>0,\ \beta>0).$$

158. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}x\,dx=$$
$$=\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)} \qquad (n>0 \text{ и целое}).$$

159. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}x\,dx=$$
$$=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2} \qquad (n>0 \text{ и целое}).$$

160. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx=\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \qquad (n>-1).$$

161. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x\cos^{2m+1}x\,dx=\frac{m!\,n!}{2(m+n+1)!}$$
$$(m>0,\ n>0,\ m \text{ и } n \text{ — целые}).$$

162. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha+1} x \cos^{2\beta+1} x\, dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\alpha+\beta+2)}.$

163. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx = \frac{\pi\,(2m)!\,(2n)!}{2^{2m+2n+1} m!\,n!\,(m+n)!}$

$(m > 0,\ n > 0,\ m$ и $n$ — целые).

164. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \quad (m > -1,\ n > -1).$

165. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^n x\, dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}} \qquad (-1 < n < 1).$

166. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x\, dx =$

$= (-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}\right)\right].$

167. $\int\limits_0^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx =$

$= \int\limits_0^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \quad (m,\ n = 0,\ \pm 1, \ldots), \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } m = n. \end{cases}$

168. $\int\limits_0^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0 \qquad (m$ и $n$ — целые).

169. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном}; \\ \pi & \text{при } n \text{ нечетном}; \end{cases}$

170. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos (2n+1)x}{\cos x}\, dx = (-1)^n \pi.$

171. $\int\limits_0^{\pi} \sin^n x \sin nx\, dx = \frac{\pi}{2^n} \sin \frac{n\pi}{2}.$

172. $\int\limits_0^{\pi} \cos^n x \cos nx\, dx = \frac{\pi}{2^n}.$

173. $\int\limits_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos (n+1)\, x\, dx = \int\limits_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin (n+1)\, x\, dx = 0.$

174. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{2}} x\, dx = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$

175. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi\sqrt[3]{4}} \Gamma^3\left(\frac{2}{3}\right).$

176. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\sqrt[3]{2}} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right).$

177. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$

178. $\int\limits_0^{\infty} \sin (x^2)\, dx = \int\limits_0^{\infty} \cos (x^2)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

179. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

180. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha$ (интеграл Дирихле).

181. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x}\, dx = +\infty.$

182. $$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x}\,dx = \ln\frac{\beta}{\alpha} \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

183. $$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x - \sin\beta x}{x}\,dx = 0 \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

184. $$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x \sin\beta x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|.$$

185. $$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x \cos\beta x}{x}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } |\alpha| < |\beta|, \\ \dfrac{\pi}{4} & \text{при } |\alpha| = |\beta|, \\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha & \text{при } |\alpha| > |\beta|. \end{cases}$$

186. $$\int_0^\infty \frac{\sin^3 \alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\alpha.$$

187. $$\int_0^\infty \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x}\,dx = \frac{3}{8}\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|.$$

188. $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}|\alpha|.$$

189. $$\int_0^\infty \frac{\sin^3 \alpha x}{x^3}\,dx = \frac{3}{8}\pi\alpha|\alpha|.$$

190. $$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

191. $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2}).$$

192. $$\int_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha\, e^{-|\alpha|}.$$

193. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}.$

194. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi(1+|\alpha|)}{4} e^{-|\alpha|}.$

195. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x^m}\,dx = \frac{\pi \alpha^{m-1}}{2\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}}$ $(0<m<2,\ \alpha>0).$

196. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{x^m}\,dx = \frac{\pi \alpha^{m-1}}{2\Gamma(m)\cos\frac{m\pi}{2}}$ $(0<m<1,\ \alpha>0).$

197. $\int\limits_0^\pi \frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}\,dx = \frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}} \mathrm{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$

$(n>0,\ 0<|k|<1).$

198. $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\sin \beta x\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$

199. $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\cos \beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}.$

200. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$

$(\alpha>0,\ \beta>0,\ m\neq 0).$

201. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$ $(\alpha>0,\ \beta>0).$

202. $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\,\frac{\sin \alpha x}{x}\,\frac{\sin \beta x}{x}\,dx =$

$$= \frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{k} - \frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{k} + \frac{k}{4}\ln\frac{k^2+(\alpha-\beta)^2}{k^2+(\alpha+\beta)^2}$$

$(k\geqslant 0,\ \alpha>0,\ \beta>0).$

203. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}\qquad(\alpha>0).$

204. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-\alpha x^2}\sin\beta x\,dx=\frac{\beta\sqrt{\pi}}{4\alpha\sqrt{\alpha}}\,e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}\qquad(\alpha>0).$

205. $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\,\frac{d^{2n}\left(e^{-b^2}\right)}{db^{2n}}$

($n$ — натуральное число).

206. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}\,dx=\pi\frac{|\beta|}{2}-\sqrt{\pi\alpha}\qquad(\alpha>0).$

207. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right)dx=\pi\ln\frac{a+b}{2}.$

208. $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)dx=\begin{cases}0 & \text{при}\quad |a|\leqslant 1;\\ \pi\ln a^2 & \text{при}\quad |a|>1.\end{cases}$

209. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\,\frac{dx}{\cos x}=\pi\arcsin a\qquad(|a|<1).$

210. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha\,\ln(1+|\alpha|).$

211. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\operatorname{arctg}\alpha x-\operatorname{arctg}\beta x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\ln\frac{\alpha}{\beta}\qquad(\alpha>0,\ \beta>0).$

212. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\operatorname{arctg}\alpha x\operatorname{arctg}\beta x}{x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha\beta^\beta}\qquad(\alpha>0,\ \beta>0).$

213. $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha\left(1+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^2}\right).$

214. $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx = \ln\sqrt{2\pi}$.

215. $\int_a^{a+1} \ln\Gamma(x)\,dx = \ln\sqrt{2\pi} + a(\ln a - 1) \qquad (a > 0)$.

216. $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\sin\pi x\,dx = \frac{1}{\pi}\left(1 + \ln\frac{\pi}{2}\right)$.

217. $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos(2n\pi x)\,dx = \frac{1}{4n}$ ($n$ — натуральное число).

218. $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\,dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x$;

219. $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x$

} *формулы Эйлера*

$\left(\lambda > 0,\ x > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

## Таблица Е. Кратные интегралы

220. $\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n = \int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,du$.

221. $\int_0^x x_1\,dx_1 \int_0^{x_1} x_2\,dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} x_n f(x_n)\,dx_n =$

$$= \frac{1}{2^n n!}\int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u)\,du.$$

222. $\int_0^1\int_0^1 \ldots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n = \frac{n}{3}$.

223. $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1 (x_1+x_2+\ldots+x_n)^2\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=\frac{n(3n+1)}{12}.$

224. $\int\int\underset{\Omega}{\ldots}\int dx_1\,dx_2\ldots dx_n=\frac{a^n}{n!},$

где $\Omega$—область, определяемая неравенствами $x_i\geqslant 0\ (i=1, 2, \ldots, n)$ и $x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant a$.

225. $\int\int\underset{\Omega}{\ldots}\int x_n^2\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}a^{n-1}h^3}{12\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$

где область $\Omega$ определяется неравенствами

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2\leqslant a^2,\quad -\frac{h}{2}\leqslant x_n\leqslant\frac{h}{2}.$$

226. $\int\int\underset{\Omega}{}\int\frac{dx_1\,dx_2\ldots dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2}}=\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$

где $\Omega$ — область, определяемая неравенством

$$x_1^2+x_2^2+\quad+x_n^2\leqslant 1.$$

Если $f(u)$ — непрерывная функция, то при $n\geqslant 2$

227. $\int\int\underset{\Omega}{\ldots}\int f\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\quad+x_n^2}\right)dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$

$$=2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_0^R f(r)\,r^{n-1}\,dr,$$

где $\Omega$ — область, определяемая неравенством

$$x_1^2+x_2^2+\quad+x_n^2\leqslant R^2.$$

228. $\int\int\underset{\Omega}{\ldots}\int x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2,\ldots,dx_n=$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\quad+p_n+1)}\qquad(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n>0),$$

где $\Omega$ — область, определяемая неравенствами

$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0,\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant 1$ (*формула Дирихле*).

229. $$\int\int\limits_{\Omega}\ldots\int f(x_1+x_2+\ldots+x_n)\,x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n)}\int\limits_0^1 f(u)\,u^{p_1+p_2+\ldots+p_n-1}\,du$$

($p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$), где $f(u)$ — непрерывная функция и интеграл справа абсолютно сходится, а $\Omega$ — область, определяемая неравенствами $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$, $x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant 1$ (*формула Лиувилля*).

Если $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывная функция в области $0 \leqslant x_i \leqslant x$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то

230. $$\int\limits_0^x dx_1\int\limits_0^{x_1} dx_2\ldots\int\limits_0^{x_{n-1}} f\,dx_n=\int\limits_0^x dx_n\int\limits_{x_n}^x dx_{n-1}\ldots\int\limits_{x_2}^x f\,dx_1 \quad (n \geqslant 2).$$

Если $K(x, y)$ — непрерывная функция в области $R[a \leqslant x \leqslant b;\ a \leqslant y \leqslant b]$ и

$$K_n(x, y)=\int\limits_a^b\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b K(x, t_1)\,K(t_1, t_2)\ldots K(t_n, y)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n,$$

то

231. $$K_{n+m}(x, y)=\int\limits_a^b K_n(x, t)\,K_m(t, y)\,dt.$$

Если $\sum\limits_{i, j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ — положительно определенная форма, то

232. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left\{\sum\limits_{i, j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j+2\sum\limits_{i=1}^{n} b_ix_i+c\right\}}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$
$$=\sqrt{\frac{\pi^n}{|\delta|}}\,e^{-\frac{\Delta}{\delta}},$$

где $\delta = |a_{ij}|$, $\Delta = \left|\begin{array}{c:c} a_{ij} & b_i \\ \hdashline b_j & c \end{array}\right|$ — окаймленный определитель.

Объем $n$-мерного параллелепипеда, ограниченного плоскостями

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \pm h_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

если $\Delta = |a_{ij}| \neq 0$, равен

233. $V_n = \dfrac{2^n h_1 h_2 \ldots h_n}{|\Delta|}$.

Объем $n$-мерной пирамиды, ограниченной плоскостями

$$x_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n}{a_n} \leqslant 1 \quad (a_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n),$$

равен

234. $V_n = \dfrac{a_1 a_2 \ldots a_n}{n!}$.

Объем $n$-мерного конуса, ограниченного поверхностями

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad x_n = a_n,$$

равен

235. $V_n = \dfrac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} a_1 a_2 \ldots a_n$.

Объем $n$-мерного шара $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant a^2$ равен

236. $V_n = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}} a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$,

в частности,

237. $V_{2m} = \dfrac{\pi^m}{m!} a^{2m}$,

238. $V_{2m+1} = \dfrac{2(2\pi)^m a^{2m+1}}{(2m+1)!!}$.

Площадь $n$-мерной шаровой поверхности $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a^2$ равна

239. $S_n = 2\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}} a^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

Для вычисления объема $V_n$ и площади $S_n$ поверхности $n$-мерной сферы можно также применять следующие формулы:

240. $V_n = \frac{\pi^\nu}{\nu!} R^n$ при $n = 2\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$,

241. $V_n = \frac{\pi^\nu \nu!}{n!} (2R)^n$ при $n = 2\nu + 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

242. $S_n = \frac{n}{R} V_n$,

где $R$ — радиус сферы.

В частности,

243. $V_2 = \pi R^2$, $S_2 = 2\pi R$;

244. $V_3 = \frac{4}{3} \pi R^3$, $S_3 = 4\pi R^2$;

245. $V_4 = \frac{\pi^2}{2} R^4$, $S_4 = 2\pi^2 R^3$;

246. $V_5 = \frac{8}{15} \pi^2 R^5$, $S_5 = \frac{8}{3} \pi^2 R^4$;

247. $V_6 = \frac{\pi^3}{6} R^6$, $S_6 = \pi^3 R^5$;

248. $V_7 = \frac{16}{105} \pi^3 R^7$, $S_7 = \frac{16}{15} \pi^3 R^6$;

249. $V_8 = \frac{\pi^4}{24} R^8$, $S_8 = \frac{\pi^4}{3} R^7$;

250. $V_9 = \frac{32}{945} \pi^4 R^9$, $S_9 = \frac{32}{105} \pi^4 R^8$;

251. $V_{10} = \frac{\pi^5}{120} R^{10}$, $S_{10} = \frac{\pi^5}{12} R^9$.

При $n \gg 1$ имеют место асимптотические формулы:

252. $V_n \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left( \frac{2\pi e}{n} \right)^{\frac{n}{2}} R^n$,

253. $S_n \approx \sqrt{\frac{n}{\pi}} \left( \frac{2\pi e}{n} \right)^{\frac{n}{2}} R^{n-1}$.

Потенциал $u$ однородного шара радиуса $R$ и плотности $\delta_0$ равен

$$254.\quad u=\frac{\delta_0^2}{2}\iiint\limits_{\Omega}\iiint\frac{dx_1\,dy_1\,dz_1\,dx_2\,dy_2\,dz_2}{r_{1,2}}=\frac{16}{15}\pi^2\delta_0^2R^5,$$

где $r_{1,2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$, а $\Omega$ — область, определяемая неравенствами

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2,\quad x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2.$$

## 4. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ИНТЕГРАЛАМИ

Специальные функции, определяемые интегралами от элементарных функций, не выражающимися, однако, через элементарные функции («неберущиеся интегралы»), приведены ниже вместе с соответствующими числовыми таблицами. Более подробные данные об этих неэлементарных функциях см. в выпуске *СМБ* «Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби)», а также в [5], [16], [19], [22], [24], [25], [26], [27], [29], [43].

### 1°. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

*Эллиптический интеграл первого рода*

$$F(k,\varphi)=\int\limits_0^{\sin\varphi}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$

*Эллиптический интеграл второго рода*

$$E(k,\varphi)=\int\limits_0^{\sin\varphi}\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi.$$

*Полный эллиптический интеграл первого рода*

$$K=F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$

*Полный эллиптический интеграл второго рода*

$$E=E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int\limits_0^{1}\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi.$$

Таблица 1. **Эллиптические интегралы первого рода** $F(k, \varphi)$, $k = \sin\alpha$

| $\varphi$ \ $k^2$ / $\alpha$ | 0,00000<br>0° | 0,03015<br>10° | 0,11698<br>20° | 0,25000<br>30° | 0,41318<br>40° | 0,58682<br>50° | 0,75000<br>60° | 0,88302<br>70° | 0,96985<br>80° | 1,00000<br>90° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10° | 0,17453 | 0,17456 | 0,17464 | 0,17475 | 0,17490 | 0,17505 | 0,17520 | 0,17532 | 0,17540 | 0,17543 |
| 20° | 34907 | 34927 | 34988 | 35082 | 35199 | 35326 | 35447 | 35548 | 35615 | 35638 |
| 30° | 52360 | 52428 | 52628 | 52943 | 53343 | 53787 | 54223 | 54593 | 54843 | 54931 |
| 40° | 69813 | 69969 | 70429 | 71165 | 72126 | 73231 | 74358 | 75352 | 0,76043 | 0,76291 |
| 50° | 0,87266 | 0,87556 | 0,88416 | 0,89825 | 0,91725 | 0,94008 | 0,96465 | 0,98762 | 1,00444 | 1,01068 |
| 60° | 1,04720 | 1,05188 | 1,06597 | 1,08955 | 1,12256 | 1,16432 | 1,21260 | 1,26186 | 30135 | 31696 |
| 70° | 22173 | 22861 | 24953 | 28530 | 33723 | 40677 | 49441 | 1,59591 | 1,69181 | 1,73542 |
| 80° | 39626 | 40565 | 43442 | 48455 | 55973 | 66597 | 1,81253 | 2,01193 | 2,26527 | 2,43625 |
| 90° | 1,57080 | 1,58284 | 1,62003 | 1,68575 | 1,78677 | 1,93558 | 2,15652 | 2,50455 | 3,15339 | $\infty$ |

