СОВРЕМЕННЫЕ
ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИКИ

Б. М. ЛЕВИТАН

ОПЕРАТОРЫ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Серия выпускается под общим руководством редакционной коллегии журнала «Успехи математических наук»

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962

Б. М. ЛЕВИТАН

ОПЕРАТОРЫ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА
И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. В гармоническом анализе на прямой линии и на группе важную роль играет операция сдвига. Если $f(x)$ — функция, определенная на действительной прямой и h — произвольное действительное число, то *оператор сдвига* T^h определяется равенством

$$T^h f(x) = f(x+h).$$

Приведем два важных примера, в которых используется понятие сдвига.

1. Функция $f(x)$ (x — действительное число, $f(x)$—комплексная функция) называется почти-периодической (в смысле Г. Бора), если она непрерывна и если семейство функций $\{T^h f(x)\} = \{f(x+h)\}$, $(-\infty < h < \infty)$ условно компактно на всей прямой, т. е. если из каждой бесконечной последовательности $f(x+h_1)$, $f(x+h_2)$, ..., $f(x+h_n)$, ... можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно на всей числовой прямой.

2. Функция $f(x)$ называется положительно-определенной (в смысле С. Бохнера), если для произвольных точек x_1, x_2, ..., x_n и произвольных комплексных чисел ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n выполняется неравенство

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\mu - x_\nu)\, \rho_\mu \bar{\rho}_\nu \geqslant 0.$$

Так как операция сдвига может быть определена для произвольной группы, то нетрудно дать определения как почти-периодических, так и положительно-определенных функций для того случая, когда аргументом функции является элемент произвольной группы.

Оказывается, однако, что основные факты гармонического анализа остаются справедливыми и в том случае, если отправляться от более общего, чем сдвиг, семейства операторов T^s, удовлетворяющего некоторым простым аксиомам, которые, в частности, выполняются для операторов группового сдвига. Эти более общие операторы мы называем *операторами обобщенного сдвига* (в дальнейшем сокращенно о. о. с.).

При изучении этих операторов возможно, по крайней мере, два подхода.

Во-первых, можно предположить, что аналитический вид о. о. с. нам известен, и изучать классы почти-периодических и положительно-определенных функций относительно этого семейства о. о. с.

Такой подход был нами использован ранее [51].

Второй подход заключается в том, что, исходя из аксиом о. о. с., ищется аналитическое выражение этих операторов. Этой задаче посвящена бо́льшая часть настоящей монографии.

Результаты, которые при этом получаются, следует рассматривать как обобщение трех классических теорем Ли.

В основе этих результатов лежит понятие *инфинитезимального оператора*, который определяется, так же как и в случае групп Ли, как значение производных (по переменным $s_1, \ldots, s_n$) в точке ($s_1 = 0, \ldots, s_n = 0$) от функции $T^s f(t)$.

Если ввести некоторые дополнительные предположения, то инфинитезимальные операторы оказываются линейными дифференциальными операторами. Так, например, обстоит дело в случае сдвига на группе Ли. В этом случае можно ограничиться инфинитезимальными операторами первого порядка, которые имеют вид

$$X_{\alpha;\, t}(f) = b_\alpha^l(t)\,\frac{\partial f}{\partial t_l}. \tag{1}$$

Здесь $b_\alpha^l(t)$ — аналитические функции, удовлетворяющие начальным условиям

$$b_\alpha^l(0, \ldots, 0) = \delta_\alpha^l. \tag{2}$$

Оказывается, что в случае более одной переменной инфинитезимальные операторы для о. о. с., отличных от сдвига на группе, как правило, не могут быть дифференциальными операторами, а имеют более общую структуру. Поясним, в чем состоит это обобщение, на примере инфинитезимальных операторов первого порядка.

Предположим сначала, что мы рассматриваем сдвиг на группе. В этом случае инфинитезимальные операторы имеют вид (1), причем коэффициенты $b^i_\alpha(t)$ удовлетворяют начальному условию (2).

Пусть $f(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция и пусть

$$D^\lambda_t = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial t_1^{\lambda_1} \ldots \partial t_n^{\lambda_n}} \qquad (|\lambda| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n).$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$D^\lambda_t X_{\alpha;\,t}(f)_{|t=0} = D^\lambda_t \frac{\partial f}{\partial t_\alpha}\Big|_{t=0} + a^{\lambda;\,\alpha}_\mu D^\mu_t f\,\Big|_{t=0}, \tag{3}$$

причем $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $|\mu| \leqslant |\lambda|$, $a^{\lambda;\,\alpha}_\mu = a^{\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\,\alpha}_{\mu_1, \ldots, \mu_n}$ — постоянные числа, не зависящие от функции $f(t)$.

Мы рассматриваем класс линейных операторов, удовлетворяющих условию (3) или (в случае операторов второго порядка) условию

$$D^\lambda_t X_{\alpha;\,t}(f)_{|t=0} = D^\lambda_t \frac{\partial^2 f}{\partial t^2_\alpha}\Big|_{t=0} + a^{\lambda;\,\alpha}_\mu D^\mu_t f\,\Big|_{t=0} \tag{4}$$

$$(|\mu| \leqslant |\lambda| + 1).$$

Этот класс операторов, очевидно, шире класса линейных дифференциальных операторов. В самом деле, условие (3) будет еще выполняться, если к оператору (1) добавить, например, интегральный оператор вида

$$\int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_n} K_\alpha(t_1, \ldots, t_n;\, s_1, \ldots, s_n)\, f(s_1, \ldots, s_n)\, ds_1 \ldots ds_n$$

с бесконечно дифференцируемым ядром $K_\alpha(t_1, \ldots, t_n;\, s_1, \ldots, s_n)$. Эта добавка, конечно, не исчерпывает всего класса операторов, удовлетворяющих условию (3).

Мы показываем в гл. IX, что для произвольных структурных констант $c^\gamma_{\alpha\beta}$ группы Ли существуют операторы X_α, удовлетворяющие условию (3) или условию (4) и образующие алгебру Ли:

$$X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha = c^\lambda_{\alpha\beta} X_\lambda. \tag{5}$$

В этом состоит содержание третьей обратной теоремы Ли для о. о. с. Этот результат особенно интересен для операторов второго порядка (операторов, удовлетворяющих условию (4)), так как операторы первого порядка, удовлетворяющие условию коммутирования (5), можно реализовать в виде операторов (1) (в этом состоит содержание классической третьей обратной теоремы Ли для групп Ли).

По операторам X_α однозначно строятся операторы $\widetilde{X}_\alpha$, коммутирующие с операторами X_α, удовлетворяющие условию (3) или (4) и условию коммутирования

$$\widetilde{X}_\alpha \widetilde{X}_\beta - \widetilde{X}_\beta \widetilde{X}_\alpha = c^\lambda_{\beta\alpha} \widetilde{X}_\lambda$$

(см. гл. IX, §§ 2 и 4).

Обобщенный сдвиг в случае инфинитезимальных операторов первого порядка есть решение системы уравнений

$$\widetilde{X}_{\alpha;\, s} u = X_{\alpha;\, t} u, \tag{6}$$

$$u \big|_{s=0} = f(t). \tag{7}$$

В случае инфинитезимальных операторов второго порядка, кроме начального условия (7), задаются еще значения производных

$$\left.\frac{\partial^{\nu_1 + \ldots + \nu_n} u}{\partial s_1^{\nu_1} \ldots \partial s_n^{\nu_n}}\right|_{s=0} \qquad (0 \leqslant \nu_i \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, n).$$

2. Приведем теперь некоторые понятия и определения, которые в дальнейшем нам понадобятся. При этом мы придерживаемся в основном терминологии, которая принята в книге Понтрягина [69].

1. Определение группы. Множество G некоторых элементов называется группой, если для любых элементов a, $b \in G$ определена операция, называемая умножением, в силу которой этим элементам ставится в соответствие некоторый элемент $c \in G$: $a \cdot b = c$. Операция умножения должна удовлетворять следующим условиям:

1) Ассоциативность: для любых трех элементов a, b, $c \in G$ выполняется соотношение $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

2) В G имеется левая единица e, т. е. такой элемент, что для любого элемента a выполняется соотношение $e \cdot a = a$.

Левую единицу называют также левым нейтральным элементом группы.

3) Для любого элемента $a \in G$ существует левый обратный элемент, т. е. такой элемент a^{-1}, что $a^{-1} \cdot a = e$.

Если сверх указанных аксиом для любых двух элементов $a, b \in G$ выполнено еще условие $a \cdot b = b \cdot a$, то группа называется коммутативной или абелевой.

Можно показать, что левая единица e является также и правой единицей, а левый обратный элемент a^{-1} является также и правым обратным (Понтрягин [69], стр. 14).

2. Автоморфизмы. Отображение f группы G в группу G' называется *изоморфным* или *изоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и сохраняет операцию умножения, т. е. для любых элементов $x, y \in G$, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. Две группы G и G' называются изоморфными, если существует изоморфное отображение G на G'.

Изоморфное отображение группы G на себя называется *автоморфизмом* группы. Два различных автоморфизма группы можно перемножать. Легко видеть, что тождественное преобразование является автоморфизмом и что обратное преобразование к некоторому автоморфизму также есть автоморфизм. Поэтому множество всех автоморфизмов группы G есть группа.

Пусть a — фиксированный элемент группы G. Определим автоморфизм f_a группы G, положив

$$f_a(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}, \quad x \in G.$$

Этот автоморфизм называется *внутренним*. Множество всех внутренних автоморфизмов группы G есть подгруппа всех автоморфизмов, причем

$$f_a \cdot f_b = f_{ab}.$$

3. Топологические пространства. Множество M называется топологическим пространством, если для каждого подмножества $N \subset M$ определена операция замыкания $\overline{N}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) Если N состоит из одного элемента $a \in M$, то $\overline{N} = N$.

2) Замыкание суммы конечного числа множеств равно сумме замыканий.

3) $\overline{\overline{N}} = \overline{N}$.

Топологическое пространство можно определить также при помощи окрестностей.

Множество M называется топологическим пространством, если в нем можно указать некоторую систему подмножеств Σ, для которой выполнены следующие условия:

1) Для произвольных различных точек a, $b \in M$ найдется такое множество $U \in \Sigma$, что $a \in U$, но b не содержится в U.

2) Для любых двух множеств U, $V \in \Sigma$, содержащих точку $a \in M$, найдется такое множество $W \in \Sigma$, что a содержится в W и W содержится в пересечении множеств U и V.

Непрерывное отображение топологического пространства M в топологическое пространство R_1 действительных чисел называется *непрерывной числовой функцией*. Числовая функция непрерывна в точке $a \in M$ в том и только том случае, если для любого положительного числа ε существует такая окрестность U точки a, что для $x \in U$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

4. Топологические группы. Множество G называется топологической группой, если:

1) G есть группа,

2) G есть топологическое пространство,

3) групповые операции непрерывны в заданной на G топологии, т. е. если a, $b \in G$, то для всякой окрестности W элемента $a \cdot b^{-1}$ найдутся такие окрестности U и V элементов a и b, что $UV^{-1} \subset W$.

5. Группы Ли. Пусть G есть локальная группа, т. е. умножение элементов определено лишь в окрестности единичного элемента (более точное определение локальной группы см. [69], стр. 144).

Группа G называется локальной группой Ли, если в ней можно ввести дифференцируемые координаты (см. [69], гл. VII, § 41).

6. Многообразия *). Многообразием размерности n называется топологическое пространство, каждая точка кото-

---

*) В этом пункте мы придерживаемся изложения, данного в книге Ж. де Рам, «Дифференцируемые многообразия», ИЛ, М., 1956; см. также Шевалле, «Теория групп Ли», гл. III, ИЛ, М., 1957.

рого имеет окрестность, гомеоморфную n-мерной сфере. Предполагается, что в пространстве существует счетная база, т. е. такая счетная система открытых множеств, что всякое открытое множество может быть представлено как сумма множеств, входящих в эту систему.

Говорят, что многообразие n измерений V_n наделено структурой C^∞, если для любой точки $x \in V_n$ определена некоторая совокупность действительных функций, называемых функциями класса C^∞ в точке x, причем выполняется следующая аксиома:

Для каждой точки $x \in V_n$ существуют ее окрестность U и n действительных функций $x_1(x), \ldots, x_n(x)$, определенных на U и таких, что:

а) отображение $x \to (x_1(x), \ldots, x_n(x))$ есть гомеоморфизм окрестности U на некоторое открытое множество в эвклидовом пространстве R_n; поэтому всякая функция f, заданная на U, может быть выражена как функция переменных $x_1, \ldots, x_n$

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n);$$

б) $f(x)$ есть функция класса C^∞ в некоторой точке $x \in U$ тогда и только тогда, когда существует заключенная в U окрестность W этой точки, такая, что $f(x)$ определена на W и $f(x_1, \ldots, x_n)$ при $x_1, \ldots, x_n$, соответствующих точкам окрестности W, имеет непрерывные производные всех порядков.

Говорят, что $f(x)$ — функция класса C^∞, если она принадлежит классу C^∞ в каждой точке многообразия V_n; аналогично определяется функция класса C^∞ на каком-либо подмножестве многообразия V_n.

Всякая система n функций $x_1, \ldots, x_n$, заданных в открытом множестве U и обладающих свойствами а) и б), называется системой локальных координат в U.

Согласно б) эти координаты являются функциями класса C^∞ в U. Если $f_1, \ldots, f_n$ — какая-нибудь другая система локальных координат в U, то f_i также являются функциями класса C^∞ в U, причем их якобиан не обращается в нуль по переменным $x_1, \ldots, x_n$ в U.

Говорят, что функция, заданная на многообразии, наделенном структурой C^∞, есть функция класса C^r, где r — целое неотрицательное число, если она имеет непрерывные производные по локальным координатам до порядка $\leqslant r$. C^0 есть класс непрерывных функций.

Аналогичным образом определяется понятие дифференцируемой структуры порядка r и действительной аналитической структуры. Для этого достаточно в условии б) потребовать, чтобы $f(x_1, \ldots, x_n)$ имела непрерывные производные порядка $\leqslant r$ или была действительной аналитической функцией. В результате мы получим многообразия класса C^r и действительные аналитические многообразия.

Заменив пространство R_n комплексным n-мерным векторным пространством K_n, мы определим n-мерное комплексно-аналитическое многообразие.

ГЛАВА I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА

§ 1. Основные определения

1. Обозначим через Ω некоторое топологическое пространство и через t, s, r, ... — точки этого пространства. Пусть $f(t)$, $t \in \Omega$ — комплекснозначная функция, непрерывная в топологии, заданной на Ω. В дальнейшем совокупность всех функций, непрерывных на Ω, мы будем обозначать через $C(\Omega) = C$.

Допустим теперь, что на функциях $f(t) \in C$ определено семейство операторов T^s, зависящих от $s \in \Omega$, как от параметра. Таким образом, каждой функции $f(t) \in C$ ставится в соответствие функция $F(s, t)$ от двух точек пространства Ω. В дальнейшем мы будем пользоваться обозначением

$$F(s, t) = T^s f(t).$$

Иногда нам придется рассматривать s как основную переменную, а t как параметр. В этих и аналогичных случаях мы будем пользоваться обозначением

$$F(s, t) = T_t^s f(t).$$

Мы будем изучать операторы, удовлетворяющие следующим четырем условиям:

1°. *Линейность.* Это означает, что для любых двух функций $f(t)$ и $g(t) \in C$ и произвольных постоянных комплексных чисел a и b выполняется равенство

$$T^s [af(t) + bg(t)] = aT^s f(t) + bT^s g(t).$$

2°. *В пространстве* Ω *существует точка* (элемент) s_0, *которая обладает тем свойством, что для любой функции* $f(t) \in C$ *выполняется условие*

$$T^{s_0} f(t) = f(t). \tag{1.1}$$

Равенство (1.1) символически можно записать в виде $T^{s_0} = E$, где E — единичный оператор. В дальнейшем элемент s_0 мы будем называть верхним нейтральным элементом.

3°. *Для произвольной функции* $f(t) \in C$ *и произвольных точек* s, r, $t \in \Omega$ *выполняется равенство*

$$T_s^r T^s f(t) = T_t^s T^r f(t). \tag{1.2}$$

Алгебраический смысл равенства (1.2) мы выясним несколько позже.

4°. *Для любой функции* $f(t) \in C$ *функция* $F(s, t) = T^s f(t)$ *непрерывна по совокупности точек* (s, t).

Семейство операторов T^s, удовлетворяющих условиям 1°—4°, мы будем называть *операторами обобщенного сдвига* (в дальнейшем сокращенно о. о. с.).

Если, кроме условий 1°—4°, выполняется еще условие

5°. *Для любых точек* s, $r \in \Omega$ *и любой функции* $f(t) \in C$ *выполняется равенство*

$$T^s T^r f(t) = T^r T^s f(t), \tag{1.3}$$

то мы будем говорить, что о. о. с. коммутативны.

Обозначим через $D = D(\Omega)$ множество всех функций $f(t) \in C$, удовлетворяющих условию *)

$$T^s f(t)\big|_{t=s_0} = f(s). \tag{1.4}$$

Условие (1.4) означает, что для $f(t) \in D$ элемент s_0 является также и нижним нейтральным элементом.

Мы будем предполагать всюду в дальнейшем, что если пространство C бесконечномерно, то этим же свойством обладает и пространство D.

2. Если в выражении $T^s f(t)$ рассматривать s как основную переменную, а t как параметр, то мы получим двой-

---

*) Как следует из леммы 1.1 (см. стр. 20), множество D не пусто.

ственное семейство операторов R^t. Итак, по определению

$$R^t f(s) = T^s f(t).$$

Покажем, что операторы R^t также образуют семейство о. о. с. Условия 1° и 4°, очевидно, выполняются. Из условия 2° следует, что для любой функции $f(t) \in C$:

$$R^t f(s)|_{s=s_0} = T^s f(t)|_{s=s_0} = f(t).$$

Поэтому для семейства R^t элемент s_0 является нижним нейтральным элементом. Из условия (1.4) следует, что для любой функции $f(t) \in D$

$$R^t f(s)|_{t=s_0} = T^s f(t)|_{t=s_0} = f(s)$$

и, значит, для $f(t) \in D$ элемент s_0 является верхним нейтральным элементом. Итак, для семейства R^t условие 2° выполняется, если только поменять местами верхний и нижний нейтральные элементы. Остается проверить условие 3°. Мы имеем:

$$T_s^r T^s f(t) = T_s^r R^t f(s) = R_r^s R^t f(r);$$

$$T_t^s T^r f(t) = T_t^s R^t f(r) = R_s^t R^s f(r).$$

Так как в этих равенствах левые части равны, то и правые части равны, т. е.

$$R_s^t R^s f(r) = R_r^s R^t f(r), \tag{1.5}$$

что с точностью до обозначений совпадает с условием 3°.

Покажем, что для произвольных r и $t \in \Omega$ операторы T^r и R^t коммутируют. В самом деле, из условия 3° следует:

$$T_s^r T^s f(t) = T_s^r R^t f(s);$$

$$T_t^s T^r f(t) = R_s^t T^r f(s).$$

Так как левые части равны, то и правые части равны, т. е.

$$T_s^r R^t f(s) = R_s^t T^r f(s),$$

а это и означает, что операторы T^r и R^t коммутируют.

3. В заключение этого параграфа докажем две леммы, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1.1. *Для любого фиксированного $t=t_0$ функция $\varphi(s)=T^s f(t)|_{t=t_0}$ принадлежит пространству D.*

Доказательство. Из условия 3° следует:

$$T_s^r T^s f(t)|_{t=t_0} = T_s^r \varphi(s) = T_t^s T^r f(t)|_{t=t_0}. \tag{1.6}$$

Полагая в равенстве (1.6) $s=s_0$ (нейтральному элементу), мы получим, используя условие 2°,

$$T_s^r \varphi(s)|_{s=s_0} = T^r f(t)|_{t=t_0} = \varphi(r),$$

что и доказывает принадлежность функции $\varphi(s)$ подпространству D.

Лемма 1.2. *Если операторы T^s образуют коммутативное семейство, то для любой функции $f(t) \in D$ справедливо равенство*

$$T^s f(t) = T^t f(s)$$

и, следовательно, для $f(t) \in D$ операторы T^s и R^t совпадают.

Доказательство. В самом деле, если операторы T^s коммутируют, то из условия 3° следует:

$$T_s^r T^s f(t) = T_t^s T^r f(t) = T_t^r T^s f(t) = T_r^s T^r f(t).$$

Отсюда получаем:

$$T_s^r T^s f(t) = T_r^s T^r f(t). \tag{1.7}$$

Полагая здесь $t=s_0$ и вспоминая, что $f(t) \in D$, мы получим:

$$T^r f(s) = T^s f(r),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если для любой функции $f(t) \in C$ выполняется равенство* (1.7), *то операторы T^s коммутируют.*

Действительно, из (1.7) и условия 3° следует:

$$T_s^r T^s f(t) = T_t^s T^r f(t) = T_r^s T^r f(t) = T_t^r T^s f(t),$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Примеры операторов обобщенного сдвига

1. Операторы сдвига на топологической группе. Пусть пространство Ω есть топологическая группа *). Обозначим через s и t элементы группы Ω и через $t \cdot s$ групповое произведение этих элементов. Определим операторы T^s с помощью равенства

$$T^s f(t) = f(t \cdot s).$$

Операторы T^s совпадают с операторами правого сдвига на группе Ω. Легко проверить, что все условия 1°—4° обобщенного сдвига здесь выполняются. Заметим, что условие 3° следует из ассоциативности групповой операции. Пространство D совпадает с пространством C, ибо в группах правая и левая единицы совпадают **).

2. Обобщенные сдвиги Дельсарта (Delsart [7]). Пусть Ω, как и в предыдущем примере, — топологическая группа и $\mathfrak{A}$ — некоторая топологическая компактная группа автоморфизмов группы Ω ***). Будем обозначать через $a, b, c, \ldots$ элементы группы $\mathfrak{A}$ и через $m(a)$ меру Хаара на группе $\mathfrak{A}$, нормированную условием $m(\mathfrak{A}) = 1$.

Пусть $f(t) \in C(\Omega)$. Определим операторы T^s, $s \in \Omega$ (обобщенного сдвига) с помощью равенства

$$T^s f(t) = \int_{\mathfrak{A}} f[t \cdot a(s)]\, dm(a), \tag{2.1}$$

где через $a(s)$ обозначен образ элемента s при автоморфизме a. Проверим, что операторы T^s удовлетворяют всем условиям обобщенного сдвига. Условия 1° и 4°, очевидно, выполняются. Условие 2° следует из того, что для любого элемента $a \in \mathfrak{A}$ и единицы e группы Ω

$$a(e) = e.$$

---

*) Определение топологической группы см. [69], гл. III; см. также Введение.

**) См. [69], стр. 14.

***) Определение группы автоморфизмов см. в книге Понтрягина [69], стр. 21; см. также Введение.

Остается проверить условие 3°. Мы имеем, используя инвариантность меры Хаара:

$$T_s^r T^s f(t) = T_s^r \left\{ \int_{\mathfrak{A}} f[t \cdot a(s)]\, dm(a) \right\} =$$
$$= \int_{\mathfrak{A}} dm(b) \left\{ \int_{\mathfrak{A}} [t \cdot a(s \cdot b(r))]\, dm(a) \right\} =$$
$$= \int_{\mathfrak{A}} dm(b) \left\{ \int_{\mathfrak{A}} f[t \cdot a(s) \cdot ab(r)]\, dm(a) \right\} =$$
$$= \int_{\mathfrak{A}} dm(a) \left\{ \int_{\mathfrak{A}} f[t \cdot a(s) \cdot ab(r)]\, dm(b) \right\} =$$
$$= \int_{\mathfrak{A}} dm(a) \left\{ \int_{\mathfrak{A}} f[t \cdot a(s) \cdot b(r)]\, dm(b) \right\};$$
$$T_t^s T^r f(t) = T_t^s \left[\int_{\mathfrak{A}} f(t \cdot b(r))\, dm(b) \right] =$$
$$= \int_{\mathfrak{A}} dm(a) \left\{ \int_{\mathfrak{A}} f[t \cdot a(s) \cdot b(r)]\, dm(b) \right\}.$$

Из этих вычислений следует условие 3°.

Легко видеть, что если функция $f(s)$ инвариантна относительно всех автоморфизмов a группы $\mathfrak{A}$, т. е. удовлетворяет условию

$$f[a(s)] = f(s),$$

то $f(s) \in D$.

3. Некоторые частные случаи о. о. с. Дельсарта.

а) Обозначим через R_1 числовую ось с обычной топологией, и пусть $\Omega = R_1$. Пусть группа автоморфизмов состоит из двух элементов a_1 и a_2, причем

$$a_1(s) = s, \quad a_2(s) = -s.$$

В этом случае формула (2.1) принимает вид

$$T^s f(t) = \frac{1}{2} [f(t+s) + f(t-s)].$$

В этом примере пространство D состоит из четных функций.

б) Пусть Ω — произвольная топологическая абелева группа, причем групповая операция записывается аддитивно. Пусть группа автоморфизмов состоит из двух элементов a_1 и a_2, причем

$$a_1(s) = s, \quad a_2(s) = -s \qquad (s \in \Omega).$$

В этом случае формула (2.1) принимает вид

$$T^s f(t) = \frac{1}{2}[f(t+s) + f(t-s)].$$

В этом примере пространство D состоит из функций, удовлетворяющих условию

$$f(-t) = f(t).$$

Например, если Ω есть действительное двумерное евклидово пространство R_2 с обычной топологией и $s = (s_1, s_2)$, $t = (t_1, t_2)$, то

$$T^s f(t) = \frac{1}{2}[f(t_1+s_1, t_2+s_2) + f(t_1-s_1, t_2-s_2)].$$

Пространство D состоит из функций, удовлетворяющих условию

$$f(-t_1, -t_2) = f(t_1, t_2).$$

в) Пусть $\Omega = R_2$, $s = (s_1, s_2)$ и группа автоморфизмов $\mathfrak{A}$ содержит четыре элемента a_0, a_1, a_2, a_3, причем

$$a_0(s_1, s_2) = (s_1, s_2); \quad a_1(s_1, s_2) = (-s_1, s_2);$$

$$a_2(s_1, s_2) = (s_1, -s_2); \; a_3(s_1, s_2) = (-s_1, -s_2).$$

Формула (2.1) в этом случае принимает вид

$$T^s f(t) = \frac{1}{4}[f(t_1+s_1, t_2+s_2) + f(t_1-s_1, t_2+s_2) + \\ + f(t_1+s_1, t_2-s_2) + f(t_1-s_1, t_2-s_2)].$$

Пространство D состоит из функций $f(t_1, t_2)$, четных относительно каждой из переменных. Этот пример легко обобщается на пространства любого числа переменных.

4. Конечные гиперкомплексные системы. Пусть Ω есть дискретное пространство, состоящее из конечного числа точек $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

В этом случае пространство $C(\Omega)$ совпадает с n-мерным комплексным векторным пространством K_n. Обозначим через e^i ($i = 1, 2, \ldots, n$) вектор со всеми нулевыми координатами, кроме i-й, которая равна единице, т. е. пусть

$$e^i = \left(e_1^i, e_2^i, \ldots, e_n^i\right),$$

где

$$e_j^i = \delta_j^i \quad (= \text{символу Кронекера}).$$

Очевидно, что векторы e^i в пространстве K_n образуют базис. Если $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — произвольный вектор, то *)

$$x = x_i e^i.$$

Каждый линейный оператор в K_n определяется некоторой квадратной матрицей. Оператор обобщенного сдвига $T^{s_p} = T^p$, $s_p \in \Omega$ зависит еще от индекса p ($p = 1, 2, \ldots, n$); поэтому в заданном базисе e^i он определяется некоторой кубической матрицей.

Обозначим элементы этой матрицы через t_{ip}^j ($i, j, p = 1, 2, \ldots, n$).

Таким образом, для каждого вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ о. о. с. T^p может быть записан в виде

$$T^p(x_i) = t_{ip}^j x_j. \tag{2.2}$$

В частности, при $x = e^j$ из формулы (2.2) следует:

$$T^p\left(e_i^j\right) = t_{ip}^j.$$

Посмотрим, каким условиям должны удовлетворять элементы кубической матрицы t_{ip}^j для того, чтобы операторы T^p, определенные по формуле (2.2), были о. о. с., т. е. удовлетворяли условиям 1°—4° предыдущего параграфа. Условие 1°, очевидно, выполняется при любой матрице $\left\{t_{ip}^j\right\}$.

---

*) Мы пользуемся здесь обычным условием, состоящим в том, что если индекс встречается внизу и вверху, то по нему производится суммирование.

Условие 4° отпадает ввиду дискретности пространства Ω. Далее, не нарушая общности, можно, очевидно, предполагать, что нейтральный элемент совпадает с элементом t_1. Полагая в (2.2) $p=1$, мы получим в силу условия 2°:

$$t_{i1}^{j} x_j = x_i.$$

Отсюда и из произвольности вектора x следует:

$$t_{i1}^{j} = \delta_i^j. \tag{2.3}$$

Это условие обеспечивает условие 2° обобщенного сдвига.

Равенство (1.4), определяющее пространство D, принимает вид

$$t_{1p}^{j} x_j = x_p. \tag{2.4}$$

В частности, если $t_{1p}^{j} = \delta_p^j$, то (2.4) выполняется для любого вектора $x \in K_n$ и, следовательно, D совпадает с C.

Наконец, рассмотрим самое существенное условие — условие 3°. Из равенства (2.2) следует для любого $x \in K_n$

$$T_p^q T^p(x_i) = T_p^q(t_{ip}^{j} x_j) = t_{pq}^{k} t_{ik}^{j} x_j;$$

$$T_i^p T^q(x_i) = T_i^p\left(t_{iq}^{j} x_j\right) = t_{ip}^{k} t_{kq}^{j} x_j.$$

Из условия 3° и произвольности вектора x отсюда следует тождество

$$t_{pq}^{k} t_{ik}^{j} = t_{ip}^{k} t_{kq}^{j}. \tag{2.5}$$

Обратно, если выполняется тождество (2.5), то операторы (2.2) удовлетворяют условию 3°.

Определим в K_n произведение базисных элементов с помощью равенства

$$e^i * e^j = \sum_{s=1}^{n} t_{ij}^{s} e^s. \tag{2.6}$$

Эту операцию можно распространить линейно на произвольные векторы пространства K_n. Если $x = x_i e^i$ и $y = y_j e^j$, то

$$x * y = x_i e^i * y_j e^j = x_i y_j (e^i * e^j) = \sum_{i,\,j,\,s} t_{ij}^{s} e^s x_i x_j.$$

Умножение (2.6) называется ассоциативным, если для произвольных трех индексов i, j, k выполняется равенство

$$(e^i * e^j) * e^k = e^i * (e^j * e^k). \tag{2.7}$$

Легко проверить, что условие ассоциативности (2.7) с точностью до обозначения индексов совпадает с условием (2.5). По этой причине условие 3° обобщенного сдвига, следствием которого (в случае конечного дискретного пространства Ω) является условие (2.5), естественно назвать условием ассоциативности.

Нетрудно проверить, что условие коммутативности 5° для матриц $\{t_{ip}^j\}$ сводится к следующему условию:

$$t_{ip}^k t_{kq}^j = t_{iq}^k t_{kp}^j. \tag{2.8}$$

Если в векторном пространстве K_n определена ассоциативная операция умножения векторов, то говорят, что в K_n задана ассоциативная гиперкомплексная система (или алгебра). Поэтому из предыдущего следует, что о. о. с. представляют естественное перенесение понятия ассоциативной гиперкомплексной системы на случай непрерывного (континуального) пространства. В следующем примере мы рассмотрим непрерывные гиперкомплексные системы.

5. Непрерывные (континуальные) гиперкомплексные системы. Если пространство Ω бесконечно и не дискретно, то в формулах (2.2)—(2.8) суммы следует заменить интегралами Стильтьеса — Радона. Пусть $\sigma(s, t, E)$ есть функция двух точек s, $t \in \Omega$ и борелевского множества $E \in \Omega$, по E абсолютно аддитивная. Положим

$$T^s f(t) = \int_\Omega f(u)\, d_u \sigma(s, t, u) \tag{2.9}$$

и выясним, каким условиям должна удовлетворять мера σ для того, чтобы операторы T^s, определенные по формуле (2.9), удовлетворяли условиям 2° и 3° *) обобщенного сдвига (условие 1°, очевидно, выполняется при любой мере σ). Нетрудно видеть, что в примерах 1 и 2 настоящего параграфа операторы T^s можно записать в виде (2.9).

---

*) Мы ограничиваемся лишь алгебраическими условиями обобщенного сдвига и не рассматриваем условия 4°.

Условие 2°, очевидно, сводится к тому, что мера $\sigma(s_0, t, E)$ есть мера Дирака, сосредоточенная в точке t.

Наконец, выясним, какому условию должна удовлетворять мера $\sigma(s, t, E)$ для того, чтобы выполнялось условие ассоциативности (условие 3°). Мы имеем:

$$T_s^r T^s f(t) = T_s^r \left\{ \int_\Omega f(u)\, d_u\sigma(s, t, u) \right\} =$$
$$= \int_\Omega d_v\sigma(r, s, v) \left\{ \int_\Omega f(u)\, d_u\sigma(v, t, u) \right\} =$$
$$= \int_\Omega f(u) \left\{ d_u \int_\Omega \sigma(v, t, u)\, d_v\sigma(r, s, v) \right\}; \qquad (2.10)$$

$$T_t^s T^r f(t) = T_t^s \left\{ \int_\Omega f(u)\, d_u\sigma(r, t, u) \right\} =$$
$$= \int_\Omega d_v\sigma(s, t, v) \left\{ \int_\Omega f(u)\, d_u\sigma(r, v, u) \right\} =$$
$$= \int_\Omega f(u) \left\{ d_u \int_\Omega \sigma(r, v, u)\, d_v\sigma(s, t, v) \right\}. \qquad (2.11)$$

Приравнивая правые части равенств (2.10) и (2.11), мы получим в силу произвольности функции $f(u)$

$$\int_\Omega \sigma(v, t, E)\, d_v\sigma(r, s, v) = \int_\Omega \sigma(r, v, E)\, d_v\sigma(s, t, v), \qquad (2.12)$$

где E — произвольное борелевское множество. Наоборот, если выполняется тождество (2.12), то операторы T^s, определенные по формуле (2.9), удовлетворяют условию 3° обобщенного сдвига (условию ассоциативности).

В заключение этого параграфа заметим, что если операторы (2.9) образуют коммутативное семейство, то мера σ удовлетворяет условию

$$\int_\Omega \sigma(r, v, E)\, d_v\sigma(s, t, v) = \int_\Omega \sigma(s, v, E)\, d_v\sigma(r, t, v).$$

§ 3. Сопряженные операторы обобщенного сдвига

1. Обозначим через $m(E)$ вполне аддитивную действительную меру, определенную на борелевских множествах E пространства Ω.

Далее, обозначим через $L_m^2(\Omega)$ пространство комплексно-значных функций, имеющих интегрируемый квадрат модуля относительно меры m. $L_m^2(\Omega)$ есть пространство Гильберта. Определим в этом пространстве скалярное произведение с помощью равенства

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(t) \overline{g(t)} \, dm(t). \tag{3.1}$$

Скалярное произведение (3.1) позволяет нам определить семейство сопряженных операторов $\widetilde{T}^s$. Эти операторы определяются, как обычно, с помощью равенства

$$\left(T^s f, g\right) = \left(f, \widetilde{T}^s g\right) \tag{3.2}$$

или используя выражение (3.1) для скалярного произведения,

$$\int_{\Omega} T^s f(t) \overline{g(t)} \, dm(t) = \int_{\Omega} f(t) \overline{\widetilde{T}^s g(t)} \, dm(t). \tag{3.3}$$

Свойства операторов T^s индуцируют ряд свойств сопряженных операторов $\widetilde{T}^s$:

а) Операторы $\widetilde{T}^s$ линейны.

б) Для произвольной функции $g(t) \in L_m^2(\Omega)$

$$\widetilde{T}^{s_0} g(t) = g(t). \tag{3.4}$$

Равенство (3.4) получается из равенства (3.2) при $s = s_0$. В самом деле, полагая в (3.2) $s = s_0$, мы получим, используя условие 2° § 1,

$$(f, g) = \left(f, \widetilde{T}^{s_0} g\right).$$

Из этого равенства и произвольности функции f следует равенство (3.4).

в) Применим к обеим частям равенства (3.3) оператор T_s^r. Мы получим, используя условие 3° § 1,

$$\int\limits_{\Omega} T_s^r T^s f(t)\cdot\overline{g(t)}\,dm(t)=\int\limits_{\Omega} T_t^s T^r f(t)\,\overline{g(t)}\,dm(t)=$$

$$=\int\limits_{\Omega} f(t)\cdot\overline{\tilde{T}_t^r\tilde{T}^s g(t)}\,dm(t)=\int\limits_{\Omega} f(t)\,T_s^r\overline{\tilde{T}^s g(t)}\,dm(t).$$

Так как функция $f(t)$ произвольна, то из последнего равенства следует:

$$T_s^r\overline{\tilde{T}^s g(t)}=\overline{\tilde{T}_t^r\tilde{T}^s g(t)}. \tag{3.5}$$

Допустим, что операторы T^s действительны, т. е. преобразуют действительные функции в действительные. Из формулы (3.3) следует, что в этом случае сопряженные операторы $\tilde{T}^s$ также действительны и поэтому

$$\overline{\tilde{T}^s g(t)}=\tilde{T}^s\overline{g(t)}.$$

Используя это свойство, мы получим из равенства (3.5)

$$T_s^r\tilde{T}^s\overline{g(t)}=\tilde{T}_t^r\tilde{T}^s\overline{g(t)}.$$

Черту над $g(t)$ можно опустить, так как $g(t)$ — произвольная функция. Поэтому для действительных о. о. с. выполняется условие

$$T_s^r\tilde{T}^s g(t)=\tilde{T}_t^r\tilde{T}^s g(t). \tag{3.6}$$

С л е д с т в и е. *Если операторы T^s действительны и существует такая мера $m(E)$, что относительно скалярного произведения* (3.3) *с этой мерой операторы T^s самосопряженны, т. е. $\tilde{T}^s=T^s$, то операторы T^s коммутативны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как операторы T^s самосопряженны, то равенство (3.6) принимает вид

$$T_s^r T^s g(t)=T_t^r T^s g(t).$$

Запишем теперь условие 3° о. о. с.:

$$T_s^r T^s g(t)=T_t^s T^r g(t).$$

Сравнивая эти два равенства, мы получим:

$$T_t^r T^s g(t) = T_t^s T^r g(t),$$

что и доказывает коммутативность операторов T^s.

2. Определим сопряженные операторы $\widetilde{R}_t$ для семейства операторов R^t. Эти операторы определяются из равенства

$$\int_\Omega R^t f(s) \overline{g(s)}\, dm(s) = \int_\Omega T^s f(t) \overline{g(s)}\, dm(s) = \\ = \int_\Omega f(s) \overline{\widetilde{R}^t g(s)}\, dm(s). \quad (3.7)$$

Нетрудно показать, что для $g(s) \in D$

$$\widetilde{R}^{s_0} g(s) = g(s).$$

3. В дальнейшем мы будем предполагать, что существует мера m, для которой сопряженные операторы удовлетворяют условиям:

а) для любой функции $f(t) \in L_m^2(\Omega) \cap C$

$$\widetilde{T}_s^r T^s f(t) = T_t^s \widetilde{T}^r f(t); \quad (3.8)$$

б) для любой функции $f(t) \in L_m^2(\Omega) \cap C$

$$\widetilde{R}_s^r T^s f(t) = \widetilde{T}_t^r T^s f(t). \quad (3.9)$$

Условия (3.8) и (3.9) выполняются не для всякой меры m. Более того, заранее не ясно, существует ли хотя бы одна мера m, для которой условия (3.8) и (3.9) выполняются. В дальнейшем мы покажем, что в том случае, когда операторы обобщенного сдвига совпадают со сдвигом на группе, а мера m есть инвариантная мера Хаара, то условия (3.8) и (3.9) выполняются. Роль условий (3.8) и (3.9) в общем случае выяснится в дальнейшем.

Пусть операторы T^s действительны. Тогда равенство (3.3) принимает вид

$$\int_\Omega T^s f(t) \cdot \overline{g(t)}\, dm(t) = \int_\Omega f(t) \cdot \widetilde{T}^s \overline{g(t)}\, dm(t).$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\tilde{T}_s^r$, мы получим, используя условие (3.8):

$$\int\limits_\Omega \tilde{T}_s^r T^s f(t) \cdot \overline{g(t)}\, dm(t) = \int\limits_\Omega T_t^s \tilde{T}^r f(t) \cdot \overline{g(t)}\, dm(t) =$$

$$= \int\limits_\Omega f(t) \overline{T_t^r \tilde{T}^s g(t)}\, dm(t) = \int\limits_\Omega f(t)\, \overline{\tilde{T}_s^r \tilde{T}^s g(t)}\, dm(t).$$

Из этого равенства и произвольности функции $f(t)$ следует:

$$T_t^r \tilde{T}^s g(t) = \tilde{T}_s^r \tilde{T}^s g(t). \qquad (3.10)$$

4. Для коммутативных операторов T^s вместо условий (3.8) и (3.9) мы будем требовать условие

$$T_t^s \tilde{T}^r f(t) = \tilde{T}_t^r T^s f(t) \qquad (3.11)$$

для любой функции $f(t) \in L_m^2(\Omega) \cap C$ и любых $s,\ r \in \Omega$.

З а м е ч а н и е. Если $f(t) \in D$, то для любого фиксированного r $\tilde{T}^r f(t) \in D$. В самом деле, полагая в (3.8) $t = s_0$, мы получим:

$$\tilde{T}^r f(s) = T_t^s \left[\tilde{T}^r f(t)\right]_{|\, t = s_0}.$$

Это доказывает, что $\tilde{T}^r f(t) \in D$. Поэтому из леммы 1.2 и условия (3.8) следует:

для любой функции $f(t) \in L_m^2(\Omega) \cap D$

$$\tilde{T}_s^r T^t f(s) = T_s^t \tilde{T}^r f(s),$$

т. е. условие (3.11).

§ 4. Примеры сопряженных операторов обобщенного сдвига

1. Пусть Ω — топологическая группа, на которой существует двусторонне-инвариантная мера Хаара $m(t)$. Обозначим через s, t элементы группы Ω, через $t \cdot s$ групповое произведение этих элементов, и пусть

$$T^s f(t) = f(t \cdot s).$$

В таком случае, как нетрудно проверить,

$$\tilde{T}^s f(t) = f(t \cdot s^{-1}),$$

$$\tilde{R}^t f(s) = f(t^{-1} \cdot s),$$

где через s^{-1} обозначен элемент, обратный элементу s. Легко видеть (используя ассоциативность группового умножения), что условия (3.8) и (3.9) выполняются. Если группа Ω коммутативна (абелева), то выполняется также условие (3.11).

2. Вычислим сопряженные операторы для обобщенных сдвигов Дельсарта (см. § 2.2). Мы имеем, обозначая по-прежнему через $m(t)$ инвариантную меру Хаара на Ω и через $n(a)$ инвариантную меру на группе автоморфизмов $\mathfrak{A}$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} T^s f(t)\overline{g(t)}\,dm(t) &= \int\limits_{\Omega}\overline{g(t)}\left\{\int\limits_{\mathfrak{A}} f[t\cdot a(s)]\,dn(a)\right\}dm(t) = \\ &= \int\limits_{\Omega} dn(a)\left\{\int\limits_{\Omega}\overline{g(t)}\,f[t\cdot a(s)]\,dm(t)\right\} = \\ &= \int\limits_{\mathfrak{A}} dn(a)\left\{\int\limits_{\Omega}\bar{g}\left[t\cdot a(s)^{-1}\right]f(t)\,dm(t)\right\} = \\ &= \int\limits_{\Omega} f(t)\left\{\int\limits_{\mathfrak{A}}\bar{g}\left[t\cdot a(s)^{-1}\right]dn(a)\right\}dm(t).\end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$\tilde{T}^s f(t) = \int\limits_{\mathfrak{A}} f\left[t\cdot a(s)^{-1}\right]dn(a). \tag{4.1}$$

Так как для любого элемента $a\in\mathfrak{A}$

$$a(e) = e = a(s\cdot s^{-1}) = a(s)\cdot a(s^{-1}),$$

где e — единица группы Ω, то

$$[a(s)]^{-1} = a(s^{-1}).$$

Поэтому формуле (4.1) можно придать вид

$$\tilde{T}^s f(t) = \int\limits_{\mathfrak{A}} f[t\cdot a(s^{-1})]\,dn(a).$$

3. Вычислим сопряженные операторы для примера 4 из § 2. Определим скалярное произведение векторов $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y^1, \ldots, y^n)$ с помощью равенства

$$(x,\ y) = x_i\bar{y}^i.$$

Тогда

$$(T^p x,\ y) = t^j_{ip}x_j\bar{y}^i = x_j\overline{\bar{t}^j_{ip}y^i}.$$

Поэтому сопряженные операторы $\tilde{T}^p$ определяются из равенства

$$(\tilde{T}^p y)^j = \overline{t}^j_{ip} y^i.$$

Нетрудно получить для кубической матрицы t^j_{ip} условия, эквивалентные условиям (3.8), (3.9) и (3.11). Однако мы этого здесь делать не будем.

4. Пусть Ω, как и прежде, — топологическое пространство и Ω^*—другое топологическое пространство. Пусть $m(t)$ $t \in \Omega$ — вполне аддитивная положительная мера на Ω и $n(\lambda)$, $\lambda \in \Omega^*$—такая же мера на Ω^*. Пусть $\varphi(t, \lambda)$—функция, определенная на топологическом произведении $\Omega \times \Omega^*$. Допустим, что функция $\varphi(t, \lambda)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) Существует элемент $s_0 \in \Omega$ такой, что для всех $\lambda \in \Omega^*$ выполняется равенство

$$\varphi(s_0, \lambda) = 1. \tag{4.2}$$

2) Для любой функции $f(t) \in L^2_m(\Omega)$ существует функция $F(\lambda) \in L^2_m(\Omega^*)$, для которой справедливо предельное равенство

$$\lim_{\Omega' \to \Omega} \int\limits_{\Omega^*} \left| F(\lambda) - \int\limits_{\Omega'} f(t) \overline{\varphi(t, \lambda)}\, dm(t) \right|^2 dn(\lambda) = 0,$$

где Ω' — компактное подпространство пространства Ω. Равенство (4.2) принято сокращенно записывать в виде

$$F(\lambda) = \underset{\Omega' \to \Omega}{\overset{(n)}{\mathrm{l.\,i.\,m}}} \int\limits_{\Omega'} f(t) \overline{\varphi(t, \lambda)}\, dm(t). \tag{4.3}$$

В дальнейшем функцию $F(\lambda)$ мы будем называть преобразованием Фурье функции $f(t)$.

3) Справедлива формула обращения

$$f(t) = \underset{\Omega^{*\prime} \to \Omega^*}{\overset{(m)}{\mathrm{l.\,i.\,m}}} \int\limits_{\Omega^{*\prime}} F(\lambda) \varphi(t, \lambda)\, dn(\lambda). \tag{4.4}$$

4) Для любой функции $H(\lambda) \in L^2_n(\Omega^*)$ существует функция

$$h(t) = \underset{\Omega^{*\prime} \to \Omega^*}{\overset{(m)}{\mathrm{l.\,i.\,m}}} \int\limits_{\Omega^{*\prime}} H(\lambda) \varphi(t, \lambda)\, dn(\lambda), \tag{4.5}$$

причем

$$H(\lambda)=\underset{\Omega' \xrightarrow{(n)} \Omega}{\mathrm{l.\,i.\,m}} \int\limits_{\Omega'} h(t)\overline{\varphi(t,\ \lambda)}\,dm(t). \tag{4.6}$$

Если $g(t)$ — другая функция, принадлежащая классу $L_m^2(\Omega)$, то для нее можно построить по формуле (4.3) функцию $G(\lambda)$. Тогда из (4.3) и (4.4) будет следовать:

$$\int\limits_{\Omega} f(t)\overline{g(t)}\,dm(t)=\int\limits_{\Omega}\overline{g(t)}\left[\int\limits_{\Omega^*}F(\lambda)\varphi(t,\ \lambda)\,dn(\lambda)\right]dm(t)=$$
$$=\int\limits_{\Omega^*}F(\lambda)\left[\int\limits_{\Omega}\overline{g(t)}\varphi(t,\ \lambda)\,dm(t)\right]dn(\lambda)=\int\limits_{\Omega^*}F(\lambda)\,\overline{G(\lambda)}\,dn(\lambda). \tag{4.7}$$

Точно так же можно доказать, используя формулы (4.5) и (4.6), что если $F(\lambda)$, $G(\lambda)\in L_n^2(\Omega^*)$ и $f(t)$, $g(t)$ строятся по формуле (4.5), то

$$\int\limits_{\Omega^*}F(\lambda)\,\overline{G(\lambda)}\,dn(\lambda)=\int\limits_{\Omega}f(t)\overline{g(t)}\,dm(t). \tag{4.8}$$

Определим теперь для функции $f(t)\in L_m^2(\Omega)$ операторы T^s по формуле

$$T^s f(t)=\int\limits_{\Omega^*}F(\lambda)\varphi(s,\ \lambda)\varphi(t,\ \lambda)\,dn(\lambda). \tag{4.9}$$

Покажем, что эти операторы удовлетворяют условиям 1°—3°, а также условию коммутирования 5° § 1 *).

Условие 1° очевидно. Условие 2° следует из (4.2) и формулы обращения (4.4). Проверим условие 3°.

В силу формул (4.5) и (4.6) преобразование Фурье функции $T^r f(t)$ по переменной t при фиксированном r равно

$$F(\lambda)\varphi(r,\ \lambda).$$

Поэтому из формулы (4.9) следует:

$$T_t^s T^r f(t)=\int\limits_{\Omega^*}F(\lambda)\varphi(r,\ \lambda)\varphi(s,\ \lambda)\varphi(t,\ \lambda)\,dn(\lambda).$$

---

*) Как и в § 2, мы ограничиваемся только алгебраическими условиями.

С другой стороны, преобразование Фурье функции $T^s f(t)$ по s при фиксированном t равно

$$F(\lambda)\varphi(t, \lambda).$$

Поэтому из формулы (4.9) следует:

$$T_s^r T^s f(t) = \int_{\Omega^*} F(\lambda)\varphi(t, \lambda)\varphi(s, \lambda)\varphi(r, \lambda)\,dn(\lambda).$$

Эти вычисления показывают, что условие 3° выполняется. Аналогично доказывается условие 5°.

Вычислим теперь сопряженные операторы $\widetilde{T}^s$. Покажем, что

$$\widetilde{T}^s f(t) = \int_{\Omega^*} F(\lambda)\overline{\varphi(s, \lambda)}\varphi(t, \lambda)\,dn(\lambda). \qquad (4.10)$$

В самом деле, если (4.10) верна, то из формулы (4.7) следует:

$$\int_{\Omega} \widetilde{T}^s f(t)\cdot\overline{g(t)}\,dm(t) = \int_{\Omega^*} F(\lambda)\overline{\varphi(s, \lambda)}\,\overline{G(\lambda)}\,dn(\lambda). \qquad (4.11)$$

Далее, так как преобразование Фурье функции $T^s g(t)$ по переменной t (при фиксированном s) равно $G(\lambda)\varphi(s, \lambda)$, то из той же формулы (4.7) следует:

$$\int_{\Omega} f(t)\cdot\overline{T^s g(t)}\,dm(t) = \int_{\Omega^*} F(\lambda)\overline{G(\lambda)}\,\overline{\varphi(s, \lambda)}\,dn(\lambda). \qquad (4.12)$$

Из (4.11) и (4.12) следует, что операторы (4.10) действительно являются сопряженными для операторов T^s. Аналогичные вычисления показывают, что выполняется условие

$$T_t^s \widetilde{T}^r f(t) = \widetilde{T}_t^r T^s f(t).$$

§ 5. Линейные представления операторов обобщенного сдвига

1. Принятая нами в предыдущих параграфах аксиоматика для о. о. с. T^s и сопряженных операторов $\widetilde{T}^s$ и $\widetilde{R}^t$ позволяет строить теорию линейных представлений, аналогично теории представлений для бикомпактных групп (см., напри-

мер, Л. С. Понтрягин, гл V). В этом параграфе, а также в следующем мы будем предполагать, что пространство Ω бикомпактно и мера m такова, что полная мера пространства Ω конечна.

Пусть $f(t) \in C(\Omega)$ (см. § 1) и мера m такова, что выполняются условия (3.8) и (3.9). Определим функцию $\varphi(s)$ по формуле

$$\varphi(s) = \int_{\Omega} T^s f(t) \overline{f(t)}\, dm(t). \tag{5.1}$$

Построим теперь по функции $\varphi(s)$ ядро $\tilde{T}^r \varphi(s) = K(s, r)$. Покажем, что это ядро эрмитово. В самом деле, из условия (3.8) и определения сопряженного оператора следует:

$$K(s, r) = \int_{\Omega} \tilde{T}_s^r T^s f(t) \overline{f(t)}\, dm(t) =$$

$$= \int_{\Omega} T_t^s \tilde{T}^r f(t) \cdot \overline{f(t)}\, dm(t) =$$

$$= \int_{\Omega} \tilde{T}^r f(t) \cdot \overline{\tilde{T}^s f(t)}\, dm(t) = \overline{K(r, s)}.$$

Рассмотрим теперь интегральное уравнение с эрмитовым ядром $K(s, r)$:

$$\lambda\psi(s) = \int_{\Omega} \tilde{T}^r \varphi(s) \psi(r)\, dm(r). \tag{5.2}$$

Используя эрмитовость ядра, уравнение (5.2) можно записать также в виде

$$\lambda\psi(s) = \int_{\Omega} \overline{\tilde{T}^s \varphi(r)}\, \psi(r)\, dm(r) = \int_{\Omega} \overline{\varphi(r)}\, T^s \psi(r)\, dm(r). \tag{5.2^1}$$

Обозначим через λ_0 отличное от нуля собственное значение уравнения (5.2) и через $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_n(s)$ полный набор ортонормированных собственных функций этого уравнения, соответствующих собственному значению λ_0. Подставляя в уравнение (5.2^1) λ_0 вместо λ и $\psi_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ вместо $\psi(s)$ мы получим:

$$\lambda_0 \psi_i(s) = \int_{\Omega} \overline{\varphi(r)}\, T^s \psi_i(r)\, dm(r). \tag{5.3}$$

Применим к левой и к правой частям равенства (5.3) оператор T_s^u.

Используя условие ассоциативности (условие 3° § 1), мы получим:

$$\lambda_0 T^u \psi_i(s) = \int_\Omega \overline{\varphi(r)}\, T_s^u T^s \psi_i(r)\, dm(r) = \int_\Omega \overline{\varphi(r)}\, T_r^s T^u \psi_i(r)\, dm(r). \tag{5.4}$$

Это равенство показывает, что при любом фиксированном u функция $T^u\psi_i(s)$ также является собственной функцией уравнения (5.3). Поэтому она является линейной комбинацией с коэффициентами, зависящими от u, функций $\psi_j(s)$ ($j=1, 2, \ldots, n$):

$$T^u \psi_i(s) = \sum_{j=1}^{n} e_{ij}(u)\, \psi_j(s). \tag{5.5}$$

Покажем теперь, что матрица $E(u) = \{e_{ij}(u)\}_{i,\, j=1}^{n}$ есть линейное представление операторов T^v в том смысле, что для произвольных $u,\ v \in \Omega$ выполняется равенство

$$T^v E(u) = E(v) \cdot E(u). \tag{5.6}$$

Чтобы доказать равенство (5.6), применим к обеим частям равенства (5.5) оператор T_u^v. Используя условие ассоциативности, мы получим:

$$T_u^v T_s^u \psi_i(s) = \sum_{j=1}^{n} T^v e_{ij}(u)\, \psi_j(s) = T_s^u T^v \psi_i(s) =$$
$$= T_s^u \sum_{k=1}^{n} e_{ik}(v)\, \psi_k(s) = \sum_{k=1}^{n} e_{ik}(v) \sum_{j=1}^{n} e_{kj}(u)\, \psi_j(s).$$

Так как функции $\psi_j(s)$ ортогональны, то они линейно независимы. Поэтому из последнего равенства следует:

$$T^v e_{ij}(u) = \sum_{k=1}^{n} e_{ik}(v)\, e_{kj}(u),$$

что совпадает с равенством (5.6).

Полагая в равенстве (5.5) $u = s_0$ (см. условие 2° § 1), мы получим:

$$\psi_i(s) = \sum_{j=1}^{n} e_{ij}(s_0)\,\psi_j(s).$$

Отсюда следует в силу линейной независимости функций $\psi_j(s)$

$$e_{ij}(s_0) = \delta_{ij}$$

или

$$E(s_0) = E,$$

где E — единичная матрица порядка n.

Покажем, что собственные функции уравнения (5.3) принадлежат пространству D (см. § 1, условие (1.4)). В самом деле, если мы положим в уравнении (5.4) $s = s_0$, то получим:

$$\lambda_0 T^u \psi_i(s)\big|_{s=s_0} = \int_\Omega \overline{\varphi(r)}\left[T_r^s T^u \psi_i(r)\right]_{s=s_0} dm(r) = \\ = \int_\Omega \overline{\varphi(r)}\, T^u \psi_i(r)\, dm(r) = \lambda_0 \psi_i(u).$$

Так как $\lambda_0 \neq 0$, то из последнего равенства следует:

$$T^u \psi_i(s)\big|_{s=s_0} = \psi_i(u), \tag{5.7}$$

что и показывает принадлежность функции $\psi_i(s)$ функциональному пространству D.

Полагая в равенстве (5.5) $s = s_0$ и используя равенство (5.7), мы получим:

$$\psi_i(u) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(s_0)\, e_{ij}(u). \tag{5.8}$$

Равенство (5.8) показывает, что собственные функции интегрального уравнения (5.2) выражаются линейно через элементы матрицы представления операторов обобщенного сдвига.

2. В силу известной теоремы Гильберта—Шмидта всякая функция $g(s)$ вида

$$g(s) = \int_\Omega \tilde{T}^r \varphi(s)\, h(r)\, dm(r), \tag{5.9}$$

где $h(r) \in L^2_m(\Omega)$, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям уравнения (5.2). Отсюда и из (5.8) следует

Теорема 5.1. *Всякая функция* $g(s)$ *вида* (5.9) *с* $\varphi(s)$ *вида* (5.1) *может быть аппроксимирована с любой степенью точности равномерно на всем пространстве* Ω *линейными агрегатами вида*

$$s_N(t) = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{r_\nu} a_{ij}^{(r_\nu)} e_{ij}^{(r_\nu)}(t), \tag{5.10}$$

где $\{e_{ij}^{(r_\nu)}(t)\}_{i,j=1}^{r_\nu}$ — *матрица-представление операторов* T^s *порядка* r_ν, $a_{ij}^{(r_\nu)}$ — *постоянные числа.*

3. В теории линейных представлений бикомпактных групп большую роль играет вопрос о полноте системы представлений. Этот вопрос тесно связан с вопросом аппроксимации произвольной непрерывной функции $f(t)$, заданной на группе, линейными агрегатами вида (5.10). Выясним, каким образом последний вопрос может быть решен в рамках нашей теории. Предварительно докажем ряд лемм.

Лемма 5.1. *Если функция* $f(t)$ *может быть аппроксимирована с любой степенью точности линейными агрегатами вида* (5.10), *то она принадлежит подпространству* D (т. е. удовлетворяет условию (1.4)).

Доказательство. Пусть сначала $f(t) = s_N(t)$, где $s_N(t)$ есть сумма вида (5.10). Эту сумму можно записать в виде

$$s_N(t) = \sum_{\nu=1}^{N} sp\left[A^{(r_\nu)} \cdot E^{(r_\nu)}(t)\right], \tag{5.11}$$

где $A^{(r_\nu)} = \{a_{ij}^{(r_\nu)}\}_{i,j=1}^{r_\nu}$ и через $sp(A)$ обозначен след матрицы A. Из (5.11) следует:

$$T^s s_N(t) = \sum_{\nu=1}^{N} sp\left[A^{(r_\nu)} \cdot T^s E^{(r_\nu)}(t)\right] =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{N} sp\left[A^{(r_\nu)} \cdot E^{(r_\nu)}(s) \cdot E^{(r_\nu)}(t)\right]$$

Полагая здесь $t = s_0$, получим:

$$T^s s_N(t)\Big|_{t=s_0} = \sum_{\nu=1}^{N} sp\left[A^{(r_\nu)} E^{(r_\nu)}(s)\right] = s_N(s).$$

В общем случае следует воспользоваться предельным переходом.

Лемма 5.1 показывает, что в дальнейшем, при изучении вопросов аппроксимации функций агрегатами вида (5.10), следует рассматривать лишь функции класса D.

Лемма 5.2. *Для произвольных функций* $f(t)$, $g(t)$ (*не обязательно класса* D) *справедливо равенство* *)

$$M_s\{\tilde{T}^s f(t)\, g(s)\} = M_s\{f(s) \cdot \tilde{R}^s g(t)\}. \tag{5.12}$$

Доказательство. Обозначим через $h(t)$ произвольную функцию класса $C(\Omega)$. Мы имеем:

$$\begin{aligned} M_t\{\overline{h(t)}\, M_s[\tilde{T}^s f(t) \cdot g(s)]\} &= M_s\{g(s)\, M_t[\tilde{T}^s f(t) \cdot \overline{h(t)}]\} = \\ &= M_s\{g(s)\, M_t[f(t) \cdot \overline{T^s h(t)}]\} = M_t\{f(t)\, M_s[g(s)\, \overline{T^s h(t)}]\} = \\ &= M_t\{f(t)\, M_s[g(s)\, \overline{R^t h(s)}]\} = M_t\{f(t)\, M_s[\tilde{R}^t g(s) \cdot \overline{h(s)}]\} = \\ &= M_s\{\overline{h(s)}\, M_t[f(t)\, \tilde{R}^t g(s)]\} = M_t\{\overline{h(t)}\, M_s[f(s)\, \tilde{R}^s g(t)]\}. \end{aligned}$$

Сравнивая начало и конец в этой серии равенств и вспоминая, что $h(t)$ — произвольная непрерывная функция, мы получаем равенство (5.12).

Предположим теперь, что $f(t) \in D$. Тогда функция $T^s f(t)$ как функция s при любом фиксированном t принадлежит D и как функция t при любом фиксированном s также принадлежит D. Первое следует из леммы 1.1. Покажем второе. Мы имеем:

$$T_t^r T^s f(t) = T_r^s T^r f(t).$$

Полагая здесь $t = s_0$, мы получим, используя то обстоятельство, что $f(t) \in D$,

$$T_t^r T^s f(t)\Big|_{t=s_0} = T_r^s\left[T^r f(t)\Big|_{t=s_0}\right] = T^s f(r).$$

---

*) $M_s\{f(s)\} = \int\limits_{\Omega} f(s)\, dm(s).$

Последнее равенство как раз и означает, что при любом фиксированном s $T^s f(t) \in D$.

Определим в пространстве D скалярное произведение (f, g), $f, g \in D$ по формуле

$$(f, g) = M_t \{ f(t) \cdot \overline{g(t)} \}$$

и норму

$$\|f\| = (f, f)^{1/2}. \tag{5.13}$$

Замыкая пространство D по норме (5.13), мы получим пространство Гильберта $L^2_m(D)$, которое мы будем в дальнейшем обозначать буквой H.

Лемма 5.3. *Если* $f(t) \in D$, *то*

$$\tilde{R}^s f(t)|_{s=s_0} = f(t). \tag{5.14}$$

Доказательство. Полагая в равенстве (3.9) $t = s_0$, $r = s_0$, мы получим:

$$\tilde{R}^r f(s)|_{r=s_0} = f(s),$$

что отличается от (5.14) только обозначениями.

4. Обозначим через $\delta_u(t)$ действительную непрерывную положительную функцию, отличную от нуля лишь в некоторой малой окрестности U точки s_0 и удовлетворяющую условию

$$M_t \{ \delta_u(t) \} = 1.$$

Используя условие 4° § 1, нетрудно проверить, что для любой непрерывной функции $f(t)$, принадлежащей классу D, функция

$$f_u(s) = M_t \{ T^s f(t) \delta_u(t) \}$$

мало отличается, равномерно на Ω, от функции $f(s)$. Точнее, для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать такую окрестность точки s_0 $U(\varepsilon, s_0) = U$, что для всех $s \in \Omega$ выполняется неравенство

$$|f(s) - f_u(s)| < \varepsilon. \tag{5.15}$$

Введем обозначения:

$$\Delta_u(s) = M_t \{ T^s \delta_u(t) \cdot \delta_u(t) \},$$

$$\Lambda_u(s, r) = T^r \Delta_u(s).$$

Из условия (3.8) следует:

$$\Lambda_u(s, r) = M_t\{\tilde{T}_s^r T^s \delta_u(t) \cdot \delta_u(t)\} = \\ = M_t\{T_t^s \tilde{T}^r \delta_u(t) \cdot \delta_u(t)\} = M_t\{\tilde{T}^r \delta_u(t) \cdot \overline{T^s \delta_u(t)}\}.$$

Отсюда видно, что $\Lambda_u(s, r)$ — эрмитово ядро.

Лемма 5.4. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $f(t) \in D \cap C$,

2) $\tilde{R}^r f(t)$ *непрерывна по совокупности переменных,*

3) *существует такое постоянное число* $A > 0$, *что для любой окрестности и точки* s_0 *выполняется неравенство*

$$M_t\{|\tilde{T}^s \delta_u(t)|\} < A. \tag{5.16}$$

Тогда

$$\lim_{U \to s_0} M_r\{\Lambda_u(s, r) f(r)\} = f(s)$$

равномерно на Ω.

Доказательство. Из леммы 5.2 следует:

$$M_r\{\Lambda_u(s, r) f(r)\} = M_t\{\overline{\tilde{T}^s \delta_u(t)}\, M_r[\tilde{T}^r \delta_u(t) f(r)]\} = \\ = M_t\{\overline{\tilde{T}^s \delta_u(t)}\, M_r[\delta_u(r) \tilde{R}^r f(t)]\}.$$

Обозначим через ε произвольное положительное число, и пусть $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{A}$. Выберем окрестность U настолько малой, чтобы для $r \in U$ всех t выполнялось неравенство

$$|\tilde{R}^r f(t) - f(t)| < \varepsilon_1,$$

что возможно в силу условия 2) и леммы 5.3. Тогда

$$|M_r\{\delta_u(r) \tilde{R}^r f(t)\} - f(t)| < \varepsilon_1.$$

Из этого неравенства, а также из неравенства (5.16) следует:

$$|M_r\{\Lambda_u(s, r) f(r)\} - M_t\{\overline{\tilde{T}^s \delta_u(t)} f(t)\}| < \varepsilon$$

или

$$|M_r\{\Lambda_u(s, r) f(r)\} - M_t\{\delta_u(t) T^s f(t)\}| < \varepsilon.$$

Если для $t \subset U$ выполняется также неравенство (5.15), то из последнего неравенства получим для всех $s \in \Omega$

$$|M_r\{\Lambda_u(s, r) f(r)\} - f(s)| < 2\varepsilon.$$

Это неравенство доказывает лемму, так как число ε было нами выбрано произвольно.

Из этой леммы и теоремы 5.1 непосредственно следует

Теорема 5.2. *Каждую функцию из класса D можно аппроксимировать с любой точностью, равномерно на Ω, линейными агрегатами вида* (5.10).

5. Пусть $E(t) = \{e_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n}$ — некоторое линейное представление операторов T^s, т. е. матрица, удовлетворяющая для любых s, $t \in \Omega$ соотношению

$$T^s E(t) = E(s) \cdot E(t).$$

Вычислим матрицу $\widetilde{T}^s E(t)$. Применив к интегральному уравнению (5.3) оператор $\widetilde{T}_s^u$, мы получим, используя условие (3.8),

$$\lambda \widetilde{T}^u \psi_i(s) = M_r \{\overline{\varphi(r)}\, \widetilde{T}_s^u T^s \psi_i(r)\} = M_r \{\overline{\varphi(r)}\, T_r^s \widetilde{T}^u \psi_i(r)\}.$$

Поэтому $\widetilde{T}^u \psi_i(s)$ при любом фиксированном u также является собственной функцией уравнения (5.3) и поэтому

$$\widetilde{T}^u \psi_i(s) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(u)\, \psi_j(s). \tag{5.17}$$

Покажем, что

$$f_{ij}(u) = \bar{e}_{ji}(u). \tag{5.18}$$

С этой целью умножим обе части равенства (5.17) на $\bar{\psi}_k(s)$ и вычислим среднее M_s. Мы получим, используя равенство (5.5),

$$f_{ik}(u) = M_s \{\widetilde{T}^u \psi_i(s)\, \overline{\psi_k(s)}\} = M_s \{\psi_i(s)\, \overline{T^u \psi_k(s)}\} = \bar{e}_{ki}(u),$$

что и доказывает равенство (5.18). Итак, равенство (5.17) может быть записано в виде

$$\widetilde{T}^u \psi_i(s) = \sum_{j=1}^{n} \bar{e}_{ji}(u)\, \psi_j(s). \tag{5.19}$$

Применив к равенству (5.19) оператор T^v, мы получим, используя равенство (5.5) и условие (3.8),

$$T_s^v \widetilde{T}^u \psi_i(s) = \sum_{j=1}^n \overline{e_{ji}}(u) \sum_{k=1}^n e_{jk}(v) \psi_k(s) = \widetilde{T}_v^u T^v \psi_i(s) = \\ = \sum_{k=1}^n \widetilde{T}_v^u e_{ik}(v) \psi_k(s).$$

Поэтому

$$\widetilde{T}^u e_{ik}(v) = \sum_{j=1}^n \overline{e_{ji}}(u) e_{jk}(v),$$

или в матричной записи

$$\widetilde{T}^u E(v) = \widetilde{E}(u) \cdot E(v), \tag{5.20}$$

где

$$\widetilde{E}(u) = \{\overline{e_{ji}}(u)\}_{i,\,j=1}^n$$

есть матрица, сопряженная для матрицы $E(u) = \{e_{ij}(u)\}_{i,\,j=1}^n$.

Используя условие (3.9), можно вычислить $\widetilde{R}^s E(t)$. В самом деле,

$$\widetilde{R}_s^r T^s E(t) = \widetilde{R}_s^r E(s) \cdot E(t) = \widetilde{T}_t^r T^s E(t) = \\ = E(s) \cdot \widetilde{T}_t^r E(t) = E(s) \widetilde{E}(r) E(t).$$

Сокращая на $E(t)$, мы получим:

$$\widetilde{R}^r E(s) = E(s) \widetilde{E}(r). \tag{5.21}$$

§ 6. Теория линейных представлений в коммутативном случае

1. Если для любой функции $f(t) \in L_m^2(\Omega)$ выполняются условия

$$T_t^s T^r f(t) = T_t^r T^s f(t), \tag{6.1}$$

$$T_t^s \widetilde{T}^r f(t) = \widetilde{T}_t^r T^s f(t), \tag{6.2}$$

то семейство операторов T^s называется коммутативным. Покажем, что для коммутативных семейств о. о. с. линейные представления также коммутируют, т. е. для любых $s, r \in \Omega$

$$E(s)\cdot E(r) = E(r)\cdot E(s), \tag{6.3}$$

$$E(s)\cdot \tilde{E}(r) = \tilde{E}(r)\cdot E(s). \tag{6.4}$$

В самом деле, используя (6.1), получим:

$$T_t^s T^r E(t) = E(r)\cdot E(s)\cdot E(t) = T_t^r T^s E(t) = E(s)\cdot E(r)\cdot E(t).$$

Сокращая на $E(t)$, получаем (6.3). Далее, используя (5.20), получим:

$$T_t^s \tilde{T}^r E(t) = \tilde{E}(r)\cdot E(s)\cdot E(t) = \tilde{T}_t^r T^s E(t) = E(s)\cdot \tilde{E}(r)\cdot E(t).$$

Сокращая на $E(t)$, получим (6.4).

Из (6.4) следует при $r = s$, что матрицы $E(s)$ нормальны. Известно, что коммутирующее семейство нормальных матриц можно привести с помощью одной и той же унитарной матрицы к диагональному виду *). Иначе говоря, существует такая постоянная унитарная матрица U, что матрица

$$D(t) = UE(t)\,U^{-1}$$

для любого $t \in \Omega$ диагональна. Нетрудно проверить, что матрица $D(t)$ также является линейным представлением семейства T^s. В самом деле,

$$T^s D(t) = UT^s E(t)\,U^{-1} = UE(s)\,E(t)\,U^{-1} =$$
$$= UE(s)\,U^{-1}UE(t)\,U^{-1} = D(s)\,D(t). \tag{6.5}$$

Обозначим диагональные элементы матрицы $D(t)$ через $d_i(t)$. Из (6.5) следует:

$$T^s d_i(t) = d_i(s)\,d_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.6}$$

Вычислим теперь $\tilde{T}^s d_i(t)$. Мы имеем, используя (5.20),

$$\tilde{T}^s D(t) = U\tilde{E}(s)\,U^{-1}UE(t)\,U^{-1}. \tag{6.7}$$

Так как U — унитарная матрица, то $\tilde{U} = U^{-1}$, $\tilde{U}^{-1} = U$. Поэтому (6.7) можно записать в виде

$$\tilde{T}^s D(t) = \left[\widetilde{UE(s)\,U^{-1}}\right]\cdot UE(t)\,U^{-1} = \tilde{D}(s)\,D(t).$$

*) См., например, И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, изд. 2-е, Гостехиздат, М.—Л., 1951.

Отсюда следует:

$$\tilde{T}^s d_l(t) = \bar{d}_l(s)\, d_l(t). \tag{6.8}$$

Используя (6.6) и (6.8), покажем, что если $d(t)$ и $e(t)$ — две не равные между собой функции, удовлетворяющие соотношениям (6.6) и (6.8), то они ортогональны в том смысле, что

$$M_t\{d(t)\overline{e(t)}\} = 0. \tag{6.9}$$

В самом деле,

$$M_t\{T^s d(t)\overline{e(t)}\} = d(s)\, M_t\{d(t)\cdot\overline{e(t)}\} =$$
$$= M_t\{d(t)\,\overline{\tilde{T}^s e(t)}\} = e(s)\, M_t\{d(t)\cdot\overline{e(t)}\}. \tag{6.10}$$

Так как по условию хотя бы для одного значения s $d(s) \neq e(s)$, то из (6.10) следует (6.9).

2. Пользуясь соотношениями (6.6) и (6.8), а также вытекающим из них условием ортогональности (6.9), можно построить теорию рядов Фурье, аналогично тому, как эта теория строится для почти-периодических функций на группах *). Наметим кратко это построение.

Пусть $f(t) \in C(\Omega)$ и $e(t, \lambda)$ (λ — элемент некоторого топологического пространства) — полная система функций, удовлетворяющих соотношениям (6.6) — (6.8). Если пространство Ω бикомпактно, то на нем не может существовать несчетное множество ортогональных функций. Так как мы рассматриваем случай бикомпактного пространства, то λ пробегает счетное множество и, следовательно, функции $e(t, \lambda)$ можно перенумеровать. Обозначим их в произвольном порядке через $e_1(t), e_2(t), \ldots, e_n(t), \ldots$

По определению, коэффициентом Фурье функции $f(t)$ называется число

$$f_n = M_t\{f(t)\,\bar{e}_n(t)\}$$

и рядом Фурье — ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n e_n(t) \sim f(t).$$

---

*) См., например, Б. М. Левитан, Почти-периодические функции, Гостехиздат, М., 1953, гл. VI, § 7.

Свернутой функцией $\varphi(s)$ называется функция вида

$$\varphi(s) = M_t\{T^s f(t)\,\overline{f(t)}\}.$$

Дальше мы будем предполагать, что $f(t) \in D(\Omega)$. В этом случае (см. лемму 1.2)

$$T^s f(t) = T^t f(s).$$

Вычислим ряд Фурье функции $\varphi(s)$. Мы имеем:

$$M_s\{\varphi(s)\bar{e}_n(s)\} = M_t\{\overline{f(t)}\,M_s[T^s f(t)\bar{e}_n(s)]\} =$$

$$= M_t\{\bar{f}(t)\,M_s[T^t f(s)\bar{e}_n(s)]\} = M_t\{\bar{f}(t)\,M_s[f(s)\,\overline{\tilde{T}^t e_n(s)}]\} =$$

$$= M_t\{\bar{f}(t)\,e_n(t)\,M_s[f(s)\bar{e}_n(s)]\} = |f_n|^2.$$

Поэтому

$$\varphi(s) \sim \sum_n |f_n|^2 e_n(s). \tag{6.11}$$

В (6.11) на самом деле имеет место знак равенства. Это вытекает из сходимости ряда (6.11) (которая является следствием неравенства Бесселя) и следующей теоремы единственности:

Теорема единственности. *Если $f(t) \in D$ и для всех $n = 1, 2, \ldots$*

$$M_t\{f(t)\bar{e}_n(t)\} = 0, \tag{6.12}$$

то $f(t) \equiv 0$.

Доказательство теоремы единственности. Из (6.12) следует, что для свернутой функции $\varphi(s)$ также все коэффициенты Фурье равны нулю, т. е.

$$M_s\{\varphi(s)\bar{e}_n(s)\} = 0. \tag{6.13}$$

Рассмотрим интегральное уравнение (5.2). Его собственные функции выражаются линейно через функции $e_n(s)$. Поэтому из (6.13) следует, что интегральное уравнение (5.2) не имеет отличных от нуля собственных значений, что может быть лишь в том случае, если ядро этого уравнения тождественно равно нулю, т. е.

$$\tilde{T}^r \varphi(s) \equiv 0.$$

Полагая здесь $r = s_0$, получим:

$$\varphi(s) \equiv 0.$$

В частности, при $s = s_0$ получаем:

$$M_t \{ |f(t)|^2 \} = 0$$

и, значит, $f(t) \equiv 0$, что доказывает теорему единственности.

Как мы уже замечали, из теоремы единственности следует, что в (6.11) имеет место знак равенства. В самом деле, левая и правая части (6.11) имеют одинаковые ряды Фурье. Поэтому из теоремы единственности следует, что

$$\varphi(s) = M_t \{ T^s f(t) \cdot \overline{f(t)} \} = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 e_n(s).$$

Полагая в этом равенстве $s = s_0$, мы получим, что для любой функции $f(t) \in D$ имеет место равенство Парсеваля:

$$M_t \{ |f(t)|^2 \} = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2. \tag{6.14}$$

§ 7. Соотношения ортогональности

Линейные представления бикомпактных групп обладают свойством ортогональности *). Доказательство этого факта основано на лемме Шура **).

Это доказательство легко переносится на линейные представления о. о. с., если только предположить, что эти представления неприводимы ***).

Обозначим через $E(t) = \{e_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n}$ неприводимое представление операторов T^s порядка n и через $F(t) = \{f_{kl}(t)\}_{k,l=1}^{m}$ неприводимое представление операторов T^s порядка m, не эквивалентное представлению $E(t)$. Обозначим через b произвольную постоянную прямоугольную матрицу, число строк

*) См. Л. С. Понтрягин [69], стр. 224.

**) Доказательство леммы Шура см., например, Л. С. Понтрягин [69], стр. 221.

***) Определение неприводимости семейства матриц см. Понтрягин [69], стр. 220 и далее. В случае компактных групп всякое линейное представление эквивалентно унитарному и поэтому распадается на неприводимые представления (см. Л. С. Понтрягин [69], стр. 224 и далее).

котэрой равно m, а число столбцов n. Рассмотрим матрицу

$$M_t \{T^s E(t) \cdot b \cdot \tilde{F}(t)\} = E(s) M_t \{E(t) \cdot b \cdot \tilde{F}(t)\} =$$
$$= M_t \{E(t) \cdot b \cdot \overline{\tilde{T}^s F'(t)}\} = M_t \{E(t) \cdot b \cdot \tilde{F}(t)\} \cdot F(s), \quad (7.1)$$

где $F'(t) = \{f_{jl}(t)\}_{l,\, j=1}^{n}$ — матрица, транспонированная для матрицы $F(t)$, и $\tilde{F}(t) = \bar{F}'(t) = \{\bar{f}_{jl}(t)\}_{l,\, j=1}^{m}$ — сопряженная матрица для матрицы $F(t)$ *).

Если положить

$$a = M_t \{E(t) \cdot b \cdot \tilde{F}(t)\},$$

то равенство (7.1) примет вид

$$E(s) \cdot a = a \cdot F(s).$$

В силу леммы Шура возможны два случая: либо $m = n$ и $\det a \neq 0$ (в этом случае матрицы $E(s)$ и $F(s)$ эквивалентны, что противоречит предположению), либо $a = 0$, т. е. для любой прямоугольной матрицы b

$$M_t \{E(t) \cdot b \cdot \tilde{F}(t)\} = 0. \quad (7.2)$$

Выберем матрицу b специальным образом. Именно, пусть в этой матрице все элементы равны нулю, кроме элемента, стоящего на пересечении j-й строки и l-го столбца, который равен 1. Тогда из (7.2) получим:

$$M_t \{e_{ij}(t) \cdot \bar{f}_{kl}(t)\} = 0 \quad (i,\ j = 1, 2, \ldots, n;\ k, l = 1, 2, \ldots, m).$$

Последнее равенство означает, что элементы различных неэквивалентных представлений операторов T^s ортогональны.

Докажем теперь ортогональность элементов, взятых из одного и того же неприводимого представления.