Таблица 2. **Эллиптические интегралы второго рода** $E(k, \varphi)$, $k = \sin\alpha$

| $\varphi$ \ $k^2$ / $\alpha$ | 0,00000<br>0° | 0,03015<br>10° | 0,11698<br>20° | 0,25000<br>30° | 0,41318<br>40° | 0,58682<br>50° | 0,75000<br>60° | 0,88302<br>70° | 0,96985<br>80° | 1,00000<br>90° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10° | 0,17453 | 0,17451 | 0,17443 | 0,17431 | 0,17417 | 0,17401 | 0,17387 | 0,17375 | 0,17367 | 0,17365 |
| 20° | 34907 | 34886 | 34825 | 34733 | 34619 | 34496 | 34381 | 34286 | 34224 | 34202 |
| 30° | 52360 | 52292 | 52094 | 51788 | 51409 | 51000 | 50609 | 50287 | 50074 | 50000 |
| 40° | 69813 | 69658 | 69207 | 68506 | 67628 | 66671 | 65746 | 64974 | 64459 | 64279 |
| 50° | 0,87266 | 0,86979 | 0,86142 | 0,84832 | 83173 | 81338 | 79538 | 78007 | 76971 | 76604 |
| 60° | 1,04720 | 1,04255 | 1,02897 | 1,00756 | 0,98013 | 0,94930 | 0,91839 | 89144 | 87276 | 86603 |
| 70° | 22173 | 21491 | 19493 | 16318 | 1,12205 | 1,07500 | 1,02664 | 0,98298 | 0,95144 | 93969 |
| 80° | 39626 | 38698 | 35968 | 31606 | 25897 | 19255 | 12249 | 1,05648 | 1,00543 | 0,98481 |
| 90° | 1,57080 | 1,55889 | 1,52380 | 1,46746 | 1,39314 | 1,30554 | 1,21106 | 1,11838 | 1,04011 | 1,00000 |

Таблица 3. **Полные эллиптические интегралы первого и второго рода $K$ и $E$, $k = \sin\alpha$**

| $k^2$ | $\alpha$ | $K$ | $E$ | $k^2$ | $\alpha$ | $K$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00000 | 0° | 1,57080 | 1,57080 | 0,51745 | 46° | 1,86915 | 1,34181 |
| 00030 | 1° | 57092 | 57068 | 53488 | 47° | 88481 | 33287 |
| 00122 | 2° | 57127 | 57032 | 55226 | 48° | 90108 | 32384 |
| 00274 | 3° | 57187 | 56972 | 56959 | 49° | 91800 | 31473 |
| 00487 | 4° | 57271 | 56888 | 58682 | 50° | 93558 | 30554 |
| 00760 | 5° | 57379 | 56781 | 60396 | 51° | 95386 | 29628 |
| 01093 | 6° | 57511 | 56650 | 62096 | 52° | 97288 | 28695 |
| 01485 | 7° | 57668 | 56495 | 63782 | 53° | 1,99267 | 27757 |
| 01937 | 8° | 57849 | 56316 | 65451 | 54° | 2,01327 | 26815 |
| 02447 | 9° | 58054 | 56114 | 67101 | 55° | 03472 | 25868 |
| 03015 | 10° | 58284 | 55889 | 68730 | 56° | 05706 | 24918 |
| 03641 | 11° | 58539 | 55640 | 70337 | 57° | 08036 | 23966 |
| 04323 | 12° | 58820 | 55368 | 71919 | 58° | 10466 | 23013 |
| 05060 | 13° | 59125 | 55073 | 73474 | 59° | 13002 | 22059 |
| 05853 | 14° | 59457 | 54755 | 75000 | 60° | 15652 | 21106 |
| 06699 | 15° | 59814 | 54415 | 76496 | 61° | 18421 | 20154 |
| 07598 | 16° | 60198 | 54052 | 77960 | 62° | 21319 | 19205 |
| 08548 | 17° | 60608 | 53667 | 79389 | 63° | 24355 | 18259 |
| 09549 | 18° | 61045 | 53260 | 80783 | 64° | 27538 | 17318 |
| 10599 | 19° | 61510 | 52831 | 82139 | 65° | 30879 | 16383 |
| 11698 | 20° | 62003 | 52380 | 83457 | 66° | 34390 | 15455 |
| 12843 | 21° | 62523 | 51908 | 84733 | 67° | 38087 | 14535 |
| 14033 | 22° | 63073 | 51415 | 85967 | 68° | 41984 | 13624 |
| 15267 | 23° | 63652 | 50901 | 87157 | 69° | 46100 | 12725 |
| 16543 | 24° | 64260 | 50366 | 88302 | 70° | 50455 | 11838 |
| 17861 | 25° | 64900 | 49811 | 89401 | 71° | 55073 | 10964 |
| 19217 | 26° | 65570 | 49237 | 90451 | 72° | 59982 | 10106 |
| 20611 | 27° | 66272 | 48643 | 91452 | 73° | 65214 | 09265 |
| 22040 | 28° | 67006 | 48029 | 92402 | 74° | 70807 | 08443 |
| 23504 | 29° | 67773 | 47397 | 93301 | 75° | 76806 | 07641 |
| 25000 | 30° | 68575 | 46746 | 94147 | 76° | 83267 | 06861 |
| 26526 | 31° | 69411 | 46077 | 94940 | 77° | 90256 | 06106 |
| 28081 | 32° | 70284 | 45391 | 95677 | 78° | 2,97857 | 05378 |
| 29663 | 33° | 71192 | 44687 | 96359 | 79° | 3,06173 | 04679 |
| 31270 | 34° | 72139 | 43966 | 96985 | 80° | 15339 | 04011 |
| 32899 | 35° | 73125 | 43229 | 97553 | 81° | 25530 | 03379 |
| 34549 | 36° | 74150 | 42476 | 98063 | 82° | 36987 | 02784 |
| 36218 | 37° | 75217 | 41707 | 98515 | 83° | 50042 | 02231 |
| 37904 | 38° | 76326 | 40924 | 98907 | 84° | 65186 | 01724 |
| 39604 | 39° | 77479 | 40126 | 99240 | 85° | 3,83174 | 01266 |
| 41318 | 40° | 78677 | 39314 | 99513 | 86° | 4,05276 | 00865 |
| 43041 | 41° | 79922 | 38486 | 99726 | 87° | 33865 | 00526 |
| 44774 | 42° | 81216 | 37650 | 99878 | 88° | 4,74272 | 00258 |
| 46512 | 43° | 82560 | 36800 | 0,99970 | 89° | 5,43491 | 00075 |
| 48255 | 44° | 83957 | 35938 | 1,00000 | 90° | $\infty$ | 1,00000 |
| 0,50000 | 45° | 1,85407 | 1,35064 | | | | |

## 2°. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

*Интегральный синус*

$$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!\,(2k-1)}.$$

*Интегральный косинус*

$$\mathrm{Ci}(x)=-\int_x^{\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt=C+\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!\,2k}\quad (x>0),$$

где $C=0{,}57721566\ldots$ — *эйлерово постоянное*.

*Интегральная показательная функция*

$$-\mathrm{Ei}(-x)=\int_x^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=-C-\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!\,k}\quad (x>0),$$

$$\mathrm{Ei}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{t}}{t}\,dt=C+\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!\,k}\quad (x>0).$$

Последний интеграл понимается в смысле главного значения, иногда он обозначается символом $\overline{\mathrm{Ei}}(x)$.

*Интегральный логарифм*

$$\mathrm{li}(x)=\int_0^x\frac{dt}{\ln t}\doteq C+\ln(-\ln x)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\ln x)^k}{k!\,k}\quad (0<x<1).$$

Имеют место соотношения, позволяющие переходить от значений интегральной показательной функции к значениям интегрального логарифма и обратно:

$$\mathrm{Ei}(\ln x)=\mathrm{li}(x)\qquad (0<x<1),$$
$$\mathrm{li}(e^x)=\mathrm{Ei}(x)\qquad (x<0).$$

### Таблица 4. Интегральные функции $\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$, $\overline{\mathrm{Ei}}(x)$, $-\mathrm{Ei}(-x)$

| $x$ | $\mathrm{Si}(x)$ | $\mathrm{Ci}(x)$ | $\overline{\mathrm{Ei}}(x)$ | $-\mathrm{Ei}(-x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0000000 | $-\infty$ | $-\infty$ | $\infty$ |
| 01 | 0099999 | −4,02798 | −4,01793 | 4,03793 |
| 02 | 0199996 | −3,33491 | −3,31471 | 3,35471 |
| 03 | 029998 | −2,92957 | −2,89912 | 2,95912 |
| 0,04 | 0,039996 | −2,64206 | −2,60126 | 2,68126 |

*Продолжение табл. 4*

| $x$ | $\mathrm{Si}(x)$ | $\mathrm{Ci}(x)$ | $\overline{\mathrm{Ei}}(x)$ | $-\mathrm{Ei}(-x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,05 | 0,049993 | —2,41914 | —2,36788 | 2,46790 |
| 06 | 059988 | 23709 | 17528 | 29531 |
| 07 | 069981 | —2,08327 | —2,01080 | 15084 |
| 08 | 079972 | —1,95011 | —1,86688 | 2,02694 |
| 09 | 089960 | 83275 | 73866 | 1,91874 |
| 10 | 099944 | 72787 | 62281 | 82292 |
| 11 | 10993 | 63308 | 51696 | 73711 |
| 12 | 11990 | 54665 | 41935 | 65954 |
| 13 | 12988 | 46723 | 32866 | 58890 |
| 14 | 13985 | 39379 | 24384 | 52415 |
| 15 | 14981 | 32552 | 16409 | 46446 |
| 16 | 15977 | 26176 | 08873 | 40919 |
| 17 | 16973 | 20196 | —1,01723 | 35778 |
| 18 | 17968 | 14567 | —0,94915 | 30980 |
| 19 | 18962 | 09253 | 88410 | 26486 |
| 20 | 19956 | —1,04221 | 82176 | 22270 |
| 21 | 20949 | —0,99444 | 76187 | 18290 |
| 22 | 21941 | 94899 | 70420 | 14538 |
| 23 | 22933 | 90566 | 64853 | 10988 |
| 24 | 23923 | 86427 | 59470 | 07624 |
| 25 | 24913 | 82466 | 54254 | 04428 |
| 26 | 25903 | 78671 | 49193 | 1,01389 |
| 27 | 26891 | 75029 | 44274 | 0,98493 |
| 28 | 27878 | 71529 | 39486 | 95731 |
| 29 | 28865 | 68161 | 34820 | 93092 |
| 30 | 29850 | 64917 | 30267 | 90568 |
| 31 | 30835 | 61790 | 25819 | 88151 |
| 32 | 31819 | 58771 | 21468 | 85834 |
| 33 | 32801 | 55855 | 17210 | 83610 |
| 34 | 33782 | 53036 | 13036 | 81475 |
| 35 | 34763 | 50308 | 08943 | 79422 |
| 36 | 35742 | 47666 | 04926 | 77446 |
| 37 | 36720 | 45107 | —0,00979 | 75544 |
| 38 | 37696 | 42625 | +0,02901 | 73711 |
| 39 | 38672 | 40218 | 06718 | 71944 |
| 40 | 39646 | 37881 | 10477 | 70238 |
| 41 | 40619 | 35611 | 14179 | 68591 |
| 42 | 41591 | 33406 | 17828 | 67000 |
| 43 | 42561 | 31262 | 21427 | 65461 |
| 44 | 43530 | 29178 | 24979 | 63973 |
| 45 | 44497 | 27149 | 28486 | 62533 |
| 46 | 45463 | 25175 | 31950 | 61139 |
| 47 | 46427 | 23253 | 35374 | 59788 |
| 0,48 | 0,47390 | —0,21380 | 0,38759 | 0,58478 |

*Продолжение табл.* 4

| $x$ | Si ($x$) | Ci ($x$) | $\overline{\mathrm{Ei}}$ ($x$) | $-$Ei ($-x$) |
|---|---|---|---|---|
| 0,49 | 0,48351 | —0,19556 | 0,42108 | 0,57209 |
| 50 | 49311 | 17778 | 45422 | 55977 |
| 51 | 50269 | 16045 | 48703 | 54782 |
| 52 | 51225 | 14355 | 51953 | 53622 |
| 53 | 52180 | 12707 | 55173 | 52495 |
| 54 | 53133 | 11099 | 58365 | 51400 |
| 55 | 54084 | 095300 | 61529 | 50336 |
| 56 | 55033 | 079986 | 64668 | 49302 |
| 57 | 55981 | 065037 | 67782 | 48296 |
| 58 | 56927 | 050442 | 70873 | 47317 |
| 59 | 57871 | 036190 | 73941 | 46365 |
| 60 | 58813 | 022271 | 76988 | 45438 |
| 61 | 59753 | —0,0086752 | 80015 | 44535 |
| 62 | 60691 | +0,0046060 | 83023 | 43656 |
| 63 | 61627 | 017582 | 86012 | 42800 |
| 64 | 62561 | 030260 | 88984 | 41965 |
| 65 | 63494 | 042650 | 91939 | 41152 |
| 66 | 64424 | 054758 | 94878 | 40359 |
| 67 | 65351 | 066591 | 0,97802 | 39585 |
| 68 | 66277 | 078158 | 1,00712 | 38831 |
| 69 | 67201 | 089463 | 03608 | 38095 |
| 70 | 68122 | 10051 | 06491 | 37377 |
| 71 | 69041 | 11132 | 09362 | 36676 |
| 72 | 69958 | 12188 | 12220 | 35992 |
| 73 | 70873 | 13220 | 15068 | 35324 |
| 74 | 71785 | 14230 | 17906 | 34671 |
| 75 | 72695 | 15216 | 20733 | 34034 |
| 76 | 73603 | 16181 | 23551 | 33412 |
| 77 | 74508 | 17124 | 26360 | 32803 |
| 78 | 75411 | 18046 | 29161 | 32209 |
| 79 | 76312 | 18947 | 31954 | 31628 |
| 80 | 77210 | 19828 | 34740 | 31060 |
| 81 | 78105 | 20689 | 37518 | 30504 |
| 82 | 78998 | 21530 | 40290 | 29961 |
| 83 | 79888 | 22353 | 43056 | 29430 |
| 84 | 80776 | 23157 | 45816 | 28910 |
| 85 | 81661 | 23942 | 48571 | 28402 |
| 86 | 82544 | 24710 | 51322 | 27905 |
| 87 | 83424 | 25460 | 54067 | 27418 |
| 88 | 84301 | 26192 | 56809 | 26941 |
| 89 | 85175 | 26908 | 59547 | 26475 |
| 90 | 86047 | 27607 | 62281 | 26018 |
| 91 | 86916 | 28289 | 65013 | 25571 |
| 0,92 | 0,87782 | 0,28956 | 1,67741 | 0,25134 |

*Продолжение табл.* 4

| $x$ | $\mathrm{Si}(x)$ | $\mathrm{Ci}(x)$ | $\overline{\mathrm{Ei}}(x)$ | $-\mathrm{Ei}(-x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,93 | 0,88646 | 0,29606 | 1,70468 | 0,24705 |
| 94 | 89506 | 30242 | 73192 | 24285 |
| 95 | 90364 | 30861 | 75915 | 23874 |
| 96 | 91219 | 31466 | 78636 | 23471 |
| 97 | 92070 | 32056 | 81356 | 23076 |
| 98 | 92919 | 32632 | 84075 | 22689 |
| 0,99 | 93765 | 33193 | 86794 | 22310 |
| 1,0 | 0,94608 | 33740 | 1,89512 | 21938 |
| 1,1 | 1,02869 | 38487 | 2,16738 | 18600 |
| 1,2 | 10805 | 42046 | 2,44209 | 15841 |
| 1,3 | 18396 | 44574 | 2,72140 | 13545 |
| 1,4 | 25623 | 46201 | 3,00721 | 11622 |
| 1,5 | 32468 | 47036 | 3,30129 | 10002 |
| 1,6 | 38918 | 47173 | 3,60532 | 086308 |
| 1,7 | 44959 | 46697 | 3,92096 | 074655 |
| 1,8 | 50582 | 45681 | 4,24987 | 064713 |
| 1,9 | 55778 | 44194 | 4,59371 | 056204 |
| 2,0 | 60541 | 42298 | 4,95423 | 048901 |
| 2,1 | 64870 | 40051 | 5,33324 | 042614 |
| 2,2 | 68762 | 37508 | 5,73262 | 037191 |
| 2,3 | 72221 | 34718 | 6,15438 | 032502 |
| 2,4 | 75249 | 31730 | 6,60067 | 028440 |
| 2,5 | 77852 | 28587 | 7,07377 | 024915 |
| 2,6 | 80039 | 25334 | 7,57612 | 021850 |
| 2,7 | 81821 | 22008 | 8,11035 | 019182 |
| 2,8 | 83210 | 18649 | 8,67930 | 016855 |
| 2,9 | 84219 | 15290 | 9,28602 | 014824 |
| 3,0 | 84865 | 11963 | 9,93383 | 013048 |
| 3,1 | 85166 | 086992 | 10,6263 | 011494 |
| 3,2 | 85140 | 055257 | 11,3673 | 010133 |
| 3,3 | 84808 | +0,024678 | 12,1610 | $0^{2}8939$ [1]) |
| 3,4 | 84191 | −0,0045181 | 13,0121 | $0^{2}7891$ |
| 3,5 | 83313 | 032128 | 13,9254 | $0^{2}6970$ |
| 3,6 | 82195 | 057974 | 14,9063 | $0^{2}6160$ |
| 3,7 | 80862 | 081901 | 15,9606 | $0^{2}5448$ |
| 3,8 | 79339 | 10378 | 17,0948 | $0^{2}4820$ |
| 3,9 | 77650 | 12350 | 18,3157 | $0^{2}4267$ |
| 4,0 | 75820 | 14098 | 19,6309 | $0^{2}3779$ |
| 4,1 | 73874 | 15617 | 21,0485 | $0^{2}3349$ |
| 4,2 | 71837 | 16901 | 22,5774 | $0^{2}2969$ |
| 4,3 | 69732 | 17951 | 24,2274 | $0^{2}2633$ |
| 4,4 | 1,67583 | −0,18766 | 26,0090 | $0,0^{2}2336$ |

[1]) Напечатанная вверху мелким шрифтом цифра означает число нулей после запятой.

*Продолжение табл. 4*

| $x$ | $\mathrm{Si}(x)$ | $\mathrm{Ci}(x)$ | $\overline{\mathrm{Ei}}(x)$ | $-\mathrm{Ei}(-x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 4,5 | 1,65414 | —0,19349 | 27,9337 | $0{,}0^{2}2073$ |
| 4,6 | 63246 | 19705 | 30,0141 | $0^{2}1841$ |
| 4,7 | 61101 | 19839 | 32,2639 | $0^{2}1635$ |
| 4,8 | 58998 | 19760 | 34,6979 | $0^{2}1453$ |
| 4,9 | 56956 | 19478 | 37,3325 | $0^{2}1291$ |
| 5,0 | 54993 | 19003 | 40,1853 | $0^{2}1148$ |
| 6,0 | 42469 | —0,068057 | 85,9898 | $0^{3}3601$ |
| 7,0 | 45460 | +0,076695 | 191,505 | $0^{3}1155$ |
| 8,0 | 57419 | +0,122434 | 440,380 | $0^{4}3767$ |
| 9,0 | 66504 | +0,055348 | 1037,88 | $0^{4}1245$ |
| 10 | 65835 | —0,045456 | 2492,23 | $0^{5}4157$ |
| 11 | 57831 | —0,089561 | 6071,41 | $0^{5}1400$ |
| 12 | 50497 | —0,049780 | 14959,5 | $0^{6}4751$ |
| 13 | 49936 | +0,026764 | 37197,7 | $0^{6}1622$ |
| 14 | 55621 | +0,069396 | 93192,5 | $0^{7}5566$ |
| 15 | 61819 | +0,046279 | 234956 | $0{,}0^{7}1919$ |
| 16 | 63130 | —0,014200 | | |
| 17 | 59014 | —0,055243 | | |
| 18 | 53661 | —0,043475 | | |
| 19 | 1,51863 | +0,0051504 | | |

| $x$ | $\mathrm{Si}(x)$ | $\mathrm{Ci}(x)$ | $x$ | $\mathrm{Si}(x)$ | $\mathrm{Ci}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 1,54824 | +0,044420 | 140 | 1,5722 | +0,007011 |
| 25 | 53148 | —0,006849 | 150 | 5662 | —0,004800 |
| 30 | 56676 | —0,033032 | 160 | 5769 | +0,001409 |
| 35 | 59692 | —0,011480 | 170 | 5653 | +0,002010 |
| 40 | 58699 | +0,019020 | 180 | 5741 | —0,004432 |
| 45 | 55872 | +0,018632 | 190 | 5704 | +0,005250 |
| 50 | 55162 | —0,005628 | 200 | 5684 | —0,004378 |
| 55 | 57072 | —0,018173 | 300 | 5709 | —0,003332 |
| 60 | 58675 | —0,004813 | 400 | 5721 | —0,002124 |
| 65 | 57925 | +0,012847 | 500 | 5726 | —0,0009320 |
| 70 | 56159 | +0,010922 | 600 | 5725 | +0,0000764 |
| 75 | 55858 | —0,005332 | 700 | 5720 | +0,0007788 |
| 80 | 57233 | —0,012402 | 800 | 5714 | +0,001118 |
| 85 | 58240 | —0,001935 | 900 | 5707 | +0,001109 |
| 90 | 57566 | +0,009986 | $10^{3}$ | 5702 | +0,000826 |
| 95 | 56304 | +0,007110 | $10^{4}$ | 5709 | —0,0000306 |
| 100 | 56223 | —0,005149 | $10^{5}$ | 5708 | +0,0000004 |
| 110 | 5799 | —0,000320 | $10^{6}$ | 5708 | —0,0000004 |
| 120 | 5640 | +0,004781 | $10^{7}$ | 1,5708 | +0,0000000 |
| 130 | 1,5737 | —0,007132 | $\infty$ | $\frac{1}{2}\pi$ | +0,0000000 |

## 3°. ИНТЕГРАЛЫ ВЕРОЯТНОСТИ

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(k-1)!\,(2k-1)},$$

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Соотношения между ними:

$$\operatorname{erf} x = \Phi(x\sqrt{2}),$$

$$\Phi(x) = \operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Производные интеграла вероятности:

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{erf} x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},$$

$$\frac{d}{dx} \Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 2\varphi(x).$$

### Таблица 5. Интеграл вероятности

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

| $x$ | erf $x$ | $x$ | erf $x$ | $x$ | erf $x$ | $x$ | erf $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,00000 | 0,15 | 0,16800 | 0,30 | 0,32863 | 0,45 | 0,47548 |
| 01 | 01128 | 16 | 17901 | 31 | 33891 | 46 | 48466 |
| 02 | 02256 | 17 | 18999 | 32 | 34913 | 47 | 49375 |
| 03 | 03384 | 18 | 20094 | 33 | 35928 | 48 | 50275 |
| 04 | 04511 | 19 | 21184 | 34 | 36936 | 49 | 51167 |
| 05 | 05637 | 20 | 22270 | 35 | 37938 | 50 | 52050 |
| 06 | 06762 | 21 | 23352 | 36 | 38933 | 51 | 52924 |
| 07 | 07886 | 22 | 24430 | 37 | 39921 | 52 | 53790 |
| 08 | 09008 | 23 | 25502 | 38 | 40901 | 53 | 54646 |
| 09 | 10128 | 24 | 26570 | 39 | 41874 | 54 | 55494 |
| 10 | 11246 | 25 | 27633 | 40 | 42839 | 55 | 56332 |
| 11 | 12362 | 26 | 28690 | 41 | 43797 | 56 | 57162 |
| 12 | 13476 | 27 | 29742 | 42 | 44747 | 57 | 57982 |
| 13 | 14587 | 28 | 30788 | 43 | 45689 | 58 | 58792 |
| 0,14 | 0,15695 | 0,29 | 0,31828 | 0,44 | 0,46623 | 0,59 | 0,59594 |

*Продолжение табл. 5*

| $x$ | erf $x$ | $x$ | erf $x$ | $x$ | erf $x$ | $x$ | erf $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,60 | 0,60386 | 1,00 | 0,84270 | 1,40 | 0,95229 | 1,80 | 0,98909 |
| 61 | 61168 | 01 | 84681 | 41 | 95385 | 81 | 98952 |
| 62 | 61941 | 02 | 85084 | 42 | 95538 | 82 | 98994 |
| 63 | 62705 | 03 | 85478 | 43 | 95686 | 83 | 99035 |
| 64 | 63459 | 04 | 85865 | 44 | 95830 | 84 | 99074 |
| 65 | 64203 | 05 | 86244 | 45 | 95970 | 85 | 99111 |
| 66 | 64938 | 06 | 86614 | 46 | 96105 | 86 | 99147 |
| 67 | 65663 | 07 | 86977 | 47 | 96237 | 87 | 99182 |
| 68 | 66378 | 08 | 87333 | 48 | 96365 | 88 | 99216 |
| 69 | 67084 | 09 | 87680 | 49 | 96490 | 89 | 99248 |
| 70 | 67780 | 10 | 88021 | 50 | 96611 | 90 | 99279 |
| 71 | 68467 | 11 | 88353 | 51 | 96728 | 91 | 99309 |
| 72 | 69143 | 12 | 88679 | 52 | 96841 | 92 | 99338 |
| 73 | 69810 | 13 | 88997 | 53 | 96952 | 93 | 99366 |
| 74 | 70468 | 14 | 89308 | 54 | 97059 | 94 | 99392 |
| 75 | 71116 | 15 | 89612 | 55 | 97162 | 95 | 99418 |
| 76 | 71754 | 16 | 89910 | 56 | 97263 | 96 | 99443 |
| 77 | 72382 | 17 | 90200 | 57 | 97360 | 97 | 99466 |
| 78 | 73001 | 18 | 90484 | 58 | 97455 | 98 | 99489 |
| 79 | 73610 | 19 | 90761 | 59 | 97546 | 1,99 | 99511 |
| 80 | 74210 | 20 | 91031 | 60 | 97635 | 2,00 | 99532 |
| 81 | 74800 | 21 | 91296 | 61 | 97721 | 01 | 99552 |
| 82 | 75381 | 22 | 91553 | 62 | 97804 | 02 | 99572 |
| 83 | 75952 | 23 | 91805 | 63 | 97884 | 03 | 99591 |
| 84 | 76514 | 24 | 92051 | 64 | 97962 | 04 | 99609 |
| 85 | 77067 | 25 | 92290 | 65 | 98038 | 05 | 99626 |
| 86 | 77610 | 26 | 92524 | 66 | 98110 | 06 | 99642 |
| 87 | 78144 | 27 | 92751 | 67 | 98181 | 07 | 99658 |
| 88 | 78669 | 28 | 92973 | 68 | 98249 | 08 | 99673 |
| 89 | 79184 | 29 | 93190 | 69 | 98315 | 09 | 99688 |
| 90 | 79691 | 30 | 93401 | 70 | 98379 | 10 | 99702 |
| 91 | 80188 | 31 | 93606 | 71 | 98441 | 11 | 99716 |
| 92 | 80677 | 32 | 93807 | 72 | 98500 | 12 | 99728 |
| 93 | 81156 | 33 | 94002 | 73 | 98558 | 13 | 99741 |
| 94 | 81627 | 34 | 94191 | 74 | 98613 | 14 | 99752 |
| 95 | 82089 | 35 | 94376 | 75 | 98667 | 15 | 99764 |
| 96 | 82542 | 36 | 94556 | 76 | 98719 | 16 | 99775 |
| 97 | 82987 | 37 | 94731 | 77 | 98769 | 17 | 99785 |
| 98 | 83423 | 38 | 94902 | 78 | 98817 | 18 | 99795 |
| 0,99 | 0,83851 | 1,39 | 0,95067 | 1,79 | 0,98864 | 2,19 | 0,99805 |

## Таблица 6. Интеграл вероятности

$$\Phi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,00000 | 0,40 | 0,31084 | 0,80 | 0,57629 | 1,20 | 0,76986 |
| 01 | 00798 | 41 | 31819 | 81 | 58206 | 21 | 77372 |
| 02 | 01596 | 42 | 32552 | 82 | 58778 | 22 | 77754 |
| 03 | 02393 | 43 | 33280 | 83 | 59346 | 23 | 78130 |
| 04 | 03191 | 44 | 34006 | 84 | 59909 | 24 | 78502 |
| 05 | 03988 | 45 | 34729 | 85 | 60468 | 25 | 78870 |
| 06 | 04784 | 46 | 35448 | 86 | 61021 | 26 | 79233 |
| 07 | 05581 | 47 | 36164 | 87 | 61570 | 27 | 79592 |
| 08 | 06376 | 48 | 36877 | 88 | 62114 | 28 | 79945 |
| 09 | 07171 | 49 | 37587 | 89 | 62653 | 29 | 80295 |
| 10 | 07966 | 50 | 38292 | 90 | 63188 | 30 | 80640 |
| 11 | 08759 | 51 | 38995 | 91 | 63718 | 31 | 80980 |
| 12 | 09552 | 52 | 39694 | 92 | 64243 | 32 | 81316 |
| 13 | 10343 | 53 | 40389 | 93 | 64763 | 33 | 81648 |
| 14 | 11134 | 54 | 41080 | 94 | 65278 | 34 | 81975 |
| 15 | 11924 | 55 | 41768 | 95 | 65789 | 35 | 82298 |
| 16 | 12712 | 56 | 42452 | 96 | 66294 | 36 | 82617 |
| 17 | 13499 | 57 | 43132 | 97 | 66795 | 37 | 82931 |
| 18 | 14285 | 58 | 43809 | 98 | 67291 | 38 | 83241 |
| 19 | 15069 | 59 | 44481 | 0,99 | 67783 | 39 | 83547 |
| 20 | 15852 | 60 | 45149 | 1,00 | 68269 | 40 | 83849 |
| 21 | 16633 | 61 | 45814 | 01 | 68750 | 41 | 84146 |
| 22 | 17413 | 62 | 46474 | 02 | 69227 | 42 | 84439 |
| 23 | 18191 | 63 | 47131 | 03 | 69699 | 43 | 84728 |
| 24 | 18967 | 64 | 47783 | 04 | 70166 | 44 | 85013 |
| 25 | 19741 | 65 | 48431 | 05 | 70628 | 45 | 85294 |
| 26 | 20514 | 66 | 49075 | 06 | 71086 | 46 | 85571 |
| 27 | 21284 | 67 | 49714 | 07 | 71538 | 47 | 85844 |
| 28 | 22052 | 68 | 50350 | 08 | 71986 | 48 | 86113 |
| 29 | 22818 | 69 | 50981 | 09 | 72429 | 49 | 86378 |
| 30 | 23582 | 70 | 51607 | 10 | 72867 | 50 | 86639 |
| 31 | 24344 | 71 | 52230 | 11 | 73300 | 51 | 86896 |
| 32 | 25103 | 72 | 52848 | 12 | 73729 | 52 | 87149 |
| 33 | 25860 | 73 | 53461 | 13 | 74152 | 53 | 87398 |
| 34 | 26614 | 74 | 54070 | 14 | 74571 | 54 | 87644 |
| 35 | 27366 | 75 | 54675 | 15 | 74986 | 55 | 87886 |
| 36 | 28115 | 76 | 55275 | 16 | 75395 | 56 | 88124 |
| 37 | 28862 | 77 | 55870 | 17 | 75800 | 57 | 88358 |
| 38 | 29605 | 78 | 56461 | 18 | 76200 | 58 | 88589 |
| 0,39 | 0,30346 | 0,79 | 0,57047 | 1,19 | 0,76595 | 1,59 | 0,88817 |