---

*) Из равенства

$$\tilde{T}^s e_{jl}(t) = \sum_{k=1}^{n} \bar{e}_{jk}(t)\, e_{kl}(t)$$

следует, что

$$\tilde{T}^s F'(t) = F'(t)\, \bar{F}(s)$$

Поэтому

$$\overline{\tilde{T}^s F'(t)} = \tilde{F}(t)\, F(s).$$

Пусть $E(t)$ — некоторое неприводимое представление порядка n. Обозначим через b постоянную квадратную матрицу порядка n. Аналогично предыдущему нетрудно показать, что

$$E(s) \cdot a = a \cdot E(s),$$

где

$$a = M_t \{E(t) \cdot b \cdot \tilde{E}(t)\}.$$

Поэтому из леммы Шура следует, что $a = \alpha e$, где e — единичная матрица и α — комплексное число.

Пусть в матрице b все элементы равны нулю, кроме элемента, стоящего на пересечении j-й строки и l-го столбца, который равен 1. В таком случае мы получим:

$$M_t \{e_{ij}(t) \cdot \overline{e}_{kl}(t)\} = \alpha\delta_{ik}\delta_{jl}. \tag{7.3}$$

Поэтому, если $i \neq k$ или $j \neq l$, то

$$M_t \{e_{ij}(t) \cdot \overline{e}_{kl}(t)\} = 0,$$

что и означает ортогональность элементов представления $E(t)$. Если $i = k$ и $j = l$, то из (7.3) следует:

$$M_t \{|e_{ij}(t)|^2\} = \alpha,$$

где α от i, j не зависит.

ГЛАВА II

ПРЯМЫЕ ТЕОРЕМЫ ЛИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА

§ 1. Первая прямая теорема Ли для операторов обобщенного сдвига

Начиная с этой главы мы будем предполагать, что топологическое пространство Ω является n-мерным действительным, достаточное число раз дифференцируемым или комплексно-аналитическим многообразием *) V_n. Например, V_n может быть n-мерным действительным или комплексным пространством Евклида или n-мерной группой Ли (действительной или комплексной). Мы увидим, что в этом случае операторам обобщенного сдвига можно сопоставить инфинитезимальные операторы, которые при некоторых дополнительных предположениях относительно структуры о. о. с. оказываются линейными дифференциальными операторами. Эти операторы в случае, когда обобщенный сдвиг является сдвигом на группе, совпадают с классическими инфинитезимальными операторами группы Ли.

Итак, пусть T^s, $s \in V_n$ — семейство операторов, удовлетворяющих условиям 1°—3°. Вместо условия 4° мы потребуем: 1) в случае действительного дифференцируемого многообразия V_n, чтобы функция $T^s f(t)$ была дифференцируемой по координатам точек s и t столько же раз, сколько и функция $f(t)$ по координатам точки t; 2) в случае аналитического многообразия V_n, чтобы $T^s f(t)$ была аналитической функцией по координатам точек s и t, если $f(t)$ — аналитическая функция.

Обозначим через $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ локальные координаты точки t, через $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ локальные координаты точки s.

---

*) См. Введение.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что координаты выбраны так, что нейтральному элементу s_0 соответствуют координаты $(0, 0, \ldots, 0)$.

Определение. *Инфинитезимальными операторами k-го порядка для о. о. с. T^s называются линейные операторы*

$$L_{k_1, k_2, \ldots, k_n; t}(f) = \left. \frac{\partial^k u(s, t)}{\partial s_1^{k_1} \partial s_2^{k_2} \ldots \partial s_n^{k_n}} \right|_{s=0}, \tag{1.1}$$

$$\widetilde{L}_{k_1, k_2, \ldots, k_n; s}(f) = \left. \frac{\partial^k u(s, t)}{\partial t_1^{k_1} \partial t_2^{k_2} \ldots \partial t_n^{k_n}} \right|_{t=0}, \tag{1.2}$$

где

$$k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n, \quad u(s, t) = T^s f(t).$$

Дифференцируя соотношение ассоциативности

$$T_s^r T^s f(t) = T_t^s T^r f(t) \tag{1.3}$$

k_1 раз по s_1, k_2 раза по s_2 и т. д. k_n раз по s_n и полагая затем $s = 0$, мы получим, используя обозначения (1.1) и (1.2), что функция $u(r, t) = T^r f(t)$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\widetilde{L}_{k_1, \ldots, k_n; r} u = L_{k_1, \ldots, k_n; t} u. \tag{1.4}$$

Эта система уравнений является аналогом для о. о. с. первой прямой теоремы Ли.

В случае, если многообразие V_n есть группа Ли, а обобщенный сдвиг совпадает со сдвигом на этой группе, например с левым сдвигом: $T^s f(t) = f(s \cdot t)$, где через $s \cdot t$ обозначена операция группового умножения элементов s и t, то можно ограничиться инфинитезимальными операторами первого порядка, которые являются линейными дифференциальными операторами первого порядка вида

$$L_{\alpha; t}(f) = \left. \frac{\partial u}{\partial s_\alpha} \right|_{s=0} = b_\alpha^i(t) \frac{\partial f}{\partial t_i}, \tag{1.5}$$

$$\widetilde{L}_{\alpha; s}(f) = \left. \frac{\partial u}{\partial t_\alpha} \right|_{t=0} = \widetilde{b}_\alpha^i(s) \frac{\partial f}{\partial s_i}. \tag{1.6}$$

В дальнейшем будет показано, что и обратно, если все n инфинитезимальных операторов первого порядка для семейства операторов T^s имеют вид (1.5) и (1.6) и линейно независимы, то многообразие V_n есть группа (по крайней мере, вблизи нейтрального элемента, который является единицей этой группы), а обобщенный сдвиг совпадает со сдвигом на этой группе. Поэтому, если обобщенный сдвиг не сводится к сдвигу на группе, то для его изучения необходимо привлекать инфинитезимальные операторы порядка выше первого.

В следующем параграфе мы укажем достаточные условия для того, чтобы инфинитезимальные операторы k-го порядка являлись линейными дифференциальными операторами k-го порядка.

Независимо от структуры инфинитезимальных операторов, для них имеют место некоторые условия коммутирования, которые мы сформулируем в следующих двух теоремах. Эти условия коммутирования являются простыми следствиями условия ассоциативности (1.3).

Теорема 1.1. *Имеют место следующие условия коммутирования*:

$$L_{k_1, \ldots, k_n; s} T^s f(t) = T^s L_{k_1, \ldots, k_n; t} f(t), \tag{1.7}$$

$$\widetilde{L}_{k_1, \ldots, k_n; t} T^s f(t) = T^s \widetilde{L}_{k_1, \ldots, k_n; t} f(t). \tag{1.8}$$

Доказательство. Дифференцируя обе части равенства (1.3) k_1 раз по r_1, k_2 раза по r_2 и т. д. k_n раз по r_n и полагая затем $r=0$, мы получим, используя (1.1), соотношение (1.7).

Чтобы получить (1.8), дифференцируем обе части (1.3) k_1 раз по t_1, k_2 раза по t_2 и т. д. k_n раз по t_n, и полагаем затем $t=0$. Используя (1.2) и заменяя s на t и r на s, получаем (1.8).

Теорема 1.2. *Инфинитезимальные операторы L и $\widetilde{L}$* (не обязательно одного и того же самого порядка) *коммутируют, т. е.*

$$L_{k_1, \ldots, k_n; s} \widetilde{L}_{j_1, \ldots, j_n; s} = \widetilde{L}_{j_1, \ldots, j_n; s} L_{k_1, \ldots, k_n; s}. \tag{1.9}$$

Доказательство. Дифференцируя равенство (1.7) j_1 раз по t_1, j_2 раза по t_2 и т. д. j_n раз по t_n и полагая затем $t=0$, мы получим, используя (1.2), соотношение (1.9).

Если операторы T^s коммутируют, то для $f(t) \in D$

$$T^s f(t) = T^t f(s)$$

(см. лемму 1.2 предыдущей главы). Поэтому

$$\widetilde{L}_{k_1, \ldots, k_n;\, s} = L_{k_1, \ldots, k_n;\, s}.$$

Из этого равенства и из равенства (1.9) следует, что для коммутативного семейства операторов обобщенного сдвига инфинитезимальные операторы (произвольных порядков) коммутируют.

§ 2. Исследование структуры инфинитезимальных операторов

1. В этом параграфе мы будем предполагать, что многообразие V_n действительно и что операторы T_s обобщенного сдвига могут быть представлены в виде (см. гл. I, § 2.5)

$$T^s f(t) = \int\limits_{V_n} f(u)\, d_u \sigma(s, t, u), \tag{2.1}$$

причем мера $\sigma(s, t, u)$ зависит от двух точек $s, t \in V_n$ и множества $E \subset V_n$. Относительно множества E мера σ вполне аддитивна и при фиксированных s и t

$$\int\limits_{V_n} |d_u \sigma(s, t, u)| < \infty.$$

Кроме этого, мы будем предполагать, что при малых $|s| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} s_i^2\right)^{1/2}$ мера σ целиком сосредоточена в малой окрестности точки t. Это предположение довольно естественно, так как в силу условия 1° обобщенного сдвига при $s = 0$ мера $\sigma(s, t, E)$ совпадает с мерой Дирака, сосредоточенной в точке t. Далее потребуем, чтобы мера $\sigma(s, t, E)$ при малых $|s|$ удовлетворяла следующим аналитическим условиям, которые также естественны ввиду условия 1° обобщенного сдвига:

1) $\sigma(s, t, V_n) = 1 + \sum\limits_{\alpha} s_\alpha q_\alpha(t) + \sum\limits_{\alpha, \beta} s_\alpha s_\beta q_{\alpha\beta}(t) + o(|s|^2),$

причем функции $q_\alpha(t)$ и $q_{\alpha\beta}(t)$ дифференцируемы достаточное число раз.

2) $$\int\limits_{V_n} (u_i - t_i)\, d_u\sigma(s, t, u) = \sum_\alpha s_\alpha b^i_\alpha(t) + \sum_{\alpha, \beta} s_\alpha s_\beta c^i_{\alpha\beta}(t) + o(|s|^2),$$

причем функции $b^i_\alpha(t)$ и $c^i_{\alpha\beta}(t)$ дифференцируемы достаточное число раз.

3) $$\int\limits_{V_n} (u_i - t_i)(u_j - t_j)\, d_u\sigma(s, t, u) = \sum_{\alpha, \beta} s_\alpha s_\beta a^{ij}_{\alpha\beta}(t) + o(|s|^2),$$

причем функции $a^{ij}_{\alpha\beta}(t)$ дифференцируемы достаточное число раз и

$$a^{ii}_{\alpha\beta}(t) \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.2}$$

по крайней мере, для одной пары индексов (α_i, β_i).

4) $$\int\limits_{V_n} |u_i - t_i|^3\, d_u\sigma(s, t, u) = o(|s|^2). \tag{2.3}$$

Замечание. Условию (2.2) можно придать вид

$$\lim_{|s| \to 0} \frac{1}{|s|^2} \int\limits_{V_n} (u_i - t_i)^2\, d_u\sigma(s, t, u) \neq 0. \tag{2.2¹}$$

В случае действительного многообразия $(u_i - t_i)^2 \geqslant 0$ и условие (2.2¹), если еще учесть, что $\sigma(0, t, u) = \delta(u - t)$ ($\delta(u)$ — мера Дирака), является вполне естественным. Не так обстоит дело в случае комплексно-аналитического многообразия. В этом случае $(u_i - t_i)^2$ есть комплексное число и поэтому может случиться, что для всех $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\lim_{|s| \to 0} \frac{1}{|s|^2} \int\limits_{V_n} (u_i - t_i)^2\, d_u\sigma(s, t, u) = 0.$$

К этому обстоятельству мы еще в дальнейшем вернемся.

2. Покажем теперь, что если выполняются условия 1)—4), а также условие (2.2), то инфинитезимальные операторы первого порядка являются дифференциальными операторами не выше первого порядка, а инфинитезимальные операторы второго порядка — дифференциальными операторами точно

второго порядка. С этой целью разложим $T^s f(t)$ по степеням $s_1, s_2, \ldots, s_n$, ограничиваясь членами второго порядка малости. Мы получим:

$$T^s f(t) = f(t) + \sum_{\alpha} s_\alpha L_{\alpha;\,t} f(t) + \\ + \sum_{\alpha,\beta} s_\alpha s_\beta L_{\alpha\beta;\,t} f(t) + o(|s|^2). \qquad (2.4)$$

Разлагая теперь функцию $f(u)$ по степеням $(u_i - t_i)$ до членов второго порядка включительно и подставляя это разложение в формулу (2.1), мы получим, используя 1) — 4),

$$T^s f(t) = f(t) + \sum_{\alpha} s_\alpha q_\alpha(t) f(t) + \sum_{\alpha,\beta} s_\alpha s_\beta q_{\alpha,\beta}(t) f(t) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial t_i} \left[\sum_{\alpha} s_\alpha b_\alpha^i(t) + \sum_{\alpha,\beta} s_\alpha s_\beta c_{\alpha\beta}^i(t) \right] + \\ + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j} \sum_{\alpha,\beta} s_\alpha s_\beta a_{\alpha\beta}^{ij}(t) + o(|s|^2). \qquad (2.5)$$

Сравнивая разложение (2.4) с разложением (2.5), мы получим, что инфинитезимальные операторы первого порядка $L_{\alpha\beta;\,t}$ имеют вид (суммирование по i)

$$L_{\alpha;\,t}(f) = b_\alpha^i(t) \frac{\partial f}{\partial t_i} + q_\alpha(t) f(t), \qquad (2.6)$$

а инфинитезимальные операторы второго порядка $L_{\alpha\beta;\,t}$ — вид (суммирование по i, j)

$$L_{\alpha\beta;\,t}(f) = a_{\alpha\beta}^{ij}(t) \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j} + c_{\alpha\beta}^i(t) \frac{\partial f}{\partial t_i} + q_{\alpha\beta}(t) f, \qquad (2.7)$$

причем из условия (2.2) следует, что операторы $L_{\alpha\beta;\,t}$ в точности второго порядка.

3. Изучим теперь вид операторов $\widetilde{L}_{\alpha;\,s}$ и $L_{\alpha\beta;\,s}$, которые мы рассмотрим на функциях класса D (см. условие (1.4) гл. I, § 1).

Предположим, что существует мера $\sigma^*(s, t, E)$, удовлетворяющая условиям 1) — 4), в которых s и t переставлены местами, и такая, что для $f(t) \in D$

$$T^s f(t) = \int_{V_n} f(u)\, d_u \sigma^*(s, t, u).$$

Тогда, рассуждая, как прежде, мы получим:

$$\widetilde{L}_{\alpha;\,s}(f)=\widetilde{b}^{\,i}_{\alpha}(s)\frac{\partial f}{\partial s_i}+\widetilde{q}_{\alpha}(s)f, \tag{2.8}$$

$$\widetilde{L}_{\alpha\beta;\,s}(f)=\widetilde{a}^{\,ij}_{\alpha\beta}(s)\frac{\partial^2 f}{\partial s_i\,\partial s_j}+\widetilde{c}^{\,i}_{\alpha\beta}(s)\frac{\partial f}{\partial s_i}+\widetilde{q}_{\alpha\beta}(s)f. \tag{2.9}$$

Система (1.4) для инфинитезимальных операторов первого порядка принимает вид

$$\widetilde{L}_{\alpha;\,s}u=L_{\alpha;\,t}u, \tag{2.10}$$

где операторы $L_{\alpha;\,t}$ и $\widetilde{L}_{\alpha;\,s}$ определяются по формулам (2.6) и (2.8). Для инфинитезимальных операторов второго порядка система (1.4) имеет вид

$$\widetilde{L}_{\alpha\beta;\,s}u=L_{\alpha\beta;\,t}u, \tag{2.11}$$

причем операторы $L_{\alpha\beta;\,t}$ и $\widetilde{L}_{\alpha\beta;\,s}$ имеют вид (2.7) и (2.9).

§ 3. Вторая и третья прямые теоремы Ли для о. о. с. Случай инфинитезимальных операторов первого порядка

1. В этом и в следующем параграфах будет показано, что при некоторых дополнительных ограничениях инфинитезимальные операторы образуют алгебру Ли. Иначе говоря, для о. о. с. (при выполнении упомянутых ограничений) справедлива теорема, аналогичная второй прямой теореме Ли.

В этом параграфе мы рассмотрим случай инфинитезимальных операторов первого порядка. Хотя этот случай и не является основным в настоящем исследовании, мы начинаем именно с него, как с более простого. В следующем параграфе будет рассмотрен случай инфинитезимальных операторов второго порядка.

Введем следующие обозначения:

$$\widetilde{X}_{\alpha;\,s}(f)=\left.\frac{\partial u}{\partial t_\alpha}\right|_{t=0}\qquad(\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3.1}$$

$$X_{\alpha;\,t}(f)=\left.\frac{\partial u}{\partial s_\alpha}\right|_{s=0}\qquad(\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3.2}$$

где $u(s,\,t)=T^s f(t)$.

Дополнительное ограничение, о котором мы выше говорили, состоит в следующем.

Для любой дважды дифференцируемой функции $f(s)$ выполняется соотношение

$$\tilde{X}_\alpha \tilde{X}_\beta (f)|_{s=0} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial s_\alpha \, \partial s_\beta}\right|_{s=0} + a^\lambda_{\alpha\beta} \left.\frac{\partial f}{\partial s_\lambda}\right|_{s=0}, \tag{3.3}$$

где $a^\lambda_{\alpha\beta}$ — постоянные числа, не зависящие от функции $f(s)$. Следующая теорема является аналогом второй прямой теоремы Ли.

Теорема 3.1. *Пусть выполняется условие* (3.3). *Тогда для произвольной (дважды дифференцируемой) функции $f(t)$ выполняется равенство*)*

$$[X_\alpha, X_\beta](f) = c^\lambda_{\alpha\beta} X_\lambda (f), \tag{3.4}$$

в котором $c^\lambda_{\alpha\beta}$ — постоянные числа.

Доказательство. Для случая инфинитезимальных операторов первого порядка система (1.4) в обозначениях (3.1), (3.2) запишется в виде

$$\tilde{X}_{\alpha;\, s} u = X_{\alpha;\, t} u \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.5}$$

Применяя к обеим частям этого уравнения оператор $\tilde{X}_{\beta;\, s}$, мы получим:

$$\tilde{X}_{\beta;\, s} \tilde{X}_{\alpha;\, s} (u) = \tilde{X}_{\beta;\, s} X_{\alpha;\, t} (u) = X_{\alpha;\, t} \tilde{X}_{\beta;\, s} (u) = X_{\alpha;\, t} X_{\beta;\, t} (u). \tag{3.6}$$

Полагая в последнем уравнении $s = 0$, получим, используя (3.3) и условие 2° для о. о. с.,

$$X_{\alpha;\, t} X_{\beta;\, t} (f) = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial s_\alpha \, \partial s_\beta}\right|_{s=0} + a^\lambda_{\alpha\beta} X_{\lambda;\, t} (f).$$

Переставляя здесь местами α и β и вычитая одно равенство из другого, мы получим равенство (3.4), причем $c^\lambda_{\alpha\beta} = a^\lambda_{\alpha\beta} - a^\lambda_{\beta\alpha}$.

Следствие. Для произвольной дважды дифференцируемой функции $f(s)$, принадлежащей пространству D, имеет

---

*) Мы используем обычное обозначение

$$[A, B] = AB - BA.$$

Здесь A и B — произвольные линейные операторы.

место равенство

$$[\widetilde{X}_{\alpha;\,s},\ \widetilde{X}_{\beta;\,s}](f) = c^{\lambda}_{\beta\alpha}\widetilde{X}_{\lambda;\,s}(f). \tag{3.7}$$

Доказательство. Переставляя в уравнении (3.6) местами α и β, получим:

$$\widetilde{X}_{\alpha;\,s}\widetilde{X}_{\beta;\,s}(u) = X_{\beta;\,t}X_{\alpha;\,t}(u). \tag{3.8}$$

Вычитая из равенства (3.8) равенство (3.6), мы получим, используя (3.4) и (3.5),

$$[\widetilde{X}_{\alpha;\,s},\ \widetilde{X}_{\beta;\,s}](u) = c^{\lambda}_{\beta\alpha}\widetilde{X}_{\lambda;\,s}(u).$$

Полагая здесь $t = 0$, получаем (3.7).

2. Определение. *Операторы* $X_{\alpha;\,t}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$) *называются линейно независимыми, если не существует постоянных чисел* $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$, *среди которых хотя бы одно отлично от нуля, и таких, что*

$$\lambda^{\alpha}X_{\alpha;\,t} \equiv 0.$$

В противном случае операторы X_{α} называются линейно зависимыми.

Аналогично определяется линейная независимость и линейная зависимость для операторов $\widetilde{X}_{\alpha;\,s}$.

Лемма 3.1. *Операторы* $\widetilde{X}_{\alpha;\,s}$ *и* $X_{\alpha;\,t}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, q$) *одновременно линейно зависимы или линейно независимы.*

Доказательство. Если операторы $\widetilde{X}_{\alpha;\,s}$ линейно зависимы, то существуют постоянные λ^{α} такие, что для любой функции $\varphi(s) \in D$ выполняется тождество

$$\lambda^{\alpha}\widetilde{X}_{\alpha;\,s}(\varphi) \equiv 0.$$

Мы знаем, что при любом фиксированном t функция $u(s, t) = T^s f(t)$ принадлежит классу D (лемма 1.1 гл. I). Поэтому

$$\lambda^{\alpha}\widetilde{X}_{\alpha;\,s}u \equiv 0,$$

и, следовательно, из системы (3.5) получаем:

$$\lambda^{\alpha}X_{\alpha;\,t}u \equiv 0.$$

Полагая в последнем равенстве $s=0$, получаем, используя начальное условие (3.4),

$$\lambda^{\alpha} X_{\alpha;\,t}(f) \equiv 0,$$

что доказывает линейную зависимость операторов $X_{\alpha;\,t}$.

Аналогично доказывается, что из линейной зависимости операторов $X_{\alpha;\,t}$ следует линейная зависимость операторов $\tilde{X}_{\alpha;\,s}$. Это доказывает лемму.

Лемма 3.2. *Если оператор $\tilde{X}_{\alpha_0;\,s}$ ($X_{\alpha_0;\,t}$) ($\alpha_0 = 1, 2, \ldots, n$) сводится к оператору умножения на функцию $\tilde{q}_{\alpha_0}(s)$ $(q_{\alpha_0}(t))$, то эта функция равна постоянной h_{α_0} и оператор $X_{\alpha_0;\,t}$ ($\tilde{X}_{\alpha_0;\,s}$) также сводится к умножению на постоянную h_{α_0}.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай

$$\tilde{X}_{0;\,s}(f) = \tilde{q}_{\alpha_0}(s)\,f.$$

Тогда соответствующее уравнение системы (3.5) имеет вид

$$\tilde{q}_{\alpha_0}(s)\,u = X_{\alpha_0;\,t}u.$$

Полагая здесь $s=0$, мы получим:

$$X_{\alpha_0;\,t}(f) = h_{\alpha_0} f,$$

где $h_{\alpha_0} = \tilde{q}_{\alpha_0}(0)$. Поэтому оператор $X_{\alpha_0;\,t}$ сводится к оператору умножения на постоянное число h_{α_0}. Следовательно,

$$\tilde{q}_{\alpha_0}(s)\,u = h_{\alpha_0} u$$

и, значит,

$$\tilde{q}_{\alpha_0}(s) = h_{\alpha_0}.$$

Пусть теперь

$$X_{\alpha_0;\,t}(f) = q_{\alpha_0}(t)\,f.$$

Тогда соответствующее уравнение системы (3.5) принимает вид

$$\tilde{X}_{\alpha_0;\,s}\,u = q_{\alpha_0}(t)\,f.$$

Пусть $f \in D$. Полагая $t=0$, получим:

$$\tilde{X}_{\alpha_0;\,s}(f) = h_{\alpha_0} f(s).$$

Поэтому на функциях класса D оператор $\widetilde{X}_{\alpha_0;s}$ сводится к оператору умножения на константу h_{α_0}. Так как при любом фиксированном t $T^s f(t) = u \in D$, то

$$h_{\alpha_0} u = q_{\alpha_0}(t)\, u,$$

и поэтому $q_{\alpha_0}(t) = h_{\alpha_0}$.

Теорема 3.2. *Пусть выполняется условие* (3.3) *и пусть операторы $X_{\alpha;t}$ линейно независимы. Тогда выполняются следующие соотношения*:

$$c^{\lambda}_{\alpha\beta} = -c^{\lambda}_{\beta\alpha} \qquad (\alpha,\ \beta,\ \lambda = 1,\ \ldots,\ n), \tag{3.9}$$

$$c^{\lambda}_{\alpha\beta}c^{\sigma}_{\lambda\gamma} + c^{\lambda}_{\beta\gamma}c^{\sigma}_{\lambda\alpha} + c^{\lambda}_{\gamma\alpha}c^{\sigma}_{\lambda\beta} = 0 \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \sigma = 1,\ \ldots,\ n). \tag{3.10}$$

Замечание. В теории групп Ли числа $c^{\lambda}_{\alpha\beta}$ называются структурными константами группы Ли. Выполнение соотношений (3.9) и (3.10) составляет содержание третьей прямой теоремы Ли.

Доказательство теоремы 3.2. Переставляя в равенстве (3.4) местами α и β, получим:

$$c^{\lambda}_{\alpha\beta}X_{\lambda}(f) = -c^{\lambda}_{\beta\alpha}X_{\lambda}(f).$$

Отсюда и из линейной независимости операторов X_{λ} следует равенство (3.9).

Равенство (3.10) следует из тождества Якоби

$$[[X_{\alpha},\ X_{\beta}],\ X_{\gamma}] + [[X_{\beta},\ X_{\gamma}],\ X_{\alpha}] + [[X_{\gamma},\ X_{\alpha}],\ X_{\beta}] = 0$$

и линейной независимости операторов X_{λ}.

§ 4. Вторая и третья прямые теоремы Ли для о. о. с. Случай инфинитезимальных операторов второго порядка

Если инфинитезимальные операторы первого порядка линейно зависимы, то уравнения (3.5) также линейно зависимы и поэтому следует привлечь инфинитезимальные операторы высших порядков. В этой книге мы рассматриваем только те случаи, когда можно ограничиться инфинитезимальными операторами не выше второго порядка.

Так будет, например, если инфинитезимальные операторы удовлетворяют условиям:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s_\alpha}\right|_{s=0} = h_\alpha f(t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n), \tag{4.1}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial s_\alpha^2}\right|_{s=0} = X_{\alpha;\,t}(f) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n), \tag{4.2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial s_\alpha\,\partial s_\beta}\right|_{s=0} = h_{\alpha\beta} f(t) \qquad (\alpha \neq \beta;\ \alpha,\ \beta = 1, \ldots, n), \tag{4.3}$$

$$\left.\frac{\partial^3 u}{\partial s_\alpha^2\,\partial s_\beta}\right|_{s=0} = k_{\alpha\beta} f(t) + \lambda_{\alpha\beta}^{\nu} X_{\nu;\,t}(f) \qquad (\alpha,\ \beta = 1, \ldots, n), \tag{4.4}$$

$$\left.\frac{\partial^3 u}{\partial s_\alpha\,\partial s_\beta\,\partial s_\gamma}\right|_{s=0} = h_{\alpha\beta\gamma} f(t) \qquad (\alpha \neq \beta,\ \alpha \neq \gamma,\ \beta \neq \gamma,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma = 1, \ldots, n), \tag{4.4^1}$$

причем (по предположению) операторы $X_{\alpha;\,t}$ линейно независимы; h_α, $h_{\alpha\beta}$, $k_{\alpha\beta}$, $\lambda_{\alpha\beta}^{\nu}$, $h_{\alpha\beta\gamma}$ — постоянные числа.

Из системы (1.4) мы теперь получим:

$$\widetilde{X}_{\alpha;\,s}\, u = X_{\alpha;\,t}\, u \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.5}$$

причем операторы $X_{\alpha;\,t}$ определяются по равенству (4.2), и

$$\widetilde{X}_{\alpha;\,s}(f) = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t_\alpha^2}\right|_{t=0}.$$

Вместо условия (3.3) потребуем следующее условие:

Для произвольной четырежды дифференцируемой функции выполняется равенство

$$\widetilde{X}_{\alpha;\,s}\widetilde{X}_{\beta;\,s}(f)\big|_{s=0} = \left.\frac{\partial^4 f}{\partial s_\alpha^2\,\partial s_\beta^2}\right|_{s=0} + a_{\alpha\beta}^{\lambda\mu\nu} \left.\frac{\partial^3 f}{\partial s_\lambda\,\partial s_\mu\,\partial s_\nu}\right|_{s=0} + b_{\alpha\beta}^{\lambda\mu} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial s_\lambda\,\partial s_\mu}\right|_{s=0} + d_{\alpha\beta}^{\lambda} \left.\frac{\partial f}{\partial s_\lambda}\right|_{s=0}. \tag{4.6}$$

Здесь $a_{\alpha\beta}^{\lambda\mu\nu}$, $b_{\alpha\beta}^{\lambda\mu}$, $d_{\alpha\beta}^{\lambda}$ — постоянные числа, не зависящие от функции $f(s)$.

В следующей теореме содержатся утверждения, аналогичные второй и третьей прямым теоремам Ли.

Теорема 4.1. *Пусть выполняется условие* (4.6) *и пусть*

$$T^s(1) = 1. \tag{4.7}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) *Для произвольной* (достаточное число раз дифференцируемой) *функции* $f(t)$

$$[X_{\alpha;\, t},\ X_{\beta;\, t}](f) = c^{\lambda}_{\alpha\beta} X_{\lambda;\, t}(f), \tag{4.8}$$

где $c^{\lambda}_{\alpha\beta}$ — *постоянные числа.*

2) *Для произвольной* (достаточное число раз дифференцируемой) *функции* $f(s) \in D$

$$[\tilde{X}_{\alpha;\, s},\ \tilde{X}_{\beta;\, s}](f) = c^{\lambda}_{\beta\alpha} \tilde{X}_{\lambda;\, s}(f). \tag{4.9}$$

3) *Числа* $c^{\lambda}_{\alpha\beta}$ *удовлетворяют соотношениям* (3.9) *и* (3.10) (т. е. являются структурными константами группы Ли).

Доказательство. Из уравнения (4.5) следует:

$$\tilde{X}_{\beta;\, s}\tilde{X}_{\alpha;\, s}(u) = X_{\alpha;\, t}X_{\beta;\, t}(u).$$

Переставляя местами α и β и вычитая одно равенство из другого, получим:

$$[X_{\alpha;\, t},\ X_{\beta;\, t}](u) = [\tilde{X}_{\beta;\, s},\ \tilde{X}_{\alpha;\, s}](u). \tag{4.10}$$

Полагая в этом равенстве $s = 0$, используя (4.6), (4,1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.4[1]) и условие 2° для о. о. с., мы получим:

$$[X_{\alpha;\, t},\ X_{\beta;\, t}](f) = c^{\lambda}_{\alpha\beta} X_{\lambda;\, t}(f) + r_{\alpha\beta} f(t), \tag{4.11}$$

причем $c^{\lambda}_{\alpha\beta}$ и $r_{\alpha\beta}$ — постоянные числа. Из (4.10) и (4.11) следует:

$$[\tilde{X}_{\beta;\, s}\tilde{X}_{\alpha;\, s}](u) = c^{\lambda}_{\alpha\beta} \tilde{X}_{\lambda;\, s}(u) + r_{\alpha\beta} u. \tag{4.12}$$

Полагая в этом равенстве $t = 0$ и предполагая, что $f(s) \in D$, мы получим:

$$[\tilde{X}_{\beta;\, s}\tilde{X}_{\alpha;\, s}](f) = c^{\lambda}_{\alpha\beta} \tilde{X}_{\lambda;\, s}(f) + r_{\alpha\beta} f. \tag{4.13}$$

Остается показать, что $r_{\alpha\beta} = 0$. В силу условия (4.7) в уравнении (4.12) можно взять $u = 1$. Полагая затем $s = 0$, мы получим, используя (4.6) и (2.9), $r_{\alpha\beta} = 0$.

Таким образом, равенства (4.8) и (4.9) следуют из равенств (4.11) и (4.13).

Наконец, пункт 3) доказывается в точности так же, как и в предыдущем параграфе, на основании линейной независимости операторов X_α.

§ 5. Случай комплексно-аналитического многообразия

В конце § 2 мы уже отмечали, что в случае комплексно-аналитического многообразия условие (2.2) или равносильное ему условие (2.2[1]) может не выполняться, так как квадрат комплексного числа (как и вообще любая степень комплексного числа) является в общем случае комплексным числом.

В связи с этим в случае комплексно-аналитического многообразия для любого натурального $k > 0$ существуют примеры операторов обобщенного сдвига, для которых все инфинитезимальные операторы до $(k-1)$-го порядка включительно сводятся к умножению на постоянную (в частном случае могут равняться нулю, если соответствующая постоянная равна нулю) и только среди операторов k-го порядка имеются дифференциальные операторы.

Впрочем, уже и в случае действительного многообразия, если размерность пространства больше единицы, то может возникнуть необходимость в привлечении инфинитезимальных операторов высших порядков.

В самом деле, хотя в этом случае и выполняется условие (2.2) и, значит, среди инфинитезимальных операторов второго порядка, по крайней мере, n операторов будут дифференциальными, однако может случиться, что все эти операторы линейно выражаются через один из них. Поэтому в этом случае необходимо привлекать операторы третьего порядка. Может оказаться, что среди этих операторов нет ни одного дифференциального оператора.

Среди операторов четвертого порядка (как и вообще любого четного порядка) найдется хотя бы один дифференциальный.

Эти соображения показывают, что и в действительном случае полная система операторов, порождающих обобщенный сдвиг, может содержать инфинитезимальные операторы сколь угодно высоких порядков (в зависимости от размерности пространства).

§ 6. Одномерное пространство. Действительный случай

1. В этом параграфе мы будем предполагать, что многообразие V_n одномерно и действительно и сводится либо к действительной прямой, либо к полупрямой, либо к отрезку, либо к окружности. Мы будем предполагать также, что выполнены условия § 2. Так как многообразие действительно, то инфинитезимальные операторы второго порядка

$$X_t(f) = L_{11;\,t}(f) = \left.\frac{\partial^2 T^s f(t)}{\partial s^2}\right|_{s=0}, \tag{6.1}$$

$$\tilde{X}_s(f) = \tilde{L}_{11,\,s}(f) = \left.\frac{\partial^2 T^s f(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} \tag{6.2}$$

являются дифференциальными операторами точно второго порядка (при выполнении условий § 2).

Пусть

$$X_t(f) = a(t) f''(t) + b(t) f'(t) + c(t) f(t) \quad (a(t) > 0), \tag{6.3}$$

$$X_s(f) = \tilde{a}(s) f''(s) + \tilde{b}(s) f'(s) + \tilde{c}(s) f(s) \quad (\tilde{a}(s) > 0). \tag{6.4}$$

Что касается инфинитезимальных операторов первого порядка, то они могут быть либо дифференциальными операторами первого порядка (при этом оба), либо сводятся к умножению на постоянное число. В первом случае обобщенный сдвиг восстанавливается по инфинитезимальным операторам первого порядка. Во втором случае обобщенный сдвиг восстанавливается по операторам второго порядка, а операторы первого порядка используются в начальных условиях.

2. Рассмотрим сначала тот случай, когда инфинитезимальные операторы первого порядка являются дифференциальными операторами также первого порядка. Итак, пусть

$$L_t(f) = \left.\frac{\partial u(s,t)}{\partial s}\right|_{s=0} = \alpha(t) f' + \beta(t) f, \tag{6.5}$$

$$\tilde{L}_s(f) = \left.\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \tilde{\alpha}(s) f' + \tilde{\beta}(s) f, \tag{6.6}$$

где $u(s, t) = T^s f(t)$. Функция $u(s, t)$ есть решение следующей задачи Коши (см. (3.5)):

$$\tilde{L}_s u = L_t u, \tag{6.7}$$

$$u|_{s=0} = f(t). \tag{6.8}$$

Лемма 6.1. $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$, $\tilde{\beta}(t) = \beta(t)$ *и, следовательно,* $\tilde{L}_s = L_s$.

Доказательство. Обозначим через λ произвольное комплексное число и через $\varphi(t, \lambda)$ произвольное решение уравнения

$$\alpha(t)\varphi' + \beta(t)\varphi = \lambda\varphi,$$

а через $\psi(s, \lambda)$ решение уравнения

$$\tilde{\alpha}(s)\psi' + \tilde{\beta}(s)\psi = \lambda\psi, \tag{6.9}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$\psi(0, \lambda) = 1. \tag{6.10}$$

Тогда решение задачи (6.7)—(6.8) при $f(t) = \varphi(t, \lambda)$ имеет вид

$$u(s, t) = T^s\varphi(t, \lambda) = \psi(s, \lambda)\varphi(t, \lambda).$$

Поэтому

$$T_t^r T^s\varphi(t, \lambda) = \psi(s, \lambda)\psi(r, \lambda)\varphi(t, \lambda).$$

С другой стороны, из условия ассоциативности следует:

$$T_t^r T^s\varphi(t, \lambda) = T_r^s T^r\varphi(t, \lambda) = T_r^s\psi(r, \lambda)\varphi(t, \lambda).$$

Поэтому

$$T^s\psi(r, \lambda) = v(s, r, \lambda) = \psi(s, \lambda)\psi(r, \lambda).$$

Функция $v(s, r, \lambda) = T^s\psi(r, \lambda)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\tilde{L}_s v = L_r v, \tag{6.11}$$

$$v|_{r=0} = \psi(s, \lambda).$$

Из (6.9) следует:

$$\tilde{L}_s v = \lambda v.$$

Поэтому из уравнения (6.11) следует:

$$L_r\psi(r, \lambda) = \lambda\psi. \tag{6.12}$$

Заменяя в уравнении (6.9) s на r и вычитая из уравнения (6.12), мы получим:

$$[\tilde{\alpha}(r)-\alpha(r)]\psi'+[\tilde{\beta}(r)-\beta(r)]\psi=0.$$

Если $\alpha(r)-\tilde{\alpha}(r)\neq 0$, то из этого уравнения и начального условия (6.10) следует, что ψ не зависит от λ, что невозможно. Поэтому

$$\alpha(r)-\tilde{\alpha}(r)=0, \quad \beta(r)-\tilde{\beta}(r)=0,$$

что и требовалось доказать.

Из доказанной леммы следует, что уравнение (6.7) имеет вид

$$\alpha(s)\frac{\partial u}{\partial s}+\beta(s)u=\alpha(t)\frac{\partial u}{\partial t}+\beta(t)u. \tag{6.7^1}$$

Задача (6.7^1)—(6.8) может быть решена в явном виде, и тем самым будет определен вид операторов обобщенного сдвига. Если мы введем новые переменные

$$t_1=\int\limits_0^t\frac{dt}{\alpha(t)}, \quad s_1=\int\limits_0^s\frac{ds}{\alpha(s)},$$

то уравнение (6.7^1) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial s_1}+\beta_1(s_1)u=\frac{\partial u}{\partial t_1}+\beta_1(t_1)u.$$

Начальное условие (6.8) своего вида не изменит. Поэтому, не нарушая общности рассуждений, мы можем с самого начала предполагать, что система (6.7^1)—(6.8) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial s}+\beta(s)u=\frac{\partial u}{\partial t}+\beta(t)u, \tag{6.13}$$

$$u|_{s=0}=f(t). \tag{6.14}$$

Уравнение (6.13) может быть приведено к более простому виду. С этой целью помножим обе части этого уравнения на функцию $a(s)$, которую мы выберем из условия, что

$$a(s)\frac{\partial u}{\partial s}+a(s)\beta(s)u=\frac{\partial}{\partial s}[a(s)u],$$

т. е.

$$a(s)\beta(s)=a'(s)$$

и, значит,

$$a(s)=e^{\int_0^s \beta(s)\,ds}.$$

Тогда уравнение (6.13) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial s}[a(s)u]=\frac{\partial}{\partial t}[a(s)u]+\beta(t)[a(s)u]. \qquad (6.13^1)$$

Если мы теперь помножим обе части уравнения (6.13^1) на $a(t)$ и обозначим $a(s)a(t)u$ через v, то получим:

$$\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial t} \qquad (6.15)$$

начальное условие

$$v|_{s=0}=a(t)f(t). \qquad (6.16)$$

Решение задачи (6.15)—(6.16) имеет вид

$$v(s,t)=a(s+t)f(s+t).$$

Поэтому

$$u(s,t)=T^sf(t)=\frac{a(s+t)}{a(s)a(t)}f(s+t). \qquad (6.17)$$

Легко проверить, что операторы T^s, определяемые по формуле (6.17), удовлетворяют всем условиям обобщенного сдвига, а также условию коммутирования. Пространства D и C для этих операторов совпадают.

3. Рассмотрим теперь случай, когда инфинитезимальные операторы первого порядка сводятся к умножению на постоянную h. В этом случае функция $u(s,t)=T^sf(t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\tilde{X}_s u=X_t u, \qquad (6.18)$$

$$u|_{s=0}=f(t), \qquad (6.19)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0}=hf(t), \qquad (6.20)$$

где операторы $\tilde{X}_s$ и X_t определяются по формулам (6.3), (6.4).

Повторяя рассуждения в доказательстве леммы 6.1, получим, что

$$\tilde{a}(s)=a(s), \quad \tilde{b}(s)=b(s), \quad \tilde{c}(s)=c(s),$$

т. е. $\breve{X}_s = X_s$. Поэтому уравнение (6.18) принимает вид

$$a(s)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + b(s)\frac{\partial u}{\partial s} + c(s)u =$$
$$= a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b(t)\frac{\partial u}{\partial t} + c(t)u \quad (a(t) > 0). \tag{6.18¹}$$

Это уравнение можно привести к более простому виду. Если мы введем новые переменные s_1 и t_1 по формулам

$$s_1 = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{a(s)}}, \quad t_1 = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{a(t)}},$$

то превратим коэффициенты при вторых производных в единицы. Поэтому мы можем предполагать с самого начала, не нарушая общности рассуждений, что уравнение (6.18¹) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + b(s)\frac{\partial u}{\partial s} + c(s)u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b(t)\frac{\partial u}{\partial t} + c(t)u. \tag{6.18²}$$

В этом уравнении можно уничтожить коэффициенты при первых производных. С этой целью помножим обе части уравнения на некоторую функцию $\alpha(s)$. Мы получим:

$$\alpha(s)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \alpha(s)b(s)\frac{\partial u}{\partial s} + \alpha(s)c(s)u = L_t[\alpha(s)u].$$

Левую часть этого равенства можно записать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}[\alpha(s)u] + [\alpha(s)b(s) - 2\alpha'(s)]\frac{\partial u}{\partial s} + [c(s) - \alpha''(s)]u.$$

Выберем теперь $\alpha(s)$ из условия

$$\alpha(s)b(s) - 2\alpha'(s) = 0.$$

Тогда

$$\alpha(s) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^s b(s)\,ds\right\}$$

и уравнение (6.18²) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}[\alpha(s)u] - q(s)[\alpha(s)u] = L_t[\alpha(s)u], \tag{6.21}$$

где

$$q(s) = \frac{-c(s) + \alpha''(s)}{\alpha(s)}.$$

Если мы теперь умножим обе части уравнения (6.21) на $\alpha(t)$, то для функции

$$v(s, t) = \alpha(s)\alpha(t)u(s, t)$$

получим уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - q(s)v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q(t)v \tag{6.22}$$

и начальные условия

$$v|_{s=0} = \alpha(t)f(t),$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{s=0} = \left[\frac{b(0)}{2} + h\right]\alpha(t)f(t).$$

Из этих преобразований ясно, что в задаче построения обобщенного сдвига по оператору второго порядка можно ограничиться уравнением вида (6.22) и начальными условиями вида (6.19) и (6.20). В следующей главе мы укажем несколько способов решения задачи (6.22) — (6.19) — (6.20).

ГЛАВА III

ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ЛИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА В ОДНОМЕРНОМ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

§ 1. Построение операторов обобщенного сдвига по данному инфинитезимальному оператору второго порядка. Случай аналитических коэффициентов

1. В последнем параграфе предыдущей главы было показано, что каждому семейству операторов обобщенного сдвига на R_1, в существенном отличному от сдвига на R_1, соответствует уравнение (6.22) и начальные условия (6.19) и (6.20). Этот результат следует рассматривать как аналог первой прямой теоремы Ли.

Цель настоящего параграфа состоит в установлении обратной теоремы, заключающейся в том, что решение задачи (6.22) — (6.19) — (6.20) (гл. II) порождает на R_1 обобщенный сдвиг. При этом мы будем вначале предполагать аналитичность коэффициента $q(t)$ (в уравнении (6.22)) и начальной функции $f(t)$. В следующих параграфах мы избавимся от этого ограничения.

Итак, рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - q(s)\,u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q(t)\,u, \tag{1.1}$$

$$u\big|_{s=0} = f(t), \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} = hf(t), \tag{1.3}$$

где $q(t)$ и $f(t)$ — целые аналитические функции и h — постоянное комплексное число.

Задача Коши (1.1) — (1.2) — (1.3) в классе аналитических функций может быть решена (вначале локально, а затем с помощью аналитического продолжения и в целом) по методу Коши — Ковалевской, причем в указанном классе решение единственно (решение единственно и в более широком классе функций, однако мы это пока не используем).

Обозначим решение задачи (1.1)—(1.2) — (1.3) через $T^s f(t)$ и покажем, что операторы T^s образуют коммутативное семейство операторов обобщенного сдвига, т. е. удовлетворяют условиям 1°, 2°, 3° и 5° § 1 гл. I.

Условие 1° следует из линейности задачи Коши. Условие 2° совпадает с начальным условием (1.2). Проверим условие 3° (условие ассоциативности). Предварительно докажем лемму.

Лемма 1.1. *Для любой аналитической функции* $\varphi(t)$

$$X_t T^s \varphi(t) = T^s X_t \varphi(t), \tag{1.4}$$

где

$$X_t(\varphi) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} - q(t)\varphi.$$

Доказательство. Введем обозначения:

$$T^s X_t \varphi(t) = A(s, t); \quad X_t T^s \varphi(t) = B(s, t).$$

Функция $A(s, t)$, по определению операторов T^s, является решением следующей задачи Коши:

$$X_s A = X_t A, \tag{1.5}$$

$$A|_{s=0} = X_t \varphi(t), \tag{1.6}$$

$$\left.\frac{\partial A}{\partial s}\right|_{s=0} = h X_t \varphi(t). \tag{1.7}$$

Если мы покажем, что функция $B(s, t)$ также удовлетворяет этой же задаче, то из единственности будет следовать, что $A(s, t) = B(s, t)$, т. е. равенство (1.4). Мы имеем в силу (1.1)

$$X_t B(s, t) = X_t X_s T^s \varphi(t) = X_s X_t T^s \varphi(t) = X_s B(s, t),$$

т. е. функция $B(s, t)$ удовлетворяет уравнению (1.5). Далее,

$$B|_{s=0} = X_t [T^s \varphi(t)]|_{s=0} = X_t \varphi(t),$$

$$\left.\frac{\partial B}{\partial s}\right|_{s=0} = X_t \left[\frac{\partial T^s \varphi(t)}{\partial s}\right]\Bigg|_{s=0} = h X_t \varphi(t)$$

и, следовательно, начальные условия (1.6) и (1.7) также выполняются.

Докажем теперь условие 3°. Введем обозначения:

$$\Phi(s, r, t) = T_s^r T^s f(t); \quad \Psi(s, r, t) = T_t^s T^r f(t).$$

Мы должны доказать, что

$$\Phi(s, r, t) = \Psi(s, r, t). \tag{1.8}$$

Функция $\Phi(s, r, t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$X_r \Phi = X_s \Phi, \tag{1.9}$$

$$\Phi\big|_{r=0} = T^s f(t), \tag{1.10}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right|_{r=0} = hT^s f(t). \tag{1.11}$$

Если мы покажем, что функция $\Psi(s, r, t)$ также является решением этой задачи Коши, то из единственности будет следовать равенство (1.8). Мы имеем, используя (1.4),

$$X_r \Psi = T_t^s X_r T^r f(t) = T_t^s X_t T^r f(t) = X_t T_t^s T^r f(t) = \\ = X_s T_t^s T^r f(t) = X_s \Psi.$$

Это показывает, что функция Ψ удовлетворяет уравнению (1.9).

Далее,

$$\Psi\big|_{r=0} = T^s f(t),$$

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right|_{r=0} = hT^s f(t)$$

и, значит, начальные условия (1.10)—(1.11) также выполняются.

2. Покажем теперь, что операторы T^s коммутируют. Введем обозначения

$$T_t^s T^r f(t) = \Phi(s, r, t), \qquad T_t^r T^s f(t) = \Psi(s, r, t),$$

функция $\Phi(s, r, t)$ есть решение следующей задачи Коши:

$$X_s \Phi = X_t \Phi, \tag{1.12}$$

$$\Phi\big|_{s=0} = T^r f(t), \tag{1.13}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right|_{s=0} = hT^r f(t). \tag{1.14}$$

Покажем, что функция Ψ также удовлетворяет этой же задаче. Мы имеем, используя лемму 1.1,

$$X_s\Psi = T_t^r X_s T^s f(t) = T_t^r X_t T^s f(t) = X_t T_t^r T^s f(t) = X_t \Psi.$$

Далее,

$$\Psi|_{s=0} = T^r f(t),$$

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial s}\right|_{s=0} = hT^r f(t).$$

Поэтому $\Phi \equiv \Psi$, что и требовалось доказать.

3. Определим для рассматриваемого случая пространство D, связанное с условием (1.4) гл. 1, § 1.

Пространство D есть совокупность функций, удовлетворяющих условию

$$T^s f(t)|_{t=0} = f(s). \tag{1.15}$$

Обозначим

$$T^s f(t)|_{t=0} = \varphi(s).$$

Из условий (1.1) и (1.2) следует:

$$\varphi(0) = f(0), \tag{1.16}$$

$$\varphi'(0) = hf(0). \tag{1.17}$$

Если

$$f'(0) = hf(0),$$

то из уравнений (1.16) и (1.17) следует:

$$\varphi'(0) = f'(0). \tag{1.18}$$

Далее, для любого целого положительного k имеем:

$$X_s^k\varphi(s) = X_s^k T^s f(t)|_{t=0} = X_t^k T^s f(t)|_{t=0} = T^s X_t^k f(t)|_{t=0};$$

$$\frac{\partial}{\partial s} X_s^k\varphi(s) = \left.\frac{\partial}{\partial s} T^s X_t^k f(t)\right|_{t=0}.$$

Полагая в этих равенствах $s=0$, получим:

$$X_s^k\varphi(s)|_{s=0} = X_t^k f(t)|_{t=0}, \tag{1.19}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial s} X_s^k\varphi(s)\right|_{s=0} = \left.hX_t^k f(t)\right|_{t=0}. \tag{1.20}$$

Поэтому, если функция $f(t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{d}{dt} X_t^k f(t)\Big|_{t=0} = hX_t^k f(t)\Big|_{t=0} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots), \quad (1.21)$$

то из (1.19) и (1.20) следует:

$$\frac{d}{ds} X_s^k \varphi(s)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} X_s^k f(s)\Big|_{s=0}. \qquad (1.21^1)$$

Из (1.21) следует по индукции, используя (1.18), что для $f(s)$ и $\varphi(s)$ производные всех порядков в точке $s=0$ совпадают. Поэтому, так как функции $f(s)$ и $\varphi(s)$ аналитичны, то $f(s) \equiv \varphi(s)$. Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Класс D состоит из функций, удовлетворяющих граничным условиям*

$$\frac{d}{ds} X_s^k f(s)\Big|_{s=0} = hX_s^k f(s)\Big|_{s=0} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

§ 2. Построение операторов обобщенного сдвига по данному инфинитезимальному оператору второго порядка. Случай неаналитических коэффициентов

1. Доказательство условий 1° и 3° обобщенного сдвига, данное в предыдущем параграфе, основывалось на единственности решения задачи Коши (1.1) — (1.2) — (1.3). Эта задача имеет единственное решение также и в классе неаналитических функций, что следует, например, из метода Римана *). Поэтому перечисленные условия обобщенного сдвига имеют место и в неаналитическом случае.

Если задачу (1.1) — (1.3) решить по методу Римана (предполагая, что $f(t)$ дважды дифференцируема), то решение можно представить в следующем виде:

$$T^s f(t) = \frac{1}{2}[f(t+s) + f(t-s)] + \frac{1}{2}\int\limits_{t-s}^{t+s} w(s,\ t,\ z)\, f(z)\, dz, \qquad (2.1)$$

---

*) См., например, Курант и Гильберт, Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, М., 1945, стр. 352 и далее.

где функция w получается из функции Римана в результате возвращения от характеристик к старым переменным (s, t).

Формула (2.1) дает нам, очевидно, возможность расширить операторы T^s на произвольные непрерывные и даже локально интегрируемые функции.

Пользуясь формулой (2.1), определим класс D. По определению, класс D состоит из функций, удовлетворяющих условию

$$T^s f(t)|_{t=0} = f(s).$$

Подставляя в это равенство вместо $T^s f(t)$ выражение из формулы (2.1), мы получим:

$$f(s) + f(-s) + \int_{-s}^{s} K(s, z) f(z)\, dz = 2f(s), \tag{2.2}$$

где $K(s, z) = w(s, 0, z)$. Если предположить, что функция $f(s)$ для $s \geqslant 0$ задана произвольно, то из уравнения (2.2) можно определить $f(s)$ для $s < 0$. В самом деле, перепишем уравнение (2.2) в виде

$$f(-s) + \int_{-s}^{0} K(s, z) f(z)\, dz = f(s) - \int_{0}^{s} K(s, z) f(z)\, dz = g(s). \tag{2.3}$$

Функция $g(s)$ для $s \geqslant 0$ известна. Уравнение (2.3) можно преобразовать к виду

$$f(-s) + \int_{0}^{s} K(s, -z) f(-z)\, dz = g(s). \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) является интегральным уравнением типа уравнения Вольтерра с неизвестной функцией $f(-s)$. Его решение можно представить в виде

$$f(-s) = g(s) - \int_{0}^{s} K_1(s, z) g(z)\, dz, \tag{2.5}$$

где $K_1(s, z)$ — резольвента уравнения (2.4). Итак, мы пришли к следующему результату.

Теорема 2.1. *Класс D состоит из функций, удовлетворяющих интегральному уравнению* (2.4)

2. Можно охарактеризовать класс D иначе. Пусть $f(s)$ задана на полупрямой $(0, \infty)$ произвольно. Продолжим ее на полупрямую $(-\infty, 0)$ по формуле (2.5). Мы получим функцию класса D.

Допустим, что $f(s) \in C^2[0, \infty)$ *). Выясним, при каких условиях продолженная функция $f(s) \in C^2(-\infty, \infty)$. Из уравнения (2.4) следует, что единственная точка, которая нуждается в исследовании, — это точка $s = 0$.

Полагая $s \to +0$ и переходя в уравнении (2.4) к пределу, мы получим:

$$f(-0) = f(+0).$$

Это показывает, что продолженная функция непрерывна.

Исследуем теперь поведение первой производной при прохождении через точку нуль. Дифференцируя уравнение (2.3) по s, мы получим:

$$-f'(-s) + w(s, 0, -s) f(-s) + \int_{-s}^{0} \frac{\partial w}{\partial s}(s, 0, z) f(z)\, dz =$$

$$= f'(s) - w(s, 0, s) f(s) + \int_{0}^{s} \frac{\partial w}{\partial s}(s, 0, z) f(z)\, dz. \quad (2.6)$$

Полагая в (2.6) $s = +0$, будем иметь:

$$-f'(-0) + w(0, 0, 0) f(0) = f'(+0) - w(0, 0, 0) f(0). \quad (2.7)$$

Для того чтобы определить $w(0, 0, 0)$, продифференцируем равенство (2.1) по s. Мы получим:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{2}[f'(t+s) - f'(t-s)] + \frac{1}{2}[w(s, t, t+s) f(t+s) +$$

$$+ w(s, t, t-s) f(t-s)] + \frac{1}{2}\int_{t-s}^{t+s} \frac{\partial w}{\partial s}(s, t, z) f(z)\, dz. \quad (2.8)$$

---

*) Пусть (a, b) — открытый интервал на действительной прямой. Множество непрерывных функций, имеющих на (a, b) k непрерывных производных, обозначается через $C^k(a, b)$.

Если $f(t) \in C^k(a, b)$ и в дополнение к этому правая k-я производная функции $f(t)$ существует в точке a и непрерывна справа в a, то говорят, что $f(t)$ принадлежит к C^k на $[a, b]$, сокращенно $f \in C^k[a, b)$. Аналогично определяются классы $C^k(a, b]$ и $C^k[a, b]$

Полагая в этом равенстве $s=0$, мы получим, используя начальное условие (1.3),

$$hf(t)=w(0,\ t,\ t)f(t).$$

Следовательно,

$$w(0,\ t,\ t)=h$$

и, в частности,

$$w(0,\ 0,\ 0)=h.$$

Поэтому, если функция $f(t)$ удовлетворяет граничному условию

$$f'(+0)=hf(+0),$$

то из (2.7) мы получим:

$$f'(-0)=hf(0)=f'(+0)$$

и, значит, продолженная функция имеет непрерывную первую производную. Остается рассмотреть вторую производную. С этой целью продифференцируем по s равенство (2.6). Мы получим:

$$f''(-s)+\frac{dw}{ds}(s,\ 0,\ -s)f(-s)-w(s,\ 0,\ -s)f'(-s)+$$
$$+\frac{\partial w}{\partial s}(s,\ 0,\ z)\Big|_{z=-s}f(-s)+\int\limits_{-s}^{0}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(s,\ 0,\ z)f(z)\,dz=$$
$$=f''(s)-\frac{dw}{ds}(s,\ 0,\ s)f(s)-w(s,\ 0,\ s)f'(s)-$$
$$-\frac{\partial w}{\partial s}(s,\ 0,\ z)\Big|_{z=s}f(s)-\int\limits_{0}^{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(s,\ 0,\ z)f(z)\,dz.$$

Полагая в этом равенстве $s=+0$, получим (используя доказанную уже непрерывность первой производной):

$$f''(-0)+\left[\frac{dw}{ds}(s,\ 0,\ -s)+\frac{\partial w}{\partial s}(s,\ 0,\ z)\Big|_{z=-s}\right]\Big|_{s=0}f(0)=$$
$$=f''(+0)-\left[\frac{dw}{ds}(s,\ 0,\ s)+\frac{\partial w}{\partial s}(s,\ 0,\ z)\Big|_{z=s}\right]\Big|_{s=0}f(0). \quad (2.9)$$

Далее, мы имеем:

$$\frac{dw}{ds}(s,\ 0,\ -s)=\frac{\partial w}{\partial s}(s,\ 0,\ z)\Big|_{z=-s}-\frac{\partial w}{\partial z}(s,\ 0,\ z)\Big|_{z=-s},$$
$$\frac{dw}{ds}(s,\ 0,\ s)=\frac{\partial w}{\partial s}(s,\ 0,\ z)\Big|_{z=s}+\frac{\partial w}{\partial z}(s,\ 0,\ z)\Big|_{z=s}.$$

Подставляя это в (2.9), мы получим:

$$f''(+0) - f''(-0) = 4f(0)\frac{\partial w}{\partial s}(s, 0, z)\Big|_{z=s=0}. \quad (2.10)$$

Если мы покажем, что

$$\frac{\partial w}{\partial s}(s, 0, z)\Big|_{z=s=0} = 0, \quad (2.11)$$

то из равенства (2.10) будет следовать, что

$$f''(-0) = f''(+0),$$

т. е. непрерывность второй производной для продолженной функции.

Для доказательства равенства (2.11) продифференцируем равенство (2.8) по s:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} &= \frac{1}{2}[f''(t+s) + f''(t-s)] + \\ &+ \frac{1}{2}\Big[\frac{dw}{ds}(s, t, t+s) f(t+s) + w(s, t, t+s) f'(t+s) + \\ &+ \frac{dw}{ds}(s, t, t-s) f(t-s) - w(s, t, t-s) f'(t-s)\Big] + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial s}(s, t, z)\Big|_{z=t+s} f(t+s) + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial s}(s, t, z)\Big|_{z=t-s} f(t-s) + \frac{1}{2}\int\limits_{t-s}^{t+s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(s, t, z) f(z)\, dz.\end{aligned} \quad (2.12)$$

Полагая в этой формуле $s = 0$, мы получим после несложных преобразований

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\Big|_{s=0} = f''(t) + 2\frac{\partial w}{\partial s}(s, t, t)\Big|_{s=0} f(t). \quad (2.13)$$

Чтобы определить $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\Big|_{s=0}$, положим в уравнении (1.1) $s = 0$. Мы получим, используя начальное условие (1.2),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\Big|_{s=0} = f''(t) + [q(0) - q(t)] f(t). \quad (2.14)$$

Из (2.13) и (2.14) следует:

$$2\frac{\partial w}{\partial s}(s, t, t)\Big|_{s=0} = [q(0) - q(t)],$$

и равенство (2.11) получается из последнего равенства при $t=0$.

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. *Если функция $f(t)$ на полупрямой $s \geqslant 0$ принадлежит классу $C^2[0, \infty)$ и удовлетворяет граничному условию*

$$f'(0) = hf(0), \tag{2.15}$$

то 1) *ее продолжение по формуле* (2.5) (*вместе с $f(s)$ для $s \geqslant 0$*) *есть функция, принадлежащая классу $C^2(-\infty, \infty)$*; 2) *продолженная функция принадлежит классу D.*

Замечание. Условие (2.15) не только достаточно для принадлежности $f(t)$ классу D, но и необходимо. В самом деле, предполагая, что $f(t) \in D$ и полагая в условии (1.3) $t=0$, мы получим:

$$f'(0) = hf(0),$$

т. е. условие (2.15).

§ 3. Вывод формулы (2.1). Первый метод

Как мы уже отмечали в начале предыдущего параграфа, формулу (2.1) можно получить из формулы Римана для решения линейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Однако эту формулу можно также получить, не опираясь на метод Римана, используя специфику задачи. Рассмотрим несколько более общую задачу, чем задача (1.1) — (1.3). Пусть $r(s)$ и $q(t)$ — произвольные непрерывные функции, $f(t)$, $g(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции. Обозначим через $u(s, t; f, g)$ решение следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - r(s)\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q(t)\, u, \tag{3.1}$$

$$u\big|_{s=0} = f(t), \tag{3.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} = g(t). \tag{3.3}$$

Так как эта задача линейна, то

$$u(s, t; f, g) = u(s, t; f, 0) + u(s, t; 0, g).$$

Поэтому достаточно рассмотреть тот случай, когда либо $f(t)$, либо $g(t)$ равняется нулю. Мы рассмотрим для определенности случай, когда $g(t)=0$.

Таким образом, вместо начального условия (3.3) мы имеем:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0}=0. \tag{3.3¹}$$

Для задачи (3.1) — (3.2) — (3.3¹) мы выведем формулу (2.1). С этой целью перепишем уравнение (3.1) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=[r(s)-q(t)]\,u. \tag{3.1¹}$$

Если $r(s)=q(t)=0$, то уравнение (3.1¹) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{3.1²}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (3.2) и (3.3¹), имеет вид

$$u_0(s,\ t)=\frac{1}{2}[f(t+s)+f(t-s)]. \tag{3.4}$$

Выведем теперь интегральное уравнение для решения задачи (3.1) — (3.2) — (3.3¹). С этой целью рассмотрим вначале неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=F(s,\ t), \tag{3.5}$$

в котором правая часть $F(s,\ t)$ — известная функция. Обозначим через $z(s,\ t)$ решение уравнения (3.5), удовлетворяющее начальным условиям

$$z\,|_{s=0}=0, \tag{3.6}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{s=0}=0. \tag{3.7}$$

Пусть $v(s,\ \tau,\ t)$ является решением уравнения (3.1²) и удовлетворяет начальным условиям

$$v\,|_{s=0}=0, \tag{3.8}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{s=0}=F(\tau,\ t). \tag{3.9}$$

Покажем, что

$$z(s, t) = \int_0^s v(s-\tau, \tau, t)\, d\tau.$$

Начальные условия (3.6) и (3.7) проверяются непосредственно.

Покажем, что функция $z(s, t)$ удовлетворяет уравнению (3.5).

В самом деле,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \int_0^s \frac{\partial v}{\partial s}(s-\tau, \tau, t)\, d\tau;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{\partial v}{\partial s}(s-\tau, \tau, t)\big|_{\tau=s} + \int_0^s \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(s-\tau, \tau, t)\, d\tau =$$

$$= F(s, t) + \int_0^s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(s-\tau, \tau, t)\, d\tau = F(s, t) + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Хорошо известно, что решение задачи (3.1^2)—(3.8)—(3.9) имеет вид

$$v(s, \tau, t) = \frac{1}{2}\int_{t-s}^{t+s} F(\tau, x)\, dx.$$

Поэтому решение задачи (3.5) — (3.6) — (3.7) имеет вид

$$z(s, t) = \frac{1}{2}\int_0^s d\tau \int_{t-(s-\tau)}^{t+(s-\tau)} F(\tau, x)\, dx = \frac{1}{2}\iint_{\Delta_{s,\,t}} F(\tau, x)\, d\tau\, dx, \tag{3.10}$$

где $\Delta_{s,\,t}$ — треугольник в (x, τ)-плоскости с вершинами в точках $A(t-s, 0)$, $C(t, s)$, $B(t+s, 0)$ (рис. 1).

Используя формулы (3.4) и (3.10), нетрудно составить интегральное уравнение для решения задачи Коши (3.1) — (3.2) — (3.3^1). В самом деле, рассматривая в уравнении (3.1^1) правую часть как известную функцию и используя формулу (3.10), мы получим для решения задачи (3.1) — (3.2) —

(3.3¹) следующее интегральное уравнение:

$$u(s,\ t)=u_0(s,\ t)+\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta_{s,\ t}}[r(\tau)-q(x)]\,u(\tau,\ x)\,d\tau\,dx, \qquad (3.11)$$

в котором $u_0(s,\ t)$ определяется по формуле (3.4).

Интегральное уравнение (3.11) является уравнением типа уравнения Вольтерра, и поэтому его решение может быть получено по методу последовательных приближений. Нетрудно показать, что полученное таким образом решение уравнения (3.11) является также решением задачи Коши. Мы не будем здесь заниматься доказательством сходимости метода последовательных приближений (а также обоснованием возможности почленного дифференцирования полученных рядов), считая это известным, а покажем лишь, как получить формулу (2.1).

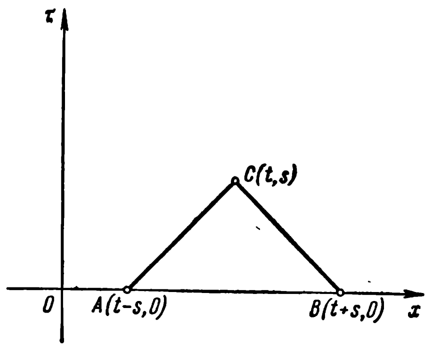

Рис. 1.

Пусть $u_0(s,\ t)$ определяется по формуле (3.4) и пусть

$$u_n(s,\ t)=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta_{s,\ t}}[r(\tau)-q(x)]\,u_{n-1}(\tau,\ x)\,d\tau\,dx$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (3.12)$$

Тогда

$$u(s,\ t)=u_0(s,\ t)+u_1(s,\ t)+\ \ldots\ +u_n(s,\ t)+\ \ldots \qquad (3.13)$$

Покажем, что каждую из функций $u_n(s,\ t)$, $n\geqslant 1$, можно представить в виде

$$u_n(s,\ t)=\frac{1}{2}\int\limits_{t-s}^{t+s}w_n(s,\ t,\ z)\,f(z)\,dz. \qquad (3.14)$$

При $n=1$ мы имеем:

$$u_1(s,\ t)=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^s d\tau \int_{t-(s-\tau)}^{t+(s-\tau)} [r(\tau)-q(x)]\,\frac{1}{2}\,[f(x+\tau)+f(x-\tau)]\,dx. \quad (3.15)$$

Изменим в этом интеграле порядок интегрирования. Так как

$$t-(s-\tau)\leqslant x\leqslant t+(s-\tau),\quad 0\leqslant\tau\leqslant s,$$

то

$$t-s\leqslant t-s+2\tau\leqslant x+\tau\leqslant t+s,$$
$$t-s\leqslant x-\tau\leqslant t+s-2\tau\leqslant t+s.$$

Поэтому после перестановки порядка интегрирования интеграл (3.15) можно записать в виде

$$u_1(s,\ t)=\frac{1}{2}\int_{t-s}^{t+s} w_1(s,\ t,\ z)\,f(z)\,dz,$$

причем функцию $w_1(s,\ t,\ z)$ нетрудно выписать в явном виде, однако нам вид этой функции в дальнейшем не понадобится.

Итак, формула (3.14) для $n=1$ доказана. Допустим теперь, что эта формула для $n-1$ верна, и докажем ее для n.

Мы имеем, используя (3.12),

$$u_n(s,\ t)=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^s d\tau \int_{t-(s-\tau)}^{t+(s-\tau)} [r(\tau)-q(x)]\left[\frac{1}{2}\int_{x-\tau}^{x+\tau} w_{n-1}(\tau,\ x,\ z)\,f(z)\,dz\right]dx.$$

Изменим в этом интеграле порядок интегрирования так, чтобы последний интеграл брался по z Так как $x-\tau\leqslant z\leqslant x+\tau$ и $t-(s-\tau)\leqslant x\leqslant t+(s-\tau)$, то $t-s\leqslant z\leqslant t+s$. Поэтому после перестановки порядка интегрирования z будет изменяться в пределах от $(t-s)$ до $(t+s)$.

В результате мы получим:

$$u_n(s, t) = \\ = \frac{1}{2}\int_{t-s}^{t+s} f(z)\left\{\frac{1}{2}\iint_{\sigma_{s,t,z}} w_{n-1}(\tau, x, z)[r(\tau)-q(x)]\,dx\,d\tau\right\}dz,$$

причем $\sigma_{s,t,z}$ — некоторая область (x, τ)-плоскости, зависящая от s, t и z, точный вид которой нам в дальнейшем не понадобится. Итак, формула (3.14) доказана для n, причем

$$w_n(s, t, z) = \frac{1}{2}\iint_{\sigma_{s,t,z}} w_{n-1}(\tau, x, z)[r(\tau)-q(x)]\,dx\,d\tau.$$

Из формул (3.13) и (3.14) следует непосредственно формула (2.1).

§ 4. Вывод формулы (2.1). Второй метод

1. Другой метод вывода формулы (2.1) состоит в следующем.

Мы предполагаем, что решение задачи (3.1) — (3.2) — (3.1[1]) представляется в виде (2.1); подставляем эту формулу в уравнение (3.1) и в результате получаем задачу Гурса для функции $w(s, t, z)$. В этом параграфе мы изложим связанные с этим методом вычисления.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - r(s)\,u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q(t)\,u, \tag{4.1}$$

$$u|_{s=0} = f(t), \tag{4.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} = hf(t), \tag{4.3}$$

где h — постоянная величина. Пусть решение этой задачи имеет вид

$$u(s, t) = \frac{1}{2}[f(t+s) + f(t-s)] + \frac{1}{2}\int_{t-s}^{t+s} w(s, t, z)\,f(z)\,dz. \tag{4.4}$$

Очевидно, что условие (4.2) выполняется автоматически. Выясним, какому условию должна удовлетворять функция $w(s, t, z)$ для того, чтобы выполнялось начальное условие (4.3). Дифференцируя формулу (4.4) по s, мы получим:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{2}[f'(t+s) - f'(t-s)] + \frac{1}{2}[w(s, t, t+s) f(t+s) +$$
$$+ w(s, t, t-s) f(t-s)] + \frac{1}{2}\int\limits_{t-s}^{t+s} \frac{\partial w}{\partial s}(s, t, z) f(z)\, dz. \quad (4.5)$$

Полагая в этой формуле $s = 0$, мы получим, используя начальное условие (4.3),

$$hf(t) = w(0, t, t) f(t).$$

Из последнего равенства следует условие для функции $w(s, t, z)$:

$$w(0, t, t) = h. \quad (4.6)$$

Это условие будет в дальнейшем существенно использовано.

Введем обозначения:

$$Y_s(f) = \frac{d^2 f}{ds^2} - r(s) f,$$

$$X_t(f) = \frac{d^2 f}{dt^2} - q(t) f,$$

и пусть $u(s, t; f)$ является решением задачи Коши (4.1) — (4.2) — (4.3).

Покажем, что

$$X_t u(s, t; f) = u(s, t; X_t f). \quad (4.7)$$

В самом деле, равенство (4.7) следует из того, что как его правая часть, так и его левая часть являются решением следующей задачи Коши (см. доказательство леммы 1.1):

$$Y_s v = X_t v,$$

$$v\big|_{s=0} = X_t(f),$$

$$\frac{\partial v}{\partial s}\bigg|_{s=0} = hX_t(f).$$

Используя (4.7), можно переписать уравнение (4.1) в виде

$$u(s,\ t;\ X_t f) = Y_s u(s,\ t;\ f). \tag{4.8}$$

Подставляя вместо $u(s,\ t;\ f)$ выражение (4.4), получим:

$$\begin{aligned}
Y_s u &= \frac{1}{2}[f''(t+s) + f''(t-s)] + \\
&+ \frac{1}{2}\Big[\frac{dw}{ds}(s,\ t,\ t+s) f(t+s) + w(s,\ t,\ t+s) f'(t+s) + \\
&+ \frac{dw}{ds}(s,\ t,\ t-s) f(t-s) - w(s,\ t,\ t-s) f'(t-s)\Big] + \\
&+ \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial w}{\partial s}(s,\ t,\ z)\Big|_{z=t+s} f(t+s) + \\
&+ \frac{\partial w}{\partial s}(s,\ t,\ z)\Big|_{z=t-s} f(t-s)\Big] + \frac{1}{2}\int\limits_{t-s}^{t+s} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(s,\ t,\ z) f(z)\, dz - \\
&- \frac{1}{2} r(s)[f(t+s) + f(t-s)] - \frac{1}{2}\int\limits_{t-s}^{t+s} r(s)\, w(s,\ t,\ z) f(z)\, dz;
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
u(s,\ t;\ X_t f) &= \frac{1}{2}[f''(t+s) + f''(t-s) - q(t+s) f(t+s) - \\
&- q(t-s) f(t-s)] - \frac{1}{2}\int\limits_{t-s}^{t+s} q(z)\, w(s,\ t,\ z) f(z)\, dz + \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_{t-s}^{t+s} w(s,\ t,\ z) f''(z)\, dz = \\
&= \frac{1}{2}[f''(t+s) + f''(t-s) - q(t+s) f(t+s) - q(t-s) f(t-s)] - \\
&- \frac{1}{2}\int\limits_{t-s}^{t+s} q(z)\, w(s,\ t,\ z) f(z)\, dz + \\
&+ \frac{1}{2}[w(s,\ t,\ t+s) f'(t+s) - w(s,\ t,\ t-s) f'(t-s)] - \\
&- \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial w}{\partial z}(s,\ t,\ z)\Big|_{z=t+s} f(t+s) - \frac{\partial w}{\partial z}(s,\ t,\ z)\Big|_{z=t-s} f(t-s)\Big] + \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_{t-s}^{t+s} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(s,\ t,\ z) f(z)\, dz.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

В силу (4.7) выражения (4.9) и (4.10) равны. Поэтому после сокращений получим:

$$\left[\frac{dw}{ds}(s,\ t,\ t+s)-\frac{1}{2}r(s)+\frac{1}{2}q(t+s)\right]f(t+s)+$$
$$+\left[\frac{dw}{ds}(s,\ t,\ t-s)-\frac{1}{2}r(s)+\frac{1}{2}q(t-s)\right]f(t-s)+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t-s}^{t+s}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(s,\ t,\ z)-r(s)w(s,\ t,\ z)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(s,\ t,\ z)+q(z)w(s,\ t,\ z)\right]f(z)\,dz=0.$$

Так как функция $f(z)$ произвольна, то из последнего равенства следует, что функция $w(s,\ t,\ z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}-r(s)w=\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-q(z)w \qquad (4.11)$$

и условиям

$$\frac{dw}{ds}(s,\ t,\ t+s)=\frac{1}{2}[r(s)-q(t+s)], \qquad (4.12)$$

$$\frac{dw}{ds}(s,\ t,\ t-s)=\frac{1}{2}[r(s)-q(t-s)]. \qquad (4.13)$$

Интегрируя уравнения (4.12) и (4.13) и принимая во внимание условие (4.6), мы получим:

$$w(s,\ t,\ t+s)=h+\frac{1}{2}\int\limits_0^s[r(s)-q(t+s)]\,ds, \qquad (4.14)$$

$$w(s,\ t,\ t-s)=h+\frac{1}{2}\int\limits_0^s[r(s)-q(t-s)]\,ds. \qquad (4.15)$$

Условия (4.14) и (4.15) являются начальными условиями на характеристиках уравнения (4.11): $z=t+s$, $z=t-s$. Поэтому задача (4.11) — (4.14) — (4.15) есть задача Гурса. Как известно, задача Гурса может быть решена непосредственно с помощью метода последовательных приближений *).

---

*) См., например, Курант и Гильберт. Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, М., 1945, гл. V, § 5.

2. Докажем теперь, что и обратно, если функция $w(s, t, z)$ является решением задачи Гурса (4.11) — (4.14) — (4.15), то функция $u(s, t; f)$, определенная по формуле (4.4), дает решение задачи Коши (4.1) — (4.2) — (4.3).

Начнем с начальных условий. Условие (4.2) выполняется автоматически. Далее, из (4.14) или (4.15) (при $s=0$) и (4.5) следует условие (4.6). Поэтому из формулы (4.5) следует, что начальное условие (4.3) также выполняется. Остается проверить уравнение (4.1).

Если все вычисления (4.9) — (4.10) провести в обратном порядке, то мы покажем, что для любой функции $f(t) \in C^2(-\infty, \infty)$

$$Y_s u(s, t; f) = u(s, t; X_t f). \tag{4.16}$$

Поэтому остается показать, что

$$u(s, t; X_t f) = X_t u(s, t; f). \tag{4.17}$$

Докажем сначала равенство (4.17) для случая целых аналитических r, q и f. В этом случае $w(s, t, z)$, а значит, и $u(s, t; f)$ также аналитичны. При $s=0$

$$u(s, t; X_t f) = X_t f;$$
$$X_t u(s, t; f) = X_t f.$$

Поэтому равенство (4.17) при $s=0$ выполняется. Далее, так как начальное условие (4.3) выполняется, то

$$\frac{\partial}{\partial s} u(s, t; X_t f)\Big|_{s=0} = hX_t f;$$
$$\frac{\partial}{\partial s} X_t u(s, t; f)\Big|_{s=0} = hX_t f.$$

Используя теперь равенство (4.16), мы получим:

$$Y_s u(s, t; X_t f) = u(s, t; X_t^2 f),$$
$$Y_s X_t u(s, t; f) = X_t Y_s u(s, t; f) = X_t u(s, t; X_t f).$$

В частности, если $s=0$, то

$$Y_s u(s, t; X_t f)\big|_{s=0} = X_t^2 f = Y_s X_t u(s, t; f)\big|_{s=0}.$$

Поэтому функции $u(s, t; X_t f)$ и $X_t u(s, t; f)$ имеют равные вторые производные при $s=0$. Дифференцируя функции $Y_s u(s, t; X_t f)$ и $Y_s X_t u(s, t; f)$ по s и полагая затем $s=0$, докажем, что третьи производные этих функций равны и т. д. Из совпадения производных в точке $s=0$ следует равенство (4.17).

В общем случае мы можем аппроксимировать коэффициенты $r(s)$ и $q(t)$, а также начальную функцию $f(t)$ многочленами и получить равенство (4.17), совершая предельный переход. Так как формула (4.4), а также задача Гурса имеют конечную область зависимости относительно начальных данных, то указанный предельный переход легко осуществляется.

§ 5. Операторы обобщенного сдвига на полупрямой

В этом параграфе мы будем предполагать, что многообразие V_n есть полуось $(0, \infty)$. Таким образом, операторы T^s определены для $s \geqslant 0$ на дифференцируемых функциях, определенных на полупрямой $(0, \infty)$. Пусть $u(s, t) = T^s f(t)$. Повторяя рассуждения § 6 предыдущей главы, можно показать, что функция $u(s, t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$a(s)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + b(s)\frac{\partial u}{\partial s} + c(s)u = a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b(t)\frac{\partial u}{\partial t} + c(t)u, \tag{5.1}$$

$$u|_{s=0} = f(t), \tag{5.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} = hf(t). \tag{5.3}$$

Далее там же показано, что, не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что $a(s)=1$, $b(s)=0$. Если положить $c(s) = -q(s)$, то уравнение (5.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - q(s)u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q(t)u. \tag{5.1¹}$$

В силу леммы 3.2 гл. II для $f(t) \in D$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = hf(s). \tag{5.4}$$

Как известно, задача (5.1¹) — (5.2) — (5.3) — (5.4) на полупрямой $(0, \infty)$ имеет единственное решение. Полагая в (5.4) $s=0$, мы получим:

$$f'(0)=hf(0). \tag{5.5}$$

Как показано в § 2 (теорема 2.2), условие (5.5) определяет класс D.

Задача (5.1^1) — (5.2) — (5.3) — (5.4) может быть сведена к задаче, решенной в § 2. Если $t, s \geqslant 0$ и $t > s$, то мы получаем чистую задачу Коши (5.1^1) — (5.2) — (5.3) и, значит, решение дается по формуле (2.1). Если $t < s$, то необходимо удовлетворить граничному условию (5.4). Это можно сделать следующим образом. Продолжим функцию $q(t)$ на отрицательную полуось с сохранением дифференциального класса, а в остальном произвольно. Предполагая, что функция $f(t)$ также продолжена на отрицательную полуось, мы получим решение задачи (5.1^1) — (5.2) — (5.3) по формуле (2.1). Потребуем, чтобы это решение обладало свойством симметрии

$$u(s, t)=u(t, s). \tag{5.6}$$

Это условие дает интегральное уравнение для определения $f(t)$, $t \leqslant 0$, и, как показано в § 2, если $f(t)$ удовлетворяет граничному условию (5.5) и $f(t) \in C^2[0, \infty)$, то продолженная функция принадлежит классу $C^2(-\infty, \infty)$.