*Продолжение табл. 6*

| x | Φ (x) | x | Φ (x) | x | Φ (x) | x | Φ (x) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,60 | 0,89040 | 2,00 | 0,95450 | 2,40 | 0,98360 | 2,80 | 0,99489 |
| 61 | 89260 | 01 | 95557 | 41 | 98405 | 81 | 99505 |
| 62 | 89477 | 02 | 95662 | 42 | 98448 | 82 | 99520 |
| 63 | 89690 | 03 | 95764 | 43 | 98490 | 83 | 99535 |
| 64 | 89899 | 04 | 95865 | 44 | 98531 | 84 | 99549 |
| 65 | 90106 | 05 | 95964 | 45 | 98571 | 85 | 99563 |
| 66 | 90309 | 06 | 96060 | 46 | 98611 | 86 | 99576 |
| 67 | 90508 | 07 | 96155 | 47 | 98649 | 87 | 99590 |
| 68 | 90704 | 08 | 96247 | 48 | 98686 | 88 | 99602 |
| 69 | 90897 | 09 | 96338 | 49 | 98723 | 89 | 99615 |
| 70 | 91087 | 10 | 96427 | 50 | 98758 | 90 | 99627 |
| 71 | 91273 | 11 | 96514 | 51 | 98793 | 91 | 99639 |
| 72 | 91457 | 12 | 96599 | 52 | 98826 | 92 | 99650 |
| 73 | 91637 | 13 | 96683 | 53 | 98859 | 93 | 99661 |
| 74 | 91814 | 14 | 96765 | 54 | 98891 | 94 | 99672 |
| 75 | 91988 | 15 | 96844 | 55 | 98923 | 95 | 99682 |
| 76 | 92159 | 16 | 96923 | 56 | 98953 | 96 | 99692 |
| 77 | 92327 | 17 | 96999 | 57 | 98983 | 97 | 99702 |
| 78 | 92492 | 18 | 97074 | 58 | 99012 | 98 | 99712 |
| 79 | 92655 | 19 | 97148 | 59 | 99040 | 2,99 | 99721 |
| 80 | 92814 | 20 | 97219 | 60 | 99068 | 3,00 | 99730 |
| 81 | 92970 | 21 | 97289 | 61 | 99095 | 01 | 99739 |
| 82 | 93124 | 22 | 97358 | 62 | 99121 | 02 | 99747 |
| 83 | 93275 | 23 | 97425 | 63 | 99146 | 03 | 99755 |
| 84 | 93423 | 24 | 97491 | 64 | 99171 | 04 | 99763 |
| 85 | 93569 | 25 | 97555 | 65 | 99195 | 05 | 99771 |
| 86 | 93711 | 26 | 97618 | 66 | 99219 | 06 | 99779 |
| 87 | 93852 | 27 | 97679 | 67 | 99241 | 07 | 99786 |
| 88 | 93989 | 28 | 97739 | 68 | 99263 | 08 | 99793 |
| 89 | 94124 | 29 | 97798 | 69 | 99285 | 09 | 99800 |
| 90 | 94257 | 30 | 97855 | 70 | 99307 | 10 | 99806 |
| 91 | 94387 | 31 | 97911 | 71 | 99327 | 11 | 99813 |
| 92 | 94514 | 32 | 97966 | 72 | 99347 | 12 | 99819 |
| 93 | 94639 | 33 | 98019 | 73 | 99367 | 13 | 99825 |
| 94 | 94762 | 34 | 98072 | 74 | 99386 | 14 | 99831 |
| 95 | 94882 | 35 | 98123 | 75 | 99404 | 15 | 99837 |
| 96 | 95000 | 36 | 98172 | 76 | 99422 | 16 | 99842 |
| 97 | 95116 | 37 | 98221 | 77 | 99439 | 17 | 99848 |
| 98 | 95230 | 38 | 98269 | 78 | 99456 | 18 | 99853 |
| 1,99 | 0,95341 | 2,39 | 0,98315 | 2,79 | 0,99473 | 3,19 | 0,99858 |

*Продолжение табл. 6*

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,20 | 0,99863 | 3,40 | 0,99933 | 3,60 | 0,99968 | 3,80 | 0,99986 |
| 21 | 99867 | 41 | 99935 | 61 | 99969 | 81 | 99986 |
| 22 | 99872 | 42 | 99937 | 62 | 99971 | 82 | 99987 |
| 23 | 99876 | 43 | 99940 | 63 | 99972 | 83 | 99987 |
| 24 | 99880 | 44 | 99942 | 64 | 99973 | 84 | 99988 |
| 25 | 99885 | 45 | 99944 | 65 | 99974 | 85 | 99988 |
| 26 | 99889 | 46 | 99946 | 66 | 99975 | 86 | 99989 |
| 27 | 99892 | 47 | 99948 | 67 | 99976 | 87 | 99989 |
| 28 | 99896 | 48 | 99950 | 68 | 99977 | 88 | 99990 |
| 29 | 99900 | 49 | 99952 | 69 | 99978 | 89 | 99990 |
| 30 | 99903 | 50 | 99953 | 70 | 99978 | 90 | 99990 |
| 31 | 99907 | 51 | 99955 | 71 | 99979 | 91 | 99991 |
| 32 | 99910 | 52 | 99957 | 72 | 99980 | 92 | 99991 |
| 33 | 99913 | 53 | 99958 | 73 | 99981 | 93 | 99992 |
| 34 | 99916 | 54 | 99960 | 74 | 99982 | 94 | 99992 |
| 35 | 99919 | 55 | 99961 | 75 | 99982 | 95 | 99992 |
| 36 | 99922 | 56 | 99963 | 76 | 99983 | 96 | 99992 |
| 37 | 99925 | 57 | 99964 | 77 | 99984 | 97 | 99993 |
| 38 | 99928 | 58 | 99966 | 78 | 99984 | 98 | 99993 |
| 3,39 | 0,99930 | 3,59 | 0,99967 | 3,79 | 0,99985 | 3,99 | 0,99993 |

Таблица 7. **Функция** $\varphi(x)=\frac{1}{2}\Phi'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

| $x$ | $\varphi(x)$ | $x$ | $\varphi(x)$ | $x$ | $\varphi(x)$ | $x$ | $\varphi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,39894 | 0,20 | 0,39104 | 0,40 | 0,36827 | 0,60 | 0,33322 |
| 01 | 39892 | 21 | 39024 | 41 | 36678 | 61 | 33121 |
| 02 | 39886 | 22 | 38940 | 42 | 36526 | 62 | 32918 |
| 03 | 39876 | 23 | 38853 | 43 | 36371 | 63 | 32713 |
| 04 | 39862 | 24 | 38762 | 44 | 36213 | 64 | 32506 |
| 05 | 39844 | 25 | 38667 | 45 | 36053 | 65 | 32297 |
| 06 | 39822 | 26 | 38568 | 46 | 35889 | 66 | 32086 |
| 07 | 39797 | 27 | 38466 | 47 | 35723 | 67 | 31874 |
| 08 | 39767 | 28 | 38361 | 48 | 35553 | 68 | 31659 |
| 09 | 39733 | 29 | 38251 | 49 | 35381 | 69 | 31443 |
| 10 | 39695 | 30 | 38139 | 50 | 35207 | 70 | 31225 |
| 11 | 39654 | 31 | 38023 | 51 | 35029 | 71 | 31006 |
| 12 | 39608 | 32 | 37903 | 52 | 34849 | 72 | 30785 |
| 13 | 39559 | 33 | 37780 | 53 | 34667 | 73 | 30563 |
| 14 | 39505 | 34 | 37654 | 54 | 34482 | 74 | 30339 |
| 15 | 39448 | 35 | 37524 | 55 | 34294 | 75 | 30114 |
| 16 | 39387 | 36 | 37391 | 56 | 34105 | 76 | 29887 |
| 17 | 39322 | 37 | 37255 | 57 | 33912 | 77 | 29659 |
| 18 | 39253 | 38 | 37115 | 58 | 33718 | 78 | 29430 |
| 0,19 | 0,39181 | 0,39 | 0,36973 | 0,59 | 0,33521 | 0,79 | 0,29200 |

*Продолжение табл. 7*

| x | φ(x) | x | φ(x) | x | φ(x) | x | φ(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,80 | 0,28969 | 1,20 | 0,19419 | 1,60 | 0,11092 | 2,00 | 0,05399 |
| 81 | 28737 | 21 | 19186 | 61 | 10915 | 01 | 05292 |
| 82 | 28504 | 22 | 18954 | 62 | 10741 | 02 | 05186 |
| 83 | 28269 | 23 | 18724 | 63 | 10567 | 03 | 05082 |
| 84 | 28034 | 24 | 18494 | 64 | 10396 | 04 | 04980 |
| 85 | 27798 | 25 | 18265 | 65 | 10226 | 05 | 04879 |
| 86 | 27562 | 26 | 18037 | 66 | 10059 | 06 | 04780 |
| 87 | 27324 | 27 | 17810 | 67 | 09893 | 07 | 04682 |
| 88 | 27086 | 28 | 17585 | 68 | 09728 | 08 | 04586 |
| 89 | 26848 | 29 | 17360 | 69 | 09566 | 09 | 04491 |
| 90 | 26609 | 30 | 17137 | 70 | 09405 | 10 | 04398 |
| 91 | 26369 | 31 | 16915 | 71 | 09246 | 11 | 04307 |
| 92 | 26129 | 32 | 16694 | 72 | 09089 | 12 | 04217 |
| 93 | 25888 | 33 | 16474 | 73 | 08933 | 13 | 04128 |
| 94 | 25647 | 34 | 16256 | 74 | 08780 | 14 | 04041 |
| 95 | 25406 | 35 | 16038 | 75 | 08628 | 15 | 03955 |
| 96 | 25164 | 36 | 15822 | 76 | 08478 | 16 | 03871 |
| 97 | 24923 | 37 | 15608 | 77 | 08329 | 17 | 03788 |
| 98 | 24681 | 38 | 15395 | 78 | 08183 | 18 | 03706 |
| 0,99 | 24439 | 39 | 15183 | 79 | 08038 | 19 | 03626 |
| 1,00 | 24197 | 40 | 14973 | 80 | 07895 | 20 | 03547 |
| 01 | 23955 | 41 | 14764 | 81 | 07754 | 21 | 03470 |
| 02 | 23713 | 42 | 14556 | 82 | 07614 | 22 | 03394 |
| 03 | 23471 | 43 | 14350 | 83 | 07477 | 23 | 03319 |
| 04 | 23230 | 44 | 14146 | 84 | 07341 | 24 | 03246 |
| 05 | 22988 | 45 | 13943 | 85 | 07206 | 25 | 03174 |
| 06 | 22747 | 46 | 13742 | 86 | 07074 | 26 | 03103 |
| 07 | 22506 | 47 | 13542 | 87 | 06943 | 27 | 03034 |
| 08 | 22265 | 48 | 13344 | 88 | 06814 | 28 | 02965 |
| 09 | 22025 | 49 | 13147 | 89 | 06687 | 29 | 02898 |
| 10 | 21785 | 50 | 12952 | 90 | 06562 | 30 | 02833 |
| 11 | 21546 | 51 | 12758 | 91 | 06438 | 31 | 02768 |
| 12 | 21307 | 52 | 12566 | 92 | 06316 | 32 | 02705 |
| 13 | 21069 | 53 | 12376 | 93 | 06195 | 33 | 02643 |
| 14 | 20831 | 54 | 12188 | 94 | 06077 | 34 | 02582 |
| 15 | 20594 | 55 | 12001 | 95 | 05959 | 35 | 02522 |
| 16 | 20357 | 56 | 11816 | 96 | 05844 | 36 | 02463 |
| 17 | 20121 | 57 | 11632 | 97 | 05730 | 37 | 02406 |
| 18 | 19886 | 58 | 11450 | 98 | 05618 | 38 | 02349 |
| 1,19 | 0,19652 | 1,59 | 0,11270 | 1,99 | 0,05508 | 2,39 | 0,02294 |

*Продолжение табл.* 7

| $x$ | $\varphi(x)$ | $x$ | $\varphi(x)$ | $x$ | $\varphi(x)$ | $x$ | $\varphi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,40 | 0,02239 | 2,80 | 0,00792 | 3,20 | 0,00238 | 3,60 | 0,00061 |
| 41 | 02186 | 81 | 00770 | 21 | 00231 | 61 | 00059 |
| 42 | 02134 | 82 | 00748 | 22 | 00224 | 62 | 00057 |
| 43 | 02083 | 83 | 00727 | 23 | 00216 | 63 | 00055 |
| 44 | 02033 | 84 | 00707 | 24 | 00210 | 64 | 00053 |
| 45 | 01984 | 85 | 00687 | 25 | 00203 | 65 | 00051 |
| 46 | 01936 | 86 | 00668 | 26 | 00196 | 66 | 00049 |
| 47 | 01888 | 87 | 00649 | 27 | 00190 | 67 | 00047 |
| 48 | 01842 | 88 | 00631 | 28 | 00184 | 68 | 00046 |
| 49 | 01797 | 89 | 00613 | 29 | 00178 | 69 | 00044 |
| 50 | 01753 | 90 | 00595 | 30 | 00172 | 70 | 00042 |
| 51 | 01709 | 91 | 00578 | 31 | 00167 | 71 | 00041 |
| 52 | 01667 | 92 | 00562 | 32 | 00161 | 72 | 00039 |
| 53 | 01625 | 93 | 00545 | 33 | 00156 | 73 | 00038 |
| 54 | 01585 | 94 | 00530 | 34 | 00151 | 74 | 00037 |
| 55 | 01545 | 95 | 00514 | 35 | 00146 | 75 | 00035 |
| 56 | 01506 | 96 | 00499 | 36 | 00141 | 76 | 00034 |
| 57 | 01468 | 97 | 00485 | 37 | 00136 | 77 | 00033 |
| 58 | 01431 | 98 | 00470 | 38 | 00132 | 78 | 00031 |
| 59 | 01394 | 2,99 | 00457 | 39 | 00127 | 79 | 00030 |
| 60 | 01358 | 3,00 | 00443 | 40 | 00123 | 80 | 00029 |
| 61 | 01323 | 01 | 00430 | 41 | 00119 | 81 | 00028 |
| 62 | 01289 | 02 | 00417 | 42 | 00115 | 82 | 00027 |
| 63 | 01256 | 03 | 00405 | 43 | 00111 | 83 | 00026 |
| 64 | 01223 | 04 | 00393 | 44 | 00107 | 84 | 00025 |
| 65 | 01191 | 05 | 00381 | 45 | 00104 | 85 | 00024 |
| 66 | 01160 | 06 | 00370 | 46 | 00100 | 86 | 00023 |
| 67 | 01130 | 07 | 00358 | 47 | 00097 | 87 | 00022 |
| 68 | 01100 | 08 | 00348 | 48 | 00094 | 88 | 00021 |
| 69 | 01071 | 09 | 00337 | 49 | 00090 | 89 | 00021 |
| 70 | 01042 | 10 | 00327 | 50 | 00087 | 90 | 00020 |
| 71 | 01014 | 11 | 00317 | 51 | 00084 | 91 | 00019 |
| 72 | 00987 | 12 | 00307 | 52 | 00081 | 92 | 00018 |
| 73 | 00961 | 13 | 00298 | 53 | 00079 | 93 | 00018 |
| 74 | 00935 | 14 | 00288 | 54 | 00076 | 94 | 00017 |
| 75 | 00909 | 15 | 00279 | 55 | 00073 | 95 | 00016 |
| 76 | 00885 | 16 | 00271 | 56 | 00071 | 96 | 00016 |
| 77 | 00861 | 17 | 00262 | 57 | 00068 | 97 | 00015 |
| 78 | 00837 | 18 | 00254 | 58 | 00066 | 98 | 00014 |
| 2,79 | 0,00814 | 3,19 | 0,00246 | 3,59 | 0,00063 | 3,99 | 0,00014 |

## 4°. ИНТЕГРАЛЫ ФРЕНЕЛЯ

*Синус-интегралы Френеля:*

$$S(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^x \sin t^2\,dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k+3}}{(2k+1)!\,(4k+3)},$$

$$S^*(x)=\int\limits_0^x \sin\frac{\pi}{2}t^2\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!\,(4k+3)}x^{4k+3}.$$

*Косинус-интегралы Френеля:*

$$C(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^x \cos t^2\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k+1}}{(2k)!\,(4k+1)},$$

$$C^*(x)=\int\limits_0^x \cos\frac{\pi}{2}t^2\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(2k)!\,(4k+1)}x^{4k+1}.$$

Соотношения между ними:

$$S^*(x)=S\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,x\right),$$

$$C^*(x)=C\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,x\right).$$

## Таблица 8. Интегралы Френеля

$$S(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \sin t^2\,dt,\quad C(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \cos t^2\,dt$$

| $x$ | $S(\sqrt{x})$ | $C(\sqrt{x})$ | $x$ | $S(\sqrt{x})$ | $C(\sqrt{x})$ | $x$ | $S(\sqrt{x})$ | $C(\sqrt{x})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,00000 | 0,00000 | 0,70 | 0,15040 | 0,63558 | 11,0 | 0,50478 | 0,38039 |
| 02 | 00075 | 11283 | 72 | 15657 | 64276 | 11,5 | 44781 | 39515 |
| 04 | 00213 | 15955 | 74 | 16280 | 64972 | 12,0 | 40581 | 43456 |
| 06 | 00391 | 19537 | 76 | 16908 | 65646 | 12,5 | 38822 | 48815 |
| 08 | 00602 | 22553 | 78 | 17541 | 66299 | 13,0 | 39827 | 54251 |
| 10 | 00840 | 25206 | 80 | 18178 | 66931 | 13,5 | 43249 | 58458 |
| 12 | 01104 | 27600 | 82 | 18820 | 67542 | 14,0 | 48177 | 60472 |
| 14 | 01391 | 29796 | 84 | 19467 | 68135 | 14,5 | 53374 | 59887 |
| 16 | 01699 | 31834 | 86 | 20117 | 68704 | 15,0 | 57580 | 56933 |
| 18 | 02026 | 33742 | 88 | 20771 | 69256 | 15,5 | 59818 | 52401 |
| 20 | 02372 | 35540 | 90 | 21428 | 69788 | 16,0 | 59613 | 47431 |
| 22 | 02735 | 37243 | 92 | 22088 | 70302 | 16,5 | 57089 | 43234 |
| 24 | 03114 | 38864 | 94 | 22751 | 70796 | 17,0 | 52926 | 40798 |
| 26 | 03509 | 40410 | 96 | 23417 | 71273 | 17,5 | 48175 | 40659 |
| 28 | 03919 | 41896 | 0,98 | 24085 | 71731 | 18,0 | 43999 | 42784 |
| 30 | 04342 | 43310 | 1,0 | 24756 | 72171 | 18,5 | 41389 | 46597 |
| 32 | 04779 | 44675 | 1,5 | 41535 | 77908 | 19,0 | 40934 | 51133 |
| 34 | 05229 | 45985 | 2,0 | 56285 | 75330 | 19,5 | 42685 | 55278 |
| 36 | 05692 | 47252 | 2,5 | 66579 | 67099 | 20,0 | 46165 | 58039 |
| 38 | 06166 | 48479 | 3,0 | 71168 | 56102 | 20,5 | 50487 | 58785 |
| 40 | 06652 | 49661 | 3,5 | 70018 | 45205 | 21,0 | 54588 | 57384 |
| 42 | 07149 | 50804 | 4,0 | 64211 | 36819 | 21,5 | 57481 | 54227 |
| 44 | 07656 | 51919 | 4,5 | 55649 | 32525 | 22,0 | 58494 | 50117 |
| 46 | 08173 | 52981 | 5,0 | 46594 | 32846 | 22,5 | 57425 | 46071 |
| 48 | 08700 | 54019 | 5,5 | 39183 | 37244 | 23,0 | 54578 | 43066 |
| 50 | 09237 | 55025 | 6,0 | 34985 | 44327 | 23,5 | 50682 | 41808 |
| 52 | 09782 | 56000 | 6,5 | 34710 | 52220 | 24,0 | 46703 | 42563 |
| 54 | 10336 | 56946 | 7,0 | 38120 | 59012 | 24,5 | 43605 | 45108 |
| 56 | 10899 | 57863 | 7,5 | 44148 | 63184 | 25,0 | 42122 | 48788 |
| 58 | 11469 | 58753 | 8,0 | 51201 | 63930 | 25,5 | 42580 | 52690 |
| 60 | 12047 | 59616 | 8,5 | 57546 | 61287 | 26,0 | 44830 | 55863 |
| 62 | 12632 | 60453 | 9,0 | 61721 | 56080 | 26,5 | 48293 | 57552 |
| 64 | 13224 | 61265 | 9,5 | 62857 | 49689 | 27,0 | 52105 | 57377 |
| 66 | 13823 | 62053 | 10,0 | 60844 | 43696 | 27,5 | 55337 | 55413 |
| 0,68 | 0,14428 | 0,62817 | 10,5 | 0,56318 | 0,39509 | 28,0 | 0,57214 | 0,52170 |

*Продолжение табл. 8*

| $x$ | $s(\sqrt{x})$ | $c(\sqrt{x})$ | $x$ | $s(\sqrt{x})$ | $c(\sqrt{x})$ | $x$ | $s(\sqrt{x})$ | $c(\sqrt{x})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 28,5 | 0,57306 | 0,48457 | 36,0 | 0,50942 | 0,43421 | 43,5 | 0,44676 | 0,47134 |
| 29,0 | 55621 | 45183 | 36,5 | 47687 | 43818 | 44,0 | 43988 | 50038 |
| 29,5 | 52600 | 43136 | 37,0 | 45040 | 45714 | 44,5 | 44772 | 52900 |
| 30,0 | 48997 | 42791 | 37,5 | 43634 | 48627 | 45,0 | 46821 | 55024 |
| 30,5 | 45697 | 44203 | 38,0 | 43797 | 51836 | 45,5 | 49621 | 55900 |
| 31,0 | 43497 | 47002 | 38,5 | 45467 | 54556 | 46,0 | 52484 | 55330 |
| 31,5 | 42913 | 50484 | 39,0 | 48219 | 56132 | 46,5 | 54710 | 53468 |
| 32,0 | 44060 | 53794 | 39,5 | 51369 | 56196 | 47,0 | 55765 | 50780 |
| 32,5 | 46634 | 56131 | 40,0 | 54146 | 54750 | 47,5 | 55404 | 47931 |
| 33,0 | 49987 | 56941 | 40,5 | 55880 | 52166 | 48,0 | 53731 | 45616 |
| 33,5 | 53293 | 56051 | 41,0 | 56161 | 49087 | 48,5 | 51166 | 44393 |
| 34,0 | 55749 | 53703 | 41,5 | 54938 | 46267 | 49,0 | 48343 | 44549 |
| 34,5 | 56771 | 50488 | 42,0 | 52528 | 44390 | 49,5 | 45952 | 46031 |
| 35,0 | 56131 | 47201 | 42,5 | 49531 | 43901 | 50,0 | 0,44572 | 0,48466 |
| 35,5 | 0,54009 | 0,44641 | 43,0 | 0,46683 | 0,44902 | | | |

## Таблица 9. Интегралы Френеля

$$S^*(x)=\int_0^x \sin\frac{\pi}{2}t^2\,dt,\quad C^*(x)=\int_0^x \cos\frac{\pi}{2}t^2\,dt$$

| $x$ | $S^*(x)$ | $C^*(x)$ | $x$ | $S^*(x)$ | $C^*(x)$ | $x$ | $S^*(x)$ | $C^*(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,00000 | 0,00000 | 2,0 | 0,34342 | 0,48825 | 4,0 | 0,42052 | 0,49843 |
| 0,1 | 00052 | 10000 | 2,1 | 37427 | 58156 | 4,1 | 47580 | 57370 |
| 0,2 | 00419 | 19992 | 2,2 | 45570 | 63629 | 4,2 | 56320 | 54172 |
| 0,3 | 01412 | 29940 | 2,3 | 55315 | 62656 | 4,3 | 55400 | 44944 |
| 0,4 | 03336 | 39748 | 2,4 | 61969 | 55496 | 4,4 | 46227 | 43833 |
| 0,5 | 06473 | 49234 | 2,5 | 61918 | 45741 | 4,5 | 43427 | 52603 |
| 0,6 | 11054 | 58110 | 2,6 | 54999 | 38894 | 4,6 | 51619 | 56724 |
| 0,7 | 17214 | 65965 | 2,7 | 45292 | 39249 | 4,7 | 56715 | 49143 |
| 0,8 | 24934 | 72284 | 2,8 | 39153 | 46749 | 4,8 | 49675 | 43380 |
| 0,9 | 33978 | 76482 | 2,9 | 41014 | 56238 | 4,9 | 43507 | 50016 |
| 1,0 | 43826 | 77989 | 3,0 | 49631 | 60572 | 5,0 | 49919 | 56363 |
| 1,1 | 53650 | 76381 | 3,1 | 58182 | 56159 | 5,1 | 56239 | 49978 |
| 1,2 | 62340 | 71544 | 3,2 | 59335 | 46632 | 5,2 | 49688 | 43889 |
| 1,3 | 68633 | 63855 | 3,3 | 51929 | 40569 | 5,3 | 44047 | 50779 |
| 1,4 | 71353 | 54310 | 3,4 | 42965 | 43849 | 5,4 | 51403 | 55723 |
| 1,5 | 69751 | 44526 | 3,5 | 41525 | 53257 | 5,5 | 55368 | 47842 |
| 1,6 | 63889 | 36546 | 3,6 | 49231 | 58795 | 5,6 | 47004 | 45171 |
| 1,7 | 54920 | 32383 | 3,7 | 57498 | 54195 | 5,7 | 45953 | 53846 |
| 1,8 | 45094 | 33363 | 3,8 | 56562 | 44809 | 5,8 | 54605 | 52984 |
| 1,9 | 0,37335 | 0,39447 | 3,9 | 0,47520 | 0,42233 | 5,9 | 0,51633 | 0,44859 |

*Продолжение табл. 9*

| $x$ | $S^*(x)$ | $C^*(x)$ | $x$ | $S^*(x)$ | $C^*(x)$ | $x$ | $S^*(x)$ | $C^*(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6,0 | 0,44696 | 0,49953 | 7,0 | 0,49970 | 0,54547 | 8,0 | 0,46021 | 0,49980 |
| 6,1 | 51648 | 54950 | 7,1 | 53602 | 47331 | 8,1 | 53204 | 52275 |
| 6,2 | 53982 | 46761 | 7,2 | 45725 | 48874 | 8,2 | 48588 | 46384 |
| 6,3 | 45555 | 47600 | 7,3 | 51895 | 53927 | 8,3 | 49323 | 53775 |
| 6,4 | 49649 | 54960 | 7,4 | 51607 | 46010 | 8,4 | 52428 | 47091 |
| 6,5 | 54538 | 48160 | 7,5 | 46070 | 51602 | 8,5 | 46534 | 51418 |
| 6,6 | 46307 | 46899 | 7,6 | 53885 | 51563 | 9,0 | 49986 | 53537 |
| 6,7 | 49150 | 54674 | 7,7 | 48201 | 46278 | 9,5 | 53100 | 48729 |
| 6,8 | 54364 | 48307 | 7,8 | 48965 | 53947 | 10,0 | 0,46817 | 0,49990 |
| 6,9 | 0,46244 | 0,47323 | 7,9 | 0,53234 | 0,47597 | | | |

## 5°. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

*Эйлеров интеграл первого рода (бета-функция)*

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \qquad (x > 0,\ y > 0).$$

*Эйлеров интеграл второго рода (гамма-функция)*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \qquad (x > 0).$$

Соотношение между ними

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Логарифмическая производная гамма-функции $\Gamma(x)$

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x) = -\frac{1}{x} - C + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right),$$

где $C = 0{,}57721566\ldots$ — эйлерово постоянное.

Логарифмическая производная *пи-функции* $\Pi(x) = \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x},$$

$$\Psi(n) = -C + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

## Таблица 10. Гамма-функция $\Gamma(x)$

| $x$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,00 | 1,00000 | 0,99885 | 0,99771 | 0,99657 | 0,99545 |
| 01 | 0,99433 | 99321 | 99211 | 99101 | 98993 |
| 02 | 98884 | 98777 | 98670 | 98565 | 98459 |
| 03 | 98355 | 98251 | 98147 | 98046 | 97945 |
| 04 | 97844 | 97744 | 97644 | 97546 | 97448 |
| 05 | 97350 | 97254 | 97158 | 97063 | 96968 |
| 06 | 96874 | 96781 | 96689 | 96597 | 96506 |
| 07 | 96415 | 96325 | 96236 | 96148 | 96060 |
| 08 | 95973 | 95886 | 95800 | 95715 | 95630 |
| 09 | 95546 | 95463 | 95380 | 95298 | 95216 |
| 10 | 95135 | 95055 | 94975 | 94896 | 94817 |
| 11 | 94740 | 94662 | 94586 | 94509 | 94434 |
| 12 | 94359 | 94285 | 94211 | 94138 | 94065 |
| 13 | 93993 | 93922 | 93851 | 93781 | 93711 |
| 14 | 93642 | 93573 | 93505 | 93437 | 93370 |
| 15 | 93304 | 93238 | 93173 | 93108 | 93044 |
| 16 | 92980 | 92917 | 92855 | 92793 | 92731 |
| 17 | 92670 | 92609 | 92550 | 92490 | 92431 |
| 18 | 92373 | 92315 | 92258 | 92201 | 92144 |
| 19 | 92089 | 92033 | 91978 | 91924 | 91870 |
| 20 | 91817 | 61764 | 91712 | 91660 | 91609 |
| 21 | 91558 | 91507 | 91457 | 91403 | 91359 |
| 22 | 91311 | 91263 | 91215 | 91168 | 91122 |
| 23 | 91075 | 91030 | 90985 | 90940 | 90896 |
| 24 | 90852 | 90809 | 90766 | 90724 | 90682 |
| 25 | 90640 | 90599 | 90559 | 90519 | 90479 |
| 26 | 90440 | 90401 | 90363 | 90325 | 90287 |
| 27 | 90250 | 90214 | 90178 | 90142 | 90107 |
| 28 | 90072 | 90037 | 90003 | 89970 | 89937 |
| 29 | 89904 | 89872 | 89840 | 89809 | 89778 |
| 30 | 89747 | 89717 | 89687 | 89658 | 89629 |
| 31 | 89600 | 89572 | 89545 | 89517 | 89491 |
| 32 | 89464 | 89438 | 89412 | 89387 | 89362 |
| 33 | 89338 | 89314 | 89290 | 89267 | 89244 |
| 1,34 | 0,89222 | 0,89199 | 0,89178 | 0,89157 | 0,89136 |

*Продолжение табл.* 10

| x | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,35 | 0,89115 | 0,89095 | 0,89075 | 0,89056 | 0,89037 |
| 36 | 89018 | 89000 | 88982 | 88965 | 88948 |
| 37 | 88931 | 88915 | 88899 | 88884 | 88868 |
| 38 | 88854 | 88839 | 88825 | 88812 | 88798 |
| 39 | 88785 | 88773 | 88761 | 88749 | 88737 |
| 40 | 88726 | 88716 | 88705 | 88695 | 88686 |
| 41 | 88676 | 88668 | 88659 | 88651 | 88643 |
| 42 | 88636 | 88629 | 88622 | 88615 | 88609 |
| 43 | 88604 | 88598 | 88593 | 88589 | 88584 |
| 44 | 88581 | 88577 | 88574 | 88571 | 88568 |
| 45 | 88566 | 88564 | 88563 | 88562 | 88561 |
| 46 | 88560 | 88560 | 88561 | 88561 | 88562 |
| 47 | 88563 | 88565 | 88567 | 88569 | 88572 |
| 48 | 88575 | 88578 | 88582 | 88586 | 88590 |
| 49 | 88595 | 88599 | 88605 | 88610 | 88616 |
| 50 | 88623 | 88629 | 88636 | 88644 | 88651 |
| 51 | 88659 | 88667 | 88676 | 88685 | 88694 |
| 52 | 88704 | 88714 | 88724 | 88735 | 88746 |
| 53 | 88757 | 88768 | 88780 | 88792 | 88805 |
| 54 | 88818 | 88831 | 88844 | 88858 | 88872 |
| 55 | 88887 | 88902 | 88917 | 88932 | 88948 |
| 56 | 88964 | 88980 | 88997 | 89014 | 89031 |
| 57 | 89049 | 89067 | 89085 | 89104 | 89123 |
| 58 | 89142 | 89161 | 89181 | 89202 | 89222 |
| 59 | 89243 | 89264 | 89285 | 89307 | 89329 |
| 60 | 89352 | 89374 | 89397 | 89421 | 89444 |
| 61 | 89468 | 89492 | 89517 | 89542 | 89567 |
| 62 | 89592 | 89618 | 89644 | 89671 | 89697 |
| 63 | 89724 | 89752 | 89779 | 89807 | 89836 |
| 64 | 89864 | 89893 | 89922 | 89952 | 89982 |
| 65 | 90012 | 90042 | 90073 | 90104 | 90135 |
| 66 | 90167 | 90199 | 90231 | 90264 | 90296 |
| 67 | 90330 | 90363 | 90397 | 90431 | 90465 |
| 68 | 90500 | 90535 | 90570 | 90606 | 90642 |
| 1,69 | 0,90678 | 0,90714 | 0,90752 | 0,90789 | 0,90826 |