Покажем, что из условия (5.6) следует граничное условие (5.4). В самом деле, из начального условия (5.3) и условия симметрии (5.6) следует:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=hf(s),$$

т. е. условие (5.4).

Итак, мы построили решение задачи (5.1^1)—(5.2)—(5.3)—(5.5) и, следовательно, восстановили по оператору $X_s = \frac{d^2}{ds^2} - q(s)$ и граничному условию (5.5) о. о. с. T^s. Класс D совпадает с функциями, удовлетворяющими граничному условию (5.1).

Так как в классе D имеет место симметрия

$$T^s f(t)=T^t f(s), \tag{5.7}$$

то для построения операторов T^s на функциях класса D нет нужды продолжать функции $q(t)$ и $f(t)$ на отрицательную полуось. В самом деле, для $t > s$ $T^s f(t)$ определяется по формуле (2.1), в которую входят значения $q(t)$ и $f(t)$ для $t > 0$. Случай $t < s$ с помощью формулы (5.7) сводится к случаю $t > s$.

Формула (2.1) дает возможность расширить операторы T^s на класс суммируемых функций. В этом случае условие (5.5) заменяется условием (5.7).

§ 6. Условие положительности функции $w(s, t, z)$ из формулы (2.1) в случае полупрямой

1. Представляет интерес выяснить условие положительности функции $w(s, t, z)$ из формулы (2.1) в случае полупрямой $(0, \infty)$. В этом параграфе мы укажем одно достаточное условие положительности функции $w(s, t, z)$.

В случае полупрямой функция $T^s f(t)$ симметрична, и поэтому мы можем предполагать, что $t \geqslant s$. В силу формулы (2.1)

$$T^s f(t) = \frac{1}{2}[f(t+s) + f(t-s)] + \frac{1}{2}\int\limits_{t-s}^{t+s} w(s, t, z) f(z)\, dz.$$

Из этой формулы видно, что для положительности функции w необходимо (и достаточно), чтобы для любой положительной функции $f(t)$ решение задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - q(s) u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q(t) u, \tag{6.1}$$

$$u\,|_{s=0} = f(t) \qquad (t \geqslant s \geqslant 0), \tag{6.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} = h f(t) \tag{6.3}$$

было положительным.

Мы покажем, что это имеет место, если число $h \geqslant 0$ и функция $q(t)$ монотонно убывает.

В самом деле, в § 3 было показано, что задача (6.1) — (6.2) — (6.3) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$u(s, t) = u_0(s, t) + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta_{s,t}} [q(\tau) - q(x)]\, u(\tau, x)\, d\tau\, dx, \tag{6.4}$$

где

$$u_0(s, t) = \frac{1}{2}[f(t+s) + f(t-s)] + \frac{h}{2}\int_{t-s}^{t+s} f(z)\,dz$$

и $\Delta_{s,t}$ есть треугольник с вершинами в точках $A(t-s, 0)$, $C(t, s)$, $B(t+s, 0)$ (рис. 2).

Если $f(t)$ и h неотрицательны, то $u_0 > 0$. Далее в треугольнике ABC $\tau \leqslant x$. Поэтому если функция $q(s)$ монотонно убывает, то в этом треугольнике $q(\tau) - q(x) \geqslant 0$. Поэтому последовательные приближения решения уравнения (6.4), а значит, и само решение этого уравнения положительны, что и требовалось доказать.

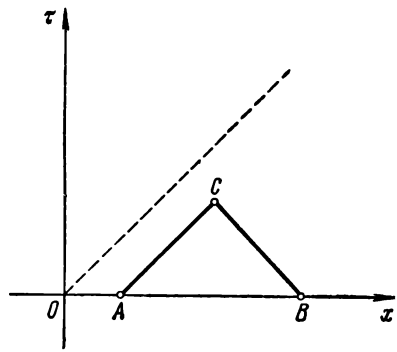

Рис. 2.

2. На практике часто встречается оператор вида $X_t f = \frac{d^2 f}{dt^2} + \alpha(t)\frac{df}{dt} + \beta(t) f$.

Рассмотрим условие положительности решения следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \alpha(s)\frac{\partial u}{\partial s} + \beta(s) u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \beta(t) u, \quad (6.5)$$

$$u\big|_{s=0} = f(t), \quad (6.2)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} = hf(t). \quad (6.3)$$

Как показано в § 6 предыдущей главы, функция $v(s, t) = a(s)a(t)u(s, t)$, где

$$a(s) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_{c}^{s} \alpha(s)\,ds\right\}$$

является решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - q(s)\,v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q(t)\,v, \tag{6.6}$$

$$v\big|_{s=0} = a(t)\,f(t), \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s}\bigg|_{s=0} = \left[\frac{1}{2}\alpha(0) + h\right] a(t)\,f(t), \tag{6.8}$$

причем

$$q(s) = \frac{1}{a(s)}\left[-\beta(s) + a''(s)\right] = \\ = -\frac{\beta(s)}{a(s)} + \frac{1}{2}\left[\alpha'(s) + \frac{1}{2}\alpha^2(s)\right]. \tag{6.9}$$

Поэтому из предыдущего следует, что решение задачи (6.5) — (6.2) — (6.3) при $t \geqslant s \geqslant 0$ положительно, если $\frac{1}{2}\alpha(0) + h \geqslant 0$ и функция $q(s)$, определенная равенством (6.9), монотонно убывает.

§ 7. Операторы обобщенного сдвига, определенные на конечном отрезке действительной прямой

1. Предположим, что многообразие V_n есть конечный отрезок действительной прямой, который, не нарушая общности рассуждений, мы можем считать совпадающим с отрезком $[0, \pi]$.

Как и прежде для функции $u(s, t) = T^s f(t)$ $(0 \leqslant s, t \leqslant \pi)$, мы можем получить дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - q(s)\,u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q(t)\,u \qquad (0 \leqslant s,\ t \leqslant \pi) \tag{7.1}$$

и начальные условия

$$u\big|_{s=0} = f(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi), \tag{7.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}\bigg|_{s=0} = hf(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi). \tag{7.3}$$

Из теории уравнений в частных производных известно, что к задаче (7.1) — (7.2) — (7.3) необходимо еще присоединить граничные условия. Как показано в § 5, в точке $t = 0$

граничное условие должно иметь вид

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - hu\right)\Big|_{t=0} = 0. \tag{7.4}$$

Пусть в точке $t = \pi$ граничное условие имеет вид

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + Hu\right)\Big|_{t=\pi} = 0. \tag{7.5}$$

Задачу (7.1) — (7.2) — (7.3) — (7.4) — (7.5) в случае действительных q, h и H можно решить по методу Фурье. Пусть $\psi_n(t)$ есть полная система нормированных собственных функций задачи Штурма — Лиувилля:

$$\psi_n'' + \{\lambda_n - q(t)\}\psi_n = 0,$$
$$(\psi_n' - h\psi_n)\big|_{t=0} = 0,$$
$$(\psi_n' + H\psi_n)\big|_{t=\pi} = 0.$$

Если $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n(t)$, то имеем $u(s, t) = T^s f(t) = = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n(t)\psi_n(s)$.

2. Впрочем, задачу (7.1) — (7.5) можно решить, не прибегая к разложению по собственным функциям, с помощью метода продолжения, использованного уже нами в § 2. При этом $q(t)$, h и H могут быть также комплексными.

Однако в отличие от рассмотренного в § 3 случая полупрямой, в случае конечного отрезка продолжение приходится осуществлять как влево от точки $t = 0$, так и вправо от точки $t = \pi$.

Продолжим функцию $q(t)$ с отрезка $[0, \pi]$ на всю числовую ось с сохранением класса дифференцируемости, а в остальном произвольно. Будем искать решение в виде

$$u(s, t) = \frac{1}{2}[f(t+s) + f(t-s)] + \frac{1}{2}\int_{t-s}^{t+s} w(s, t, z) f(z)\,dz. \tag{7.6}$$

Функцию $f(z)$, которая первоначально задана на интервале $[0, \pi]$, мы продолжим вне этого интервала, используя граничные условия (7.4) и (7.5).

С помощью граничного условия (7.4) мы можем продолжить функцию $f(t)$ с интервала $[0, \pi]$ на интервал $[-\pi, 0]$. Как показано в § 2, это продолжение равносильно условию симметрии

$$T^s f(t) = T^t f(s). \tag{7.7}$$

Если $f(t)$ класса $C^2[0, \pi]$ и удовлетворяет граничному условию

$$f'(0) - hf(0) = 0, \tag{7.8}$$

то продолженная функция принадлежит классу $C^2(-\pi, \pi)$. Чтобы продолжить $f(t)$ в интервал $(\pi, 2\pi)$ и тем самым окончательно определить $T^s f(t)$ для произвольных s, t $(0 \leqslant s,\ t \leqslant \pi)$, мы используем граничное условие (7.5). Подставляя (7.6) в граничное условие (7.5), мы получим:

$$\begin{gathered}[f'(\pi+s) + f'(\pi-s)] + [w(s, \pi, \pi+s) f(\pi+s) - \\ - w(s, \pi, \pi-s) f(\pi-s)] + \int_{\pi-s}^{\pi+s} \frac{\partial w}{\partial t}(s, t, z)\Big|_{t=\pi} f(z)\,dz + \\ + H[f(\pi+s) + f(\pi-s)] + H\int_{\pi-s}^{\pi+s} w(s, \pi, z) f(z)\,dz.\end{gathered} \tag{7.9}$$

Это уравнение дает нам возможность определить $f(\pi+s)$ для $0 \leqslant s \leqslant \pi$. В силу формул (4.14) и (4.15)

$$w(s, \pi, \pi+s) = h + \frac{1}{2}\int_0^s [q(s) - q(\pi+s)]\,ds,$$

$$w(s, \pi, \pi-s) = h + \frac{1}{2}\int_0^s [q(s) - q(\pi-s)]\,ds.$$

Поэтому уравнение (7.9) можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered}f'(\pi+s) + \left[h + H + \int_0^s [q(s) - q(\pi+s)]\,ds\right] f(\pi+s) + \\ + \int_{\pi}^{\pi+s} K(s, z) f(z)\,dz = g(s),\end{gathered} \tag{7.10}$$

где

$$K(s, z) = \frac{\partial w}{\partial t}(s, t, z)\Big|_{t=\pi} + w(s, \pi, z), \tag{7.11}$$

$$g(s) = w(s, \pi, \pi - s) f(\pi - s) - f'(\pi - s) - f(\pi - s) - \\ - \int_{\pi - s}^{\pi} K(s, z) f(z)\, dz. \tag{7.12}$$

$K(s, z)$ — известная функция для любых s, z; функция $g(s)$ известна для $0 \leqslant s \leqslant \pi$.

Интегрируя интегро-дифференциальное уравнение (7.10) в пределах от $+0$ до $s > 0$, мы получим интегральное уравнение вида

$$f(\pi + s) - C + \int_0^s L(s, z) f(\pi + z)\, dz = g_1(s), \tag{7.13}$$

где $C = f(\pi + 0)$ — произвольная постоянная величина, $L(s, z)$ и $g_1(s)$ — известные функции. Уравнение (7.13) имеет решение при любом значении C.

Если, в частности, $C = f(\pi - 0)$, то из уравнения (7.13) при $s \to +0$ получим:

$$f(\pi + 0) = f(\pi - 0) \tag{7.14}$$

и, значит, продолженная функция $f(z)$ в точке $z = \pi$ непрерывна. Исследуем теперь непрерывность производных. Полагая в уравнении (7.9) $s = +0$, мы получим, используя (7.14),

$$[f'(\pi + 0) + f'(\pi - 0)] + 2Hf(\pi) = 0. \tag{7.15}$$

Если функция $f(z)$ удовлетворяет граничному *) условию

$$f'(\pi - 0) + Hf(\pi) = 0, \tag{7.16}$$

то из (7.15) и (7.16) мы получим:

$$f'(\pi + 0) + Hf(\pi) = f'(\pi + 0) - f'(\pi - 0) = 0,$$

т. е.

$$f'(\pi + 0) = f'(\pi - 0).$$

---

*) Условие (7.16) необходимо, так как оно получается из условия (7.5) при $s = 0$.

Поэтому если $f(z)$ удовлетворяет условию (7.16), то продолженная функция имеет непрерывную первую производную. Остается исследовать поведение второй производной. С этой целью продифференцируем равенство (7.9) по s. Получим:

$$[f''(\pi+s)-f''(\pi-s)]+\left[\frac{dw}{ds}(s,\ \pi,\ \pi+s)f(\pi+s)+\right.$$
$$+w(s,\ \pi,\ \pi+s)f'(\pi+s)-\frac{dw}{ds}(s,\ \pi,\ \pi-s)f(\pi-s)+$$
$$+w(s,\ \pi,\ \pi-s)f'(\pi-s)]+\frac{\partial w}{\partial t}(s,\ t,\ z)\Big|_{\substack{t=\pi\\ z=\pi+s}}f(\pi+s)+$$
$$+\frac{\partial w}{\partial t}(s,\ t,\ z)\Big|_{\substack{t=\pi\\ z=\pi-s}}f(\pi-s)+\int\limits_{\pi-s}^{\pi+s}\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial s}(s,\ t,\ z)\Big|_{t=\pi}\times$$
$$\times f(z)\,dz+H[f'(\pi+s)-f'(\pi-s)]+$$
$$+H[w(s,\ \pi,\ s+\pi)f(\pi+s)+w(s,\ \pi,\ \pi-s)f(\pi-s)]+$$
$$+\int\limits_{\pi-s}^{\pi+s}\frac{\partial w}{\partial s}(s,\ \pi,\ z)f(z)\,dz=0.$$

Полагая $s=+0$, мы получим (используя формулы (4.12) и (4.13)):

$$[f''(\pi+0)-f''(\pi-0)]+2hf'(\pi)+2\frac{\partial w}{\partial t}(0,\ t,\ \pi)\Big|_{t=\pi}\times$$
$$\times f(\pi)+2hHf(\pi)=0.$$

Так как $f'(\pi)=-Hf(\pi)$, то из последнего равенства следует:

$$[f''(\pi+0)-f''(\pi-0)]+2\frac{\partial w}{\partial t}(0,\ t,\ \pi)\Big|_{t=\pi}f(\pi)=0. \tag{7.17}$$

Если мы докажем, что

$$\frac{\partial w}{\partial t}(0,\ t,\ \pi)\Big|_{t=\pi}=0, \tag{7.18}$$

то из (7.17) будет следовать непрерывность второй производной.

3. Доказательство равенства (7.18). Дифференцируя равенство (4.4), в котором $f(t)$ выбирается из класса

$C^2(-\infty, \infty)$, по t, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}[f'(t+s) + f'(t-s)] + \frac{1}{2}[w(s, t, t+s) f(t+s) - \\ - w(s, t, t-s) f(t-s)] + \frac{1}{2}\int\limits_{t-s}^{t+s} \frac{\partial w}{\partial t}(s, t, z) f(z)\, dz.$$

Дифференцируя теперь по s, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial s} = \frac{1}{2}[f''(t+s) - f''(t-s)] + \\ + \frac{1}{2}\Big[\frac{dw}{ds}(s, t, t+s) f(t+s) + w(s, t, t+s) f'(t+s) - \\ - \frac{dw}{ds}(s, t, t-s) f(t-s) + \\ + w(s, t, t-s) f'(t-s)\Big] + \\ + \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial w}{\partial t}(s, t, z)\Big|_{z=t+s} f(t+s) + \\ + \frac{\partial w}{\partial t}(s, t, z)\Big|_{z=t-s} f(t-s)\Big] + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{t-s}^{t+s} \frac{\partial^2 w}{\partial t\, \partial s}(s, t, z) f(z)\, dz.$$

Полагая здесь $s = 0$, мы получим:

$$hf'(t) = hf'(t) + \frac{\partial w}{\partial t}(0, t, z)\Big|_{z=t} f(t).$$

Из этого равенства следует:

$$\frac{\partial w}{\partial t}(0, t, z)\Big|_{z=t} = 0$$

и, в частности, при $t = \pi$ — равенство (7.18).

4. Так как задача (7.1) — (7.5) имеет единственное решение, то, повторяя рассуждения § 1, мы докажем, что операторы T^s удовлетворяют всем условиям обобщенного сдвига (в том числе и условию коммутирования). Класс D состоит из функций, удовлетворяющих граничным условиям:

$$f'(+0) - hf(+0) = 0,$$

$$f'(\pi - 0) + Hf(\pi - 0) = 0$$

5. Замечание I. Изложенный метод продолжения применим к более сложной смешанной задаче, в которой вместо уравнения (7.1) имеется уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - r(s)\,u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q(t)\,u. \tag{7.19}$$

Однако в этом случае при продолжении начальной функции $f(t)$ в интервал $(-\pi, 0)$ нельзя опираться на симметричность решения задачи по t и s, которая в случае уравнения (7.19) не имеет места. Функцию $f(z)$ следует продолжать в интервал $(-\pi, 0)$, пользуясь непосредственно граничным условием (7.4), аналогично тому, как мы действовали только сейчас, при продолжении через точку $t = \pi$. (Подробно это продолжение сделано в § 2 следующей главы.)

Замечание II. Мы рассмотрели случай, когда h и H не равны бесконечности. Если же $h = \infty$ или $H = \infty$ (или и то и другое), т. е. одно или оба граничных условия имеют вид

$$u\,\big|_{t=a} = 0 \quad (a = 0 \text{ или } \pi), \tag{7.20}$$

то вместо интегро-дифференциального уравнения мы получим на соответствующем конце интегральное уравнение Вольтерра. Поэтому случай граничного условия (7.20) связан даже с более простым анализом.

§ 8. Сопряженные операторы обобщенного сдвига. Случай всей числовой прямой

1. Пусть

$$X_s(f) = \frac{d^2 f}{ds^2} + \alpha(s)\frac{df}{ds} + \beta(s)\,f,$$

где $\alpha(s)$ — действительная функция, $\beta(s)$ — действительная или комплексная функция, h — произвольное комплексное число. Обозначим через T^s о. о. с., определяемые следующей задачей Коши:

$$X_s u = X_t u, \tag{8.1}$$

$$\left.\begin{aligned} u\,\big|_{s=0} &= f(t), \\ \frac{\partial u}{\partial s}\Big|_{s=0} &= hf(t). \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

Пусть $p(t)$ — произвольная положительная функция. Определим скалярное произведение и сопряженные операторы с помощью равенств

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{g(t)}\,p(t)\,dt, \tag{8.3}$$

$$(T^s f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} T^s f(t)\cdot\overline{g(t)}\,p(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{\tilde{T}^s g(t)}\,p(t)\,dt = (f, \tilde{T}^s g). \tag{8.4}$$

Выведем для функции $v(s, t) = \tilde{T}^s f(t)$ задачу Коши. Начнем с начальных условий. Полагая в равенстве (8.4) $s = 0$, мы получим:

$$(f, g) = (f, \tilde{T}^0 g).$$

Так как функция $f(t)$ произвольна, то отсюда следует:

$$v|_{s=0} = g(t). \tag{8.5}$$

Далее, дифференцируя (8.4) по s и полагая затем $s = 0$, мы получим:

$$(hf, g) = \left(f, \left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{s=0}\right).$$

Поэтому

$$\left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{s=0} = \bar{h} g(t). \tag{8.6}$$

Выведем теперь для функции $v(s, t)$ дифференциальное уравнение. Введем обозначение

$$h(s) = \int_{-\infty}^{\infty} T^s f(t)\cdot\overline{g(t)}\,p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\overline{\tilde{T}^s g(t)}\,p(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{v(s, t)}\,p(t)\,dt.$$

Применяя к $h(s)$ оператор L_s, мы получим, используя (4.7),

$$X_s h(s) = \int_{-\infty}^{\infty} X_s T^s f(t)\,\overline{g(t)}\,p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_t T^s f(t)\,\overline{g(t)}\,p(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} T^s X_t f(t)\cdot\overline{g(t)}\,p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{X_t^* \widetilde{T}^s g(t)}\,p(t)\,dt, \tag{8.7}$$

где X_t^* — оператор, сопряженный для оператора X_t относительно скалярного произведения (8.3). С другой стороны,

$$X_s h(s) = X_s \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{v(s,\,t)}\,p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{\overline{X}_s v(s,\,t)}\,p(t)\,dt, \tag{8.8}$$

где

$$\overline{X}_s(f) = \frac{d^2 f}{ds^2} + \alpha(s)\frac{df}{ds} + \overline{\beta}(s)\,f.$$

Из (8.7) и (8.8) и произвольности функции $f(t)$ следует:

$$X_t^* v = \overline{X}_s v. \tag{8.9}$$

2. Чтобы записать уравнение (8.9) в явном виде, вычислим сопряженный оператор X_t^*. Интегрируя по частям, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f'' + \alpha(t) f' + \beta(t) f)\,\overline{g(t)}\,p(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{\left\{\frac{1}{p(t)}(gp)'' - \frac{1}{p(t)}(\alpha g p)' + \overline{\beta}(t)\,g\right\}}\,p(t)\,dt. \tag{8.10}$$

Поэтому

$$X_t^*(g) = g'' + 2g'\frac{p'}{p} + g\frac{p''}{p} - \alpha' g - \alpha g' - \alpha g\frac{p'}{p} + \overline{\beta} g. \tag{8.11}$$

Так как для о. о. с.

$$\left.\frac{\partial^2 T^s f(t)}{\partial s^2}\right|_{s=0} = X_t(f) \tag{8.12}$$

(см. § 1 гл. II), то, полагая в уравнении (8.1) $s=0$, мы получим, принимая во внимание (8.2) и (8.12),

$$X_t(f)+h\alpha(0)f(t)+\beta(0)f=X_t(f).$$

Отсюда следует:

$$\alpha(0)h+\beta(0)=0. \tag{8.13}$$

Полагая теперь в уравнении (8.9) $s=0$, мы получим, используя (8.6) и (8.13),

$$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right|_{s=0}=X_t^*(g)-[\overline{\alpha(0)h+\beta(0)}]\,g=X_t^*(g). \tag{8.14}$$

3. Потребуем теперь, чтобы сопряженные операторы $\widetilde{T}^s$ удовлетворяли условию (3.8) гл. I, т. е. условию

$$\widetilde{T}_s^r T^s f(t)=T_t^s\widetilde{T}^r f(t). \tag{8.15}$$

Дифференцируя (8.15) дважды по r и полагая затем $r=0$, мы получим, используя (8.14),

$$X_s^* T^s f(t)=T^s X_t^* f(t).$$

Полагая здесь $s=0$, получим:

$$X_s^* T^s f(t)\big|_{s=0}=X_t^* f(t). \tag{8.16}$$

Используя (8.11), (8.12), (8.13) и (8.14), мы получим из (8.16):

$$f''(t)+\alpha(t)f'(t)+\beta(t)f(t)+2\frac{p'(0)}{p(0)}hf(t)+\frac{p''(0)}{p(0)}f(t)-$$
$$-\alpha'(0)f(t)-\alpha(0)hf(t)-\alpha(0)\frac{p'(0)}{p(0)}f(t)+\overline{\beta}(0)f(t)=$$
$$=f''(t)+f'(t)\left[2\frac{p'(t)}{p(t)}-\alpha(t)\right]+$$
$$+f(t)\left[\frac{p''(t)}{p(t)}-\alpha'(t)-\alpha(t)\frac{p'(t)}{p(t)}+\overline{\beta}(t)\right]. \tag{8.17}$$

Так как $f(t)$ — произвольная функция, то из последнего равенства следует:

$$\alpha(t)=2\frac{p'(t)}{p(t)}-\alpha(t) \tag{8.18}$$

и, значит,

$$p(t) = \exp\left\{\int_0^t \alpha(t)\,dt\right\}. \tag{8.19}$$

Подставляя теперь это значение $p(t)$ в (8.17) и принимая во внимание (8.13), мы получим:

$$\beta(t) + \alpha(0)\,h + \bar{\beta}(0) = \bar{\beta}(t). \tag{8.20}$$

Пусть $\beta(t) = q(t) + ir(t)$, где $q(t)$ и $r(t)$ — действительные функции. Тогда из (8.20) следует:

$$r(t) = C,$$

где C — комплексная постоянная. Следовательно, $\beta(t) = q(t) + iC$. Так как к обеим частям уравнения (8.1) можно добавлять член Cu, где C — произвольная комплексная постоянная, то, не нарушая общности, можно предполагать, что $C = 0$, и, следовательно, считать, что $\beta(t)$ — действительная функция.

Остается найти вид оператора X_t^*, если $p(t)$ выбирается по формуле (8.19) и, значит, удовлетворяет уравнению (8.18). Подставляя этот вид $p(t)$ в формулу (8.10), мы получим:

$$X_t^*(g) = g''(t) + \alpha(t)\,g'(t) + \beta(t)\,g = X_t(g),$$

т. е. операторы L_t относительно меры (8.19) самосопряженны.

4. Если h — действительное число, то задача (8.9) — (8.5) — (8.6) совпадает с задачей (8.1)—(8.2) и поэтому операторы T^s самосопряженны (относительно меры (8.19)). Однако при изучении условия (8.15) мы нигде не использовали действительность числа h.

Если число h комплексное, то выполняется условие (8.15), а значит, на функциях класса D выполняется условие коммутирования (см. гл. I, § 3.4, Замечание)

$$T_t^s \tilde{T}^r f(t) = \tilde{T}_t^r T^s f(t). \tag{8.21}$$

Докажем непосредственно, что выполняется условие (8.21) (притом не только для функций класса D).

Введем обозначения:

$$\Phi(s, r, t) = T_t^s \widetilde{T}^r f(t), \quad \Psi(s, r, t) = \widetilde{T}_t^r T^s f(t).$$

Функция Φ является решением следующей задачи Коши:

$$X_s\Phi = X_t\Phi,$$

$$\Phi \Big|_{s=0} = \widetilde{T}^r f(t),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}\Big|_{s=0} = h\widetilde{T}^r f(t).$$

Покажем, что функция Ψ также удовлетворяет этой задаче. Начальные условия проверяются непосредственно.

Проверим уравнение. Предварительно докажем, что для произвольной функции $\varphi(t)$

$$X_t\widetilde{T}^r\varphi(t) = \widetilde{T}^r X_t\varphi(t). \tag{8.22}$$

Обозначим:

$$\widetilde{T}^r X_t\varphi(t) = A(r, t),$$

$$X_t\widetilde{T}^r\varphi(t) = B(r, t).$$

$A(r, t)$ является решением следующей задачи Коши *)

$$X_rA = X_tA,$$

$$A\Big|_{r=0} = X_t\varphi(t),$$

$$\frac{\partial A}{\partial r}\Big|_{r=0} = \bar{h}X_t\varphi(t).$$

Покажем, что функция $B(r, t)$ также удовлетворяет этой задаче. Начальные условия проверяются непосредственно. Проверим уравнение. Мы имеем:

$$X_rB = X_rX_t\widetilde{T}^r\varphi(t) = X_tX_r\widetilde{T}^r\varphi(t) = X_tX_t\widetilde{T}^r\varphi(t) = X_tB.$$

Используя теперь (8.22), мы получим:

$$X_s\Psi = \widetilde{T}_t^r X_s T^s f(t) = \widetilde{T}_t^r X_t T^s f(t) = X_t\Psi,$$

что и требовалось доказать.

---

*) В силу доказанного $X_t^* = \overline{X}_t^* = X_t$.

§ 9. Сопряженные операторы обобщенного сдвига. Случай полупрямой и конечного отрезка

1. Из результатов предыдущего параграфа, в частности, ясно, что при изучении сопряженных операторов, удовлетворяющих условию (8.15), можно ограничиться случаем оператора

$$X_s(f) = \frac{d^2 f}{ds^2} - q(s) f \tag{9.1}$$

с действительным коэффициентом $q(s)$. В этом случае мера $p(t)$ совпадает с мерой Лебега на прямой линии. Поэтому в дальнейшем при изучении сопряженных операторов на полупрямой и на конечном отрезке мы ограничимся операторами вида (9.1).

Как мы видели в § 5 этой главы, о. о. с. T^s на полупрямой $(0, \infty)$, порожденные оператором (9.1), определяются как решение следующей смешанной задачи:

$$X_s(u) = X_t u, \tag{9.1^1}$$

$$u\big|_{s=0} = f(t), \tag{9.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} = hf(t), \tag{9.3}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial t} - hu\right)\right|_{t=0} = 0, \tag{9.4}$$

где h, вообще говоря, — комплексное постоянное число. Определим сопряженные операторы $\tilde{T}^s$ с помощью равенства

$$\int_0^\infty T^s f(t) \cdot \overline{g(t)}\, dt = \int_0^\infty f(t)\, \overline{\tilde{T}^s g(t)}\, dt. \tag{9.5}$$

Пусть $f(t)$ равняется нулю в некоторой окрестности точки нуль и в некоторой окрестности точки ∞, а $g(t)$ — произвольная дифференцируемая функция. В этом случае при интегрировании по частям проинтегрированные члены будут обращаться в нуль и поэтому можно повторить выводы предыдущего параграфа. В результате мы покажем, что функция $v(s, t) = \tilde{T}^s g(t)$ удовлетворяет уравнению (по предположению функция $q(t)$ действительна)

$$X_s v = X_t v \tag{9.6}$$

и начальным условиям

$$v|_{s=0} = g(t), \tag{9.7}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{s=0} = \bar{h} g(t). \tag{9.8}$$

Выведем для функции $v(s, t)$ граничное условие в точке $t = 0$.

Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет граничному условию

$$f'(0) = hf(0). \tag{9.9}$$

Интегрируя по частям и используя уравнение (9.6), мы получим:

$$X_s h(s) = \int_0^\infty X_s T^s f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \int_0^\infty T^s X_t f(t)\,\overline{g(t)}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty X_t f(t) \cdot \overline{\tilde{T}^s g(t)}\,dt = \left[f'(0)\,\overline{v(s, t)} - f(0)\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\right]\Bigg|_{t=0} +$$

$$+ \int_0^\infty f(t)\,\overline{X_t \tilde{T}^s g(t)}\,dt = f(0)\left[h\,\overline{v(s, t)} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}(s, t)\right]\Bigg|_{t=0} +$$

$$+ \int_0^\infty f(t)\,\overline{X_s \tilde{T}^s g(t)}\,dt = f(0)\left[h\,\overline{v(s, t)} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}(s, t)\right]\Bigg|_{t=0} + X_s h(s).$$

Так как теперь $f(0)$ может и не равняться нулю, то из последнего равенства для v получается граничное условие

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} - \bar{h} v\right]_{t=0} = 0. \tag{9.10}$$

В частности, полагая в этом равенстве $s = 0$ и используя (9.7), мы получим:

$$g'(0) = \bar{h} g(0). \tag{9.11}$$

Из граничных условий (9.9) и (9.11) следует, что в случае комплексного h операторы T^s и $\tilde{T}^s$ определены на различных функциональных пространствах. Эти пространства совпадают только в случае действительных h. В этом случае задача (9.1^1) — (9.2) — (9.3) — (9.4) совпадает с задачей (9.6) — (9.7) — (9.8) — (9.10) и поэтому операторы T^s самосопряженны, а значит, условия (8.15) и (8.21) выполняются автоматически.

2. В заключение этого параграфа рассмотрим кратко случай конечного интервала $(0, \pi)$. В этом случае о. о. с. определяются из смешанной задачи

$$X_s(u) = X_t u, \tag{9.11}$$

$$u|_{s=0} = f(t), \tag{9.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} = hf(t), \tag{9.3}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial t} - hu\right)\right|_{t=0} = 0, \tag{9.4}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial t} + Hu\right)\right|_{t=\pi} = 0, \tag{9.12}$$

где h и H — пока комплексные постоянные числа. Полагая в (9.4) и (9.12) $s=0$, мы получим, используя (9.2),

$$f'(0) = hf(0), \tag{9.13}$$

$$f'(\pi) = -Hf(\pi). \tag{9.14}$$

Определим сопряженные операторы $\tilde{T}^s$ с помощью равенства

$$\int_0^\pi T^s f(t) \cdot \overline{g(t)}\, dt = \int_0^\pi f(t) \cdot \overline{\tilde{T}^s g(t)}\, dt.$$

Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, нетрудно получить для $v(s, t) = \tilde{T}^s g(t)$ начальные условия:

$$v|_{s=0} = f(t), \tag{9.15}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{s=0} = \bar{h} f(t). \tag{9.16}$$

Далее, если $f(t)$ обращается в нуль в некоторой окрестности точки $t=0$ и в некоторой окрестности точки $t=\pi$, то можно повторить вывод формулы (8.9), и мы получим, что $v(s, t)$ удовлетворяет уравнению

$$X_s v = X_t v. \tag{9.17}$$

Наконец, выведем граничные условия для функции $v(s, t)$. Интегрируя по частям и используя (9.13) и (9.14), мы получим:

$$X_s h(s) = \int_0^\pi X_s T^s f(t) \cdot \overline{g(t)}\, dt = \int_0^\pi T^s X_t f(t) \cdot \overline{g(t)}\, dt =$$

$$= f(0)\left[h\bar{v}(s, t) - \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}(s, t)\right]\Big|_{t=0} -$$

$$- f(\pi)\left[H\bar{v}(s, t) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}(s, t)\right]\Big|_{t=\pi} + X_s h(s).$$

Поэтому для $v(s, t)$ выполняются граничные условия:

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} - \bar{h} v\right]\Big|_{t=0} = 0, \tag{9.18}$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \bar{H} v\right]\Big|_{t=\pi} = 0. \tag{9.19}$$

Полагая в этих равенствах $s = 0$, мы получим, используя (9.2),

$$g'(0) = \bar{h} g(0), \tag{9.20}$$

$$g'(\pi) = -\bar{H} g(\pi). \tag{9.21}$$

Из граничных условий (9.13), (9.14) и (9.20), (9.21) следует, что если хотя бы одно из чисел h и H комплексно, то операторы T^s и $\tilde{T}^s$ определены на различных функциональных пространствах. Эти пространства совпадают только в случае действительных h и H. В этом случае задача (9.1¹), (9.2), (9.3), (9.4), (9.12) совпадает с задачей (9.17), (9.15), (9.16), (9.18), (9.19) и поэтому операторы T^s самосопряженны и, значит, условия (8.15) и (8.21) следуют из условия коммутативности.

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА В ОДНОМЕРНОМ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

§ 1. Доказательство полноты системы собственных функций задачи Штурма — Лиувилля

В §§ 7 и 9 предыдущей главы были рассмотрены операторы обобщенного сдвига T^s, определенные на конечном отрезке $[0, \pi]$. Там было показано, что эти операторы коммутативны, а в действительном случае также и самосопряженны.

Пусть $f(t) \in C^2[0, \pi]$ и удовлетворяет граничным условиям

$$f'(0) - hf(0) = 0, \tag{1.1}$$

$$f'(\pi) + Hf(\pi - 0) = 0, \tag{1.2}$$

где h и H — действительные числа. Тогда функция $T^s f(t)$ (которая определяется как решение задачи (7.1) — (7.5) предыдущей главы) симметрична, т. е.

$$T^s f(t) = T^t f(s). \tag{1.3}$$

Применим к операторам T^s и к интервалу $[0, \pi]$ результаты § 6 гл. I. Там показано, что: 1) существует счетное множество функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots$, удовлетворяющих функциональному уравнению

$$T^s \varphi_n(t) = \varphi_n(s)\, \varphi_n(t), \tag{1.4}$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 = \int_0^{\pi} f^2(t)\, dt, \tag{1.5}$$

где

$$f_n = \int_0^\pi f(t)\,\varphi_n(t)\,dt. \tag{1.6}$$

Покажем, что функции $\varphi_n(t)$ являются собственными функциями задачи Штурма — Лиувилля, т. е. удовлетворяют уравнению

$$\varphi_n'' + [\lambda_n - q(t)]\,\varphi_n = 0, \tag{1.7}$$

где λ_n — постоянные числа, и граничным условиям

$$\varphi_n'(+0) - h\varphi_n(+0) = 0, \tag{1.8}$$

$$\varphi_n'(\pi - 0) + H\varphi_n(\pi - 0) = 0. \tag{1.9}$$

Из (1.4), самосопряженности операторов T^s и условия симметрии (1.3) следует:

$$\varphi_n(s)\,f_n = \int_0^\pi T^s\varphi_n(t)\,f(t)\,dt = \int_0^\pi \varphi_n(t)\,T^t f(s)\,dt.$$

Так как $T^s f(t)$ — дважды дифференцируемая функция, если $f(t)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет условиям (1.1) и (1.2), то из этого равенства следует, что $\varphi_n(s) \in C^2[0, \pi]$, а из граничных условий (7.4)—(7.5) предыдущей главы следует, что $\varphi_n(s)$ удовлетворяет граничным условиям (1.8) и (1.9).

Остается показать, что $\varphi_n(t)$ удовлетворяет уравнению (1.7). Функция $u_n(s, t) = T^s\varphi_n(t)$ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial s^2} - q(s)\,u_n = \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - q(t)\,u_n.$$

Подставляя в это уравнение вместо $u_n(s, t)$ выражение (1.4) и разделяя переменные, мы получим:

$$\frac{\varphi_n''(s) - q(s)\,\varphi_n(s)}{\varphi_n(s)} = \frac{\varphi_n''(t) - q(t)\,\varphi_n(t)}{\varphi_n(t)} = -\lambda_n,$$

откуда следует уравнение (1.7).

Опираясь на равенство (1.5) (которое принято называть равенством Парсеваля или соотношением полноты) и на известные асимптотические формулы для собственных чисел и собственных функций задачи (1.7) — (1.8) — (1.9), можно доказать следующую теорему разложения *).

Теорема 1.1. *Если* $f(t) \in C^2[0, \pi]$ *и удовлетворяет граничным условиям* (1.1) *и* (1.2), *то*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(t), \tag{1.10}$$

причем ряд (1.10) *сходится на отрезке* $[0, \pi]$ *абсолютно и равномерно.*

Опираясь на равенство (1.5), можно также получить различные уточнения теоремы разложения. Нам понадобится в дальнейшем следующая теорема, которую мы приведем здесь без доказательства **).

Теорема 1.2. *Пусть выполняются условия предыдущей теоремы. Тогда*:

1) *Один раз продифференцированный ряд* (1.10) *сходится абсолютно и равномерно на отрезке* $[0, \pi]$ *к* $f'(t)$.

2) *В каждой точке, в которой* $f''(t)$ *удовлетворяет какому-либо локальному условию разложения в ряд Фурье* (например, имеет ограниченную вариацию), *дважды продифференцированный ряд* (1.10) *сходится к* $f''(t)$.

3) *Если* $f''(t)$ *во всех точках отрезка* $[0, \pi]$ *равномерно удовлетворяет условию разложения в ряд Фурье, то дважды продифференцированный ряд* (1.10) *сходится равномерно на отрезке* $[0, \pi]$ *к* $f''(t)$.

§ 2. Решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения

1. Метод продолжения начальной функции, изложенной нами в § 7 предыдущей главы, позволяет построить в явном виде решение самой общей смешанной задачи для одномерного, однородного волнового уравнения.

---

*) См., например, Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям. Гостехиздат, М., 1950, гл. 1.

**) Доказательство см. Б. М. Левитан и И. С. Саргсян, Успехи математических наук, т. XV, вып. 1 (91), 1960, стр. 61, теорема 3.5.1.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - r(s)\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q(t)\, u, \tag{2.1}$$

$$u\big|_{s=0} = f(t), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}\bigg|_{s=0} = kf(t), \tag{2.3}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - hu\right)\bigg|_{t=0} = \varphi(s), \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + Hu\right)\bigg|_{t=\pi} = \psi(s). \tag{2.5}$$

Здесь $r(s)$, $q(t)$ — функции класса $C^1[0, \pi]$, $f(t) \in C^2[0, \pi]$, k, h и H — постоянные числа (могут быть комплексными), $\varphi(s)$, $\psi(s)$ — данные непрерывные функции.

Полагая в уравнении (2.4) $s = 0$, мы получим, используя условие (2.2),

$$f'(0) - hf(0) = \varphi(0). \tag{2.6}$$

Дифференцируя (2.4) по s и полагая затем $s = 0$, мы получим, используя (2.3) и (2.6),

$$\varphi'(0) = k\varphi(0). \tag{2.7}$$

Аналогичным образом из (2.5) можно получить условия:

$$f'(\pi) + Hf(\pi) = \psi(0), \tag{2.8}$$

$$\psi'(0) = k\psi(0). \tag{2.9}$$

Продолжим функции $r(s)$ и $q(t)$ на всю числовую ось с сохранением дифференциального класса, а в остальном как угодно.

Если функцию $f(t)$ также продолжить на всю числовую ось с сохранением дифференциального класса, то решение задачи (2.1) — (2.2) — (2.3) можно представить в виде (см. §§ 3 и 4 предыдущей главы)

$$u(s, t) = \frac{1}{2}[f(t+s) + f(t-s)] + \frac{1}{2}\int_{t-s}^{t+s} w(s, t, z) f(z)\, dz. \tag{2.10}$$

Будем искать решение смешанной задачи в виде (2.10), причем $f(z)$ для $0 \leqslant z \leqslant \pi$ совпадает с начальной функцией (2.2). Для z вне указанного интервала мы определим продолжение $f(z)$ с помощью граничных условий (2.4) и (2.5) (см. § 7 предыдущей главы).

Если $u(s, t)$ определяется по формуле (2.10), то по самому построению этой формулы начальные условия (2.2) и (2.3) выполняются. Мы должны продолжить функцию $f(z)$ так, чтобы функция $u(s, t)$, определенная по формуле (2.10), удовлетворяла граничным условиям (2.4) и (2.5). Чтобы продолжить функцию $f(z)$ в интервал $(-\pi, 0)$, используем граничное условие (2.4). Дифференцируя (2.10) по t, мы получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}[f'(t+s) + f'(t-s)] + \frac{1}{2}[w(s, t, t+s) f(t+s) -$$

$$- w(s, t, t-s) f(t-s)] + \frac{1}{2} \int_{t-s}^{t+s} \frac{\partial w}{\partial t}(s, t, z) f(z)\, dz. \tag{2.11}$$

Подставляя (2.10) и (2.11) в граничное условие (2.4), мы получим уравнение

$$f'(s) + f'(-s) + w(s, 0, s) f(s) - w(s, 0, -s) f(-s) +$$

$$+ \int_{-s}^{s} \frac{\partial w}{\partial t}(s, t, z)\Big|_{t=0} f(z)\, dz - h[f(s) + f(-s)] -$$

$$- h \int_{-s}^{s} w(s, 0, z) f(z)\, dz = 2\varphi(s). \tag{2.12}$$

Функции $w(s, 0, s)$ и $w(s, 0, -s)$ определяются из формул (4.14) и (4.15) предыдущей главы, в которых следует положить $t = 0$. Мы получим:

$$w(s, 0, s) = k + \frac{1}{2} \int_0^s [r(s) - q(s)]\, ds, \tag{2.13}$$

$$w(s, 0, -s) = k + \frac{1}{2} \int_0^s [r(s) - q(-s)]\, ds. \tag{2.14}$$

Уравнение (2.12) является интегро-дифференциальным уравнением с неизвестной функцией $f(-s)$. Перепишем его в виде

$$f'(-s)-[w(s, 0, -s)+h]\,f(-s)+\int_0^s K(s, z)\,f(-z)\,dz=$$
$$=2\varphi(s)-f'(s)-[w(s, 0, s)-h]\,f(s)-\int_0^s K_1(s, z)\,f(z)\,dz, \tag{2.15}$$

причем

$$K(s, z)=-hw(s, 0, -z)+\frac{\partial w}{\partial t}(s, t, -z)\Big|_{t=0},$$
$$K_1(s, z)=-hw(s, 0, z)+\frac{\partial w}{\partial t}(s, t, z)\Big|_{t=0}.$$

Интегрируя обе части уравнения (2.15) по s в пределах от 0 до s, мы получим после изменения порядка интегрирования уравнение вида

$$-f(-s)+C+\int_0^s K_2(s, z)\,f(-z)\,dz=$$
$$=2\int_0^s \varphi(s)\,ds-f(s)+f(+0)-\int_0^s K_3(s, z)\,f(z)\,dz, \tag{2.16}$$

в котором

$$K_2(s, z)=\begin{cases} -[w(z, 0, -z)+h]+\int_z^s K(u, z)\,du, & 0\leqslant z<s, \\ 0 & z>s, \end{cases} \tag{2.17}$$

$$K_3(s, z)=\begin{cases} [w(z, 0, z)-h]+\int_z^s K_1(u, z)\,dz, & 0\leqslant z<s, \\ 0 & z>s. \end{cases} \tag{2.18}$$

Уравнение (2.16) разрешимо при любом постоянном C.

Если взять $C=f(+0)$, то, полагая в уравнении (2.16) $s=+0$, мы получим:

$$f(-0)=f(+0). \tag{2.19}$$

Это равенство показывает, что при указанном выборе постоянной C продолженная функция $f(z)$ непрерывна в интервале $(-\pi, \pi)$.

Исследуем теперь поведение первой и второй производных продолжения в точке $s=0$. Полагая в уравнении (2.12) $s=+0$, мы получим, используя (2.6), (2.13), (2.14) и (2.19)

$$f'(+0)+f'(-0)-2hf(0)=2\varphi(0)=2f'(+0)-2hf(0).$$

Из этого равенства следует:

$$f'(-0)=f'(+0), \tag{2.20}$$

т. е. непрерывность первой производной.

Дифференцируя обе части равенства (2.12) по s, мы получим:

$$\begin{aligned} f''(s)-f''(-s)+\frac{dw}{ds}(s, 0, s)f(s)+w(s, 0, s)f'(s)-\\ -\frac{dw}{ds}(s, 0, -s)f(-s)+w(s, 0, -s)f'(-s)+\\ +\frac{\partial w}{\partial t}(s, t, z)\Big|_{t=0}f(s)+\frac{\partial w}{\partial t}(s, t, -s)\Big|_{t=0}f(-s)+\\ +\int\limits_{-s}^{s}\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial s}(s, t, z)\Big|_{t=0}f(z)\,dz-h[f'(s)-f'(-s)]-\\ -h[w(s, 0, s)f(s)+w(s, 0, -s)f(-s)]-\\ -h\int\limits_{-s}^{s}\frac{\partial w}{\partial s}(s, 0, z)f(z)\,dz=2\varphi'(s). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Полагая здесь $s=+0$, получим, используя (2.13), (2.14), (2.19) и (2.20), а также равенство (7.18) предыдущей главы,

$$f''(+0)-f''(-0)+2kf'(0)-2hkf(0)=2\varphi'(0). \tag{2.22}$$

Из (2.6) и (2.7) следует:

$$2\varphi'(0) = 2k\varphi(0) = 2k[f'(0) - hf(0)].$$

Поэтому из равенства (2.22) следует:

$$f''(-0) = f''(+0),$$

что доказывает непрерывность второй производной продолжения.

Итак, если $f(z) \in C^2[0, \pi]$ и выполняются граничные условия (2.6) и (2.7), то, полагая функцию $f(z)$ в интервале $(-\pi, 0)$ равной решению уравнения (2.16), в котором $C = f(+0)$, мы получим функцию класса $C^2(-\pi, \pi)$.

2. Чтобы продолжить функцию $f(z)$ в интервал $(\pi, 2\pi)$, мы используем граничное условие (2.5). Подставляя (2.10) и (2.11) в граничное условие (2.5), мы получим уравнение

$$f'(\pi+s) + f'(\pi-s) + w(s, \pi, \pi+s) f(\pi+s) -$$
$$- w(s, \pi, \pi-s) f(\pi-s) + \int_{\pi-s}^{\pi+s} \frac{\partial w}{\partial t}(s, t, z)\Big|_{t=\pi} f(z)\,dz +$$
$$+ H[f(\pi+s) + f(\pi-s)] + \int_{\pi-s}^{\pi+s} w(s, \pi, z) f(z)\,dz = 2\psi(s).$$

Это уравнение можно записать в виде

$$f'(\pi+s) + [w(s, \pi, \pi+s) + H] f(\pi+s) +$$
$$+ \int_{\pi}^{\pi+s} K_4(s, z) f(z)\,dz = 2\psi(s) - f'(\pi-s) +$$
$$+ [w(s, \pi, \pi-s) - H] f(\pi-s) - \int_{\pi-s}^{\pi+s} K_4(s, z) f(z)\,dz, \tag{2.23}$$

где

$$K_4(s, z) = \frac{\partial w}{\partial t}(s, t, z)\Big|_{t=\pi} + Hw(s, \pi, z).$$

Интегрируя уравнение (2.23) по s в пределах от 0 до s, мы получим после несложных преобразований

$$f(\pi+s)-C+\int_0^s K_5(s, z) f(\pi+z)\,dz=$$

$$=2\int_0^s \psi(s)\,ds+f(\pi-s)-f(\pi-0)+\int_0^s K_6(s, z) f(\pi-z)\,dz, \tag{2.24}$$

причем

$$K_5(s, z)=$$

$$=\begin{cases} w(z, \pi, \pi+z)+H+\int\limits_z^s K_4(u, z+\pi)\,du, & \text{если } 0 \leqslant z < s, \\ 0, & \text{если } \quad z > s, \end{cases}$$

$$K_6(s, z)=$$

$$=\begin{cases} w(z, \pi, \pi-z)-H-\int\limits_z^s K_4(u, \pi-z)\,du, & 0 \leqslant z < s, \\ 0, & z > s. \end{cases}$$

Уравнение (2.24) разрешимо при любом C. Если выбрать $C=f(\pi-0)$, то решение этого уравнения дает непрерывное продолжение функции $f(z)$ в интервал $(\pi, 2\pi)$. Далее, если выполняются условия (2.8) и (2.9), то продолжение принадлежит классу $C^2(0, 2\pi)$. Доказательство основывается на уравнении (2.23), и мы его приводить не будем, так как рассуждения вполне аналогичны рассмотренным в предыдущем пункте.

Уравнение (2.24) есть уравнение Вольтерра. Поэтому его решение при $C=f(\pi-0)$ может быть записано в виде

$$f(\pi+s)=f(\pi-s)+2\int_0^s \psi(s)\,ds+2\int_0^s K_7(s, z)\,\psi(z)\,dz+$$

$$+\int_0^s K_8(s, z) f(\pi-z)\,dz, \tag{2.25}$$

где

$$K_7(s, z) = \begin{cases} \int\limits_s^z K_6^*(u, z)\,du, & 0 \leqslant z < s, \\ 0, & z > s. \end{cases}$$

$K_6^*(s, z)$ — ядро, обратное ядру $K_6(s, z)$;

$$K_8(s, z) = \begin{cases} K_6^*(s, z) + K_6(s, z) + \int\limits_z^s K_6^*(s, u) K_6(u, z)\,du, & 0 \leqslant z < s, \\ 0, & z > s. \end{cases}$$

В случае, когда $\psi(s) = 0$, формула (2.25) упрощается и принимает вид

$$f(\pi + s) = f(\pi - s) + \int\limits_0^s K_8(s, z) f(\pi - z)\,dz. \quad (2.26)$$

Формула (2.26) играет в дальнейшем важную роль.

3. Таким образом, мы продолжили начальную функцию $f(z)$ из интервала $[0, \pi]$ в интервалы $[-\pi, 0]$ и $[\pi, 2\pi]$. Это продолжение класса $C^2[-\pi, 2\pi]$. Те же самые интегральные уравнения (2.16) и (2.24) позволяют продолжить начальную функцию дальше. Покажем, например, как получить продолжение в интервал $[-2\pi, -\pi]$. Для этого следует считать, что в уравнении (2.16) s изменяется в интервале $[0, 2\pi]$.

Так как решение уравнения Вольтерра (в случае достаточной дифференцируемости ядра, что в нашем случае справедливо) того же дифференциального класса, что и свободный член, то наше продолжение класса $C^2[-2\pi, 0]$. В интервале $[-\pi, 0]$ переопределения начальной функции не происходит, так как (2.16) есть уравнение Вольтерра. Поэтому наше продолжение класса $C^2[-2\pi, 2\pi]$.

Если теперь предполагать, что в уравнении (2.24) s изменяется в пределах от 0 до 3π, то получим продолжение начальной функции в интервал $[3\pi, 4\pi]$. Это продолжение класса $C^2[-2\pi, 4\pi]$.

Так, шаг за шагом мы можем продолжить начальную функцию на всю числовую ось. Это продолжение класса $C^2(-\infty, \infty)$.

Если это продолжение подставить в формулу (2.10), то в силу самого построения продолжения получим решение задачи (2.1) — (2.5).

4. Допустим, что $f''(s)$ на отрезке $[0, \pi]$ удовлетворяет условию Липшица с показателем α и $\varphi'(s)$ удовлетворяет условию Липшица с тем же показателем α в каждом конечном интервале. Покажем, что для продолжения вторая производная $f''(z)$ в каждом конечном интервале также удовлетворяет условию Липшица с тем же показателем α.

Из интегральных уравнений (2.16) и (2.23) следует, что в проверке нуждаются лишь точки «стыка»: $z=0$ и $z=\pi$.

Рассмотрим, например, точку $z=0$. Для этого в уравнении (2.21) вычтем и добавим $f''(0)$ и уединим член $f''(-s)-f''(0)$.

Дальше простая оценка, которую мы здесь опускаем, показывает, что этот член при $s \to 0$ имеет оценку $O\left(|s|^{\alpha}\right)$, что доказывает наше утверждение.

Аналогично можно исследовать другие дифференциальные свойства продолжения.

5. Случаи граничных условий

$$u(0, s) = \varphi(s), \tag{2.27}$$

$$u(\pi, s) = \psi(s) \tag{2.28}$$

непосредственно не охватываются предыдущим анализом. Однако легко видеть, что эти случаи даже проще рассмотренных.

Выпишем без вывода формулу, аналогичную формуле (2.25) в случае условия (2.28):

$$f(\pi+s) = -f(\pi-s) + 2\int_0^s \psi(s)\,ds + 2\int_0^s K_9(s, z)\psi(z)\,dz + \\ + \int_0^s K_{10}(s, z) f(\pi - z)\,dz, \tag{2.29}$$

причем ядра $K_9(s, z)$ и $K_{10}(s, z)$ могут быть легко выражены через функцию $w(s, t, z)$.

Если в (2.28) $\psi(s)=0$, что соответствует случаю $H=\infty$, то уравнение (2.29) принимает вид

$$f(\pi+s)=-f(\pi-s)+\int_0^s K_{10}(s, z) f(\pi-z)\,dz. \quad (2.30)$$

Замечание. Если в начальном условии (2.3) $k=0$, то начальные условия принимают вид

$$u\big|_{s=0}=f(t),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0}=0.$$

В случае «противоположных» начальных условий

$$u\big|_{s=0}=0,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0}=f(t)$$

вместо формулы (2.10) следует использовать формулу

$$u(s, t)=\frac{1}{2}\int_{t-s}^{t+s} f(z)\,dz+\frac{1}{2}\int_{t-s}^{t+s} w_1(s, t, z) f(z)\,dz.$$

Так как в этой формуле начальная функция стоит под знаком интеграла, то достаточно требовать, чтобы она удовлетворяла следующим условиям:

1) $f(t)\in C^1[0, \pi]$,

2) $f'(0)-hf(0)=\varphi(0)$,

3) $f'(\pi)+Hf(\pi)=\psi(0)$.

§ 3. Обоснование метода Фурье для одномерного волнового уравнения

В предыдущем параграфе было показано, каким образом, используя метод продолжения, можно построить решение смешанной задачи (2.1) — (2.5). От начальной функции мы требовали лишь, чтобы она была класса $C^2[0, \pi]$ и удовлетворяла граничным условиям (2.6) и (2.8). От коэффициентов $r(s)$ и $q(t)$ мы требовали, чтобы они были класса $C^1[0, \pi]$.

В этом параграфе мы рассмотрим тот случай, когда в граничных условиях (2.4) и (2.5) $\varphi(s) = \psi(s) = 0$. Таким образом, рассматривается следующая смешанная задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - r(s)\,u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q(t)\,u, \tag{3.1}$$

$$u\big|_{s=0} = f(t), \tag{3.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} = kf(t), \tag{3.3}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial t} - hu\right)\right|_{t=0} = 0, \tag{3.4}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial t} + Hu\right)\right|_{t=\pi} = 0. \tag{3.5}$$

1. Допустим, что $q(t)$, h и H действительны (а $r(s)$ и k могут быть комплексными). Обозначим через $\varphi_n(t)$ собственную функцию задачи Штурма — Лиувилля

$$\varphi_n'' + \{\lambda_n - q(t)\}\,\varphi_n = 0, \tag{3.6}$$

$$\varphi_n'(0) - h\varphi_n(0) = 0, \tag{3.7}$$

$$\varphi_n'(\pi) + H\varphi_n(\pi) = 0. \tag{3.8}$$

Пусть $u(s, t)$ является решением задачи (3.1) — (3.5). Так как при любом фиксированном s $u(s, t)$ удовлетворяет граничным условиям (3.4) и (3.5), то в силу теоремы 1.1

$$u(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(s)\,\varphi_n(t), \tag{3.9}$$

где

$$c_n(s) = \int_0^{\pi} u(s, t)\,\varphi_n(t)\,dt, \tag{3.10}$$

и ряд (3.9) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0, \pi]$. Вычислим коэффициенты $c_n(s)$. Используя уравнение (3.1), получим:

$$c_n''(s) - r(s)\,c_n(s) = \int_0^\pi \left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - r(s)\,u\right] \varphi_n(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\pi \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q(t)\,u\right] \varphi_n(t)\,dt = \int_0^\pi u\left[\varphi_n'' - q(t)\,\varphi_n\right] dt = -\lambda_n c_n(s).$$

Далее, из начальных условий (3.4) и (3.5) следует:

$$c_n(0) = \int_0^\pi f(t)\,\varphi_n(t)\,dt = f_n,$$

$$c_n'(0) = k \int_0^\pi f(t)\,\varphi_n(t)\,dt = kf_n.$$

Поэтому

$$c_n(s) = f_n \psi_n(s), \tag{3.11}$$

где $\psi_n(s)$ есть решение уравнения

$$\psi'' + \{\lambda_n - r(s)\}\,\psi = 0, \tag{3.12}$$

удовлетворяющее начальным условиям $\psi(0) = 1$, $\psi'(0) = k$.

Подставляя в (3.9) вместо $c_n(s)$ выражение (3.11), получим:

$$u(s,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(t)\,\psi_n(s). \tag{3.13}$$

2. Как известно, метод Фурье заключается в том, что решение задачи (3.1) — (3.5) ищется в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям задачи (3.6) — (3.7) — (3.8). При этом возникают вопросы сходимости полученного ряда, а также возможности однократного и двукратного дифференцирования этого ряда. Исследование этих вопросов называется обоснованием метода Фурье. Полученные нами результаты позволяют обосновать метод Фурье при меньших ограничениях на начальную функцию $f(t)$ и коэффициенты уравнения (3.1), чем те, которые обычно делаются *).

В самом деле, ряд (3.12) сходится абсолютно и равномерно при условиях на $f(t)$, $r(s)$ и $q(t)$, перечисленных

*) См., например, И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, стр. 168, в особенности стр. 177.

в начале этого параграфа, и его сумма является решением смешанной задачи (3.1) — (3.5). Таким образом, в нашем методе нет необходимости в изучении возможности почленного дифференцирования ряда (3.13). В самом деле, это изучение необходимо в том случае, если нам заранее не известно, что ряд (3.13) является решением задачи, и мы должны это еще проверить.

3. Все же вопрос о возможности дифференцирования ряда (3.13) интересен сам по себе и это может понадобиться для других целей. Теорема 1.2 этой главы позволяет довольно хорошо изучить этот вопрос. В самом деле, возможность однократного дифференцирования ряда (3.13) по t следует непосредственно из теоремы 1.2. Однократное дифференцирование по s можно легко обосновать, используя асимптотические формулы для $\psi_n(s)$ и λ_n.

Далее, если $f''(t)$ удовлетворяет всюду на отрезке $[0, \pi]$ какому-либо условию разложения в ряд Фурье (например, условию Липшица), то при любом фиксированном s $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ также удовлетворяет такому условию (см. п. 4 предыдущего параграфа). Поэтому в силу теоремы 1.2 ряд (3.13) можно дифференцировать почленно дважды по t и продифференцированный ряд сходится равномерно к $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Рассмотрим теперь возможность двукратного дифференцирования по s. Из уравнений (3.12), (3.6) и (3.1) следует:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\varphi_n(t)\psi_n''(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\varphi_n(t)[-\lambda_n + r(s)]\psi_n(s) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n\varphi_n(t)\psi_n(s) + r(s)\sum_{n=1}^{\infty} f_n\varphi_n(t)\psi_n(s) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_n\varphi_n''(t)\psi_n(s) - q(t)\sum_{n=1}^{\infty} f_n\varphi_n(t)\psi_n(s) + r(s)\sum_{n=1}^{\infty} f_n\varphi_n(t)\psi_n(s) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q(t)u + r(s)u = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}.$$

Это вычисление доказывает возможность двукратного дифференцирования по s ряда (3.13).

§ 4. Разложение произведения собственных функций двух задач Штурма — Лиувилля

1. Обозначим через $\varphi(t, \lambda)$ решение уравнения

$$\varphi''(t)+\{\lambda-q(t)\}\varphi(t)=0 \qquad (0\leqslant t\leqslant\pi), \tag{4.1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda)=1, \tag{4.2}$$

$$\varphi'(0, \lambda)=h, \tag{4.3}$$

и через $\psi(s, \lambda)$ решение уравнения

$$\psi''+\{\lambda-r(s)\}\psi=0, \tag{4.4}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\begin{aligned}\psi(0, \lambda)&=1,\\ \psi'(0, \lambda)&=k.\end{aligned}\right. \tag{4.5}$$

Здесь h и k — комплексные числа, $q(t)$ и $r(s)$ — комплексные функции класса *) $C^1(0, \pi)$.

Рассмотрим произведение

$$u(s, t)=\psi(s, \lambda)\varphi(t, \lambda).$$

Легко проверить, что эта функция удовлетворяет уравнению (3.1) и начальным условиям (3.2) и (3.3), в которых $f(t)=\varphi(t, \lambda)$. Поэтому, если

$$0\leqslant t-s<t+s\leqslant\pi, \tag{4.6}$$

то в силу формулы (2.10)

$$\psi(s, \lambda)\varphi(t, \lambda)=\frac{1}{2}[\varphi(t+s, \lambda)+\varphi(t-s, \lambda)]+ \\ +\frac{1}{2}\int_{t-s}^{t+s} w(s, t, z)\varphi(z, \lambda)\,dz. \tag{4.7}$$

Формула (4.7) легко распространяется на произвольные t и s, не удовлетворяющие условиям (4.6). Для этого продолжим функции $q(t)$ и $r(s)$ на всю числовую ось

*) Читатель увидит из дальнейшего, что в некоторых случаях достаточно предполагать, что q и r непрерывны или даже суммируемы.

с сохранением дифференциального класса, а в остальном произвольно. Тогда функции $\varphi(t, \lambda)$ и $\psi(s, \lambda)$ также продолжаются на всю числовую ось и очевидно, что для этих продолжений формула (4.7) сохраняется.

Если в формуле (4.7) положить $t=s$, то мы получим:

$$\psi(s, \lambda)\varphi(s, \lambda)=\frac{1}{2}[\varphi(2s, \lambda)+1]+\int_0^{2s} K(s, z)\varphi(z, \lambda)\,dz, \tag{4.8}$$

где

$$K(s, z)=\frac{1}{2}w(s, s, z).$$

Из этой формулы видно, что если $2s>\pi$, то ядро $K(s, z)$ зависит от продолжения коэффициентов $q(t)$ и $r(s)$.

2. Полагая в формуле (4.7) $t=0$, мы получим:

$$\psi(s, \lambda)=\frac{1}{2}[\varphi(s, \lambda)+\varphi(-s, \lambda)]+\int_{-s}^{s} L(s, z)\varphi(z, \lambda)\,dz, \tag{4.9}$$

где

$$L(s, z)=\frac{1}{2}w(s, 0, z).$$

Пусть, в частности, $q(t)=0$ и $h=0$. Тогда $\varphi(t, \lambda)=$ $=\cos\sqrt{\lambda}\,t$ и формула (4.9) принимает вид

$$\psi(s, \lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\,s+\int_0^s L_1(s, z)\cos\sqrt{\lambda}\,z\,dz, \tag{4.10}$$

где

$$L_1(s, z)=L(s, z)+L(s, -z).$$

Рассматривая в уравнении (4.10) $\psi(s, \lambda)$ как известную функцию, а $\cos\sqrt{\lambda}\,s$ — как неизвестную функцию и решая это уравнение относительно $\cos\sqrt{\lambda}\,s$, мы получим:

$$\cos\sqrt{\lambda}\,s=\psi(s, \lambda)-\int_0^s L_2(s, z)\psi(z, \lambda)\,dz. \tag{4.11}$$

Формулы (4.10) и (4.11) играют в дальнейшем весьма важную роль. Другой вывод этих формул будет дан в § 10 этой главы. Там же будет рассмотрен случай граничного условия

$$\psi(0, \lambda) = 0.$$

3. Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля, определяемую начальными условиями (4.2) и (4.3) *) и граничным условием

$$\varphi'(\pi) + H\varphi(\pi) = 0. \tag{4.12}$$

Обозначим через λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ собственные значения этой задачи и через $\varphi_n(t)$ соответствующие собственные функции.

Далее положим:

$$\psi_n(s) = \psi(s, \lambda_n),$$

$$u_n(s, t) = \psi_n(s)\,\varphi_n(t).$$

Функцию $u_n(s, t)$ можно представить по формуле (4.7). Пусть $0 \leqslant s$, $t \leqslant \pi$ и пусть либо $s - t < 0$, либо $s + t > \pi$, либо выполняется и то и другое. Тогда, используя формулы для продолжения $\varphi_n(z)$ вне интервала $(0, \pi)$, рассмотренные в § 2 этой главы, можно область интегрирования в формулах (4.7) и (4.8) свести к интервалу $(0, \pi)$.

Мы рассмотрим это сведение только для случая формулы (4.8), которая в дальнейшем будет использована.

Если $0 < 2s \leqslant \pi$, то непосредственно из формулы (4.8) следует:

$$\psi_n(s)\,\varphi_n(s) = \frac{1}{2}\,[\varphi_n(2s) + 1] + \int_0^{2s} K(s, z)\,\varphi_n(z)\,dz \left(0 < s \leqslant \frac{1}{2}\pi\right). \tag{4.13}$$

---

*) Из начальных условий (4.2), (4.3) следует граничное условие

$$\varphi'(0) - h\varphi(0) = 0.$$

Если $\pi < 2s \leqslant 2\pi$ и $H \neq \infty$, то из формул (2.26) и (4.8) следует:

$$\psi_n(s)\varphi_n(s) = \frac{1}{2}\varphi_n(2s) + \frac{1}{2} + \int_0^\pi K(s, z)\varphi_n(z) + \int_\pi^{2s} K(s, z)\varphi_n(z)\,dz = \frac{1}{2}\varphi_n(2\pi - 2s) + \frac{1}{2} + \int_0^\pi K(s, z)\varphi_n(z)\,dz + \int_0^{2s-\pi} K_8(2s-\pi, z)\varphi_n(\pi - z)\,dz + \int_0^{2s-\pi} K(s, z+\pi)\left[\varphi_n(\pi - z) + \int_0^z K_8(z, u)\varphi_n(\pi - u)\,du\right]dz.$$

Переставляя в последнем интервале порядок интегрирования, мы получим:

$$\psi_n(s)\varphi_n(s) = \frac{1}{2}\varphi_n(2\pi - 2s) + \frac{1}{2} + \int_0^{2s-\pi} K_{11}(s, z)\varphi_n(\pi - z)\,dz + \int_0^\pi K(s, z)\varphi_n(z)\,dz,$$

где

$$K_{11}(s, z) = \begin{cases} K_8(2s-\pi, z) + \displaystyle\int_z^{2s-\pi} K(s, u+\pi)K_8(u, z)\,du, & 0 \leqslant z < 2s-\pi, \\ 0, & z > 2s-\pi. \end{cases}$$

Наконец, заменяя в первом интеграле справа $\pi - z$ на z, мы получим окончательно:

$$\psi_n(s)\varphi_n(s) = \frac{1}{2}\varphi_n(2\pi - 2s) + \frac{1}{2} + \int_{2\pi-2s}^{\pi} K_{12}(s, z)\varphi_n(z)\,dz + \int_0^\pi K(s, z)\varphi_n(z)\,dz, \quad (4.14)$$

где

$$K_{12}(s, z)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant z < 2\pi - 2s, \\ K_{11}(s, \pi - z), & \text{если} \quad 2\pi - 2s < z \leqslant \pi. \end{cases}$$

Если $\pi < 2s \leqslant 2\pi$ и $H=\infty$, то следует использовать формулу (2.30). В результате аналогичных вычислений, мы получим:

$$\psi_n(s)\varphi_n(s) = -\frac{1}{2}\varphi_n(2\pi-2s)+\frac{1}{2}+$$
$$+\int_0^{\pi} K(s, z)\varphi_n(z)\,dz + \int_{2\pi-2s}^{\pi} K_{13}(s, z)\varphi_n(z)\,dz, \qquad (4.15)$$

где $K_{13}(s, z)$ выражается через $K(s, z)$ и $K_{10}(s, z)$.

§ 5. Полнота решений уравнения Штурма — Лиувилля

1. Если в формуле (4.11) заменить $\psi(s, \lambda)$ на $\varphi(s, \lambda)$ и результат подставить в формулу (4.10), то получим формулу вида

$$\psi(s, \lambda)=\varphi(s, \lambda)+\int_0^s K(s, z)\varphi(z, \lambda)\,dz, \qquad (5.1)$$

где

$$K(s, z)=\begin{cases} -L_2^*(s, z)-\int_s^z L_2(s, u)L_2^*(u, z)\,du, & 0 \leqslant s < z, \\ 0, & s > z. \end{cases}$$

Обращая формулу (5.1), получим:

$$\varphi(s, \lambda)=\psi(s, \lambda)-\int_0^s K^*(s, z)\psi(z, \lambda)\,dz. \qquad (5.2)$$

Пусть $\varphi_n(t)=\varphi(t, \lambda_n)$ являются собственными функциями задачи (4.1), (4.2), (4.3), (4.12) при действительных q, h и H. Эти функции в интервале $(0, \pi)$ образуют полную систему. Покажем, что функции $\psi_n(s)=\psi(s, \lambda_n)$, где $\psi(s, \lambda)$ — решение уравнения (4.4), удовлетворяющее начальным условиям

(4.5) с комплексными k и $r(s)$, также образуют полную систему в интервале $(0, \pi)$. В самом деле, пусть

$$\int_0^\pi f(s)\psi_n(s)\,ds = 0. \tag{5.3}$$

Подставляя сюда вместо $\psi_n(s)$ выражение (5.1) (в котором положено $\lambda = \lambda_n$), мы получим:

$$\int_0^\pi f(s)\left[\varphi_n(s) + \int_0^s K(s, z)\varphi_n(z)\,dz\right]ds =$$

$$= \int_0^\pi \left[f(s) + \int_s^\pi K(z, s) f(z)\,dz\right]\varphi_n(s)\,ds = 0.$$

Поэтому в силу полноты системы $\varphi_n(s)$

$$f(s) + \int_s^\pi K(z, s) f(z)\,dz = 0$$

и, значит, $f(s) = 0$ почти всюду.

2. Функции $\varphi_n(s) = \varphi(s, \lambda_n)$ в интервале $(0, a)$ с $a > \pi$ не образуют полной системы, так как последовательность собственных чисел λ_n недостаточно «густа». Рассмотрим вопрос о полноте в интервале $(0, 2\pi)$ функций $\varphi(s, \lambda)$, $\lambda \in E$, где E — некоторое счетное множество значений λ, расположенное на действительной прямой.

Итак, пусть

$$\int_0^{2\pi} f(s)\varphi(s, \lambda)\,ds = 0, \quad \lambda \in E.$$

Из формулы (4.10) следует:

$$\int_0^{2\pi} f(s)\left[\cos\sqrt{\lambda}\,s + \int_0^s L_2(s, z)\cos\sqrt{\lambda}\,z\,dz\right]ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} g(z)\cos\sqrt{\lambda}\,z\,dz = 0 \quad \text{для} \quad \lambda \in E, \tag{5.4}$$

где

$$g(z)=f(z)+\int_{z}^{2\pi} L_2(z, s) f(s) ds. \tag{5.5}$$

Из равенства (5.4) следует, что

$$\int_{0}^{2\pi} g(z) \cos \mu z \, dz = 0 \quad \text{для} \quad \mu \in F, \tag{5.6}$$

причем множество F определяется так: $F=\{\sqrt{\lambda}\}$, $\lambda \in E$.

Обозначим через $N(F)$ число точек множества F, заключенных в интервале $(0, N)$. Известно, что если

$$p(F)=\overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{N(F)}{N} \geqslant 2,$$

то из равенства (5.6) следует, что $g(z)=0$ почти всюду *), и, значит, из (5.5) следует, что $f(z)=0$ почти всюду.

Обозначим через $E_{h, H}$ множество $\{\lambda_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ всех собственных значений задачи (4.1), (4.2), (4.3), (4.12) и через $F_{h, H}$ множество чисел $\{\sqrt{\lambda_n}\}$, $n=1, 2, \ldots$ Из известных асимптотических формул для собственных значений задачи Штурма — Лиувилля следует, что

$$p(F_{h, H})=1. \tag{5.7}$$

Пусть $H_1 \neq H$ и пусть $F_{h, H, H_1}=F_{h, H}+F_{h, H_1}$.

Из свойства перемежаемости собственных значений задачи Штурма — Лиувилля следует **), что множества $F_{h, H}$ и F_{h, H_1} не имеют ни одной общей точки. В силу этого из (5.7) получаем:

$$p(F_{h, H, H_1})=p(F_{h, H})+p(F_{h, H_1})=2.$$

Поэтому из теоремы Левинсона следует

Теорема 5.1. *Обозначим через* $\{\lambda_n\}$ *собственные значения задачи* (4.1), (4.2), (4.3), (4.12) *и через* $\{\lambda_n^*\}$ *собственные значения этой же задачи с заменой* H *на другое*

---

*) Этот результат принадлежит Н. Левинсону [12]. Доказательство теоремы имеется также в книге Б. Я. Левина [46], стр. 536.

**) См., например, Н. Левинсон и Э. Коддингтон, Обыкновенные дифференциальные уравнения, ИЛ, 1958, стр. 229.

действительное число H_1. *Если* $f(s) \in L(0, 2\pi)$ *и*

$$\int_0^{2\pi} f(s)\,\varphi(s, \lambda_n)\,ds = \int_0^{2\pi} f(s)\,\varphi(s, \lambda_n^*)\,ds = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $\varphi(s, \lambda)$ *есть решение уравнения* (4.1), *удовлетворяющее начальным условиям* (4.2) и (4.3), *то* $f(s) = 0$ *почти всюду.*

§ 6. Полнота произведений решений двух задач Штурма—Лиувилля

1. Обозначим, как и в предыдущем параграфе, через $\varphi(t, \lambda)$ решение уравнения (4.1), удовлетворяющее начальным условиям (4.2)—(4.3), и через $\psi(t, \lambda)$ решение уравнения (4.4), удовлетворяющее начальным условиям (4.5).

Далее, пусть $\{\lambda_n\}$ и $\{\lambda_n^*\}$ имеют то же значение, что и в теореме 5.1. Имеет место следующая

Теорема 6.1. *Пусть* $f(s) \in L(0, \pi)$ *и пусть*

$$\int_0^{\pi} f(s)\,\varphi(s, \lambda_n)\,\psi(s, \lambda_n)\,ds = \int_0^{\pi} f(s)\,\varphi(s, \lambda_n^*)\,\psi(s, \lambda_n^*)\,ds = 0$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда $f(s) = 0$ *почти всюду в интервале* $(0, \pi)$.

Доказательство. Используем формулу (4.8), в которой сперва λ заменим на λ_n. Тогда в результате несложных преобразований получим:

$$\int_0^{\pi} f(s)\,\psi(s, \lambda_n)\,\varphi(s, \lambda_n)\,ds =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(s)\left[\varphi(2s, \lambda_n) + 1 + 2\int_0^{2s} K(s, z)\,\varphi(z, \lambda_n)\,dz\right] ds =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{z}{2}\right)\varphi(z, \lambda_n)\,dz + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(s)\,ds +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi(z, \lambda_n)\left[\int_z^{2\pi} K\left(\frac{s}{2}, z\right) f\left(\frac{s}{2}\right) ds\right] dz = 0. \qquad (6.1)$$

Так как при $n \to \infty$ $\varphi(z, \lambda_n) - \cos\sqrt{\lambda_n}\, z \to 0$, то в (6.1) оба интеграла справа стремятся к нулю. Поэтому

$$\int_0^\pi f(s)\,ds = 0$$

и, значит, равенство (6.1) принимает вид

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}f\left(\frac{z}{2}\right) + \int_z^{2\pi} K\left(\frac{s}{2},\ z\right) f\left(\frac{s}{2}\right) ds\right]\varphi(z, \lambda_n)\,dz = 0. \qquad (6.2)$$

Аналогичное равенство имеет место и для λ_n^*. Поэтому из теоремы 5.1 следует, что

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{z}{2}\right) + \int_z^{\pi} K\left(\frac{s}{2},\ z\right) f\left(\frac{s}{2}\right) ds = 0 \qquad (0 \leqslant z \leqslant 2\pi),$$

и так как это уравнение является однородным уравнением Вольтерра, то $f(z/2) = 0$ $(0 \leqslant z \leqslant 2\pi)$ почти всюду, что и требовалось доказать.

2. Если использовать только один спектр задачи Штурма — Лиувилля, то можно доказать полноту произведений собственных функций в интервале половинной длины $(0, \pi/2)$ или $(\pi/2, \pi)$. Вначале рассмотрим интервал $(0, \pi/2)$.

Теорема 6.2. *Пусть $f(s) \in L(0, \pi/2)$ и пусть*

$$\int_0^{\pi/2} f(s)\varphi(s, \lambda_n)\psi(s, \lambda_n)\,ds = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда $f(s) = 0$ почти всюду в интервале $(0, \pi/2)$.

Доказательство. Рассуждая как в предыдущей теореме, получим вместо формулы (6.2)

$$\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}f\left(\frac{z}{2}\right) + \int_z^{\pi} K\left(\frac{s}{2},\ z\right) f\left(\frac{s}{2}\right) ds\right]\varphi(z, \lambda_n)\,dz = 0.$$

Так как функции $\varphi(z, \lambda_n)$ образуют в интервале $(0, \pi)$ полную систему, то из последнего равенства следует:

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{z}{2}\right) + \int_z^\pi K\left(\frac{s}{2}, z\right) f\left(\frac{s}{2}\right) ds = 0$$

и, значит, $f(z/2) = 0$ $(0 \leqslant z \leqslant \pi)$ почти всюду.

3. Если использовать формулу (4.14), то можно доказать полноту произведений $\varphi(s, \lambda_n)\,\psi(s, \lambda_n)$ в интервале $(\pi/2, \pi)$. В самом деле, из этой формулы следует:

$$\int_{\pi/2}^\pi f(s)\,\varphi(s, \lambda_n)\,\psi(s, \lambda_n)\,ds = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^\pi f(s)\,\varphi(2\pi - 2s, \lambda_n)\,ds + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^\pi f(s)\,ds + \int_{\pi/2}^\pi f(s)\left[\int_{2\pi-2s}^\pi K_{12}(s, z)\,\varphi(z, \lambda_n)\,dz\right] ds + \int_{\pi/2}^\pi f(s)\left[\int_0^\pi K(s, z)\,\varphi(z, \lambda_n)\,dz\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\pi f\left(\pi - \frac{z}{2}\right)\varphi(z, \lambda_n)\,dz + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^\pi f(s)\,ds + \int_0^\pi \varphi(z, \lambda_n)\left[\int_{\pi - z/2}^\pi L(s, z)\,f(s)\,ds\right] dz = 0, \tag{6.3}$$

причем

$$L(s, z) = \begin{cases} 0, & \text{если } s < \pi - z/2, \\ K_{12}(s, z), & \text{если } \pi - z/2 < s < \pi/2, \\ K_{12}(s, z) + K(s, z), & \text{если } \pi/2 < s < \pi. \end{cases}$$

Из (6.3) следует, как и прежде,

$$\frac{1}{4} f\left(\pi - \frac{z}{2}\right) + \int_{\pi - z/2}^\pi L(s, z)\,f(s)\,ds = 0 \qquad (0 \leqslant z \leqslant \pi)$$

и, значит, $f(\pi - z/2) = 0$ $(0 \leqslant z \leqslant \pi)$ почти всюду.