*Продолжение табл.* 10

| $x$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,70 | 0,90864 | 0,90902 | 0,90940 | 0,90979 | 0,91018 |
| 71 | 91057 | 91097 | 91137 | 91177 | 91217 |
| 72 | 91258 | 91299 | 91341 | 91382 | 91424 |
| 73 | 91467 | 91509 | 91552 | 91595 | 91639 |
| 74 | 91683 | 91727 | 91771 | 91816 | 91861 |
| 75 | 91906 | 91952 | 91998 | 92044 | 92091 |
| 76 | 92137 | 92185 | 92232 | 92280 | 92328 |
| 77 | 92376 | 92425 | 92474 | 92523 | 92573 |
| 78 | 92623 | 92673 | 92723 | 92774 | 92825 |
| 79 | 92877 | 92928 | 92980 | 93033 | 93085 |
| 80 | 93138 | 93192 | 93245 | 93299 | 93353 |
| 81 | 93408 | 93462 | 93517 | 93573 | 93629 |
| 82 | 93685 | 93741 | 93797 | 93854 | 93912 |
| 83 | 93969 | 94027 | 94085 | 94143 | 94202 |
| 84 | 94261 | 94321 | 94380 | 94440 | 94501 |
| 85 | 94561 | 94622 | 94683 | 94745 | 94807 |
| 86 | 94869 | 94931 | 94994 | 95057 | 95120 |
| 87 | 95184 | 95248 | 95312 | 95377 | 95442 |
| 88 | 95507 | 95573 | 95638 | 95705 | 95771 |
| 89 | 95838 | 95905 | 95972 | 96040 | 96108 |
| 90 | 96177 | 96245 | 96314 | 96384 | 96453 |
| 91 | 96523 | 96593 | 96664 | 96735 | 96806 |
| 92 | 96877 | 96941 | 97021 | 97094 | 97167 |
| 93 | 97240 | 97313 | 97387 | 97461 | 97535 |
| 94 | 97610 | 97685 | 97760 | 97836 | 97912 |
| 95 | 97988 | 98065 | 98142 | 98219 | 98296 |
| 96 | 98374 | 98452 | 98531 | 98610 | 98689 |
| 97 | 98768 | 98848 | 98928 | 99009 | 99089 |
| 98 | 99171 | 99252 | 99334 | 99416 | 99499 |
| 99 | 0,99581 | 0,99664 | 0,99748 | 0,99832 | 0,99916 |
| 2,00 | 1,00000 | | | | |

## Таблица 11. Логарифмы гамма-функции $\lg \Gamma(x)$

| $x$ | $\lg \Gamma(x)$ | $x$ | $\lg \Gamma(x)$ | $x$ | $\lg \Gamma(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,000 | 0,00000 | 1,035 | $\bar{1}$,99166 | 1,070 | $\bar{1}$,98415 |
| 001 | $\bar{1}$,99975 | 036 | 99143 | 071 | 98394 |
| 002 | 99950 | 037 | 99121 | 072 | 98374 |
| 003 | 99925 | 038 | 99098 | 073 | 98354 |
| 004 | 99900 | 039 | 99076 | 074 | 98334 |
| 005 | 99876 | 040 | 99053 | 075 | 98314 |
| 006 | 99851 | 041 | 99031 | 076 | 98294 |
| 007 | 99826 | 042 | 99009 | 077 | 98274 |
| 008 | 99802 | 043 | 98987 | 078 | 98254 |
| 009 | 99777 | 044 | 98965 | 079 | 98234 |
| 010 | 99753 | 045 | 98943 | 080 | 98215 |
| 011 | 99729 | 046 | 98921 | 081 | 98195 |
| 012 | 99704 | 047 | 98899 | 082 | 98175 |
| 013 | 99680 | 048 | 98877 | 083 | 98156 |
| 014 | 99656 | 049 | 98855 | 084 | 98137 |
| 015 | 99632 | 050 | 98834 | 085 | 98117 |
| 016 | 99608 | 051 | 98812 | 086 | 98098 |
| 017 | 99584 | 052 | 98791 | 087 | 98079 |
| 018 | 99560 | 053 | 98769 | 088 | 98059 |
| 019 | 99536 | 054 | 98748 | 089 | 98040 |
| 020 | 99513 | 055 | 98727 | 090 | 98021 |
| 021 | 99489 | 056 | 98705 | 091 | 98002 |
| 022 | 99466 | 057 | 98684 | 092 | 97983 |
| 023 | 99442 | 058 | 98663 | 093 | 97964 |
| 024 | 99419 | 059 | 98642 | 094 | 97946 |
| 025 | 99395 | 060 | 98621 | 095 | 97927 |
| 026 | 99372 | 061 | 98600 | 096 | 97908 |
| 027 | 99349 | 062 | 98579 | 097 | 97890 |
| 028 | 99326 | 063 | 98558 | 098 | 97871 |
| 029 | 99303 | 064 | 98538 | 099 | 97853 |
| 030 | 99280 | 065 | 98517 | 10 | 97834 |
| 031 | 99257 | 066 | 98496 | 11 | 97653 |
| 032 | 99234 | 067 | 98476 | 12 | 97478 |
| 033 | 99211 | 068 | 98455 | 13 | 97310 |
| 1,034 | $\bar{1}$,99188 | 1,069 | $\bar{1}$,98435 | 1,14 | $\bar{1}$,97147 |

*Продолжение табл.* 11

| $x$ | $\lg \Gamma(x)$ | $x$ | $\lg \Gamma(x)$ | $x$ | $\lg \Gamma(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,15 | $\bar{1}$,96990 | 1,45 | $\bar{1}$,94727 | 1,75 | $\bar{1}$,96335 |
| 16 | 96839 | 46 | 94724 | 76 | 96444 |
| 17 | 96694 | 47 | 94725 | 77 | 96556 |
| 18 | 96554 | 48 | 94731 | 78 | 96672 |
| 19 | 96421 | 49 | 94741 | 79 | 96791 |
| 20 | 96292 | 50 | 94754 | 80 | 96913 |
| 21 | 96169 | 51 | 94772 | 81 | 97038 |
| 22 | 96052 | 52 | 94794 | 82 | 97167 |
| 23 | 95940 | 53 | 94820 | 83 | 97298 |
| 24 | 95833 | 54 | 94850 | 84 | 97433 |
| 25 | 95732 | 55 | 94884 | 85 | 97571 |
| 26 | 95636 | 56 | 94921 | 86 | 97712 |
| 27 | 95545 | 57 | 94963 | 87 | 97856 |
| 28 | 95459 | 58 | 95008 | 88 | 98004 |
| 29 | 95378 | 59 | 95057 | 89 | 98154 |
| 30 | 95302 | 60 | 95110 | 90 | 98307 |
| 31 | 95231 | 61 | 95167 | 91 | 98463 |
| 32 | 95165 | 62 | 95227 | 92 | 98622 |
| 33 | 95104 | 63 | 95291 | 93 | 98784 |
| 34 | 95047 | 64 | 95359 | 94 | 98949 |
| 35 | 94995 | 65 | 95430 | 95 | 99117 |
| 36 | 94948 | 66 | 95505 | 96 | 99288 |
| 37 | 94905 | 67 | 95583 | 97 | 99462 |
| 38 | 94868 | 68 | 95665 | 98 | 99638 |
| 39 | 94834 | 69 | 95750 | 99 | $\bar{1}$,99818 |
| 40 | 94805 | 70 | 95839 | 2,00 | 0,00000 |
| 41 | 94781 | 71 | 95931 | | |
| 42 | 94761 | 72 | 96027 | | |
| 43 | 94745 | 73 | 96126 | | |
| 1,44 | $\bar{1}$,94734 | 1,74 | $\bar{1}$,96229 | | |

Таблица 12. Функция

$$\Psi(x)=\frac{d}{dx}\ln\Gamma(x+1)$$

| $x$ | $\Psi(x)$ | $x$ | $\Psi(x)$ | $x$ | $\Psi(x)$ | $x$ | $\Psi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | —0,5772 | 0,25 | —0,2275 | 0,50 | 0,0365 | 0,75 | 0,2475 |
| 01 | 5609 | 26 | 2155 | 51 | 0458 | 76 | 2551 |
| 02 | 5448 | 27 | 2038 | 52 | 0550 | 77 | 2626 |
| 03 | 5289 | 28 | 1921 | 53 | 0642 | 78 | 2701 |
| 04 | 5133 | 29 | 1806 | 54 | 0732 | 79 | 2776 |
| 05 | 4978 | 30 | 1692 | 55 | 0822 | 80 | 2850 |
| 06 | 4826 | 31 | 1579 | 56 | 0911 | 81 | 2923 |
| 07 | 4676 | 32 | 1467 | 57 | 1000 | 82 | 2996 |
| 08 | 4528 | 33 | 1357 | 58 | 1087 | 83 | 3069 |
| 09 | 4382 | 34 | 1248 | 59 | 1174 | 84 | 3141 |
| 10 | 4238 | 35 | 1139 | 60 | 1260 | 85 | 3212 |
| 11 | 4095 | 36 | 1032 | 61 | 1346 | 86 | 3283 |
| 12 | 3955 | 37 | 0926 | 62 | 1431 | 87 | 3353 |
| 13 | 3816 | 38 | 0821 | 63 | 1515 | 88 | 3423 |
| 14 | 3679 | 39 | 0717 | 64 | 1598 | 89 | 3493 |
| 15 | 3543 | 40 | 0614 | 65 | 1681 | 90 | 3562 |
| 16 | 3410 | 41 | 0512 | 66 | 1763 | 91 | 3630 |
| 17 | 3277 | 42 | 0411 | 67 | 1845 | 92 | 3699 |
| 18 | 3147 | 43 | 0311 | 68 | 1926 | 93 | 3766 |
| 19 | 3018 | 44 | 0211 | 69 | 2006 | 94 | 3833 |
| 20 | 2890 | 45 | 0113 | 70 | 2085 | 95 | 3900 |
| 21 | 2764 | 46 | —0,0016 | 71 | 2165 | 96 | 3967 |
| 22 | 2640 | 47 | +0,0081 | 72 | 2243 | 97 | 4033 |
| 23 | 2517 | 48 | 0176 | 73 | 2321 | 98 | 4098 |
| 0,24 | —0,2395 | 0,49 | 0,0271 | 0,74 | 0,2398 | 0,99 | 4163 |
| | | | | | | 1,00 | 0,4228 |

## БИБЛИОГРАФИЯ


1. Банах С., Дифференциальное и интегральное исчисление, М., Физматгиз, 1958.
2. Бермант А. Ф., Курс математического анализа, ч. 1 и 2, М., Физматгиз.
3. Бермант А. Ф., Отображения. Криволинейные координаты. Формулы Грина, М., Физматгиз, 1958.
4. Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А., Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов, М., Физматгиз, 1959.
5. Валле-Пуссен Ш. Ж., Курс анализа бесконечно малых, т. 1 и 2, М. — Л., ГТТИ, 1933.
6. Гарди Г., Интегрирование элементарных функций, М. — Л., ОНТИ, 1935.
7. Гливенко В. И., Интеграл Стилтьеса, М. — Л., ОНТИ, 1936.
8. Гурса Э., Курс математического анализа, т. 1 и 2, М. — Л., ОНТИ, 1936.
9. Гюнтер Н. М. и Кузьмин Р. О., Сборник задач по высшей математике, т. 1, 2 и 3, М. — Л., Гостехиздат.
10. Двайт Г. Б., Таблицы интегралов и другие математические формулы, М. — Л., ИЛ, 1948.
11. Демидович Б. П., Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М., Физматгиз, 1954.
12. Курант Р., Курс дифференциального и интегрального исчисления, ч. 1 и 2, М. — Л., ГТТИ, 1931.
13. Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А., Основы вариационного исчисления, т. 1, ч. 1 и 2, М. — Л., ОНТИ, 1935.
14. Ландау Э., Основы анализа, М., ИЛ, 1947.
15. Ландау Э., Дифференциальное и интегральное исчисление, М., ИЛ., 1947.
16. Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, М., Гостехиздат, 1953.
17. Люстерник Л. А., Некоторые кубатурные формулы для двукратных интегралов, ДАН 62 (1948), 449—452.
18. Маделунг Э., Математический аппарат физики, М., Физматгиз, 1960.
19. Морс Ф. М. и Фешбах Г., Методы теоретической физики, М., ИЛ, 1958.
20. Немыцкий В. В., Слудская М. И. и Черкасов А. Н., Курс математического анализа, т. 1 и 2, М. — Л., Гостехиздат, 1944.

21. Полиа Г. и Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, ч. 1 и 2, М. — Л., ГОНТИ, 1937, 1938.
22. Рыжик И. М. и Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М. — Л., Гостехиздат, 1951.
23. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 1 и 2, М., Физматгиз.
24. Таблицы интегралов Френеля, под ред. Диткина В. А., М., изд. АН СССР, 1953.
25. Таблицы интегрального синуса и косинуса, под ред. Диткина В. А., М., изд. АН СССР, 1954.
26. Таблицы интегральной показательной функции, под ред. Диткина В. А., М., изд. АН СССР, 1954.
27. Таблицы специальных функций, ч. 1, под ред. Шпильрейна Я. Н., М. — Л., ГТТИ, 1933.
28. Толстов Г. П., Курс математического анализа, т. 1 и 2, М., Гостехиздат, 1954, 1957.
29. Уиттекер Э. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ч. 1 и 2, М. — Л., ГТТИ, 1933, 1934.
30. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, 2 и 3, М. — Л., Гостехиздат, 1948, 1949.
31. Фихтенгольц Г. М. и Натансон И. П., Криволинейные и кратные интегралы, М., ОНТИ, 1937.
32. Фукс Б. А. и Левин В. И., Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, специальные главы, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
33. Харди Г. Г., Курс чистой математики, М., ИЛ.
34. Хинчин А. Я., Восемь лекций по математическому анализу, М. — Л., Гостехиздат, 1948.
35. Хинчин А. Я., Краткий курс математического анализа, М., Гостехиздат, 1955.
36. Чеботарёв Н. Г., Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики, сборник «И. Ньютон», М. — Л., 1943, стр. 29—126.
37. Чеботарёв Н. Г., Теория алгебраических функций, М. — Л., Гостехиздат, 1948.
38. Чезаро Э., Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, ч. 1, М. — Л., ОНТИ, 1936.
39. Чезаро Э., Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, ч. 2, Одесса, Матезис, 1914.
40. Эйлер Л., Введение в анализ бесконечно малых, М. — Л., ОНТИ, 1936.
41. Эйлер Л., Дифференциальное исчисление, М. — Л., Гостехиздат, 1949.
42. Эйлер Л., Интегральное исчисление, т. I, II и III, М., Гостехиздат, Физматгиз, 1957, 1958.
43. Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, М., Физматгиз, 1959.

# УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ


$[x]$—оператор умножения на аргумент 52, 55

$C = C[X]$ — класс функций $f(x)$, определенных и непрерывных на множестве $X$ 50

$C_n = C_n[X]$—класс функций $f(x)$, определенных и $n$ раз непрерывно дифференцируемых на множестве $X$ 50

$C_G$ — класс функций $f(X)$, определенных и непрерывных в области $G$ 60

$C_1 = C_{1,G}$ —класс функций $f(X)$, все первые частные производные которых в области $G$ определены и непрерывны 60

$C_n = C_{n,G}$ — класс функций, все $n$-е частные производные которых в области $G$ определены и непрерывны 70

$\Delta_h f(x_0)$ — приращение функции в точке $x_0$ 27

$\Delta_{h_i}^{x_i} f(X)$ — частное приращение функции 59

$\Delta_h^2 f(x_0)$, $\Delta_h^n f(x_0)$ — вторая и $n$-я разности в точке $x_0$ 30, 31

$y'$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx} f(x)$, $Df(x)$, $\dot{u}(t)$ — производная функции 10, 11

$f'_-(x_0)$, $f_-^{(s)}(x_0)$ — первая и $s$-я левые производные в точке $x_0$ 35

$f'_+(x_0)$, $f_+^{(s)}(x_0)$—первая и $s$-я правые производные в точке $x_0$ 35

$f''(x_0) \equiv \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}$ —вторая производная функции в точке $x_0$ 29

$f^{(n)}(x_0) \equiv \left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=x_0}$ — $n$-я производная функции в точке $x_0$ 31

$\tilde{f}''(x_0)$, $\tilde{f}^{(n)}(x_0)$ — вторая и $n$-я разностные производные функции в точке $x_0$ 30, 32

$f^{[']}(x_0)$, $f^{['']}(x_0)$, $f^{[n]}(x_0)$—производные Шварца в точке $x_0$ 29, 36

$\frac{\partial}{\partial x_i} f(X^0)$ — частная производная в точке $X^0$ 59

$P_n(D)$—дифференциальный многочлен (многочлен от оператора $D$) 52

$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, $\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ — якобиан 93

$dy$ — первый дифференциал 25

$d^2y$, $d^ny$ — второй и $n$-й дифференциалы 34

$df(x_0)$, $df(x_0, h)$ — первый дифференциал в точке $x_0$ 25

$d^2f(x_0)$, $d^2f(x_0, h)$, $d^nf(x_0)$, $d^nf(x_0, h)$ — второй и $n$-й дифференциалы в точке $x_0$ 34

$Ax$—оператор, определенный на множестве $X$ элементов $x$ 51

$D = \frac{d}{dx}$, $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ — операторы дифференцирования 52

$df(X^0, H)$ — дифференциал оператора $f(X)$ в точке $X^0$ 77
$\Delta_{h_i}^{x_i}$ — оператор частного приращения по $x_i$ 59
$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ — оператор частного дифференцирования по $x_i$ 60
$\Delta$, $\nabla^2$ — оператор Лапласа 75, 256, 258
$\operatorname{grad} f(X^0)$ — градиент функции $f(X)$ в точке $X^0$ 65
$\operatorname{grad} z$ — градиент функции $z$ 256, 258
$\operatorname{div} \mathbf{a}$ — дивергенция вектора $\mathbf{a}$ 256, 258
$\operatorname{rot} \mathbf{a}$ — вихрь вектора $\mathbf{a}$ 258
$\rho(X, Y)$—расстояние между точками $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ 58
$\|X\|$ — норма вектора 58
$h_u, h_v, H_u, H_v, H_w$ — дифференциальные параметры первого порядка 126
$E, F, G$ — коэффициенты Гаусса 137
$l_u, l_v, L_u, L_v, L_w$ — коэффициенты Ламэ 126, 136
$ds$ — элемент длины 126, 136
$dq$, $\Delta q$ — элемент площади для плоскости 126
$d\sigma$, $\Delta\sigma$ — элемент площади для поверхности 136
$dv$ — элемент объема 136
$(R)\int_a^b f(x)\,dx$ — интеграл Римана 178
$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ — интеграл Стилтьеса 245
$Y = f(X)$ — отображение из $E_n$ в $E_m$ 76
$S(X^0, r)$ — сфера радиуса $r$ с центром в точке $X^0$ 58
$\mathbf{S}$ — знак суммы нескольких аналогичных выражений 125, 135
$J[y(x)]$ — функционал 176
$\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ — бета-функция Эйлера 296, 329
$\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера 297, 329
$\Pi(x)$ — пи-функция 329
$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ 329
$\Psi(x)$ — логарифмическая производная пи-функции 329
$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 323
$\operatorname{Ei} x$ — интегральная показательная функция 314
$\operatorname{li}(x)$ — интегральный логарифм 314
$\operatorname{Si}(x)$ — интегральный синус 314
$\operatorname{Ci}(x)$ — интегральный косинус 314
$\operatorname{erf}(x)$, $\Phi(x)$ — интегралы вероятности 319
$F(k, \varphi)$—эллиптический интеграл первого рода 311
$E(k, \varphi)$—эллиптический интеграл второго рода 311
$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ — полный эллиптический интеграл первого рода 311
$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ — полный эллиптический интеграл второго рода 311
$S(x)$, $S^*(x)$ — синус-интегралы Френеля 326
$C(x)$, $C^*(x)$—косинус-интегралы Френеля 326
$C$ — эйлерова постоянная 314

# АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


**А**лгебраическая величина площади 118
— функция 158
*Арнольд В. И.* 112
Аффинное отображение 116

**Б**ета-функция Эйлера 329
Биполярные координаты 133, 134, 148, 149
*Больцано Б.* 23

**В**ан-дер-Вардена функция 23
Вейерштрасса теорема 79
— функция 23
Витушкина теорема 110
Вихрь вектор-функции 258
— — в биполярных координатах 263
— — — вырожденных эллипсоидальных «вытянутых» координатах 260
— — — — — «сплюснутых» координатах 261
— — — параболоидальных координатах 262
— — — сферических координатах 260
— — — тороидальных координатах 263
— — — цилиндрических координатах 259
— — при преобразовании к новым независимым переменным 259
Вторая производная 29
— — разностная 30
Вторая производная Шварца 36
— разность 30
Второй дифференциал 33
Выпуклость функции, критерии 49

**Г**амма-функция Эйлера 223, 329
— —, логарифмическая производная 329
— —, таблица 330
Гармоническая функция 123
Гаусса дифференциальная форма первая 137
— коэффициенты 137
Гёльдера условие 228
Гессиан (определитель Гесса) 86
*Гильберт Д.* 111
Гильберта теорема 110
Главная линейная часть приращения 26
Главное значение особого интеграла 226
Гомеоморфизм 116
Градиент функции 65, 257
— — в биполярных координатах 258, 263
— — — вырожденных эллипсоидальных «вытянутых» координатах 260
— — — — — «сплюснутых» координатах 261
— — — — эллиптических координатах 257
— — — параболических координатах 258

Градиент функции в параболоидальных координатах 262
— — — полярных координатах 257
— — — сферических координатах 259
— — — тороидальных координатах 262
— — — цилиндрических координатах 259
— —, плоский случай 256
— — при преобразовании к новым независимым переменным 257, 259
— —, пространственный случай 258
Грина формула, линейный случай 276
— — обобщенная, линейный случай 277
— — —, плоский случай 278
— — —, пространственный случай 279
— — основная 272
— —, плоский случай 277
— —, пространственный случай 278
Гюльдена теоремы 201

Дарбу интегральная сумма 177
— теорема 25, 177
Двойной интеграл 182, 265
Декартовы координаты, 128, 138
Диаграмма Ньютона 103, 105, 106
Диаметр области 181
Дивергенция вектор-функции в биполярных координатах 258, 263
— — — вырожденных эллипсоидальных «вытянутых» координатах 260
— — — — — «сплюснутых» координатах 261
— — — — эллиптических координатах 257
— — — параболических координатах 258
Дивергенция вектор-функции в параболоидальных координатах 262
— — — полярных координатах 257
— — — сферических координатах 259
— — — тороидальных координатах 262
— — — цилиндрических координатах 259
— —, плоский случай 256
— — при преобразовании к новым независимым переменным 257, 259
— —, пространственный случай 258
Дирихле интеграл 218, 302
— формула 307
— функция 178
Дифференциал второго порядка 34
— как главная линейная часть приращения 25, 61
— — производная по параметру 26, 62
— $n$-го порядка 34
— оператора 76, 77
— первый, инвариантность формы 27, 93
— полный 61
— сложной функции 26
— функции 25, 26, 61, 62
— —, свойства 61
— частный 61
Дифференциальная форма Гаусса первая 137
Дифференциальное выражение интегрируемое 192, 194
— —, условие интегрируемости 193, 194
Дифференциальные параметры в обобщенных полярных координатах 130
— — первого порядка 126, 136
Дифференциальный многочлен 52
— —, свойства 52, 53
Дифференцирование 9, 15
—, свойство линейности 11
— сложной функции, правило 12

Дифференцируемость функции 25, 61
Длина дуги кривой, вычисление 197

Замена переменных в интеграле по мере 267—269

Интеграл вероятности, производная 319, 323
— верхний, нижний 177
— двойной 182
— —, геометрический смысл 184
— —, замена переменных 186
— —, сведéние к повторному 185, 186
— —, свойства 183
— —, условие существования 184
— двукратный 184
— Дирихле 218, 302
— дробного порядка 249, 250
—, зависящий от параметра 237
— криволинейный по длине дуги 188
— неопределенный 150
— несобственный 211, 220
— $n$-го порядка 249
— определенный 171
— особый 226
— от биномиального дифференциала 164
— — неограниченной функции 220
— — — —, признак Коши 222
— — — —, признаки сравнения 222
— — — —, — сходимости 222
— повторный 184
— по координатам 190
— по координате 270
— — —, вычисление 270
— по мере 189, 190
— — —, формула Ньютона — Лейбница 265
— — —, вычисление 266, 267
— — —, замена переменных 267—269
— — — области 264
— — — поверхности 189
— Пуассона 233
Интеграл Римана 178
— — двойной 182
— — $n$-мерный 188
— —, условие предельного перехода под знаком интеграла 236
— с бесконечными пределами 211
— Стилтьеса 245
— —, свойства 246
— —, теорема о среднем 247
— —, условие предельного перехода под знаком интеграла 247, 248
— тройной 187
— —, замена переменной 187
— —, сведéние к трехкратному 187
— Фруллани 219
Интегралы вероятности 319, 321
— дифракции 213
— кратные, таблица 306
— неопределенные, таблица 286
— определенные, таблица 296
— Френеля 213, 326
— —, таблицы 327, 328
Интегральная показательная функция 314
— сумма Дарбу (верхняя, нижняя) 177, 187
— — — двойная 181
— — Коши — Римана 171, 177
— — — — — двойная 182
— — — — — тройная 187
— — Стилтьеса 244
— форма остаточного члена 40
Интегральные выражения, преобразование 264—271
Интегральный косинус 314
— логарифм 314
— синус 314
Интегрирование 9, 15
— алгебраических функций 158—170
— иррациональных функций 159
— по частям 151, 176
— — — кратное 151, 176
— рациональной функции 153—158
— рациональных дробей, метод неопределенных коэффициентов 155
— — —, — Остроградского 156

Интегрирование тригонометрических функций 167—170
— — —, универсальная подстановка 167
— функций $n$ переменных 181
Интегрирующая функция 245

Квадрируемая область 181
*Колмогоров А. Н.* 112
Контур интегрирования 188
Конус $n$-мерный, объем 309
Координатная линия 124, 135
— поверхность 134
Координатные линии, условие ортогональности 137
Координаты биполярные 133, 134, 148, 149
— декартовы 127, 138
— криволинейные 124
— — в пространстве 134
— — на плоскости 124
— параболические 133
— параболоидальные 146, 147
— полярные 129
— — обобщенные 130
— сферические 141
— — обобщенные 141
— сферо-конические 145, 146
— тороидальные 147, 148
— точки 124
— центра тяжести, вычисление 203—205
— цилиндрические 140
— — обобщенные 140
— эллипсоидальные вырожденные 143, 144
— — общие 142
— эллиптические вырожденные 132
— — общие 131
Косинус-интегралы Френеля 326
Коши признак сходимости несобственного интеграла 214
Коши — Римана интегральная сумма 171—177
Коши теорема 17
— форма остаточного члена 40
— формула для $n$-й первообразной 152, 176
Коэффициент гомотетии 120
— искажения 118, 121, 122
Коэффициент отображения 117
Коэффициенты Гаусса 137
— Ламэ 126, 136
— — в биполярных координатах 134, 149
— — — вырожденных эллипсоидальных «вытянутых» координатах 144
— — — — — «сплюснутых» координатах 145
— — — — эллиптических координатах 133
— — — декартовых координатах 128, 139
— — — обобщенных полярных координатах 130
— — — общих эллипсоидальных координатах 142
— — — — эллиптических координатах 131
— — — параболических координатах 133
— — — параболоидальных координатах 147
— — — полярных координатах 130
— — — сферических координатах 141
— — — сферо-конических координатах 146
— — — тороидальных координатах 148
— — — цилиндрических координатах 140
— Тейлора 39
Кратные интегралы, таблица 306
Кривая уникурсальная 158
Криволинейные координаты в пространстве 134
— — на плоскости 124
Криволинейный интеграл второго типа 190
— — первого типа 188
— — по длине дуги 188, 265
— — — координатам 190
— — составной, независимость от контура 273
— — — по координатам 271
— —, условие независимости от пути интегрирования 193, 194

Лагранжа множители 84
— теорема 16
— форма остаточного члена 40
— формула 16
— функция 85
Ламэ коэффициенты 126, 136
— уравнение 123
Лапласиан 75, 256
— в биполярных координатах 258, 263
— — вырожденных эллипсоидальных «вытянутых» координатах 261
— — — — «сплюснутых» координатах 261
— — — эллиптических координатах 257
— — параболических координатах 258
— — параболоидальных координатах 262
— — полярных координатах 257
— — сферических координатах 260
— — тороидальных координатах 263
— — цилиндрических координатах 259
—, плоский случай 256
— при преобразовании к новым независимым переменным 257, 259
—, пространственный случай 258
Лейбница правило дифференцирования интеграла по параметру 238, 239
— формула 32
— —, обобщение 76
Линейная система 51, 54
Линейное касательное многообразие к поверхности уровня 66
— программирование 80
Линейный дифференциальный оператор 56
— функционал 176
Липшица условие порядка $\alpha$ 228
Лиувилля теорема 124
— формула 308
Логарифм гамма-функции, таблицы 333—334
Логарифмическая производная 13, 14
— — гамма-функции 329
— — пи-функции 329
Ломаная как множество точек 59
Лопиталя правило 17, 22

Маклорена ряд 41
— формула 37, 38
Максимум функции 44
— — абсолютный 48, 79
Матрица Якоби 77
Масса, вычисление 202, 203
Метод неопределенных коэффициентов 101
Минимум функции 44
— — абсолютный 48, 79
Многочлен от оператора дифференцирования 52
Множители Лагранжа 84
Момент инерции, вычисление 205—208
*Морс М.* 89
$m$-я частная производная 68

Наибольшее значение функции, 48, 49
Наименьшее значение функции 48, 49
Неопределенные выражения 17
— —, преобразования 17, 23
— интегралы, таблица 286
Неопределенный интеграл, определение 150
— —, правило подстановки 151
— —, свойства 150
— —, формула интегрирования по частям 151
Несобственный интеграл 211, 220
— —, геометрический смысл 221
— — двойной 229
— — — сходящийся, расходящийся 229
— —, зависящий от параметра 239
— —, замена переменных 225
— — интегрирование по частям 224

Несобственный интеграл кратный 233
— —, признаки абсолютной сходимости 216
— —, — неабсолютной сходимости 217, 218
— —, — сравнения 216
— —, признак сходимости Коши 214
— — равномерно сходящийся относительно параметра 240, 243
— — — —, свойства 240, 241, 244
— — расходящийся 211, 220
— — сходящийся 211
— — — абсолютно 215
— — — условно 216
— —, функция сравнения 216, 217
Норма вектора 58
Ньютона диаграмма 103
Ньютона — Лейбница формула 175, 193, 194
Ньютона обозначение производной 11
$n$-е приращение 31
$n$-й дифференциал 34
$n$-я производная 31
$n$-я разностная производная 32
$n$-я разность 31