4. Обозначим через $\varphi_h(t, \lambda_n)$ решение задачи:

$$y'' + \{\lambda_n - q(t)\} y = 0, \tag{6.4}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{6.5}$$

$$y'(\pi) + hy(\pi) = 0. \tag{6.5^1}$$

Теорема 6.3. *Если $q(\pi - t) = q(t)$, то $\varphi_h^2(t, \lambda_n)$ образуют полную систему в интервале* $(0, \pi)$ *в пространстве функций $f(t)$, удовлетворяющих условию $f(\pi - t) = f(t)$.*

Доказательство. Положим $\omega_h(t, \lambda_n) = \varphi_h(\pi - t, \lambda_n)$. Легко видеть, что $\omega_h(t, \lambda_n)$ также является решением задачи (6.4)—(6.5)—(6.5^1)—(6.6). Поэтому

$$\varphi_h(\pi - t, \lambda_n) = \alpha_n \psi_h(t, \lambda_n). \tag{6.6}$$

Покажем, что

$$\alpha_n = (-1)^{n-1}. \tag{6.7}$$

Вначале покажем, что $\alpha_n = \pm 1$. Полагая в (6.6) $t = \frac{\pi}{2}$, получим:

$$\varphi_h(\pi/2, \lambda_n) = \alpha_n \varphi_h(\pi/2, \lambda_n).$$

Поэтому если $\varphi_h(\pi/2, \lambda_n) \neq 0$, то получаем $\alpha_n = 1$. Если $\varphi_h(\pi/2, \lambda_n) = 0$, то $\varphi_h'(\pi/2, \lambda_n) \neq 0$. Дифференцируя равенство (6.6) по t и полагая затем $t = \pi/2$, получим, что в этом случае $\alpha_n = -1$. Докажем теперь равенство (6.7). В силу теоремы Штурма $\varphi_h(t, \lambda_1)$ на интервале $(0, \pi)$ не имеет нулей, $\varphi_h(t, \lambda_2)$ имеет один нуль и т. д. Так как $\varphi_h(0, \lambda_n) = 1$, то $\operatorname{sign} \varphi_h(\pi, \lambda_n) = (-1)^{n-1}$. Отсюда следует формула (6.7).

Докажем теперь полноту функций $\varphi_h^2(t, \lambda_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Пусть

$$\int_0^\pi f(t)\, \varphi_h^2(t, \lambda_n)\, dt = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6.8}$$

и пусть

$$f(\pi - t) = f(t). \tag{6.9}$$

Покажем, что тогда почти всюду $f(t)=0$. Из (6.6), (6.7), (6.8) и (6.9) следует:

$$\int_0^\pi f(t)\varphi_h^2(t,\lambda_n)\,dt=\int_0^{\pi/2} f(t)\varphi_h^2(t,\lambda_n)\,dt+$$
$$+\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\varphi_h^2(t,\lambda_n)\,dt=\int_0^{\pi/2} f(t)\varphi_h^2(t,\lambda_n)\,dt+$$
$$+\int_0^{\pi/2} f(\pi-t)\varphi_h^2(t,\lambda_n)\,dt=2\int_0^{\pi/2} f(t)\varphi_h^2(t,\lambda_n)\,dt=0.$$

Поэтому из теоремы 6.2 следует, что $f(t)=0$ для $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ и, значит, в силу (6.9) $f(t)=0$ для $0\leqslant t\leqslant\pi$ (почти всюду).

§ 7. Теорема единственности Борга

Результаты предыдущего параграфа хорошо применяются к доказательству теорем единственности для обратной задачи Штурма — Лиувилля в регулярном случае.

1. Обозначим через $S(h, H; q)$ спектр задачи

$$\varphi''+[\lambda-q(t)]\varphi=0\quad(0\leqslant t\leqslant\pi,\ q(t)\in L(0,\pi)),\tag{7.1}$$
$$\varphi'(0)-hy(0)=0,\tag{7.2}$$
$$\varphi'(\pi)+H\varphi(\pi)=0,\tag{7.3}$$

причем h, H и $q(t)$ — действительные.

Наряду с уравнением (7.1) рассмотрим уравнение

$$\psi''+[\lambda-r(t)]\psi=0\qquad(0\leqslant t\leqslant\pi,\ r(t)\in L(0,\pi))\tag{7.4}$$

с действительной $r(t)$. Имеет место следующая теорема единственности.

Теорема 7.1. *Если $S(h, H; q)=S(h, H; r)$ и $S(h, H_1; q)=S(h, H_1; r)$, причем $H_1\neq H$, то почти всюду $q(t)=r(t)$.*

Доказательство. Обозначим элементы множества $S(h, H; q)$ через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ По условию множество

$S(h, H; r)$ также состоит из этих чисел. Таким образом, выполняются следующие уравнения:

$$\varphi''(t, \lambda_n) + \{\lambda_n - q(t)\}\,\varphi(t, \lambda_n) = 0, \tag{7.5}$$

$$\varphi'(0, \lambda_n) - h\varphi(0, \lambda_n) = 0, \tag{7.6}$$

$$\varphi'(\pi, \lambda_n) + H\varphi(\pi, \lambda_n) = 0, \tag{7.7}$$

$$\psi''(t, \lambda_n) + \{\lambda_n - r(t)\}\,\psi(t, \lambda_n) = 0, \tag{7.8}$$

$$\psi'(0, \lambda_n) - h\psi(0, \lambda_n) = 0, \tag{7.9}$$

$$\psi'(\pi, \lambda_n) + H\psi(\pi, \lambda_n) = 0. \tag{7.10}$$

Умножая уравнения (7.5) на $\psi(t, \lambda_n)$, а уравнение (7.8) на $\varphi(t, \lambda_n)$, вычитая одно равенство из другого и интегрируя, мы получим ($\varphi_n(t) = \varphi(t, \lambda_n)$; $\psi_n(t) = \psi(t, \lambda_n)$):

$$(\varphi_n'\psi_n - \varphi_n\psi_n')\Big|_{t=0}^{t=\pi} + \int\limits_0^\pi [r(t) - q(t)]\,\varphi(t, \lambda_n)\,\psi(t, \lambda_n)\,dt = 0. \tag{7.11}$$

Из граничных условий для φ и ψ следует:

$$[\varphi_n'\psi_n - \varphi_n\psi_n']\Big|_{t=0}^{t=\pi} = 0.$$

Поэтому равенство (7.11) принимает вид

$$\int\limits_0^\pi [r(t) - q(t)]\,\varphi(t, \lambda_n)\,\psi(t, \lambda_n)\,dt = 0. \tag{7.12}$$

Аналогичное равенство имеет место для чисел множества $S(h, H_1; q)$ (которое равно множеству $S(h, H_1, r)$). Поэтому из теоремы 6.1 следует, что $r(t) - q(t) = 0$ почти всюду, что и требовалось доказать.

2. Если $h = H$ и $q(\pi - t) = q(t)$; $r(\pi - t) = r(t)$, то для совпадения $q(t)$ и $r(t)$ достаточно совпадения одного спектра. В самом деле, имеет место следующая теорема.

Теорема 7.2. *Пусть $H = h$ и почти всюду*

$$q(\pi - t) = q(t); \quad r(\pi - t) = r(t). \tag{7.13}$$

Если $S(h, h; q) = S(h, h; r)$, то почти всюду $q(t) = r(t)$.

Доказательство. Из (7.12), (6.6) и (6.7) и (7.13) следует:

$$\int_0^{\pi} [r(t) - q(t)]\, \varphi(t, \lambda_n)\, \psi(t, \lambda_n)\, dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [r(t) - q(t)]\, \varphi(t, \lambda_n)\, \psi(t, \lambda_n)\, dt = 0.$$

Поэтому из теоремы 6.2 получаем:

$$r(t) - q(t) = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi/2), \tag{7.14}$$

и, значит, в силу (7.13) равенство (7.14) имеет место в интервале $(0, \pi)$.

Замечание. В следующих параграфах мы увидим, применяя другой метод, что для справедливости теоремы 7.1 достаточно, чтобы $S(h, H; q) = S(h^*, H^*; r)$; $S(h, H_1; q) = S(h^*, H_1^*; r)$. Впрочем, можно показать, что использованный метод также может дать несколько больше, чем получено. А именно, достаточно требовать, чтобы $S(h, H; q) = S(h^*, H; r)$; $S(h, H_1; q) = S(h^*, H_1; r)$.

§ 8. Теорема единственности В. А. Марченко

1. Используя формулы (5.1) и (5.2), В. А. Марченко получил значительно более общую теорему единственности, чем теорема 7.1.

Рассмотрим уравнение

$$y'' + [\lambda - q(t)]\, y = 0, \tag{8.1}$$

в котором функция $q(t)$ действительна и суммируема в каждом интервале $(0, b')$, $b' < b$. Присоединим к уравнению (8.1) в точке $t = 0$ граничное условие

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{8.2}$$

в котором h — конечное действительное число. Если $h = \infty$, то граничное условие (8.2) следует заменить условием

$$y(0) = 0. \tag{8.2^1}$$

В дальнейшем в целях сокращения мы исключим из рассмотрения условие (8.2^1), однако доказываемые ниже результаты легко могут быть перенесены на случай условия (8.2^1).

Если $b<\infty$ и функция $q(t)$ в окрестности точки $t=b$ суммируема, то задача, порождаемая уравнением (8.1), называется регулярной. В этом случае, кроме условия (8.2^1), необходимо задать еще граничное условие в точке $t=b$:

$$y'(b)+Hy(b)=0, \tag{8.3}$$

где H — действительное число.

Если же либо $b=\infty$, либо функция $q(t)$ в окрестности точки $t=b$ не суммируема (либо и то и другое), то могут быть два случая:

I. В точке b не задается никакого граничного условия.

II. В точке b задается граничное условие.

Первый случай совпадает с так называемым случаем предельной точки, а второй — со случаем предельного круга *).

Теорема разложения по собственным функциям для задачи (8.1)—(8.2) может быть сформулирована следующим образом:

Существует, по крайней мере, одна (в случае предельной точки в точности одна) монотонная функция $\rho(\lambda)$ $(-\infty< <\lambda<\infty)$ (в дальнейшем эта функция называется спектральной функцией задачи (8.1)—(8.2)), обладающая следующими свойствами.

1) Для любой функции $f(t)\in L^2(0, b)$ существует функция $E(\lambda)$, определенная равенством

$$\lim_{b'\to b}\int_{-\infty}^{\infty}\left[E(\lambda)-\int_0^{b'}f(t)\varphi(t, \lambda)\,dt\right]d\rho(\lambda)=0; \tag{8.4}$$

здесь $\varphi(t, \lambda)$ — решение уравнения (8.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda)=1, \quad \varphi'(0, \lambda)=h. \tag{8.5}$$

Функция $E(\lambda)$ называется преобразованием Фурье функции $f(t)$.

---

*) См., например, Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, Гостехиздат, М., 1950, гл. IV, или Н. Левинсон и Э. Коддингтон, Обыкновенные дифференциальные уравнения, ИЛ, 1958, стр. 243.

В частности, если $f(t)=0$ для $b'<t<b$ (такие функции мы будем называть в дальнейшем финитными), то

$$E(\lambda)=\int_0^{b'} f(t)\varphi(t, \lambda)\, dt.$$

2) Для любой $f(t)\in L^2(0, b)$ имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^b f^2(t)\, dt=\int_{-\infty}^{\infty} E^2(\lambda)\, d\rho(\lambda). \tag{8.6}$$

2. Оказывается, что спектральная функция $\rho(\lambda)$ полностью определяет функцию $q(t)$ и число h из граничного условия (8.2). В самом деле, имеет место весьма общая теорема единственности.

Теорема 8.1. *Пусть $\rho(\lambda)$ является одной из спектральных функций задачи* (8.1)—(8.2) *и $\sigma(\lambda)$ — одной из спектральных функций задачи*

$$y''+\{\lambda-r(t)\}\, y=0, \tag{8.1^1}$$

$$y'(0)-h_1 y(0)=0. \tag{8.2^1}$$

Если $\rho(\lambda)=C\sigma(\lambda)$, где C — постоянная величина, то почти всюду $r(t)=q(t)$ и $h_1=h$.

Доказательство. Обозначим через $\varphi(t, \lambda)$ решение уравнения (8.1), удовлетворяющее начальным условиям (8.5), и через $\psi(t, \lambda)$ решение уравнения (8.1^1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\psi(0, \lambda)=1, \quad \psi'(0, \lambda)=h_1. \tag{8.5^1}$$

В силу формулы (5.1)

$$\psi(t, \lambda)=\varphi(t, \lambda)+\int_0^t K(t, s)\varphi(s, \lambda)\, ds. \tag{8.7}$$

Пусть теперь $f(t)$ — произвольная финитная функция, отличная от нуля в интервале $(0, b')$. Пусть

$$F(\lambda)=\int_0^{b'} f(t)\psi(t, \lambda)\, dt. \tag{8.8}$$

В силу равенства (8.6)

$$\int_0^{b'} f^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)\,d\sigma(\lambda). \tag{8.9}$$

Подставляя в (8.8) вместо $\psi(t, \lambda)$ выражение (8.7), мы получим:

$$F(\lambda) = \int_0^{b'} f(t)\left[\varphi(t, \lambda) + \int_0^t K(t, s)\,\varphi(s, \lambda)\,ds\right]dt =$$

$$= \int_0^{b'} \varphi(t, \lambda)\left[f(t) + \int_t^{b'} K(s, t)\,f(s)\,ds\right]dt =$$

$$= \int_0^{b'} g(t)\,\varphi(t, \lambda)\,dt, \tag{8.10}$$

где

$$g(t) = f(t) + \int_t^{b'} K(s, t)\,f(s)\,ds.$$

Очевидно, что $g(t)$ также финитная функция. Равенство (8.10) показывает, что $F(\lambda)$ есть преобразование Фурье (по функциям $\varphi(t, \lambda)$) функции $g(t)$. Поэтому из равенства Парсеваля (8.6) и равенства (8.9) следует:

$$\int_0^{b'} g^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)\,d\rho(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = \frac{1}{C}\int_0^{b'} f^2(t)\,dt.$$

Отсюда получаем:

$$\int_0^{b'} f^2(t)\,dt = C\int_0^{b'} g^2(t)\,dt.$$

Поэтому оператор

$$Af = \sqrt{C}\left[f(t) + \int_t^{b'} K(s, t)\,f(s)\,ds\right]$$

в пространстве $L^2(0, b')$ унитарен. Для унитарного оператора справедливо равенство

$$A^* = A^{-1}, \tag{8.11}$$

где через A^* обозначен сопряженный оператор, т. е. оператор, удовлетворяющий условию

$$(Af, g) = (f, A^*g),$$

где

$$(f, g) = \int_0^{b'} f(t)\, g(t)\, dt.$$

При помощи изменения порядка интегрирования нетрудно показать, что

$$A^*g = \sqrt{C}\left[g(t) + \int_0^t K(t, s)\, g(s)\, ds\right]. \tag{8.12}$$

Далее, A есть интегральный оператор Вольтерра. Поэтому обратный оператор A^{-1} также является оператором Вольтерра:

$$A^{-1}g = \frac{1}{\sqrt{C}}\left[g(t) + \int_t^{b'} K_1(s, t)\, g(s)\, ds\right]. \tag{8.13}$$

Из (8.11), (8.12) и (8.13) следует, что для любой финитной функции $g(t)$ справедливо равенство

$$C\left[g(t) + \int_0^t K(s, t)\, g(s)\, ds\right] = g(t) + \int_t^{b'} K_1(s, t)\, g(s)\, ds. \tag{8.14}$$

Зафиксируем t и предположим, что для $s > t$ функция $g(s) = 0$, а в остальном произвольна.

В таком случае из равенства (8.14) мы получим:

$$C\left[g(t) + \int_0^t K(t, s)\, g(s)\, ds\right] = g(t)$$

и, следовательно,

$$C = 1, \quad K(t, s) = 0 \quad \text{для } s \leqslant t.$$

Поэтому из (8.7) следует:

$$\psi(t, \lambda) = \varphi(t, \lambda)$$

и, значит, $h_1 = h$ и $r(t) = q(t)$ почти всюду. Теорема доказана.

§ 9. Два следствия из теоремы В. А. Марченко

1. Из теоремы единственности предыдущего параграфа можно вывести большое число различных специальных теорем единственности. В этом параграфе мы рассмотрим две специальные теоремы. Во-первых, мы дадим новое доказательство теоремы 7.1, причем с уточнением, о котором мы говорили в конце § 7 (замечание), и, во-вторых, докажем одну теорему единственности, имеющую важное значение в квантовой теории рассеяния.

Примем обозначения § 7.

Теорема 9.1. *Если* $S(h, H; q) = S(h^*, H^*; r)$ *и* $S(h, H_1; q) = S(h^*, H_1^*; r)$, *причем* $H_1 \neq H$, $H_1^* \neq H^*$, *то* $h = h^*$, $H = H^*$, $H_1 = H_1^*$ *и почти всюду* $r(t) = q(t)$.

Доказательство. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ члены последовательности $S(h, H; q) = S(h^*, H^*; r)$. Если $\varphi(t, \lambda_n)$ — собственные функции первой задачи, а $\psi(t, \lambda_n)$ — собственные функции второй задачи, то

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \left\{ \int_0^\pi \varphi^2(t, \lambda_n)\, dt \right\}^{-1},$$

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \left\{ \int_0^\pi \psi^2(t, \lambda_n)\, dt \right\}^{-1}.$$

Поэтому, если мы докажем, что

$$\int_0^\pi \varphi^2(t, \lambda_n)\, dt = C \int_0^\pi \psi^2(t, \lambda_n)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{9.1}$$

то из теоремы 8.1 будет следовать утверждение теоремы 9.1.

Обозначим через $\varphi(t, \lambda)$ решение уравнения

$$\varphi''(t, \lambda) + \{\lambda - q(t)\}\, \varphi(t, \lambda) = 0, \tag{9.2}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\begin{aligned}\varphi(0)&=1,\\ \varphi'(0)&=h.\end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

Заменяя в уравнении (9.2) λ на μ, получим:

$$\varphi''(t, \mu)+\{\mu-q(t)\}\varphi(t, \mu)=0. \tag{9.4}$$

Умножим уравнение (9.2) на $\varphi(t, \mu)$, а уравнение (9.4) на $\varphi(t, \lambda)$ и вычтем из одного уравнения другое. Мы получим:

$$[\varphi'(t, \lambda)\varphi(t, \mu)-\varphi(t, \lambda)\varphi'(t, \mu)]'+(\lambda-\mu)\varphi(t, \lambda)\varphi(t, \mu)=0.$$

Интегрируя последнее уравнение в пределах $(0, \pi)$, мы получим, учитывая начальные условия (9.3),

$$\frac{\varphi'_t(\pi, \lambda)\varphi(\pi, \mu)-\varphi(\pi, \lambda)\varphi'_t(\pi, \mu)}{\mu-\lambda}=\int_0^\pi \varphi(t, \lambda)\varphi(t, \mu)\,dt.$$

Переходя в этом равенстве к пределу, полагая $\mu\to\lambda$, получим:

$$\int_0^\pi \varphi^2(t, \lambda)\,dt=\varphi'_t(\pi, \lambda)\varphi'_\lambda(\pi, \lambda)-\varphi(\pi, \lambda)\varphi''_{t\lambda}(\pi, \lambda). \tag{9.5}$$

Из формулы (4.10) следует, что при фиксированном t $\varphi(t, \lambda)$ и $\varphi'_t(t, \lambda)$, как функции λ, суть целые аналитические функции порядка $^1/_2$. Поэтому целая функция $\varphi'_t(\pi, \lambda)+$ $+H\varphi(\pi, \lambda)$ разлагается в бесконечное произведение вида

$$\varphi'_t(\pi, \lambda)+H\varphi(\pi, \lambda)=C_1\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)=C_1\Phi_1(\lambda), \tag{9.6}$$

где C_1 — постоянная величина. Аналогично, если $\{\mu_n\}=$ $=S(h, H_1; q)$, то

$$\varphi'_t(\pi, \lambda)+H_1\varphi(\pi, \lambda)=C_2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu_n}\right)=C_2\Phi_2(\lambda). \tag{9.7}$$

Решая систему (9.6) — (9.7) относительно $\varphi'_t(\pi, \lambda)$ и $\varphi(\pi, \lambda)$, найдем:

$$\varphi(\pi, \lambda) = \frac{C_1\Phi_1 - C_2\Phi_2}{H - H_1}, \tag{9.8}$$

$$\varphi'_t(\pi, \lambda) = \frac{H_1C_1\Phi_1 - HC_2\Phi_2}{H_1 - H}. \tag{9.9}$$

Дифференцируя эти уравнения по λ, получим:

$$\varphi'_\lambda(\pi, \lambda) = \frac{C_1\Phi'_1 - C_2\Phi'_2}{H - H_1}, \tag{9.10}$$

$$\varphi''_{t\lambda}(\pi, \lambda) = \frac{H_1C_1\Phi'_1 - HC_2\Phi'_2}{H_1 - H}. \tag{9.11}$$

Подставляя (9.8), (9.9), (9.10) и (9.11) в (9,5), найдем после несложных преобразований:

$$\int_0^\pi \varphi^2(t, \lambda)\,dt = \frac{C_1C_2}{H - H_1}\left(\Phi_1\Phi'_2 - \Phi_2\Phi'_1\right). \tag{9.12}$$

В частности, для $\lambda = \lambda_n$

$$\int_0^\pi \varphi^2(t, \lambda_n)\,dt = -\frac{C_1C_2}{H - H_1}\Phi'_1(\lambda_n)\,\Phi_2(\lambda_n). \tag{9.13}$$

Если спектры, указанные в формулировке теоремы, совпадают, то точно так же можно доказать, что

$$\int_0^\pi \psi^2(t, \lambda_n)\,dt = -\frac{C_1^*C_2^*}{H^* - H_1^*}\Phi'_1(\lambda_n)\,\Phi_2(\lambda_n). \tag{9.14}$$

Из (9.13) и (9.14) следует (9.1), а следовательно, и теорема.

2. Вторая теорема единственности относится к тому случаю, когда в уравнении (8.1) коэффициент $q(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty (1 + t)\,|q(t)|\,dt < \infty. \tag{9.15}$$

Запишем условие (8.2) в виде

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0. \tag{9.16}$$

Если выполняется условие (9.15), то задача (8.1)—(9.16) имеет конечное число отрицательных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, а для $\lambda > 0$ спектр непрерывен, т. е. спектральная функция $\rho(\lambda)$ для $\lambda > 0$ непрерывна. Обозначим $\sqrt{\lambda} = s$. Рассмотрим функцию

$$M_\alpha(s) = i\sin\alpha - \frac{\cos\alpha}{s} + \frac{1}{s}\int_0^\infty q(t)\,e^{-ist}\varphi_\alpha(t, \lambda)\,dt,$$

где $\varphi_\alpha(t, \lambda)$ — решение уравнения (8.1), удовлетворяющее граничному условию (9.16). Функция $M_\alpha(s)$ аналитична в нижней полуплоскости и непрерывна вплоть до вещественной оси. Далее, для $\lambda > 0$ и $t \to \infty$

$$\varphi_\alpha(\lambda, t) = |M_\alpha(s)|\sin(st + \delta_\alpha(s)) + o(1),$$

где

$$\delta_\alpha(s) = \arg M_\alpha(s).$$

$\delta_\alpha(s)$ называется предельной фазой уравнения (8.1). Функция $\rho(\lambda)$ определяется по формуле *)

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{\lambda_k < \lambda} \left\{ \int\limits_0^\infty \varphi_\alpha^2(t, \lambda_k)\,dt \right\}^{-1}, & \lambda < 0, \\ \sum\limits_{\lambda_k < \lambda} \left\{ \int\limits_0^\infty \varphi_\alpha^2(t, \lambda_k)\,dt \right\}^{-1} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\lambda \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}\,|M(\mu)|^2}, & \lambda > 0. \end{cases} \tag{9.17}$$

Теорема 9.2. *Отрицательные собственные значения* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *нормировочные множители*

$$d_k = \int_0^\infty \varphi^2(t, \lambda_k)\,dt \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

---

*) Доказательство перечисленных фактов можно найти, например, в книгах: Титчмарш, Разложение по собственным функциям, ИЛ, 1960 или Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, Гостехиздат, М., 1950.

и предельная фаза $\delta_\alpha(s)$ *однозначно определяют граничное условие* (9.16) *и уравнение* (8.1).

Доказательство. В силу теоремы (8.1) достаточно показать, что перечисленные в теореме данные однозначно определяют функцию $\rho(\lambda)$. Для $\lambda < 0$ это очевидно. Чтобы показать, что это верно и для $\lambda > 0$, следует показать, что предельная фаза $\delta_\alpha(s)$ однозначно определяет функцию $M_\alpha(s)$ для вещественных s. Мы имеем:

$$\ln M_\alpha(s) = \ln |M_\alpha(s)| + i \arg M_\alpha(s).$$

На вещественной оси $\arg M_\alpha(s) = \delta_\alpha(s)$ и, следовательно, по предположению, известен.

Итак, мнимая часть аналитической функции $\ln M_\alpha(s)$ известна на всей вещественной оси $-\infty < t < \infty$. По мнимой части аналитической функции в силу известной формулы

$$\ln M_\alpha(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta_\alpha(t)}{s-t}\, dt$$

восстанавливается и сама функция.

Из этой формулы для вещественных $s = \sigma$ следует:

$$\ln |M_\alpha(\sigma)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta_\alpha(t)}{\sigma-t}\, dt \tag{9.18}$$

и, значит, функция $M_\alpha(\sigma)$ для вещественных σ однозначно определяется по предельной фазе. Это доказывает теорему.

§ 10. Операторы преобразования

1. Формулы (5.1) и (5.2) принято называть операторами преобразования. Эти формулы можно получить, исходя из очень простых алгебраических соображений, которые мы и изложим в этом параграфе.

Пусть A и B — два линейных дифференциальных оператора; E_1 и E_2 — два линейных функциональных пространства.

Линейный непрерывный оператор X, отображающий E_1 в E_2, называется оператором преобразования, если он удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $$AX = XB. \tag{10.1}$$

2) Существует обратный оператор X^{-1}.

В этой главе мы будем рассматривать дифференциальные операторы второго порядка. Точнее, пусть

$$Af = \frac{d^2f}{dt^2} - q(t) f \qquad (0 \leqslant t < b \leqslant \infty), \tag{10.2}$$

$$Bf = \frac{d^2f}{dt^2} - r(t) f \qquad (0 \leqslant t < b \leqslant \infty), \tag{10.3}$$

причем $q(t)$ и $r(t)$ — комплексные функции, суммируемые в каждом интервале $(0 \leqslant t \leqslant b' < b)$. Мы рассмотрим несколько случаев.

1-й случай. $E_1 = C^2(-\infty, \infty)$; $E_2 = E_1$. Оператор X будем искать в виде

$$X(f) = f(t) + \int_{-t}^{t} K(t, s) f(s)\, ds \tag{10.4}$$

с дополнительным условием

$$(Xf)'|_{t=0} = f'(0). \tag{10.5}$$

Вычислим $AX(f)$. Дифференцируя равенство (10.4) по t, мы получим:

$$\frac{d}{dt} X(f) = f'(t) + K(t, t) f(t) + K(t, -t) f(-t) + \\ + \int_{-t}^{t} \frac{\partial K}{\partial t}(t, s) f(s)\, ds. \tag{10.6}$$

Полагая в (10.6) $t = 0$, получим в силу (10.5) и произвольности функции $f(t)$

$$K(0, 0) = 0. \tag{10.7}$$

Дифференцируя еще раз по t, получим:

$$\frac{d^2}{dt^2} X(f) = f''(t) + \frac{dK(t, t)}{dt} f(t) + \frac{dK(t, -t)}{dt} f(-t) + \\ + K(t, t) f'(t) - K(t, -t) f'(-t) + \frac{\partial K}{\partial t}(t, s)\Big|_{s=t} f(t) + \\ + \frac{\partial K}{\partial t}(t, s)\Big|_{s=-t} f(-t) + \int_{-t}^{t} \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(t, s) f(s)\, ds.$$

Поэтому

$$AX(f) = f''(t) + \frac{dK(t,t)}{dt} f(t) + \frac{dK(t,-t)}{dt} f(-t) +$$
$$+ K(t,t) f'(t) - K(t,-t) f'(-t) + \frac{\partial K}{\partial t}(t,s)\Big|_{s=t} f(t) +$$
$$+ \frac{\partial K}{\partial t}(t,s)\Big|_{s=-t} f(-t) + \int_{-t}^{t} \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(t,s) f(s)\,ds -$$
$$- q(t) f(t) - \int_{-t}^{t} q(t) K(t,s) f(s)\,ds. \qquad (10.8)$$

Далее, интегрируя по частям, получим:

$$XB(f) = B(f) + \int_{-t}^{t} K(t,s) B(f)\,ds = f''(t) - r(t) f(t) +$$
$$+ \int_{-t}^{t} K(t,s) f''(s)\,ds - \int_{-t}^{t} K(t,s) r(s) f(s)\,ds =$$
$$= f''(t) - r(t) f(t) + K(t,t) f'(t) - K(t,-t) f'(-t) -$$
$$- \frac{\partial K}{\partial s}(t,s)\Big|_{s=t} f(t) + \frac{\partial K}{\partial s}(t,s)\Big|_{s=-t} f(-t) +$$
$$+ \int_{-t}^{t} \frac{\partial^2 K}{\partial s^2}(t,s) f(s)\,ds - \int_{-t}^{t} K(t,s) r(s) f(s)\,ds. \qquad (10.9)$$

Из (10.1), (10.8) и (10.9) и произвольности функции $f(t)$ следует:

$$\frac{dK}{dt}(t,t) = \frac{1}{2}\{q(t) - r(t)\}, \qquad (10.10)$$

$$\frac{dK}{dt}(t,-t) = 0, \qquad (10.11)$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - q(t) K = \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} - r(s) K. \qquad (10.12)$$

Из (10.10) и (10.7) следует:

$$K(t,t) = \frac{1}{2}\int_{0}^{t} [q(t) - r(t)]\,dt. \qquad (10.13)$$

Из (10.11) и (10.7) следует:

$$K(t, -t) = 0. \tag{10.14}$$

Уравнения (10.12), (10.13) и (10.14) определяют для ядра оператора преобразования $K(t, s)$ задачу Гурса. Эта задача разрешима. Проделывая вычисления в обратном порядке, мы докажем, что оператор (10.4), в котором ядро $K(t, s)$ является решением задачи Гурса (10.12)—(10.13)—(10.14), удовлетворяет соотношению (10.1).

Замечание. Так как область зависимости от краевых условий для задачи Гурса конечна, то вместо интервала $(-\infty, \infty)$ можно рассматривать любой конечный интервал $(-b, b)$.

2-й случай. E_1 есть совокупность дважды непрерывно дифференцируемых функций, определенных на интервале $[0, b)$, $b \leqslant \infty$, удовлетворяющих граничному условию

$$f'(0) - h_1 f(0) = 0,$$

где h_1 — конечное комплексное число.

E_2 есть совокупность дважды непрерывно дифференцируемых функций, определенных на том же интервале $[0, b)$ и удовлетворяющих граничному условию

$$f'(0) - h_2 f(0) = 0, \tag{10.15}$$

в котором h_2 — конечное комплексное число.

Оператор X ищем в виде

$$X(f) = f(t) + \int_0^t K(t, s) f(s)\, ds. \tag{10.16}$$

Повторяя вычисления, проделанные в предыдущем пункте, нетрудно показать, что в этом случае ядро $K(t, s)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - q(t) K = \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} - r(s) K, \tag{10.17}$$

$$K(t, t) = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} \int_0^t [q(t) - r(t)]\, dt, \tag{10.18}$$

$$\left(\frac{\partial K}{\partial s} - h_1 K\right)\Big|_{s=0} = 0. \tag{10.19}$$

Существование и единственность решения для этой задачи мы покажем в конце этого параграфа.

3-й случай. E_1 есть совокупность дважды непрерывно дифференцируемых функций на интервале $[0, b)$, удовлетворяющих граничному условию

$$f(0)=0. \tag{10.20}$$

$E_2=E_1$. Операторы X ищем в виде (10.16). Ядро $K(t, s)$ является решением задачи:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}-q(t)K=\frac{\partial^2 K}{\partial s^2}-r(s)K, \tag{10.21}$$

$$K(t, t)=C+\frac{1}{2}\int_0^t [q(t)-r(t)]\,dt, \tag{10.22}$$

$$K(t, 0)=0, \tag{10.23}$$

где C — произвольное постоянное число. Разрешимость этой задачи мы также покажем в конце параграфа.

4-й случай. В предыдущих случаях предполагалось, что функции $q(t)$ и $r(t)$ суммируемы в окрестности точки $t=0$. Теперь мы предположим, что эти функции суммируемы в окрестности бесконечно удаленной точки $t=\infty$. Для упрощения мы предположим, что $r(t)=0$. Это упрощение можно было бы принять с самого начала параграфа.

В самом деле, если

$$A=\frac{d^2}{dt^2}-q(t), \quad B=\frac{d^2}{dt^2}-r(t), \quad C=\frac{d^2}{dt^2}$$

и X удовлетворяет соотношению

$$AX=XC,$$

Y удовлетворяет соотношению

$$BY=YC,$$

то

$$C=X^{-1}AX=Y^{-1}BY$$

и, следовательно,

$$(YX^{-1})A=B(YX^{-1}),$$

т. е. оператор YX^{-1} является оператором преобразования для A и B.

Итак, пусть

$$A=\frac{d^2}{dt^2}-q(t),$$

причем $(1+t)q(t)\in L(a,\infty)$, $q'(t)\in L(a,\infty)$, $(a>0)$, и пусть

$$B=\frac{d^2}{dt^2}.$$

E_1 есть пространство функций, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $f(t)\in C^2(a,\infty)$,

б) $f(t)$, $f'(t)$ и $f''(t)$ ограничены на полупрямой (a,∞), $E_2=E_1$. Оператор X ищем в виде

$$X(f)=f(t)+\int_t^\infty K(t,s)f(s)\,ds. \tag{10.24}$$

Если ядро $K(t,s)$ удовлетворяет условиям:

$$\int_t^\infty |K(t,s)|\,ds<\infty, \tag{10.25}$$

$$\int_t^\infty \left|\frac{\partial K}{\partial s}(t,s)\right| ds<\infty, \tag{10.25^1}$$

$$\int_t^\infty \left|\frac{\partial^2 K}{\partial s^2}(t,s)\right| ds<\infty, \tag{10.25^2}$$

$$\lim_{s\to\infty} K(t,s)=\lim_{s\to\infty}\frac{\partial K}{\partial s}(t,s)=0, \tag{10.26}$$

$$\int_t^\infty \left|\frac{\partial K}{\partial t}(t,s)\right| ds<\infty, \tag{10.27}$$

$$\int_t^\infty \left|\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(t,s)\right| dt<\infty, \tag{10.27^1}$$

то

$$
\begin{aligned}
AX(f) = f''(t) - q(t)\,f(t) - K(t,\ t)\,f'(t) - {} \\
- \frac{\partial K}{\partial t}(t,\ s)\Big|_{s=t} f(t) - \frac{dK}{dt}(t,\ t)\,f(t) + {} \\
+ \int\limits_t^\infty \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(t,\ s)\,f(s)\,ds - \int\limits_t^\infty q(t)\,K(t,\ s)\,f(s)\,ds;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
XB(f) = f''(t) - K(t,\ t)\,f'(t) + \frac{\partial K}{\partial s}(t,\ s)\,f(t) + {} \\
+ \int\limits_t^\infty \frac{\partial^2 K}{\partial s^2}(t,\ s)\,f(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

Поэтому из (10.1) следует, что ядро $K(t,\ s)$ должно удовлетворять следующим условиям:

$$
\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - q(t)\,K = \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \qquad (s > t), \tag{10.28}
$$

$$
K(t,\ t) = \frac{1}{2}\int\limits_t^\infty q(t)\,dt. \tag{10.29}
$$

Существование решения уравнения (10.28), удовлетворяющее условию (10.29), а также условиям (10.25), (10.25[1]), ... (10.27[1]), будет показано в следующем параграфе.

Замечание 1. Пусть $\psi(t,\ \lambda)$ есть решение уравнения

$$
B\psi = \lambda\psi.
$$

Тогда из (10.1) следует:

$$
\lambda X(\psi) = A(X\psi),
$$

т. е. $\varphi = X\psi$ есть решение уравнения

$$
A\varphi = \lambda\varphi.
$$

В случае 1 ψ может удовлетворять произвольным начальным условиям в точке $t = 0$. В случае 2 $\psi(t,\ \lambda)$ удовлетворяет начальным условиям $\psi(0,\ \lambda) = 1$, $\psi'(0,\ \lambda) = h_1$, а $\varphi(t,\ \lambda)$ — начальным условиям $\varphi(0,\ \lambda) = 1$, $\varphi'(0,\ \lambda) = h_2$. В случае 3 $\psi(0,\ \lambda) = 0$, а $\psi'(0,\ \lambda)$ произвольно. В случае 4

ψ и φ удовлетворяют условиям на бесконечности. Например, если $\psi(t, \lambda) = e^{i\sqrt{\lambda}t}$ $(\lambda > 0)$, то

$$\lim_{t \to \infty} \left[\varphi(t, \lambda) - e^{i\sqrt{\lambda}t}\right] = 0.$$

Замечание 2. Операторы преобразования определяются неоднозначно.

Рассмотрим, например, первый случай, и пусть $r(t) = 0$, т. е. $B = \frac{d^2}{dt^2} = D^2$. Обозначим через Y оператор, удовлетворяющий условию коммутирования

$$D^2 Y = Y D^2,$$

и пусть существует обратный оператор Y^{-1}. Если X — какой-то оператор преобразования для A и B, то легко видеть, что YX также является таким оператором. Операторы Y, очевидно, образуют группу. Описание этой группы (в случае дифференциальных операторов произвольного порядка) и, следовательно, описание всей совокупности операторов преобразования даны в работе Дельсарта и Лионса [8].

2. Существование и единственность решения задачи (10.17)—(10.18)—(10.19) могут быть легко получены, если использовать формулу (2.1) предыдущей главы, которую можно рассматривать как общий вид решения задачи

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - q(t) K = \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} - r(s) K,$$

$$\left(\frac{\partial K}{\partial s} - hK\right)\Big|_{s=0} = 0.$$

При этом $f(t)$ в формуле (2.1) остается произвольной функцией. Для определения этой функции мы используем условие (10.17).

Обозначая правую часть формулы (10.18) через $\varphi(t)$, мы получим для $f(t)$ интегральное уравнение

$$2\varphi(t) = f(2t) + f(0) + \int_0^{2t} L(t, z) f(z)\, dz, \qquad (10.30)$$

где $L(t, z) = w(t, t, z)$. Чтобы определить $f(0)$, положим в уравнении (10.30) $t = 0$. Получим:

$$2(h_2 - h_1) = 2f(0),$$

т. е.

$$f(0) = h_2 - h_1.$$

Уравнение (10.30) есть интегральное уравнение Вольтерра с неизвестной функцией $f(2t)$. Если решение этого уравнения подставить в формулу (2.1) предыдущей главы, то, предполагая функции $q(t)$ и $r(s)$ дифференцируемыми, мы получим решение задачи (10.17) — (10.18) — (10.19). Решение этой задачи единственно, ибо уравнение (10.30) имеет единственное решение. Аналогично можно доказать разрешимость задачи (10.17) — (10.22) — (10.23). В этом случае вместо формулы (2.1) следует использовать формулу

$$K(t, s) = \frac{1}{2}\int_{t-s}^{t+s} f(z)\,dz + \frac{1}{2}\int_{t-s}^{t+s} w(s, t, z) f(z)\,dz,$$

которая дает общее решение уравнения (10.17), удовлетворяющее начальному условию (10.23).

3. Укажем одно интересное применение операторов преобразования. Рассмотрим смешанную задачу

$$L_P u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$u\big|_{t=0} = f(P),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0,$$

$$u\big|_{\Gamma} = 0,$$

где L_P — линейный дифференциальный оператор, заданный в конечной области Ω n-мерного пространства с границей Γ. Пусть мы умеем строить решение $u(P, t)$ этой смешанной задачи. Пусть X — оператор преобразования для операторов $A = \frac{d^2}{dt^2} - q(t)$ и $B = \frac{d^2}{dt^2}$ и пусть $h_1 = h_2 = 0$ (см. 3-й случай). Тогда функция $v(P, t) = X_t\{u(P, t)\}$ является решением следующей задачи:

$$L_P v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q(t) v, \tag{10.31}$$

$$v|_{t=0} = f(P), \tag{10.32}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{10.33}$$

$$v|_{\Gamma} = 0. \tag{10.34}$$

В самом деле,

$$L_P v = L_P X_t u(P, t) = X_t L_P u = X_t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q(t) v.$$

Начальные условия (10.32) и (10.33) и граничное условие (10.34) проверяются непосредственно.

§ 11. Исследование задачи (10.28) — (10.29)

При доказательстве разрешимости задачи (10.17) — (10.18) — (10.19) мы использовали общий вид решения уравнения (10.17), удовлетворяющего дополнительному условию в нуле (10.19). Ясно, что этот вид общего решения непригоден в случае задачи (10.28) — (10.29), в которой дополнительные условия ставятся в бесконечности. В этом параграфе решается задача (10.28) — (10.29).

1. Будем искать решение уравнения

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - q(t) K = \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \qquad (0 \leqslant t < s), \tag{11.1}$$

удовлетворяющее условию

$$K(t, t) = \frac{1}{2} \int_t^{\infty} q(\tau)\, d\tau \tag{11.2}$$

и условиям:

$$\lim_{t \to \infty} K(t, s) = 0, \tag{11.3}$$

$$K(t, s) = 0 \quad \text{для} \quad t > s. \tag{11.4}$$

Мы увидим, что если

$$\int_t^{\infty} \tau\, |q(\tau)|\, d\tau = \sigma_1(t) < \infty, \tag{11.5}$$

то эта задача однозначно разрешима и решение удовлетворяет остальным условиям на бесконечности, указанным в предыдущем параграфе.

Для доказательства разрешимости задачи составим для функции $K(t, s)$ интегральное уравнение.

Рассмотрим вначале неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = F(t, s). \tag{11.6}$$

Пусть $v(t, s, \tau)$ есть решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$v\big|_{t=0} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = F(\tau, s).$$

Тогда, как легко непосредственно проверить, функция

$$z(t, s) = \int_t^\infty v(\tau - t, s, \tau)\, d\tau$$

удовлетворяет уравнению (11.6) и условию (11.3).

Так как

$$v(t, s, \tau) = \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} F(\tau, u)\, du,$$

то

$$z(t, s) = \frac{1}{2} \int_t^\infty d\tau \int_{s+t-\tau}^{s+\tau-t} F(\tau, u)\, du. \tag{11.7}$$

Перепишем теперь уравнение (11.1) в виде

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} = q(t)\, K.$$

Рассматривая правую часть как известную функцию и применяя формулу (11.7), получим, используя условия (11.2) и (11.3),

$$K(t, s)=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}(t+s)}^{\infty} q(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int_{t}^{\infty} d\tau \int_{s+t-\tau}^{s+\tau-t} q(\tau)\,K(\tau, u)\,du. \tag{11.8}$$

Используем теперь условие (11.4).

Если $s+t-\tau>\tau$, т. е. $\tau<\frac{1}{2}(t+s)$, то u также больше τ и, следовательно $K(\tau, u)\neq 0$. Если же $s+t-\tau<\tau$, т. е. $\tau>\frac{1}{2}(t+s)$, то u может быть меньше τ и для этих значений u в силу (11.4) $K(\tau, u)=0$. Поэтому интегральное уравнение (11.8) принимает вид

$$K(t, s)=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}(t+s)}^{\infty} q(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int_{t}^{\frac{1}{2}(t+s)} q(\tau)\,d\tau \int_{s+t-\tau}^{s+\tau-t} K(\tau, u)\,du+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}(t+s)}^{\infty} q(\tau)\,d\tau \int_{\tau}^{s+\tau-t} K(\tau, u)\,du. \tag{11.9}$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что условие (11.2) выполняется.

2. Мы покажем, что уравнение (11.9) можно решить с помощью метода последовательных приближений. С этой целью положим

$$K_0(t, s)=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}(t+s)}^{\infty} q(\tau)\,d\tau,$$

$$K_m(t, s)=\frac{1}{2}\int_{t}^{\frac{1}{2}(t+s)} q(\tau)\,d\tau \int_{s+t-\tau}^{s+\tau-t} K_{m-1}(\tau, u)\,du+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}(t+s)}^{\infty} q(\tau)\,d\tau \int^{s+\tau-t} K_{m-1}(\tau, u)\,du \quad (m=1, 2, \ldots).$$

Справедливы следующие оценки:

$$|K_0(t, s)| \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{1}{2}(t+s)}^{\infty} |q(\tau)|\, d\tau = \frac{1}{2} \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right);$$

$$|K_1(t, s)| \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{t}^{\frac{1}{2}(t+s)} |q(\tau)|\, d\tau \int\limits_{s+t-\tau}^{s+\tau-t} \frac{1}{2} \sigma\left(\frac{\tau+u}{2}\right) du +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{1}{2}(t+s)}^{\infty} |q(\tau)|\, d\tau \int\limits_{\tau}^{s+\tau-t} \frac{1}{2} \sigma\left(\frac{\tau+u}{2}\right) du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sigma\left(\frac{t+s}{2}\right) \int\limits_{t}^{\infty} \tau\, |q(\tau)|\, d\tau = \frac{1}{2} \sigma\left(\frac{t+s}{2}\right) \sigma_1(t),$$

а затем по индукции

$$|K_m(t, s)| \leqslant \frac{1}{2} \sigma\left(\frac{t+s}{2}\right) \frac{\sigma_1^m(t)}{m!} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Из этой оценки и условия (11.5) следует, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} K_m(t, s)$$

сходится абсолютно и равномерно в области $0 < a \leqslant t < s$ при любом $a > 0$ и для его суммы $K(t, s)$ справедливо неравенство

$$|K(t, s)| \leqslant \frac{1}{2} e^{\sigma_1(t)} \sigma\left(\frac{t+s}{2}\right). \tag{11.10}$$

Легко проверить, что полученная таким образом функция $K(t, s)$ удовлетворяет интегральному уравнению (11.9), а если $q(t)$ имеет производную, то и дифференциальному уравнению (11.1) и условиям (11.2) и (11.3).

Так как

$$\int\limits_{t}^{\infty} \sigma(\tau)\, d\tau = \int\limits_{t}^{\infty} d\tau \int\limits_{\tau}^{\infty} |q(x)|\, dx = \int\limits_{t}^{\infty} |q(x)|\, dx \int\limits_{t}^{x} d\tau =$$

$$= \int\limits_{t}^{\infty} (x-t)\, |q(x)|\, dx \leqslant \sigma_1(x),$$

то из оценки (11.10) следует:

$$\int_t^\infty |K(t, s)|\, ds \leqslant \frac{1}{2} e^{\sigma_1(t)} \int_t^\infty \sigma\left(\frac{t+s}{2}\right) ds =$$

$$= e^{\sigma_1(t)} \int_t^\infty \sigma(u)\, du = e^{\sigma_1(t)} \sigma_1(t). \quad (11.11)$$

3. Дифференцируя уравнение (11.9) по t, мы получим:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -\frac{1}{4} q\left(\frac{t+s}{2}\right) - \frac{1}{2} \int_t^{\frac{t+s}{2}} q(\tau) K(\tau, s+t-\tau)\, d\tau -$$

$$-\frac{1}{2} \int_t^\infty q(\tau) K(\tau, s+\tau-t)\, d\tau \qquad (0 < t < s), \quad (11.12)$$

и для $\frac{\partial K}{\partial s}$ имеет место аналогичное равенство. Из (11.12) и оценки (11.10) следует оценка

$$|K_t'(t, s)| \leqslant \frac{1}{4} \left| q\left(\frac{t+s}{2}\right) \right| + \frac{1}{4} e^{\sigma_1(t)} \sigma\left(\frac{t+s}{2}\right) \int_t^{\frac{t+s}{2}} |q(\tau)|\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{4} e^{\sigma_1(t)} \int_t^\infty |q(\tau)|\, \sigma\left(\frac{2\tau+s-t}{2}\right) d\tau \leqslant \frac{1}{4} \left| q\left(\frac{t+s}{2}\right) \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} e^{\sigma_1(t)} \cdot \sigma(t)\, \sigma\left(\frac{t+s}{2}\right).$$

Пользуясь этой оценкой, можно доказать существование интеграла (10.25). Аналогично доказывается существование интегралов (10.25¹), (10.25²), (10.27) и (10.27¹). Из уравнения (11.9) следует:

$$\lim_{(t+s)\to\infty} K(t, s) = 0.$$

Отсюда следует соотношение (10.26).

Замечание. Если функция $q(t)$ не дифференцируема, то решение интегрального уравнения (11.9) является обобщенным решением дифференциального уравнения (11.1). Можно показать, что и в этом случае функция

$$\varphi(t, \lambda) = e^{-i\lambda t} + \int_t^\infty K(t, s)\, e^{-i\lambda s}\, ds \ (\operatorname{Im}\lambda < 0)$$

является решением дифференциального уравнения

$$\varphi'' + \{\lambda^2 - q(t)\}\,\varphi = 0.$$

ГЛАВА V

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

§ 1. Введение

1. Операторы преобразования могут быть применены не только к доказательству теоремы единственности, но и в задаче эффективного построения уравнения по спектральной функции $\rho(\lambda)$. При этом удается выяснить необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $\rho(\lambda)$.

Мы покажем, что ядро оператора преобразования $K(t, s)$ удовлетворяет некоторому линейному интегральному уравнению. Решив это интегральное уравнение, мы найдем функцию $K(t, s)$, а затем по формуле (4.10) предыдущей главы найдем собственные функции уравнения, а значит, и само уравнение вместе с граничными условиями.

Рассмотрим задачу

$$y'' + \{\lambda - q(t)\} y = 0, \tag{1.1}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{1.2}$$

с действительными $q(t)$ и h.

Обозначим через $\varphi(t, \lambda)$ решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda) = 1,$$

$$\varphi'(0, \lambda) = h.$$

Мы видели в предыдущей главе, что существуют непрерывные функции $K(t, s)$ и $K_1(t, s)$, для которых

$$\varphi(t, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\,t + \int_0^t K(t, s)\cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds, \tag{1.3}$$

$$\cos\sqrt{\lambda}\,t = \varphi(t, \lambda) - \int_0^t K_1(t, s)\,\varphi(s, \lambda)\,ds. \tag{1.4}$$

Интегрируя уравнение (1.4) по t в пределах от нуля до произвольного положительного числа a, мы получим:

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,a}{\sqrt{\lambda}} = \int_0^a \varphi(t, \lambda)\left[1 - \int_t^a K_1(t, s)\,ds\right]dt.$$

Эта формула показывает, что функция *) $\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}\,a}{\sqrt{\lambda}}$ есть преобразование Фурье функции

$$K_2(a, t) = \begin{cases} 1 - \displaystyle\int_a^t K_1(t, s)\,ds, & 0 \leqslant t < a, \\ 0, & t > a. \end{cases}$$

Поэтому из равенства Парсеваля (см. § 8 предыдущей главы) следует:

$$\int_0^a K_2^2(a, t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,a}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 d\rho(\lambda).$$

Из этого равенства, в частности, следует, что для любого $a < \infty$ существует интеграл

$$\int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{|\lambda|}\,a}\,d\rho(\lambda) < \infty. \tag{1.5}$$

---

*) Для $\lambda < 0$ $\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}\,a}{\sqrt{\lambda}} = \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{|\lambda|}\,a}{\sqrt{|\lambda|}}$.

§ 2. Вывод линейного интегрального уравнения для ядра оператора преобразования

1. Пусть $\rho(\lambda)$ есть спектральная функция задачи (1.1) — (1.2). Положим

$$\rho(\lambda)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}+\sigma(\lambda) & \text{для } \lambda \geqslant 0,\\ \sigma(\lambda) & \text{для } \lambda<0.\end{cases} \tag{2.1}$$

Функция $\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}$ является спектральной функцией для простейшей задачи:

$$y''+\lambda y=0,$$
$$y'(0)=0.$$

Дальнейшие выводы мы будем делать в предположении, что функция $\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty \lambda\,|d\sigma(\lambda)|<\infty. \tag{2.2}$$

Условие (2.2) намного упрощает все дальнейшие выводы. Однако это условие не является необходимым при изучении обратной задачи. К этому вопросу мы еще вернемся в конце главы.

Если выполняется условие (2.2), то интеграл

$$\int_0^\infty \cos\sqrt{\lambda}\,d\sigma(\lambda) \tag{2.3}$$

сходится абсолютно и равномерно на всей числовой прямой и, следовательно, представляет непрерывную функцию, которую мы будем в дальнейшем обозначать через $a(t)$.

В силу формулы (1.3) функция $\varphi(t,\lambda)$ есть линейная комбинация $\cos\sqrt{\lambda}u$ с $u\leqslant t$. Точно так же в силу формулы (1.4) $\cos\sqrt{\lambda}s$ есть линейная комбинация функций $\varphi(u,\lambda)$ с $u\leqslant s$. Поэтому из символического равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t,\lambda)\varphi(s,\lambda)\,d\rho(\lambda)=\delta(t-s),$$

в котором $\delta(t)$ есть известная функция Дирака, следует, что если $s < t$, то $\cos\sqrt{\lambda}s$ и $\varphi(t, \lambda)$ ортогональны по мере $d\rho(\lambda)$, т. е. для $s < t$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}s\, d\rho(\lambda) = 0 \quad (0 < s < t). \tag{2.4}$$

Подставляя в это равенство вместо $\varphi(t, \lambda)$ выражение (1.3), а вместо $\rho(\lambda)$ разложение (2.1), мы получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}t\cos\sqrt{\lambda}s\,\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} + \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}t\cos\sqrt{\lambda}s\, d\sigma(\lambda) +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}s\left[\int_0^t K(t, u)\cos\sqrt{\lambda}u\, du\right]\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}s\left[\int_0^t K(t, u)\cos\sqrt{\lambda}u\, du\right] d\sigma(\lambda) = 0 \quad (s < t). \tag{2.5}$$

Так как

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}t\cos\sqrt{\lambda}s\,\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \delta(t - s),$$

то из (2.5) и символического равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - s) f(s)\, ds = f(t)$$

следует:

$$f(t, s) + K(t, s) + \int_0^t K(t, u) f(s, u)\, du = 0, \tag{2.6}$$

причем

$$f(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}t\cos\sqrt{\lambda}s\, d\sigma(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \cos\sqrt{\lambda}t\cos\sqrt{\lambda}s\, d\rho(\lambda) + \frac{1}{2}\left[a(t + s) + a(t - s)\right]. \tag{2.7}$$

При фиксированном t уравнение (2.6) является линейным интегральным уравнением Фредгольма с неизвестной функцией $K(t, s)$ $(s < t)$.

§ 3. Разрешимость линейного интегрального уравнения

1. Начиная с этого параграфа, мы будем решать обратную задачу Штурма — Лиувилля. Итак, пусть дана монотонная ограниченная в каждом конечном интервале функция $\rho(\lambda)$ и пусть для $\sigma(\lambda)$ из разложения (2.1) выполняется условие (2.2). Определим функцию $f(t, s)$ по формуле (2.7) и рассмотрим при произвольном фиксированном t интегральное уравнение (2.6). В этом параграфе мы покажем, что уравнение (2.6) разрешимо, а также изучим дифференциальные свойства решения этого уравнения.

Теорема 3.1. *Если функция $\rho(\lambda)$ в некотором конечном интервале имеет бесконечное множество точек роста, то при любом фиксированном t интегральное уравнение* (2.6) *относительно неизвестной функции* $K(t, s)$ *имеет единственное решение.*

Доказательство. Как хорошо известно, для разрешимости уравнения (2.6) достаточно, чтобы однородное уравнение

$$\int_0^t f(s, u)\, h(u)\, du + h(s) = 0 \tag{3.1}$$

не имело решения, отличного от тривиального. Допустим, что уравнение (3.1) имеет нетривиальное решение $h(s)$. Помножим обе части уравнения (3.1) на $h(s)$ и проинтегрируем по s в пределах от 0 до t. Мы получим:

$$\int_0^t \int_0^t h(s)\, h(u)\, f(s, u)\, du\, ds + \int_0^t h^2(s)\, ds = 0.$$

Подставляя в это уравнение вместо $f(s, u)$ выражение (2.7) и используя равенство Парсеваля для косинус-преобразования Фурье, мы получим:

$$\int_0^t\int_0^t h(s)\,h(u)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cos\sqrt{\lambda}\,s\cos\sqrt{\lambda}\,u\,d\sigma(\lambda)\right]ds\,du+\int_0^t h^2(s)\,ds=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma(\lambda)\left[\int_0^t h(s)\cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]\left[\int_0^t h(u)\cos\sqrt{\lambda}\,u\,du\right]+$$

$$+\int_0^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}\left[\int_0^t h(s)\cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]\left[\int_0^t h(u)\cos\sqrt{\lambda}\,u\,du\right]=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}G^2(\lambda)\,d\rho(\lambda)=0, \qquad (3.2)$$

где

$$G(\lambda)=\int_0^t h(s)\cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds. \qquad (3.2^1)$$

Из равенства (3.2) следует, что функция $G(\lambda)$ должна равняться нулю во всех точках роста функции $\rho(\lambda)$, что невозможно, ибо, по предположению, найдется конечный интервал, в котором содержится бесчисленное множество точек роста функции $\rho(\lambda)$, а $G(\lambda)$ — целая аналитическая функция и, следовательно, может иметь лишь изолированные нули.

Итак, $G(\lambda)\equiv 0$ и, значит, по теореме единственности для интегралов Фурье $h(s)=0$ почти всюду, что и доказывает теорему.

2. Изучим теперь свойства решения интегрального уравнения (2.6). Так как $f(t,s)$ — непрерывная функция, то из уравнения (2.6) следует, что при каждом фиксированном t функция $K(t,s)$ для $s\leqslant t$ по переменной t непрерывна. Далее, из того же уравнения с помощью дифференцирования по s следует, что если существуют непрерывные производные $\frac{\partial^r f}{\partial s^r}$ $(r=1, 2, \ldots, n)$, то существуют также непрерывные производные $\frac{\partial^r K}{\partial s^r}$.

3. Несколько сложнее проводится исследование поведения функции $K(t,s)$ по первому аргументу t. Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма. *Пусть дано интегральное уравнение*

$$g(t, a) = h(t, a) + \int_0^1 H(t, s, a) h(s, a) ds, \qquad (3.3)$$

в котором ядро $H(t, s, a)$ и свободный член $g(t, a)$ являются непрерывными функциями параметра a и независимой переменной t. Тогда если при $a = a_0$ однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение, то в некоторой окрестности точки $a = a_0$ решение $h(t, a)$ есть непрерывная функция t и a. Если же H и g имеют n непрерывных производных по a, то столько же производных по a имеет $h(t, a)$.

Доказательство. Положим

$$H(t, s, a) = H(t, s, a_0) + H_1(t, s) = H_0 + H_1,$$

причем $|H_1(t, s)| < \varepsilon$, если a находится в некоторой достаточно малой окрестности точки a_0. Уравнение (3.3) можно символически записать в виде

$$g = h + H_0 h + H_1 h.$$

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор $(E + H_0)^{-1}$, мы получим:

$$(E + H_0)^{-1} g = h + (E + H_0)^{-1} H_1 h. \qquad (3.4)$$

Так как норма оператора $(E + H_0)^{-1} H_1$ может быть сделана сколь угодно малой, то уравнение (3.4) можно решать методом последовательных приближений и лемма доказана.

Применим теперь доказанную лемму к уравнению (2.6). Исследуем поведение решения в окрестности некоторой точки t_0. Заменим в уравнении (2.6) u на ut и s на st. Мы получим уравнение

$$f(t, st) + t \int_0^1 K(t, ut) f(ts, tu) du + K(t, ts) = 0, \qquad (3.5)$$

т. е. интегральное уравнение с ядром $tf(ts, tu)$ и свободным членом $f(t, st)$. Так как $f(t, s)$ — по условию непрерывная функция, то из леммы следует непрерывность функции $K(t, s)$ по совокупности переменных. Далее из той же леммы следует, что $K(t, s)$ по переменной t имеет производные того же порядка, что и функция $f(t, s)$.

Если выполнено условие (2.2), то функция $a(t)$ имеет непрерывную вторую производную. Поэтому $f(t, s)$ имеет непрерывные вторые частные производные и, следовательно, по доказанному для $s \leqslant t$ $K(t, s) \in C^2$.

4. Покажем, что

$$K'_s(t, s)\big|_{s=0} = 0. \tag{3.6}$$

В самом деле, дифференцируя уравнение (2.6) по s, мы получим:

$$K'_s + f'_s + \int_0^t K(t, u) f'_s(s, u)\, du = 0. \tag{3.7}$$

Так как $f'_s(t, s)\big|_{s=0} = 0$, то, полагая в (3.7) $s = 0$, мы получим (3.6).

§ 4. Вывод дифференциального уравнения

1. Пусть

$$\varphi(t, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}\, t + \int_0^t K(t, s) \cos \sqrt{\lambda}\, s\, ds, \tag{4.1}$$

где функция $K(t, s)$ определена в предыдущем параграфе, т. е. является решением интегрального уравнения (2.6). Функция $\varphi(t, \lambda)$ удовлетворяет начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \tag{4.2}$$

$$\varphi'(0, \lambda) = K(0, 0) = h. \tag{4.3}$$

Если мы еще покажем, что функция $\varphi(t, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi'' + \{\lambda - q(t)\}\, \varphi = 0, \tag{4.4}$$

то это и будет означать, что мы решили обратную задачу.

Чтобы вывести уравнение (4.4), положим

$$I(t, s) = K(t, s) + f(t, s) + \int_0^t K(t, u) f(s, u)\, du \equiv 0, \tag{4.5}$$

где

$$f(t, s) = \frac{1}{2}[a(t+s) + a(t-s)] + \int_{-\infty}^{0} \cos\sqrt{\lambda}t \cos\sqrt{\lambda}t\, d\rho(\lambda).$$

Вычислим производные I_{tt} и I_{ss}. Мы имеем:

$$I_t = K_t + f_t + K(t, t) f(t, s) + \int_0^t K_t(t, u) f(u, s)\, du \equiv 0,$$

$$I_{tt} = K_{tt} + f_{tt} + [K(t, t) f(t, s)]'_t + K_t(t, u)\big|_{u=t} f(t, s) + \\ + \int_0^t K_{tt}(t, u) f(u, s)\, du \equiv 0. \quad (4.6)$$

Далее,

$$I_s = K_s + f_s + \int_0^t K(t, u) f_s(u, s)\, du \equiv 0,$$

$$I_{ss} = K_{ss} + f_{ss} + \int_0^t K(t, u) f_{ss}(u, s)\, du \equiv 0.$$

Так как $f_{ss} = f_{uu}$, то, интегрируя дважды по частям, мы получим:

$$I_{ss} = K_{ss} + f_{ss} + K(t, t) f_u(u, s)\big|_{u=t} - K_u(t, u)\big|_{u=t} f(t, s) + \\ + \int_0^t K_{uu}(t, u) f(u, s)\, du \equiv 0, \quad (4.7)$$

при этом мы использовали (3.6).

Далее, для произвольной функции $q(t)$

$$I_{tt} - I_{ss} - q(t) I \equiv 0.$$

Подставляя сюда (4.5), (4.6) и (4.7), мы получим:

$$J(t, s) + \int_0^t J(t, u) f(u, t)\, du + \left[2\frac{dK}{dt}(t, t) - q(t)\right] f(t, s) \equiv 0,$$

где

$$J(t, s) = K_{tt} - K_{ss} - q(t) K.$$

Если положить

$$q(t) = 2\frac{dK}{dt}(t, t),$$

то уравнение для J совпадает с уравнением (3.1) и поэтому $J \equiv 0$. Итак, функция $K(t, s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - q(t)K = \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \tag{4.8}$$

и условиям

$$\frac{dK}{dt}(t, t) = \frac{1}{2}q(t), \tag{4.9}$$

$$\left.\frac{\partial K}{\partial s}(t, s)\right|_{s=0} = 0, \tag{4.10}$$

$$K(0, 0) = h. \tag{4.11}$$

Но, как следует из результатов § 10 предыдущей главы, если выполняются условия (4.8), (4.9), (4.10) и (4.11), то функция $\varphi(t, \lambda)$, определенная по формуле (4.1), удовлетворяет уравнению (4.4) и начальным условиям (4.2) и (4.3).

§ 5. Вывод уравнения Парсеваля

Остается показать, что функция $\rho(\lambda)$ действительно является спектральной функцией задачи (4.4) — (4.2) — (4.3). Обозначим через $g(t)$ произвольную финитную функцию, и пусть функция $\varphi(t, \lambda)$ определена по формуле (4.1). Положим

$$G(\lambda) = \int_0^\infty g(t)\varphi(t, \lambda)\,dt.$$

Мы должны показать, что выполняется равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty g^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^\infty G^2(\lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Это и будет означать, что $\rho(\lambda)$ есть спектральная функция задачи (4.4) — (4.2) — (4.3).

В силу формулы (4.1)

$$\int_0^\infty g(t)\varphi(t, \lambda)\,dt = \int_0^\infty g(t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt +$$

$$+\int_0^\infty g(t)\left[\int_0^t K(t, s)\cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]dt = \int_0^\infty g(t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt +$$

$$+\int_0^\infty \cos\sqrt{\lambda}\,s\left[\int_s^\infty K(t, s)\,g(t)\,dt\right]ds =$$

$$= \int_0^\infty h(t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt, \qquad (5.1)$$

причем мы положили

$$h(t) = g(t) + \int_t^\infty K(s, t)\,g(s)\,ds. \qquad (5.2)$$

Равенство (5.1) означает, что $G(\lambda)$ есть косинус-преобразование Фурье функции $h(t)$.

Далее имеем:

$$\int_{-\infty}^\infty G^2(\lambda)\,d\rho(\lambda) = \int_0^\infty G^2(\lambda)\,d\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}\right) + \int_{-\infty}^\infty G^2(\lambda)\,d\sigma(\lambda) =$$

$$= \int_0^\infty h^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^\infty d\sigma(\lambda)\left[\int_0^\infty h(t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt\right]\times$$

$$\times\left[\int_0^\infty h(s)\cos\sqrt{\lambda}\,s\,dt\right] = \int_0^\infty h^2(t)\,dt +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty h(t)\,h(s)\,f(s, t)\,ds\,dt. \qquad (5.3)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty h(s) f(s, t)\, ds = \int_0^\infty \left[g(s) + \int_s^\infty K(u, s) g(u)\, du \right] f(s, t)\, ds =$$

$$= \int_0^\infty g(s) \left[f(s, t) + \int_0^s K(s, u) f(u, t)\, du \right] ds =$$

$$= - \int_t^\infty g(s) K(s, t)\, ds.$$

Здесь мы использовали интегральное уравнение (2.6) и условие, что $K(s, t) = 0$ для $s < t$.

Поэтому равенство (5.3) принимает вид

$$\int_{-\infty}^\infty G^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_0^\infty h^2(t)\, dt - \int_0^\infty h(t) \left[\int_t^\infty g(s) K(s, t)\, ds \right] dt.$$

Из уравнения (5.2) следует:

$$\int_t^\infty g(s) K(s, t)\, ds = h(t) - g(t).$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^\infty G^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_0^\infty h^2(t)\, dt - \int_0^\infty h(t) [h(t) - g(t)]\, dt = \int_0^\infty g^2(t)\, dt,$$

что и требовалось доказать.

§ 6. Некоторые дальнейшие результаты

а) Условие (2.2) может не выполняться. В этом случае интеграл (2.3) расходится и, следовательно, ядро интегрального уравнения (2.6) нельзя определить так, как мы это сделали. Можно, однако, показать, что развитая нами теория переносится на общий случай.

Имеет место следующая теорема, которую мы приведем здесь без доказательства (см. И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан [36]).

Пусть на всей оси задана монотонная функция $\rho(\lambda)$. *Представим ее в виде* (2.1). *Предположим, что* $\rho(\lambda)$ *удовлетворяет следующим условиям*:

1°. *Для всякого* $t > 0$ *существует интеграл*

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{\lambda} t}\, d\rho(\lambda) < \infty.$$

2°. *Функция*

$$\alpha(t) = \int_{1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{\lambda}\, t}{\lambda}\, d\sigma(\lambda)$$

имеет непрерывную четвертую производную. Тогда существует непрерывная функция $q(t)$ *и такое действительное* h, *что* $\rho(\lambda)$ *является спектральной функцией уравнения* (4.4) *с граничными условиями* (4.2) — (4.3). *Обратно, если функция* $q(t)$ *имеет непрерывную производную, то соответствующая ей спектральная функция* $\rho(\lambda)$ *удовлетворяет условиям* 1° *и* 2°.

Окончательный результат получил М. Г. Крейн [42]. Он показал, что существование у $\alpha(t)$ *суммируемой третьей производной необходимо и достаточно для существования уравнения вида* (4.4) *с суммируемой* $q(t)$, *для которого* $\rho(\lambda)$ *является спектральной функцией*.

б) Изложенный метод решения обратной задачи применим также к тому случаю, когда $\rho(\lambda)$ есть функция скачков с единственной предельной точкой на бесконечности, в частности, к классической задаче Штурма — Лиувилля.

Единственное место, где мы использовали наличие бесконечного числа точек роста функции $\rho(\lambda)$ в конечной области, — это доказательство разрешимости интегрального уравнения (2.6). При этом мы использовали то обстоятельство, что нули функции вида (3.2^1) не могут иметь предельной точки на конечном расстоянии. Можно, однако, использовать при доказательстве разрешимости уравнения (2.6) известную плотность распределения нулей функции вида (3.2^1). Если мы потребуем, чтобы плотность точек роста функции $\rho(\lambda)$ была больше плотности нулей функции (3.2^1) для любого $t > 0$, то это обеспечит нам разрешимость интегрального уравнения (2.6). Подробнее об этом см. цитированную работу И. М. Гельфанда и Б. М Левитана, §§ 9, 10 и 11.

в) В случае, если $(1+t)q(t) \in L(0, \infty)$, можно восстанавливать уравнение по фазе рассеяния, отрицательным собственным значением и коэффициентом нормировки (см. § 9 предыдущей главы). В этом случае можно построить вначале функцию $\rho(\lambda)$ по формуле (9.18) и затем решать обратную задачу по спектральной функции $\rho(\lambda)$.

Значительно более простой путь, дающий намного лучшие результаты,—использовать операторы преобразования с условием на бесконечности (см. §§ 10 и 11 предыдущей главы).

Используя эти операторы, можно составить интегральное уравнение, аналогичное уравнению (2.6), в котором ядро строится непосредственно по предельной фазе $\delta_\alpha(\mu)$. С помощью этого уравнения можно глубоко изучить вопрос о восстановлении дифференциального оператора по предельной фазе, а также указать достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $\delta(\mu)$ для того, чтобы она могла быть предельной фазой некоторого дифференциального уравнения. Подробное изложение этого вопроса читатель может найти в оригинальной монографии З. С. Аграновича и В. А. Марченко [24].

ГЛАВА VI

ОПЕРАТОРЫ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА В СЛУЧАЕ ОДНОМЕРНОГО КОМПЛЕКСНО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ

§ 1. Прямая теорема Ли

1. В этой главе мы рассмотрим тот случай, когда многообразие V_n (см. гл. II, § 1) является одномерным комплексно-аналитическим многообразием, например всей комплексной плоскостью.

Как мы уже отмечали в гл. II, в комплексном случае нельзя предполагать, что выполняется условие (2.2^1) гл. II.

Для простоты мы будем в дальнейшем предполагать, что V_n совпадает со всей комплексной плоскостью K, а операторы обобщенного сдвига определены на целых аналитических функциях.

Совокупность всех целых аналитических функций мы будем в дальнейшем обозначать буквой H.

Пусть для $f(z) \in H$, $z \in K$ определено семейство операторов T^w, $w \in K$, удовлетворяющих условиям 1°, 2° и 3° § 1 гл. I.

Вместо условия 4° мы будем предполагать, что $T^w f(z)$ есть целая аналитическая функция двух комплексных переменных. Не нарушая общности, можно, очевидно, предполагать, что нейтральный элемент w_0 совпадает с точкой $z = 0$.

2. Определим для операторов T^w инфинитезимальные операторы k-го порядка:

$$L_{k,z} f(z) = \left.\frac{\partial^k u(w, z)}{\partial w^k}\right|_{w=0} \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{1.1}$$

$$N_{k,w} f(w) = \left.\frac{\partial^k u(w, z)}{\partial z^k}\right|_{z=0}, \tag{1.2}$$

где $u(w, z) = T^w f(z)$.

Так же как и в § 1 гл. II, можно показать, что имеет место уравнение

$$L_{k,z}u = N_{k,w}u. \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) является аналогом первой прямой теоремы Ли.

Имеют также место следующие условия коммутирования (см. теоремы 1.1 и 1.2, гл. II):

$$L_{k,w}T^w f(z) = T^w L_{k,z} f(z), \tag{1.4}$$

$$N_{k,z}T^w f(z) = T^w N_{k,z} f(z). \tag{1.5}$$

3. Предположим теперь, что операторы T^w могут быть представлены в виде

$$T^w f(z) = \int\limits_{s(z,w)} f(u)\, d_u\sigma(w, z, u), \tag{1.6}$$

где $s(z, w)$ — некоторое множество точек плоскости K, которое при $w \to 0$ стремится к точке z, а $\sigma(w, z, E)$ является вполне аддитивной мерой множества E, зависящей от точек w и z.

Так же как и в § 2 гл. II, покажем, что при некоторых дополнительных предположениях относительно меры σ инфинитезимальные операторы оказываются дифференциальными операторами. Однако в отличие от одномерного действительного случая эти операторы не обязательно не выше второго порядка.

Разложим под интегралом (1.6) функцию $f(u)$ в ряд Тэйлора по степеням $(u - z)$. Мы получим:

$$T^w f(z) = \int\limits_s \Big[f(z) + (u-z) f'(z) + \frac{(u-z)^2}{2!} f''(z) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}(u-z)^n f^{(n)}(z) + O\big(|u-z|^{n+1}\big)\Big] d_u\sigma(w, z, u). \tag{1.7}$$

С другой стороны, разлагая $T^w f(z)$ по степеням w, мы получим, принимая во внимание формулу (1.1),

$$T^w f(z) = f(z) + wL_{1,z} f(z) + \frac{w^2}{2!} L_{2,z} f(z) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{w^n}{n!} L_{n,z} f(z) + o(|w|^n). \tag{1.8}$$

Далее, предположим, что

$$\int_S (u-z)^k \, d_u\sigma(w, z, u) = p_k(z)\, w^n + o(|w|^n), \tag{1.9}$$

$$\int_S |u-z|^{n+1} \, |d_u\sigma(w, z, u)| = o(|w|^n), \tag{1.10}$$

$$\sigma(w, z, S) = 1 + wq_1(z) + \frac{w^2}{2!} q_2(z) + \ldots \\ \ldots + \frac{w^n}{n!} q_n(z) + o(|w|^n), \tag{1.11}$$

где $p_k(z)$ и $q_k(z)$ — целые аналитические функции.

Из (1.7), (1.9), (1.10) и (1.11) следует:

$$T^w f(z) = f(z) + w^n \left[\frac{q_n(z)}{n!} f(z) + p_1(z) f'(z) + \frac{1}{2!} p_2(z) f''(z) + \right. \\ \left. + \ldots + \frac{1}{n!} p_n(z) f^{(n)}(z) \right] + \left[\frac{w^{n-1}}{(n-1)!} q_{n-1}(z) + \ldots \right. \\ \left. \ldots + wq_1(z) \right] f(z) + 0(|w|^n). \tag{1.12}$$

Приравнивая в (1.8) и (1.12) коэффициенты при одинаковых степенях w, мы получим:

$$L_{1,z} f(z) = q_1(z) f(z), \tag{1.13$_1$}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{1.13$_2$}$$

$$L_{n-1,z} f(z) = q_{n-1}(z) f(z), \tag{1.13$_{n-1}$}$$

$$L_{n,z} f(z) = a_0(z) f^{(n)}(z) + a_1(z) f^{(n-1)}(z) + \ldots + \\ + a_{n-1}(z) f'(z) + a_n(z) f(z), \tag{1.14}$$

где $a_k(z)$ — целые аналитические функции. Позже мы увидим, что $q_k(z)$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) в уравнениях (1.13) обязательно постоянные числа.

Чтобы получить вид инфинитезимальных операторов $N_{k,w}$, мы предположим, что для $f(z) \in D$ (см. условие (1.4) гл. I, § 1) существует мера $\sigma^*(w, z, E)$, такая, что

$$T^w f(z) = \int_{S^*} f(u) \, d_u\sigma^*(w, z, u),$$

и для этой меры выполняются условия (1.9), (1.10) и (1.11), в которых w и z переставлены местами и число n, имея в виду общность рассуждений, нужно заменить другим числом m (вскоре мы увидим, что обязательно $m=n$). Тогда, аналогично тому как мы получили уравнения (1.13) и (1.14), мы получим:

$$N_{1,w}f(w)=\tilde{q}_1(w)f(w), \qquad (1.15_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$N_{m-1,w}f(w)=\tilde{q}_{m-1}(w)f(w), \qquad (1.15_{m-1})$$

$$N_{m,w}f(w)=\tilde{a}_0(w)f^{(m)}(w)+\tilde{a}_1(w)f^{(m-1)}(w)+\ldots$$
$$\ldots+\tilde{a}_{m-1}(w)f'(w)+\tilde{a}_m(w)f(w). \qquad (1.16)$$

Лемма 1.1. *В равенствах* (1.13) и (1.15) $n=m$.

Доказательство. Пусть, например, $m<n$. Полагая в равенстве (1.3) $k=m$, мы получим, используя (1.13_m) и (1.16),

$$\tilde{a}_0(w)\frac{\partial^m u}{\partial w^m}+\ldots+\tilde{a}_m(w)u=q_m(z)u.$$

Полагая в этом равенстве $z=0$, мы получим для $f(z)\in D$

$$\tilde{a}_0(w)f^{(m)}(w)+\ldots+\tilde{a}_m(w)f(w)=q_m(0)f(w), \qquad (1.17)$$

что невозможно, так как $f(w)$ — произвольная функция из пространства D, которое по условию бесконечномерно. Пространство же решений уравнения (1.17) конечномерно.

Аналогично доказывается невозможность неравенства $n<m$. Поэтому $m=n$, что и требовалось доказать.

Лемма 1.2. *Функции* $q_k(z)$ *и* $\tilde{q}_k(w)$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ *из уравнений* (1.13_k) *и* (1.15_k) *равны одной и той же постоянной* h_k.

Доказательство. Полагая в (1.3) $k<n$, получим:

$$q_k(z)u=\tilde{q}_k(w)u$$

или, сокращая на функцию u,

$$q_k(z)=\tilde{q}_k(w)=h_k.$$

Лемма 1.3. *Операторы* $L_{n,z}$ *и* $N_{n,w}$ *совпадают.*

Доказательство. Из предыдущего следует, что функция $u(w, z) = T^w f(z)$ является решением следующей задачи Коши:

$$N_{n, w} u = L_{n, z} u, \tag{1.18}$$

$$u|_{w=0} = f(z), \tag{1.18'}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial w^k}\right|_{w=0} = h_k f(z) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{1.19}$$

Эта задача в классе аналитических функций имеет единственное решение.

Обозначим через λ произвольное комплексное число и через $\varphi(z, \lambda)$ произвольное решение уравнения

$$L_{n, z}\varphi = \lambda\varphi. \tag{1.20}$$

Далее, обозначим через $\psi(w, \lambda)$ решение уравнения

$$N_{n, w}\psi = \lambda\psi, \tag{1.21}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\psi(0, \lambda) = 1, \quad \psi^{(k)}(0, \lambda) = h_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{1.22}$$

Легко видеть, что если $f(z) = \varphi(z, \lambda)$, то решение задачи (1.18), (1.18¹), (1.19) имеет вид

$$u(w, z) = \psi(w, \lambda)\varphi(z, \lambda).$$

Далее, из условия ассоциативности для о. о. с. (см. гл. I, § 1, условие 3°) следует:

$$T_u^w T^u \varphi(z, \lambda) = \varphi(z, \lambda) T^w \psi(u, \lambda) = T_z^u T^w \varphi(z, \lambda) = \\ = \psi(u, \lambda)\psi(w, \lambda)\varphi(z, \lambda).$$

Отсюда

$$T^w \psi(u, \lambda) = \psi(u, \lambda)\psi(w, \lambda).$$

Поэтому из уравнения (1.18) следует:

$$\lambda\psi(u, \lambda)\psi(w, \lambda) = \psi(w, \lambda) L_{n, u}\psi(u, \lambda),$$

т. е.

$$L_{n, u}\psi(u, \lambda) = \lambda\psi(u, \lambda). \tag{1.23}$$

Заменяя в уравнении (1.23) u на w и вычитая из уравнения (1.21), мы получим для функции $\psi(w, \lambda)$ уравнение

$$[N_{n, w} - L_{n, w}]\psi(w, \lambda) = 0. \tag{1.24}$$

Решение задачи (1.24), (1.22) не должно зависеть от λ. Так как функция $\psi(w, \lambda)$, являясь решением задачи (1.21)—(1.22), обязательно зависит от λ, то из (1.24) должно следовать:

$$N_{n, w} - L_{n, w} \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1.4. *Операторы T^w коммутируют.*

Доказательство. Мы должны показать, что для любой целой аналитической функции $f(z)$

$$T_z^v T^w f(z) = T_z^w T^v f(z). \tag{1.25}$$

Введем обозначения

$$T_z^v T^w f(z) = \Phi(v, w, z),$$
$$T_z^w T^v f(z) = \Psi(v, w, z).$$

Функция $\Phi(v, w, z)$ есть решение задачи:

$$L_{n, z}\Phi = L_{n, v}\Phi, \tag{1.26}$$
$$\Phi|_{v=0} = T^w f(z), \tag{1.27}$$
$$\left.\frac{\partial^k \Phi}{\partial v^k}\right|_{v=0} = h_k T^w f(z) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{1.28}$$

Если мы покажем, что функция Ψ также является решением этой же задачи, то из единственности решения будет следовать (1.25). Начальные условия (1.27) и (1.28) для Ψ проверяются непосредственно. Покажем, что уравнение (1.26) также выполняется. Мы имеем, используя (1.5),

$$L_{n, z}\Psi = T^w L_{n, z} T^v f(z) = T^w L_{n, v} T^v f(z) = L_{n, v}\Psi.$$

Таким образом, в одномерном случае (действительном или комплексном) не существует некоммутативных операторов обобщенного сдвига, для которых инфинитезимальные операторы являются дифференциальными операторами.

4. В заключение этого параграфа дадим характеристику пространству D из условия (1.4) гл. I, § 1.

Обозначим

$$T^w f(z)|_{z=0} = \varphi(w). \tag{1.29}$$

Чтобы доказать равенство $\varphi(w)=f(w)$ (в классе D, который нам надлежит описать), достаточно показать, что

$$\varphi^{k}(0)=f^{(k)}(0) \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{1.30}$$

Полагая в (1.29) $w=0$, мы получим:

$$\varphi(0)=f(0),$$

т. е. равенство (1.30) при $k=0$ выполняется (причем даже для любой функции $f(z)\in H$). Дифференцируя равенство (1.29) k раз по w, где $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, и полагая затем $w=0$, мы получим:

$$\varphi^{(k)}(0)=h_k f(0) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Поэтому, чтобы условие (1.30) выполнялось для $k=1$, $2,\ \ldots,\ n-1$, следует потребовать, чтобы функция $f(z)$ удовлетворяла граничным условиям

$$f^{(k)}(0)=h_k f(0) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{1.31}$$

Применим теперь к равенству (1.29) оператор $L_{n,w}$. Используя уравнение (1.4), получим:

$$T^{w}L_{n,z}f(z)\big|_{z=0}=L_{n,w}\varphi(w). \tag{1.32}$$

Полагая здесь $w=0$, получим, используя (1.30) для $k<n$,

$$a_0(0)\,f^{(n)}(0)=a_0(0)\,\varphi^{(n)}(0).$$

Поэтому если $a_0(0)\neq 0$, то (1.30) справедливо для $k=n$.

Дифференцируя теперь равенство (1.32) k раз по w $(k<n)$ и полагая затем $w=0$, мы покажем, что если

$$\frac{d^k}{dz^k}\{L_{n,z}f(z)\}\Big|_{z=0}=h_k\{L_{n,z}f(z)\}\Big|_{z=0},$$

то равенство (1.30) выполняется для $k=n+1,\ n+2,\ \ldots$ $\ldots,\ (2n-1)$. Снова применяя к (1.32) оператор $L_{n,w}$, мы получим условия справедливости равенства (1.30) для $k=2n$, $(2n+1),\ \ldots,\ (3n-1)$ и т. д.

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Класс D состоит из функций, удовлетворяющих граничным условиям*

$$\frac{d^k}{dz^k}\left\{L^m_{n,\,z} f(z)\right\}\Big|_{z=0} = h_k\left[L^m_{n,\,z} f(z)\right]\Big|_{z=0}$$
$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

§ 2. Обратная теорема Ли

1. В этом параграфе мы покажем, что каждому линейному дифференциальному оператору n-го порядка

$$L_{n,\,z} = a_0(z)\frac{d^n}{dz^n} + a_1(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + \ldots + a_n(z)\,(a_0(z) \neq 0) \tag{2.1}$$

с целыми аналитическими коэффициентами $a_k(z)$ соответствует оператор обобщенного сдвига T^w.

Обозначим через $f(z)$ произвольную целую аналитическую функцию и через $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_{n-1}$ — произвольные комплексные числа.

Определим семейство операторов $T^w f(z) = u(w,\ z)$ как решение следующей задачи Коши:

$$L_{n,\,w}u = L_{n,\,z}u, \tag{2.2}$$

$$u\big|_{w=0} = f(z), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial w^k}\bigg|_{w=0} = h_k f(z) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{2.4}$$

В силу известной теоремы Коши — Ковалевской, если $a_0(z) \neq 0$, то эта задача в классе аналитических функций имеет единственное решение. Используя единственность решения, мы покажем, что эти операторы T^w удовлетворяют всем условиям обобщенного сдвига и условию коммутативности.

Линейность, очевидно, выполняется. Проверим условие ассоциативности (условие 3°). Обозначим:

$$T^w_v T^v f(z) = \Phi(v,\ w,\ z),$$
$$T^v_z T^w f(z) = \Psi(v,\ w,\ z).$$

Функция Φ есть решение задачи:

$$L_{n,v}\Phi = L_{n,w}\Phi, \tag{2.5}$$

$$\Phi\Big|_{w=0} = T^v f(z), \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial^k \Phi}{\partial w^k}\Big|_{w=0} = h_k T^v f(z) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{2.7}$$

Если мы покажем, что функция Ψ удовлетворяет этой же задаче, то из единственности будет следовать ассоциативность.

Начальные условия (2.6), (2.7) для Ψ проверяются непосредственно. Чтобы показать, что Ψ удовлетворяет уравнению (2.5), докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Для произвольной целой аналитической функции* $\varphi(z)$

$$L_{n,z} T^w \varphi(z) = T^w L_{n,z} \varphi(z). \tag{2.8}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$L_{n,z} T^w \varphi(z) = A(w,\ z),$$

$$T^w L_{n,z} \varphi(z) = B(w,\ z).$$

Функция $B(w,\ z)$ является решением следующей задачи:

$$L_{n,w} B = L_{n,z} B, \tag{2.5^1}$$

$$B\big|_{w=0} = L_{n,z}\varphi(z), \tag{2.6^1}$$

$$\frac{\partial^k B}{\partial w^k}\Big|_{w=0} = h_k L_{n,z}\varphi(z)\ (k = 1,\ \ldots,\ n-1). \tag{2.7^1}$$

Для функции $A(w,\ z)$ начальные условия (2.6^1) и (2.7^1) также выполняются. Покажем, что функция A удовлетворяет уравнению (2.5^1). Мы имеем:

$$L_{n,w} A = L_{n,z} L_{n,w} T^w \varphi(z) = L_{n,z} L_{n,z} T^w \varphi(z) = L_{n,z} A,$$

что и требовалось доказать. Итак, функции A и B удовлетворяют одной и той же задаче Коши. Поэтому из единственности следует равенство этих функций, т. е. равенство (2.8).

Докажем теперь, что функция Ψ удовлетворяет уравнению (2.5). Мы имеем, используя (2.8),

$$L_{n,v}\Psi = L_{n,z}T_z^v T^w f(z) = T_z^v L_{n,z} T^w f(z) =$$
$$= T_z^v L_{n,w} T^w f(z) = L_{n,w}\Psi.$$

Таким образом, условие ассоциативности доказано.

Доказательство коммутативности операторов T^w, а также описание класса D дано в предыдущем параграфе.

§ 3. Представление операторов T^w в интегральном виде

1. Операторы T^w определяются как решение задачи (2.2) — (2.3) — (2.4).

Решение этой задачи можно представить в интегральном виде, аналогичном формуле (2.1), гл. 3. В этом параграфе мы покажем, каким образом можно вывести такую формулу. Мы будем предполагать, что $n > 2$, так как для $n = 1, 2$ имеют место те же формулы, что и в действительном случае.

Мы рассмотрим несколько более общую задачу, чем задача (2.2) — (2.3) — (2.4).

Пусть даны два дифференциальных оператора одинакового порядка

$$L_z = a_0(z)D^n + a_1(z)D^{n-1} + \ldots + a_n(z), \tag{3.1}$$

$$N_z = b_0(z)D^n + b_1(z)D^{n-1} + \ldots + b_n(z) \tag{3.2}$$

с целыми аналитическими коэффициентами. Обозначим через $u(w, z; f_0, \ldots, f_{n-1})$ решение следующей задачи Коши:

$$N_w u = L_z u, \tag{3.3}$$

$$u|_{w=0} = f_0(z), \tag{3.4}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial w^k}\right|_{w=0} = f_k(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{3.5}$$

где $f_k(z)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ — целые аналитические функции.

Прежде чем приступать к решению этой задачи, покажем, что уравнение (3.3) можно несколько упростить. Если мы введем новые переменные по формулам

$$z_1 = \int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt[n]{a_0(z)}}; \qquad w_1 = \int\limits_0^w \frac{dw}{\sqrt[n]{b_0(w)}},$$

то в уравнении (3.3) коэффициенты при старших производных обратятся в единицы. Поэтому с самого начала можно предполагать, что $a_0(z) = b_0(w) = 1$. Покажем еще, что, не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что $a_1(z) = b_1(z) = 0$.

Обозначим через $\alpha(z)$ целую аналитическую функцию, которую мы несколько позже выберем, и положим $u = \alpha v$.

Тогда уравнение (3.3) примет вид

$$N_w(\alpha v) = L_z(\alpha v) = \alpha(z)\frac{\partial^n v}{\partial z^n} + \\ + [n\alpha'(z) + \alpha(z)a_1(z)]\frac{\partial^{n-1} v}{\partial z^{n-1}} + \ldots \tag{3.6}$$

Если мы выберем $\alpha(z)$ из условия

$$n\alpha'(z) + \alpha(z)a_1(z) = 0,$$

т. е.

$$\alpha(z) = e^{-\frac{1}{n}\int\limits_0^z a_1(z)\,dz},$$

то уравнение (3.6) примет вид

$$N_w(\alpha v) = \alpha(z)\frac{\partial^n v}{\partial z^n} + \tilde{a}_2(z)\frac{\partial^{n-2} v}{\partial z^{n-1}} + \ldots$$

Аналогично, если $v = \beta(w)v_1$, где

$$\beta(w) = e^{-\frac{1}{n}\int\limits_0^w b_1(w)\,dw},$$

то мы уничтожим коэффициент при $\frac{\partial^{n-1} v_1}{\partial w^{n-1}}$. Если мы разделим уравнение для v_1 на $\alpha\beta$, то получим для v_1 уравнение вида (3.3), в котором коэффициенты при n-х производных равны 1, а коэффициенты при $(n-1)$-х производных равны нулю. Поэтому эти предположения можно делать с самого начала. Так как

$$v_1(w, z) = \frac{1}{\alpha(z)\beta(w)} u(w, z),$$

то начальные условия (3.4) — (3.5) своего вида не изменят.

Обозначим через $u_s(w, z; f)$ $(s = 0, 1, \ldots, n-1)$ решение задачи Коши:

$$N_w u = L_z u, \tag{3.3}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial w^k}\right|_{w=0} = \begin{cases} f(z), & k = s, \\ 0, & k \neq s \end{cases} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3.5^1}$$

В силу линейности

$$u(w, z; f_0, \ldots, f_{n-1}) = \sum_{s=0}^{n-1} u_s(w, z; f_s).$$

Поэтому в дальнейшем достаточно изучить более простую задачу (3.3) — (3.5^1).

2. Рассмотрим сначала простейшую задачу Коши:

$$\frac{\partial^n u}{\partial w^n} = \frac{\partial^n u}{\partial z^n}, \tag{3.7}$$

$$u|_{w=0} = f(z), \tag{3.8}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial w^k}\right|_{w=0} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3.9}$$

Легко непосредственно проверить, используя тот факт, что для корней n-й степени из 1: $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ $(\varepsilon_0 = 1)$ справедливы тождества

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j^k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

что решение задачи (3.7) — (3.8) — (3.9) имеет вид

$$\tilde{u}_0(w, z; f) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(z + \varepsilon_j w). \tag{3.10}$$

Обозначим теперь через $\widetilde{u}_s(w, z; f)$ решение задачи Коши:

$$\frac{\partial^n u}{\partial w^n} = \frac{\partial^n u}{\partial z^n}, \tag{3.7}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial w^k}\right|_{w=0} = \begin{cases} f(z), & k = s \\ 0, & k \neq s \end{cases} \quad (s = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3.11}$$

Нетрудно проверить, что

$$\widetilde{u}_s(w, z; f) = \frac{1}{(s-1)!}\int_0^w (w-t)^{s-1} u_0(t, z; f)\,dt. \tag{3.12}$$

В самом деле, начальные условия (3.11) проверяются непосредственно.

Проверим уравнение (3.7). Мы имеем:

$$\frac{\partial^n \widetilde{u}_s}{\partial z^n} = \frac{1}{(s-1)!}\int_0^w (w-t)^{s-1} \frac{\partial^n \widetilde{u}_0}{\partial z^n}(t, z; f)\,dt =$$

$$= \frac{1}{(s-1)!}\int_0^w (w-t)^{s-1} \frac{\partial^n \widetilde{u}_0}{\partial t^n}(t, z; f)\,dt = \frac{\partial^{n-s} \widetilde{u}_0}{\partial w^{n-s}}(w, z) =$$

$$= \frac{\partial^n \widetilde{u}_s}{\partial w^n}(w, z).$$

Рассмотрим теперь неоднородную задачу Коши:

$$\frac{\partial^n u}{\partial w^n} - \frac{\partial^n u}{\partial z^n} = F(w, z), \tag{3.13}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial w^k}\right|_{w=0} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3.14}$$

Покажем, что решение задачи (3.13) — (3.14) может быть представлено в виде

$$u(w, z) = \int_0^w v(s, w-s; z)\,ds, \tag{3.15}$$

где $v(s, w; z)$ есть решение уравнения (3.7), удовлетворяющее начальным условиям (s — рассматривается как параметр)

$$v|_{w=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial w}\right|_{w=0} = 0, \ \ldots, \ \left.\frac{\partial^{n-1} v}{\partial w^{n-1}}\right|_{w=0} = F(s, z). \tag{3.16}$$

Начальные условия (3.14) проверяются непосредственно.

Покажем, что функция (3.15) удовлетворяет уравнению (3.13). Действительно, мы имеем, используя начальные условия (3.16),

$$\frac{\partial^{n-1}u}{\partial w^{n-1}}=\int_0^w \frac{\partial^{n-1}v}{\partial w^{n-1}}(s,\ w-s,\ z)\,ds;$$

$$\frac{\partial^n u}{\partial w^n}=F(w,\ z)+\int_0^w \frac{\partial^n v}{\partial w^n}(s,\ w-s,\ z)\,ds=F(w,\ z)+$$
$$+\int_0^w \frac{\partial^n v}{\partial z^n}(s,\ w-s;\ z)\,ds=F(w,\ z)+\frac{\partial^n u}{\partial z^n}.$$

Используя формулу (3.15) и формулы (3.10) и (3.12), получим для решения задачи (3.13)—(3.14) следующую формулу:

$$u(w,\ z)=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^w\left[\int_0^{w-s}(w-s-t)^{n-1}F(s,\ z+\varepsilon_j t)\,dt\right]ds. \tag{3.17}$$

3. Используя формулы (3.17) и (3.12), нетрудно составить интегральное уравнение, эквивалентное задаче (3.3)—(3.5[1]). Перепишем уравнение (3.3) в виде

$$\frac{\partial^n u}{\partial w^n}-\frac{\partial^n u}{\partial z^n}=$$
$$=\left\{a_2(z)\frac{\partial^{n-2}u}{\partial z^{n-2}}-b_2(w)\frac{\partial^{n-2}u}{\partial w^{n-2}}+\ldots+[a_n(z)-b_n(w)]\,u\right\}.$$

Рассматривая в этом уравнении правую часть как известную функцию и используя формулы (3.17) и (3.12), мы получим:

$$u(w,\ z)=u_s(w,\ z)+$$
$$+\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^w\left\{\int_0^{w-s}(w-s-t)^{n-1}\Big[a_2(z+\varepsilon_j t)\frac{\partial^{n-2}u}{\partial z^{n-2}}(s,z+\varepsilon_j t)-\right.$$
$$-b_2(s)\frac{\partial^{n-2}u}{\partial s^{n-2}}(s,\ z+\varepsilon_j t)+\ldots$$
$$\left.\ldots+[a_n(z+\varepsilon_j t)-b_n(s)]\,u(s,\ z+\varepsilon_j t)\Big]\,dt\right\}ds. \tag{3.18}$$

Уравнение (3.18) является интегро-дифференциальным уравнением, эквивалентным задаче (3.3) — (3.5^1). Мы покажем, что в этом уравнении под знаком интеграла можно освободиться от всех производных и таким образом получить для u интегральное уравнение типа уравнения Вольтерра.

Рассмотрим выражение

$$I_{n-2}=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^w ds\int_0^{w-s}(w-s-t)^{n-1}a_2(z+\varepsilon_j t)\times \\ \times\frac{\partial^{n-2}u}{\partial z^{n-2}}(s,\ z+\varepsilon_j t)dt.$$

Так как

$$\frac{\partial^{n-2}u}{\partial z^{n-2}}=\frac{1}{\varepsilon_j^{n-2}}\frac{\partial^{n-2}u}{\partial t^{n-2}}(s,\ z+\varepsilon_j t),$$

то

$$I_{n-2}=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\varepsilon_j^{n-2}}\int_0^w ds\int_0^{w-s}(w-s-t)^{n-1}a_2(z+\varepsilon_j t)\times \\ \times\frac{\partial^{n-2}u}{\partial t^{n-2}}(s,\ z+\varepsilon_j t)dt.$$

Интегрируя один раз по частям, мы получим:

$$\int_0^{w-s}(w-s-t)^{n-1}a_2(z+\varepsilon_j t)\frac{\partial^{n-2}u}{\partial t^{n-2}}(s,\ z+\varepsilon_j t)\,dt= \\ =-(n-1)(w-s)^{n-1}a_2(z)-(w-s)^{n-1}\varepsilon_j a_2'(z)- \\ -(n-1)\int_0^{w-s}(w-s-t)^{n-2}a_2(z+\varepsilon_j t)\frac{\partial^{n-3}u}{\partial t^{n-3}}dt- \\ -\varepsilon_j\int_0^{w-s}(w-s-t)^{n-1}a_2'(z+\varepsilon_j t)\frac{\partial^{n-3}u}{\partial t^{n-3}}(s,\ z+\varepsilon_j t)\,dt.$$

Если это выражение подставить в I_{n-2}, то, так как

$$\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\varepsilon_j^k}=0\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \tag{3.19}$$

то проинтегрированные члены пропадут и мы получим интегралы, в которых содержится $\frac{\partial^{n-3}u}{\partial t^{n-3}}(s,\ z+\varepsilon_j t)$.

Продолжая интегрировать по частям, мы обнаружим, что все проинтегрированные члены обратятся в нуль в силу (3.19), и мы получим для I_{n-2} выражение вида

$$I_{n-2}=\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^w ds\int_0^{w-s}K_{n-2;j}(z,\ w;\ s,t)\,u(s,\ z+\varepsilon_j t)\,dt,$$

где $K_{n-2,j}(z,\ w;\ s,\ t)$ есть целая аналитическая функция от всех аргументов.

Рассмотрим теперь выражение

$$J_{n-2}=\\ =\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^w ds\int_0^{w-s}(w-s-t)^{n-1}b_2(s)\frac{\partial^{n-2}u}{\partial s^{n-2}}(s,\ z+\varepsilon_j t)\,dt.$$

Меняя порядок интегрирования, мы получим:

$$\int_0^w ds\int_0^{w-s}(w-s-t)^{n-1}b_2(s)\frac{\partial^{n-2}u}{\partial s^{n-2}}(s,\ z+\varepsilon_j t)\,dt=\\ =\int_0^w dt\int_0^{w-t}(w-s-t)^{n-1}b_2(s)\frac{\partial^{n-2}u}{\partial s^{n-2}}(s,\ z+\varepsilon_j t)\,ds.$$

Если внутренний интеграл интегрировать по частям $(n-2)$ раза, то в проинтегрированных членах мы будем получать на верхнем пределе нуль, а на нижнем пределе известную функцию, в силу начальных условий (3.6).

Поэтому

$$J_{n-2}=\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^w\psi_{n-2;j}(w,\ t)\,f(z+\varepsilon_j t)\,dt+\\ +\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^w ds\int_0^{w-s}L_{n-2;j}(z,\ w;\ s,\ t)\,u(s,\ z+\varepsilon_j t)\,dt,$$

где $\psi_{n-2;j}(w, t)$ — полиномы, $L_{n-2;j}(z, w; s, t)$ — целые аналитические функции.

Аналогично можно преобразовать другие члены, содержащие производные по z и по s. В результате этих преобразований интегро-дифференциальное уравнение (3.18) преобразуется к виду

$$u(w, z) = \tilde{u}_s(w, z) + \\ + \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^w ds \int_0^{w-s} P_j(z, w; s, t)\, u(s, z + \varepsilon_j t)\, dt, \quad (3.20)$$

где $\tilde{u}_s(w, z)$ и $P_j(z, w; s, t)$ — известные целые аналитические функции. Уравнение (3.20) можно решать при помощи метода последовательных приближений. Преобразуя надлежащим образом последовательные приближения, можно показать, что имеет место следующая формула:

$$u(w, z) = \tilde{u}_s(w, z) + \iint_{\Pi_n(w, z)} T(z, w; \sigma, \tau)\, f(\sigma + i\tau)\, d\sigma\, d\tau, \quad (3.21)$$

где $\Pi_n(w, z)$ — правильный n-угольник в комплексной ζ-плоскости ($\zeta = \sigma + i\tau$) с центром в точке z и вершинами в точках $z + \varepsilon_j w$ ($j = 0, 1, \ldots, n-1$); $T(z, w; \sigma, \tau)$ — известная функция, по (w, z) — целая аналитическая и по (σ, τ) — непрерывная. Мы приведем в следующем параграфе вывод формулы (3.21) для случая уравнения

$$\frac{\partial^3 u}{\partial w^3} = \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + q_1(z)\frac{\partial u}{\partial z} + q_2(z)\, u.$$

В этом случае $\Pi_n(w, z)$ есть треугольник с центром в точке z и вершинами в точках $z + w$, $z + \varepsilon_1 w$, $z + \varepsilon_2 w$, где $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

З а м е ч а н и е. Из предыдущего ясно, что в случае действительных w можно не предполагать аналитичности коэффициентов $b_k(w)$ оператора N_w. Достаточно предполагать, что $b_k(w) \in C^k$.

§ 4. Вывод формулы (3.21) в случае $n=3$

1. Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial w^3}=\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}+q_1(z)\frac{\partial u}{\partial z}+q_2(z)\,u, \tag{4.1}$$

$$u|_{w=0}=f_0(z), \tag{4.2}$$

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial w}\right|_{w=0}&=f_1(z),\\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}\right|_{w=0}&=f_2(z),\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

где $q_k(z)$ $(k=1,\ 2)$; $f_k(z)$ $(k=0,\ 1,\ 2)$ — целые аналитические функции.

Прежде всего, заметим, что достаточно ограничиться случаем $f_1(z)=f_2(z)=0$. В самом деле, если $u(w,\ z;\ f)$ есть решение задачи

$$\frac{\partial^3 u}{\partial w^3}=\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}+q_1(z)\frac{\partial u}{\partial z}+q_2(z)\,u, \tag{4.1}$$

$$u|_{w=0}=f(z), \tag{4.4}$$

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial w}\right|_{w=0}&=0,\\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}\right|_{w=0}&=0,\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

то решение задачи (4.1) — (4.2) — (4.3) имеет вид

$$u(w,\ z)=u(w,\ z;\ f_0)+\int_0^w u(s,\ z;\ f_1)\,ds+$$
$$+\int_0^w (w-s)\,u(s,\ w;\ f_2)\,ds.$$

Напишем для задачи (4.1) — (4.4) — (4.5) эквивалентное интегральное уравнение (см. формулу (3.20)):

$$u(w,\ z;\ f)=u_0(w,\ z;\ f)+$$
$$+\sum_{j=0}^{2}\int_0^w ds\int_0^{w-s} P_j(w,\ z;\ s,\ t)\,u(s,\ z+\varepsilon_j t;\ f)\,dz. \tag{4.6}$$

где

$$u_0(w, z; f) = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{2} f(z + \varepsilon_j w), \tag{4.7}$$

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Будем решать интегральное уравнение (4.6) с помощью метода последовательных приближений. Определенные интегралы, которые при этом будут встречаться, мы будем брать по отрезкам прямых в комплексной плоскости. Пусть $u_0(w, z)$ определяется по формуле (4.7). Положим

$$u_n(w, z) = \sum_{j=0}^{2} \int_0^w ds \int_0^{w-s} P_j(w, z; s, t)\, u_{n-1}(s, z + \varepsilon_j t)\, dt. \tag{4.8}$$

Тогда

$$u(w, z) = u_0(w, z) + u_1(w, z) + \ldots + u_n(w, z) + \ldots \tag{4.9}$$

Лемма 4.1. *Функцию $u_1(w, z)$ можно представить в виде*

$$u_1(w, z) = \iint_{\Pi_3(w, z)} f(\zeta)\, T_1(w, z; \sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau, \tag{4.10}$$

где $\Pi_3(w, z)$ есть правильный треугольник в ζ-плоскости ($\zeta = \sigma + i\tau$) с центром в точке z и вершинами в точках $z + w$, $z + \varepsilon_1 w$, $z + \varepsilon_2 w$. Функция $T_1(w, z; \sigma, \tau)$ по (w, z) — целая аналитическая.

Доказательство. Из формул (4.7) и (4.8) следует:

$$u_1(w, z) =$$
$$= \sum_{j=0}^{2} \int_0^w ds \int_0^{w-s} P_j(w, z; s, t) \left(\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} f(z + \varepsilon_k t + \varepsilon_j s)\right) dt. \tag{4.11}$$

Обозначим через α аргумент комплексного числа w. Тогда $w = |w|\, e^{i\alpha}$. Так как в формуле (4.11) интегралы можно брать по отрезкам прямых линий, то можно предполагать, что s и t также имеют аргумент α. Пусть $s = re^{i\alpha}$,

$t=\rho e^{i\alpha}$. Тогда интеграл (4.11) запишется в виде

$$u_1(w, z)=\sum_{j=0}^{2}\int_0^{|w|} dr \int_0^{|w|-r} P_j(w, z; re^{i\alpha}, \rho e^{i\alpha})\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} f\left(z+e^{i\alpha}(\varepsilon_k\rho+\varepsilon_j r)\right)\right\} e^{2i\alpha}\,d\rho. \quad (4.12)$$

Из всевозможных комбинаций индексов k и j рассмотрим какую-нибудь одну. Например, пусть $k=1$, $j=2$, т. е.

$$\varepsilon_k=e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad \varepsilon_j=e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

Тогда

$$e^{i\alpha}(\varepsilon_k\rho+\varepsilon_j r)=\lambda+i\mu=\xi,$$

где

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=\rho\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\\&\quad+r\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right),\\ \mu&=\rho\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\\&\quad+r\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right).\end{aligned}\right\} \quad (4.13)$$

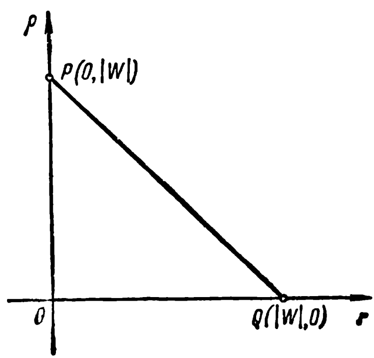

Рис. 3.

Будем рассматривать уравнения (4.13) как замену переменных. В плоскости (r, ρ) область интегрирования есть треугольник OPQ (рис. 3). Найдем область интегрирования в плоскости (λ, μ). Достаточно выяснить, во что отобразится треугольник OPQ. На прямой $OQ\ \rho=0$. Поэтому отрезок OQ отобразится в отрезок прямой линии (см. рис. 3)

$$\lambda=r\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right),$$
$$\mu=r\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right).$$

На прямой OP $r=0$. Поэтому отрезок OP отобразится в отрезок прямой

$$\lambda=\rho\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\mu=\rho\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right).$$

Далее, если $\rho=|w|-r$, то

$$\lambda=|w|\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+r\left[\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\right]=$$
$$=|w|\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\,r\sin\alpha\qquad(0\leqslant r\leqslant|w|);$$

$$\mu=|w|\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+r\left[\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\right]=$$
$$=|w|\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\,r\cos\alpha\qquad(0\leqslant r\leqslant|w|).$$

Поэтому отрезок прямой PQ отображается в отрезок прямой $P'Q'$. Итак, в плоскости λ, μ область интегрирования есть треугольник $OP'Q'$ (рис. 4).

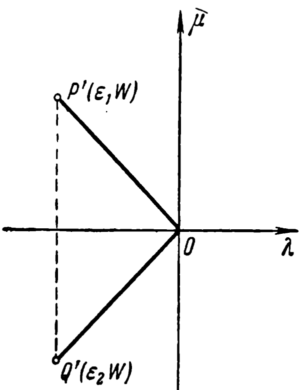

Рис. 4.

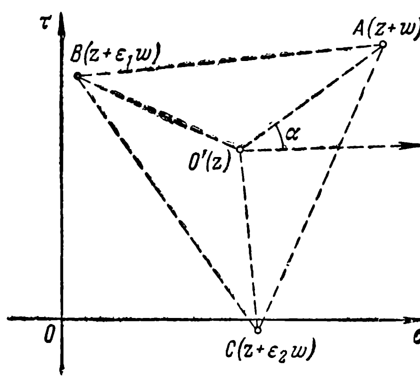

Рис. 5.

Если мы теперь положим $\zeta=\sigma+i\tau=z+\xi$ и вернемся к переменным s, t, то в плоскости (σ,τ) областью интегрирования будет треугольник $O'BC$ (рис. 5).

Для других комбинаций j и k области интегрирования также не будут выходить за пределы треугольника ABC. Таким образом, формула (4.10) доказана.

Докажем, что для $n=2, 3, \ldots$ имеет место формула, аналогичная формуле (4.10).

Лемма 4.2. *Функции* $u_n(w, z)$ $(n=2, 3, \ldots)$ *могут быть представлены в виде*

$$u_n(w, z)=\iint\limits_{\Pi_3(z, w)} T_n(w, z;\ \sigma, \tau)\, f(\zeta)\, d\sigma\, d\tau, \tag{4.14}$$

где $T_n(w, z;\ \sigma, \tau)$ *по* (w, z) — *целая аналитическая функция.*

Доказательство. Для $n=1$ формула (4.14) уже доказана. Пусть для $k=n-1$ формула (4.14) установлена. Докажем ее для $k=n$. Мы имеем, используя формулу (4.8),

$$u_n(w, z)=\sum_{j=0}^{2}\int_0^w ds \int_0^{w-s} P_j(w, z;\ s, t)\times$$

$$\times\left[\int\limits_{\Pi_3(z+\varepsilon_j t;\ s)} T_{n-1}(s, z+\varepsilon_j t;\ \sigma, \tau)\, f(\zeta)\, d\sigma\, d\tau\right] ds=$$

$$=\sum_{j=0}^{2}\int_0^{|w|} dr \int_0^{|w|-r} P_j(w, z;\ re^{i\alpha}, \rho e^{i\alpha})\times$$

$$\times\left[\int\limits_{\Pi_3(z+\varepsilon_j e^{i\alpha}\rho;\ e^{i\alpha} r)} T_{n-1}(re^{i\alpha}, z+\varepsilon_j e^{i\alpha}\rho;\ \sigma, \tau) f(\zeta)\, d\sigma\, d\tau\right] e^{2i\alpha}\, d\rho.$$

Отсюда видно, что $u_n(w, z)$ представляется в виде суммы трех четырехкратных интегралов с действительными пределами интегрирования. Переставим порядок интегрирования таким образом, чтобы внешние два интеграла брались по переменным σ и τ. Мы получим (возвращаясь после выполнения перестановки снова к переменным s и t):

$$u_n(w, z)=\iint\limits_{\Delta} f(\zeta)\, d\sigma\, d\tau\times$$

$$\times\left[\sum_{j=0}^{2}\iint\limits_{\Delta'} P_j(w, z;\ s, t)\, T_{n-1}(s, z+\varepsilon_j t;\ \sigma, \tau)\, ds\, dt\right],$$

где Δ' — некоторая конечная область интегрирования, точный вид которой в дальнейшем не понадобится.

Чтобы получить формулу (4.14), остается показать, что область Δ совпадает с треугольником $\Pi_3(z, w)$.

Пусть, например, $j=1$, т. е. $\varepsilon_j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Рассмотрим треугольник $\Pi_3(z+\varepsilon_1 t, s)$. Из рис. 6 видно, что этот треугольник для $|t| \leqslant |w|$, $|s| \leqslant |w|$ целиком лежит внутри треугольника $\Pi_3(z, w)$ и совпадает с последним, если $t=0$ и, следовательно, $s=w$. Поэтому после перестановки порядка интегрирования внешний интеграл по (σ, τ) для всех $j=0, 1, 2$ берется по треугольнику $\Pi_3(z, w)$, что доказывает формулу (4.14). Формула (3.21) получается, если в разложение (4.9) подставить вместо $u_n(w, z)$ выражение из формулы (4.14).

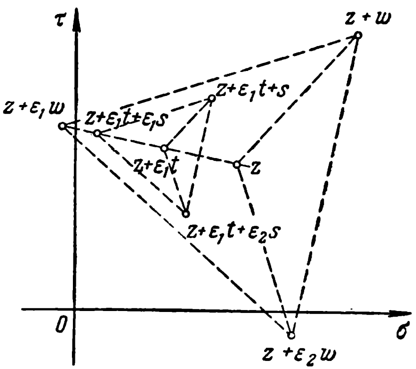

Рис. 6.

§ 5. Операторы преобразования

Общее определение операторов преобразования дано в § 10 гл. IV. В этом параграфе мы рассмотрим следующий случай: $E_1 = E_2 = H =$ пространству целых аналитических функций;

$$A = a_0(z)D^n + a_1(z)D^{n-1} + \ldots + a_n(z), \quad a_0(z) \neq 0, \tag{5.1}$$

$$B = b_0(z)D^n + b_1(z)D^{n-1} + \ldots + b_n(z), \quad b_0(z) \neq 0, \tag{5.2}$$

причем $a_k(z) \in H$, $b_k(z) \in H$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Требуется найти линейный оператор X, удовлетворяющий условиям:

1) $$BX = XA. \tag{5.3}$$

2) Существует обратный оператор X^{-1}.

Обозначим через $u_s = u_s(w, z; f)$ решение задачи (3.3) — (3.6), в которой положено $L_{u, z} = A$, $N_{u, w} = B$.

Положим

$$g(w) = Xf(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \left.\frac{\partial^s u_s}{\partial z^s}\right|_{z=0}. \tag{5.4}$$

1. Мы покажем, что оператор X удовлетворяет условиям 1) и 2).

Вначале покажем, что, какова бы ни была целая аналитическая функция $\varphi(z)$,

$$A_z u_s(w, z;\ \varphi(z)) = u_s(w, z;\ A_z\varphi(z)). \tag{5.5}$$

Введем обозначения

$$\Phi(w, z) = A_z u_s(w, z;\ \varphi(z)),$$
$$\Psi(w, z) = u_s(w, z;\ A_z\varphi(z)).$$

Функция $\Psi(w, z)$ является решением следующей задачи Коши:

$$B_w\Psi = A_z\Psi, \tag{5.6}$$

$$\left.\frac{\partial^k\Psi}{\partial w^k}\right|_{w=0} = \begin{cases} A_z\varphi(z), & k = s, \\ 0, & k \neq s. \end{cases} \tag{5.7}$$

Покажем, что функция $\Phi(w, z)$ также является решением этой задачи Коши. Отсюда и из единственности решения будет следовать (5.5). В самом деле, начальные условия (5.7) проверяются непосредственно. Проверим уравнение. Мы имеем:

$$B_w\Phi = A_z B_w u_s = A_z A_z u = A_z\Phi.$$

Из (5.5) и (3.3) следует:

$$B_w u_s(w, z;\ f(z)) = u_s(w, z;\ A_z f(z)). \tag{5.8}$$

Дифференцируя это равенство s раз по z, полагая $z = 0$ и суммируя затем по s ($s = 0, 1, \ldots, n-1$), получим, используя (5.4),

$$B_w Xf(z) = XA_z f(z), \tag{5.9}$$

т. е. равенство (5.3).

Замечание. При выводе равенства (5.9) мы нигде не пользовались тем, что операторы A и B одинакового порядка.

2. Теперь мы покажем, что оператор X имеет обратный. Это получается лишь в предположении, что операторы A и B имеют одинаковый порядок.

Пусть $g(w) \in H$. Обозначим через $v_s(z, w; g(w))$ решение задачи Коши:

$$A_z v = B_w v, \tag{5.10}$$

$$\left.\frac{\partial^k v}{\partial z^k}\right|_{z=0} = \begin{cases} g(w), & \text{если } k = s, \\ 0, & \text{если } k \neq s. \end{cases} \tag{5.11}$$

Определим теперь оператор Y с помощью равенства

$$h(z) = Yg(w) = \sum_{s=0}^{n-1} \left.\frac{\partial^s v_s}{\partial w^s}\right|_{w=0}. \tag{5.12}$$

Мы покажем, что $Y = X^{-1}$, т. е.

$$YX = I, \tag{5.13}$$

$$XY = I, \tag{5.14}$$

где I — тождественное преобразование. Рассмотрим подробно доказательство равенства (5.13), так как равенство (5.14) доказывается аналогично. Пусть $g(w) = Xf(z)$. Мы должны показать, что в этом случае $h(z)$ из формулы (5.12) совпадает с $f(z)$. Для этого докажем, что для $f(z)$ и $g(z)$ производные всех порядков в точке $z = 0$ совпадают. Подставляя в (5.12) вместо $g(w)$ выражение (5.4), мы получим:

$$h(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\partial^s v_s}{\partial w^s} \left[z, w; \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^r u_r}{\partial x^r} (w, x; f(x)|_{x=0}) \right]_{w=0} =$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^r}{\partial x^r} \frac{\partial^s v_s}{\partial w^s} [z, w; u_r(w, x; f(x))] \Big|_{\substack{x=0 \\ w=0}}. \tag{5.15}$$

Дифференцируя это равенство по z l раз ($l = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$) и полагая затем $z = 0$, мы получим в силу начальных условий (3.6) и (5.11)

$$h^{(l)}(0) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^l}{\partial w^l} \frac{\partial^r u_r}{\partial x^r} (w, x; f(x)) \Big|_{\substack{x=0 \\ w=0}} =$$

$$= f^{(l)}(x)|_{x=0} = f^{(l)}(0) \quad (l = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Чтобы доказать совпадение следующих производных, применим к равенству (5.15) оператор $\frac{\partial^l}{\partial z^l} A_z^k$ $(l = 0, 1, \ldots, n-1;$

$k=1, 2, \ldots$). Мы получим, используя аналог равенства (5.5) и равенство (3.3),

$$\left[A_z^k h(z)\right]_z^{(l)} =$$
$$=\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\left\{\frac{\partial^r}{\partial x^r}\frac{\partial^s}{\partial w^s}\frac{\partial^l}{\partial z^l}A_z^k v_s[z, w; u_r(w, x; f(x))]\right\}\Big|_{\substack{x=0\\w=0}} =$$
$$=\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\left\{\frac{\partial^r}{\partial x^r}\frac{\partial^s}{\partial w^s}\frac{\partial^l}{\partial z^l}B_w^k v_s[z, w; u_r(w, x; f(x))]\right\}\Big|_{\substack{x=0\\w=0}} =$$
$$=\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\left\{\frac{\partial^r}{\partial x^r}\frac{\partial^s}{\partial w^s}\frac{\partial^l}{\partial z^l}v_s\left[z, w; B_w^k u_r(w, x; f(x))\right]\right\}\Big|_{\substack{x=0\\w=0}} =$$
$$=\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\left\{\frac{\partial^r}{\partial x^r}\frac{\partial^s}{\partial w^s}\frac{\partial^l}{\partial z^l}v_s\left[z, w; A_x^k u_r(w, x; f(x))\right]\right\}\Big|_{\substack{x=0\\w=0}} =$$
$$=\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\left\{\frac{\partial^r}{\partial x^r}\frac{\partial^s}{\partial w^s}\frac{\partial^l}{\partial z^l}v_s\left[z, w; u_r\left(w, x; A_x^k f(x)\right)\right]\right\}\Big|_{\substack{x=0\\w=0}}.$$

Полагая в последнем равенстве $z=0$, получим, аналогично предыдущему,

$$\left[A_z^k h(z)\right]_{z\,|\,z=0}^{(l)} = \left[A_x^k f(x)\right]_{x\,|\,x=0}^{(l)}.$$

Отсюда, рассуждая по индукции, можно заключить о равенстве в точке $z=0$ производных всех порядков для $h(z)$ и $f(z)$.

3. Обозначим через $\varphi_k(w, \lambda)$ решение уравнения

$$B_w\varphi = \lambda\varphi,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_k^{(l)}(0, \lambda) = \delta_k^l,$$

и через $\psi(z, \lambda)$ решение уравнения

$$A_z\psi = \lambda\psi,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\psi^{(l)}(0, \lambda) = h_l,$$

где h_l — произвольные комплексные числа. Если $f(z) = \psi(z, \lambda)$, то решение задачи (3.3) — (3.5[1]) имеет вид

$$u_s(w, z; \psi) = \varphi_s(w, \lambda)\psi(z, \lambda).$$

Поэтому

$$X\psi(z, \lambda) = \sum_{s=0}^{n-1} \varphi_s(w, \lambda)\psi^{(s)}(0, \lambda) = \sum_{s=0}^{n-1} h_s\varphi_s(w, \lambda).$$

Таким образом, построенный нами оператор X преобразует собственные функции одного оператора в собственные функции другого оператора, не изменяя начальных условий.

В заключение этого параграфа заметим, что в случае $n = 2$, если в формулу (5.4) подставить явный вид решения задачи Коши, то мы получим формулу (10.4) гл. IV.

§ 6. Операторы преобразования на полупрямой в случае $n > 2$

Можно искать операторы преобразования для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ на полупрямой $(0, \infty)$ в том же виде, который мы рассмотрели в § 10 гл. IV (второй случай), изучая дифференциальные операторы второго порядка.

Мы ограничимся для простоты дифференциальными операторами третьего порядка вида $A = \frac{d^3}{dx^3} - q(x)$.

Пусть E_1 — пространство дифференцируемых функций, удовлетворяющих начальным условиям

$$f'(0) = f''(0) = 0, \tag{6.1}$$

и E_2 — пространство дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям

$$g'(0) = h_1 g(0); \quad g''(0) = h_2 g(0), \tag{6.2}$$

где h_1 и h_2 — произвольные комплексные числа. Пусть

$$A = \frac{d^3}{dx^3} - q(x), \tag{6.3}$$

$$B = \frac{d^3}{dx^3}. \tag{6.4}$$

Ищем оператор X в виде

$$Xf(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t) f(t)\, dt. \tag{6.5}$$

Тогда

$$\{Xf(x)\}'_x = f'(x) + K(x, x) f(x) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x}(x, t) f(t) dt; \tag{6.6}$$

$$\{Xf(x)\}''_x = f''(x) + \frac{dK}{dx}(x, x) f(x) + K(x, x) f'(x) + \\ + \frac{\partial K}{\partial x}(x, t)\Big|_{t=x} f(x) + \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, t) f(t)\, dt; \tag{6.7}$$

$$\{Xf(x)\}'''_x = f'''(x) + \frac{d^2K}{dx^2}(x, x) f(x) + 2\frac{dK}{dx}(x, x) f'(x) + \\ + K(x, x) f''(x) + \frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial K}{\partial x}(x, t)\Big|_{t=x}\right\} f(x) + \\ + \frac{\partial K}{\partial x}(x, t)\Big|_{t=x} f'(x) + \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, t)\Big|_{t=x} f(x) + \int_0^x \frac{\partial^3 K}{\partial x^3}(x, t)\, dt. \tag{6.8}$$

Полагая в (6.5) $x = 0$, получим:

$$\{Xf(x)\}\,|_{x=0} = f(0).$$

Полагая в (6.6) $x = 0$, получим, используя предыдущее равенство и условия (6.1) и (6.2),

$$K(0, 0) = h_1. \tag{6.9}$$

Полагая в (6.7) $x = 0$, получим:

$$\frac{dK(x, x)}{dx}\Big|_{x=0} + \frac{\partial K}{\partial x}(x, t)\Big|_{t=x=0} = h_2. \tag{6.10}$$

Вычислим теперь XBf. Мы имеем, используя (6.4) и (6.5) и интегрируя трижды по частям,

$$XBf = f'''(x) + \int_0^x K(x, t) f'''(t)\,dt =$$

$$= f'''(x) + K(x, x) f''(x) - \frac{\partial K}{\partial t}(x, t)\Big|_{t=x} f'(x) +$$

$$+ \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x, t)\Big|_{t=x} f(x) - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\Big|_{t=0} f(0) - \int_0^x \frac{\partial^3 K}{\partial t^3}(x, t) f(t)\,dt. \tag{6.11}$$

Из (6.8) следует:

$$AXf = f'''(x) + \frac{d^2 K}{dx^2}(x, x) f(x) + 2\frac{dK}{dx}(x, x) f'(x) +$$

$$+ K(x, x) f''(x) + \frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial K}{\partial x}(x, t)\Big|_{t=x}\right\} f(x) +$$

$$+ \frac{\partial K}{\partial x}(x, t)\Big|_{t=x} f'(x) + \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, t)\Big|_{t=x} f(x) +$$

$$+ \int_0^x \frac{\partial^3 K}{\partial x^3}(x, t) f(t)\,dt - q(x) f(x) -$$

$$- q(x)\int_0^x K(x, t) f(t)\,dt. \tag{6.12}$$

Так как $AX = XB$, то из (6.11) и (6.12) и произвольной функции $f(t)$ следует:

$$\frac{\partial^3 K}{\partial x^3} - q(x) K = \frac{\partial^3 K}{\partial t^3}, \tag{6.13}$$

$$2\frac{dK}{dx}(x, x) + \frac{\partial K}{\partial x}(x, t)\Big|_{t=x} + \frac{\partial K}{\partial t}\Big|_{t=x} = 0, \tag{6.14}$$

$$\frac{d^2 K}{dx^2}(x, x) + \frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial K}{\partial x}(x, t)\Big|_{t=x}\right\} + \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, t)\Big|_{t=x} -$$

$$- \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x, t)\Big|_{t=x} = q(x), \tag{6.15}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = 0. \tag{6.16}$$

Из (6.14) следует:

$$3\,\frac{dK}{dx}(x,\ x)=0,$$

т. е.

$$K(x,\ x)=C.$$

Сравнивая с (6.9), получаем $C=h_1$ и, следовательно,

$$K(x,\ x)=h_1. \tag{6.17}$$

Поэтому из (6.10) следует:

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x,\ t)\Big|_{t=x=0}=h_2. \tag{6.18}$$

Преобразуем условие (6.15). Из (6.17) следует:

$$\frac{d^2K}{dx^2}(x,\ x)=0. \tag{6.19}$$

Далее,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial K}{\partial x}(x,\ t)\Big|_{t=x}\right]=\frac{\partial^2K}{\partial x^2}(x,\ t)\Big|_{t=x}+\frac{\partial^2K}{\partial x\,\partial t}(x,t)\Big|_{t=x}. \tag{6.20}$$

Равенство (6.19) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial^2K}{\partial x^2}+2\,\frac{\partial^2K}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial^2K}{\partial t^2}\right)\Big|_{t=x}=0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2K}{\partial t^2}\Big|_{t=x}=\left(-2\,\frac{\partial^2K}{\partial x\,\partial t}-\frac{\partial^2K}{\partial x^2}\right)\Big|_{t=x}. \tag{6.21}$$

Подставляя (6.19), (6.20) и (6.21) в (6.15), мы получим:

$$\left(\frac{\partial^2K}{\partial x^2}+\frac{\partial^2K}{\partial x\,\partial t}\right)\Big|_{t=x}=\frac{1}{3}\,q(x)$$

или

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial K}{\partial x}(x,\ t)\Big|_{t=x}\right]=\frac{1}{3}\,q(x).$$

Интегрируя по x и принимая во внимание начальное условие (6.18), мы получим:

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x,\ t)\Big|_{t=x}=h_2+\frac{1}{3}\int\limits_0^x q(s)\,ds,$$

Итак, функция $K(x, t)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial^3 K}{\partial x^3} - q(x) K = \frac{\partial^3 K}{\partial t^3}, \tag{6.22}$$

$$K(x, x) = h_1, \tag{6.23}$$

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x, t)\Big|_{t=x} = h_2 + \frac{1}{3}\int_0^x q(s)\, ds, \tag{6.24}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x, t)\Big|_{t=0} = 0. \tag{6.25}$$

Эта задача, разумеется, не корректна. Однако, как показал Л. А. Сахнович [73], если $q(x)$ — аналитическая функция, то решение существует *).

*) В работе Сахновича вначале строится функция $K^*(x, t)$, удовлетворяющая уравнению (6.22) и условиям (6.23) и (6.24). Затем, используя ядро $K^*(x, t)$ строится ядро $K(x, t)$ из формулы (6.5). Как мы видели, ядро $K(x, t)$ должно удовлетворять также условию (6.25). В работе Сахновича рассмотрен также случай оператора n-го порядка.

ГЛАВА VII

ОБРАТНЫЕ ПЕРВАЯ И ВТОРАЯ ТЕОРЕМЫ ЛИ ДЛЯ О. О. С.

§ 1. Первая обратная теорема Ли для о. о. с.

1. В § 1 гл. II было показано, что функция $u(s, t) = T^s f(t)$ удовлетворяет системе уравнений (1.4).

В этом параграфе мы рассмотрим обратный вопрос: пусть система уравнений (1.4) совместна и при некоторых дополнительных начальных условиях решение этой системы существует и единственно. Спрашивается, при каких дополнительных ограничениях решение этой системы есть о. о. с.?

Мы изучим этот вопрос в общей постановке, охватывающей, в частности, оба случая, рассмотренных в §§ 3 и 4 гл. II.

Пусть дано $p\,(p \geqslant n)$ линейно независимых линейных операторов $X_{1;\,t}, \ldots, X_{p;\,t}$ и p линейно независимых линейных операторов $\widetilde{X}_{1;\,s}, \ldots, \widetilde{X}_{p;\,s}$. Рассмотрим систему уравнений

$$\widetilde{X}_{\alpha;\,s}(u) = X_{\alpha;\,t}(u) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p), \tag{1.1}$$

к которой присоединим начальные условия

$$u\,|_{s=0} = f(t), \tag{1.2}$$

$$D_s^{\lambda} u\,|_{s=0} = h_{\lambda} f(t), \tag{1.3}$$

причем

$$D_s^{\lambda} = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial s_1^{\lambda_1} \ldots \partial s_n^{\lambda_n}}, \quad |\lambda| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n;\ h_{\lambda} = h_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} \text{ —}$$

постоянные числа.

Предположим, что решение системы (1.1)—(1.2)—(1.3) в некотором классе функций существует и единственно. Тогда его можно записать в виде $u(s, t) = T^s f(t)$.

Из линейности системы и начальных условий следует, что операторы T^s удовлетворяют условиям 1° и 2° для о. о. с. Выясним, при каких дополнительных предположениях операторы удовлетворяют условию 3° для о. о. с. С этой целью докажем следующую лемму.

Лемма 1.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $X_{\alpha;\, t}\tilde{X}_{\beta;\, t} = \tilde{X}_{\beta;\, t}X_{\alpha;\, t}$ $(\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ p)$, (1.4)

2) $X_{\alpha;\, t}(f)\,|_{t=0} = \tilde{X}_{\alpha;\, t}(f)\,|_{t=0}$, (1.5)

3) $D_t^{\lambda}X_{\alpha;\, t}(f)\,|_{t=0} = D_t^{\lambda}\tilde{X}_{\alpha;\, t}(f)\,|_{t=0}$ *). (1.6)

Тогда для произвольной $\varphi(t)$

$$X_{\alpha;\, s}T^s\varphi(t) = T^sX_{\alpha;\, t}\,\varphi(t). \tag{1.7}$$

Доказательство. Введем обозначения:

$$F_\alpha(s,\ t) = T^sX_{\alpha;\, t}\,\varphi(t),$$
$$G_\alpha(s,\ t) = X_{\alpha;\, s}T^s\varphi(t).$$

В силу определения операторов T^s функция $F_\alpha(s,\ t)$ при фиксированном α есть решение следующей задачи:

$$\tilde{X}_{\beta;\, s}F_\alpha = X_{\beta;\, t}F_\alpha\ (\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ p), \tag{1.8}$$
$$F_\alpha\,|_{s=0} = X_{\alpha;\, t}(\varphi), \tag{1.9}$$
$$D_s^{\lambda}F_\alpha\,|_{s=0} = h_\lambda X_{\alpha;\, t}(\varphi). \tag{1.10}$$

Если мы покажем, что $G_\alpha(s,\ t)$ также удовлетворяет этой же задаче, то из предположенной единственности будет следовать равенство (1.7).

Из условия коммутирования (1.4) следует:

$$\tilde{X}_{\beta;\, s}G_\alpha = \tilde{X}_{\beta;\, s}X_{\alpha;\, s}T^s\varphi(t) = X_{\alpha;\, s}\tilde{X}_{\beta;\, s}T^s\varphi(t) =$$
$$= X_{\alpha;\, s}X_{\beta;\, t}T^s\varphi(t) = X_{\beta;\, t}G_\alpha,$$

т. е. уравнение (1.8) для G_α.

Выведем теперь для $G_\alpha(s,\ t)$ начальные условия.

В силу (1.5) и (1.6) имеем:

$$G_\alpha\,|_{s=0} = X_{\alpha;\, s}T^s\varphi(t)\,|_{s=0} = \tilde{X}_{\alpha;\, s}T^s\varphi(t)\,|_{s=0} =$$
$$= X_{\alpha;\, t}T^s\varphi(t)\,|_{s=0} = X_{\alpha;\, t}(\varphi);$$
$$D_s^{\lambda}G_\alpha\,|_{s=0} = D_s^{\lambda}X_{\alpha;\, s}T^s\varphi(t)\,|_{s=0} = D_s^{\lambda}\tilde{X}_{\alpha;\, s}T^s\varphi(t)\,|_{s=0} =$$
$$= D_s^{\lambda}X_{\alpha;\, t}T^s\varphi(t)\,|_{s=0} = X_{\alpha;\, t}D_s^{\lambda}T^s\varphi(t)\,|_{s=0} = h_\lambda X_{\alpha;\, t}(\varphi).$$

---

*) В равенстве (1.6) операторы D_t^{λ} те же, что и в начальных условиях (1.3).

Таким образом, начальные условия для $G_\alpha(s, t)$ совпадают с условиями (1.9) и (1.10). Лемма доказана.

2. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1.1. *Предположим, что система* (1.1) — (1.2) — (1.3) *в некотором классе функций имеет единственное решение* $u(s, t) = T^s f(t)$. *Пусть выполняются условия* (1.4), (1.5) и (1.6) *предыдущей леммы. Тогда операторы* T^s *удовлетворяют условию* 3° *для о. о. с.*

Доказательство. Введем обозначения:

$$\Phi = T_s^r T^s f(t), \quad \Psi = T_t^s T^r f(t).$$

При фиксированном t Φ есть решение задачи:

$$\widetilde{X}_{\alpha;\, r}\Phi = X_{\alpha;\, s}\Phi, \tag{1.11}$$

$$\Phi\,|_{r=0} = T^s f(t), \tag{1.12}$$

$$D_r^\lambda \Phi\,|_{r=0} = h_\lambda T^s f(t). \tag{1.13}$$

Если мы покажем, что Ψ также удовлетворяет этой задаче, то из единственности будет следовать $\Psi = \Phi$, что совпадает с условием 3° для о. о. с. Начальные условия (1.12) и (1.13) проверяются непосредственно. Проверим уравнение (1.11). Мы имеем, используя (1.7),

$$\widetilde{X}_{\alpha;\, r}\Psi = T^s \widetilde{X}_{\alpha;\, r} T^r f(t) = T^s X_{\alpha;\, t} T^r f(t) = X_{\alpha;\, s}\Psi,$$

что совпадает с уравнением (1.11).

Замечание. Условия (1.5) и (1.6) не только достаточны для ассоциативности о. о. с., но и необходимы (по крайней мере, для $f(s) \in D$). В самом деле, условие (1.5) следует непосредственно из определения инфинитезимальных операторов.

Проверим условие (1.6). Применяя к уравнению (1.1) оператор D_s^λ, получим:

$$D_s^\lambda \widetilde{X}_{\alpha;\, s}\, u = X_{\alpha;\, t} D_s^\lambda u.$$

Полагая здесь $s = 0$, получим:

$$D_s^\lambda \widetilde{X}_{\alpha;\, s}\, u\,|_{s=0} = h_\lambda X_{\alpha;\, t}(f).$$

Полагая теперь $t=0$, получим для $f\in D$:

$$D_s^\lambda \tilde{X}_{\alpha;\,s}(f)\big|_{s=0} = h_\lambda X_{\alpha;\,s}(f)\big|_{s=0}. \tag{1.14}$$

Далее, для $f\in D$

$$T^s f(t)\big|_{t=0} = f(s).$$

Поэтому (используя (1.7))

$$\begin{aligned} D_s^\lambda X_{\alpha;\,s}(f)\big|_{s=0} &= D_s^\lambda X_{\alpha;\,s} T^s f(t)\Big|_{\substack{t=0\\ s=0}} = \\ &= D_s^\lambda T^s X_{\alpha;\,t}(f)\Big|_{\substack{t=0\\ s=0}} = h_\lambda T^s X_{\alpha;\,t}(f)\Big|_{\substack{t=0\\ s=0}} = \\ &= h_\lambda X_{\alpha;\,t}(f)\big|_{t=0} = h_\lambda X_{\alpha;\,s}(f)\big|_{s=0}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Из (1.14) и (1.15) следует (1.6).

3. Рассмотрим теперь коммутативный случай. В этом случае операторы X_α и $\tilde{X}_\alpha$ совпадают и, следовательно, коммутируют (см. § 1 гл. II). Поэтому условия (1.5) и (1.6) выполняются автоматически. Система (1.1) принимает теперь вид

$$X_{\alpha;\,s}\, u = X_{\alpha;\,t}\, u \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p). \tag{1.1^1}$$

Предположим, что задача (1.1^1) — (1.2) — (1.3) в некотором классе функций имеет единственное решение $u(s, t) = T^s f(t)$. В силу предыдущей теоремы операторы T^s удовлетворяют условиям 1°, 2° и 3° для о. о. с. Покажем еще, что эти операторы образуют коммутативное семейство. С этой целью введем обозначения:

$$\Phi = T_t^s T_t^r f(t),$$

$$\Psi = T_t^r T_t^s f(t).$$

При фиксированном r Φ есть решение задачи:

$$X_{\alpha;\,s}\Phi = X_{\alpha;\,t}\Phi, \tag{1.1^1}$$

$$\Phi\big|_{s=0} = T^r f(t), \tag{1.16}$$

$$D_s^\lambda \Phi\big|_{s=0} = h_\lambda T^r f(t). \tag{1.17}$$

Если мы покажем, что функция Ψ также удовлетворяет этой задаче, то из единственности будет следовать $\Phi = \Psi$, т. е.

коммутативность операторов T^s. Начальные условия (1.16) и (1.17) для Ψ проверяются непосредственно. Проверим уравнение (1.1[1]). Мы имеем, используя (1.7),

$$X_{\alpha;\,s}\Psi = T_t^r X_{\alpha;\,s} T_t^s f(t) = T_t^r X_{\alpha;\,t} T_t^s f(t) =$$
$$= X_{\alpha;\,r} T_t^r T_t^s f(t) = X_{\alpha;\,t}\Psi.$$

§ 2. Описание класса D

Класс D был определен в § 1 гл. I. Он состоит из функций, удовлетворяющих условию

$$T^s f(t)\,|_{t=0} = f(s). \tag{2.1}$$

Мы будем предполагать в этом параграфе, что операторы T^s определяются из системы (1.1) — (1.2) — (1.3) и что эта система в классе аналитических функций имеет единственное решение. Мы будем также предполагать, что выполняется условие (1.7). Из леммы 1.1 следует, что для этого достаточно, чтобы выполнялись условия (1.4) — (1.5) — (1.6).

Положим

$$T^s f(t)\,|_{t=0} = \varphi(s); \tag{2.2}$$

следующая теорема дает характеристику класса D.

Теорема 2.1. *Пусть операторы $X_{\alpha;\,t}$ таковы, что из уравнений* *)

$$D_s^\lambda X_{\alpha_1;\,s} X_{\alpha_2;\,s} \ldots X_{\alpha_r;\,s}(\varphi)\,|_{s=0} = a_{\lambda;\,\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_r} \tag{2.3}$$
$$(r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r = 1,\ \ldots,\ p)$$

однозначно определяются значения в нуле всех производных функций $f(s)$. Тогда класс D состоит из функций, удовлетворяющих граничным условиям

$$D_s^\lambda X_{\alpha_1;\,s} \ldots X_{\alpha_r;\,s}(f)\,|_{s=0} = h_\lambda X_{\alpha_1;\,s} \ldots X_{\alpha_r;\,s}(f)\,|_{s=0}. \tag{2.4}$$

---

*) При $\lambda = 0$ $D^0 = I$, при $r = 0$ в левой части (2.1) остается $D_s^\lambda f(s)\,|_{s=0}$. Числа λ те же, что и в условии (1.3).

Доказательство. Мы покажем, что при выполнении условий теоремы функции $f(s)$ и $\varphi(s)$ и их производные всех порядков в точке $s=0$ совпадают. Отсюда и из аналитичности следует, очевидно, (2.1).

Полагая в (2.2) $s=0$, получим:

$$\varphi(0)=f(0).$$

Далее,

$$D_s^\lambda \varphi(s)\big|_{s=0}=D_s^\lambda T^s f(t)\Big|_{\substack{t=0\\ s=0}}=h_\lambda f(0).$$

Полагая в (2.4) $r=0$, получим:

$$D_s^\lambda f(s)\big|_{s=0}=h_\lambda f(0).$$

Поэтому

$$D_s^\lambda \varphi(s)\big|_{s=0}=D_s^\lambda f(s)\big|_{s=0}.$$

Далее, используя (1.7) и (2.4), получим:

$$X_{\alpha_1;s}\ldots X_{\alpha_r;s}(\varphi)\big|_{s=0}=T^s X_{\alpha_1;t}\ldots X_{\alpha_r;t}(f)\Big|_{\substack{t=0\\ s=0}}=$$
$$=X_{\alpha_1;t}\ldots X_{\alpha_r;t}(f)\big|_{t=0};$$

$$D_s^\lambda X_{\alpha_1;s}\ldots X_{\alpha_r;s}(\varphi)\big|_{s=0}=D_s^\lambda T^s X_{\alpha_1;t}\ldots X_{\alpha_r;t}(f)\Big|_{\substack{t=0\\ s=0}}=$$
$$=h_\lambda X_{\alpha_1;t}\ldots X_{\alpha_r;t}(f)\big|_{t=0}=D_s^\lambda X_{\alpha_1;s}\ldots X_{\alpha_r;s}(f)\big|_{s=0}.$$

Так как из уравнений (2.3) последовательные производные в нуле определяются однозначно, то $\varphi(s)$ и $f(s)$ имеют совпадающие производные в нуле, что и требовалось доказать.

Замечание. Если операторы $\widetilde{X}_{\alpha;s}$ таковы, что начальные условия (1.3) отсутствуют, то для функций $f(s)$ никаких граничных условий не будет. Так, например, обстоит дело в случае сдвига на группе. В этом случае

$$T^s f(t)\big|_{t=0}=f(s\cdot t)\big|_{t=0}=f(s)$$

и поэтому $D=C$.

§ 3. Обратная вторая теорема Ли. Случай инфинитезимальных операторов первого порядка

1. В § 3 гл. II было показано, что при выполнении условия (3.3) операторы $X_{\alpha;\,t}$ образуют алгебру Ли, а операторы $\widetilde{X}_{\alpha;\,s}$ образуют алгебру Ли противоположной структуры.

В этом параграфе мы рассматриваем обратный вопрос. Мы будем предполагать, что операторы $X_{\alpha;\,t}$ образуют алгебру Ли, а операторы $\widetilde{X}_{\alpha;\,s}$ образуют алгебру Ли противоположной структуры. Будет показано, что при выполнении этих условий система (1.1) совместна*). На операторы $\widetilde{X}_{\alpha;\,s}$ нам придется наложить условие, более общее, чем условие (3.3).

Это новое условие позволит нам определить значения последовательных производных функции $u(s, t)$ (решения системы (1.1)) по переменным $s_1, \ldots, s_n$ в точке $s=0$.

При этом окажется в силу условия коммутирования, что эти производные определяются непротиворечиво. Вопросами сходимости полученных степенных рядов для $u(s, t)$ мы в этом параграфе заниматься не будем. Этот важный вопрос будет рассмотрен в гл. X.

2. Сформулируем теперь дополнительное условие на операторы $\widetilde{X}_{\alpha;\,s}$.

Пусть $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (λ_i—целые неотрицательные числа),

$$D_s^\lambda=\frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial s_1^{\lambda_1}\ldots\partial s_n^{\lambda_n}},\quad |\lambda|=\lambda_1+\ldots+\lambda_n.$$

Какова бы ни была бесконечно дифференцируемая функция $f(s)$,

$$D_s^\lambda \widetilde{X}_{\alpha;\,s}(f)\,|_{s=0}=D_s^\lambda \frac{\partial}{\partial s_\alpha} f\,|_{s=0}+a_\mu^{\lambda;\,\alpha}D^\mu f\,|_{s=0}, \tag{3.1}$$

причем $a_\mu^{\lambda;\,\alpha}$ — *постоянные числа, не зависящие от функции* $f(s)$, $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $|\mu|\leqslant|\lambda|$.

Условие (3.3) гл. II получается из (3.1) при $|\lambda|=1$.

---

*) В случае операторов первого порядка остается только начальное условие (1.2).

Замечание. Если $\tilde{X}_{\alpha;\,s}$ есть дифференциальный оператор первого порядка:

$$\tilde{X}_{\alpha;\,s} = \tilde{b}^l_\alpha(s)\frac{\partial}{\partial s_l},$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $\tilde{b}^l_\alpha(s)$, удовлетворяющими условию

$$\tilde{b}^l_\alpha(0) = \delta^l_\alpha,$$

то, как легко непосредственно проверить, равенство (3.1) выполняется. Обратное не верно. Например, если мы к дифференциальному оператору первого порядка добавим интегральный оператор Вольтерра с бесконечно дифференцируемым ядром, то равенство (3.1) также будет выполняться. Таким образом, операторы, удовлетворяющие условию (3.1), обобщают дифференциальные операторы (первого порядка) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Это обобщение чрезвычайно существенно для всего последующего.

3. Следующая теорема аналогична второй обратной теореме Ли.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *для произвольной* $f(t)$

$$X_{\alpha;\,t}(f)\big|_{t=0} = \tilde{X}_{\alpha;\,t}(f)\big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial t_\alpha}\Big|_{t=0}, \tag{3.2}$$

2) *выполняется условие* (3.1),

3) $[X_\alpha, X_\beta] = c^\lambda_{\alpha\beta}X_\lambda,$ (3.3)

4) $[\tilde{X}_\alpha, \tilde{X}_\beta] = c^\lambda_{\beta\alpha}\tilde{X}_\lambda.$ (3.4)

Тогда I) *из системы уравнений*

$$\tilde{X}_{\alpha;\,s}u = X_{\alpha;\,t}u \quad (\alpha = 1, \ldots, n), \tag{3.5}$$

$$u\big|_{s=0} = f(t) \tag{3.6}$$

значения последовательных производных функции $u(s, t)$ *по переменным* $s_1, \ldots, s_n$ *в точке* $s = 0$ *определяются непротиворечиво.*

II) *Если выполняется условие коммутирования* (1.4) *и ряд для* $u(s, t)$ *по степеням* $s_1, \ldots, s_n$ *сходится, то операторы* $T^s f(t) = u(s, t)$ *удовлетворяют условию* 3° *для* *о. о. с.* (условия 1° и 2°, очевидно, также выполняются).

Доказательство. Полагая в уравнении (3.5) $s=0$, мы получим, используя (3.2),

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s_\alpha}\right|_{s=0} = X_{\alpha;\,t}(f). \tag{3.7}$$

Отсюда видно, что значения производных первого порядка функции $u(s, t)$ по переменным $s_1, \ldots, s_n$ в точке $s=0$ определяются непротиворечиво.

Определим теперь вторые производные и покажем, что они также вычисляются непротиворечиво. С этой целью продифференцируем уравнение (3.5) по s_β и положим затем $s=0$. Мы получим, используя (3.2) и (3.6),

$$\tilde{X}_{\beta;\,s}\tilde{X}_{\alpha;\,s}u\,|_{s=0} = X_{\alpha;\,t}X_{\beta;\,t}\,(f). \tag{3.8}$$

Из этих уравнений, используя равенство (3.1) (с $|\lambda|=1$), мы определим значения вторых частных производных функции $u(s, t)$ по переменным $s_1, \ldots, s_n$ в точке $s=0$. Однако одна и та же производная $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial s_\alpha\,\partial s_\beta}\right|_{s=0}$ $(\alpha \neq \beta)$ при этом будет получаться из двух уравнений: из уравнения (3.8) и уравнения, которое получается из уравнения (3.8), если переставить местами индексы α и β. Покажем, что эти значения для смешанных производных совпадают. Переставляя в уравнении (3.8) местами α и β, мы получим:

$$\tilde{X}_{\alpha;\,s}\tilde{X}_{\beta;\,s}\,u\,|_{s=0} = X_{\beta;\,t}X_{\alpha;\,t}\,(f). \tag{3.8^1}$$

Обозначим значение второй производной, определяемое из уравнения (3.8), через $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial s_\alpha\,\partial s_\beta}\right|_{s=0}$, а значение второй производной, определяемой из уравнения (3.8^1), через $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial s_\beta\,\partial s_\alpha}\right|_{s=0}$. Необходимо показать, что

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial s_\alpha\,\partial s_\beta}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial s_\beta\,\partial s_\alpha}\right|_{s=0}. \tag{3.9}$$

Вычитая из равенства (3.8) равенство (3.8[1]), мы получим, используя (3.3) и (3.4),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_\alpha \, \partial s_\beta}\bigg|_{s=0} - \frac{\partial^2 u}{\partial s_\beta \, \partial s_\alpha}\bigg|_{s=0} + c_{\alpha\beta}^{\lambda} \tilde{X}_\lambda u \big|_{s=0} = c_{\alpha\beta}^{\lambda} X_{\lambda;\, t}(f).$$

Отсюда и из (3.7) следует (3.9).

Покажем теперь непротиворечивость вычисления значений следующих производных функции $u(s, t)$ по переменным $s_1, \ldots, s_n$ в точке $s = 0$. С этой целью мы рассмотрим два способа вычисления этих производных.

1-й способ. Заменим в уравнении (3.5) α на α_1 и применим затем к обеим частям этого уравнения оператор

$$\frac{\partial^r}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_2}} \quad (\alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1} = 1, 2, \ldots, n;\ r = 1, 2, \ldots).$$

Полагая затем $s = 0$, мы получим:

$$\frac{\partial^r}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_2}} X_{\alpha_1;\, s} u \bigg|_{s=0} = X_{\alpha_1;\, t} \frac{\partial^r u}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_2}}\bigg|_{s=0}. \tag{3.10}$$

Разлагая левую часть этого уравнения по формуле (3.1), мы определим последовательно и однозначно *) величины

$$\frac{\partial^{r+1} u}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_2} \partial s_{\alpha_1}}\bigg|_{s=0} = P_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1}(t).$$

Мы должны показать, что тензор $P_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_1}$ симметричен по всем индексам. Это и означает непротиворечивость вычисления последовательных производных функции $u(s, t)$. Для доказательства симметричности тензора $P_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_1}$ по всем индексам мы рассмотрим

2-й способ. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial^{r-1}}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_3}} \tilde{X}_{\alpha_2; s} \tilde{X}_{\alpha_1; s} u \bigg|_{s=0} = X_{\alpha_1;\, t} X_{\alpha_2;\, t} \frac{\partial^{r-1} u}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_3}}\bigg|_{s=0}. \tag{3.11}$$

*) Мы делаем различие между «однозначно» и «непротиворечиво». Последнее означает, что тензоры $P_{\alpha_{r+1}}, \ldots, \alpha_1$ симметричны по всем индексам. Это будет доказано ниже.

Из этой системы и уравнений (3.1) можно последовательно и однозначно определить значения

$$\left.\frac{\partial^{r+1} u}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_1}}\right|_{s=0} = Q_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1}(t).$$

Покажем, что тензоры $P_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1}$ и $Q_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1}$ совпадают. С этой целью мы покажем, что тензоры P, которые однозначно определяются из уравнений (3.10), удовлетворяют также уравнениям (3.11). Так как последние уравнения также однозначно разрешимы, то тем самым будет доказано, что тензоры $P_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_1}$ и $Q_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_1}$ совпадают.

Рассуждаем по индукции. Для $r=1$ наше утверждение уже доказано. Пусть утверждение верно для тензоров ранга $\leqslant r$. Покажем, что оно верно для тензоров ранга $r+1$. Из тождества (3.1) следует:

$$\left.\frac{\partial^{r-1}}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_3}} \widetilde{X}_{\alpha_2; s} \widetilde{X}_{\alpha_1; s} u \right|_{s=0} = \left.\frac{\partial^{r}}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_3} \partial s_{\alpha_2}} \widetilde{X}_{\alpha_1; s} u \right|_{s=0} +$$
$$+ a_{\mu}^{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_3; \alpha_2} D_s^{\mu} \widetilde{X}_{\alpha_1; s} u \,|_{s=0}. \qquad (3.12)$$

В силу предположения индукции

$$D_s^{\mu} \widetilde{X}_{\alpha_1; s} u \,|_{s=0} = X_{\alpha_1; t} D_s^{\mu} u \,|_{s=0}.$$

Поэтому, снова используя тождество (3.1), получим:

$$a_{\mu}^{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_3; \alpha_2} D_s^{\mu} \widetilde{X}_{\alpha_1; s} u \,|_{s=0} = X_{\alpha_1; t} a_{\mu}^{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_3; \alpha_2} D_s^{\mu} u \,|_{s=0} =$$
$$= X_{\alpha_1; t} \left.\frac{\partial^{r-1}}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_3}} \widetilde{X}_{\alpha_2; s} u \right|_{s=0} - X_{\alpha_1; t} \left.\frac{\partial^{r} u}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_3} \partial s_{\alpha_2}}\right|_{s=0} =$$
$$= X_{\alpha_1; t} X_{\alpha_2; t} \left.\frac{\partial^{r-1} u}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_3}}\right|_{s=0} - X_{\alpha_1; t} \left.\frac{\partial^{r} u}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_3} \partial s_{\alpha_2}}\right|_{s=0}. \qquad (3.13)$$

Из (3.11), (3.12) и (3.13) следует:

$$\left.\frac{\partial^{r}}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_3} \partial s_{\alpha_2}} \widetilde{X}_{\alpha_1; s} u \right|_{s=0} = X_{\alpha_1; t} \left.\frac{\partial^{r} u}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_3} \partial s_{\alpha_2}}\right|_{s=0},$$

т. е. уравнение (3.10). Поэтому тензоры $P_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_1}$ совпадают с тензорами $Q_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_1}$. Остается доказать симметричность тензоров $Q_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1}$. Симметричность по индексам $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_3, \alpha_2$ следует непосредственно из уравнений (3.10) по индукции.

Остается доказать симметричность по индексам α_1 и α_2. Переставляя в уравнении (3.11) местами α_1 и α_2, мы получим:

$$\frac{\partial^{r-1}}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_3}} \tilde{X}_{\alpha_1; s} \tilde{X}_{\alpha_2; s} u \bigg|_{s=0} = \\ = X_{\alpha_2; t} X_{\alpha_1; t} \frac{\partial^{r-1} u}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_3}} \bigg|_{s=0}. \tag{3.11¹}$$

Вычитая из равенства (3.11) равенство (3.11¹), мы получим, используя (3.3) и (3.4),

$$Q_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1}(t) - Q_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_2}(t) + c^{\lambda}_{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial^{r-1}}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_3}} \tilde{X}_{\lambda} u \bigg|_{s=0} = \\ = c^{\lambda}_{\alpha_1 \alpha_2} X_{\alpha_\lambda; t} \frac{\partial^{r-1} u}{\partial s_{\alpha_{r+1}} \ldots \partial s_{\alpha_r}} \bigg|_{s=0}.$$

Из этого уравнения и уравнения (3.10) следует:

$$Q_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1}(t) = Q_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_2}(t),$$

что и требовалось доказать.

Утверждение II) следует из теоремы 1.1.

§ 4. Обратная вторая теорема Ли. Случай инфинитезимальных операторов второго порядка

Рассмотрим теперь случай операторов второго порядка. Итак, пусть

$$\tilde{X}_{\alpha; s}(f)\big|_{s=0} = \frac{\partial^2 f}{\partial s_\alpha^2}\bigg|_{s=0}, \tag{4.1}$$

$$X_{\alpha; t}(f)\big|_{t=0} = \frac{\partial^2 f}{\partial t_\alpha^2}\bigg|_{t=0}. \tag{4.1¹}$$

и пусть вместо тождеств (3.1) выполняется тождество

$$D_s^{\lambda}\widetilde{X}_{\alpha;\,s}(f)\,|_{s=0} = D_s^{\lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial s_\alpha^2}\bigg|_{s=0} + a_{\mu}^{\lambda;\,\alpha}D_s^{\mu}f\,|_{s=0}, \tag{4.2}$$

причем $|\mu| \leqslant |\lambda| + 1$, $a_{\mu}^{\lambda;\,\alpha} = a_{\mu_1,\,\ldots,\,\mu_n}^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\ldots,\,\lambda_n;\,\alpha}$ — постоянные числа.

Рассмотрим систему

$$\widetilde{X}_{\alpha;\,s}\,u = X_{\alpha;\,t}\,u \quad (\alpha = 1,\,2,\,\ldots,\,n), \tag{4.3}$$

$$u\,|_{s=0} = f(t), \tag{4.4}$$

$$D_s^{\nu}u\,|_{s=0} = h_\nu f(t). \tag{4.5}$$

$\nu = (\nu_1,\,\ldots,\,\nu_n)$, $0 \leqslant \nu_l \leqslant 1$, $h_\nu = h_{\nu_1,\,\ldots,\,\nu_n}$ — постоянные числа.

Покажем, что если операторы X_α и $\widetilde{X}_\alpha$ удовлетворяют условиям коммутирования (3.5), соответственно (3.6), то значения последовательных производных функций $u(s,\,t)$ по переменным $s_1,\,\ldots,\,s_n$ в точке $s = 0$ определяются из системы уравнений (4.3) непротиворечиво. Полагая в (4.3) $s = 0$, мы определим производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s_\alpha^2}\bigg|_{s=0}$. Применяя к обеим частям уравнения (4.3) оператор D_s^{ν} и полагая затем $s = 0$, мы получим, используя начальное условие (4.5),

$$D_s^{\nu}\widetilde{X}_{\alpha;\,s}\,u\,|_{s=0} = h_\nu X_{\alpha;\,t}(f).$$

Из этого уравнения с помощью тождества (4.2) можно определить производные

$$D_s^{\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial s_\alpha^2}\bigg|_{s=0}.$$

Непротиворечивость производных $\dfrac{\partial^4 u}{\partial s_\alpha^2\,\partial s_\beta^2}\bigg|_{s=0}$ доказывается в точности так же, как и в случае операторов первого порядка.

Наконец, непротиворечивость следующих производных доказывается по индукции, так же как и в случае операторов первого порядка, с помощью уравнений (3.10) и (3.11).

Замечание. Очевидно, что последовательные производные функции $u(s, t)$ будут определяться непротиворечиво и в том случае, если в начальных условиях (4.5) правые части заменить произвольными функциями $g_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(t)$.

§ 5. Связь с группами Ли

Пусть многообразие V_n есть n-мерная группа Ли, которую мы обозначим через G_n и обозначим через $s \cdot t$ групповое произведение точек $s=(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ и $t=(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Пусть операторы T^s совпадают с операторами левого сдвига на группе G_n, т. е.

$$T^s f(t) = f(s \cdot t). \tag{5.1}$$

Известно *), что в этом случае инфинитезимальные операторы

$$X_{\alpha;\, t}(f) = \left.\frac{\partial T^s f(t)}{\partial s^\alpha}\right|_{s=0}$$

(инфинитезимальные операторы левого сдвига) и инфинитезимальные операторы

$$\tilde{X}_{\alpha;\, s}(f) = \left.\frac{\partial T^s f(t)}{\partial t^\alpha}\right|_{t=0}$$

(инфинитезимальные операторы правого сдвига) имеют вид

$$X_{\alpha;\, t}(f) = b^i_\alpha(t) \frac{\partial f}{\partial t^i}, \tag{5.2}$$

$$\tilde{X}_{\alpha;\, s}(f) = \tilde{b}^i_\alpha(s) \frac{\partial f}{\partial s^i}. \tag{5.3}$$

Операторы $\tilde{X}_{\alpha;\, s}$ (а значит, и операторы $X_{\alpha;\, t}$) линейно независимы, а также удовлетворяют условиям (3.1), (3.2), (3.4) и (3.7) гл. II.

В этом параграфе мы покажем, что и обратно, если n линейно независимых инфинитезимальных операторов $\tilde{X}_{\alpha;\, s}$

*) См. Л. С. Понтрягин [69], гл. X, стр. 395.

вида (5.3) и n линейно независимых инфинитезимальных операторов $X_{\alpha;\, t}$ вида (5.2) удовлетворяют условиям (3.1), (3.2), (3.4) и (3.7) гл. II, то обобщенный сдвиг (по крайней мере локально, в окрестности нейтрального элемента $s=0$) совпадает со сдвигом на группе (и, значит, многообразие V_n совпадает с группой вблизи точки $s=0$).

1. Обозначим через $u(s, t)=T^s f(t)$ решение задачи Коши:

$$\tilde{X}_{\alpha;\, s}(u)=X_{\alpha;\, t}u, \tag{5.4}$$

$$u\big|_{s=0}=f(t). \tag{5.5}$$

В §§ 1 и 3 этой главы было показано, что операторы T^s удовлетворяют всем условиям обобщенного сдвига. Пусть $s=(s_1, \ldots, s_n)$ и $t=(t_1, \ldots, t_n)$. Пусть $f(t)=t_i$ $(i=1, \ldots, n)$. Введем обозначение

$$u_i(s, t)=T^s(t_i).$$

Определим произведение точек s и t следующим образом:

$$(s*t)_i=u_i(s, t). \tag{5.6}$$

Покажем, что это произведение удовлетворяет групповым аксиомам *).

Из начального условия (5.5) следует, что точка $s=0$ играет роль левой единицы. Если мы покажем, что для произведения (5.6) существует обратный элемент, то тогда точка $s=0$ будет также играть роль правой единицы **) и, значит, для произведения (5.6) будет существовать единица.

Для того чтобы найти обратный элемент, следует при фиксированном t решить относительно s систему уравнений

$$u_i(s, t)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{5.7}$$

Эта система при $t=0$ имеет очевидное решение $s=0$. Чтобы показать, что система (5.7) при малых t и s имеет единственное решение, необходимо показать, что якобиан этой системы $\dfrac{D(u_1, \ldots, u_n)}{D(s_1, \ldots, s_n)}$ отличен от нуля. Из системы

*) См. Л. С. Понтрягин [69], гл. 1, § 1.
**) См. Л. С. Понтрягин [69], стр. 14.

уравнений (5.4) следует:

$$\frac{\partial u_l}{\partial s_j} = \widetilde{B}_j^\alpha(s)\, b_\alpha^\beta(t)\, \frac{\partial u_l}{\partial t_\beta}, \tag{5.8}$$

где $\{\widetilde{B}_j^\alpha(s)\}$ — матрица, обратная матрице $\{\widetilde{b}_\alpha^j(s)\}$.

Полагая в уравнении (5.8) сначала $s=0$, а затем $t=0$, мы получим:

$$\left(\frac{\partial u^l}{\partial s^j}\right)\Bigg|_{\substack{s=0\\ t=0}} = b_\alpha^\beta(0).$$

Так как по условию операторы $X_{\alpha;\,t} = b_\alpha^l(t)\frac{\partial}{\partial t_l}$ линейно независимы, то

$$\mathrm{Det}\,\{b_\alpha^\beta(0)\} \neq 0.$$

Поэтому якобиан системы (5.7) для малых s и t отличен от нуля, и следовательно, эта система разрешима. Что касается ассоциативности умножения (5.6), то она следует из доказанной в § 1 ассоциативности о. о. с.

2. Пусть $f(t)$ — дифференцируемая функция. Покажем, что

$$T^s f(t) = f(s * t) = \Phi(s,\, t). \tag{5.9}$$

Мы должны показать, что функция $\Phi(s,\, t)$ есть решение задачи (5.4) — (5.5). Начальное условие (5.5) проверяется непосредственно.

Проверим уравнение. Мы имеем, обозначая, как и прежде, $(s*t)_l$ через u_l,

$$\widetilde{X}_{\alpha;\,s}(\Phi) = \widetilde{b}_\alpha^l(s)\frac{\partial\Phi}{\partial s_l} = \widetilde{b}_\alpha^l(s)\frac{\partial\Phi}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial s_l} =$$

$$= \widetilde{b}_\alpha^l(s)\frac{\partial\Phi}{\partial u_j}\widetilde{B}_l^\beta(s)\, b_\beta^\gamma(t)\frac{\partial u_j}{\partial t_\gamma} = b_\alpha^\gamma(t)\frac{\partial\Phi}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial t_\gamma} =$$

$$= b_\alpha^\gamma(t)\frac{\partial\Phi}{\partial t^\gamma} = X_{\alpha;\,t}(\Phi).$$

§ 6. Два простых примера

1. В этом параграфе мы рассмотрим два простых примера о. о. с. и соответствующие им инфинитезимальные операторы.

1-й пример. Пространство V_n совпадает с двумерным действительным эквивалентным пространством R_2. Операторы L_{11}, L_{12}, L_{22} имеют вид

$$L_{11;\,t}=\frac{\partial^2}{\partial t_1^2};\quad L_{12;\,t}=\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2};\quad L_{22;\,t}=\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}.$$

Операторы $\widetilde{L}_{\alpha\beta;\,s}$ совпадают с операторами $L_{\alpha\beta;\,s}$. Эти операторы между собой коммутируют.

Рассмотрим задачу:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2}&=\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2},\\ \frac{\partial^2 u}{\partial s_1\,\partial s_2}&=\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\,\partial t_2},\\ \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2}&=\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2},\end{aligned}\right\}\tag{6.1}$$

$$u\big|_{s=0}=f(t)\qquad (t=(t_1,\ t_2);\ s=(s_1,\ s_2)),\tag{6.2}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s_1}\Big|_{s=0}&=0,\\ \frac{\partial u}{\partial s_2}\Big|_{s=0}&=0.\end{aligned}\right\}\tag{6.3}$$

Нетрудно проверить, что решение задачи (6.1) — (6.2) — (6.3) единственно и имеет вид

$$T^s f(t)=\frac{1}{2}\left[f(t_1+s_1,\ t_2+s_2)+f(t_1-s_1,\ t_2-s_2)\right].\tag{6.4}$$

Так как система (6.1) с постоянными коэффициентами, то ее решение можно искать с помощью интеграла Фурье. Мы пришли бы к тому же ответу (6.4).

2-й пример. Пусть, как и в предыдущем примере, $V_n=R_2$, однако теперь рассматриваются только два инфинитезимальных оператора:

$$L_{1;\,t}=\frac{\partial^2}{(\partial t_1)^2},\quad L_{2;\,t}=\frac{\partial^2}{(\partial t_2)^2}.$$

Обобщенный сдвиг T^s определяется как решение следующей задачи Коши:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}, \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

$$u\big|_{s=0} = f(t), \tag{6.6}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s_1}\bigg|_{s=0} &= h_1 f(t), \\ \frac{\partial u}{\partial s}\bigg|_{s=0} &= h_2 f(t), \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1\, \partial s_2}\bigg|_{s=0} = h_{12} f(t), \tag{6.8}$$

где h_1, h_2, h_{12} — произвольные постоянные числа. Как мы видели в § 4, эта задача совместна и ее решение удовлетворяет всем условиям обобщенного сдвига. Согласно теореме 2.1 пространство D состоит из функций, удовлетворяющих граничным условиям:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\bigg|_{s=0} = h_1 \varphi(0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s_2}\bigg|_{s=0} = h_2 \varphi(0),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1\, \partial s_2}\bigg|_{s=0} = h_{12} \varphi(0),$$

где

$$\varphi(s) = \frac{\partial^{2N} f(s)}{\partial s_1^{2k}\, \partial s_2^{2l}} \qquad (k + l = N,\ N = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Задачу (6.5) — (6.6) — (6.7) — (6.8) можно решить в явном виде с помощью интеграла Фурье. При этом мы освободимся от условия аналитичности начальной функции $f(t_1, t_2)$.

Найдем общее решение системы (6.5). Будем его искать в виде

$$u(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int E(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha t_1 + \beta t_2) + i(\lambda s_1 + \mu s_2)}\, d\alpha\, d\beta.$$

Подставляя эту функцию в систему (6.5), мы получим, используя единственность разложения функции в интеграл Фурье,

$$(\lambda^2 - \alpha^2) E(\alpha, \beta) = 0,$$
$$(\mu^2 - \beta^2) E(\alpha, \beta) = 0.$$

Отсюда следует:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2 &= \alpha^2, \\ \mu^2 &= \beta^2. \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

Система (6.9) имеет следующие четыре решения:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha, \\ \mu_1 &= \beta, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \lambda_2 &= \alpha, \\ \mu_2 &= -\beta, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \lambda_3 &= -\alpha, \\ \mu_3 &= \beta, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \lambda_4 &= -\alpha, \\ \mu_4 &= -\beta. \end{aligned}\right\}$$

Поэтому общее решение системы (6.5) содержит четыре произвольных функции и имеет следующий вид:

$$u(s, t) = \theta_1(t_1 + s_1, t_2 + s_2) + \theta_2(t_1 + s_1, t_2 - s_2) + \\ + \theta_3(t_1 - s_1, t_2 + s_2) + \theta_4(t_1 - s_1, t_2 - s_2).$$

Используя начальные условия (6.6), (6.7) и (6.8), можно выразить функции θ_1, θ_2, θ_3 и θ_4 через функцию $f(t)$. Это, однако, связано с громоздкими вычислениями. Поэтому для решения задачи (6.5) — (6.9), мы используем другой метод. Пусть сначала $h_1 = h_2 = h_{12} = 0$. Тогда решение задачи (6.5) — (6.8) имеет вид

$$u_0(s, t) = \frac{1}{4}[f(t_1 + s_2, t_2 + s_2) + \\ + f(t_1 + s_1, t_2 - s_2) + f(t_1 - s_1, t_2 + s_2) + f(t_1 - s_1, t_2 - s_2)].$$

Теперь нетрудно непосредственно проверить, что в общем случае решение задачи (6.5) — (6.8) имеет вид

$$u(s, t) = u_0(s, t) + h_1 \int_0^{s_1} u_0(\xi, s_2, t_1, t_2)\, d\xi + \\ + h_2 \int_0^{s_2} u_0(s_1, \eta; t_1, t_2)\, d\eta + h_{12} \int_0^{s_1}\int_0^{s_2} u_0(\xi, \eta; t_1, t_2)\, d\xi\, d\eta. \tag{6.10}$$

2. Второй пример можно обобщить, заменив операторы $\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}$ и $\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}$ на операторы

$$L_{1;\,t}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2} + q_1(t_1) f,$$

$$L_{2;\,t}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2} + q_2(t_2) f.$$

Нетрудно непосредственно проверить, что решение задачи

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + q_1(s_1) u &= \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + q_1(t_1) u, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + q_2(s_2) u &= \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} + q_2(t_2) u, \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

$$u\big|_{s=0} = f(t), \tag{6.12}$$

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\partial u}{\partial s_1}\right|_{s=0} &= h_1 f(t), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial s_2}\right|_{s=0} &= h_2 f(t), \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial s_1\, \partial s_2}\right|_{s=0} = h_{12} f(t) \tag{6.14}$$

имеет вид

$$T^s f(t) = u_0(s,\, t) + h_1 \int\limits_0^{s_1} u_0(\xi,\, s_2;\, t)\, d\xi + \\ + h_2 \int\limits_0^{s_2} u_0^2(s_1,\, \eta;\, t)\, d\eta + h_{12} \int\limits_0^{s_1} \int\limits_0^{s_2} u_0(\xi,\, \eta;\, t)\, d\xi\, d\eta.$$

Здесь $u_0(s,\, t)$ есть решение задачи (6.11) — (6.12) — (6.13) — (6.14) при $h_1 = h_2 = h_{12} = 0$.

§ 7. Инфинитезимальные операторы с постоянными коэффициентами

1. Предположим, что обобщенный сдвиг T^s порождается инфинитезимальными операторами $L_{k;\,s}$ с постоянными коэффициентами. Так как такие операторы коммутируют, то операторы обобщенного сдвига также должны коммутировать и следовательно, $\widetilde{L}_l = L_l$.

Поэтому функция $u(s, t) = T^s f(t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$L_{k;\,s} u = L_{k;\,t} u \qquad (k = 1, 2, \ldots, p \geqslant n), \tag{7.1}$$

$$u\big|_{s=0} = f(t), \tag{7.2}$$

$$D_s^\lambda u\big|_{s=0} = h_\lambda f(t), \tag{7.3}$$

где $D_s^\lambda = \dfrac{\partial^{|\lambda|}}{(\partial s^1)^{\lambda_1} \ldots (\partial s^n)^{\lambda_n}}$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = |\lambda|$, h_λ — постоянные числа.

Будем искать решение уравнения (7.1) в виде

$$u(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int E(\alpha) e^{i(\alpha, t) + i(\nu, s)} \, d\alpha, \tag{7.4}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$; $(\alpha, t) = \sum_k \alpha_k t_k$, $(\nu, s) = \sum \nu_k s_k$, $d\alpha = d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$; $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — некоторые функции от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, которые нам следует определить. Для определения этих функций подставим выражение (7.4) в уравнение (7.1). Пусть

$$L_k = a_{k;\,\gamma_k} D^{\gamma_k},$$

где $\gamma_k = (\gamma_{k_1}, \ldots, \gamma_{k_n})$. Тогда из (7.4) следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int E(\alpha) a_{k,\,\gamma_k} (i\alpha_1)^{\gamma_{k_1}} \ldots (i\alpha_n)^{\gamma_{k_n}} e^{i(\alpha, t) + i(\nu, s)} \, d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int E(\alpha) a_{k,\,\gamma_k} (i\nu_1)^{\gamma_{k_1}} \ldots (i\nu_n)^{\gamma_{k_n}} e^{i(\alpha, t) + i(\nu, s)} \, d\alpha. \tag{7.5}$$

Так как $E(\alpha)$ — произвольная функция, то из (7.5) следует, что функции $\nu_1, \ldots, \nu_n$ должны удовлетворять следующей системе алгебраических уравнений:

$$a_{k,\,\gamma_k} (i\nu_1)^{\gamma_{k_1}} \ldots (i\nu_n)^{\gamma_{k_n}} = a_{k;\,\gamma_k} (i\alpha_1)^{\gamma_{k_1}} \ldots (i\alpha_n)^{\gamma_{k_n}}, \tag{7.6}$$

в которой правые части считаются известными. Пусть всего имеется Q различных решений системы (7.6):

$$\nu_r^{(q)} = \varphi_r^{(q)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n;\ q = 1, 2, \ldots, Q). \tag{7.7}$$

Тогда очевидно, что число начальных условий (7.2) — (7.3) также должно равняться Q. При фиксированном q и переменном r формулы (7.7) дают преобразование пространства R_n в действительное или комплексное n-мерное пространство. Покажем, что эти преобразования образуют полугруппу, т. е. удовлетворяют следующим условиям:

1°. Существует единичный элемент.

2°. Композиция двух преобразований также входит в число преобразований.

Условие 1° следует из того, что система (7.6) имеет очевидное решение $\nu_r = \alpha_r$, которое играет роль единичного преобразования.

Чтобы доказать условие 2°, запишем систему (7.6) в виде

$$P_k(\nu_1, \ldots, \nu_n) = P_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Тогда из определения функций $\varphi_r^{(q)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ следует:

$$P_k\left\{\varphi_1^{(q_1)}\left[\varphi_1^{(q_2)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, \varphi_n^{(q_2)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\right], \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \varphi_n^{(q_1)}\left[\varphi_1^{(q_2)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, \varphi_n^{(q_2)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\right]\right\} =$$
$$= P_k\left[\varphi_1^{q_2}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, \varphi_n^{q_2}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\right] = P_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

что доказывает условие 2°.

Чтобы преобразования (7.7) образовывали группу, нужно, чтобы при фиксированном q уравнения (7.7) однозначно решались относительно переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Это может быть лишь в том случае, когда система (7.7) линейна:

$$\nu_r^{(q)} = a_{r1}^{(q)}\alpha_1 + \ldots + a_{rn}^{(q)}\alpha_n. \tag{7.8}$$

В случае преобразований вида (7.8) обобщенный сдвиг имеет вид

$$T^s f(t) = \frac{1}{Q}\sum_{q=1}^{Q}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int E(\alpha)\, e^{i(\alpha,\, t) + i\sum\limits_{r=1}^{n} s_r \sum\limits_{\lambda=1}^{n} a_{r\lambda}^{(q)}\alpha_\lambda}\, d\alpha =$$
$$= \frac{1}{Q}\sum_{q=1}^{Q} f\left(t_1 + \sum_r a_{r1}^{(q)} s_r, \ldots, t_n + \sum_r a_{rn}^{(q)} s_r\right)$$

и, следовательно, является частным случаем обобщенного сдвига Дельсарта (см. гл. I, § 2).

2. Следующий пример показывает, что преобразования (7.7) не обязательно образуют группу. Пусть $n = 1$,

$$P(\alpha) = \alpha^3 + a\alpha + b.$$

Система (7.6) состоит из одного уравнения

$$\nu^3 + a\nu = \alpha^3 + a\alpha. \tag{7.9}$$

Одно решение этого уравнения очевидно: это $\nu_1 = \alpha = \varphi_1(\alpha)$. Чтобы найти два других решения, перепишем уравнение (7.9) в виде

$$(\nu^3 - \alpha^3) + a(\nu - \alpha) = 0,$$

или, разделив на $\nu - \alpha$:

$$\nu^2 + \nu\alpha + (\alpha^2 + a) = 0.$$

Решая это уравнение относительно ν, получим:

$$\nu_2 = -\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{-\frac{3}{4}\alpha^2 - a} = \varphi_2(\alpha),$$

$$\nu_3 = -\frac{1}{2}\alpha - \sqrt{-\frac{3}{4}\alpha^2 - a} = \varphi_3(\alpha).$$

Так как эти уравнения относительно α не первой степени, то они решаются неоднозначно и поэтому функции $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$ и $\varphi_3(\alpha)$ образуют полугруппу, но не группу.

§ 8. Ряд Тэйлора — Дельсарта

1. Пусть в R_n задано n коммутирующих дифференциальных операторов $L_{i;\,t}$. Допустим, что для любых постоянных комплексных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ система уравнений

$$L_{i;\,t}\varphi = \lambda_i\varphi \tag{8.1}$$

с дополнительными начальными условиями вида

$$\varphi\big|_{t=0} = 1, \tag{8.2}$$

$$D_t^\alpha \varphi(t)\big|_{t=0} = h_\alpha, \tag{8.3}$$

где $D_t^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial t^1)^{\alpha_1} \ldots (\partial t^n)^{\alpha_n}}$, h_α — произвольные постоянные числа, имеет единственное решение и это решение относительно $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ есть целая аналитическая функция. Пусть разложение функции $\varphi(t, \lambda)$ по степеням $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ имеет вид

$$\varphi(t, \lambda) = \sum_{k_1, \ldots, k_n} \lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_n^{k_n} \varphi_{k_1 \ldots k_n}(t). \tag{8.4}$$

Из начального условия (8.2) следует:

$$\varphi_{0, \ldots, 0}(0) = 1, \tag{8.5}$$

$$\varphi_{k_1, \ldots, k_n}(0) = 0 \qquad (k_1 + \ldots + k_n > 0). \tag{8.6}$$

Из начальных условий (8.3) следует:

$$D_t^\alpha \varphi_{0, \ldots, 0}(t)\Big|_{t=0} = h_\alpha, \tag{8.7}$$

$$D_t^\alpha \varphi_{k_1, \ldots, k_n}(t)\Big|_{t=0} = 0 \qquad (k_1 + \ldots + k_n > 0). \tag{8.8}$$

Применяя к (8.4) оператор $L_{i,\,t}$, мы получим, используя уравнение (8.1),

$$\sum_{k_1, \ldots, k_n} \lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_n^{k_n} L_{i;\,t} \varphi_{k_1, \ldots, k_n}(t) = \\ = \sum_{k_1, \ldots, k_n} \lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_i^{k_i+1} \ldots \lambda_n^{k_n} \varphi_{k_1, \ldots, k_n}(t).$$

Из этого равенства следует:

$$L_{i;\,t} \varphi_{k_1, \ldots, k_n}(t) = \varphi_{k_1, \ldots, k_i - 1, \ldots, k_n}(t) \qquad (k_i > 0), \tag{8.9}$$

$$L_{i;\,t} \varphi_{k_1, \ldots, k_n}(t) = 0 \qquad (k_i = 0). \tag{8.10}$$

Пусть $f(t)$ обладает тем свойством, что для любых натуральных $k_1, \ldots, k_n$ имеет смысл выражение $L_{1;\,t}^{k_1} L_{2;\,t}^{k_2} \ldots L_{n;\,t}^{k_n} f(t)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k_1, \ldots, k_n} \varphi_{k_1, \ldots, k_n}(s)\, L_{1;\,t}^{k_1} \ldots L_{n;\,t}^{k_n} f(t), \tag{8.11}$$

который мы будем называть рядом Тэйлора — Дельсарта. Покажем, что этот ряд является формальным решением следующей задачи Коши:

$$L_{i;\,s} u = L_{i;\,t} u, \tag{8.12}$$

$$u\big|_{s=0} = f(t), \tag{8.13}$$

$$D_s^\alpha u\Big|_{s=0} = h_\alpha f(t), \tag{8.14}$$

и, следовательно, дает разложение обобщенного сдвига T^s в бесконечный ряд. Начальное условие (8.13) следует из условий (8.5) и (8.6). Начальные условия (8.14) следуют из (8.7) и (8.8).

Проверим уравнение (8.12).

Используя (8.9) и (8.10), получим:

$$L_{i;\,s} \sum_{k_1,\,\ldots,\,k_n} \varphi_{k_1,\,\ldots,\,k_n}(s)\, L_{1;\,t}^{k_1} \ldots L_{n;\,t}^{k_n} f(t) =$$
$$= \sum_{k_1,\,\ldots,\,k_n} L_{i;\,s} \varphi_{k_1,\,\ldots,\,k_n}(s)\, L_{1;\,t}^{k_1} \ldots L_{n;\,t}^{k_n} f(t) =$$
$$= \sum_{k_1,\,\ldots,\,k_n} \varphi_{k_1,\,\ldots,\,k_{i-1},\,\ldots,\,k_n} L_{1;\,t}^{k_1} \ldots L_{n;\,t}^{k_n} f(t) =$$
$$= \sum_{k_1,\,\ldots,\,k_n} \varphi_{k_1,\,\ldots,\,k_n} L_{1;\,t}^{k_1} \ldots L_{i;\,t}^{k_i+1} \ldots L_{n;\,t}^{k_n} f(t) =$$
$$= L_{i;\,t} \sum_{k_1,\,\ldots,\,k_n} \varphi_{k_1,\,\ldots,\,k_n}(s)\, L_{1;\,t}^{k_1} \ldots L_{n;\,t}^{k_n} f(t),$$

что доказывает уравнение (8.12).

2. В некоторых частных случаях можно доказать сходимость ряда (8.11), причем даже не в локальной форме, и тем самым обосновать предыдущие формальные соображения.

Рассмотрим обобщенный сдвиг на R_1, и пусть инфинитезимальным оператором является дифференциальный оператор второго порядка

$$L_1 f(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} + \alpha(t) \frac{df}{dt} + \beta(t) f.$$

Обозначим через $\varphi(t;\,\lambda)$ решение уравнения

$$L_t \varphi = \lambda \varphi, \tag{8.15}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} \varphi(0,\,\lambda) &= 1, \\ \varphi_t'(0,\,\lambda) &= h, \end{aligned}\right\} \tag{8.16}$$

где h — произвольное комплексное число. Пусть

$$\varphi(t,\,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(t). \tag{8.17}$$

Из начальных условий (8.15) следует:

$$\varphi_0(0)=1, \quad \varphi_0'(0)=h,$$
$$\varphi_k(0)=0, \quad \varphi_k'(0)=0 \qquad (k>0).$$

Далее, подставляя разложение (8.17) в уравнение (8.15), мы получим:

$$L\varphi_0=0, \quad L\varphi_k=\varphi_{k-1}.$$

Обозначим через $T^s f(t)$ решение задачи Коши:

$$\left.\begin{aligned} L_s u &= L_t u, \\ u|_{s=0} &= f(t), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} &= hf(t). \end{aligned}\right\} \tag{8.18}$$

Далее, пусть $f(t)$ такая, что имеют смысл выражения $L_t^k f(t)$ $(k=1, 2, \ldots)$. Положим

$$F_n(s, t)=\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(s)\,L_t^k f(t),$$
$$r_n(s, t)=T^s f(t)-F_n(s, t).$$

Очевидно, что $r_n(s, t)$ есть остаточный член формулы Тэйлора — Дельсарта. Чтобы оценить r_n при $n\to\infty$, выведем для этой функции интегральную формулу. С этой целью покажем сначала, что функция $r_n(s, t)$ является решением некоторой задачи Коши. Мы имеем:

$$L_s r_n=L_s T^s f(t)-\sum_{k=0}^{n}L_s\varphi_k(s)\,L_t^k f(t)=L_t T^s f(t)-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\varphi_{k-1}(s)\,L_t^k f(t)=L_t T^s f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k(s)\,L_t^{k+1} f(t)=$$
$$=L_t r_n+\varphi_n(s)\,L_t^{n+1} f(t), \tag{8.19}$$
$$r_n|_{s=0}=0, \tag{8.20}$$
$$\left.\frac{\partial r_n}{\partial s}\right|_{s=0}=0. \tag{8.21}$$

Если $v(s, t; \sigma, \tau)$ есть функция Римана уравнения (8.18), то решение задачи (8.19) — (8.20) — (8.21) можно записать в виде *)

$$r_n(s, t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Delta}\int \varphi_n(\sigma) L_\tau^{n+1} f(\tau) v(s, t; \sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau, \quad (8.22)$$

где Δ есть треугольник ABC в (σ, τ)-плоскости с вершинами в точках $A(t-s, 0)$, $C(t, s)$, $B(t+s, 0)$ (рис. 7).

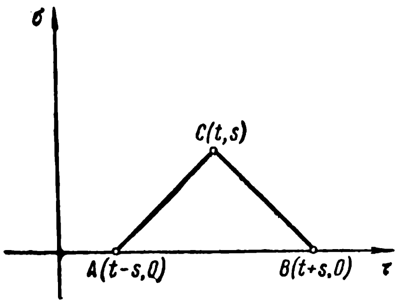

Рис. 7.

Если $\varphi_n(\sigma)$ и v в треугольнике Δ неотрицательны, то, применяя к интегралу (8.22) теорему о среднем значении, мы получим:

$$r_n(s, t) = L_\zeta^{n+1} f(\zeta) \int\limits_{\Delta}\int \varphi_n(\sigma) v(s, t; \sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau, \quad (8.23)$$

где $\zeta = t + \theta s$, $|\theta| < 1$.

Если оператор L_t имеет вид

$$L_t = \frac{d^2}{dt^2} + \alpha(t)\frac{d}{dt},$$

то, как нетрудно непосредственно проверить, функция $\varphi_{n+1}(s)$ удовлетворяет уравнению

$$L_s u - L_t u = \varphi_n(s)$$

и начальным условиям

$$u|_{s=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} = 0.$$

*) См., например, Курант и Гильберт, Методы математической физики, т. II, стр. 352 и далее.

Поэтому из формулы (8.12) следует, что

$$\varphi_{n+1}(s)=\int\limits_{\Delta}\int \varphi_n(\sigma)\, v(s,\, t;\ \sigma,\, \tau)\, d\sigma\, d\tau,$$

и, значит, формула (8.23) принимает вид

$$r_n(s,\, t)=\varphi_{n+1}(s)\, L_{\zeta}^{n+1} f(\zeta)\big|_{\zeta=t+\theta s} \quad (|\theta|<1). \tag{8.24}$$

3. Укажем теперь простой признак неотрицательности функций $\varphi_n(s)$ и $v(s,\, t;\ \sigma,\, \tau)$.

Теорема 8.1. *Если* $\alpha(0)\geqslant 0,\ h\geqslant 0,$

$$q(t)=\frac{-\beta(t)+d''(t)}{\alpha(t)}\geqslant 0,$$

то для $t\geqslant 0$ $\varphi_n(t)>0$.

Доказательство. $\varphi_0(t)$ есть решение уравнения

$$\varphi_0''(t)+\alpha(t)\varphi_0'(t)+\beta(t)\varphi_0(t)=0, \tag{8.25}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_0(0)=1, \quad \varphi_0'(0)=h.$$

Пусть

$$a(t)=\exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_0^t \alpha(u)\, du\right\}, \quad \psi_0(t)=\varphi_0(t)\, a(t).$$

Легко проверить, что $\psi_0(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi_0''(t)-q(t)\psi_0(t) \tag{8.26}$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} \psi_0(0)&=1, \\ \psi_0'(0)&=\frac{1}{2}\alpha(0)+h=h_1. \end{aligned}\right\} \tag{8.27}$$

Так как $a(t)>0$, то для доказательства неравенства $\varphi_0(t)>0$ достаточно показать, что $\psi_0(t)>0$.

Заменяя задачу (8.26) — (8.27) интегральным уравнением, мы получим:

$$\psi_0(t)=1+h_1+\int\limits_0^t (t-\tau)\psi_0(\tau)\, d\tau.$$

Так как $1+h_1>0$, то, решая это уравнение по методу итераций, мы покажем, что $\psi_0(t)>0$.

Докажем теперь положительность функций $\varphi_n(t)$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Пусть $\psi_n(t)=a(t)\varphi_n(t)$. $\psi_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi_n''-q(t)\psi_n=\psi_{n-1}(t)$$

и нулевым начальным условиям. Поэтому соответствующее интегральное уравнение имеет вид

$$\psi_n(t)=\int_0^t (t-\tau)\,q(\tau)\,\psi_n(\tau)\,d\tau+\int_0^t (t-\tau)\,\psi_{n-1}(\tau)\,d\tau.$$

Решая это уравнение по методу итераций, получим по индукции, что $\psi_n(t)>0$.

4. Рассмотрим теперь условия положительной функции Римана $v(s, t;\ \sigma, \tau)$.

Теорема 8.2. *Если $q(t)$ монотонно убывает, то* $v(s, t;\ \sigma, \tau)>0$.

Доказательство *). Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\alpha(s)\frac{\partial u}{\partial s}+\beta(s)\,u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha(t)\frac{\partial u}{\partial t}+\beta(t)\,u+f(s, t), \tag{8.28}$$

$$u|_{s=0}=0, \tag{8.29}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0}=0. \tag{8.30}$$

По определению функции Римана v решение этой задачи имеет вид

$$u(s, t)=\frac{1}{2}\iint_{\Delta} f(\sigma, \tau)\,v(s, t;\ \sigma, \tau)\,d\sigma\,d\tau. \tag{8.31}$$

Отсюда видно, что для доказательства положительности функции v достаточно показать, что для любой положительной функции $f(s, t)$ решение задачи (8.28)—(8.29)—(8.30) положительно. Помножим обе части уравнения (8.28) на $a(s)\,a(t)$.

*) См. § 6 гл. III, где рассмотрен аналогичный вопрос.

Тогда уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s^2} - q(s)\,\tilde{u} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - q(t)\,\tilde{u} + g(s, t), \tag{8.32}$$

где $\tilde{u} = a(s)\,a(t)\,u$; $g(s, t) = a(s)\,a(t)\,f(s, t)$. Очевидно, что функции u, $\tilde{u}$, а также f и g одновременно положительны или неположительны. Поэтому достаточно доказать положительность функции $\tilde{u}$. Для этой функции начальные условия, так же как и для u, нулевые:

$$\tilde{u}\,\big|_{s=0} = 0, \tag{8.33}$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}\right|_{s=0} = 0. \tag{8.34}$$

Перепишем уравнение (8.32) в виде

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = [q(s) - q(t)]\,\tilde{u} + g(s, t).$$

Рассматривая в этом уравнении правую часть как известную функцию, используя начальные условия (8.33) и (8.34), а также известную формулу для решения неоднородного одномерного волнового уравнения, получим для $\tilde{u}(s, t)$ следующее интегральное уравнение:

$$\tilde{u}(s, t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta} g(\sigma, \tau)\,d\sigma\,d\tau + {}$$

$$+ \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta} [q(\tau) - q(\sigma)]\,\tilde{u}(\sigma, \tau)\,d\sigma\,d\tau, \tag{8.35}$$

где Δ — треугольник, указанный на рис. 7. В этом треугольнике $\tau \leqslant \sigma$, и поэтому, так как по предположению $q(t)$ монотонно убывает, то $q(\tau) - q(\sigma) \geqslant 0$. Решая уравнение (8.35) по методу итераций, полагая

$$\tilde{u}_0(s, t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta} g(\sigma, \tau)\,d\sigma\,d\tau,$$

мы докажем, что $\tilde{u}(s, t) > 0$, что и требовалось доказать.

ГЛАВА VIII

СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА

§ 1. Вывод уравнений

1. Пусть V_n — n-мерное действительное многообразие и T^s, $s \in V_n$, — семейство операторов обобщенного сдвига. Обозначим через $m(t)$ вполне аддитивную действительную меру, определенную на борелевских множествах $E \subset V_n$, и через $\widetilde{T}^s$ — сопряженные операторы обобщенного сдвига относительно этой меры (см. § 3 гл. I):

$$\int_{V_n} T^s f(t) \cdot \overline{g(t)}\, dm(t) = \int_{V_n} f(t)\, \overline{\widetilde{T}^s g(t)}\, dm(t). \qquad (1.1)$$

Предположим, что функция $u(s, t) = T^s f(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\widetilde{N}_{\alpha;\, s} u = N_{\alpha;\, t} u \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p) \qquad (1.2)$$

и начальным условиям

$$u|_{s=0} = f(t), \qquad (1.3)$$

$$D_s^{\lambda} u|_{s=0} = h_{\lambda} f(t), \qquad (1.4)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и h_λ — постоянные числа. Будем предполагать, что если решение задачи (1.2) — (1.3) — (1.4) существует, то оно единственно.

Теорема 1.1. *Обозначим через $N^*_{\alpha;\, t}$ операторы, сопряженные для операторов $N_{\alpha;\, t}$ относительно меры $m(t)$, и через $\overline{N}_{\alpha;\, s}$ дифференциальные операторы с комплексно сопряженными коэффициентами.*

Тогда функция $v(s, t) = \widetilde{T}^s g(t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\overline{N}_{\alpha;\, s} v = N^*_{\alpha;\, t} v \qquad (1.5)$$

и начальным условиям

$$v|_{s=0} = g(t), \tag{1.6}$$

$$D_s^\lambda v|_{s=0} = \overline{h}_\lambda g(t). \tag{1.7}$$

Доказательство. Применим к равенству (1.1) оператор $N_{\alpha;\,s}$. Используя условие коммутирования (см. гл. II, § 1), получим:

$$\int\limits_{V_n} T^s N_{\alpha;\,t} f(t)\,\overline{g(t)}\,dm(t) = \int\limits_{V_n} f(t)\,\overline{N^*_{\alpha;\,t}\widetilde{T}^s g(t)}\,dm(t) =$$

$$= \int\limits_{V_n} f(t)\,\overline{N_{\alpha;\,s}\widetilde{T}^s g(t)}\,dm(t).$$

Из этого равенства и произвольности функции $f(t)$ следует равенство (1.5). Полагая в (1.1) $s=0$, получим условие (1.6). Наконец, дифференцируя (1.1) λ_1 раз по s_1, λ_2 раза по s_2 и т. д. λ_n раз по s_n и полагая затем $s=0$, получим, используя начальное условие (1.4), начальное условие (1.7).

Замечание. Если операторы T^s действительны, т. е. преобразуют действительные функции в действительные, то коэффициенты операторов $N_{\alpha;\,s}$ и числа h_λ действительны.

Поэтому система (1.5) — (1.6) — (1.7) в этом случае принимает вид

$$N_{\alpha;\,s} v = N^*_{\alpha;\,t} v, \tag{1.5^1}$$

$$v|_{s=0} = g(t), \tag{1.6^1}$$

$$D_s^\lambda v|_{s=0} = h_\lambda g(t). \tag{1.7^1}$$

2. Предположим теперь, что мера $m(t)$ такова, что операторы $\widetilde{T}^s$ удовлетворяют условию

$$\widetilde{T}^r_s T^s f(t) = T^s_t \widetilde{T}^r f(t) \tag{1.8}$$

(см. гл. I, § 3).

Теорема 1.2. *Для выполнения условия* (1.8) *достаточно, чтобы для произвольной функции* $f(t)$ *выполнялись условия коммутирования*

$$N^*_{\alpha;\,s} T^s f(t) = T^s N^*_{\alpha;\,t} f(t) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p) \tag{1.9}$$

и чтобы задача (1.5) — (1.6) — (1.7) *имела единственное решение.*

Доказательство. Введем обозначения:

$$\Phi(s, r; t) = \widetilde{T}^r_s T^s f(t),$$

$$\Psi(s, r; t) = T^s_t \widetilde{T}^r f(t).$$

Функция $\Phi(s, r; t)$ по переменным s и r есть решение задачи:

$$\overline{N}_{\alpha; r}\Phi = \overset{*}{N}_{\alpha; s}\Phi, \tag{1.10}$$

$$\Phi|_{r=0} = T^s f(t), \tag{1.11}$$

$$D^\lambda_r \Phi|_{r=0} = \overline{h}_\lambda T^s f(t). \tag{1.12}$$

Покажем, что функция Ψ также является решением этой задачи. В таком случае из единственности решения будет следовать равенство (1.8). Начальные условия (1.11) и (1.12) проверяются непосредственно. Проверим уравнение (1.10) Мы имеем, используя условие (1.9),

$$\overline{N}_{\alpha; r}\Psi = T^s_t \overline{N}_{\alpha; r} \widetilde{T}^r f(t) = T^s_t \overset{*}{N}_{\alpha; t} \widetilde{T}^r f(t) = \overset{*}{N}_{\alpha; s}\Psi.$$

Замечание. Из определения инфинитезимальных операторов (см. гл. II, § 1) следует, что

$$N_{\alpha; t} f = D^\mu_s T^s f(t)|_{s=0}.$$

Поэтому из равенства (1.1) следует:

$$\int_{V_n} N_{\alpha; t} f(t) \overline{g(t)}\, dm(t) = \int f(t) \overline{D^\mu_s \widetilde{T}^s f(t)|_{s=0}}\, dm(t).$$

С другой стороны,

$$\int_{V_n} N_{\alpha; t} f(t) \overline{g(t)}\, dm(t) = \int_{V_n} f(t) \overline{\overset{*}{N}_{\alpha; t} g(t)}\, dm(t).$$

Из этих равенств и произвольности функции $f(t)$ следует:

$$D^\mu_s \widetilde{T}^s g(t)|_{s=0} = \overset{*}{N}_{\alpha; t} g(t),$$

где $g(t)$ — произвольная функция.

Поэтому из уравнения (1.8) следует:

$$D^\mu_r \widetilde{T}^r_s T^s f(t)|_{r=0} = T^s_t \left\{ D^\mu_r \widetilde{T}^r f(t) \right\}|_{r=0},$$

т. е.

$$\overset{*}{N}_{\alpha; s} T^s f(t) = T^s \overset{*}{N}_{\alpha; t} f(t).$$

Это показывает, что условие (1.9) не только достаточно, но и необходимо для (1.8).

3. Из определения инфинитезимальных операторов $\tilde{N}_{\beta; s}$ ($\beta = 1, 2, \ldots, p$) следует (см. гл. II, § 1), что

$$\tilde{N}_{\beta; s} f(t) = D_t^{\nu} T^s f(t)|_{t=0}.$$

Поэтому из равенства (1.9) следует:

$$N^*_{\alpha; s} \tilde{N}_{\beta; s} f(s) = \tilde{N}_{\beta; s} N^*_{\alpha; s} f(s). \tag{1.13}$$

Следующая теорема показывает, что условие (1.13) является существенной частью условия (1.9).

Теорема 1.3. *Пусть выполняются условия коммутирования* (1.13), *а также начальные условия*

$$N^*_{\alpha; s} T^s f(t)|_{s=0} = N^*_{\alpha; t} f(t), \tag{1.14}$$

$$D_s^{\lambda} N^*_{\alpha; s} T^s f(t) = h_{\lambda} N^*_{\alpha; t} f(t). \tag{1.15}$$

Тогда выполняются условия коммутирования (1.9), а значит, и условие (1.8).

Доказательство. Введем обозначения:

$$\Phi_{\alpha}(s, t) = T^s N^*_{\alpha; t} f(t),$$

$$\Psi_{\alpha}(s, t) = N^*_{\alpha; s} T^s f(t).$$

$\Phi_{\alpha}(s, t)$ является решением следующей задачи:

$$\tilde{N}_{\beta; s} \Phi_{\alpha} = N_{\beta; t} \Phi_{\alpha}, \tag{1.16}$$

$$\Phi_{\alpha | s=0} = N^*_{\alpha; t} f(t), \tag{1.17}$$

$$D_s^{\lambda} \Phi_{\alpha}\Big|_{s=0} = h_{\lambda} N^*_{\alpha; t} f(t). \tag{1.18}$$

Покажем, что функция $\Psi_{\alpha}(s, t)$ также удовлетворяет этим условиям. Начальные условия (1.17) и (1.18) непосредственно следуют из условий (1.14) и (1.15). Проверим уравнение (1.16). Мы имеем, используя условия коммутирования (1.13),

$$\tilde{N}_{\beta; s} \Psi_{\alpha} = N^*_{\alpha; s} \tilde{N}_{\beta; s} T^s f(t) = N_{\beta; t} \Psi_{\alpha}.$$

Замечание. Легко видеть, что и, обратно, условия (1.14) и (1.15) следуют из условия (1.9).

§ 2. Сопряженные операторы в случае инфинитезимальных операторов первого порядка

1. Допустим, что мера $m(E)$ в локальных координатах может быть представлена в виде

$$m(E)=\int_E a(t)\,dt,$$

где $a(t)$ — действительная дифференцируемая функция.

В этом параграфе мы рассмотрим случай инфинитезимальных операторов первого порядка (что соответствует сдвигу на группе, см. §§ 3 и 5 предыдущей главы).

Итак, пусть

$$N_{\alpha;\,t}(f)=b_\alpha^l(t)\frac{\partial f}{\partial t_l} \qquad (\alpha=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$

$$\widetilde{N}_{\alpha;\,s}(f)=\widetilde{b}_\alpha^l(s)\frac{\partial f}{\partial s_l} \qquad (\alpha=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$

причем функции $b_\alpha^l(t)$ и $\widetilde{b}_\alpha^l(s)$ действительны и

$$b_\alpha^l(0)=\widetilde{b}_\alpha^l(0)=\delta_\alpha^l. \tag{2.1}$$

Нетрудно показать, что в этом случае

$$N^*_{\alpha;\,t}(g)=-N_{\alpha;\,t}(g)-\frac{1}{a}N_{\alpha;\,t}(a)\,g-D_\alpha(t)\,g, \tag{2.2}$$

где

$$D_\alpha(t)=\frac{\partial b_\alpha^l(t)}{\partial t_l} \quad \text{(суммирование по } l\text{)}.$$

В рассматриваемом случае начальные условия (1.15) отпадают и остается только начальное условие (1.14). Мы сейчас покажем, что если потребовать выполнения условия (1.14), то выполнится также условие коммутирования (1.13), а значит, и условие (1.8) (см. теорему 1.1 предыдущей главы). Из условия (1.14) и формулы (2.2) следует:

$$-N_{\alpha;\,s}[T^sf(t)]\Big|_{s=0}-\frac{1}{a(0)}N_{\alpha;\,s}(a)\Big|_{s=0}T^sf(t)\Big|_{s=0}-$$
$$-D_\alpha(0)\,T^sf(t)\,|_{s=0}=-N_{\alpha;\,t}(f(t))-$$
$$-\frac{1}{a(t)}N_{\alpha;\,t}(a)\cdot f(t)-D_\alpha(t)\,f(t). \tag{2.3}$$

Далее, из (2.1) следует:

$$N_{\alpha;\,s}[T^s f(t)] = \frac{\partial}{\partial s_\alpha} T^s f(t)\Big|_{s=0} = N_{\alpha;\,t}(f(t)).$$

Поэтому из (2.3) следует:

$$\frac{1}{a(t)} N_{\alpha;\,t}(a) + D_\alpha(t) = C_\alpha, \tag{2.4}$$

где C_α — постоянные числа. Значит, из (2.2) следует:

$$N^*_{\alpha;\,t}(g) = -N_{\alpha;\,t}(g) + C_\alpha g. \tag{2.5}$$

Из условия коммутирования (1.9) § 1 гл. II следует, что операторы $N^*_{\alpha;\,t}$, определенные по формуле (2.5), удовлетворяют условию (1.13).

Итак, функция $a(t)$ определяется как решение системы (2.4). Предположим вначале, что $C_\alpha = 0$. В таком случае функция $a(t)$ определяется из системы уравнений:

$$b^l_\alpha(t)\frac{\partial a}{\partial t_l} = -D_\alpha(t)\,a. \tag{2.6}$$

Покажем, что эта система совместна.

Обозначим через $\{B^\alpha_i(t)\}$ матрицу, обратную для матрицы $\{b^l_\alpha(t)\}$. Тогда из (2.6) следует:

$$\frac{\partial a}{\partial t_i} = -B^\alpha_i D_\alpha(t)\,a. \tag{2.7}$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t_i\,\partial t_j} = -a\frac{\partial}{\partial t_j}\left[B^\alpha_i D_\alpha(t)\right] - B^\alpha_i D_\alpha(t)\frac{\partial a}{\partial t_j} =$$
$$= -a\frac{\partial}{\partial t_j}\left[B^\alpha_i D_\alpha\right] + B^\alpha_i B^\beta_j D_\alpha D_\beta a.$$

Так как второй член по (i, j) симметричен, то для доказательства совместности системы (2.7) достаточно доказать симметричность по (i, j) выражения

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\left[B^\alpha_i D_\alpha\right],$$

т. е. доказать тождество

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\left[B^\alpha_i D_\alpha\right] = \frac{\partial}{\partial t_i}\left[B^\alpha_j D_\alpha\right]$$

или, в развернутом виде,

$$\frac{\partial B_i^\alpha}{\partial t_j} D_\alpha - \frac{\partial B_j^\alpha}{\partial t_i} D_\alpha + B_i^\alpha \frac{\partial D_\alpha}{\partial t_j} - B_j^\alpha \frac{\partial D_\alpha}{\partial t_i} \equiv 0,$$

или, используя тождество Мауэра (см. Л. С. Понтрягин [69], стр. 397, формула (8)),

$$c_{\lambda\mu}^\alpha B_i^\lambda B_j^\mu D_\alpha + B_i^\alpha \frac{\partial D_\alpha}{\partial t_j} - B_j^\alpha \frac{\partial D_\alpha}{\partial t_i} \equiv 0.$$

Умножая обе части последнего тождества на $b_\sigma^i b_\tau^j$ и суммируя по i, j, получим:

$$c_{\sigma\tau}^\alpha D_\alpha + b_\tau^j \frac{\partial D_\sigma}{\partial t_j} - b_\sigma^i \frac{\partial D_\tau}{\partial t_i} =$$

$$= c_{\sigma\tau}^\alpha \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_\alpha^k}{\partial t_k} + b_\tau^j \frac{\partial}{\partial t_j} \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_\sigma^k}{\partial t_k} - b_\sigma^i \frac{\partial}{\partial t_i} \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_\tau^k}{\partial t_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[c_{\sigma\tau}^\alpha \frac{\partial b_\alpha^k}{\partial t_k} + b_\tau^j \frac{\partial}{\partial t_k} \frac{\partial b_\sigma^k}{\partial t_j} - b_\sigma^i \frac{\partial}{\partial t_k} \frac{\partial b_\tau^k}{\partial t_i} \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left\{ c_{\sigma\tau}^\alpha \frac{\partial b_\alpha^k}{\partial t_k} + \frac{\partial}{\partial t_k} \left[b_\tau^j \frac{\partial b_\sigma^k}{\partial t_j} - b_\sigma^i \frac{\partial b_\tau^k}{\partial t_i} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial b_\tau^j}{\partial t_k} \frac{\partial b_\sigma^k}{\partial t_j} + \frac{\partial b_\sigma^i}{\partial t_k} \frac{\partial b_\tau^k}{\partial t_i} \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(c_{\sigma\tau}^\alpha \frac{\partial b_\alpha^k}{\partial t_k} + c_{\tau\sigma}^\alpha \frac{\partial b_\alpha^k}{\partial t_k} \right) \equiv 0.$$

Добавляя к системе (2.7) начальное условие $a(0) = 1$, мы вычислим меру $a(t)$, для которой сопряженные операторы $N_{\alpha;t}^*$ имеют вид

$$N_{\alpha;\,t}^* = - N_{\alpha;\,t}.$$

Поэтому система (1.5) принимает вид

$$N_{\alpha;\,s} v = - N_{\alpha;\,t} v. \tag{2.8}$$

Так как система (2.8) не содержит членов, свободных от производных, то решение этой системы при начальном условии

$$v\,|_{s=0} = g(t) \tag{2.9}$$

имеет вид (см. § 5 предыдущей главы)

$$v(s,\ t) = g(s \bigcirc t),$$

где через $s \bigcirc t$ обозначена некоторая групповая операция. Покажем, что

$$s \bigcirc t = s^{-1} * t, \tag{2.10}$$

где через $s * t$ обозначена групповая операция, определенная в § 5 предыдущей главы. Если $g(t) = 1$, то из системы (2.8) и условия (2.9) следует:

$$v(s,\ t) = \widetilde{T}^s(1) = 1.$$

Поэтому из определения операторов $\widetilde{T}^s$ следует, что для произвольной функции $f(t)$ имеем:

$$\int_{V_n} f(s * t)\, dm(t) = \int_{V_n} f(t)\ dm(t),$$

и, следовательно,

$$\int_{V_n} |f(s * t)|^2\, dm(t) = \int_{V_n} |f(t)|^2\, dm(t).$$

Последнее равенство показывает, что операторы $T^s f(t) = f(s * t)$ унитарны и, следовательно,

$$\widetilde{T}^s f(t) = f(s^{-1} * t),$$

что доказывает также (2.10). Покажем еще, что для любого множества $E \in V_n$ $m(E) \geqslant 0$. Тем самым будет показано, что мера m совпадает с мерой Хаара.

Пусть сначала множество E настолько мало, что для $t \in E$ функция $a(t)$ сохраняет знак, который, очевидно, не нарушая общности рассуждений, можно считать положительным. Тогда

$$m(E) = \int_E a(t)\, dt > 0.$$

Из инвариантности меры следует, что для любого $s \in V_n$

$$m(s * E) = m(E) > 0.$$

Если теперь F — произвольное множество, то можно подобрать множество E и элементы $s_1, \ldots, s_N$ так, что множество F сколько угодно мало отличается от множества

$$F_N = \bigcup_{k=1}^{N} s_k E.$$

Так как

$$m(F_N) = Nm(E) > 0,$$

то $m(F) > 0$.

2. Рассмотрим теперь систему (2.4) при $C_\alpha \neq 0$. Вначале выясним, какими могут быть постоянные C_α. С этой целью умножим обе части равенства (2.4) на неопределенную пока функцию $b(t)$.

Мы получим:

$$bN_{\alpha;\,t}(a) + baD_\alpha = C_\alpha ab. \tag{2.11}$$

Пусть функция b удовлетворяет системе

$$N_\alpha(b) = C_\alpha b. \tag{2.12}$$

В таком случае система (2.11) примет вид

$$N_\alpha(ba) + baD_\alpha = 0.$$

Это показывает, что функция ba удовлетворяет системе (2.6) и поэтому является плотностью меры Хаара. Отсюда следует, что для того, чтобы получить решение системы (2.11), нужно плотность меры Хаара разделить на решение системы (2.12).

Таким образом, остается исследовать систему (2.12).

Исследуем условие совместности этой системы. С этой целью перепишем ее в виде

$$\frac{\partial b}{\partial t_i} = B_i^\alpha C_\alpha b. \tag{2.12¹}$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial^2 b}{\partial t_i\, \partial t_j} = \frac{\partial B_i^\alpha}{\partial t_j} C_\alpha b + B_i^\alpha C_\alpha \frac{\partial b}{\partial t_j} = \frac{\partial B_i^\alpha}{\partial t_j} C_\alpha b + B_i^\alpha B_j^\beta C_\alpha C_\beta b.$$

Так как второе слагаемое справа по (i, j) симметрично, то для того, чтобы система (2.12¹) была совместной, следует потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial B_i^\alpha}{\partial t_j} C_\alpha - \frac{\partial B_j^\alpha}{\partial t_i} C_\alpha = 0,$$

или, используя тождество Маурера,

$$\left(\frac{\partial B_i^\alpha}{\partial t_j}-\frac{\partial B_j^\alpha}{\partial t_i}\right)C_\alpha=c_{\lambda\mu}^\alpha C_\alpha B_i^\lambda B_j^\mu=0.$$

Отсюда следует, что постоянные C_α должны удовлетворять условию

$$c_{\lambda\mu}^\alpha C_\alpha=0. \tag{2.13}$$

Это и является условием совместности системы (2.12).

Условие (2.13) означает, что алгебра Ли (а значит, и соответствующая группа Ли) имеет одномерное представление.

Как известно, для простых классических групп таких представлений нет (кроме единичного, которому соответствует $C_\alpha=0$) и поэтому для таких групп только мера Хаара удовлетворяет условию (1.8).

3. В случае, когда система (2.13) имеет нетривиальные решения, нетрудно вычислить функцию $b(t)$. Для этого удобно перейти к так называемым каноническим координатам первого рода *). Если t_i — канонические координаты первого рода, то **)

$$B_j^i(t)\,t^j=t^i. \tag{2.14}$$

Покажем, что решение системы (2.12) в канонических координатах имеет вид

$$b(t)=Ce^{C_\alpha t^\alpha},$$

где C — произвольное постоянное число и C_α удовлетворяют системе (2.13).

Положим $t^\alpha=\lambda^\alpha u$ и пусть $b^*(u)=b(\lambda^1u,\ \ldots,\ \lambda^nu)$. Тогда

$$\frac{db^*}{du}=\lambda^\alpha\frac{\partial b^*}{\partial t^\alpha}=\lambda^\alpha B_\alpha^\gamma C_\gamma b^*=\frac{1}{u}(\lambda^\alpha u)\,B_\alpha^\gamma C_\gamma b^*=\lambda^\gamma C_\gamma b^*.$$

Поэтому

$$b^*(u)=Ce^{\lambda^\gamma C_\gamma u}=Ce^{t^\gamma C_\gamma}.$$

Для коммутативной группы Ли структурные константы $c_{\lambda\mu}^\alpha$ равны нулю. Поэтому системе (2.13) удовлетворяют любые

---

*) См. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, стр. 293 и 402.

**) См. Л. С. Понтрягин, стр. 402.

числа C_α. Отсюда следует, что для коммутативной группы существует бесчисленное множество функций $b(t)$, удовлетворяющих системе (2.12), а значит, и бесчисленное множество мер $m(t)$, удовлетворяющих условию (1.8).

§ 3. Сопряженные операторы в случае инфинитезимальных операторов второго порядка

Положение намного усложняется в случае инфинитезимальных операторов второго порядка.

Итак, пусть нам даны n дифференциальных операторов вида

$$X_{\alpha;\,t}(f) = a_\alpha^{ij}(t)\frac{\partial^2 f}{\partial t_i\,\partial t_j} + b_\alpha(t)\frac{\partial f}{\partial t_i} + c_\alpha(t)f \tag{3.1}$$

и n дифференциальных операторов вида

$$\widetilde{X}_{\alpha;\,s}(f) = \widetilde{a}_\alpha^{ij}(s)\frac{\partial^2 f}{\partial s_i\,\partial s_j} + \widetilde{b}_\alpha^i(s)\frac{\partial f}{\partial s_i} + \widetilde{c}_\alpha(s)f. \tag{3.2}$$

Мы будем предполагать, что коэффициенты этих операторов действительны и что выполняются условия

$$a_\alpha^{ii}(0) = \widetilde{a}_\alpha^{ii}(0) = \delta_\alpha^i, \tag{3.3}$$

$$a_\alpha^{ij}(0) = \widetilde{a}_\alpha^{ij}(0) = 0 \qquad (i \neq j), \tag{3.4}$$

$$b_\alpha^i(0) = \widetilde{b}_\alpha^i(0) = 0, \tag{3.5}$$

$$c_\alpha(0) = \widetilde{c}_\alpha(0) = 0. \tag{3.6}$$

Будем также предполагать, что выполняются следующие условия коммутирования:

$$[X_\alpha,\ X_\beta] = c_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma, \tag{3.7}$$

$$[\widetilde{X}_\alpha,\ \widetilde{X}_\beta] = c_{\beta\alpha}^\gamma \widetilde{X}_\gamma, \tag{3.8}$$

$$X_{\alpha;\,s}\widetilde{X}_{\beta;\,s} = \widetilde{X}_{\beta;\,s}X_{\alpha;\,s}. \tag{3.9}$$

Пусть

$$m(E) = \int_E a(t)\,dt.$$

Нетрудно показать, что в этом случае

$$X^*_{\alpha;\,t}(g)=\frac{1}{a(t)}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t_i\,\partial t_j}\left[aa^{ij}_\alpha g\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial t_i}\left(ab^i_\alpha g\right)+c_\alpha(t)\,a(t)\,g(t)\right\}=X_\alpha(g)+$$
$$+L_\alpha(g)+q_\alpha(t)\,g, \qquad (3.10)$$

где

$$L_\alpha(g)=\left(2\frac{\partial a^{ij}_\alpha}{\partial t_i}+\frac{2}{a}\frac{\partial a}{\partial t_j}a^{ij}_\alpha-2b^j_\alpha\right)\frac{\partial g}{\partial t_j}, \qquad (3.11)$$

$$q_\alpha(t)=\frac{\partial^2 a^{ij}_\alpha}{\partial t_i\,\partial t_j}+\frac{2}{a}\frac{\partial a}{\partial t_i}\frac{\partial a^{ij}_\alpha}{\partial t_j}+\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial t_i\,\partial t_j}a^{ij}_\alpha-$$
$$-\frac{\partial b^i_\alpha}{\partial t_i}-\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t_i}b^i_\alpha+c_\alpha(t). \qquad (3.12)$$

Пусть $u(s,\ t)=T^sf(t)$ является решением задачи

$$X_{\alpha;\,s}u=X_{\alpha;\,t}u, \qquad (3.13)$$

$$u\big|_{s=0}=f(t), \qquad (3.14)$$

$$\left.\frac{\partial^\lambda u}{\partial s_1^{\lambda_1}\ldots\,\partial s_n^{\lambda_n}}\right|_{s=0}=h_{\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_n}f(t), \qquad (3.15)$$

где λ_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — нуль или единица и $h_{\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_n}$ — постоянные действительные числа.

Из (3.10), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.14) и (1.14) следует:

$$\left.\frac{\partial^2 T^sf(t)}{\partial s_\alpha^2}\right|_{s=0}+k_\alpha f(t)=X_{\alpha;\,t}(f)+L_{\alpha;\,t}(f)+q_\alpha(t)\,f, \qquad (3.16)$$

где k_α — постоянные числа. В силу определения инфинитезимальных операторов

$$\left.\frac{\partial^2 T^sf(t)}{\partial s_\alpha^2}\right|_{s=0}=X_{\alpha;\,t}(f).$$

Поэтому из (3.16) следует:

$$q_\alpha(t)=k_\alpha, \qquad (3.17)$$

$$L_\alpha(t)\equiv 0. \qquad (3.18)$$

Поэтому из формулы (3.10) следует:

$$X^*_{\alpha;\,t}(f)=X_{\alpha;\,t}(f)+k_\alpha f, \qquad (3.19)$$

где k_α — постоянные числа. Если $k_\alpha = 0$, то операторы $X_{\alpha;\,t}$ самосопряженны. Покажем, что в этом случае соответствующие операторы обобщенного сдвига коммутативны.

В самом деле (см. гл. II, § 4),

$$[X_\alpha,\ X_\beta] = c^\lambda_{\alpha\beta} N_\lambda.$$

С другой стороны, легко проверить, что

$$[X^*_\alpha,\ X^*_\beta] = c^\lambda_{\beta\alpha} X^*_\lambda = [X_\alpha,\ X_\beta] = c^\lambda_{\alpha\beta} X_\lambda = c^\lambda_{\beta\alpha} X_\lambda.$$

Отсюда следует, что

$$c^\lambda_{\alpha\beta} = c^\lambda_{\beta\alpha},$$

и так как для структурных констант справедливо равенство $c^\lambda_{\alpha\beta} = -c^\lambda_{\beta\alpha}$, то $c^\lambda_{\alpha\beta} = 0$, что доказывает коммутативность операторов $X_{\alpha;\,t}$, а значит, и операторов обобщенного сдвига.

Рассмотрим теперь случай, когда $k_\alpha \neq 0$. Пусть

$$[X_\alpha,\ X_\beta] = c^\lambda_{\alpha\beta} X_\lambda. \tag{3.20}$$

Тогда

$$[X^*_\alpha,\ X^*_\beta] = c^\lambda_{\beta\alpha} X^*_\lambda = c^\lambda_{\beta\alpha} X_\lambda + c^\lambda_{\beta\alpha} k_\lambda. \tag{3.21}$$

С другой стороны, подставляя (3.19), получим:

$$[X^*_\alpha,\ X^*_\beta] = [X_\alpha,\ X_\beta] = c^\lambda_{\alpha\beta} X_\lambda. \tag{3.22}$$

Из (3.21) и (3.22) следует для произвольной функции $f(t)$:

$$2c^\lambda_{\alpha\beta} X_\lambda(f) + c^\lambda_{\alpha\beta} k_\lambda f \equiv 0.$$

Полагая здесь $f = 1$, получим:

$$2c^\lambda_{\alpha\beta} q_\lambda(t) + c^\lambda_{\alpha\beta} k_\lambda \equiv 0.$$

Поэтому

$$c^\lambda_{\alpha\beta} X^{(1)}_\lambda(f) \equiv 0, \tag{3.23}$$

где

$$X^{(1)}_\lambda(f) = a^{ij}_\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial t^i\, \partial t^j} + b^i_\lambda \frac{\partial f}{\partial t^i}.$$

Так как по предположению операторы X_λ линейно независимы, то из (3.23) следует, что

$$c^\lambda_{\alpha\beta} = 0$$

и, значит, операторы X_λ коммутируют. Этот анализ показывает, что могут существовать только коммутативные операторы обобщенного сдвига, порожденные инфинитезимальными (дифференциальными) операторами второго порядка и удовлетворяющие условию (1.8).

Пример. Пусть $V_n = R_2$,

$$X_{1;\,t} = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}, \qquad X_{2;\,t} = \frac{\partial^2}{\partial t_2^2},$$

$$\tilde{X}_{1;\,s} = X_{1;\,s}, \qquad \tilde{X}_{2;\,s} = X_{2;\,s}.$$

Пусть обобщенный сдвиг $T^s f(t) = u(s, t)$ определяется как решение системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}, \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u\,\big|_{s=0} = f(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial s_1}\right|_{s=0} = h_1 f(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial s_2}\right|_{s=0} = h_2 f(t),$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial s_1\,\partial s_2}\right|_{s=0} = h_{12} f(t), \tag{3.25}$$

где h_1, h_2, h_{12} — произвольные постоянные действительные числа. Определим скалярное произведение при помощи меры Лебега на плоскости. В этом скалярном произведении операторы T^s самосопряженны. Это следует из самосопряженности операторов $X_{1;\,t}$, $X_{2;\,t}$, действительности чисел h_1, h_2, h_{12}, теоремы 1.2 и единственности решения задачи (3.24) — (3.25).

Этот пример можно обобщить, заменив оператор $X_{1;\,t}$ на оператор $\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + q_1(t_1)$ и оператор $X_{2;\,t}$ на оператор $\frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + q_2(t_2)$, где $q_1(t_1)$ и $q_2(t_2)$ — произвольные непрерывные функции соответствующих аргументов.

ГЛАВА IX

ОБРАТНАЯ ТРЕТЬЯ ТЕОРЕМА ЛИ ДЛЯ О. О. С.

§ 1. Случай инфинитезимальных операторов первого порядка

1. В третьем параграфе второй главы было показано, что инфинитезимальные операторы первого порядка при выполнении дополнительного ограничения (3.3) гл. II образуют алгебру Ли.

Теперь мы рассмотрим обратный вопрос. Мы покажем, что для произвольных структурных констант группы Ли (т. е. чисел $c^{\lambda}_{\alpha\beta}$, удовлетворяющих соотношениям (3.9) и (3.10) гл. II) можно построить инфинитезимальные операторы X_{α} первого порядка, удовлетворяющие условию коммутирования (1.4) гл. VII.

В теории групп Ли доказывается, что инфинитезимальные операторы первого порядка, образующие алгебру Ли, всегда можно реализовать в виде дифференциальных операторов первого порядка вида

$$X_{\alpha;\,t}(f) = b^{i}_{\alpha}(t)\,\frac{\partial f}{\partial t_i} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

Мы рассмотрим общую конструкцию, из которой получаются как дифференциальные, так и недифференциальные операторы.

В отличие от операторов первого порядка операторы второго порядка (т. е. линейные операторы, удовлетворяющие условию (4.2) гл. VII), образующие алгебру Ли, вообще говоря, нельзя реализовать в виде дифференциальных операторов (второго порядка). В этом отношении первый порядок является исключительным *).

Для упрощения мы ограничимся в дальнейшем случаем трех переменных. Однако, как будет видно из дальнейшего, предлагаемая конструкция легко обобщается на случай произвольной размерности.

Пусть $c^{\lambda}_{\alpha\beta}$ (α, β, $\lambda = 1, 2, 3$) — структурные константы группы Ли, т. е. числа, удовлетворяющие соотношениям (3.9) и (3.10) гл. II.

Пусть $f(t) = f(t_1, t_2, t_3)$ — бесконечно дифференцируемая функция. Ищутся линейные операторы X_1, X_2, X_3, удовлетворяющие условиям коммутирования

$$(X_1X_2 - X_2X_1)(f) = c^{\lambda}_{12}X_{\lambda}(f), \tag{1.1}$$

$$(X_1X_3 - X_3X_1)(f) = c^{\lambda}_{13}X_{\lambda}(f), \tag{1.2}$$

$$(X_2X_3 - X_3X_2)(f) = c^{\lambda}_{23}X_{\lambda}(f) \tag{1.3}$$

и начальным условиям

$$X_{\alpha}(f)\,|_{t=0} = \left.\frac{\partial f}{\partial t_{\alpha}}\right|_{t=0} \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{1.4}$$

Решение будет дано в виде формальных степенных рядов. Важный вопрос о сходимости этих рядов (в классе аналитических функций) будет рассмотрен в следующей главе.

2. Перепишем уравнения (1.1), (1.2), (1.3) в виде

$$X_1X_2(f) = X_2X_1(f) + c^{\lambda}_{12}X_{\lambda}(f), \tag{1.5}$$

$$X_1X_3(f) = X_3X_1(f) + c^{\lambda}_{13}X_{\lambda}(f), \tag{1.6}$$

$$X_2X_3(f) = X_3X_2(f) + c^{\lambda}_{23}X_{\lambda}(f). \tag{1.7}$$

Оператор X_1 задаем произвольно в виде

$$X_{1;\,t} = b^i_1(t)\frac{\partial}{\partial t_i}, \tag{1.8}$$

*) В основе этого различия лежит то обстоятельство, что коммутатор дифференциальных операторов первого порядка есть дифференциальный оператор первого порядка, в то время как коммутатор дифференциальных операторов второго порядка в общем случае есть дифференциальный оператор третьего порядка.

причем $b_1^l(t)\,(l=1,\ 2,\ 3)$ — бесконечно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию

$$b_1^l(0)=\delta_1^l. \tag{1.9}$$

Значение оператора $X_{2;\,t}$ при $t_1=0$ задаем произвольно в виде

$$X_{2;\,t}(f)|_{t_1=0}=b_2^l(t)\,\frac{\partial f}{\partial t_l}\bigg|_{t_1=0}, \tag{1.10}$$

причем $b_2^l(t)$ — бесконечно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию

$$b_2^l(0)=\delta_2^l. \tag{1.9^1}$$

Наконец, значение оператора $X_{3;\,t}$ при $t_1=0$, $t_2=0$ задаем произвольно в виде

$$X_{3;\,t}(f)\bigg|_{\substack{t_1=0\\ t_2=0}}=b_3^l(t)\,\frac{\partial f}{\partial t_l}\bigg|_{\substack{t_1=0\\ t_2=0}}, \tag{1.11}$$

причем $b_3^l(t)$ — бесконечно дифференцируемые функции, для которых

$$b_3^l(0)=\delta_3^l. \tag{1.9^2}$$

Условия (1.9) — (1.9^1) — (1.9^2), очевидно, обеспечивают выполнение условий (1.4).

Легко видеть, что из уравнения (1.5) определяются значения в точке $t=0$ последовательных частных производных функции $X_{2;\,t}(f)$, а из уравнений (1.6) и (1.7) — значения последовательных частных производных функции $X_{3;\,t}(f)$. При этом для $X_{3;\,t}(f)$ одна и та же производная может быть определена из различных уравнений.

Основная задача настоящего параграфа — доказать непротиворечивость процесса этих вычислений. Сначала докажем следующую лемму:

Лемма 1.1. *Пусть*

$$D_t^\lambda=\frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial t_1^{\lambda_1}\,\partial t_2^{\lambda_2}\,\partial t_3^{\lambda_3}}\qquad (|\lambda|=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3).$$

Тогда

$$D_t^\lambda X_{k;\,t}(f)\big|_{t=0}=D_t^\lambda\,\frac{\partial f}{\partial t_k}\bigg|_{t=0}+a_\mu^{\lambda;\,k}D_t^\mu f\,\big|_{t=0}, \tag{1.12}$$

причем $a_\mu^{\lambda;\,k}=a_{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3}^{\lambda_1;\,\lambda_2;\,\lambda_3;\,k}$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ — *постоянные числа, не зависящие от функции* $f(t)$.

Доказательство. Для $k=1$ и произвольного $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ равенство (1.12) следует непосредственно из (1.8) и (1.9).

Докажем теперь формулу (1.12) для $k=2$ и $|\lambda|=1$. Если $\lambda_1=0$ (а λ_2 и λ_3 произвольны), то равенство (1.12) следует из (1.10) и (1.9^1).

Чтобы получить (1.12) для $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=0$, положим в равенстве (1.5) $t=0$. Получим:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} X_{2;\,t}(t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t_2} X_{1;\,t}(f)\Big|_{t=0} + c_{12}^{\lambda}\frac{\partial f}{\partial t_\lambda}\Big|_{t=0} =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_2}\Big|_{t=0} + \left(\frac{\partial b_1^l}{\partial t_2}\frac{\partial f}{\partial t_l}\right)\Big|_{t=0} + c_{12}^{\lambda}\frac{\partial f}{\partial t_\lambda}\Big|_{t=0},$$

что доказывает формулу (1.12).

Пусть теперь $k=3$, $|\lambda|=1$. Из (1.6) при $t=0$ следует разложение для $\frac{\partial}{\partial t_1} X_{3;\,t}(f)$, из (1.7) при $t=0$ следует разложение для $\frac{\partial}{\partial t_2} X_{3;\,t}(f)$. Наконец, разложение для $\frac{\partial}{\partial t_3} X_{3;\,t}(f)\big|_{t=0}$ следует из (1.11) и (1.9^2).

Итак, для $|\lambda|=1$ утверждение леммы справедливо. Теперь рассуждаем по индукции. Пусть равенство (1.12) имеет место для всех $|\lambda|\leqslant|\lambda_0|$. Докажем, что в таком случае оно верно для $|\lambda|=|\lambda_0|+1$. Пусть $\lambda_0=(\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30})$, $\lambda'_0=(\lambda_{10}+1, \lambda_{20}, \lambda_{30})$. Выведем разложение для $D_t^{\lambda'_0} X_{2;\,t}(f)\big|_{t=0}$. Применяя к равенству (1.5) оператор $D_t^{\lambda_0}$, мы получим:

$$D_t^{\lambda_0} X_1 X_2(f) = D_t^{\lambda_0} X_2 (X_1 f) + c_{12}^{\nu} D_t^{\lambda_0} X_\nu (f).$$

Полагая в этом равенстве $t=0$ и используя разложение (1.12) для $|\lambda|\leqslant|\lambda_0|$ (которое справедливо по предположению), а также явный вид операторов $X_{1;\,t}$, мы получим для $D_t^{\lambda'_0} X_2(f)\big|_{t=0}$ разложение вида (1.12).

Если мы применим к равенству (1.5) оператор

$$\frac{\partial^{|\lambda_0|}}{\partial t^{\lambda_{10}-1}\,\partial t_2^{\lambda_{20}+1}\,\partial t_3^{\lambda_{30}}},$$

то получим разложение для $D_t^{\lambda_{10}, \lambda_{20}+1, \lambda_{30}} X_2(f)\big|_{t=0}$.

Наконец, применяя к (1.5) оператор

$$\frac{\partial^{|\lambda_0|}}{\partial t_1^{\lambda_{10}-1}\,\partial t_2^{\lambda_{20}}\,\partial t_3^{\lambda_{30}+1}},$$

мы получим разложение для

$$D_t^{\lambda_{10},\,\lambda_{20},\,\lambda_{30}+1} X_2(f)\,|_{t=0}.$$

Итак, для $D_t^{\lambda} X_2(f)\,|_{t=0}$ лемма доказана.

Аналогично с помощью (1.6) (или (1.7)) докажем лемму для $D_t^{\lambda} X_3(f)\,|_{t=0}$.

3. Значения производных для $X_{2;\,t}(f)$ определяются только из одного уравнения (1.5), и поэтому противоречия при их вычислении не может возникнуть. Не так обстоит дело со значениями производных выше первого порядка для функции $X_{3;\,t}(f)$. Эти производные можно определять как из уравнения (1.6), так и из уравнения (1.7). Мы должны показать, что соответствующие величины совпадают (процесс непротиворечив).

Начнем с производной $\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2} X_{3;\,t}(f)\,|_{t=0}$.

В силу равенств (1.4) и (1.12) для произвольной дважды дифференцируемой функции $g(t)$

$$X_\alpha X_\beta(g)\,|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t_\alpha} X_\beta(g)\Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 g}{\partial t_\alpha\,\partial t_\beta}\Big|_{t=0} + a_{\alpha\beta}^{\lambda}\,\frac{\partial g}{\partial t_\lambda}\Big|_{t=0}. \tag{1.13}$$

Дифференцируя (1.5) по t_3, (1.6) — по t_2, (1.7) — по t_1 и используя (1.4), мы получим (все равенства в точке $t=0$):

$$X_3X_1(X_2f) = X_3X_2(X_1f) + c_{12}^{\nu} X_3X_\nu(f), \tag{1.14}$$

$$X_2X_1(X_3f) = X_2X_3(X_1f) + c_{13}^{\nu} X_2X_\nu(f), \tag{1.15}$$

$$X_1X_2(X_3f) = X_1X_3(X_2f) + c_{23}^{\nu} X_1X_\nu(f). \tag{1.16}$$

Из уравнений (1.15) и (1.16) мы можем определить:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2}(X_3f)\Big|_{t=0}.$$

Мы должны показать, что из обоих уравнений получается для этой производной та же самая величина. С этой целью присоединим к уравнениям (1.14) — (1.15) — (1.16) еще три уравнения, которые получаются следующим образом. Уравнения (1.5), (1.6), (1.7) при $t=0$ суть тождества, в которые в силу (1.13) входят значения производных функций $f(t)$ в точке $t=0$ первого и второго порядков. Подставим в первое из этих уравнений (при $t=0$) вместо $f\ X_3(f)$, причем значение $\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2}(X_3 f)\big|_{t=0}$ возьмем из уравнения (1.15). В уравнение (1.6) вместо f подставим $X_2(f)$ и, наконец, в уравнение (1.7) вместо f подставим $X_1(f)$. Мы получим:

$$X_1X_2(X_3f)=X_2X_1(X_3f)+c_{12}^{\nu}X_{\nu}X_3(f), \qquad (1.17)$$

$$X_1X_3(X_2f)=X_3X_1(X_2f)+c_{13}^{\nu}X_{\nu}X_2(f), \qquad (1.18)$$

$$X_2X_3(X_1f)=X_3X_2(X_1f)+c_{23}^{\nu}X_{\nu}X_1(f). \qquad (1.19)$$

Используя (1.13), мы можем переписать уравнения (1.14)—(1.15)—(1.16)—(1.17)—(1.18)—(1.19) в виде ($t=0$)

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_3}X_2(f)+a_{31}^{\lambda}\frac{\partial}{\partial t_\lambda}X_2(f)=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial t_2\,\partial t_3}X_1(f)+a_{32}^{\lambda}\frac{\partial}{\partial t_\lambda}X_1(f)+c_{12}^{\lambda}X_3X_\lambda(f), \qquad (1.20)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2}X_3(f)+a_{21}^{\lambda}\frac{\partial}{\partial t_\lambda}X_3(f)=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial t_2\,\partial t_3}X_1(f)+a_{23}^{\lambda}\frac{\partial}{\partial t_\lambda}X_1(f)+c_{13}^{\lambda}X_2X_\lambda(f), \qquad (1.21)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2}X_3(f)\right)+a_{12}^{\lambda}\frac{\partial}{\partial t_\lambda}X_3(f)=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_3}X_2(f)+a_{13}^{\lambda}\frac{\partial}{\partial t_\lambda}X_2(f)+c_{23}^{\lambda}X_1X_\lambda(f), \qquad (1.22)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2}X_3(f)+a_{12}^{\lambda}\frac{\partial}{\partial t_\lambda}X_3(f)=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2}X_3(f)+a_{21}^{\lambda}\frac{\partial}{\partial t_\lambda}X_3(f)+c_{13}^{\lambda}X_\lambda X_3(f), \qquad (1.23)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_3}X_2(f)+a_{13}^{\lambda}\frac{\partial}{\partial t_\lambda}X_2(f)=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_3}X_2(f)+a_{31}^{\lambda}\frac{\partial}{\partial t_\lambda}X_2(f)+c_{13}^{\lambda}X_\lambda X_2(f), \qquad (1.24)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_2\,\partial t_3}X_1(f)+a_{23}^{\lambda}\frac{\partial}{\partial t_\lambda}X_1(f)=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial t_2\,\partial t_3}X_1(f)+a_{32}^{\lambda}\frac{\partial}{\partial t_\lambda}X_1(f)+c_{23}^{\lambda}X_\lambda X_1(f).$$

В левой части равенства (1.22) производная $\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2} X_3(f)$ заключена в скобки по той причине, что мы еще не знаем, будет ли величина этой производной, вычисленная из уравнения (1.22), совпадать со значением, вычисленным из уравнения (1.21). Это мы еще должны показать. С этой целью вычтем из уравнения (1.20) уравнение (1.23), из уравнения (1.24) — уравнение (1.21), из уравнения (1.22) — уравнение (1.23) и сложим затем все эти равенства. Используя (1.1), (1.2), (1.3) и тождество Якоби (3.10) гл. II мы получим *):

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2} X_3(f)\Big|_{t=0} - \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2} X_3(f)\right)\Big|_{t=0} = 0.$$

Это доказывает непротиворечивость вычисления производной

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2} X_3(f)\,|_{t=0}\,.$$

4. Рассмотрим теперь процесс вычисления следующих производных и непротиворечивость этого процесса. Будем рассуждать по индукции.

Применяя к уравнениям (1.5), (1.6) и (1.7) оператор D_t^λ, мы получим:

$$D_t^\lambda X_1X_2(f) = D_t^\lambda X_2X_1(f) + c_{12}^\nu D_t^\lambda X_\nu(f), \tag{1.25}$$

$$D_t^\lambda X_1X_3(f) = D_t^\lambda X_3X_1(f) + c_{13}^\nu D_t^\lambda X_\nu(f), \tag{1.26}$$

$$D_t^\lambda X_2X_3(f) = D_t^\lambda X_3X_2(f) + c_{23}^\nu D_t^\lambda X_\nu(f). \tag{1.27}$$

Полагая в этих уравнениях $t=0$ и используя (1.12), мы можем последовательно определить значения производных до порядка $|\lambda|+1$ для $X_2(f)$ и $X_3(f)$. При этом производные порядка $|\lambda|+1$ для $X_2(f)$ определяются только из одного уравнения (1.25) и поэтому определяются непротиворечиво. Напротив, производные функции $X_3(f)$ можно опре-

*) В процессе этих вычислений используется тождество

$$X_\alpha X_\beta(f)|_{t=0} - X_\beta X_\alpha(f)|_{t=0} = c_{\alpha\beta}^\lambda X_\lambda(f)|_{t=0} = 0,$$

которое для $\alpha < \beta$ совпадает с уравнениями (1.5), (1.6) и (1.7) (при $t=0$), а для $\alpha > \beta$ следует из этих же уравнений и косой симметрии для чисел $c_{\alpha\beta}^\lambda$.

делить как из уравнения (1.26), так и из уравнения (1.27). Мы должны показать непротиворечивость этого процесса.

Имея в виду дальнейшие цели, запишем оператор D_t^λ в виде

$$D_t^\lambda = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial t_{\alpha_1}\, \partial t_{\alpha_2} \ldots \partial t_{\alpha_{|\lambda|}}},$$

причем каждый из индексов α_i $(i = 1, 2, \ldots, |\lambda|)$ принимает значения 1, 2, 3.

Обозначим через α вектор с координатами $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{|\lambda|})$. Из уравнения (1.26) и тождества (1.12) можно определить значение производной

$$\left.\frac{\partial^{|\lambda|+1}}{\partial t_{\alpha_1}\, \partial t_{\alpha_2} \ldots \partial t_{\alpha_{|\lambda|}}\, \partial t_1} X_3(f)\right|_{t=0},$$

а из уравнения (1.27) — значение производной

$$\left.\frac{\partial^{|\lambda|+1}}{\partial t_{\alpha_1}\, \partial t_{\alpha_2} \ldots \partial t_{\alpha_{|\lambda|}}\, \partial t_2} X_3(f)\right|_{t=0}$$

Из предположения индукции следует, что эти величины (тензоры) по индексам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{|\lambda|}$ симметричны. Заменим в уравнении (1.27) $\alpha_{|\lambda|}$ на $\alpha'_{|\lambda|}$, и пусть $\alpha_{|\lambda|} = 2$ и $\alpha'_{|\lambda|} = 1$.

Тогда одна и та же производная

$$\left.\frac{\partial^{|\lambda|+1}}{\partial t_{\alpha_1}\, \partial t_{\alpha_2} \ldots \partial t_{\alpha_{|\lambda|-1}}\, \partial t_1\, \partial t_2} X_3(f)\right|_{t=0}$$

определится из двух уравнений: уравнения (1.26) и уравнения (1.27). Мы должны показать, что эти величины совпадают.

Обозначим через β вектор с компонентами $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{|\lambda|-1})$, и пусть

$$D_t^\beta = \frac{\partial^{|\lambda|-1}}{\partial t_{\alpha_1}\, \partial t_{\alpha_2} \ldots \partial t_{\alpha_{|\lambda|-1}}}.$$

Покажем, что из уравнения (1.26) (в котором $\alpha_{|\lambda|}=2$) следует уравнение

$$D_t^\beta X_2 X_1 (X_3 f) = D_t^\beta X_2 X_3 (X_1 f) + c_{13}^\nu D_t^\beta X_2 X_\nu (f) \tag{1.28}$$

(в этом уравнении $t=0$).

Полагая в тождестве (1.12) $\lambda=\beta$, $k=2$ и заменяя f на $X_3 X_1 (f)$, мы получим:

$$D_t^\beta X_2 (X_3 X_1 f)|_{t=0} = D_t^\beta \frac{\partial}{\partial t_2} X_3 X_1 (f)|_{t=0} + a_\mu^{\beta;\,2} D_t^\mu (X_3 X_1 f)|_{t=0}. \tag{1.29}$$

Аналогично

$$D_t^\beta X_2 X_\nu (f)|_{t=0} = D_t^\beta \frac{\partial}{\partial t_2} X_\nu (f)|_{t=0} + a_\mu^{\beta;\,2} D_t^\mu X_\nu (f)|_{t=0} \tag{1.30}$$

Умножим равенство (1.30) на c_{13}^ν и сложим с равенством (1.29). Мы получим, используя (1.26),

$$\begin{aligned} D_t^\beta X_2 [X_3 X_1 (f) + c_{13}^\nu X_\nu (f)]|_{t=0} &= \\ = D_t^\beta \frac{\partial}{\partial t_2} [X_3 X_1 (f) + c_{13}^\nu X_\nu (f)] &+ \\ + a_\mu^{\beta;\,2} D_t^\mu [X_3 X_1 (f) + c_{13}^\nu X_\nu (f)|_{t=0} &= \\ = D_t^\beta \frac{\partial}{\partial t_2} X_1 X_3 (f)|_{t=0} + a_\mu^{\beta;\,2} D_t^\mu X_1 X_3 (f)|_{t=0} & \end{aligned} \tag{1.31}$$

С другой стороны, в силу того же тождества (1.12)

$$D_t^\beta X_2 X_1 X_3 (f)|_{t=0} = D_t^\beta \frac{\partial}{\partial t_2} X_1 X_3 (f)|_{t=0} + a_\mu^{\beta;\,2} D_t^\mu X_1 X_3 (f)|_{t=0} \tag{1.32}$$

В последнем тождестве производную $(|\lambda|+1)$-го порядка функции $X_3(f)$ мы определяем из уравнения (1.26). Производные более низкого порядка в силу предположения индукции определяются однозначно.

Из (1.31) и (1.32) следует (1.28).

Аналогично из равенства (1.27) выводим:

$$D_t^\beta X_1 X_2 (X_3 f)|_{t=0} = D_t^\beta X_1 X_3 (X_2 f)|_{t=0} + c_{23}^\nu D_t^\beta X_1 X_\nu (f)|_{t=0} \tag{1.33}$$

В этом тождестве $(|\lambda|+1)$-я производная функции $X_3(f)$ берется из уравнения (1.27).

Наконец, из равенства (1.25) выводим:

$$D_t^\beta X_3 X_1 X_2(f)|_{t=0} = D_t^\beta X_3 X_2 (X_1 f)|_{t=0} + c_{12}^\nu D_t^\beta X_3 (X_\nu f)|_{t=0}. \tag{1.34}$$

Заменим теперь в уравнениях (1.25), (1.26) и (1.27) λ на β и f соответственно на $X_3(f)$, $X_2(f)$ и $X_1(f)$. Мы получим тождества:

$$D_t^\beta X_1 X_2 X_3(f)|_{t=0} = D_t^\beta X_2 X_1 X_3(f)|_{t=0} + c_{12}^\nu D_t^\beta X_\nu X_3(f)|_{t=0}, \tag{1.35}$$

$$D_t^\beta X_1 X_3 X_2(f)|_{t=0} = D_t^\beta X_3 X_1 X_2(f)|_{t=0} + c_{13}^\nu D_t^\beta X_\nu X_2(f)|_{t=0}, \tag{1.36}$$

$$D_t^\beta X_2 X_3 X_1(f)|_{t=0} = D_t^\beta X_3 X_2 X_1(f)|_{t=0} + c_{23}^\nu D_t^\beta X_\nu X_1(f)|_{t=0}. \tag{1.37}$$

В тождестве (1.35) в левую и правую части входит $(|\lambda|+1)$-я производная функции $X_3(f)$. Эту производную мы можем взять как из уравнения (1.26), так и из уравнения (1.27), однако в обе части подставляем одно и то же значение.

Теперь рассуждаем, как и в случае вторых смешанных производных. Вычитаем из уравнения (1.33) уравнение (1.37), из (1.34) вычитаем (1.35), из (1.28) вычитаем (1.36) и складываем все разности. Члены, содержащие структурные константы, уничтожаются в силу тождества Якоби.

Разлагая оставшиеся члены по тождеству (1.12), мы обнаружим, что после уничтожения подобных членов останется равенство

$$\frac{\partial^{|\lambda|+1}}{\partial t_{\alpha_1} \ldots \partial t_{\alpha_{|\lambda|-1}} \partial t_2 \partial t_1} X_3(f)|_{t=0} - \\ - \frac{\partial^{|\lambda|+1}}{\partial t_{\alpha_1} \ldots \partial t_{\alpha_{|\lambda|-1}} \partial t_1 \partial t_2} X_3(f)|_{t=0} = 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Построение операторов $\widetilde{X}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$), коммутирующих с операторами X_α

В этом параграфе мы покажем, что для построенных в предыдущем параграфе операторов X_α существуют операторы $\widetilde{X}_\alpha$, удовлетворяющие начальным условиям

$$\widetilde{X}_{\alpha;\, t}(f)\big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial t_\alpha}\bigg|_{t=0} \tag{2.1}$$

и условию коммутирования

$$X_\alpha \widetilde{X}_\beta(f) = \widetilde{X}_\beta X_\alpha(f) \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3). \tag{2.2}$$

По-прежнему вопросы сходимости мы здесь не рассматриваем, откладывая их до следующей главы.

1. Пусть в (2.2) $\beta = 1$ и пусть α принимает последовательно значения 1, 2, 3. Тогда мы получим для определения $\widetilde{X}_1(f)$ систему уравнений

$$X_1\widetilde{X}_1(f) = \widetilde{X}_1 X_1(f), \tag{2.3}$$

$$X_2\widetilde{X}_1(f) = \widetilde{X}_1 X_2(f), \tag{2.4}$$

$$X_3\widetilde{X}_1(f) = \widetilde{X}_1 X_3(f). \tag{2.5}$$

К этой системе уравнений следует добавить начальное условие

$$\widetilde{X}_1(f)\big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial t_1}\bigg|_{t=0}. \tag{2.6}$$

Покажем, что из уравнений (2.3) — (2.4) — (2.5) и начального условия (2.6) можно определить значение в точке $t = 0$ частных производных функции $\widetilde{X}_1(f)$. При этом одна и та же частная производная может определяться из различных уравнений. Необходимо показать, что эти вычисления непротиворечивы.

Вначале докажем лемму, аналогичную лемме 1.1.

Лемма 2.1. *Пусть*

$$D_t^\lambda = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial t_1^{\lambda_1}\, \partial t_2^{\lambda_2}\, \partial t_3^{\lambda_3}} \quad (|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3).$$

Тогда

$$D_t^\lambda \widetilde{X}_1(f)\big|_{t=0} = D_t^\lambda \frac{\partial f}{\partial t_1}\bigg|_{t=0} + \widetilde{a}_\mu^{\lambda;\,1} D_t^\mu f\big|_{t=0}, \tag{2.7}$$

$\tilde{a}_{\mu}^{\lambda;\,1} = \tilde{a}_{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3}^{\lambda_1;\,\lambda_2;\,\lambda_3;\,1}$ — *постоянные числа, не зависящие от функции* $f(t)$.

Доказательство. Докажем сначала формулу (2.7) для $|\lambda| = 1$. Полагая в уравнениях (2.3), (2.4) и (2.5) $t = 0$, мы получим:

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\tilde{X}_1(f)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t_1}X_1(f)|_{t=0},$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2}\tilde{X}_1(f)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t_1}X_2(f)|_{t=0},$$

$$\frac{\partial}{\partial t_3}\tilde{X}_1(f)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t_1}X_3(f)|_{t=0}.$$

Поэтому (2.7) следует из (1.12).

Будем теперь рассуждать по индукции. Пусть тождество (2.7) справедливо для $|\lambda| \leqslant |\lambda_0|$. Докажем, что оно справедливо для $|\lambda| = |\lambda_0| + 1$. Пусть $\lambda_0 = (\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30})$ и $\lambda_0' = (\lambda_{10} + 1, \lambda_{20}, \lambda_{30})$. Применяя к обеим частям равенства (2.3) оператор $D_t^{\lambda_0}$, мы получим:

$$D_t^{\lambda_0}X_1\tilde{X}_1(f)|_{t=0} = D_t^{\lambda_0}\tilde{X}_1X_1(f)|_{t=0}.$$

Полагая здесь $t = 0$ и разлагая левую часть по тождеству (1.12), а правую — по тождеству (2.7) *), мы получим:

$$D_t^{\lambda_0'}\tilde{X}_1(f)|_{t=0} + a_{\mu}^{\lambda_0;\,1}D_t^{\mu}\tilde{X}_1(f)|_{t=0} = D_t^{\lambda_0'}X_1(f)|_{t=0} +$$
$$+ \tilde{a}_{\mu}^{\lambda_0;\,1}D_t^{\mu}X_1(f)|_{t=0} = D_t^{\lambda_0''}f|_{t=0} + a_{\mu}^{\lambda_0';\,1}D_t^{\mu}f|_{t=0} +$$
$$+ \tilde{a}_{\mu}^{\lambda_0;\,1}\left[D_t^{\mu'}f|_{t=0} + a_{\nu}^{\mu;\,1}D_t^{\nu}f|_{t=0}\right],$$

причем $\lambda_0'' = (\lambda_{10} + 2, \lambda_{20}, \lambda_{30})$, $\mu' = (\mu_1 + 1, \mu_2, \mu_3)$. Отсюда следует разложение (2.7) для λ_0'. Если $\lambda_0' = (\lambda_{10}, \lambda_{20} + 1, \lambda_{30})$, то используем равенство (2.4) и, наконец, для $\lambda_0' = (\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30} + 1)$ используем (2.5).

2. Теперь докажем непротиворечивость вычислений значений в точке $t = 0$ последовательных производных для $\tilde{X}_1(f)$.

---

*) Для $|\lambda| = |\lambda_0|$ тождество (2.7) применимо в силу предположения индукции.

Докажем вначале однозначность производной

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t_2} \widetilde{X}_1 (f)\big|_{t=0}.$$

Эту производную можно вычислить, либо дифференцируя уравнения (2.3) по t_2, либо дифференцируя уравнение (2.4) по t_1 (и полагая затем $t=0$). Проделав эти операции и используя начальные условия (2.1), мы получим:

$$X_2 X_1 (\widetilde{X}_1 f)\big|_{t=0} = X_2 \widetilde{X}_1 X_1 (f)\big|_{t=0}, \tag{2.8}$$

$$X_1 X_2 (\widetilde{X}_1 f)\big|_{t=0} = X_1 \widetilde{X}_1 X_2 (f)\big|_{t=0}. \tag{2.9}$$

Но для любой функции $g(t)$ при $t=0$

$$X_\alpha \widetilde{X}_\beta (g) = \widetilde{X}_\beta X_\alpha (g),$$

ибо в этих равенствах содержатся только производные первого порядка для $\widetilde{X}_\beta (g)$, которые определяются непротиворечиво. Поэтому равенства (2.8) и (2.9) можно записать в виде

$$X_2 X_1 (\widetilde{X}_1 f)\big|_{t=0} = \widetilde{X}_1 X_2 X_1 (f)\big|_{t=0}, \tag{2.8^1}$$

$$X_1 X_2 (\widetilde{X}_1 f)\big|_{t=0} = \widetilde{X}_1 X_1 X_2 (f)\big|_{t=0}. \tag{2.9^1}$$

Обозначим смешанную производную, вычисленную из уравнения (2.8^1), через $\frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t_2} \widetilde{X}_1 (f)\big|_{t=0}$, а смешанную производную, вычисленную из уравнения (2.9^1), через $\frac{\partial^2}{\partial t_2\, \partial t_1} \widetilde{X}_1 (f)\big|_{t=0}$. Вычитая из равенства (2.9^1) равенство (2.8^1) и используя (1.1) и (2.2), мы получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t_2} \widetilde{X}_1 (f)\big|_{t=0} - \frac{\partial^2}{\partial t_2\, \partial t_1} \widetilde{X}_1 (f)\big|_{t=0} + c_{12}^{\nu} X_\nu \widetilde{X}_1 (f)\big|_{t=0} =$$
$$= c_{12}^{\nu} \widetilde{X}_1 X_\nu (f)\big|_{t=0} = c_{12}^{\nu} X_\nu \widetilde{X}_1 (f)\big|_{t=0}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t_2} \widetilde{X}_1 (f)\big|_{t=0} = \frac{\partial^2}{\partial t_2\, \partial t_1} \widetilde{X}_1 (f)\big|_{t=0},$$

что и требовалось доказать. Аналогично доказывается непротиворечивость вычисления остальных смешанных производных второго порядка.

3. Рассмотрим теперь непротиворечивость вычисления производных высших порядков. Будем рассуждать по индукции. Применяя к уравнениям (2.3) и (2.4) оператор D_t^λ, мы получим:

$$D_t^\lambda X_1 \widetilde{X}_1(f) = D_t^\lambda \widetilde{X}_1 X_1(f), \tag{2.10}$$

$$D_t^\lambda X_2 \widetilde{X}_1(f) = D_t^\lambda \widetilde{X}_1 X_2(f). \tag{2.11}$$

Полагая в этих уравнениях $t=0$, мы найдем для $\widetilde{X}_1(f)$ значения в точке $t=0$ последовательных производных до порядка $|\lambda|+1$. При этом одна и та же производная может получаться из разных уравнений. Мы должны показать непротиворечивость этого процесса.

С этой целью, так же как и в предыдущем параграфе, запишем оператор D_t^λ в виде

$$D_t^\lambda = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial t_{\alpha_1}\, \partial t_{\alpha_2} \ldots \partial t_{\alpha_{|\lambda|}}},$$

причем каждый из индексов $\alpha_i\,(i=1, 2, \ldots, |\lambda|)$ может принимать значения 1, 2, 3. Обозначим через α вектор с компонентами $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{|\lambda|})$. Из уравнения (2.10) и тождеств (1.12) и (2.7) можно определить

$$\frac{\partial^{|\lambda|+1}}{\partial t_{\alpha_1}\, \partial t_{\alpha_2} \ldots \partial t_{\alpha_{|\lambda|}}\, \partial t_1} \widetilde{X}_1(f)\big|_{t=0},$$

а из уравнения (2.11) можно определить

$$\frac{\partial^{|\lambda|+1}}{\partial t_{\alpha_1}\, \partial t_{\alpha_2} \ldots \partial t_{\alpha_{|\lambda|}}\, \partial t_2} \widetilde{X}_1(f)\big|_{t=0}.$$

Заменим в уравнении (2.11) $\alpha_{|\lambda|}$ на $\alpha'_{|\lambda|}$, и пусть $\alpha_{|\lambda|}=2$ и $\alpha'_{|\lambda|}=1$. Тогда одна и та же производная

$$\frac{\partial^{|\lambda|+1}}{\partial t_{\alpha_1}\, \partial t_{\alpha_2} \ldots \partial t_{\alpha_{|\lambda|-1}}\, \partial t_1\, \partial t_2} \widetilde{X}_1(f)\big|_{t=0}$$

определится из двух уравнений. Мы должны показать, что получится одна и та же величина.

Обозначим через β вектор с компонентами $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{|\lambda|-1})$, и пусть

$$D_t^\beta = \frac{\partial^{|\lambda|-1}}{\partial t_{\alpha_1}\, \partial t_{\alpha_2} \ldots \partial t_{\alpha_{|\lambda|-1}}}.$$

Покажем, что из уравнения (2.10) (в котором $\alpha_{|\lambda|} = 2$) следует:

$$D_t^\beta X_2 X_1 \widetilde{X}_1 (f)_{|t=0|} = D_t^\beta X_2 \widetilde{X}_1 X_1 (f)_{|t=0|}. \qquad (2.12)$$

Действительно, из тождества (1.12) следует:

$$D_t^\beta X_2 (X_1 \widetilde{X}_1 f)|_{t=0} = D_t^\beta \frac{\partial}{\partial t_2} (X_1 \widetilde{X}_1 f)|_{t=0} + a_\mu^{\beta;2} D_t^\mu (X_1 \widetilde{X}_1 f)|_{t=0}; \qquad (2.13)$$

$$D_t^\beta X_2 (\widetilde{X}_1 X_1 f)|_{t=0} = D_t^\beta \frac{\partial}{\partial t_2} (\widetilde{X}_1 X_1 f)|_{t=0} + a_\mu^{\beta;2} D_t^\mu (\widetilde{X}_1 X_1 f)|_{t=0}. \qquad (2.14)$$

Так как $|\mu| \leqslant |\beta| = |\lambda| - 1$, то в силу предположения индукции $D_t^\mu X_1 \widetilde{X}_1 (f)|_{t=0} = D_t^\mu \widetilde{X}_1 X_1 (f)_{t=0}$. Поэтому равенство (2.12) следует из (2.13), (2.14) и (2.10). Аналогично из (2.11) следует:

$$D_t^\beta X_1 X_2 \widetilde{X}_1 (f)|_{t=0} = D_t^\beta X_1 \widetilde{X}_1 X_2 (f)|_{t=0}. \qquad (2.15)$$

В силу предположения индукции

$$D_t^\beta X_2 \widetilde{X}_1 X_1 (f)|_{t=0} = D_t^\beta \widetilde{X}_1 X_2 X_1 (f)|_{t=0},$$

$$D_t^\beta X_1 \widetilde{X}_1 X_2 (f)|_{t=0} = D_t^\beta \widetilde{X}_1 X_1 X_2 (f)|_{t=0}.$$

Поэтому равенства (2.12) и (2.15) можно записать в виде

$$D_t^\beta X_2 X_1 (\widetilde{X}_1 f)|_{t=0} = D_t^\beta \widetilde{X}_1 X_2 X_1 (f)|_{t=0}, \qquad (2.12^1)$$

$$D_t^\beta X_1 X_2 (\widetilde{X}_1 f)|_{t=0} = D_t^\beta \widetilde{X}_1 X_1 X_2 (f)|_{t=0}. \qquad (2.15^1)$$

Вычитая из тождества (2.15^1) тождество (2.12^1) и используя тождество (1.1), мы получим:

$$\frac{\partial^{|\lambda|+1}}{\partial t_{\alpha_1} \ldots \partial t_{\alpha_{|\lambda|-1}} \partial t_1 \partial t_2} \widetilde{X}_1 (f)|_{t=0} -$$

$$- \frac{\partial^{|\lambda|+1}}{\partial t_{\alpha_1} \ldots \partial t_{\alpha_{|\lambda|-1}} \partial t_2 \partial t_1} \widetilde{X}_1 (f)|_{t=0} +$$

$$+ c_{12}^\nu D_t^\beta X_\nu \widetilde{X}_1 (f)|_{t=0} = c_{12}^\nu D_t^\beta \widetilde{X}_1 X_\nu (f)|_{t=0} = c_{12}^\nu D_t^\beta X_\nu \widetilde{X}_1 (f)|_{t=0}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial^{|\lambda|+1}}{\partial t_{\alpha_1}\ldots\partial t_{\alpha_{|\lambda|-1}}\partial t_1\,\partial t_2}\tilde{X}_1(f)\Big|_{t=0}=$$
$$=\frac{\partial^{|\lambda|+1}}{\partial t_{\alpha_1}\ldots\partial t_{\alpha_{|\lambda|-1}}\partial t_2\,\partial t_1}\tilde{X}_1(f)\Big|_{t=0},$$

что доказывает непротиворечивость вычисления этой производной. Аналогично доказывается непротиворечивость вычисления других производных как для $\tilde{X}_1(f)$, так и для $\tilde{X}_2(f)$ и $\tilde{X}_3(f)$.

Замечание. Система уравнений (2.2) линейна и однородна и поэтому обладает всеми основными свойствами таких систем (сумма решений есть решение, решение можно умножить на постоянную). Заметим также, что решение этой системы полностью определяется заданием начальных значений

$$\tilde{X}_\alpha(f)\big|_{t=0}.$$

4. В заключение этого параграфа мы покажем, что операторы $\tilde{X}_\alpha$ образуют алгебру Ли противоположной структуры, т. е. если

$$[X_\alpha,\ X_\beta]=c^{\lambda}_{\alpha\beta}X_\lambda, \tag{2.16}$$

то

$$[\tilde{X}_\alpha,\ \tilde{X}_\beta]=c^{\lambda}_{\beta\alpha}\tilde{X}_\lambda. \tag{2.17}$$

Для доказательства рассмотрим три оператора X_α, $\tilde{X}_\beta$, $\tilde{X}_\gamma$ ($\alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ 2,\ 3$). В силу тождества Якоби

$$[X_\alpha,\ [\tilde{X}_\beta,\ \tilde{X}_\gamma]\,]+[\tilde{X}_\beta,\ [X_\alpha,\ \tilde{X}_\gamma]\,]+[\tilde{X}_\gamma,\ [X_\alpha,\ \tilde{X}_\beta]\,]\equiv 0. \tag{2.18}$$

Но в силу уравнений (2.2) следует

$$[X_\alpha,\ \tilde{X}_\gamma]=[X_\alpha,\ \tilde{X}_\beta]=0.$$

Поэтому из (2.18) следует:

$$[X_\alpha,\ [\tilde{X}_\beta,\ \tilde{X}_\gamma]\,]=0.$$

Эти уравнения показывают, что операторы $Z_{\beta\gamma}=[\tilde{X}_\beta,\ \tilde{X}_\gamma]$ при фиксированных β и γ удовлетворяют системе (2.2).

Найдем для $Z_{\beta\gamma}$ начальные условия. Мы имеем, используя (2.1) и (2.16),

$$
\begin{aligned}
Z_{\beta\gamma}(f)|_{t=0} &= (\tilde{X}_\beta\tilde{X}_\gamma - \tilde{X}_\gamma\tilde{X}_\beta)(f)|_{t=0} = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t_\beta}\tilde{X}_\gamma - \frac{\partial}{\partial t_\gamma}\tilde{X}_\beta\right)(f)|_{t=0} = (X_\beta\tilde{X}_\gamma - X_\gamma\tilde{X}_\beta)(f)|_{t=0} = \\
&= (\tilde{X}_\gamma X_\beta - \tilde{X}_\beta X_\gamma)(f)|_{t=0} = (X_\gamma X_\beta - X_\beta X_\gamma)(f)|_{t=0} = \\
&= c^\lambda_{\gamma\beta}X_\lambda(f)|_{t=0} = c^\lambda_{\gamma\beta}\tilde{X}_\lambda(f)|_{t=0}. \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

Но в силу линейности системы (2.2) очевидно, что операторы

$$c^\lambda_{\gamma\beta}\tilde{X}_\lambda(f)$$

также удовлетворяют этой системе. Легко проверить, что они удовлетворяют также начальному условию (2.19). Поэтому в силу единственности (см. замечание)

$$Z_{\beta\gamma}(f) = c^\lambda_{\gamma\beta}\tilde{X}_\lambda(f),$$

т. е.

$$[\tilde{X}_\beta, \tilde{X}_\gamma] = c^\lambda_{\gamma\beta}\tilde{X}_\lambda,$$

что отличается от (2.17) только обозначениями.

§ 3. Реализация операторов X_α и $\tilde{X}_\alpha$ в виде линейных дифференциальных операторов первого порядка

1. Из теории групп Ли известно, что представление алгебры Ли можно реализовать в виде линейных дифференциальных операторов первого порядка. Это составляет содержание третьей обратной теоремы Ли. В настоящем параграфе мы изучим связь между рассмотренными в двух предыдущих параграфах операторами X_α и $\tilde{X}_\alpha$ и линейными дифференциальными операторами первого порядка, изучаемыми в теории групп Ли. Мы увидим, что при выполнении начальных условий (1.8), (1.9), (1.10), (1.9^1), (1.11), (1.9^2) и (2.1) операторы X_α и $\tilde{X}_\alpha$ являются линейными дифференциальными операторами первого порядка.

Не так обстоит дело с инфинитезимальными операторами второго порядка (т. е. операторами, удовлетворяющими условию (4.2) гл. VII).

Причина этого различия состоит в том, что для линейных дифференциальных операторов первого порядка коммутатор есть оператор первого порядка, а для линейных дифференциальных операторов второго порядка коммутатор, вообще говоря, есть оператор третьего порядка.

Пусть

$$Y_\alpha(f) = b^i_\alpha(t)\frac{\partial f}{\partial t_i} \qquad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{3.1}$$

$$b^i_\alpha(0) = \delta^i_\alpha. \tag{3.2}$$

Тогда

$$[Y_\alpha, Y_\beta](f) = \left(b^j_\alpha \frac{\partial b^i_\beta}{\partial t_j} - b^j_\beta \frac{\partial b^i_\alpha}{\partial t_j}\right)\frac{\partial f}{\partial t_i}.$$

Поэтому если

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = c^\lambda_{\alpha\beta} Y_\lambda,$$

то

$$b^j_\alpha \frac{\partial b^i_\beta}{\partial t_j} - b^j_\beta \frac{\partial b^i_\alpha}{\partial t_j} = c^\lambda_{\alpha\beta} b^i_\lambda. \tag{3.3}$$

К этой системе уравнений присоединим начальные условия (3.2).

Зададим произвольно бесконечно дифференцируемые функции $b^i_1(t_1, t_2, t_3)$, $b^i_2(0, t_2, t_3)$, $b^i_3(0, 0, t_3)$. Легко видеть, что в таком случае из системы (3.3) — (3.2) однозначно определяются значения в точке $t = 0$ последовательных производных функций b_2 и b_3.

Однако при этом одни и те же производные функции b^i_3 $\left(\text{например, } \dfrac{\partial^2 b^i_3}{\partial t_1\,\partial t_2}\right)$ будут определяться из различных уравнений. Необходимо показать непротиворечивость этого процесса. Это можно сделать при помощи анализа, проведенного в § 1 этой главы. Мы опускаем этот анализ, так как разрешимость системы (3.3) и есть содержание третьей обратной теоремы Ли*).

2. Пусть теперь f — бесконечно дифференцируемая функция. Тогда

$$[Y_\alpha, Y_\beta](f) = c^\lambda_{\alpha\beta} Y_\lambda(f).$$

*) См., например, E. Kähler, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen. Teubner Verlag, 1934, стр. 70.

Из этой системы и начальных условий (3.2) можно определить значения в точке $t=0$ последовательных производных для $Y_2(f)$ и $Y_3(f)$. Легко видеть, что эти производные совпадают с соответствующими производными для $X_2(f)$ и $X_3(f)$, рассмотренными в § 1 этой главы *). Это показывает, что дифференциальные операторы $Y_\alpha(f)$ совпадают с построенными в § 1 операторами $X_\alpha(f)$.

Замечание. При других начальных условиях операторы не будут дифференциальными. Например, можно положить

$$X_1(f)=b_1^i\frac{\partial f}{\partial t_i}+q_1 f+\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\int_0^{t_3}K_1(t_1,\ t_2,\ t_3;\ s_1,\ s_2,\ s_3)\times$$
$$\times f(s_1,\ s_2,\ s_3)\,ds_1\,ds_2\,ds_3,$$

$$X_2(f)\big|_{t_1=0}=b_2^i\frac{\partial f}{\partial t_i}\bigg|_{t_1=0}+q_2(t_2,\ t_3)\,f(0,\ t_2,\ t_3)+$$
$$+\int_0^{t_2}\int_0^{t_3}K_2(t_2,\ t_3;\ s_1,\ s_2,\ s_3)\,f(s_1,\ s_2,\ s_3)\,ds_1\,ds_2\,ds_3,$$

$$X_3(f)\bigg|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}=b_3^i\frac{\partial f}{\partial t_i}\bigg|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}+q_3(t_3)\,f(0,\ 0,\ t_3)+$$
$$+\int_0^{t_3}K_3(t_3;\ s_1,\ s_2,\ s_3)\,f(s_1,\ s_2,\ s_3)\,ds_1\,ds_2\,ds_3,$$

причем $b_1^i(t_1,\ t_2,\ t_3)$, $b_2^i(0,\ t_2,\ t_3)$, $b_3^i(0,\ 0,\ t_3)$,

$$q_1(t_1,\ t_2,\ t_3),\quad q_2(t_2,\ t_3),\quad q_3(t_3),\quad K_1(t_1,\ t_2,\ t_3;\ s_1,\ s_2,\ s_3),$$

$K_2(t_2,\ t_3;\ s_1,\ s_2,\ s_3)$, $K_3(t_3;\ s_1,\ s_2,\ s_3)$ — бесконечно дифференцируемые функции. При таких начальных условиях остаются в силе основные результаты §§ 1 и 2 этой главы (фундаментальную роль играло тождество (1.12), которое, как в этом легко убедиться, сохраняется).

*) Предполагается, что в начальных условиях (1.8), (1.10) и (1.11) коэффициенты b_α^i те же, что и у операторов Y_α.

3. Покажем теперь, что если X_α суть дифференциальные операторы первого порядка, то $\widetilde{X}_\alpha$ также являются дифференциальными операторами первого порядка. Прежде всего, заметим, что из системы (2.2)—(2.1) операторы $\widetilde{X}_\alpha$ определяются однозначно (см. замечание в предыдущем параграфе). Поэтому если мы покажем, что операторы $\widetilde{X}_\alpha$ можно реализовать в виде дифференциальных операторов, то в силу единственности они должны совпадать с построенными в предыдущем параграфе.

Итак, пусть

$$X_\alpha(f) = b_\alpha^i \frac{\partial f}{\partial t_i} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

и пусть

$$\widetilde{X}_\alpha(f) = \widetilde{b}_\alpha^i \frac{\partial f}{\partial t_i} \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Из условия коммутирования (2.2) следует, что неизвестные функции $\widetilde{b}_\alpha^i$ должны удовлетворять системе уравнений

$$b_\alpha^j \frac{\partial \widetilde{b}_\beta^i}{\partial t_j} = \widetilde{b}_\beta^j \frac{\partial b_\alpha^i}{\partial t_j} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \tag{3.4}$$

К этой системе уравнений необходимо присоединить начальные условия

$$\widetilde{b}_\alpha^i(0) = \delta_\alpha^i, \tag{3.5}$$

которые следуют из начальных условий (2.1).

Можно показать с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям, проведенным в предыдущем параграфе, что из системы (3.4)—(3.5) значения последовательных производных функций $\widetilde{b}_\alpha^i$ в точке $t = 0$ определяются однозначно и непротиворечиво. Определив функции $\widetilde{b}_\alpha^i$, положим

$$\widetilde{X}_\alpha(f) = \widetilde{b}_\alpha^i \frac{\partial f}{\partial t_i}.$$

Эти операторы в силу единственности должны совпадать с операторами, построенными в предыдущем параграфе.

§ 4. Обратная третья теорема Ли. Случай инфинитезимальных операторов второго порядка

В этом параграфе мы строим представление алгебры Ли с помощью инфинитезимальных операторов второго порядка, т. е. операторов, удовлетворяющих начальному условию (4.2) гл. VII. По-прежнему вопросы сходимости мы откладываем до следующей главы. Для простоты мы снова ограничиваемся случаем грех переменных.

Итак, следует определить три оператора X_1, X_2, X_3, удовлетворяющих условиям коммутирования

$$X_1X_2(f) = X_2X_1(f) + c_{12}^{\lambda}X_{\lambda}(f), \tag{4.1}$$

$$X_1X_3(f) = X_3X_1(f) + c_{13}^{\lambda}X_{\lambda}(f), \tag{4.2}$$

$$X_2X_3(f) = X_3X_2(f) + c_{23}^{\lambda}X_{\lambda}(f) \tag{4.3}$$

и начальным условиям

$$X_{\alpha}(f)|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial t_{\alpha}^2}\right|_{t=0}. \tag{4.4}$$

Оператор X_1 задаем произвольно в виде общего линейного дифференциального оператора второго порядка

$$X_{1;\,t} = a_1^{\alpha\beta}(t)\frac{\partial^2}{\partial t_{\alpha}\,\partial t_{\beta}} + b_1^{\alpha}(t)\frac{\partial}{\partial t_{\alpha}} + c_1(t),$$

причем, чтобы обеспечить начальное условие (4.4), потребуем, чтобы коэффициенты оператора X_1 удовлетворяли следующим начальным условиям:

$$a_1^{\alpha\beta}(0) = \delta_1^{\alpha}\delta_1^{\beta}, \quad b_1^{\alpha}(0) = 0, \quad c_1(0) = 0. \tag{4.5}$$

Для оператора X_2 задаем следующие начальные условия:

$$X_2(f)|_{t_1=0} = \left[a_2^{\alpha\beta}(f)\frac{\partial^2 f}{\partial t_{\alpha}\,\partial t_{\beta}} + b_2^{\alpha}(t)\frac{\partial f}{\partial t_2} + \right.$$
$$\left. + c_2(t)f)\right]|_{t_1=0} = L_{2;\,t}(f)|_{t_1=0}, \tag{4.6}$$

$$a_2^{\alpha\beta}(0) = \delta_2^{\alpha}\delta_2^{\beta}, \quad b_2^{\alpha}(0) = 0, \quad c_2(0) = 0, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}X_2(f)|_{t_1=0} = \frac{\partial}{\partial t_1}L_{2;\,t}(f)|_{t_1=0}. \tag{4.8}$$

Наконец, для X_3 задаем начальные условия *):

$$(X_3 f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = \Big[a_3^{\alpha\beta}(t)\frac{\partial^2 f}{\partial t_\alpha\,\partial t_\beta} + b_3^\alpha(t)\frac{\partial f}{\partial t_\alpha} + \\ + c_3(t)(f)\Big]\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = L_{3;\,t}(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}, \qquad (4.9)$$

$$a_3^{\alpha\beta}(0) = \delta_3^\alpha\delta_3^\beta;\quad b_3^\alpha(0) = 0,\quad c_3(0) = 0, \qquad (4.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}X_3(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = \frac{\partial}{\partial t_1}L_{3;\,t}(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}, \qquad (4.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2}X_3(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = \frac{\partial}{\partial t_2}L_{3;\,t}(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}, \qquad (4.12)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2}X_3(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = \frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2}L_{3;\,t}(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}. \qquad (4.13)$$

Из уравнений (4.1), (4.2) и (4.3) и начальных условий (4.5) — (4.13) можно определить значение в точке $t=0$ последовательных производных для $X_2(f)$ и $X_3(f)$. При этом аналогично тому, как мы вывели формулу (1.12), можно получить формулу

$$D_t^\lambda X_k(f)|_{t=0} = D_t^\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial t_k^2}\Big|_{t=0} + a_\mu^{\lambda;\,k} D_t^\mu f\,|_{t=0} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3), \qquad (4.14)$$

причем $a_\mu^{\lambda;\,k} = a_{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3}^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,k}$ — постоянные числа, не зависящие от функции $f(t)$; $|\mu| = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \leqslant |\lambda| + 1$.

Производные для $X_2(f)$ определяются только из одного уравнения (4.1) и поэтому определяются непротиворечиво. Не так обстоит дело с производными для $X_3(f)$, которые определяются из двух уравнений — уравнений (4.2) и (4.3).

Непротиворечивость процесса вычисления этих производных доказывается в точности так же, как в случае операторов первого порядка, на основе тождества Якоби (см. § 1 настоящей главы). Поэтому мы опускаем это доказательство.

---

*) В условии (4.8) оператор L_2 можно заменить другим оператором второго порядка, коэффициенты которого удовлетворяют начальным условиям (4.7). Это же замечание относится к начальным условиям (4.11), (4.12) и (4.13).

§ 5. Построение операторов $\tilde{X}_\alpha$. Случай операторов второго порядка

1. Операторы $\tilde{X}_\alpha$ определяются из условий коммутирования

$$X_\alpha \tilde{X}_\beta(f) = \tilde{X}_\beta X_\alpha(f) \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{5.1}$$

и начальных условий *)

$$\tilde{X}_\alpha(f)\Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 f}{\partial t_\alpha^2}\Big|_{t=0}, \tag{5.2}$$

$$D_t^\nu \tilde{X}_\alpha(f)\Big|_{t=0} = D_t^\nu X_\alpha(f)\Big|_{t=0} \tag{5.3}$$

$$(\alpha = 1, 2, 3; \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad 0 \leqslant \nu_i \leqslant 1).$$

Зафиксируем в уравнениях (5.1) β, например, положим $\beta = 1$, и пусть α принимает значения 1, 2, 3. Получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} X_1\tilde{X}_1(f) &= \tilde{X}_1 X_1(f), \\ X_2\tilde{X}_1(f) &= \tilde{X}_1 X_2(f), \\ X_3\tilde{X}_1(f) &= \tilde{X}_1 X_3(f). \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

Из системы (5.4) и начальных условий (5.2) и (5.3) можно определить значения в точке $t = 0$ последовательных производных для $\tilde{X}_1(f)$. При этом одна и та же производная может определяться из различных уравнений.

Непротиворечивость процесса этих вычислений доказывается в точности так же, как и в случае инфинитезимальных операторов первого порядка (см. § 2 настоящей главы). Поэтому мы опускаем это доказательство.

2. Покажем, что операторы $\tilde{X}_\alpha$ образуют алгебру Ли противоположной структуры (по отношению к алгебре Ли для операторов X_α).

Рассмотрим три оператора X_α, $\tilde{X}_\beta$, $\tilde{X}_\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$.

*) Из дальнейшего изложения будет видно, что начальные условия (5.2) и (5.3) можно заменить несколько более общими. Однако для приложения к обобщенным сдвигам это обобщение начальных условий нам не понадобится.

В силу тождества Якоби

$$[X_\alpha, [\tilde{X}_\beta, \tilde{X}_\gamma]] + [\tilde{X}_\beta, [\tilde{X}_\gamma, X_\alpha]] + [\tilde{X}_\gamma, [X_\alpha, \tilde{X}_\beta]] \equiv 0.$$

Далее, в силу (5.1)

$$[\tilde{X}_\gamma, X_\alpha] = 0, \qquad [X_\alpha, \tilde{X}_\beta] = 0.$$

Поэтому

$$[X_\alpha, [\tilde{X}_\beta, \tilde{X}_\gamma] = 0. \tag{5.5}$$

Эти уравнения показывают, что оператор

$$Z_{\beta\gamma} = [\tilde{X}_\beta, \tilde{X}_\gamma]$$

при фиксированных β и γ удовлетворяет системе (5.1). Определим начальные условия для оператора $Z_{\beta\gamma}$.

Мы имеем, используя начальные условия (5.2) и (5.3),

$$\begin{aligned} Z_{\beta\gamma}(f)|_{t=0} &= (\tilde{X}_\beta\tilde{X}_\gamma - \tilde{X}_\gamma\tilde{X}_\beta)(f)|_{t=0} = (X_\beta\tilde{X}_\gamma - X_\gamma\tilde{X}_\beta)(f)|_{t=0} = \\ &= (\tilde{X}_\gamma X_\beta - \tilde{X}_\beta X_\gamma)(f)|_{t=0} = (X_\gamma X_\beta - X_\beta X_\gamma)(f)|_{t=0} = \\ &= c^\lambda_{\gamma\beta} X_\lambda(f)|_{t=0} = c^\lambda_{\gamma\beta}\tilde{X}_\lambda(f)|_{t=0}; \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} D^\nu_t Z_{\beta\gamma}(f)|_{t=0} &= D^\nu_t(\tilde{X}_\beta\tilde{X}_\gamma - \tilde{X}_\gamma\tilde{X}_\beta)(f)|_{t=0} = \\ &= D^\nu_t(X_\beta\tilde{X}_\gamma - X_\gamma\tilde{X}_\beta)(f)|_{t=0} = D^\nu_t(\tilde{X}_\gamma X_\beta - \tilde{X}_\beta X_\gamma)(f)|_{t=0} = \\ &= D^\nu_t(X_\gamma X_\beta - X_\beta X_\gamma)(f)|_{t=0} = c^\lambda_{\gamma\beta} D^\nu_t X_\lambda(f)|_{t=0} = \\ &= c^\lambda_{\gamma\beta} D^\nu_t \tilde{X}_\lambda(f)|_{t=0}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

С другой стороны, очевидно, что операторы

$$Y_{\beta\gamma}(f) = c^\lambda_{\gamma\beta}\tilde{X}_\lambda(f)$$

также удовлетворяют системе уравнений (5.1) и начальным условиям (5.6) и (5.7). Поэтому в силу единственности

$$Z_{\beta\gamma} = Y_{\beta\gamma},$$

т. е.

$$[\tilde{X}_\beta, \tilde{X}_\gamma] = c^\lambda_{\gamma\beta}\tilde{X}_\lambda,$$

что и требовалось доказать.

§ 6. Канонические операторы. Случай инфинитезимальных операторов первого порядка

При построении инфинитезимальных операторов первого порядка, образующих алгебру Ли, оператор X_1 оставался произвольным, для X_2 оставалось произвольным начальное значение $X_2|_{t_1=0}$ и, наконец, для X_3 — произвольно значение $X_3\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}$. Естественно выбрать эти произвольные значения простейшим образом, а именно, пусть

$$X_1(f)=\frac{\partial f}{\partial t_1}, \tag{6.1}$$

$$X_2(f)\,|_{t_1=0}=\frac{\partial f}{\partial t_2}\Big|_{t_1=0}, \tag{6.2}$$

$$X_3(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}=\frac{\partial f}{\partial t_3}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}. \tag{6.3}$$

Можно показать, что начальным условиям (6.1) — (6.2) — (6.3) в теории групп Ли соответствует выбор канонических координат второго рода*). По этой причине эти операторы (а также аналогичные инфинитезимальные операторы второго порядка) в дальнейшем мы будем называть каноническими.

Пусть $\tilde{X}_\alpha$ — операторы, построенные в § 2 этой главы. Цель настоящего параграфа состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 6.1. *Если операторы X_α являются каноническими* (т. е. удовлетворяют начальным условиям (6.1) — (6.2) — (6.3)), *то операторы $\tilde{X}_\alpha$ удовлетворяют начальным условиям*

$$\tilde{X}_3(f)=\frac{\partial f}{\partial t_3}, \tag{6.4}$$

$$\tilde{X}_2(f)\,|_{t_3=0}=\frac{\partial f}{\partial t_2}\Big|_{t_3=0}, \tag{6.5}$$

$$\tilde{X}_1(f)\Big|_{\substack{t_3=0\\t_2=0}}=\frac{\partial f}{\partial t_1}\Big|_{\substack{t_3=0\\t_2=0}} \tag{6.6}$$

и поэтому также являются каноническими.

---

*) Определение канонических координат второго рода см. в книге: Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, 1954, стр. 299.

Доказательство. Операторы X_α и $\tilde{X}_\beta$ связаны условиями коммутирования

$$X_\alpha \tilde{X}_\beta(f) = \tilde{X}_\beta X_\alpha(f). \tag{6.7}$$

Операторы $\tilde{X}_\beta$ удовлетворяют также начальному условию

$$\tilde{X}_\beta(f)\big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial t_\beta}\bigg|_{t=0}. \tag{6.8}$$

Докажем сначала (6.4). С этой целью положим в (6.7) $\beta = 3$, а α будем придавать последовательно значения 1, 2, 3. Мы получим следующие уравнения:

$$X_1 \tilde{X}_3(f) = \tilde{X}_3 X_1(f), \tag{6.9}$$

$$X_2 \tilde{X}_3(f) = \tilde{X}_3 X_2(f), \tag{6.10}$$

$$X_3 \tilde{X}_3(f) = \tilde{X}_3 X_3(f). \tag{6.11}$$

Обозначим через l, m и n произвольные целые неотрицательные числа. Если $l > 0$, то, применяя к (6.9) оператор X_1^{l-1}, мы получим:

$$X_1^l \tilde{X}_3(f) = \tilde{X}_3 X_1^l(f).$$

Применяя к этому равенству оператор $X_3^n X_2^m$, мы получим, используя (6.10) и (6.11),

$$X_3^n X_2^m X_1^l(\tilde{X}_3 f) = \tilde{X}_3 X_3^n X_2^m X_1^l(f).$$

Полагая в этом равенстве $t = 0$ и используя начальные условия (6.1) — (6.2) — (6.3), мы получим:

$$D_t^{l,\,m,\,n}(\tilde{X}_3 f)\big|_{t=0} = D_t^{l,\,m,\,n+1} f\big|_{t=0}. \tag{6.12}$$

Если $l = 0$, то для вывода равенства (6.12) используем (6.10) и (6.11).

В случае $l = 0$, $m = 0$ для вывода (6.12) используем (6.11). Наконец, из (6.8) следует, что (6.12) имеет место также, если $l = m = n = 0$.

Равенство (6.12) означает, что $\tilde{X}_3(f)$ имеет такие же коэффициенты Тэйлора, что и $\frac{\partial f}{\partial t_3}$. Это доказывает (6.4). Докажем теперь равенство (6.5). С этой целью положим в равенстве (6.7) $\beta = 2$, $\alpha = 1,2$. Мы получим:

$$X_1 \tilde{X}_2 f = \tilde{X}_2 X_1 f,$$
$$X_2 \tilde{X}_2 f = \tilde{X}_2 X_2 f.$$

Из этих равенств следует:

$$X_2^m X_1^l (\tilde{X}_2 f) = \tilde{X}_2 X_2^m X_1^l f.$$

Полагая здесь $t = 0$, получим, используя (6.1) и (6.2),

$$D_t^{l,\, m,\, 0} (\tilde{X}_2 f) \big|_{t=0} = D_t^{l,\, m+1,\, 0} f \big|_{t=0}.$$

Отсюда следует (6.5).

Наконец, для доказательства (6.6) положим в (6.7) $\beta = 1$, $\alpha = 1$. Мы получим:

$$X_1 \tilde{X}_1 f = \tilde{X}_1 X_1 f.$$

Отсюда следует, если $n > 0$,

$$X_1^n (\tilde{X}_1 f) = \tilde{X}_1 X_1^n f.$$

Полагая $t = 0$, получим, используя (6.1),

$$D_t^{n,\, 0,\, 0} (\tilde{X}_1 f) \big|_{t=0} = D_t^{n+1,\, 0,\, 0} f \big|_{t=0}. \tag{6.13}$$

Это равенство имеет также место и для $n = 0$, что следует из начального условия (6.8). Равенство (6.13) доказывает, очевидно, (6.6).

§ 7. Канонические операторы. Случай инфинитезимальных операторов второго порядка

Рассмотрим операторы X_1, X_2, X_3, удовлетворяющие условию коммутирования (1.1)—(1.2)—(1.3) и начальным условиям:

$$X_1 (f) = \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2}, \tag{7.1}$$

$$X_2 (f) \big|_{t_1=0} = \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2} \Big|_{t_1=0}, \tag{7.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} X_2 (f) \big|_{t_1=0} = \frac{\partial^3 f}{\partial t_1\, \partial t_2^2} \Big|_{t_1=0}, \tag{7.3}$$

$$X_3(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = \frac{\partial^2 f}{\partial t_3^3}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}, \tag{7.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} X_3(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = \frac{\partial^3 f}{\partial t_1\, \partial t_3^2}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}, \tag{7.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2} X_3(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = \frac{\partial^3 f}{\partial t_2\, \partial t_3^2}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}, \tag{7.6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t_2} X_3(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = \frac{\partial^4 f}{\partial t_1\, \partial t_2\, \partial t_3^2}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} \tag{7.7}$$

Эти операторы мы будем называть в дальнейшем каноническими операторами второго порядка.

Пусть $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$, $\widetilde{X}_3$ — операторы, удовлетворяющие условию коммутирования

$$X_\alpha \widetilde{X}_\beta(f) = \widetilde{X}_\beta X_\alpha(f) \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3) \tag{7.8}$$

и начальным условиям

$$D_t^\nu \widetilde{X}_\alpha(f)\big|_{t=0} = D_t^\nu X_\alpha(f)\big|_{t=0}, \tag{7.8^1}$$

причем $\nu = (\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3)$, $0 \leqslant \nu_i \leqslant 1$, $i = 1,\ 2,\ 3$.

В следующей теореме доказывается, что операторы $\widetilde{X}_\alpha$ также являются каноническими.

Теорема 7.1. *Если операторы X_1, X_2, X_3 являются каноническими операторами второго порядка, то операторы $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$, $\widetilde{X}_3$ также являются каноническими операторами второго порядка, причем*

$$\widetilde{X}_3(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial t_3^2}, \tag{7.9}$$

$$\widetilde{X}_2(f)\big|_{t_3=0} = \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}\Big|_{t_3=0}, \tag{7.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_3}\widetilde{X}_2(f)\big|_{t_3=0} = \frac{\partial^3 f}{\partial t_3\, \partial t_2^2}\Big|_{t_3=0}, \tag{7.11}$$

$$\widetilde{X}_1(f)\Big|_{\substack{t_3=0\\t_2=0}} = \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2}\Big|_{\substack{t_3=0\\t_2=0}}, \tag{7.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_3}\tilde{X}_1(f)\Big|_{\substack{t_3=0\\t_2=0}}=\frac{\partial^3 f}{\partial t_3\,\partial t_1^2}\Bigg|_{\substack{t_3=0\\t_2=0}}, \tag{7.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2}\tilde{X}_1(f)\Big|_{\substack{t_3=0\\t_2=0}}=\frac{\partial^3 f}{\partial t_2\,\partial t_1^2}\Bigg|_{\substack{t_3=0\\t_2=0}}, \tag{7.14}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_3\,\partial t_2}\tilde{X}_1(f)\Big|_{\substack{t_3=0\\t_2=0}}=\frac{\partial^4 f}{\partial t_3\,\partial t_2\,\partial t_1^2}\Bigg|_{\substack{t_3=0\\t_2=0}}. \tag{7.15}$$

Доказательство. Для примера докажем равенства (7.10) и (7.11). Остальные равенства доказываются аналогично.

Для доказательства (7.10) положим в равенстве (7.7) $\beta=2$, а α последовательно придадим значения $\alpha=1$, $\alpha=2$. Мы получим:

$$X_1\tilde{X}_2(f)=\tilde{X}_2X_1(f), \tag{7.16}$$

$$X_2\tilde{X}_2(f)=\tilde{X}_2X_2(f). \tag{7.17}$$

Обозначим через l и m произвольные целые неотрицательные числа. Из (7.16) и (7.17) следует (см. предыдущий параграф):

$$X_2^mX_1^l(\tilde{X}_2f)=\tilde{X}_2X_2^mX_1^l(f). \tag{7.18}$$

Полагая в этом равенстве $t=0$, получим (используя начальные условия):

$$D_t^{2l,\,2m,\,0}(\tilde{X}_2f)\,|_{t=0}=D_t^{2l,\,2m+2,\,0}f\,|_{t=0}. \tag{7.19}$$

Применяя к (7.18) оператор $D_t^{\nu_1,\,\nu_2,\,0}$ $(0\leqslant\nu_i\leqslant1,\ i=1,\ 2)$, получим:

$$D_t^{\nu_1,\,\nu_2,\,0}X_2^mX_1^l(\tilde{X}_2f)=D_t^{\nu_1,\,\nu_2,\,0}\tilde{X}_2X_2^mX_1^l(f).$$

Полагая в этом равенстве $t=0$, получим, используя начальные условия (7.2), (7.3) и (7.8),

$$D_t^{2l+\nu_1,\,2m+\nu_2,\,0}(\tilde{X}_2f)\,|_{t=0}=D_t^{2l+\nu_1,\,2m+\nu_2+2,\,0}f\,|_{t=0}. \tag{7.20}$$

Из (7.19) и (7.20) следует, что $\tilde{X}_2(f)\,|_{t_3=0}$ имеет такие же коэффициенты Тэйлора, что и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}\Bigg|_{t_3=0}$.

Отсюда следует (7.10).

Докажем теперь (7.11). Из (7.18) следует:

$$\frac{\partial}{\partial t_3} X_2^m X_1^l (\tilde{X}_2 f) = \frac{\partial}{\partial t_3} \tilde{X}_2 X_2^m X_1^l (f). \tag{7.21}$$

Полагая в этом равенстве $t = 0$ и используя начальные условия (7.2) и (7.8), мы получим:

$$D_t^{2l,\,2m,\,0}\left(\frac{\partial}{\partial t_3}\tilde{X}_2(f)\right)\bigg|_{t=0} = D_t^{2l,\,2m+2,\,1} f\,|_{t=0}. \tag{7.22}$$

Применяя к (7.21) оператор $D_t^{\nu_1,\,\nu_2,\,0}$ $(0 \leqslant \nu_i \leqslant 1,\ i = 1,\ 2)$, полагая затем $t = 0$ и используя начальные условия (7.2), (7.3) и (7.8), мы получим:

$$D_t^{2l+\nu_1,\,2m+\nu_2,\,0}\left(\frac{\partial}{\partial t_3}\tilde{X}_2(f)\right)\bigg|_{t=0} = D_t^{2l+\nu_1,\,2m+\nu_2+2,\,1} f\,|_{t=0}. \tag{7.23}$$

Из (7.22) и (7.23) следует, что $\frac{\partial}{\partial t_3}\tilde{X}_2(f)|_{t_3=0}$ имеет те же коэффициенты Тейлора, что и $\left.\frac{\partial^3 f}{\partial t_3\,\partial t_2^2}\right|_{t_3=0}$. Это доказывает (7.11).

Замечание. Легко показать, что в коммутативном случае (т. е. в случае, когда структурные константы равны нулю) канонические операторы второго порядка равны

$$X_1 = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}, \quad X_2 = \frac{\partial^2}{\partial t_2^2}, \quad X_3 = \frac{\partial^3}{\partial t_3^2}.$$

В этом случае $\tilde{X}_\alpha = X_\alpha$.

§ 8. Операторы преобразования

1. Мы видели, что при построении инфинитезимальных операторов существует большой произвол.

Однако, как мы покажем в этом параграфе, два семейства инфинитезимальных операторов, образующих одинаковую структуру и имеющих одинаковый порядок, линейно эквивалентны (подобны).

Пусть дано n линейных операторов $X_1, \ldots, X_n$, образующих алгебру Ли:

$$[X_\alpha,\ X_\beta] = c_{\alpha\beta}^{\gamma} X_\gamma, \tag{8.1}$$

и пусть выполняется равенство (4.14) (в частности, операторы X_α второго порядка).

Пусть дано n линейных операторов $Y_1, \ldots, Y_n$, образующих алгебру Ли той же структуры:

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta} Y_\gamma, \tag{8.2}$$

и пусть для операторов Y_α также выполняется равенство (4.14) (с другими константами $a^{\lambda;\,k}_\mu$). Мы докажем, что операторы X_α и Y_α линейно эквивалентны (подобны). Все результаты рассматриваются в классе коэффициентов Тэйлора. Вопросы сходимости мы рассмотрим в следующей главе.

Теорема 8.1. *Существует оператор A, удовлетворяющий условиям*:

1) $X_\alpha Af = AY_\alpha f$ ($\alpha = 1, \ldots, n$, f — произвольная бесконечно дифференцируемая функция);

2) *существует обратный оператор* A^{-1}.

Замечание. Оператор A мы будем называть оператором преобразования.

Доказательство теоремы. Мы покажем, что оператор A определяется однозначно и непротиворечиво из системы уравнений

$$X_\alpha A(f) = AY_\alpha(f) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{8.3}$$

и начальных условий

$$Af\,|_{t=0} = f(0), \tag{8.4}$$

$$D^\nu_t Af\,|_{t=0} = D^\nu_t f\,|_{t=0} \qquad (0 \leqslant \nu_i \leqslant 1;\ i = 1, \ldots, n). \tag{8.5}$$

Полагая в уравнении (8.3) $t = 0$, мы получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_\alpha^2} Af\,|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial t_\alpha^2}\right|_{t=0}.$$

Применяя к обеим частям (8.3) оператор D^ν_t, полагая затем $t = 0$ и используя начальное условие (8.5), найдем:

$$D^\nu_t X_\alpha Af\,|_{t=0} = D^\nu_t Y_\alpha(f)\,|_{t=0} \qquad (0 \leqslant \nu_i \leqslant 1).$$

Из этого уравнения с помощью (4.14) можно определить производные

$$D^\nu_t \frac{\partial^2}{\partial t_\alpha^2}(Af)\,|_{t=0} \quad (\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n),\ 0 \leqslant \nu_i \leqslant 1).$$

Далее, из (8.3) следует:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_\beta^2} X_\alpha (Af)\big|_{t=0} = X_\beta X_\alpha (Af)\big|_{t=0} = \frac{\partial^2}{\partial t_\beta^2} AY_\alpha (f)\big|_{t=0} =$$
$$= X_\beta AY_\alpha (f)\big|_{t=0} = Y_\beta Y_\alpha (f)\big|_{t=0}. \qquad (8.6)$$

Отсюда мы найдем $\frac{\partial^4}{\partial t_\beta^2\, \partial t_\alpha^2} A(f)\big|_{t=0}$. Значение для этой же производной мы найдем, если в (8.6) поменяем местами α и β. Следует показать, что получается одна и та же величина. Переставляя в (8.6) местами α и β, мы получим:

$$X_\alpha X_\beta (Af)\big|_{t=0} = Y_\alpha Y_\beta (f)\big|_{t=0}. \qquad (8.6^1)$$

Вычитая из равенства (8.6^1) равенство (8.6), мы получим:

$$\frac{\partial^4}{\partial t_\alpha^2\, \partial t_\beta^2} (Af)\big|_{t=0} - \frac{\partial^4}{\partial t_\beta^2\, \partial t_\alpha^2} (Af)\big|_{t=0} + c_{\alpha\beta}^{\gamma} X_\gamma (Af)\big|_{t=0} =$$
$$= c_{\alpha\beta}^{\gamma} Y_\gamma (f)\big|_{t=0} = c_{\alpha\beta}^{\gamma} AY_\gamma (f)\big|_{t=0}.$$

Так как в силу предыдущего

$$X_\gamma A(f)\big|_{t=0} = AY_\gamma (f)\big|_{t=0},$$

то

$$\frac{\partial^4}{\partial t_\alpha^2\, \partial t_\beta^2} (Af)\big|_{t=0} = \frac{\partial^4}{\partial t_\beta^2\, \partial t_\alpha^2} (Af)\big|_{t=0}.$$

Аналогично доказывается непротиворечивость определения следующих производных.

Определим теперь аналогичным образом операторы B из системы уравнений

$$Y_\alpha Bf = BX_\alpha f \qquad (8.7)$$

и начальных условий

$$Bf\big|_{t=0} = f(0), \qquad (8.8)$$

$$D_t^\nu Bf\big|_{t=0} = D_t^\nu f\big|_{t=0}. \qquad (8.9)$$

Покажем, что

$$AB = I, \qquad (8.10)$$

$$BA = I, \qquad (8.11)$$

где I — единичный оператор. Докажем (8.10), так как (8.11) доказывается аналогично.

Положим
$$ABf = g. \tag{8.12}$$

Полагая в этом равенстве $t = 0$, получим, используя (8.4) и (8.8),
$$g(0) = f(0).$$

Применяя к (8.12) оператор D_t^ν и полагая затем $t = 0$, получим, используя (8.5) и (8.9),
$$D_t^\nu g\,|_{t=0} = D_t^\nu f\,|_{t=0}.$$

Далее, применяя к (8.12) оператор X_α, мы получим, используя (8.3) и (8.7),
$$ABX_\alpha f = X_\alpha g. \tag{8.13}$$

Полагая здесь $t = 0$, получим:
$$\left.\frac{\partial^2 g}{\partial t_\alpha^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial t_\alpha^2}\right|_{t=0}.$$

Применяя к (8.13) оператор D_t^ν и полагая затем $t = 0$, мы получим:
$$D_t^\nu \left.\frac{\partial^2 g}{\partial t_\alpha^2}\right|_{t=0} = D_t^\nu \left.\frac{\partial^2 f}{\partial t_\alpha^2}\right|_{t=0}.$$

Применяя к (8 13) оператор X_β, получим:
$$ABX_\beta X_\alpha f = X_\beta X_\alpha g.$$

Полагая здесь $t = 0$, получим:
$$\frac{\partial^2}{\partial t_\beta^2} X_\alpha(g)\,|_{t=0} = \frac{\partial^2}{\partial t_\beta^2} X_\alpha(f)\,|_{t=0}.$$

Используя разложение (4.14) и доказанное равенство производных (в точке $t = 0$) для g и f до третьего порядка включительно, мы получим равенство
$$\left.\frac{\partial^4 g}{\partial t_\alpha^2\,\partial t_\beta^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^4 f}{\partial t_\alpha^2\,\partial t_\beta^2}\right|_{t=0}.$$

Рассуждая далее аналогично, мы докажем, что для функций f и g значения всех производных в точке $t = 0$ совпадают, что и требовалось доказать.

Замечание. Нетрудно доказать, что справедливы следующие разложения:

$$D_t^\lambda A f\,|_{t=0} = D_t^\lambda f\,|_{t=0} + a_\mu^{\lambda;\,A} D_t^\mu f\,|_{t=0}, \tag{8.14}$$

$$D_t^\lambda B f\,|_{t=0} = D_t^\lambda f\,|_{t=0} + a_\mu^{\lambda;\,B} D_t^\mu f\,|_{t=0}, \tag{8.15}$$

в которых $a_\mu^{\lambda;\,A}$, $a_\mu^{\lambda;\,B}$ — постоянные числа, не зависящие от функции $f(t)$.

2. Из (8.3) следует:

$$Y_\alpha = A^{-1} X_\alpha A.$$

Пусть операторы $\tilde{X}_\alpha$ коммутируют с операторами X_β и образуют противоположную структуру. Положим

$$\tilde{Y}_\alpha = A^{-1} \tilde{X}_\alpha A.$$

Покажем, что операторы $\tilde{Y}_\alpha$ коммутируют с операторами Y_β и образуют противоположную структуру. Мы имеем:

$$\tilde{Y}_\alpha Y_\beta = A^{-1}\tilde{X}_\alpha A A^{-1} X_\beta A = A^{-1}\tilde{X}_\alpha X_\beta A =$$
$$= A^{-1} X_\beta \tilde{X}_\alpha A = A^{-1} X_\beta A A^{-1}\tilde{X}_\alpha A = Y_\beta \tilde{Y}_\alpha;$$

$$\tilde{Y}_\alpha \tilde{Y}_\beta - \tilde{Y}_\beta \tilde{Y}_\alpha = A^{-1}\tilde{X}_\alpha A A^{-1}\tilde{X}_\beta A - A^{-1}\tilde{X}_\beta A A^{-1}\tilde{X}_\alpha A =$$
$$= A^{-1}(\tilde{X}_\alpha \tilde{X}_\beta - \tilde{X}_\beta \tilde{X}_\alpha) A = A^{-1} c_{\beta\alpha}^\gamma \tilde{X}_\gamma A = c_{\beta\alpha}^\gamma \tilde{Y}_\gamma.$$

ГЛАВА X

РАЗЛИЧНЫЕ ВОПРОСЫ СХОДИМОСТИ

§ 1. Сходимость степенных рядов для канонических инфинитезимальных операторов первого порядка

1. Пусть операторы X_1, X_2, X_3 удовлетворяют условиям коммутирования

$$X_1 X_2(f) = X_2 X_1(f) + c_{12}^{\lambda} X_{\lambda}(f), \tag{1.1}$$

$$X_1 X_3(f) = X_3 X_1(f) + c_{13}^{\lambda} X_{\lambda}(f), \tag{1.2}$$

$$X_2 X_3(f) = X_3 X_2(f) + c_{23}^{\lambda} X_{\lambda}(f) \tag{1.3}$$

и начальным условиям

$$X_1(f) = \frac{\partial f}{\partial t_1}, \tag{1.4}$$

$$X_2(f)\Big|_{t_1=0} = \frac{\partial f}{\partial t_2}\Big|_{t_1=0}, \tag{1.5}$$

$$X_3(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = \frac{\partial f}{\partial t_3}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}. \tag{1.6}$$

Из этих условий операторы X_2 и X_3 определяются однозначно. Эти операторы были нами рассмотрены в § 6 гл. IX и названы там каноническими.

В § 1 гл. IX показано, что

$$D_t^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} X_k(f)\Big|_{t=0} = D_t^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} \frac{\partial f}{\partial t_k}\Big|_{t=0} + \\ + a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; k} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} f\Big|_{t=0}, \tag{1.7}$$

причем $|\mu| \leqslant |\lambda|$ $(|\mu| = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$.

Из (1.4), (1.5) и (1.6) следует:

$$a^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 1}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} = 0, \tag{1.8}$$

$$a^{0, \lambda_2, \lambda_3; 2}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} = 0, \tag{1.9}$$

$$a^{0, 0, \lambda_3; 3}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} = 0. \tag{1.10}$$

Следующая лемма играет в дальнейшем важную роль.

Лемма 1.1. *Для* $\mu_1 > 1$ *и произвольных* $\mu_2, \mu_3; \lambda_2, \lambda_3$

$$a^{0, \lambda_2, \lambda_3; 3}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} = 0. \tag{1.11}$$

Доказательство. Из (1.10) следует, что лемма верна для $\lambda_2 = 0$ и произвольного λ_3. Теперь рассуждаем по индукции. Пусть равенство (1.11) справедливо для $\lambda_2 + \lambda_3 \leqslant N$. Покажем, что тогда оно справедливо для $\lambda_2 + \lambda_3 = N + 1$. Для доказательства применим к обеим частям уравнения (1.3) оператор $D_t^{0, \lambda_2, \lambda_3}$ и положим затем $t = 0$. Мы получим, используя (1.4), (1.5), (1.6) и (1.7),

$$\begin{aligned} D_t^{0, \lambda_2, \lambda_3} X_2 X_3(f)\Big|_{t=0} &= D_t^{0, \lambda_2+1, \lambda_3} X_3(f)\Big|_{t=0} = \\ &= D_t^{0, \lambda_2+1, \lambda_3+1} f\Big|_{t=0} + a^{0, \lambda_2+1, \lambda_3; 3}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} f\Big|_{t=0} = \\ &= D_t^{0, \lambda_2+1, \lambda_3+1} f\Big|_{t=0} + a^{0, \lambda_2, \lambda_3; 3}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} X_2(f)\Big|_{t=0} + \\ &+ c_{23}^1 D_t^{1, \lambda_2, \lambda_3} f\Big|_{t=0} + c_{23}^2 D_t^{0, \lambda_2+1, \lambda_3} f\Big|_{t=0} + \\ &\qquad + c_{23}^3 D_t^{0, \lambda_2, \lambda_3+1} f\Big|_{t=0} + c_{23}^3 a^{0, \lambda_2, \lambda_3; 3}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} f\Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Отсюда следует после некоторых преобразований тождество

$$\begin{aligned} a^{0, \lambda_2+1, \lambda_3; 3}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} f\Big|_{t=0} &= a^{0, \lambda_2, \lambda_3; 3}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} X_2(f)\Big|_{t=0} + \\ &+ c_{23}^1 D_t^{1, \lambda_2, \lambda_3} f\Big|_{t=0} + c_{23}^2 D_t^{0, \lambda_2+1, \lambda_3} f\Big|_{t=0} + \\ &+ c_{23}^3 D_t^{0, \lambda_2, \lambda_3+1} f\Big|_{t=0} + c_{23}^3 a^{0, \lambda_2, \lambda_3; 3}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} f\Big|_{t=0}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Лемма будет доказана, если мы покажем, что в правой части этого тождества не встречается дифференцирования по t_1 выше первого порядка.

Для второго, третьего и четвертого слагаемых это очевидно. Для пятого слагаемого это также справедливо в силу предположения индукции. Остается рассмотреть первое слагаемое. По предположению индукции в этом слагаемом μ_1 может принимать значения 0 и 1. Если $\mu_1 = 0$, то в силу (1.5)

$$D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} X_2(f)\big|_{t=0} = D_t^{0, \mu_2, \mu_3} X_2(f)\big|_{t=0} = D_t^{0, \mu_2+1, \mu_3} f\big|_{t=0}.$$

Эти слагаемые вообще не содержат дифференцирования по t_1.

Пусть теперь $\mu_1 = 1$. В этом случае, используя (1.4) и (1.1), получим:

$$\begin{aligned} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} X_2(f)\big|_{t=0} &= D_t^{1, \mu_2, \mu_3} X_2(f)\big|_{t=0} = \\ &= D^{0, \mu_2, \mu_3} X_1 X_2(f)\big|_{t=0} = D_t^{0, \mu_2, \mu_3}\left[X_2 X_1(f) + c_{12}^1 X_1(f) + \right. \\ &\left. + c_{12}^2 X_2(f) + c_{12}^3 X_3(f)\right]\big|_{t=0} = D_t^{1, \mu_2+1, \mu_3} f\big|_{t=0} + \\ &+ c_{12}^1 D_t^{1, \mu_2, \mu_3} f\big|_{t=0} + c_{12}^2 D_t^{0, \mu_2+1, \mu_3} f\big|_{t=0} + \\ &+ c_{12}^3 D_t^{0, \mu_2, \mu_3+1} f\big|_{t=0} + c_{12}^3 a_{\nu_1, \nu_2, \nu_3}^{0, \mu_2, \mu_3; 3} D_t^{\nu_1, \nu_2, \nu_3} f\big|_{t=0}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Так как $\mu_2 + \mu_3 \leqslant \lambda_2 + \lambda_3 \leqslant N$ и $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \leqslant \mu_2 + \mu_3$, то по предположению индукции $\nu_1 \leqslant 1$. Поэтому в правой части тождества (1.13) не содержится дифференцирования по t_1 выше первого порядка. Это доказывает лемму.

2. Оценим теперь величины

$$A_{|\mu|}^{0, \lambda_2, \lambda_3; 3} = \sum_{\mu_1+\mu_2+\mu_3=|\mu|} \left| a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{0, \lambda_2, \lambda_3; 3} \right|.$$

В силу предыдущей леммы можно предполагать, что в этой сумме $\mu_1 = 0$ или 1.

Чтобы оценить величины $A_{|\mu|}^{0, \lambda_2, \lambda_3; 3}$, выведем для них рекуррентное неравенство. Из (1.12) и (1.13) следует:

$$\begin{aligned} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{0, \lambda_2+1, \lambda_3; 3} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} f\big|_{t=0} &= a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{0, \lambda_2, \lambda_3; 3} D_t^{\mu_1, \mu_2+1, \mu_3} f\big|_{t=0} + \\ &+ a_{1, \mu_2, \mu_3}^{0, \lambda_2, \lambda_3; 3}\left[c_{12}^1 D_t^{1, \mu_2, \mu_3} f\big|_{t=0} + c_{12}^2 D_t^{0, \mu_2+1, \mu_3} f\big|_{t=0} + \right. \\ &\left. + c_{12}^3 D_t^{0, \mu_2, \mu_3+1} f\big|_{t=0} + c_{12}^3 a_{\nu_1, \nu_2, \nu_3}^{0, \mu_2, \mu_3; 3} D_t^{\nu_1, \nu_2, \nu_3} f\big|_{t=0}\right] + \\ &+ c_{23}^1 D_t^{1, \lambda_2, \lambda_3} f\big|_{t=0} + c_{23}^2 D_t^{0, \lambda_2+1, \lambda_3} f\big|_{t=0} + \\ &+ c_{23}^3 D_t^{0, \lambda_2, \lambda_3+1} f\big|_{t=0} + c_{23}^3 a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{0, \lambda_2, \lambda_3; 3} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} f\big|_{t=0}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

В этом тождестве $\mu_1 = 0, 1$. Так как $f(t)$ — произвольная функция, то из тождества (1.14) следует:

$$a^{0,\,\lambda_2+1,\,\lambda_3;\,3}_{0,\,\mu_2^0,\,\mu_3^0} = a^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3}_{0,\,\mu_2^0-1,\,\mu_3^0} + c^2_{12}\, a^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3}_{1,\,\mu_2^0-1,\,\mu_3^0} +$$
$$+ c^3_{12}\, a^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3}_{1,\,\mu_2^0,\,\mu_3^0-1} + c^3_{12}\, a^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3}_{1,\,\mu_2,\,\mu_3}\, a^{0,\,\mu_2,\,\mu_3;\,3}_{0,\,\mu_1^0,\,\mu_2^0} +$$
$$+ c^3_{23}\, a^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3}_{0,\,\mu_2^0,\,\mu_3^0} \qquad (\mu_2^0 + \mu_3^0 \leqslant \lambda_2 + \lambda_3)$$

и аналогичные тождества для $\mu_1 = 1$ и $\mu_2^0 + \mu_3^0 = \lambda_2 + \lambda_3 + 1$.

Оценим во всех этих тождествах обе части по модулю, умножим затем на $\varphi^{\left(\mu_1^0+\mu_2^0+\mu_3^0\right)}(0)$, причем по предположению все эти производные неотрицательны, а в остальном функция $\varphi(t_1 + t_2 + t_3)$ произвольна, и сложим. В результате этих вычислений мы получим следующее неравенство:

$$A^{0,\,\lambda_2+1,\,\lambda_3;\,3}_{|\mu|}\varphi^{(|\mu|)}(0) \leqslant A^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3}_{|\mu|}\varphi^{(|\mu|+1)}(0) +$$
$$+ A^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3}_{|\mu|+1}\left(\left|c^1_{12}\right| + \left|c^2_{12}\right| + \left|c^3_{13}\right|\right)\varphi^{(|\mu|+1)}(0) +$$
$$+ \left(\left|c^1_{23}\right| + \left|c^2_{23}\right| + \left|c^3_{23}\right|\right)\varphi^{(|\lambda|+1)}(0) + \left|c^3_{23}\right| A^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3}_{|\mu|}\varphi^{|\mu|}(0) +$$
$$+ \left|c^3_{12}\right| \left|a^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3}_{1,\,\mu_2,\,\mu_3}\right| A^{0,\,\mu_2,\,\mu_3;\,3}_{|\nu|}\varphi^{|\nu|}(0). \qquad (1.15)$$

В этом неравенстве

$$|\mu| = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \quad |\lambda| = \lambda_2 + \lambda_3; \quad |\nu| = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3; \qquad (1.16)$$

последнее слагаемое есть двойная сумма. Переставим в ней порядок суммирования

$$\left|a^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3}_{1,\,\mu_2,\,\mu_3}\right| A^{0,\,\mu_2,\,\mu_3;\,3}_{|\nu|}\varphi^{|\nu|}(0) = \sum_{|\mu|=0}^{|\lambda|-1}\ \sum_{|\mu|=\mu_2+\mu_3}\left|a^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3}_{1,\,\mu_2,\,\mu_3}\right| \times$$
$$\times \sum_{|\nu|=0}^{|\mu|} A^{0,\,\mu_2,\,\mu_3;\,3}_{|\nu|}\varphi^{|\nu|}(0) = \sum_{|\nu|=0}^{|\lambda|-1}\varphi^{(|\nu|)}(0) \sum_{|\mu|=|\nu|}^{|\lambda|-1} \times$$
$$\times \sum_{\mu_2+\mu_3=|\mu|}\left|a^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3}_{1,\,\mu_2,\,\mu_3}\right| A^{0,\,\mu_2,\,\mu_3;\,3}_{|\nu|} =$$
$$= \sum_{|\mu|=0}^{|\lambda|-1}\varphi^{(|\mu|)}(0) \sum_{|\nu|=|\mu|}^{|\lambda|-1}\ \sum_{\nu_2+\nu_3=|\nu|}\left|a^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3}_{1,\,\nu_2,\,\nu_3}\right| A^{0,\,\nu_2,\,\nu_3;\,3}_{|\mu|}. \qquad (1.17)$$

Из (1.15) и (1.17), а также из произвольности функции $\varphi(t)$ следуют рекуррентные неравенства:

$$A_{|\lambda|+1}^{0,\lambda_2+1,\lambda_3;3} \leqslant A_{|\lambda|}^{0,\lambda_2,\lambda_3;3} + \alpha \tag{1.18}$$

$$(\alpha = |c_{23}^1| + |c_{23}^2| + |c_{23}^3|),$$

$$A_{|\lambda|}^{0,\lambda_2+1,\lambda_3;3} \leqslant A_{|\lambda|-1}^{0,\lambda_2,\lambda_3;3} + \beta A_{|\lambda|}^{0,\lambda_2,\lambda_3;3} \tag{1.19}$$

$$(\beta = |c_{12}^1| + |c_{12}^2| + |c_{12}^3|),$$

$$A_0^{0,\lambda_2+1,\lambda_3;3} \leqslant |c_{12}^3| \sum_{|\nu|=0}^{|\lambda|-1} \sum_{\nu_2+\nu_3=|\nu|} |a_{1,\nu_2,\nu_3}^{0,\lambda_2,\lambda_3;3}| A_0^{0,\nu_2,\nu_3;3} + \\ + |c_{23}^3| A_0^{0,\lambda_2,\lambda_3;3}, \tag{1.20}$$

$$A_{|\mu|}^{0,\lambda_2+1,\lambda_3;3} \leqslant A_{|\mu|-1}^{0,\lambda_2,\lambda_3;3} + \beta A_{|\mu|}^{0,\lambda_2,\lambda_3;3} + \\ + |c_{12}^3| \sum_{|\nu|=|\mu|}^{|\lambda|-1} \sum_{\nu_2+\nu_3=|\nu|} |a_{1,\nu_2,\nu_3}^{0,\lambda_2,\lambda_3;3}| A_{|\mu|}^{0,\nu_2,\nu_3;3} \quad (1 \leqslant |\mu| \leqslant |\lambda|-1). \tag{1.21}$$

Используя эти неравенства, докажем следующую лемму.

Лемма 1.2. *Имеют место оценки*

$$A_{|\mu|}^{0,\lambda_2,\lambda_3;3} \leqslant C_0^{|\lambda|+1-|\mu|} \frac{|\lambda|!}{(|\mu|-1)!} \qquad (|\mu| > 0), \tag{1.22}$$

$$A_0^{0,\lambda_2,\lambda_3;3} \leqslant C_0^{|\lambda|+1} |\lambda|!, \tag{1.22^1}$$

где C_0 — постоянная величина.

Доказательство. Из (1.18) по индукции следует:

$$A_{|\lambda|+1}^{0,\lambda_2+1,\lambda_3;3} \leqslant A_{\lambda_3}^{0,0,\lambda_3;3} + (\lambda_2+1)\alpha = (\lambda_2+1)\alpha \leqslant (|\lambda|+1)\alpha.$$

Это доказывает неравенство (1.22) для $|\mu| = |\lambda|$, если только предположить, что $C_0 > \alpha$.

Теперь из (1.19) по индукции следует:

$$A_{|\lambda|}^{0,\lambda_2+1,\lambda_3;3} \leqslant A_{|\lambda|-1}^{0,\lambda_2,\lambda_3;3} + \alpha\beta|\lambda| \leqslant A_{|\lambda|-2}^{0,\lambda_2-1,\lambda_3;3} + \\ + \alpha\beta(|\lambda| + |\lambda| - 1) \leqslant \ldots \leqslant \alpha\beta(|\lambda| + |\lambda| - 1 + \ldots + \lambda_3) \leqslant \\ \leqslant \alpha\beta|\lambda|(|\lambda|-1).$$

Это доказывает неравенство (1.22) для $|\mu| = |\lambda| - 1$, если только предположить, что $C_0 > \alpha\beta$.

Случаи $|\mu|=0$ и $1\leqslant|\mu|\leqslant|\lambda|-1$ рассмотрим совместно по индукции, используя неравенства (1.20) и (1.21).

Пусть вначале $1\leqslant|\mu|\leqslant|\lambda|-1$. Будем различать два случая.

1-й случай. $\lambda_2\leqslant|\mu|$. В этом случае из (1.21) следует по индукции:

$$A_{|\mu|}^{0,\lambda_2+1,\lambda_3;3}\leqslant\beta\left[A_{|\mu|}^{0,\lambda_2,\lambda_3;3}+A_{|\mu|-1}^{0,\lambda_2-1,\lambda_3;3}+\ldots+A_{|\mu|-\lambda_2+1}^{0,1,\lambda_3;3}\right]+$$
$$+\left[\sum_{|\nu|=|\mu|}^{|\lambda|-1}\sum_{\nu_2+\nu_3=|\nu|}\left|a_{1,\nu_2,\nu_3}^{0,\lambda_2,\lambda_3;3}\right|A_{|\mu|}^{0,\nu_2,\nu_3;3}+\right.$$
$$+\sum_{|\nu|=|\mu|-1}^{|\lambda|-2}\sum_{\nu_2+\nu_3=|\nu|}\left|a_{1,\nu_2,\nu_3}^{0,\lambda_2-1,\lambda_3;3}\right|A_{|\mu|-1}^{0,\nu_2,\nu_3;3}+\ldots$$
$$\left.\ldots+\sum_{|\nu|=|\mu|-\lambda_2+1}^{|\lambda|-\lambda_2}\sum_{\nu_2+\nu_3=|\nu|}\left|a_{1,\nu_2,\nu_3}^{0,1,\lambda_3;3}\right|A_{|\mu|-\lambda_2+1}^{0,\nu_2,\nu_3;3}\right]=I_1+I_2. \tag{1.23}$$

2-й случай. $\lambda_2>|\mu|$. В этом случае из (1.21) и (1.20) следует по индукции:

$$A_{|\mu|}^{0,\lambda_2+1,\lambda_3;3}\leqslant\beta\left[A_{|\mu|}^{0,\lambda_2,\lambda_3;3}+A_{|\mu|-1}^{0,\lambda_2-1,\lambda_3;3}+\ldots+A_{0}^{0,\lambda_2-|\mu|,\lambda_3;3}\right]+$$
$$+A_0^{0,\lambda_2-|\mu|+1,\lambda_3;3}\left[\sum_{|\nu|=|\mu|}^{|\lambda|-1}\sum_{\nu_2+\nu_3=|\nu|}\left|a_{1,\nu_2,\nu_3}^{0,\lambda_2,\lambda_3;3}\right|A_{|\mu|}^{0,\nu_2,\nu_3;3}+\right.$$
$$+\sum_{|\nu|=|\mu|-1}^{|\lambda|-2}\sum_{\nu_2+\nu_3=|\nu|}\left|a_{1,\nu_2,\nu_3}^{0,\lambda_2-1,\lambda_3;3}\right|A_{|\mu|-1}^{0,\nu_2,\nu_3;3}+\ldots$$
$$\left.\ldots+\sum_{|\nu|=0}^{|\lambda|-|\mu|-1}\sum_{\nu_2+\nu_3=|\nu|}\left|a_{1,\nu_2,\nu_3}^{0,\lambda_2-|\mu|,\lambda_3;3}\right|A_0^{0,\nu_2,\nu_3;3}\right]=J_1+J_2+J_3. \tag{1.24}$$

В обоих случаях оценки аналогичны. Для примера рассмотрим второй случай. В силу предположения индукции

$$J_1\leqslant\beta C_0^{|\lambda|+1-|\mu|}\left[\frac{|\lambda|!}{(|\mu|-1)!}+\frac{(|\lambda|-1)!}{(|\mu|-2)!}+\ldots+(|\lambda|-|\mu|)!\right]\leqslant$$
$$\leqslant\beta C_0^{|\lambda|+1-|\mu|}\frac{|\lambda|!}{(|\mu|-1)!}|\mu|\leqslant\beta C_0^{|\lambda|+1-|\mu|}\frac{(|\lambda|+1)!}{(|\mu|-1)!}; \tag{1.25}$$

$$J_2\leqslant C_0^{|\lambda|+2-|\mu|}(|\lambda|+1-|\mu|)!\leqslant C_0^{|\lambda|+2-|\mu|}\frac{(|\lambda|+1)!}{(|\mu|-1)!}. \tag{1.26}$$

Теперь оценим сумму J_3. Для этого оценим отдельное слагаемое этой суммы. Мы имеем, снова используя предположение индукции $(0 \leqslant k \leqslant |\mu|)$,

$$\sum_{|\nu|=|\mu|-k}^{|\lambda|-1-k} \sum_{\nu_2+\nu_3=|\nu|} \left| a_{1,\nu_2,\nu_3}^{0,\lambda_2-k,\lambda_3;3} \right| A_{|\mu|-k}^{0,\nu_2,\nu_3;3} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\nu|=|\mu|-k}^{|\lambda|-1-k} C_0^{|\nu|+1-|\mu|+k} \frac{|\nu|!}{(|\mu|-k-1)!} A_{|\nu|+1}^{0,\lambda_2-k,\lambda_3;3} \leqslant$$

$$\leqslant C_0^{k+1-|\mu|} \frac{1}{(|\mu|-k+1)!} \sum_{|\nu|=|\mu|-k}^{|\lambda|-1-k} C_0^{|\nu|} |\nu|! \, C_0^{|\lambda|-k} \frac{(|\lambda|-k)!}{|\nu|!} =$$

$$= C_0^{|\lambda|+1-|\mu|} \frac{(|\lambda|-k)!}{(|\mu|-k-1)!} (|\lambda|-1-|\mu|).$$

Поэтому

$$J_3 \leqslant C_0^{|\lambda|+1-|\mu|} (|\lambda|-1-|\mu|) \left[\frac{|\lambda|!}{(|\mu|-1)!} + \frac{(|\lambda|-1)!}{(|\mu|-2)!} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{(|\lambda|-|\mu|)!}{1!} \right] = C_0^{|\lambda|+1-|\mu|} (|\lambda|-1-|\mu|) \frac{|\lambda|!}{(|\mu|-1)!} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{|\mu|-1}{|\lambda|} + \frac{(|\mu|-1)(|\mu|-2)}{|\lambda|(|\lambda|-1)} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{(|\mu|-1)(|\mu|-2)\ldots 2\cdot 1}{|\lambda|(|\lambda|-1)\ldots(|\lambda|-|\mu|+1)} \right].$$

Пусть $\frac{|\mu|-1}{|\lambda|} = \theta$. Так как для $a, b > 0$, $a < b$ $\frac{a-1}{b-1} < \frac{a}{b}$, то

$$J_3 \leqslant C_0^{|\lambda|+1-|\mu|} \frac{|\lambda|!}{(|\mu|-1)!} (|\lambda|-1-|\mu|) (1 + \theta + \ldots + \theta^{|\mu|}) =$$

$$= C_0^{|\lambda|+1-|\mu|} \frac{|\lambda|!}{(|\mu|-1)!} (|\lambda|-1-|\mu|) \frac{1-\theta^{|\mu|+1}}{1-\theta} <$$

$$< C_0^{|\lambda|+1-|\mu|} \frac{|\lambda|! \, (|\lambda|-1-|\mu|)}{(|\mu|-1)! \, (1-\theta)} < C_0^{|\lambda|+1-|\mu|} \frac{(|\lambda|+1)!}{(|\mu|-1)!}. \tag{1.27}$$

Из (1.24), (1.25), (1.26) и (1.27) следует неравенство

$$A_{|\mu|}^{0,\lambda_2+1,\lambda_3;3} \leqslant C_0^{|\lambda|+1-|\mu|} \frac{(|\lambda|+1)!}{(|\mu|-1)!} \left(\beta + 1 + \frac{C_0}{2} \right) <$$

$$< C_0^{|\lambda|+2-|\mu|} \frac{(|\lambda|+1)!}{(|\mu|-1)!},$$

если предположить, что $(\beta+1)+\frac{1}{2}C_0<C_0$, т. е. $C_0>2(\beta+1)$. Это доказывает по индукции неравенство (1.22) для $0<|\mu|<<|\lambda|-1$. Для завершения доказательства леммы остается доказать неравенство (1.22′). Для этого используем оценку (1.20). Пусть $\gamma=\max\left(\left|c_{12}^3\right|, \left|c_{23}^3\right|\right)$. Из (1.20) по индукции следует:

$$A_0^{0,\lambda_2+1,\lambda_3;3}\leqslant\gamma\sum_{|\nu|=0}^{|\lambda|-1}\sum_{\nu_2+\nu_3=|\nu|}\left|a_{1,\nu_2,\nu_3}^{0,\lambda_2,\lambda_3;3}\right|A_0^{0,\nu_2,\nu_3;3}+$$
$$+\gamma^2\sum_{|\nu|=0}^{|\lambda|-2}\sum_{\nu_2+\nu_3=|\nu|}\left|a_{1,\nu_2,\nu_3}^{0,\lambda_2-1,\lambda_3;3}\right|A_0^{0,\nu_2,\nu_3;3}+\ldots$$
$$\ldots+\gamma^{\lambda_2}\sum_{|\nu|=0}^{\lambda_3}\sum_{\nu_2+\nu_3=|\nu|}\left|a_{1,\nu_2,\nu_3}^{0,1,\lambda_3;3}\right|A_0^{0,\nu_2,\nu_3;3}. \qquad (1.28)$$

Оценим общий член этой суммы. В силу предположения индукции $(1\leqslant k\leqslant\lambda_2)$

$$\gamma^k\sum_{|\nu|=0}^{|\lambda|-k}\sum_{\nu_2+\nu_3=|\nu|}\left|a_{1,\nu_2,\nu_3}^{0,\lambda_2+1-k,\lambda_3;3}\right|A_0^{0,\nu_2,\nu_3;3}\leqslant$$
$$\leqslant\gamma^k\sum_{|\nu|=0}^{|\lambda|-k}C_0^{|\nu|+1}|\nu|!\,A_{|\nu|+1}^{0,\lambda_2+1-k,\lambda_3;3}\leqslant$$
$$\leqslant\gamma^k\sum_{|\nu|=0}^{|\lambda|-k}C_0^{|\nu|+1}|\nu|!\,C_0^{|\lambda|+1-k-|\nu|}\frac{(|\lambda|+1-k)!}{|\nu|!}=$$
$$=\gamma^kC_0^{|\lambda|+2-k}(|\lambda|+1-k)!(|\lambda|+1-k).$$

Поэтому

$$A_0^{0,\lambda_2+1,\lambda_3;3}\leqslant\sum_{k=1}^{\lambda_2}\gamma^kC_0^{|\lambda|+2-k}(|\lambda|+1-k)!(|\lambda|+1-k)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\lambda_2-1}\gamma^{k+1}C_0^{|\lambda|+1-k}(|\lambda|-k)!(|\lambda|-k)\leqslant$$
$$\leqslant C_0^{|\lambda|+1}(|\lambda|+1)!\,\gamma\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^k<2\gamma C_0^{|\lambda|+1}(|\lambda|+1)!<$$
$$<C_0^{|\lambda|+2}(|\lambda|+1)!,$$

если только $C_0>2\gamma$.

3. Выведем теперь оценку для

$$A_{|\mu|}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; k} = \sum_{|\mu| = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3} \left| a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; k} \right| \qquad (k = 2,\ 3),$$

годную для $\lambda_1 > 0$. Эта оценка дается в следующей лемме

Лемма 1.3. *Существует такое постоянное число C что*

$$A_{|\mu|}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; k} < C^{|\lambda|+1-|\mu|} \frac{|\lambda|!}{(|\mu|-1)!} \qquad (|\mu| > 0), \quad (1.29)$$

$$A_0^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; k} < C^{|\lambda|+1} |\lambda|!. \qquad (1.30)$$

Доказательство. Если $\lambda_1 = 0$, а λ_2 и λ_3 — любые, то эти оценки справедливы в силу предыдущей леммы и равенства (1.9).

В случае $\lambda_1 > 0$ доказательство ведем по индукции.

Сначала выведем для $A_{|\mu|}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; k}$ рекуррентное неравенство. Мы ограничимся случаем $k = 3$, так как случай $k = 2$ вполне аналогичен. Применяя к равенству (1.2) оператор $D_t^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}$ и полагая затем $t = 0$, мы получим, используя тождество (1.7) (после несложных преобразований),

$$\begin{aligned} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{\lambda_1+1, \lambda_2, \lambda_3; 3} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} f \big|_{t=0} &= a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 3} D_t^{\mu_1+1, \mu_2, \mu_3} f \big|_{t=0} + \\ &+ c_{13}^1 D_t^{\lambda_1+1, \lambda_2, \lambda_3} f \big|_{t=0} + c_{13}^2 D_t^{\lambda_1, \lambda_2+1, \lambda_3} f \big|_{t=0} + \\ &+ c_{13}^3 D_t^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3+1} f \big|_{t=0} + c_{13}^2 a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 2} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} f \big|_{t=0} + \\ &\qquad + c_{13}^3 a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 3} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} f \big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Отсюда следует для произвольной функции $\varphi(t_1 + t_2 + t_3)$, с неотрицательными производными в нуле, неравенство (см. вывод неравенства (1.15))

$$\begin{aligned} A_{|\mu|}^{\lambda_1+1, \lambda_2, \lambda_3; 3} \varphi^{(|\mu|)}(0) &\leqslant A_{|\mu|}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 3} \varphi^{(|\mu|+1)}(0) + \\ &+ (|c_{13}^1| + |c_{13}^2| + |c_{13}^3|) \varphi^{(|\lambda|+1)}(0) + \\ &+ |c_{13}^2| A_{|\mu|}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 2} \varphi^{(|\mu|)}(0) + |c_{13}^3| A_{|\mu|}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 3} \varphi^{(|\mu|)}(0). \end{aligned}$$

Так как функция φ произвольна, то из последнего неравенства следуют рекуррентные оценки:

$$A_{|\lambda|+1}^{\lambda_1+1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3} \leqslant A_{|\lambda|}^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3} + \alpha_1$$
$$(\alpha_1 = |c_{13}^1| + |c_{13}^2| + |c_{13}^3|); \qquad (1.31)$$

$$A_0^{\lambda_1+1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3} < \gamma_1 \left(A_0^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,2} + A_0^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3}\right),$$
$$\gamma_1 \geqslant \max\left(|c_{13}^2|,\ |c_{13}^3|\right); \qquad (1.32)$$

$$A_{|\mu|}^{\lambda_1+1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3} \leqslant A_{|\mu|-1}^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3} + \gamma_1 \left(A_{|\mu|}^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,2} + A_{|\mu|}^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3}\right). \quad (133)$$

Из (1.31) следует по индукции:

$$A_{|\lambda|+1}^{\lambda_1+1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3} \leqslant A_{|\lambda|-\lambda_1}^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3} + (\lambda_1+1)\,\alpha_1 \leqslant C_0 \frac{(\lambda_2+\lambda_3)!}{(\lambda_2+\lambda_3-1)!} +$$
$$+ (\lambda_1+1)\,\alpha_1 < C_0(\lambda_2+\lambda_3) + \alpha_1(\lambda_1+1) < C(|\lambda|+1),$$

если $C \geqslant \max(C_0,\ \alpha_1)$. Это доказывает неравенство (1.29) для $|\mu| = |\lambda|$.

Далее, из (1.32) следует:

$$A_0^{\lambda_1+1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3} < 2^{\lambda_1}\gamma_1^{\lambda_1+1} A_0^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{\lambda_1}\gamma_1^{\lambda_1+1} C_0^{\lambda_2+\lambda_3+1} (\lambda_2+\lambda_3)! < C^{|\lambda|+2}(|\lambda|+1)!,$$

если предположить, что $C > \max(C_0,\ 2\gamma_1)$.

Рассмотрим теперь общий случай: $0 < |\mu| < |\lambda|$. В этом случае используем неравенство (1.33). Возможны два случая.

1-й случай: $|\mu| > \lambda_1$ и 2-й случай: $\mu \leqslant \lambda_1$.

Мы разберем первый случай, так как второй случай разбирается аналогично. Если $|\mu| > \lambda_1$, то из (1.33) следует:

$$A_{|\mu|}^{\lambda_1+1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3} \leqslant A_{|\mu|-1-\lambda_1}^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3} + \gamma_1 \left(A_{|\mu|}^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,2} + A_{|\mu|}^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3} +\right.$$
$$\left. + A_{|\mu|-1}^{\lambda_1-1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,2} + A_{|\mu|-1}^{\lambda_1-1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3} + \ldots + A_{|\mu|-\lambda_1}^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,2} + A_{|\mu|-\lambda_1}^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3}\right).$$

Из предположения индукции и оценки (1.22) следует:

$$A_{|\mu|}^{\lambda_1+1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,3} \leqslant C_0^{|\lambda|+2-|\mu|}\frac{(\lambda_2+\lambda_3)!}{(|\mu|-2-\lambda_1)!}+$$

$$+2\gamma_1\Big(C^{|\lambda|+1-|\mu|}\frac{|\lambda|!}{(|\mu|-1)!}+$$

$$+C^{|\lambda|+1-|\mu|}\frac{(|\lambda|-1)!}{(|\mu|-2)!}+\ldots+C^{|\lambda|+1-|\mu|}\frac{(\lambda_2+\lambda_3)!}{(|\mu|-1-\lambda_1)!}\Big)\leqslant$$

$$\leqslant C_0^{|\lambda|+2-|\mu|}\frac{(|\lambda|+1)!}{(|\mu|-1)!}+2\gamma_1 C^{|\lambda|+1-|\mu|}\frac{|\lambda|!}{(|\mu|-1)!}\lambda_1\leqslant$$

$$\leqslant C^{|\lambda|+1-|\mu|}\frac{(|\lambda|+1)!}{(|\mu|-1)!}\left[C_0\left(\frac{C_0}{C}\right)^{|\lambda|+1-|\mu|}+2\gamma_1\right]\leqslant$$

$$\leqslant C^{|\lambda|+2-|\mu|}\frac{(|\lambda|+1)!}{(|\mu|-1)!},$$

если только предположить, что

$$C>2\gamma_1+C_0\left(\frac{C_0}{C}\right)^{|\lambda|+1-|\mu|}.$$

Это неравенство заведомо выполняется, если

$$C>2\gamma_1+C_0.$$

4. Пользуясь оценками (1.29) и (1.30), покажем, что если $f(t)$ — аналитическая функция, то $X_k(f)$ $(k=2,\ 3)$ также аналитические функции $\left(X_1(f)=\dfrac{\partial f}{\partial f_1}\right.$ и для этого случая аналитичность не нуждается в доказательстве$\Big)$.

Пусть $f(t)$ имеет мажоранту вида

$$f(t)\ll\frac{M}{1-\dfrac{z}{a}}\qquad (z=t_1+t_2+t_3,\quad M>0,\quad a>0).$$

Из разложения (1.7) и оценок (1.29)—(1.30) следует:

$$\left|D_t^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3}X_k(f)\Big|_{t=0}\right|=\Big|D_t^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3}\frac{\partial f}{\partial f_k}\Big|_{t=0}+$$

$$+a_{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3}^{\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3;\,k}D_t^{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3}f\Big|_{t=0}\Big|\leqslant\frac{M}{a^{|\lambda|+1}}(|\lambda|+1)!+$$

$$+A_{|\mu|}^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,k}\frac{M}{a^{|\mu|}}|\mu|!\leqslant\frac{M}{a^{|\lambda|+1}}(|\lambda|+1)!+$$

$$+C^{|\lambda|+1}|\lambda|!\sum_{|\mu|=0}^{|\lambda|}|\mu|\left(\frac{1}{aC}\right)^{|\mu|}<\frac{M}{a^{|\lambda|+1}}(|\lambda|+1)!+$$

$$+C^{\lambda|+1}\frac{M}{(aC)^{\lambda}}|\lambda|!|\lambda|(|\lambda|+1)<\frac{M_1}{a^{|\lambda|+1}}(|\lambda|+2)!,$$

если $aC \leqslant 1$. Если $aC > 1$, то аналогично получим:

$$|D_t^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} X_k(f)|_{t=0}| \leqslant M_1 C^{|\lambda|+1}(|\lambda|+2)!$$

Из этой оценки следует, что $X_k(f)$ $(k=2, 3)$ есть аналитическая функция.

§ 2. Сходимость степенных рядов для канонических инфинитезимальных операторов второго порядка

1. В случае инфинитезимальных операторов второго порядка положение усложняется только технически. Поэтому мы рассмотрим этот случай весьма кратко.

Итак, пусть даны три оператора X_1, X_2, X_3, удовлетворяющие условиям коммутирования (1.1)—(1.2)—(1.3) и начальным условиям

$$X_1(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2}; \tag{2.1}$$

$$X_2(f)|_{t_1=0} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}\right|_{t_1=0}, \quad \frac{\partial}{\partial t_1} X_2(f)|_{t_1=0} = \left.\frac{\partial^3 f}{\partial t_1\, \partial t_2^2}\right|_{t_1=0}; \tag{2.2}$$

$$X_3(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial t_3^2}\right|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}, \quad \frac{\partial}{\partial t_1} X_3(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = \left.\frac{\partial^3 f}{\partial t_1\, \partial t_3^2}\right|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}},$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2} X_3(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = \left.\frac{\partial^3 f}{\partial t_2\, \partial t_3^2}\right|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\, \partial t_2} X_3(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = \left.\frac{\partial^4 f}{\partial t_1\, \partial t_2\, \partial t_3^2}\right|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}. \tag{2.3}$$

Как показано в § 4 гл. IX

$$D_t^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} X_k(f)|_{t=0} = D_t^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial t_k^2}\right|_{t=0} + a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; k} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} f|_{t=0},$$

причем $a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; k}$ — постоянные числа, $|\mu| = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \leqslant \leqslant |\lambda| + 1$. Из условий (2.1), (2.2) и (2.3), очевидно, следует:

$$a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 1} = 0$$

$a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 2} = 0$, если $\lambda_1 = 0$ или 1,

$a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 3}$; если $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ или 0,
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$.

Дальнейший анализ существенно основан на следующей лемме, доказательство которой совершенно аналогично доказательству леммы 1.1 и поэтому опускается.

Лемма 2. 1. *Если* $\lambda_1 = 0$ *или* 1, *то для* $\mu_1 > 2$

$$a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 3} = 0.$$

2. Положим, как и прежде,

$$A_{|\mu|}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; k} = \sum_{|\mu| = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3} \left| a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; k} \right| \qquad (k = 2, 3).$$

Рассуждая аналогично тому, как мы это делали в предыдущем параграфе, можно доказать следующие оценки:

$$A_{|\mu|}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; k} \leqslant C^{|\lambda|+1-|\mu|} \frac{|\lambda|!}{(|\mu|-2)!} \qquad (|\mu| \geqslant 2), \tag{2.4}$$

$$A_{\mu}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; k} \leqslant C^{|\lambda|+1-|\mu|} |\lambda|! \qquad (|\mu| = 0,1). \tag{2.5}$$

При помощи этих оценок можно показать, что если $f(t)$ — аналитическая функция, то тем же свойством обладают функции $X_k(f)$ $(k = 2, 3)$.

§ 3. Сходимость степенных рядов для операторов преобразования

1. Пусть X_1, X_2, X_3 — канонические инфинитезимальные операторы первого или второго порядка. Y_1, Y_2, Y_3 — инфинитезимальные операторы того же порядка и той же структуры, что и операторы X_α. В § 8 гл. IX было показано, что в области коэффициентов Тэйлора существует оператор A (оператор преобразования), удовлетворяющий условиям коммутирования

$$X_\alpha A = A Y_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{3.1}$$

Обратный оператор $A^{-1} = B$ удовлетворяет условиям коммутирования

$$Y_\alpha B = B X_\alpha. \tag{3.2}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать случай инфинитезимальных операторов второго порядка.

Предположим, что Y_1 есть произвольный дифференциальный оператор второго порядка (с аналитическими коэффициентами), а Y_2 и Y_3 удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$Y_2(f)\big|_{t_1=0} = \sum_{i,j=2}^{3} a_2^{ij}(t_2, t_3)\frac{\partial^2 f}{\partial t_i\,\partial t_j}\Big|_{t_1=0} + \sum_{i=2}^{3} b_2^{i}(t_2, t_3)\frac{\partial f}{\partial t_i}\Big|_{t_1=0} + c_2(t_2, t_3)\,f\big|_{t_1=0}; \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}Y_2(f)\big|_{t_1=0} = \sum_{i,j=2}^{3} a_2^{ij}(t_2, t_3)\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial^2 f}{\partial t_i\,\partial t_j}\Big|_{t_1=0} + \sum_{i=2}^{3} b_2(t_2, t_3)\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial f}{\partial t_i}\Big|_{t_1=0} + c_2(t_2, t_3)\frac{\partial f}{\partial t_1}\Big|_{t_1=0}; \tag{3.4}$$

$$Y_3(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = a_3^{33}(t_3)\frac{\partial^2 f}{\partial t_3^2}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} + b_3^3(t_3)\frac{\partial f}{\partial t_3}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} + c_3(t_3)\,f\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}; \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}Y_3(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = a_3^{33}(t_3)\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial^2 f}{\partial t_3^2}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} + b_3^3(t_3)\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial f}{\partial t_3}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} + c_3(t_3)\frac{\partial f}{\partial t_1}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}; \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2}Y_3(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = a_3^{33}(t_3)\frac{\partial}{\partial t_2}\frac{\partial^2 f}{\partial t_3^2}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} + b_3^3(t_3)\frac{\partial}{\partial t_2}\frac{\partial f}{\partial t_3}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} + c_3(t_3)\frac{\partial f}{\partial t_2}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}; \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2}Y_3(f)\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = a_3^{33}(t_3)\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2}\frac{\partial^2 f}{\partial t_3^2}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} + b_3^3(t_3)\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2}\frac{\partial f}{\partial t_3}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} + c_3(t_3)\frac{\partial^2 f}{\partial t_1\,\partial t_2}\Big|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}. \tag{3.8}$$

Условие (3.4) означает, что при $t_1 = 0$ операторы Y_2 и $\frac{\partial}{\partial t_1}$ коммутируют; условия (3.6), (3.7) и (3.8) означают, что при $t_1 = 0$ и $t_2 = 0$ операторы Y_3 и $\frac{\partial}{\partial t_1}$, Y_3 и $\frac{\partial}{\partial t_2}$, Y_3 и $\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}$ коммутируют.

Теорема 3.1. *Пусть X_1, X_2, X_3 — канонические операторы второго порядка, Y_1, Y_2, Y_3 — операторы той же структуры, удовлетворяющие начальным условиям* (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) и (3.8) $\Bigg($$Y_1$ есть произвольный дифференциальный оператор второго порядка с аналитическими коэффициентами, удовлетворяющими начальному условию $Y_1(f)|_{t=0} = \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2}\Big|_{t=0}$$\Bigg)$. *Тогда операторы A и B преобразуют аналитические функции в аналитические.*

Доказательство. Положим в (3.1) α последовательно равны 1, 2, 3. Мы получим:

$$X_1 A(f) = AY_1(f),$$
$$X_2 A(f) = AY_2(f),$$
$$X_3 A(f) = AY_3(f).$$

Из этих соотношений легко следует для любых целых неотрицательных l, m и n

$$X_3^n X_2^m X_1^l A(f) = AY_3^n Y_2^m Y_1^l (f). \tag{3.9}$$

Полагая в этом равенстве $t = 0$ и принимая во внимание, что по построению

$$A(f)|_{t=0} = f(0),$$

а также начальные условия для операторов X_α, мы получим:

$$D_t^{2l,\,2m,\,2n} A(f)|_{t=0} = Y_3^n Y_2^m Y_1^l (f)|_{t=0}. \tag{3.10}$$

В этом равенстве правая часть легко оценивается. В силу начальных условий (3.3) и (3.5) можно предполагать, что в правой части равенства (3.10) все операторы — дифференциальные (второго порядка). Поэтому оценка правой части имеет тот же порядок, что и величина

$$Y_1^{l+m+n}(f)\,|_{t=0}.$$

Пусть

$$f(t) \ll \frac{M}{1-\frac{z}{a}}, \quad Y_1 \ll \frac{N}{1-\frac{z}{a}} \frac{d^2}{dz^2}.$$

Тогда

$$Y_1^{l+m+n}(f)\,|_{t=0} \leqslant \frac{MN^L}{a^{2L}} 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (3L-2)(3L-1) <$$
$$< \frac{MN^L}{a^{2L}} 3^{2L} (L\,!)^2 < \frac{MN^L}{a^{2L}} 3^{2L} (2L)\,!,$$
$$L = l + m + n.$$

Поэтому

$$D_t^{2l,\,2m,\,2n} A(f)\,|_{t=0} < \frac{MN^L}{a^{2L}} 3^{2L} (2L)\,! \qquad (3.11)$$

Всякая другая (нечетная) производная отличается от четной производной на дополнительное дифференцирование вида $D_t^{\nu_1,\,\nu_2,\,\nu_3}$ $(0 \leqslant \nu_i \leqslant 1)$. Применяя к (3.9) оператор $D_t^{\nu_1,\,\nu_2,\,\nu_3}$, полагая затем $t=0$ и принимая во внимание начальные условия (7.3), (7.4), (7.5), (7.6), (7.7), (8.5), гл. IX и (3.4), (3.6), (3.7) и (3.8) настоящей главы, мы получим:

$$D_t^{0,\,0,\,\nu_3} X_3^n D_t^{0,\,\nu_2,\,0} X_2^m D_t^{\nu_1,\,0,\,0} X_1^l A(f)\,|_{t=0} =$$
$$= D_t^{2l+\nu_1,\,2m+\nu_2,\,2n+\nu_3} A(f)\,|_{t=0} =$$
$$= D_t^{0,\,0,\,\nu_3} Y_3^n D_t^{0,\,\nu_2,\,0} Y_2^m D_t^{\nu_1,\,0,\,0} Y_1^l (f)\,|_{t=0}.$$

Из этого равенства следует, что для нечетных производных имеет место оценка, аналогичная оценке (3.11). Поэтому если $f(t)$ — аналитическая функция, то $A(f)$ также.

Замечание. С помощью индукции нетрудно получить разложения

$$D_t^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3} A(f)\,|_{t=0} = D_t^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3} f\,|_{t=0} +$$
$$+ a_{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3}^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,A} D_t^{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3} f\,|_{t=0}; \qquad (3.12)$$

$$D_t^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3} B(f)\,|_{t=0} = D_t^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3} f\,|_{t=0} +$$
$$+ a_{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3}^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,B} D_t^{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3} f\,|_{t=0}, \qquad (3.13)$$

причем $a_\mu^{\lambda;\,A}$, $a_\mu^{\lambda;\,B}$ — постоянные числа, $|\mu| < |\lambda|$.

2. Рассмотрим теперь оценки, связанные с оператором B. Этот случай сложнее предыдущего. Поэтому мы рассмотрим подробно случай операторов первого порядка. Изменения, которые нужно внести в случай операторов второго порядка, будут из дальнейшего очевидны.

Итак, пусть Y_1 есть произвольный дифференциальный оператор первого порядка, а Y_2 и Y_3 удовлетворяют начальным условиям:

$$Y_2(f)\big|_{t_1=0} = b_2^2(t_2, t_3)\frac{\partial f}{\partial t_2}\bigg|_{t_1=0} + b_2^3(t_2, t_3)\frac{\partial f}{\partial t_3}\bigg|_{t_1=0} + c_2(t_2, t_3) f\big|_{t=0}; \tag{3.14}$$

$$Y_3(f)\bigg|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} = b_3(t_3)\frac{\partial f}{\partial t_3}\bigg|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}} + c_3(t_3) f\bigg|_{\substack{t_1=0\\t_2=0}}. \tag{3.15}$$

Пусть

$$D_t^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} Y_\alpha(f)\big|_{t=0} = D_t^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}\frac{\partial f}{\partial t_\alpha}\bigg|_{t=0} + a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; Y_\alpha} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} f\big|_{t=0} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{3.16}$$

Из начального условия (3.14) следует:

$$a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{0, \lambda_2, \lambda_3; Y_2} = 0, \quad \text{если } \mu_1 > 0, \tag{3.17}$$

$$a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{0, 0, \lambda_3; Y_3} = 0, \quad \text{если } \mu_1 + \mu_2 > 0. \tag{3.18}$$

Следующая лемма играет в дальнейшем важную роль.

Лемма 3.1. *Если* $\mu_1 + \mu_2 > 0$, *то*

$$a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{0, 0, \lambda_3; B} = 0. \tag{3.19}$$

Доказательство. Полагая в уравнении (3.2) $\alpha = 3$, применяя оператор $D_t^{0; 0, \lambda_3}$ и полагая затем $t = 0$, мы получим, используя разложения (3.13) и (3.16),

$$\begin{aligned} D_t^{0, 0, \lambda_3} Y_3 B(f)\big|_{t=0} &= D_t^{0, 0, \lambda_3+1} B(f)\big|_{t=0} + \\ &+ a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{0, 0, \lambda_3; Y_3} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} B(f)\big|_{t=0} = D_t^{0, 0, \lambda_3+1} f\big|_{t=0} + \\ &+ a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{0, 0, \lambda_3+1; B} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} f\big|_{t=0} + a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{0, 0, \lambda_3; Y_3} D^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} f\big|_{t=0} + \\ &+ a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{0, 0, \lambda_3; Y_3} a_{\nu_1, \nu_2, \nu_3}^{\mu_1, \mu_2, \mu_3; B} D_t^{\nu_1, \nu_2, \nu_3} f\big|_{t=0} = \\ &= D_t^{0, 0, \lambda_3} X_3(f)\big|_{t=0} + a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{0, 0, \lambda_3; B} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} X_3 f\big|_{t=0} = \\ &= D_t^{0, 0, \lambda_3+1} f\big|_{t=0} + a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{0, 0, \lambda_3; B} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} X_3(f)\big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$
\begin{gathered}
a^{0,\,0,\,\lambda_3+1;\,B}_{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3} D_t^{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3} f\,\big|_{t=0} = a^{0,\,0,\,\lambda_3;\,B}_{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3} D_t^{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3+1} X_3(f)\,\big|_{t=0} - \\
- a^{0,\,0,\,\lambda_3;\,Y_3}_{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3} D_t^{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3} f\,\big|_{t=0} - a^{0,\,0,\,\lambda_3;\,Y_3}_{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3} a^{\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3;\,B}_{\nu_1,\,\nu_2,\,\nu_3} D_t^{\nu_1,\,\nu_2,\,\nu_3} f\,\big|_{t=0}.
\end{gathered}
\tag{3.20}
$$

Теперь рассуждаем по индукции. Для $\lambda_3 = 0$ равенство (3.19), очевидно, выполняется. Пусть оно выполняется для всех $\lambda_3 \leqslant N$. Докажем, что тогда оно выполняется для $\lambda_3 = N + 1$. В силу предположения индукции в равенстве (3.20) первый и второй члены справа не содержат дифференцирования по t_1 и t_2. Остается показать, что это же верно для третьего члена. Но это следует из равенства (3.18).

Из тождества (3.20) с помощью приема, которым мы уже неоднократно пользовались, можно получить следующие рекуррентные неравенства:

$$
\begin{gathered}
A^{0,\,0,\,\lambda_3+1;\,B}_{|\mu|} \leqslant A^{0,\,0,\,\lambda_3;\,B}_{|\mu|-1} + A^{0,\,0,\,\lambda_3;\,Y_3}_{|\mu|} + \\
+ \sum_{\nu_3=\mu}^{\lambda_3-1} \left| a^{0,\,0,\,\lambda_3;\,Y_3}_{0,\,0,\,\nu_3} \right| A^{0,\,0,\,\nu_3;\,B}_{|\mu|},
\end{gathered}
\tag{3.21}
$$

$$
A^{0,\,0,\,\lambda_3+1;\,B}_{0} \leqslant A^{0,\,0,\,\lambda_3;\,Y_3}_{0} + \sum_{\nu_3=0}^{\lambda_3-1} \left| a^{0,\,0,\,\lambda_3;\,Y_3}_{0,\,0,\,\nu_3} \right| A^{0,\,0,\,\nu_3;\,B}_{0}. \tag{3.22}
$$

Пусть *)

$$
A^{0,\,0,\,\lambda_3;\,Y_\alpha}_{\nu_3} < C_Y^{\lambda_3+1-\nu_3} \frac{\lambda_3!}{(\nu_3-1)!}, \tag{3.23}
$$

$$
A^{0,\,0,\,\lambda_3;\,Y_\alpha}_{0} < C_Y^{\lambda_3+1} \lambda_3! \tag{3.24}
$$

Докажем по индукции следующие неравенства:

$$
A^{0,\,0,\,\lambda_3;\,B}_{0} \leqslant C_B^{\lambda_3+1} \lambda_3! \tag{3.25}
$$

$$
A^{0,\,0,\,\lambda_3;\,B}_{|\mu|} \leqslant C_B^{2\lambda_3-|\mu|} \frac{\lambda_3!}{(|\mu|-1)} \quad (|\mu| = \nu_3 > 0). \tag{3.26}
$$

Из (3.22), (3.25) и (3.26) следует:

$$
\begin{gathered}
A^{0,\,0,\,\lambda_3+1;\,B}_{0} \leqslant C_Y^{\lambda_3+1} \lambda_3! + \sum_{\nu_3=0}^{\lambda_3-1} C_B^{\nu_3+1} \nu_3!\, C_Y^{\lambda_3+1-\nu_3} \frac{\lambda_3!}{(\nu_3-1)!} < \\
< C_Y^{\lambda_3+1} \lambda_3! + C_B C_Y^{\lambda_3+1} \lambda_3! \sum_{\nu_3=0}^{\lambda_3-1} \nu_3 \left(\frac{C_B}{C_Y} \right)^{\nu_3}.
\end{gathered}
$$

---

*) Постоянная C_Y существует в силу начального условия (3.15).

Положим $x = \frac{C_B}{C_Y}$, и пусть $x > 2$, т. е. $C_B > 2C_Y$. Оценим сумму

$$\sum_{\nu_3=0}^{\lambda_3-1} \nu_3 x^{\nu_3} = x \sum_{\nu_3=0}^{\lambda_3-1} \nu_3 x^{\nu_3-1} = x\left(\sum_{\nu_3=0}^{\lambda_3-1} x^{\nu_3}\right)' = x\left(\frac{x^{\lambda_3}-1}{x-1}\right)' <$$

$$< \lambda_3 x^{\lambda_3} \frac{x}{(x-1)^2} < 2\lambda_3 \frac{C_B^{\lambda_3}}{C_Y^{\lambda_3}}.$$

Поэтому

$$A_0^{0,\,0,\,\lambda_3+1;\,B} \leqslant C_Y^{\lambda_3+1}\lambda_3! + 2C_Y C_B^{\lambda_3+1}\lambda_3\lambda_3! <$$

$$< C_B^{\lambda_3+1}(\lambda_3+1)!\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda_3+1}\frac{1}{\lambda_3} + 2C_Y\right] < C_B^{\lambda_3+2}(\lambda_3+1)!,$$

если только $C_B > \frac{1}{2} + 2C_Y$.

Это доказывает (3.25).

Докажем теперь (3.26). Из (3.21) следует:

$$A_{|\mu|}^{0,\,0,\,\lambda_3+1;\,B} \leqslant C_B^{2\lambda_3+1-|\mu|}\frac{\lambda_3!}{(|\mu|-2)!} + C_Y^{\lambda_3+1-|\mu|}\frac{\lambda_3!}{(|\mu|-1)!}\times$$

$$\times \sum_{\nu_3=|\mu|}^{\lambda_3-1} C_B^{2\nu_3-|\mu|}\frac{\nu_3!}{(|\mu|-1)!}C_Y^{\lambda_3+1-\nu_3}\frac{\lambda_3!}{(\nu_3-1)!} =$$

$$= C_B^{2\lambda_3+1-|\mu|}\frac{\lambda_3!}{(|\mu|-2)!} + C_B^{\lambda_3-1-|\mu|}C_Y^{\lambda_3+1}\frac{\lambda_3!}{(|\mu|-1)!}\sum_{\nu_3=|\mu|}^{\lambda_3-1}\nu_3\left(\frac{C_B}{C_Y}\right)^{\nu_3} <$$

$$< 2C_B^{2\lambda_3+1-|\mu|}\frac{(\lambda_3+1)!}{(|\mu|-1)!} + 2C_B^{2\lambda_3-1-|\mu|}C_Y\frac{(\lambda_3+1)!}{(|\mu|-1)!} <$$

$$< C_B^{2\lambda_3+1-|\mu|}\frac{(\lambda_3+1)!}{(|\mu|-1)!}\left[1+\frac{1}{C_B}\right] < C_B^{2\lambda_3+2-|\mu|}\frac{(\lambda_3+1)!}{(|\mu|-1)!},$$

если только $1 + \frac{1}{C_B} < C_B$, т. е. $C_B^2 > 1 + C_B$.

Это доказывает оценку (3.26).

Используя равенство (3.2) при $\alpha = 2$ и рассуждая аналогично, найдем оценку для $A_{|\mu|}^{0,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,B}$. Наконец, используя равенство (3.2) при $\alpha = 1$, оценим $A_{|\mu|}^{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3;\,B}$. Окончательный результат состоит в следующем:

$$A_0^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; B} \leqslant C_B^{|\lambda|+1} |\lambda|!, \tag{3.27}$$

$$A_\mu^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; B} \leqslant C_B^{2|\lambda|-|\mu|} \frac{|\lambda|!}{(|\mu|-1)!}. \tag{3.28}$$

Из этих оценок следует, что если $f(t)$ — аналитическая функция, то $B(f)$ также аналитическая функция. В самом деле, пусть

$$f(t) \ll \frac{M}{1-\frac{z}{a}} \qquad (z = t_1 + t_2 + t_3).$$

Тогда

$$\left|D_t^\lambda B(f)\big|_{t=0}\right| = \left|D_t^\lambda f\big|_{t=0} + a_\mu^{\lambda; B} D^\mu f\big|_{t=0}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{a^{|\lambda|}} |\lambda|! + A_{|\mu|}^{\lambda; B} \frac{M}{a^{|\mu|}} |\mu|! \leqslant \frac{M}{a^{|\lambda|}} |\lambda|! +$$

$$+ M|\lambda|!\, C_B^{2|\lambda|} \sum_{|\mu|=0}^{|\lambda|-1} C_B^{-\mu} \frac{1}{a^{|\mu|}} |\mu| \leqslant \frac{M}{a^{|\lambda|}} |\lambda|! +$$

$$+ M(|\lambda|+2)!\, \frac{C_B^{2|\lambda|+1} a}{C_B a - 1},$$

если $C_B a > 1$. Аналогичная оценка имеет место в случае, если $C_B a \leqslant 1$. Эти оценки, очевидно, доказывают, что $B(f)$ — аналитическая функция.

Замечание. В случае инфинитезимальных операторов второго порядка, кроме равенства (3.19), имеют также место равенства

$$a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{0, 1, \lambda_3; B} = 0; \quad a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{1, 0, \lambda_3; B} = 0; \quad a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{1, 1, \lambda_3; B} = 0,$$

для $\mu_1 + \mu_2 > 0$. В остальном рассуждения мало чем отличаются от проведенных. Окончательные оценки имеют вид

$$A_{|\mu|}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; B} \leqslant C_B^{2|\lambda|-|\mu|} \frac{|\lambda|!}{(|\mu|-2)!} \qquad (|\mu| \geqslant 2),$$

$$A_{|\mu|}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; B} \leqslant C_B^{|\lambda|+1-|\mu|} |\lambda|! \qquad (|\mu| = 0,\ 1).$$

Эти оценки по-прежнему гарантируют аналитичность $B(f)$.

§ 4. Сходимость степенных рядов для операторов обобщенного сдвига

1. Пусть X_1, X_2, X_3 — канонические операторы второго порядка и $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$, $\widetilde{X}_3$ — коммутирующие с ними операторы второго порядка (см. § 1 этой главы).

Обобщенный сдвиг $T^s f(t)$ есть решение следующей системы (см. § 1 гл. VII):

$$\widetilde{X}_{\alpha;\,s} u = X_{\alpha;\,t} u \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3), \tag{4.1}$$

$$u|_{s=0} = f(t), \tag{4.2}$$

$$D_s^{\nu_1,\,\nu_2,\,\nu_3} u|_{s=0} = h_{\nu_1,\,\nu_2,\,\nu_3} f(t), \tag{4.3}$$

причем $0 \leqslant \nu_i \leqslant 1$, $i = 1,\ 2,\ 3$; $h_\nu = h_{\nu_1,\,\nu_2,\,\nu_3}$ — постоянные числа.

Мы покажем в этом параграфе, что если $f(t)$ — аналитическая функция, то $u[s,\ t;\ f(t)] = T^s f(t)$ также аналитична относительно шести переменных s_1, s_2, s_3; t_1, t_2, t_3. С этой целью мы дадим оценку для коэффициентов Тэйлора функции $u(s,\ t)$.

Из системы (4.1) следует:

$$D_s^{n_1,\,n_2,\,n_3} \widetilde{X}_{1;\,s}^{l_1} \widetilde{X}_{2;\,s}^{l_2} \widetilde{X}_{3;\,s}^{l_3} u = X_{3;\,t}^{l_3} X_{2;\,t}^{l_2} X_{1;\,t}^{l_1} D_s^{n_1,\,n_2,\,n_3} u$$
$$(0 \leqslant n_i \leqslant 1,\ i = 1,\ 2,\ 3).$$

Полагая здесь $s = 0$, мы получим *) (см. § 7 гл. IX):

$$D_s^{2l_1+n_1,\,2l_2+n_2,\,2l_3+n_3} u|_{s=0} = h_{n_1,\,n_2,\,n_3} X_{3;\,t}^{l_3} X_{2;\,t}^{l_2} X_{1;\,t}^{l_1} f(t). \tag{4.4}$$

Полагая в (4.4) $t = 0$, получим:

$$D_s^{2l_1+n_1,\,2l_2+n_2,\,2l_3+n_3} u|_{\substack{s=0\\ t=0}} = h_{n_1,\,n_2,\,n_3} D_t^{2l_1,\,2l_2,\,2l_3} f|_{t=0}. \tag{4.5}$$

Применяя к (4.4) оператор $D_t^{\nu_1,\,\nu_2,\,\nu_3} (0 \leqslant \nu_i \leqslant 1)$ и полагая затем $t = 0$, получим:

$$D_t^{\nu_1,\,\nu_2,\,\nu_3} D_s^{2l_1+n_1,\,2l_2+n_2,\,2l_3+n_3} u|_{\substack{s=0\\ t=0}} = h_{n_1,\,n_2,\,n_3} D_t^{2l_1+\nu_1,\,2l_2+\nu_2,\,2l_3+\nu_3} f|_{t=0}. \tag{4.6}$$

---

*) Мы полагаем $h_{0,\,0,\,0} = 1$.

Пусть

$$f(t) \ll \frac{M}{1-\frac{z}{a}} \qquad (z = t_1 + t_2 + t_3).$$

Покажем, что имеет место оценка:

$$\left| D_t^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} D_s^{2l_1+n_1, 2l_2+n_2, 2l_3+n_3} u \Big|_{\substack{s=0\\t=0}} \right| \leqslant K^{2|l|} \frac{(2|l|+|\lambda|)!}{b^{2|l|+|\lambda|}}, \quad (4.7)$$

где K и b — постоянные величины, $|l| = l_1 + l_2 + l_3$; $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

Из (4.5) следует, что эта оценка справедлива для $\lambda_i = \nu_i$ $(0 \leqslant \nu_i \leqslant 1)$ и произвольных l_1, l_2, l_3, если предположить, что $b < a$.

Рассмотрим теперь общий случай.

Из (4.4) следует:

$$D_t^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} D_s^{2l_1+n_1, 2l_2+n_2, 2l_3+n_3} u \Big|_{s=0} =$$
$$= h_{n_1, n_2, n_3} D_t^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} X_{3;\,t}^{l_3} X_{2;\,t}^{l_2} X_{1;\,t}^{l_1} f(t).$$

Чтобы получить оценку (4.7), необходимо в этом равенстве оценить правую часть при $t = 0$.

Если $l_2 = 0$ и $l_3 = 0$, то (по-прежнему мы предполагаем что $b < a$)

$$\left| D_t^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} X_{3;\,t}^{l_3} X_{2;\,t}^{l_2} X_{1;\,t}^{l_1} f(t) \right|_{t=0} = \left| D_t^{\lambda_1+2l_1, \lambda_2, \lambda_3} f(t) \right|_{t=0} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M(|\lambda| + 2l_1)!}{a^{|\lambda|+2l_1}} < \frac{M(|\lambda| + 2l_1)!}{b^{|\lambda|+2l_1}},$$

что совпадает с оценкой (4.7). Рассмотрим теперь случай $l_3 = 0$, $l_2 > 0$. Рассуждаем по индукции.

Из тождества (4.14), гл. IX и оценок (2.4) — (2.5) — (4.7) следует:

$$J = \left| D_t^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} X_{2;\,t}^{l_2+1} X_1^{l_1} f(t) \right|_{t=0} \Big| = \Big| D_t^{\lambda_1, \lambda_2+2, \lambda_3} X_{2;\,t}^{l_2} X_{1;\,t}^{l_1} f(t) \Big|_{t=0} +$$
$$+ a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3;\, 2} D_t^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} X_{2;\,t}^{l_2} X_{1;\,t}^{l_1} f(t) \Big|_{t=0} \Big| \leqslant$$
$$\leqslant K^{2(l_1+l_2)} \frac{[2(l_1+l_2) + 2 + |\lambda|]!}{a^{2(l_1+l_2)+2+|\lambda|}} +$$

$$+K^{2(l_1+l_2)}A_{|\mu|}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 2}\frac{[2(l_1+l_2)+|\mu|]!}{b^{2(l_1+l_2)+|\mu|}} \leqslant$$

$$\leqslant K^{2(l_1+l_2)}\left\{\frac{[2(l_1+l_2)+2+|\lambda|]!}{b^{2(l_1+l_2)+2+|\lambda|}}+\right.$$

$$\left.+C^{|\lambda|+1}\frac{|\lambda|!}{b^{2(l_1+l_2)}}\sum_{|\mu|}(bC)^{-|\mu|}\frac{[2(l_1+l_2)+|\mu|!}{(|\mu|-2)!}\right\}.$$

Предположим, что b настолько мало, что $bC<\frac{1}{2}$, т. е. $b<\frac{1}{2C}$. Тогда

$$\sum_{|\mu|\leqslant|\lambda|+1}(bC)^{-\mu}\frac{[2(l_1+l_2)+|\mu|]!}{(|\mu|-2)!}=$$

$$=\sum_{|\mu|\leqslant|\lambda|+1}(bC)^{-\mu}(|\mu|-1)(|\mu|)(|\mu|+1)\ldots$$

$$\ldots[2(l_1+l_2)+|\mu|]\leqslant|\lambda|(|\lambda|+1)\ldots[2(l_1+l_2)+|\lambda|+1](bC)^{-|\lambda|-1}.$$

Поэтому

$$J\leqslant K^{2(l_1+l_2)}\left\{\frac{[2(l_1+l_2)+2+|\lambda|]!}{b^{2(l_1+l_2)+2+|\lambda|}}+\frac{[2(l_1+l_2)+|\lambda|+2]!}{Cb^{2(l_1+l_2)+2+|\lambda|}}\right\}=$$

$$=K^{2(l_1+l_2)}\frac{[2(l_1+l_2)+2+|\lambda|]!}{b^{2(l_1+l_2)+2+|\lambda|}}\left[1+\frac{1}{C}\right].$$

Это доказывает оценку (4.7) для $l_3=0$, если только предположить, что $1+\frac{1}{C}<K^2$.

Чтобы доказать неравенство (4.7) в общем случае, следует провести еще раз индукцию по l_3.

Из оценки (4.7) следует, что $u(s, t)=T^s f(t)$ для малых $|s|$ и $|t|$ есть аналитическая функция.

2. Рассмотрим теперь более общий случай операторов обобщенного сдвига. Пусть $Y_\alpha(\alpha=1, 2, 3)$ — операторы, рассмотренные в § 3 этой главы и $\tilde{Y}_\alpha$ — коммутирующие с ними операторы. Пусть A — соответствующий оператор преобразования. Тогда

$$AY_\alpha=X_\alpha A,\quad Y_\alpha A^{-1}=A^{-1}X_\alpha, \tag{4.8}$$

$$A\tilde{Y}_\alpha=\tilde{X}_\alpha A,\quad \tilde{Y}_\alpha A^{-1}=A^{-1}\tilde{X}_\alpha. \tag{4.9}$$

Положим

$$v(s,\ t) = A_s^{-1} A_t^{-1} u\,[s,\ t;\ A_t f(t)],$$

где $u\,[s,\ t;\ f(t)]$ есть решение системы (4.1) — (4.2) — (4.3). Тогда

$$\widetilde{Y}_{\alpha;\,s} v = \widetilde{Y}_{\alpha;\,s} A_s^{-1} A_t^{-1} u = A_s^{-1}\, \widetilde{X}_{\alpha;\,s} A_t^{-1} u = A_s^{-1} A_t^{-1}\, \widetilde{X}_{\alpha;\,s} u =$$
$$= A_s^{-1} A_t^{-1} X_{\alpha;\,t} u = A_s^{-1} A_t^{-1} X_{\alpha;\,t} A_s A_t v = A_t^{-1} X_{\alpha;\,t} A_t v = Y_{\alpha;\,t} v.$$

Начальные условия для v имеют вид

$$v|_{s=0} = A_t^{-1} u\,[s,\ t;\ A_t f(t)]\,|_{s=0} = A_t^{-1} A_t f(t) = f(t);$$
$$D_s^{\nu} v|_{s=0} = D_s^{\nu} A_s^{-1} A_t^{-1} u|_{s=0} = A_t^{-1} D_s^{\nu} u|_{s=0} = h_\nu A_t^{-1} A_t f(t) = h_\nu f(t).$$

Таким образом, $v(s,\ t)$ есть обобщенный сдвиг $T^s f(t)$, соответствующий операторам $\widetilde{Y}_{\alpha;\,s}$ и $Y_{\alpha;\,t}$.

ГЛАВА XI

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ (аналог теории представлений для о. о. с.)

§ 1. Случай инфинитезимальных операторов первого порядка

1. Пусть $X_{\alpha;\,t}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ — инфинитезимальные операторы первого порядка в n-мерном пространстве, образующие алгебру Ли:

$$(X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha) = c_{\alpha\beta}^{\lambda} X_\lambda. \tag{1.1}$$

Обозначим через $E(t) = \{e_{ij}(t)\}_{i,\,j=1}^{N}$ $[t = (t_1, \ldots, t_n)]$ матрицу-функцию порядка N, удовлетворяющую системе уравнений

$$X_{\alpha;\,t} E(t) = A_\alpha E(t), \tag{1.2}$$

где $A_\alpha = \{a_{\alpha;\,ij}\}_{i,\,j=1}^{N}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ — постоянные матрицы, и начальному условию

$$E(0) = B_0, \tag{1.3}$$

где B_0 — постоянная обратимая матрица порядка N.

Из условия коммутирования (1.1) и уравнений (1.2) следует:

$$(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) E(t) = c_{\alpha\beta}^{\lambda} A_\lambda E(t).$$

Умножая обе части этого уравнения справа на $E^{-1}(t)$ (для малых t $E^{-1}(t)$ существует в силу условия (1.3) и обратимости матрицы B_0), мы получим:

$$A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha = c_{\alpha\beta}^{\lambda} A_\lambda. \tag{1.4}$$

Это равенство означает, что матрицы A_α образуют линейное представление алгебры Ли.

Наоборот, пусть выполняется равенство (1.4). Повторяя рассуждения § 3 гл. VII, можно показать, что из системы (1.2) — (1.3) значения последовательных производных в точке $t=0$ матрицы $E(t)$ (т. е. ее элементов) определяются однозначно и непротиворечиво (вопросы сходимости рядов мы рассмотрим в конце этого параграфа).

2. Пусть $\widetilde{X}_{\alpha;\,t}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ — инфинитезимальные операторы первого порядка, коммутирующие с операторами $X_{\alpha;\,t}$ и имеющие противоположную структуру (см. § 2 гл. IX). Докажем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Если матрица* B_0 (из начального условия (1.3)) *коммутирует со всеми матрицами* $A_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$, *то решения системы* (1.2)+(1.3) *удовлетворяют также системе*

$$\widetilde{X}_{\alpha;\,t} E(t) = E(t) \cdot A_\alpha. \tag{1.5}$$

Доказательство. При фиксированном α положим

$$\widetilde{X}_{\alpha;\,t} E(t) = F_\alpha(t).$$

В силу условия коммутирования

$$X_{\beta;\,t} F_\alpha(t) = X_{\beta;\,t} \widetilde{X}_{\alpha;\,t} E(t) = \widetilde{X}_{\alpha;\,t} X_{\beta;\,t} E(t) = \\ = \widetilde{X}_{\alpha;\,t} A_\beta E(t) = A_\beta F_\alpha(t). \tag{1.6}$$

Далее, используя условие теоремы, получим:

$$F_\alpha(0) = \widetilde{X}_{\alpha;\,t} E(t)\big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t_\alpha} E(t)\Big|_{t=0} = \\ = X_{\alpha;\,t} E(t)\big|_{t=0} = A_\alpha E(0) = A_\alpha \cdot B_0 = B_0 A_\alpha. \tag{1.7}$$

Покажем, что матрица $G_\alpha(t) = E(t) \cdot A_\alpha$ также удовлетворяет уравнению (1.6) и начальному условию (1.7). В самом деле,

$$X_{\beta;\,t} G_\alpha(t) = X_{\beta;\,t} E(t) A_\alpha = A_\beta E(t) A_\alpha = A_\beta \cdot G_\alpha(t);$$

$$G_\alpha(0) = E(0) \cdot A_\alpha = B_0 \cdot A_\alpha.$$

Из единственности решения системы (1.6) — (1.7) следует $F_\alpha(t) = G_\alpha(t)$, т. е.

$$\tilde{X}_{\alpha;\, t} E(t) = E(t) \cdot A_\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Условие теоремы о коммутировании выполняется, если $B_0 = hI$, где h — постоянное число и I — единичная матрица порядка N.

3. Рассмотрим теперь кратко вопросы сходимости рядов для матриц $E(t)$. Предположим сначала, что $X_{\alpha;\, t}$ — канонические операторы первого порядка, и ограничимся случаем $n = 3$. Из системы (1.5) следует:

$$X^n_{3;\, t} X^m_{2;\, t} X^l_{1;\, t} E(t) = A^l_1 A^m_2 A^n_3 E(t).$$

Полагая в этом уравнении $t = 0$ и принимая во внимание начальные условия для канонических операторов, мы получим:

$$D_t^{l,\, m,\, n} E(t)\big|_{t=0} = A^l_1 A^m_2 A^n_3 B_0.$$

Положим

$$a = \max |a_{\alpha;\, ij}|, \quad b_0 = \max |b_{0;\, ij}|$$
$$(\alpha = 1, 2, 3;\ i, j = 1, \ldots, N).$$

По индукции нетрудно получить оценку

$$|D_t^{l,\, m,\, n} e_{\alpha;\, ij}(t)|_{t=0} \leqslant N b_0 (Na)^L \qquad (L = l + m + n).$$

Из этой оценки следует, что степенные ряды для $E(t)$ сходятся.

Пусть теперь $Y_{\alpha;\, t}$ — инфинитезимальные операторы, рассмотренные в § 3 гл. X, и A_t — соответствующий оператор преобразования. Положим

$$H(t) = A_t^{-1} E(t).$$

$H(t)$ есть аналитическая матрица-функция (см. гл. X, § 3). Далее, имеем:

$$Y_{\alpha;\, t} H(t) = Y_\alpha A_t^{-1} E(t) = A_t^{-1} X_{\alpha;\, t} E(t) = A_t^{-1} A_\alpha E(t) = A_\alpha H(t);$$
$$H(0) = E(0) = B_0.$$

Аналогично

$$\tilde{Y}_{\alpha;\, t} H(t) = H(t) \cdot A_\alpha.$$

§ 2. Случай инфинитезимальных операторов второго порядка

1. Рассмотрим теперь случай инфинитезимальных операторов второго порядка. Итак, пусть операторы $X_{\alpha;\, t}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$) удовлетворяют условиям коммутирования (1.1) и начальным условиям

$$X_{\alpha;\, t} f \big|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial t_\alpha^2}\right|_{t=0}. \tag{2.1}$$

Пусть $E(t)$, A_α и B_0 имеют то же значение, что и в предыдущем параграфе. Рассмотрим систему

$$X_{\alpha;\, t} E(t) = A_\alpha E(t) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.2}$$

$$E(0) = B_0, \tag{2.3}$$

$$D_t^\nu E(t) \big|_{t=0} = C_\nu. \tag{2.4}$$

$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $0 \leqslant \nu_i \leqslant 1$, C_ν — постоянные матрицы порядка N.

Из (2.2) следует, как и в предыдущем параграфе, что матрицы A_α образуют линейное представление алгебры Ли, т. е. удовлетворяют уравнению (1.4).

Наоборот, пусть выполняются уравнения (1.4). Тогда, повторяя рассуждения § 4 гл. VII, покажем, что из системы (2.2) — (2.3) — (2.4) последовательные производные матрицы $E(t)$ определяются однозначно и непротиворечиво.

Замечание. Если операторы $X_{\alpha;\, t}$ — канонические, или, более общо, рассмотренные в § 3 гл. X, то матрицы $E(t)$ — аналитические (по крайней мере, для малых $|t|$). Доказательство проводится в точности так же, как и в случае инфинитезимальных операторов первого порядка (см. предыдущий параграф, п. 3).

2. Пусть $\widetilde{X}_{\alpha;\, t}$ — инфинитезимальные операторы второго порядка, коммутирующие с операторами $X_{\alpha;\, t}$ (см. § 5 гл. IX). Докажем теорему.

Теорема 2.1. *Если матрицы B_0 и C_ν коммутируют со всеми матрицами A_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$), то*

$$\widetilde{X}_{\alpha;\, t} E(t) = E(t) \cdot A_\alpha. \tag{2.5}$$

Доказательство. При фиксированном α положим $F_\alpha(t) = \tilde{X}_{\alpha;\,t}E(t)$. Из условия коммутирования следует:

$$X_{\beta;\,t}F_\alpha(t) = X_{\beta;\,t}\tilde{X}_{\alpha;\,t}E(t) = \tilde{X}_{\alpha;\,t}X_{\beta;\,t}E(t) = A_\beta F_\alpha(t). \quad (2.6)$$

Далее, так как начальные условия для $\tilde{X}_{\alpha;\,t}$ и $X_{\alpha;\,t}$ совпадают (см. § 5 гл. IX), то

$$F_\alpha(0) = \tilde{X}_{\alpha;\,t}E(t)\Big|_{t=0} = X_{\alpha;\,t}E(t)\Big|_{t=0} = A_\alpha B_0 = B_0 A_\alpha; \quad (2.7)$$

$$D_t^\nu F_\alpha(t)\Big|_{t=0} = D_t^\nu \tilde{X}_{\alpha;\,t}E(t)\Big|_{t=0} = D_t^\nu X_{\alpha;\,t}E(t)\Big|_{t=0} =$$
$$= D_t^\nu A_\alpha E(t)\Big|_{t=0} = A_\alpha \cdot C_\nu = C_\nu \cdot A_\alpha. \quad (2.8)$$

Покажем теперь, что матрицы $G_\alpha(t) = E(t)\cdot A_\alpha$ также удовлетворяют системе (2.6) — (2.7) — (2.8). Мы имеем:

$$X_{\beta;\,t}G_\alpha(t) = X_{\beta;\,t}E(t)\cdot A_\alpha = A_\beta E(t)\,A_\alpha = A_\beta G_\alpha(t);$$
$$G_\alpha(0) = B_0 A_\alpha;$$
$$D_t^\nu G_\alpha(t)\Big|_{t=0} = D_t^\nu E(t)\,A_\alpha\Big|_{t=0} = C_\nu A_\alpha.$$

Из единственности решения системы (2.6) — (2.7) — (2.8) следует $F_\alpha(t) = G_\alpha(t)$, т. е.

$$\tilde{X}_{\alpha;\,t}E(t) = E(t)\cdot A_\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Условие теоремы выполняется, если $B_0 = h_0 I$, $C_\nu = h_\nu I$, где h_0 и h_ν — постоянные числа, I — единичная матрица порядка N.

3. Пусть $B_0 = I$, $C_\nu = h_\nu I$. Как следует из замечания, условия теоремы 2.1 в этом случае выполняются. Рассмотрим матрицу

$$F(s,\,t) = E(s)\cdot E(t).$$

Из (2.2.), (2.3), (2.4) и (2.5) следует, что эта матрица удовлетворяет системе

$$\tilde{X}_{\alpha;\,s}F = X_{\alpha;\,t}F \quad (\alpha = 1,\,2,\,\ldots,\,n), \quad (2.9)$$

$$F\Big|_{s=0} = E(t), \quad (2.10)$$

$$D_s^\nu F\Big|_{s=0} = h_\nu E(t). \quad (2.11)$$

Но в § 4 гл. VII показано, что решение системы (2.9) — (2.10) — (2.11) единственно и определяет обобщенный сдвиг $T^s E(t)$. Итак,

$$T^s E(t) = E(s) \cdot E(t).$$

Это уравнение показывает, что матрицы $E(t)$ образуют линейное представление для обобщенного сдвига T^s.

ПРИМЕЧАНИЯ И УКАЗАНИЯ К ЛИТЕРАТУРЕ

К главе I

§ 1. Первая аксиоматика о. о. с. была указана в работе Дельсарта [4], в которой по существу рассмотрен одномерный случай. В работе [6] Дельсарт рассматривает о. о. с., для которых инфинитезимальный оператор есть дифференциальный оператор Бесселя. В дискретном случае о. о. с. в несколько ином виде были введены Хааром (кубические матрицы Хаара) [10].

Более полная аксиоматика о. о. с. дана автором в работах [48], [49], [51].

Другой подход к коммутативным о. о. с., основанный на теории нормированных колец И. М. Гельфанда, разрабатывался в ряде работ С. Г. Крейном и Ю. М. Березанским [31], [32], [33].

§ 2. О. о. с. Дельсарта в общем виде рассмотрены в работе [7]. Связь о. о. с. с гиперкомплексными системами рассмотрена в работах автора [50], [51].

§ 3. Сопряженные о. о. с. и аксиоматика для них рассматривалась автором в работах [48], [49], [50], [51], [58]. Эта аксиоматика менялась. По-видимому, аксиоматика, принятая нами в этой книге, наиболее удачна.

§ 4. Рассмотренная в п. 4 модель коммутативного семейства о. о. с. вскрывает структуру таких операторов. См. [51], гл. IV, в которой изучается спектральное разложение о. о. с. в некомпактном случае. См. также работу Эренпрайса [9], в которой построена весьма общая теория коммутативных о. о. с. для функций и обобщенных функций.

§ 5. Теория линейных представлений для о. о. с. строится по аналогии с теорией линейных представлений компактных топологических групп (теория Петера — Вейля [18]). См. работу автора [50].

§ 6. В коммутативном случае теория линейных представлений для о. о. с. может быть построена как в компактном, так и в некомпактном случае на основе теории нормированных колец. См. цитированные работы С. Г. Крейна и Ю. М. Березанского.

К главе II

§ 1. Определение инфинитезимального оператора является обычным.

§ 2. Исследование структуры инфинитезимальных операторов для о. о. с. в методическом отношении очень похоже на вывод дифференциальных уравнений в теории случайных процессов см. [37], [38].

Для одного важного частного случая о. о. с. полный набор инфинитезимальных операторов вычислен в работе И. М. Гельфанда [35].

Для случая о. о. с. Дельсарта метод вычисления полного набора инфинитезимальных операторов указан Дельсартом [7].

Краткое изложение результатов этого параграфа дано в наших заметках [56], [57].

§§ 3, 4. Результаты этих параграфов публикуются впервые.

К главе III

§ 1. Восстановление о. о. с. по инфинитезимальному оператору $L=\frac{d^2}{dt^2}-q(t)$ в случае аналитического коэффициента $q(t)$ изучалось в нашей работе [48].

§ 2. Построение о. о. с. по инфинитезимальному оператору вида $L=\frac{d^2}{dt^2}-q(t)$ в случае непрерывного коэффициента $q(t)$ дано А. Я. Повзнером [68], который использовал метод Римана для решения задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-q(s)\,u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-q(t)\,u,$$

$$u\,|_{s=0}=f(t),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0}=g(t).$$

Исследование класса D в случае произвольного h, а также метод продолжения излагаются впервые.

§ 3. Формула (2.1) может быть получена из формулы Римана. Излагаемый метод в существенном мало отличается от метода Римана.

§ 4. Излагаемый в этом параграфе вывод формул (2.1) навеян одним из выводов так называемых операторов преобразования. См. работу И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [36], стр. 315.

§ 6. Другой подход к исследованию положительности функции Римана имеется в работе Вейнбергера [19]. См. также работы Бохнера [1], [2].

§ 7. Результаты этого, а также следующих двух параграфов ранее не публиковались.

К главе IV

§ 1. Этот метод доказательства полноты системы собственных функций задачи Штурма — Лиувилля публикуется здесь впервые. По идее он очень близок к доказательству Г. Вейля теоремы полноты в теории почти-периодических функций [20].

§ 2, 3. Насколько нам известно, решение смешанной задачи с помощью продолжения начальной функции рассматривалось ранее только в случае простейшего волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

§ 4, 5. Результаты этих параграфов легко следуют из формулы (2.1) гл. III и многим авторам были известны.

§ 6. Полнота произведений решений двух задач Штурма — Лиувилля впервые изучалась Боргом [3] в связи с обратной задачей Штурма — Лиувилля. Более общие результаты получил Л. А. Чудов [77], см. также В. В. Сташевская [70] и [71] и Б. Я. Левин [46].

§ 7. Первая теорема единственности для обратных задач Штурма — Лиувилля была получена В. А. Амбарцумяном [21].

Метод доказательства теоремы единственности обратной задачи, состоящий в сведении этого вопроса к вопросу о полноте произведений собственных функций двух задач Штурма — Лиувилля, принадлежит Боргу [3]. Более общий результат, чем в работе Борга, также используя сведение к полноте произведений собственных функций, получил Л. А. Чудов [77].

§ 8. Результаты этого параграфа полностью принадлежат В. А. Марченко [60], [62].

§ 9. Теорема единственности по предельной фазе принадлежит Левинсону [14], который предполагал, что уравнение не имеет отрицательного спектра. Изложенный нами метод доказательства принадлежит В. А. Марченко.

§ 10. Операторы преобразования возникли из общих алгебраических соображений, связанных с теорией о. о. с. (преобразование базиса. см. Б. М. Левитан [51]). Общее определение операторов преобразования дано в работе Лионса [17], см. также М. К. Фаге [75].

Некоторые частные случаи формулы (10.15) были получены Дельсартом [5]. В общем виде, в случае непрерывного коэффициента $q(t)$ формула (10.15) получена в работе [68], см. также работы В. А. Марченко [62], И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [36] и Лионса [16], где изложены другие подходы.

Для оператора Бесселя

$$B_p = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2p+1}{x} \frac{d}{dx}$$

аналоги формулы (10.15) совпадают с классическими формулами Пуассона и Сонина, см. также Б. М. Левитан [54].

Для операторов вида $B_p + q(x)$, где $q(x)$ суммируема в каждом конечном интервале $(0, a)$, формула (10.15) изучалась В. В. Сташевской [71] и В. Я. Волком [34].

Операторы (10.24) впервые были рассмотрены Б. Я. Левиным [47].

Применение, кратко намеченное в п. 3, подробно изучалось в работах Олевского [65], [66] и Лионса [16], [17].

§ 11. Интегральное уравнение (11.8) иным методом впервые получено Б. Я. Левиным [47]. При доказательстве существования решения этого уравнения мы следуем изложению в монографии З. С. Аграновича и В. А. Марченко [24].

К главе V

Единственность определения уравнения по спектральной функции $\rho(\lambda)$ доказал В. А. Марченко [60].

Полное решение обратной задачи, т. е. выяснение необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять спектральная функция дифференциального уравнения второго порядка, дано И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном [36], а также М. Г. Крейном [39], [40], [42]. Наше изложение следует работе [36], кроме § 4, который написан на основе одного замечания Левинсона [15].

Дифференциальное уравнение может быть также восстановлено по предельной фазе. Этот вопрос рассмотрен в работе Джоста и Ньютона [11]. В. А. Марченко [64] успешно применил к этому случаю операторы преобразования Б. Я. Левина. См. также монографию В. А. Марченко и З. С. Аграновича [24], в которой вопрос о восстановлении системы дифференциальных уравнений по предельной матрице рассеяния разобран наиболее полно.

К главе VI

§§ 3, 4. Разрешимость задачи (3.3) — (3.4) — (3.5) впервые доказал М. К. Фаге [74]. Ему же принадлежит формула (3.21). Мы приводим значительно более простой вывод этой формулы.

§ 5. Операторы преобразования для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков построены М. К. Фаге [74], [75], а также независимо Дельсартом и Лионсом [8]. Фаге рассматривал также случай неаналитических коэффициентов.

§ 6. Результаты этого параграфа в основном принадлежат Л. А. Сахновичу [73]. Наше изложение методически несколько отличается от изложения Л. А. Сахновича.

К главе VII

Обратные теоремы для групп Ли применительно к принятым нами обозначениям изложены в книге Л. С. Понтрягина [69], гл. X.

Основные результаты этой главы публикуются здесь впервые.

§ 8. Ряд Тейлора — Дельсарта для одномерного случая впервые рассмотрен в работе Дельсарта [4]. Вопросы сходимости рассматривались в нашей работе [54] для случая оператора Бесселя.

К главам IX, X и XI

Результаты этих глав публикуются здесь впервые.

ЛИТЕРАТУРА

Bochner S.

1. Positive zonal functions on sphere, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **40** (1954) 1141—1147.
2. Sturm — Liouville and heat equations whose Eigenfunctions are ultraspherical polynomials or associated Bessel functions, Proc. of the conference on differential equations at the University of Maryland (1955).

Borg G.

3. Eine Umkehrung der Sturm — Liouvillschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. **78**, № 2 (1945), 1—96.

Delsarte J.

4. Sur une extension de la formule de Taylor, Journal Math. pures et appl. **17** (1938), 213—230.
5. Sur certaines transformation fonctionelles relative aux équations lineaires aux dérivées partieles du second ordre, C. R. Acad. Sci. Paris **206** (1938), 178—182.
6. Une extension nouvelle de la théorie de fonction — presque periodiques de Bohr, Acta Math. **69** (1939), 259.
7. Hypergroupes et opérateurs de permutation et de transmutation, Colloques internat. Nancy (9—15 avril 1956), 29—44.

Delsarte J. et Lions J. L.

8 Transmutations d'opérateurs differentieles dans le domaine complexe, Comment. Math. Helv. **32**, 2 (1957), 113—128.

Ehrenpreis L.

9. Theory of distributions for locally compact spaces, Memoirs of the Amer. Math. Soc. № 21.

Haar A.

10. Über die Multiplicationstabelle der orthogonalen Functionsysteme, Math. Zeitschrift **31** (1930), 767—798.

Jost R. and Newton R.

11. The construction of potentials from the S-matrix for systems of differential equations, Nuovo cimento, I, № 4 (1955), 590—622.

Levinson N.

12. Gap and density theorem, Am. Math. Soc. 26 (1940).
13. The inverse Sturm — Liouville problem, Math. Tidssur B. (1949), 25—30.
14. On the uniqueness of the potential in a Schrödinger equation for a given asymptotic phase. Danske Vid. Selsk. Mat. — Fys. Medd. 25, № 9 (1949), 29.
15. Mathematical Reviews 13, № 5 (May 1952), 558.

Lions J. L.

16. Operateurs de Delsarte et probléme mixte, Bull. Soc. Math. France 84 (1956), 9—95.
17. Quelques applications d'operateurs de transmutation, Colloques internat. Nancy (9—15 avril 1956), 125—142.

Peter Z., Weyl H.

18. Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann. 97 (1927). 737—755.

Weinberger A.

19. A maximum property of Cauchy problem, Ann. of Math. 64, 3 (1956), 505—512.

Weyl H.

20. Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen, Math. Ann. 97 (1926), 338—356.

Ambarzumjan W. A.

21. Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Zeitschrift für Physik 53 (1929), 690—695.

Агранович З. С. и Марченко В. А.

22. Восстановление потенциала по матрице рассеяния для системы дифференциальных уравнений, Докл. АН СССР 113, 5 (1957), 951—954.
23. Восстановление тензорных сил по данным рассеяния, Докл. АН СССР 118, 6 (1958), 1055—1058.
24. Обратная задача теории рассеяния, Изд. Харьк. университета, Харьков, 1960.

Березанский Ю. М.

25. О центре группового кольца компактной группы, Докл. АН СССР 72, 5 (1950), 825—828.
26. Гиперкомплексные системы с дискретным базисом, Докл. АН СССР 73, 3 (1951), 329—332.
27. О некоторых нормированных кольцах, построенных по ортогональным полиномам, Укр. матем. ж. 3, 4 (1951), 412—432.
28. О теории почти-периодических функций относительно сдвига в гиперкомплексных системах, Докл. АН СССР 81, 1 (1952), 9—12.
29. Об обобщенных почти-периодических функциях и последовательностях, связанных с дифференциальным и разностным уравнением, Матем. сб. 32 (74) : 1 (1953), 157—194.

30. О гиперкомплéксных системах, построенных по уравнению Штурма — Лиувилля на полуоси, Докл. АН СССР **91**, 6 (1953), 1245—1248.

Березанский Ю. М. и Крейн С. Г.

31. Континуальные алгебры, Докл. АН СССР **72**, 1 (1950), 5—8.
32. Некоторые классы континуальных алгебр, Докл. АН СССР **72**, 2 (1950), 237—240.
33. Гиперкомплексные системы с компактным базисом, Укр. матем. ж. **3**, 2 (1951), 184—204.

Волк В. Я.

34. О формулах обращения для дифференциальных уравнений с особенностью при $x=0$, Успехи матем. наук **8**, 4 (1953), 141—151.

Гельфанд И. М.

35. Сферические функции на симметрических римановых пространствах, Докл. АН СССР **70**, 1 (1950), 5—8.

Гельфанд И. М. и Левитан Б. М.

36. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН СССР, сер. матем. **15** (1951), 309—360.

Колмогоров А. Н.

37. Об аналитических методах в теории вероятностей, Успехи матем. наук **5** (1938), 5—41.
38. Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozesse, Math. Ann. **108** (1934), стр. 149.

Крейн М. Г.

39. Решение обратной задачи Штурма — Лиувилля, Докл. АН СССР **76**, 1 (1951), 21—24.
40. Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру ее частот, Докл. АН СССР **76**, 3 (1951), 345—348.
41. Об обратных задачах для неоднородной струны, Докл. АН СССР **82**, 5 (1952), 669—672.
42. О переходной функции одномерной краевой задачи второго порядка, Докл. АН СССР **88**, 3 (1953), 405—408.
43. О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции, Докл. АН СССР **93**, 4 (1953), 617—620.
44. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи, Докл. АН СССР **94**, 6 (1954), 767—770.
45. Об определении потенциала частицы по ее S-функции, Докл. АН СССР **105**, 3 (1955), 433—436.

Левин Б. Я.

46. Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956.
47. Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка, Докл. АН СССР **106**, 2 (1956), 187—190.

Левитан Б. М.

48. Обобщение операции сдвига в связи с почти-периодическими функциями, Матем. сб. **7** (49) : 3 (1940), 449—478.

49. Нормированные кольца, порожденные о. о. с., Докл. АН СССР **47**, 1 (1945), 3—6.

50. Обобщение операции сдвига и бесконечные гиперкомплексные системы, гл. I, Матем. сб. **16** (58) : 3 (1945), 259—280; гл. II, Матем. сб. **17** (59) : 1 (1945), 9—44; гл. III, Матем. сб. **17** (59) : 2 (1945), 163—192.

51. Применение о. о. с. к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, Успехи матем. наук **4**, 1 (29) (1949), 3—111.

52. Обобщенные почти-периодические функции, Матем. сб. **24** (66) : 3 (1949), 321—346.

53. Оценка остаточного члена в формуле Тейлора — Дельсарта, Докл. АН СССР **73**. 2 (1950), 269—272.

54. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье, Успехи матем. наук **6**, 2 (1951), 102—143.

55. О полноте квадратов собственных функций, Докл. АН СССР **83**, 3 (1952), 349—352.

56. Теоремы Ли для о. о. с., Докл. АН СССР **123**, 1 (1958), 32—35.

57. Обратные теоремы Ли для о. о. с., Докл. АН СССР **123**, 2 (1958).

58. Сопряженные о. о. с., Докл. АН СССР **123**, 3 (1958).

Левитан Б. М. и Повзнер А. Я.

59. Дифференциальные уравнения Штурма — Лиувилля на полуоси и теорема Планшереля, Докл. АН СССР **52**, 6 (1946) 483—486.

Марченко В. А.

60. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка, Докл. АН СССР **72**, 3 (1950), 457—460.

61. Операторы преобразования, Докл. АН СССР **74**, 2 (1950), 185—188.

62. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка I, Труды Моск. матем. об-ва I (1952), 327—420.

63. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, II, Труды Моск. матем. об-ва II (1953), 3—82.

64. Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн, Докл. АН СССР **104**, 5 (1955), 695—698.

Олевский М. Н.

65. О функции Римана для дифференциального уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + [P_1(x) + P_2(t)]\,u = 0$, Докл. АН СССР **87**, 3 (1952), 337—340.

66. Об уравнении

$$A_P u(P, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(t)\frac{\partial u}{\partial t} + q(t) u$$

(A_P — линейный дифференциальный оператор второго порядка) и решение задачи Коши для обобщенного уравнения Эйлера — Дарбу, Докл. АН СССР **93**, 6 (1953), 975—978.

Петровский И. Г.

67. Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехиздат, М., 1950.

Повзнер А. Я.

68. О дифференциальных уравнениях типа Штурма — Лиувилля на полуоси, Матем. сб. **23** (65) : 1 (1948), 3—52.

Понтрягин Л. С.

69. Непрерывные группы, изд. 2-е, Гостехиздат, М., 1954.

Сташевская В. В.

70. Об обратных задачах спектрального анализа для одного класса дифференциальных уравнений, Докл. АН СССР **93**, 3 (1953), 409—412.

71. Об обратной задаче спектрального анализа для дифференциального оператора с особенностью в нуле, Уч. зап. Харьк. матем. об-ва **25**, 5 (1957), 49—86.

Сахнович Л. А.

72. Спектральный анализ волтеровских операторов и обратные задачи, Докл. АН СССР **115**, 4 (1957), 666—669.

73. Обратная задача для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ с аналитическими коэффициентами, Матем. сб. **46**, 1 (1958), 61—76.

Фаге М. К.

74. Интегральное представление операторно-аналитических функций одной независимой переменной, Докл. АН СССР **115**, 5 (1957), 874—877.

75. Операторно-аналитические функции одной независимой переменной, Труды Моск. матем. об-ва **7** (1958), 227—268.

76. Решение одной задачи Коши путем увеличения числа независимых переменных, Матем. сб. **46** (88) : 3 (1958), 261—290.

Чудов Л. А.

77. Обратная задача Штурма — Лиувилля, Матем. сб. **25** (67) : 3 (1949), 451—454.

78. Новый вариант обратной задачи Штурма — Лиувилля на конечном интервале. Докл. АН СССР **109**, 1 (1956), 40—43.

Левитан Борис Моисеевич

Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения

Редактор *М. Л. Смолянский*

Техн. редактор *Е. А. Ермакова*

Корректор *С. Н. Емельянова*

Сдано в набор 18/X 1961 г. Подписано к печати 23/I 1962 г. Бумага $84\times108^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 10,125. Условн. печ. л. 16,61. Уч.-изд. л. 15,14. Тираж 6200 экз. Т-00924. Цена книги 96 коп. Заказ № 2907.

Государственное издательство физико-математической литературы. Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза. Ленинград, Измайловский пр., 29.

Отпечатано с матриц типографии № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза в тип. им. Котлякова Госфиниздата СССР. Ленинград, Садовая, 21. Заказ 357.

95 к.