Область 59
— квадрируемая 181
— кубируемая 186
Образ области 51, 90, 114
Обращение оператора 95
Объем $n$-мерного конуса 309
— — параллелепипеда 308
— — шара 309
— $n$-мерной пирамиды 309
— тела, вычисление 199—201
Окрестность точки 59
Оператор 51, 76
— бигармонический 76
— дифференцирования 52
— дифференцируемый в точке 77
— единичный 55
— из $E_n$ в $E_m$ 76
— класса $C_k$ 78
— Лапласа (лапласиан) 75
Оператор линейный 51
— — дифференциальный 56
— непрерывный 76
—, область значений 51
—, — определения 51
— частного дифференцирования 60
Операторы коммутирующие 55
—, произведение, сумма 54
Определенные интегралы, таблица 296
Определенный интеграл 171
— —, геометрический смысл 171
— — как функция верхнего предела 174, 175
— —, правила подстановки 175
— —, свойства 172
— —, формула интегрирования по частям 175, 176
— —, — кратного интегрирования по частям 176
Определитель Гесса (гессиан) 86
— Якоби (якобиан) 93
Оригинал области 90, 114
Ортогональная траектория семейства поверхностей уровня 67
Особый интеграл 226
— —, главное значение 226, 228
Остаточный член 73
— — формулы Тейлора 39
— — — —, форма интегральная 40
— — — —, — Коши 40
— — — —, — Лагранжа 40
— — — —, — Пеано 40
— — — —, — Шлемильха и Роша 40
Остроградского метод интегрирования рациональных дробей 156
— формула 275, 276
Отображение 76, 114
— аффинное 116
— —, коэффициент искажения 118
— —, линейный случай 116
— —, плоский случай 117
— —, пространственный случай 120
— —, свойства 118

Отображение аффинное, сохраняющее расстояние между точками 119
— взаимно непрерывное 116
— — однозначное 116
— вырожденное 117, 118, 121
— гомеоморфное 116
— конформное первого, второго рода 123
—, линейный случай 114
— неаффинное, коэффициент искажения 121, 122
— несобственное 117, 118, 121
— обратное 114, 115, 116
—, плоский случай 115
—, пространственный случай 115
Отрезок как множество точек 58

Параболические координаты 133
Параболоидальные координаты 146, 147
Параллелепипед $n$-мерный, объем 308
Пеано форма остаточного члена 40
Первообразная (примитивная) 10, 150
Пирамида $n$-мерная, объем 309
Пи-функция, логарифмическая производная 329
Площадь $n$-мерной шаровой поверхности 309
— области 181
— —, алгебраическая величина 118
— плоской фигуры, вычисление 195, 197
— поверхности, вычисление 198—199
Поверхностный интеграл по площади 265
Поверхность двусторонняя 192
— ориентируемая 192
Подстановки Эйлера 160
Полярные координаты 129
— — обобщенные 130
Порядок оператора 56
Последовательность равномерно распределенная 179, 180
Потенциал 310
Потенциал поля тяготения, определение и вычисление 208
Правило дифференцирования сложной функции 12
— Лейбница дифференцирования интеграла по параметру 238, 239
— Лопиталя 17, 20—22
— множителей Лагранжа 84
Предельный переход под знаком интеграла 234—237
Преобразование гомотетии 120
— дифференциальных выражений, линейный случай 251
— — —, плоский случай 253
— — —, пространственный случай 255
— интегралов, формулы 272, 273, 275, 276
— интегральных выражений 264
— координат, формулы 119
Примитивная (первообразная) 10, 150
Произведение оператора на постоянное 54
— операторов 54, 55
— — разностей 68
Производная 9, 10, 63
— бесконечная 10
— вторая 29
— — разностная 30
— дробного порядка 249, 250
— левая, правая 27
— $n$-го порядка 31
—, обозначение Ньютона 11
—, обозначения 10, 11
— обратной функции 12
— односторонняя 27, 35
— — бесконечная 27
— —, свойства 28
— произведения и частного 11
— разностная $n$-я 32
—, свойство 24
— симметрическая 29
— — вторая 36
— — $n$-я 36
— сложной функции 12
— функции, заданной параметрически 13
— — четной, нечетной 17
— Шварца 29

Производная Шварца $n$-я 36
Производные высших порядков сложной функции 33
— интегралов вероятности 319
— — —, таблица 323
— логарифмов пи-функции, таблица 335
— элементарных функций, таблица 280—282
Приращение частное 59
Прообраз 51, 90, 114
Пуассона интеграл 233
Путь, вычисление 209
— интегрирования ориентированный 191

Работа, вычисление 209
Разностная производная $k$-го порядка 69
Разностный оператор $k$-го порядка 69
Ранг матрицы 99
Расстояние между точками 58
Ролля теорема 16
Ряд Маклорена 41
— Тейлора 39, 73

Сильвестра теорема 83
Симметрическая производная 29, 36
Синус-интегралы Френеля 326
Система биполярных координат 133, 134, 148, 149
— декартовых координат 127
— — — косоугольная 128, 138
— криволинейных координат в пространстве 134
— — — на плоскости 124
— — — ортогональная 125, 135
— — — прямоугольная 125, 135
— — —, условие ортогональности 125, 135, 136
— параболических координат 133
— параболоидальных координат 146, 147
— полярных координат 129
— — — обобщенных 130
— сферических координат 141
— — — обобщенных 141
Система сферо-конических координат 145, 146
— тороидальных координат 147, 148
— цилиндрических координат 140
— — — обобщенных 140
— — — ортогональная 141
— эллипсоидальных координат вырожденных («вытянутых», «сплюснутых») 143, 144
— — — общих 142
— эллиптических координат вырожденных 132
— — — общих 131
Среднее значение функции 173, 184
Степень оператора 55
Стилтьеса интеграл 245
— интегральная сумма 244
Стокса формула 274
Сумма операторов 54
Суперпозиция функций 11, 109, 110
— — со сложением 111
Сфера 58
Сферические координаты 141
— — обобщенные 141
Сферо-конические координаты 145, 146
Сходимость несобственного интеграла 215, 216, 220
$s$-я производная левая, правая 35

Таблица гамма-функции 330
— интегралов вероятности 319, 321
— — Френеля 327, 328
— интегрального косинуса 314
— — логарифма 314
— — синуса 314
— интегральной показательной функции 314
— кратных интегралов 306
— логарифмов гамма-функции 333
— логарифмической производной пи-функции 335
— неопределенных интегралов 286
— определенных интегралов 296

Таблица производных интеграла вероятности 323
— — $n$-го порядка 282
— — первого порядка 280—282
— разложения элементарных функций в степенной ряд 283
— эллиптических интегралов первого, второго рода 312, 313
Тейлора ряд 39, 73
— формула 38, 72
— — для многочлена 37
Тейлоровские коэффициенты 39
Теорема Вейерштрасса 79
— Витушкина 110
— Гильберта 110
— Дарбу 25, 177
— Колмогорова 112
— Коши 17
— —, геометрический смысл 17
— Лагранжа 16, 17
— —, геометрический смысл 16
— Лиувилля 124
— о среднем 264
— — — вторая 173
— — — для двойного интеграла 183
— — — первая 172
— об оценке интеграла 264
— — — — Стилтьеса 247
— Ролля 16
— Сильвестра 83
Теоремы Гюльдена 201
Тороидальные координаты 147, 148
Точка абсолютного максимума 79
— — минимума 79
— — экстремума 79
— возврата 28
— максимума функции 44
— минимума функции 44
— — — порядка $k$ 88
Точка-образ 114, 117
Точка особенная 220, 230
— относительного максимума, минимума 80
— — экстремума 80
Точка-прообраз 114, 117
Точка стационарная 81, 85
— — вырожденная, невырожденная 86
— — порядка $k$ 87
Точка угловая 28
— условного абсолютного максимума, минимума 86
— — относительного максимума, минимума 84
— условно-стационарная 85
Точки равномерно распределенные 117, 118, 121
— экстремума функции 44
Тригонометрические подстановки 161
Тройной интеграл по объему области 265

Угловой коэффициент 10
Уникурсальная кривая 158
Уравнение Лапласа 123
Условие Гёльдера 228
— интегрируемости дифференциального выражения 193, 194
— Липшица порядка $\alpha$ 228
— невырожденности 87

Формула Грина, линейный случай 276
— — обобщенная, линейный случай 277
— — —, плоский случай 278
— — —, пространственный случай 279
— — основная 272
— —, плоский случай 277
— —, применение к вычислению криволинейных интегралов по замкнутому контуру 272
— —, пространственный случай 278
— Дирихле 307
— конечных приращений 16
— Коши для $n$-й первообразной 152
— — — определенного интеграла 176
— Лагранжа 16
— Лейбница 32
— —, обобщение 33, 53, 76
— Лиувилля 308
— Маклорена 37, 38
— Ньютона—Лейбница 175, 193, 194
— Остроградского 275, 276

Формула Стокса 274
— Тейлора 38, 39, 72
— — для многочлена 37
Формулы Эйлера 306
Френеля интегралы 213
— косинус-интегралы 326, 327, 328
— синус-интегралы 326, 327, 328
Фруллани интеграл 219
Функции высшие трансцендентные 152
— зависимые в области 99
— $n$ переменных, представление в виде суперпозиций 109
— элементарные 14, 15
— —, разложение в степенной ряд 283
Функционал 176
— линейный 176
Функция алгебраическая 158
— аналитическая в области 110
— — в точке, в интервале 41
— бесконечно дифференцируемая в точке 39
— Ван-дер-Вардена 23, 24
— Вейерштрасса 23
— возрастающая, убывающая 42
— выпуклая 49
— —, свойства 50
— гармоническая 123
— Дирихле 178
— дифференцируемая в точке 10
— — на множестве 10
— заданная параметрически 13
— интегрируемая на отрезке 171
— — по Риману 178
— класса $C_n = C_{n,\,G}$ 70
— Лагранжа 85
—, наибольшее, наименьшее значение 48, 49
—, направление быстрейшего роста 66
— невозрастающая, неубывающая 42
— неявная 95
— —, условие существования 95
— $n$-раз дифференцируемая 32
— ограниченной вариации 245
— от функции 11
—, представление степенным рядом 41
— сложная 11, 92
Функция сложная показательная 14
—, среднее значение 173, 184
—, условие интегрируемости по Риману 178, 179
—, экстремальное значение 44

Центр тяжести, вычисление координат 203—205
Цилиндрические координаты 140
— — обобщенные 140
Цилиндроид 184

Частная производная 59
— — второго порядка 67
Частное приращение 59
Чебышева условие интегрируемости биномиального дифференциала 164

Шар $n$-мерный, объем 309
Шаровая поверхность $n$-мерная площадь 309
Шварца производная 29
— — вторая 36
— — $n$-я 36
Шлемильха и Роша форма остаточного члена 40

Эйлера гамма-функция 223
— подстановки 160
— формулы 306
Эйлерова постоянная 314
Эйлеровы интегралы первого, второго рода 329
Экстремальное значение функции 44
Экстремум абсолютный 79
— —, условие существования 79
— безусловный 83
— относительный 80
—, условие достаточное 82
—, — необходимое 81
— функции, признаки достаточные 45, 46, 47
— —, признак необходимый 45
Элемент длины 126, 136
— — в биполярных координатах 134, 149
— — — вырожденных эллипсоидальных координатах: «вытянутых» 144, «сплюснутых» 145

Элемент длины в вырожденных эллиптических координатах 133
— — — декартовых координатах 128, 139
— — — обобщенных полярных координатах 131
— — — общих эллипсоидальных координатах 143
— — — — эллиптических координатах 132
— — — параболических координатах 133
— — — параболоидальных координатах 147
— — — полярных координатах 130
— — — системе ортогональных криволинейных координат 126, 136
— — — сферических координатах 141
— — — сферо-конических координатах 146
— — — тороидальных координатах 148
— — — цилиндрических координатах 140
— объема 136
— — в биполярных координатах 149
— — — вырожденных эллипсоидальных координатах: «вытянутых» 144, «сплюснутых» 145
— — — декартовых координатах 139
— — — обобщенных сферических координатах 142
— — — — цилиндрических координатах 140
— — — общих эллипсоидальных координатах 143
— — — параболоидальных координатах 147
— — — сферических координатах 141
— — — сферо-конических координатах 146
— — — тороидальных координатах 148
Элемент объема в цилиндрических координатах 140
— площади 126, 136
— — в биполярных координатах 134, 149
— — — вырожденных эллиптических координатах 133
— — — — — «вытянутых» координатах 144
— — — — — «сплюснутых» координатах 145
— — — декартовых координатах 129, 139
— — — обобщенных полярных координатах 131
— — — общих эллипсоидальных координатах 143
— — — — эллиптических координатах 132
— — — параболических координатах 133
— — — параболоидальных координатах 147
— — — системе ортогональных криволинейных координат 126, 136
— — — сферических координатах 141
— — — сферо-конических координатах 146
— — — тороидальных координатах 148
— — — цилиндрических координатах 140
Элементарная операция 15
Эллиптические координаты вырожденные 132
— — общие 131
Эллиптический интеграл первого, второго рода 311, 312
— — полный первого, второго рода 311, 313
Эллипсоидальные координаты вырожденные 143, 144
— — общие 142

Якобиан (определитель Якоби) 93, 122
Якобиева матрица 77, 99

## СПИСОК ОПЕЧАТОК, ЗАМЕЧЕННЫХ В ВЫПУСКЕ СМБ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ (функции, пределы, ряды, цепные дроби)»

| Стр. | Строка или формула | Напечатано | Должно быть |
|---|---|---|---|
| 33 | 11 св. | $E(x)$ | $x-E(x)$ |
| 40 | 7 св. | $a>1$ | $a>0$ |
| 42 | 4 сн. | предел | предел ограниченной |
| 48 | 5 и 6 св. | левый ... правый | первый второй |
| 50 | 2 св. | $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ | $\int\limits_a^b \ln f(x)\,dx$ |
| 52 | 4 сн. | $t=O\left(t\sin\frac{1}{t}\right)$ | $t\sin\frac{1}{t}=O(t)$ |
| 52 | 4 сн. | $e^t=O\left(e^{\frac{t}{2}}\right)$ | $e^{\frac{t}{2}}=O(e^t)$ |
| 53 | 2 сн. | $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ | $f\left(\frac{k_1x_1+k_2x_2}{k_1+k_2}\right)$ |
| 54 | 2 св. | $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ | $\frac{f(k_1x_1)+f(k_2x_2)}{k_1+k_2}\quad(k_1,k_2>0)$ |
| 54 | 18 сн. | $=$ | $\leqslant$ |
| 54 | 11 сн. | В каждой | В каждой внутренней |
| 68 | (2.34′) | $=\sum\limits_{i=1}^{n}(Xe_i')^2$ | $=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(Xe_i')^2}{\lVert e_i'\rVert^2}$ |
| 92 | 6 св. | Функция | Непрерывная функция |
| 111 | 1 св. | положительными | произвольными |
| 119 | 3 св. | действительных | целых |

| Стр. | Строка или формула | Напечатано | Должно быть |
|---|---|---|---|
| 145 | 2 св. | $x - x_0$ | $(x - x_0)^k$ |
| 201 | 11 св. | на множестве | всюду, за исключением множества |
| 236 | (4.86) | $= \frac{1}{1-x^2}$ | $= \frac{0}{1-x^2}$ |
| 252 | 5 и 12 св. | $\overline{T}_n(x)$ | $T_n(x)$ |
| 254 | 13 св. | теорему 23 | теорему 21 |
| 256 | (4.152) | $C_n$ | $\frac{1}{n+1}$ |
| 256 | (4.153) | $= C_n$ | $=$ |
| 256 | 2 сн. | $T_{n+1}(x)$ | $\overline{T}_n(x)$ |
| 260 | 6, 4 и 1 сн. | $L$ | $\overline{L}$ |
| 261 | 2 сн. | $\sqrt{n!}\sqrt{2\pi}$ | $\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}$ |
| 288 | 10 св. | дробей | дробей вида (5.20) |
| 288 | 10 сн. | кроме точек | кроме любых окрестностей точек |
| 293 | 13, 10 и 3 сн. | за исключением | за исключением любых окрестностей |
| 295 | 2 св. | $xy'$ | $xy_1'$ |
| 330 | (6.6) | $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ | $\prod\limits_{n=1}^{\infty}$ |
| 334 | (6.51) | $\frac{u_1 + u_{n+1}}{u_n}$ | $\left(\frac{u_1+u_{n+1}}{u_n}\right)^n$ |

На стр. 39 в строках 3—5 св. исключить слова: от «по крайней мере ...» до «... а значит и» включительно.

На стр. 43 после строки 8 св. вставить слова: «Для неограниченной сверху (снизу) последовательности $\overline{\lim}\, u_n = +\infty$ ($\underline{\lim}\, u_n = -\infty$)».

# СПРАВОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА