СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Серия выпускается под общим руководством редакционной коллегии журнала «Успехи математических наук»

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

С. Г. КРЕЙН

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

К 79
УДК 517.94

Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, Крейн С. Г.

В книге излагается теория линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченными операторными коэффициентами. Основы этой теории были заложены в конце сороковых — начале пятидесятых годов в работах Хилле, Иосида, Филлипса, Като и др. За последние 10—15 лет она превратилась в большую самостоятельную область исследования. Значительный вклад в ее развитие был сделан советскими учеными.

В книге исследуются корректно поставленные задачи для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве и некоторые асимптотические и приближенные методы их решения. Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений в нее не включены.

Для понимания книги нужно знание основных положений теории операторов, которые изложены без доказательства во введении. Результаты теории сильно непрерывных полугрупп операторов, лежащие в основе всей книги, как правило, приводятся с полными доказательствами, причем в терминах, связанных с дифференциальными уравнениями.

Одной из движущих сил при исследовании дифференциальных уравнений в банаховых пространствах является теория уравнений с частными производными, дающая наиболее естественные примеры уравнений с неограниченными операторами. Такие примеры изложены в иллюстративной форме в § 8 гл. I. В книге иллюстраций 10, библ. назв. 269.

Селим Григорьевич Крейн

Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве
(Серия: «Современные проблемы математики»)
М., 1967 г., 464 стр. с илл.

Редактор *О. И. Прозоровская*

Техн. редактор *А. П. Колесникова* Корректоры *Е. А. Белицкая, Ю. И. Зварич*

Сдано в набор 14/VII 1967 г. Подписано к печати 24/XI 1967 г. Бумага $84\times108/_{32}$, Физ. печ. л. 14,5. Условн. печ. л. 24,36. Уч.-изд. л. 24,26. Тираж 10000 экз. Т-16016. Цена книги 1 р. 66 к. Заказ № 799

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.

2-2-3
100-67

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена теории линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченными операторными коэффициентами. Начало этой теории положено работами Хилле и Иосида (1948), в которых были получены первые теоремы существования решений задачи Коши для уравнения $x' = Ax$ с неограниченным оператором A в банаховом пространстве, сформулированные в терминах теории полугрупп операторов. Иосида, а позднее Феллер, связали эти исследования полугрупп с различными задачами для уравнения диффузии. Параллельно с этим Хилле, а затем Филлипс, начинают строить теорию абстрактной задачи Коши для уравнений в банаховом пространстве. В 1953—1954 гг. Лакс, Мильграм и Лянце применяют полугрупповые методы к исследованию различных классов параболических уравнений. Существенный шаг вперед в общей теории был сделан в работе Като (1953), где была получена теорема существования решения задачи Коши для уравнения $x' = A(t)x$ с переменным неограниченным оператором $A(t)$. В указанных работах Хилле, Иосида, Филлипса и Като были заложены основы теории дифференциальных уравнений с неограниченными операторами, которая после этого становится самостоятельной областью исследования, привлекающей внимание многих математиков.

В книге излагается ряд фундаментальных результатов теории сильно непрерывных полугрупп операторов, однако большинство из них формулируется в терминах свойств дифференциальных уравнений. Поэтому они приводятся с полными доказательствами, и книгу можно читать независимо от книги «Функциональный анализ и полугруппы» Хилле и Филлипса. Для понимания материала нужно лишь знание основных положений теории операторов, которые изложены без доказательства во введении.

В книге рассматриваются только сильные решения дифференциальных уравнений, поэтому в ней почти не затрагиваются результаты, полученные в работах Вишика, Ладыженской, а затем Лионса *и др. по теории слабых и обобщенных решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Эти вопросы в значительной степени отражены в книге Лионса [7].*

В книге исследуются корректно поставленные задачи для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве и некоторые асимптотические и приближенные методы их решения. Ограниченный объем книги не позволил включить в нее вопросы качественного исследования таких свойств решений, как выпуклость, быстрота убывания, устойчивость, стабилизация, асимптотика и т. п. В связи с этим вне поля зрения остался ряд интересных результатов в этой области. В частности, не нашли отражения такие большие исследования, как работы Агмона и Ниренберга [168], Евграфова [128]. Лишь частично освещена работа Любича [38]. Все известные автору работы этого цикла помещены в списке работ, непосредственно примыкающих по содержанию к материалу, изложенному в книге.

На содержании книги существенно отразилась работа семинара по дифференциальным уравнениям при Воронежском университете, которым автор руководит уже свыше десяти лет. При изложении особое внимание уделяется результатам, полученным участниками семинара: М. А. Красносельским, П. Е. Соболевским, Ю. Л. Далецким, О. М. Козловым, Б. С. Митягиным, О. И. Прозоровской, Я. Д. Мамедовым, Л. И. Якут, Г. И. Лаптевым, Н. Н. Гудовичем.

Результаты, изложенные в книге, не всегда формулируются в самом общем виде. Автор пытался избрать некий средний уровень общности, до которого ему приходилось некоторые результаты опускать, а некоторые подтягивать. Возникающие при этом потери возмещаются в замечаниях и литературных указаниях в конце книги.

Автор будет огорчен, если читатель, просмотрев книгу, не убедится в том, что дифференциальные уравнения в банаховом пространстве являются интересным и важным объектом исследования. Сам автор в этом убежден и в связи с этим возможные применения теории описаны схематично и иллюстративно. Для развернутого изложения их нужна, по-видимому, еще одна книга.

Автор выражает благодарность всем участникам семинара по дифференциальным уравнениям при Воронежском университете, обсуждавшим в разное время различные части книги. Особенно плодотворными были дискуссии с Ю. Л. Далецким, П. Е. Соболевским, С. Д. Эйдельманом, С. Я. Якубовым.

Автор благодарен редактору книги О. И. Прозоровской, замечания и предложения которой значительно улучшили качество изложения.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая книга посвящена изучению ряда вопросов теории линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. При изложении мы предполагаем, что читатель знаком с основами функционального анализа в объеме университетского курса. Однако, чтобы облегчить чтение книги, мы излагаем во введении, в основном без доказательства, те положения теории банаховых пространств, теории функций со значениями в этих пространствах, теории операторов в банаховых и гильбертовых пространствах, которые затем используются в основном тексте. При этом мы не стремимся к максимальной общности формулировок.

§ 1. Банахово пространство, функционалы

1. Банахово пространство. Линейная система E называется *линейным нормированным пространством*, если каждому элементу $x \in E$ поставлено в соответствие вещественное число $\|x\| \geqslant 0$, называемое *нормой* элемента x, обладающее свойствами: 1) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$; 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$; 3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Число $\|x - y\|$ называется расстоянием между элементами x и y и обладает свойствами метрики. В связи с этим говорят, что последовательность $x_n \in E$ сходится к элементу $x \in E : x_n \to x$, если $\|x - x_n\| \underset{n \to \infty}{\to} 0$. Соответственно вводятся понятия предельных точек множеств, замкнутых, открытых, компактных множеств из E.

Последовательность $x_n \in E$ называется фундаментальной, если $\|x_n - x_m\| \to 0$, когда $n, m \to \infty$. Сходящаяся последовательность является фундаментальной. Если всякая фундаментальная последовательность в пространстве E сходится, то пространство называется *полным*. Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым*.

Всякое линейное нормированное пространство может быть пополнено до банахова пространства.

Замкнутое линейное многообразие $\mathscr{L}$ банахова пространства E называется его *подпространством*. Всякое подпространство само является банаховым пространством. Говорят, что пространство E разложено в прямую сумму подпространств $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}: E=\mathscr{L}\dot{+}\mathscr{M}$, если любой элемент $x\in E$ представим единственным образом в виде $x=y+z$, где $y\in\mathscr{L}$ и $z\in\mathscr{M}$.

Пусть $\mathscr{L}$ — подпространство банахова пространства E. Классом смежности по подпространству $\mathscr{L}$ называется совокупность X элементов вида $x+u$, где x — фиксированный элемент из E, а u — произвольный элемент из $\mathscr{L}$. Классы смежности образуют линейное пространство $E/\mathscr{L}$ при естественном введении операций сложения и умножения на скаляр этих классов. Полученное пространство называется *фактор-пространством* $E/\mathscr{L}$ пространства E по подпространству $\mathscr{L}$. В фактор-пространстве может быть введена естественная норма по формуле

$$\|X\|=\inf_{u\in\mathscr{L}}\|x+u\|.$$

Оказывается, что в этой норме фактор-пространство $E/\mathscr{L}$ является банаховым пространством.

2. Линейные функционалы. Функционал $f(x)$, определенный на банаховом пространстве E, называется *линейным*, если он аддитивен, однороден и для него справедливо неравенство

$$|f(x)|\leqslant c\|x\| \qquad (x\in E), \tag{1.1}$$

где константа c не зависит от x. Наименьшая возможная константа в неравенстве (1.1) называется нормой линейного функционала и обозначается через $\|f\|$. Имеет место формула

$$\|f\|=\sup_{x\in E}\frac{|f(x)|}{\|x\|}=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|. \tag{1.2}$$

Линейный функционал непрерывен, и наоборот, аддитивный непрерывный функционал — линеен. Если на плотном в E линейном многообразии $\mathscr{D}$ определен аддитивный однородный функционал $f(x)$, обладающий свойством (1.1) для всех $x \in \mathscr{D}$, то он на $\mathscr{D}$ равномерно непрерывен и, следовательно, допускает единственное расширение до непрерывного (линейного) функционала, определенного на всем пространстве E.

В банаховом пространстве E имеется достаточно много линейных функционалов. Точнее, для всякого элемента $x_0 \in E$ найдется линейный функционал $f_0(x)$ такой, что $\|f_0\| = 1$ и $f_0(x_0) = \|x_0\|$. Отсюда вытекает формула, двойственная (1.2):

$$\|x\| = \max_{\|f\|=1} |f(x)| = \max \frac{|f(x)|}{\|f\|}, \tag{1.3}$$

где в последнем члене max берется по всем линейным функционалам, определенным на E.

Имеет место следующее важное утверждение:

Теорема Хана — Банаха. *Если $\varphi(x)$ — линейный функционал, определенный на подпространстве $\mathscr{L}$ банахова пространства E, то он может быть расширен с сохранением нормы на все пространство E.*

Над линейными функционалами естественным образом определяются действия сложения и умножения на скаляр: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Таким образом, все линейные функционалы на E образуют линейное нормированное пространство с нормой (1.2). Это пространство полно, т. е. является банаховым, и называется *сопряженным пространством* E^* к пространству E.

Пространство, сопряженное к пространству E^*, называется вторым сопряженным к пространству E и обозначается E^{**}. Каждый элемент $x \in E$ порождает линейный функционал F_x на пространстве E^* по формуле $F_x(f) = f(x)$. Из равенства (1.3) вытекает, что норма функционала F_x на E^* равна норме элемента x. Таким образом, пространство E изометрически и линейно отображается в пространство E^{**}. Если при этом образ E совпадает со всем пространством E^{**}, то пространство E называется *рефлексивным*.

3. Принцип равномерной ограниченности. Пусть на банаховом пространстве E определено семейство непрерывных функционалов $\Phi_\alpha(x)$ $(\alpha \in \mathfrak{A})$, обладающих свойствами:

1) $\Phi_\alpha(x) \geqslant 0$;
2) $\Phi_\alpha(x+y) \leqslant \Phi_\alpha(x) + \Phi_\alpha(y)$;
3) $\Phi_\alpha(\lambda x) = \lambda \Phi_\alpha(x)$ при $\lambda \geqslant 0$.

Принцип равномерной ограниченности утверждает следующее: *если семейство* $\Phi_\alpha(x)$ *равномерно ограничено на каждом элементе* $x \in E$, *то существует такая константа* c, *что*

$$\Phi_\alpha(x) \leqslant c \| x \| \qquad (\alpha \in \mathfrak{A},\ x \in E).$$

В качестве примера функционала, удовлетворяющего условиям 1) — 3), можно рассмотреть модуль линейного функционала: $\Phi(x) = |f(x)|$. Из принципа равномерной ограниченности тогда получается утверждение: если семейство линейных функционалов $|f_\alpha(x)|$ равномерно по α ограничено при каждом фиксированном $x \in E$, то семейство норм $\| f_\alpha \|$ равномерно ограничено.

§ 2. Функции со значениями в банаховом пространстве

1. Непрерывность, дифференцируемость, аналитичность. Мы будем рассматривать функции $x(t)$, определенные на отрезке $[0, T]$ вещественной оси, значения которых при каждом t являются элементами банахова пространства E. Функция $x(t)$ называется *непрерывной* в точке t_0, если

$$\| x(t) - x(t_0) \| \to 0$$

при $t \to t_0$, и непрерывной на $[0, T]$, если она непрерывна в каждой точке отрезка $[0, T]$. Норма непрерывной на $[0, T]$ функции есть скалярная непрерывная функция.

Множество всех непрерывных на $[0, T]$ функций со значениями в E, очевидно, образует линейное пространство, которое обозначается через $C(E; [0, T])$. В этом пространстве обычно вводится норма по формуле

$$\| x \|_{C(E;\ [0, T])} = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \| x(t) \|_E. \tag{2.1}$$

В этой норме пространство $C(E; [0, T])$ является банаховым. Сходимость по норме (2.1) означает равномерную на $[0, T]$ сходимость.

Говорят, что функция $x(t)$ имеет в точке t_0 правую (левую) производную, если существует элемент $y \in E$ такой, что

$$\left\| \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} - y \right\| \to 0$$

при $\Delta t \to +0$ $(\Delta t \to -0)$. При этом пишут

$$\frac{d_+x(t_0)}{dt} = y \quad \left(\frac{d_-x(t_0)}{dt} = y\right).$$

Если правая и левая производные существуют и совпадают, то говорят, что функция $x(t)$ *дифференцируема* в точке t_0 и ее производная

$$x'(t_0) = \frac{dx(t_0)}{dt} = y.$$

Функция дифференцируема на отрезке (интервале, полуинтервале), если она дифференцируема в каждой точке отрезка (интервала, полуинтервала). В этом случае производная $x'(t)$ также является функцией со значениями в банаховом пространстве. Если она непрерывна, то говорят, что функция $x(t)$ непрерывно дифференцируема. Если правая производная непрерывной функции $x(t)$ существует в каждой точке отрезка $[0, T]$ и непрерывна на нем, то функция $x(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$.

Естественным образом вводятся понятия n раз дифференцируемой и бесконечно дифференцируемой функции. Теоремы анализа о дифференцировании равномерно сходящихся последовательностей функций остаются в силе.

Мы будем также рассматривать функции $x(z)$, определенные в некоторой области G комплексной плоскости, принимающие значения в пространстве E. Элемент x_0' называется *производной* функции $x(z)$ в точке z_0, если

$$\left\| \frac{x(z_0 + \Delta z) - x(z_0)}{\Delta z} - x_0' \right\| \to 0$$

при $\Delta z \to 0$. Функция $x(z)$ называется *аналитической* в области G, если она имеет в каждой точке этой области производную. Аналитическая функция в окрестности каждой точки $z_0 \in G$ разлагается в ряд

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{2.2}$$

где a_n — элементы пространства E, равные $\frac{1}{n!} x^{(n)}(z_0)$. Обратно, всякий степенной ряд вида (2.2) определяет аналитическую функцию внутри круга сходимости, радиус r которого находится из формулы Коши — Адамара

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|a_n\|}.$$

Если $x(z)$ аналитична в G, то при любом линейном функционале f скалярная функция $f(x(z))$ аналитична в G. Справедливо и обратное утверждение. Это обстоятельство позволяет получать свойства аналитических функций со значениями в E из свойств скалярных аналитических функций. Например, справедлива теорема Лиувилля: если функция $x(z)$ аналитична во всей плоскости (целая функция) и ограничена, то она константа.

Отметим, что норма $\|x(z)\|$ аналитической в G функции $x(z)$ является логарифмически субгармонической функцией в G. Действительно, этим свойством обладает модуль $|f(x(z))|$ аналитической функции $f(x(z))$, а значит, и функция

$$\|x(z)\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x(z))|.$$

2. Интегрирование. Если функция $x(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для нее можно определить интеграл как предел интегральных сумм:

$$\lim \sum_{k=1}^{N} x(t_k)\,\Delta t_k = \int_a^b x(t)\,dt. \qquad (2.3)$$

Здесь предел понимается в смысле сходимости по норме пространства E, когда диаметр разбиения $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ стремится к нулю.

Справедлива оценка

$$\left\| \int_a^b x(t)\,dt \right\| \leqslant \int_a^b \|x(t)\|\,dt$$

и теорема о среднем:

$$\int_a^b x(t)\,dt = (b-a)\,\overline{x},$$

где $\bar{x}$ — элемент замкнутой выпуклой оболочки множества значений функции $x(t)$ на отрезке $[a, b]$.

Функция

$$y(t) = \int_a^t x(\tau)\,d\tau$$

является непрерывно дифференцируемой и $y'(t) = x(t)$. Для любой непрерывно дифференцируемой функции справедлива формула Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b y'(t)\,dt = y(b) - y(a).$$

Так же как и в классическом анализе, вводится понятие несобственного интеграла. Например, если функция $x(t)$ непрерывна на $[a, \infty)$, то под ее интегралом на $[a, \infty)$ понимают

$$\int_a^\infty x(t)\,dt = \lim_{b \to \infty} \int_a^b x(t)\,dt. \tag{2.4}$$

Если предел по норме пространства E существует, то говорят, что интеграл (2.4) сходится. Этот интеграл абсолютно сходится, если

$$\int_a^\infty \|x(t)\|\,dt < \infty.$$

Из абсолютной сходимости интеграла следует обычная сходимость.

Аналогично вводятся понятия несобственного интеграла от разрывной функции и главного значения различных несобственных интегралов.

Можно рассмотреть интегралы, зависящие от параметра. На них переносятся классические теоремы о непрерывной зависимости от параметра, об интегрировании и дифференцировании по параметру.

В настоящей книге мы обходимся понятиями интегралов от непрерывной функции и несобственных интегралов. Напомним, что наиболее употребительным обобщением интеграла Лебега является интеграл Бохнера от функции со значениями в банаховом пространстве, теория которого изложена, например, в [1].

3. Интеграл Коши. Аналогично тому, как введен интеграл (2.3), определяется интеграл от непрерывной функции, заданной в области G комплексной плоскости, по спрямляемой жордановой кривой, лежащей в этой области. Для аналитической в области G функции остается справедливой интегральная теорема Коши и вытекающая из нее интегральная формула Коши:

$$x(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{x(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta,$$

где Γ — замкнутая спрямляемая жорданова кривая, ограничивающая область $G_1 \subset G$ и $z \in G_1$.

Для производных функции $x(z)$ справедливы формулы

$$x^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{x(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta.$$

4. Преобразование Лапласа. Пусть $x(t)$ — непрерывная на $[0, \infty)$ функция со значениями в E, удовлетворяющая условию

$$\| x(t) \| \leqslant M e^{\omega t}.$$

Тогда при $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ абсолютно сходится интеграл

$$\tilde{x}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} x(t) \, dt. \tag{2.5}$$

Аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ функция $\tilde{x}(\lambda)$ со значениями в E называется *преобразованием Лапласа* от функции $x(t)$.

Иногда мы будем применять преобразование Лапласа к функциям, имеющим особенность в нуле. В этом случае интеграл (2.5) понимается как несобственный и по отношению к точке 0.

Если преобразование Лапласа от некоторой функции $x(t)$ равно нулю, то $x(t) \equiv 0$.

При $t > 0$ имеет место следующая формула обращения:

$$x(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\tilde{x}(\lambda)}{\lambda} e^{\lambda t}\, d\lambda\right), \tag{2.6}$$

где $\alpha > \max(\omega, 0)$ и интеграл понимается в смысле главного значения.

Если функция $x(t)$ — абсолютно непрерывна или, в частности, непрерывно дифференцируема на некотором отрезке $[t_1, t_2]$ $(t_1 > 0)$, то формулу (2.6) можно упростить:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \tilde{x}(\lambda) e^{\lambda t}\, d\lambda \qquad (\alpha > \omega,\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2).$$

§ 3. Ограниченные линейные операторы

1. Ограниченные операторы. Оператор A, определенный на линейном многообразии банахова пространства E, действующий в другое банахово пространство F, называется *линейным*, если он аддитивен и однороден. Линейное многообразие, на котором определен оператор, называется его *областью определения* $\mathscr{D}(A)$, а совокупность элементов вида Ax $(x \in \mathscr{D}(A))$ — его *областью значений* $\mathfrak{R}(A)$.

Если $\mathscr{D}(A) = E$ и при всех $x \in E$ выполнено неравенство

$$\| Ax \|_F \leqslant c \| x \|_E, \tag{3.1}$$

то оператор называется *ограниченным*, а наименьшее значение константы c — нормой $\| A \|_{E \to F}$ оператора A. Ограниченный оператор — непрерывен. Обратно, определенный на всем пространстве E непрерывный линейный оператор — ограничен. Если $\mathscr{D}(A)$ плотно в E и для всех элементов из $\mathscr{D}(A)$ выполнено (3.1), то оператор A может быть по непрерывности расширен до ограниченного оператора.

Линейный оператор называется *вполне непрерывным*, если он определен на всем пространстве E и отображает каждое ограниченное в E множество в компактное множество в F. Очевидно, что вполне непрерывный оператор — ограничен.

Если A — линейный ограниченный оператор, то функционал $\Phi(x) = \| Ax \|_F$ обладает теми свойствами, которые требовались от функционалов в принципе равномерной ограниченности. Поэтому если семейство линейных ограниченных операторов A_α равномерно ограничено на каждом элементе x пространства E, то нормы операторов A_α равномерно ограничены.

При естественном определении сложения и умножения на скаляр и норме

$$\| A \|_{E \to F} = \sup_{x \in E} \frac{\| Ax \|_F}{\| x \|_E}$$

совокупность $\mathscr{L}(E, F)$ линейных ограниченных операторов, действующих из E в F, становится банаховым пространством.

В пространстве $\mathscr{L}(E, F)$ весьма важным является понятие сильной сходимости: говорят, что последовательность линейных ограниченных операторов A_n *сильно сходится* к оператору A, если при любом $x \in E$

$$\| Ax - A_n x \|_F \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Предельный оператор A, очевидно, линеен. С помощью принципа равномерной ограниченности показывается, что он также ограничен.

Из сходимости последовательности операторов по норме пространства $\mathscr{L}(E, F)$, конечно, следует ее сильная сходимость. Обратное утверждение неверно.

Важным является следующее утверждение:

Теорема Банаха — Штейнгауза. *Для того чтобы последовательность линейных ограниченных операторов A_n сильно сходилась, необходимо и достаточно, чтобы нормы операторов A_n были равномерно ограничены, и чтобы последовательности $A_n x$ были сходящимися при всех x из некоторого плотного в E множества.*

В дальнейшем часто используется следующий просто доказываемый факт:

Лемма 3.1. *Если последовательность линейных ограниченных операторов A_n сильно сходится к оператору A, то она равномерно сходится к нему на каждом компактном множестве пространства E.*

Пусть f — линейный функционал на пространстве F и $A \in \mathscr{L}(E, F)$. Рассмотрим определенный на пространстве E функционал

$$g(x) = f(Ax).$$

Нетрудно проверить, что он линеен. Таким образом, каждому функционалу $f \in F^*$ ставится в соответствие функционал $g \in E^*$. Это соответствие линейное. Оператор, осуществляющий соответствие $f \to g$, называется *сопряженным оператором* A^* к оператору A. По определению,

$$(A^*f)(x) = f(Ax).$$

Оператор A^* является ограниченным линейным оператором, действующим из F^* в E^*. Его норма равна норме исходного оператора A.

2. Операторы, зависящие от параметра. Функцию $A(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ со значениями в пространстве ограниченных линейных операторов $\mathscr{L}(E, F)$ будем называть оператором, зависящим от параметра. Так как $\mathscr{L}(E, F)$ является банаховым пространством, то на оператор, зависящий от параметра, переносятся понятия непрерывности, дифференцируемости и аналитичности, рассмотренные в предыдущем параграфе.

Однако в дальнейшем нам понадобятся все эти понятия в смысле сильной сходимости операторов. Ограниченный линейный оператор $A(t)$ называется *сильно непрерывным* (в точке, на отрезке), если при каждом $x \in E$ функция $A(t)x$ со значениями в F непрерывна (в точке, на отрезке).

Если оператор $A(t)$ непрерывен по норме, то он и сильно непрерывен. Обратное утверждение неверно. Из теоремы Банаха — Штейнгауза вытекает, что сильно непрерывный на отрезке $[0, T]$ оператор $A(t)$ равномерно ограничен: $\|A(t)\|_{E \to F} \leqslant c$. В силу этого сильно непрерывный на $[0, T]$ оператор можно рассматривать как ограниченный линейный оператор, отображающий пространство E в пространство непрерывных функций $C(F; [0, T])$.

Непосредственно проверяются следующие утверждения:

Лемма 3.2. *Если $x(t)$ — непрерывная на $[0, T]$ функция со значениями в E, а $A(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ — сильно непрерывный оператор из E в F, то функция $A(t)x(t)$ непрерывна в F.*

Лемма 3.3. *Если $A(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ — сильно непрерывный оператор из E в F, а $B(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ — сильно непрерывный оператор из F в H, то $B(t)A(t)$ — сильно непрерывный оператор из E в H.*

Пусть дана последовательность сильно непрерывных операторов $A_n(t)$. Говорят, что она *сильно и равномерно по*

$t \in [0, T]$ *сходится*, если при каждом $x \in E$ последовательность функций $A_n(t)x$ со значениями в F равномерно на $[0, T]$ сходится. В этом случае последовательность $A_n(t)$ равномерно ограничена по n и t. Применение леммы 3.1 к пространствам E и $C(F; [0, T])$ приводит к утверждению:

Лемма 3.4. *Если последовательность операторов $A_n(t)$ сильно и равномерно по $t \in [0, T]$ сходится, то последовательность функций $A_n(t)x$, где x пробегает компактное в E множество Q, сходится равномерно по $t \in [0, T]$ и $x \in Q$. В частности, если $x(t)$ — непрерывная в E функция, то последовательность $A_n(t)x(t)$ сходится в F равномерно на* $[0, T]$.

Линейный ограниченный оператор $A(t)$ называется *сильно непрерывно дифференцируемым по* t, если при каждом $x \in E$ функция $A(t)x$ является непрерывно дифференцируемой в F. Формула

$$A'(t)x = (A(t)x)'$$

определяет тогда сильно непрерывный оператор $A'(t)$, действующий из E в F.

Если оператор $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем, то последовательность операторов $\frac{1}{\Delta t}[A(t+\Delta t) - A(t)]$ сильно и равномерно по t сходится к оператору $A'(t)$. Поэтому она ограничена равномерно по t и Δt. Таким образом, справедлива

Лемма 3.5. *Если оператор $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем, то он непрерывен по норме пространства линейных ограниченных операторов и, более того, он удовлетворяет условию Липшица:*

$$\|A(t+\Delta t) - A(t)\|_{E\to F} \leqslant c|\Delta t|.$$

Элементарно доказывается

Лемма 3.6. *Если функция $x(t)$ непрерывно дифференцируема в E и оператор $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем, то функция $A(t)x(t)$ со значениями в F непрерывно дифференцируема и*

$$[A(t)x(t)]' = A'(t)x(t) + A(t)x'(t).$$

Аналогично формулируется предложение о производной произведения двух сильно непрерывно дифференцируемых операторов.

Для определения оператора $A(z)$, аналитически зависящего от параметра z, пробегающего область комплексной плоскости, имеются две возможности: требовать существования производной по z либо в смысле сходимости по норме пространства $\mathscr{L}(E, F)$, либо в смысле сильной сходимости. Оказывается, что оба определения эквивалентны. Итак, оператор аналитически зависит от z, если при каждом $x \in E$ функция $A(z)x$ аналитична. При этом операторы $\frac{1}{\Delta z}\left[A(z+\Delta z) - A(z)\right]$ стремятся к оператору $A'(z)$ по норме операторов.

Исследуем теперь, как гладкость оператора $A(t)$ сказывается на гладкости обратного оператора. Пусть при $t = t_0$ оператор $A(t)$ непрерывен по норме и имеет ограниченный обратный $A^{-1}(t_0)$. Рассмотрим тождество

$$A(t_0 + \Delta t) = A(t_0)\left[I - A^{-1}(t_0)\left(A(t_0) - A(t_0 + \Delta t)\right)\right]. \qquad (3.2)$$

Оператор $A^{-1}(t_0)(A(t_0) - A(t_0 + \Delta t))$ является ограниченным оператором, действующим из E в E, с нормой, стремящейся к нулю при $\Delta t \to 0$. Если Δt таково, что $\| A^{-1}(t_0) \times$ $\times [A(t_0) - A(t_0 + \Delta t)] \|_{E \to E} \leqslant q < 1$, то оператор $A(t_0 + \Delta t)$ имеет ограниченный обратный, задающийся разложением

$$A^{-1}(t_0 + \Delta t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A^{-1}(t_0)\left(A(t_0) - A(t_0 + \Delta t)\right)\right]^n A^{-1}(t_0).$$

Из этого разложения вытекает оценка

$$\| A^{-1}(t_0 + \Delta t) - A^{-1}(t_0) \|_{F \to E} \leqslant \frac{q}{1-q} \| A^{-1}(t_0) \|_{F \to E}.$$

Таким образом, справедлива

Лемма 3.7. *Если оператор $A(t)$ непрерывен по норме в точке t_0 и имеет ограниченный обратный оператор, то при t из достаточно малой окрестности точки t_0 существует ограниченный обратный оператор $A^{-1}(t)$, который непрерывен в точке t_0. Если оператор $A(t)$ непрерывен по норме на $[0, T]$ и имеет при всех $t \in [0, T]$*

ограниченный обратный $A^{-1}(t)$, то этот обратный непрерывен по норме на $[0, T]$.

Пусть теперь оператор $A(t)$ сильно непрерывен и имеет ограниченный обратный. При любом $y \in F$ справедливо тождество

$$[A^{-1}(t+\Delta t) - A^{-1}(t)]\, y = \\ = A^{-1}(t+\Delta t)\,[A(t) - A(t+\Delta t)]\, A^{-1}(t)\, y. \quad (3.3)$$

Из сильной непрерывности $A(t)$ следует, что на элементе $A^{-1}(t)\, y \in E$ операторы $A(t) - A(t+\Delta t)$ стремятся к нулю при $\Delta t \to 0$, поэтому если оператор $A^{-1}(t+\Delta t)$ равномерно по Δt ограничен, то и вся правая часть будет стремиться к нулю. Мы пришли к следующему утверждению:

Лемма 3.8. *Если оператор $A(t)$ сильно непрерывен на $[0, T]$ и имеет равномерно по $t \in [0, T]$ ограниченный обратный оператор $A^{-1}(t)$, то оператор $A^{-1}(t)$ сильно непрерывен на $[0, T]$. Если при этих же условиях оператор $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем, то оператор $A^{-1}(t)$ также сильно непрерывно дифференцируем и справедлива формула*

$$[A^{-1}(t)]' = -A^{-1}(t)\, A'(t)\, A^{-1}(t).$$

После того как первое утверждение леммы доказано, второе получается из (3.3) делением на Δt и переходом к пределу при $\Delta t \to 0$. Аналогичные факты справедливы и для операторов, зависящих от комплексного параметра z, с заменой дифференцируемости на аналитичность.

3. Алгебра операторов, действующих в одном пространстве. Резольвента и спектр. Рассмотрим теперь пространство $\mathscr{L}(E, E)$ всех ограниченных линейных операторов, действующих из E в E. В этом множестве естественным образом определено умножение операторов:

$$(AB)x = A(Bx).$$

Таким образом, множество $\mathscr{L}(E,E)$ представляет собой некоммутативную банахову алгебру. В этой алгебре особую роль играют ее идемпотенты, т. е. операторы, квадрат которых равен им самим, $P^2 = P$. Такие операторы называются *проекционными*.

В алгебре $\mathscr{L}(E,E)$ естественным образом строятся многочлены от оператора A. Это позволяет с помощью различных предельных переходов определять и другие функции от оператора A. Так, если $F(z)$ — целая функция комплексного переменного z, то

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{3.4}$$

и тогда полагают

$$F(A)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n. \tag{3.5}$$

Ряд (3.4) сходится всюду, поэтому ряд (3.5) сходится по норме пространства $\mathscr{L}(E,E)$ при любом линейном ограниченном операторе A.

Для нас особую роль будет играть функция e^{tA}, определяемая рядом

$$e^{tA}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n.$$

Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет основному функциональному соотношению для показательной функции

$$e^{(t+\tau)A}=e^{tA}\cdot e^{\tau A}.$$

Оператор e^{tA} дифференцируем по параметру t в смысле нормы операторов и

$$\frac{d}{dt}(e^{tA})=Ae^{tA}.$$

Оператор e^{zA} является целой аналитической функцией параметра z.

Если рассмотреть дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=Ax$$

с линейным ограниченным оператором A, то его решение, удовлетворяющее начальному условию $x(0)=x_0$, задается формулой $x(t)=e^{tA}x_0$. В силу сказанного выше все решения являются целыми функциями параметра t.

Одной из важнейших функций от оператора является его резольвента. Если при заданном комплексном λ существует ограниченный обратный оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ (I — тождественный оператор), то число λ называется *регулярной точкой оператора* A, а оператор $R_A(\lambda)=(A-\lambda I)^{-1}$ — *резольвентой оператора* A. Регулярные точки оператора A образуют открытое множество комплексной плоскости, его замкнутое дополнение называется *спектром оператора* A. Спектр линейного ограниченного оператора всегда не пуст.

Если $|\lambda|>\|A\|$, то резольвента $R_A(\lambda)$ существует; ее можно определить с помощью разложения

$$R_A(\lambda)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{n+1}}A^n. \tag{3.6}$$

Этот ряд будет абсолютно сходиться, так как $\left\|\frac{1}{\lambda^n}A^n\right\|\leqslant\leqslant\left(\frac{\|A\|}{|\lambda|}\right)^n$. Однако ряд (3.6) может сходиться и в более широкой области, а именно, он сходится вне круга радиуса

$$r_A=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Число $r_A\leqslant\|A\|$ и называется *спектральным радиусом* оператора A. Круг $|\lambda|\leqslant r_A$ является наименьшим кругом с центром в начале координат, содержащим спектр оператора A.

Для резольвенты справедливы тождества

$$R_A(\lambda)-R_A(\mu)=(\lambda-\mu)R_A(\lambda)R_A(\mu) \tag{3.7}$$

и

$$R_A(\lambda)-R_B(\lambda)=R_A(\lambda)(B-A)R_B(\lambda). \tag{3.8}$$

Из первого тождества следует, что резольвента в области регулярных точек является аналитической функцией от λ со значениями в пространстве линейных ограниченных операторов $\mathscr{L}(E, E)$.

Пусть $F(z)$ — однозначная аналитическая функция, определенная в области, содержащей спектр оператора A, и Γ — спрямляемый жорданов контур, лежащий в этой области и окружающий спектр оператора A.

Рассмотрим операторный интеграл

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} F(\lambda)\, R_A(\lambda)\, d\lambda.$$

Этот интеграл существует как интеграл от непрерывной функции $F(\lambda)\, R_A(\lambda)$ со значениями в банаховом пространстве $\mathscr{L}(E, E)$ и обладает свойствами интеграла Коши. Значение интеграла не зависит от выбора контура Γ, обладающего описанными свойствами, и представляет собой линейный ограниченный оператор, зависящий от выбора оператора A. Его называют функцией от оператора A:

$$F(A) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} F(\lambda)\, R_A(\lambda)\, d\lambda. \qquad (3.9)$$

Для случая, когда $F(z)$ — целая функция, определение (3.9) совпадает с определением (3.5). Таким образом, операторный интеграл Коши позволяет значительно расширить класс естественно определенных функций от оператора, включив в него алгебру функций, голоморфных в окрестностях спектра оператора A. Существенным является то, что построенное соответствие между алгеброй скалярных функций и множеством операторов является гомоморфизмом. Очевидно, что сложению функций и умножению на скаляр отвечает сложение и умножение на тот же скаляр операторов (3.9). С помощью тождества (3.7) проверяется, что

$$F(A)\,\Phi(A) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} F(\lambda)\,\Phi(\lambda)\, R_A(\lambda)\, d\lambda.$$

§ 4. Неограниченные операторы

1. Замкнутый оператор. Мы будем теперь рассматривать линейные операторы A, определенные на некотором линейном многообразии $\mathscr{D}(A)$ пространства E, действующие в пространстве E. Оператор A называется *замкнутым*, если из того, что $x_n \to x\ (x_n \in \mathscr{D}(A))$ и $Ax_n \to y$ следует, что $x \in \mathscr{D}(A)$ и $y = Ax$. Ограниченный оператор, очевидно, замкнут. Если оператор A не замкнут, то для того чтобы он имел замкнутое расширение (допускал замыкание), необходимо и достаточно, чтобы из $x_n \to 0\ (x_n \in \mathscr{D}(A))$ и $Ax_n \to y$ следовало, что $y=0$. Наименьшее замкнутое расширение оператора A называется его *замыканием* $\overline{A}$. Если оператор A допускает замыкание, то из $x_n \to x$ $(x_n \in \mathscr{D}(A))$ и $Ax_n \to y$ следует, что $y = \overline{A}x$. Иначе это можно записать так:

$$\overline{A} \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n, \tag{4.1}$$

если оба предела существуют. Применяя это соотношение к таким предельным операциям, как дифференцирование и интегрирование, получим

$$\overline{A}\,\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(Ax), \tag{4.2}$$

если обе производные существуют;

$$\overline{A} \int x(t)\,dt = \int Ax(t)\,dt, \tag{4.3}$$

если существуют оба интеграла. Для замкнутого оператора черту над оператором A в равенствах (4.1) — (4.3) следует убрать.

Существенным является тот факт, что *замкнутый оператор, определенный во всем пространстве, — ограничен.*

Если для линейного оператора из $Ax=0$ следует $x=0$, то он имеет на своей области значений $\mathscr{R}(A)$ обратный оператор A^{-1}, т. е. оператор, отображающий $\mathscr{R}(A)$ на $\mathscr{D}(A)$ и обладающий тем свойством, что $A^{-1}Ax = x\,(x \in \mathscr{D}(A))$ и $AA^{-1}y = y$ $(y \in \mathscr{R}(A))$. Если оператор A замкнут и имеет обратный A^{-1}, то A^{-1} — замкнут. Мы говорим, что оператор A имеет ограниченный обратный, если оператор A^{-1} определен во всем пространстве ($\mathscr{R}(A) = E$) и ограничен. Если оператор A имеет ограниченный обратный, то A — замкнут.

2. Резольвента, спектр. Очевидно, вместе с оператором A замкнут или незамкнут оператор $A - \lambda I$ (с областью определения $\mathscr{D}(A)$), поэтому если существует ограниченный обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, то оператор A замкнут. Другими словами, если оператор имеет хотя бы одну регулярную точку, то он замкнут.

Замкнутый оператор может не иметь регулярных точек (спектр заполняет всю плоскость) и может не иметь точек спектра (вся плоскость состоит из регулярных точек). Для любого замкнутого множества комплексной плоскости можно построить замкнутый оператор, имеющий в качестве спектра это множество.

Если λ_0 — регулярная точка оператора A и $R_A(\lambda_0)$ — его резольвента, то оператор $AR_A(\lambda_0)$ ограничен. Это следует из тождества

$$AR_A(\lambda_0) = I + \lambda_0 R_A(\lambda_0).$$

Для резольвенты справедливо тождество (3.7). Если операторы A и B имеют разные области определения, то тождество (3.8) теряет смысл. Резольвента — голоморфная функция λ на открытом множестве регулярных точек. Для производных резольвенты справедливы формулы

$$\frac{d^n R_A(\lambda)}{d\lambda^n} = n!\, R_A^{n+1}(\lambda).$$

Пусть $R(\lambda)$—ограниченный линейный оператор, зависящий от параметра λ, пробегающего множество G комплексной плоскости. Для того чтобы оператор $R(\lambda)$ был резольвентой некоторого замкнутого линейного оператора, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество (3.7) для всех λ, $\mu \in G$ и чтобы хотя бы при одном $\lambda_0 \in G$ существовал обратный оператор $R^{-1}(\lambda_0)$, т. е. чтобы из $R(\lambda_0)x = 0$ следовало $x = 0$. При выполнении указанных условий $R(\lambda) = R_A(\lambda)$, где

$$A = \lambda_0 I + R^{-1}(\lambda_0).$$

3. Расщепление оператора. Предположим, что спектр Λ замкнутого оператора A состоит из двух замкнутых частей Λ_1 и Λ_2, где Λ_1 — ограниченное множество. Пусть Γ_1 — спрямляемый жорданов контур, содержащий внутри себя множество Λ_1. Рассмотрим оператор

$$P_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} R_A(\lambda)\, d\lambda.$$

Этот интеграл можно рассматривать как интеграл вида (3.9), где функция $F(\lambda)$ равна единице в окрестности множества Λ_1 и нулю в окрестности множества Λ_2. Оператор P_1 действительно обладает свойствами этой функции. А именно, оператор P_1 является ограниченным проекционным оператором: $P_1^2 = P_1$. Все пространство E разлагается в прямую сумму двух подпространств: $E = E_1 \dotplus E_2$, где $E_1 = P_1 E$, и $E_2 = (I - P_1) E$. Подпространство E_1 целиком лежит в области определения $\mathscr{D}(A)$ оператора A и является инвариантным относительно A. Спектр суже́ния A_1 оператора A на подпространство E_1 совпадает с множеством Λ_1. Суже́ние A_2 оператора A на множестве $(I - P_1)\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(A_2)$ является замкнутым линейным оператором, действующим в пространстве E_2, спектр которого совпадает с множеством Λ_2. Таким образом, изучение оператора A сводится к изучению ограниченного оператора A_1 в пространстве E_1 и замкнутого оператора A_2 в пространстве E_2.

4. Операторы с плотной областью определения. В дальнейшем мы будем в основном рассматривать замкнутые линейные операторы, область определения которых представляет собой плотное в E множество. Если для такого оператора $\mathscr{D}(A) \neq E$, то он заведомо неограничен. Будем считать, что оператор действует в E.

Если оператор A неограничен, то его положительная степень, вообще говоря, имеет более узкую область определения, чем область определения самого оператора. Так, например, область определения $\mathscr{D}(A^2)$ состоит из тех элементов $x \in \mathscr{D}(A)$, для которых Ax также принадлежит $\mathscr{D}(A)$, и тогда определен элемент $A^2 x = A(Ax)$. Если $\mathscr{D}(A)$ плотно в E и оператор A имеет регулярные точки, то область определения любой его положительной степени плотна в E. Поясним это для квадрата оператора. Резольвента $R_A(\lambda)$ отображает E на $\mathscr{D}(A)$, а $\mathscr{D}(A)$ — на $\mathscr{D}(A^2)$. Далее, ограниченный оператор переводит множество, плотное в области определения, в множество, плотное в области значений, поэтому $\mathscr{D}(A^2)$ плотно в $\mathscr{D}(A)$, а значит, и в E.

Для оператора с плотной в E областью определения однозначно определяется сопряженный оператор. Пусть f — линейный функционал на E. Рассмотрим функционал $f(Ax)$, определенный при $x \in \mathscr{D}(A)$. Может случиться, что этот функционал будет ограниченным на $\mathscr{D}(A)$, и тогда, в силу плотности $\mathscr{D}(A)$, он допускает единственное непрерывное расширение до линейного функционала $g(x)$, определенного на всем пространстве E. В этом случае говорят, что на f определен *сопряженный оператор* A^*, и обозначают $g = A^* f$.

Итак, область определения $\mathscr{D}(A^*)$ сопряженного оператора состоит из всех функционалов $f \in E^*$, для которых

$$|f(Ax)| \leqslant c\|x\|,$$

где c не зависит от x. Функционал A^*f определяется тогда на $\mathscr{D}(A)$ формулой

$$A^*f(x) = f(Ax) \qquad (x \in \mathscr{D}(A)),$$

а на все E расширяется по непрерывности. Сопряженный оператор всегда замкнут. Однако область определения сопряженного оператора может быть не плотной в пространстве E^*. В рефлексивном пространстве E для замкнутого оператора с плотной областью определения область определения сопряженного оператора плотна в E^*.

Спектр сопряженного оператора совпадает со спектром исходного оператора. Резольвента сопряженного оператора является оператором, сопряженным к резольвенте исходного оператора.

§ 5. Операторы в гильбертовом пространстве

1. Гильбертово пространство. *Гильбертовым пространством* H называется банахово пространство, в котором норма порождена скалярным произведением по формуле $\|x\|^2 = (x, x)$. Под *скалярным произведением* понимается функционал (x, y) $(x, y \in H)$, обладающий свойствами: 1) $(x, x) > 0$, если $x \neq 0$; 2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$; 3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$; 4) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$. Справедливо неравенство Буняковского — Шварца:

$$|(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

Два элемента x и z гильбертова пространства называются ортогональными, если $(x, z) = 0$. Элемент z называется ортогональным к подпространству $\mathscr{L}$, если z ортогонален к любому элементу из $\mathscr{L}$. Пусть $\mathscr{L}$ — подпространство H, тогда каждый элемент $x \in H$ можно единственным образом представить в виде $x = y + z$, где $y \in \mathscr{L}$, а z — ортогонален к $\mathscr{L}$. Элемент y называется *проекцией* элемента x на $\mathscr{L}$: $y = P_{\mathscr{L}}x$. Все пространство разлагается в прямую сумму двух взаимно ортогональных подпространств (ортогональная сумма): $H = \mathscr{L} \oplus \mathscr{M}$, где подпространство $\mathscr{M}$ состоит из всех ортогональных к $\mathscr{L}$ элементов.

Справедлива теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве: всякий линейный функционал $f(x)$ на гильбертовом пространстве H единственным образом представим в виде

$$f(x) = (x, u), \tag{5.1}$$

где u — элемент из H. Обратно, всякий функционал вида (5.1) является линейным функционалом в H, причем $\|f\| = \|u\|$. Таким образом устанавливается соответствие между сопряженным пространством H^* и самим пространством H. Однако это соответствие $f \longleftrightarrow u$ не является изоморфизмом, так как $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda(x, u) = (x, \bar{\lambda} u)$, т. е. $\lambda f \longleftrightarrow \bar{\lambda} u$. Для того чтобы избавиться от этого недостатка, часто операцию умножения на скаляр в сопряженном пространстве H^* определяют так: $(\lambda f)(x) = \bar{\lambda} f(x)$. Тогда сопряженное пространство H^* изометрично самому пространству H.

2. Ограниченные операторы. Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Сопряженный к нему оператор A^* будет действовать в самом пространстве H и определяться однозначно формулой

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

В силу нового определения умножения на скаляр функционалов изменяется связь между спектрами операторов A и A^*: спектр сопряженного оператора расположен симметрично относительно вещественной оси по отношению к спектру исходного оператора.

Оператор A называется *самосопряженным*, если $A = A^*$. Спектр самосопряженного оператора представляет собой ограниченное замкнутое множество, лежащее на вещественной оси. Квадратичная форма (Ax, x), отвечающая самосопряженному оператору, принимает лишь вещественные значения. Имеет место равенство

$$\sup_{x \in H} \frac{|(Ax, x)|}{(x, x)} = \|A\|.$$

Точные нижняя и верхняя грани значений величины $\frac{(Ax, x)}{(x, x)}$ совпадают с точными нижней и верхней гранями спектра оператора A.

Самосопряженный оператор A называется *положительным*, если $(Ax, x) > 0$ при $x \neq 0$, и *положительно определенным*, если $(Ax, x) \geqslant k(x, x)$ $(k > 0)$.

Простейшим примером самосопряженного оператора является оператор ортогонального проектирования $P_{\mathscr{L}}$, ставящий в соответствие каждому элементу его проекцию на заданное подпространство $\mathscr{L}$. Операторы ортогонального проектирования характеризуются свойствами: $P^2 = P$ и $P^* = P$. Если $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}_1$, то $P_{\mathscr{L}} P_{\mathscr{L}_1} = P_{\mathscr{L}_1} P_{\mathscr{L}} = P_{\mathscr{L}}$.

Линейный оператор U, действующий в H, называется *изометрическим*, если $\| Ux \| = \| x \|$ $(x \in H)$. Это эквивалентно тому, что $(Ux, Uy) = (x, y)$. Если, кроме того, существует ограниченный обратный оператор U^{-1}, то оператор U называется *унитарным*. Для унитарного оператора $U^* = U^{-1}$. Спектр унитарного оператора лежит на единичной окружности. Унитарные операторы образуют группу относительно умножения.

3. Неограниченные операторы. Пусть A — линейный оператор с плотной в H областью определения $\mathscr{D}(A)$, действующий в H. Тогда для него однозначно определяется сопряженный оператор A^*, заданный формулой $(Ax, y) = (x, A^*y)$ на элементах y, для которых $|(Ax, y)| \leqslant c \| x \|$ при всех $x \in \mathscr{D}(A)$.

Если оператор A допускает замыкание, то оператор A^* имеет также плотную в H область определения $\mathscr{D}(A^*)$. В связи с этим однозначно определен оператор A^{**}, который, как оказывается, совпадает с замыканием оператора A: $A^{**} = \bar{A}$.

Точка λ комплексной плоскости называется точкой регулярного типа для оператора A, если

$$\| (A - \lambda I) x \| \geqslant a \| x \| \qquad (x \in \mathscr{D}(A),\ a > 0).$$

Если λ — точка регулярного типа и оператор A замкнут, то область значений оператора $A - \lambda I$ является подпространством. Ортогональное дополнение к ней называется дефектным подпространством, а размерность его *индексом дефекта* оператора A, отвечающим точке λ. Если индекс дефекта равен нулю, то λ — регулярная точка. Оказывается, что для всякого связного множества регулярных точек индекс дефекта принимает одно и то же значение.

Линейный оператор A с плотной в H областью определения называется *симметрическим*, если

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

для любых $x, y \in \mathscr{D}(A)$. Симметрический оператор всегда допускает замыкание. Сопряженный оператор A^* к симметрическому является расширением самого оператора A. Все невещественные точки плоскости являются точками регулярного типа для симметрического оператора. Точкам, лежащим в верхней полуплоскости, отвечает одно значение индекса дефекта, точкам нижней полуплоскости — другое. Эти два числа называются индексами дефекта симметрического оператора. Если один из индексов дефекта равен нулю, то симметрический оператор называется *максимальным*. Максимальный симметрический оператор не допускает нетривиальных симметрических расширений. Если индексы дефекта симметрического оператора равны нулю, то он является самосопряженным: $A = A^*$. Более подробно это означает, что $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(A^*)$ и $(Ax, y) = (x, Ay)$ при $x, y \in \mathscr{D}(A)$. Для того чтобы симметрический оператор был самосопряженным, достаточно, чтобы он имел хотя бы одну вещественную регулярную точку. Для того чтобы симметрический оператор мог быть расширен в пространстве H до самосопряженного оператора, необходимо и достаточно, чтобы он имел равные дефектные числа.

Спектр самосопряженного неограниченного оператора представляет собой замкнутое неограниченное множество точек вещественной оси. Для резольвенты $R_A(\lambda)$ самосопряженного оператора справедлива оценка

$$\| R_A(\lambda) \| \leqslant \frac{1}{d},$$

где d — расстояние от точки λ до спектра оператора A.

4. Спектральное разложение самосопряженного оператора. Семейство операторов ортогонального проектирования E_λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ называется спектральным разложением единицы, если: 1) E_λ сильно непрерывен по λ слева; 2) $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$ при $\lambda < \mu$; 3) $E_{-\infty} = \lim\limits_{\lambda \to -\infty} E_\lambda = 0$ и $E_{+\infty} = \lim\limits_{\lambda \to \infty} E_\lambda = I$, где пределы понимаются в смысле сильной сходимости. Для всякой ограниченной непрерывной скалярной функции $F(\lambda)$, заданной на оси $(-\infty, \infty)$, можно определить операторный интеграл Стилтьеса

$$\int_a^b F(\lambda)\, dE_\lambda. \tag{5.2}$$

Этот интеграл определяется как предел по норме интегральных сумм вида $\sum\limits_{k=0}^{N} F(\lambda_k)\left(E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}\right)$, если отрезок $[a, b]$ конечен, и как несобственный интеграл, если $a = -\infty$ или $b = \infty$. Интеграл (5.2) представляет собой ограниченный оператор, причем

$$\left\| \int_a^b F(\lambda)\, dE_\lambda \right\| \leqslant \sup_{a \leqslant \lambda \leqslant b} |F(\lambda)|.$$

Если функция $F(\lambda)$ принимает лишь вещественные значения, то оператор (5.2) самосопряжен.

Если функция $F(\lambda)$ вещественна и неограничена, то формула (5.2) после придания должного смысла интегралу дает самосопряженный, вообще говоря, неограниченный, оператор, область определения которого состоит из тех и только тех элементов x, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2\, d(E_\lambda x, x) < \infty.$$

Оказывается, что всякому самосопряженному оператору A отвечает некоторое спектральное разложение единицы E_λ, причем при $x \in \mathscr{D}(A)$

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda x.$$

Операторы E_λ коммутируют с любым оператором, коммутирующим с A.

Если оператор A ограничен, а m и M — точные нижняя и верхняя грани его спектра, то $E_\lambda = 0$ при $\lambda \leqslant m$ и $E_\lambda = I$ при $\lambda > M$, и следовательно,

$$Ax = \int_{m}^{M+0} \lambda\, dE_\lambda x.$$

Если оператор A — положительно определен и $(Ax, x) \geqslant \geqslant a(x, x)$, то

$$Ax = \int_{a}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda x.$$

Вещественные регулярные точки оператора A характеризуются тем, что в их окрестностях оператор E_λ — постоянен. Таким образом, точки спектра оператора A совпадают с точками роста операторной функции E_λ.

С помощью спектрального разложения можно ввести в рассмотрение широкий класс функций от неограниченного самосопряженного оператора. Так, например, для любой непрерывной функции $F(\lambda)$ естественно положить

$$F(A)\, x = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, dE_\lambda x,$$

где E_λ — спектральное разложение единицы, отвечающее оператору A. При этом операциям сложения и умножения функций будут соответствовать сложение и умножение соответствующих операторов.

Если рассмотреть функцию $e^{i\lambda}$, то соответствующий оператор

$$e^{iA} x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda}\, dE_\lambda x$$

будет унитарным оператором, и наоборот, всякий унитарный оператор представим в таком виде.

Если μ — регулярная точка оператора A, то для его резольвенты получается представление

$$R_A(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \mu}\, dE_\lambda.$$

Для положительного оператора A можно ввести понятие его степеней с произвольными показателями степени:

$$A^\alpha x = \int_0^\infty \lambda^\alpha\, dE_\lambda x.$$

Следует лишь уточнить, какая при этом берется ветвь значений функции λ^α.

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМ ОПЕРАТОРОМ. ПОЛУГРУППЫ

§ 1. Задача Коши

1. Постановка задачи Коши, корректность. Рассмотрим в банаховом пространстве E дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{1.1}$$

с линейным оператором A, имеющим всюду плотную в E область определения $\mathscr{D}(A)$.

Определение 1.1. *Решением уравнения* на отрезке $[0, T]$ называется функция $x(t)$, удовлетворяющая условиям: 1) значения функции $x(t)$ принадлежат области определения $\mathscr{D}(A)$ оператора A при всех $t \in [0, T]$; 2) в каждой точке t отрезка $[0, T]$ существует сильная производная $x'(t)$ функции $x(t)$; 3) уравнение $x'(t) = Ax(t)$ удовлетворяется при всех $t \in [0, T]$. Очевидно, что решение является непрерывной на $[0, T]$ функцией.

Под *задачей Коши* на отрезке $[0, T]$ понимают задачу о нахождении решения уравнения на $[0, T]$, удовлетворяющего начальному условию

$$x(0) = x_0 \in \mathscr{D}(A). \tag{1.2}$$

Определение 1.2. Задача Коши *поставлена корректно* на отрезке $[0, T]$, если:

I) при любом $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ существует ее единственное решение и

II) это решение непрерывно зависит от начальных данных в том смысле, что из $x_n(0) \to 0$ $(x_n(0) \in \mathscr{D}(A))$ для соответствующих решений $x_n(t)$ следует: $x_n(t) \to 0$ при каждом $t \in [0, T]$.

Замечание 1.1. В силу постоянства оператора A из корректности задачи Коши на каком-либо отрезке $[0, T]$ следует ее корректность на любом отрезке $[0, T_1]$ $(T_1 > 0)$, т. е. корректность на всей полуоси $[0, \infty)$.

Для того чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть отрезок $[0, 2T]$. Пусть $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ и $x(t)$ есть решение задачи (1.1), (1.2) на $[0, T]$. Построим второе решение $y(t)$ уравнения (1.1) с начальным условием $y(0) = x(T) \in \mathscr{D}(A)$. Определим функцию $w(t)$ равенством:

$$w(t) = \begin{cases} x(t) & \text{при} \quad t \in [0, T], \\ y(\tau), & \text{где} \quad t = T + \tau \quad \text{и} \quad \tau \in [0, T]. \end{cases}$$

Очевидно, что $w(t)$ будет решением задачи (1.1), (1.2) на отрезке $[0, 2T]$. Это решение единственно. Действительно, пусть $w_1(t)$ — другое решение этой задачи. Тогда $w_1(t) = x(t)$ при $t \in [0, T]$, в силу корректности задачи на $[0, T]$. Далее, функция $x_1(\tau) = w_1(T + \tau)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и начальному условию $x_1(0) = w_1(T) = x(T)$. Отсюда следует, что $x_1(\tau) = y(\tau)$, т. е. $w_1(t) = w(t)$ и при $t \in [T, 2T]$.

Далее, если $x_n(0) \to 0$, то $x_n(T) \to 0$ и, значит, $x_n(t)$ и $y_n(\tau)$ стремятся к нулю при всех t и $\tau \in [0, T]$. Итак, задача корректна на отрезке $[0, 2T]$.

Введем в рассмотрение оператор $U(t)$, ставящий в соответствие элементу $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ значение решения $x(t)$ задачи Коши $(x(0) = x_0)$ в момент времени $t > 0$.

Если задача Коши корректно поставлена, то оператор $U(t)$ определен на $\mathscr{D}(A)$. В силу линейности уравнения (1.1) и свойства I) он аддитивен и однороден, в силу свойства II) он непрерывен. Так как $\mathscr{D}(A)$ плотно в E, то оператор $U(t)$ может быть по непрерывности расширен до линейного ограниченного оператора, определенного на всем пространстве E, который также обозначается через $U(t)$.

Определение 1.3. Семейство ограниченных линейных операторов $U(t)$, зависящих от параметра t $(0 < t < \infty)$, называется *полугруппой*, если

$$U(t_1 + t_2) = U(t_1)\,U(t_2) \qquad (0 < t_1,\ t_2 < \infty). \tag{1.3}$$

Покажем, что операторы $U(t)$, порожденные корректной задачей (1.1), (1.2), образуют полугруппу. Пусть $x_0 \in \mathscr{D}(A)$.

Тогда функция $w(t) = x(t+\tau) = U(t+\tau)x_0$ по t удовлетворяет уравнению (1.1) и начальному условию $w(0) = x(\tau) = U(\tau)x_0$. Функция $w_1(t) = U(t)U(\tau)x_0$ также является решением уравнения (1.1) с начальным значением $U(\tau)x_0$, принадлежащим $\mathscr{D}(A)$. В силу единственности решения имеем $w_1(t) = w(t)$. Таким образом, операторы $U(t+\tau)$ и $U(t)U(\tau)$ совпадают на всюду плотном множестве $\mathscr{D}(A)$ и, так как они ограничены, совпадают всюду.

Рассмотрим теперь функцию $U(t)x_0$ при любом $x_0 \in E$ и $t > 0$. Так как $\mathscr{D}(A)$ плотно в E, то существует последовательность элементов $x_0^{(n)} \in \mathscr{D}(A)$ такая, что $x_0^{(n)} \to x_0$ и, следовательно, $x_n(t) = U(t)x_0^{(n)} \to U(t)x_0$ в силу ограниченности оператора $U(t)$. Таким образом, функция $U(t)x_0$ является пределом последовательности решений уравнения (1.1) на $(0, \infty)$ и может быть названа *обобщенным решением* этого уравнения. Однако, никаких свойств гладкости этой функции у нас нет. Пока можно лишь утверждать, что $\|U(t)x_0\|$ измерима (как предел последовательности непрерывных функций). Полугрупповое свойство операторов $U(t)$ позволяет усилить это утверждение.

Лемма 1.1. *Если задача Коши для уравнения* (1.1) *корректна, то все обобщенные решения этого уравнения непрерывны на* $(0, \infty)$.

Доказательство. Покажем сначала, что операторы $U(t)$ равномерно ограничены на всяком отрезке $[\delta, 1/\delta]$ $(\delta > 0)$. В противном случае нашлась бы последовательность $t_n \in [\delta, 1/\delta]$ такая, что $t_n \to \gamma$ и $\|U(t_n)\| \to \infty$ при $n \to \infty$. В силу принципа равномерной ограниченности тогда найдется такой элемент $x_0 \in E$, что $\|U(t_n)x_0\| \to \infty$. Без ограничения общности можно считать, что $\|U(t_n)x_0\| \geqslant n$. Функция $\|U(t)x_0\|$ всюду конечна и измерима на $(0, \infty)$, поэтому можно на интервале $(0, \gamma)$ найти множество F с мерой $m(F) > \gamma/2$, на котором $\|U(t)x_0\|$ ограничена некоторым числом M. Так как $t_n \to \gamma$, то при достаточно большом n мера пересечения F с интервалом $(0, t_n)$ будет также не меньше $\gamma/2$, а тогда и мера множества $\mathscr{E}_n = \{t_n - \tau : \tau \in F \cap (0, t_n)\}$ не меньше $\gamma/2$. Воспользуемся теперь полугрупповым свойством. Имеем:

$$n \leqslant \|U(t_n)x_0\| = \|U(t_n - \tau)U(\tau)x_0\| \leqslant M\|U(t_n - \tau)\|,$$

откуда

$$\|U(\sigma)\| \geqslant n/M \text{ при всех } \sigma \in \mathscr{E}_n.$$

Обозначая $\overline{\lim}\,\mathscr{E}_n = \mathscr{E}$, мы приходим к выводу, что $\|U(\sigma)\| = \infty$ при всех $\sigma \in \mathscr{E}$ и $m(\mathscr{E}) \geqslant \gamma/2$. Это противоречит предположению о конечности $\|U(\sigma)\|$ при всех $\sigma \in (0, \infty)$.

Из равномерной ограниченности операторов $U(t)$ на $[\delta, 1/\delta]$ следует, что обобщенное решение $U(t)x_0$ $(x_0 \in E)$ является на $[\delta, 1/\delta]$ равномерным пределом истинных решений уравнения (1.1) и, так как последние непрерывны, то и оно непрерывно.

Лемма доказана.

Лемма 1.1 и предшествующие ей рассуждения приводят к следующему утверждению:

Т е о р е м а 1.1. *Если задача Коши для уравнения* (1.1) *корректна, то ее решение дается формулой*

$$x(t) = U(t)\,x_0 \qquad (x_0 \in \mathscr{D}(A)), \tag{1.4}$$

где $U(t)$ — сильно непрерывная при $t > 0$ полугруппа операторов.

Отметим, что вопрос о поведении полугруппы при $t \to 0$ остается открытым. Предел $U(t)x_0$ при $x_0 \overline{\in} \mathscr{D}(A)$ и $t \to 0$ может не существовать. Далее, обобщенное решение $U(t)x_0$ может быть не дифференцируемым, его значения могут не принадлежать области определения $\mathscr{D}(A)$ оператора A.

На $\mathscr{D}(A)$ оператор A коммутирует с полугруппой $U(t)$. Действительно, при $x_0 \in \mathscr{D}(A)$

$$AU(t)\,x_0 = \frac{dU(t)\,x_0}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{U(t+\Delta t)\,x_0 - U(t)\,x_0}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} U(t)\,\frac{U(\Delta t)\,x_0 - x_0}{\Delta t} = U(t)\,Ax_0.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что производная от решения непрерывна при $t > 0$.

Пусть теперь $x_0 \in \mathscr{D}(A^2)$; тогда функция

$$\frac{dU(t)\,x_0}{dt} = AU(t)\,x_0 = U(t)\,Ax_0$$

будет решением задачи Коши при начальном условии $Ax_0 \in \mathscr{D}(A)$ и, следовательно, она будет непрерывной при $t \geqslant 0$, а ее производная будет непрерывной при $t > 0$. Таким образом, условие принадлежности x_0 к области определения той или иной степени оператора A играет роль условия гладкости начальных данных; оно повышает гладкость решения $U(t)x_0$ по t: если $x_0 \in \mathscr{D}(A^k)$ ($k \geqslant 1$ — целое), то решение $U(t)x_0$ при $t \geqslant 0$ имеет $k-1$ непрерывную производную и производную k-го порядка, непрерывную при $t > 0$.

Отметим еще одно вспомогательное предложение:

Лемма 1.2. *Пусть функция $x(t)$ непрерывна* на $[0, T]$, *непрерывно дифференцируема на* $(0, T]$ *и ее производная* $x'(t)$ *имеет предел при* $t \to 0$. *Если оператор A замкнут и функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению* (1.1) *на* $(0, T]$, *то она является решением этого уравнения.*

Доказательство. Нужно лишь проверить, что функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению при $t=0$. Она дифференцируема справа при $t=0$. Действительно, перейдя к пределу в равенстве

$$x(t)-x(\varepsilon)=\int_{\varepsilon}^{t} x'(t)\,dt$$

при $\varepsilon \to 0$, получим

$$x(t)-x(0)=\int_{0}^{t} x'(t)\,dt,$$

откуда следует, что

$$x'(0)=\lim_{t\to+0} x'(t).$$

Пользуясь замкнутостью оператора A, теперь можно перейти к пределу при $t \to +0$ в уравнении $x'(t)=Ax(t)$ и прийти к равенству $x'(0)=Ax(0)$.

Лемма доказана.

2. Преобразование Лапласа, представление решений. Исследуем поведение полугруппы $U(t)$ при $t \to \infty$. Для этого введем в рассмотрение функцию $f(t)=\ln\|U(t)\|$ $(0<t<\infty)$. Из полугруппового свойства (1.3) следует неравенство

$$\|U(t_1+t_2)\| \leqslant \|U(t_1)\| \cdot \|U(t_2)\|$$

и полуаддитивность функции $f(t)$

$$f(t_1+t_2) \leqslant f(t_1)+f(t_2).$$

Оказывается, что для всякой полуаддитивной на $(0, \infty)$ функции $f(t)$ существует предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\inf\frac{f(t)}{t}=\omega<\infty.$$

Действительно, пусть $\omega = \inf \frac{f(t)}{t}$ конечно. Выберем число a так, чтобы было $f(a) < (\omega + \varepsilon) a$. Тогда при $(n+1) a \leqslant t \leqslant (n+2) a$ имеем

$$\omega \leqslant \frac{f(t)}{t} \leqslant \frac{nf(a) + f(t-na)}{t} \leqslant \frac{na}{t}(\omega + \varepsilon) + \frac{f(t-na)}{t}.$$

Так как $a \leqslant t - na \leqslant 2a$, то $|f(t-na)| \leqslant M_a$ (полуаддитивная функция ограничена на каждом отрезке, содержащемся в $(0, \infty)$ (см. [1], стр. 258); для нашей функции $\ln \| U(t) \|$ это доказано в лемме 1.1), и, следовательно, правая часть неравенства стремится к $\omega + \varepsilon$ при $t \to \infty$. Таким образом, при достаточно больших t значения функции $\frac{f(t)}{t}$ сколь угодно мало отличаются от числа ω.

Аналогично рассматривается возможный случай, когда $\omega = -\infty$.

Итак,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\ln \| U(t) \|}{t} = \omega < \infty. \tag{1.5}$$

Теорема 1.2. *Если задача Коши для уравнения* (1.1) *корректна, то каждое его обобщенное решение растет на бесконечности не быстрее экспоненты; экспоненциальные типы всех решений ограничены сверху.*

Число ω из (1.5) называют *типом полугруппы* $U(t)$ и *типом задачи Коши* (1.1), (1.2).

Из теоремы 1.2, в частности, следует, что для корректности задачи Коши необходимо, чтобы оператор A не имел собственных чисел в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > \omega$. Действительно, если z — собственный вектор оператора A: $Az = \lambda z$, то ему отвечает решение $U(t) z = e^{\lambda t} z$, экспоненциальный тип которого равен $\operatorname{Re} \lambda$ и, значит, $\operatorname{Re} \lambda < \omega$. При $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ оператор $A - \lambda I$ имеет на своей области значений $\mathscr{R}(A - \lambda I)$ обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$.

Ограниченность экспоненциальных типов всех решений позволяет к их исследованию применять преобразование Лапласа. При $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ и $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ определен интеграл

$$\mathscr{I}(\lambda) x_0 = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) x_0 \, dt. \tag{1.6}$$

Функция $U(t)x_0$ непрерывно дифференцируема на $(0, \infty)$, поэтому интегрируя по частям, получим

$$\mathcal{J}(\lambda)x_0 = -\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_{\varepsilon}^{N} e^{-\lambda t}U(t)x_0\,dt =$$

$$= -\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}U(t)x_0\Big|_{\varepsilon}^{N} + \frac{1}{\lambda}\int_{\varepsilon}^{N} e^{-\lambda t}AU(t)x_0\,dt\right] =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}x_0 - \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \frac{1}{\lambda}\int_{\varepsilon}^{N} e^{-\lambda t}AU(t)x_0\,dt.$$

Предел слева существует, поэтому последний интеграл существует как несобственный и

$$\mathcal{J}(\lambda)x_0 = -\frac{1}{\lambda}x_0 - \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}AU(t)x_0\,dt.$$

Пусть теперь оператор A допускает замыкание $\bar{A}$. Тогда за знак интеграла можно вынести оператор $\bar{A}$ и прийти к равенству

$$(\bar{A} - \lambda I)\mathcal{J}(\lambda)x_0 = x_0 \qquad (x_0 \in \mathcal{D}(A)). \tag{1.7}$$

Наконец, для замкнутого оператора A получаем

$$(A - \lambda I)\mathcal{J}(\lambda)x_0 = x_0 \qquad (x_0 \in \mathcal{D}(A)).$$

Отсюда следует, во-первых, что область определения $\mathcal{D}(A)$ содержится в области значений оператора $A - \lambda I$ при любом λ с $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ и, во-вторых, что на $\mathcal{D}(A)$

$$\mathcal{J}(\lambda)x_0 = (A - \lambda I)^{-1}x_0 \qquad (x_0 \in \mathcal{D}(A)).$$

Формула (1.6) принимает тогда вид

$$(A - \lambda I)^{-1}x_0 = -\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}U(t)x_0\,dt. \tag{1.8}$$

Сделаем еще предположение, что оператор A имеет хотя бы одну регулярную точку λ_0, и обозначим через $R(\lambda_0)$ — резольвенту оператора A. Если x — любой элемент из E, то $R(\lambda_0)x \in \mathscr{D}(A) \subset \mathscr{R}(A-\lambda I)$ при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Обозначая

$$z = (A-\lambda I)^{-1} R(\lambda_0)x,$$

получаем

$$x = (A-\lambda_0 I)(A-\lambda I)z = (A-\lambda I)(A-\lambda_0 I)z.$$

Отсюда следует, что $x \in \mathscr{R}(A-\lambda I)$, т. е., что область значений оператора $A-\lambda I$ совпадает со всем пространством.

Оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ замкнут и определен во всем пространстве, следовательно, он ограничен. Итак, оператор A имеет резольвенту $R(\lambda) = (A-\lambda I)^{-1}$ при всех λ в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \omega$.

Если в (1.8) подставим $x_0 = R(\lambda_0)x$, то, используя тождество Гильберта, получим представление для резольвенты $R(\lambda)$ на любом $x \in E$:

$$R(\lambda)x = R(\lambda_0)x - (\lambda-\lambda_0)\int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) R(\lambda_0)x\,dt. \tag{1.9}$$

Из того, что оператор A коммутирует с полугруппой, следует, что резольвента $R(\lambda)$ также коммутирует с $U(t)$. Если элемент x таков, что функция $U(t)x$ суммируема на отрезке $[0, T]$, то оператор $R(\lambda_0)$ можно вынести за знак интеграла, и мы придем к формуле

$$R(\lambda)x = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)x\,dt. \tag{1.10}$$

Наши результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 1.3. *Пусть задача Коши для уравнения* (1.1) *корректна и имеет тип* ω. *Если оператор A имеет хотя бы одну регулярную точку, то при* $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ *он имеет резольвенту* $R(\lambda)$, *которая выражается через полугруппу* $U(t)$ *по формулам* (1.9) *и* (1.10).

Если обобщенное решение $U(t)x$ локально суммируемо на $[0, \infty)$, *то для него справедливо представление*

$$U(t)x = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda)x\frac{d\lambda}{\lambda}\right) \qquad (\sigma > \omega,\ t > 0). \tag{1.11}$$

Если на каком-либо отрезке функция $U(t)x$ абсолютно непрерывна, то внутри этого отрезка

$$U(t)x = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda)x\,d\lambda. \qquad (1.12)$$

В частности, последняя формула имеет место для решения задачи Коши при всех $t > 0$.

Формулы (1.11) и (1.12) следуют из свойств обращения преобразования Лапласа, описанных во введении, а последнее утверждение — из того, что решение задачи Коши имеет непрерывную производную при $t > 0$.

Формула (1.9) для резольвенты показывает, что норма резольвенты не может быстро расти при $\lambda \to \infty$. Действительно, функция $U(t)R(\lambda_0)x$ непрерывна при любом $x \in E$, поэтому в силу теоремы Банаха — Штейнгауза операторы $U(t)R(\lambda_0)$ равномерно ограничены на любом конечном промежутке $[0, T]$. Учитывая (1.5), можно утверждать, что

$$\|U(t)R(\lambda_0)\| \leqslant M_\varepsilon e^{(\omega+\varepsilon)t}$$

при любом $\varepsilon > 0$. Зафиксировав такое ε и обозначив $\omega_1 = \omega + \varepsilon$, для нормы резольвенты получим оценку

$$\|R(\lambda)\| \leqslant M\left(1 + \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\operatorname{Re}(\lambda - \omega_1)}\right) \qquad (\operatorname{Re}\lambda > \omega_1),$$

где $M = \max\{\|R(\lambda_0)\|, M_\varepsilon\}$. Из этой оценки следует, что норма резольвенты равномерно ограничена на всякой полупрямой $\operatorname{Im}\lambda = c$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \omega_2 > \omega_1$. Во всей полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \omega_2$ справедлива оценка

$$\|R(\lambda)\| \leqslant M_1(1 + |\lambda|).$$

Таким образом, требование корректности задачи Коши налагает сильные ограничения на резольвенту оператора A.

До сих пор речь шла о норме резольвенты. Рассмотрим поведение резольвенты на каждом элементе. Пусть $x \in \mathscr{D}(A)$. Тогда

$$R(\lambda)x = -\frac{x}{\lambda} + \frac{R(\lambda)Ax}{\lambda}.$$

Если $\lambda = \sigma + i\tau$ с фиксированным τ, то при $\lambda \to \infty$ резольвента ограничена по норме и, значит,

$$\|R(\sigma + i\tau)x\| \to 0 \text{ при } \sigma \to +\infty \qquad (x \in \mathscr{D}(A)). \qquad (1.13)$$

Далее, из (1.10) находим

$$R(\sigma+i\tau)x=-\int_0^\infty e^{-i\tau t}e^{-\sigma t}U(t)x\,dt. \qquad (1.14)$$

При фиксированном $\sigma>\omega$ и $\tau\to\infty$ последний интеграл стремится к нулю в силу теоремы Римана — Лебега. Более того, если $\sigma\geqslant\omega_1>\omega$, то семейство $\varphi_\sigma(t)=e^{-\sigma t}U(t)x$ $(\omega_1\leqslant\sigma\leqslant\infty)$ компактно в $\mathscr{L}_1$, и поэтому интеграл (1.14) стремится к нулю равномерно по σ, т. е.

$$\|R(\sigma+i\tau)x\|\to 0 \text{ равномерно по } \sigma \ (x\in\mathscr{D}(A)).$$

Соотношения (1.13) и (1.14) говорят о том, что

$$\|R(\lambda)x\|\to 0 \quad \text{при } |\lambda|\to\infty \qquad (x\in\mathscr{D}(A)).$$

Так как $R(\sigma+i\tau)$ при фиксированном τ равномерно ограничена и стремится к нулю на плотном множестве $\mathscr{D}(A)$, то (1.13) справедливо при любом $x\in E$.

Теорема 1.4. *Если для уравнения* (1.1) *задача Коши корректна и оператор A имеет хотя бы одну регулярную точку, то для резольвенты справедлива оценка*

$$\|R(\lambda)\|\leqslant M_1(1+|\lambda|) \qquad (\lambda=\sigma+i\tau,\ \sigma\geqslant\omega_2). \quad (1.15)$$

Если $x\in\mathscr{D}(A)$, то

$$\|R(\lambda)x\|\to 0 \quad \textit{при } |\lambda|\to\infty \qquad (\sigma\geqslant\omega_2). \quad (1.16)$$

Для любого $x\in E$

$$\|R(\sigma+i\tau)x\|\to 0 \quad \textit{при } \sigma\to+\infty. \qquad (1.17)$$

3. Построение решений задачи Коши. Естественно пытаться строить решения задачи Коши с помощью обратного преобразования Лапласа по формуле (1.12). Затруднением на этом пути является то, что интеграл, стоящий в этой формуле, не будет, как правило, абсолютно сходящимся, так как резольвента не может убывать быстрее, чем $\frac{1}{|\lambda|}$. Зная, однако, поведение на бесконечности нормы резольвенты, во многих случаях можно находить такие элементы $x=x_0$, для которых интеграл в (1.12) и его производная по t существуют в смысле главного значения при всех $t \geqslant 0$. Поясним это. Пусть резольвента $R(\lambda)$ определена на прямой $\operatorname{Re}\lambda = \alpha$ и еще в точке λ_0 с $\operatorname{Re}\lambda_0 > \alpha$. Если элемент $x_0 \in \mathscr{D}(A^l)$, то он представим в виде

$$x_0 = R^l(\lambda_0)\, z_0.$$

Тогда

$$R(\lambda)\, x_0 = \frac{R(\lambda) - R(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} R^{l-1}(\lambda_0)\, z_0 =$$

$$= \frac{R(\lambda)\, z_0}{(\lambda - \lambda_0)^l} - \frac{R^l(\lambda_0)\, z_0}{\lambda - \lambda_0} - \ldots - \frac{R(\lambda_0)\, z_0}{(\lambda - \lambda_0)^l}.$$

Если обе части умножить на $e^{\lambda t}$ и проинтегрировать по прямой $\operatorname{Re}\lambda = \alpha$, то интегралы от функций вида $e^{\lambda t}\dfrac{R^s(\lambda_0)}{(\lambda - \lambda_0)^{l+1-s}}$ обратятся в нуль в силу леммы Жордана. Если при этом интеграл от $e^{\lambda t}\dfrac{R(\lambda_0)}{(\lambda - \lambda_0)^l}$ абсолютно сходится при $t \geqslant 0$, то интеграл (1.12) будет существовать в смысле главного значения при $t \geqslant 0$. Обозначим

$$\boldsymbol{x}(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda)\, x_0\, d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{\lambda t} \frac{R(\lambda)\, z_0}{(\lambda - \lambda_0)^l}\, d\lambda \qquad (x_0 = R^l(\lambda)\, z_0). \qquad (1.18)$$

Функция $x(t)$ будет непрерывной при $t \geqslant 0$, если

$$\int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\| R(\lambda) \|}{|\lambda - \lambda_0|^l} |d\lambda| < \infty.$$

Аналогично, она будет непрерывно дифференцируемой, если

$$\int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\| R(\lambda) \|}{|\lambda - \lambda_0|^{l-1}} |d\lambda| < \infty. \qquad (1.19)$$

В этом случае $x(t)$ будет решением дифференциального уравнения (1.1). Действительно, при $t > 0$

$$x'(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \lambda e^{\lambda t} \frac{R(\lambda) z_0}{(\lambda - \lambda_0)^l} d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} A e^{\lambda t} \frac{R(\lambda) z_0}{(\lambda - \lambda_0)^l} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{e^{\lambda t} z_0}{(\lambda - \lambda_0)^l} d\lambda = Ax(t). \tag{1.20}$$

Из леммы 1.2 вытекает, что $x(t)$ является решением (1.1) при $t \geqslant 0$.

Решение $x(t)$ удовлетворяет начальному условию

$$x(0) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{R(\lambda) z_0}{(\lambda - \lambda_0)^l} d\lambda. \tag{1.21}$$

Вообще говоря, не ясно, как это значение $x(0)$ связано с x_0. Потребуем дополнительно, чтобы резольвента была определена во всей полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha$ и, более того, чтобы контур интегрирования можно было без изменения значения интеграла стянуть к точке λ_0. Тогда по теореме о вычетах

$$x(0) = \frac{1}{(l-1)!} \frac{d^{l-1} R(\lambda_0) z_0}{d\lambda^{l-1}} = R^l(\lambda_0) z_0 = x_0.$$

На описанном пути получаем утверждение:

Теорема 1.5. *Пусть резольвента оператора A определена при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha$ и удовлетворяет неравенству*

$$\| R(\lambda) \| \leqslant M (1 + |\lambda|)^k \tag{1.22}$$

при некотором $k \geqslant -1$, тогда задача Коши разрешима для любого начального значения $x_0 \in \mathscr{D}(A^{[k]+3})$ *).

Доказательство получается из предыдущих рассуждений при $l = [k] + 3$.

Замечание 1.2. Легко проверить, что при $k < 0$ условие (1.22) можно несколько ослабить и заменить таким:

$$\| R(\lambda) \| \leqslant M (1 + |\tau|)^k \qquad (\lambda = \sigma + i\tau, \quad \sigma \geqslant \alpha).$$

---

*) $[k]$ есть наибольшее целое число, не превосходящее k.

Замечание 1.3. При доказательстве того, что функция $x(t)$ является решением уравнения (1.1), мы не пользовались существенно тем, что в (1.18) интегрирование ведется по прямой $\operatorname{Re}\lambda=\alpha$. Важно было лишь, что интеграл от скалярной функции $\dfrac{e^{\lambda t}}{(\lambda-\lambda_0)^l}$ равен нулю. Поэтому можно пытаться конструировать решение по формуле

$$x(t)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}R(\lambda)\,x_0\,d\lambda, \tag{1.23}$$

где контур Γ выбирается так, что на нем функция $e^{\lambda t}$ стремится к нулю при $|\lambda|\to\infty$. Это позволяет получать решения уравнения (1.1) в виде абсолютно сходящихся интегралов (1.23) при весьма слабых ограничениях на рост резольвенты. Однако при $t\to 0$ преимущества, которые дает наличие множителя $e^{\lambda t}$, постепенно исчезают, и поэтому, как правило, решения «портятся» при $t\to 0$. Исследованию классов таких решений посвящен § 3.

4. Производящий оператор сильно непрерывной полугруппы. Среди обобщенных решений уравнения (1.1), не являющихся решениями задачи Коши, могут быть, вообще говоря, дифференцируемые функции. Обозначим через $\mathscr{D}$ совокупность тех элементов x_0, для которых функция $U(t)\,x_0$, доопределенная в нуле как x_0, дифференцируема (справа) в нуле. На элементах из $\mathscr{D}$ определен линейный оператор

$$\lim_{t\to+0}\frac{U(t)\,x_0-x_0}{t}=U'(0)\,x_0. \tag{1.24}$$

Оператор $U'(0)$ называется *производящим оператором полугруппы* *).

Лемма 1.3. *Если $x_0\in\mathscr{D}$, то обобщенное решение $U(t)\,x_0$ имеет непрерывную производную при $t>0$.*

Доказательство. Пусть $\Delta t>0$, тогда

$$\frac{U(t+\Delta t)\,x_0-U(t)\,x_0}{\Delta t}=U(t)\,\frac{U(\Delta t)\,x_0-x_0}{\Delta t}. \tag{1.25}$$

*) В [1] оператор $U'(0)$ называется инфинитезимальным, а его замыкание, если оно существует, инфинитезимальным производящим оператором.

Правая часть имеет предел $U(t)U'(0)x_0$, значит, такой же предел имеет и левая часть.

Если теперь $\Delta t < 0$, то

$$\frac{U(t+\Delta t)x_0 - U(t)x_0}{\Delta t} = U(t+\Delta t)\frac{U(-\Delta t)x_0 - x_0}{-\Delta t}.$$

Правая часть снова имеет предел $U(t)U'(0)x_0$, т. е. функция $U(t)x_0$ дифференцируема и

$$\frac{dU(t)x_0}{dt} = U(t)U'(0)x_0.$$

Лемма доказана.

Правую часть в (1.25) можно переписать в виде

$$U(t)\frac{U(\Delta t)x_0 - x_0}{\Delta t} = \frac{U(\Delta t) - I}{\Delta t}U(t)x_0.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем

$$U(t)U'(0)x_0 = U'(0)U(t)x_0. \tag{1.26}$$

Производящий оператор коммутирует с полугруппой на своей области определения.

Если задача Коши для уравнения (1.1) корректна, то $U(t)x_0$ дифференцируема в нуле при $x_0 \in \mathscr{D}(A)$, причем в силу уравнения (1.1)

$$\frac{U(\Delta t)x_0 - x_0}{\Delta t} \to Ax_0.$$

Таким образом, $\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}$ и $U'(0)x_0 = Ax_0$ при $x_0 \in \mathscr{D}(A)$.

Оператор A, порождающий корректную задачу Коши, может быть расширен до производящего оператора $U'(0)$ сильно непрерывной полугруппы $U(t)$.

5. Уравнение с параметром. Аналитичность решений. Если для уравнения (1.1) задача Коши корректна, то, очевидно, будет корректной и задача

$$\frac{dx}{dt} = \mu Ax, \quad x(0) = x_0 \in \mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(\mu A), \tag{1.27}$$

при любом $\mu > 0$. Действительно, если $x(t)$ — решение задачи Коши для уравнения (1.1), то $x(\mu t)$ будет решением задачи Коши для уравнения (1.27) с тем же начальным условием.

Обозначим через $U_\mu(t)$ полугруппу, соответствующую задаче Коши для уравнения (1.27). Тогда

$$U_\mu(t) = U(\mu t). \tag{1.28}$$

Пусть теперь ζ — комплексное число. Совокупность тех ζ, для которых корректна задача

$$\frac{dx}{dt} = \zeta A x, \quad x(0) = x_0 \in \mathscr{D}(A), \tag{1.29}$$

назовем *множеством* K_A *корректности задачи Коши для оператора* A. Из сказанного выше ясно, что это множество состоит из совокупности лучей, исходящих из точки $\zeta = 0$, поэтому для его описания достаточно указать его пересечение с единичной окружностью $|\zeta| = 1$. Обозначив через $U_\zeta(t)$ полугруппу, порожденную задачей (1.29), положим

$$U(\zeta) = U_\zeta(1). \tag{1.30}$$

По (1.28)

$$U(\mu\zeta) = U_{\mu\zeta}(1) = U_\zeta(\mu) \qquad (\mu > 0). \tag{1.31}$$

Лемма 1.4. *Если оператор A имеет хотя бы одну регулярную точку λ_0, то операторы $U(\zeta)$ образуют полугруппу в том смысле, что при ζ_1, ζ_2 и $\zeta_1 + \zeta_2$, принадлежащих K_A,*

$$U(\zeta_1 + \zeta_2) = U(\zeta_1)\, U(\zeta_2). \tag{1.32}$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in \mathscr{D}(A)$, тогда в силу (1.31) функция $U((\zeta_1 + \zeta_2)t)\, x_0 = U_{\zeta_1+\zeta_2}(t)\, x_0 = x(t)$ есть решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = (\zeta_1 + \zeta_2) A x, \quad x(0) = x_0. \tag{1.33}$$

Рассмотрим теперь функцию $y(t) = U(\zeta_1 t)\, U(\zeta_2 t)\, x_0$ и вычислим ее производную при $t > 0$. Имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = U_{\zeta_1}(t + \Delta t) \frac{U_{\zeta_2}(t + \Delta t)\, x_0 - U_{\zeta_2}(t)\, x_0}{\Delta t} + \\ + \frac{U_{\zeta_1}(t + \Delta t) - U_{\zeta_1}(t)}{\Delta t}\, U_{\zeta_2}(t)\, x_0.$$

Так как $U_{\zeta_2}(t)\, x_0 \in \mathscr{D}(A)$, то второе слагаемое при $\Delta t \to 0$ стремится к $\zeta_1 A U_{\zeta_1}(t)\, U_{\zeta_2}(t)\, x_0$. В силу непрерывности полугруппы $U_{\zeta_1}(t)$ при $t>0$ первое слагаемое при $\Delta t \to 0$ стремится к

$$U_{\zeta_1}(t)\zeta_2 A U_{\zeta_2}(t) x_0 = \zeta_2 A U_{\zeta_1}(t) U_{\zeta_2}(t) x_0.$$

Таким образом, при $t>0$

$$\frac{dy}{dt} = (\zeta_1+\zeta_2) A y(t).$$

Исследуем поведение $y(t)$ в нуле. Для этого предположим, что $x_0 \in \mathscr{D}(A^2)$, и представим его в виде $x_0 = R(\lambda_0) z_0$, где $z_0 \in \mathscr{D}(A)$. Тогда

$$y(t) - x_0 = U_{\zeta_1}(t)[U_{\zeta_2}(t) x_0 - x_0] + [U_{\zeta_1}(t) x_0 - x_0] =$$
$$= U_{\zeta_1}(t) R(\lambda_0)[U_{\zeta_2}(t) z_0 - z_0] + [U_{\zeta_1}(t) x_0 - x_0].$$

Операторы $U_{\zeta_1}(t) R(\lambda_0)$ равномерно ограничены в силу теоремы Банаха — Штейнгауза: они при $t \to 0$ сходятся к оператору $R(\lambda_0)$. Поэтому оба слагаемых при $t \to 0$ стремятся к нулю, и $y(t) \to x_0$.

Как было вычислено, $y'(t) = (\zeta_1+\zeta_2) U_{\zeta_1}(t) U_{\zeta_2}(t) A x_0$. Если, наконец, предположить, что $x_0 \in \mathscr{D}(A^3)$, то $y'(t) \to (\zeta_1+\zeta_2) A x_0$ при $t \to 0$. По лемме 1.2 $y(t)$ является решением задачи Коши для уравнения (1.33) с начальным значением x_0. В силу предположенной единственности такого решения $y(t) \equiv x(t)$, т. е. при $x_0 \in \mathscr{D}(A^3)$

$$U((\zeta_1+\zeta_2)t) x_0 = U(\zeta_1 t) U(\zeta_2 t) x_0. \tag{1.34}$$

Так как $\mathscr{D}(A^3)$ плотно в E и все операторы в (1.34) ограничены, то это соотношение справедливо при всех $x_0 \in E$. Полагая $t=1$, приходим к (1.32).

Лемма доказана.

Из леммы, в частности, следует, что операторы $U(\zeta)$ коммутируют друг с другом.

Теорема 1.6. *В условиях леммы* 1.4 *операторная функция* $U(\zeta)$ *аналитична в каждой внутренней точке множества* K_A.

Доказательство. Совокупность всех внутренних точек множества K_A представляет собой сумму не более чем счетного числа открытых секторов. Пусть ζ_0 — внутренняя точка K_A и $S_{\varphi_1\varphi_2}\{\zeta\colon \varphi_1 < \arg\zeta < \varphi_2\}$ — содержащий ее открытый сектор из K_A. Обозначим $\varphi_0 = \arg\zeta_0$. Пусть $x_0 \in \mathscr{D}(A)$.

Функция $U(e^{i\varphi_0}t)\,x_0 = U_{e^{i\varphi_0}}(t)\,x_0$ есть решение уравнения (1.29) при $\zeta = e^{i\varphi_0}$ и поэтому

$$\lim_{r\to 0}\frac{U\left(\zeta_0 + re^{i\varphi_0}\right)x_0 - U(\zeta_0)\,x_0}{re^{i\varphi_0}} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{U_{e^{i\varphi_0}}(|\zeta_0| + r)\,x_0 - U_{e^{i\varphi_0}}(|\zeta_0|)\,x_0}{re^{i\varphi_0}} =$$

$$= AU_{e^{i\varphi_0}}(|\zeta_0|)\,x_0 = AU(\zeta_0)\,x_0.$$

Таким образом, функция $U(\zeta)\,x_0$ имеет в точке ζ_0 производную по направлению, составляющему угол φ_0 с вещественной осью.

Пусть теперь угол ψ таков, что $\varphi_1 < \varphi_0 + \psi < \varphi_2$. Тогда при $r \to +0$

$$\frac{U\left(\zeta_0 + re^{i(\psi+\varphi_0)}\right)x_0 - U(\zeta_0)\,x_0}{re^{i(\psi+\varphi_0)}} = \frac{U\left(re^{i(\psi+\varphi_0)}\right) - I}{re^{i(\psi+\varphi_0)}}\,U(\zeta_0)\,x_0 =$$

$$= \frac{U_{e^{i(\psi+\varphi_0)}}(r) - I}{re^{i(\psi+\varphi_0)}}\,U(\zeta_0)\,x_0 \to AU(\zeta_0)\,x_0, \quad (1.35)$$

в силу того, что $U(\zeta_0)\,x_0 \in \mathscr{D}(A)$.

Несколько сложнее рассуждение, если $r \to -0$. Зафиксируем на луче $\zeta_0 + re^{i(\varphi_0+\psi)}$ точку ζ_1 с отрицательным $r = -a$ $(a > 0)$, принадлежащую сектору $S_{\varphi_1\varphi_2}$. Тогда $\zeta_0 = \zeta_1 + ae^{i(\varphi_0+\psi)}$, и разностное отношение из (1.35) можно представить в виде

$$\frac{U_{e^{i(\psi+\varphi_0)}}(a + r) - U_{e^{i(\psi+\varphi_0)}}(a)}{re^{i(\psi+\varphi_0)}}\,U(\zeta_1)\,x_0.$$

В силу того, что $U(\zeta_1)\,x_0 \in \mathscr{D}(A)$ и полугруппа $U_{e^{i(\psi+\varphi_0)}}(t)$ дифференцируема на элементах из $\mathscr{D}(A)$, это отношение стремится к

$$AU_{e^{i(\psi+\varphi_0)}}(a)\,U(\zeta_1)\,x_0 = AU(\zeta_0)\,x_0.$$

Таким образом, производные от $U(\zeta)\,x_0$ существуют и совпадают по двум неколлинеарным направлениям. Отсюда, как обычно, следует дифференцируемость функции $U(\zeta)\,x_0$ как функции комплексного переменного. Действительно, пусть ζ стремится к ζ_0 по любому направлению: $\zeta = \zeta_0 + re^{i\theta} \in K_A$.

Тогда

$$\frac{U(\zeta)x_0 - U(\zeta_0)x_0}{\zeta-\zeta_0} = \frac{U(\zeta)x_0 - U\left(\zeta_0 + r\frac{\sin(\theta-\varphi_0)}{\sin\psi}e^{i(\psi+\varphi_0)}\right)x_0}{re^{i\theta}} +$$
$$+\frac{U\left(\zeta_0 + r\frac{\sin(\theta-\varphi_0)}{\sin\psi}e^{i(\psi+\varphi_0)}\right)x_0 - U(\zeta_0)x_0}{re^{i\theta}}.$$

Первое слагаемое можно переписать в виде

$$U\left(\zeta_0 + r\frac{\sin(\theta-\varphi_0)}{\sin\psi}e^{i(\psi+\varphi_0)}\right)\frac{U(\eta)x_0 - x_0}{re^{i\theta}},$$

где $\eta = r\dfrac{\sin(\varphi_0+\psi-\theta)}{\sin\psi}e^{i\varphi_0}$ изменяется вдоль луча, лежащего в $S_{\varphi_1\varphi_2}$. Отсюда видно, что это слагаемое стремится к

$$U(\zeta_0)Ax_0\frac{\sin(\varphi_0+\psi-\theta)}{\sin\psi}e^{i(\varphi_0-\theta)}.$$

Второе слагаемое в силу (1.35) стремится к

$$AU(\zeta_0)x_0\frac{\sin(\theta-\varphi_0)}{\sin\psi}\cdot e^{i(\varphi_0+\psi-\theta)},$$

откуда следует, что

$$\frac{dU(\zeta_0)x_0}{d\zeta} = AU(\zeta_0)x_0. \tag{1.36}$$

Итак, при $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ аналитичность функции $U(\zeta)x_0$ доказана.

Пусть теперь x_0 — любой элемент из E; построим последовательность $x_n \in \mathscr{D}(A)$ такую, что $x_n \to x_0$. Построим секторы $\varphi_0 - \varepsilon \leqslant \arg\zeta \leqslant \varphi_0 + \varepsilon$ и $\zeta = \zeta_1 + \eta$, $\varphi_0 + \psi - \varepsilon \leqslant \arg\eta \leqslant \varphi_0 + \psi + \varepsilon$, где ζ_1 — та же точка, что и выше. Число $\varepsilon > 0$ выберем настолько малым, чтобы оба эти сектора не вышли из $S_{\varphi_1\varphi_2}$ и чтобы точка ζ_1 лежала вне первого сектора. Пересечение этих секторов дает четырехугольник $ABCD$ (рис. 1). Из доказательства леммы 1.1 следует, что полугруппа $U(\zeta)$ равномерно ограничена на отрезках AB и CD. В силу полугруппового свойства (1.32) она также равномерно ограничена на сторонах AD и BC. Поэтому последовательность функций $U(\zeta)x_n$ на границе области $ABCD$ будет равномерно сходиться к функции $U(\zeta)x_0$, откуда следует равномерная сходимость внутри и аналитичность предельной функции.

Теорема доказана.

Заметим, что из последнего рассуждения следует сходимость производных $AU(\zeta)x_n$ к производной $\frac{dU(\zeta)x_0}{d\zeta}$ внутри $ABCD$. В силу замкнутости оператора A получаем

$$\frac{dU(\zeta)x_0}{d\zeta} = AU(\zeta)x_0. \tag{1.37}$$

Теорема 1.7. *Если оператор A имеет хотя бы одну регулярную точку, то для всякого $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ существует решение уравнения* (1.37), *определенное и аналитическое в открытом ядре множества корректности K_A оператора A. Экспоненциальные типы всех решений вдоль лучей, принадлежащих замкнутому сектору открытого ядра множества K_A, равномерно ограничены.*

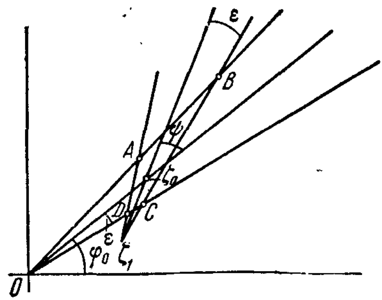

Рис. 1.

В доказательстве нуждается лишь последнее утверждение. Пусть сектор $\varphi_1 \leqslant \arg\zeta \leqslant \varphi_2$ принадлежит ядру K_A. Выделим его часть $Q = \{\zeta\colon\ 1 \leqslant |\zeta| \leqslant 2,\ \varphi_1 \leqslant \arg\zeta \leqslant \varphi_2\}$. Так как в этой части полугруппа $U(\zeta)$ аналитична, то операторы $U(\zeta)$ равномерно ограничены:

$$\|U(\zeta)\| \leqslant M \qquad (\zeta \in Q).$$

Пусть теперь $\zeta_0 = re^{i\varphi}$ — любая точка сектора, лежащая за Q, и пусть $n+1 \leqslant r \leqslant n+2$. Тогда

$$\|U(re^{i\varphi})\| = \|U(ne^{i\varphi})\,U((r-n)e^{i\varphi})\| \leqslant$$
$$\leqslant \|U(e^{i\varphi})\|^n \|U((r-n)e^{i\varphi})\|.$$

Так как $(r-n)e^{i\varphi} \in Q$ и $e^{i\varphi} \in Q$, то

$$\left\|U\left(re^{i\varphi}\right)\right\| \leqslant M^{n+1} = e^{(n+1)\ln M}$$

Без ограничения общности можно считать $M > 1$. Обозначая $\ln M = \omega$, имеем

$$\|U(re^{i\varphi})\| \leqslant e^{r\omega}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что могут быть операторы с множеством корректности, состоящим лишь из нуля. Действительно, если, например, спектр оператора A расположен на вещественной и мнимой осях и уходит на бесконечность в направлениях $\pm\infty$ и $\pm i\infty$, то при любом $\zeta \neq 0$ спектр оператора ζA будет иметь точки в любой правой полуплоскости. В силу теоремы 1.3 для оператора ζA задача Коши не будет корректной.

Если спектр оператора A лежит на мнимой оси и уходит на бесконечность в оба ее конца, то по тем же соображениям множество корректности оператора A может состоять лишь из точек вещественной оси. (Пример такого оператора см. в § 4, п. 3.)

Для ограниченного оператора множество корректности совпадает со всей плоскостью.

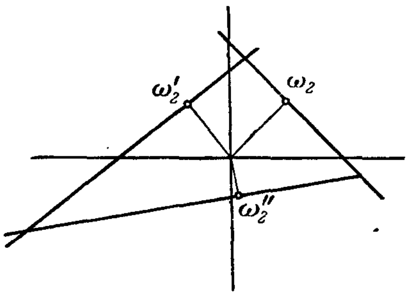

Рис. 2.

Теорема 1.8. *Если оператор A неограничен и имеет хотя бы одну регулярную точку, то его множество корректности лежит в некоторой полуплоскости.*

Доказательство. Если спектр оператора A имеет последовательность точек λ_n, уходящую на бесконечность, то можно считать, что $\arg\lambda_n \to \alpha$. При умножении оператора на ζ спектр его поворачивается на угол $\arg\zeta$, поэтому при ζ, не принадлежащем полуплоскости $\pi/2 - \alpha \leqslant \arg\zeta \leqslant 3\pi/2 - \alpha$, спектр оператора ζA будет содержать точки в любой правой полуплоскости и, в силу теоремы 1.3, задача Коши для этого оператора будет некорректной. Значит, в рассматриваемом случае, когда спектр оператора неограничен, множество корректности лежит в полуплоскости $\pi/2 - \alpha \leqslant \arg\zeta \leqslant 3\pi/2 - \alpha$.

Если спектр оператора A ограничен, то, как показано во введении, все пространство разлагается в прямую сумму $E = E_1 \dotplus E_2$ инвариантных подпространств E_1 и E_2 так, что в E_1 оператор A ограничен, а в E_2 его спектр пуст. Пусть $x_0 \in E_2$ и f — ограниченный линейный функционал на E. Функция $f(R(\lambda)x_0)$ аналитична во всей плоскости. Пусть теперь множество корректности содержит три луча, не лежащие в одной полуплоскости. Тогда вне треугольника, образованного некоторыми перпендикулярами к лучам, симметричным с данными относительно вещественной оси (рис. 2), для резольвенты будет справедлива оценка (1.15). Отсюда следует, что функция $f(R(\lambda)x_0)$ растет не быстрее линейной и, значит, сама является линейной. Так как, кроме того, в силу (1.17) она в полуплоскости стремится к нулю, то она тождественно равна нулю. Из этого вытекает, что $R(\lambda)x_0 = 0$ и $x_0 = 0$. Итак, E_2 состоит из нуля и, следовательно, оператор A ограничен, что противоречит условию.

Теорема доказана.

§ 2. Равномерно корректная задача Коши

1. Равномерная корректность, полугруппы класса C_0. Корректно поставленная задача Коши называется *равномерно корректной*, если из $x_n(0) \to 0$ следует, что $x_n(t) \to 0$ равномерно по t на каждом конечном промежутке $[0, T]$.

Теорема 2.1. *Для равномерно корректной задачи Коши при любом $x \in E$*

$$\lim_{t \to +0} U(t)x = x. \qquad (2.1)$$

Доказательство. Покажем сначала, что операторы $U(t)$ ограничены равномерно по t на каждом конечном протежутке $[0, T]$. Действительно, если предположить противное, мо найдутся последовательности точек $t_n \in [0, T]$ и элементов $w_n \in \mathscr{D}(A)$ с нормой $\|w_n\| = 1$ такие, что $\|U(t_n)w_n\| \geqslant n$. Положим $v_n = \frac{1}{n} w_n$. Тогда $\|v_n\| \to 0$, а $\|U(t_n)v_n\| \geqslant 1$, что невозможно в силу равномерной корректности задачи.

Из определения корректности следует, что операторы $U(t)$ при $t \to 0$ сильно сходятся к I на всюду плотном множестве $\mathscr{D}(A)$. По теореме Банаха — Штейнгауза, они сильно сходятся к I на любом $x \in E$.

Теорема доказана.

Определение 2.1. Полугруппа $U(t)$ *принадлежит классу* C_0, если она сильно непрерывна при $t > 0$ и удовлетворяет условию $\lim\limits_{t \to +0} U(t)\,x = x$ при любом $x \in E$.

Теорему 2.1 теперь можно переформулировать так:

Теорема 2.1′. *Полугруппа* $U(t)$, *порожденная равномерно корректной задачей Коши, принадлежит классу* C_0.

Исследуем полугруппы класса C_0 независимо от дифференциального уравнения. Производящий оператор $U'(0)$ снова определяется формулой (1.24) на тех элементах, где предел существует.

Теорема 2.2. *Если полугруппа принадлежит классу* C_0, *то для нее справедлива оценка*

$$\| U(t) \| \leqslant M e^{\omega t}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Обозначим $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \| U(t) \|$ через M. Этот supremum конечен в силу теоремы Банаха — Штейнгауза. Любое $t > 0$ представим в виде $t = n + \tau$, где $0 \leqslant \tau < 1$. Тогда $U(t) = U^n(1)\,U(\tau)$ и $\| U(t) \| \leqslant \| U(1) \|^n M = M e^{n \ln \| U(1) \|}$.

Если $\ln \| U(1) \| \leqslant 0$, то $\| U(t) \| \leqslant M$, т. е. (2.2) справедливо при $\omega = 0$. Если же $\ln \| U(t) \| > 0$, то

$$\| U(t) \| \leqslant M e^{(n+\tau) \ln \| U(1) \|} = M e^{t \ln \| U(1) \|},$$

т. е. (2.2) справедливо при $\omega = \ln \| U(1) \|$.

Теорема доказана *).

Если $\omega \leqslant 0$, то полугруппа ограничена, $\| U(t) \| \leqslant M$, и задача Коши равномерно корректна на $[0, \infty)$. В этом случае в пространстве E можно ввести эквивалентную норму, например, $\| x \|_1 = \sup\limits_{0 \leqslant t < \infty} \| U(t)\,x \|$, в которой операторы $U(t)$ имеют норму, не превосходящую 1. Действительно,

$$\| U(t)\,x \|_1 = \sup_{\tau} \| U(\tau)\,U(t)\,x \| = \sup_{\tau} \| U(t+\tau)\,x \| = \\ = \sup_{s \geqslant t} \| U(s)\,x \| \leqslant \| x \|_1.$$

---

*) Эта теорема следует из теоремы 1.2, но проще доказывается непосредственно.

Если $\|U(t)\| \leqslant 1$ $(0 \leqslant t < \infty)$, то полугруппа называется *сжимающей*.

Теорема 2.3. *Если полугруппа принадлежит классу C_0, то область определения $\mathscr{D}$ производящего оператора $U'(0)$ всюду плотна в пространстве E, более того, всюду плотно в E множество элементов, на которых определены все степени оператора $U'(0)$.*

Доказательство. Пусть R — класс числовых функций $k(\tau)$, финитных на $(0, \infty)$.

Рассмотрим множество $E(R)$ элементов вида

$$y = \int_0^\infty k(\tau) U(\tau) w \, d\tau, \qquad w \in E.$$

Для таких y при $h \to 0$ имеем

$$\frac{1}{h}[U(h)y - y] = \frac{1}{h}\int_0^\infty k(\tau)[U(\tau+h) - U(\tau)] w \, d\tau =$$

$$= \int_h^\infty \frac{1}{h}[k(\tau-h) - k(\tau)] U(\tau) w \, d\tau - \frac{1}{h}\int_0^h k(\tau) U(\tau) w \, d\tau \to$$

$$\to -\int_0^\infty k'(\tau) U(\tau) w \, d\tau = U'(0) y.$$

Аналогично можно получить, что $[U'(0)]^n y$ существует при любом n и

$$[U'(0)]^n y = (-1)^n \int_0^\infty k^{(n)}(\tau) U(\tau) w \, d\tau.$$

Покажем теперь, что $E(R)$ плотно в E. Если бы это было неверно, то существовал бы линейный ограниченный функционал $W^* \neq \Theta$ такой, что $W^*\{E(R)\} = 0$. Тогда

$$\int_0^\infty k(\tau) W^*[U(\tau) w] \, d\tau = 0.$$

Отсюда

$$W^*[U(\tau) w] \equiv 0, \quad \tau > 0.$$

Так как $U(\tau)w \to w$ при $\tau \to 0$ и W^* непрерывен, то это тождество в пределе дает $W^*[w] \equiv 0$ при произвольном w, т. е. W^* — нулевой функционал. Полученное противоречие свидетельствует о том, что $E(R)$ плотно в E. Так как $E(R) \subset \bigcap\limits_n \mathscr{D}\{[U'(0)]^n\}$, то теорема доказана.

Теорема 2.4. *Если полугруппа принадлежит классу C_0, то производящий оператор ее замкнут.*

Доказательство. Пусть w_n — последовательность точек из $\mathscr{D}$ такая, что $w_n \to w_0$ и $U'(0)w_n \to z_0$. Покажем, что $U'(0)w_0$ определен и равен z_0.

Для $w_n \in \mathscr{D}$ справедливо равенство:

$$\frac{1}{h}\int_0^h U(\tau)U'(0)w_n\,d\tau = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{dU(\tau)w_n}{d\tau}\,d\tau = \frac{1}{h}[U(h)-I]\,w_n.$$

Перейдя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\frac{1}{h}\int_0^h U(\tau)\,z_0\,d\tau = \frac{1}{h}[U(h)-I]\,w_0.$$

Пусть теперь $h \to 0$. Тогда левая часть стремится к z_0, т. е. $z_0 = U'(0)w_0$.

Теорема доказана.

Теорема 2.5. *Если полугруппа принадлежит классу C_0, то оператор $U'(0)$ для всех λ с достаточно большой вещественной частью имеет резольвенту.*

Доказательство. Введем оператор $\mathscr{J}(\lambda)$ по формуле (1.6) и докажем, что $\mathscr{J}(\lambda) = [U'(0) - \lambda I]^{-1}$. Действительно, пусть $w_0 \in \mathscr{D}$. Тогда

$$\mathscr{J}(\lambda)U'(0)w_0 = -\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)U'(0)w_0\,dt =$$

$$= -\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{dU(t)w_0}{dt}\,dt = -e^{-\lambda t}U(t)w_0\Big|_0^\infty -$$

$$-\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)w_0\,dt = w_0 + \lambda\mathscr{J}(\lambda)w_0.$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{J}(\lambda)[U'(0)-\lambda I]w_0 = w_0 \quad \text{при} \quad w_0 \in \mathcal{D}. \tag{2.3}$$

С другой стороны, при любом $w \in E$

$$U'(0)\mathcal{J}(\lambda)w = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{U(\Delta t)-I}{\Delta t}\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)w\,dt =$$

$$= -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t+\Delta t)w\,dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)w\,dt\right].$$

В первом интеграле сделаем замену $t+\Delta t=\tau$. Тогда

$$U'(0)\mathcal{J}(\lambda)w = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{\Delta t}^\infty e^{-\lambda(\tau-\Delta t)}U(\tau)w\,d\tau -\right.$$

$$\left.-\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)w\,dt\right] = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t}^\infty [e^{-\lambda(\tau-\Delta t)}-e^{-\lambda\tau}]U(\tau)w\,d\tau +$$

$$+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} e^{-\lambda t}U(t)w\,dt =$$

$$= -\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)w\,dt + w = \lambda\mathcal{J}(\lambda)w + w.$$

Получаем $[U'(0)-\lambda I]\mathcal{J}(\lambda)w = w$ при любом $w \in E$. Отсюда и из (2.3) следует, что $\mathcal{J}(\lambda)$ — резольвента оператора $U'(0)$.

Теорема доказана.

Таким образом, спектр производящего оператора полугруппы из C_0 лежит всегда в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \omega$.

Обратимся теперь к равномерно корректной задаче Коши для уравнения (1.1). Как указывалось в п. 4, § 1, оператор $U'(0)$ является расширением оператора A.

Теорема 2.6. *Если задача Коши для уравнения* (1.1) *равномерно корректна, то замыкание оператора A совпадает с оператором* $U'(0)$.

Доказательство. Оператор $U'(0)$ — замкнут и $A \subset U'(0)$, поэтому A допускает замыкание $\bar{A}$ и $\bar{A} \subset U'(0)$. Как было показано в (1.7), при этом

$$(\bar{A} - \lambda I)\, \mathcal{J}(\lambda)\, x = x \qquad (x \in \mathcal{D}(A)).$$

В силу ограниченности $\mathcal{J}(\lambda)$ это равенство справедливо при любом $x \in E$. Но резольвента $\mathcal{J}(\lambda)$ оператора $U'(0)$ отображает все пространство E на область определения $\mathcal{D}(U'(0))$. Поэтому $\mathcal{D}(U'(0)) \subset \mathcal{D}(\bar{A})$ и, следовательно, $\bar{A} = U'(0)$.

Теорема доказана.

Возникает вопрос о том, всегда ли будет корректной задача

$$\frac{dw}{dt} = U'(0)\, w, \tag{2.4}$$

$$w(0) = w_0 \in \mathcal{D}, \tag{2.5}$$

где $U'(0)$ — производящий оператор полугруппы класса C_0.

Положительный ответ на этот вопрос дает теорема:

Теорема 2.7. *Задача* (2.4), (2.5) — *равномерно корректна.*

Доказательство. При любом $w_0 \in \mathcal{D}$ функция $w(t) = U(t)\, w_0$ является решением уравнения (2.4) и, в силу оценки (2.2), непрерывно зависит от w_0 равномерно по t на каждом конечном отрезке. Для доказательства теоремы достаточно установить, что решение $w(t)$ единственно. Пусть $w_1(t)$ — другое решение (2.4) на отрезке $[0, T]$, удовлетворяющее тому же начальному условию $w_1(0) = w_0$.

Построим функцию $v(t) = U(t)\, w_0 - w_1(t)$, являющуюся решением на $[0, T]$ уравнения (2.4) и удовлетворяющую нулевому начальному условию $v(0) = 0$.

Очевидно, что элемент $v(T) \in \mathcal{D}$. Определим функцию

$$v_1(t) = \begin{cases} v(t), & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ U(t-T)\, v(T), & T \leqslant t < \infty. \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению (2.4) при всех $t \geqslant 0$. Рассмотрим преобразование Лапласа от функции $v_1(t)$:

$$\mathrm{X}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} v_1(t)\, dt,$$

которое определено при $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ в силу оценки (2.2).

Рассуждая так же, как и при выводе (2.3), получим

$$(U'(0) - \lambda I)\,\mathrm{X}(\lambda) = v_1(0) = 0.$$

Так как оператор $U'(0)$ при $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ имеет резольвенту, то $\mathrm{X}(\lambda) \equiv 0$ ($\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$). В силу теоремы единственности для преобразования Лапласа $v_1(t) \equiv 0$, откуда

$$v(t) = U(t)\,w_0 - w_1(t) \equiv 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant T).$$

Единственность решения $U(t)\,w_0$ установлена.

Теорема доказана.

Таким образом, мы приходим к следующему основному результату:

Теорема 2.8. *Для того чтобы задача* (1.1), (1.2), *где A — замкнутый оператор, была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы A был производящим оператором полугруппы класса C_0.*

Итак, если ограничиться уравнениями с замкнутыми операторами, то класс уравнений, для которых задача Коши равномерно корректна, совпадает с классом уравнений, у которых оператор A является производящим для полугруппы класса C_0.

2. Построение решений путем аппроксимации. Если в уравнении (1.1) оператор A ограничен, то задача Коши, очевидно, является равномерно корректной, и полугруппа $U(t)$ представима в виде $U(t) = e^{tA}$.

Оказывается, что всякая равномерно корректная задача является в известном смысле предельной для задач с ограниченными операторами.

Теорема 2.9. *Для того чтобы задача* (1.1)—(1.2), *где A — замкнутый оператор, была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы оператор A имел резольвенту при достаточно больших $\lambda > 0$ и являлся сильным пределом последовательности ограниченных коммутирующих друг с другом операторов A_n таких, что*

$$\left\| e^{tA_n} \right\| \leqslant M e^{\omega t}, \tag{2.6}$$

где M и ω не зависят от n.

Доказательство. Достаточность. Рассмотрим тождество

$$e^{tA_n} - e^{tA_m} = \int_0^t e^{(t-s)A_n}(A_n - A_m)e^{sA_m}\,ds,$$

получаемое интегрированием выражения

$$\frac{d}{ds}\left(e^{(t-s)A_n}e^{sA_m}\right) = e^{(t-s)A_n}(A_m - A_n)e^{sA_m}.$$

Так как оператор A_n коммутирует с A_m, то он коммутирует и с e^{sA_m}. Учитывая это и (2.6), для любого v получим:

$$\| e^{tA_n}v - e^{tA_m}v \| \leqslant \int_0^t \| e^{(t-s)A_n} \| \|e^{sA_m}\| \| (A_n - A_m)v \| \,ds \leqslant$$
$$\leqslant M^2 t e^{t\omega} \| (A_n - A_m)v \|. \quad (2.7)$$

Пусть $v_0 \in \mathcal{D}(A)$. Тогда $A_n v_0 \to A v_0$ и, следовательно,

$$\| (A_n - A_m)v_0 \| \to 0.$$

Из (2.7) тогда следует, что функции $e^{tA_n}v_0$ сходятся равномерно по t в любом конечном промежутке. Так как $\mathcal{D}(A)$ плотно в E, и операторы e^{tA_n} равномерно ограничены на любом отрезке $[0, T]$, то функции $e^{tA_n}v$ равномерно по t сходятся на этом отрезке при любом v.

Предел последовательности $e^{tA_n}v$ обозначим через $U(t)v$. Очевидно, что $U(t)$ является линейным ограниченным оператором, сильно непрерывным по t при $t \geqslant 0$.

Переходом к пределу в тождестве

$$e^{tA_n}e^{sA_n}v = e^{(t+s)A_n}v$$

устанавливаем, что операторы $U(t)$ образуют полугруппу. Так как операторы e^{tA_n} при $t = 0$ равны I, то $U(0) = I$ и следовательно, полугруппа $U(t)$ принадлежит классу C_0.

Если перейти к пределу в тождестве

$$e^{tA_n}v_0 - v_0 = \int_0^t e^{sA_n}A_n v_0\,ds$$

при $v_0 \in \mathscr{D}(A)$, то получится

$$U(t)v_0 - v_0 = \int_0^t U(s)Av_0\,ds.$$

Отсюда следует, что

$$U'(0)v_0 = Av_0.$$

Это показывает, что $U'(0) \supset A$. В силу теоремы 2.5 оператор $U'(0)$ имеет резольвенту при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, оператор A имеет резольвенту $R(\lambda, A)$ по условию. Тогда

$$[U'(0) - \lambda I]\,R(\lambda, A) = [A - \lambda I]\,R(\lambda, A) = I \quad \text{на } \mathscr{D}(A).$$

Применяя к обеим частям резольвенту оператора $U'(0)$, получим

$$R(\lambda, A) = R(\lambda, U'(0)).$$

Отсюда следует, что $U'(0) = A$. В силу теоремы 2.7 задача Коши равномерно корректна.

Необходимость. Пусть задача равномерно корректна. Так как оператор A замкнут, то в силу теоремы 2.8 он является производящим оператором некоторой полугруппы $U(t)$: $A = U'(0)$. Резольвента оператора A дается формулой (1.8), поэтому для нее в силу (2.2) справедливо неравенство

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}. \tag{2.8}$$

Рассмотрим операторы

$$A_n = -\lambda_n I - \lambda_n^2 R(\lambda_n),$$

где λ_n вещественны и $\lambda_n \to +\infty$.

Операторы A_n — ограничены. Покажем, что они сильно сходятся к оператору A. Пусть $v_0 \in \mathscr{D}(A)$. Тогда

$$A_n v_0 = -\lambda_n R(\lambda_n)\,Av_0. \tag{2.9}$$

Операторы $\lambda_n R(\lambda_n)$ сильно сходятся к оператору $-I$. Действительно, в силу (2.8) при $w_0 \in \mathscr{D}(A)$

$$\|\lambda_n R(\lambda_n)w_0 + w_0\| = \|R(\lambda_n)Aw_0\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\lambda_n - \omega}\|Aw_0\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{2.10}$$

Далее, нормы операторов $\lambda_n R(\lambda_n)$ равномерно ограничены, так как

$$\|\lambda_n R(\lambda_n)\| \leqslant \frac{M\lambda_n}{\lambda_n - \omega} \leqslant 2M \quad \text{при} \quad \lambda_n > 2\omega. \tag{2.11}$$

По теореме Банаха—Штейнгауза из (2.10) и (2.11) следует, что

$$\lambda_n R(\lambda_n) w \to -w$$

при любом w.

Положив $w = Av_0$, из (2.9) получим

$$A_n v_0 \to Av_0.$$

Покажем теперь, что для операторов A_n справедлива оценка (2.6). Имеем

$$e^{tA_n} = e^{-\lambda_n t - \lambda_n^2 R(\lambda_n)t} = e^{-\lambda_n t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n^2 t)^k R^k(\lambda_n)}{k!} (-1)^k.$$

Дифференцируя формулу (1.8) $k-1$ раз по λ, получаем

$$\frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} R(\lambda) w = (-1)^k \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-\lambda t} U(t) w\, dt. \tag{2.12}$$

Законность дифференцирования под знаком интеграла обеспечивается оценкой (2.2).

С другой стороны,

$$\frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} R(\lambda) w = (k-1)!\, R^k(\lambda) w. \tag{2.13}$$

Из (2.12), (2.13) и оценки (2.2) следует

$$\|R^k(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{(k-1)!} \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-(\operatorname{Re}\lambda - \omega)t} dt = \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^k}. \tag{2.14}$$

Оценим теперь норму оператора e^{tA_n}

$$\|e^{tA_n}\| \leqslant e^{-\lambda_n t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^{2k} t^k M}{k!\,(\lambda_n - \omega)^k} = Me^{-\lambda_n t} e^{\frac{\lambda_n^2 t}{\lambda_n - \omega}} =$$

$$= Me^{t\frac{\lambda_n \omega}{\lambda_n - \omega}} \leqslant Me^{2\omega t} \quad \text{при } \lambda_n > 2\omega. \tag{2.15}$$

Операторы A_n очевидно коммутируют друг с другом и, следовательно, удовлетворяют всем условиям теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 2.1. При доказательстве второй части теоремы из свойств оператора A была использована только оценка (2.14) при $\lambda = \lambda_k$. Поэтому аналогично доказывается, что для построения последовательности операторов A_n, удовлетворяющих условиям теоремы 2.9, достаточно существования чисел ω и M и последовательности вещественных чисел $\lambda_n \to \infty$ таких, что

$$\| R^k(\lambda_n) \| \leqslant \frac{M}{(\lambda_n - \omega)^k}.$$

При этом операторы A_n снова строятся по формуле

$$A_n = -\lambda_n I - \lambda_n^2 R(\lambda_n). \tag{2.16}$$

С другой стороны, если задача (1.1) — (1.2) корректна и оператор A замкнут, то его резольвента удовлетворяет неравенству (2.14) при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$.

Таким образом, можно сформулировать теорему:

Теорема 2.10. *Для того чтобы задача Коши для уравнения* (1.1) *с замкнутым оператором A была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы для резольвенты $R(\lambda)$ оператора A выполнялось условие*

$$\| R^n(\lambda) \| \leqslant \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n} \qquad (\operatorname{Re}\lambda > \omega) \tag{2.17}$$

при некоторых ω и M. При этом для соответствующей полугруппы справедливо неравенство

$$\| U(t) \| \leqslant M e^{\omega t}.$$

Последнее утверждение получается предельным переходом при $n \to \infty$ в одном из промежуточных неравенств в (2.15):

$$\| e^{tA_n} x \| \leqslant M e^{t \frac{\lambda_n \omega}{\lambda_n - \omega}} \| x \|.$$

Условие (2.17), вообще говоря, проверяется нелегко. Очевидно, что для выполнения его достаточно выполнения неравенства

$$\| R(\lambda) \| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}. \tag{2.18}$$

При наличии такой оценки для полугруппы справедливо неравенство

$$\|U(t)\| \leqslant e^{\omega t}.$$

В частности, если $\omega = 0$, то $\|U(t)\| \leqslant 1$ и полугруппа — сжимающая.

Следует подчеркнуть, что выполнение лишь условия

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{\lambda - \omega} \qquad (\lambda > \omega)$$

с $M > 1$ не является достаточным для равномерной корректности задачи Коши. Это показывает пример 2 § 1 гл. XII книги [1].

3. Единственность и корректность. В некоторых случаях из существования и единственности решений задачи Коши следует ее корректность.

Пусть выполнено условие:

$\mathscr{E}$. *Для уравнения* (1.1) *с замкнутым оператором* A *при любом* $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ *существует единственное решение задачи Коши, непрерывно дифференцируемое на* $[0, T]$.

Заметим, что для равномерно корректной задачи Коши производная решения непрерывна на $[0, \infty)$:

$$\frac{dU(t)x_0}{dt} = U(t)Ax_0.$$

Введем на $\mathscr{D}(A)$ норму $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$ и превратим его в банахово пространство E_A. Через $C(E_A)$ обозначим пространство всех непрерывных на $[0, T]$ функций $x(t)$ со значениями в E_A с обычной нормой

$$\|x\|_C = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|x(t)\|_A.$$

Каждому $x_0 \in E_A$ ставится в соответствие решение задачи Коши $x(t)$, которое в силу условия $\mathscr{E}$ принадлежит пространству $C(E_A)$. Таким образом определяется линейный оператор F из E_A в $C(E_A)$: $Fx_0 = x(t)$. Покажем, что этот оператор замкнут. Пусть $x_0^{(n)} \to x_0$ в E_A и $Fx_0^{(n)} = x_n(t) \to v(t)$ в $C(E_A)$. Тогда, в частности, $\frac{dx_n}{dt} = Ax_n(t) \to Av(t)$ в E

равномерно по t, поэтому в тождестве

$$x_n(t) = x_0^{(n)} + \int_0^t \frac{dx_n}{dt}\, dt$$

можно перейти к пределу. Получим

$$v(t) = x_0 + \int_0^t Av(t)\, dt.$$

Отсюда следует, что $v(t)$ является решением задачи Коши с начальным значением x_0, непрерывно дифференцируемым на $[0, T]$. В силу единственности такого решения $v(t) = Fx_0$, т. е. оператор F замкнут.

Из замкнутости оператора F следует его ограниченность, так как он определен на всем пространстве E_A.

Таким образом, для решений задачи Коши имеет место неравенство

$$\| x(t) \|_A \leqslant k \| x_0 \|_A \qquad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{2.19}$$

Повторяя рассуждения § 1, можно представить решения задачи Коши через некоторую полугруппу $U(t)$ ограниченных в E_A операторов: $x(t) = U(t) x_0$ (ограниченность операторов $U(t)$ следует из неравенства (2.19)). Из условия $\mathscr{E}$ вытекает, что эта полугруппа удовлетворяет C_0-условию.

Естественно поставить вопрос о нахождении производящего оператора полугруппы $U(t)$. Для ответа на этот вопрос предварительно покажем, что на $\mathscr{D}(A^2)$ операторы $U(t)$ и A коммутируют. Пусть $x_0 \in \mathscr{D}(A^2)$; тогда функции $U(t) Ax_0$ и $\frac{dU(t) Ax_0}{dt} = AU(t) Ax_0$ — непрерывны на $[0, T]$ и поэтому

$$U(t) Ax_0 = Ax_0 + \int_0^t AU(t) Ax_0\, dt = \\ = A\left[x_0 + \int_0^t U(t) Ax_0\, dt\right]. \tag{2.20}$$

Функция, стоящая в скобках,

$$z(t) = x_0 + \int_0^t U(t) Ax_0\, dt$$

непрерывно дифференцируема на $[0, T]$, и ее производная

$$\frac{dz}{dt} = U(t)Ax_0 = Az(t)$$

в силу (2.20). Из единственности решения задачи Коши следует, что $z(t) = U(t)x_0$. Тогда (2.20) перепишется в виде

$$U(t)Ax_0 = AU(t)x_0 \qquad (x_0 \in \mathscr{D}(A^2)).$$

Из этого соотношения вытекает, что при $x_0 \in \mathscr{D}(A^2)$ и $\Delta t \to 0$

$$\frac{U(\Delta t) - I}{\Delta t} x_0 \to Ax_0 \qquad (\text{в } E)$$

и

$$A\frac{U(\Delta t) - I}{\Delta t} x_0 = \frac{U(\Delta t) - I}{\Delta t} Ax_0 \to A^2x_0 \qquad (\text{в } E),$$

т. е. функция $U(t)x_0$ дифференцируема в нуле в норме пространства E_A. Ее производная в нуле равна Ax_0. Таким образом, оператор $U'(0)$ определен на $\mathscr{D}(A^2)$ и на нем совпадает с A. Обратно, если $x_0 \in \mathscr{D}(U'(0))$, то

$$\frac{U(\Delta t) - I}{\Delta t} x_0 \to Ax_0 \qquad (\text{в } E)$$

и выражение

$$A\frac{U(\Delta t) - I}{\Delta t} x_0$$

также имеет предел в E. Из замкнутости A следует, что $Ax_0 \in \mathscr{D}(A)$, т. е. $x_0 \in \mathscr{D}(A^2)$.

Мы приходим к утверждению:

Теорема 2.11. *Если для уравнения* (1.1) *выполнено условие $\mathscr{E}$, то для этого уравнения в пространстве E_A будет равномерно корректной задача Коши с начальным условием $x(0) = x_0 \in \mathscr{D}(A^2)$.*

При дополнительном условии из $\mathscr{E}$ вытекает равномерная корректность задачи Коши в исходном пространстве.

Теорема 2.12. *Если выполнено условие $\mathscr{E}$ и оператор A имеет хотя бы одну регулярную точку, то задача Коши равномерно корректна в пространстве E.*

Доказательство. Пусть λ_0 — регулярная точка оператора A, $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ и $y_0 = R(\lambda_0)x_0$. Очевидно, $y_0 \in \mathscr{D}(A^2)$, поэтому

$$U(t)x_0 = U(t)Ay_0 - \lambda_0U(t)y_0 = AU(t)y_0 - \lambda_0U(t)y_0.$$

Отсюда

$$\| U(t) x_0 \| \leqslant \| AU(t) y_0 \| + |\lambda_0| \, \| U(t) y_0 \| \leqslant M_0 \| U(t) y_0 \|_{E_A}.$$

В силу (2.19)

$$\| U(t) x_0 \| \leqslant M_0 C (\| y_0 \| + \| A y_0 \|) = \\ = M_0 C (\| y_0 \| + \| x_0 + \lambda_0 y_0 \|) \leqslant M_1 (\| x_0 \| + \| y_0 \|).$$

Так как $\| y_0 \| = \| R(\lambda_0) x_0 \| \leqslant \| R(\lambda_0) \| \, \| x_0 \|$, то

$$\| U(t) x_0 \| \leqslant M \| x_0 \| \qquad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

откуда следует равномерная корректность задачи Коши.

Теорема доказана.

Если условие $\mathscr{E}$ заменить более слабым:

$\mathscr{E}_0$. *Оператор A замкнут и для любого $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ существует единственное решение задачи Коши, производная которого непрерывна на* $(0, T]$ *и суммируема на* $[0, T]$, то для оператора A с регулярной точкой можно доказать равномерную корректность задачи Коши. Делается это аналогично предыдущему с той разницей, что оператор F, ставящий в соответствие x_0 решение задачи Коши $x(t)$, рассматривается теперь как оператор из пространства E_A в пространство функций $S(E_A)$, непрерывных на $(0, T]$ и суммируемых на $[0, T]$. Это пространство является полным в метрике

$$d[x, y] = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\| x - y \|_n}{1 + \| x - y \|_n},$$

где $\| x \|_0 = \int_0^T \| x(t) \| \, dt$ и $\| x \|_n = \sup_{1/n \leqslant t \leqslant T} \| x(t) \|$.

Неравенство (2.19) получается с константой, зависящей от t. Из него следует корректность задачи Коши.

Получить корректность задачи Коши только из существования и единственности решения задачи Коши не удается, так как в пространстве функций только непрерывных в норме E_A на $(0, T]$, по-видимому, нет топологии, в которой оно было бы полным, а оператор F — замкнутым.

Аналогично теореме 2.12 доказывается следующее утверждение:

Теорема 2.13. *Если оператор A имеет регулярные точки и для каждого $x_0 \in \mathscr{D}(A^n)$ (n фиксировано) суще-*

ствует единственное n раз непрерывно дифференцируемое решение задачи Коши для уравнения (1.1), *то задача Коши для этого уравнения равномерно корректна.*

При доказательстве $\mathscr{D}(A^n)$ превращается в банахово пространство с помощью нормы

$$\|x\|_n = \sum_{k=0}^{n} \|A^k x\|.$$

4. Множества равномерной корректности. Аналитичность. Аналогично тому, как это было сделано в § 1, п. 5, назовем *множеством равномерной корректности* оператора A совокупность точек ζ комплексной плоскости, для которых задача Коши

$$\frac{dx}{dt} = \zeta A x, \qquad x(0) = x_0 \in \mathscr{D}(A),$$

равномерно корректна. Обозначим это множество через K_A^c. Множество K_A^c, так же как и K_A, состоит из лучей, исходящих из начала координат.

Пусть точка $\zeta_0 = e^{i\varphi}$ принадлежит множеству равномерной корректности. В силу теоремы 2.10 для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\left\|R^n_{e^{i\varphi}A}(\sigma + i\tau)\right\| = \left\|\left(e^{i\varphi}A - (\sigma + i\tau)I\right)^{-n}\right\| \leqslant \frac{M}{(\sigma - \omega)^n}$$
$$(n = 1, 2, \ldots)$$

при некотором $M > 0$ и вещественном ω, или

$$\left\|R^n\left(\sigma e^{-i\varphi} + \tau e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}\right)\right\| \leqslant \frac{M}{(\sigma - \omega)^n}.$$

Обозначим переменную точку на луче $\arg\zeta = -\varphi$ через z: $z = \sigma e^{-i\varphi}$, на перпендикулярной к нему прямой $\arg\zeta = \pm\pi/2 - \varphi$ через η и точку $\omega e^{-i\varphi}$ через z_0. Тогда последнее неравенство можно записать в виде

$$\|R^n(z + \eta)\| \leqslant \frac{M}{|z - z_0|^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.21}$$

Итак, справедлива

Теорема 2.10′. *Для того чтобы луч $\arg\zeta = \varphi$ принадлежал множеству равномерной корректности оператора A, необходимо, чтобы выполнялись условия* (2.21), *где $M > 0$, z_0 — точка на луче $\arg z = -\varphi$, z — любая* *точка на этом луче с* $|z|>|z_0|$ *и* η — *произвольная точка на прямой, перпендикулярной к этому лучу. Достаточным условием является выполнение* (2.21) *при* $\eta=0$.

Множество K_A^c является частью множества K_A и в силу теоремы 1.8 лежит в некоторой полуплоскости.

Теорема 2.14. *Множество равномерной корректности оператора* A *представляет собой замкнутый или открытый сектор с углом раствора* ψ: $0\leqslant\psi\leqslant\pi$, *либо прямую.*

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что вместе с двумя лучами $\arg\zeta=\varphi_1$ и $\arg\zeta=\varphi_2$ $(0<\varphi_2-\varphi_1<\pi)$ множеству равномерной корректности принадлежит и всякий луч $\arg\zeta=\varphi$ при $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$. Итак, пусть $e^{i\varphi_1}\in K_A^c$ и $e^{i\varphi_2}\in K_A^c$. Это означает, что на соответствующих лучах справедливы оценки

$$\|R^n(z+\eta_1)\|\leqslant\frac{M_1}{|z-z_1|^n}$$

и

$$\|R^n(z+\eta_2)\|\leqslant\frac{M_2}{|z-z_2|^n}. \tag{2.22}$$

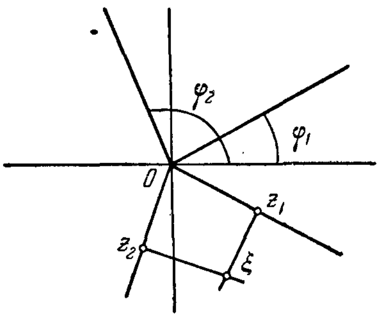

Рис. 3.

Выберем специальным образом η_1 и η_2, а именно: восставим в точках z_1 и z_2 перпендикуляры к лучам $\arg z=-\varphi_1$ и $\arg z=-\varphi_2$ соответственно (рис. 3), точку пересечения этих перпендикуляров обозначим через ξ и положим $\eta_1=\xi-z_1$ и $\eta_2=\xi-z_2$. Введем в рассмотрение оператор $A_1=A-\xi I$.

Простой подсчет показывает, что для резольвенты этого оператора справедливы неравенства

$$\|R_{A_1}^n(z)\|\leqslant\frac{M_1}{|z|^n} \quad \text{и} \quad \|R_{A_1}^n(z)\|\leqslant\frac{M_2}{|z|^n}, \tag{2.23}$$

где z соответственно меняется на лучах $\arg z=-\varphi_1$ и $\arg z=-\varphi_2$ $(0<|z|<\infty)$.

Функция $z^nR_{A_1}^n(z)$ аналитична в угле $-\varphi_2\leqslant\arg z\leqslant\varphi_1$; из (2.22) видно, что она ограничена внутри угла (для нее справедлива оценка вида $\left\| z^n R^n_{A_1}(z) \right\| \leqslant \dfrac{M}{\left| \cos \dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right|^n} \Bigg)$, и в силу (2.23) ее значения на сторонах угла ограничены

$$\left\| z^n R^n_{A_1}(z) \right\| \leqslant M = \max(M_1, M_2).$$

Из принципа Фрагмена — Линделёфа следует, что последняя оценка справедлива и внутри угла, т. е.

$$\left\| R^n_{A_1}(z) \right\| \leqslant \frac{M}{|z|^n} \qquad (-\varphi_2 \leqslant \arg z \leqslant -\varphi_1). \tag{2.24}$$

По теореме 2.10′ задача Коши равномерно корректна для оператора $\zeta A_1 = \zeta A - \xi\zeta I$ при всех ζ в секторе $\varphi_1 \leqslant \arg\zeta \leqslant \varphi_2$. То же будет иметь место и для оператора A, т. е. $\zeta \in K^c_{A_1}$.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и теоремы 1.6 получаем

Следствие. *Если задача Коши равномерно корректна для двух лучей* $\arg\zeta = \varphi_1$ *и* $\arg\zeta = \varphi_2$ $(0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi)$, *то ее решения допускают продолжения в сектор* $\varphi_1 < \arg\zeta < \varphi_2$, *внутри которого они будут аналитическими функциями. Соответствующая полугруппа* $U(\zeta)$ *будет аналитической внутри этого сектора, и для нее будет справедлива оценка*

$$\| U(\zeta) \| \leqslant M e^{\omega|\zeta|}. \tag{2.25}$$

Замечание 2.2. Используя теорему Неванлинна*), можно получить менее грубое, чем $\max(M_1, M_2)$, выражение для константы M в (2.24):

$$M = M_1^{\frac{\varphi_2 - \varphi}{\varphi_2 - \varphi_1}} M_2^{\frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}}.$$

Замечание 2.3. Если $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$, то $\xi = 0$, и для полугруппы будет оценка $\| U(\zeta) \| \leqslant M$. В частности, если на двух лучах полугруппа была сжимающей $(M = 1)$, то она будет сжимающей и внутри сектора.

Отметим, что в случае, когда задача Коши корректно разрешима на луче $\arg\zeta = \varphi$, резольвента определена в

---

*) Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, 1941, стр. 48.

полуплоскости $-(\pi/2+\varphi) \leqslant \arg\zeta \leqslant \pi/2-\varphi$. Если задача Коши равномерно корректна в секторе $\varphi_1 < \arg\zeta < \varphi_2$ и для соответствующей полугруппы справедлива в этом секторе оценка (2.25), то резольвента определена в секторе $-\pi/2-\varphi_2 < \arg z < \pi/2-\varphi_1$, угол раствора которого равен $\pi+\varphi_2-\varphi_1$. Этот сектор содержит внутри себя лучи $\arg z=\varphi_1$ и $\arg z=\varphi_2$. На каждом луче $\arg z=\varphi\,(\varphi_1<\varphi<\varphi_2)$ для резольвенты справедливо неравенство

$$\|R^n(z)\| \leqslant \frac{M}{|z-\omega e^{i\varphi}|^n}.$$

По непрерывности это неравенство распространяется и на граничные лучи $\arg z_1=-\varphi_1$ и $\arg z_2=-\varphi_2$. Таким образом, задача Коши будет равномерно корректной в замкнутом секторе $\varphi_1 \leqslant \arg\zeta \leqslant \varphi_2$.

Мы приходим к утверждению:

Теорема 2.15. *Для того чтобы полугруппа* $U(\zeta)$, *отвечающая задаче Коши, была аналитической в секторе* $\varphi_1 < \arg\zeta < \varphi_2$ *и удовлетворяла в нем условию* (2.25), *необходимо и достаточно, чтобы задача Коши была равномерно корректной на лучах* $\arg\zeta=\varphi_1$ *и* $\arg\zeta=\varphi_2$.

В следующем параграфе мы еще раз вернемся к вопросу об аналитичности полугруппы $U(\zeta)$ в секторе и дадим более эффективный критерий аналитичности (§ 3, теорема 3.8).

§ 3. Ослабленная задача Коши

1. Постановка задачи. Для многих приложений часто приходится расширять понятие решения задачи Коши.

Определение 3.1. *Ослабленным решением* уравнения $x'=Ax$ на отрезке $[0, T]$ называется функция $x(t)$, непрерывная на $[0, T]$, сильно непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая уравнению на $(0, T]$.

Под *ослабленной задачей Коши* на $[0, T]$ понимают задачу о нахождении ослабленного решения, удовлетворяющего начальному условию $x(0)=x_0$. Здесь элемент x_0 может уже не принадлежать области определения оператора A.

Таким образом, мы ослабили требования на поведение решения в нуле. С другой стороны, мы потребовали непрерывность производной решения при $t>0$. Однако, как было показано на стр. 41, для корректной задачи Коши это требование автоматически выполняется.

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое линейное множество из E. Будем говорить, что для множества $\mathcal{M}$ на отрезке $[0, T]$ разрешима ослабленная задача Коши, если решение этой задачи существует при каждом $x_0 \in \mathcal{M}$; *однозначно разрешима* ослабленная задача Коши, если она разрешима и решение единственно на $[0, T]$; *корректна* или *равномерно корректна* ослабленная задача Коши, если решение, кроме того, непрерывно зависит от начальных данных из $\mathcal{M}$ при каждом $t \in [0, T]$ или равномерно по $t \in [0, T]$. Заметим, что, в отличие от обычной задачи Коши, здесь существенно указание отрезка $[0, T]$, на котором ослабленная задача Коши обладает тем или иным свойством. Рассуждения § 1, связанные с продолжением решения за отрезок $[0, T]$, неприменимы, так как заранее неизвестно, будут ли значения решения $x(T)$ принадлежать множеству, для которого ослабленная задача Коши разрешима хоть на каком-нибудь отрезке. Если даже $x(T)$ принадлежит этому множеству, то неясно, можно ли гладко склеить решение при $t \leqslant T$ и $t \geqslant T$.

Между решениями обычной и ослабленной задачи Коши существует простая связь, если оператор A имеет хотя бы одну регулярную точку. Пусть функция $x(t)$ является ослабленным решением уравнения (1.1). Рассмотрим функцию $x_1(t) = R(\lambda_0)\, x(t)$ и вычислим при $t > 0$ ее производную:

$$\frac{dx_1}{dt} = R(\lambda_0)\frac{dx}{dt} = R(\lambda_0)\, Ax(t) = x(t) + \lambda_0 R(\lambda_0)\, x(t) = \\ = Ax_1(t). \qquad (3.1)$$

Из предпоследнего выражения для производной $\frac{dx_1}{dt}$ видно, что она непрерывна на $[0, T]$ и при $t \to 0$ имеет предел $x(0) + \lambda_0 R(\lambda_0)\, x_0$. Из леммы 1.2 следует, что $x_1(t)$ является непрерывно дифференцируемым на $[0, T]$ решением задачи Коши с начальным условием $x_1(0) = R(\lambda_0)\, x(0)$. Отметим еще, что, как видно из формулы (3.1), функция $x_1(t)$ имеет вторую производную, непрерывную на $[0, T]$.

Обратно, если $x_1(t)$ является решением задачи Коши, непрерывно дифференцируемым на $(0, T]$ и дважды непрерывно дифференцируемым на $(0, T]$, то функция $x(t) = (A - \lambda_0 I)\, x_1(t)$ будет ослабленным решением задачи Коши с начальным условием

$x(0) = (A - \lambda_0 I)\, x_1(0)$. Действительно, $x(t)$ непрерывна на $[0, T]$, так как $x(t) = \frac{dx_1}{dt} - \lambda_0 x_1(t)$, и имеет непрерывную производную $\frac{dx}{dt} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \lambda_0 \frac{dx_1}{dt}$ на $(0, T]$. Наконец, из замкнутости оператора A следует, что при $t > 0$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{dAx_1}{dt} = A\,\frac{dx_1}{dt} = A^2 x_1,$$

и, значит,

$$\frac{dx}{dt} = A^2 x_1 - \lambda_0 A x_1 = Ax \qquad (t \in (0, T]).$$

Итак, резольвента $R(\lambda_0)$ осуществляет взаимно однозначное отображение множества всех ослабленных решений уравнения (1.1) на множество всех тех истинных решений, которые непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$ и дважды непрерывно дифференцируемы на $(0, T]$. Изучение ослабленных решений принципиально сводится к изучению решений задачи Коши со специальными свойствами. Однако практически часто удобнее непосредственно изучать ослабленные решения, чем их гладкие образы.

Если для уравнения (1.1) задача Коши корректна, и оператор A имеет регулярную точку, то всякое ослабленное решение $x(t)$ является обобщенным, т. е. $x(t) = U(t)\, x_0$, где $U(t)$ — полугруппа, порожденная задачей Коши. Действительно, функция $x_1(t) = R(\lambda_0)\, x(t)$ является решением задачи Коши с начальным условием $x_1(0) = R(\lambda_0)\, x(0)$, поэтому $x_1(t) = U(t)\, R(\lambda_0)\, x(0)$, или $x_1(t) = R(\lambda_0)\, U(t)\, x(0)$. Приравнивая $R(\lambda_0)\, x(t) = R(\lambda_0)\, U(t)\, x(0)$, получаем $x(t) = U(t)\, x_0$.

Так как, по условию, $x(t)$ непрерывно дифференцируема при $t > 0$, то ослабленное решение представимо через резольвенту по формуле (1.12):

$$x(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda)\, x(0)\, d\lambda. \tag{3.2}$$

2. Ослабленная задача Коши, корректная на $\mathscr{D}(A)$. Если ослабленная задача Коши корректна на множестве $\mathscr{M} \supset \mathscr{D}(A)$ при всех $t \in (0, \infty)$, то будем коротко говорить, что она *корректна на* $\mathscr{D}(A)$. Повторяя рассуждения, проведенные для корректной задачи Коши, мы придем к выводу, что решения ослабленной задачи Коши, корректной на $\mathcal{D}(A)$, задаются формулой

$$x(t) = U(t)\, x_0,$$

где $U(t)$ — сильно непрерывная полугруппа ограниченных операторов. Если при этом оператор A имеет регулярную точку λ_0, то операторы $U(t)\, R(\lambda_0)$ будут равномерно ограничены на всяком отрезке $[0, T]$ и будут сильно сходиться к $R(\lambda_0)$ при $t \to 0$.

Далее, функция $R(\lambda_0)\, U(t)\, x_0$ при $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, как было показано выше, является решением задачи Коши с начальным значением $R(\lambda_0)\, x_0$. В силу единственности ослабленного решения

$$R(\lambda_0)\, U(t)\, x_0 = U(t)\, R(\lambda_0)\, x_0 \qquad (x_0 \in \mathcal{D}(A)).$$

Слева и справа стоят ограниченные операторы, поэтому равенство справедливо при любом $x \in E$, т. е. полугруппа $U(t)$ коммутирует с резольвентой. Отсюда вытекает, что на $\mathcal{D}(A)$ операторы $U(t)$ коммутируют с оператором A. Действительно,

$$\begin{aligned} AU(t)\, x_0 &= AU(t)\, R(\lambda_0)(A - \lambda_0 I)\, x_0 = \\ &= AR(\lambda_0)\, U(t)(A - \lambda_0 I)\, x_0 = \\ &= U(t)(A - \lambda_0 I)\, x_0 + \lambda_0 R(\lambda_0)\, U(t)(A - \lambda_0 I)\, x_0 = \\ &= U(t)\, Ax_0, \qquad x_0 \in \mathcal{D}(A). \end{aligned}$$

Если задача Коши не является равномерно корректной, а ослабленная задача Коши корректна на $\mathcal{D}(A)$, то для полугруппы $U(t)$ справедливо соотношение

$$\lim_{t \to 0} U(t)\, x_0 = x_0$$

для $x_0 \in \mathcal{D}(A)$. Однако операторы $U(t)$ неограничены при $t \to 0$.

Для ослабленной задачи Коши справедливо утверждение о связи между единственностью и корректностью, изложенное в § 2, п. 3. А именно, если оператор A имеет регулярную точку, и для каждого $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ существует единственное ослабленное решение задачи Коши на $(0, \infty)$, обладающее непрерывной на $(0, \infty)$ производной, суммируемой на каждом конечном отрезке, то ослабленная задача Коши корректна на $\mathscr{D}(A)$.

3. Единственность ослабленного решения. Пусть $x(t)$ — ослабленное решение уравнения (1.1). В силу непрерывной дифференцируемости $x(t)$ при $t>0$ можно проинтегрировать по частям

$$\int_{\varepsilon}^{t} e^{-\lambda\tau} x(\tau)\,d\tau = \frac{-e^{-\lambda\tau}}{\lambda} x(\tau)\Big|_{\varepsilon}^{t} + \frac{1}{\lambda}\int_{\varepsilon}^{t} e^{-\lambda\tau} Ax(\tau)\,d\tau.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\int_{0}^{t} e^{-\lambda\tau} x(\tau)\,d\tau = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} x(t) + \frac{x(0)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_{0}^{t} e^{-\lambda\tau} Ax(\tau)\,d\tau.$$

Если оператор A имеет резольвенту в точке λ, то он замкнут, и его можно вынести за знак последнего интеграла, и тогда

$$\int_{0}^{t} e^{-\lambda\tau} x(\tau)\,d\tau = R(\lambda)\left(e^{-\lambda t} x(t) - x(0)\right). \tag{3.3}$$

Пусть теперь $x(t)$ — такое ослабленное решение, для которого $x(0)=0$. Из (3.3) при $t=T$ имеем

$$R(\lambda)\,x(T) = \int_{0}^{T} e^{\lambda(T-\tau)} x(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{T} e^{\lambda s} x(T-s)\,ds. \tag{3.4}$$

Это равенство говорит о том, что функция $R(\lambda)\,x(T)$ является функцией экспоненциального типа. Если заранее известно, что тип этой функции меньше T, то из тождества (3.4) будет следовать, что функция $x(T-s)$ равна нулю вблизи $s=T$, т. е. функция $x(\tau)$ равна нулю вблизи нуля.

Точнее, сошлемся на следующий известный факт *):

*) Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948, стр. 412—413.

Лемма. *Пусть $\varphi(s)$ — суммируемая функция, удовлетворяющая условию*

$$\varlimsup_{\lambda \to +\infty} \frac{\ln \left\| \int_0^T e^{\lambda s} \varphi(s)\, ds \right\|}{\lambda} \leqslant h < T,$$

тогда $\varphi(s) = 0$ почти всюду на $[h, T]$.

Применяя это утверждение к тождеству (3.4), приходим к следующей теореме:

Теорема 3.1. *Пусть оператор A имеет резольвенту при достаточно больших положительных λ и*

$$\varlimsup_{\lambda \to +\infty} \frac{\ln \| R(\lambda) \|}{\lambda} = h_A < \infty. \tag{3.5}$$

Если ослабленное решение $x(t)$ уравнения (1.1) на отрезке $[0, T]$ равно нулю при $t = 0$ и $h_A < T$, то $x(t) \equiv 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T - h_A$. В частности, если $h_A = 0$, то $x(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, т. е. решение ослабленной задачи Коши на отрезке $[0, T]$ единственно.

Действительно, в силу леммы из тождества (3.4) и из (3.5) с $h_A < T$ следует, что $x(T - s)$ равно нулю почти при всех s из $[h_A, T]$. В силу непрерывности $x(t)$ имеем $x(t) \equiv 0$ на $[0, T - h_A]$.

Теорема доказана.

Отметим, что для резольвенты, норма которой растет не быстрее некоторой степени λ, $h_A = 0$, поэтому в этом случае имеет место теорема единственности решения ослабленной задачи Коши. Эта теорема имеет место также при $h_A < \infty$, если ослабленные решения рассматривать на всей полуоси $(0, \infty)$, $(T = \infty)$.

Приведем пример, показывающий, что теорема 3.1 достаточно точно отражает истинное состояние вопроса о единственности решения. Пусть $E = \mathscr{L}_2[0, h]$, а оператор A является замыканием оператора дифференцирования $\frac{d}{ds}$, заданного на непрерывно дифференцируемых функциях $u(s)$, удовлетворяющих граничному условию $u(0) = 0$. Если $u_0(s)\ (s \geqslant 0)$ — гладкая функция и $u_0(0) = 0$, то функция $x(t) = u_0(t + s)$

со значениями в $\mathscr{L}_2[0, h]$ будет решением уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax \left(= \frac{\partial x}{\partial s}\right).$$

Пусть теперь функция $u_0(s)$ тождественно равна нулю на отрезке $[0, T]$ и положительна при $t > T$; тогда решение $x(t) \equiv 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T-h$ и $x(t) \neq 0$ при $T-h < t \leqslant T$. Заметим, что это решение не продолжимо за отрезок $[0, T]$, так как при $t > T$ функция $u(t+s)$ не удовлетворяет граничному условию и, следовательно, $x(t) \overline{\in} \mathscr{D}(A)$.

Оценим резольвенту оператора A. Из уравнения $\frac{du}{ds} - \lambda u = v$ и условия $u(0) = 0$ находим, что

$$R(\lambda) v(s) = \int_0^s e^{\lambda\sigma} v(s-\sigma)\, d\sigma.$$

Отсюда

$$\|R(\lambda) v\|^2 = \int_0^h \left[\int_0^s e^{\lambda\sigma} v(s-\sigma)\, d\sigma\right]^2 ds \leqslant \int_0^h e^{2\lambda s}\, ds \|v\|^2 =$$

$$= \frac{e^{2\lambda h} - 1}{2\lambda} \|v\|^2,$$

т. е.

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \sqrt{\frac{e^{2\lambda h} - 1}{2\lambda}}.$$

С другой стороны, положим

$$v_0(s) = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Тогда $\|v_0\| = 1$, $R(\lambda) v_0 = \frac{e^{\lambda s} - 1}{\lambda \sqrt{h}}$ и

$$\|R(\lambda)\| \geqslant \|R(\lambda) v_0\| = \frac{1}{\lambda\sqrt{h}} \sqrt{\int_0^h (e^{\lambda s} - 1)^2\, ds} =$$

$$= \frac{1}{\lambda\sqrt{2\lambda h}} \sqrt{e^{2\lambda h} - 4e^{\lambda h} + 2\lambda h + 3}.$$

Из полученных оценок сверху и снизу для нормы резольвенты вытекает, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\ln\|R(\lambda)\|}{\lambda} = h.$$

Итак, теорема 3.1 — точна.

4. Построение ослабленных решеиий, их свойства. Для построения ослабленных решений задачи Коши мы снова воспользуемся техникой преобразования Лапласа.

Теорема 3.2. *Пусть оператор A имеет резольвенту при* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha$ *и справедлива оценка*

$$\|R(\lambda)\| \leqslant M(1+|\lambda|) \qquad (\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha); \tag{3.6}$$

тогда всякое ослабленное решение уравнения (1.1) *представимо в виде* (3.2).

Это утверждение является усилением того, что было сказано в конце п. 1, так как для корректной задачи Коши (3.6) выполнено.

Для доказательства воспользуемся тождеством (3.3). Правую часть его можно рассматривать как преобразование Лапласа от функции, равной $x(s)$ при $0 \leqslant s \leqslant t$ и нулю при $s > t$. Так как эта функция на интервале $(0, t)$ непрерывно дифференцируема, то при $0 < s < t$ справедлива формула обращения

$$x(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{\lambda s} R(\lambda)(e^{-\lambda t} x(t) - x(0))\, d\lambda. \tag{3.7}$$

Из оценки (3.6) следует, что операторы $\frac{R(\lambda)}{\lambda}$ равномерно ограничены при больших $|\lambda|$. Если $x \in \mathscr{D}(A)$, то

$$R(\lambda)x = -\frac{x}{\lambda} + \frac{R(\lambda)Ax}{\lambda} \tag{3.8}$$

и, следовательно, $\frac{R(\lambda)x}{\lambda} \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. В силу теоремы Банаха — Штейнгауза $\frac{R(\lambda)x}{\lambda} \to 0$ при любом $x \in E$. Из тождества (3.8) тогда вытекает, что при $x \in \mathscr{D}(A)$ $R(\lambda)x \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$.

В (3.7) элемент $x(t) \in \mathscr{D}(A)$, поэтому $R(\lambda)x(t) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$ и, в силу леммы Жордана,

$$\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{-\lambda(t-s)} R(\lambda)\, x(t)\, d\lambda = 0.$$

Теорема доказана.

Пусть теперь для резольвенты выполнено более сильное условие при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha$:

$$\|R(\lambda)\| \leqslant M(1+|\tau|)^{-\beta} \qquad (1 > \beta > 0,\ \operatorname{Im}\lambda = \tau). \quad (3.9)$$

Тогда по замечанию 1.2 к теореме 1.5 существуют решения задачи Коши для всех $x \in \mathscr{D}(A^2)$. Как было показано при доказательстве теоремы, эти решения непрерывно дифференцируемы на $[0, \infty)$. Оказывается, что на $(0, \infty)$ они будут бесконечно дифференцируемыми. Действительно, по теореме 3.2 они представимы в виде (3.2). Интегрируя $n-1$ раз по частям и используя (3.9), мы придем к формуле

$$x(t) = \frac{(-1)^n (n-1)!}{2\pi i t^{n-1}} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda t} R^n(\lambda)\, x(0)\, d\lambda.$$

Для производной k-го порядка получается выражение

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \frac{(-1)^n (n-1)!}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{1}{t^{n-1}} e^{\lambda t}\right) R^n(\lambda)\, x(0)\, d\lambda \quad (3.10)$$

$$(t > 0),$$

которое имеет смысл при $n > \dfrac{k+1}{\beta}$. Из замкнутости оператора A (см. стр. 78) следует, что

$$\frac{d^k x}{dt^k} = A^k x(t) \qquad (t > 0).$$

Из рассуждений п. 1 вытекает, что ослабленная задача Коши будет иметь решения на $(0, \infty)$ при любом $x_0 \in \mathscr{D}(A)$. Эти решения также будут бесконечно дифференцируемыми на $(0, \infty)$.

Введем снова в рассмотрение оператор $U(t)$ $(t > 0)$, ставящий в соответствие начальному значению x_0 значение $x(t)$ решения ослабленной задачи Коши с начальным условием

$x_0: x(t) = U(t)\,x_0$. Оператор $U(t)$ ограничен. Действительно, из (3.10) при $k=0$ получаем

$$\|U(t)\,x_0\| \leqslant \frac{M}{t^{n-1}} e^{\alpha t} \|x_0\| \qquad \left(n > \frac{1}{\beta}\right). \tag{3.11}$$

Поэтому оператор $U(t)$ можно по непрерывности расширить на все пространство. Из условия (3.9) следует условие (3.5) с $h_A = 0$, т. е. для ослабленных решений имеет место теорема единственности. Таким образом, ослабленная задача Коши корректна на $\mathscr{D}(A)$ для $t \in (0, \infty)$, и, значит, операторы $U(t)$ образуют сильно непрерывную полугруппу. Оценки типа (3.11) можно получить и для производных $U(t)\,x_0$, поэтому полугруппа $U(t)$ будет бесконечно сильно дифференцируемой при $t > 0$.

Заметим, что бесконечная дифференцируемость полугруппы при $t > 0$ уже следует из ее сильной дифференцируемости (дифференцируемости $U(t)\,x_0$ при любом x_0 и $t > 0$). Действительно, при $0 < a < t$

$$\frac{d^2U(t)\,x_0}{dt^2} = \frac{d}{dt}(AU(t)\,x_0) = \frac{d}{dt}(AU(t-a)\,U(a)\,x_0) =$$
$$= \frac{d}{dt}(U(t-a)\,AU(a)\,x_0) = AU(t-a)\,AU(a)\,x_0.$$

Полагая $a = t/2$, имеем

$$\frac{d^2U(t)\,x_0}{dt^2} = \left[AU\left(\frac{t}{2}\right)\right]^2 x_0.$$

Аналогично показывается существование всех производных и получается формула

$$\frac{d^nU(t)\,x_0}{dt^n} = \left[AU\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x_0.$$

Суммируя наши утверждения, мы приходим к теореме:

Теорема 3.3. *Пусть при* $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \alpha$ *оператор* A *имеет резольвенту, для которой выполнено условие* (3.9). *Тогда ослабленная задача Коши корректна на множестве* $\mathscr{D}(A)$. *Все ее решения бесконечно дифференцируемы при* $t > 0$. *Они задаются формулой* $x(t) = U(t)\,x_0$, *где* $U(t)$ — *сильно дифференцируемая при* $t > 0$ *полугруппа ограниченных операторов, обладающая тем свойством, что*

$$\lim_{t \to 0} U(t)\,x_0 = x_0 \quad \text{при} \quad x_0 \in \mathscr{D}(A).$$

Последнее свойство вытекает из определения ослабленного решения.

Мы не включили в формулировку теоремы оценку (3.11 так как она может быть уточнена. Из неравенства (3.9) следует, что резольвента определена в более широкой области чем полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda \geqslant$ (Действительно, разлагая в ря

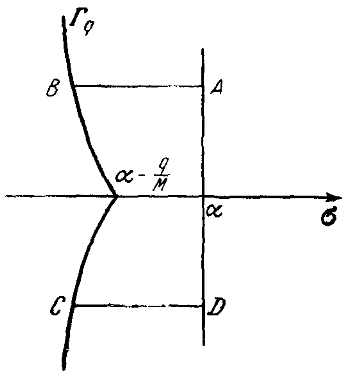

Рис. 4.

$$R(\sigma + i\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma-\alpha)^n}{n!} \frac{d^n R(\alpha + i\tau)}{d\lambda^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma-\alpha)^n R^{n+1}(\alpha + i\tau)$$

мы видим, что этот ряд сходится, если

$$|\sigma - \alpha| \leqslant \frac{(1+|\tau|)^\beta}{M} \cdot q,$$

где число $q \in (0, 1)$. При этом

$$\|R(\sigma + i\tau)\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sigma-\alpha|^n M^{n+1}}{(1+|\tau|)^{(n+1)\beta}} \leqslant \frac{M}{(1+|\tau|)^\beta (1-q)}. \quad (3.12$$

При фиксированном q мы получаем, что резольвента существует и ограничена согласно (3.12) в области, расположенно справа от кривой Γ_q с уравнением $\sigma = \alpha - \frac{q}{M}(1+|\tau|)$ (рис. 4). Интеграл

$$\int e^{\lambda t} R(\lambda)\, x_0\, d\lambda,$$

взятый по контуру криволинейной трапеции $ABCD$, равен нулю. Интегралы по отрезкам AB и CD в силу оценки (3.12 не превосходят

$$\frac{M\|x_0\|}{(1-q)(1+|\tau|)^\beta} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{\sigma t}\, d\sigma = \frac{M\|x_0\|}{(1-q)(1+|\tau|)^\beta\, t} e^{\alpha t},$$

поэтому они стремятся к нулю при $\tau \to \infty$.

Таким образом, при $x_0 \in D(A)$ решение

$$x(t) = U(t)\,x_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_q} e^{\lambda t} R(\lambda)\,x_0\,d\lambda. \tag{3.13}$$

Последний интеграл сходится уже при любом $x_0 \in E$ и, следовательно, дает формулу для всех обобщенных решений задачи Коши. Оценим этот интеграл. Имеем

$$\|U(t)\,x_0\| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_q} e^{\left[\alpha - \frac{q}{M}(1+|\tau|)^{\beta}\right]t} \frac{M}{(1-q)(1+|\tau|)^{\beta}} \times$$

$$\times \left| d\left(\alpha - \frac{q}{M}(1+|\tau|)^{\beta} + i\tau\right)\right| \|x_0\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\pi(1-q)} \sqrt{1 + \frac{q^2}{M^2}}\, e^{\alpha t} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{q}{M}(1+\tau)^{\beta} t} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{\beta}} \|x_0\|. \tag{3.14}$$

Сделаем замену $\frac{q}{M}(1+\tau)^{\beta} t = s$. Тогда

$$\|U(t)\| \leqslant \frac{M_1}{\beta(1-q)} e^{\alpha t} \left(\frac{q}{M} t\right)^{1-1/\beta} \int\limits_{qt/M}^{\infty} e^{-s} s^{-2+1/\beta}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant M_0 e^{\alpha t} t^{1-1/\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} - 1\right). \tag{3.15}$$

Аналогично оцениваются производные от полугруппы $U(t)$. Действительно, дифференцирование (3.13) дает под знаком интеграла множитель λ, модуль которого

$$|\lambda| = \sqrt{\left[\alpha - \frac{q}{M}(1+\tau)^{\beta}\right]^2 + \tau^2} \leqslant c(1+\tau),$$

где $c = \max(1, |\alpha|) + q/M = \gamma + q/M$. При замене $\frac{q}{M}(1+\tau)^{\beta} t = s$ за знак интеграла дополнительно выйдет множитель $(qt/M)^{-1/\beta}$, и степень s под интегралом увеличится на $1/\beta$. Мы приходим к следующему утверждению:

Теорема 3.4. *При условии* (3.9) *для полугруппы* $U(t)$ *и ее производных при* $t > 0$ *имеют место оценки*

$$\left\|\frac{d^k U}{dt^k}\right\| \leqslant M_0 c^k e^{\alpha t} t^{1-\frac{k+1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{k+1}{\beta} - 1\right), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3.16}$$

Замечание 3.1. Можно доказать ограниченность полугруппы, задаваемой формулой

$$U(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda)\,d\lambda, \tag{3.17}$$

и при более слабом, чем (3.9), условии на резольвенту.

Достаточно, чтобы резольвента убывала быстрее, чем $1/\ln|\tau|$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших τ будет справедливо неравенство

$$\|R(\alpha + i\tau)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\ln(b+|\tau|)} \quad (\text{с некоторым } b > 1).$$

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы, мы придем к интегралу

$$\int_0^\infty e^{-\frac{qt}{\varepsilon}\ln(b+\tau)}\frac{d\tau}{\ln(b+\tau)},$$

который заменой $\ln(b+\tau) = s$ сводится к

$$\int_0^\infty e^{-\frac{qt}{\varepsilon}s}e^s\frac{ds}{s}.$$

Этот интеграл будет сходящимся, если выбрать ε таким малым, что $qt/\varepsilon > 1$.

Более детальный анализ показывает, что в рассматриваемом случае ослабленная задача Коши также разрешима при любом $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ (см. [1], стр. 394—397).

Замечание 3.2. Пусть условие (3.9) выполнено с $\beta = 1$ т. е.

$$\|R(\lambda)\| \leqslant M(1+|\tau|)^{-1}. \tag{3.18}$$

Тогда для соответствующей полугруппы справедлива оценка

$$\|U(t)\| \leqslant M'e^{\alpha t}\left(1 + \max\left\{0, \ln\frac{1}{t}\right\}\right), \tag{3.19}$$

а для ее производных оценка (3.16) с $\beta = 1$.

При оценке производных не использовалось, что $\beta < 1$.

Для оценки самой полугруппы мы придем к неравенству (3.15) в форме

$$\|U(t)\| \leqslant M_1 e^{\alpha t} \int_t^{\infty} e^{-\frac{q}{M}s} \frac{ds}{s}.$$

Интегрирование по частям дает

$$\|U(t)\| \leqslant M_1 e^{\alpha t} \left[e^{-\frac{q}{M}t} \ln t + \frac{q}{M} \int_t^{\infty} e^{-\frac{q}{M}s} \ln s\, ds \right] \leqslant$$

$$\leqslant M_2 e^{\alpha t} \ln\left(e + \frac{1}{t}\right). \quad (3.20)$$

Замечание 3.3. Для получения оценок интеграла (3.2) мы пользовались лишь поведением резольвенты на прямой $\lambda = \alpha + i\tau$ при фиксированном α. Информация о поведении резольвенты в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha$ нужна была при доказательстве существования решений задачи Коши в теореме 1.4.

Естественно возникает вопрос о том, когда решения уравнения (1.1) будут аналитическими функциями от t? Заметим, что если решение $U(t)\,x_0$ представимо в виде абсолютно сходящегося обратного преобразования Лапласа, то

$$U(t)\,x_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\alpha + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda)\, x_0\, d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{0} e^{\lambda t} R(\lambda)\, x_0\, d\lambda. \quad (3.21)$$

Первое слагаемое порождает аналитическую функцию в верхней полуплоскости

$$U_1(z)\,x_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\alpha + i\infty} e^{\lambda z} R(\lambda)\, x_0\, d\lambda \qquad (z = t + is,\ s > 0), \quad (3.22)$$

второе—соответственно в нижней полуплоскости. Если каждое из этих слагаемых допускает аналитическое продолжение в область, содержащую неотрицательную вещественную полуось, то решение $U(t)\,x_0$ будет аналитической функцией от t. Такая ситуация возникает при выполнении условия (3.18) для резольвенты оператора A. Как указывалось выше, первый интеграл можно заменить интегралом по лучу $\sigma=\alpha-\frac{q}{M}(1+\tau)$, и тогда становится ясным, что он представляет собой аналитическую функцию от $z=t+is$ при условии, что

$$\frac{s}{t}>\sup_{\tau}\left[-\frac{q}{M}\cdot\frac{1+\tau}{\tau}\right]=-\frac{q}{M}.$$

Аналогично, заменяя путь интегрирования во втором слагаемом, получаем, что оно аналитично при условии $s/t<q/M$.

Таким образом, решение $U(t)x_0$ будет аналитическим в секторе $|s/t|<q/M$, и в силу того, что q — любое число из (0, 1), в секторе

$$|s/t|<1/M. \tag{3.23}$$

Оценив интеграл (3.22) так же, как и при доказательстве теоремы 3.4, получим

$$\|U_1(z)\|\leqslant\frac{M}{1-q}\sqrt{1+\frac{q^2}{M^2}}\,e^{\alpha t}e^{s}\int_0^\infty e^{-(1+\tau)\left(\frac{q}{M}t+s\right)}\frac{d\tau}{1+\tau}.$$

Если $s>0$, то под интегралом можно отбросить множитель $e^{-\tau s}$, и мы придем к такой же оценке, как и в (3.19). Если $s<0$, то можно отбросить множитель e^s перед интегралом, и тогда

$$\|U_1(z)\|\leqslant\frac{M'}{2}e^{\alpha t}\left(1+\max\left\{0,\ \ln\frac{1}{t+\frac{sM}{q}}\right\}\right).$$

Проделывая такие же вычисления со вторым слагаемым в (3.21), приходим к неравенству

$$\|U(z)\|\leqslant M'e^{\alpha t}\left(1+\frac{1}{2}\max\left\{0,\ \ln\frac{1}{t}\right\}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\max\left\{0,\ \ln\frac{1}{t-|s|\frac{M}{q}}\right\}\right)\leqslant$$
$$\leqslant M'e^{\alpha t}\ln\left(e+\frac{1}{t-|s|\frac{M}{q}}\right). \tag{3.24}$$

Нами доказана

Теорема 3.5. *Если выполнено условие* (3.18), *то обобщенные решения* (1.1) *являются аналитическими функциями от* $z = t + is$ *в секторе* (3.23); *для них справедлива оценка*

$$\|x(t+is)\| \leqslant M'e^{\alpha t} \ln \left(e + \frac{1}{t - \frac{M}{q}|s|} \right) \|x(0)\|$$

при любом $q \in (0, 1)$ *в секторе* $|s| \leqslant \frac{q}{M} t$.

Замечание 3.4. Из доказательства теоремы видно, что сектор аналитичности полугруппы $U(t)$ можно находить так: если для резольвенты справедливо неравенство (3.18)

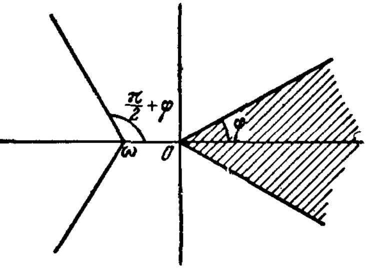

Рис. 5.

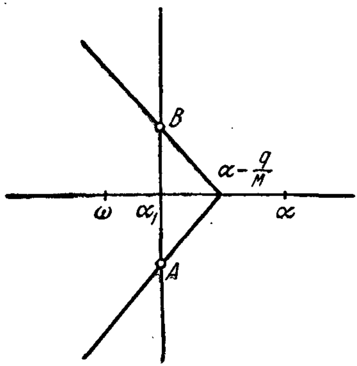

Рис. 6.

на лучах $|\arg(\alpha - \omega)| = \pi/2 + \varphi$, то $U(z)$ аналитична в секторе $|\arg z| < \varphi$ (рис. 5).

Замечание 3.5. В неравенствах (3.19) и (3.24) иногда важно наилучшим способом оценить поведение $U(t)$ на бесконечности. Обозначим через ω точную верхнюю грань вещественных частей точек спектра оператора A, лежащих левее прямой $\operatorname{Re}\lambda = \alpha$, на которой выполнено неравенство (3.18), и пусть $\alpha_1 > \omega$. Тогда такое же неравенство с другой константой M будет выполнено и на прямой $\operatorname{Re}\lambda = \alpha_1$. Действительно, как было показано выше, неравенство (3.18) с константой $\frac{M}{1-q}$ выполнено в области $|\operatorname{Re}\lambda - \alpha| \leqslant \frac{q}{M} \operatorname{Im}\lambda$, которая содержит всю прямую $\operatorname{Re}\lambda = \alpha_1$ за исключением, быть может, конечного отрезка AB (рис. 6). Этот отрезок лежит в области регулярности оператора, и на нем неравенство (3.18) можно обеспечить за счет выбора большой константы M.

Итак, *в неравенствах* (3.19) *и* (3.24), *изменив соответственно константы* M' *и* M, *число* α *можно заменить на любое* $\alpha_1 > \sup\limits_{\lambda \in S(A)} \operatorname{Re} \lambda$.

5. Абстрактное параболическое уравнение. Уравнение (1.1) называется *абстрактным параболическим*, если для него ослабленная задача Коши однозначно разрешима при любом $x_0 \in E$.

На основании сказанного в п. 1, из однозначной разрешимости ослабленной задачи Коши на E следует однозначная разрешимость задачи Коши на $R(\lambda_0)E = \mathcal{D}(A)$, причем все решения непрерывно дифференцируемы на $[0, \infty)$. Из теоремы 2.12 тогда вытекает

Теорема 3.6. *Если в абстрактном параболическом уравнении оператор A имеет хотя бы одну регулярную точку, то для этого уравнения задача Коши равномерно корректна на каждом конечном промежутке.*

Обратно, если задача Коши для уравнения (1.1) равномерно корректна и все ее решения дважды непрерывно дифференцируемы при $t > 0$, то уравнение будет абстрактным параболическим. Существование и единственность ослабленного решения при любом $x_0 \in E$ следует из рассуждений п. 1 (см. также теорему 3.1).

Полугруппа, порожденная абстрактным параболическим уравнением, будет сильно непрерывно дифференцируемой при $t > 0$, откуда следует, как указывалось выше, что все ослабленные решения являются бесконечно дифференцируемыми функциями при $t > 0$. Здесь отражено характерное свойство уравнений в частных производных параболического типа: каким бы «плохим» ни было начальное условие, решение при любом $t > 0$ будет неограниченно гладким (в нашем случае это совпадает с тем, что $x(t) \in \mathcal{D}(A^n)$ при любом n). Это обстоятельство объясняет название, которое мы дали уравнению.

При условиях убывания резольвенты вдоль прямой, параллельной мнимой оси, рассмотренных в предыдущем пункте, доказывалась бесконечная дифференцируемость всех обобщенных решений. Поэтому если для соответствующих уравнений задача Коши равномерно корректна, то они будут абстрактными параболическими. Пользуясь замечанием 3.1, получаем:

Теорема 3.7. *Для того чтобы уравнение* (1.1) *было абстрактным параболическим, достаточными являются условия* (2.17) *и условие*

$$\overline{\lim_{|\tau|\to\infty}} \ln|\tau| \, \|R(\alpha+i\tau)\| = 0 \tag{3.25}$$

при некотором α.

В приложениях весьма важной является

Теорема 3.8. *Если оператор* A *имеет резольвенту при* $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ *и*

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{|\lambda-\omega|} \qquad (\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha), \tag{3.26}$$

то уравнение (1.1) *является абстрактным параболическим. Соответствующая полугруппа аналитична в некотором секторе комплексной плоскости, содержащем полуось* $t > 0$; *в этом секторе для нее справедлива оценка*

$$\|U(t+is)\| \leqslant Qe^{\omega_1 t} \qquad (\omega_1 > \omega). \tag{3.27}$$

Доказательство. Возьмем $\alpha > \omega$ и больше нуля. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 3.4, предварительно огрубив неравенство (3.26) до неравенства

$$\|R(\alpha+i\tau)\| \leqslant \frac{\sqrt{2}\,M}{\alpha+|\tau|},$$

мы придем к оценке (3.15) в форме

$$\|U(t)\| \leqslant M_0 e^{\alpha t} \int\limits_{\frac{q}{M}\alpha t}^{\infty} e^{-s}\frac{ds}{s}.$$

Эта оценка верна при всех достаточно больших α. При достаточно малом t можно выбрать $\alpha = 1/t$. Тогда получим

$$\|U(t)\| \leqslant M_0 e \int\limits_{q/M}^{\infty} e^{-s}\frac{ds}{s} = C,$$

т. е. полугруппа $U(t)$ ограничена вблизи нуля и задача Коши равномерно корректна на каждом конечном интервале.

Аналитичность полугруппы доказана в теореме 3.5, поэтому уравнение является абстрактным параболическим.

В оценках (3.19) и (3.24) член с логарифмом можно отбросить при любом $\alpha > \omega$. Полагая $\alpha = \omega$, приходим к оценке (3.27).

Теорема доказана.

Оказывается, для того чтобы равномерно корректной задаче Коши отвечала аналитическая в секторе полугруппа с оценкой (3.27), *необходимо*, чтобы для резольвенты было выполнено неравенство (3.26) в некоторой полуплоскости. Докажем это. Пусть $\lambda = \alpha + i\tau$, где $\alpha > \omega$ и $\tau > 0$. Рассмотрим равный нулю интеграл, взятый по контуру $OABO$ (рис. 7),

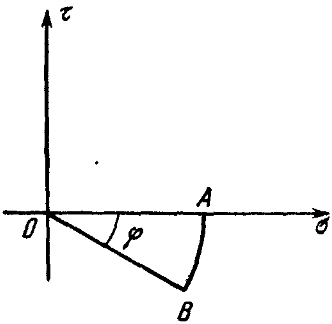

Рис. 7.

$$\int e^{-\lambda z} U(z)\, x_0\, dz = 0,$$

где OB лежит внутри сектора, в котором полугруппа аналитична и удовлетворяет (3.27), AB — дуга окружности радиуса R. Интеграл по этой дуге стремится к нулю при $R \to \infty$. Действительно,

$$\left\| \int_{AB} e^{-\lambda z} U(z)\, x_0\, dz \right\| \leqslant R \int_{-\varphi}^{0} e^{(-\alpha \cos\theta + \tau \sin\theta) R} Q e^{\omega_1 R}\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant Q R e^{(-\alpha\cos\varphi + \omega_1) R} \varphi$$

(мы считаем $\omega > 0$, иначе второй множитель заменяется константой Q).

Если угол φ достаточно мал, то $\alpha \cos\varphi > \omega_1$, и последнее выражение стремится к нулю.

Таким образом,

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)\, dt = e^{-i\varphi} \int_0^\infty e^{-\lambda r e^{-i\varphi}} U(r e^{-i\varphi})\, dr.$$

Тогда

$$\|R(\lambda)\| \leqslant Q \int_0^\infty e^{-(\alpha\cos\varphi+\tau\sin\varphi)r} e^{\omega_1 r}\, dr = \frac{Q}{\alpha\cos\varphi-\omega_1+\tau\sin\varphi} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Q}{\sin\varphi\left[\alpha-\dfrac{\omega_1}{\cos\varphi}+\tau\right]} \leqslant \frac{Q_1}{\alpha+\tau-\omega_2},$$

где $Q_1 = \dfrac{Q}{\sin\varphi}$ и $\omega_2 = \dfrac{\omega_1}{\cos\varphi}$.

Таким образом, в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \omega_2$ справедлива оценка резольвенты (3.26).

Как было показано в замечании 3.3, из оценки (3.26) для резольвенты следует неравенство для производной:

$$\left\|\frac{dU}{dt}\right\| \leqslant \frac{M_1}{t} e^{\alpha t}. \qquad (3.28)$$

Из этого неравенства в свою очередь следует аналитичность полугруппы $U(t)$. Действительно, из (3.28) вытекает, что

$$\left\|\frac{d^nU}{dt^n}\right\| = \left\|\left[AU\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n\right\| \leqslant \frac{M_1^n n^n}{t^n} e^{\alpha t},$$

поэтому ряд Тейлора

$$U(t+\mu) = U(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \frac{d^nU(t)}{dt^n}$$

имеет ненулевой радиус сходимости:

$$r = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{\dfrac{\left\|\left(AU\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n\right\|}{n!}}} \geqslant \frac{1}{\lim\sqrt[n]{\dfrac{M_1^n n^n}{t^n n!}}} = \frac{t}{M_1 e}.$$

Мы здесь воспользовались тем, что в силу формулы Стирлинга $n! > (n/e)^n$.

Подведем итог:

Теорема 3.9. *Для равномерно корректной задачи Коши следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Полугруппа, порожденная задачей, является аналитической в некотором секторе и для нее выполнено* (3.27).

2. *Резольвента в некоторой полуплоскости обладает свойством* (3.26).

3. *Полугруппа сильно дифференцируема, и для производной имеет место оценка* (3.28).

6. Решения с запаздывающей гладкостью. Аналитичность и квазианалитичность. В предыдущих пунктах мы исходили из оценок резольвенты на прямых, параллельных мнимой оси. Эти оценки позволяли преобразовать интеграл (3.2) в интеграл по контурам, на которых функция $e^{\lambda t}$ стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$. Можно рассмотреть случаи когда сразу известно, что резольвента определена на соответствующем контуре, что и будет сделано в этом пункте.

Рассмотрим на комплексной плоскости кривую Γ, заданную уравнениями

$$\sigma = \begin{cases} -\psi(\tau), & \text{если} \quad -\psi(\tau) \leqslant \psi(\tau_0), \\ \alpha, & \text{если} \quad -\psi(\tau) \geqslant \alpha, \end{cases}$$

где $\psi(\tau)$ — определенная при $\tau > 0$ гладкая неубывающая вогнутая функция, такая, что $\psi(\tau) \to \infty$ при $\tau \to \infty$.

Пусть эта кривая состоит из регулярных точек оператора A и для его резольвенты справедлива оценка

$$\| R(\lambda) \| \leqslant c e^{-b\sigma} \quad (\lambda = \sigma + i\tau \in \Gamma).$$

Введем в рассмотрение интеграл

$$x(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda)\, d\lambda. \tag{3.29}$$

Подынтегральная функция оценивается по модулю через величину $ce^{\sigma(t-b)}$. Из вогнутости $\psi(\tau)$ следует, что производная $\psi'(\tau)$ не возрастает, поэтому $|d\lambda| = |-\psi'(\tau) + i|d\tau \leqslant M_1\, d\tau$. Если выбрать t так, чтобы

$$t \geqslant b + \overline{\lim_{\tau \to \infty}} \frac{|\ln \psi'(\tau)|}{\psi(\tau)} + \delta \qquad (\delta > 0),$$

то подынтегральная функция будет при больших τ оцениваться величиной $\psi'(\tau)\, e^{-\frac{\delta}{2}\psi(\tau)}$, и, следовательно, интеграл (3.29) будет абсолютно сходиться.

Если рассмотреть интеграл, получающийся из (3.29) дифференцированием n раз по t под знаком интеграла:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^n e^{\lambda t} R(\lambda)\, d\lambda, \tag{3.30}$$

то для его сходимости достаточно, чтобы

$$t > b + n\,\overline{\lim}\,\frac{\ln|\tau|}{\psi(\tau)} + \overline{\lim}\,\frac{|\ln\psi'(\tau)|}{\psi(\tau)} \quad (\tau \to \infty).$$

Рассмотрим частные виды кривых Γ.

1) Пусть $\psi(\tau) = a\ln|\tau|$. Тогда интеграл (3.29) будет абсолютно и равномерно по t сходиться при $t \geqslant t_0 > b + 1/a$, а интеграл (3.30) — при $t \geqslant t_n > b + \dfrac{n+1}{a}$. При $t \geqslant t_1$

$$x'(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda e^{\lambda t} R(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\, d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t} A R(\lambda)\, d\lambda.$$

В первом члене контур интегрирования можно стянуть в точку, в силу чего интеграл равен нулю и

$$x'(t) = Ax(t) \qquad (t \geqslant t_1),$$

т. е. функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1). Сделав замену $y(t) = x(t + t_1)$, мы получим решение $y(t)$ уравнения (1.1) на $[0, \infty)$. Как видно из предыдущего, это решение будет обладать тем свойством, что его гладкость постепенно растет с увеличением t.

2) Пусть теперь $\psi(\tau) = a|\tau|^\beta$ $(0 < \beta < 1)$. Тогда

$$\overline{\lim}\,\frac{|\ln\psi'(\tau)|}{\psi(\tau)} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\lim}\,\frac{\ln|\tau|}{\psi(\tau)} = 0,$$

поэтому функция $x(t)$ определена, удовлетворяет уравнению (1.1) и бесконечно дифференцируема при $t > b$. Если сделать замену $y(t) = x(t + t_1)$, где $t_1 > b$, то функция $y(t)$ будет бесконечно дифференцируемым решением уравнения (1.1) на $[0, \infty)$. Если $\beta = 0$, т. е. резольвента ограничена на Γ, то функция $x(t)$ будет удовлетворять уравнению (1.1) при $t > 0$. Нетрудно получить для нее оценку

$$\|x(t)\| \leqslant \frac{c}{t^{1/\beta}} \qquad (t > 0).$$

3) Положим $\psi(\tau) = a|\tau| - \alpha$. В этом случае остается справедливым все, что было сказано выше, и, более того, функция $x(t)$ будет аналитической при $t > b$. Действительно, для ее производных получим

$$\|x^{(n)}(t)\| \leqslant c_1 \int_\Gamma e^{(\alpha - a|\tau|)(t-b)} |\tau|^n d\tau =$$

$$= 2c_1 e^{\alpha(t-b)} [a(t-b)]^{n+1} \int_0^\infty e^{-z} z^n dz =$$

$$= 2c_1 e^{\alpha(t-b)} [a(t-b)]^{n+1} n!,$$

откуда следует аналитичность $x(t)$ в круге радиуса $a(t-b)$.

4) Естественно ожидать, что где-то при переходе от бесконечной дифференцируемости (случай 2) к аналитичности (случай 3) встречается тот случай, когда решения принадлежат квазианалитическим классам. Действительно, пусть кривая Γ удовлетворяет следующему дополнительному условию:

1°. При некоторых $a \geqslant 1$, $\tau_0 > 0$ с $a\tau_0 > 1$ функция $\frac{\ln\psi(\tau)}{\ln a\tau}$ монотонно возрастает при $\tau \geqslant \tau_0$ и стремится к 1 при $\tau \to \infty$.

Зафиксируем число $\tau_1 \geqslant \tau_0$ и обозначим $q_0 = \frac{\ln\psi(\tau_0)}{\ln a\tau_0}$ и $q_1 = \frac{\ln\psi(\tau_1)}{a\tau_1} < 1$. Тогда $q_0 \leqslant q_1$ и при $\tau > \tau_1$ имеем $1 > \frac{\ln\psi(\tau)}{\ln a\tau} > q_1$ или $a\tau > \psi(\tau) > a^{q_1}\tau^{q_1} > a^{q_0}\tau^{q_1} = p_0\tau^{q_1}$. Далее, так как $\psi(\tau_1) = a^{q_1}\tau_1^{q_1}$, а при $\tau > \tau_1$ $\psi(\tau) > a^{q_1}\tau^{q_1}$, то $\psi'(\tau_1) \geqslant q_1 a^{q_1}\tau_1^{q_1-1} \geqslant q_0\frac{\psi(\tau_1)}{\tau_1}$. В силу произвольности выбора $\tau_1 \geqslant \tau_0$ последнее неравенство справедливо при любом $\tau > \tau_0$. Предположим, что τ_0 настолько велико, что на кривой Γ $\sigma = -\psi(\tau)$ при $|\tau| \geqslant \tau_0$. Тогда полученные выше неравенства можно записать в виде

$$a|\tau| \geqslant |\sigma| \geqslant p_0\tau^{q_1} \ (\tau \geqslant \tau_1) \quad \text{и} \quad \psi'(\tau) \geqslant q_0\left|\frac{\sigma}{\tau}\right| (\tau \geqslant \tau_0). \quad (3.31)$$

Переходя в интеграле к переменной интегрирования $s=-\sigma=\psi(\tau)$ и пользуясь неравенствами (3.31), получаем

$$\|x^{(n)}(t)\| \leqslant \frac{cM_1}{\pi} e^{\alpha t}(1+a)^n \tau_1^n +$$
$$+\frac{cM_1}{\pi}\int\limits_{s_1}^{\infty} e^{-st}\left(s+\left(\frac{s}{p_0}\right)^{1/q_1}\right)^n \frac{1}{q_0 s}\left(\frac{s}{p_0}\right)^{1/q_1} ds \leqslant$$
$$\leqslant c_1 e^{\alpha t}(1+a)^n \tau_1^n + \frac{cM_1}{\pi q_0}\left\{\max\left(1, \frac{1}{p_0}\right)+1\right\}^{\frac{n+1}{q_0}} \times$$
$$\times \int\limits_{s_1}^{\infty} e^{-st} s^{\frac{n+1}{q_1}-1} ds \leqslant c_1 e^{\alpha t}(1+a)^n \tau_1^n +$$
$$+\frac{cM_1}{\pi q_0}\left\{\max\left(1, \frac{1}{p_0}\right)+1\right\}^{\frac{n+1}{q_1}} t^{-\frac{n+1}{q_1}} \Gamma\left(\frac{n+1}{q_1}\right).$$

При фиксированном отрезке изменения t: $0 \leqslant t \leqslant T$, пользуясь тем, что $t^{-\frac{n+1}{q_1}} \leqslant t^{-\frac{n+1}{q_0}}$, если $t \leqslant 1$, и $t^{-\frac{n+1}{q}} \leqslant t^{-(n+1)}$, если $t \geqslant 1$, полученную оценку можно записать в виде

$$\|x^{(n)}(t)\| \leqslant P^n \tau_1^n + Q^n \Gamma\left(\frac{n+1}{q_1}\right) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

где P и Q — некоторые константы.

Выберем теперь $\tau_1 = n$. Тогда $q_1 = \dfrac{\ln \psi(n)}{a \ln n}$. Формула Стирлинга приводит к неравенству

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \sqrt[n]{\|x^{(n)}(t)\|} \leqslant R n^{\frac{\ln n}{\ln \psi(n)}}.$$

В силу критерия Данжуа функция $x(t)$ будет принадлежать квазианалитическому классу, если выполнено условие

$$2^\circ. \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\ln n}{\ln \psi(n)}}} = \infty.$$

Мы приходим к следующей теореме:

Теорема 3.10. *Если резольвента оператора A ограничена на кривой Γ, для которой выполнены условия* 1°,

2°, *то функции* $x(t)$ *являются решениями уравнения* (1.1), *принадлежащими квазианалитическому классу.*

Нетрудно проверить, что примером функции, удовлетворяющей условиям 1°, 2°, является

$$\psi(\tau)=\frac{\tau}{\ln\tau}.$$

7. Задача Коши, обратная к корректной. Поставим для уравнения (1.1)

$$\frac{dx}{dt}=Ax$$

задачу о нахождении на $[0, T]$ решения по заданному его значению на правом конце отрезка:

$$x(T)=x_1\in\mathcal{D}(A). \tag{3.32}$$

Если ввести новую переменную $\tau=T-t$ и обозначить $x(t)=x(T-\tau)=y(\tau)$, то для функции $y(\tau)$ мы придем к обычной задаче Коши

$$\frac{dy}{d\tau}=-Ay, \qquad y(0)=x_1\in\mathcal{D}(A) \tag{3.33}$$

с оператором $-A$.

Задачу (1.1) — (3.32) или, что то же, задачу (3.33) будем называть *обратной* к задаче (1.1) — (1.2). Аналогично вводится понятие задачи, обратной к ослабленной задаче Коши.

Предположим, что и прямая, и обратная ослабленные задачи Коши корректны на $\mathcal{D}(A)$, и обозначим соответствующие им полугруппы через $U(t)$ и $U_1(\tau)$. Пусть $x_0\in\mathcal{D}(A)$; тогда обе функции $U_1(\tau)U(t)x_0$ и $U(t)U_1(\tau)x_0$ являются решениями уравнения (1.1), так как оператор A коммутирует и с $U_1(\tau)$, и с $U(t)$. Они удовлетворяют одному и тому же начальному условию $x(0)=U_1(\tau)x_0$ и поэтому совпадают. Таким образом, операторы $U_1(\tau)$ и $U(t)$ коммутируют на $\mathcal{D}(A)$ и в силу их ограниченности всюду.

Далее рассмотрим функцию $z(t)=U(t)U_1(t)x_0$. Ее производная

$$\frac{dz}{dt}=AU(t)U_1(t)x_0-U(t)AU_1(t)x_0=0.$$

Значит, $U(t)U_1(t)x_0 = \mathrm{const}$. Предположим теперь, что оператор A имеет регулярную точку λ_0 и $x_0 \in \mathscr{D}(A^2)$; тогда

$$U(t)U_1(t)x_0 - x_0 = \\ = U(t)R(\lambda_0)(U_1(t) - I)(A - \lambda_0 I)x_0 + U(t)x_0 - x_0 \to 0$$

в силу равномерной ограниченности операторов $U(t)R(\lambda_0)$ и того, что $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ и $(A - \lambda_0 I)x_0 \in \mathscr{D}(A)$. Итак, при $x_0 \in \mathscr{D}(A^2)$

$$U_1(t)U(t)x_0 = U(t)U_1(t)x_0 = x_0.$$

В силу ограниченности операторов $U(t)U_1(t)$ это соотношение имеет место при всех $x_0 \in E$. Таким образом, операторы $U(t)$ и $U_1(t)$ взаимно обратны.

Обозначим при $t < 0$

$$U(t) = U_1(-t).$$

Тогда операторы $U(t)$ будут образовывать группу

$$U(t)U(\tau) = U(t+\tau) \qquad (-\infty < t, \ \tau < \infty).$$

Из группового свойства следует равномерная ограниченность норм операторов $U(t)$ на каждом конечном отрезке изменения t (см. доказательство леммы 1.1). Отсюда, в частности, вытекает, что $U(t)x_0 \to x_0$ при любом $x_0 \in E$ и $t \to 0$, т. е. что прямая и обратная задачи Коши равномерно корректны. Значит, операторы A и $-A$ должны удовлетворять условиям (2.17). Мы пришли к следующему утверждению.

Теорема 3.11. *Если оператор A имеет хотя бы одну регулярную точку, то для того, чтобы прямая и обратная задачи Коши были корректными, необходимо и достаточно, чтобы они были равномерно корректными, т. е. чтобы выполнялись условия*

$$\|R^n(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{(|\mathrm{Re}\,\lambda| - \omega)^n} \quad \text{при} \quad |\mathrm{Re}\,\lambda| > \omega. \tag{3.34}$$

Условия (3.34) являются достаточно ограничительными, поэтому во многих примерах при корректности прямой задачи Коши обратная задача Коши является некорректной.

Введем новое определение:

Определение 3.2. Обратная задача Коши (1.1)—(3.32) называется ***корректной в классе ограниченных решений*** *на отрезке* $[0, T]$, если для всяких M, $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in (0, T)$ существует $\delta(M, \varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для всякого решения $x(t)$ уравнения (1.1), удовлетворяющего условиям

$$\|x(t)\| \leqslant M \quad (0 \leqslant t \leqslant T) \quad \text{и} \quad \|x(T)\| \leqslant \delta(M, \varepsilon, t_0), \tag{3.35}$$

выполняется неравенство

$$\|x(t_0)\| \leqslant \varepsilon \qquad (0 < t_0 < T). \tag{3.36}$$

Из данного определения корректности следует единственность решения обратной задачи Коши. От обычного определения корректности оно отличается тем, что не предполагается существования решения, и тем, что непрерывная зависимость от начальных данных требуется лишь на каждом классе ограниченных одной константой решений. Однако это определение имеет практический смысл, так как во многих задачах и само решение (существование которого ясно из физических соображений), и возможные «возмущения» решения могут быть априори оценены.

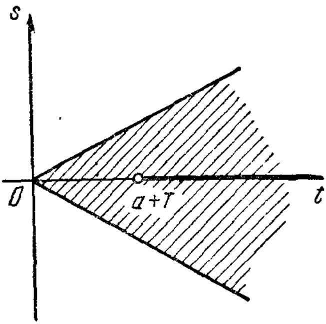

Рис. 8.

Теорема 5.2. *Если прямая задача Коши корректна в секторе* $S_{\varphi_0} : |\arg \zeta| < \varphi_0$ $(\varphi_0 > 0)$, *то обратная задача Коши корректна в классе ограниченных решений на любом отрезке* $[0, T]$.

Доказательство. Из теоремы 1.7 следует, что решения задачи Коши аналитичны в секторе S_{φ_0}. Пусть $0 < \varphi_1 < \varphi_0$ и $a > 0$. Рассмотрим сектор $S_{\varphi_1} : |\arg \zeta| \leqslant \varphi_1$ и сектор $S_{\varphi_1}^a$, получаемый из него сдвигом в направлении положительной полуоси на величину a. В силу (2.25) для полугруппы, порожденной задачей Коши, в секторе $S_{\varphi_1}^a$ справедлива оценка

$$\|U(\zeta)\| \leqslant M_1 e^{\omega|\zeta|} \quad (\zeta \in S_{\varphi_1}^a)$$

или

$$\|U(\zeta)\| \leqslant M_1 e^{\frac{\omega}{\cos\varphi_1} \operatorname{Re}\zeta} = M_a e^{\omega_1 \operatorname{Re}(\zeta - a)}, \tag{3.37}$$

где $\omega_1 = \frac{\omega}{\cos\varphi_1}$ и $M_a = M_1 e^{\omega_1 a}$.

Обозначим через G область, полученную из сектора $S^a_{\varphi_1}$ после проведения в нем разреза вдоль луча $a+T\leqslant t<\infty$ (рис. 8). Пусть теперь $x(t)=U(t)\,x_0$ — некоторое решение задачи Коши для уравнения (1.1). Оценим функцию $x(\zeta)$ на границе области G. На сторонах сектора $S^a_{\varphi_1}$ в силу (3.37)

$$\|x(\zeta)\|\leqslant M_a e^{\omega_1 \operatorname{Re}(\zeta-a)}\|x_0\|. \tag{3.38}$$

На разрезе $x(t)=U(t)\,x_0=U(t-T)\,U(T)\,x_0$, и так как $t-T\in S^a_{\varphi_1}$, то

$$\|x(t)\|=\|U(t-T)\,U(T)\,x_0\|\leqslant M_a e^{\omega_1(t-T-a)}\|x(T)\|. \tag{3.39}$$

Применим к аналитической в области G функции $y(\zeta)=e^{-\omega_1(\zeta-a)}x(\zeta)$ теорему Неванлинна: на одном участке границы (стороны сектора) в силу (3.38)

$$\|y(\zeta)\|\leqslant M_a\|x_0\|; \tag{3.40}$$

на другом участке (разрез) в силу (3.39)

$$\|y(\zeta)\|\leqslant M_a e^{-\omega_1 T}\|x(T)\|.$$

Тогда в любой точке области G

$$\|y(\zeta)\|\leqslant M_a\|x_0\|^{1-\omega(\zeta)}\|x(T)\|^{\omega(\zeta)}e^{-\omega_1 T\omega(\zeta)}\quad(\zeta\in G), \tag{3.41}$$

где $\omega(\zeta)$ — гармоническая мера луча $a+T\leqslant t<\infty$ в области G *). Отсюда

$$\|x(\zeta)\|\leqslant M_a e^{\omega_1(\operatorname{Re}\zeta-a-T\omega(\zeta))}\|x_0\|^{1-\omega(\zeta)}\|x(T)\|^{\omega(\zeta)}. \tag{3.42}$$

Пусть $t_0\in(0,\,T)$. Выберем $a=\frac{1}{2}t_0$. Тогда при $\zeta=t_0$ будет справедливо неравенство (3.42) с $a=\frac{1}{2}t_0$. Если для заданного $\varepsilon>0$ обозначить

$$\delta(M,\,\varepsilon,\,t_0)=Me^{\omega_1 T}\left(\frac{\varepsilon}{M_a M}\,e^{-\frac{\omega_1}{2}t_0}\right)^{\frac{1}{\omega(t_0)}},$$

*) Нас не должно смущать то, что область G бесконечна. Можно было бы рассмотреть ее часть G_N с $\operatorname{Re}\zeta\leqslant N$. На границе $\operatorname{Re}\zeta=N$ была бы справедлива также оценка (3.40), а значит, и (3.41), где $\omega(\zeta)$ — гармоническая мера отрезка $a+T\leqslant t\leqslant N$ в области G_N. При $N\to\infty$ мы придем к (3.41).

то в силу (3.42) при $\zeta = t_0$ и $a = \frac{1}{2} t_0$ из (3.35) следует (3.36).

Теорема доказана.

§ 4. Уравнение в гильбертовом пространстве

1. Уравнение с отрицательно определенным самосопряженным оператором. Рассмотрим уравнение (1.1) в гильбертовом пространстве H. Предположим, что $A = -B$, где B — положительно определенный самосопряженный оператор в H. Тогда уравнение (1.1) запишется в виде

$$\frac{dx}{dt} + Bx = 0. \tag{4.1}$$

Для определенности будем считать, что

$$\inf \frac{(Bx, x)}{(x, x)} = 1 \qquad (x \in \mathscr{D}(B)). \tag{4.2}$$

Для резольвенты $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1} = -(B + \lambda I)^{-1}$ оператора A будет справедлива оценка $\|R(\lambda)\| \leqslant 1/d$, где d — расстояние от точки λ до спектра оператора A, поэтому в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant -1$

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{|\lambda + 1|}. \tag{4.3}$$

Из этой оценки следует, что уравнение (4.1) будет абстрактным параболическим уравнением с аналитической полугруппой. Далее, сравнение (4.3) с неравенством (2.18) показывает, что соответствующая полугруппа будет сжимающей. Более того,

$$\|U(t)\| \leqslant e^{-t}. \tag{4.4}$$

Теорема 4.1. *Уравнение* (4.1) *при условии* (4.2) *является абстрактным параболическим, соответствующая ему полугруппа задается формулой*

$$U(t) = e^{-Bt} = \int_1^\infty e^{-\lambda t}\, dE_\lambda, \tag{4.5}$$

где E_λ — спектральное разложение единицы, порожденное оператором B.

Чтобы доказать последнее утверждение, проверим, что при любом $x_0 \in \mathscr{D}(B)$ функция

$$x(t) = e^{-Bt}x_0 = \int_1^\infty e^{-\lambda t}\, dE_\lambda x_0$$

является решением задачи Коши. При $\Delta t > 0$ имеем

$$\left\| \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} + Bx(t) \right\|^2 =$$

$$= \int_1^\infty \left[\frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)} - e^{-\lambda t}}{\Delta t} + \lambda e^{-\lambda t} \right]^2 d(E_\lambda x_0,\ x_0) =$$

$$= \int_1^\infty \left[\frac{e^{-\lambda \Delta t} - 1}{\lambda \Delta t} + 1 \right]^2 e^{-2\lambda t}\lambda^2 d(E_\lambda x_0,\ x_0) = \int_1^N + \int_N^\infty . \quad (4.6)$$

Функция $\frac{e^{-u} - 1}{u} + 1$ стремится к нулю при $u \to 0$ и к 1 при $u \to \infty$, следовательно, она ограничена при $u > 0$. Для $x_0 \in \mathscr{D}(B)$ сходится интеграл

$$\int_1^\infty \lambda^2 d(E_\lambda x_0,\ x_0),$$

поэтому второе слагаемое в (4.6) можно сделать сколь угодно малым за счет выбора большого N, а затем первое слагаемое — сколь угодно малым за счет выбора малого Δt.

Таким образом, правая производная от функции $x(t)$ существует при $t \geqslant 0$ и равна $-Bx(t)$. Аналогично проверяется, что при $t > 0$ левая производная имеет то же значение.

В силу единственности решения задачи Коши при $x_0 \in \mathscr{D}(B)$

$$U(t)\, x_0 = e^{-Bt}x_0.$$

Оба эти оператора ограничены, поэтому они совпадают при всех $x_0 \in H$.

Теорема доказана.

Явное выражение полугруппы через спектральное разложение позволяет непосредственно выводить все ее свойства из формулы (4.5).

Получим, например, оценку производных полугруппы, или, более общо, оценим оператор $B^{\alpha}U(t)$ при любом $\alpha \geqslant 0$. Простым подсчетом находим:

$$\| B^{\alpha}U(t) \| = \left\| \int_1^{\infty} \lambda^{\alpha} e^{-\lambda t}\, dE_{\lambda} \right\| \leqslant \max_{\lambda \geqslant 1} \lambda^{\alpha} e^{-\lambda t} =$$

$$= \begin{cases} \left(\dfrac{\alpha}{et}\right)^{\alpha} & \text{при} \quad t \leqslant \alpha, \\ e^{-t} & \text{при} \quad t \geqslant \alpha. \end{cases} \tag{4.7}$$

Заметим, что $e^{-t} < \left(\dfrac{\alpha}{et}\right)^{\alpha}$ при $t > \alpha$, поэтому оценка

$$\| B^{\alpha}U(t) \| \leqslant \left(\frac{\alpha}{et}\right)^{\alpha} \tag{4.8}$$

справедлива при всех $t > 0$.

В частности,

$$\left\| \frac{d^nU}{dt^n} \right\| \leqslant \left(\frac{n}{et}\right)^n.$$

Из формулы (4.5) также непосредственно следует, что полугруппа $U(t)$ аналитична внутри правой полуплоскости и во всей этой полуплоскости выполнено неравенство

$$\| U(t+is) \| \leqslant e^{-t}.$$

2. Уравнение со сжимающей полугруппой. Диссипативные операторы. Уравнение (4.1) обладало максимальным набором «хороших» свойств из тех, которые нами рассматривались для задачи Коши. Возникает вопрос о характеристике тех операторов, для которых уравнение (1.1) обладает лишь частью этих свойств.

Теорема 4.2. *Для того чтобы задаче Коши для уравнения* (1.1) *с замкнутым оператором A в гильбертовом пространстве отвечала сжимающая полугруппа, достаточно выполнения условий*:

$$\mathrm{Re}(Ax, x) \leqslant 0, \quad x \in \mathscr{D}(A), \tag{4.9}$$

$$\mathrm{Re}(A^*y, y) \leqslant 0, \quad x \in \mathscr{D}(A^*). \tag{4.10}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (4.9). Для $x \in \mathscr{D}(A)$ и λ с $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ обозначим $y = Ax - \lambda x$.

Умножая скалярно на $-x$, получаем

$$-(y,\ x) = -(Ax,\ x) + \lambda(x,\ x).$$

В силу (4.9)

$$-\operatorname{Re}(y,\ x) \geqslant \operatorname{Re}\lambda\,(x,\ x).$$

Так как $-\operatorname{Re}(y,\ x) \leqslant \|y\|\,\|x\|$, то

$$\|x\| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}\|y\| = \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}\|Ax - \lambda x\|. \tag{4.11}$$

Таким образом, λ является точкой регулярного типа для оператора A. В силу замкнутости A область значений $\mathscr{R}(A - \lambda I)$ замкнута. Покажем, что она совпадает со всем пространством. В противном случае найдется элемент $z \neq 0$, ортогональный к $\mathscr{R}(A - \lambda I)$

$$(Ax - \lambda x,\ z) = 0 \qquad (x \in \mathscr{D}(A)).$$

Из этого равенства следует, что $z \in \mathscr{D}(A^*)$ и $A^*z = \bar{\lambda}z$. Но тогда

$$\operatorname{Re}(A^*z,\ z) = \operatorname{Re}\lambda\,(z,\ z) > 0,$$

что противоречит (4.10).

Итак, при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ оператор A имеет резольвенту и в силу (4.11)

$$\|R(\lambda)x\| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}\|x\|. \tag{4.12}$$

Утверждение теперь теоремы следует из теоремы 2.10.

Условия теоремы 4.2 удается проверить на многих примерах. Однако иногда представляет затруднение проверка условия (4.10). Для нее необходимо иметь полное описание области определения сопряженного к A оператора A^*, что не всегда является легкой задачей. Как видно из доказательства, условие (4.10) понадобилось для установления разрешимости уравнения $Ax - \lambda x = y$ при всех $y \in H$, что иногда удается сделать непосредственно.

Определение 4.1. Линейный оператор A с областью определения, плотной в гильбертовом пространстве, называется *диссипативным*, если

$$\operatorname{Re}(Ax,\ x) \leqslant 0 \quad \text{при } x \in \mathscr{D}(A), \tag{4.9}$$

и *максимальным диссипативным*, если он диссипативен и не имеет нетривиальных диссипативных расширений.

Диссипативный оператор всегда допускает замыкание. Действительно, пусть $x_n \to 0$ ($x_n \in \mathscr{D}(A)$) и $Ax_n \to y$. Для любого $x \in \mathscr{D}(A)$ и комплексного α имеем

$$\operatorname{Re}(A(x+\alpha x_n),\ x+\alpha x_n) \leqslant 0,$$

откуда в пределе получаем $\operatorname{Re}(Ax,\ x)+\operatorname{Re}\alpha(y,\ x) \leqslant 0$. Это неравенство может быть выполнено при любом комплексном α лишь в том случае, когда $(y,\ x)=0$. В силу плотности $\mathscr{D}(A)$ в H, $y=0$. Очевидно, замыкание диссипативного оператора будет также диссипативным оператором.

Как было показано при доказательстве теоремы 4.2, все точки λ с $\operatorname{Re}\lambda>0$ будут для диссипативного оператора точками регулярного типа. Отсюда, в частности, вытекает, что диссипативный оператор замкнут тогда и только тогда, когда область значений $\mathscr{R}(A-\lambda I)$ оператора $A-\lambda I$ при $\operatorname{Re}\lambda>0$ замкнута. Если при каком-нибудь λ с $\operatorname{Re}\lambda>0$ область значений $\mathscr{R}(A-\lambda I)$ совпадает со всем пространством, т. е. оператор имеет резольвенту, то он будет максимальным диссипативным оператором. Действительно, в противном случае для его нетривиального расширения $\tilde{A}$ нашелся бы элемент $x_0 \neq 0$ такой, что $(\tilde{A}-\lambda I)x_0=0$, что противоречит диссипативности $\tilde{A}$.

Покажем, что если диссипативный оператор A замкнут и область значений $\mathscr{R}(A-\lambda I)$ при $\operatorname{Re}\lambda>0$ не совпадает со всем пространством, то он имеет нетривиальные диссипативные расширения. При фиксированном λ обозначим через N ортогональное дополнение к $\mathscr{R}(A-\lambda I)$ в H. На множестве $\mathscr{D}(A)+N$ определим оператор $\tilde{A}$ равенством

$$\tilde{A}(x+u)=Ax-\bar{\lambda}u \qquad (x \in \mathscr{D}(A),\ u \in N).$$

Для однозначности определения оператора $\tilde{A}$ необходимо и достаточно, чтобы из $x+u=0$ следовало $x=0$, $u=0$. Дефектное подпространство N состоит из собственных векторов оператора A^*:

$$A^*u=\bar{\lambda}u \qquad (x \in N), \tag{4.13}$$

поэтому из $x=-u$ следовало бы

$$(Au,\ u)=(u,\ A^*u)=\lambda(u,\ u),$$

и так как $\operatorname{Re}\lambda>0$, то $u=0$ и, значит, $x=0$.

Покажем, что линейный оператор $\tilde{A}$ диссипативен. Имеем

$$(\tilde{A}(x+u),\ x+u)=(Ax,\ x)-\bar{\lambda}(u,\ u)+(Ax,\ u)-\bar{\lambda}(u,\ x).$$

Далее, в силу (4.13)

$$(Ax,\ u)=(x,\ A^*u)=(x,\ \bar{\lambda}u)=\lambda(x,\ u).$$

Тогда

$$\operatorname{Re}(\tilde{A}(x+u),\ x+u)=\operatorname{Re}(Ax,\ x)-\operatorname{Re}\lambda(u,\ u)\leqslant 0,$$

т. е. $\tilde{A}$ диссипативен.

Построенный оператор является максимальным диссипативным. Действительно, если $y\in H$, то $y=z+w$, где $z\in\mathscr{R}(A-\lambda I)$ и $w\in N$. Тогда найдется $x\in\mathscr{D}(A)$ такой, что $Ax=z=y-w$. Обозначая $u=-\frac{1}{\bar{\lambda}}w$, получаем $\tilde{A}(x+u)=Ax-\bar{\lambda}u=y$, т. е. $y\in\mathscr{R}(\tilde{A}-\lambda I)$.

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 4.3. *Всякий диссипативный оператор допускает расширение до максимального диссипативного оператора.*

Диссипативный оператор A является максимальным диссипативным тогда и только тогда, когда при любом λ с $\operatorname{Re}\lambda>0$ область значений $\mathscr{R}(A-\lambda I)$ совпадает со всем пространством.

Установим еще один критерий максимальной диссипативности.

Теорема 4.4. *Для того чтобы диссипативный оператор был максимальным диссипативным, необходимо и достаточно, чтобы он был замкнутым и чтобы выполнялось условие* (4.10).

Достаточность условий доказана в теореме 4.2.

Необходимость. Неравенство (4.9) в определении диссипативного оператора можно переписать в такой эквивалентной форме:

$$\|Ax+x\|^2\leqslant\|Ax-x\|^2\qquad(x\in\mathscr{D}(A)).\tag{4.14}$$

Воспользуемся теперь тождеством

$$((A-I)x,\ (A^*+I)y)=((A+I)x,\ (A^*-I)y),$$

справедливым при любых $x \in \mathscr{D}(A)$ и $y \in \mathscr{D}(A^*)$. Из него и (4.14) получаем

$$|((A-I)x, (A^*+I)y)| \leqslant \\ \leqslant \|(A+I)x\| \|(A^*-I)y\| \leqslant \|(A-I)x\| \|(A^*-I)y\|.$$

Если оператор A—максимальный диссипативный, то $(A-I)x$ пробегает все H, поэтому

$$\|(A^*+I)y\| \leqslant \|(A^*-I)y\|,$$

что эквивалентно (4.10).

Теорема доказана.

Теорему 4.2 теперь можно усилить:

Теорема 4.5. *Для того чтобы задаче Коши для уравнения* (1.1) *с замкнутым оператором A в гильбертовом пространстве отвечала сжимающая полугруппа, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был максимальным диссипативным оператором, т. е. чтобы выполнялись условия* (4.9) *и* (4.10).

Для доказательства необходимости условий заметим, что для сжимающей полугруппы функция $\|U(t)x_0\|^2$ будет невозрастающей, так как

$$\|U(t+\tau)x_0\|^2 = \|U(\tau)U(t)x_0\|^2 \leqslant \|U(t)x_0\|^2 \qquad (\tau > 0).$$

Поэтому производная этой функции неположительна. Если $x_0 \in \mathscr{D}(A)$, то

$$2\operatorname{Re}(Ax_0, x_0) = (Ax_0, x_0) + (x_0, Ax_0) = \\ = \frac{d}{dt}(U(t)x_0, U(t)x_0)|_{t=0} \leqslant 0.$$

Таким образом, оператор A диссипативен. Его максимальная диссипативность следует из того, что он имеет резольвенту при $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Теорема доказана.

3. Уравнение с изометрической полугруппой. Консервативные операторы. Линейный оператор A с плотной областью определения называется *консервативным*, если

$$\operatorname{Re}(Ax, x) = 0 \qquad (x \in \mathscr{D}(A)).$$

Ясно, что оператор $-A$ также будет консервативным.

Всякий консервативный оператор является диссипативным. Если обозначить $A = iB$, то, очевидно, $\operatorname{Im}(Bx, x) = 0$, т. е. B является симметрическим оператором. Справедливо и обратное: если B симметричен, то $A = iB$ консервативен. Всякое симметрическое расширение $\tilde{B}$ оператора B будет давать консервативное, а значит, и диссипативное расширение оператора A: $\tilde{A} = i\tilde{B}$. Поэтому если A — консервативный и максимальный диссипативный, то B — максимальный симметрический оператор. Обратно, если B — максимальный симметрический оператор, то либо A, либо $-A$ является максимальным диссипативным оператором. Действительно, индекс дефекта оператора B равен нулю либо в точке i, либо в точке $-i$. Далее, $(A - I) = i(B + iI)$ и $(-A - I) = -i(B - iI)$ и, значит, для одного из этих операторов область значений совпадает со всем пространством.

Наконец, если для замкнутого оператора A операторы A и A^* одновременно являются консервативными, то $A = iB$, где B — самосопряженный оператор. Это следует из того, что B и B^* одновременно будут симметрическими операторами.

Теорема 4.6. *Для того чтобы уравнению* (1.1) *отвечала полугруппа изометрических операторов, необходимо и достаточно, чтобы A был максимальным диссипативным консервативным оператором.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 4.5 и того, что при $x \in \mathscr{D}(A)$

$$2\operatorname{Re}(Ax, x) = \frac{d}{dt}(U(t)x, U(t)x)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(x, x) = 0.$$

Для доказательства достаточности нужно проверить лишь изометричность операторов $U(t)$. При $x \in \mathscr{D}(A)$ имеем

$$\frac{d}{dt}(U(t)x, U(t)x) = 2\operatorname{Re}(AU(t)x, U(t)x) = 0$$

и, следовательно, $(U(t)x, U(t)x) = (U(0)x, U(0)x) = (x, x)$. Так как $\mathscr{D}(A)$ плотно в H, то последнее соотношение справедливо при всех $x \in H$.

Теорема доказана.

Теорема 4.7. *Для того чтобы уравнению* (1.1) *отвечала полугруппа унитарных операторов, необходимо и достаточно, чтобы $A = iB$, где B — самосопряженный оператор.*

Действительно, в силу теоремы 4.6, условия теоремы эквивалентны тому, что обе полугруппы $U(t)$ и $U^*(t)$ изометричны, а значит, унитарны.

В рассматриваемом случае полугруппа $U(t)$ может быть продолжена до группы унитарных операторов, если положить

$$U(-t)=U^*(t)=U^{-1}(t), \qquad t>0.$$

Для этой группы справедливо спектральное представление

$$U(t)x=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,dE_\lambda x,$$

где E_λ — спектральное разложение, отвечающее оператору B. Проверяется этот факт так же, как и в п. 1.

4. Уравнения, сводящиеся к уравнениям с диссипативными операторами. В ряде случаев уравнение (1.1) сводится к уравнению с максимальным диссипативным оператором.

1) Оператор A назовем *ограниченным справа*, если

$$\operatorname{Re}(Ax,\ x)\leqslant\omega(x,\ x) \qquad (x\in\mathscr{D}(A)). \tag{4.15}$$

Пусть теперь оператор A замкнут и операторы A и A^* ограничены справа, т. е. выполнено (4.15) и

$$\operatorname{Re}(A^*y,\ y)\leqslant\omega(y,\ y) \qquad (y\in D(A^*)). \tag{4.16}$$

Тогда оператор $A-\omega I$ будет максимальным диссипативным. Полугруппа $v(t)$, порожденная уравнением

$$\frac{dv}{dt}=(A-\omega I)\,v, \tag{4.17}$$

будет сжимающей. Но полугруппы уравнений (1.1) и (4.17) связаны соотношением $U(t)=e^{\omega t}V(t)$. Таким образом, в рассматриваемом случае задача Коши для уравнения (1.1) равномерно корректна и

$$\|U(t)\|\leqslant e^{\omega t}. \tag{4.18}$$

Обратно, если уравнение (1.1) с замкнутым оператором A порождает полугруппу с условием (4.18), то $V(t)=e^{-t\omega}U(t)$ будет сжимающей полугруппой, и оператор $A-\omega I$ будет максимальным диссипативным. Таким образом, для оператора A выполнены условия (4.15) и (4.16).

2) Пусть операторы A и A^* имеют общую область определения и оператор $\frac{A+A^*}{2}$ ограничен. Тогда

$$\operatorname{Re}(Ax,\ x)=\frac{(Ax,\ x)+(x,\ Ax)}{2}=$$
$$=\left(\frac{A+A^*}{2}x,\ x\right)\leqslant\left\|\frac{A+A^*}{2}x\right\|\|x\|\leqslant\omega(x,\ x)\ \text{при}\ x\in\mathscr{D}(A),$$

т. е. выполнено (4.15). Неравенство (4.16) также выполнено, так как $\operatorname{Re}(A^*y,\ y)=\operatorname{Re}(Ay,\ y)$. Таким образом, задача Коши равномерно корректна, и выполнено (4.18).

3) Пусть оператор A представим в виде

$$A=QB, \tag{4.19}$$

где Q — самосопряженный положительно определенный ограниченный оператор, а B — максимальный диссипативный оператор. Введем в пространстве H новое скалярное произведение по формуле

$$[x,\ y]=\left(Q^{-1}x,\ y\right). \tag{4.20}$$

Так как, по условию,

$$\frac{1}{M}(x,\ x)\leqslant\left(Q^{-1}x,\ x\right)\leqslant\frac{1}{m}(x,\ x)\qquad(m>0,\ M<\infty)$$

(m, M — нижняя и верхняя грани оператора Q), то норма $\|x\|_1=[x,\ x]^2$ эквивалентна исходной норме пространства

$$\frac{1}{\sqrt{M}}\|x\|\leqslant\|x\|_1\leqslant\frac{1}{\sqrt{m}}\|x\|. \tag{4.21}$$

Покажем, что в новом скалярном произведении оператор A диссипативен:

$$\operatorname{Re}[Ax,\ x]=\operatorname{Re}\left(Q^{-1}Ax,\ x\right)=\operatorname{Re}(Bx,\ x)\leqslant 0. \tag{4.22}$$

Далее, он будет замкнутым. Действительно, если $x_n\to x$ ($x_n\in\mathscr{D}(A)$) и $Ax_n\to y$, то $Q^{-1}Ax_n=Bx_n\to Q^{-1}y$. Из замкнутости B вытекает, что $x\in\mathscr{D}(B)=\mathscr{D}(A)$ и $Bx=Q^{-1}y$, т. е. $y=QBx=Ax$.

Наконец, $\mathscr{R}(A-\lambda I)$ при $\lambda>0$ совпадает со всем пространством H. В противном случае дефектное пространство N_λ было бы непустым, т. е. нашелся бы элемент u такой, что

$$A^*u=B^*Qu=\lambda u.$$

Но тогда

$$\operatorname{Re}(B^*Qu,\ Qu) = \lambda(u,\ Qu) > 0,$$

что противоречит максимальности диссипативного оператора B.

Итак, если оператор A представим в виде (4.19), то задача Коши равномерно корректна, соответствующая полугруппа будет сжимающей в новой норме и, значит, в силу (4.21)

$$\|U(t)\| \leqslant \sqrt{M/m},$$

где M и m — верхняя и нижняя грани оператора Q.

4) Пусть оператор A имеет вид

$$A = BQ,$$

где B — диссипативный оператор, а Q — самосопряженный положительно определенный оператор. Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим уравнение

$$\frac{dz}{dt} = Q^{1/2}BQ^{1/2}z. \tag{4.23}$$

Оператор $Q^{1/2}BQ^{1/2}$ диссипативен: при $x \in \mathscr{D}(Q^{1/2}BQ^{1/2})$

$$\operatorname{Re}(Q^{1/2}BQ^{1/2}x,\ x) = \operatorname{Re}(BQ^{1/2}x,\ Q^{1/2}x) \leqslant 0.$$

Если потребовать, чтобы этот оператор имел ограниченный обратный, что, например, будет выполнено, если B, или $Q^{1/2}B$, или $BQ^{1/2}$ имеют ограниченные обратные, то у него вблизи нуля будут регулярные точки с $\operatorname{Re}\lambda > 0$, и, следовательно, он будет максимальным диссипативным. Обозначим через $Z(t)$ сжимающую полугруппу, порожденную уравнением (4.23):

$$\|Z(t)\| \leqslant 1. \tag{4.24}$$

Если $z(t)$ — решение задачи Коши $z(0) = z_0 \in \mathscr{D}(Q^{1/2}BQ^{1/2})$ для уравнения (4.23), то

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \to Q^{1/2}BQ^{1/2}z(t) \qquad (t \geqslant 0) \quad \text{и} \quad z(t) \to z_0 \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Рассмотрим функцию $x(t) = Q^{-1/2}z(t)$. В силу ограниченности оператора $Q^{-1/2}$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \to BQ^{1/2}z(t) = BQx(t) = Ax(t)$$

$$(t \geqslant 0) \quad \text{и} \quad x(t) \to Q^{-1/2}z_0,$$

т. е. функция $x(t)$ является решением задачи Коши для уравнения (1.1) с начальным условием $x_0 = Q^{-1/2} z_0$. Если z_0 пробегает $\mathscr{D}(Q^{1/2} B Q^{1/2})$, то x_0 пробегает $\mathscr{D}(Q^{1/2} BQ) = \mathscr{D}(Q^{1/2} A)$. Это решение задается формулой

$$x(t) = Q^{-1/2} Z(t) Q^{1/2} x_0.$$

Операторы

$$U(t) = Q^{-1/2} Z(t) Q^{1/2} \tag{4.25}$$

образуют полугруппу неограниченных операторов с общей областью определения $\mathscr{D}(Q^{1/2})$. Если это множество превратить в гильбертово пространство $H_{1/2}$, введя в нем скалярное произведение $[x, y]_{1/2} = (Q^{1/2} x, Q^{1/2} y)$, а затем вместо оператора A рассмотреть его минимальное сужение A_1, действующее в $H_{1/2}$: $\mathscr{D}(A_1) = \mathscr{D}(Q^{1/2} A)$, то для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A_1 x$$

в пространстве $H_{1/2}$ задача Коши будет равномерно корректной и, в силу (4.24) и (4.25) соответствующая полугруппа $U(t)$ будет сжимающей. Оператор A_1 — максимальный диссипативный в $H_{1/2}$.

Заметим, что рассмотренную в последнем случае структуру имеют операторы так называемых гамильтоновых уравнений. В них оператор $B = J$, где $J^2 = -I$ и iJ — ограниченный самосопряженный оператор.

5. Равномерно корректная задача Коши. Рассмотрим теперь произвольную равномерно корректную задачу Коши в гильбертовом пространстве H с полугруппой $U(t)$ и попытаемся выяснить структуру соответствующего ей производящего оператора A. Пусть ω — тип задачи Коши и $\omega_1 > \omega$. Введем в пространстве H новое скалярное произведение по формуле

$$[x, y] = \int_0^\infty (U(s)x, U(s)y) e^{-2\omega_1 s} ds.$$

Так как

$$\|U(s)\| \leqslant M e^{\omega s},$$

то

$$\| x \|_1^2 = [x, x] = \int_0^\infty \| U(s) x \|^2 e^{-2\omega_1 s} ds \leqslant \frac{M^2}{\omega_1 - \omega} \| x \|^2, \qquad (4.26)$$

т. е. новая норма не сильнее исходной нормы в H.

Пополнение H по новой норме обозначим через $\widetilde{H}$. Оценим новую норму операторов $U(t)$. Имеем:

$$\| U(t) x \|_1^2 = \int_0^\infty \| U(s) U(t) x \|^2 e^{-2\omega_1 s} ds =$$

$$= \int_0^\infty \| U(s+t) x \|^2 e^{-2\omega_1 s} ds =$$

$$= e^{2\omega_1 t} \int_t^\infty \| U(\tau) x \|^2 e^{-2\omega_1 \tau} d\tau \leqslant e^{2\omega_1 t} \| x \|_1^2,$$

т. е.

$$\| U(t) \|_1 \leqslant e^{\omega_1 t}. \qquad (4.27)$$

Полугруппа $U(t)$ на H сильно непрерывна при $t \geqslant 0$ в норме H, а значит, и в норме $\widetilde{H}$. Тогда в силу (4.27) она расширяется замыканием до полугруппы $\widetilde{U}(t)$, которая будет сильно непрерывной при $t \geqslant 0$ в пространстве $\widetilde{H}$ и для которой справедлива та же оценка. Как было доказано при рассмотрении случая 1) п. 4, из условия (4.27) для полугруппы $\widetilde{U}(t)$ вытекает, что $\widetilde{A} - \omega_1 I$ является диссипативным оператором, где $\widetilde{A}$ — производящий оператор этой полугруппы. Если $\dfrac{U(t) x_0 - x_0}{t} \to A x_0$ в норме пространства H, то в силу (4.26) это же будет иметь место в норме пространства $\widetilde{H}$, т. е. оператор $\widetilde{A}$ является расширением оператора A. Область значений оператора $A - \lambda I$ при $\operatorname{Re} \lambda > \omega_1$ совпадает с пространством H, и значит, плотна в $\widetilde{H}$. Так как $\widetilde{A} - \lambda I$ при этих λ имеет ограниченный обратный, то он является замыканием оператора $A - \lambda I$.

Покажем, что область определения оператора $\tilde{A}$ содержится в H. Для этого воспользуемся представлением резольвенты оператора A

$$R(\lambda)x = -\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)x\,dt,$$

справедливым при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, а значит, и при $\operatorname{Re}\lambda > \omega_1$. Из этого представления получаем

$$\|R(\lambda)x\|^2 \leqslant \left[\int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re}\lambda-\omega_1)t}\|e^{-\omega_1 t}U(t)x\|\,dt\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty e^{-2(\operatorname{Re}\lambda-\omega_1)t}\,dt \int_0^\infty e^{-2\omega_1 t}\|U(t)x\|^2\,dt = \frac{1}{2(\operatorname{Re}\lambda-\omega_1)}\|x\|_1^2$$

или

$$\|y\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2(\operatorname{Re}\lambda-\omega_1)}}\|(A-\lambda I)y\|_1. \tag{4.28}$$

Отсюда видно, что когда при замыкании оператора A имеется последовательность $y_n \to y_0$ в $\tilde{H}$ такая, что $Ay_n \to \tilde{A}y_0$ в $\tilde{H}$, то $(A-\lambda I)y_n \to (\tilde{A}-\lambda I)y_0$ и в силу (4.28) y_n сходится в H. Значит, $y_0 \in H$.

Теорема 4.8. *Если оператор A является производящим оператором равномерно корректной задачи Коши типа ω в гильбертовом пространстве, то оператор $A-\omega_1 I$ $(\omega_1 > \omega)$ может быть расширен замыканием до максимального диссипативного оператора $\tilde{A}-\omega_1 I$, действующего в более широком гильбертовом пространстве. При этом область определения оператора $\tilde{A}$ будет содержаться в исходном пространстве H.*

Как известно, новое скалярное произведение $[x, y]$ в H всегда порождается некоторым ограниченным самосопряженным положительным оператором в H. Обозначим этот оператор через Q^{-1}:

$$[x, y] = (Q^{-1}x, y) = (Q^{-1/2}x, Q^{-1/2}y). \tag{4.29}$$

Если последовательность $x_n \in H$ фундаментальна по новой норме, то

$$\|x_n - x_m\|_1^2 = \|Q^{-1/2}x_n - Q^{-1/2}x_m\|^2 \to 0 \qquad (n,\ m \to \infty),$$

т. е. последовательность $Q^{-1/2}x_n$ является сходящейся в пространстве H. Если $x_n \to x$ из H по норме $\widetilde{H}$, то $Q^{-1/2}x_n \to Q^{-1/2}x$; если же x_n сходится к «идеальному» элементу $x \in \widetilde{H}$, то $Q^{-1/2}x_n$ сходится к некоторому элементу $y \in H$ который мы обозначим так: $y = \widetilde{Q}^{-1/2}x$. Таким образом определяется расширение $\widetilde{Q}^{-1/2}$ оператора $Q^{-1/2}$, отображающее пространство $\widetilde{H}$ в пространство H.

Если x и z — произвольные элементы $\widetilde{H}$, то, построив последовательности $x_n \to x$ и $z_n \to z$ в норме $\widetilde{H}$ такие, что $x_n,\ z_n \in H$, мы получим

$$\begin{aligned}[x,\ z] &= \lim_{n\to\infty} [x_n,\ z_n] = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(Q^{-1/2}x_n,\ Q^{-1/2}z_n\right) = \left(\widetilde{Q}^{-1/2}x,\ \widetilde{Q}^{1/2}z\right). \qquad (4.30)\end{aligned}$$

Покажем теперь, что оператор $\widetilde{Q}^{-1/2}$ отображает пространство $\widetilde{H}$ на все пространство H. Пусть $y \in H$, тогда при $x \in H$

$$\left|\left(Q^{-1/2}x,\ y\right)\right| \leqslant \|Q^{-1/2}x\|\,\|y\| = \|x\|_1\,\|y\|.$$

Отсюда следует, что $\left(Q^{-1/2}x,\ y\right)$ является ограниченным линейным функционалом в $\widetilde{H}$, определенным на плотном в нем множестве H. По теореме Рисса он однозначно представим в виде

$$\left(Q^{-1/2}x,\ y\right) = [x,\ v].$$

В силу (4.30)

$$\left(Q^{-1/2}x,\ y\right) = \left(\widetilde{Q}^{-1/2}x,\ \widetilde{Q}^{-1/2}v\right) = \left(Q^{-1/2}x,\ \widetilde{Q}^{-1/2}v\right).$$

Из плотности множества $Q^{-1/2}x$ $(x \in H)$ в H следует, что

$$y = \widetilde{Q}^{-1/2}v.$$

Попутно выяснено, что оператор $\widetilde{Q}^{-1/2}$ имеет обратный. Обозначим его $\widetilde{Q}^{1/2}$. Очевидно, он является расширением на все H оператора $Q^{1/2}$.

Введем теперь оператор B равенством

$$B=Q^{-1/2}\tilde{Q}^{-1/2}(\tilde{A}-\omega_2 I)\qquad(\omega_2>\omega_1).$$

Определенный на $\mathscr{D}(\tilde{A})$ и действующий в H оператор B диссипативен: пусть $x\in\mathscr{D}(\tilde{A})\subset H$, тогда

$$\operatorname{Re}(Bx,\ x)=\operatorname{Re}\left(Q^{-1/2}\tilde{Q}^{-1/2}(\tilde{A}-\omega_2 I)x,\ x\right)=$$
$$=\operatorname{Re}\left(\tilde{Q}^{-1/2}(\tilde{A}-\omega_2 I)x,\ Q^{-1/2}x\right)=\operatorname{Re}\,[(\tilde{A}-\omega_2 I)x,\ x]\leqslant 0. \tag{4.31}$$

В силу (4.28) и (4.29),

$$\|(\tilde{A}-\omega_2 I)x\|_1=$$
$$=\|\tilde{Q}^{-1/2}(\tilde{A}-\omega_2 I)x\|=\|Q^{1/2}Bx\|\geqslant\sqrt{2(\omega_2-\omega_1)}\,\|x\|,$$

т. е. оператор $Q^{1/2}B$ имеет ограниченный обратный. Область определения $\mathscr{D}(\tilde{A})$ отображается оператором $\tilde{A}-\omega_2 I$ на все $\tilde{H}$, а пространство $\tilde{H}$ — оператором $\tilde{Q}^{-1/2}$ на все H. Поэтому оператор $Q^{1/2}B$ отображает $\mathscr{D}(\tilde{A})$ на H и, следовательно, $(Q^{1/2}B)^{-1}$ определен на всем пространстве.

Если теперь рассмотреть оператор B только на $\mathscr{D}(A)$, то

$$Bx=Q^{-1/2}\tilde{Q}^{-1/2}(A-\omega_2 I)x=Q^{-1}(A-\omega_2 I)x\qquad(x\in\mathscr{D}(A)).$$

Мы приходим к следующей теореме:

Теорема 4.9. *Если для уравнения* (1.1) *с замкнутым оператором A в гильбертовом пространстве задача Коши равномерно корректна и имеет тип ω, то оператор A представим в виде*

$$A=\omega_2 I+QB, \tag{4.32}$$

где $\omega_2>\omega$, Q — самосопряженный положительно определенный оператор, B — диссипативный оператор такой, что оператор $Q^{1/2}B$ имеет ограниченный обратный, определенный во всем пространстве H.

Хотелось бы доказать обратное утверждение: если замкнутый оператор A представим в виде (4.32), то для уравнения (1.1) задача Коши равномерно корректна. Однако это не удалось сделать. На этом пути получено лишь следующее: в пространстве H можно ввести новую норму по формуле

(4.20) и пополнить его до пространства $\tilde{H}$; оператор A расширить до оператора $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \omega_2 I + \tilde{Q}^{1/2} Q^{1/2} B,$$

определенного на $\mathscr{D}(Q^{1/2}B)$.

Из диссипативности B в пространстве H и (4.32) будет следовать диссипативность оператора $\tilde{A} - \omega_2 I$ в пространстве $\tilde{H}$. Далее,

$$\|(\tilde{A} - \omega_2 I)\, x\|_1 = \|Q^{1/2}Bx\| \geqslant \frac{1}{\left\|(Q^{1/2}B)^{-1}\right\|}\, \|x\|,$$

и область значений оператора $\tilde{A} - \omega_2 I = \tilde{Q}^{1/2} Q^{1/2} B$ совпадает со всем пространством $\tilde{H}$. Таким образом, нуль есть регулярная точка оператора $\tilde{A} - \omega_2 I$ и, следовательно, этот оператор максимальный диссипативный.

Теорема 4.10. *Если в уравнении* (1.1) *оператор A представим в виде* (4.32), *то пространство H может быть плотно вложено в другое гильбертово пространство $\tilde{H}$, а оператор A замыканием расширен до оператора $\tilde{A}$ так, что для уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{A}x$$

задача Коши будет равномерно корректной, и для соответствующей полугруппы $\tilde{U}(t)$ будет справедлива оценка

$$\|\tilde{U}(t)\|_{\tilde{H}} \leqslant e^{\omega_2 t}.$$

6. Аналитичность решений. Пусть луч $\arg\zeta = \varphi$ принадлежит множеству равномерной корректности замкнутого оператора A в гильбертовом пространстве. Предположим, что соответствующая полугруппа — сжимающая. По теореме 4.5 для этого необходимо, чтобы

$$\operatorname{Re}(e^{i\varphi}Ax,\ x) \leqslant 0 \qquad (x \in \mathscr{D}(A)),$$

или

$$\cos\varphi \operatorname{Re}(Ax,\ x) \leqslant \sin\varphi \operatorname{Im}(Ax,\ x) \qquad (x \in \mathscr{D}(A)). \quad (4.33)$$

Если, кроме того, хотя бы в одной точке луча $\arg\zeta = -\varphi$ оператор имеет резольвенту, то эти условия и достаточны.

Пусть теперь оператор A — максимальный диссипативный. Спрашивается, когда соответствующая полугруппа допускает аналитическое продолжение до сжимающей полугруппы в секторе $-\varphi_0 < \arg\zeta < \varphi_0$. По теореме 2.14 для этого необходимо и достаточно, чтобы условие (4.33) выполнялось при $\varphi = \pm\varphi_0$, т. е. чтобы

$$\operatorname{tg}\varphi_0 |\operatorname{Im}(Ax, x)| \leqslant |\operatorname{Re}(Ax, x)| \qquad (x \in \mathscr{D}(A)). \quad (4.34)$$

Максимальный диссипативный оператор, для которого существует константа $c > 0$, удовлетворяющая условию

$$c\,|\operatorname{Im}(Ax, x)| \leqslant |\operatorname{Re}(Ax, x)|, \qquad (4.35)$$

называется *регулярно диссипативным*. Условие (4.35) означает, что числовая область оператора A (множество значений формы (Ax, x)) расположена внутри сектора, содержащего отрицательную вещественную полуось, симметричного относительно нее, с углом раствора $\psi = 2\operatorname{arcctg} c$.

Теорема 4.11. *Для того чтобы замкнутый оператор A был производящим оператором сжимающей полугруппы $U(\zeta)$, аналитической в некотором секторе, содержащем вещественную положительную полуось, необходимо и достаточно, чтобы он был регулярно диссипативным. Если выполнено* (4.35), *то полугруппа аналитична в секторе*

$$|\arg\zeta| \leqslant \operatorname{arctg} c.$$

В частном случае из теоремы 4.11 вытекает

Теорема 4.12. *Для того чтобы замкнутый оператор A был производящим оператором сжимающей полугруппы, аналитической в правой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы он был отрицательным самосопряженным оператором.*

Доказательство. Необходимость. Если сжимающая полугруппа $U(\zeta)$ аналитична в правой полуплоскости, то неравенство (4.34) должно выполняться при всех φ: $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, откуда следует, что $\operatorname{Im}(Ax, x) = 0$. Значит, оператор A — симметрический. Он имеет резольвенту при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и, следовательно, самосопряжен. Он диссипативен и, значит, отрицателен.

Достаточность условий показана в п. 1.

Теорема доказана.

Результаты п. 4 позволяют перейти к рассмотрению вопроса об аналитичности решений равномерно корректной задачи Коши в гильбертовом пространстве. Предыдущие рассуждения и теоремы 4.9 и 4.10 позволяют сформулировать следующее утверждение:

Теорема 4.13. *Для того чтобы для равномерно корректной задачи Коши все обобщенные решения допускали аналитическое продолжение в сектор* $-\varphi_0 \leqslant \arg\zeta \leqslant \varphi_0$ *с оценкой*

$$\|x(\zeta)\| \leqslant Me^{\omega|\zeta|}\|x_0\| \qquad (|\arg\zeta| < \varphi_0 \leqslant \pi/2), \tag{4.36}$$

необходимо, чтобы оператор A *допускал представление*

$$A = \omega I + QB, \tag{4.37}$$

где Q — *положительно определенный самосопряженный оператор, а* B — *диссипативный оператор, для которого*

$$\operatorname{tg}\varphi_0 |\operatorname{Im}(Bx, x)| \leqslant |\operatorname{Re}(Bx, x)|.$$

Следствие. *Если в предыдущих условиях решения аналитически продолжимы в правую полуплоскость* $\varphi_0 = \pi/2$, *то* B — *отрицательный симметрический оператор.*

Теорема 4.14. *Если замкнутый оператор* A *имеет представление* (4.37), *то пространство* H *может быть плотно вложено в гильбертово пространство* $\tilde{H}$, *в котором все обобщенные решения уравнения* (1.1) *аналитичны в секторе* $|\arg\zeta| < \varphi_0$ *и справедлива оценка* (4.36) (*в норме пространства* $\tilde{H}$).

7. Полуторалинейные формы и диссипативные операторы. Функцию $a(u, v)$ $(u, v \in V)$, определенную на линейном множестве V гильбертова пространства H, называют *полуторалинейной формой*, если она линейна по u и антилинейна по v, т. е.

$$a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v)$$

и

$$a(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \bar{\alpha}_1 a(u, v_1) + \bar{\alpha}_2 a(u, v_2).$$

Примером полуторалинейной формы, определенной на всем пространстве H, является скалярное произведение (u, v).

Полуторалинейная форма $a(u, v)$ называется *ограниченной сверху*, если она определена на всем H и

$$|a(u, v)| \leqslant c\|u\| \|v\|; \tag{4.38}$$

ограниченной снизу, если

$$|a(u, u)| \geqslant k\|u\|^2. \tag{4.39}$$

Форма

$$a^*(u, v) = \overline{a(v, u)}$$

называется *сопряженной* к форме $a(u, v)$. Если $a^*(u, v) = a(u, v)$, то форма называется *симметрической*.

Ограниченная сверху и снизу форма может быть представлена через исходное скалярное произведение в виде

$$a(u, v) = (Qu, v) = (u, Q^*v), \tag{4.40}$$

где Q — линейный ограниченный и ограниченно обратимый оператор. Действительно, при фиксированном v величина $a(u, v)$ является линейным по u функционалом на H и поэтому представима в виде

$$a(u, v) = (u, w) \qquad (w \in H), \tag{4.41}$$

при этом $\|w\| \leqslant c\|v\|$, в силу чего элемент w определяется однозначно. Положив $w = Q^*v$, придем к (4.40). Принимая в (4.41) $u = v$, из (4.39) получаем

$$k\|v\|^2 \leqslant |a(v, v)| = |(Qv, v)| \leqslant \|Qv\|\|v\|.$$

Таким образом,

$$k\|v\| \leqslant \|Qv\| \leqslant c\|v\|$$

и, аналогично,

$$k\|v\| \leqslant \|Q^*v\| \leqslant c\|v\|.$$

Из двух левых неравенств вытекает, что оператор Q^{-1} ограничен и определен во всем пространстве.

Будем говорить, что гильбертово пространство H_1 *плотно вложено* в гильбертово пространство H_0, если H_1 отождествлено с плотным в H_0 его линейным подмножеством и

$$\|x\|_0 \leqslant c_{01}\|x\|_1.$$

Пусть теперь на H_1 определена ограниченная сверху и снизу форма $a(u, v)$ $(u, v \in H_1)$. В силу предыдущих рассуждений

$$a(u, v) = (Qu, v)_1.$$

Обозначим через $\mathscr{D}$ совокупность всех тех элементов $u \in H_1$, для которых форма $a(u, v)$ является антилинейным функционалом по v, непрерывным в норме пространства H_0. Для таких u форма допускает представление

$$a(u, v) = (Au, v)_0 \qquad (u \in \mathscr{D},\ Au \in H_0,\ v \in H_1). \tag{4.42}$$

Это представление единственно в силу плотности H_1 в H_0. Таким образом определяется линейный, вообще говоря, неограниченный оператор A с областью $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D} \subset H_1$ со значениями в H_0. По непрерывности соотношение (4.42) расширяется на все элементы $v \in H_0$ (без изменения обозначения формы):

$$a(u, v) = (Au, v)_0 \qquad (u \in \mathscr{D}(A),\ v \in H_0). \tag{4.43}$$

Лемма 4.1. *Область определения $\mathscr{D}(A)$ оператора A плотна в H_1, а значит, и в H_0, оператор A имеет обратный оператор, определенный на всем пространстве H_0, и ограниченный как оператор из H_0 в H_1.*

Доказательство. Пусть $z \in H_0$. При любом $v \in H_1$ имеем

$$|(z, v)_0| \leqslant \|z\|_0 \|v\|_0 \leqslant c_{01} \|z\|_0 \|v\|_1. \tag{4.44}$$

Отсюда вытекает, что величина $(z, v)_0$ является антилинейным функционалом, ограниченным в H_1. Тогда

$$(z, v)_0 = (w, v)_1 = a\left(Q^{-1}w, v\right). \tag{4.45}$$

Обозначая $Q^{-1}w = u$ и сравнивая (4.45) с (4.43), получаем $z = Au$. Далее из (4.44) следует неравенство

$$\|w\|_1 \leqslant c_{01} \|z\|_0,$$

которое приводит нас к оценке

$$\|u\|_1 \leqslant \|Q^{-1}\|_1 \|w\|_1 \leqslant \|Q^{-1}\|_1 c_{01} \|Au\|_0.$$

Таким образом, оператор A^{-1} определен на всем H_0 и ограничен как оператор из H_0 в H_1.

Покажем, что $\mathscr{D}(A)$ плотно в H_1. В противном случае нашелся бы ненулевой элемент $y_1 \in H_1$ такой, что $(u, y_1)_1 = 0$ при любом $u \in \mathscr{D}(A)$. Обозначим $x_1 = (Q^*)^{-1} y_1 \in H_1$. Тогда

$$0 = (u, y_1)_1 = (u, Q^* x_1)_1 = a(u, x_1) = (Au, x_1)_0.$$

Так как Au пробегает все H_0, то $x_1 = 0$, а значит, и $y_1 = 0$.

Лемма доказана.

Аналогично по форме $a^*(u, v)$ строится оператор A^*, отображающий $\mathscr{D}(A^*) \subset H_1$ на H_0 и имеющий ограниченный обратный. Для него

$$a^*(v, u) = (A^* v, u)_0 \qquad (v \in \mathscr{D}(A^*),\ u \in H_1)$$

или, что то же,

$$a(u, v) = (u, A^* v)_0 \qquad (v \in \mathscr{D}(A^*),\ u \in H_1). \tag{4.46}$$

Если $u \in \mathscr{D}(A)$, а $v \in \mathscr{D}(A^*)$, то

$$(Au, v)_0 = (u, A^* v)_0. \tag{4.47}$$

Из плотности $\mathscr{D}(A)$ в H_0 следует, что оператор A имеет в H_0 однозначно определенный сопряженный оператор, который временно обозначим через A'. Соотношение (4.47) показывает, что $A^* \subset A'$. Пусть $v \in \mathscr{D}(A')$, тогда

$$(Au, v)_0 = (u, A' v)_0 \qquad (u \in \mathscr{D}(A)).$$

Обозначим через w решение уравнения $A^* w = A' v$. Тогда

$$(Au, v)_0 = (u, A^* w)_0 = (Au, w)_0,$$

откуда $v = w$ и $A^* v = A' v$. Таким образом, оператор A^* является сопряженным к оператору A в H_0.

Объединим все наши выводы.

Теорема 4.15. *Если пространство H_1 плотно вложено в пространство H_0 и на пространстве H_1 задана полуторалинейная ограниченная сверху и снизу форма $a(u, v)$, то равенство (4.42) определяет на плотном в H_1 множестве $\mathscr{D}(A)$ оператор A, имеющий обратный оператор, ограниченный как оператор из H_0 в H_1. Равенство (4.46) определяет на плотном в H_1 множестве $\mathscr{D}(A^*)$ оператор A^*, являющийся сопряженным к A оператором в H_0.*

Замечание. Если форма $a(u, v)$ симметрична, то оператор A является самосопряженным.

Часто встречается ситуация, когда полуторалинейная форма $a(u, v)$ определена на некотором линейном плотном в H_0 множестве H_a, и пространство H_1 строится уже по самой форме. Поясним это сначала на простом случае. Пусть форма $a(u, v)$ симметрична и неотрицательна, т. е. $a(u, u) \geqslant 0$. Такая форма называется *замкнутой*, если из того, что $u_n \to u$ ($u_n \in H_a$, $u \in H_0$) и $a(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$ вытекает, что $u \in H_a$ и $a(u_n, u_n) \to a(u, u)$.

Введем на множестве H_a новое скалярное произведение по формуле

$$(u, v)_1 = (u, v)_0 + a(u, v).$$

Из замкнутости формы $a(u, v)$ следует, что пространство H_a в соответствующей норме будет полным пространством. Обозначим его через H_1. Теперь можно применить замечание к форме $(u, v)_1$. Тогда

$$(u, v)_0 + a(u, v) = (u, v)_1 = (Bu, v)_0 \qquad (u \in \mathscr{D}(B)),$$

где B — самосопряженный положительно определенный оператор в H_0. Обозначая $B - I = S$, приходим к формуле

$$a(u, v) = (Su, v)_0 \qquad (u \in \mathscr{D}(S),\ v \in H_0),$$

где S — самосопряженный неотрицательный оператор.

Из теоремы 4.15 следует, что область определения оператора B, а значит, и оператора S, плотна в пространстве H_1, т. е. каков бы ни был элемент $u \in H_1 = H_a$, найдется последовательность элементов u_n из $\mathscr{D}(S)$ такая, что

$$\| u - u_n \|_0^2 + a(u - u_n, u - u_n) \to 0.$$

Отсюда следует, что $u_n \to u$ в H_0 и

$$a(u_n - u_m, u_n - u_m) = (S(u_n - u_m), u_n - u_m) = \\ = \| S^{1/2} u_n - S^{1/2} u_m \|^2 \to 0. \qquad (4.48)$$

В силу замкнутости оператора $S^{1/2}$ элемент $u \in \mathscr{D}(S^{1/2})$. Обратно, оператор $S^{1/2}$ является замыканием своего сужения на $\mathscr{D}(S)$, поэтому для $u \in \mathscr{D}(S^{1/2})$ найдется последовательность $u_n \in \mathscr{D}(S)$ такая, что $u_n \to u$ в H_0 и выполнено (4.48). В силу замкнутости формы $a(u, v)$ $u \in H_a$.

Таким образом, область определения H_a формы $a(u, v)$ совпадает с областью определения $\mathscr{D}(S^{1/2})$ оператора $S^{1/2}$, причем

$$a(u, v) = (S^{1/2}u, S^{1/2}v)_0 \qquad (u, v \in H_a).$$

Перейдем теперь к более сложной ситуации. Пусть форма $a(u, v)$ несимметрична. Введем в рассмотрение симметричные формы

$$a_R(u, v) = \frac{1}{2}[a(u, v) + a^*(u, v)]$$

и

$$a_I(u, v) = \frac{1}{2i}[a(u, v) - a^*(u, v)],$$

называемые вещественной и мнимой частями формы $a(u, v)$.

Полуторалинейная форма $a(u, v)$ с плотной в H_0 областью определения H_a называется *регулярно диссипативной*, если ее вещественная часть замкнута и неположительна, а мнимая часть удовлетворяет неравенству

$$|a_I(u, u)| \leqslant -ba_R(u, u) \qquad (u \in H_a). \tag{4.49}$$

Наименьшее возможное значение константы b называется *индексом регулярности формы.*

Теорема 4.16. *Для регулярно диссипативной формы $a(u, v)$ имеет место представление*

$$a(u, v) = (Au, v)_0 \qquad (u \in \mathscr{D}(A),\ v \in H_0),$$

где A — однозначно определяемый формой регулярно диссипативный оператор с областью определения $\mathscr{D}(A) \subset H_a$. Форме $a^*(u, v)$ аналогично соответствует оператор A^*, сопряженный к оператору A в пространстве H_0.

Доказательство. Построим пространство H_1 по симметрической замкнутой неотрицательной форме $-a_R(u, v)$ согласно описанной выше схеме.

Имеем

$$\|u\|_1^2 = \|u\|_0^2 - a_R(u, u) \qquad (u \in H_a).$$

Из (4.49) нетрудно получить неравенство

$$|a_I(u, v)| \leqslant b\sqrt{-a_R(u, u)}\sqrt{-a_R(v, v)} \leqslant b\|u\|_1\|v\|_1, \tag{4.50}$$

откуда вытекает, что форма $a(u, v)$ ограничена на пространстве H_1:

$$|a(u, v)| \leqslant (1+b)\|u\|_1\|v\|_1.$$

Введем в рассмотрение форму

$$a_1(u, v) = -a(u, v) + (u, v)_0.$$

Она будет уже ограниченной снизу

$$|a_1(u, u)| \geqslant (u, u)_0 - a_R(u, u) = \|u\|_1^2.$$

По теореме 4.15 форма $a_1(u, v)$ представима в виде

$$a_1(u, v) = (Bu, v)_0 \qquad (u \in \mathscr{D}(B),\ v \in H_0),$$

где оператор B имеет ограниченный обратный, определенный на всем пространстве H_0. Положим $I - B = A$. Тогда

$$a(u, v) = (Au, v)_0 \qquad (u \in \mathscr{D}(A),\ v \in H_0). \tag{4.51}$$

Оператор A диссипативен, так как

$$\operatorname{Re}(Au, u)_0 = a_R(u, u) \leqslant 0.$$

Из того, что оператор $A - I = -B$ имеет ограниченный обратный, следует, что A является максимальным диссипативным оператором. Неравенство (4.49) говорит о том, что он регулярно диссипативный. Наконец, последнее утверждение теоремы следует из теоремы 4.15.

Теорема доказана.

Введем еще в рассмотрение самосопряженный неотрицательный оператор S, определяемый формой $-a_R(u, v)$:

$$-a_R(u, v) = \left(S^{1/2}u, S^{1/2}v\right)_0 \qquad (u, v \in H_a). \tag{4.52}$$

Будем называть его *вещественной частью* оператора A. Неравенство (4.50) можно тогда записать в виде

$$|a_I(u, v)| \leqslant b\|S^{1/2}u\|_0\|S^{1/2}v\|_0, \tag{4.53}$$

откуда следует, что форму $a_I(u, v)$ можно рассматривать как функцию от $S^{1/2}u$ и $S^{1/2}v$: $a_I(u, v) = \alpha\left(S^{1/2}u, S^{1/2}v\right)$, где

$\alpha(u', v')$ — ограниченная сверху полуторалинейная форма, определенная на области значений $\mathscr{R}(S^{1/2})$ оператора $S^{1/2}$. Повторяя рассуждения, проведенные на стр. 123, мы придем к представлению

$$a_I(u, v) = (QS^{1/2}u, S^{1/2}v)_0, \tag{4.54}$$

где Q — самосопряженный ограниченный оператор, определяемый, вообще говоря, неоднозначно (если $\mathscr{R}(S^{1/2})$ не плотна в H_0). Из (4.53) следует, что $\|Q\| \leqslant b$.

Формулы (4.52) и (4.54) приводят к равенству

$$a(u, v) = ((-I + iQ)S^{1/2}u, S^{1/2}v)_0.$$

Если предположить, что $u \in \mathscr{D}(A)$, и сравнить полученное равенство с (4.51), то мы придем к выводу, что

$$Au = S^{1/2}(-I + iQ)S^{1/2}u.$$

Таким образом, оператор $S^{1/2}(-I + iQ)S^{1/2}$ является расширением оператора A и так как он, очевидно, диссипативный, а оператор A максимально диссипативный, то

$$A = S^{1/2}(-I + iQ)S^{1/2}.$$

8. Абстрактное гиперболическое уравнение. Естественно попытаться выделить из равномерно корректных задач Коши те, которые обладают свойствами задачи Коши для гиперболических уравнений в частных производных. Как известно, для таких уравнений нет преимущественного выбора направления времени, решения обладают одинаковыми свойствами как при $t > 0$, так и при $t < 0$. Поэтому следует ограничиться теми задачами, где операторы $U(t)$ образуют группу. Наиболее простым здесь является случай группы унитарных операторов, когда оператор $A = iB$, где B — самосопряженный оператор (теорема 4.7). Если теперь к такому оператору добавить ограниченный оператор, то прямая и обратная задачи Коши останутся равномерно корректными (см. теорему 7.5), следовательно, операторы $U(t)$ также будут образовывать группу (см. § 3).

Однако групповое свойство не является достаточным для выделения класса гиперболических задач. Так, например, этим же свойством обладают решения уравнения Шредингера.

Для гиперболических задач специфическим является распространение возмущений по характеристикам с конечной скоростью. Для построения абстрактной модели этого явления предположим, что в пространстве H задан самосопряженный оператор X, спектр которого является простым и заполняет всю вещественную ось. Будем, грубо говоря, требовать, чтобы начальные возмущения, сосредоточенные на конечном участке спектра, определенным образом распространялись по спектру оператора X. Точнее, пусть E_λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ спектральная функция оператора X. Потребуем, чтобы для каждого интервала Δ вещественной оси имело место соотношение

$$U(t)E_\Delta = E_{s(t,\,\Delta)}U(t), \tag{4.55}$$

где $s(t, \lambda)$ — некоторая функция, осуществляющая при каждом t взаимно однозначное и непрерывное отображение оси $-\infty < \lambda < \infty$ на себя, а $s(t, \Delta)$ — образ интервала Δ при этом отображении.

При наличии свойства (4.55) группу $U(t)$ будем называть *гиперболической*, а функцию $s(t, \lambda)$ — *характеристикой* этой группы.

Из равенства (4.55) следует, что при любых t и τ

$$E_{s(t+\tau,\,\Delta)}U(t+\tau) = U(t+\tau)E_\Delta = \\ = U(\tau)E_{s(t,\,\Delta)}U(t) = E_{s(\tau,\,s(t,\,\Delta))}U(t+\tau).$$

Отсюда получаем, что

$$s(t+\tau, \Delta) = s(\tau, s(t, \Delta)). \tag{4.56}$$

Так как, по определению, $s(0, \Delta) = \Delta$, то обратной к функции $s(t, \lambda)$ является функция $s(-t, \lambda)$.

Пусть $\varphi(\lambda)$ — ограниченная непрерывная функция на оси $-\infty < \lambda < \infty$. Тогда оператор $\varphi(X)$ ограничен и определен формулой

$$\varphi(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, dE_\lambda.$$

Справедливо тождество

$$U(t)\varphi(X) = \varphi(s(-t, X))U(t). \tag{4.57}$$

Действительно, из (4.57) следует

$$U(t)\sum_{k=1}^{n}\varphi(\lambda_k)E_{\Delta_k}=\sum_{k=1}^{n}\varphi(\lambda_k)E_{s(t,\ \Delta_k)}U(t)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\varphi(s(-t,\ \mu_k))E_{s(t,\ \Delta_k)}U(t), \qquad (4.58)$$

где система $\{\Delta_k\}$ — конечное разбиение оси, $\lambda_k\in\Delta_k$ и $\mu_k=s(t,\lambda_k)$. Соотношение (4.57) получается из (4.58) предельным переходом.

Тождество (4.57) можно использовать для абстрактной трактовки метода характеристик. Пусть найдено обобщенное решение $x(t)$ уравнения (1.1), принимающее начальное значение $x(0)=x_0$. Тогда можно определить обобщенное решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием $x_\varphi(0)=\varphi(X)x_0$ формулой

$$x_\varphi(t)=U(t)\varphi(X)x_0=\varphi(s(-t,\ X))U(t)x_0=$$
$$=\varphi(s(-t,\ X))x(t). \qquad (4.59)$$

Нетрудно распространить полученное равенство и на более широкий класс функций $\varphi(\lambda)$.

Особенно интересен тот случай, когда x_0 является производящим элементом u_0 (собственным или несобственным) оператора X. Тогда знание решения задачи Коши с этим начальным условием u_0 позволяет с помощью формулы (4.59) находить решения для всюду плотного множества начальных условий $\varphi(X)u_0$.

Предположим теперь, что характеристика $s(t,\lambda)$ имеет производную по t, которая при каждом λ непрерывна и равномерно по λ ограничена при $t=0$. Если $x_0\in\mathscr{D}(A)$, $\varphi(X)x_0\in\mathscr{D}(A)$ и функция $\varphi(\lambda)$ имеет ограниченную производную, то обе части в (4.59) можно продифференцировать по t. Имеем

$$U(t)A\varphi(X)x_0=$$
$$=-\varphi'(s(-t,\ X))s'_t(-t,\ X)U(t)x_0+\varphi(s(-t,\ X))U(t)Ax_0.$$

Полагая $t=0$ и учитывая, что $s(0,\ X)=X$, получаем

$$A\varphi(X)x_0-\varphi(X)Ax_0=-s'_t(0,\ X)\varphi'(X)x_0 \qquad (4.60)$$
$$(x_0\in\mathscr{D}(A),\ \varphi(X)x_0\in\mathscr{D}(A)).$$

Если считать оператор X и функцию $\varphi(\lambda)$ фиксированными и рассматривать класс операторов A, удовлетворяющих последнему соотношению, то сразу видно, что операторы этого класса не выходят из него при добавлении к ним произвольной функции от оператора X. Найдем «частное решение» уравнения (4.60). Для этого, обозначая снова через u_0 производящий элемент оператора X, рассмотрим плотное в H множество F элементов x_0 вида $x_0 = f(X)u_0$, где $f(\lambda)$ — непрерывно дифференцируемая финитная функция. На этом множестве определим оператор A_0 следующим образом:

$$A_0x_0 = A_0f(X)u_0 = s'_t(0, X)f'(X)u_0. \tag{4.61}$$

Нетрудно проверить однозначность этого определения. Функция $\varphi(\lambda)f(\lambda)$ также будет принадлежать указанному классу функций, поэтому

$$A_0\varphi(X)f(X)u_0 = s'_t(0, X)[\varphi'(X)f(X) + \varphi(X)f'(X)]u_0 = \\ = \varphi(X)A_0f(X)u_0 + s'_t(0, X)\varphi'(X)f(X)u_0$$

или, иначе,

$$A_0\varphi(X)x_0 - \varphi(X)A_0x_0 = s'_t(0, X)\varphi'(X)x_0.$$

Таким образом, оператор A_0 удовлетворяет уравнению (4.60) при всех $x_0 \in F$.

Дальнейшие наши рассуждения носят качественный характер. При определенных ограничениях на рассматриваемые операторы A можно заключить, что общее решение уравнения (4.60) имеет следующий вид:

$$A = A_0 + b(X), \tag{4.62}$$

где $b(X)$ — произвольная функция от оператора X.

Всякий оператор X с простым спектром порождает изоморфизм гильбертова пространства H с пространством $\mathscr{L}_{2,\sigma}$ (см. [5]), причем при этом изоморфизме оператору X отвечает оператор умножения на аргумент λ, а функциям этого оператора — операторы умножения на соответствующие функции от λ. Производящим элементом в этом представлении можно считать функцию $u_0(\lambda) \equiv 1$.

Тогда на непрерывно дифференцируемых функциях $f(\lambda)$ оператор A в силу (4.61) и (4.62) будет задаваться формулой

$$Af = a(\lambda)\frac{df}{d\lambda} + b(\lambda), \tag{4.63}$$

где $a(\lambda) = s'_t(0, \lambda)$. Уравнение (1.1) запишется в виде

$$\frac{\partial x(t, \lambda)}{\partial t} = a(\lambda)\frac{\partial x(t, \lambda)}{\partial \lambda} + b(\lambda). \tag{4.64}$$

Таким образом, мы действительно получим уравнение в частных производных гиперболического типа.

К уравнению (4.64) мы пришли из тождества (4.60). Нетрудно видеть, что, аппроксимируя функцию $\varphi_0(\lambda) \equiv \lambda$ функциями $\varphi_n(\lambda)$, для которых выполнено тождество (4.60), мы можем предельным переходом получить соотношение

$$AX - XA = a(X) \qquad \left(a(\lambda) = s'_t(0, \lambda)\right), \tag{4.65}$$

обобщающее известное соотношение неопределенности квантовой механики. Можно показать, что при естественных условиях из (4.65) следует (4.60) и, следовательно, представление оператора A в виде (4.63). Знание соотношения (4.65) позволяет восстановить характеристику $s(t, \lambda)$ группы $U(t)$. Действительно, $s'_t(0, \lambda) = a(\lambda)$. Дифференцируя по τ соотношение (4.56) и полагая $\tau = 0$, получаем дифференциальное уравнение характеристики

$$\frac{\partial s(t, \lambda)}{\partial t} = a(s(t, \lambda)).$$

Нас интересует решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$s(0, \lambda) = \lambda.$$

Если характеристика найдена, то сама группа уже восстанавливается с помощью тождества (4.57).

§ 5. Дробные степени операторов

1. Неоднозначные функции от операторов. В § 3 введения рассматривались аналитические функции от ограниченных операторов. Полугруппы, изучавшиеся в предыдущих параграфах, фактически представляли собой функцию e^{tA} от неограниченного оператора. В этом параграфе мы изучим некоторые неоднозначные аналитические функции от операторов. Наиболее простое построение таких функций может быть проведено по следующей схеме: пусть функция $f(\lambda)$ является аналитической по λ в плоскости с конечным числом разрезов. Предположим, что все точки разрезов являются регулярными точками оператора A. Тогда резольвента $R(\lambda)$ оператора A определена и аналитична в некоторой окрестности разрезов. Выберем контур Γ, окружающий разрезы и лежащий в этой окрестности, и построим интеграл

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\lambda)\,R(\lambda)\,d\lambda. \tag{5.1}$$

Если функция $f(\lambda)$ такова, что этот интеграл абсолютно сходится, то мы получим ограниченный оператор, который естественно назвать функцией $f(A)$ от оператора. При фиксированном разрезе функции, определяемые описанным способом, обычно образуют некоторую алгебру операторов $\mathfrak{A}$. Очевидно, что из того, что $f(A)$ и $g(A)\in\mathfrak{A}$, следует $af(A)+bg(A)\in\mathfrak{A}$. Покажем, что при некоторых естественных условиях и $f(A)\,g(A)\in\mathfrak{A}$.

Для этого возьмем контур Γ', окружающий разрез и расположенный ближе к нему, чем Γ. В силу аналитичности $f(\lambda)$ и $R(\lambda)$ интеграл (5.1) можно преобразовать в интеграл по контуру Γ'. Если контуры Γ и Γ' неограничены, то для того, чтобы интеграл не изменился, нужны определенные условия убывания $f(\lambda)\,R(\lambda)$ на бесконечности, которые обычно носят такой же характер, как и условия абсолютной сходимости интеграла (5.1). Если такое преобразование законно, то

$$\begin{aligned} f(A)\,g(A) &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma'}\int_{\Gamma} f(\lambda)\,g(\mu)\,R(\lambda)\,R(\mu)\,d\lambda\,d\mu = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma'}\int_{\Gamma} f(\lambda)\,g(\mu)\,\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\lambda\,d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\lambda)\,R(\lambda)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu\right)d\lambda - \\ &\qquad - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(\mu)\,R(\mu)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu}\,d\lambda\right)d\mu. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Обычно первый интеграл в скобках равен нулю, так как точка λ лежит вне контура, ограничивающего область аналитичности функции $g(\mu)$, а второй (с учетом направления интегрирования) равен $-f(\mu)$, так как точка μ лежит внутри контура, ограничивающего область аналитичности функции $f(\lambda)$. Поэтому

$$f(A)\,g(A)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\mu)\,g(\mu)\,R(\mu)\,d\mu=fg(A)\in\mathfrak{A}. \qquad (5.3)$$

Покажем на примере, как эти эвристические соображения могут быть сделаны строгими.

Пусть замкнутый оператор A с плотной областью определения таков, что вся отрицательная вещественная полуось состоит из его регулярных точек, причем для этих точек

$$\|R(\lambda)\|\leqslant\frac{M}{1+|\lambda|}$$

или, иначе,

$$\|R(-s)\|=\|(A+sI)^{-1}\|\leqslant\frac{M}{1+s}\qquad (s>0). \qquad (5.4)$$

Разлагая резольвенту $R(-s+\mu)$ в ряд Тейлора в точке $-s$ и используя оценку (5.4), мы найдем, что этот ряд сходится в круге, где

$$\frac{|\mu|}{1+s}<\frac{1}{M}.$$

В круге с центром в $-s$ и радиуса $r=\frac{1+s}{M}q$ с $q<1$ будет справедлива оценка

$$\|R(\lambda)\|=\|R(-s+\mu)\|\leqslant\frac{M}{1+s}\,\frac{1}{1-\frac{|\mu|\,M}{1+s}}\leqslant\frac{M}{1+s}\,\frac{1}{1-q}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{1+|-s+\mu|}\,\frac{1}{1-q}\,\frac{1+s+|\mu|}{1+s}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{1+|\lambda|}\,\frac{1}{1-q}\left(1+\frac{q}{M}\right)=\frac{M_1}{1+|\lambda|}.$$

При изменении s от 0 до ∞ эти круги заполнят область, ограниченную прямыми $\tau=\pm(s-1)\operatorname{tg}\varphi$ $(\arcsin\varphi=q/M)$ и окружностью $s^2+\tau^2=\frac{q^2}{M^2}$ (рис. 9). В этой области S

справедлива оценка

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{M_1}{1+|\lambda|}. \tag{5.5}$$

Обозначим через Γ_a $(0 \leqslant a \leqslant q/M)$ контур, составленный из двух полупрямых $\arg(\lambda - a) = \pm(\pi - \varphi)$.

Рассмотрим теперь функции $f(\lambda)$, аналитические в плоскости с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси, обладающие тем свойством, что при некотором $k > 0$ (зависящем от функции) $\lambda^k f(\lambda) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$ равномерно в области $-\pi + \varepsilon \leqslant \arg \lambda \leqslant \pi - \varepsilon$ при любом ε $(0 < \varepsilon < \pi)$.

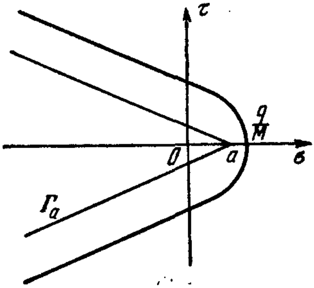

Рис. 9.

В силу (5.5) для каждой такой функции интеграл

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} f(\lambda) R(\lambda)\, d\lambda \tag{5.6}$$

абсолютно сходится. Семейство F функций $f(\lambda)$, очевидно, является алгеброй, и для функций из F все операции, проделанные в (5.2), законны. Поэтому справедливо соотношение (5.3) и, следовательно, операторы вида (5.6) образуют алгебру $\mathfrak{A}$.

2. Дробные степени операторов. В алгебру F, определенную выше, входят функции $f(\lambda) = \lambda^{-\alpha}$ $(0 < \alpha < \infty)$, рассматриваемые как однозначные в плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси, с условием $f(1) = 1$. Поэтому можно определить отрицательные дробные степени оператора A формулой

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} \lambda^{-\alpha} R(\lambda)\, d\lambda \qquad (0 < \alpha < \infty,\ a > 0). \tag{5.7}$$

Операторы $A^{-\alpha}$ ограничены. Когда α — целое число, $\alpha = n$, то в интеграле

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} \lambda^{-n} R(\lambda)\, d\lambda$$

контур интегрирования можно стянуть к нулю, и по теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_a}\lambda^{-n}R(\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{(n-1)!}\left.\frac{d^{n-1}R(\lambda)}{d\lambda^{n-1}}\right|_{\lambda=0}=R^n(0)=A^{-n}.$$

В силу (5.3) операторы $A^{-\alpha}$ образуют полугруппу

$$A^{-\alpha}A^{-\beta}=A^{-(\alpha+\beta)}.$$

Интеграл (5.7) сходится равномерно при $\alpha\in[\delta,\ 1/\delta]$ $(\delta>0)$, поэтому полугруппа операторов будет непрерывна по норме при $\alpha>0$. Для исследования ее поведения вблизи нуля целесообразно получить новое представление для операторов $A^{-\alpha}$. Пусть $0<\alpha<1$; будем стягивать контур Γ_a к отрицательной вещественной полуоси. Интеграл (5.7) при этом не будет изменяться в силу оценки (5.5).

Тогда получим

$$A^{-\alpha}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0}\lambda^{-\alpha}R(\lambda)\,d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{-\infty}\lambda^{-\alpha}R(\lambda)\,d\lambda,$$

где интегралы берутся по нижней и верхней стороне разреза соответственно: $\lambda=se^{-\pi i}$ и $\lambda=se^{\pi i}$. Отсюда

$$A^{-\alpha}=\frac{e^{\alpha\pi i}}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}s^{-\alpha}R(-s)\,ds-\frac{e^{-\alpha\pi i}}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}s^{-\alpha}R(-s)\,ds,$$

или

$$A^{-\alpha}=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_{0}^{\infty}s^{-\alpha}R(-s)\,ds\qquad(0<\alpha<1).\qquad(5.8)$$

Оценим теперь норму оператора $A^{-\alpha}$. Имеем

$$\|A^{-\alpha}\|\leqslant\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_{0}^{\infty}s^{-\alpha}\frac{M}{1+s}\,ds=M.$$

Таким образом, полугруппа $A^{-\alpha}$ на отрезке $[0,\ 1]$ равномерно ограничена.

Покажем теперь, что полугруппа $A^{-\alpha}$ удовлетворяет C_0-условию. Пусть $x_0 \in \mathcal{D}(A)$; тогда

$$A^{-\alpha}x_0 - x_0 = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty s^{-\alpha}R(-s)\,x_0\,ds - \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{1+s}\,ds\,x_0 =$$

$$= \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{1+s}R(-s)(I-A)\,x_0\,ds.$$

Отсюда

$$\|A^{-\alpha}x_0 - x_0\| \leqslant \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}M\int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{(1+s)^2}\,ds\,\|(I-A)\,x_0\|.$$

Интеграл, стоящий справа, при $\alpha \to 0$ стремится к единице, поэтому

$$\|A^{-\alpha}x_0 - x_0\| \to 0. \tag{5.9}$$

В силу равномерной ограниченности операторов $A^{-\alpha}$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ и плотности $\mathcal{D}(A)$ последнее соотношение справедливо при любом $x_0 \in E$, т. е. выполнено C_0-условие.

Функция $\lambda^{-(\alpha+i\beta)}$ $(0<\alpha<\infty)$ также принадлежит алгебре F, поэтому можно определить комплексные степени оператора A по аналогичной формуле

$$A^{-(\alpha+i\beta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_a} \lambda^{-(\alpha+i\beta)}R(\lambda)\,d\lambda \qquad (0<\alpha<\infty). \tag{5.10}$$

Таким образом, полугруппа $A^{-\alpha}$ допускает аналитическое продолжение до полугруппы A^{-z}, аналитической в правой полуплоскости. Весьма существенным является вопрос о том, при каких условиях операторы $A^{-(\alpha+i\beta)}$ сильно сходятся при $\alpha \to 0$ к ограниченному оператору, который естественно назвать $A^{-i\beta}$. Этот вопрос не выяснен. Иначе говоря, не выделен класс операторов, для которых чисто мнимые степени будут ограниченными операторами.

Сформулируем результат наших рассмотрений:

Теорема 5.1. *При выполнении условия* (5.4) *полугруппа степеней оператора A, определенная формулами*

(5.7), (5.10) *удовлетворяет C_0-условию и является аналитической в открытой правой полуплоскости.*

Можно определить и положительные дробные степени A^α ($\alpha > 0$) оператора A как операторы, обратные к его отрицательным степеням. Эти обратные операторы A^α существуют при любом α. Действительно, если бы при каком-нибудь x_0 имело место $A^{-\alpha}x_0 = 0$, то при $\beta > \alpha$ $A^{-\beta}x_0 = A^{-(\beta-\alpha)}A^{-\alpha}x_0 = 0$ и, в силу аналитичности полугруппы, $A^{-z}x_0 \equiv 0$ ($\operatorname{Re} z > 0$). В частности, $A^{-1}x_0 = 0$, что невозможно. Операторы A^α замкнуты как обратные к ограниченным. Область определения $\mathscr{D}(A^\alpha)$ плотна в E. Действительно, пусть $n \leqslant \alpha < n+1$. Если $x \in \mathscr{D}(A^{n+1})$, то $x = A^{-(n+1)}y$ ($y \in E$). Определим $z = A^{\alpha-(n+1)}y$. Тогда

$$A^{-\alpha}z = A^{-\alpha}A^{\alpha-(n+1)}y = A^{-(n+1)}y = x,$$

т. е. $x \in \mathscr{D}(A^\alpha)$. Так как $\mathscr{D}(A^{n+1})$ плотно в E, то $\mathscr{D}(A^\alpha)$ также плотно в E.

Положительные степени оператора образуют полугруппу неограниченных операторов в том смысле, что при $x \in \mathscr{D}(A^{\alpha+\beta})$

$$A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta}x. \tag{5.11}$$

Действительно, если $x \in \mathscr{D}(A^{\alpha+\beta})$, то

$$x = A^{-(\alpha+\beta)}y = A^{-\beta}A^{-\alpha}y. \tag{5.12}$$

Из этого равенства следует, что $x \in \mathscr{D}(A^\beta)$ и

$$A^\beta x = A^{-\alpha}y,$$

а отсюда, что $A^\beta x \in \mathscr{D}(A^\alpha)$ и

$$y = A^\alpha A^\beta x.$$

Сравнивая с (5.12), получим (5.11).

Если $x \in \mathscr{D}(A^\beta)$ и $\alpha > \beta > 0$, то

$$A^{-\alpha}A^\beta x = A^{-(\alpha-\beta)}A^{-\beta}A^\beta x = A^{-(\alpha-\beta)}x;$$

если же $0<\alpha<\beta$, то

$$A^{-\alpha}A^{\beta}x=A^{-\alpha}A^{\alpha}A^{\beta-\alpha}x=A^{\beta-\alpha}x.$$

Таким образом, при любых α и β

$$A^{\alpha}A^{\beta}x=A^{\beta}A^{\alpha}x=A^{\alpha+\beta}x,$$

если $x\in\mathscr{D}(A^{\gamma})$, где $\gamma=\max\{\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\}$.

В частности, при $x\in\mathscr{D}(A)$ мы получаем формулу для положительных дробных степеней $(0<\alpha<1)$ оператора A:

$$A^{\alpha}x=A^{\alpha-1}Ax=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_a}\lambda^{\alpha-1}R(\lambda)\,Ax\,d\lambda=$$

$$=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^{\infty}s^{\alpha-1}R(-s)\,Ax\,ds. \qquad (5.13)$$

Эту формулу можно было бы принять за определение положительной дробной степени оператора A на $\mathscr{D}(A)$. Остается лишь заметить, что весь оператор A^{α} получается замыканием из своего суже́ния на $\mathscr{D}(A)$. Действительно, если $x\in\mathscr{D}(A^{\alpha})$, то для последовательности $x_n=nR(-n)\,x\in\mathscr{D}(A)$, в силу оценки (5.4), $x_n\to x$ и $A^{\alpha}x_n=nA^{\alpha}R(-n)\,x=$ $=nR(-n)\,A^{\alpha}x\to A^{\alpha}x$. (Коммутирование A^{α} и $R(-n)$ на $\mathscr{D}(A^{\alpha})$ следует из коммутирования $A^{-\alpha}$ и $R(-n)$ на всем E.)

3. Оценки дробных степеней. Пусть $n<\alpha<n+1$; рассмотрим оператор $A^{\alpha}R^{n+1}(-s)$. Имеем

$$\|A^{\alpha}R^{n+1}(-s)\|=\|A^{\alpha-(n+1)}A^{n+1}R^{n+1}(-s)\|\leqslant$$

$$\leqslant\|A^{\alpha-(n+1)}\|\,\|AR(-s)\|^{n+1}\leqslant M\|I-sR(-s)\|^{n+1}\leqslant$$

$$\leqslant M\left[1+\frac{sM}{1+s}\right]^{n+1}\leqslant M(1+M)^{n+1}. \qquad (5.14)$$

Таким образом, операторы $A^{\alpha}R^{n+1}(-s)$ ограничены. Однако естественно думать, что, так как $\alpha<n+1$, нормы этих операторов должны убывать к нулю при $s\to\infty$. Это

действительно так. Чтобы получить соответствующую оценку, положим $\alpha-(n+1)=-\beta$ и вычислим

$$A^{-\beta}AR(-s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_a}\lambda^{-\beta}R(\lambda)\,AR(-s)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_a}\lambda^{-\beta}A\,\frac{R(\lambda)-R(-s)}{\lambda+s}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_a}\frac{\lambda^{-\beta}}{\lambda+s}\,AR(\lambda)\,d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_a}\frac{\lambda^{-\beta}}{\lambda+s}\,d\lambda\,AR(-s).$$

Второй интеграл равен нулю, а в первом можно контур интегрирования заменить на Γ_0. Учитывая уравнение контура Γ_0: $\lambda=re^{\pm i(\pi-\varphi)}$, можно этот интеграл оценить следующим образом:

$$\|A^{-\beta}AR(-s)\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_0^\infty\frac{r^{-\beta}\,dr}{|re^{-i(\pi-\varphi)}+s|}\|AR(re^{-i(\pi-\varphi)})\|+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^\infty\frac{r^{-\beta}\,dr}{|re^{i(\pi-\varphi)}+s|}\|AR(re^{i(\pi-\varphi)})\|\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+M_1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\tau^{-\beta}\,d\tau}{|\tau+e^{i(\pi-\varphi)}|}\,s^{-\beta}.$$

Итак,

$$\|A^{-\beta}AR(-s)\|\leqslant c/s^\beta.$$

Отсюда

$$\|A^\alpha R^{n+1}(-s)\|\leqslant\|A^{-\beta}AR(-s)\|\,\|AR(-s)\|^n\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c}{s^\beta}(1+M)^n=\frac{c_1}{s^{n+1-\alpha}}.$$

Чтобы последняя оценка не вызывала подозрения о существовании особенности в нуле, ее и оценку (5.14) можно объединить в одну:

$$\|A^\alpha R^{n+1}(-s)\|\leqslant\frac{c}{(1+s)^{n+1-\alpha}}\qquad(n\leqslant\alpha<n+1).\qquad(5.15)$$

В приложениях важной является

Теорема 5.2 (неравенство моментов). *Для любых* $\alpha<\beta<\gamma$ *при* $x\in D(A^{\gamma})$ *справедливо неравенство*

$$\| A^{\beta}x\| \leqslant c(\alpha,\beta,\gamma)\| A^{\gamma}x\|^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}} \| A^{\alpha}x\|^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}. \tag{5.16}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда $\gamma=0$, $\alpha=-\alpha_1$, $\beta=-\beta_1\,(0<\beta_1<\alpha_1)$ и $n\leqslant\alpha_1<n+1$.

Выражение

$$A^{-\beta_1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_a}\lambda^{-\beta_1}R(\lambda)\,d\lambda$$

можно n раз проинтегрировать по частям. При этом в силу оценки (5.5) внеинтегральные члены будут пропадать. Тогда мы придем к эквивалентной формуле

$$A^{-\beta_1}=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{n!\,(-1)^n}{(1-\beta_1)(2-\beta_1)\ldots(n-\beta_1)}\int_{\Gamma_a}\lambda^{n-\beta_1}R^{n+1}(\lambda)\,d\lambda.$$

Стягивая контур к отрицательной полуоси, получаем

$$A^{-\beta_1}=\frac{\sin\beta_1\pi}{\pi}\,\frac{n!\,(-1)^n}{(1-\beta_1)\ldots(n-\beta_1)}\int_0^{\infty}s^{n-\beta_1}R^{n+1}(-s)\,ds. \tag{5.16'}$$

Теперь вычислим

$$A^{-\beta_1}x=\frac{\sin\beta_1\pi}{\pi}\,\frac{n!\,(-1)^n}{(1-\beta_1)\ldots(n-\beta_1)}\times$$

$$\times\left[\int_0^{N}s^{n-\beta_1}A^{\alpha_1}R^{n+1}(-s)\,ds\,A^{-\alpha_1}x+\int_N^{\infty}s^{n-\beta_1}R^{n+1}(-s)\,ds\,x\right].$$

Применяя к первому интегралу неравенство (5.15), а ко второму (5.4), оценим

$$\| A^{-\beta_1}x\|\leqslant\frac{\sin\beta_1\pi}{\pi}\,\frac{n!}{|(1-\beta_1)\ldots(n-\beta_1)|}\times$$

$$\times\left[\frac{c}{\alpha_1-\beta_1}N^{\alpha_1-\beta_1}\| A^{-\alpha_1}x\|+\frac{M^{n+1}}{\beta_1 N^{\beta_1}}\| x\|\right].$$

Минимизируя по N выражение, стоящее в скобке, мы придем к неравенству

$$\| A^{-\beta_1} x \| \leqslant k(\alpha_1, \beta_1) \| x \|^{\frac{\alpha_1-\beta_1}{\alpha_1}} \| A^{-\alpha_1} x \|^{\beta_1/\alpha_1}.$$

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть $\alpha < \beta < \gamma$ и $x \in \mathscr{D}(A^\gamma)$. Применим к элементу $A^\gamma x$ последнее неравенство с $\alpha_1 = \gamma - \alpha$ и $\beta_1 = \gamma - \beta$. Тогда

$$\| A^\beta x \| = \| A^{-\beta_1} A^\gamma x \| \leqslant k(\gamma-\alpha, \gamma-\beta) \| A^\gamma x \|^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}} \| A^\alpha x \|^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}.$$

Теорема доказана.

4. Резольвента дробной степени. Введенная нами алгебра функций F содержит функции

$$\psi_u(\lambda) = \frac{1}{u + \lambda^\alpha}$$

при $u > 0$ и $0 < \alpha < 1$. Естественно ожидать, что соответствующая функция от оператора

$$\psi_u(A) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_a} \frac{1}{u + \lambda^\alpha} R(\lambda)\, d\lambda$$

будет резольвентой оператора A^α $(0 < \alpha < 1)$ в точке $-u$.

Оператор $\psi_u(A)$, очевидно, ограничен. Далее, пусть $x \in \mathscr{D}(A)$. Тогда

$$\psi_u(A) A^\alpha x = \psi_u(A) A^{\alpha-1} A x.$$

Пользуясь тождеством

$$\frac{\lambda^{\alpha-1}}{u + \lambda^\alpha} = \frac{1}{\lambda} - \frac{u}{\lambda(u + \lambda^\alpha)}$$

и учитывая (5.3), получаем

$$\psi_u(A) A^\alpha x = \left(A^{-1} - u\psi_u(A) A^{-1}\right) A x = x - u\psi_u(A) x$$

или

$$\psi_u(A) \left[A^\alpha + uI\right] x = x. \tag{5.17}$$

Если теперь $x \in \mathscr{D}(A^\alpha)$, то элемент $A^\alpha x$ можно аппроксимировать последовательностью $y_n \in \mathscr{D}(A^{1-\alpha})$. Обозначим

$x_n = A^{-\alpha} y_n$. Тогда $x_n \in \mathscr{D}(A)$, $x_n \to x$ и $A^\alpha x_n \to A^\alpha x$. Переходя к пределу в равенстве

$$\psi_u(A)\left[A^\alpha + uI\right] x_n = x_n$$

при $n \to \infty$, получим, что (5.17) справедливо при $x \in \mathscr{D}(A^\alpha)$.

Далее, при $x \in \mathscr{D}(A^\alpha)$

$$\psi_u(A)\,x = \psi_u(A)\,A^{-\alpha}A^\alpha x = A^{-\alpha}\psi_u(A)\,A^\alpha x = \\ = A^{-\alpha}\,[x - u\psi_u(A)\,x].$$

В силу ограниченности операторов $\psi_u(A)$ и $A^{-\alpha}$,

$$\psi_u(A)\,x = A^{-\alpha}\,[x - u\psi_u(A)\,x]$$

при всех $x \in E$, откуда

$$\left[A^\alpha + uI\right]\psi_u(A)\,x = x.$$

Итак, доказана

Теорема 5.3. *Оператор A^α имеет резольвенту в точках отрицательной полуоси и*

$$R_{A^\alpha}(-u) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_a} \frac{1}{\lambda^\alpha + u} R(\lambda)\,d\lambda.$$

Формуле для резольвенты можно также придать вещественную форму. Для этого стянем контур Γ_a к отрицательной вещественной полуоси и получим

$$R_{A^\alpha}(-u) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\infty^0 \frac{R(-s)\,ds}{s^\alpha e^{-i\pi\alpha} + u} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{R(-s)\,ds}{s^\alpha e^{i\pi\alpha} + u} =$$

$$= \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{s^\alpha R(-s)}{(s^\alpha e^{-i\pi\alpha} + u)(s^\alpha e^{i\pi\alpha} + u)}\,ds. \qquad (5.18)$$

Окончательно

$$R_{A^\alpha}(-u) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{s^\alpha R(-s)}{s^{2\alpha} + 2s^\alpha u \cos \pi\alpha + u^2}\,ds. \qquad (5.19)$$

Формулы (5.18) и (5.19) определяют аналитическую функцию от $-u$ в секторе $\alpha\pi < |\arg(-u)| \leqslant \pi$ и, следовательно, в этом секторе существует резольвента оператора A^{α}. Более того, справедлива

Теорема 5.4. *Резольвента $R_{A^{\alpha}}(\mu)$ оператора A^{α} определена в секторе $\alpha(\pi-\varphi)<|\arg\mu|\leqslant\pi$ и в каждом внутреннем к нему секторе справедлива оценка*

$$\|R_{A^{\alpha}}(\mu)\|\leqslant\frac{M_{\alpha}}{1+|\mu|}. \tag{5.20}$$

Доказательство. Запишем резольвенту $R_{A^{\alpha}}(\mu)$ в виде (5.18):

$$R_{A^{\alpha}}(\mu)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{s^{\alpha}R(-s)}{(s^{\alpha}e^{-i\pi\alpha}-\mu)(s^{\alpha}e^{i\pi\alpha}-\mu)}\,ds. \tag{5.21}$$

Как уже отмечалось, интеграл есть аналитическая функция μ в секторе $\alpha\pi<|\arg\mu|\leqslant\pi$. Для определенности положим, что $\arg\mu>0$. Продеформируем снова контур интегрирования и сведем его к лучу $\lambda=re^{-i\varkappa}$ с небольшим углом наклона $\varkappa$. Тогда интеграл

$$R_{A^{\alpha}}(\mu)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{r^{\alpha}e^{-i\varkappa\alpha}R(-re^{-i\varkappa})}{(r^{\alpha}e^{-i(\pi+\varkappa)\alpha}-\mu)(r^{\alpha}e^{i(\pi-\varkappa)\alpha}-\mu)}\,dr \tag{5.22}$$

будет аналитической функцией от μ уже в секторе, повернутом на угол $\varkappa$ (рис. 10). Таким образом, мы получаем аналитическое продолжение резольвенты в новый сектор, где $(\pi-\varkappa)\alpha<\arg\mu\leqslant\pi\alpha$. Такой процесс деформации контура мы можем продолжать до тех пор, пока $\varkappa\leqslant\varphi$, так как при таких $\varkappa$ справедлива оценка $\|R(-re^{-i\varkappa})\|\leqslant\leqslant\frac{M_1}{1+r}$ и, следовательно, интеграл не изменяется. Повторяя такие же рассуждения при $\arg\mu<0$, мы приходим к выводу, что резольвента оператора A^{α} определена в секторе $\alpha(\pi-\varphi)<|\arg\mu|\leqslant\pi$.

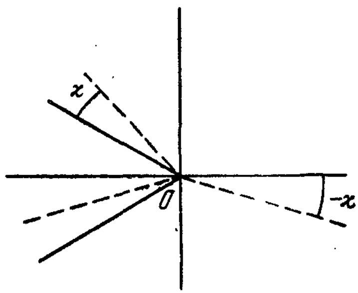

Рис. 10.

Оценим резольвенту, пользуясь формулой (5.22). Пусть $\mu = |\mu| e^{i\psi}$

$$\|R_{A^\alpha}(\mu)\| \leqslant \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{r^\alpha \| R(-re^{-i\varkappa}) \| \, dr}{|r^\alpha - \mu e^{i(\pi+\varkappa)\alpha}| \, |r^\alpha - \mu e^{-i(\pi-\varkappa)\alpha}|} =$$

$$= \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha |\mu|} \int_0^\infty \frac{\| rR(-re^{-i\varkappa}) \| \, d\tau}{|\tau - e^{i(\pi+\varkappa)\alpha + i\psi}| \, |\tau - e^{-i(\pi-\varkappa)\alpha + i\psi}|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \frac{M_1}{|\mu|} \int_0^\infty \frac{d\tau}{|\tau - e^{i(\pi+\varkappa)\alpha + i\psi}| \, |\tau - e^{-i(\pi-\varkappa)\alpha + i\psi}|}. \tag{5.23}$$

Последний интеграл равномерно ограничен во всяком секторе, внутреннем к сектору, показанному пунктиром на рис. 10. Поэтому в таком секторе

$$\|R_{A^\alpha}(\mu)\| \leqslant \frac{M'}{|\mu|}. \tag{5.24}$$

Из формулы (5.19) видно, что резольвента оператора A^α определена в нуле. Из этого и из оценки (5.24) легко следует (5.20).

Теорема доказана.

Замечание. Для вещественного $\mu = -u$ из (5.19) получится оценка

$$\|R_{A^\alpha}(-u)\| \leqslant \frac{M \sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{\alpha-1} \, ds}{s^{2\alpha} + 2s^\alpha u \cos \pi\alpha + u^2} = \frac{M}{u}. \tag{5.25}$$

Важным следствием теоремы 5.4 является то, что при $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ резольвента оператора A^α определена в левой полуплоскости и там для нее справедлива оценка (5.20). Отсюда и из теоремы 3.8 непосредственно вытекает

Теорема 5.5. *Если оператор A удовлетворяет условию* (5.4), *то операторы $-A^\alpha$ при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ являются производящими операторами аналитических полугрупп, удовлетворяющих C_0-условию.*

5. Полугруппы, построенные по дробным степеням. Для полугрупп с производящими операторами $-A^{\alpha}$ можно написать интегральные представления через резольвенту оператора A. Дело в том, что при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, $t > 0$ и $-\pi + \varepsilon \leqslant \leqslant \arg \lambda \leqslant \pi - \varepsilon$

$$\left| e^{-\lambda^{\alpha} t} \right| = e^{-|\lambda|^{\alpha} t \cos(\alpha \arg \lambda)} \leqslant e^{-|\lambda|^{\alpha} t \cos \alpha (\pi - \varepsilon)}$$

при $|\lambda| \to \infty$ стремится к нулю равномерно по $\arg \lambda$ быстрее любой степени $|\lambda|$. Поэтому функция $e^{-\lambda^{\alpha}}$ принадлежит алгебре F. Тогда естественно предполагать, что

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} e^{-\lambda^{\alpha} t} R(\lambda)\, d\lambda \qquad \left(t > 0,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}\right)$$

и будет полугруппой, порожденной оператором $-A^{\alpha}$.

Полугрупповое свойство операторов $U(t)$ следует из (5.3). Далее,

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} \lambda^{\alpha} e^{-\lambda^{\alpha} t} R(\lambda)\, d\lambda.$$

Функция $\lambda^{\alpha} e^{-\lambda^{\alpha} t} \in F$, поэтому в силу (5.3)

$$A^{-\alpha} \frac{dU}{dt} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} e^{-\lambda^{\alpha} t} R(\lambda)\, d\lambda = -U(t),$$

т. е.

$$\frac{dU}{dt} = -A^{\alpha} U(t). \tag{5.26}$$

Пусть $x_0 \in \mathscr{D}(A^{\alpha})$, тогда $x_0 = A^{-\alpha} y\ (y \in E)$. Вычислим $U(t) x_0 - x_0 = U(t) A^{-\alpha} y - A^{-\alpha} y =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} \lambda^{-\alpha} \left(e^{-\lambda^{\alpha} t} - 1\right) R(\lambda)\, y\, d\lambda.$$

Интеграл абсолютно сходится равномерно по t, поэтому его можно заменить с точностью до произвольного $\varepsilon > 0$

интегралом по ограниченному контуру, а этот последний сделать меньше ε за счет выбора малого t. Таким образом,

$$\|U(t)x_0 - x_0\| \to 0$$

при $t \to 0$. Это означает, что функция $U(t)x_0$ при $x_0 \in \mathscr{D}(A^\alpha)$ является решением ослабленной задачи Коши для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -A^\alpha x(t).$$

В силу теоремы единственности эта функция является решением задачи Коши и, следовательно, $U(t)$ — полугруппа, порожденная оператором $-A^\alpha$.

Можно было бы непосредственно доказать равномерную ограниченность полугруппы $U(t)$, перейдя к ее вещественному представлению

$$U(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-s^\alpha t\cos\pi\alpha}\sin(s^\alpha t\sin\pi\alpha)R(-s)\,ds. \quad (5.27)$$

Переход к такому представлению стягиванием контура к отрицательной полуоси законен, когда $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Особо важным для приложений является случай $\alpha = \frac{1}{2}$. Интеграл

$$U(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin\sqrt{s}\,tR(-s)\,ds \quad (5.28)$$

в этом случае не сходится абсолютно, но просто сходится, в чем легко удостовериться обычным способом — интегрированием по частям. Тот факт, что он равен

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_a} e^{-\sqrt{\lambda}t}R(\lambda)\,d\lambda,$$

можно показать также, интегрируя в последнем интеграле по частям, а затем стягивая контур интегрирования к отрицательной полуоси.

6. Возведение степени в степень. В силу оценки (5.20) оператор A^{α} при $0 < \alpha < 1$ удовлетворяет также условию (5.4), поэтому и для него можно определить дробные степени.

Имеем при $\beta > 0$

$$(A^{\alpha})^{-\beta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a'} \lambda^{-\beta} R_{A^{\alpha}}(\lambda)\, d\lambda.$$

Представим резольвенту оператора A^{α} интегралом (5.13), взятым по контуру Γ_b с $b > a$. Тогда

$$(A^{\alpha})^{-\beta} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_a'} \lambda^{-\beta} \int_{\Gamma_b} \frac{1}{-\lambda + \mu^{\alpha}} R(\mu)\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_b} R(\mu) \int_{\Gamma_a'} \frac{\lambda^{-\beta}}{-\lambda + \mu^{\alpha}}\, d\lambda\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_b} \mu^{-\alpha\beta} R(\mu)\, d\mu = A^{-\alpha\beta}\ *).$$

Далее, $(A^{\alpha})^{\beta} = \left[(A^{\alpha})^{-\beta}\right]^{-1} = \left[A^{-\alpha\beta}\right]^{-1} = A^{\alpha\beta}$. Таким образом, при любом β и $0 < \alpha < 1$ $(A^{\alpha})^{\beta} = A^{\alpha\beta}$.

7. Дробные степени производящих операторов. Если оператор B является производящим оператором полугруппы $U_B(t)$, удовлетворяющей C_0-условию, то для его резольвенты выполнены неравенства

$$\|R_B^n(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \qquad \text{при} \quad \lambda > \omega.$$

Тогда для оператора $A = -B$

$$\|R_A(-s)\| = \|R_B(s)\| \leqslant \frac{M}{s - \omega}$$

и, если $\omega < 0$, то отсюда вытекает оценка (5.4) для оператора A. Следовательно, можно определить дробные степени оператора A.

---

*) Под Γ_a' понимается контур, полученный деформацией из Γ_a и так близко стянутый к отрицательной полуоси, что он лежит между этой полуосью и образом контура Γ_b после преобразования μ^{α}.

Пусть $0 < \alpha < 1$; тогда

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty s^{-\alpha} R_A(-s)\, ds = -\frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty s^{-\alpha} R_B(s)\, ds.$$

Пользуясь представлением (1.10) резольвенты через полугруппу, получим

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty s^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-st} U_B(t)\, dt\, ds =$$

$$= \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty U_B(t) \int_0^\infty s^{-\alpha} e^{-st}\, ds\, dt =$$

$$= \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \Gamma(1-\alpha) \int_0^\infty t^{\alpha-1} U_B(t)\, dt.$$

Так как

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi},$$

то

$$A^{-\alpha} = (-B)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} U_B(t)\, dt. \qquad (5.29)$$

Так как левая и правая части аналитичны при $\operatorname{Re}\alpha > 0$, то формула (5.29) справедлива при всех таких α.

Во всей правой полуплоскости справедлива оценка

$$\|R_B(\mu)\| \leqslant \frac{M}{\operatorname{Re}\mu - \omega} \qquad (\operatorname{Re}\mu \geqslant 0),$$

следовательно, в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$

$$\|R_A(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{-\operatorname{Re}\lambda - \omega} = \frac{M}{-|\lambda|\cos\theta - \omega},$$

где $\theta = \arg\lambda$. В секторе $|\theta| = |\arg\lambda| \geqslant \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ мы получим неравенство

$$\|R_A(\lambda)\| \leqslant \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|+1}.$$

Таким образом, за величину φ, при которой справедлива оценка (5.5), можно принять $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ при любом $\varepsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Из теоремы 5.4 тогда вытекает, что для оператора A^α $(0<\alpha<1)$ оценка (5.20) будет справедлива при $|\arg\mu| > \alpha\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$. При фиксированном α можно ε выбрать столь малым, чтобы неравенство (5.20) было выполнено во всей левой полуплоскости. Мы приходим к утверждению:

Теорема 5.6. *Если B — производящий оператор полугруппы типа $\omega<0$, удовлетворяющей C_0-условию, то при $0<\alpha<1$ оператор $-(-B)^\alpha$ является производящим оператором аналитической полугруппы, удовлетворяющей C_0-условию.*

8. Дробные степени операторов с неограниченными обратными. До сих пор при построении теории дробных степеней мы предполагали, что оператор A имеет ограниченный обратный оператор. При этом естественно получалось, что его отрицательные степени образуют равномерно ограниченную полугруппу, что значительно облегчало все рассмотрения. Сейчас мы перейдем к рассмотрению более общего класса операторов, а именно таких, для которых справедлива оценка

$$\|R(-s)\| \leqslant \frac{M}{s} \qquad (s>0). \tag{5.30}$$

Рассуждая, как и в п. 1, мы получим, что неравенство

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{M_1}{|\lambda|} \tag{5.31}$$

справедливо в некотором секторе, содержащем отрицательную вещественную полуось.

Будем для сокращения говорить, что оператор A *имеет тип* (ω, M), если для него выполнено (5.30) при $s>0$ и (5.31) при всех λ из сектора, внутреннего к сектору $\pi-\omega \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi$.

Введем в рассмотрение операторы $A_\varepsilon = A+\varepsilon I$ $(1>\varepsilon>0)$. Из (5.30) вытекает, что

$$\|R_{A_\varepsilon}(-s)\| = \|R(-s-\varepsilon)\| \leqslant \frac{M}{\varepsilon+s} < \frac{M}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{1+s}. \tag{5.32}$$

Заметим, что в секторе, где выполнено (5.31),

$$\| R_{A_\varepsilon}(\lambda) \| = \| R(\lambda - \varepsilon) \| \leqslant \frac{M_1}{|\lambda - \varepsilon|} \leqslant \frac{M_1}{|\lambda|}, \tag{5.33}$$

т. е. при каждом λ резольвенты $R_{A_\varepsilon}(\lambda)$ ограничены равномерно по ε. Из (5.32) следует, что для операторов A_ε определены все степени α от $-\infty$ до ∞. Нас будут интересовать $\alpha \in (0, 1)$.

Введем в рассмотрение интеграл

$$\mathcal{J}(\mu) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^\alpha R(-s)}{s^{2\alpha} - 2s^\alpha \mu \cos \pi\alpha + \mu^2}\, ds.$$

В силу оценки (5.30) этот интеграл абсолютно сходится и является аналитической функцией от μ в секторе $\alpha\pi < |\arg \mu| \leqslant \pi$. Этот интеграл аналогичен интегралу (5.19) для резольвенты дробной степени.

Имеем

$$\left\| \mathcal{J}(-\mu) - R_{A_\varepsilon^\alpha}(-\mu) \right\| \leqslant \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left\| \int_0^\infty \frac{s^\alpha [R(-s) - R(-s-\varepsilon)]}{s^{2\alpha} + 2s^\alpha \mu \cos \pi\alpha + \mu^2} ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left\{ \int_0^\delta \frac{s^\alpha [\| R(-s) \| + \| R(-s-\varepsilon) \|]}{|s^\alpha + \mu e^{i\pi\alpha}|\,|s^\alpha + \mu e^{-i\pi\alpha}|} ds + \right.$$

$$\left. + \varepsilon \int_\delta^\infty \frac{s^\alpha \| R(-s) \| \| R(-s-\varepsilon) \|}{|s^\alpha + \mu e^{i\pi\alpha}|\,|s^\alpha + \mu e^{-i\pi\alpha}|} ds. \right\}$$

Так как $\| R_A(-s-\varepsilon) \| \leqslant \frac{M}{s}$ $(0 \leqslant \varepsilon)$, то первый интеграл сходится и может быть сделан сколь угодно малым за счет малого δ. В силу этого же второй интеграл сходится и при фиксированном δ второй член сколь угодно мал при малом ε, поэтому

$$\left\| \mathcal{J}(-\mu) - R_{A_\varepsilon^\alpha}(-\mu) \right\| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что оператор $\mathcal{J}(\lambda)$ на отрицательной вещественной оси, а в силу аналитичности и в секторе $\alpha\pi \leqslant |\arg \mu| \leqslant \pi$ удовлетворяет резольвентному тождеству

$$\mathcal{J}(\lambda) - \mathcal{J}(\mu) = (\lambda - \mu)\,\mathcal{J}(\lambda)\,\mathcal{J}(\mu). \tag{5.34}$$

Далее,

$$\|\mu\mathcal{J}(-\mu)x - x\| =$$

$$= \left\| \frac{\mu \sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{\alpha-1}\,[sR(-s)\,x - x]}{s^{2\alpha} + 2s^\alpha\mu\cos\pi\alpha + \mu^2}\,ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\mu|\sin\pi\alpha}{\pi} \int_0^N \frac{s^{\alpha-1}\,(M+1)\,ds\,\|x\|}{|s^{2\alpha} + 2s^\alpha\mu\cos\pi\alpha + \mu^2|} +$$

$$+ \frac{|\mu|\sin\pi\alpha}{\pi} \int_N^\infty \frac{s^{\alpha-1}\,\|sR(-s)\,x - x\|}{|s^{2\alpha} + 2s^\alpha\mu\cos\pi\alpha + \mu^2|}\,ds.$$

Так как $sR(-s)\,x \to x$ при $s \to \infty$, то при достаточно большом N будет $\|sR(-s)\,x - x\| < \varepsilon$ и, следовательно, весь второй член будет меньше ε. При фиксированном N и достаточно большом $|\mu|$ первый член также станет меньше ε, таким образом,

$$\mu\mathcal{J}(-\mu)\,x \to x \quad \text{при} \quad \mu \to \infty \quad (x \in E). \tag{5.35}$$

Отсюда следует, что при заданном $x \in E$ и при достаточно большом $|\mu|$ элемент $\mathcal{J}(-\mu)\,x \neq 0$. Из резольвентного тождества (5.34) вытекает, что $\mathcal{J}(\lambda)\,x \neq 0$ при всех λ с $\alpha\pi < |\arg\lambda| \leqslant \pi$. Операторы $\mathcal{J}(\lambda)$ имеют замкнутые обратные.

Введем оператор

$$A^\alpha = [\mathcal{J}(\lambda)]^{-1} + \lambda I.$$

Благодаря (5.34) оператор A^α не зависит от λ. Он имеет плотную в E область определения $\mathcal{D}(A^\alpha)$. Действительно, очевидно, элементы вида $\mu\mathcal{J}(-\mu)\,x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$ и $\mu\mathcal{J}(-\mu)\,x \to x$ при любом $x \in E$.

Итак, мы определили степени A^α оператора A при $0 < \alpha < 1$. Оператор $\mathcal{J}(\lambda)$ по построению будет резольвентой оператора A^α. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 5.4 и замечания к ней, можно показать, что оператор A^α имеет тип $(\alpha\omega, M)$. Если $\alpha\omega < \frac{\pi}{2}$, то оператор $-A^\alpha$ будет производящим оператором аналитической полугруппы с C_0-условием.

Рассмотрим связь между операторами A_ε^α и A^α. При $x \in \mathscr{D}(A)$, пользуясь формулой (5.8), получим

$$\|A_\varepsilon^\alpha x - A_\eta^\alpha x\| =$$

$$= \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left\| \int_0^\infty s^{\alpha-1} [R(-s-\varepsilon) A_\varepsilon - R(-s-\eta) A_\eta] x \, ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left\{ \int_0^\delta s^{\alpha-1} [\|A_\varepsilon R(-s-\varepsilon)\| + \|A_\eta R(-s-\eta)\|] \, ds + \right.$$

$$\left. + |\varepsilon-\eta| \int_\delta^\infty s^\alpha \|R(-s-\varepsilon)\| \|R(-s-\eta)\| \, ds \right\} \|x\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left\{ \frac{2(1+M)}{\alpha} \delta^\alpha + \frac{M^2}{1-\alpha} |\varepsilon-\eta| \delta^{\alpha-1} \right\} \|x\|.$$

Минимизируя выражение в скобках по δ, получим

$$\|A_\varepsilon^\alpha x - A_\eta^\alpha x\| \leqslant c |\varepsilon-\eta|^\alpha \|x\|,$$

где c зависит только от M и α.

Таким образом, операторы A_ε^α на $\mathscr{D}(A)$ сходятся к некоторому пределу, который обозначим B. Имеем

$$\|A_\varepsilon^\alpha x - Bx\| \leqslant c\varepsilon^\alpha \|x\| \qquad (x \in \mathscr{D}(A)).$$

Иначе можно записать, что

$$Bx = A_\varepsilon^\alpha x + Qx \qquad (x \in \mathscr{D}(A)),$$

где Q — ограниченный на $\mathscr{D}(A)$, а значит, и на всем пространстве E, оператор. Как было показано в п. 2, оператор A_ε^α получается замыканием с $\mathscr{D}(A_\varepsilon) = \mathscr{D}(A)$, поэтому

$$\bar{B} = A_\varepsilon^\alpha + Q$$

и $\mathscr{D}(\bar{B})=\mathscr{D}(A_\varepsilon^\alpha)$. Отсюда, в частности, вытекает, что область определения $\mathscr{D}(A_\varepsilon^\alpha)$ не зависит от ε. Для оператора $\bar{B}$ также справедливо неравенство

$$\|A_\varepsilon^\alpha x-\bar{B}x\|\leqslant c\varepsilon^\alpha\|x\| \qquad (x\in\mathscr{D}(\bar{B})=\mathscr{D}(A_\varepsilon^\alpha)). \quad (5.36)$$

Рассмотрим резольвенты $R_{\bar{B}}(-1)$ и $R_{A_\varepsilon^\alpha}(-1)$. Так как последние равномерно ограничены, то из (5.36) легко следует, что $R_{A_\varepsilon^\alpha}(-1)$ равномерно сходятся к $R_{\bar{B}}(-1)$. С другой стороны, как было показано $R_{A_\varepsilon^\alpha}(-1)\to\mathscr{J}(-1)=R_{A^\alpha}(-1)$. Отсюда вытекает, что $R_{A^\alpha}(-1)=R_{\bar{B}}(-1)$ и, значит, $\bar{B}=A^\alpha$.

Таким образом, $\mathscr{D}(A_\varepsilon^\alpha)=\mathscr{D}(A^\alpha)$ и

$$\|A_\varepsilon^\alpha x-A^\alpha x\|\leqslant c\varepsilon^\alpha\|x\| \qquad (x\in\mathscr{D}(A^\alpha)). \quad (5.37)$$

Попутно мы показали, что оператор A^α получается замыканием своего суже́ния на $\mathscr{D}(A)$.

Из соотношения (5.37) вытекает много важных следствий.

1°. При $\alpha<\beta$ область определения $\mathscr{D}(A_\varepsilon^\alpha)$ содержит область определения $\mathscr{D}(A_\varepsilon^\beta)$, поэтому

$$\mathscr{D}(A^\alpha)\supset\mathscr{D}(A^\beta) \qquad (\alpha<\beta).$$

2°. Операторы A^α и A^β $(0<\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta<1)$ коммутируют на $\mathscr{D}(A^{\alpha+\beta})$.

Действительно, пусть

$$x\in\mathscr{D}(A_\varepsilon^{\alpha+\beta})=\mathscr{D}(A^{\alpha+\beta})\subset\mathscr{D}(A^\alpha)\cap D(A^\beta).$$

Тогда $A_\varepsilon^\beta x\in\mathscr{D}(A_\varepsilon^\alpha)=\mathscr{D}(A^\alpha)$. Имеем

$$A^\alpha A_\varepsilon^\beta x=\lim_{\eta\to 0}A_\eta^\alpha A_\varepsilon^\beta x=\lim_{\eta\to 0}A_\varepsilon^\beta A_\eta^\alpha x.$$

Из замкнутости оператора A_ε^β следует, что $A^\alpha x\in\mathscr{D}(A^\beta)$ и

$$A^\alpha A_\varepsilon^\beta x=A_\varepsilon^\beta A^\alpha x.$$

Устремим теперь ε к нулю. Тогда в силу замкнутости оператора A^α получим

$$A^\alpha A^\beta x=A^\beta A^\alpha x.$$

3°. При $\alpha,\ \beta > 0$ и $\alpha+\beta < 1$ имеет место полугрупповое тождество

$$A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta} x \qquad (x \in \mathscr{D}(A^{\alpha+\beta})). \tag{5.38}$$

Действительно, левая часть равенства определена по предыдущему. Имеем

$$A_\varepsilon^\alpha A_\varepsilon^\beta x = A_\varepsilon^{\alpha+\beta} x. \tag{5.39}$$

Далее,

$$\| A_\varepsilon^\alpha A_\varepsilon^\beta x - A^\alpha A^\beta x \| \leqslant$$
$$\leqslant \| (A_\varepsilon^\alpha - A^\alpha) A_\varepsilon^\beta x \| + \| A^\alpha (A_\varepsilon^\beta - A^\beta) x \| \leqslant$$
$$\leqslant c\varepsilon^\alpha \| A_\varepsilon^\beta x \| + \| (A_\varepsilon^\beta - A^\beta) A^\alpha x \| \leqslant c\varepsilon^\alpha \| A_\varepsilon^\beta x \| + c\varepsilon^\beta \| A^\alpha x \| \to 0.$$

Переходя слева и справа в (5.39) к пределу, получаем (5.38).

4°. При $0 < \alpha < \beta < \gamma \leqslant 1$ и $x \in \mathscr{D}(A^\gamma)$

$$\| A^\beta x \| \leqslant c(\alpha, \beta, \gamma) \| A^\gamma x \|^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}} \| A^\alpha x \|^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}. \tag{5.40}$$

Справедливость этого неравенства вытекает из того, что константа в неравенстве (5.16), как это видно из доказательства, зависит лишь от константы M_1 в неравенстве (5.31) и от сектора, в котором это неравенство выполняется. Так как для $R_{A_\varepsilon}(\lambda)$ в силу (5.33) сектор и константа могут быть выбраны не зависящими от ε, то (5.40) получается предельным переходом из такого же неравенства для A_ε.

Можно показать, что формулы (5.27) и (5.28) для полугрупп, порожденных степенями A^α оператора A при $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, остаются справедливыми в рассматриваемом случае.

Наконец, если $x \in \mathscr{D}(A)$, то, написав формулу (5.13) для операторов A_ε и перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$, мы получим формулу для A^α:

$$A^\alpha x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty s^{\alpha-1} R(-s) Ax\, ds \qquad (x \in \mathscr{D}(A), \quad 0 < \alpha < 1).$$

9. Дробные степени операторов в гильбертовом пространстве. Простейшим примером оператора в гильбертовом пространстве, для которого выполнено условие (5.4), является самосопряженный положительно определенный оператор. Дробные степени такого оператора можно определить через спектральное разложение:

$$A^{\alpha} = \int_{a}^{\infty} \lambda^{\alpha}\, dE_{\lambda},$$

где a — нижняя грань оператора A.

Нетрудно проверить, что это определение совпадает с другими определениями, данными выше.

Для полугруппы отрицательных степеней производящим оператором будет оператор $\ln A$, который также определяется спектральным разложением:

$$\ln A = \int_{a}^{\infty} \ln \lambda\, dE_{\lambda}.$$

Ряд неравенств, полученных в общем случае, для самосопряженных операторов допускает уточнение. Например, неравенство моментов принимает следующий вид:

$$\| A^{\beta} x \| \leqslant \| A^{\gamma} x \|^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}} \| A^{\alpha} x \|^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \tag{5.41}$$

при любых $\alpha < \beta < \gamma$ и $x \in \mathscr{D}(A^{\gamma})$.

Действительно,

$$\| A^{\beta} x \|^{2} = \int_{a}^{\infty} \lambda^{2\beta} d(E_{\lambda} x,\ x) = \int_{a}^{\infty} \lambda^{2\gamma \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}} \lambda^{2\alpha \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} d(E_{\lambda} x,\ x).$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $p = \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ и $q = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}$ соответственно, получим (5.41).

Аналогично могут быть уточнены константы и в других неравенствах.

Другой пример дают диссипативные операторы. Если B — максимальный диссипативный оператор, то, как показано в § 4, при $\operatorname{Re}\mu > 0$ существует резольвента $R_B(\mu)$ и вы полнено неравенство

$$\|R_B(\mu)\| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\mu}.$$

Следовательно, для $A = -B$

$$\|R_A(-s)\| \leqslant \frac{1}{s} \qquad (s > 0),$$

т. е. выполнено условие (5.30). Таким образом, для всяког(максимального диссипативного оператора можно ввести понятиı о его дробных степенях. Более того, во всяком секторı $\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leqslant |\arg\lambda| \leqslant \pi$

$$\|R_A(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda|} \leqslant \frac{1}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{1}{|\lambda|}.$$

Поэтому оператор A будет иметь тип $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. Как был(показано выше, при этом оператор A^α будет иметь тип $\left(\frac{\alpha\pi}{2}, 1\right.$ и, следовательно, оператор $-A^\alpha$ будет производящим опе ратором сжимающей полугруппы, допускающей аналитическоı продолжение в некоторый сектор, содержащий отрицательнук полуось. Отсюда в свою очередь вытекает, что операто| $-A^\alpha = -(-B)^\alpha$ является также максимальным диссипатив ным оператором.

§ 6. Неоднородное уравнение

1. Решение неоднородного уравнения. Перейдем тепері к рассмотрению неоднородного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \qquad (6.1$$

где $f(t)$ — заданная непрерывная функция со значениями в E

Понятия решения, ослабленного решения, задачи Коші и ослабленной задачи Коши для этого уравнения остаютс: такими же, как и для уравнения (1.1).

Теорема 6.1. *Пусть ослабленная задача Коши дл: однородного уравнения* (1.1) *корректна на* $\mathscr{D}(A)$ *и опе* *ратор A имеет хотя бы одну регулярную точку. Если $x(t)$ — ослабленное решение уравнения* (6.1), *то*

$$x(t)=U(t)\,x(0)+\int_0^t U(t-s)\,f(s)\,ds. \tag{6.2}$$

Доказательство. Применим к обеим частям уравнения

$$x'(s)=Ax(s)+f(s),$$

которому удовлетворяет функция $x(s)$ при $s>0$, оператор $U(t-s)$, предполагая, что $0<s<t$.

Тогда

$$U(t-s)\,x'(s)=U(t-s)\,Ax(s)+U(t-s)\,f(s). \tag{6.3}$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{ds}(U(t-s)\,x(s))=\lim_{\sigma\to 0}\left[U(t-s-\sigma)\frac{x(s+\sigma)-x(s)}{\sigma}+\right.$$
$$\left.+\frac{U(t-s-\sigma)\,x(s)-U(t-s)\,x(s)}{\sigma}\right].$$

В точке $t-s>0$ оператор-функция $U(t)$ сильно непрерывна, а функция $x(s)$, по условию, дифференцируема при $s>0$. Поэтому предел первого слагаемого равен $U(t-s)\,x'(s)$. Значение $x(s)\in\mathscr{D}(A)$, в силу чего предел второго слагаемого существует и равен $-AU(t-s)\,x(s)=-U(t-s)\,Ax(s)$ (см. то, что сказано после теоремы 1.1). Таким образом, (6.3) переходит в равенство

$$\frac{d}{ds}(U(t-s)\,x(s))=U(t-s)\,f(s).$$

Правая часть непрерывна по s всюду на $[0,t]$ за исключением, быть может, точки t, поэтому, интегрируя по s в пределах от 0 до $t-h$, получим

$$U(h)\,x(t-h)-U(t)\,x(0)=\int_0^{t-h}U(t-s)\,f(s)\,ds.$$

Для того чтобы выяснить поведение первого слагаемого при $h \to 0$, запишем последнее равенство в виде

$$U(h) R(\lambda_0)(Ax(t-h) - \lambda_0 x(t-h)) = \\ = U(t) x_0 + \int_0^{t-h} U(t-s) f(s)\, ds.$$

Как уже говорилось выше (см. § 3, п. 1), операторы $U(h) R(\lambda_0)$ сильно сходятся к оператору $R(\lambda_0)$. Ослабленное решение $x(t)$ при $t > 0$ имеет непрерывную производную, и поэтому функция $Ax(t)$ непрерывна при $t > 0$. Отсюда следует, что выражение, стоящее слева, имеет при $h \to 0$ предел. Переходя к пределу при $h \to 0$, получим (6.2).

Замечание 6.1. Из доказательства видно, что функция $f(s)$ не обязательно должна быть непрерывной. Например, она может иметь суммируемую особенность в точке $s = 0$. Тогда функция $U(t-s) f(s)$ также имеет суммируемую особенность, и доказательство остается в силе.

Таким образом, задача о нахождении ослабленных решений неоднородного уравнения (6.1) имеет готовый ответ: если решение существует, то оно дается формулой (6.2). Остается лишь проверить, является ли функция (6.2) при данной $f(t)$ решением уравнения (6.1). Если $x_0 \in \mathscr{D}(A)$, то первое слагаемое справа в (6.2) является решением однородного уравнения (1.1), поэтому в проверке нуждается лишь второе слагаемое

$$y(t) = Qf(t) = \int_0^{t-0} U(t-s) f(s)\, ds. \tag{6.4}$$

Подынтегральная функция может иметь особенность в точке $s = t$ за счет множителя $U(t-s)$, поэтому даже существование интеграла нельзя доказать при любой непрерывной функции $f(s)$. Нам придется налагать на $f(s)$ различные дополнительные ограничения.

Для упрощения дальнейшего изложения предположим, что регулярная точка оператора A находится в нуле: $\lambda_0 = 0$. Если это не так, то в уравнении (6.1) делается замена

$$x(t) = e^{\lambda_0 t} z(t).$$

Функция $z(t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{dz}{dt} = (A - \lambda_0 I) z + e^{-\lambda_0 t} f(t).$$

Для оператора $A - \lambda_0 I$ нуль — регулярная точка, и те свойства функций $x(t)$ и $z(t)$, $f(t)$ и $e^{-\lambda_0 t} f(t)$, которые нас будут интересовать, соответственно одинаковы.

Итак, предположим, что оператор A^{-1} существует и ограничен.

Если функция $f(t)$ такова, что $f(t) \in \mathscr{D}(A)$ и $Af(t)$ интегрируема по Бохнеру, то интеграл (6.4) абсолютно сходится и

$$\| y(t) \| \leqslant \int_0^t \| U(t-s) A^{-1} \| \| Af(s) \| ds \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \| U(\tau) A^{-1} \| \int_0^t \| Af(s) \| ds < \infty.$$

Таким образом, функция $y(t)$ определена при всех $t \geqslant 0$. Если, кроме того, функция $Af(t)$ непрерывна, то $y(t)$ также непрерывна. Действительно, рассмотрим функцию $U(t) f(s)$ и покажем, что она непрерывна в квадрате $0 \leqslant t$, $s \leqslant T$. Имеем

$$U(t + \Delta t) f(s + \Delta s) - U(t) f(s) =$$

$$= U(t + \Delta t) A^{-1} [Af(s + \Delta s) - Af(s)] +$$

$$+ U(t + \Delta t) f(s) - U(t) f(s).$$

Первое слагаемое стремится к нулю из-за непрерывности функции $Af(s)$ и равномерной ограниченности операторов $U(t + \Delta t) A^{-1}$. Второе слагаемое стремится к нулю вследствие того, что $U(t) f(s)$ является ослабленным решением уравнения (1.1).

Из непрерывности функции $U(t) f(s)$ следует непрерывность функции $U(t-s) f(s)$ как функции двух переменных t, s $(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T)$, а значит, и непрерывность интеграла (6.4).

Для того чтобы функция $y(t)$ была ослабленным решением, необходимо, чтобы $y(t) \in \mathscr{D}(A)$ при $t > 0$, а для этого в силу замкнутости оператора A достаточным является существование интеграла

$$Ay(t) = \int_0^{t-0} AU(t-s) f(s)\, ds = \int_0^{t-0} U(t-s) Af(s)\, ds. \qquad (6.5)$$

Если $Af(s) \in \mathscr{D}(A)$ и функция $A^2 f(s)$ непрерывна, то, по предыдущему, интеграл абсолютно сходится и дает непрерывную функцию $Ay(t)$. При этом предположении функция $U(t)Af(s)$ будет непрерывной функцией двух переменных. Далее, так как $U(t)Af(s)$ есть ослабленное решение (1.1), то (см. § 3, п. 1) функция $U(t) f(s) = A^{-1} U(t) Af(s)$ будет непрерывно дифференцируемым на $[0, \infty)$ решением (1.1) и, следовательно,

$$\frac{dU(t-s) f(s)}{ds} = AU(t-s) f(s) = U(t-s) Af(s)$$

$$(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T).$$

Таким образом, подынтегральная функция в (6.4) непрерывна по (t, s) и имеет производную по t, которая также непрерывна по (t, s). Отсюда следует законность дифференцирования интеграла (6.4) по параметру по обычным правилам. Имеем

$$\frac{dy}{dt} = f(t) + \int_0^t AU(t-s) f(s)\, ds = f(t) + Ay(t)$$

$$(0 \leqslant t < \infty).$$

Мы пришли к следующему утверждению:

Теорема 6.2. *В условиях теоремы* 6.1 *функция* (6.4) *является решением уравнения* (6.1) *при всех* $t \geqslant 0$, *если функция* $f(t)$ *такова, что* $f(t) \in \mathscr{D}(A^2)$ *и* $A^2 f(t)$ *непрерывна при* $t \geqslant 0$.

Не следует, однако, думать, что принадлежность значений $f(t)$ к $\mathscr{D}(A^2)$ или даже к $\mathscr{D}(A)$ является в какой-либо мере необходимым условием для того, чтобы функция (6.4) была ослабленным решением (6.1). Это положение иллюстрируется следующим фактом:

Лемма 6.1. *Если свободный член в уравнении* (6.1) *постоянен*: $f(t) = f_0 \in E$, *то формула* (6.4) *дает ослабленное решение уравнения* (6.1).

Доказательство. Имеем

$$y(t) = \int_0^{t-0} U(t-s) f_0\, ds = \int_0^{t-0} U(t-s) A A^{-1} f_0\, ds =$$

$$= \int_0^{t-0} \frac{dU(t-s) A^{-1} f_0}{dt}\, ds = -\int_0^{t-0} \frac{dU(t-s) A^{-1} f_0}{ds}\, ds =$$

$$= U(t) A^{-1} f_0 - A^{-1} f_0. \qquad (6.6)$$

Первый член дает ослабленное решение однородного уравнения, а второй, очевидно, есть решение неоднородного уравнения.

Лемма доказана.

Тождество (6.6) позволяет преобразовать интеграл (6.4) к виду

$$y(t) = \int_0^{t-0} U(t-s)[f(s) - f(t)]\, ds + \int_0^{t-0} U(t-s) f(t)\, ds =$$

$$= \int_0^{t-0} U(t-s)[f(s) - f(t)]\, ds + U(t) A^{-1} f(t) - A^{-1} f(t). \qquad (6.7$$

Этот вид бывает часто удобным, так как выражение, стоящее в скобках под интегралом, обращается в нуль при $s = t$ и может погашать особенность множителя $U(t-s)$.

В связи с леммой 6.1 естественно предполагать, что на вопрос о существовании решения уравнения (6.1) влияет быстрота изменения функции $f(t)$. Предположим, что функция $f(t)$ имеет непрерывную производную $f'(t)$. Тогда

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(t)\, dt.$$

Преобразуем интеграл (6.4). Пользуясь тождеством (6.6), формально получаем

$$y(t) = \int_0^t U(t-s) f(0)\,ds + \int_0^t U(t-s) \int_0^s f'(\tau)\,d\tau\,ds =$$

$$= U(t) A^{-1} f(0) - A^{-1} f(0) + \int_0^t \int_\tau^t U(t-s) f'(\tau)\,ds\,d\tau =$$

$$= U(t) A^{-1} f(0) - A^{-1} f(0) + \int_0^t U(t-\tau) A^{-1} f'(\tau)\,d\tau -$$

$$- \int_0^t A^{-1} f'(\tau)\,d\tau = U(t) A^{-1} f(0) +$$

$$+ \int_0^t U(t-\tau) A^{-1} f'(\tau)\,d\tau - A^{-1} f(t). \qquad (6.8)$$

Первое слагаемое есть ослабленное решение однородного уравнения (1.1), поэтому для изучения свойств $y(t)$ достаточно рассмотреть функцию

$$z(t) = \int_0^t U(t-\tau) A^{-1} f'(\tau)\,d\tau - A^{-1} f(t). \qquad (6.9)$$

Интеграл, входящий в эту формулу, имеет такой же вид, как и интеграл (6.4), но вместо функции $f(t)$ в нем стоит функция $A^{-1} f'(\tau)$. Проведенное ранее исследование такого интеграла приводит нас сразу к теореме:

Теорема 6.3. *Если при условиях теоремы* 6.1 *функция $f(t)$ имеет непрерывную производную $f'(t)$ такую, что $f'(t) \in \mathscr{D}(A)$ и функция $Af'(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$, то формула* (6.4) *дает решение уравнения* (6.1).

Доказательство дифференцируемости функции $z(t)$ и правило вычисления производной следует из предыдущего. Поэтому

$$\frac{dz}{dt} = A^{-1} f'(t) + A \int_0^t U(t-\tau) A^{-1} f'(\tau)\,d\tau - A^{-1} f'(t) =$$

$$= Az(t) + f(t).$$

Далее, $z(0) = -A^{-1}f(0)$.

Заметим еще, что из включения $f(0) \in \mathscr{D}(A)$ следует, что $U(t)A^{-1}f(0)$ есть решение однородного уравнения (см. § 3, п. 1), поэтому функция

$$y(t) = z(t) + U(t)A^{-1}f(0)$$

будет решением уравнения (6.1) с начальным условием $y(0) = 0$. По теореме 6.1 она представима в виде (6.4), что оправдывает преобразования, сделанные в (6.8).

Теорема доказана.

Можно продолжить наши преобразования, предположив, что функция $f(t)$ имеет вторую непрерывную производную. Тогда аналогично (6.8)

$$y(t) = U(t)\big(A^{-2}f'(0) + A^{-1}f(0)\big) + \\ + \int_0^t U(t-\tau)A^{-2}f''(\tau)\,d\tau - A^{-2}f'(t) - A^{-1}f(t). \qquad (6.10)$$

Здесь уже, кроме непрерывности второй производной $f''(t)$, не приходится налагать дополнительных ограничений и

$$\frac{dy}{dt} = U(t)\big(A^{-1}f'(0) + f(0)\big) + \\ + A\int_0^t U(t-\tau)A^{-2}f''(\tau)\,d\tau - A^{-1}f'(t) = \\ = A\Bigg[U(t)\big(A^{-2}f'(0) + A^{-1}f(0)\big) + \int_0^t U(t-\tau)A^{-2}f''(\tau)\,d\tau - \\ - A^{-2}f'(t) - A^{-1}f(t)\Bigg] + f(t) = Ay + f(t).$$

Теорема 6.4. *Если при условиях теоремы* 6.1 *функция* $f(t)$ *имеет вторую непрерывную производную, то формула* (6.4) *дает ослабленное решение уравнения* (6.1). *Если, кроме того, выполнено условие согласования* $f(0) \in \mathscr{D}(A)$, *то функция* (6.4) *будет решением уравнения* (6.1).

Вторая часть теоремы связана с наличием в (6.10) члена $U(t)A^{-1}f(0)$, который при произвольном $f(0)$ будет дифференцируем лишь при $t>0$.

Теоремы 6.1—6.4 говорят об известном равноправии условий гладкости функции $f(t)$ по t и условий принадлежности ее значений областям определения степеней оператора A. Это обстоятельство будет наблюдаться и в дальнейшем.

2. Равномерно корректная задача Коши. В случае, когда для однородного уравнения (1.1), соответствующего уравнению (6.1), задача Коши равномерно корректна, исследование формулы (6.4) значительно облегчается. Интеграл (6.4) при любой непрерывной функции $f(t)$ будет существовать и, как легко видеть, давать непрерывную функцию $y(t)$. Далее, если $f(t)$ такова, что $f(t)\in\mathscr{D}(A)$ и функция $Af(t)$ непрерывна, то

$$\frac{dU(t-s)}{dt}=U(t-s)Af(s),$$

и эта функция непрерывна по совокупности переменных t и s $(0\leqslant s\leqslant t\leqslant T)$. В связи с этим

$$\frac{dy}{dt}=\int_0^t U(t-s)Af(s)\,ds+f(t)=Ay+f(t).$$

Если функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема, то формула (6.8) также дает решение уравнения (6.1).

Таким образом, справедлива

Теорема 6.5. *Если для уравнения* (1.1) *задача Коши равномерно корректна, то формула* (6.2) *дает решение задачи Коши для уравнения* (6.1) *при* $x_0\in\mathscr{D}(A)$ *и функции* $f(t)$, *удовлетворяющей одному из двух условий*:

1°. *Значения* $f(t)\in\mathscr{D}(A)$ *и функция* $Af(t)$ *непрерывна*;

2°. *Функция* $f(t)$ *непрерывно дифференцируема.*

Формула (6.2) при любом $x_0\in E$ и непрерывной функции $f(t)$ дает непрерывную функцию, которую естественно назвать *обобщенным решением* задачи Коши для уравнения (6.1).

При исследовании вопроса о разрешимости уравнения (6.1) часто полезным является следующее соображение:

Лемма 6.2. *Если задача Коши для уравнения* (1.1) *равномерно корректна и при некотором* t *значение функции* (6.4) *принадлежит* $\mathscr{D}(A)$, *то в этой точке она имеет правую производную, удовлетворяющую уравнению* (6.1).

Доказательство. Вычисляем при $\Delta t > 0$

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} U(t+\Delta t-s)[f(s)-f(t)]\,ds+$$
$$+\frac{U(\Delta t)-I}{\Delta t}A^{-1}f(t)+\frac{U(\Delta t)-I}{\Delta t}\int_0^t U(t-s)f(s)\,ds. \quad (6.11)$$

Первое слагаемое по норме не превосходит

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|U(t)\|\max_{t\leqslant s\leqslant t+\Delta t}\|f(s)-f(t)\|$$

и стремится к нулю при $\Delta t\to 0$ вследствие непрерывности $f(t)$. В последних слагаемых под знаком оператора $\frac{1}{\Delta t}[U(\Delta t)-I]$ стоят элементы из $\mathscr{D}(A)$, поэтому

$$\frac{d_+y}{dt}=f(t)+A\int_0^t U(t-s)f(s)\,ds=f(t)+Ay(t). \quad (6.12)$$

Лемма доказана.

Нетрудно проверить, что непрерывная функция, имеющая непрерывную на отрезке правую производную, будет на этом отрезке непрерывно дифференцируемой. Поэтому для доказательства того, что функция (6.4) является решением уравнения (6.1) при условии равномерной корректности задачи Коши для уравнения (1.1), достаточно проверить, что

$$\int_0^t AU(t-s)f(s)\,ds \quad (6.13)$$

существует и является непрерывной функцией от t.

3. Абстрактное параболическое уравнение. Если уравнение (1.1) является абстрактным параболическим, то операторы $AU(t)$ ограничены и сильно непрерывны по t при $t>0$.

Поэтому интеграл

$$\int_0^{t-h} AU(t-s) f(s)\, ds = \int_h^t AU(\tau) f(t-\tau)\, d\tau \quad (h \leqslant t) \tag{6.14}$$

существует при всякой непрерывной функции $f(t)$ и является непрерывной на $[h, T]$ функцией, в силу равномерной ограниченности на этом отрезке операторов $AU(t)$. Разность между интегралами (6.13) и (6.14) может быть представлена в виде

$$\int_0^h AU(\tau) f(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^h AU(\tau)[f(t-\tau) - f(t)]\, d\tau + U(h) f(t) - f(t). \tag{6.15}$$

Если задача Коши для уравнения (1.1) равномерно корректна, то $U(h) f(t) \to f(t)$, причем в силу равномерной ограниченности $U(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ и непрерывности $f(t)$, равномерно по t на $[0, T]$. Тогда мы приходим к выводу, что функция $y(t)$ из (6.4) удовлетворяет уравнению (6.12), если

$$\int_0^h \| AU(\tau)[f(t-\tau) - f(t)] \|\, d\tau \to 0 \text{ при } h \to 0 \tag{6.16}$$

при данном t, и уравнению (6.1), если последнее соотношение имеет место равномерно в некоторой окрестности данного значения t.

Интеграл (6.16) можно, например, оценить через

$$\int_0^h \| A^{1-\alpha} U(\tau) \| \, \| A^\alpha f(t-\tau) - A^\alpha f(t) \| \, d\tau \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1). \tag{6.17}$$

При написании условия (6.17) предполагалось, что полугруппа $U(t)$ имеет отрицательный тип, и, следовательно, определены дробные степени оператора A. Для оценки первого множителя под знаком интеграла применимо тогда следующее соображение. Обозначим

$$\| AU(\tau) \| = \frac{1}{\sigma(\tau)}. \tag{6.18}$$

Если оператор A неограничен, то при этом будет $\sigma(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$. Используем теперь неравенство моментов (теорема 5.2). Имеем

$$\| A^{1-\alpha} U(\tau) \| \leqslant c \| U(\tau) \|^{\alpha} \| AU(\tau) \|^{1-\alpha} \leqslant \frac{c_1}{\sigma^{1-\alpha}(\tau)}. \tag{6.19}$$

Теорема 6.6. *Если уравнение* (1.1) *является абстрактным параболическим и оператор* A *имеет регулярную точку, то для того чтобы формула* (6.4) *давала ослабленное решение уравнения* (6.1), *достаточно, чтобы интеграл* (6.17) *при некотором* α *и* $h \to 0$ *стремился к нулю равномерно на каждом отрезке* $[\delta, T]$ $(\delta > 0)$.

Замечание 6.2. Если стремление к нулю интеграла (6.17) равномерно в окрестности данного t, то функция (6.4) удовлетворяет уравнению (6.1) в этой окрестности.

Рассмотрим теперь тот частный вид абстрактных параболических уравнений, в которых оператор A порождает аналитическую полугруппу. Для него (см. § 3, п. 4) справедлива оценка

$$\| AU(t) \| \leqslant \frac{M_1}{t} e^{\omega t} \qquad (t > 0). \tag{6.20}$$

Условие теоремы 6.6 будет выполнено, если функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$\| f(t) - f(s) \| \leqslant c \, | t - s |^{\gamma} \tag{6.21}$$

с произвольным $\gamma > 0$. Действительно, тогда при $\alpha = 0$

$$\int_0^h \| AU(\tau) \| \| f(t-\tau) - f(t) \| d\tau \leqslant c_1 h^{\gamma},$$

где

$$c_1 = \frac{1}{\gamma} c M_1 e^{\omega T}.$$

Если полугруппа $U(t)$ имеет отрицательный тип, то из (6.19) получаем

$$\| A^{1-\alpha} U(t) \| \leqslant \frac{c}{t^{1-\alpha}}. \tag{6.22}$$

Предыдущие рассуждения и оценка (6.20) позволяют сформулировать утверждение:

Теорема 6.7. *Если оператор A является производящим оператором аналитической полугруппы, удовлетворяющей C_0-условию и имеющей отрицательный тип, то формула* (6.4) *дает ослабленное решение уравнения* (6.1), *если функция $f(t)$ удовлетворяет одному из требований:*

1°. *Выполнено условие Гёльдера* (6.21).

2°. *При некотором $\alpha > 0$ значения $f(t) \in \mathscr{D}(A^\alpha)$, и функция $A^\alpha f(t)$ ограничена на* $[0, T]$.

Замечание 6.3. При выполнении условия Гёльдера отрицательности типа полугруппы требовать не нужно, само условие Гёльдера можно заменить более общим

$$\int_0^t \frac{\| f(t-\tau) - f(t) \|}{\tau} \, d\tau$$

равномерно по t сходится.

4. Ослабленная задача Коши; полугруппа со слабой особенностью. Для существования интеграла (6.4) при всякой непрерывной функции $f(t)$ ограниченность полугруппы $U(t)$ не является необходимой. Можно, например, потребовать лишь суммируемость $\| U(t) \|$:

$$\int_0^T \| U(t) \| \, dt < \infty. \tag{6.23}$$

Функция $y(t)$ будет непрерывной:

$$\| y(t+\Delta t) - y(t) \| \leqslant \int_t^{t+\Delta t} \| U(\tau) \| \| f(t+\Delta t-\tau) \| \, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \| U(\tau) \| \| f(t+\Delta t-\tau) - f(t-\tau) \| \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \| f(t) \| \int_t^{t+\Delta t} \| U(\tau) \| \, d\tau +$$

$$+ \max_{0 \leqslant t \leqslant \tau} \| f(t+\Delta t-\tau) - f(t-\tau) \| \int_0^t \| U(\tau) \| \, d\tau \to 0.$$

Предположим, что для однородного уравнения (1.1) ослабленная задача Коши корректна на $\mathscr{D}(A)$, и введем в рассмотрение функции

$$y_h(t) = \int_0^{t-h} U(t-s) f(s)\, ds. \tag{6.24}$$

Будем считать их определенными на отрезке $[\delta, T]$, где $\delta > h$. Если определена и непрерывна функция $Af(s)$, то в силу корректности ослабленной задачи Коши на $\mathscr{D}(A)$ функция $U(t-s) f(s)$ будет при $t > s$ дифференцируемой по t, и ее производная $AU(t-s) f(s) = U(t-s) Af(s)$ будет непрерывной функцией двух переменных в области $t - s \geqslant h$. Отсюда вытекает, что функция $y_h(t)$ дифференцируема и

$$y'_h(t) = U(h) f(t-h) + \int_0^{t-h} AU(t-s) f(s)\, ds. \tag{6.25}$$

Первый член $U(h) f(t-h) = U(h) A^{-1} Af(t-h)$ равномерно на $[\delta, T]$ стремится к $f(t)$ в силу корректности на $\mathscr{D}(A)$ ослабленной задачи Коши; второй член также равномерно стремится к пределу в силу суммируемости $\|U(t)\|$ и непрерывности $Af(s)$. Таким образом, функция $y(t)$ из (6.4) будет непрерывно дифференцируемой и

$$y'(t) = f(t) + \int_0^t U(t-s) Af(s)\, ds = f(t) + Ay(t),$$

т. е. $y(t)$ является решением уравнения (6.1).

Если функция $f(t)$ имеет непрерывную на $[0, T]$ производную, то, определяя $y(t)$ последним равенством (6.8) и повторяя предыдущие рассуждения, мы придем к выводу, что эта функция является ослабленным $\bigl($за счет слагаемого $U(t) A^{-1} f(0)\bigr)$ решением уравнения (6.1).

Таким образом, справедлива

Теорема 6.8. *Если ослабленная задача Коши для уравнения* (1.1) *корректна на* $\mathscr{D}(A)$ *и соответствующая ей полугруппа удовлетворяет условию* (6.23), *то формула* (6.4) *дает решение уравнения* (6.1), *если выполнено* *условие* 1° *теоремы* 6.5, *и ослабленное решение, если выполнено условие* 2° *этой теоремы.*

Рассмотрим класс операторов, резольвента которых удовлетворяет условию

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{1+|\tau|^{\beta}} \quad (\lambda=\sigma+i\tau,\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0). \tag{6.26}$$

Если $\beta > \frac{1}{2}$, то в силу теоремы 3.3 и оценки (3.15) оператор A удовлетворяет условиям теоремы 6.8. Далее, полугруппа, порожденная ослабленной задачей Коши, в этом случае является бесконечно дифференцируемой, и справедливы неравенства

$$\|U(t)\| \leqslant \frac{c}{t^{\frac{1}{\beta}-1}} \quad \text{и} \quad \|AU(t)\| \leqslant \frac{c}{t^{\frac{2}{\beta}-1}}. \tag{6.27}$$

Наличие этих оценок позволяет несколько ослабить условие на функцию $f(t)$ в теореме 6.8.

Производную от функции (6.24), пользуясь (6.6), представим в виде

$$y_h'(t) = U(h)[f(t-h)-f(t)] + U(t)f(0) + \\ + \int_0^{t-h} AU(t-s)[f(s)-f(t)]\,ds.$$

Предположим теперь, что функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера (6.21) с показателем $\gamma > \frac{1}{\beta} - 1$. Тогда в силу (6.27) первое слагаемое равномерно на $[\delta, T]$ стремится к нулю при $h \to 0$. Однако условие $\gamma > \frac{1}{\beta} - 1$ не обеспечивает сходимости последнего члена к пределу. Наложим требование: $\gamma > 2\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)$. Так как γ не должно превосходить единицы, то такой выбор γ возможен, если $\beta > \frac{2}{3}$. Тогда в силу (6.27) интеграл

$$\int_0^t AU(t-s)[f(s)-f(t)]\,ds$$

абсолютно и равномерно по t сходится, и поэтому существует производная от функции $y(t)$

$$y'(t) = \dot{U}(t) f(0) + A \int_0^t U(t-s)[f(s) - f(t)]\, ds.$$

Интеграл снова представим в виде разности интегралов с $f(s)$ и $f(t)$. В силу (6.6) второй интеграл будет принадлежать $\mathscr{D}(A)$, поэтому и первый принадлежит $\mathscr{D}(A)$. Тогда

$$y'(t) = f(t) + A \int_0^t U(t-s) f(s)\, ds = f(t) + Ay(t).$$

Теорема 6.9. *Если выполнено условие* (6.26) *с* $\beta > \frac{2}{3}$, *то формула* (6.4) *дает ослабленное решение уравнения* (6.1) *для функции* $f(t)$, *удовлетворяющей условию Гёльдера* (6.21) *с* $\gamma > 2\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)$.

Как видно из предыдущего, для неравномерно корректных задач, кроме исследования поведения интегрального члена в (6.25), приходится еще рассматривать слагаемое $U(h) f(t-h)$. Пусть выполнено условие, несколько более сильное, чем (6.26),

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{1+\sigma+|\tau|^{\beta}} \quad (\lambda = \sigma + i\tau, \ \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0). \tag{6.28}$$

Тогда для оператора $-A$ можно определить дробные степени и изучить более детально поведение полугруппы $U(t)$ в нуле.

Лемма 6.3. *Пусть выполнено условие* (6.28). *Тогда при* $\alpha > 1-\beta$ *операторы* $(-A)^{-\alpha} U(t)$ *равномерно ограничены на* $[0, \infty)$.

Доказательство. Достаточно доказать лемму для $\alpha < 1$. Используем представление (3.13)

$$U(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_q} e^{\lambda t} R(\lambda)\, d\lambda,$$

где контур Γ_q имеет уравнение $\sigma = -\frac{q}{M}(1+|\tau|^\beta)$ $(0<q<1)$, и представление (5.7) дробной степени $(-A)^\alpha$, из которого следует, что

$$(-A)^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma'_{-a}} (-\mu)^{-\alpha} R(\mu)\, d\mu,$$

где Γ'_{-a} имеет уравнение. $\sigma = -a + k|\tau|$ $\left(0 < a < \frac{q}{M},\ k > 0\right)$. Перемножая эти два представления и пользуясь резольвентным тождеством и свойствами интеграла Коши, получим

$$(-A)^{-\alpha} U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_q} (-\lambda)^{-\alpha} e^{\lambda t} R(\lambda)\, d\lambda.$$

Отсюда

$$\|(-A)^{-\alpha} U(t)\| \leqslant c \int\limits_{\Gamma_q} e^{-\frac{q}{M}(1+|\tau|^\beta)t} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^\alpha (1+|\tau|^\beta)} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^\alpha (1+\tau^\beta)} = c_2 < \infty$$

в силу условий $\alpha + \beta > 1$, $\alpha < 1$.

Лемма доказана.

Из леммы 6.3 следует, что оператор $U(t) A^{-\alpha}$ при $\alpha > 1 - \beta$ сильно непрерывен на $[0, T]$. Действительно, при $x \in \mathscr{D}(A)$ в силу корректности ослабленной задачи Коши $U(t) A^{-\alpha} x \to A^{-\alpha} x$. Из равномерной ограниченности операторов $U(t) A^{-\alpha}$ вытекает, что это соотношение справедливо и при любом $x \in E$.

Теорема 6.10. *Пусть выполнено условие* (6.28). *Если определена и непрерывна функция* $A^\alpha f(t)$ *при некотором* $\alpha > 2(1-\beta)$, *то существует решение ослабленной задачи Коши для уравнения* (6.1) *с начальным условием* $x(0) = x_0 \in \mathscr{D}(A^\nu)$, *где* $\nu > 1 - \beta$.

Доказательство. Искомое решение естественно находится по формуле (6.2). Первое слагаемое $U(t) x_0 =$

$=U(t)A^{-\gamma}A^{\gamma}x_0$ в силу сказанного выше является ослабленным решением однородного уравнения (1.1). Второе слагаемое исследуем, используя снова (6.25). Первый член $U(h)f(t-h)=$ $=U(h)A^{-\alpha}A^{\alpha}f(t-h)$ будет равномерно по t сходиться к $f(t)$, так как $\alpha>2(\beta-1)>\beta-1$. Для доказательства сходимости интеграла (6.5) оценим

$$\int_0^t \|AU(t-s)f(s)\|\,ds \leqslant \int_0^t \|A^{1-\alpha}U(t-s)\|\,\|A^{\alpha}f(s)\|\,ds.$$

Из неравенства моментов (теорема 5.2) и (6.27) получаем

$$\|A^{1-\alpha}U(t-s)\| \leqslant c\|U(t-s)\|^{\alpha}\|AU(t-s)\|^{1-\alpha} \leqslant \frac{c}{(t-s)^{\frac{2-\alpha}{\beta}-1}}.$$

По условию, $\frac{2-\alpha}{\beta}-1<1$, следовательно, интеграл (6.5) сходится абсолютно и равномерно. Дальнейшие рассуждения ведутся по стандартной схеме.

Теорема доказана.

§ 7. Уравнения с возмущенными операторами

1. Сравнение операторов. В этом пункте, если не оговорено противное, через A обозначается замкнутый неограниченный оператор с плотной в E областью определения $\mathscr{D}(A)$. Пусть оператор B допускает замыкание и имеет область определения $\mathscr{D}(B)$, содержащую $\mathscr{D}(A)$: $\mathscr{D}(B)\supset\mathscr{D}(A)$. Тогда справедливо неравенство

$$\|Bx\| \leqslant c(\|x\|+\|Ax\|) \qquad (x\in\mathscr{D}(A)). \tag{7.1}$$

Действительно, превратим $\mathscr{D}(A)$ в банахово пространство E_A с нормой

$$\|x\|_A=\|x\|+\|Ax\|.$$

Оператор B определен на всем пространстве E_A. Он замкнут. В самом деле, если $x_n\to x$ в E_A и $Bx_n\to y$ в E, то $x_n\to x$ в E. В силу этого $y=\bar{B}x$. Но замыкание $\bar{B}$ совпадает с B на $\mathscr{D}(A)$, поэтому $y=Bx$. Замкнутый оператор B, определенный на всем E_A, — ограничен, откуда следует (7.1).

Определение 7.1. Оператор B называется *подчиненным* оператору A, если $\mathscr{D}(B)\supset\mathscr{D}(A)$ и

$$\|Bx\|\leqslant c\|Ax\| \qquad (x\in\mathscr{D}(A)). \tag{7.2}$$

Из предыдущего вытекает следующая лемма:

Лемма 7.1. *Если оператор A имеет ограниченный обратный, а оператор B допускает замыкание и $\mathscr{D}(B)\supset\supset\mathscr{D}(A)$, то оператор B подчинен оператору A.*

Доказательство. Из (7.1) следует

$$\|Bx\|\leqslant c(\|x\|+\|Ax\|)\leqslant c(\|A^{-1}\|+1)\|Ax\|.$$

Лемма доказана.

Определение 7.2. Оператор *B подчинен оператору A с порядком* $\alpha\,(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$, если $\mathscr{D}(B)\supset\mathscr{D}(A)$ и

$$\|Bx\|\leqslant c_\alpha(B)\|x\|^{1-\alpha}\|Ax\|^\alpha. \tag{7.3}$$

Из определения следует, что операторы, подчиненные A с порядком 0, — ограничены.

Пусть для оператора A выполнено условие (5.4):

$$\|R_A(-s)\|\leqslant\frac{M}{1+s} \qquad (s>0). \tag{7.4}$$

Если оператор B подчинен дробной степени A^α оператора A, то он подчинен оператору A с порядком α. Это следует из неравенства моментов (теорема 5.2). Действительно,

$$\|Bx\|\leqslant c\|A^\alpha x\|\leqslant c_1\|x\|^{1-\alpha}\|Ax\|^\alpha.$$

Лемма 7.2. *Если оператор B допускает замыкание и подчинен оператору A с порядком α, то его замыкание $\bar{B}$ подчинено дробной степени A^β оператора A при $\beta>\alpha$ с порядком α/β.*

Доказательство. Воспользуемся формулой (5.16′) при $n=1$. Тогда для $x\in\mathscr{D}(A)$

$$\|Bx\|=\|BA^\beta A^{-\beta}x\|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sin\beta\pi}{\pi(1-\beta)}\int_0^\infty s^{1-\beta}\|BR_A(-s)A^\beta R_A(-s)x\|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sin\beta\pi}{\pi(1-\beta)}c_\alpha(B)\int_0^\infty s^{1-\beta}\|R_A(-s)A^\beta R_A(-s)x\|^{1-\alpha}\times$$

$$\times\|AR_A(-s)A^\beta R_A(-s)x\|^\alpha\,ds.$$

Используя оценки (7.4) и (5.15), получаем

$$\|Bx\| \leqslant c\left[\int_0^N \frac{s^{1-\beta}\,ds}{(1+s)^{1-\alpha}(1+s)^{1-\beta}}\|x\| + \right.$$

$$\left. + \int_N^\infty \frac{s^{1-\beta}\,ds}{(1+s)^{2(1-\alpha)}(1+s)^{\alpha}}\|A^\beta x\|\right] \leqslant$$

$$\leqslant c\left[\frac{1}{\alpha}N^\alpha\|x\| + \frac{1}{\beta-\alpha}N^{\alpha-\beta}\|A^\beta x\|\right].$$

Минимизируя выражение в скобках по N, приходим к неравенству

$$\|Bx\| \leqslant c'\|x\|^{1-\alpha/\beta}\|A^\beta x\|^{\alpha/\beta}.$$

Так как оператор A^β получается замыканием из своего сужéния на $\mathscr{D}(A)$, то аналогичное неравенство для оператора $\overline{B}$ и любого $x \in \mathscr{D}(A^\beta)$ получается предельным переходом. Лемма доказана.

Пусть оператор B также удовлетворяет условию (7.4):

$$\|R_B(-s)\| \leqslant \frac{M_1}{1+s} \qquad (s > 0).$$

Лемма 7.3. *Если операторы A и B удовлетворяют условию (7.4) и оператор B подчинен оператору A, то дробная степень B^α оператора B подчинена дробной степени A^β оператора A при $\beta > \alpha$.*

Доказательство. В силу неравенства моментов

$$\|B^\alpha x\| \leqslant c\|x\|^{1-\alpha}\|Bx\|^\alpha \leqslant c_1\|x\|^{1-\alpha}\|Ax\|^\alpha.$$

Утверждение тогда следует из предыдущей леммы:

$$\|B^\alpha x\| \leqslant c_{\alpha\beta}\|A^\beta x\|.$$

В гильбертовом пространстве получены более глубокие результаты.

Теорема 7.1. (неравенство Гайнца). *Пусть A и B — два самосопряженных положительно определенных оператора, действующие в гильбертовых пространствах H и H_1 соответственно. Если T — ограниченный линейный* *оператор с нормой M, действующий из H в H_1, такой, что $T\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{D}(B)$ и*

$$\|BTx\|\leqslant M_1\|Ax\| \qquad (x\in\mathscr{D}(A)), \tag{7.5}$$

то $T\mathscr{D}(A^\alpha)\subset\mathscr{D}(B^\alpha)$ и

$$\|B^\alpha Tx\|\leqslant M^{1-\alpha}M_1^\alpha\|A^\alpha x\| \qquad (0\leqslant\alpha\leqslant 1). \tag{7.6}$$

Доказательство. Выберем $x\in\mathscr{D}(A^\alpha)$ и $y\in\mathscr{D}(B)$. Функция TA^zx будет аналитической при $\operatorname{Re} z<\alpha$ и непрерывной при $\operatorname{Re} z\leqslant\alpha$, а функция $B^{\alpha-z}y$ — аналитической при $\operatorname{Re} z>\alpha-1$ и непрерывной при $\operatorname{Re} z\geqslant\alpha-1$. Введем в рассмотрение скалярную функцию

$$\Phi(z)=(TA^zx,\ B^{\alpha-\bar z}y).$$

Она будет аналитической в полосе $\alpha-1<\operatorname{Re} z<\alpha$ и непрерывной в замкнутой полосе $\alpha-1\leqslant\operatorname{Re} z\leqslant\alpha$. Оценим

$$|\Phi(\alpha+i\tau)|=|(TA^{\alpha+i\tau}x,\ B^{i\tau}y)|\leqslant$$
$$\leqslant\|TA^{\alpha+i\tau}x\|\|B^{i\tau}y\|\leqslant M\|A^\alpha x\|\|y\|$$

и

$$|\Phi(\alpha-1+i\tau)|=|(TA^{\alpha-1+i\tau}x,\ B^{1+i\tau}y)|=$$
$$=|(BTA^{\alpha-1+i\tau}x,\ B^{i\tau}y)|\leqslant\|BTA^{\alpha-1+i\tau}x\|\|B^{i\tau}y\|\leqslant$$
$$\leqslant M_1\|A^{\alpha+i\tau}x\|\|y\|=M_1\|A^\alpha x\|\|y\|.$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $x\in\mathscr{D}(A^\alpha)$ элемент $A^{\alpha-1+i\tau}x\in\mathscr{D}(A)$, а значит, $TA^{\alpha-1+i\tau}x\in\mathscr{D}(B)$. По теореме о трех прямых тогда

$$|\Phi(0)|\leqslant M^{1-\alpha}M_1^\alpha\|A^\alpha x\|\cdot\|y\|$$

или

$$|(Tx,\ B^\alpha y)|\leqslant M^{1-\alpha}M_1^\alpha\|A^\alpha x\|\cdot\|y\|.$$

Так как оператор B^α получается замыканием из своего сужéния на $\mathscr{D}(B)$, то из последнего неравенства следует, что $Tx\in\mathscr{D}(B^\alpha)$ и справедливо (7.6).

Теорема доказана.

Замечание 7.1. В доказательстве использовались лишь неотрицательные степени оператора B, поэтому оно остается справедливым и для положительного оператора B. Если A тоже только положителен, то можно перейти к положительно определенному оператору $A_\varepsilon = A + \varepsilon I$. Тогда

$$\|BTx\| \leqslant M_1 \|Ax\| \leqslant M_1 \|(A + \varepsilon I)x\|$$

и, следовательно,

$$\|B^\alpha Tx\| \leqslant M^{1-\alpha} M_1^\alpha \|A_\varepsilon^\alpha x\|. \qquad (7.7)$$

Как было показано в § 5, операторы A_ε^α сильно сходятся к оператору A^α, и (7.6) получается предельным переходом при $\varepsilon \to 0$ из (7.7).

При $H = H_1$ и $T = I$ мы приходим к следующему утверждению:

Следствие 7.1. *Если A и B положительные самосопряженные операторы и оператор B подчинен оператору A, то дробная степень B^α оператора B подчинена дробной степени A^α оператора A. При этом из* (7.2) *следует, что*

$$\|B^\alpha x\| \leqslant c^\alpha \|A^\alpha x\|.$$

Определение 7.3. Будем говорить, что оператор B *вполне подчинен* оператору A, если он ему подчинен и для каждого достаточно малого η

$$\|Bx\| \leqslant \Phi_\eta(x) + \eta \|Ax\|, \qquad (7.8)$$

где $\Phi_\eta(x)$ — непрерывный выпуклый функционал от $x \in E$.

Заметим, что если оператор B подчинен оператору A с порядком α, $(0 \leqslant \alpha < 1)$, то он ему вполне подчинен. Действительно, из (7.3) и неравенства Юнга следует неравенство

$$\|Bx\| \leqslant \left(c^{\frac{1}{1-\alpha}} \eta^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \|x\|\right)^{1-\alpha} \left(\frac{\eta}{\alpha} \|Ax\|\right)^\alpha \leqslant$$
$$\leqslant (1-\alpha) c^{\frac{1}{1-\alpha}} \eta^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \|x\| + \eta \|Ax\|,$$

которое является частным случаем (7.8). Последнее неравенство нам удобно будет применять, сделав в нем замену

$\eta=(1-\alpha)^{1-\alpha}c\alpha^{\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}$. Тогда

$$\|Bx\|\leqslant(1-\alpha)^{1-\alpha}c\alpha^{\alpha}(\varepsilon^{-\alpha}\|x\|+\varepsilon^{1-\alpha}\|Ax\|)\equiv$$
$$\equiv c_{\alpha}(B)(\varepsilon^{-\alpha}\|x\|+\varepsilon^{1-\alpha}\|Ax\|). \qquad (7.9)$$

Если неравенство (7.9) выполнено при всех ε, то, минимизируя правую часть по ε, мы придем к неравенству (7.3). Иногда неравенство (7.9) удается установить лишь при достаточно малых $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$. Если при этом оператор A имеет ограниченный обратный, то все равно из (7.9) следует (7.3). Действительно, если $\varepsilon_{\min}=\frac{\alpha\|x\|}{(1-\alpha)\|Ax\|}\leqslant\varepsilon_0$, то, подставляя его в (7.9), получаем (7.3). Если же $\frac{\alpha\|x\|}{(1-\alpha)\|Ax\|}\geqslant\varepsilon_0$, то $\|Ax\|\leqslant\frac{\alpha}{(1-\alpha)\varepsilon_0}\|x\|$ и

$$\|Bx\|\leqslant c_{\alpha}(B)\frac{\varepsilon_0^{-\alpha}}{1-\alpha}\|x\|\leqslant c_{\alpha}(B)\frac{\varepsilon_0^{-\alpha}\|A^{-1}\|^{\alpha}}{1-\alpha}\|x\|^{1-\alpha}\|Ax\|^{\alpha}.$$

Таким образом, (7.3) выполнено с константой, равной

$$\frac{C_{\alpha}(B)}{1-\alpha}\max\left\{\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\alpha},\ \varepsilon_0^{-\alpha}\|A^{-1}\|^{\alpha}\right\}.$$

Лемма 7.4. *Пусть оператор A таков, что сопряженный к нему оператор A^* имеет плотную в E^* область определения. Если на $\mathscr{D}(A)$*

$$Bx=TAx, \qquad (7.10)$$

где T — оператор, допускающий аппроксимацию линейным конечномерным оператором с любой точностью, то оператор B вполне подчинен оператору A.

Доказательство. При заданном η построим конечномерный оператор $Q_1x=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)x_k$ такой, что $\|T-Q_1\|<\frac{\eta}{2}$. Так как $\mathscr{D}(A^*)$ плотна в E^*, то функционалы f_k можно приблизить функционалами $g_k\in\mathscr{D}(A^*)$ и построить оператор $Qx = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) x_k$ таким образом, чтобы было $\|Q - Q_1\| < \frac{\eta}{2}$. Тогда

$$\|Bx\| \leqslant \|QAx\| + \|(T - Q) Ax\| \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=1}^{n} |A^* g_k(x)| \|x\| + \eta \|Ax\|.$$

Лемма доказана.

Замечание 7.2. Пусть оператор A имеет плотную область определения и допускает замыкание, а пространство E имеет базис и рефлексивно; тогда утверждение леммы следует из соотношения (7.10), если оператор T вполне непрерывен.

Действительно, из рефлексивности E следует, что $\mathscr{D}(A^*)$ плотно в E^* (см. [1]), а из наличия в E базиса вытекает, что оператор T является пределом линейных конечномерных операторов.

В рефлексивном пространстве справедливо в известном смысле обратное утверждение:

Лемма 7.5. *Если при достаточно малых* $\eta > 0$ *имеет место неравенство* (7.8) *со слабо непрерывным функционалом* $\Phi_\eta(x)$ *и оператор* A^{-1} *ограничен, то оператор* B *допускает представление* (7.10) *с вполне непрерывным оператором* T.

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор $T = BA^{-1}$, определенный во всем пространстве. Покажем, что он вполне непрерывен. Пусть S — единичный шар пространства E. Множество $A^{-1}S$ ограничено, следовательно, в силу рефлексивности пространства из всякой его последовательности $A^{-1}y_n$ ($\|y_n\| \leqslant 1$) можно выбрать слабо сходящуюся последовательность $A^{-1}y_n \xrightarrow{\text{сл}} z$. Тогда

$$\|Ty_n - Ty_m\| \leqslant \Phi_\eta(A^{-1}y_n - A^{-1}y_m) + \eta \|y_n - y_m\| \leqslant \\ \leqslant \Phi_\eta(A^{-1}y_n - z) + \Phi_\eta(z - A^{-1}y_m) + 2\eta.$$

Выбрав $\eta = \frac{\varepsilon}{6}$ и учтя, что $\Phi_\eta(A^{-1}y_n - z) \to \Phi_\eta(0) = 0$ и поэтому при достаточно больших n и m сумма первых двух слагаемых справа будет меньше $\frac{2}{3}\varepsilon$, придем к неравенству $\|Ty_n - Ty_m\| < \varepsilon$.

Лемма доказана.

2. Резольвенты возмущенных операторов. В этом пункте мы рассмотрим вопрос о том, как отражается на свойствах оператора A добавление к нему подчиненного оператора B (возмущение оператора). Ясно, что добавка к оператору A оператора, просто подчиненного A, может резко изменить его свойства. Так, оператору A, очевидно, подчинен оператор μA с любым комплексным множителем μ. Добавление к A оператора μA в дифференциальном уравнении (1.1) может корректную задачу сделать некорректной и т. п. Однако если возмущающий оператор подчинен оператору A с малым коэффициентом, то это в ряде случаев не меняет основных свойств резольвенты оператора A.

Лемма 7.6. *Пусть для оператора A величина $\|\lambda R_A(\lambda)\|$ ограничена на некотором множестве комплексной плоскости. Если оператор B подчинен оператору A, то при достаточно малом ε для оператора $A+\varepsilon B$ величина $\|\lambda R_{A+\varepsilon B}(\lambda)\|$ также ограничена на том же множестве.*

Доказательство. Имеем

$$A+\varepsilon B-\lambda I=(I+\varepsilon BR_A(\lambda))(A-\lambda I).$$

Далее, в силу (7.2)

$$\|BR_A(\lambda)\| \leqslant c\|AR_A(\lambda)\| \leqslant c(1+\sup\|\lambda R_A(\lambda)\|).$$

Значит, при $\varepsilon < \dfrac{1}{2c(1+\sup\|\lambda R_A(\lambda)\|)}$ резольвента $R_{A+\varepsilon B}(\lambda)$ существует и

$$\|R_{A+\varepsilon B}(\lambda)\| \leqslant 2\|R_A(\lambda)\|.$$

Лемма доказана.

Если малость возмущающего оператора не имеет место, то для сохранения свойств резольвенты приходится на него налагать более жесткие условия подчиненности оператору A.

Лемма 7.7. *Если оператор A замкнут, а оператор B вполне подчинен оператору A и допускает замыкание, то оператор $A+B$ рассматриваемый на $\mathscr{D}(A)$, замкнут.*

Доказательство. Пусть $x_n \to x$ и $(A+B)x_n \to y$ $(x_n \in \mathscr{D}(A))$. Имеем

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leqslant \|(A+B)x_n - (A+B)x_m\| + \\ + \|B(x_n - x_m)\| \leqslant \|(A+B)x_n - (A+B)x_m\| + \\ + \Phi_\eta(x_n - x_m) + \eta\|Ax_n - Ax_m\|.$$

Выберем $\eta \leqslant {}^1/_2$. Тогда

$$\frac{1}{2}\|Ax_n - Ax_m\| \leqslant \|(A+B)x_n - (A+B)x_m\| + \\ + \Phi_\eta(x_n - x) + \Phi_\eta(x - x_m) \to 0.$$

В силу замкнутости оператора A имеем $x \in \mathscr{D}(A)$ и $Ax_n \to Ax$. Из соотношения $(A+B)x_n \to y$ следует тогда, что $Bx_n \to \bar{B}x = Bx$ $(x \in \mathscr{D}(A))$. Итак, $y = (A+B)x$.

Лемма доказана.

Теорема 7.2. *Если для оператора A, имеющего регулярные точки, уравнение (1.1) является абстрактным параболическим и соответствующая полугруппа аналитична в секторе, содержащем положительную полуось, то уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = (A+B)x, \tag{7.11}$$

где оператор B вполне подчинен оператору A, будет также абстрактным параболическим. Задача Коши для него равномерно корректна. Соответствующая полугруппа аналитична в секторе, содержащем положительную полуось.

Доказательство. В силу теоремы 3.9 для резольвенты оператора A справедливо неравенство (3.26):

$$\|R_A(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{|\lambda - \omega|} \qquad (\operatorname{Re}\lambda > \omega).$$

Воспользуемся снова тождеством

$$A + B - \lambda I = (I + BR_A(\lambda))(A - \lambda I). \tag{7.12}$$

Оценим норму оператора $BR_A(\lambda)$. Имеем при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$

$$\|BR_A(\lambda)x\| \leqslant \Phi_\eta(R_A(\lambda)x) + \eta\|AR_A(\lambda)x\| \leqslant \\ \leqslant \left\{\|\Phi_\eta\|\frac{M}{|\lambda - \omega|} + \eta\left(1 + \frac{M|\lambda|}{|\lambda - \omega|}\right)\right\}\|x\|.$$

Выбирая η столь малым, чтобы второе слагаемое в скобках стало меньше $\delta/2$ при всех $\lambda \geqslant \omega' > \omega$, а затем $|\lambda|$ столь большим, чтобы первое слагаемое стало таким же, получаем

$$\| BR_A(\lambda) \| < \delta < 1 \quad \text{при } \operatorname{Re}\lambda \geqslant \omega' > \omega \text{ и } |\lambda| \geqslant R(\delta). \tag{7.13}$$

Из (7.12) и (7.13) тогда следует существование резольвенты $R_{A+B}(\lambda)$ и оценка

$$\| R_{A+B}(\lambda) \| \leqslant \frac{M_1}{|\lambda - \omega_1|},$$

где $M_1 = \dfrac{M}{1-\delta}$, а $\omega_1 = \max\{\omega', R(\delta)\}$.

Утверждение теоремы следует из теоремы 3.8. Теорема доказана.

Замечание 7.3. Если оператор B просто подчинен оператору A, то в силу леммы 7.6, утверждение теоремы 7.2 остается справедливым для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = (A + \varepsilon B) x \tag{7.14}$$

при достаточно малом ε.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда на множестве $\mathscr{D}(A)$ корректна ослабленная задача Коши.

Лемма 7.8. *Пусть резольвента $R_A(\lambda)$ оператора A удовлетворяет при некотором λ условию*

$$\| R_A(\lambda) \| \leqslant M (1 + |\lambda|)^{-\beta}, \tag{7.15}$$

а оператор B подчинен оператору A с порядком α. Тогда справедливо неравенство

$$\| BR_A(\lambda) \| \leqslant \frac{(2 + M) c_\alpha(B)}{(1 + |\lambda|)^{\beta - \alpha}}. \tag{7.16}$$

Доказательство. В силу (7.9) имеем

$$\| BR_A(\lambda) x \| \leqslant c_\alpha(B) (\varepsilon^{-\alpha} \| R_A(\lambda) x \| + \varepsilon^{1-\alpha} \| AR_A(\lambda) x \|) \leqslant$$
$$\leqslant c_\alpha(B) \left[\frac{M}{(1 + |\lambda|)^\beta} \varepsilon^{-\alpha} + \left(1 + \frac{M|\lambda|}{(1 + |\lambda|)^\beta}\right) \varepsilon^{1-\alpha} \right] \| x \|.$$

Положив $\varepsilon = \dfrac{1}{1 + |\lambda|}$, приходим к неравенству (7.16). Лемма доказана.

Теорема 7.3. *Если оператор A удовлетворяет условию* (7.15) *при* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \omega$ *и* $0 < \beta < 1$, *а оператор B подчинен оператору A с порядком* $\alpha < \beta$, *то для уравнения* (7.11) *ослабленная задача Коши корректна на* $\mathscr{D}(A)$. *Все ее решения бесконечно дифференцируемы при* $t > 0$.

Доказательство. Из неравенства (7.16) видно, что для каждого $\delta > 0$ найдется такое число $\omega_1 \geqslant \omega$, что $\|BR_A(\lambda)\| \leqslant \delta$ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \omega_1$. Выбрав $\delta < 1$ и снова воспользовавшись тождеством (7.12), придем к неравенству

$$\|R_{A+B}(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{1-\delta}(1+|\lambda|)^{-\beta} \qquad (\operatorname{Re}\lambda \geqslant \omega_1).$$

Доказываемое утверждение вытекает из теоремы 3.3.

Теорема доказана.

Аналогично замечанию 7.3 можно рассмотреть случай уравнения с малым возмущением.

Теорема 7.4. *Если в условиях теоремы* 7.3 *оператор B подчинен оператору A с порядком* β, *то утверждение теоремы остается справедливым для уравнения* (7.14) *при достаточно малом* ε.

Если перейти к рассмотрению уравнений, для которых лишь известно, что задача Коши равномерно корректна, положение усложняется. Если оператор удовлетворяет условию (2.18), то в условиях леммы 7.8 он после возмущения может выйти из этого класса операторов. Если же рассмотреть условия (2.17), то они связаны с оценками степеней резольвенты, которые не выражаются так просто, как в (7.12), через соответствующие степени резольвенты невозмущенного оператора. На этом пути получено лишь следующее утверждение:

Теорема 7.5. *Если для замкнутого оператора A задача Коши равномерно корректна, а оператор B ограничен (подчинен A с порядком* 0), *то для уравнения* (7.11) *задача Коши также равномерно корректна.*

Доказательство. Для резольвенты оператора A выполнены неравенства (2.17), поэтому норма оператора $BR_A(\lambda)$ при больших λ будет меньше $\delta < 1$ $\left(\text{когда } M\|B\|(\lambda-\omega)^{-1} < \delta\right)$. Тогда из (7.12) получаем

$$R^n_{A+B}(\lambda) = \left\{\sum_{j=0}^{\infty} R_A(\lambda)\,[BR_A(\lambda)]^j\right\}^n.$$

Перегруппируем члены этого ряда, расположив их по степеням оператора B. Члены ряда имеют вид произведений, где чередуются множители B и первая или вторая степень $R_A(\lambda)$. Если множитель B входит k раз, то $R_A(\lambda)$ входит $n+k$ раз. Из оценок (2.17) тогда получаем, что такой член по норме не превосходит величины

$$M^{k+1}\|B\|^k(\lambda-\omega)^{-(n+k)}.$$

Количество членов ряда, содержащих k раз множитель B, будет равно коэффициенту a_k при z^k в ряде

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \left(\sum_{j=0}^{\infty} z^j\right)^n = (1-z)^{-n}.$$

Поэтому

$$\|R_{A+B}^n(\lambda)\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} a_k M^{k+1}\|B\|^k(\lambda-\omega)^{-(n+k)} =$$

$$= M(\lambda-\omega)^{-n}\left(1-M\|B\|(\lambda-\omega)^{-1}\right)^{-n} =$$

$$= M(\lambda-\omega-M\|B\|)^{-n} = M(\lambda-\omega_1)^{-n}. \quad (7.17)$$

Таким образом, оператор $A+B$ удовлетворяет условиям (2.17).

Теорема доказана.

Замечание 7.4. Из неравенств (7.17) вытекает, что для соответствующей полугруппы $U_{A+B}(t)$ будет выполняться неравенство

$$\|U_{A+B}(t)\| \leqslant Me^{(\omega+M\|B\|)t}.$$

3. Сравнение полугрупп. Для простоты предположим, что оператор A имеет ограниченный обратный. Если оператор A является производящим оператором полугруппы с C_0-условием и оператор B подчинен оператору A, то при $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ определен оператор

$$BU(t)x_0 = BA^{-1}U(t)Ax_0.$$

Если полугруппа, порожденная оператором A, сильно дифференцируема, т. е. определен и ограничен оператор $AU(t)$, то будет ограниченным и оператор $BU(t)$. Так, например, если оператор A удовлетворяет условию (7.15), то в силу (3.16)

$$\|BU(t)\| \leqslant \|BA^{-1}\| \|AU(t)\| \leqslant M_1 \|BA^{-1}\| e^{\omega t} t^{1-\frac{2}{\beta}}.$$

Естественно предполагать, что в случае, когда оператор B подчинен оператору A с определенным порядком $\alpha < 1$, поведение оператора $BU(t)$ в нуле должно быть лучшим. Действительно, применяя неравенство (7.9), получаем

$$\|BU(t)x_0\| \leqslant c_\alpha(B)(\varepsilon^{-\alpha}\|U(t)\| + \varepsilon^{1-\alpha}\|AU(t)\|)\|x_0\| \leqslant$$
$$\leqslant Mc_\alpha(B) e^{\omega t}\left(\varepsilon^{-\alpha} t^{1-\frac{1}{\beta}} + \varepsilon^{1-\alpha} t^{1-\frac{2}{\beta}}\right)\|x_0\|.$$

Это неравенство справедливо при любом $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon = t^{1/\beta}$. Тогда

$$\|BU(t)\| \leqslant M' c_\alpha(B) e^{\omega t} t^{1-\frac{1+\alpha}{\beta}}. \tag{7.18}$$

Рассмотрим два дифференциальных уравнения,

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dt} = (A+B)x = A_1 x, \tag{7.19}$$

и предположим, что для каждого из них ослабленная задача Коши корректна на $\mathscr{D}(A)$ и на $\mathscr{D}(A_1)$ соответственно. Обозначим порожденные ими полугруппы через $U_A(t)$ и $U_{A_1}(t)$. Нашей задачей является получение оценок для разности решений $U_A(t)x_0$ и $U_{A_1}(t)x_0$.

Пусть $x_0 \in \mathscr{D}(A^2)$. Тогда для $x(t) = U_A(t)x_0$

$$\frac{dx}{dt} = Ax = (A+B)x - Bx.$$

Если $A_1 = A + B$ определен на $\mathscr{D}(A)$ и $x(t) \in \mathscr{D}(A) \subset \subset \mathscr{D}(A_1)$, то написанное преобразование имеет смысл. Полученное уравнение для функции $x(t)$ можно рассматривать как неоднородное уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = A_1 x + f(t), \tag{7.20}$$

где функция $f(t) = -BA^{-1}U_A(t)Ax_0$ непрерывна в силу того, что $Ax_0 \in \mathscr{D}(A)$ и оператор BA^{-1} ограничен.

Итак, $x(t)$ является ослабленным (и даже истинным) решением уравнения (7.20) и в силу теоремы 6.1

$$x(t) = U_A(t)\,x_0 = U_{A_1}(t)\,x_0 - \int_0^t U_{A_1}(t-s)\,BU_A(s)\,ds.$$

Окончательно,

$$U_{A_1}(t)\,x_0 - U_A(t)\,x_0 = \int_0^t U_{A_1}(t-s)\,BU_A(s)\,x_0\,ds \quad (7.21)$$

$$(x_0 \in \mathscr{D}(A^2)).$$

Это тождество является основным для получения различных оценок для разности полугрупп.

Заметим, что когда для уравнения (1.1) задача Коши равномерно корректна, то тождество (7.21) справедливо при $x_0 \in \mathscr{D}(A)$, так как функция $BA^{-1}U_A(t)Ax_0$ в этом случае непрерывна. Если, кроме того, для второго уравнения (7.19) задача Коши также равномерно корректна, то

$$\|U_{A+B}(t)\,x_0 - U_A(t)\,x_0\| \leqslant c(t)\,\|BA^{-1}\|\,\|Ax_0\|, \quad (7.22)$$

где $c(t)$ легко выражается через функции, оценивающие рост полугрупп $U_{A+B}(t)$ и $U_A(t)$ по t.

Оценка (7.22) имеет тот недостаток, что справа стоит множитель $\|Ax_0\|$, а не $\|x_0\|$. В связи с этим она не дает возможности оценить разность полугрупп по норме. Это иногда удается сделать, когда полугруппа является сильно дифференцируемой при $t > 0$. Рассмотрим снова тот случай, когда операторы A и B удовлетворяют условиям теоремы 7.3 с $\beta > {}^1/_2$.

Из доказательства теоремы 7.3 видно, что для полугруппы $U_{A+B}(t)$ будут справедливы оценки (3.16). В частности,

$$\|U_{A+B}(t)\| \leqslant M_0 e^{\omega_1 t} t^{1-\frac{1}{\beta}},$$

где M_0 и ω_1 непрерывно зависят от константы $c_\alpha(B)$.

Используя это неравенство и (7.21), имеем

$$\| U_{A+B}(t)\, x_0 - U_A(t)\, x_0 \| \leqslant$$

$$\leqslant M' M_0 c_\alpha(B) \int_0^t e^{\omega_1 (t-s)} (t-s)^{1-\frac{1}{\beta}} e^{\omega s} s^{1-\frac{1+\alpha}{\beta}} \, ds \, \| x_0 \| \leqslant$$

$$\leqslant M' M_0 c_\alpha(B)\, e^{(\omega_1+\omega)\, t} \int_0^t (t-s)^{1-\frac{1}{\beta}} s^{1-\frac{1+\alpha}{\beta}} \, ds \, \| x_0 \|.$$

Если $\alpha < 2\beta - 1 < \beta$, то интеграл сходится и

$$\| U_{A+B}(t) - U_A(t) \| \leqslant Q c_\alpha(B)\, e^{(\omega_1+\omega)\, t} t^{3-\frac{2+\alpha}{\beta}}. \quad (7.23)$$

Из условия $\alpha < 2\beta - 1$ следует, что $3 - \frac{2+\alpha}{\beta} > 1 - \frac{1}{\beta}$, т. е. разность полугрупп ведет себя при $t \to 0$ «лучше», чем каждая из полугрупп в отдельности.

4. Сравнение дробных степеней операторов. Пусть оператор A удовлетворяет условию (7.4), а оператор B подчинен оператору A с порядком α. Так же как в теореме 7.3, с помощью леммы 7.8 получаем, что для оператора $A+B$ будет выполнено неравенство

$$\| R_{A+B}(-s) \| \leqslant \frac{M}{1-\delta} \frac{1}{1+s} \quad \text{при} \quad s \geqslant a \geqslant 0.$$

Это означает, что для оператора $A + B + aI \equiv A + B_1$ будет уже выполнено условие (7.4) и можно определить его дробные степени. Оператор $B_1 = B + aI$ также подчинен оператору A с порядком α.

Теорема 7.6. *Дробные степени* $(A+B_1)^\gamma$ *и* A^γ $(0 \leqslant \gamma < 1)$ *операторов* $A + B_1$ *и* A *отличаются на оператор, подчиненный оператору* A *с любым порядком* $\varkappa > \alpha + \gamma - 1$.

Доказательство. Рассмотрим на $\mathscr{D}(A)$ оператор

$$C = \left[(A+B_1)^\gamma - A^\gamma\right] A^{-\varkappa} =$$

$$= \frac{\sin \gamma\pi}{\pi} \int_0^\infty s^{\gamma-1} R_{A+B_1}(-s)\, s B_1 R_A(-s)\, A^{-\varkappa} \, ds.$$

Оператор $\overline{B}_1 A^{-\varkappa}$ будет подчинен оператору A с порядком $\alpha-\varkappa_1$, где $\alpha+\gamma-1<\varkappa_1<\varkappa$. Действительно, в силу леммы 7.2 оператор $\overline{B}_1$ подчинен степени $A^{\alpha+\varkappa-\varkappa_1}$ оператора A. Отсюда вытекает, что оператор $\overline{B}_1 A^{-\varkappa}$ подчинен степени $A^{\alpha-\varkappa_1}$ оператора A.

Тогда из леммы 7.8 вытекает, что

$$\| \overline{B}_1 A^{-\varkappa} R_A(-s) \| \leqslant \frac{c}{(1+s)^{1-\alpha+\varkappa_1}},$$

и, следовательно, в силу (7.4),

$$\| C \| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^\infty s^{\gamma-1} \frac{M}{1-\delta} \frac{c}{(1+s)^{1-\alpha+\varkappa_1}} \, ds < \infty,$$

так как $1+(\varkappa_1-\alpha-\gamma+1)>1$.

Из ограниченности оператора C следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

5. Операторы с различными областями определения. Если области определения операторов A и A_1 не содержатся одна в другой, то вопрос об их сравнении нецелесообразно ставить. Если даже пересечение $\mathscr{D}(A)$ и $\mathscr{D}(A_1)$ плотно во всем пространстве, но операторы не получаются замыканиями из своих сужений на это пересечение, то сравнение их значений на пересечении бывает мало полезным. Однако часто некоторые функции от операторов A и A_1 имеют уже общую область определения, и тогда может идти речь об их сравнении. В этом пункте мы рассмотрим тот случай, когда дробные степени операторов A и A_1 имеют общую область определения.

Итак, пусть операторы A и A_1 удовлетворяют условию (7.4) (для простоты с одной и той же константой M). Предположим, что дробные степени A^ν и A_1^ν $(0<\nu<1)$ операторов A и A_1 имеют общую область определения и отличаются на ней на оператор B_ν, подчиненный оператору A с порядком $\alpha<\nu$.

Лемма 7.9. *Для разности резольвент $R_{A_1}(-s)$ и $R_A(-s)$ операторов A_1 и A справедлива оценка*

$$\| R_{A_1}(-s) - R_A(-s) \| \leqslant \frac{c_\varepsilon}{(1+s)^{1+(\nu-\alpha)-\varepsilon}} \tag{7.24}$$

при любом $\varepsilon>0$.

Доказательство. Пусть $1 = k\nu + \gamma$, где $0 \leqslant \gamma < \nu$. На $\mathscr{D}(A_1)$ справедливо тождество

$$R_A(-s) - R_{A_1}(-s) =$$
$$= A_1 R_{A_1}(-s) R_A(-s) - R_{A_1}(-s) R_A(-s) A =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} A_1^{1-j\nu} R_{A_1}(-s) B_\nu R_A(-s) A^{(j-1)\nu} +$$
$$+ R_{A_1}(A_1^\gamma - A^\gamma) R_A A^{1-\gamma}, \quad (7.25)$$

где $B_\nu = A_1^\nu - A^\nu$.

В силу леммы 7.2 оператор B_ν подчинен оператору $A^{\alpha+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$. Поэтому, воспользовавшись неравенством (5.15) при $n = 0$, получаем

$$\| A_1^{1-j\nu} R_{A_1}(-s) B_\nu A^{-(\alpha+\varepsilon)} A^{\alpha+\varepsilon+(j-1)\nu} R_A(-s) \| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_j}{(1+s)^{1+(\nu-\alpha)-\varepsilon}}.$$

Далее, согласно сказанному в п. 6 § 5, операторы A^γ и $A^{\alpha+\varepsilon}$ можно рассматривать как оператор A^ν в степенях $\frac{\gamma}{\nu}$ и $\frac{\alpha+\varepsilon}{\nu}$ соответственно. Применив к операторам A^ν и $A_1^\nu = A^\nu + B_\nu$ теорему 7.6, мы придем к выводу, что оператор $A^\gamma - A_1^\gamma$ подчинен оператору $(A^\nu)^{\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon_1}{\nu}-1} = A^{\alpha+\gamma+\varepsilon_1-\nu}$. Тогда

$$\| R_{A_1}(-s)(A_1^\gamma - A^\gamma) A^{-(\alpha+\gamma+\varepsilon_1-\nu)} A^{1+(\varkappa-\nu+\varepsilon_1)} R_A(-s) \| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{(1+s)^{1+(\nu-\alpha)-\varepsilon_1}}.$$

Объединяя оценки всех членов суммы (7.25), мы приходим к неравенству (7.24).

Лемма доказана.

Замечание 7.5. Если оператор B_ν подчинен оператору A^α и $\gamma = 0$, т. е. $\beta = \frac{1}{k}$, где k — целое, то из доказательства леммы видно, что справедливо неравенство

$$\| R_{A_1}(-s) - R_A(-s) \| \leqslant \frac{c}{(1+s)^{1+\nu-\alpha}}.$$

Перейдем теперь к сравнению полугрупп $U_{A_1}(t)$ и $U_A(t)$, предполагая, что для операторов A_1 и A, кроме условия (7.4), выполнено еще условие (7.15) с $\beta > \frac{1}{2}$ при всех λ с $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$. Раньше всего заметим, что формула (7.21) в этом случае может не иметь смысла, так как оператор $B = A_1 - A$ может быть не определен на решениях $U_A(s)x_0$. Нам придется заменить ее другой формулой, учитывающей тот факт, что операторы A_1^ν и A^ν имеют общую область определения. Пусть снова $x_0 \in \mathscr{D}(A^2)$. Рассмотрим функцию $y(t) = A_1^{-(1-\nu)} U_A(t) x_0$. Эта функция будет удовлетворять уравнению

$$\frac{dy}{dt} = A_1^{-(1-\nu)} A U_A(t) x_0 =$$

$$= A_1^\nu U_A(t) x_0 + \left(A_1^{-(1-\nu)} A - A_1^\nu\right) U_A(t) x_0 =$$

$$= A_1 y + \left(A_1^{-(1-\nu)} A - A_1^\nu\right) U_A(t) x_0.$$

При этом учтено, что $U_A(t) x_0 \in \mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(A^\nu) = \mathscr{D}(A_1^\nu)$. Функции $A_1^{-(1-\nu)} A U_A(t) x_0 = A_1^{-(1-\nu)} U_A(t) A x_0$ и $A_1^\nu U_A(t) x_0 = A_1^\nu A^{-\nu} U_A(t) A^\nu x_0$ непрерывны на $[0, T]$, поэтому (теорема 6.1)

$$y(t) = U_{A_1}(t) y_0 - \int_0^t U_{A_1}(t-s)\left(A_1^\nu - A_1^{-(1-\nu)} A\right) U_A(s) x_0 \, ds$$

или

$$A_1^{-(1-\nu)} U_{A_1}(t) x_0 - A_1^{-(1-\nu)} U_A(t) x_0 =$$

$$= \int_0^t U_{A_1}(t-s)\left(A_1^\nu - A_1^{-(1-\nu)} A\right) U_A(s) x_0 \, ds.$$

Пусть снова $1 = k\nu + \gamma$. С помощью тождественных преобразований получаем

$$A_1^{-(1-\nu)} U_{A_1}(t)\, x_0 - A_1^{-(1-\nu)} U_A(t)\, x_0 =$$
$$= \sum_{j=1}^{k-1} \int_0^t U_{A_1}(t-s)\, A_1^{-j\nu} \left(A_1^{\nu} - A^{\nu}\right) A^{j\nu} U_A(s)\, x_0\, ds +$$
$$+ \int_0^t U_{A_1}(t-s)\, A_1^{-(1-\nu)} \left(A_1^{\gamma} - A^{\gamma}\right) A^{1-\gamma} U_A(s)\, x_0\, ds. \quad (7.26)$$

С точки зрения возможной особенности в точке $s = 0$ наихудшим в предыдущей сумме является последний член, содержащий $A^{1-\gamma} U_A(s)\, x_0$. Если к обеим частям равенства применить оператор $A^{1-\nu}$, то в смысле поведения в точке $s = t$ наихудшим будет первый член, содержащий $A_1^{1-\nu} U_{A_1}(t-s)$. Можно написать тождество, в котором показатели $1-\gamma$ и $1-\nu$ меняются ролями. Аналогично (7.26), получим

$$A^{-(1-\gamma)} U_{A_1}(t)\, x_0 - A_1^{-(1-\gamma)} U_A(t)\, x_0 =$$
$$= \int_0^t U_{A_1}(t-s) \left(A_1^{\gamma} - A^{\gamma}\right) U_A(s)\, x_0\, ds +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k} \int_0^t U_{A_1}(t-s)\, A_1^{-j\nu} \left(A_1^{\nu} - A^{\nu}\right) A^{(j-1)\nu+\gamma} U_A(s)\, x_0\, ds, \quad (7.27)$$

Тождества (7.26) и (7.27) позволяют оценивать норму операторов типа

$$A_1^{-\varkappa} \left(U_{A_1}(t) - U_A(t)\right) A^{-\mu}.$$

Если при этом разность операторов $A_1^{\nu} - A^{\nu}$ есть оператор, подчиненный оператору A с порядком $\alpha < \nu$, то при использовании тождества (7.26) число $\varkappa$ следует взять таким, чтобы функция $A_1^{1-\nu-\varkappa} U_{A_1}(t-s)$ имела суммируемую особенность при $s = t$, а число ν — так, чтобы функция $A^{\rho} U_A(s)\, x_0$

при некотором $p > 1 - \gamma + \alpha - \mu$ имела суммируемую особенность при $s = 0$.

Подсчет соответствующих показателей для операторов, удовлетворяющих условию (7.15), мы здесь не приводим.

§ 8. Примеры

1. Задача Коши для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(D)\, v, \tag{8.1}$$

где v — вектор-функция $v = (v_1, \ldots, v_m)$ от t и x,

$$A(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant r} A_\alpha D^\alpha,$$

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_k = i\frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка n-мерного пространства R_n, коэффициенты A_α — заданные постоянные квадратные матрицы порядка $m \times m$. Число r называется порядком системы.

Под задачей Коши для уравнения (8.1) понимают задачу об отыскании его решения $v = v(t, x)$, удовлетворяющего условию

$$v(0, x) = \varphi(x), \tag{8.2}$$

где вектор-функция $\varphi(x)$ задана во всем пространстве R_n.

Если к обеим частям системы применить преобразование Фурье по пространственным переменным x и обозначить образ функции $v(t, x)$ через $\tilde{v}(t, p)$, то мы придем к системе обыкновенных уравнений

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = A(p)\, \tilde{v}, \tag{8.3}$$

где $A(p)$ — матрица с полиномиально зависящими от $p = (p_1, \ldots, p_n)$ элементами. Для системы (8.3) ставится двойственная задача Коши о нахождении решения с условием

$$\tilde{v}(0, p) = \tilde{\varphi}(p), \tag{8.4}$$

где $\tilde{\varphi}(p)$ — преобразование Фурье функции φ. Применение преобразования Фурье особенно удобно при рассмотрении решений уравнений (8.1), принадлежащих при каждом t пространству $\mathscr{L}_2(R_n)$ ($\mathscr{L}_2$ — теория), так как теорема Планшереля обеспечивает равенство норм функции v и ее образа $\tilde{v}$ в пространствах $\mathscr{L}_2(R_n)$. Таким образом, всякая оценка в норме $\mathscr{L}_2(R_n)$ для решения уравнения (8.3) дает оценку для соответствующего решения уравнения (8.1).

Если уравнение (8.3) рассматривать в пространстве $E = \mathscr{L}_2(R_n)$ вектор-функций от p, то оно будет линейным дифференциальным уравнением с неограниченным оператором A, представляющим собой оператор умножения на неограниченную матрицу $A(p)$. Областью определения оператора A естественно считать совокупность всех тех $\tilde{u}(p) \in \mathscr{L}_2(R_n)$, для которых $A(p)\tilde{u}(p) \in \mathscr{L}_2(R_n)$. Оператор A, вообще говоря, не замкнут, но допускает замыкание. Последнее следует из того, что сопряженный оператор A^* определен на плотном в $\mathscr{L}_2(R_n)$ множестве финитных функций как оператор умножения на сопряженную матрицу $A^*(p)$.

Заметим, что для оператора B умножения на матрицу $B(p)$ с ограниченными непрерывными элементами норма в пространстве $\mathscr{L}_2(R_n)$ вычисляется по формуле

$$\|B\| = \sup_{p \in R_n} \|B(p)\|_m,$$

где $\|B(p)\|_m$ — норма матрицы $B(p)$ как оператора в m-мерном евклидовом пространстве.

Решение системы (8.3) при начальном условии (8.4) задается формулой

$$\tilde{v}(t, p) = e^{tA(p)}\tilde{\varphi}(p).$$

Для того чтобы оператор $U(t)$ умножения на матрицу $e^{tA(p)}$ при фиксированном $t > 0$ был ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы при этом значении t

$$\sup_{p \in R_n} \| e^{tA(p)} \|_m < \infty. \tag{8.5}$$

Обозначим через $\mu_1(p), \ldots, \mu_n(p)$ собственные числа матрицы $A(p)$, тогда числа $e^{t\mu_i(p)}$ будут собственными для матрицы $e^{tA(p)}$. Норма матрицы не меньше модулей ее собственных чисел, поэтому из условия (8.5) будет вытекать, что

$$\left|e^{t\mu_i(p)}\right| = e^{t\,\mathrm{Re}\,\mu_i(p)} \leqslant M(t) \qquad (p \in R_n,\ i = 1, \ldots, m)$$

откуда в свою очередь следует, что

$$\mathrm{Re}\,\mu_i(p) \leqslant c. \tag{8.6}$$

Системы (8.1), для которых выполнено условие (8.6), называются *корректными по Петровскому*.

Мы пришли к следующему утверждению:

Лемма 8.1. *Для того чтобы оператор $U(t)$ умножения на матрицу $e^{tA(p)}$ при каком-нибудь $t > 0$ был ограниченным в $\mathscr{L}_2(R_n)$, необходимо, чтобы система* (8.1) *была корректной по Петровскому.*

Если операторы $U(t)$ ограничены при всех $t > 0$, то они, очевидно, образуют полугруппу ограниченных операторов.

К сожалению, условие (8.6) не является достаточным для ограниченности операторов $U(t)$. Действительно, рассмотрим следующий пример: пусть задана система

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = v_2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}, \tag{8.7}$$

которая получается из одномерного волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ заменой $u = v_1$, $\frac{\partial u}{\partial t} = v_2$. После преобразования Фурье получаем

$$\frac{d\tilde{v}_1}{dt} = \tilde{v}_2, \quad \frac{d\tilde{v}_2}{dt} = -p^2\tilde{v}_1. \tag{8.7'}$$

Здесь

$$A(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p^2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.8}$$

$\mu_1(p) = ip$, $\mu_2(p) = -ip$, т. е. система корректна по Петровскому. Решение задачи (8.3) — (8.4) для этой системы находим простым вычислением

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= \tilde{\varphi}_1 \cos pt + \tilde{\varphi}_2 \frac{\sin pt}{p}, \\ \tilde{v}_2 &= -\tilde{\varphi}_1 p \sin pt + \tilde{\varphi}_2 \cos pt. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Оператор умножения на $p \sin pt$ является неограниченным, и поэтому полугрупповой оператор $U(t)$, соответствующий (8.9), также неограничен.

В [220], стр. 78 получена следующая оценка для нормы матрицы $e^{tA(p)}$

$$\left\| e^{tA(p)} \right\|_m \leqslant \left(1 + 2t \| A(p) \|_m + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (2t)^{m-1} \| A(p) \|_m^{m-1} \right) e^{t \max \operatorname{Re} \mu_l(p)}. \tag{8.10}$$

Норма матрицы $A(p)$ растет не быстрее, чем $(1 + |p|)^r$, поэтому при заданном t правая часть в (8.10) будет ограниченной функцией от p, если

$$\max \operatorname{Re} \mu_l(p) \leqslant -\frac{(m-1)r}{t} \ln(1 + |p|) + a.$$

Из этого неравенства следует, что $\operatorname{Re} \mu_l(p) \to -\infty$ при $|p| \to \infty$. Так как числа $\mu_l(p)$ являются корнями характеристического уравнения $|A(p) - \mu I| = 0$, левая часть которого является многочленом по p и μ, то из последнего соотношения следует, что существуют константы $h > 0$ и b такие, что

$$\operatorname{Re} \mu_l(p) \leqslant -c |p|^h + b \tag{8.11}$$

(см. [223], стр. 110—111). Системы (8.1), для которых выполнено (8.11), называются *параболическими по Шилову*, а константа h называется показателем параболичности системы.

При выполнении условия (8.11) операторы $U(t)$ являются ограниченными при всех $t > 0$, и более того, ограниченными будут операторы вида $A^k U(t)$ при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $t > 0$. Таким образом, полугруппа $U(t)$ при $t > 0$ будет бесконечно дифференцируемой.

Итак, нами установлена

Лемма 8.2. *Если система* (8.1) *параболична по Шилову, то полугруппа* $U(t)$ *операторов умножения на* $e^{tA(p)}$ *при* $t > 0$ *является бесконечно дифференцируемой полугруппой ограниченных в* $\mathcal{L}_2(R_n)$ *операторов.*

Условие (8.11) обеспечивает «хорошие» свойства полугруппы $U(t)$ при $t > 0$, однако оно не гарантирует «хорошего» поведения полугруппы $U(t)$ при $t \to 0$, и, в частности, равномерной ограниченности полугруппы вблизи нуля. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим пример системы

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\tilde{v}_1}{dt} = -p^2\tilde{v}_1, \\ &\frac{d\tilde{v}_2}{dt} = p^k\tilde{v}_1 - p^2\tilde{v}_2 \qquad (k > 0), \end{aligned}\right. \tag{8.12}$$

которая при целом положительном k, очевидно, соответствует параболической по Шилову системе типа (8.1). Решение задачи Коши для этой системы имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{v}_1 = e^{-p^2t}\tilde{\varphi}_1, \\ &\tilde{v}_2 = p^k t e^{-p^2t}\tilde{\varphi}_1 + e^{-p^2t}\tilde{\varphi}_2. \end{aligned}\right\} \tag{8.13}$$

Максимум функции $p^k t e^{-p^2t}$ есть величина порядка $t^{1-k/2}$. Отсюда вытекает, что

$$\|U(t)\| = \frac{c(t)}{t^\beta},$$

где $\beta = \max\{k/2 - 1, 0\}$, а $c(t)$ — ограниченная непрерывная на $[0, \infty)$ функция и $c(0) > 0$. Таким образом, лишь при $k \leqslant 2$ полугруппа $U(t)$ будет равномерно ограниченной, и задача Коши для системы (8.12) будет равномерно корректной в $\mathscr{L}_2(R_n)$. В общем случае полугруппа $U(t)$ может иметь любой степенной рост при $\frac{1}{t} \to \infty$. Интересно исследовать резольвенту оператора A умножения на матрицу

$$A(p) = \begin{pmatrix} -p^2 & 0 \\ p^k & -p^2 \end{pmatrix}.$$

Резольвента матрицы $A(p)$ имеет вид

$$R_{A(p)}(\lambda, p) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{p^2+\lambda} & 0 \\ -\dfrac{p^k}{(p^2+\lambda)^2} & -\dfrac{1}{p^2+\lambda} \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что при $k > 4$ оператор A не имеет регулярных точек. При $k \leqslant 4$ оператор A — замкнут, резольвента $R_A(\lambda)$ определена, например, в правой полуплоскости и для нее справедлива оценка

$$\|R_A(\lambda)\| \leqslant \frac{c}{|\lambda|^{\min(1, 2-k/2)}}.$$

Следовательно, при $2 < k < 4$ уравнение (8.3) принадлежит к тому классу, который был изучен нами в п. 3 § 3. Для этих уравнений ослабленная задача Коши корректна на $\mathscr{D}(A)$.

При $k \leqslant 2$ мы встречаемся с уравнениями, рассмотренными в теореме 3.8, для которых задача Коши равномерно корректна и соответствующая полугруппа аналитична в секторе, содержащем неотрицательную полуось.

Любопытно, что как при $k > 4$, так и при $k \leqslant 4$, ослабленная задача Коши имеет решение (8.13) при любых начальных данных из $\mathscr{D}(A)$, причем это решение аналитично по t в правой полуплоскости. Это говорит о том, что исследование ослабленной задачи Коши, опирающееся лишь на свойства резольвенты оператора A, по-видимому, не может являться исчерпывающим.

Возвратимся к условиям равномерной корректности в $\mathscr{L}_2(R_n)$ задачи Коши (8.3)—(8.4) или, что то же, задачи (8.1) — (8.2). Из оценки (8.10) легко следует

Теорема 8.1. *Если система* (8.1) *параболична по Шилову и ее показатель параболичности совпадает с ее порядком, то задача Коши* (8.1) — (8.2) *равномерно корректна в* $\mathscr{L}_2(R_n)$. *Все ее решения являются бесконечно дифференцируемыми функциями от* t *при* $t > 0$.

Действительно, в условиях теоремы при $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\|U(t)\| \leqslant \sup_{p \in R_n} \|e^{tA(p)}\| \leqslant M_1 \sup_{p \in R_n} \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} (t|p|^r)^k\right) e^{-ct|p|^r} =$$

$$= M_1 \sup_{0 < \tau < \infty} \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \tau^k\right) e^{-c\tau} \leqslant M.$$

Вторая часть теоремы следует из леммы 8.2.

Условиям теоремы 8.1 удовлетворяют системы, параболические по Петровскому (см. [220], стр. 131 — 132).

Использование оценки (8.10) приводит к сравнительно грубым достаточным условиям равномерной корректности задачи Коши в $\mathscr{L}_2(R_n)$. Полное решение этого вопроса дано в работе [251].

Теорема 8.2. *Для того чтобы задача Коши* (8.1) — (8.2) *была равномерно корректной в* $\mathscr{L}_2(R_n)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала неособая матрица* $S(p)$ *и константа* K *такие, что*

1) $\|S(p)\| \leqslant K$, $\|S^{-1}(p)\| \leqslant K$;

2) $$S(p)\,A(p)\,S^{-1}(p) = \begin{Vmatrix} \mu_1(p) & c_{12}(p) & \ldots & c_{1m}(p) \\ \cdot & & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & & \cdot & c_{m-1,\,m}(p) \\ 0 & & \cdot & \mu_m(p) \end{Vmatrix};$$

3) $K \geqslant \operatorname{Re}\mu_1(p) \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{Re}\mu_m(p)$;

4) $|c_{ij}(p)| \leqslant K(1 + |\operatorname{Re}\mu_i(p)|)$.

В работе [222] исследованы системы (8.1), получаемые из одного дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = B\left(\frac{\partial}{\partial t},\quad D\right)u \tag{8.14}$$

после замены

$$v_1 = u, \quad v_2 = u'_t, \quad \ldots, \quad v_m = u_t^{(m-1)} \tag{8.15}$$

и доказана

Теорема 8.2. *Для того чтобы операторы* $U(t)$ *умножения на матрицу* $e^{tA(p)}$ *для системы* (8.1), *полученной из уравнения* (8.14) *после замены* (8.15), *образовывали бесконечно дифференцируемую при* $t > 0$ *полугруппу ограниченных в* $\mathscr{L}_2(R_n)$ *операторов, необходимо и достаточно, чтобы система была корректной по Петровскому и чтобы для всякого* $a > 0$ *нашлось такое* b, *что справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re}\mu_i(p) \leqslant -a\ln|\operatorname{Im}\mu_i(p)| + b$$

для всех $p \in R_n$ *и всех собственных чисел матрицы* $A(p)$

Для систем (8.1) произвольного вида условия теоремы 8.2 не являются достаточными для ограниченност операторов $U(t)$. Например, для системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{v}_1}{dt} = -p^2\tilde{v}_1, \\ \dfrac{d\tilde{v}_2}{dt} = p^k\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2 \end{cases}$$

условия теоремы 8.1 выполнены, а решение задачи (8.3) — (8.4) для нее имеет вид

$$\tilde{v}_1 = e^{-p^2t}\tilde{\varphi}_1, \quad \tilde{v}_2 = \frac{p^k}{1-p^2}\left[e^{-p^2t} - e^{-t}\right]\tilde{\varphi}_1 + e^{-t}\tilde{\varphi}_2$$

и, очевидно, при $k > 2$ определяет неограниченный оператор $U(t)$.

2. Задача Коши в пространствах с дифференциальной $\mathscr{L}_2$-нормой. Возвратимся к примеру (8.7). Известно, что задача Коши для волнового уравнения $u''_{tt} = u''_{xx}$ является примером хорошо поставленной задачи математической физики. Тот факт, что после перехода к системе (8.7) задача Коши становится некорректной в пространстве $\mathscr{L}_2(R_1)$, наводит на мысль о том, что пространство нужно заменить более узким, в котором задача может стать уже равномерно корректной. Настоящий пункт и посвящен разъяснению этого вопроса.

Пусть $B(p) = (b_{lk}(p))$ при каждом $p \in R_n$ — положительно определенная матрица порядка $m \times m$ с полиномиальными коэффициентами. Предположим, что

$$(B\tilde{u}, \tilde{u})_m = \sum b_{jk}\tilde{u}_k\bar{\tilde{u}}_j \geqslant c(\tilde{u}, \tilde{u})_m, \tag{8.16}$$

где константа c не зависит от p.

Норму, определяемую формулой

$$\|\tilde{u}\|_B^2 = \int (B\tilde{u}(p), \tilde{u}(p))_m \, dp, \tag{8.17}$$

будем называть дифференциальной $\mathscr{L}_2$-нормой. Совокупность всех $\tilde{u} \in \mathscr{L}_2(R_n)$, для которых конечна норма (8.17), является гильбертовым пространством $\tilde{\mathscr{L}}_B$ относительно скалярного произведения

$$(\tilde{u}, \tilde{v})_B = \int (B\tilde{u}, \tilde{v})_m \, dp.$$

Прообраз пространства $\tilde{\mathscr{L}}_B$ при преобразовании Фурье назовем пространством $\mathscr{L}_B$. Оно может быть получено следующим образом: матрице $B(p)$ отвечает некоторый эллиптический дифференциальный оператор $B(D)$. На совокупности $\mathscr{D}(B)$ всех функций u из $\mathscr{L}_2(R_n)$, для которых $B(D)u \in \in \mathscr{L}_2(R_n)$, вводится норма

$$\|u\|_B^2 = \int (B(D)u, u)_m \, dx.$$

Пополнение $\mathscr{D}(B)$ по этой норме и будет пространством $\mathscr{L}_B$.

Пусть теперь система (8.1) корректна по Петровскому. Без ограничения общности можно считать в (8.6) $c > 0$, т. е. считать, что

$$\operatorname{Re} \mu_i(p) \leqslant -\delta < 0. \tag{8.18}$$

Тогда, как показал Ляпунов (см. [231]), существует положительно определенная матрица $C(p)$ такая, что

$$C(p)A(p) + A^*(p)C(p) = -I.$$

Если последнее равенство рассматривать как систему уравнений относительно элементов матрицы $C(p)$, то матрица этой системы имеет собственными числами всевозможные суммы $\mu_i(p) + \mu_j(p)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$, поэтому ее определитель $\Delta(p)$ будет в силу (8.18) положительным. Умножив $C(p)$ на $\Delta(p)$, мы получим матрицу $C_1(p) = \Delta(p)C(p)$ с полиномиальными коэффициентами, для которой

$$C_1(p)A(p) + A^*(p)C_1(p) = -\Delta(p)I.$$

В [3] приведена следующая формула для определения матрицы $C(p)$:

$$C(p) = \int_0^\infty e^{sA^*(p)} e^{sA(p)} \, ds$$

и получена оценка

$$(C(p)\tilde{u}, \tilde{u})_m = \int_0^\infty (e^{sA(p)}\tilde{u}, e^{sA(p)}\tilde{u})_m \, ds \geqslant \frac{a_0}{\|A\|_m} (\tilde{u}, \tilde{u})_m, \tag{8.19}$$

где a_0 — абсолютная константа. Для матрицы $C_1(p)$ будет тогда выполнено неравенство

$$(C_1(p)\tilde{u}, \tilde{u})_m \geqslant \frac{a_0 \Delta(p)}{\|A\|_m} (\tilde{u}, \tilde{u})_m. \tag{8.20}$$

Величина $\|A\|_m$ растет как $(1+|p|)^r$. Определитель $\Delta(p)$ ограничен снизу величиной $(2\delta)^{m^2}$, поэтому коэффициент в правой части (8.20) убывает при $|p|\to\infty$ не быстрее, чем некоторая отрицательная степень $|p|$. Умножая матрицу $C_1(p)$ на величину $1+|p|^{2l}$, мы можем добиться того, что для полиномиальной матрицы $B(p)=(1+|p|^{2l})C_1$ выполнено условие (8.16) и

$$B(p)A(p)+A^*(p)B(p)=-b(p)I, \tag{8.21}$$

где $b(p)$ — положительная скалярная функция.

Из (8.21) следует, что

$$\frac{d}{dt}(B(p)e^{tA(p)}\tilde{\varphi},\ e^{tA(p)}\tilde{\varphi})_m\leqslant 0,$$

а значит,

$$(B(p)e^{tA(p)}\tilde{\varphi},\ e^{tA(p)}\tilde{\varphi})_m\leqslant(B\tilde{\varphi},\ \tilde{\varphi})_m.$$

Предполагая, что $\tilde{\varphi}\in\tilde{\mathscr{L}}_B$ и интегрируя по R_n в последнем неравенстве, получаем

$$\|U(t)\tilde{\varphi}\|_B\leqslant\|\tilde{\varphi}\|_B.$$

Таким образом, полугруппа $U(t)$ является сжимающей в пространстве $\tilde{\mathscr{L}}_B$.

Мы пришли к следующему утверждению:

Теорема 8.3. *Для того чтобы существовала дифференциальная $\mathscr{L}_2$-норма $\|\ldots\|_B$, при которой задача* (8.1) — (8.2) *равномерно корректна в пространстве $\mathscr{L}_B$, необходимо и достаточно, чтобы система* (8.1) *была корректной по Петровскому.*

Необходимость доказывается так же, как и в лемме 8.1.

Как показано в работе [251], для равномерной корректности задачи Коши в исходном пространстве $\mathscr{L}_2(R_n)$ необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор $B(p)$, удовлетворяющий условию (8.21) и такой, что норма (8.17) эквивалентна норме $\mathscr{L}_2(R_n)$. Достаточность этого условия проверяется непосредственно, необходимость устанавливается прямой конструкцией матрицы $B(p)$ с использованием теоремы 8.2. Напомним, что для общего случая равномерно корректной задачи Коши в гильбертовом пространстве нами также вводилось новое скалярное произведение, в котором оператор A становился диссипативным (теорема 4.8), однако не удавалось доказать ограниченность снизу этого скалярного произведения.

Теорема 2.14 позволяет рассмотреть вопрос об аналитичности решений задачи Коши.

Теорема 8.4. *Для того чтобы существовала дифференциальная $\mathscr{L}_2$-норма $\|\ldots\|_B$, при которой полугруппа $U(\zeta)$ операторов умножения на $e^{\zeta A(p)}$ была аналитичной в секторе, содержащем неотрицательную полуось, и удовлетворяла в нем неравенству*

$$\|U(\zeta)\| \leqslant Me^{\omega|\zeta|} \qquad (|\arg\zeta| \leqslant \varphi_0), \tag{8.22}$$

необходимо и достаточно, чтобы собственные числа $\mu_l(p)$ матрицы $A(p)$ находились в некотором секторе, содержащем отрицательную полуось, с углом раствора $\pi-2\varphi_0$, или, иначе, чтобы выполнялось неравенство

$$\operatorname{Re}\mu_l(p) \leqslant -|\operatorname{Im}\mu_l(p)|\operatorname{tg}\varphi_0 + b, \tag{8.23}$$

где b — константа.

Доказательство. Из теоремы 2.14 вытекает, что для аналитичности $U(z)$ и (8.22) необходимо и достаточно, чтобы для систем с операторами $e^{\pm i\varphi_0}A(p)$ задача Коши была равномерно корректной. Собственные числа матриц $e^{\pm i\varphi_0}A(p)$ равны $e^{\pm i\varphi_0}\mu_k(p)$ $(k=1, \ldots, m)$. Условие корректности по Петровскому систем с операторами $e^{\pm\varphi_0}A(D)$ приводит к необходимости неравенства (8.23).

Обратно, если выполнено условие (8.23), то системы с операторами $e^{\pm i\varphi_0}A(p)$ корректны по Петровскому, поэтому для каждой из них существует, в силу теоремы 8.3, дифференциальная $\mathscr{L}_2$-норма, в которой задача Коши равномерно корректна. Однако, вообще говоря, эти нормы будут разными, и мы не сможем применить теорему 2.14.

В связи с этим устанавливается

Лемма 8.3. *Если заданы две системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*

$$\frac{du}{dt} = A_1 u \quad \text{и} \quad \frac{du}{dt} = A_2 u$$

одного порядка, в которых матрицы A_1 и A_2 коммутируют и имеют собственные числа, удовлетворяющие (8.18), *то существует общая матрица Ляпунова для этих систем.*

Действительно, такой матрицей, например, будет

$$C = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{sA_1^*} e^{\sigma A_2^*} e^{\sigma A_2} e^{sA_1}\, d\sigma\, ds.$$

Непосредственно проверяется, что

$$CA_1 + A_1^* C = -\int_0^\infty e^{\sigma A_2^*} e^{\sigma A_2}\, d\sigma < 0$$

и

$$CA_2 + A_2^* C = -\int_0^\infty e^{sA_1^*} e^{sA_1}\, ds < 0.$$

Из (8.19) вытекает оценка

$$(C\tilde{u},\ \tilde{u}) \geqslant \frac{a_0^2}{\|A_1\|\,\|A_2\|}(\tilde{u},\ \tilde{u}).$$

Для завершения доказательства теоремы 8.4 нужно построить общую матрицу Ляпунова $C(p)$ для матриц $e^{i\varphi_0}A(p)$ и $e^{-i\varphi_0}A(p)$ *), а затем ее умножить на положительный скалярный множитель так, чтобы полученная матрица $B(p)$ была полиномиальной и удовлетворяла условию (8.16). В построенной по $B(p)$ полиномиальной норме задачи Коши для систем

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = e^{i\varphi_0}A(p)\,\tilde{v} \quad \text{и} \quad \frac{d\tilde{v}}{dt} = e^{-i\varphi_0}A(p)\,\tilde{v}$$

будут равномерно корректными в пространстве $\tilde{\mathscr{L}}_B$. Утверждение теоремы следует тогда из теоремы 2.14. Теорема доказана.

Замечание 8.1. Можно было бы не требовать равномерной по p положительной определенности матрицы $B(p)$. Тогда матрицу $C_1(p)$ не нужно было бы подправлять множителем $(1+|p|^{2l})$. В этом случае можно доказать равномерную корректность соответствующей задачи Коши в простран-

---

*) Предварительно, конечно, нужно сделать замену, чтобы сдвинуть спектр влево.

стве $\mathscr{L}_B$, которое может уже содержать функции, не принадлежащие $\mathscr{L}_2(R_n)$ и даже обобщенные функции.

Простым подсчетом находим, что для системы (8.12) норма, о которой идет речь в теореме 8.3, может быть определена формулой

$$\|\tilde{v}\|_B^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ |\tilde{v}_1|^2 + |\tilde{v}_2|^2 + \frac{1}{2} p^{2k-4} |\tilde{v}_1|^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} p^{k-2} (\tilde{v}_1 \tilde{\bar{v}}_2 + \tilde{v}_2 \tilde{\bar{v}}_1) \right\} dp.$$

Для системы (8.7) собственные числа лежат на мнимой оси, поэтому для получения положительной определенной матрицы Ляпунова в ней нужно сделать замену так, чтобы сдвинуть спектр влево. Если матрицу B искать непосредственно по матрице (8.8), то мы придем к «энергетической норме»

$$\|\tilde{v}\|_B^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \{p^2 |v_1|^2 + |v_2|^2\} \, dp.$$

Пространство $\mathscr{L}_B$, получаемое пополнением $(\mathscr{D})\, B$ по соответствующей норме, будет содержать функции, не принадлежащие $\mathscr{L}_2$, например, такие, у которых компонента u_1 — константа. В этом пространстве задача Коши для системы (8.7) будет равномерно корректной.

3. Краевые задачи для параболических систем. Пусть G — ограниченная область n-мерного пространства с достаточно гладкой границей Γ. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = A(x, D)\boldsymbol{v}, \tag{8.24}$$

где $\boldsymbol{v}$ — m-мерная вектор-функция от t и x

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant r} A_\alpha(x) D^\alpha, \tag{8.25}$$

$A_\alpha(x)$ — квадратные матрицы, элементы которых являются достаточно гладкими функциями от x, определенными в замкнутой области $\bar{G}$.

Главной частью $A(x, D)$ называется дифференциальное выражение

$$A'(x, D) = \sum_{|\alpha|=r} A_\alpha(x) D^\alpha,$$

содержащее лишь производные наивысшего порядка.

Рассмотрим соответствующую полиномиальную матрицу $A'(x, p)$ (p — вещественный вектор). Пусть $r = 2s$ — четное число. Если эта матрица при любых фиксированных $x \in G$ и $p \in R_n$ порождает в конечномерном пространстве (m-мерном) диссипативный оператор, так что

$$\operatorname{Re}(A'(x, p)\tilde{u}, \tilde{u})_m < 0 \qquad (\tilde{u} \neq 0), \tag{8.26}$$

то оператор $A(x, D)$ называется *сильно эллиптическим*, а система (8.24) — *сильно параболической*.

Заметим, что элементы матрицы $A'(x, p)$ являются однородными функциями p степени $r = 2s$, поэтому из (8.26) вытекает, что

$$\operatorname{Re}(A'(x, p)\tilde{u}, \tilde{u})_m \leqslant -\delta |p|^{2s} (\tilde{u}, \tilde{u})_m, \tag{8.27}$$

где

$$-\delta = \max_{\substack{x \in G,\ |p|=1,\\ \|\tilde{u}\|_m = 1}} \operatorname{Re}(A'(x, p)\tilde{u}, \tilde{u})_m.$$

Если в $\mathscr{L}_2(G)$ рассмотреть оператор A_0, порожденный (8.25) на гладких функциях, удовлетворяющих условиям первой краевой задачи

$$u|_\Gamma = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \ldots = \left.\frac{\partial^{s-1} u}{\partial n^{s-1}}\right|_\Gamma = 0, \tag{8.28}$$

то для него

$$\operatorname{Re}(A_0 v, v) = \operatorname{Re}\int_G (A(x, D)v(x), v(x))_m\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \omega \int_G (u(x), u(x))_m\, dx = \omega(u, u).$$

Оператор A_0 допускает замыкание A, и оператор $A - \omega I$ является максимальным диссипативным оператором. Отсюда следует, что задача о нахождении решения уравнения (8.24), удовлетворяющего краевым условиям (8.28) и начальному условию

$$v(0, x) = \varphi(x) \in \mathscr{D}(A), \tag{8.29}$$

равномерно корректна в $\mathscr{D}(A)$.

Заметим, что область определения $\mathscr{D}(A)$ состоит из всех вектор-функций, принадлежащих W_2^r и удовлетворяющих условиям (8.28) в смысле теорем вложения.

Полугруппа, соответствующая задаче (8.24), (8.28), (8.29), удовлетворяет условию $\|U(t)\| \leqslant e^{\omega t}$.

Аналогичную задачу можно рассмотреть в пространстве $\mathscr{L}_p(G)$. В [233] показано, что замыкание A оператора A', порожденного дифференциальным выражением $A(x, D)$ на гладких функциях, удовлетворяющих (8.28), обладает резольвентой, для которой справедливо неравенство

$$\|R_A(\lambda)\|_{\mathscr{L}_p(G)} \leqslant \frac{c}{|\lambda - \omega|} \tag{8.30}$$

в некотором секторе $|\arg(\lambda - \omega)| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Таким образом, полугруппа, порождаемая первой краевой задачей для сильно параболической системы, является аналитической в $\mathscr{L}_p(G)$.

Неравенства типа (8.30) установлены и для более широких классов краевых задач. Для упрощения изложения мы опишем их для случая одного уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x, D)v, \tag{8.31}$$

где $A(x, D)$ — линейный дифференциальный оператор порядка r с достаточно гладкими в G коэффициентами, а $v(t, x)$ — искомая функция. Пусть выполнено условие сильной эллиптичности

$$\operatorname{Re} A'(x, p) < 0$$

при $x \in G$ и $p \in R_n$. Отсюда вытекает, что $r = 2s$ — четное число и что уравнение

$$A'(x, p' + \zeta p_0) - \lambda = 0$$

при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, $p_0 \neq 0$ и p', ортогональном к p_0, имеет одинаковое число корней в верхней и нижней полуплоскостях.

Пусть задано s краевых условий

$$B_j(x, D)v|_\Gamma = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s), \tag{8.32}$$

где $B_j(x, D)$ — линейные дифференциальные операторы порядков r_j с достаточно гладкими коэффициентами. Обозначим через $B'_j(x, D)$ главные части операторов $B_j(x, D)$. Предположим, что выполнено следующее условие Шапиро — Лопатинского: пусть x — фиксированная точка границы Γ области G, n — единичный вектор нормали к Γ в этой точке и p' — вектор, ортогональный к n. Обозначим через $\zeta_k^+ = \zeta_k^+(x, p', \lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ корни уравнения

$$A'(x, p' + \zeta n) - \lambda = 0,$$

лежащие в верхней полуплоскости.

Условие 1. *Многочлены* $B_j(x, p' + \zeta n)$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ *от* ζ *линейно независимы по модулю многочлена* $\prod_{k=1}^{s}(\zeta - \zeta_k^+)$ *при каждых* $x \in \Gamma$, p', *ортогональном к* n, *и* λ *с* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$.

Для замыкания A в пространстве $\mathscr{L}_p(G)$ оператора A_0, порожденного дифференциальным выражением $A(x, D)$ на гладких функциях, удовлетворяющих краевым условиям (8.28), справедлива оценка (8.30) и, следовательно, задача о нахождении решения уравнения (8.31), удовлетворяющего краевым условиям (8.32) и начальному условию $v(0, x) = \varphi(x) \in D(A)$, равномерно корректна. Полугруппа, соответствующая этой задаче, аналитична.

Отметим, что условия, наложенные на операторы B_j, не являются эффективно проверяемыми. Здесь не указывается конструктивный процесс, который позволил бы для какого-либо класса уравнений строить операторы B_j, удовлетворяющие условию 1, для любой области с гладкой границей. Исключением является первая краевая задача, рассмотренная выше, для которой условие 1 всегда выполнено.

В случае, когда $A(x, D)$ является эллиптическим оператором второго порядка $(s = 1)$ с вещественными коэффициентами

$$A(x, D)v = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + a(x)(v), \tag{8.33}$$

показано, что оценка (8.30) имеет место и для оператора, порожденного дифференциальным выражением (8.33) на функциях, удовлетворяющих второму краевому условию:

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} - \sigma(x)\, v = 0,$$

где $\sigma(x) \geqslant 0$.

4. Симметрические гиперболические системы. Рассмотрим тот случай, когда в (8.24) оператор $A(x, D)$ является оператором первого порядка вида

$$A(x, D)\, v = \sum_{l=1}^{n} A_l(x) \frac{\partial v}{\partial x_l} + B(x)\, v, \tag{8.34}$$

где $A_l(x)$ и $B(x)$ — матрицы с достаточно гладкими коэффициентами, определенными в ограниченной области G. Матрицы $A_l(x)$ предположим вещественными и симметрическими.

Интегрируя по частям, получаем

$$(Av, v) = \int_G \left(\sum_{l=1}^{n} A_l \frac{\partial v}{\partial x_l} + Bv,\ v \right)_m dx =$$

$$= -\int_G \left(v,\ \sum_{l=1}^{n} A_l \frac{\partial v}{\partial x_l} \right)_m dx + \int_G \left(\left(B - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial A_l}{\partial x_l} \right) v,\ v \right)_m dx +$$

$$+ \int_\Gamma \left(\sum_{l=1}^{n} A_l n_l v,\ v \right)_m ds,$$

где n_l — координаты внешней нормали к Γ. Отсюда

$$\operatorname{Re}(Av, v) = \int_G \left(\left(B + B^* - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial A_l}{\partial x_l} \right) v,\ v \right)_m dx +$$

$$+ \int_\Gamma \left(\sum_{l=1}^{n} A_l n_l v,\ v \right)_m ds. \tag{8.35}$$

Если предположить, что

$$B+B^{*}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\leqslant 0 \tag{8.36}$$

и

$$\int_{\Gamma}\left(\sum_{i=1}^{n}A_i n_i \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}\right)_m ds\leqslant 0, \tag{8.37}$$

то оператор A будет диссипативным, если его считать определенным на том множестве функций, где законны все проведенные операции.

Для дифференциального оператора первого порядка однородные краевые условия естественно задавать в виде уравнений

$$(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{w}_j)\big|_{\Gamma}=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ l),$$

где $\boldsymbol{w}_j(x)$ — непрерывные векторные поля, заданные на границе Γ области G. Иначе условия можно трактовать так, что вектор $\boldsymbol{u}(x)$ при $x\in\Gamma$ должен принадлежать некоторому подпространству $N(x)$ всего m-мерного пространства ($N(x)$ ортогонально векторам $\boldsymbol{w}_i(x)$). При этом подпространство $N(x)$ непрерывно меняется при изменении x.

Сделаем два предположения:

1°. Ранг матрицы $A_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i(x)\,n_i(x)$ не изменяется, когда x пробегает границу Γ.

2°. Подпространство $N(x)$ является максимальным подпространством, на котором форма матрицы $A_n(x)$ — неположительна, $(A_n\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u})_m\leqslant 0$.

Если теперь в пространстве $\mathscr{L}_2(G)$ задать дифференциальным выражением (8.34) оператор A на функциях, непрерывных в $\boldsymbol{G}$, удовлетворяющих краевым условиям

$$\boldsymbol{u}(x)\big|_{\Gamma}\in N(x) \tag{8.38}$$

и имеющих интегрируемые с квадратом первые производные, то при условиях 1°, 2° этот оператор допускает замыкание до максимального диссипативного оператора. Отсюда следует, что задача о нахождении решения системы

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + B(x) v, \tag{8.39}$$

удовлетворяющего (8.38) и начальному условию $v(0, x) = \varphi(x) \in \mathscr{D}(A)$, при выполнении (8.36), 1° и 2°, равномерно корректна в пространстве $\mathscr{L}_2(G)$. Соответствующая полугруппа будет сжимающей.

Если не предполагать выполненным условие (8.36), но сохранить условие (8.37), то из (8.35) получим

$$\operatorname{Re}(Av, v) \leqslant \omega(v, v),$$

где

$$\omega = \max_{x \in G} \left\| B(x) + B^*(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \right\|_m .$$

Это наводит на мысль, что уравнение (8.39) сводится к уравнению с диссипативным оператором (см. § 4, п. 4, пример 1). Если, например, предположить, что матрицы $A_i(x)$ и $B(x)$ периодичны по всем переменным и за G принять параллелепипед периодов, то для функций $u(x)$, удовлетворяющих тем же условиям периодичности по пространственным переменным,

$$\int_{\Gamma} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i n_i u, u \right)_m ds = 0.$$

Задача об отыскании периодических решений уравнения (8.39) в этом случае также является равномерно корректной в $\mathscr{L}_2(G)$.

5. Уравнение Шредингера. В квантовой механике существенную роль играет уравнение Шредингера вида

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta \psi + b(x) \psi, \tag{8.40}$$

где $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$ — трехмерный вектор, пробегающий все пространство R_3, Δ — оператор Лапласа, $b(x)$ — заданная функция. По самому физическому смыслу функции ψ уравнение (8.40) естественно изучать в пространстве $\mathscr{L}_2(R_3)$.

Дифференциальное выражение $-\Delta+b(x)$ естественным образом порождает оператор A_0 на финитных функциях. Этот оператор симметричен. При определенных условиях на функцию $b(x)$ замыкание A оператора A_0 будет самосопряженным оператором в $\mathscr{L}_2(R_3)$. Тогда уравнение (8.40) порождает уравнение в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}_2(G)$, рассмотренное в теореме 4.7. Ему соответствует группа $U(t)$ унитарных операторов в $\mathscr{L}_2(G)$.

6. Уравнения с запаздывающим аргументом. Начнем с рассмотрения простейшего уравнения вида

$$y'(t)=ay(t-1) \qquad (0\leqslant t<\infty). \tag{8.41}$$

Ясно, что для нахождения решения этого уравнения при всех $t>0$ необходимо задать функцию y на отрезке $[-1,\ 0]$. После этого $y(t)$ можно последовательно находить на отрезках $[n,\ n+1]$ из интегральных уравнений

$$y(t)=y(n)+a\int_n^t y(\tau-1)\,d\tau \qquad (n\leqslant t\leqslant n+1). \tag{8.42}$$

Обозначим $x_0(s)=y(s)$ $(-1\leqslant s\leqslant 0)$ и будем считать, что эта функция принадлежит пространству $C[-1,\ 0]$. Введем в рассмотрение функцию $x(t,\ s)=y(t+s)$ и будем ее рассматривать при каждом фиксированном t как элемент пространства $C[-1,\ 0]$. Таким образом, решения уравнения (8.41) с начальными условиями

$$y(s)=x_0(s) \qquad (-1\leqslant s\leqslant 0,\ x_0(s)\in C[-1,\ 0]) \tag{8.43}$$

порождают операторы

$$U(t)\,x_0(s)=x(t,\ s)=y(t+s).$$

Очевидно, эти операторы образуют сильно непрерывную полугруппу ограниченных операторов в $C[-1,\ 0]$. Эта полугруппа удовлетворяет C_0-условию. Действительно, из (8.42), например, вычисляем

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|U(t)x_0\|=\max_{\substack{0\leqslant t\leqslant 1\\ -1\leqslant s\leqslant 0}}|y(t+s)|\leqslant$$

$$\leqslant|x_0(0)|+a\int_0^1|x_0(\tau-1)|\,d\tau\leqslant(1+a)\|x_0\|.$$

Из (8.42) видно, что полугруппа $U(t)$ обладает запаздывающей гладкостью: при $n<t\leqslant n+1$ решения $y(t+s)$ имеют производные $n+1$-го порядка.

Простым вычислением находим, что производящим оператором полугруппы $U(t)$ будет оператор дифференцирования, заданный на всех непрерывно дифференцируемых на $[-1, 0]$ функциях $x(s)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$x'(0)=ax(-1). \tag{8.44}$$

Функция $x(t, s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial x}{\partial s}, \tag{8.45}$$

поэтому задачу (8.41), (8.43) можно трактовать как задачу о нахождении решения гиперболического уравнения (8.45), удовлетворяющего на отрезке $[-1, 0]$ нелокальному краевому условию (8.44). Как показано, эта задача равномерно корректна в $C[-1, 0]$.

Отметим, что задача (8.45), (8.44) не входит в класс задач, рассмотренных для гиперболических систем в п. 4.

Проведенные рассуждения допускают обобщение. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dt}=B(y(t+s))\qquad(0\leqslant t<\infty), \tag{8.46}$$

где $\boldsymbol{y}$ — m-мерная вектор-функция, определенная на $[-1, \infty)$, а B — линейный оператор, отображающий пространство $\boldsymbol{C}[-1, 0]$ непрерывных на $[-1, 0]$ вектор-функций в m-мерное векторное пространство R_m. В уравнении (8.46) при каждом t оператор B действует на $\boldsymbol{y}(t+s)$ как на функцию от s из $\boldsymbol{C}[-1, 0]$. В примере (8.41) $B(x(s))=x(-1)$

($x \in C\,[0,\ 1]$). Так же, как и в этом примере, решение (8.46) однозначно определяется, если задать условие

$$y(s) = x_0(s) \qquad (-1 \leqslant s \leqslant 0,\ x_0(s) \in C\,[-1,\ 0]). \qquad (8.47)$$

Задачу (8.46), (8.47) можно снова трактовать как задачу о нахождении решения гиперболической системы

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial s},$$

удовлетворяющего краевому условию

$$x'(t,\ 0) = B\,(x\,(s))$$

и начальному условию

$$x\,(0,\ s) = x_0\,(s).$$

Эта задача является равномерно корректной в $C\,[-1,\ 0]$.

ГЛАВА II

УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

§ 1. Неограниченные операторы, зависящие от параметра

1. Операторы с постоянной областью определения, сильно непрерывные на ней. Пусть для каждого $t \in [0, T]$ определен линейный оператор $A(t)$ с областью определения $\mathcal{D}(A)$, не зависящей от t и плотной в E. Предположим, что оператор $A(t)$ допускает замыкание. Если B — оператор с той же областью определения $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$, имеющий ограниченный обратный, то оператор $A(t)B^{-1}$ всюду определен, замкнут, и, следовательно, ограничен (см. лемму 7.1, гл. I).

Будем говорить, что оператор $A(t)$ сильно непрерывен на множестве $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}(A)$, если при любом $x \in \mathcal{M}$ функция $A(t)x$ непрерывна. Если оператор $A(t)$ сильно непрерывен на $\mathcal{D}(A)$, то ограниченный оператор $A(t)B^{-1}$ сильно непрерывен по t и, в силу теоремы Банаха — Штейнгауза, он равномерно по t ограничен $\|A(t)B^{-1}\| \leqslant c$.

Если функция $f(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ принимает значения из $\mathcal{D}(A)$ и функция $Bf(t)$ непрерывна, то функция

$$A(t)f(t) = A(t)B^{-1}Bf(t)$$

также непрерывна.

Предположим теперь, что при каждом $t \in [0, T]$ оператор $A(t)$ имеет ограниченный обратный $A^{-1}(t)$. Тогда за оператор B можно принять, например, оператор $A(0)$. Из предыдущего вытекает, что оператор $A(t)A^{-1}(0)$ будет ограниченным и сильно непрерывным по t на $[0, T]$. В частности,

$$\|A(t)A^{-1}(0)\| \leqslant c \qquad (0 \leqslant t \leqslant T).$$

Если предположить, что оператор $A^{-1}(t)$ равномерно на $[0, T]$ ограничен, то из этого будет следовать, что он сильно непрерывен. Действительно, при $x \in E$

$$\|A^{-1}(t+\Delta t)x - A^{-1}(t)x\| =$$
$$= \|A^{-1}(t+\Delta t)(A(t) - A(t+\Delta t))A^{-1}(t)x\| \leqslant$$
$$\leqslant M\|(A(t) - A(t+\Delta t))A^{-1}(t)x\| \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta t \to 0.$$

В силу той же леммы 7.1 гл. I оператор $A(0)A^{-1}(s)$ будет ограниченным при каждом s. Этот оператор является обратным к сильно непрерывному ограниченному оператору $A(s)A^{-1}(0)$. Если предположить, что

$$\|A(0)A^{-1}(s)\| \leqslant M \qquad (0 \leqslant s \leqslant T), \tag{1.1}$$

то из предыдущего будет следовать, что оператор $A(0)A^{-1}(s)$ сильно непрерывен по $s \in [0, T]$. Рассмотрим, наконец, ограниченный оператор $A(t)A^{-1}(s)$. Из представления

$$A(t)A^{-1}(s) = A(t)A^{-1}(0)A(0)A^{-1}(s) \tag{1.2}$$

следует сильная непрерывность оператора $A(t)A^{-1}(s)$ как функции двух переменных s и t $(0 \leqslant s,\ t \leqslant T)$.

Итак, мы пришли к следующему утверждению:

Лемма 1.1. *Пусть оператор* $A(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ *с постоянной областью определения* $\mathscr{D}(A)$ *сильно непрерывен на* $\mathscr{D}(A)$ *и имеет ограниченный обратный* $A^{-1}(t)$, *удовлетворяющий условию* (1.1). *Тогда оператор* $A(t)A^{-1}(s)$ *ограничен и сильно непрерывен по* t *и* s *в квадрате* $0 \leqslant s,\ t \leqslant T$.

2. Аппроксимация ограниченными операторами. Говорят, что ограниченные операторы $A_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сильно и равномерно по $t \in [0, T]$ сходятся на $\mathscr{D}(A)$ к оператору $A(t)$, если при каждом $x \in \mathscr{D}(A)$ функции $A_n(t)x$ равномерно на $[0, T]$ сходятся к функции $A(t)x$. Пусть оператор $A(t)$ удовлетворяет условиям леммы 1.1, тогда ограниченные операторы $A_n(t)A^{-1}(0)$ будут сильно и равномерно на $[0, T]$ сходиться к ограниченному оператору $A(t)A^{-1}(0)$. Пусть x — фиксированный элемент из E. Функция $A(0)A^{-1}(s)x$ непрерывна, поэтому ее значения образуют компактное в E множество. В силу леммы 3.1 из введения операторы $A_n(t)A^{-1}(0)$ будут сходиться к оператору $A(t)A^{-1}(0)$ на этом множестве равномерно по t и s.

Лемма 1.2. *Если ограниченные операторы $A_n(t)$ сильно и равномерно по $t \in [0, T]$ сходятся на $\mathscr{D}(A)$ к оператору $A(t)$, удовлетворяющему условиям леммы* 1.1, *то ограниченные операторы $A_n(t)A^{-1}(s)$ сильно и равномерно по t и s в квадрате $0 \leqslant s, t \leqslant T$ сходятся к ограниченному оператору $A(t)A^{-1}(s)$.*

3. Оператор, сильно непрерывно дифференцируемый на $\mathscr{D}(A)$. Оператор $A(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ называется сильно непрерывно дифференцируемым на $\mathscr{D}(A)$, если функция $u(t) \doteq A(t)x$ при $x \in \mathscr{D}(A)$ имеет непрерывную производную $u'(t)$ на $[0, T]$. Обозначая

$$u'(t) = A'(t)x,$$

мы получим линейный оператор $A'(t)$, определенный на $\mathscr{D}(A)$ и сильно непрерывный на $\mathscr{D}(A)$.

Пусть B — оператор, определенный на $\mathscr{D}(A)$ и имеющий ограниченный обратный B^{-1}. Тогда при любом $z \in E$ элемент $x = B^{-1}z$ принадлежит $\mathscr{D}(A)$ и, следовательно,

$$\frac{1}{\Delta t}\left[A(t+\Delta t)B^{-1}z - A(t)B^{-1}z\right] \to A'(t)B^{-1}z.$$

Таким образом, ограниченные операторы, стоящие слева, сильно сходятся к оператору $A'(t)B^{-1}$. Отсюда вытекает, что оператор $A'(t)B^{-1}$ — ограничен. Из предыдущего следует, что он сильно непрерывен на $[0, T]$ и, в частности, равномерно ограничен. Другими словами, мы показали, что ограниченный оператор $A(t)B^{-1}$ сильно непрерывно дифференцируем и $\left[A(t)B^{-1}\right]' = A'(t)B^{-1}$. Из леммы 3.5 введения получаем, что оператор $A(t)B^{-1}$ непрерывен по норме и, более того, удовлетворяет условию Липшица

$$\|[A(t)-A(\tau)]B^{-1}\| \leqslant c\,|t-\tau|. \tag{1.3}$$

Лемма 1.3. *Пусть оператор $A(t)$ имеет постоянную область определения $\mathscr{D}(A)$ и сильно непрерывно дифференцируем на ней; оператор B определен на $\mathscr{D}(A)$ и имеет ограниченный обратный; функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема, причем определены и непрерывны функции $Bf(t)$ и $Bf'(t)$. Тогда функция $A(t)f(t)$ непрерывно дифференцируема и*

$$[A(t)f(t)]' = A'(t)f(t) + A(t)f'(t).$$

Доказательство. Установим сначала формулу

$$[Bf(t)]' = Bf'(t). \tag{1.4}$$

В силу замкнутости оператора B

$$\int_0^t Bf'(\tau)\,d\tau = B\int_0^t f'(\tau)\,d\tau = B[f(t)-f(0)], \tag{1.5}$$

откуда (1.4) получается дифференцированием. Теперь имеем

$$[A(t)f(t)]' = \left[A(t)B^{-1}Bf(t)\right]' =$$
$$= A'(t)B^{-1}Bf(t) + A(t)B^{-1}Bf'(t) =$$
$$= A'(t)f(t) + A(t)f'(t).$$

Лемма доказана.

Замечание 1.1. Из доказательства видно, что вместо предположения о непрерывности $Bf(t)$ достаточно потребовать лишь, чтобы $f(0)\in\mathscr{D}(A)$. Остальное тогда уже следует из (1.5).

Лемма 1.4. *Пусть оператор $A(t)$ имеет постоянную область определения и сильно непрерывно дифференцируем на ней, а оператор $Q(t)$ — ограничен и сильно непрерывно дифференцируем. Тогда оператор $C(t)=Q(t)A(t)$, определенный на $\mathscr{D}(A)$, будет сильно непрерывно дифференцируемым на $\mathscr{D}(A)$ и*

$$C'(t)x = Q'(t)A(t)x + Q(t)A'(t)x \quad (x\in\mathscr{D}(A),\ t\in[0,T]). \tag{1.6}$$

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} x = \Delta Q \frac{\Delta A}{\Delta t} x + Q(t) \frac{\Delta A}{\Delta t} x + \frac{\Delta Q}{\Delta t} A(t) x. \qquad (1.7)$$

Первое слагаемое справа в силу непрерывности по норме оператора $Q(t)$ (см. лемму 3.5 введения) и того, что $\frac{\Delta A}{\Delta t} x \to A'(t) x$, стремится к нулю при $\Delta t \to 0$. Переходя в (1.7) к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем (1.6).

Лемма доказана.

Замечание 1.2. В дальнейшем нам часто будет встречаться ограниченный оператор, зависящий от параметра и сильно непрерывно дифференцируемый на некотором плотном в E множестве $\mathscr{D}$. (Таким, например, является полугрупповой оператор $U(t)$, отвечающий равномерно корректной задаче Коши.) Мы можем тогда рассмотреть суже́ние $A(t)$ этого оператора на $\mathscr{D}$ и к нему применять леммы 1.3 и 1.4. •

Пусть теперь оператор $A(t)$ имеет ограниченный обратный $A^{-1}(t)$. Тогда за оператор B можно принять, например, оператор $A(0)$, и мы придем к выводу, что оператор $A(t) A^{-1}(0)$ непрерывен по норме операторов, удовлетворяет условию Липшица

$$\|(A(t) - A(\tau)) A^{-1}(0)\| \leqslant c |t - \tau|, \qquad (1.8)$$

сильно непрерывно дифференцируем и $[A(t) A^{-1}(0)]' = A'(t) A^{-1}(0)$. В силу леммы 3.8 введения оператор $A(0) A^{-1}(s)$, обратный к оператору $A(s) A^{-1}(0)$, будет также непрерывным по норме при $0 \leqslant s \leqslant T$ и сильно непрерывно дифференцируемым по s, причем

$$[A(0) A^{-1}(s)]' = -A(0) A^{-1}(s) A'(s) A^{-1}(0) A(0) A^{-1}(s) =$$
$$= -A(0) A^{-1}(s) A'(s) A^{-1}(s). \qquad (1.9)$$

Из проведенных рассуждений и представления (1.2) непосредственно вытекает

Лемма 1.5. *Пусть оператор $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем на $\mathscr{D}(A)$ и имеет ограниченный обратный $A^{-1}(t)$. Тогда*

1°. *Оператор* $A(t)A^{-1}(s)$ *непрерывен в смысле нормы операторов по совокупности переменных* s *и* t *в квадрате* $0 \leqslant s,\ t \leqslant T$ *и удовлетворяет по каждой из них условию Липшица.*

2°. *Оператор* $A(t)A^{-1}(s)$ *сильно дифференцируем по* t *и* s, *производные*

$$[A(t)A^{-1}(s)]'_t = A'(t)A^{-1}(s)$$

и

$$[A(t)A^{-1}(s)]'_s = -A(t)A^{-1}(s)A'(s)A^{-1}(s)$$

сильно непрерывны как функции двух переменных s *и* t.

Заметим, что из (1.9), конечно, следует сильная непрерывная дифференцируемость оператора $A^{-1}(s)$ и формула

$$[A^{-1}(s)]' = -A^{-1}(s)A'(s)A^{-1}(s). \tag{1.10}$$

Лемма 1.6. *Пусть операторы* $A(t)$, $A_1(t)$ *и* $A_2(t)$ *имеют не зависящие от* t *области определения, оператор* $A(t)$ *сильно непрерывно дифференцируем на* $\mathscr{D}(A)$, *оператор* $A_1(t)$ *удовлетворяет условиям леммы* 1.5 *и*

$$A(t) = A_1(t)A_2(t). \tag{1.11}$$

Тогда оператор $A_2(t)$ *сильно непрерывно дифференцируем на* $\mathscr{D}(A_2) = \mathscr{D}(A)$ *и при* $x \in \mathscr{D}(A)$

$$A'(t)x = A_1'(t)A_2(t)x + A_1(t)A_2'(t)x.$$

Доказательство. К обеим частям тождества

$$\frac{\Delta A}{\Delta t}x = A_1(t+\Delta t)\frac{\Delta A_2}{\Delta t}x + \frac{\Delta A_1}{\Delta t}A_2(t)x$$

применим оператор $A_1^{-1}(t+\Delta t)$. После преобразований получим

$$\Delta A_1^{-1}\frac{\Delta A}{\Delta t}x + A_1^{-1}(t)\frac{\Delta A}{\Delta t}x =$$

$$= \frac{\Delta A_2}{\Delta t}x + A_1^{-1}(t)\frac{\Delta A_1}{\Delta t}A_2(t)x + \Delta A_1^{-1}\frac{\Delta A_1}{\Delta t}A_2(t)x. \tag{1.12}$$

В силу непрерывности по норме оператора $A_1^{-1}(t)$ и существования пределов $\frac{\Delta A}{\Delta t}x$ и $\frac{\Delta A_1}{\Delta t}A_2(t)x$ (заметим, что равенство (1.11) предполагает включение $\mathscr{R}(A_2(t)) \subset \mathscr{D}(A_1)$), первый слева и последний справа члены стремятся к нулю при $\Delta t \to 0$. Тогда из (1.12) следует существование производной

$$A_2'(t)\,x = A_1^{-1}(t)\,A'(t)\,x - A_1^{-1}(t)\,A_1'(t)\,A_2(t)\,x.$$

Лемма доказана.

4. Дробные степени оператора, зависящего от параметра. Предположим, что оператор $A(t)$ удовлетворяет условиям леммы 1.1 и, кроме того, что для его резольвенты справедлива оценка

$$\|R_{A(t)}(-s)\| \leqslant \frac{M}{1+s} \qquad (s \geqslant 0) \tag{1.13}$$

с константой, не зависящей от t.

Рассмотрим дробные степени $A^\alpha(t)$ $(0<\alpha<1)$ оператора $A(t)$. Оператор $A^\alpha(t)$ имеет область определения более широкую, чем оператор $A(t)$, поэтому мы уже не можем гарантировать постоянства области определения у оператора $A^\alpha(t)$. Можно доказать следующее более слабое утверждение:

Лемма 1.7. *Если элемент x таков, что при каком-нибудь $t_0 \in [0, T]$ он принадлежит области определения оператора $A^\beta(t_0)$, то он принадлежит областям определения всех операторов $A^\alpha(t)$ при $\alpha<\beta$ и $t \in [0, T]$. Более того, справедливо неравенство*

$$\|A^\alpha(t)\,A^{-\beta}(t_0)\| \leqslant c \tag{1.14}$$

с константой, не зависящей от t и t_0.

Доказательство. Пусть $x \in \mathscr{D}(A^\beta(t_0))$, тогда $x = A^{-\beta}(t_0)\,z$. Воспользуемся формулой (5.8) гл. I для отрицательной степени оператора $A(t_0)$. Имеем

$$x = \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_0^\infty s^{-\beta} R_{A(t_0)}(-s)\,z\,ds.$$

Покажем, что к элементу x применим оператор

$$\frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \sigma^{\alpha-1} A(t) R_{A(t)}(-\sigma)\, d\sigma.$$

Имеем

$$\mathcal{J} z = \frac{\sin \alpha\pi \sin \beta\pi}{\pi^2} \times$$

$$\times \int_0^\infty \sigma^{\alpha-1} A(t) R_{A(t)}(-\sigma) \int_0^\infty s^{-\beta} R_{A(t_0)}(-s)\, z\, ds\, d\sigma =$$

$$= \frac{\sin \alpha\pi \sin \beta\pi}{\pi^2} \left\{ \int_0^\infty \sigma^{\alpha-1} R_{A(t)}(-\sigma) \int_0^\sigma s^{-\beta} A(t) A^{-1}(t_0) \times \right.$$

$$\times A(t_0) R_{A(t_0)}(-s)\, ds\, d\sigma +$$

$$\left. + \int_0^\infty \sigma^{\alpha-1} A(t) R_{A(t)}(-\sigma) \int_\sigma^\infty s^{-\beta} R_{A(t_0)}(-s)\, ds\, d\sigma \right\} z.$$

Отсюда

$$\| \mathcal{J} z \| \leqslant c \left\{ \int_0^\infty \frac{\sigma^{\alpha-1}}{1+\sigma} \int_0^\sigma s^{-\beta}\, ds\, d\sigma + \int_0^\infty \sigma^{\alpha-1} \int_\sigma^\infty \frac{s^{-\beta}}{1+s}\, ds\, d\sigma \right\} \| z \| \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int_0^\infty \frac{\tau^{\alpha-\beta}}{1+\tau}\, d\tau \, \| z \| = c_2 \| z \|, \qquad (1.15)$$

вследствие того, что $\alpha < \beta$.

Аппроксимируем элемент z последовательностью элементов $z_n \in \mathscr{D}(A)$. Тогда $A^{-\beta}(t_0) z_n \in \mathscr{D}(A)$ и $A^{-\beta}(t_0) z_n \to A^{-\beta}(t_0) z$. В силу формулы (5.13) гл. I

$$\mathcal{J} z_n = A^\alpha(t) A^{-\beta}(t_0) z_n.$$

Из неравенства (1.15) следует, что $\mathcal{J} z_n \to \mathcal{J} z$, т. е. $A^\alpha(t) A^{-\beta}(t_0) z_n \to \mathcal{J} z$ и, следовательно, благодаря замкнутости оператора $A^{\alpha}(t)$, элемент $A^{-\beta}(t_0)\,z = x \in \mathscr{D}(A^{\alpha}(t))$ и $\mathcal{J}z = A^{\alpha}(t)\,A^{-\beta}(t_0)\,z$. Из неравенства (1.15) вытекает (1.14). Лемма доказана.

Исследуем теперь вопрос о гладкости оператора $A^{\alpha}(t)$. Для этого напомним сначала оценку (5.15) гл. I. Для $n=0$ и $0<\gamma<1$ имеем

$$\| A^{\gamma}(t)\, R_{A(t)}(-s)\| \leqslant \frac{c}{(1+s)^{1-\gamma}}, \tag{1.16}$$

причем из вывода этой оценки видно, что в нашем случае константа c может быть выбрана не зависящей от t. Из (1.14) и (1.16) при $0<\gamma<\delta<1$ получаем

$$\| A^{\gamma}(t)\, R_{A(\tau)}(-s)\| \leqslant$$
$$\leqslant \| A^{\gamma}(t)\, A^{-\delta}(\tau)\| \, \| A^{\delta}(\tau)\, R_{A(\tau)}(-s)\| \leqslant \frac{c_{\delta}}{(1+s)^{1-\delta}}, \tag{1.17}$$

где c_{δ} не зависит от t, τ и s.

Лемма 1.8. *Если оператор $A(t)$ удовлетворяет условиям леммы 1.5, то операторы $A^{\alpha}(t)\,A^{-\beta}(t_0)$ $(0<\alpha<\beta\leqslant 1)$ и $A^{\alpha}(t)\,R_{A(t)}(-s)$ удовлетворяют условию Липшица по t.*

Доказательство. Выберем число α_1 так, чтобы было $\alpha<\alpha_1<\beta$. Из формулы (5.13) гл. I находим

$$\Delta A^{\alpha}(t)\,A^{-\alpha_1}(t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^{\infty} s^{\alpha} R_{A(t+\Delta t)}(-s)\,\Delta A(t)\,\times$$
$$\times A^{-1}(t)\,A^{1-\alpha_1}(t)\,R_{A(t)}(-s)\,ds. \tag{1.18}$$

Применяя (1.16) при $\gamma = 1-\alpha_1$, получаем

$$\| \Delta A^{\alpha}(t)\,A^{-\alpha_1}(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant c\int_0^{\infty} \frac{s^{\alpha}}{(1+s)^{1+\alpha_1}}\,ds\, \|\Delta A(t)\,A^{-1}(t)\| \leqslant c_1 \|\Delta A(t)\,A^{-1}(t)\|.$$

Из оценки (1.8) следует, что

$$\|\Delta A(t)\,A^{-1}(t)\| \leqslant c_2 |\Delta t|, \tag{1.19}$$

поэтому в силу (1.14)

$$\|\Delta A^{\alpha}(t)\, A^{-\beta}(t_0)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\Delta A^{\alpha}(t)\, A^{-\alpha_1}(t)\|\, \|A^{\alpha_1}(t)\, A^{-\beta}(t_0)\| \leqslant c_3 |\Delta t|. \qquad (1.20)$$

Далее, пусть $\alpha < \gamma < \delta$. Тогда

$$\|A^{\alpha}(t+\Delta t)\, R_{A(t+\Delta t)}(-s) - A^{\alpha}(t)\, R_{A(t)}(-s)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\Delta A^{\alpha}(t)\, A^{-\gamma}(t_0)\|\, \|A^{\gamma}(t_0)\, R_{A(t)}(-s)\| +$$
$$+ \|A^{\alpha}(t+\Delta t)\, R_{A(t+\Delta t)}(-s)\|\, \|\Delta A(t)\, A^{-1}(t)\| \times$$
$$\times \|A(t)\, R_{A(t)}(-s)\|.$$

В силу (1.17), (1.19), (1.20) и (1.13) получаем

$$\|A^{\alpha}(t+\Delta t)\, R_{A(t+\Delta t)}(-s) - A^{\alpha}(t)\, R_{A(t)}(-s)\| \leqslant c\, \frac{|\Delta t|}{(1+s)^{1-\delta}}, \qquad (1.21)$$

где константа c не зависит от t, s и Δt.

Лемма доказана.

Замечание 1.3. Из неравенства (1.21) и тождества

$$R_{A(t)}(-s-\Delta s) - R_{A(t)}(-s) =$$
$$= -\Delta s\, R_{A(t)}(-s-\Delta s)\, R_{A(t)}(-s)$$

вытекает, что операторная функция $(1+s)^{\nu} A^{\alpha}(t)\, R_{A(t)}(-s)$ при $\nu < 1-\alpha$ равномерно непрерывна по совокупности переменных s и t в полуполосе $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant s < \infty$.

Теорема 1.1. *Если оператор $A(t)$ имеет постоянную область определения, сильно непрерывно дифференцируем на $\mathscr{D}(A)$ и удовлетворяет условию* (1.13), *то оператор $A^{\alpha}(t)$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ сильно непрерывно дифференцируем на $\mathscr{D}(A^{\beta}(t_0))$ при всяком $\beta > \alpha$ и $t_0 \in [0, T]$, причем справедлива формула*

$$(A^{\alpha}(t)\, x)' = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^{\infty} s^{\alpha} R_{A(t)}(-s)\, A'(t)\, R_{A(t)}(-s)\, x\, ds. \qquad (1.22)$$

Доказательство. Выберем снова α_1 так, что $\alpha < \alpha_1 < \beta$. Пользуясь (1.18), вычисляем

$$\frac{\Delta A^{\alpha}(t)}{\Delta t} A^{-\alpha_1}(t) z -$$

$$- \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^{\infty} s^{\alpha} R_{A(t)}(-s) A'(t) A^{-\alpha_1}(t) R_{A(t)}(-s) z\, ds =$$

$$= \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^{\infty} s^{\alpha} [R_{A(t+\Delta t)}(-s) - R_{A(t)}(-s)] \times$$

$$\times \frac{\Delta A}{\Delta t} A^{-1}(t) A^{1-\alpha_1}(t) R_{A(t)}(-s) z\, ds +$$

$$+ \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^{\infty} s^{\alpha} R_{A(t)}(-s) \left[\frac{\Delta A}{\Delta t} A^{-1}(t) - A'(t) A^{-1}(t)\right] \times$$

$$\times A^{1-\alpha_1}(t) R_{A(t)}(-s) z\, ds = \mathcal{J}_1 z + \mathcal{J}_2 z. \tag{1.23}$$

Оценим интеграл $\mathcal{J}_1 z$. Вследствие неравенства (1.19) оператор $\frac{\Delta A}{\Delta t} A^{-1}(t)$ равномерно по t и Δt ограничен. Из этого же неравенства и (1.13) следует, что

$$\| R_{A(t+\Delta t)}(-s) - R_{A(t)}(-s) \| \leqslant \frac{c}{1+s} |\Delta t|.$$

Тогда с помощью (1.16) получаем

$$\| \mathcal{J}_1 z \| \leqslant c_1 |\Delta t| \int_0^{\infty} \frac{s^{\alpha}}{(1+s)^{1+\alpha_1}} ds \| z \| = c_2 \| z \| |\Delta t|,$$

т. е. операторы $\mathcal{J}_1$ при $\Delta t \to 0$ стремятся к нулю в смысле нормы операторов равномерно по t.

В интеграле $\mathcal{J}_2 z$ операторы

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} A^{-1}(t) - A'(t) A^{-1}(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [A'(\tau) - A'(t)] A^{-1}(t) dt$$

сильно и равномерно по t стремятся к нулю вследствие непрерывности функции $A'(\tau) A^{-1}(t)$ как функции двух переменных t и τ. Далее, в силу замечания 1.3 при $\alpha < \alpha_2 < \alpha_1$ функция $(1+s)^{\alpha_2} A^{1-\alpha_1}(t) R_{A(t)}(-s)$ равномерно непрерывна в полосе $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant s < \infty$ и, следовательно, множество ее значений компактно в E. Из этого следует, что

$$\left\| (1+s)^{\alpha_2} \left[\frac{\Delta A}{\Delta t} A^{-1}(t) - A'(t) A^{-1}(t) \right] A^{1-\alpha_1}(t) R_{A(t)}(-s) z \right\|$$

может быть сделана меньше любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малом Δt равномерно по t. Тогда

$$\|\mathcal{J}_2 z\| \leqslant \varepsilon \int_0^\infty \frac{s^\alpha}{(1+s)^{1+\alpha_2}} \, ds = c\varepsilon.$$

Таким образом, правая часть в (1.23) стремится к нулю равномерно по t, и значит,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A^\alpha}{\Delta t} A^{-\alpha_1}(t) z =$$
$$= \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty s^\alpha R_{A(t)}(-s) A'(t) A^{-\alpha_1}(t) R_{A(t)}(-s) z \, ds, \quad (1.24)$$

причем предел достигается равномерно по t.

Пусть $x \in \mathscr{D}(A^\beta(t_0))$. Тогда $x = A^{-\beta}(t_0) u$. В силу леммы 1.7 определены элементы $z(\tau) = A^{\alpha_1}(\tau) A^{-\beta}(t_0) u$, и в силу леммы 1.8 они образуют компактное множество при $0 \leqslant \tau \leqslant T$, поэтому

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A^\alpha}{\Delta t} A^{-\alpha_1}(t) z(\tau) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A^\alpha}{\Delta t} A^{-\alpha_1}(t) A^{\alpha_1}(\tau) A^{-\beta}(t_0) u$$

существует равномерно по t и τ. В частности, при $\tau = t$

$$(A^\alpha(t) x)' =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A^\alpha}{\Delta t} x = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty s^\alpha R_{A(t)}(-s) A'(t) R_{A(t)}(-s) x \, ds,$$

причем предел достигается равномерно по t на $[0, T]$. Так как функции

$$\frac{\Delta A^\alpha x}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [A^\alpha(t+\Delta t) - A^\alpha(t)] A^{-\beta}(t_0) u$$

непрерывны (лемма 1.8) по t, то их равномерный предел $(A^{\alpha}(t)x)'$ также будет непрерывной функцией.

Теорема доказана.

5. Дробные степени самосопряженного оператора, зависящего от параметра. В случае, когда $A(t)$ — самосопряженный положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H, результаты предыдущего пункта могут быть усилены. Без ограничения общности будем считать, что $(Ax, x) \geqslant (x, x)$, $x \in \mathscr{D}(A)$.

Следствие из теоремы 7.1 гл. I приводит нас к заключению, что оператор $A^{\alpha}(t)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ имеет область определения, не зависящую от t, оператор $A^{\alpha}(t)A^{-\alpha}(s)$ является ограниченным и

$$\|A^{\alpha}(t)A^{-\alpha}(s)\| \leqslant \|A(t)A^{-1}(s)\|^{\alpha}. \tag{1.25}$$

Далее, пусть оператор $A(t)$ удовлетворяет условиям леммы 1.5 и $\|A'(t)A^{-1}(\tau)\| \leqslant c_1$. Оператор $A'(t)$ на $\mathscr{D}(A)$ будет симметрическим оператором, поэтому при $y \in \mathscr{D}(A)$

$$|(x, A^{-1}(\tau)A'(t)y)| = |(A^{-1}(\tau)x, A'(t)y)| =$$
$$= |(A'(t)A^{-1}(\tau)x, y)| \leqslant c_1\|x\|\|y\|.$$

Отсюда следует, что

$$\|A^{-1}(\tau)A'(t)y\| \leqslant c_1\|y\|,$$

и, значит, оператор $A^{-1}(\tau)A'(t)$ допускает замыкание до определенного во всем пространстве ограниченного оператора $T = \overline{A^{-1}(\tau)A'(t)}$. При этом

$$M = \|T\| \leqslant \|A'(t)A^{-1}(\tau)\|. \tag{1.26}$$

Применим теперь к оператору T теорему 7.1 гл. I, полагая $H_1 = H$, $A = A(s)$, $B = A(\tau)$. Проверим условия теоремы. Оператор T ограничен. Далее, при $x \in \mathscr{D}(A)$

$$\|BTx\| = \|A'(t)x\| \leqslant \|A'(t)A^{-1}(s)\|\|A(s)x\| = M_1\|A(s)x\|, \tag{1.27}$$

т. е. выполнено условие (7.5). В силу утверждения теоремы 7.1

$$\| B^{\alpha} T x \| = \| A^{-(1-\alpha)}(\tau) A'(t) x \| \leqslant M^{1-\alpha} M_1^{\alpha} \| A^{\alpha}(s) x \|.$$

Делая замену $A^{\alpha}(s) x = z$, мы приходим к неравенству

$$\| A^{-(1-\alpha)}(\tau) A'(t) A^{-\alpha}(s) z \| \leqslant M^{1-\alpha} M_1^{\alpha} \| z \|,$$

справедливому при $z \in \mathscr{D}(A^{1-\alpha})$. Отсюда следует, что оператор $A^{-(1-\alpha)}(\tau) A'(t) A^{-\alpha}(s)$ допускает ограниченное замыкание. Используя неравенства (1.26) и (1.27), мы приходим к следующему утверждению

Лемма 1.9. *Если оператор $A(t)$ удовлетворяет условиям леммы 1.5 и является самосопряженным положительно определенным оператором, то оператор $A^{-(1-\gamma)}(\tau) \times A'(t) A^{-\gamma}(s)$ $(0 \leqslant \gamma \leqslant 1)$ допускает ограниченное замыкание, причем*

$$\| A^{-(1-\gamma)}(\tau) A'(t) A^{-\gamma}(s) \| \leqslant \| A'(t) A^{-1}(\tau) \|^{1-\gamma} \| A'(t) A^{-1}(s) \|^{\gamma}. \tag{1.28}$$

Покажем теперь, что оператор, заданный формулой (1.22), определен на $\mathscr{D}(A^{\alpha})$. Для этого рассмотрим оператор $Q = R_{A(t)}(-s) A'(t) A^{-\alpha}(t) R_{A(t)}(-s)$. При $x \in \mathscr{D}(A)$ и $y \in H$ имеем

$$\begin{aligned} |(Qx, y)| = \big| \big(A^{-(1-\gamma)}(t) A'(t) A^{-\gamma}(t) A^{\gamma-\alpha}(t) R_{A(t)}(-s) x, \\ A^{1-\gamma}(t) R_{A(t)}(-s) y \big) \big| \leqslant \| A'(t) A^{-1}(t) \| \times \\ \times \| A^{\gamma-\alpha}(t) R_{A(t)}(-s) x \| \| A^{1-\gamma}(t) R_{A(t)}(-s) y \|. \end{aligned}$$

Полагая $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$, получаем

$$\begin{aligned} |(Qx, y)| \leqslant \| A'(t) A^{-1}(t) \| \left\| A^{\frac{1-\alpha}{2}}(t) R_{A(t)}(-s) x \right\| \times \\ \times \left\| A^{\frac{1-\alpha}{2}}(t) R_{A(t)}(-s) y \right\|. \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_0^\infty s^\alpha |(Qx,\ y)|\,ds \leqslant \|A'(t)\,A^{-1}(t)\| \int_0^\infty s^\alpha \left\| A^{\frac{1-\alpha}{2}}(t) R_{A(t)}(-s)x \right\| \times$$

$$\times \left\| A^{\frac{1-\alpha}{2}}(t)\,R_{A(t)}(-s)\,y \right\| ds \leqslant \|A'(t)\,A^{-1}(t)\| \left[\int_0^\infty s^\alpha \left\| A^{\frac{1-\alpha}{2}}(t) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times R_{A(t)}(-s)\,x \right\|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^\infty s^\alpha \left\| A^{\frac{1-\alpha}{2}}(t)\,R_{A(t)}(-s)\,y \right\|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Для вычисления полученных справа интегралов воспользуемся спектральным разложением оператора $A(t)$. Имеем

$$\int_0^\infty s^\alpha \left\| A^{\frac{1-\alpha}{2}}(t)\,R_{A(t)}(-s)\,x \right\|^2 ds =$$

$$= \int_0^\infty s^\alpha \int_1^\infty \frac{\lambda^{1-\alpha}}{(\lambda+s)^2}\,d(E_\lambda x,\ x)\,ds =$$

$$= \int_1^\infty \lambda^{1-\alpha} \int_0^\infty \frac{s^\alpha}{(\lambda+s)^2}\,ds\,d(E_\lambda x,\ x) = \int_0^\infty \frac{\sigma^\alpha}{(1+\sigma)^2}\,d\sigma\,\|x\|^2.$$

Таким образом, при $x \in \mathscr{D}(A)$

$$|([A^\alpha(t)]'\,A^{-\alpha}(t)\,x,\ y)| =$$

$$= \left| \int_0^\infty s^\alpha (Qx,\ y)\,ds \right| \leqslant \|A'(t)\,A^{-1}(t)\| \int_0^\infty \frac{\sigma^\alpha\,d\sigma}{(1+\sigma)^2}\,\|x\|\,\|y\|.$$

Отсюда

$$\|[A^\alpha(t)]'\,A^{-\alpha}(t)\,x\| \leqslant \|A'(t)A^{-1}(t)\|\,C_\alpha \|x\|. \tag{1.29}$$

Из (1.25) и (1.29) следует:

$$\|[A^\alpha(t)]'\,A^{-\alpha}(\tau)\,x\| \leqslant C_\alpha \|A'(t)\,A^{-1}(t)\|\,\|A(t)\,A^{-1}(\tau)\|^\alpha\,\|x\|. \tag{1.30}$$

Пусть теперь $z \in \mathscr{D}(A^\alpha)$, тогда $z = A^{-\alpha}(\tau)x$. Аппроксимируем элемент x последовательностью $x_n \in \mathscr{D}(A)$. Из соотношений (1.25) и (1.30) вытекает, что последовательности функций $A^\alpha(t)A^{-\alpha}(\tau)x_n$ и их производных равномерно сходятся на $[0, T]$, поэтому функция $A^\alpha(t)A^{-\alpha}(\tau)x = A^\alpha(t)z$ непрерывно дифференцируема и

$$(A^\alpha(t)z)' = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty s^\alpha R_{A(t)}(-s) A'(t) R_{A(t)}(-s) z\, ds.$$

Мы пришли к следующей теореме:

Теорема 1.2. *Пусть положительно определенный самосопряженный оператор $A(t)$ имеет постоянную область определения и сильно непрерывно дифференцируем на ней, тогда оператор $A^\alpha(t)$ имеет постоянную область определения и сильно непрерывно дифференцируем на ней. Производная $[A^\alpha(t)]'$ задается формулой* (1.22).

§ 2. Уравнение с ограниченным оператором

1. Эволюционный оператор. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{2.1}$$

с ограниченным линейным оператором $A(t)$, сильно непрерывно зависящим от t. Из сильной непрерывности оператора $A(t)$ следует его равномерная на $[0, T]$ ограниченность, поэтому для уравнения (2.1) задача Коши разрешима при любом начальном условии $x(0) = x_0 \in E$. Это решение можно построить методом последовательных приближений, примененным к интегральному уравнению Вольтерра

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A(\tau)x(\tau)\,d\tau.$$

Обычным способом показывается единственность решения.

Для уравнений с переменными коэффициентами существенную роль играет значение t, при котором задаются начальные данные. В связи с этим обычно рассматривают *общую задачу Коши* с условием

$$x(s) = x_0, \tag{2.2}$$

где s — некоторое число на отрезке $[0, T]$. Значение решения $x(t, s)$ задачи (2.1) — (2.2) в момент t естественно обозначать так:

$$x(t,s) = U(t, s)\,x_0 \qquad (s \leqslant t \leqslant T).$$

Оператор $U(t, s)$ называют *эволюционным оператором.* Он будет линейным ограниченным оператором. Его можно построить методом последовательных приближений, исходя из интегрального уравнения Вольтерра

$$U(t, s) = I + \int_s^t A(\tau)\,U(\tau, s)\,d\tau. \tag{2.3}$$

Решение этого уравнения сильно дифференцируемо по t и будет являться решением задачи Коши

$$\frac{\partial U(t, s)}{\partial t} = A(t)\,U(t, s), \qquad U(s, s) = I \tag{2.4}$$

в пространстве ограниченных операторов, действующих в E.

Если рассмотреть решение интегрального уравнения

$$V(t, s) = I + \int_s^t V(t, \tau)\,A(\tau)\,d\tau, \tag{2.5}$$

то оно будет решением задачи Коши

$$\frac{\partial V}{\partial s} = -V(t, s)\,A(s), \qquad V(t, t) = I.$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial s}[V(t, s)\,U(s, \tau)] =$$
$$= -V(t, s)\,A(s)\,U(s, \tau) + V(t, s)\,A(s)\,U(s, \tau) = 0,$$

т. е. оператор $V(t, s)\,U(s, \tau)$ не зависит от s. Отсюда, полагая $s = \tau$, а затем $s = t$, получаем

$$V(t, \tau) = U(t, \tau). \tag{2.6}$$

Заменяя всюду $V(t, s)$ на $U(t, s)$, приходим к соотношениям

$$U(t, s)U(s, \tau) = U(t, \tau)$$

и

$$\frac{\partial U(t, s)}{\partial s} = -U(t, s)A(s), \qquad U(t, t) = I.$$

Равенство (2.6) одновременно доказывает единственность эволюционного оператора $U(t, s)$.

Очевидно, что в случае постоянного оператора $A(t) \equiv A$

$$U(t, s) = e^{(t-s)A}.$$

Заметим, что вместо условия сильной непрерывности оператора $A(t)$ можно рассмотреть менее ограничительное. Интегральное уравнение (2.3) имеет решение $U(t, s)$, если, например, оператор $A(t)$ сильно измерим, и его норма равномерно на $[0, T]$ ограничена (или ограничена суммируемой на $[0, T]$ функцией). Из (2.3) тогда следует сначала равномерная по t и s ограниченность оператора $U(t, s)$ $(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T)$, а затем и его непрерывность по t в норме операторов. Если теперь предположить, что оператор слабо непрерывен, то подынтегральная функция в (2.3) будет также слабо непрерывной и, следовательно, оператор $U(t, s)$ будет по t слабо дифференцируем и будет удовлетворять уравнению (2.4) в слабом смысле.

Аналогично можно рассмотреть уравнение (2.5) и показать, что решение его совпадает с решением уравнения (2.3), если оператор $A(t)$ слабо непрерывен.

2. Сравнение эволюционных операторов. Пусть, кроме уравнения (2.1), задано еще уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \tilde{A}(t)y \qquad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

где $\tilde{A}(t)$ также сильно непрерывен в E. Обозначим через $\tilde{U}(t, s)$ соответствующий эволюционный оператор. Вычисляем

$$\frac{\partial}{\partial \tau}[\tilde{U}(t, \tau)U(\tau, s)] = -\tilde{U}(t, \tau)[\tilde{A}(\tau) - A(\tau)]U(\tau, s).$$

Интегрируя в пределах от s до t, получаем

$$\tilde{U}(t, s) = U(t, s) + \int_s^t \tilde{U}(t, \tau)[\tilde{A}(\tau) - A(\tau)]\, U(\tau, s)\, d\tau. \tag{2.7}$$

Аналогично,

$$\tilde{U}(t, s) = U(t, s) + \int_s^t U(t, \tau)[\tilde{A}(\tau) - A(\tau)]\, \tilde{U}(\tau, s)\, d\tau. \tag{2.8}$$

Из этих тождеств вытекает оценка разности эволюционных операторов:

$$\|\tilde{U}(t, s) - U(t, s)\| \leqslant M\tilde{M} \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant T} \|\tilde{A}(\tau) - A(\tau)\| T, \tag{2.9}$$

где $M = \sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T} \|U(t, s)\|$ и $\tilde{M} = \sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T} \|\tilde{U}(t, s)\|$.

Из оценки (2.9) следует, что равномерная на $[0, T]$ сходимость операторов $A_n(t)$ влечет за собой равномерную в треугольнике $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ сходимость соответствующих эволюционных операторов $U_n(t, s)$. В дальнейшем, однако, условие равномерной сходимости операторов $A_n(t)$ у нас часто не будет выполняться, и полезной будет следующая условная теорема.

Теорема 2.1. *Пусть $A_n(t)$ — последовательность сильно непрерывных на $[0, T]$ линейных ограниченных операторов и $U_n(t, s)$ — последовательность отвечающих им эволюционных операторов. Пусть $B(t)$ — сильно непрерывный на $[0, T]$ оператор и $\tilde{U}_n(t, s)$ — эволюционные операторы, соответствующие операторам $\tilde{A}_n(t) = A_n(t) + B(t)$.*

Если последовательность операторов $U_n(t, s)$ равномерно ограничена, то и последовательность $\tilde{U}_n(t, s)$ равномерно ограничена.

Если последовательность $U_n(t, s)$ сильно и равномерно по t и s в треугольнике $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ сходится, то и последовательность $\tilde{U}_n(t, s)$ сильно и равномерно по t и s сходится в этом треугольнике

Доказательство. Для каждого $n=1, 2, \ldots$ можно записать тождество (2.8). Имеем

$$\tilde{U}_n(t, s)=U_n(t, s)+\int_s^t U_n(t, \tau)B(\tau)\tilde{U}_n(\tau, s)\,d\tau. \qquad (2.10)$$

Оператор $B(\tau)$ равномерно по τ ограничен, $\|B(\tau)\|\leqslant C$, и если $\|U_n(t, \tau)\|\leqslant M$, то

$$\|\tilde{U}_n(t, s)\|\leqslant M+MC\int_s^t \|\tilde{U}_n(\tau, s)\|\,d\tau,$$

откуда

$$\|\tilde{U}_n(t, s)\|\leqslant Me^{MCT}.$$

Первое утверждение теоремы доказано. Для доказательства второго введем в рассмотрение пространство $G(E)$, состоящее из сходящихся последовательностей $\hat{x}=\{x_n\}$ элементов пространства E, с нормой

$$\|\hat{x}\|=\sup_{1\leqslant n<\infty}\|x_n\|.$$

Операторы $U_n(t, s)$ естественно порождают оператор $\hat{U}(t, s)$ в пространстве $G(E)$ по формуле

$$\hat{U}(t, s)\hat{x}=\{U_n(t, s)x_n\}.$$

В силу сильной сходимости $U_n(t, s)$ последовательность $\{U_n(t, s)x_n\}\in G(E)$. Ограниченность оператора $\hat{U}(t, s)$ следует из равномерной ограниченности операторов $U_n(t, s)$. Оператор $\hat{U}(t, s)$ сильно непрерывен при $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$. Действительно, зафиксируем $\hat{x}\in G(E)$ и положим $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Так как функции $U_n(t, s)x_0$ равномерно сходятся к $U(t, s)x_0$, то они образуют равностепенно непрерывное семейство, т. е. для всякого $\varepsilon>0$ при $|h|, |k|<\delta(\varepsilon)$

$$\|U_n(t+h, s+k)x_0-U_n(t, s)x_0\|<\varepsilon/3 \qquad (n=1, 2, \ldots). \qquad (2.11)$$

При достаточно большом n $\|x_n-x_0\|<\varepsilon/3M$, поэтому из (2.11) при $n\geqslant N$ получим

$$\|U_n(t+h, s+k)x_n-U_n(t, s)x_n\|<\varepsilon. \qquad (2.12)$$

Для $n \leqslant N$ неравенство (2.12) справедливо при $|h|$, $|k| < \delta_1 \leqslant \delta$ в силу сильной непрерывности каждого из операторов $U_n(t, s)$. Таким образом, при $|h|$, $|k| < \delta_1$

$$\|\hat{U}(t+h, s+k)\hat{x} - \hat{U}(t, s)\hat{x}\| < \varepsilon.$$

Оператор $\hat{B}(\tau)$ определяется на пространстве $G(E)$ естественным образом: $\hat{B}(\tau)\hat{x} = \{B(\tau)x_n\}$. Он, очевидно, сильно непрерывен.

В пространстве $G(E)$ рассмотрим интегральное уравнение

$$\hat{H}(t, s) = \hat{U}(t, s) + \int_s^t \hat{U}(t, \tau)\hat{B}(\tau)\hat{H}(\tau, s)\,d\tau.$$

Методом последовательных приближений можно найти непрерывное в треугольнике $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ решение этого уравнения. Так как операторы $\hat{U}$ и $\hat{B}$ действуют на каждую координату $\hat{x}$ независимо, то таким же свойством будет обладать оператор $\hat{H}$, т. е. $\hat{H}(t, s)\hat{x} = \{H_n(t, s)x_n\}$. Очевидно, что операторы $H_n(t, s)$ будут удовлетворять интегральным уравнениям (2.10) и в силу единственности решений этих уравнений $H_n(t, s) \equiv \tilde{U}_n(t, s)$. Итак, $\hat{H}(t, s)\hat{x} = \{\tilde{U}_n(t, s)x_n\} \in G(E)$ при $\hat{x} \in G(E)$. Пусть x — любой элемент из E. Выберем $\hat{x} = \{x\}$; тогда из непрерывности функции $\hat{H}(t, s)\hat{x}$ следует равностепенная непрерывность функций $H_n(t, s)x$ в треугольнике $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, а из принадлежности $\hat{H}(t, s)\hat{x}$ пространству $G(E)$ — сходимость последовательности $H_n(t, s)x$ при каждых t и s. Из этих двух фактов вытекает сильная сходимость последовательности $H_n(t, s)$ равномерно по t и s в треугольнике $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Теорема доказана.

Замечание 2.1. Утверждения теоремы остаются справедливыми, если операторы $\tilde{A}_n(t)$ будут иметь вид $\tilde{A}_n(t) = A_n(t) + B_n(t)$, где $B_n(t)$ — последовательность сильно непрерывных операторов, сильно и равномерно на $[0, T]$ сходящихся к оператору $B(t)$.

Замечание 2.2. В условиях теоремы 2.1 и предыдущего замечания можно сильную непрерывность операторов $A_n(t)$ и $B_n(t)$ заменить на слабую.

§ 3. Равномерно корректная задача Коши

1. Задача Коши; эволюционный оператор. Перейдем к рассмотрению дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{3.1}$$

с неограниченным оператором $A(t)$. Предполагается, что операторы $A(t)$ при всех $t \in [0, T]$ имеют общую плотную в E область определения $\mathscr{D}(A(t)) \equiv \mathscr{D}(A)$ и замкнуты.

Определение 3.1. *Решением уравнения* (3.1) на отрезке $[s, T]$ $(0 \leqslant s < T)$ называется функция $x(t)$ со значениями в $\mathscr{D}(A)$, имеющая сильную производную $x'(t)$ и удовлетворяющая (3.1) на отрезке $[s, T]$.

Под *задачей Коши в треугольнике* T_Δ: $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ понимается задача о нахождении при каждом фиксированном $s \in [0, T)$ решения $x(t, s)$ уравнения (3.1) на отрезке $[s, T]$, удовлетворяющего заданному начальному условию

$$x(s, s) = x_0 \in \mathscr{D}(A). \tag{3.2}$$

Определение 3.2. Задача Коши (3.1) — (3.2) называется *равномерно корректной*, если

1) При каждом $s \in [0, T]$ и любом $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ существует единственное решение $x(t, s)$ уравнения (3.1) на отрезке $[s, T]$, удовлетворяющее условию (3.2).

2) Функция $x(t, s)$ и ее производная $x'_t(t, s)$ непрерывны по совокупности переменных в треугольнике T_Δ.

3) Решение непрерывно зависит от начальных данных в том смысле, что из сходимости $x_{0, n} \in \mathscr{D}(A)$ к нулю следует равномерная по t и s в T_Δ сходимость к нулю соответствующих решений $x_n(t, s)$.

Если задача Коши равномерно корректна, то можно ввести линейный оператор $U(t, s)$, $(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T)$, ставящий в соответствие каждому элементу $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ значение в точке t решения задачи (3.1) — (3.2) на отрезке $[s, T]$:

$$x(t, s) = U(t, s)\,x_0.$$

Оператор $U(t, s)$ определен на $\mathscr{D}(A)$. При фиксированных t и s он ограничен и, следовательно, допускает расширение по непрерывности на все пространство E, которое обозначается также через $U(t, s)$. Операторы $U(t, s)$ равномерно ограничены. В противном случае существовала бы последовательность $x_{0,\,n} \in \mathscr{D}(A)$, сходящаяся к нулю и последовательность пар чисел s_n, t_n такие, что $U(t_n, s_n)\,x_{0,\,n} \to \infty$, что противоречит равномерной корректности задачи. Операторы $U(t, s)$ отображают $\mathscr{D}(A)$ в $\mathscr{D}(A)$. Для них справедливо следующее композиционное свойство:

$$U(t, \tau)\,U(\tau, s) = U(t, s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T). \tag{3.3}$$

Действительно, при $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ элемент $U(\tau, s)\,x_0 \in \mathscr{D}(A)$. Функции $U(t, s)\,x_0$ и $U(t, \tau)\,U(\tau, s)\,x_0$ на отрезке $[\tau, T]$ являются решениями уравнения (3.1) с одинаковым начальным значением $U(\tau, s)\,x_0$ и поэтому совпадают. Из ограниченности операторов, стоящих слева и справа в (3.3), и совпадения их значений на плотном множестве $\mathscr{D}(A)$ следует их тождественность.

Оператор $U(t, s)$ сильно непрерывен по t и s в T_Δ, что следует из требования 2) равномерной корректности и равномерной по t и s ограниченности $U(t, s)$.

При $x \in \mathscr{D}(A)$ функция $U(t, s)\,x$ дифференцируема по t при каждом s и

$$\frac{\partial U(t, s)\,x}{\partial t} = A(t)\,U(t, s)\,x. \tag{3.4}$$

В силу 2) оператор $A(t)\,U(t, s)$ сильно непрерывен по t и s на $\mathscr{D}(A)$.

Исследуем свойства функции $U(t, s)\,x$ при фиксированном t. В силу (3.3) при $\Delta s > 0$ имеем

$$\frac{1}{\Delta s}\,[U(t, s+\Delta s) - U(t, s)]\,x = \\ = -U(t, s+\Delta s)\,\frac{U(s+\Delta s, s) - I}{\Delta s}\,x.$$

При $x \in \mathscr{D}(A)$ и $\Delta s \to 0$ предел правой части существует и равен $-U(t, s)\,A(s)\,x$ согласно (3.4), поэтому существует предел левой части, т. е. функция $U(t, s)\,x$ при $t > s$ имеет правую производную

$$\frac{\partial_+ U(t, s)\,x}{\partial s} = -U(t, s)\,A(s)\,x.$$

Если предположить, что оператор $A(s)$ сильно непрерывен на $\mathscr{D}(A)$ при $s \in [0, T]$, то правая производная функции

$U(t, s)x$ будет непрерывной на полуинтервале $0 \leqslant s < t$, и следовательно, функция $U(t, s)x$ дифференцируема по s на $[0, t)$. В точке $s = t$ она будет иметь левую производную $-A(t)x$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим функции $U(\tau, s)x$ при $\tau > t$. Эти функции дифференцируемы по s уже на отрезке $[0, t]$. Они стремятся при $\tau \to t$ равномерно по s на $[0, t]$ к функции $U(t, s)x$, а их производные $-U(\tau, s)A(s)x$ — к функции $-U(t, s)A(s)x$. (Равномерная по s сходимость следует из компактности множества $\{A(s)x\}$ $(0 \leqslant s \leqslant t)$). Таким образом, при $0 \leqslant s \leqslant t$

$$\frac{\partial U(t, s)x}{\partial s} = -U(t, s)A(s)x. \tag{3.5}$$

В дальнейшем оператор $U(t, s)$ для равномерно корректной задачи Коши называется *эволюционным.*

Если наряду с уравнением (3.1) рассмотреть уравнение

$$\frac{dy}{dt} = [A(t) - \lambda_0 I]\, y(t), \tag{3.6}$$

то решения задачи Коши с одним и тем же начальным значением связаны соотношением

$$x(t, s) = e^{\lambda_0(t-s)} y(t, s). \tag{3.7}$$

Поэтому из равномерной корректности задачи Коши для одного из уравнений (3.1) и (3.6) следует ее равномерная корректность для другого и соответствующие эволюционные операторы $U(t, s)$ и $U_{\lambda_0}(t, s)$ связаны равенством

$$U(t, s) = e^{\lambda_0(t-s)} U_{\lambda_0}(t, s). \tag{3.8}$$

Если все операторы $A(t)$ имеют общую регулярную точку и резольвенты их в этой точке равномерно по $t \in [0, T]$ ограничены, то после замены (3.7) мы придем к уравнению, в котором операторы имеют равномерно по $t \in [0, T]$ ограниченные обратные. В дальнейшем мы часто будем сразу предполагать, что такая замена уже сделана.

Итак, предположим, что оператор $A(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ сильно непрерывен на $\mathscr{D}(A)$ и имеет ограниченный обратный, такой, что выполнено условие (1.1). Предполагая, что задача Коши равномерно корректна, выпишем свойства эволюционного оператора.

Свойства эволюционного оператора равномерно корректной задачи Коши:

1°. *Оператор $U(t, s)$ является ограниченным в E равномерно по t и s:*

$$\|U(t, s)\| \leqslant M \qquad (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T). \tag{3.9}$$

2°. *Оператор $U(t, s)$ сильно непрерывен в треугольнике T_Δ: $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.*

3°. *Справедливо тождество*

$$U(t, s) = U(t, \tau) U(\tau, s), \quad U(t, t) = I \quad (0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T). \tag{3.10}$$

4°. *Оператор $U(t, s)$ отображает область $\mathscr{D}(A)$ в себя, оператор*

$$V(t, s) = A(t) U(t, s) A^{-1}(s) \tag{3.11}$$

ограничен и сильно непрерывен в треугольнике T_Δ.

5°. *На области $\mathscr{D}(A)$ оператор $U(t, s)$ сильно дифференцируем по t и по s, причем*

$$\frac{\partial U(t, s)}{\partial t} = A(t) U(t, s) \quad \text{и} \quad \frac{\partial U(t, s)}{\partial s} = -U(t, s) A(s). \tag{3.12}$$

2. Неоднородное уравнение. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x + f(t), \tag{3.13}$$

где $f(t)$ — непрерывная на $[0, T]$ функция.

Определение решения этого уравнения вполне аналогично определению 3.1. Между решениями уравнений (3.1) и (3.13) имеется связь, уже отмечавшаяся для уравнений с постоянными коэффициентами.

Теорема 3.1. *Если задача Коши для однородного уравнения* (3.1) *равномерно корректна и оператор $A(t)$ сильно непрерывен на $\mathscr{D}(A)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, то всякое решение уравнения* (3.13) *представимо в виде*

$$x(t, s) = U(t, s) x(s, s) + \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) d\tau. \tag{3.14}$$

Доказательство. К обеим частям тождества

$$\frac{dx(\tau, s)}{d\tau} = A(\tau)\,x(\tau, s) + f(\tau)$$

применим ограниченный оператор $U(t, \tau)$. Тогда, пользуясь (3.5), получим

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\bigl(U(t, \tau)\,x(\tau, s)\bigr) = U(t, \tau)\,f(\tau).$$

Интегрируя по τ в пределах от s до t, получим (3.14).

Теорема доказана.

Для доказательства существования решений уравнения (3.13) нам придется на оператор $A(t)$ и функцию $f(t)$ наложить дополнительные условия. При этом решение естественно будет искаться в виде (3.14), а так как первое слагаемое справа в (3.14) является решением однородного уравнения, то достаточно будет показать, что интегральный член является решением уравнения (3.13).

Теорема 3.2. *Если для однородного уравнения* (3.1) *задача Коши равномерно корректна так, что эволюционный оператор обладает свойствами* 1°—5°, *и функция* $f(t)$ *такова, что определена и непрерывна функция* $A(t)\,f(t)$, *то формула*

$$y(t, s) = \int_s^t U(t, \tau)\,f(\tau)\,d\tau \tag{3.15}$$

дает решение неоднородного уравнения (3.13).

Доказательство. Из свойства 4° эволюционного оператора следует, что определена и непрерывна функция

$$A(t)\,y(t, s) = \int_s^t V(t, \tau)\,A(\tau)\,f(\tau)\,d\tau.$$

Вычисляем при $\Delta t > 0$

$$\frac{1}{\Delta t}\,[y(t+\Delta t, s) - y(t, s)] =$$
$$= \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} [U(t+\Delta t, \tau) - U(t, \tau)]\,f(\tau)\,d\tau +$$
$$+ \frac{U(t+\Delta t, t) - I}{\Delta t}\,y(t, s) + \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} U(t, \tau)\,f(\tau)\,d\tau.$$

Первый интеграл стремится к нулю в силу того, что оператор $U(t+\Delta t, \tau)-U(t, \tau)$ сильно и равномерно по τ стремится к нулю на компактном множестве значений непрерывной функции $f(\tau)$. Второй интеграл стремится к $A(t)y(t, s)$ вследствие принадлежности $y(t, s)$ множеству $\mathscr{D}(A)$ и свойства 5°. Последний интеграл, очевидно, стремится к $f(t)$. Итак, существует правая производная функции

$$\frac{d_+ y}{dt}=A(t)\,y(t, s)+f(t).$$

Из сказанного ранее следует, что эта производная непрерывна, и значит, совпадает с левой производной.

Теорема доказана.

Как уже говорилось в § 6 гл. I, условия принадлежности значений $f(t)$ к области определения оператора $A(t)$ являются часто неестественными, поэтому представляет интерес

Теорема 3.3. *Если оператор $A(t)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и, кроме того, непрерывно дифференцируем на $\mathscr{D}(A)$, а функция $f(t)$ имеет непрерывную производную, то формула* (3.15) *дает решение уравнения* (3.13).

Доказательство. Преобразуем формулу (3.15), используя второе из свойств 5°. Имеем

$$y(t, s)=\int_s^t U(t, \tau)\,A(\tau)\,A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\,d\tau=$$

$$=-\int_s^t \frac{\partial U(t, \tau)}{\partial\tau}\,A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\,d\tau=$$

$$=U(t, s)\,A^{-1}(s)\,f(s)-A^{-1}(t)\,f(t)+$$

$$+\int_s^t U(t, \tau)\,\frac{d}{d\tau}\left[A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\right]d\tau.$$

Функция $\varphi(\tau)=\frac{d}{d\tau}\left[A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\right]$ обладает тем свойством, что функция $A(\tau)\,\varphi(\tau)=f'(\tau)-A'(\tau)\,A^{-1}(\tau)$ непрерывна. Поэтому последний интеграл $z(t, s)$ имеет производную, равную

$A(t)\,z(t,\ s)+\varphi(t)$. Внеинтегральные члены также дифференцируемы. Непосредственная проверка показывает, что $y(t,\ s)$ удовлетворяет уравнению (3.13).

Теорема доказана.

3. Возмущенное уравнение. Предположим, что в уравнении

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\,x+B(t)\,x \tag{3.16}$$

оператор $B(t)$ и оператор $A(t)\,B(t)\,A^{-1}(t)$ ограничены и сильно непрерывны по $t\in[0,\ T]$. Пусть $x_0\in\mathscr{D}(A)$. Обозначим $A(s)\,x_0=y_0$ и рассмотрим интегральное уравнение

$$y(t,\ s)=V(t,\ s)\,y_0+\int\limits_s^t V(t,\ \tau)\,A(\tau)\,B(\tau)\,A^{-1}(\tau)\,y(\tau,\ s)\,d\tau$$

с сильно непрерывным ядром. Введя функцию $x(t,\ s)=A^{-1}(t)\,y(t,\ s)$, получим

$$x(t,\ s)=U(t,\ s)\,x_0+\\+\int\limits_s^t U(t,\ \tau)\,A^{-1}(\tau)\,A(\tau)\,B(\tau)\,A^{-1}(\tau)\,y(\tau,\ s)\,d\tau.$$

Из теоремы 3.2 следует, что

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\,x(t,\ s)+B(t)\,A^{-1}(t)\,y(t,\ s)=A(t)\,x+B(t)\,x.$$

Таким образом, решение задачи Коши для уравнения (3.16) с условием $x(0)=x_0\in\mathscr{D}(A)$ существует. Оно единственно, так как из теоремы 3.1 вытекает, что всякое решение задачи Коши для уравнения (3.16) удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t,\ s)=U(t,\ s)\,x_0+\int\limits_s^t U(t,\ \tau)\,B(\tau)\,x(\tau,\ s)\,d\tau,$$

которое имеет единственное непрерывное решение. Из этого интегрального уравнения также видна непрерывная зависимость решений $x(t,\ s)$ от начальных данных. Наконец, из непрерывности функции $y(t, s)$ по совокупности переменных в треугольнике T_Δ следует, что функции $x(t, s) = A^{-1}(t)\, y(t, s)$ и $x'_t(t, s) = y(t, s) + B(t)\, A^{-1}(t)\, y(t, s)$ непрерывны в T_Δ.

Мы пришли к следующему утверждению:

Теорема 3.4. *Если задача Коши для уравнения* (3.1) *равномерно корректна, выполнено условие* (1.1) *и операторы $B(t)$ и $A(t)\, B(t)\, A^{-1}(t)$ ограничены и сильно непрерывны по t, то задача Коши для уравнения* (3.16) *равномерно корректна.*

4. Устойчивая аппроксимация эволюционного оператора. Рассмотрим семейство уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A_n(t)\, x \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ 0 \leqslant t \leqslant T) \tag{3.17}$$

с ограниченными сильно-непрерывными операторами.

Предположим, что операторы $A_n(t)$ на $\mathscr{D}(A)$ сильно и равномерно по $t \in [0, T]$ сходятся к оператору $A(t)$, удовлетворяющему условию (1.1). В силу леммы 1.2 операторы $[A(t) - A_n(t)]\, A^{-1}(t)$ будут сильно стремиться к нулю на всем пространстве E равномерно по $t \in [0, T]$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left\| [A(t) - A_n(t)]\, A^{-1}(t)\, x \right\| = 0 \qquad (x \in E). \tag{3.18}$$

Из этого, в частности, вытекает, что

$$\left\| [A(t) - A_n(t)]\, A^{-1}(t) \right\| \leqslant M, \tag{3.19}$$

где M не зависит от n и $t \in [0, T]$.

Эволюционные операторы, отвечающие уравнениям (3.17), обозначим через $U_n(t, s)$.

Лемма 3.1. *Пусть эволюционные операторы $U_n(t, s)$ равномерно ограничены по n, t и s. Если выполнено условие* (3.18) *и $x(t, s)$ — какое-либо решение задачи* (3.1)—(3.2), *то для него справедлива формула*

$$x(t, s) = \lim_{n\to\infty} U_n(t, s)\, x_0, \tag{3.20}$$

причем предел существует равномерно по t и s в треугольнике T_Δ. Таким образом, решение задачи (3.1) — (3.2) *единственно.*

Доказательство. Из тождества

$$\frac{dx(t, s)}{dt} = A_n(t)\,x(t, s) + [A(t) - A_n(t)]\,x(t, s)$$

получаем

$$x(t, s) = U_n(t, s)\,x_0 + \\ + \int_s^t U_n(t, \tau)\,[A(\tau) - A_n(\tau)]\,A^{-1}(\tau)\,A(\tau)\,x(\tau, s)\,d\tau.$$

Операторы $[A(\tau) - A_n(\tau)]\,A^{-1}(\tau)$ при $n \to \infty$ сильно и равномерно по τ сходятся к нулю на всем пространстве E. Значит, они сходятся к нулю равномерно на компактном множестве значений непрерывной функции $A(\tau)\,x(\tau, s)$. Из этого следует, что функции $[A(\tau) - A_n(\tau)]\,x(\tau, s)$ равномерно по s и τ в T_Δ сходятся к нулю. В силу предположения о равномерной ограниченности операторов $U_n(t, s)$ отсюда будет следовать равномерная по t и s сходимость к нулю интегральных членов.

Лемма доказана.

Определение 3.3. Если существует последовательность ограниченных сильно непрерывных операторов $A_n(t)$, для которых выполнено условие (3.18) и условие равномерной ограниченности эволюционных операторов

$$\|U_n(t, s)\| \leqslant M \qquad (M \text{ не зависит от } n,\ t \text{ и } s), \tag{3.21}$$

то будем говорить, что оператор $A(t)$ *устойчиво аппроксимируется операторами* $A_n(t)$.

Из леммы 3.1 непосредственно вытекает следующее предложение:

Теорема 3.5. *Если для оператора $A(t)$ задача Коши равномерно корректна и он устойчиво аппроксимируется операторами $A_n(t)$, то эволюционные операторы $U_n(t, s)$ сильно и равномерно по t и s сходятся к эволюционному оператору $U(t, s)$.*

Доказательство. Из леммы 3.1 следует, что $U_n(t, s)\,x$ равномерно по t и s сходится к $U(t, s)\,x$ при $x \in \mathscr{D}(A)$. В силу равномерной ограниченности операторов $U_n(t, s)$ это обстоятельство будет иметь место и при любом $x \in E$.

Теорема доказана.

Эта теорема допускает следующее неполное обращение:

Теорема 3.6. *Пусть оператор $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем на $\mathscr{D}(A)$, имеет ограниченный обратный и устойчиво аппроксимируется операторами $A_n(t)$, которые при каждом $t \in [0, T]$ коммутируют с $A(t)$ на $\mathscr{D}(A)$.*

Если эволюционные операторы $U_n(t, s)$ сильно и равномерно по t и s сходятся при $n \to \infty$ к оператору $U(t, s)$, то задача Коши для уравнения (3.1) *равномерно корректна и $U(t, s)$ является отвечающим ей эволюционным оператором.*

Доказательство. Рассмотрим уравнения

$$\frac{dy}{dt} = A_n(t)\, y + A'(t)\, A^{-1}(t)\, y. \tag{3.22}$$

Из непрерывной дифференцируемости $A(t)$ на $\mathscr{D}(A)$ следует сильная непрерывность оператора $A'(t)\, A^{-1}(t)$ (лемма 1.5). Обозначим через $V_n(t, s)$ эволюционные операторы, отвечающие уравнениям (3.22). По теореме 2.1 операторы $V_n(t, s)$ сильно и равномерно по t и s стремятся к пределу, который обозначим через $V(t, s)$. Оператор $V(t, s)$ сильно непрерывен по t и s в T_Δ.

В уравнении (3.22) сделаем замену $A^{-1}(t)\, y(t, s) = x(t, s)$. Тогда

$$\frac{dx}{dt} = A^{-1}(t) \frac{dy}{dt} - A^{-1}(t)\, A'(t)\, A^{-1}(t)\, y =$$
$$= A^{-1}(t)\, A_n(t)\, y = A_n(t)\, x.$$

В силу единственности решения уравнения (3.17)

$$A^{-1}(t)\, y(t, s) = x(t, s) = U_n(t, s)\, x(s, s),$$

откуда

$$y(t, s) = A(t)\, U_n(t, s)\, x(s, s) = A(t)\, U_n(t, s)\, A^{-1}(s)\, y(s, s)$$

или, иначе,

$$V_n(t, s) = A(t)\, U_n(t, s)\, A^{-1}(s).$$

Так как $U_n(t, s)$ сходятся к $U(t, s)$, а $V_n(t, s)$ — к $V(t, s)$, то в силу замкнутости оператора $A(t)$

$$V(t, s) = A(t)\, U(t, s)\, A^{-1}(s).$$

Пусть $x_0 \in D(A)$ и $A(s)x_0 = y_s$. Из леммы 3.1 следует, что уравнение (3.1) может иметь лишь единственное решение, определяемое формулой (3.20). Покажем, что эта формула действительно определяет решение задачи (3.1) — (3.2). Функция $U_n(t, s)x_0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dU_n(t, s)\,x_0}{dt} = A_n(t)\,U_n(t, s)\,x_0 = A_n(t)\,A^{-1}(t)\,V_n(t, s)\,y_s.$$

В силу (3.18) операторы $A_n(t)\,A^{-1}(t)$ сильно и равномерно по t на $[s, T]$ стремятся к единичному оператору, поэтому производные $\frac{dU_n(t, s)\,x_0}{dt}$ равномерно по t стремятся к функции $V(t, s)\,y_s = A(t)\,U(t, s)\,x_0$. В силу замкнутости операции дифференцирования

$$\frac{dU(t, s)\,x_0}{dt} = A(t)\,U(t, s)\,x_0,$$

т. е. функция $x(t, s) = U(t, s)\,x_0$ является решением уравнения (3.1) на $[s, T]$. Очевидно, $x(s, s) = U(s, s)\,x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(s, s)\,x_0 = x_0$, т. е. $x(t, s)$ есть решение задачи Коши.

Свойства 2) и 3) определения 3.2 вытекают из ограниченности и сильной непрерывности операторов $U(t, s)$ и $V(t, s)$.

Теорема доказана.

Замечание 3.1. Функция $V(t, s)$ связана с функцией $U(t, s)$ интегральным соотношением

$$V(t, s) = U(t, s) + \int_s^t U(t, \tau)\,A'(\tau)\,A^{-1}(\tau)\,V(\tau, s)\,d\tau.$$

Действительно, решив уравнение (3.22), рассматривая при этом $A'(t)\,A^{-1}(t)\,y(t)$ как известную функцию, получим

$$y(t) = U_n(t, s)\,y(s, s) + \int_s^t U_n(t, \tau)\,A'(\tau)\,A^{-1}(\tau)\,y(\tau)\,d\tau,$$

или

$$V_n(t, s) = U_n(t, s) + \int_s^t U_n(t, \tau)\,A'(\tau)\,A^{-1}(\tau)\,V_n(\tau, s)\,d\tau.$$

Отсюда требуемое соотношение получается предельным переходом.

5. Возмущенное уравнение и повышение гладкости решений. К вопросу о корректности задачи Коши для уравнения (3.16) можно подойти теперь с другой стороны. Если оператор $A(t)$ устойчиво аппроксимируется ограниченными операторами $A_n(t)$, то оператор $A(t)+B(t)$, где $B(t)$ — ограниченный сильно непрерывный оператор, устойчиво аппроксимируется операторами $A_n(t)+B(t)$. Это снова следует из теоремы 2.1, примененной к уравнениям

$$\frac{dx}{dt}=A_n(t)\,x+B(t)\,x. \tag{3.23}$$

Далее, если $U_n(t, s)$ сильно и равномерно сходятся к $U(t, s)$, то эволюционные операторы $\widetilde{U}_n(t, s)$, отвечающие уравнениям (3.23), сильно и равномерно сходятся к $\widetilde{U}(t, s)$. Таким образом, к уравнению (3.16) можно непосредственно применять теорему 3.6, рассматривая сумму $A(t)+B(t)$ как один оператор.

На этом пути мы придем к следующему утверждению:

Теорема 3.7. *Если оператор* $A(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3.6, *а оператор* $B(t)$ *ограничен, сильно непрерывен при* $t\in[0, T]$ *и сильно дифференцируем на* $\mathscr{D}(A)$, *то задача Коши для уравнения* (3.16) *равномерно корректна.*

Используя теоремы 3.4 и 3.7 о возмущенном уравнении, можно получать теоремы о существовании решений уравнения (3.1) с повышенной гладкостью.

Теорема 3.8. *Пусть оператор* $A(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3.6. *Пусть, кроме того, справедливо одно из двух*:

1°. *Оператор* $A(t)\,A'(t)\,A^{-2}(t)$ *определен, ограничен и сильно непрерывен при* $t\in[0, T]$.

2°. *Оператор* $A(t)$ *дважды непрерывно дифференцируем на* $\mathscr{D}(A)$.

Тогда при $x_0\in\mathscr{D}(A^2(s))$ *) *решение задачи* (3.1) — (3.2) *дважды непрерывно дифференцируемо.*

*) Отметим, что квадраты операторов $A(t)$ могут уже при различных s иметь различные области определения.

Доказательство. Применим теоремы 3.4 или 3.7 соответственно к уравнению

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y + A'(t)\,A^{-1}(t)\,y. \tag{3.24}$$

Из них вытекает, что в предположениях 1° или 2° задача Коши для этого уравнения равномерно корректна. Пусть $x_0 \in \mathscr{D}(A^2(s))$ при некотором $s \in [0, T]$. Обозначим $y_0 = A(s)\,x_0$. Очевидно, что $y_0 \in \mathscr{D}(A)$. Построим решение $y(t, s)$ уравнения (3.24) с начальным значением $y(s, s) = y_0$ и обозначим $x(t, s) = A^{-1}(t)\,y(t)$. Так же как при доказательстве теоремы 3.6, проверяется, что $x(t, s)$ есть решение задачи (3.1)—(3.2). Далее,

$$\frac{dx(t, s)}{dt} = A(t)\,x(t, s) = y(t, s),$$

и, так как $y(t, s)$ непрерывно дифференцируема по t, то функция $x(t, s)$ дважды непрерывно дифференцируема по t.

Теорема доказана.

Приведем еще одно утверждение о повышении гладкости решения, которое мы используем в следующей главе.

Теорема 3.9. *Пусть оператор $A(t)$ такой же, как и в теореме* 3.8 *с условием* 1°. *Пусть операторы $B(t)$, $A(t)\,B(t)\,A^{-1}(t)$ и $A^2(t)\,B(t)\,A^{-2}(t)$ определены, ограничены и сильно непрерывны при $t \in [0, T]$. Тогда решение $x(t, s)$ уравнения* (3.16) *с начальным значением $x_0 \in \mathscr{D}(A^2(s))$ обладает тем свойством, что функция $A(t)\,x(t, s)$ непрерывно дифференцируема.*

Доказательство. Составим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y + A(t)\,B(t)\,A^{-1}(t)\,y + A'(t)\,A^{-1}(t)\,y.$$

Из наших предположений и теоремы 3.4 вытекает, что это уравнение имеет непрерывно дифференцируемое на $[0, T]$ решение при начальном условии $y(0) = y_0 \in \mathscr{D}(A)$. Полагая $y_0 = A(s)\,x_0$ при $x_0 \in \mathscr{D}(A^2(s))$, получаем, что $y(t) = A(t)\,x(t, s)$, откуда следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

6. Уравнение с производящим оператором сжимающей полугруппы. В этом пункте мы укажем класс операторов, для которых удается проверить условия теоремы 3.6.

Имеет место следующая теорема единственности:

Теорема 3.10. *Если для уравнения* (3.1) *резольвента оператора* $A(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\| R_{A(t)}(\lambda) \| \leqslant \frac{1}{\lambda} \quad \textit{при} \quad \lambda > 0, \tag{3.25}$$

то решение задачи Коши единственно и справедливо неравенство

$$\| x(t, s) \| \leqslant \| x(s, s) \| \qquad (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T). \tag{3.26}$$

Доказательство. Очевидно, что первое утверждение теоремы следует из второго. Для вывода неравенства (3.26) заметим, что по определению решения

$$\frac{x(t+\varepsilon, s) - x(t, s)}{\varepsilon} \to A(t)\, x(t, s) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

поэтому

$$x(t+\varepsilon, s) = (I + \varepsilon A(t))\, x(t, s) + o(\varepsilon) =$$
$$= (I - \varepsilon^2 A^2(t))(I - \varepsilon A(t))^{-1} x(t, s) + o(\varepsilon) =$$
$$= (I - \varepsilon A(t))^{-1} x(t, s) -$$
$$- \varepsilon^2 A(t)(I - \varepsilon A(t))^{-1} A(t)\, x(t, s) + o(\varepsilon).$$

Будем считать $\varepsilon > 0$. Тогда в силу (3.25)

$$\| (I - \varepsilon A(t))^{-1} \| = \frac{1}{\varepsilon} \left\| R_{A(t)}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right\| \leqslant 1.$$

Отсюда

$$\| x(t+\varepsilon, s) \| \leqslant \| x(t,s) \| + \varepsilon \left\| A(t) R_{A(t)}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) A(t)\, x(t, s) \right\| + o(\varepsilon).$$

Далее, операторы $A(t) R_{A(t)}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ равномерно по ε ограничены, стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$ на элементах из $\mathscr{D}(A)$ и, следовательно, сильно сходятся к нулю (подробнее см. § 2, гл. I). Таким образом,

$$\frac{\| x(t+\varepsilon, s) \| - \| x(t, s) \|}{\varepsilon} \leqslant \left\| A(t) R_{A(t)}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) A(t)\, x(t, s) \right\| + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0.$$

Из этого соотношения вытекает, что верхняя правая производная от функции $\varphi(t)=\|x(t,\ s)\|$ неположительна. Функция $\varphi(t)$ непрерывна, и значит, она не возрастает.

Неравенство (3.26) и теорема доказаны.

Замечание 3.1. Как видно из доказательства, мы использовали лишь тот факт, что правая производная функции $x(t)$ равна $A(t)\,x(t)$.

Замечание 3.2. Если оператор $A(t)$ удовлетворяет условию

$$\|R_{A(t)}(\lambda)\|\leqslant\frac{1}{\lambda-\omega}\quad\text{при}\quad\lambda>\omega,$$

то замена (3.7) с $\lambda_0=\omega$ приводит к оценке

$$\|x(t,\ s)\|\leqslant e^{\omega(t-s)}\|x(s,\ s)\|.$$

Предполагая выполнение (3.25), построим операторы

$$A_n(t)=-nA(t)\,R_{A(t)}(n). \tag{3.27}$$

Очевидно, эти операторы коммутируют с $A(t)$ на $\mathscr{D}(A)$.

Если оператор $A(t)$ сильно непрерывен на $\mathscr{D}(A)$, то при $x\in\mathscr{D}(A)$

$$\|-nR_{A(t)}(n)\,x-x\|=$$
$$=\|-R_{A(t)}(n)\,A(t)\,x\|\leqslant\frac{1}{n}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|A(t)\,x\|\to 0$$

равномерно по $t\in[0,\ T]$. Нормы операторов $-nR_{A(t)}(n)$ ограничены единицей, поэтому в силу теоремы Банаха — Штейнгауза операторы $-nR_{A(t)}(n)$ при $n\to\infty$ сильно и равномерно по t сходятся к единичному оператору. Отсюда вытекает, что операторы $A_n(t)$ на $\mathscr{D}(A)$ сильно и равномерно по t сходятся к оператору $A(t)$, т. е. выполнено условие (3.18).

Лемма 3.2. *Оператор* $A(t)$ *устойчиво аппроксимируется операторами* $A_n(t)$ *вида* (3.27).

Доказательство. Осталось показать, что эволюционные операторы $U_n(t,\ s)$, отвечающие операторам $A_n(t)$, равномерно по n, s и t ограничены. Рассмотрим резольвенты операторов $A_n(t)$. Из тождества

$$R_{A_n(t)}(\lambda)=-\frac{1}{n+\lambda}I+\frac{n^2}{(n+\lambda)^2}R_{A(t)}\left(\frac{n\lambda}{n+\lambda}\right)$$

и условия (3.25) получаем

$$\|R_{A_n(t)}(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{n+\lambda} + \frac{n^2}{(n+\lambda)^2} \frac{1}{\frac{n\lambda}{n+\lambda}} = \frac{1}{\lambda} \qquad (\lambda > 0).$$

Выведенная оценка позволяет в нашем случае применить теорему 3.10 к уравнению (3.17). Из этой теоремы следует, что

$$\|U_n(t, s)\| \leqslant 1. \tag{3.28}$$

Лемма доказана.

В теореме 3.6 предполагается, что оператор $A(t)$ имеет ограниченный обратный оператор, поэтому в дальнейшем мы условие (3.25) заменим более сильным

$$\|R_{A(t)}(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{1+\lambda} \quad \text{при} \quad \lambda \geqslant 0. \tag{3.29}$$

Перейдем к доказательству сходимости эволюционных операторов $U_n(t, s)$, отвечающих операторам $A_n(t)$. Для этого предположим, что оператор $A(t)$ сильно дифференцируем по t на $\mathscr{D}(A)$.

Сначала рассуждаем так же, как и при доказательстве теоремы 3.6. Рассматриваем уравнения (3.22) и соответствующие им эволюционные операторы $V_n(t, s) = A(t)U_n(t, s)A^{-1}(s)$. По первой части теоремы 2.1, примененной к уравнениям (3.22), учитывая (3.21), заключаем, что операторы $V_n(t, s)$ ограничены равномерно по n, t и s:

$$\|V_n(t, s)\| = \|A(t)U_n(t, s)A^{-1}(s)\| \leqslant K. \tag{3.30}$$

Заменим операторы $A_n(t)$ кусочно-постоянными операторами.

Разобьем отрезок $[0, T]$ на N равных частей и положим

$$\tilde{A}_{n,N}(t) = A_n\left(\frac{k-1}{N}\right) \quad \text{при} \quad \frac{k-1}{N}T \leqslant t < \frac{k}{N}T$$

$$(k = 1, 2, \ldots, N).$$

Для уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{A}_{n,N}(t)x$$

можно построить эволюционные операторы $\widetilde{U}_{n,N}(t, s)$, которые будут кусочно-непрерывно дифференцируемыми. Если $\frac{i-1}{N}T \leqslant s < \frac{i}{N}T < \ldots < \frac{j-1}{N}T \leqslant t < \frac{j}{N}T$, то

$$\widetilde{U}_{n,N}(t, s) = e^{\left(t-\frac{j-1}{N}T\right)A_n\left(\frac{j-1}{N}T\right)} e^{\frac{1}{N}A_n\left(\frac{j-2}{N}T\right)} \ldots$$
$$\ldots e^{\frac{1}{N}A_n\left(\frac{i}{N}T\right)} e^{\left(\frac{i}{N}T-s\right)A_n\left(\frac{i-1}{N}T\right)}.$$

В силу теоремы 3.10 для операторов $\widetilde{U}_{n,N}(t, s)$ будет справедлива оценка

$$\|\widetilde{U}_{n,N}(t, s)\| \leqslant 1. \tag{3.31}$$

Оценим разность операторов $U_n(t, s)$ и $\widetilde{U}_{n,N}(t, s)$. Пользуясь тождеством (2.7), при $x \in \mathscr{D}(A)$ получаем

$$\|\widetilde{U}_{n,N}(t, s)x - U_n(t, s)x\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \int_s^t \widetilde{U}_{n,N}(t, \tau)[\widetilde{A}_{n,N}(\tau) - A_n(\tau)]\, U_n(\tau, s)x\, d\tau \right\| \leqslant$$
$$\leqslant T \max_{0 \leqslant \tau \leqslant T} \|[\widetilde{A}_{n,N}(\tau) - A_n(\tau)]\, A^{-1}(\tau)\| \max_{0 \leqslant \tau \leqslant T} \|A(\tau) \times$$
$$\times U(\tau, s) A^{-1}(s)\| \, \|A(s)x\|.$$

Оценим величину второго множителя. Пусть $\frac{k-1}{N}T \leqslant \tau < \frac{k}{N}T$, тогда при $x \in \mathscr{D}(A)$

$$\|[\widetilde{A}_{n,N}(\tau) - A_n(\tau)]\, A^{-1}(\tau)\| =$$
$$= \left\| \left[A_n\left(\frac{k-1}{N}T\right) - A_n(\tau)\right] A^{-1}(\tau) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\| nR_{A\left(\frac{k-1}{N}T\right)}(n) \left[A(\tau) - A\left(\frac{k-1}{N}T\right)\right] A^{-1}(\tau)\, nR_{A(\tau)}(n) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \left[A(\tau) - A\left(\frac{k-1}{N}T\right)\right] A^{-1}(\tau) \right\|. \tag{3.32}$$

Далее,

$$\left\|\left[A(\tau)-A\left(\frac{k-1}{N}T\right)\right]A^{-1}(\tau)\right\|=$$
$$=\left\|\int\limits_{\frac{k-1}{N}T}^{\tau}A'(t)A^{-1}(\tau)\,dt\right\|\leqslant c\frac{T}{N}.$$

Таким образом,

$$\|\tilde{U}_{n,N}(t,s)x-U_n(t,s)x\|\leqslant Kc\frac{T^2}{N}\|A(s)x\|.$$

Из этой оценки вытекает, что при $N\to\infty$ операторы $\tilde{U}_{n,N}(t,s)$ сильно сходятся на $\mathscr{D}(A)$ к оператору $U_n(t,s)x$ равномерно по n, s и t. Так как эти операторы в силу (3.28) и (3.31) ограничены равномерно по всем переменным, то указанная сходимость будет иметь место для всех $x\in E$.

Рассмотрим теперь, что происходит с операторами $\tilde{U}_{n,N}(t,s)$, когда $n\to\infty$, а N фиксировано. На каждом отрезке $\frac{k-1}{N}T\leqslant s$, $t\leqslant\frac{k}{N}T$ операторы $\tilde{U}_{n,N}(t,s)=$ $=e^{(t-s)A_n\left(\frac{k-1}{N}\right)}$ являются полугрупповыми операторами, построенными по операторам

$$A_n\left(\frac{k-1}{N}\right)=-nA\left(\frac{k-1}{N}\right)R_{A\left(\frac{k-1}{N}\right)}(n).$$

Так как операторы $A\left(\frac{k-1}{N}\right)$ удовлетворяют условию (3.29), то в силу теоремы 2.9, гл. I операторы $\tilde{U}_{n,N}(t,s)$ сильно и равномерно по t и s сходятся к операторам $\tilde{U}_n(t,s)=U_{A\left(\frac{k-1}{N}\right)}(t-s)$. При любых t и s ($0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$) оператор $\tilde{U}_{n,N}(t,s)$ есть произведение конечного числа операторов вида $e^{\tau A_n\left(\frac{k-1}{N}\right)}$ и поэтому

$$\tilde{U}_{n,N}(t,s)\to\tilde{U}_N(t,s)\tag{3.33}$$

сильно и равномерно по t и s в треугольнике $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$.

Докажем теперь сходимость последовательности операторов $U_n(t, s)$. Имеем при $x \in E$

$$\|U_n(t, s)x - U_m(t, s)x\| \leqslant \|U_n(t, s)x - U_{n,N}(t, s)x\| + \\ + \|U_m(t, s)x - U_{m,N}(t, s)x\| + \\ + \|U_{n,N}(t, s)x - U_{m,N}(t, s)x\|.$$

Первые два слагаемых могут быть сделаны сколь угодно малыми сразу при всех t, s и n за счет выбора большого N. После этого при фиксированном N выбираем n и m настолько большими, чтобы и третье слагаемое стало сколь угодно малым при всех t и s. Возможность такого выбора следует из (3.33). Итак, последовательность $U_n(t, s)$ сильно и равномерно по t и s в треугольнике $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ сходится к ограниченному оператору $U(t, s)$.

Мы доказали следующую важную теорему:

Теорема 3.11. *Если оператор $A(t)$ удовлетворяет условию* (3.29) *и сильно непрерывно дифференцируем на $\mathscr{D}(A)$, то для него и операторов $A_n(t)$, построенных по формуле* (3.27), *выполнены условия теоремы* 3.6. *Задача Коши для уравнения* (3.1) *равномерно корректна.*

Замечание 3.4. Из доказательства теоремы 3.11 следует, что эволюционный оператор $U(t, s)$ представим в виде мультипликативного интеграла

$$U(t, s) = \lim_{N \to \infty} \tilde{U}_N(t, s) \tag{3.34}$$

через полугрупповые операторы, соответствующие операторам $A(t)$ при различных t. Здесь оператор

$$\tilde{U}_N(t, s) = U_{A\left(\frac{k-1}{N}T\right)}(t-s),$$

если $\frac{k-1}{N}T \leqslant s,\ t \leqslant \frac{k}{N}T$, а при других t и s определяется с помощью равенства

$$\tilde{U}_N(t, s) = \tilde{U}_N(t, r)\,\tilde{U}_N(r, s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant r \leqslant t \leqslant T).$$

В (3.34) предел существует равномерно по t и s в треугольнике $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

На рассмотренный в теореме 3.11 класс уравнений естественно переносится теорема 3.8 о повышении гладкости решений и теорема 3.7 о возмущенных уравнениях. Теоремы о повышении гладкости решений теперь можно сформулировать так:

Теорема 3.12. *Если оператор* $A(t)$ *удовлетворяет* (3.29), *сильно непрерывно дифференцируем на* $\mathscr{D}(A)$ *и выполнено одно из двух условий*:

1°. *Оператор* $A(t)A'(t)A^{-2}(t)$ *определен, ограничен и сильно непрерывен по* $t\in[0, T]$.

2°. *Оператор* $A(t)$ *дважды непрерывно дифференцируем на* $\mathscr{D}(A)$.

Тогда при $x_0\in\mathscr{D}(A^2(s))$ *решение задачи* (3.1)—(3.2) *дважды непрерывно дифференцируемо.*

§ 4. Ослабленная задача Коши

1. Ослабленная задача Коши, корректная на $\mathscr{D}(A)$. Предположим, что в уравнении (3.1) оператор $A(t)$ имеет не зависящую от t плотную в E область определения $\mathscr{D}(A)$, на которой он сильно непрерывен. Существует ограниченный обратный оператор $A^{-1}(t)$.

Определение 4.1. *Ослабленным решением* уравнения (3.1) на отрезке $[s, T]$ $(0\leqslant s\leqslant T)$ называется функция $x(t)$, непрерывная на $[s, T]$, непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая уравнению (3.1) на $(s, T]$.

Под *ослабленной задачей Коши в треугольнике* T_Δ: $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ понимается задача о нахождении при каждом фиксированном $s\in[0, T)$ ослабленного решения $x(t, s)$ уравнения (3.1) на отрезке $[s, T]$, удовлетворяющего заданному начальному условию

$$x(s, s)=x_0. \tag{4.1}$$

Определение 4.2. Ослабленная задача Коши называется *корректной на* $\mathscr{D}(A)$, если:

1) При любых $s\in[0, T)$ и $x_0\in\mathscr{D}(A)$ существует единственное ослабленное решение $x(t, s)$ уравнения (3.1) на отрезке $[s, T]$, удовлетворяющее условию (4.1).

2) Функция $x(t, s)$ непрерывна по совокупности переменных t, s в треугольнике T_Δ.

3) Производная $x'_t(t, s)$ непрерывна по совокупности переменных t, s в полуоткрытом треугольнике $0\leqslant s<t\leqslant T$.

4) Решение непрерывно зависит от начальных данных в том смысле, что из сходимости $x_{0,n} \in \mathscr{D}(A)$ к нулю следует сходимость к нулю соответствующих решений $x_n(t, s)$ равномерно в каждой области

$$t - s \geqslant \delta > 0 \qquad (0 \leqslant s \leqslant T).$$

Для ослабленной задачи Коши, корректной на $\mathscr{D}(A)$, можно так же, как и для равномерно корректной задачи Коши, ввести эволюционный оператор $U(t, s)$ $(0 \leqslant s < t \leqslant T)$. Он будет при всех t и s $(t > s)$ ограниченным оператором. При $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ функция $x(t, s) = U(t, s)x_0$ будет ослабленным решением задачи (3.1)—(4.1). Из единственности ослабленного решения будет следовать соотношение

$$U(t, \tau)U(\tau, s) = U(t, s) \qquad (0 \leqslant s < \tau < t \leqslant T).$$

Далее, в каждой области $t - s \geqslant \delta > 0$ оператор $U(t, s)$ равномерно ограничен, и так как он сильно непрерывен на $\mathscr{D}(A)$ во всем треугольнике T_Δ, то в этой области он будет сильно непрерывным на всем пространстве E.

Оператор $U(t, s)$ отображает $\mathscr{D}(A)$ в $\mathscr{D}(A)$ и сильно непрерывно дифференцируем на $\mathscr{D}(A)$ при $t > s$. При $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ функция $U(t, s)x_0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U(t, s)x_0}{\partial t} = A(t)U(t, s)x_0 \qquad (t > s) \tag{4.2}$$

и начальному условию $\lim\limits_{t \to s} U(t, s)x_0 = x_0$.

Из перечисленных свойств вытекает, что оператор $U(t, s)A^{-1}(0)$ сильно непрерывен по совокупности t и s в треугольнике T_Δ, если при $t = s$ положить его равным $A^{-1}(0)$. Оператор $A(t)U(t, s)A^{-1}(0)$ сильно непрерывен по t и s при $t > s$.

Уравнение (3.1) называется *абстрактным параболическим*, если для всякого $x_0 \in E$ и $s \in [0, T]$ существует единственное ослабленное решение уравнения (3.1) для отрезка $[s, T]$, удовлетворяющее условию (4.1) и обладающее свойствами 2)—4) определения 4.2. Для абстрактного параболического уравнения эволюционный оператор $U(t, s)$ равномерно ограничен и сильно непрерывен в треугольнике T_Δ. Он сильно непрерывно дифференцируем по t при $t > s$.

Из равномерной ограниченности и сильной непрерывности эволюционного оператора $U(t, s)$ еще не следует равномерная корректность задачи Коши, так как не ясно, будут ли функции $U(t, s)x_0$ при $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ иметь производную по t, непрерывную в замкнутом треугольнике T_Δ. Это заведомо будет иметь место, если, кроме того, будет сильно непрерывным в треугольнике T_Δ оператор

$$V(t, s) = A(t)U(t, s)A^{-1}(s), \quad V(s, s) = I.$$

Действительно, пусть $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ и $x_0 = A^{-1}(0)y_0$. В силу (4.2) производная от функции $U(t, s)x_0$, равная $A(t)U(t, s) \times A^{-1}(s)A(s)A^{-1}(0)y_0$, будет непрерывной в треугольнике T_Δ функцией. Рассуждая так же, как в лемме 1.2 гл. I, покажем, что функция $U(t, s)x_0$ имеет производную в нуле, равную $A(s)A^{-1}(0)y_0 = A(s)x_0$. Таким образом, функция $U(t, s)x_0$ является решением уравнения (3.1). Равномерная корректность задачи Коши уже будет следовать из ранее указанных свойств оператора $U(t, s)$.

2. Ядра со слабой особенностью. Пусть линейный ограниченный оператор $K(t, s)$, действующий в банаховом пространстве E, определен в треугольнике $0 \leqslant s < t \leqslant T$.

Будем говорить, что $K(t, s)$ есть *операторное ядро со слабой особенностью порядка* μ, если оператор $K(t, s)$ сильно непрерывен по переменным t, s при $t > s$ и

$$\|K(t, s)\| \leqslant \frac{c}{(t-s)^\mu}, \tag{4.3}$$

где $0 \leqslant \mu < 1$ и константа c не зависит от t, s.

Лемма 4.1. *Пусть $K(t, s)$ — ядро со слабой особенностью порядка μ и $\varphi(t, s)$ — ядро со слабой особенностью порядка ν.*

Интегральные уравнения

$$W(t, s) = \varphi(t, s) + \int_s^t W(t, \tau)K(\tau, s)\,d\tau \tag{4.4}$$

и

$$W(t, s) = \varphi(t, s) + \int_s^t K(t, \tau)W(\tau, s)\,d\tau \tag{4.5}$$

имеют единственные решения, которые являются операторными ядрами со слабой особенностью порядка ν.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (4.4) и будем его решать методом последовательных приближений. Искомое решение запишем в виде ряда

$$W(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t, s), \tag{4.6}$$

где

$$W_0(t, s) = \varphi(t, s),$$

$$W_{n+1}(t, s) = \int_s^t W_n(t, \tau) K(\tau, s)\, d\tau. \tag{4.7}$$

Оценим

$$\| W_1(t, s) \| \leqslant \left\| \int_s^t \varphi(t, \tau) K(\tau, s)\, d\tau \right\| \leqslant c^2 \int_s^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\nu} (\tau - s)^{\mu}}.$$

Делая замену $\frac{\tau - s}{t - s} = r$, получаем

$$\|W_1(t, s)\| \leqslant c^2 (t-s)^{1-\nu-\mu} \int_0^1 \frac{dr}{r^{\nu}(1-r)^{\mu}} =$$

$$= \frac{c^2}{(t-s)^{\nu}} (t-s)^{1-\mu} \frac{\Gamma(1-\nu)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(2-\nu-\mu)}.$$

Используя (4.7), по индукции выводим

$$\| W_n(t, s) \| \leqslant \frac{c\Gamma(1-\nu)}{(t-s)^{\nu}} \frac{[c\Gamma(1-\mu)(t-s)^{1-\mu}]^n}{\Gamma(n(1-\mu)+1-\nu)}. \tag{4.8}$$

Отсюда видно, что при $0 < \delta \leqslant t - s \leqslant T$ ряд (4.6) равномерно сходится.

Функция $W(t, s)$ сильно непрерывна при $t > s$. Действительно, пусть $t - s \geqslant \delta > 0$. Функция

$$W_1^{(\varepsilon)}(t, s) = \int_{s+\varepsilon}^{t-\varepsilon} \varphi(t, \tau) K(\tau, s)\, d\tau \qquad (\varepsilon < \delta/2),$$

очевидно, сильно непрерывна в области $\delta \leqslant t-s \leqslant T$. Норма разности

$$\|W_1(t, s) - W_1^{(\varepsilon)}(t, s)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c^2}{\delta^\nu} T^{1-\mu} \left(\int_{1-\frac{\varepsilon}{\delta}}^{1} \frac{dr}{r^\nu (1-r)^\mu} + \int_0^{\frac{\varepsilon}{\delta}} \frac{dr}{r^\nu (1-r)^\mu} \right)$$

равномерно в этой области стремится к нулю, и значит, функция $W_1(t, s)$ сильно непрерывна при $t > s$. Таким же образом устанавливается сильная непрерывность всех функций $W_n(t, s)$. Из равномерной сходимости ряда (4.6) следует сильная непрерывность $W(t, s)$ при $t > s$.

Очевидно, что $W(t, s)$ удовлетворяет уравнению (4.4). Наконец, из (4.8) вытекает, что

$$\|W(t, s)\| \leqslant \frac{c\Gamma(1-\nu)}{(t-s)^\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[c\Gamma(1-\mu) T^{1-\mu}]^n}{\Gamma(n(1-\mu)+1-\nu)} \doteq \frac{c_1}{(t-s)^\nu}. \tag{4.9}$$

Единственность решения уравнения (4.4), обладающего свойством (4.9), как обычно, выводится из оценки (4.8).

Аналогично рассматривается уравнение (4.5). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Если ядра $\varphi(t, s)$ и $K(t, s)$ при $t > s$ непрерывны по норме операторов, то оператор $W(t, s)$ при $t > s$ также непрерывен по норме операторов.

3. Интегральное уравнение для эволюционного оператора. Наряду с уравнением (3.1) рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t_0)x, \tag{4.10}$$

где t_0 — некоторая точка отрезка $[0, T]$. Это уравнение будем называть *уравнением с замороженным коэффициентом*. Если для уравнения (4.10) ослабленная задача Коши (4.1) корректна на $\mathscr{D}(A)$, то ее решение можно записать в виде $x(t) = U_{A(t_0)}(t-s)x_0$, где $U_{A(t_0)}(t)$ — соответствующий этой задаче полугрупповой оператор. Естественно думать, что решения уравнения с замороженным коэффициентом в каком-то смысле близки к решениям уравнения (3.1).

Дальнейшие рассуждения будут носить наводящий характер. Уравнение (3.1) запишем в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t_0)\,x + [A(t) - A(t_0)]\,x.$$

При известных условиях отсюда вытекает формула

$$U(t, s)\,x_0 = U_{A(t_0)}(t-s)\,x_0 + \\ + \int\limits_s^t U_{A(t_0)}(t-\tau)\,[A(\tau) - A(t_0)]\,U(\tau, s)\,x_0\,d\tau, \qquad (4.11)$$

где $U(t, s)$—эволюционный оператор для задачи (3.1)—(4.1). Уравнение (4.10) можно в свою очередь преобразовать к виду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + [A(t_0) - A(t)]\,x,$$

и тогда, формально,

$$U_{A(t_0)}(t-s)\,x_0 = U(t, s)x_0 + \\ + \int\limits_s^t U(t, \tau)\,[A(t_0) - A(\tau)]\,U_{A(t_0)}(\tau - s)\,x_0\,d\tau. \qquad (4.12)$$

Таким образом, если эволюционный оператор существует и обладает «хорошими» свойствами, то для него справедливы интегральные уравнения (4.11) и (4.12). Попытаемся теперь использовать эти интегральные уравнения для построения эволюционного оператора. Функция $U_{A(t_0)}(t)$ имеет в нуле особенность. Еще бо́льшую особенность имеет $A(t_0)\,U_{A(t_0)}(t)$. Выберем точку t_0 в уравнениях (4.11) и (4.12) так, чтобы разность, стоящая в квадратных скобках, могла быть использована для ослабления особенности множителя $U_{A(t_0)}(t)$. Для этого в уравнении (4.11) положим $t_0 = t$ и в уравнении (4.12) $t_0 = s$. Тогда получим уравнения

$$U(t, s) = U_{A(t)}(t-s) + \\ + \int\limits_s^t \overline{U_{A(t)}(t-\tau)\,[A(\tau) - A(t)]}\,U(\tau, s)\,d\tau \qquad (4.13)$$

и

$$U(t, s) = U_{A(s)}(t-s) + \int_s^t U(t, \tau)[A(\tau) - A(s)]\, U_{A(s)}(\tau - s)\, d\tau. \qquad (4.14)$$

В уравнении (4.13) мы поставили знак замыкания для того, чтобы иметь возможность предположить, что ядро интегрального уравнения (4.13) есть при $t \neq \tau$ ограниченный оператор.

Итак, пусть ядра

$$U_{A(t)}(t-s), \quad U_{A(s)}(t-s), \quad \overline{U_{A(t)}(t-s)[A(s) - A(t)]}$$

и

$$[A(t) - A(s)]\, U_{A(s)}(t-s)$$

являются ядрами со слабыми особенностями. Тогда в силу леммы 4.1 существуют решения уравнений (4.13) и (4.14).

Лемма 4.2. *Решения со слабыми особенностями уравнений* (4.13) *и* (4.14) *совпадают.*

Доказательство. Пусть $\tilde{U}(t, s)$ — решение со слабой особенностью уравнения (4.13). Обозначим

$$Z(t, s) = \int_s^t \tilde{U}(t, \tau)[A(\tau) - A(s)]\, U_{A(s)}(\tau - s)\, d\tau + U_{A(s)}(t-s).$$

Этот интеграл абсолютно сходится, так как оба множителя, по предположению, имеют слабые особенности соответственно в точках $\tau = t$ и $\tau = s$. Подставим теперь вместо $\tilde{U}(t, \tau)$ его выражение, найденное из уравнения (4.13). Имеем

$$Z(t, s) = \int_s^t U_{A(t)}(t-\tau)[A(\tau) - A(s)]\, U_{A(s)}(\tau - s)\, d\tau + \int_s^t \int_\tau^t \overline{U_{A(t)}(t-\sigma)[A(\sigma) - A(t)]}\, U(\sigma, \tau)\, d\sigma \times$$
$$\times [A(\tau) - A(s)]\, U_{A(s)}(\tau - s)\, d\tau + U_{A(s)}(t-s).$$

Меняя во втором интеграле порядок интегрирования, получаем

$$Z(t, s) = \int_s^t U_{A(t)}(t-\tau)[A(\tau)-A(s)]\,U_{A(s)}(\tau-s)\,d\tau +$$
$$+ \int_s^t \overline{U_{A(t)}(t-\sigma)[A(\sigma)-A(t)]} \int_s^\sigma U(\sigma, \tau) \times$$
$$\times [A(\tau)-A(s)]\,U_{A(s)}(\tau-s)\,d\tau\,d\sigma +$$
$$+ U_{A(s)}(t-s) = \int_s^t U_{A(t)}(t-\sigma)[A(\sigma)-A(s)]\,U_{A(s)}(\sigma-s)\,d\sigma +$$
$$+ \int_s^\sigma \overline{U_{A(t)}(t-\sigma)[A(\sigma)-A(t)]}\,Z(\sigma, s)\,d\sigma + U_{A(s)}(t-s).$$

Первый интеграл справа представляет собой разность $U_{A(t)}(t-s) - U_{A(s)}(t-s)$ (см. формулу (7.21) гл. I) и поэтому $Z(t, s)$ является решением уравнения (4.13). Это решение также имеет слабую особенность. В силу единственности решения $Z(t, s) \equiv \tilde{U}(t, s)$, т. е.

$$\tilde{U}(t, s) = U_{A(s)}(t-s) +$$
$$+ \int_s^t \tilde{U}(t, \tau)[A(\tau)-A(s)]\,U_{A(s)}(\tau-s)\,d\tau.$$

Таким образом, $\tilde{U}(t, s)$ является и решением уравнения (4.14). В силу единственности решения со слабой особенностью уравнения (4.14) лемма доказана.

4. Оператор $V(t, s)$. Мы уже видели ранее, какую важную роль играет оператор

$$V(t, s) = A(t)\,U(t, s)\,A^{-1}(s). \tag{4.15}$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$V_0(t, s) = A(0)\,U_{A(t)}(t-s)\,A^{-1}(0) +$$
$$+ \int_s^t A(0)\,U_{A(t)}(t-\tau)[A(\tau)-A(t)]\,A^{-1}(0)\,V_0(\tau, s)\,d\tau. \tag{4.16}$$

Оператор $A(0)\ U_{A(t)}(t-s)\ A^{-1}(0) = A(0)\, A^{-1}(t) \times \times U_{A(t)}(t-s)\, A(t)\, A^{-1}(0)$ имеет слабую особенность того же порядка, что и оператор $U_{A(t)}(t-s)$. Предположим, что оператор $A(0)\, U_{A(t)}(t-\tau)\, [A(\tau) - A(t)]\, A^{-1}(0)$ также имеет слабую особенность. Тогда существует решение $V_0(t, s)$ уравнения (4.16) со слабой особенностью того же порядка, что и у оператора $U_{A(t)}(t-s)$.

Перейдем теперь к рассмотрению уравнения

$$Q_0(t, s) = U_{A(t)}(t-s)\, A^{-1}(0) + \\ + \int_s^t \overline{U_{A(t)}(t-\tau)\, [A(\tau) - A(t)]}\, Q_0(\tau, s)\, d\tau. \quad (4.17)$$

Внеинтегральный член имеет особенность, не худшую, чем ядро $U_{A(t)}(t-s)$, поэтому существует решение уравнения (4.17). (В большинстве случаев ядро $U_{A(t)}(t-s)\, A^{-1}(0)$ будет непрерывным в T_Δ, и поэтому оператор $Q_0(t, s)$ будет также непрерывным в T_Δ.) Сравнивая уравнения (4.16) и (4.17), мы приходим к выводу, что

$$A^{-1}(0)\, V_0(t, s) = Q_0(t, s). \quad (4.18)$$

Сравнивая уравнения (4.13) и (4.17), получаем

$$U(t, s)\, A^{-1}(0) = Q_0(t, s). \quad (4.19)$$

Из (4.18) и (4.19) следует, что оператор $U(t, s)$ переводит область определения $\mathscr{D}(A)$ в себя и оператор

$$V_0(t, s) = A(0)\, U(t, s)\, A^{-1}(0) \quad (4.20)$$

является ядром со слабой особенностью того же порядка, что и у оператора $U_{A(t)}(t-s)$. Очевидно, таким же свойством будет обладать и оператор $V(t, s)$ из (4.15).

5. Дифференцируемость оператора $U(t, s)$ на $\mathscr{D}(A)$. Напишем новое интегральное уравнение

$$R_0(t, s) = \overline{A^{-1}(0)\, A(t)}\, U_{A(s)}(t-s) + \\ + \int_s^t R_0(t, \tau)\, [A(\tau) - A(s)]\, U_{A(s)}(\tau - s)\, d\tau. \quad (4.21)$$

Внеинтегральный член справа имеет слабую особенность, поэтому решение уравнения (4.21) существует и имеет слабую особенность. Предполагая, что $x_0 \in \mathscr{D}(A)$, вычисляем

$$\int_s^r R_0(t, s)\, x_0\, dt + A^{-1}(0)\, x_0 =$$

$$= \int_s^r A^{-1}(0)\, A(t)\, U_{A(s)}(t-s)\, x_0\, dt + \int_s^r \left[\int_\tau^r R_0(t, \tau)\, dt\right] \times$$
$$\times [A(\tau) - A(s)]\, U_{A(s)}(\tau - s)\, d\tau + A^{-1}(0)\, x_0 =$$
$$= \int_s^r A^{-1}(0)\, A(s)\, U_{A(s)}(t-s)\, x_0\, dt + \int_s^r \left[\int_\tau^r R_0(t, \tau)\, dt + \right.$$
$$\left. + A^{-1}(0)\right] [A(\tau) - A(s)]\, U_{A(s)}(\tau - s)\, d\tau + A^{-1}(0)\, x_0.$$

Первый интеграл справа вычисляется и равен $A^{-1}(0) \times \times U_{A(s)}(r-s)\, x_0 - A^{-1}(0)\, x_0$. Таким образом,

$$\int_s^r R_0(t, s)\, x_0\, dt + A^{-1}(0)\, x_0 =$$
$$= A^{-1}(0)\, U_{A(s)}(r-s)\, x_0 + \int_s^r \left[\int_\tau^t R_0(t, \tau)\, dt + A^{-1}(0)\right] \times$$
$$\times [A(\tau) - A(s)]\, U_{A(s)}(\tau - s)\, x_0\, d\tau. \qquad (4.22)$$

Это равенство доказано при $x_0 \in \mathscr{D}(A)$, но так как слева и справа стоят ограниченные операторы, то оно справедливо при любом $x_0 \in E$. Сравнивая уравнение (4.22) с уравнением (4.14), приходим к выводу, что

$$\int_s^r R_0(t, s)\, dt + A^{-1}(0) = A^{-1}(0)\, U(r, s).$$

С другой стороны, сравнивая (4.21) с (4.14), получаем

$$R_0(t, s) = \overline{A^{-1}(0)\, A(t)}\, U(t, s),$$

т. е.

$$A^{-1}(0)\,U(r,\ s)=\int_s^r \overline{A^{-1}(0)\,A(t)}\,U(t,\ s)\,dt+A^{-1}(0).$$

Применим справа оператор $A^{-1}(0)$. Тогда

$$A^{-1}(0)U(r,s)A^{-1}(0)=\int_s^r A^{-1}(0)A(t)U(t,s)A^{-1}(0)\,dt+A^{-2}(0).$$

Как показано в предыдущем пункте, функция $A(t)\times$ $\times U(t,\ s)\,A^{-1}(0)$ имеет слабую особенность при $t=s$, поэтому можно к обеим частям слева применить оператор $A(0)$ и получить соотношение

$$U(r,\ s)\,A^{-1}(0)=\int_s^r A(t)\,U(t,\ s)\,A^{-1}(0)\,dt+A^{-1}(0),$$

из которого следует, что

$$\frac{\partial U(r,\ s)\,A^{-1}(0)}{\partial r}=A(r)\,U(r,\ s)\,A^{-1}(0). \tag{4.23}$$

Таким образом, при $x_0\in\mathscr{D}(A)$ функция $x(t)=U(t,\ s)\,x_0$ является решением ослабленной задачи Коши (3.1) — (4.1).

6. Параболичность. Выясним, при каких условиях функция $U(t,\ s)\,x_0$ дифференцируема по t при любом $x_0\in E$. Пусть сначала $x_0\in\mathscr{D}(A)$ и $x_0=A^{-1}(0)\,y_0$. Записывая операторное равенство (4.14) на элементе y_0 и учитывая (4.20), приходим к соотношению

$$\begin{aligned}A(0)\,U(t,\ s)\,x_0=A(0)\,U_{A(t)}(t-s)\,x_0&+\\+\int_s^{s+\varepsilon} A(0)\,U_{A(t)}(t-\tau)\,[A(\tau)-A(t)]\,U(\tau,\ s)\,x_0\,d\tau&+\\+\int_{s+\varepsilon}^{t} A(0)\,U_{A(t)}(t-\tau)\,[A(\tau)-A(t)]&\times\\ \times A^{-1}(0)\,A(0)\,U(\tau,\ s)\,x_0\,d\tau&,\end{aligned} \tag{4.24}$$

где $\varepsilon<\delta\leqslant t-s$ — некоторое число из интервала $(0,\ \delta)$.

Пусть оператор $A(0)U_{A(t)}(t-s)$ имеет особенность при $t=s$ порядка γ. (Обычно $\gamma\geqslant 1$). Умножим обе части (4.24) на $(t-s)^{\gamma}$. Тогда

$$\|(t-s)^{\gamma}A(0)U(t,s)x_0\|\leqslant c\|x_0\|+$$
$$+(t-s)^{\gamma}\int\limits_{s}^{s+\varepsilon}\overline{\|A(0)U_{A(t)}(t-\tau)[A(\tau)-A(t)]\|}\times$$
$$\times\|U(\tau,s)\|d\tau\|x_0\|+(t-s)^{\gamma}\int\limits_{s+\varepsilon}^{t}\|A(0)U_{A(t)}(t-\tau)[A(\tau)-$$
$$-A(t)]A^{-1}(0)\|\frac{1}{(\tau-s)^{\gamma}}\|(\tau-s)^{\gamma}A(0)U(\tau,s)x_0\|d\tau.$$

Если предположить, что замыкание

$$\overline{A(0)U_{A(t)}(t-\tau)[A(\tau)-A(t)]}$$

является оператором, равномерно ограниченным по t и τ при $t-\tau\geqslant\delta>0$, то в силу того, что ядро $U(t,s)$ имеет слабую особенность, первый интеграл мажорируется величиной $c_1\|x_0\|$. Во втором интеграле первый множитель имеет слабую особенность, а второй ограничен. Таким образом, мы приходим к неравенству

$$\|\Psi(t)\|\leqslant c'\|x_0\|+c''\int\limits_{s+\varepsilon}^{t}\frac{1}{(t-\tau)^{\mu}}\|\Psi(\tau)\|d\tau,$$

где $\mu<1$ и $\Psi(t)=(t-s)^{\gamma}A(0)U(t,s)x_0$. Итерируя это неравенство, мы через конечное число шагов получим неравенство вида

$$\|\Psi(t)\|\leqslant c\|x_0\|+\int\limits_{s+\varepsilon}^{t}a(t,\tau)\|\Psi(\tau)\|d\tau$$

с непрерывным ядром $a(t,\tau)$. Из последнего неравенства будет следовать, что

$$\|\Psi(t)\|=\|(t-s)^{\gamma}A(0)U(t,s)x_0\|\leqslant M\|x_0\|.$$

Отсюда вытекает, что оператор $A(0)U(t,s)$ равномерно ограничен в области $t-s\geqslant\delta>0$, и так как он сильно непрерывен по t и s в этой области на $\mathscr{D}(A)$, то он будет сильно непрерывным и на всем пространстве E.

Из уравнения (4.23) следует, что при $x_0 \in \mathscr{D}(A)$

$$U(t, s)x_0 - U(s+\varepsilon, s)x_0 = \int_{s+\varepsilon}^{t} A(\tau)U(\tau, s)x_0\,d\tau.$$

Так как слева и справа стоят ограниченные операторы, то это равенство справедливо при любом $x_0 \in E$. В силу непрерывности $A(\tau)U(\tau, s)x_0$, тогда

$$\frac{\partial U(t, s)x_0}{\partial t} = A(t)U(t, s)x_0.$$

Итак, при сделанных предположениях при любом $x_0 \in E$ функция $U(t, s)x_0$ удовлетворяет при $t > s$ уравнению (3.1). Это свойство мы и положили в основу определения параболичности.

7. Единственность; корректность. Нами подготовлен весь материал для того, чтобы перейти к доказательству основных теорем.

Теорема 4.1. *Пусть для уравнения* (4.10) *с замороженным коэффициентом при любом* $t_0 \in [0, T]$ *ослабленная задача Коши корректна на* $\mathscr{D}(A)$. *Если оператор* $U_{A(t)}(t-s)A^{-1}(0)$ *сильно непрерывен по* t *и* s *в треугольнике* T_Δ, *оператор* $A^{-1}(0)A(t)$ *определен и равномерно ограничен на* $[0, T]$ *и операторы* $U_{A(t)}(t-s)$, $U_{A(s)}(t-s)$, $U_{A(t)}(t-s)[A(s)-A(t)]$, $[A(t)-A(s)]U_{A(s)}(t-s)$ *и* $A(0)U_{A(t)}(t-\tau)[A(\tau)-A(t)]A^{-1}(0)$ *определены и являются ядрами со слабыми особенностями, то ослабленное решение задачи* (3.1) — (4.1) *единственно.*

Доказательство. Пусть $x(t, s)$ — ослабленное решение уравнения (3.1) на отрезке $[s, T]$. При $\varepsilon > 0$ значение $x(s+\varepsilon, s) \in \mathscr{D}(A)$. Построим на отрезке $[s+\varepsilon, T]$ функцию

$$z_\varepsilon(t) = U(t, s+\varepsilon)x(s+\varepsilon, s) - x(t, s).$$

В силу предыдущего эта функция определена и непрерывна на $[s+\varepsilon, T]$. При $\tau > s+\varepsilon$ функция $z_\varepsilon(\tau)$ дифференцируема, и ее производная

$$\frac{dz_\varepsilon}{d\tau} = A(\tau)z_\varepsilon(\tau)$$

или

$$\frac{dz_\varepsilon}{d\tau} = A(t)\, z_\varepsilon(\tau) + [A(\tau) - A(t)]\, A^{-1}(\tau)\, A(\tau)\, z_\varepsilon(\tau).$$

Функция $A(\tau)\, z_\varepsilon(\tau) = A(\tau)\, U(\tau, s+\varepsilon)\, A^{-1}(0)\, A(0) \times \times x(s+\varepsilon, s) - A(\tau)\, x(\tau, s)$ непрерывна по τ на полуинтервале $(s+\varepsilon, T]$ и имеет слабую особенность при $\tau = s+\varepsilon$. В силу замечания к теореме 6.1 гл. I и того, что $z_\varepsilon(s+\varepsilon) = \lim\limits_{\tau\to s+\varepsilon} U(\tau, s+\varepsilon)\, A^{-1}(0)\, A(0)\, x(s+\varepsilon, s) - x(s+\varepsilon, s) = 0$, получаем

$$z_\varepsilon(t) = \int_{s+\varepsilon}^{t} U_{A(t)}(t-\tau)\, [A(\tau) - A(t)]\, z_\varepsilon(\tau)\, d\tau.$$

Ядро $\overline{U_{A(t)}(t-\tau)\, [A(\tau) - A(t)]}$ имеет слабую особенность. Тогда

$$\| z_\varepsilon(t) \| \leqslant c \int_{s+\varepsilon}^{t} \frac{1}{(t-\tau)^{\mu}} \| z_\varepsilon(\tau) \|\, d\tau \qquad (\mu < 1),$$

откуда следует, что $z_\varepsilon(\tau) \equiv 0$. Итак,

$$U(t, s+\varepsilon)\, x(s+\varepsilon, s) \equiv x(t, s) \qquad (s+\varepsilon \leqslant t \leqslant T).$$

Устремим ε к нулю. Ослабленное решение $x(t, s)$ непрерывно при $t = s$, оператор $U(t, s+\varepsilon)$ сильно непрерывен при $t > s$. Поэтому

$$U(t, s)\, x(s, s) = x(t, s),$$

т. е. ослабленное решение $x(t, s)$ определяется единственным образом.

Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Если выполнены условия теоремы* 4.1, *то ослабленная задача Коши для уравнения* (3.1) *корректна на* $\mathscr{D}(A)$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in \mathscr{D}(A)$. Функция $x(t, s) = U(t, s)\, x_0$ в силу (4.23) при $t > s$ удовлетворяет уравнению (3.1). Далее, вследствие непрерывности $U(t, s)\, A^{-1}(0)$ в T_Δ, функция $x(t, s) = U(t, s)\, A^{-1}(0)\, A(0)\, x$ непрерывна в треугольнике T_Δ и $x(s, s) = \lim\limits_{t\to s} U(t, s)\, A^{-1}(0)\, A(0)\, x_0 = x_0$, т. е. выполнено начальное условие (4.1). Производная $x'_t(t, s) = A(t) U(t, s) A^{-1}(0) A(0) x_0$ непрерывна при $t > s$. Наконец, непрерывная зависимость от начальных данных следует из равномерной ограниченности $U(t, s)$ в каждой области $t - s \geqslant \delta > 0$ $(0 \leqslant s \leqslant T)$.

Теорема доказана.

Теоремы 4.1 и 4.2, несмотря на некоторую громоздкость условий, при которых они доказаны, полезны тем, что сводят всю задачу к рассмотрению свойств решений уравнений с постоянными («замороженными») операторами. В следующих пунктах мы будем исследовать вопрос о реализации условий теорем 4.1 и 4.2.

8. Свойства решений уравнения с «замороженным» коэффициентом. Предположим, что оператор $A(t)$ удовлетворяет условию

$$\| R_{A(t)}(\lambda) \| \leqslant \frac{M}{(1 + |\tau|)^\beta} \qquad (\lambda = \sigma + i\tau,\ \sigma \geqslant 0), \tag{4.25}$$

где константы M и β не зависят от t и $0 < \beta \leqslant 1$. В силу теоремы 3.3 гл. I ослабленная задача Коши для уравнения (4.10) корректна на $\mathscr{D}(A)$. Полугруппа $U_{A(t_0)}(r)$ сильно дифференцируема при $r > 0$.

Оператор $A(t_0) U_{A(t_0)}(r)$ ограничен и

$$\| A(t_0) U_{A(t_0)}(r) \| \leqslant \frac{c}{r^{2/\beta - 1}} \tag{4.26}$$

(см. теорему 3.4 гл. I).

Из наших условий вытекает, что для оператора $A(t) U_{A(t_0)}(r)$ будет справедлива такая же оценка, возможно с другой константой.

Для самой полугруппы $U_{A(t_0)}(r)$ будет выполняться неравенство

$$\| U_{A(t_0)}(r) \| \leqslant \frac{c}{r^{1/\beta - 1}}. \tag{4.27}$$

при $\beta < 1$ и

$$\| U_{A(t_0)}(r) \| \leqslant c \ln\left(e + \frac{1}{r}\right)$$

при $\beta = 1$ (см. замечание 3.2, гл. I).

Из доказательства теоремы 3.4 гл. I видно, что константы c в последних неравенствах не зависят от выбора точки t_0.

Из корректности задачи Коши на $\mathscr{D}(A)$ вытекает, что операторы $U_{A(t_0)}(r) A^{-1}(t_0)$ при $r \to 0$ сильно сходятся к оператору $A^{-1}(t_0)$ и, следовательно, операторы $U_{A(t_0)}(r)\times\times A^{-1}(t_0)$ равномерно ограничены. Более того, если $\beta > 1/2$, то оператор $U_{A(t_0)}(r)A^{-1}(t_0)$ непрерывен по норме. В самом деле,

$$\|U_{A(t_0)}(r+\Delta r)A^{-1}(t_0) - U_{A(t_0)}(r)A^{-1}(t_0)\| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int\limits_r^{r+\Delta r} \|U_{A(t_0)}(s)\|\,ds\right| \leqslant c\left|\int\limits_r^{r+\Delta r} \frac{ds}{s^{1/\beta-1}}\right| \leqslant c\,\frac{|\Delta r|}{|\Delta r|^{1/\beta-1}} =$$
$$= c\,|\Delta r|^{2-1/\beta}, \qquad (4.28)$$

если $r \geqslant 2|\Delta r|$. Если же $r < 2\Delta r$, то границы интеграла можно раздвинуть до 0 и $3\Delta r$, и снова получится оценка типа (4.28).

В дальнейшем будем считать, что $\beta > 1/2$. Нас теперь будет интересовать вопрос о том, как изменяется функция $U_{A(t)}(r)A^{-1}(0)$ при изменении t. Для этого воспользуемся представлением полугруппы $U_{A(t)}(r)$ в виде контурного интеграла (3.13):

$$U_{A(t)}(r) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_q} e^{\lambda r} R_{A(t)}(\lambda)\,d\lambda,$$

где контур Γ_q имеет в нашем случае уравнение $\sigma = -\frac{q}{M}(1+|\tau|)^\beta$ и $0<q<1$. Отсюда получаем

$$[U_{A(t_1)}(r) - U_{A(t_0)}(r)]\,A^{-1}(0) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_q} e^{\lambda r} R_{A(t_1)}(\lambda)\,[A(t_0)-A(t_1)]\,R_{A(t_0)}(\lambda)\,A^{-1}(0)\,d\lambda.$$

На контуре Γ_q справедлива оценка типа (4.25), поэтому

$$\|[U_{A(t_1)}(r) - U_{A(t_0)}(r)]\,A^{-1}(0)\| \leqslant$$
$$\leqslant c\int\limits_{\Gamma_q} e^{-\frac{q}{M}(1+|\tau|)^\beta r}\,\frac{|d\lambda|}{(1+|\tau|)^{2\beta}}\,\|[A(t_0)-A(t_1)]\,A^{-1}(t_0)\| \leqslant$$
$$\leqslant c_1\int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{(1+\tau)^{2\beta}}\,\|[A(t_0)-A(t_1)]\,A^{-1}(t_0)\| \leqslant$$
$$\leqslant c_2\|[A(t_0)-A(t_1)]\,A^{-1}(t_0)\|.$$

Для дальнейшего нам придется предположить, что выполнено следующее условие Гёльдера:

$$\|[A(t)-A(s)]\,A^{-1}(0)\|\leqslant c\,|t-s|^{\rho}\qquad(0<\rho\leqslant 1).\quad(4.29)$$

Тогда

$$\|[U_{A(t)}(r)-U_{A(s)}(r)]\,A^{-1}(0)\|\leqslant c_3\,|t-s|^{\rho}.\quad(4.30)$$

Теперь мы можем доказать следующее утверждение:

Лемма 4.3. *Если выполнены условия* (4.25) *с* $\beta>1/2$ *и* (4.29), *то функция* $U_{A(t)}(r)\,A^{-1}(0)$ *является непрерывной по норме операторов в треугольнике* T_{Δ}.

Доказательство.

$$\|[U_{A(t+\Delta t)}(r+\Delta r)-U_{A(t)}(r)]\,A^{-1}(0)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|[U_{A(t+\Delta t)}(r+\Delta r)-U_{A(t+\Delta t)}(r)]\,A^{-1}(0)\|+$$
$$+\|[U_{A(t+\Delta t)}(r)-U_{A(t)}(r)]\,A^{-1}(0)\|\leqslant c'\left(|\Delta r|^{2-1/\beta}+|\Delta t|^{\rho}\right).$$

Лемма доказана.

Оценим теперь величину $\|A^k(0)\,[U_{A(t_1)}(r)-U_{A(t_0)}(r)]\|$ $(k=0,\ 1)$ при $r>0$. Имеем:

$$\|A^k(0)\,[U_{A(t_1)}(r)-U_{A(t_0)}(r)]\|\leqslant$$
$$\leqslant c\int_{\Gamma_q} e^{-\frac{q}{M}(1+|\tau|)^{\beta}r}\,\frac{|\lambda|^{k+1}}{(1+|\tau|)^{2\beta}}\,|d\lambda|\,|t_1-t_0|^{\rho}\leqslant$$
$$\leqslant c_1\int_0^{\infty} e^{-\frac{q}{M}(1+\tau)^{\beta}r}\,\frac{\tau^{k+1}}{(1+\tau)^{2\beta}}\,d\tau\,|t_1-t_0|^{\rho}\leqslant$$
$$\leqslant c_1\int_0^{\infty} e^{-\frac{q}{M}(1+\tau)^{\beta}r}\,(1+\tau)^{\beta\left(\frac{k+1}{\beta}-2\right)}\,d\tau\,|t_1-t_0|^{\rho}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{c_2}{r^{\frac{k+2}{\beta}-2}}\int_0^{\infty} e^{-s}s^{\frac{k+2}{\beta}-3}\,ds\,|t_1-t_0|^{\rho},$$

где последний переход получен заменой $s=-\frac{q}{M}(1+\tau)^{\beta}r$.

Так как $\frac{k+2}{\beta}-3>k-1>-1$, то окончательно

$$\| A^k(0)[U_{A(t_1)}(r)-U_{A(t_0)}(r)]\| \leqslant c\frac{|t_1-t_0|^\rho}{r^{\frac{k+2}{\beta}-2}} \quad (k=0,\quad 1). \tag{4.31}$$

Лемма 4.4. *Функция* $A^k(0)\,U_{A(t)}(r)$ $(k=0,\ 1)$ *непрерывна по* t, r *при* $r>0$ *в смысле нормы операторов.*

Доказательство.

$$\| A^k(0)[U_{A(t+\Delta t)}(r+\Delta r)-U_{A(t)}(r)]\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| A^k(0)\,A^{-k}(t+\Delta t)\int\limits_r^{r+\Delta r} A^{k+1}(t+\Delta t)\,U_{A(t+\Delta t)}(s)\,ds\right\| +$$

$$+\| A^k(0)[U_{A(t+\Delta t)}(r)-U_{A(t)}(r)]\| \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\frac{|\Delta r|}{r^{\frac{k+1}{\beta}-1}}+\frac{|\Delta t|^\rho}{r^{\frac{k+2}{\beta}-2}}\right).$$

Лемма доказана.

Из леммы вытекает, что операторы $U_{A(t)}(t-s)$, $U_{A(s)}(t-s)$, $A(0)\,U_{A(t)}(t-s)$ и $A(0)\,U_{A(s)}(t-s)$ непрерывны по совокупности переменных t и s при $t>s$ в смысле нормы операторов. Тогда этим же свойством обладают в силу (4.29) и произведения $[A(t)-A(s)]\,A^{-1}(0)\times \times A(0)\,U_{A(s)}(t-s)$ и $A(0)\,U_{A(t)}(t-s)\,[A(s)-A(t)]\,A^{-1}(0)$. Далее, из (4.29) и (4.26) вытекает, что

$$\| [A(t)-A(s)]\,A^{-1}(0)\,A(0)\,U_{A(s)}(t-s)\| \leqslant c\,|t-s|^{\rho-\frac{2}{\beta}+1}$$

и

$$\| A(0)\,U_{A(t)}(t-s)\,[A(s)-A(t)]\,A^{-1}(0)\| \leqslant c\,|t-s|^{\rho-\frac{2}{\beta}+1}.$$

Для того чтобы особенность была слабой, нужно, чтобы $\rho-\frac{2}{\beta}+1>-1$, т. е. $\rho>\frac{2}{\beta}-2$. Такое $\rho<1$ существует, если $\frac{2}{\beta}-2<1$, т. е. $\beta>\frac{2}{3}$.

Нами доказана

Лемма 4.5. *Если выполнено условие* (4.25) *с* $\beta>2/3$ *и условие* (4.29) *с* $\rho>2\,(1/\beta-1)$, *то функции*

$U_{A(t)}(t-s)$, $U_{A(s)}(t-s)$, $[A(t)-A(s)]\,U_{A(s)}(t-s)$ и $A(0)\,U_{A(t)}(t-s)\,[A(s)-A(t)]\,A^{-1}(0)$ *являются операторными ядрами со слабыми особенностями, причем они при* $t>s$ *непрерывны по совокупности переменных* t *и* s *в смысле нормы операторов.*

К сожалению, из условий теорем 4.1 и 4.2 одно осталось еще непроверенным. А именно, мы пока не показали, что оператор $U_{A(t)}(t-s)\,[A(s)-A(t)]$ допускает замыкание, являющееся ядром со слабой особенностью.

Наложим дополнительное условие на оператор $A(t)$: при $x_0\in\mathscr{D}(A)$ имеет место неравенство

$$\|A^{-1}(t)\,[A(s)-A(t)]\,x_0\|\leqslant c\,|t-s|^{\rho}\,\|x_0\|. \tag{4.32}$$

Из этого условия вытекает, что

$$\|A^{-1}(t)\,A(s)\,x_0\|\leqslant\left(cT^{\rho}+1\right)\|x_0\|=c_1\|x_0\|$$

и, следовательно, оператор $A^{-1}(t)\,A(s)$ допускает замыкание $\overline{A^{-1}(t)\,A(s)}$, равномерно ограниченное в T_{Δ}.

Далее, при $x_0\in\mathscr{D}(A)$

$$\begin{gathered}\|[A^{-1}(0)\,A(t+\Delta t)-A^{-1}(0)\,A(t)]\,x_0\|\leqslant\\ \leqslant\|A^{-1}(0)\,A(t)\,[A^{-1}(t)\,(A(t+\Delta t)-A(t))]\,x_0\|\leqslant\\ \leqslant c_1c\,|\Delta t|^{\rho}\,\|x_0\|,\end{gathered}$$

т. е. функция $\overline{A^{-1}(0)\,A(t)}$ непрерывна по норме операторов. Аналогично показывается непрерывность по норме $\overline{A^{-1}(t)\,A(0)}$.

Тогда

$$\begin{gathered}\overline{U_{A(t)}(t-s)\,[A(s)-A(t)]}=A(t)\,A^{-1}(0)\,A(0)\,U_{A(t)}(t-s)\times\\ \times\overline{A^{-1}(t)\,A(0)}\,\overline{\left[A^{-1}(0)\,A(s)-A^{-1}(0)\,A(t)\right]}\end{gathered}$$

будет при $t>s$ непрерывной в смысле нормы операторов и

$$\|\overline{U_{A(t)}(t-s)\,[A(s)-A(t)]}\|\leqslant c\,|t-s|^{\rho-2/\beta+1}.$$

Итак, мы пришли к следующей теореме:

Теорема 4.3. *Если выполнены условия* (4.25) *с* $\beta>2/3$, (4.29) *и* (4.32) *с* $\rho>2(1/\beta-1)$, *то ослабленная задача Коши для уравнения* (3.1) *корректна на* $\mathscr{D}(A)$. *Эволю-*

ционный оператор $U(t, s)$, *отвечающий этой задаче, обладает свойствами:*

1°. *Оператор* $U(t, s)$ *непрерывен по норме при* $t > s$.

2°. *Оператор* $U(t, s)A^{-1}(0)$ *непрерывен по норме в замкнутом треугольнике* T_Δ: $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

3°. *Оператор* $A(t)U(t, s)A^{-1}(s)$ *непрерывен по норме при* $t > s$.

4°. *Оператор* $U(t, s)A^{-1}(0)$ *дифференцируем по норме операторов при* $t > s$.

9. Абстрактное параболическое уравнение. В п. 6 было найдено следующее условие параболичности:

Теорема 4.4. *Если, кроме условий теоремы* 4.1, *еще выполняется следующее: оператор*

$$\overline{A(0)U_{A(t)}(t-r)[A(r)-A(t)]}$$

равномерно ограничен при $t-r \geqslant \delta > 0$, *то при всяком* $x_0 \in E$ *функция* $U(t, s)x_0$ *удовлетворяет уравнению* (3.1) *при* $t > s$.

Из условий теоремы 4.3 вытекает справедливость условий теоремы 4.4. Действительно,

$$\|\overline{A(0)U_{A(t)}(t-r)[A(r)-A(t)]}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A(0)A^{-1}(t)\| \|A^2(t)U_{A(t)}(t-r)\| \|\overline{A^{-1}(t)[A(r)-A(t)]}\| \leqslant$$
$$\leqslant c|t-r|^{\rho+1-\frac{3}{\beta}} \leqslant \frac{c}{\delta^{\frac{3}{\beta}-1-\rho}}.$$

Теорема 4.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.3. *Если, кроме того, уравнение* (4.10) *с «замороженным» коэффициентом при всяком* t_0 *является абстрактным параболическим и полугруппа* $U_{A(t_0)}(r)$ *ограничена равномерно по* t_0, *то и уравнение* (3.1) *является абстрактным параболическим. Задача Коши для него равномерно корректна.*

Доказательство. При всяком $x_0 \in E$ функция $x(t, s) = U(t, s)x_0$ удовлетворяет уравнению (3.1) при $t > s$. Из интегрального уравнения (4.14) следует, что оператор $U(t, s)$ равномерно по t и s ограничен. На $\mathscr{D}(A)$ $\lim\limits_{t\to s} U(t, s)x_0 = x_0$

и, значит, при любом $x_0 \in E$ также удовлетворяется начальное условие $x(s, s) = x_0$. Единственность решения $x(t, s)$ доказана в теореме 4.1. Остальные требуемые свойства решения $x(t, s)$ вытекают непосредственно из свойств оператора $U(t, s)$.

Наконец, равномерная корректность задачи Коши, как это отмечалось в п. 1, следует из параболичности и равномерной ограниченности оператора $V(t, s)$, которая выводится из равномерной ограниченности оператора

$$A(0)\, U_{A(t)}(t-s)\, A^{-1}(0) = \\ = A(0)\, A^{-1}(t)\, U_{A(t)}(t-s)\, A(t)\, A^{-1}(0)$$

с помощью интегрального уравнения (4.16).

Теорема доказана.

Частным случаем теоремы 4.5 является

Теорема 4.6. *Пусть оператор* $A(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\| R_{A(t)}(\lambda) \| \leqslant \frac{M}{1+|\lambda|} \qquad (\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0), \tag{4.33}$$

где M *не зависит от* t. *Если выполнены* (4.29) *и* (4.32) *с любым* $\rho > 0$, *то утверждение теоремы* 4.5 *справедливо.*

Действительно, условие (4.25) выполнено с $\beta = 1$, а уравнение с «замороженным» коэффициентом является абстрактным параболическим в силу теоремы 3.8 гл. I. Теорема доказана.

Замечание. Несколько более сложным путем доказано, что утверждение теоремы 4.6 справедливо и без условия (4.32) (см. литературные указания).

При равномерной корректности задачи Коши для уравнений с «замороженным» коэффициентом и равномерной ограниченности их эволюционных операторов условие (4.25) можно заменить на условие (4.26). Действительно, условие (4.25) использовалось при оценке норм операторов $[U_{A(t_1)}(r) - U_{A(t_0)}(r)]\, A^{-1}(0)$, $A^k(0)\,[U_{A(t_1)}(r) - U_{A(t_0)}(r)]$ и $A^{k+1}(t)\, U_{A(t)}(s)$ $(k = 0, 1)$. Покажем, что аналогичные оценки можно получить непосредственно из (4.26) и (4.29). Начнем с последнего оператора. Из (4.26) имеем

$$\| A^2(t)\, U_{A(t)}(s) \| = \left\| A(t)\, U_{A(t)}\left(\frac{s}{2}\right) A(t)\, U_{A(t)}\left(\frac{s}{2}\right) \right\| \leqslant \frac{c_1}{s^{4/\beta - 2}}.$$

Оценки норм первых двух операторов получаются сложнее. Воспользуемся тождеством

$$U_1(r)-U_0(r)=\left[U_1\left(\frac{r}{2}\right)-U_0\left(\frac{r}{2}\right)\right]U_0\left(\frac{r}{2}\right)+$$
$$+A_1U_1\left(\frac{r}{2}\right)\left[U_1\left(\frac{r}{2}\right)-U_0\left(\frac{r}{2}\right)\right]A_0^{-1}+$$
$$+U_1\left(\frac{r}{2}\right)[A_1-A_0]\,A_0^{-1}U_0\left(\frac{r}{2}\right)+U_1(r)\,[A_0-A_1]\,A_0^{-1},$$

где сокращенно обозначено $A(t_i)=A_i$ и $U_{A(t_i)}=U_i$ $(i=0,\ 1)$.

Применим теперь интегральное представление для разности полугрупп (см. (7.21), гл. I). Тогда получим

$$U_1(r)-U_0(r)=\int_0^{r/2}U_1\left(\frac{r}{2}-s\right)[A_0-A_1]\,U_0\left(\frac{r}{2}+s\right)ds+$$
$$+A_1U_1\left(\frac{r}{2}\right)\int_0^{r/2}U_1\left(\frac{r}{2}-s\right)[A_0-A_1]\,A_0^{-1}U_0(s)\,ds+$$
$$+U_1\left(\frac{r}{2}\right)[A_1-A_0]\,A_0^{-1}U_0\left(\frac{r}{2}\right)+U_1(r)\,[A_0-A_1]\,A_0^{-1}.$$

Из этого тождества сразу следует оценка

$$\|U_{A(t_1)}(r)-U_{A(t_0)}(r)\|\leqslant$$
$$\leqslant c\left\{\int_0^{r/2}\frac{ds}{(r/2+s)^{2/\beta-1}}+\frac{1}{(r/2)^{2/\beta-1}}\cdot\frac{r}{2}+2\right\}|t_1-t_0|^{\rho}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{c_1}{r^{2/\beta-2}}\,|t_1-t_0|^{\rho}. \qquad (4.34)$$

Для оценки оператора $[U_{A(t_1)}(r)-U_{A(t_0)}(r)]\,A^{-1}(0)$ можно воспользоваться более простым тождеством:

$$U_1(r)-U_0(r)=$$
$$=\left[U_1\left(\frac{r}{2}\right)-U_0\left(\frac{r}{2}\right)\right]U_0\left(\frac{r}{2}\right)+U_1\left(\frac{r}{2}\right)\left[U_1\left(\frac{r}{2}\right)-U_0\left(\frac{r}{2}\right)\right]=$$
$$=\int_0^{r/2}U_1\left(\frac{r}{2}-s\right)[A_0-A_1]\,U_0\left(\frac{r}{2}+s\right)ds+$$
$$+U_1\left(\frac{r}{2}\right)\int_0^{r/2}U_1\left(\frac{r}{2}-s\right)[A_0-A_1]\,U_1(s)\,ds,$$

откуда

$$\| [U_{A(t_1)}(r) - U_{A(t_0)}(r)] A^{-1}(0) \| \leqslant c\, |t_1 - t_0|^\rho. \qquad (4.35)$$

Наконец, из тождества

$$A_1 [U_1(r) - U_0(r)] =$$

$$= A_1 U_1\left(\frac{r}{2}\right)\left[U_1\left(\frac{r}{2}\right) - U_0\left(\frac{r}{2}\right)\right] + U_1\left(\frac{r}{2}\right)[A_1 - A_0]\, U_0\left(\frac{r}{2}\right) +$$

$$+ \left[U_1\left(\frac{r}{2}\right) - U_0\left(\frac{r}{2}\right)\right] A_0 U_0\left(\frac{r}{2}\right) + (A_0 - A_1)\, U_0(r)$$

и неравенств (4.34) и (4.29) вытекает, что

$$\| A(t_1) [U_{A(t_1)}(r) - U_{A(t_0)}(r)] \| \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\frac{|t_1 - t_0|^\rho}{r^{4/\beta - 3}} + \frac{|t_1 - t_0|^\rho}{r^{2/\beta - 3}}\right) \leqslant c_1 \frac{|t_1 - t_0|^\rho}{r^{4/\beta - 3}}. \qquad (4.36)$$

Оценки (4.34) — (4.36) заменяют оценки (4.28) и (4.31). Таким образом, справедлива

Теорема 4.7. *Утверждение теоремы* 4.5 *остается справедливым, если вместо условия* (4.25) *выполнено условие* (4.26) *с* $\beta > {}^2/_3$.

§ 5. Абстрактное параболическое уравнение с оператором, имеющим переменную область определения

1. Постановка задачи. До сих пор мы предполагали, что область определения оператора $A(t)$ не зависит от t. При этом мы широко пользовались тем, что в этих условиях оператор $A(t)\,A^{-1}(s)$ ограничен, предполагали и использовали его сильную или равномерную непрерывность, дифференцируемость по t и s и т. п. Если область определения $\mathscr{D}(A(t))$ изменяется с изменением t, то оператор $A(t)\,A^{-1}(s)$ уже может быть определенным не на всем пространстве и даже на неплотном множестве. Требования сильной непрерывности или сильной дифференцируемости оператора $A(t)$ на $\mathscr{D}(A)$ теряют смысл. Однако случай, когда в уравнении (3.1) оператор $A(t)$ имеет переменную область определения, важен. Так, например, для уравнений в частных производных он соответствует тому, что граничные условия задачи зависят от времени t.

Предположим, что уравнение с «замороженным» коэффициентом является абстрактным параболическим и выполнено условие (4.33). Предположения гладкости, которые нам будут необходимы, мы будем вводить не в терминах оператора $A(t)$, а в терминах обратного оператора $A^{-1}(t)$ или резольвенты $R_{A(t)}(\lambda)$. Итак, пусть выполнены два условия:

1°. Оператор $A^{-1}(t)$ непрерывно дифференцируем по t на $[0, T]$ и

$$\left\| \frac{dA^{-1}(t)}{dt} - \frac{dA^{-1}(s)}{ds} \right\| \leqslant K |t-s|^{\alpha}. \tag{5.1}$$

2°. Существуют константы N и ρ, $0 \leqslant \rho < 1$ такие, что

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} R_{A(t)}(\lambda) \right\| \leqslant \frac{N}{|\lambda|^{1-\rho}} \tag{5.2}$$

в секторе $|\arg \lambda| \leqslant \pi - \varphi$ $(\varphi < \pi/2)$.

Оказывается, что при этих условиях можно также построить эволюционный оператор для уравнения (3.1).

Установим сначала ряд вспомогательных предложений.

Лемма 5.1. *При условиях* (5.1) *и* (5.2) *производная по t резольвенты оператора $A(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, причем*

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} R_{A(t)}(\lambda) - \frac{\partial}{\partial r} R_{A(r)}(\lambda) \right\| \leqslant c\left[|t-r| |\lambda|^{\rho} + |t-r|^{\alpha} \right]. \tag{5.3}$$

Доказательство. Оценим сначала приращение резольвенты. В силу (5.2), имеем при $t > r$:

$$\| R_{A(t)}(\lambda) - R_{A(r)}(\lambda) \| = \left\| \int_r^t \frac{\partial}{\partial s} R_{A(s)}(\lambda)\, ds \right\| \leqslant N \frac{t-r}{|\lambda|^{1-\rho}}. \tag{5.4}$$

Тогда

$$\| A(t) R_{A(t)}(\lambda) - A(r) R_{A(r)}(\lambda) \| = \\ = |\lambda| \| R_{A(t)}(\lambda) - R_{A(r)}(\lambda) \| \leqslant N(t-r) |\lambda|^{\rho}. \tag{5.5}$$

Вычисляем

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{A(t)}(\lambda) = A(t) R_{A(t)}(\lambda) \frac{dA^{-1}(t)}{dt} A(t) R_{A(t)}(\lambda),$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{A(t)}(\lambda) - \frac{\partial}{\partial r} R_{A(r)}(\lambda) =$$

$$= [A(t) R_{A(t)}(\lambda) - A(r) R_{A(r)}(\lambda)] \frac{dA^{-1}(t)}{dt} A(t) R_{A(t)}(\lambda) +$$

$$+ A(r) R_{A(r)}(\lambda) \left[\frac{dA^{-1}(t)}{dt} - \frac{dA^{-1}(r)}{dr} \right] A(t) R_{A(t)}(\lambda) +$$

$$+ A(r) R_{A(r)}(\lambda) \frac{dA^{-1}(r)}{dr} [A(t) R_{A(t)}(\lambda) - A(r) R_{A(r)}(\lambda)]. \quad (5.6)$$

Из этого тождества с помощью (5.5) и (5.1) получаем (5.3). Лемма доказана.

2. Свойства решений уравнения с «замороженным» коэффициентом. Введем в рассмотрение функцию $U_{A(t)}(t-s)$, определенную в треугольнике T_Δ: $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Лемма 5.2. *При $t > s$ функция $U_{A(t)}(t-s)$ непрерывна по t, s в смысле нормы операторов. При $t \geqslant s$ функция $U_{A(t)}(t-s)$ сильно непрерывна по t и s.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения покажем, что функция $U_{A(t)}(r)$ при $r > 0$ непрерывна по t и r в смысле нормы операторов. Имеем

$$U_{A(t+h)}(r+k) - U_{A(t)}(r) =$$
$$= U_{A(t+h)}(r+k) - U_{A(t)}(r+k) +$$
$$+ U_{A(t)}(r+k) - U_{A(t)}(r). \quad (5.7)$$

Для оценки первой разности воспользуемся интегральным представлением полугруппы $U_{A(t)}(r)$:

$$U_{A(t+h)}(r+k) - U_{A(t)}(r+k) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_q} e^{\lambda(r+k)} [R_{A(t+h)}(\lambda) - R_{A(t)}(\lambda)]\, d\lambda.$$

Считая $|k| \leqslant r/2$ и пользуясь (5.4), получаем

$$\| U_{A(t+h)}(r+k) - U_{A(t)}(r+k) \| \leqslant$$
$$\leqslant c|h| \int_0^\infty e^{-\frac{q}{M}(1+\tau)\frac{r}{2}} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^{1-\rho}} \leqslant \frac{c_1 |h|}{r^\rho} \to 0 \quad (5.8)$$

при $h \to 0$.

Вторая разность легко оценивается так:

$$\|U_{A(t)}(r+k)-U_{A(t)}(r)\|=$$
$$=\left\|\int_r^{r+k} A(t)\,U_{A(t)}(\tau)\,d\tau\right\|\leqslant c\left|\int_r^{r+k}\frac{d\tau}{\tau}\right|=c\left|\ln\left(1+\frac{k}{r}\right)\right|.$$

Она также стремится к нулю при $k\to 0$. Первое утверждение леммы доказано.

Пусть теперь $t=s$. Из условия (4.33) вытекает равномерная по t и r ограниченность операторов $U_{A(t)}(r)$, поэтому достаточно доказать, что $(U_{A(t+h)}(k)-I)\,x_0\to 0$ на плотном в E множестве, например на $\mathcal{D}(A(t))$. Если $x_0\in\mathcal{D}(A(t))$, то $x_0=A^{-1}(t)\,y_0$ и

$$(U_{A(t+h)}(k)-I)\,x_0=[U_{A(t+h)}(k)-I]\,A^{-1}(t+h)\,y_0-$$
$$-[U_{A(t+h)}(k)-I]\,[A^{-1}(t+h)-A^{-1}(t)]\,y_0.$$

Первое слагаемое есть величина порядка k в силу равномерной по h ограниченности полугруппы $U_{A(t+h)}(r)$, второе — порядка h в силу того же и условия 1°.

Оценим теперь производные функции $U_{A(t)}(t-s)$. Для производной по s получаем

$$\left\|\frac{\partial}{\partial s}U_{A(t)}(t-s)\right\|=\|-A(t)\,U_{A(t)}(t-s)\|\leqslant\frac{c}{t-s}.\tag{5.9}$$

Сложнее обстоит дело с производной по t. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}U_{A(t)}(t-s)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)U_{A(t)}(t-s)-\frac{\partial}{\partial s}U_{A(t)}(t-s).\tag{5.10}$$

Воспользуемся интегральным представлением полугруппы $U_{A(t)}(\tau)$. Тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)U_{A(t)}(t-s)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_q} e^{\lambda(t-s)}\frac{\partial}{\partial t}R_{A(t)}(\lambda)\,d\lambda.$$

Из условия (5.2) следует, что

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)U_{A(t)}(t-s)\right\|\leqslant$$
$$\leqslant c\int_0^\infty e^{-\frac{q}{M}(1+\tau)(t-s)}\frac{|d\lambda|}{|\lambda|^{1-\rho}}\leqslant\frac{c_1}{(t-s)^\rho}.\tag{5.11}$$

Из (5.9), (5.10) и (5.11) вытекает оценка

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} U_{A(t)}(t-s) \right\| \leqslant \frac{c}{t-s}. \tag{5.12}$$

Обратим внимание на тот важный для дальнейшего факт, что сумма производных по t и по s имеет при $t=s$ слабую особенность, в то время как каждая из них имеет сильную особенность.

3. Построение эволюционного оператора. Попытаемся эволюционный оператор найти в виде

$$U(t, s) = U_{A(t)}(t-s) + \int_s^t U_{A(t)}(t-\tau) R(\tau, s)\, d\tau. \tag{5.13}$$

Если формально вычислить

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} U_{A(t)}(t-s) + \int_s^t \frac{\partial}{\partial t} U_{A(t)}(t-\tau) R(\tau, s)\, d\tau + R(t, s)$$

и

$$A(t) U(t, s) =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial s} U_{A(t)}(t-s) - \int_s^t \frac{\partial}{\partial \tau} U_{A(t)}(t-\tau) R(\tau, s)\, d\tau,$$

то для того, чтобы удовлетворить уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A(t) U, \tag{5.14}$$

достаточно выбрать $R(t, s)$ решением интегрального уравнения

$$R(t, s) = R_1(t, s) + \int_s^t R_1(t, \tau) R(\tau, s)\, d\tau, \tag{5.15}$$

где

$$R_1(t, s) = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right) U_{A(t)}(t-s).$$

Для функции $R_1(t, s)$ мы в (5.11) уже получили оценку

$$\| R_1(t, s) \| \leqslant \frac{c}{(t-s)^\rho} \tag{5.16}$$

Лемма 5.3. *Функция $R_1(t, s)$ при $t > s$ непрерывна по t в смысле нормы операторов и, более того, удовлетворяет условию Гёльдера.*

Доказательство. Считая $r < t$, оценим приращение функции $R_1(t, s)$ по t. Имеем

$$R_1(t, s) - R_1(r, s) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_q} e^{\lambda(t-s)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} R_{A(t)}(\lambda) - \frac{\partial}{\partial r} R_{A(r)}(\lambda) \right\} d\lambda +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_q} (e^{\lambda(t-s)} - e^{\lambda(r-s)}) \frac{\partial}{\partial r} R_{A(r)}(\lambda)\, d\lambda = \mathrm{I} + \mathrm{II}. \tag{5.17}$$

Для первого интеграла из (5.3) получаем оценку

$$\| \mathrm{I} \| \leqslant c \int\limits_0^\infty e^{-\frac{q}{M}(1+\tau)(t-s)} [(t-r) |\lambda|^\rho + (t-r)^\alpha]\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant c \left[\frac{t-r}{(t-s)^{1+\rho}} + \frac{(t-r)^\alpha}{t-s} \right].$$

Второй интеграл в (5.17) представим в виде

$$\mathrm{II} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{r-s}^{t-s} \int\limits_{\Gamma_q} \lambda e^{\lambda\theta} \frac{\partial}{\partial r} R_{A(r)}(\lambda)\, d\lambda\, d\theta.$$

Так как в силу условия (5.2)

$$\left\| \int\limits_{\Gamma_q} \lambda e^{\lambda\theta} \frac{\partial}{\partial r} R_{A(r)}(\lambda)\, d\lambda \right\| \leqslant c \int\limits_0^\infty e^{-\frac{q}{M}(1+\tau)\theta} |\lambda|^\rho\, d\tau \leqslant \frac{c}{\theta^{1+\rho}},$$

то

$$\|\mathrm{II}\| \leqslant c \int_{r-s}^{t-s} \frac{d\theta}{\theta^{1+\rho}} = c_1 \left[(r-s)^{-\rho} - (t-s)^{-\rho}\right] =$$

$$= c_1 (r-s)^{-\rho} \left[1 - \left(\frac{r-s}{t-s}\right)^{\rho}\right] \leqslant$$

$$\leqslant c_1 (r-s)^{-\rho} \left[1 - \frac{r-s}{t-s}\right] = c_1 \frac{t-r}{(r-s)^{\rho}(t-s)}.$$

Окончательно

$$\|R_1(t, s) - R_1(r, s)\| \leqslant c \left[\frac{t-r}{(t-s)(r-s)^{\rho}} + \frac{(t-r)^{\alpha}}{t-s}\right]. \tag{5.18}$$

Лемма доказана.

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 4.1, мы приходим к выводу, что при каждом s существует решение $R(t, s)$ интегрального уравнения (5.15), непрерывное по t при $t > s$ в смысле нормы операторов и имеющее слабую особенность при $t = s$:

$$\|R(t, s)\| \leqslant \frac{c}{(t-s)^{\rho}}. \tag{5.19}$$

Лемма 5.4. *Функция $R(t, s)$ при $t > s$ удовлетворяет условию Гёльдера по t.*

Доказательство. Вычисляем

$$R(t, s) - R(r, s) =$$

$$= R_1(t, s) - R_1(r, s) + \int_r^t R_1(t, \tau) R(\tau, s)\, d\tau +$$

$$+ \int_s^r [R_1(t, \tau) - R_1(r, \tau)] R(\tau, s)\, d\tau = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.$$

Для члена I имеется оценка (5.18). Для II из (5.16) и (5.19) получаем

$$\|\mathrm{II}\| \leqslant c \int_r^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\rho}(\tau-s)^{\rho}} \leqslant c_1 \frac{(t-r)^{1-\rho}}{(r-s)^{\rho}}. \tag{5.20}$$

Наконец, для III из (5.18) и (5.19) вытекает, что

$$\|\mathrm{III}\| \leqslant c \int_s^r \left[\frac{t-r}{(t-\tau)(r-\tau)^\rho} + \frac{(t-r)^\alpha}{t-\tau}\right] \frac{d\tau}{(\tau-s)^\rho} \leqslant$$

$$\leqslant c(t-r)^\gamma \int_s^r \frac{d\tau}{(r-\tau)^{\rho+\gamma}(\tau-s)^\rho} +$$

$$+ c(t-r)^{\alpha-\varepsilon} \int_s^r \frac{d\tau}{(r-\tau)^{1-\varepsilon}(\tau-s)^\rho} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \left[\frac{(t-r)^\gamma}{(r-s)^{2\rho+\gamma-1}} + \frac{(t-r)^{\alpha-\varepsilon}}{(r-s)^{\rho-\varepsilon}}\right], \qquad (5.21)$$

где γ и $\varepsilon > 0$ выбраны так, что $\rho + \gamma < 1$ и $\varepsilon < \alpha$ *).

Оценки (5.18), (5.20) и (5.21) при $t - s \geqslant \delta/2$ и $r - s \geqslant \delta/2$ приводят к неравенству

$$\|R(t, s) - R(r, s)\| \leqslant c(\delta)(t-r)^\varkappa, \qquad (5.22)$$

где $\varkappa = \min\{\gamma, \alpha - \varepsilon\}$.

Лемма доказана.

Теперь можно перейти к доказательству того, что оператор $U(t, s)$, определенный формулой (5.13), удовлетворяет уравнению (5.14). Для этого введем в рассмотрение функции

$$W_h(t, s) = \int_s^{t-h} U_{A(t)}(t-\tau) R(\tau, s)\, d\tau.$$

В силу оценки (5.19) функции $W_h(t, s)$ равномерно по t стремятся к функции

$$W(t, s) = \int_s^t U_{A(t)}(t-\tau) R(\tau, s)\, d\tau.$$

*) Более точные рассуждения приводят к оценке (см. [105])

$$\|\mathrm{III}\| \leqslant c \left\{ \frac{t-r}{(t-s)(r-s)^{2\rho-1}} + \frac{(t-r)^{1-\rho}(r-s)^{1-\rho}}{t-s} + \right.$$

$$\left. + \frac{(t-r)^{1-\rho}}{(t-s)^\rho} + \frac{(t-r)^\alpha}{(t-s)^\rho}\left[\ln\frac{t-s}{t-r} + 1\right] \right\}.$$

Для производной по t при $t > s$ получим

$$\frac{\partial W_h}{\partial t} = U_{A(t)}(h) R(t-h, s) + \\ + \int_s^{t-h} \frac{\partial}{\partial t} U_{A(t)}(t-\tau)[R(\tau, s) - R(t, s)]\, d\tau + \\ + \int_s^{t-h} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) U_{A(t)}(t-\tau)\, d\tau R(t, s) - \\ - U_{A(t)}(h) R(t, s) + U_{A(t)}(t-s) R(t, s).$$

В силу оценок (5.22), (5.12) и (5.11) все члены справа имеют предел при $h \to 0$ равномерно на любом отрезке $s + \delta \leqslant t \leqslant T$, поэтому существует

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_s^t \frac{\partial}{\partial t} U_{A(t)}(t-\tau)[R(\tau, s) - R(t, s)]\, d\tau - \\ - \int_s^t R_1(t, \tau)\, d\tau R(t, s) + U_{A(t)}(t-s) R(t, s).$$

Отсюда

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} U_{A(t)}(t-s) + \\ + \int_s^t \frac{\partial}{\partial t} U_{A(t)}(t-\tau)[R(\tau, s) - R(t, s)]\, d\tau - \\ - \int_s^t R_1(t, \tau)\, d\tau R(t, s) + U_{A(t)}(t-s) R(t, s). \qquad (5.23)$$

Далее,

$$A(t) U(t, s) = \\ = -\frac{\partial}{\partial s} U_{A(t)}(t-s) - \int_s^t \frac{\partial}{\partial \tau} U_{A(t)}(t-\tau)[R(\tau, s) - R(t, s)]\, d\tau - \\ - R(t, s) + U_{A(t)}(t-s) R(t, s).$$

Таким образом, в силу интегрального уравнения (5.15),

$$\frac{\partial U}{\partial t} - A(t)\,U(t, s) =$$

$$= -R_1(t, s) + R(t, s) - \int\limits_s^t R_1(t, \tau)\,[R(\tau, s) - R(t, s)]\,d\tau -$$

$$- \int\limits_s^t R_1(t, \tau)\,d\tau R(t, s) = 0.$$

Из уравнения (5.13) следует, что оператор $U(t, s)$, так же как и оператор $U_{A(t)}(t-s)$, сильно непрерывен по t при $s \leqslant t \leqslant T$ и $U(s, s) = I$. Далее, из формулы (5.23) получается оценка

$$\left\| \frac{\partial U}{\partial t} \right\| \leqslant \frac{c}{t-s}.$$

Заметим, что производная $\dfrac{\partial U(t, s)}{\partial t}$ отличается от производной $\dfrac{\partial U_{A(t)}(t-s)}{\partial t}$ на члены, имеющие слабую особенность при $t = s$.

4. Свойства оператора $U(t, s)$ как функции от s. Введем в рассмотрение оператор $\tilde{U}(t, s)$, определяемый формулой

$$\tilde{U}(t, s) = U_{A(s)}(t-s) + \int\limits_s^t Q(t, \tau)\,U_{A(s)}(\tau - s)\,d\tau,$$

где ядро $Q(t, \tau)$ находится из интегрального уравнения

$$Q(t, s) = Q_1(t, s) + \int\limits_s^t Q(t, \tau)\,Q_1(\tau, s)\,d\tau, \tag{5.24}$$

в котором

$$Q_1(t, s) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right) U_{A(s)}(t-s).$$

Так же, как и выше, показывается, что $Q_1(t, s)$ непрерывно по s при $s < t$ в смысле нормы операторов и

$$\|Q_1(t, s)\| \leqslant \frac{c}{(t-s)^\rho}.$$

Отсюда следует существование решения интегрального уравнения (5.24), имеющего слабую особенность. Имеют место предложения, аналогичные леммам 5.3 и 5.4, утверждающие, что функции $Q_1(t, s)$ и $Q(t, s)$ удовлетворяют условию Гёльдера по s при $s < t$. Наконец, показывается, что оператор $\tilde{U}(t, s)$ имеет при $s < t$ производную по s в смысле нормы операторов, оператор $\tilde{U}(t, s) A(s)$ допускает ограниченное замыкание и

$$\frac{\partial \tilde{U}(t, s)}{\partial s} = -\overline{\tilde{U}(t, s) A(s)}. \tag{5.25}$$

Имеет место оценка

$$\left\| \frac{\partial \tilde{U}(t, s)}{\partial s} \right\| \leqslant \frac{c}{t-s}.$$

Из уравнений (5.14) и (5.25) вытекает, что

$$\tilde{U}(t, s) = U(t, s). \tag{5.26}$$

Действительно, производная от $\tilde{U}(t, \tau) U(\tau, s)$ по τ при $0 \leqslant s < \tau < t \leqslant T$ равна нулю, поэтому эта функция не зависит от τ. Пользуясь сильной непрерывностью по τ обоих множителей, полагая $\tau = t$ и $\tau = s$, приходим к (5.26).

Из свойства (5.25) следует единственность решения ослабленной задачи Коши для уравнения (3.1). Действительно, пусть $x(\tau)$ — ослабленное решение уравнения (3.1) на отрезке $[s, T]$. Тогда

$$\frac{dx}{d\tau} - A(\tau) x(\tau) = 0 \qquad (s < \tau \leqslant T).$$

Применяя к обеим частям равенства оператор $U(t, \tau)$ при $t > \tau$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [U(t, \tau) x(\tau)] = 0,$$

т. е.

$$U(t, \tau) x(\tau) = \text{const}.$$

Устремляя τ к s и к t, имеем

$$x(t) = U(t, s)\, x(s),$$

что и требовалось доказать.

5. Неоднородное уравнение. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x + f(t) \tag{5.27}$$

и покажем, что в случае, когда функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$\| f(t) - f(\tau) \| \leqslant c\, | t - \tau |^{\gamma}, \tag{5.28}$$

при всяком $x_0 \in E$ существует решение ослабленной задачи Коши для уравнения (5.27), определяемое по формуле

$$x(t, s) = U(t, s)\, x_0 + \int_s^t U(t, \sigma)\, f(\sigma)\, d\sigma. \tag{5.29}$$

Из свойств оператора $U(t, s)$ следует, что первое слагаемое является решением ослабленной задачи Коши для однородного уравнения. Исследуем функцию

$$y(t, s) = \int_s^t U(t, \sigma)\, f(\sigma)\, d\sigma. \tag{5.30}$$

Рассуждая так же, как при выводе формулы (5.23), можно вычислить

$$\frac{dy}{dt} = \int_s^t \frac{\partial}{\partial t} U(t, \sigma)\, [f(\sigma) - f(t)]\, d\sigma +$$

$$+ \int_s^t \left[\frac{\partial}{\partial t} U(t, \sigma) - \frac{\partial}{\partial t} U_{A(t)}(t - \sigma)\right] f(t)\, d\sigma +$$

$$+ \int_s^t \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\right) U_{A(t)}(t - \sigma)\, f(t)\, d\sigma + U_{A(t)}(t - s)\, f(t).$$

При этом первый интеграл абсолютно сходится в силу условия (5.28), второй — вследствие того, что, как было отмечено, оператор в скобках имеет слабую особенность, третий — в силу (5.11). Тогда

$$\frac{dy}{dt}=\int_s^t\left[\frac{\partial}{\partial t}U(t,\ \sigma)f(\sigma)+\frac{\partial}{\partial\sigma}U_{A(t)}(t-\sigma)f(t)\right]d\sigma+$$

$$+U_{A(t)}(t-s)f(t)=A(t)\int_s^t[U(t,\sigma)f(\sigma)-U_{A(t)}(t-\sigma)f(t)]\,d\sigma+$$

$$+U_{A(t)}(t-s)f(t). \quad (5.31)$$

Далее,

$$\int U_{A(t)}(t-\sigma)f(t)\,d\sigma=$$

$$=-\int_s^t\frac{\partial}{\partial\sigma}U_{A(t)}(t-\sigma)A^{-1}(t)f(t)\,d\sigma=$$

$$=U_{A(t)}(t-s)A^{-1}(t)f(t)-A^{-1}(t)f(t). \quad (5.32)$$

Из (5.31) и (5.32) следует, что интеграл (5.30) принадлежит $\mathscr{D}(A(t))$ и

$$\frac{dy}{dt}=Ay+f(t).$$

Мы пришли к следующему утверждению:

Теорема 5.1. *Если выполнены условия* (4.33), (5.1), (5.2) *и* (5.28), *то при всяком* $x_0\in E$ *и* $s\in[0,\ T)$ *существует единственное решение ослабленной задачи Коши для уравнения* (5.27) *на отрезке* $[s,\ T]$, *определяемое по формуле* (5.29).

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Гиперболический случай. Задача Коши

1. Уравнение с постоянным оператором. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} = B^2u \qquad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{1.1}$$

где B — неограниченный линейный оператор с плотной в E областью определения $\mathscr{D}(B)$, имеющий регулярные точки.

Определение 1.1. *Решением* уравнения (1.1) будем называть функцию $u(t)$ со значениями в $\mathscr{D}(B^2)$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую уравнению (1.1) на отрезке $[0, T]$.

Наложим еще одно условие, условие B), на решение уравнения (1.1): функция $u'(t)$ принимает значения из $\mathscr{D}(B)$, и функция $Bu'(t)$ непрерывна на $[0, T]$.

Из условия B) следует, что

$$\frac{dBu(t)}{dt} = Bu'(t). \tag{1.2}$$

Действительно, к обеим частям тождества

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(\tau)\,d\tau$$

можно применить оператор B и, в силу его замкнутости и условия B), внести его под знак интеграла. Тогда

$$Bu(t) = Bu(0) + \int_0^t Bu'(\tau)\,d\tau,$$

откуда дифференцированием получаем (1.2). Под *задачей Коши* для уравнения (1.1) понимают задачу о нахождении решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$u(0) = u_0 \quad \text{и} \quad u'(0) = u'_0. \tag{1.3}$$

Из определения решения вытекает, что необходимо $u_0 \in \mathscr{D}(B^2)$. Если решение обладает свойством B), то $u'_0 \in \mathscr{D}(B)$.

Пусть $u(t)$ — решение уравнения (1.1). Запишем

$$u'(t) = u'(0) + \int_0^t u''(\tau)\,d\tau = u'(0) + B\int_0^t Bu(\tau)\,d\tau. \tag{1.4}$$

Предположим, что $u'(0)$ представим в виде

$$u'(0) = Bv_0 \tag{1.5}$$

и обозначим

$$v(t) = v_0 + \int_0^t Bu(\tau)\,d\tau. \tag{1.6}$$

Из (1.4) и (1.6) получаем

$$\frac{du}{dt} = Bv \quad \text{и} \quad \frac{dv}{dt} = Bu. \tag{1.7}$$

Введем новые функции

$$x = u + v \quad \text{и} \quad y = u - v. \tag{1.8}$$

Из (1.7) вытекает, что эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx}{dt} = Bx \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt} = -By. \tag{1.9}$$

Функция $u(t)$, по определению, дважды непрерывно дифференцируема; если, кроме того, она удовлетворяет условию B), то в силу (1.2) и (1.7) функция $v(t)$ будет также дважды непрерывно дифференцируемой.

Таким образом, если решение $u(t)$ удовлетворяет условиям B) и (1.5), то оно по формулам (1.6) и (1.8) порождает дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнений (1.9).

Обратно, пусть $x(t)$ и $y(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнений (1.9). Тогда, в силу замкнутости оператора B,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dBx}{dt}=B\frac{dx}{dt}=B^2x \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-B\frac{dy}{dt}=B^2y. \qquad (1.10)$$

Отсюда следует, что функция

$$u(t)=\frac{1}{2}[x(t)+y(t)]$$

будет решением уравнения (1.1). Это решение обладает свойством B), так как из (1.10) следует, что функция

$$Bu'(t)=\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

непрерывна.

Пусть теперь для уравнений (1.9) задача Коши равномерно корректна. Для $u_0 \in \mathscr{D}(B^2)$ и $u_0' \in \mathscr{D}(B) \cap \mathscr{R}(B)$ положим $x_0=u_0+v_0$ и $y_0=u_0-v_0$, где v_0 — одно из решений уравнения $Bv=u_0'$. Очевидно, $x_0, y_0 \in \mathscr{D}(B^2)$. Обозначим через $U_+(t)$ и $U_-(t)$ полугруппы, порождаемые соответственно первым и вторым уравнениями (1.9). Построим решения этих уравнений

$$x(t)=U_+(t)(u_0+v_0) \quad \text{и} \quad y(t)=U_-(t)(u_0-v_0).$$

Полученные решения будут дважды непрерывно дифференцируемыми на $[0, T]$. Тогда функция

$$u(t)=\frac{1}{2}[U_+(t)+U_-(t)]u_0+\frac{1}{2}[U_+(t)-U_-(t)]v_0 \qquad (1.11)$$

является решением задачи Коши (1.1) — (1.3), удовлетворяющим условию B).

Это решение не зависит от выбора решения v_0 уравнения $Bv=u_0'$. Действительно, если $\bar{v}_0$ — другое решение этого уравнения, то $B(v_0-\bar{v}_0)=0$, и следовательно, $U_+(t)(v_0-\bar{v}_0)=$ $=v_0-\bar{v}_0$ и $U_-(t)(v_0-\bar{v}_0)=v_0-\bar{v}_0$, откуда вытекает, что

$$[U_+(t)-U_-(t)]v_0=[U_+(t)-U_-(t)]\bar{v}_0.$$

Других решений, удовлетворяющих условию B), рассматриваемая задача Коши (1.1) — (1.3) иметь не может. В противном случае мы пришли бы к выводу, что хотя бы для одного из уравнений (1.9) нарушены условия единственности решения задачи Коши.

Итак, мы доказали достаточность условий в следующей теореме:

Теорема 1.1. *Для того чтобы для уравнения* (1.1) *задача Коши с начальными данными*

$$u(0)=u_0\in\mathcal{D}(B^2) \quad \text{и} \quad u'(0)=u_0'\in\mathcal{D}(B)\cap\mathcal{R}(B) \qquad (1.12)$$

имела единственное решение, удовлетворяющее условию B), необходимо и достаточно, чтобы задача Коши для уравнений (1.9) *была равномерно корректной.*

Для доказательства необходимости условий теоремы предположим, что x_0, $y_0\in\mathcal{D}(B^2)$, и построим элементы

$$u_0=\frac{x_0+y_0}{2}, \quad v_0=\frac{x_0-y_0}{2}, \quad u_0'=Bv_0.$$

Очевидно, что $u_0\in\mathcal{D}(B^2)$ и $u_0'\in\mathcal{D}(B)\cap\mathcal{R}(B)$. Построим решение $u(t)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.12) и B). По формулам (1.6) и (1.8) получим дважды непрерывно дифференцируемые решения $x(t)$ и $y(t)$ уравнений (1.9).

Покажем, что построенные решения уравнений (1.9) единственны. Пусть $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$ — еще одна пара дважды непрерывно дифференцируемых решений уравнений (1.9) с начальными условиями $\bar{x}(0)=x_0$ и $\bar{y}(0)=y_0$.

Как было показано, полусумма $\bar{u}(t)=\dfrac{\bar{x}(t)+\bar{y}(t)}{2}$ будет тогда решением задачи Коши для уравнения (1.1), удовлетворяющим условию B) и принимающим те же начальные значения, что и $u(t)$, т. е. $\bar{u}(t)\equiv u(t)$. Обозначим $\tilde{x}=x-\bar{x}$ и $\tilde{y}=y-\bar{y}$. Этим решениям уравнений (1.9) отвечают решения $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ уравнений (1.7), причем $\tilde{u}\equiv 0$. Но тогда $\tilde{v}\equiv\mathrm{const}=\tilde{v}(0)=0$ и, в силу (1.8), $\tilde{x}\equiv\tilde{y}\equiv 0$. Единственность доказана.

Окончательно утверждение теоремы вытекает из теоремы 2.13 гл. 1.

Как было показано в § 3 гл. I, из корректности задачи Коши для обоих уравнений (1.9) следует, что операторы

$$U(t)=\begin{cases} U_+(t) & \text{при} \quad t\geqslant 0, \\ U_-(t) & \text{при} \quad t\leqslant 0 \end{cases}$$

образуют группу. Поэтому теорему 1.1 можно еще сформулировать в следующем виде:

Теорема 1.1$'$. *Для того чтобы задача Коши* (1.1)—(1.2) *имела единственное решение, удовлетворяющее условию B), необходимо и достаточно, чтобы оператор B был производящим оператором сильно непрерывной группы операторов $U(t)$ $(-\infty < t < \infty)$. Решение задачи Коши задается формулой*

$$u(t) = \frac{1}{2}[U(t) + U(-t)]\,u_0 + \frac{1}{2}[U(t) - U(-t)]\,v_0, \qquad (1.13)$$

где v_0 — какое-либо решение уравнения $Bv_0 = u_0'$.

Из формулы (1.13) не видно, что решение $u(t)$ непрерывно зависит от начальных данных u_0 и u_0'. Если существует ограниченный оператор B^{-1}, то решение

$$u(t) = \frac{1}{2}[U(t) + U(-t)]\,u_0 + \frac{1}{2}[U(t) - U(-t)]\,B^{-1}u_0', \qquad (1.13)$$

очевидно, непрерывно зависит от u_0 и u_0', причем эта зависимость равномерна на каждом отрезке $[0, T]$. Как будет показано ниже, это имеет место и в общем случае.

Определение 1.2. Под *ослабленным решением* уравнения (1.1) понимаем функцию $u(t)$, удовлетворяющую условиям: 1) $u(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и дважды непрерывно дифференцируема на $(0, T]$; 2) функция $Bu(t)$ определена и непрерывна на $[0, T]$; 3) функция $Bu'(t)$ определена и непрерывна на $(0, T]$; 4) $u(t) \in \mathscr{D}(B^2)$ при $t \in (0, T]$ и функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) на $(0, T]$.

Если $u(t)$ — ослабленное решение уравнения (1.1), то

$$u'(t) = u'(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{t} B^2 u(\tau)\,d\tau.$$

При $\varepsilon \to 0$ внеинтегральные члены имеют пределы, поэтому

$$u'(t) = u'(0) + \int_{+0}^{t} B^2 u(\tau)\,d\tau = u'(0) + B\int_{0}^{t} Bu(\tau)\,d\tau.$$

Это равенство совпадает с (1.4). Повторяя рассуждения, мы снова придем к системе (1.9). Отличие будет состоять в том, что теперь решения $x(t)$ и $y(t)$, построенные по формулам (1.6) и (1.8), будут дважды непрерывно дифференцируемыми лишь на полуинтервале $(0, T]$. Если теперь ослабленная задача Коши будет иметь решение при всех u_0 и u'_0, удовлетворяющих условию (1.12), то уравнения (1.9) будут иметь решения при всех x_0, $y_0 \in \mathscr{D}(B^2)$, причем эти решения дважды непрерывно дифференцируемы на $(0, T]$. В § 3 гл. I была исследована связь между истинными и ослабленными решениями уравнения первого порядка. Из этого исследования вытекает, что для уравнений (1.9) при описанных выше условиях ослабленная задача Коши будет разрешимой при любых x_0, $y_0 \in \mathscr{D}(B)$. Повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1.1, получаем следующее утверждение:

Теорема 1.2. *Для того чтобы на* $[0, T]$ *существовало единственное ослабленное решение уравнения* (1.1) *при любых* u_0, u'_0, *удовлетворяющих условиям* (1.12), *необходимо и достаточно, чтобы существовали единственные ослабленные решения уравнений* (1.9) *при любых начальных условиях из* $\mathscr{D}(B)$.

2. Возмущенное уравнение. Рассмотрим более общее уравнение чем (1.1):

$$\frac{d^2u}{dt^2} = B(B+Q)\,u, \tag{1.14}$$

где Q — ограниченный оператор в E. Предположим еще, что оператор Q отображает область определения $\mathscr{D}(B)$ оператора B в себя. При этих условиях оператор $B+Q$, определенный на $\mathscr{D}(B)$, замкнут, он отображает область $\mathscr{D}(B^2)$ в $\mathscr{D}(B)$. Поэтому операторы B^2, $B(B+Q)$ и $(B+Q)^2$ имеют одну и ту же область определения.

Определения решения уравнения (1.14) и свойства B) остаются такими же, как и для уравнения (1.1).

Предположив, что $u'(0) = u'_0 \in \mathscr{R}(B)$ и повторив рассуждения п. 1, мы придем к системе уравнений

$$\frac{du}{dt} = Bv \quad \text{и} \quad \frac{dv}{dt} = (B+Q)\,u. \tag{1.15}$$

После замены (1.8) получаем систему дифференциальных уравнений для функций $x(t)$ и $y(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = Bx + \frac{1}{2}Qx + \frac{1}{2}Qy,$$
$$\frac{dy}{dt} = -By - \frac{1}{2}Qx - \frac{1}{2}Qy.$$

Эту систему можно рассматривать как одно дифференциальное уравнение в сдвоенном пространстве $E \times E$ с операторами, задающимися матрицами

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \widetilde{S} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix}.$$

Обозначив $\widetilde{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$, получим уравнение

$$\frac{d\widetilde{x}}{dt} = \widetilde{B}\widetilde{x} + \widetilde{S}\widetilde{x}. \tag{1.16}$$

Всякое решение уравнения (1.14), удовлетворяющее условию B), для которого $u'(0) = Bv_0$, порождает по формулам

$$v = v_0 + \int_0^t (B + Q)\, u(\tau)\, d\tau, \quad x = u + v,$$
$$y = u - v, \quad \widetilde{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1.16). Обратно, всякое дважды непрерывно дифференцируемое решение $\widetilde{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ уравнения (1.16) дает нам решение $u = \frac{x + y}{2}$ уравнения (1.14). Это решение удовлетворяет условию B), так как функция

$$\widetilde{B}\frac{d\widetilde{x}}{dt} = \frac{d^2\widetilde{x}}{dt^2} - \widetilde{S}\frac{d\widetilde{x}}{dt}$$

непрерывна. Начальные значения: $u(0) = \frac{x(0) + y(0)}{2} \in \mathscr{D}(B^2)$ и $u'(0) = B\frac{x(0) - y(0)}{2} \in \mathscr{D}(B) \cap \mathscr{R}(B)$. Если при нашем построении получится, что $u(t)\equiv 0$, то из уравнений (1.15) будет следовать, что $v(t)\equiv v_0$ и $Bv_0=0$. Таким образом, соответствие $u \Longrightarrow \tilde{x}$ может быть неоднозначным лишь за счет возможного неоднозначного выбора решения уравнения $u'(0)= = Bv_0$ в случае, когда оператор B имеет нули.

Если B является производящим оператором сильно непрерывной группы, то таким же будет и оператор $\tilde{B}$. В силу теоремы 7.5 гл. I оператор $\tilde{B}+\tilde{S}$ также будет производящим оператором сильно непрерывной в пространстве $E\times E$ группы. Если начальные условия x_0, $y_0\in\mathscr{D}(B^2)$, то начальный вектор $\tilde{x}_0=\begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix}$ принадлежит $\mathscr{D}(\tilde{B}^2)$ и, в силу свойства оператора Q, $\tilde{x}_0\in\mathscr{D}((\tilde{B}+\tilde{S})^2)$. Поэтому соответствующее решение уравнения (1.16) будет дважды непрерывно дифференцируемым на $[0, T]$. Тогда функция $u(t)=\frac{1}{2}[x(t)+ + y(t)]$ будет решением уравнения (1.14), удовлетворяющим условию B).

Нами получен весь подготовительный материал для доказательства следующей теоремы:

Теорема 1.3. *Для того чтобы задача Коши для уравнения* (1.14) *имела единственное решение, удовлетворяющее условию B), при любых начальных данных* (1.12), *необходимо и достаточно, чтобы оператор B был производящим оператором сильно непрерывной группы.*

Доказательство теоремы 1.3 совершенно аналогично доказательству теоремы 1.1.

Предположим, что оператор B в уравнении (1.1) имеет регулярную точку λ_0. Тогда это уравнение можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{d^2u}{dt^2}=B_0\left(B_0+2\lambda_0 I+\lambda_0^2 R_B(\lambda_0)\right)u, \tag{1.17}$$

где $B_0=B-\lambda_0 I$. Оператор B_0 имеет ограниченный обратный, поэтому $\mathscr{R}(B_0)=E$. Полагая $Q=2\lambda_0 I+\lambda_0^2 R_B(\lambda_0)$ и применяя теорему 1.3, получаем следующее уточнение к теореме 1.1:

Теорема 1.1″. *Если оператор B является производящим оператором сильно непрерывной группы, то задача Коши для уравнения* (1.1) *имеет единственное ре-*

шение при любых $u_0 \in \mathscr{D}(B^2)$ *и* $u_0' \in \mathscr{D}(B)$. *Это решение непрерывно зависит от начальных данных, равномерно на* $[0, T]$.

К виду (1.14) могут быть приведены различные уравнения. Например, рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} = B^2u + Cu, \tag{1.18}$$

где оператор C определен на $\mathscr{D}(B)$. Если оператор $R_B(\lambda_0)C$ имеет ограниченное замыкание, то уравнение (1.18) можно записать в виде

$$\frac{d^2u}{dt^2} = B_0\left(B_0 + 2\lambda_0 I + \lambda_0^2 R_B(\lambda_0) + \overline{R_B(\lambda_0)C}\right)u.$$

Оператор $Q = 2\lambda_0 I + \lambda_0^2 R_B(\lambda_0) + \overline{R_B(\lambda_0)C}$ ограничен, и поэтому можно применить теорему 1.3. Очевидно, что $Q\mathscr{D}(B) \subset \mathscr{D}(B)$.

Мы приходим к следующей теореме:

Теорема 1.4. *Если в уравнении* (1.18) *оператор* B *является производящим оператором сильно непрерывной группы, а оператор* C *определен на* $\mathscr{D}(B)$ *и обладает тем свойством, что оператор* $R_B(\lambda_0)C$ *имеет ограниченное замыкание, то при любых* $u_0 \in \mathscr{D}(B^2)$ *и* $u_0' \in \mathscr{D}(B)$ *существует единственное решение задачи Коши для уравнения* (1.18), *удовлетворяющее условию* B).

3. Неоднородное уравнение. Рассмотрим неоднородное уравнение вида

$$\frac{d^2u}{dt^2} = B^2u + f(t), \tag{1.19}$$

где $f(t)$ — непрерывная функция. Для простоты формулировок предполагаем, что оператор B имеет ограниченный обратный.

Действуя так же, как в п. 1, мы можем задачу о решении уравнения (1.19) свести к задаче о нахождении дважды непрерывно дифференцируемых решений неоднородной системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Bx + B^{-1}f(t), \\ \frac{dy}{dt} &= -By - B^{-1}f(t). \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

Предполагая, что оператор B является производящим оператором сильно непрерывной группы $U(t)$, мы можем решения уравнений (1.20) записать в виде

$$x(t) = U(t)\,x_0 + \int\limits_0^t U(t-s)\,B^{-1} f(s)\,ds,$$

$$y(t) = U(-t)\,y_0 - \int\limits_0^t U(s-t)\,B^{-1} f(s)\,ds.$$

Если x_0, $y_0 \in \mathscr{D}(B^2)$, то первые слагаемые справа дважды непрерывно дифференцируемы. В силу теоремы 6.5 гл. I интегральные члены имеют непрерывные производные. Вычисляем

$$\frac{dx}{dt} = U(t)\,Bx_0 + B^{-1} f(t) + \int\limits_0^t U(t-s)\,f(s)\,ds,$$

$$\frac{dy}{dt} = -U(-t)\,By_0 - B^{-1} f(t) + \int\limits_0^t U(s-t)\,f(s)\,ds.$$

Вводя теперь функцию $u(t) = \dfrac{x(t) + y(t)}{2}$, получим

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\,U(t)\,Bx_0 - \frac{1}{2}\,U(-t)\,By_0 + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^t [U(t-s) - U(s-t)]\,f(s)\,ds. \qquad (1.21)$$

Для того чтобы эта функция имела непрерывную на $[0, T]$ производную, в силу той же теоремы 6.5 гл. I достаточно, чтобы было выполнено одно из двух условий: функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ или функция $Bf(t)$ определена и непрерывна на $[0, T]$. Если одно из этих условий выполнено, то функция $u(t)$ будет решением уравнения (1.19). Более того, в этом случае к интегральному члену в (1.21) применим оператор B; в результате получаем непрерывную функцию. Значит, решение $u(t)$ удовлетворяет условию B).

Мы приходим к следующей теореме:

Теорема 1.5. *Если в уравнении* (1.19) *оператор B имеет ограниченный обратный и является производящим оператором сильно непрерывной группы $U(t)$, а функция $f(t)$ обладает одним из свойств*:

1) $f(t)$ — *непрерывно дифференцируема на* $[0, T]$,

2) *функция* $Bf(t)$ *определена и непрерывна на* $[0, T]$, *то при любых $u_0 \in \mathcal{D}(B^2)$ и $u_0' \in \mathcal{D}(B)$ существует единственное решение задачи Коши для уравнения* (1.19), *удовлетворяющее условию B). Это решение задается формулой*

$$u(t) = \frac{1}{2}[U(t) + U(-t)]\,u_0 + \frac{1}{2}[U(t) - U(-t)]\,B^{-1}u_0' + \\ + \frac{1}{2}\int_0^t [U(t-s) - U(s-t)]\,B^{-1}f(s)\,ds.$$

Отметим, что теорема 1.5 справедлива и для более общего уравнения, где вместо B^2 стоит оператор $B(B+Q)$, такой же, как и в уравнении (1.14).

4. Уравнение с переменным оператором. Перейдем к рассмотрению уравнения с переменным оператором:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = B^2(t)\,u. \tag{1.22}$$

Это уравнение мы также будем сводить к системе уравнений первого порядка, у которой главные члены содержат операторные коэффициенты $B(t)$ и $-B(t)$. Условия разрешимости полученной системы будем находить, основываясь на теоремах § 3 гл. II. Поэтому предположим, что операторы $B(t)$ и $-B(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 3.6 гл. II. Напомним их:

1) При всех $t \in [0, T]$ операторы $B(t)$ имеют одну и ту же область определения $\mathcal{D}(B)$, операторы $B^{-1}(t)$ ограничены $(0 \leqslant t \leqslant T)$.

2) Оператор $B(t)$ на $\mathcal{D}(B)$ сильно непрерывно дифференцируем по $t \in [0, T]$.

3) Операторы $B(t)$ и $-B(t)$ допускают устойчивую аппроксимацию ограниченными операторами $B_n^+(t)$ и $B_n^-(t)$ так,

что соответствующие операторам $B_n^+(t)$ и $B_n^-(t)$ эволюционные операторы $U_n^+(t, s)$ и $U_n^-(t, s)$ сильно и равномерно по t и s сходятся.

Отметим еще, что в силу теоремы 3.11 гл. II условие 3) выполнено, если

3′) Оператор $B(t)$ при каждом $t \in [0, T]$ является производящим оператором сильно непрерывной сжимающей группы операторов.

Пусть $u(t)$ — решение уравнения (1.22). Обозначим

$$\frac{du}{dt} = v \quad \text{и} \quad B(t)\,u(t) = w(t).$$

Из уравнения (1.22) вытекает, что

$$\frac{dv}{dt} = B^2(t)\,u = B(t)\,w. \tag{1.23}$$

В силу непрерывности $B^2(t)\,u(t)$ и непрерывности $B^{-1}(t)$ функция $w(t)$ будет непрерывной на $[0, T]$. Более того, если решение удовлетворяет условию B), то (см. § 1 гл. II) производная

$$\frac{dw}{dt} = B(t)\frac{du}{dt} + B'(t)\,u = B(t)\,v + B'(t)\,B^{-1}(t)\,w \tag{1.24}$$

непрерывна на $[0, T]$. Вводя функции $x(t) = w(t) + v(t)$, $y(t) = w(t) - v(t)$ и $\tilde{x}(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}$, получаем в сдвоенном пространстве $E \times E$ уравнение

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{B}(t)\,\tilde{x} + \tilde{S}(t)\,\tilde{x}, \tag{1.25}$$

где операторы $\tilde{B}(t)$ и $\tilde{S}(t)$ заданы матрицами

$$\tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & -B(t) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{S}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} B'(t)\,B^{-1}(t) & B'(t)\,B^{-1}(t) \\ B'(t)\,B^{-1}(t) & B'(t)\,B^{-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, всякое решение уравнения (1.22), удовлетворяющее условию B), порождает решение уравнения (1.25). Обратно, пусть $\tilde{x}(t)$ — решение (непрерывно на $[0, T]$ дифференцируемое) уравнения (1.25). Тогда функции $w(t) = \frac{1}{2}[x(t)+y(t)]$ и $v(t)=\frac{1}{2}[x(t)-y(t)]$ будут непрерывно дифференцируемыми решениями уравнений (1.24) и (1.23). Введем в рассмотрение функцию $u(t)=B^{-1}(t)\,w(t)$. Имеем в силу (1.24)

$$\frac{du}{dt} = -B^{-1}(t)\,B'(t)\,B^{-1}(t)\,w + B^{-1}(t)\frac{dw}{dt} = v.$$

Далее, из (1.23)

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = B(t)\,w = B^2(t)\,u.$$

Наконец, функция

$$B(t)\frac{du}{dt} = B(t)\,v = \frac{dw}{dt} - B'(t)\,B^{-1}(t)\,w$$

непрерывна. Последние равенства показывают, что функция $u(t)$ является решением уравнения (1.22), удовлетворяющим условию B).

К уравнению (1.25) можно непосредственно применить теоремы 3.4 и 3.7 гл. II. Задача Коши для него будет равномерно корректной, если определен и сильно непрерывен по $t \in [0, T]$ оператор $\tilde{B}(t)\tilde{S}(t)\tilde{B}^{-1}(t)$ или если при $t \in [0, T]$ оператор $\tilde{S}(t)$ сильно непрерывно дифференцируем на $\mathscr{D}(\tilde{B})$. Это приводит нас к следующей теореме:

Теорема 1.6. *Если оператор* $B(t)$ *удовлетворяет условиям* 1)—3) *и, кроме того, выполнено одно из двух условий:*

4) *оператор* $B'(t)\,B^{-1}(t)$ *сильно непрерывно дифференцируем на* $\mathscr{D}(B)$ *при* $t \in [0, T]$,

4′) *оператор* $B(t)\,B'(t)\,B^{-2}(t)$ *определен, ограничен и сильно непрерывен по* t *на* $[0, T]$;

то существует единственное решение задачи Коши для уравнения (1.22) *при любых* $u_0 \in \mathscr{D}(B^2(0))$ *и* $u_0' \in \mathscr{D}(B)$.

Аналогично можно рассмотреть уравнение типа (1.14) с переменными операторами.

5. Уравнение в гильбертовом пространстве. Всюду выше мы предполагали, что оператор, стоящий в уравнении, имеет главным членом оператор $B^2(t)$, где $B(t)$ — оператор с заданными свойствами. Если рассмотреть уравнение вида

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A(t)u, \tag{1.26}$$

то возникает вопрос, при каких условиях оператор $A(t)$ может быть представлен как квадрат оператора $B(t)$, для которого выполнены условия 1) — 3)? В случае банахова пространства мы не обладаем удовлетворительным ответом на этот вопрос даже в случае постоянного оператора A. В гильбертовом пространстве имеется важный частный случай, когда эта задача легко решается. А именно, предположим, что оператор $A(t)$ — самосопряженный, отрицательно определенный, имеет область определения $\mathscr{D}(A)$, не зависящую от t, и сильно непрерывно дифференцируем на $\mathscr{D}(A)$ по t. Тогда в силу теоремы 1.2 гл. II оператор $B(t) = i(-A(t))^{1/2}$ будет иметь постоянную область определения и на ней будет непрерывно дифференцируемым по t. При каждом t оператор $B(t)$ будет производящим оператором группы унитарных операторов. Следовательно, для оператора $B(t)$ выполнены условия 1) — 3) предыдущего пункта. Более того, из леммы 1.6 гл. II вытекает, что

$$B(t)B'(t)B^{-2}(t) = B'(t)B^{-1}(t) - A'(t)A^{-1}(t)$$

и, значит, выполнено условие 4) теоремы 1.6.

Из сказанного вытекает следующее предложение:

Теорема 1.7. *Пусть $A(t)$ — самосопряженный отрицательно определенный оператор с постоянной по t областью определения $\mathscr{D}(A)$, сильно непрерывно дифференцируемый на $\mathscr{D}(A)$. Тогда задача Коши для уравнения* (1.26) *имеет при любых $u_0 \in \mathscr{D}(A)$ и $u_0' \in \mathscr{D}((-A)^{1/2})$ единственное решение.*

§ 2. Эллиптический случай. Граничные задачи

В этом параграфе будет изучаться уравнение второго порядка с постоянным оператором

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Au + f(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{2.1}$$

в предположении, что оператор A обладает следующим свойством: при всех $\lambda \leqslant 0$ существует резольвента $R(\lambda)$ оператора A и

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{c}{1+|\lambda|} \qquad (\lambda \leqslant 0). \tag{2.2}$$

Этот случай назовем *эллиптическим.*

1. Общее решение однородного уравнения. Рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Au \qquad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{2.3}$$

Определение решения уравнения (2.3) будет таким же, как и для уравнения (1.1):

Определение 2.1. *Решением* уравнения (2.3) будем называть функцию $u(t)$ со значениями в $\mathscr{D}(A)$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую уравнению (2.3) на отрезке $[0, T]$.

Как было показано в § 5 гл. I, для оператора A можно определить дробные степени и, в частности, оператор $A^{-1/2}$. Рассмотрим функцию

$$v(t) = A^{-1/2}\frac{du}{dt}. \tag{2.4}$$

Дифференцируя ее по t и пользуясь (2.3), получаем

$$\frac{dv}{dt} = A^{-1/2}\frac{d^2u}{dt^2} = A^{1/2}u. \tag{2.5}$$

Уравнения (2.4) и (2.5) можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A^{1/2}v, \\ \dfrac{dv}{dt} = A^{1/2}u. \end{cases}$$

Сделаем замену $z = \frac{1}{2}(u - v)$, $w = \frac{1}{2}(u + v)$. Тогда для функций $z(t)$ и $w(t)$ получим уравнения

$$\frac{dz}{dt} = -A^{1/2}z; \quad \frac{dw}{dt} = A^{1/2}w. \tag{2.6}$$

Оператор $-A^{1/2}$ является производящим оператором аналитической полугруппы $V(t)$, удовлетворяющей C_0-условию. Поэтому для первого из уравнений (2.6) равномерно корректна задача Коши, а для второго — обратная задача Коши.

Имеем

$$z(t) = V(t) z_0 \text{ и } w(t) = V(T-t) w_T. \tag{2.7}$$

Для того чтобы функции $z(t)$ и $w(t)$ порождали решение уравнения (2.3), нужно, чтобы они были дважды непрерывно дифференцируемыми. Это будет иметь место, если z_0 и $w_T \in \mathscr{D}(A)$. Однако для уравнений (2.6) решения при $0 < t < T$ будут бесконечно дифференцируемыми при любых z_0 и w_T. В связи с этим введем следующие определения:

Определение 2.2. Функция $u(t)$ называется *ослабленным решением* уравнения (2.3), если: 1) она непрерывна и имеет непрерывную первую производную на отрезке $[0, T]$ и вторую производную на $(0, T)$; 2) ее значения принадлежат $\mathscr{D}(A)$ при $0 < t < T$, а функция $A^{1/2}u(t)$ непрерывна на всем отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$; 3) $u(t)$ удовлетворяет уравнению (2.3) в интервале $(0, T)$.

Определение 2.3. Функция $u(t)$ называется *обобщенным решением* уравнения (2.3), если: 1) она непрерывна на $[0, T]$, имеет непрерывную вторую производную на $(0, T)$, а функция $A^{-1/2}u(t)$ имеет непрерывную первую производную на $[0, T]$; 2) значения функции $u(t)$ $(0 < t < T)$ принадлежат $\mathscr{D}(A)$ и 3) она удовлетворяет уравнению (2.3) в интервале $(0, T)$.

Если z_0, $w_T \in \mathscr{D}(A^{1/2})$, то функция

$$u(t) = V(t) z_0 + V(T-t) w_T \tag{2.8}$$

является ослабленным решением уравнения (2.3). Действительно,

$$A^{1/2}u(t) = V(t) A^{1/2} z_0 + V(T-t) A^{1/2} w_T,$$

$$\frac{du}{dt} = -V(t) A^{1/2} z_0 + V(T-t) A^{1/2} w_T \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

и

$$\frac{d^2u}{dt^2} = AV(t) z_0 + AV(T-t) w_T = Au \qquad (0 < t < T).$$

Непрерывность функций $A^{1/2}u(t)$ и $\frac{du}{dt}$ на замкнутом интервале $[0, T]$ и функции $\frac{d^2u}{dt^2}$ на открытом интервале $(0 < t < T)$ следует из свойств полугруппы $V(t)$.

Аналогично проверяется, что функция (2.8) является обобщенным решением уравнения (2.3) при любых z_0, $w_T \in E$.

Обратно, пусть $u(t)$ — обобщенное решение уравнения (2.3). Тогда функция

$$v(t) = \frac{d}{dt}\left(A^{-1/2}u\right)$$

непрерывна на $[0, T]$ и удовлетворяет при $0 < t < T$ уравнениям (2.4) и (2.5). Это означает, что функции $z(t)$ и $w(t)$ являются ослабленными решениями прямой и обратной задач Коши для уравнений (2.6) и, следовательно, представимы в виде (2.7), где

$$z_0 = z(0) = \frac{1}{2}\left(u(0) - \left(A^{-1/2}u\right)'(0)\right),$$

$$w_T = \frac{1}{2}\left(u(T) + \left(A^{-1/2}u\right)'(T)\right).$$

Если теперь $u(t)$ — ослабленное решение (2.3), то

$$z_0 = \frac{1}{2}\left(u(0) - A^{-1/2}u'(0)\right) \in \mathscr{D}\left(A^{1/2}\right),$$

$$w_T = \frac{1}{2}\left(u(T) + A^{-1/2}u'(T)\right) \in \mathscr{D}\left(A^{1/2}\right).$$

Итак, мы приходим к утверждению:

Теорема 2.1. *Всякое обобщенное решение уравнения* (2.3) *имеет вид* (2.8), *и наоборот, функция вида* (2.8) *является обобщенным решением уравнения* (2.3) *при любых* z_0, $w_T \in E$. *Для того чтобы обобщенное решение* (2.8) *было ослабленным, необходимо и достаточно, чтобы* z_0, $w_T \in \mathscr{D}\left(A^{1/2}\right)$. *Все обобщенные решения уравнения* (2.3) *являются аналитическими функциями от* t *при* $0 < t < T$.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь ослабленные или обобщенные решения уравнения (2.3).

2. Краевая задача. Введем в рассмотрение систему краевых условий вида

$$\left.\begin{aligned} L_1(u) &= \alpha_{11}u_0 + \alpha_{12}u_0' + \beta_{11}u_T + \beta_{12}u_T' = f_1, \\ L_2(u) &= \alpha_{21}u_0 + \alpha_{22}u_0' + \beta_{21}u_T + \beta_{22}u_T' = f_2, \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

где α_{ij}, β_{ij}, $(i, j = 1, 2)$ — комплексные числа, f_1, f_2 — заданные элементы банахова пространства E, $u_0 = u(0)$, $u_0' = u'(0)$, $u_T = u(T)$ и $u_T' = u'(T)$. Формы $L_1(u)$ и $L_2(u)$ предполагаются линейно независимыми.

Определение 2.4. Если ослабленное решение $u(t)$ уравнения (2.3) удовлетворяет краевым условиям (2.9), то будем называть его *ослабленным решением краевой задачи* (2.3) — (2.9).

Обозначая $A^{1/2}z_0 = g_1$ и $A^{1/2}w_T = g_2$, мы можем любое ослабленное решение уравнения (2.3) записать в виде

$$u(t) = V_1(t)g_1 + V_2(t)g_2, \tag{2.10}$$

где

$$V_1(t) = V(t)A^{-1/2} \text{ и } V_2(t) = V(T-t)A^{-1/2},$$

а g_1 и g_2 — некоторые элементы пространства E.

Подставляя (2.10) в краевые условия (2.9), мы придем к системе операторных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} L_1(V_1)g_1 + L_1(V_2)g_2 &= f_1, \\ L_2(V_1)g_1 + L_2(V_2)g_2 &= f_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

для определения элементов g_1 и g_2.

В развернутой форме эта система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &[\alpha_{11}A^{-1/2} - \alpha_{12}I + \beta_{11}V(T)A^{-1/2} - \beta_{12}V(T)]\,g_1 + \\ &\qquad + [\alpha_{11}V(T)A^{-1/2} + \alpha_{12}V(T) + \beta_{11}A^{-1/2} + \beta_{12}I]\,g_2 = f_1, \\ &[\alpha_{21}A^{-1/2} - \alpha_{22}I + \beta_{21}V(T)A^{-1/2} - \beta_{22}V(T)]\,g_1 + \\ &\qquad + [\alpha_{21}V(T)A^{-1/2} + \alpha_{22}V(T) + \beta_{21}A^{-1/2} + \beta_{22}I]\,g_2 = f_2. \end{aligned}$$

Все операторы, входящие в систему (2.11), являются линейными комбинациями ограниченных коммутирующих друг с другом операторов I, $A^{-1/2}$, $V(T)$ и $V(T)A^{-1/2}$. Поэтому систему (2.11) можно решать так же, как и в скалярном случае. Важную роль при этом играет операторный определитель этой системы

$$D = \begin{vmatrix} L_1(V_1) & L_1(V_2) \\ L_2(V_1) & L_2(V_2) \end{vmatrix}, \tag{2.12}$$

называемый *характеристическим определителем.*

Решая систему (2.11) исключением неизвестных, приходим к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} Dg_1 &= L_2(V_2) f_1 - L_1(V_2) f_2, \\ Dg_2 &= L_1(V_1) f_2 - L_2(V_1) f_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Применяя к (2.10) ограниченный оператор D и заменяя Dg_1 и Dg_2 по формулам (2.13), получим соотношение

$$Du(t) = S_1(t) f_1 + S_2(t) f_2, \tag{2.14}$$

где

$$\left.\begin{aligned} S_1(t) &= V_1(t) L_2(V_2) - V_2(t) L_2(V_1), \\ S_2(t) &= -V_1(t) L_1(V_2) + V_2(t) L_1(V_1). \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

Определение 2.5. Всякую непрерывную на $[0, T]$ функцию, удовлетворяющую соотношению (2.14), назовем *обобщенным решением краевой задачи* (2.3) — (2.9).

Если предположить, что операторы $D^{-1}L_i(V_j)$ $(i, j = 1, 2)$ определены на всем пространстве E, то из (2.13) определятся элементы g_1 и g_2, подстановка которых в (2.10) дает решение краевой задачи. Если же предположить только, что всюду определены операторы $D^{-1}S_1(t)$ и $D^{-1}S_2(t)$ при $t > 0$, то из (2.14) можно найти лишь обобщенное решение краевой задачи

$$u(t) = D^{-1}S_1(t) f_1 + D^{-1}S_2(t) f_2. \tag{2.16}$$

Таким образом, мы приходим к необходимости исследования вопроса о существовании обратного оператора D^{-1} и его связи с операторами $L_i(V_j)$. Разные возможности, которые здесь возникают, тесно связаны с различными свойствами краевой задачи (2.3) — (2.9).

3. Однородная краевая задача. Вопрос о существовании оператора D^{-1} естественно связан с разрешимостью однородной краевой задачи для уравнения (2.3), т. е. задачи о нахождении ослабленного решения (2.3), удовлетворяющего краевым условиям

$$L_1(u) = L_2(u) = 0. \tag{2.17}$$

Теорема 2.2. *Однородная краевая задача* (2.3)—(2.17) *имеет ненулевое решение* $u(t) \not\equiv 0$ *тогда и только тогда, когда характеристический определитель* D *как оператор в пространстве* E *не имеет обратного.*

Необходимость. Пусть задача (2.3)—(2.17) имеет нетривиальное решение $u(t) \not\equiv 0$, тогда оно, как и всякое ослабленное решение уравнения (2.3), представимо в виде (2.10), где по крайней мере один из элементов g_1, g_2 отличен от нуля.

Уравнения (2.13) для однородной задачи принимают вид

$$Dg_1 = 0, \quad Dg_2 = 0,$$

т. е. по крайней мере на одном ненулевом элементе оператор D обращается в нуль. Это и означает, что он не имеет обратного оператора.

Достаточность. Пусть оператор D не имеет обратного. Тогда существует ненулевой элемент $h \in E$ такой, что $Dh = 0$. С помощью элемента h можно построить ненулевое решение $u(t)$ однородной задачи. Для этого достаточно подобрать элементы g_1, $g_2 \in E$, и формула (2.10) даст искомое решение. Основная трудность здесь в том, что построенное решение должно удовлетворять краевым условиям (2.17), т. е. должны выполняться такие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} L_1(V_1)\,g_1 + L_1(V_2)\,g_2 = 0, \\ L_2(V_1)\,g_1 + L_2(V_2)\,g_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Здесь могут представиться два случая:

а) все коэффициенты системы (2.18) переводят элемент h в нуль;

б) один из коэффициентов на элементе h отличен от нуля.

В первом случае достаточно считать $g_1 = g_2 = h$, и краевые условия удовлетворяются. Во втором случае нужно в качестве решения системы взять подходящие алгебраические дополнения. Пусть, например, $L_2(V_2)h \neq 0$, тогда полагаем $g_1 = L_2(V_2)h$, $g_2 = -L_2(V_1)h$. Проверим, что построенные элементы являются решением системы (2.18):

$$L_1(V_1)L_2(V_2)h - L_1(V_2)L_2(V_1)h \equiv Dh = 0,$$

$$L_2(V_1)L_2(V_2)h - L_2(V_2)L_2(V_1)h = 0.$$

Для полноты доказательства нужно еще убедиться, что если $g_1 \neq 0$ или $g_2 \neq 0$, то $u(t) = V_1(t)g_1 + V_2(t)g_2 \neq 0$ на $[0, T]$. (Это означает своего рода линейную независимость частных решений $V_1(t)$ и $V_2(t)$ однородного дифференциального уравнения). Предположим противное, т. е., что

$$V(t)A^{-1/2}g_1 + V(T-t)A^{-1/2}g_2 \equiv 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{2.19}$$

Продифференцируем это соотношение и к полученному результату применим оператор $A^{-1/2}$:

$$-V(t)A^{-1/2}g_1 + V(T-t)A^{-1/2}g_2 = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{2.20}$$

При сложении (2.19) и (2.20) получится $V(T-t)A^{-1/2}g_2 = 0$, а при вычитании: $V(t)A^{-1/2}g_1 = 0$. В частности, при $t = T$ и $t = 0$ имеем $A^{-1/2}g_2 = A^{-1/2}g_1 = 0$, или, после применения оператора $A^{1/2}$, $g_1 = g_2 = 0$. Теорема доказана.

Теорему 2.2 удобно применять в такой формулировке:

Теорема 2.3. *Оператор D^{-1} существует тогда и только тогда, когда однородная краевая задача* (2.3) — (2.17) *имеет лишь тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$.

4. Сопряженная краевая задача. Пусть E' — сопряженное к E банахово пространство, A' — сопряженный к A линейный оператор, действующий в E'. По предположению, область определения оператора A плотна в E, поэтому оператор A' существует. Пусть, далее, $y(t)$ — функция со значениями в E', определенная на отрезке $[0, T]$. Дифференциальный оператор

$$L'(y) \equiv \frac{d^2y}{dt^2} - A'y \tag{2.21}$$

назовем *сопряженным* к оператору $L(u) \equiv \dfrac{d^2u}{dt^2} - Au$.

Если под произведением (y, u) понимать результат применения функционала $y \in E'$ к элементу $u \in E$, то, как и в скалярном случае, интегрированием по частям получается следующее «тождество Грина»:

$$\int_0^T [(y, L(u)) - (L'(y), u)]\, dt = Q(y, u), \tag{2.22}$$

где $Q(y, u)$ — билинейная форма

$$Q(y, u) \equiv [(y, u') - (y', u)]\,\Big|_0^T =$$
$$= (y_T, u'_T) - (y'_T, u_T) - (y_0, u'_0) + (y'_0, u_0). \tag{2.23}$$

Определение 2.6. Краевые условия вида

$$\begin{aligned} L'_1(y) &\equiv \gamma_{11} y_0 + \gamma_{12} y'_0 + \delta_{11} y_T + \delta_{12} y'_T = 0, \\ L'_2(y) &\equiv \gamma_{21} y_0 + \gamma_{22} y'_0 + \delta_{21} y_T + \delta_{22} y'_T = 0, \end{aligned} \tag{2.24}$$

где γ_{ij}, δ_{ij} — некоторые комплексные числа, называются *сопряженными* к исходным краевым условиям (2.17), если для любой пары функций $y(t)$ и $u(t)$, удовлетворяющих соотношениям

$$y(t) \in \mathscr{D}(L'),\quad L'_1(y) = L'_2(y) = 0$$

и

$$u(t) \in \mathscr{D}(L),\quad L_1(u) = L_2(u) = 0,$$

выполнено тождество: $Q(y, u) = 0$.

Мы предполагали, что все точки неположительной вещественной оси принадлежат резольвентному множеству оператора A. Это утверждение остается в силе и для оператора A'. Более того, из неравенства (2.2) следует аналогичное неравенство для оператора A':

$$\left\| (A' - \lambda I)^{-1} \right\| \leqslant \frac{c}{1 + |\lambda|} \quad \text{при} \quad \lambda \leqslant 0. \tag{2.25}$$

Предположим еще, что $\mathscr{D}(A')$ плотно в E' (это предположение будет автоматически выполнено для рефлексивных банаховых пространств; см. [1]). В этом случае на сопряженную краевую задачу

$$L'(y) \equiv \frac{d^2 y}{dt^2} - A' y = 0, \quad L'_1(y) = L'_2(y) = 0 \tag{2.26}$$

переносятся утверждения, доказанные для исходной задачи. Такую же роль, например, играет определитель $D(A')$, составленный для (2.26). Характеристический определитель исходной краевой задачи теперь будет обозначаться через $D(A)$. Связь этих двух определителей выясняется следующей теоремой (заметим, что сопряженные краевые условия определяются неоднозначно).

Теорема 2.4. *В классе сопряженных краевых условий* (2.24) *найдутся такие, что характеристический определитель* $D(A')$, *составленный для этих условий как оператор в* E', *будет сопряжен к оператору* $D(A)$:

$$D(A') = [D(A)]'. \tag{2.27}$$

Доказательство. Выпишем матрицу коэффициентов исходной краевой задачи

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Минор этой матрицы, составленный из i-го и j-го столбцов ($i < j$), обозначим d_{ij}. Если теперь определитель $D(A)$ системы (2.11) представить в виде суммы определителей

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}A^{-1/2} & \alpha_{11}V(T)A^{-1/2} \\ \alpha_{21}A^{-1/2} & \alpha_{21}V(T)A^{-1/2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11}A^{-1/2} & \alpha_{12}V(T) \\ \alpha_{21}A^{-1/2} & \alpha_{22}V(T) \end{vmatrix}, \ \ldots,$$

то получится следующее выражение для $D(A)$:

$$\begin{aligned} D(A) = -d_{24}I + (d_{14} - d_{23})A^{-1/2} + d_{13}A^{-1} + \\ + 2(d_{12} + d_{34})A^{-1/2}V(T) + \\ + \left[d_{24}I + (d_{14} - d_{23})A^{-1/2} - d_{13}A^{-1}\right]V(2T). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Так как область $\mathscr{D}(A')$, по предположению, плотна в E', то семейство операторов $V'(t)$ совпадает с полугруппой $W(t)$, порожденной оператором $-(A')^{1/2}$. Отсюда следует, что сопряженный к $D(A)$ оператор будет таким:

$$\begin{aligned} [D(A)]' = -d_{24}I' + (d_{14} - d_{23})(A')^{-1/2} + d_{13}(A')^{-1} + \\ + 2(d_{12} + d_{34})(A')^{-1/2}W(T) + \\ + \left[d_{24}I' + (d_{14} - d_{23})(A')^{-1/2} - d_{13}(A')^{-1}\right]W(2T). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Пусть теперь $\tilde{d}_{ij}$ — миноры матрицы коэффициентов сопряженной задачи:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \delta_{21} & \delta_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Определитель $D(A')$ выпишем в раскрытом виде (для этого достаточно в формуле (2.29) всюду вместо A поставить оператор A' и миноры d_{ij} сменить на $\tilde{d}_{ij}$):

$$D(A') = -\tilde{d}_{24}I' + (\tilde{d}_{14} - \tilde{d}_{23})(A')^{-1/2} + \tilde{d}_{13}(A')^{-1} + \\ + 2(\tilde{d}_{12} + \tilde{d}_{34})(A')^{-1/2} W(T) + \\ + \left[\tilde{d}_{24}I' + (\tilde{d}_{14} - \tilde{d}_{23})(A')^{-1/2} - \tilde{d}_{13}(A')^{-1}\right] W(2T). \tag{2.32}$$

Сравнение выражений (2.30) и (2.32) показывает, что для доказательства теоремы достаточно убедиться в равенстве коэффициентов при операторах в соответствующих слагаемых. Здесь придется рассмотреть несколько случаев:

1°. $d_{12} \neq 0$. Матрица (2.28) с точностью до порядка строк эквивалентна матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \tilde{\beta}_{11} & \tilde{\beta}_{12} \\ 0 & 1 & \tilde{\beta}_{21} & \tilde{\beta}_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.33}$$

а условия $L_1(u) = L_2(u) = 0$ можно записать в виде

$$u_0 = -\tilde{\beta}_{11}u_T - \tilde{\beta}_{12}u'_T,$$
$$u'_0 = -\tilde{\beta}_{21}u_T - \tilde{\beta}_{22}u'_T.$$

Подстановка этих выражений в форму $Q(y, u)$ из (2.23) дает:

$$Q(y, u) = y_T u'_T - y'_T u_T - y_0(-\tilde{\beta}_{21}u_T - \tilde{\beta}_{22}u'_T) + \\ + y'_0(-\tilde{\beta}_{11}u_T - \tilde{\beta}_{12}u'_T) = (\tilde{\beta}_{21}y_0 - \tilde{\beta}_{11}y'_0 - y'_T)\,u_T + \\ + (\tilde{\beta}_{22}y_0 - \tilde{\beta}_{12}y'_0 + y_T)\,u'_T.$$

Отсюда ясно, что $Q(y, u)$ обратится в нуль, если считать

$$L'_1(y) \equiv \tilde{\beta}_{21}y_0 - \tilde{\beta}_{11}y'_0 - y'_T = 0,$$
$$L'_2(y) \equiv \tilde{\beta}_{22}y_0 - \tilde{\beta}_{12}y'_0 + y_T = 0$$

матрицей

$$\begin{pmatrix} \tilde{\beta}_{21} & -\tilde{\beta}_{11} & 0 & -1 \\ \tilde{\beta}_{22} & -\tilde{\beta}_{12} & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Явный вид матриц (2.33) и (2.34) дает возможность сравнить коэффициенты в (2.30) и (2.32):

$$\tilde{d}_{24} = -\tilde{\beta}_{12} = d_{24};$$

$$\tilde{d}_{14} - \tilde{d}_{23} = \tilde{\beta}_{22} + \tilde{\beta}_{11} = d_{14} - d_{23};$$

$$\tilde{d}_{13} = \tilde{\beta}_{21} = d_{13};$$

$$\tilde{d}_{12} + \tilde{d}_{34} = \begin{vmatrix} \tilde{\beta}_{21} & -\tilde{\beta}_{11} \\ \tilde{\beta}_{22} & -\tilde{\beta}_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tilde{\beta}_{11} & \tilde{\beta}_{12} \\ \tilde{\beta}_{21} & \tilde{\beta}_{22} \end{vmatrix} = d_{12} + d_{34}.$$

Тем самым для первого случая теорема доказана.

2°. $d_{13} \neq 0$. Матрица (2.28) эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{\alpha}_{12} & 0 & \tilde{\beta}_{12} \\ 0 & \tilde{\alpha}_{22} & 1 & \tilde{\beta}_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

или, в виде краевых условий,

$$u_0 = -\tilde{\alpha}_{12} u_0' - \tilde{\beta}_{12} u_T',$$

$$u_T = -\tilde{\alpha}_{22} u_0' - \tilde{\beta}_{12} u_T'.$$

Для $Q(y, u)$ получается

$$Q(y, u) = (-y_0 - \tilde{\alpha}_{12} y_0' + \tilde{\alpha}_{22} y_T') u_0' +$$

$$+ (-\tilde{\beta}_{12} y_0' + y_T + \tilde{\beta}_{22} y_T') u_T'.$$

В качестве сопряженных краевых условий полагаем

$$L_1'(y) \equiv -\tilde{\beta}_{12} y_0' + y_T + \tilde{\beta}_{22} y_T' = 0,$$

$$L_2'(y) \equiv -y_0 - \tilde{\alpha}_{12} y_0' + \tilde{\alpha}_{22} y_T' = 0$$

с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\beta}_{12} & 1 & \tilde{\beta}_{22} \\ -1 & -\tilde{\alpha}_{12} & 0 & \tilde{\alpha}_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

Сравнение миноров (2.35) и (2.36) доказывает справедливость теоремы и для этого случая.

Оставшиеся четыре случая $d_{14} \neq 0$, $d_{23} \neq 0$, $d_{24} \neq 0$, $d_{34} \neq 0$ рассматриваются аналогично.

Следствие. *Если $\mathscr{D}(A')$ плотна в E', то для того чтобы однородная сопряженная краевая задача имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы область значений $\mathscr{R}(D)$ оператора D не была плотной в пространстве E.*

Действительно, последнее условие выполнено в том и только в том случае, когда имеются ненулевые решения уравнения $D'y = 0$. Но $D' = D(A')$, и утверждение вытекает из теоремы 2.3.

5. Равномерно корректные краевые задачи. Регулярные краевые условия. Определение 2.7. Краевая задача (2.3) — (2.9) называется *равномерно корректной*, если для всяких f_1 и f_2 из E существует единственное обобщенное решение этой задачи, непрерывно зависящее в норме пространства $C(E)$ от f_1, $f_2 \in E$.

Из того, что было сказано в п. 3, непосредственно вытекает

Теорема 2.5. *Для того чтобы задача* (2.3) — (2.9) *была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы операторы $D^{-1}S_1(t)$ и $D^{-1}S_2(t)$ были равномерно ограниченными на* $[0, T]$.

Оказывается, что для равномерной корректности задачи существенную роль играет свойство регулярности краевых условий *). В нашем случае краевые условия будут регулярными, лишь когда будет выполнено одно из условий:

1°. $d_{24} \neq 0$,

2°. $d_{24} = 0$, но $|\alpha_{12}| + |\beta_{12}| > 0$ и $d_{23} - d_{14} \neq 0$,

3°. $\alpha_{12} = \beta_{12} = \alpha_{22} = \beta_{22} = 0$, но $d_{13} \neq 0$.

Остановимся на этих случаях подробнее.

1°. $d_{24} \neq 0$. Положим $d_{24} = -1$, тогда характеристический определитель D по формуле (2.29) предстанет в виде

$$D = I - R_1,$$

*) М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, 1954.

где R_1 — ограниченный оператор (линейная комбинация ограниченных операторов $A^{-1/2}$, $V(T)$ и их произведений).

Если предположить, что единица принадлежит резольвентному множеству оператора R_1, то оператор D будет иметь ограниченный обратный. Отсюда вытекает, что операторы $D^{-1}S_1(t)$, $D^{-1}S_2(t)$ будут равномерно ограниченными на $[0, T]$.

2°. $d_{24}=0$, $|\alpha_{12}|+|\beta_{12}|>0$ и $d_{23}-d_{14}\neq 0$.

Пусть $d_{23}-d_{14}=-1$. Матрицу (2.28) при этих условиях можно преобразовать к виду

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \tilde{\alpha}_{21} & 0 & \tilde{\beta}_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

а определитель D по формуле (2.29) примет вид

$$D=A^{-1/2}(I-R_2),$$

где R_2 — ограниченный оператор.

Таким образом, если даже оператор $(I-R_2)^{-1}$ ограничен, то оператор $D^{-1}=(I-R_2)^{-1}A^{1/2}$ будет все же неограниченным.

Однако операторы $S_1(t)$ и $S_2(t)$ имеют множителем оператор $A^{-1/2}$, поэтому произведения $D^{-1}S_1(t)$ и $D^{-1}S_2(t)$ будут равномерно ограниченными, если ограничен оператор $(I-R_2)^{-1}$.

3°. $\alpha_{12}=\beta_{12}=\alpha_{22}=\beta_{22}=0$, но $d_{13}\neq 0$. Эти условия эквивалентны первой краевой задаче $u_0=f_1$, $u_T=f_2$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

Для определения D получается формула

$$D=A^{-1}[I-V(2T)],$$

т. е. оператор $D^{-1}=[I-V(2T)]^{-1}A$, если он и существует, неограничен за счет множителя A. Однако в силу того, что краевые условия не содержат производных, операторы $L_i(u_j)$ имеют множитель $A^{-1/2}$ и, следовательно, операторы $S_1(t)$

и $S_2(t)$ — множитель A^{-1}. Этот множитель гасит неограниченность оператора D^{-1}.

Теорема 2.6. *Пусть краевые условия задачи* (2.3) — (2.9) *регулярны. Тогда оператор D может быть представлен в одной из следующих трех форм*:

1°. $D = c(I - R)$,

2°. $D = cA^{-1/2}(I - R)$,

3°. $D = cA^{-1}(I - R)$,

где R — ограниченный оператор (в каждом случае свой), а c — константы. Если единица не является точкой спектра оператора R, то краевая задача (2.3) — (2.9) *равномерно корректна на отрезке* $[0, T]$. *Все обобщенные решения задачи являются обобщенными решениями уравнения* (2.3).

В доказательстве нуждается лишь последнее утверждение. Оно вытекает из того, что в рассмотренных случаях обобщенное решение имеет вид

$$u(t) = V(t)h_1 + V(T - t)h_2,$$

где h_1 и h_2 — некоторые элементы из E.

Выясним еще вопрос, когда при регулярных краевых условиях обобщенные решения равномерно корректной задачи будут ослабленными. Для этого достаточно, чтобы из уравнений (2.13) можно было определить элементы g_1 и g_2. Рассмотрим эти уравнения во всех трех случаях регулярности краевых условий. В случае 1° оператор D^{-1} ограничен, поэтому g_1 и g_2 находятся при любых f_1, $f_2 \in E$. В случае 2° будем считать, что матрица (2.28) имеет вид (2.37). Тогда определяемое ею краевое условие $L_2(u) = \tilde{\alpha}_{22}u_0 + \tilde{\beta}_{21}u_T$ не содержит производных, поэтому операторы $L_2(V_j)$ содержат множитель $A^{-1/2}$. Отсюда следует, что операторы $D^{-1}L_2(V_j)$ — ограничены. Операторы $D^{-1}L_1(V_j)$ неограничены и имеют вид $\Phi A^{1/2}$, где Φ — ограниченный оператор, поэтому g_1 и g_2 не могут быть определены при любом элементе f_2. Требуется, чтобы $f_2 \in \mathscr{D}(A^{1/2})$. Наконец, в случае 3° с матрицей (2.38) все операторы $D^{-1}L_i(V_j)$ имеют вид $cA^{1/2}$, поэтому уравнения (2.13) разрешимы при f_1, $f_2 \in D(A^{1/2})$.

Теорема 2.7. *В условиях теоремы* 2.6 *обобщенное решение будет ослабленным при любых* f_1, $f_2 \in E$ *в случае* 1°. *Для того чтобы оно было ослабленным в остальных случаях, достаточно, чтобы* f_1, $f_2 \in D(A^{1/2})$.

6. Некорректные краевые задачи. Для нерегулярных условий (2.9) остается лишь такая возможность:

$$d_{24} = 0, \ |\alpha_{12}| + |\beta_{12}| > 0, \quad d_{23} - d_{14} = 0. \tag{2.39}$$

Определитель D принимает вид

$$D = A^{-1}\left[d_{13}I + 2(d_{12} + d_{34}) A^{1/2} V(T) - d_{13} V(2T)\right].$$

Для аналитических полугрупп оператор $A^{1/2} V(T)$ ограничен, поэтому оператор в квадратных скобках также ограничен.

Пусть $d_{13} \neq 0$, тогда $D = A^{-1}(d_{13}I - R_4)$, где R_4—ограниченный оператор. Если d_{13} не принадлежит спектру оператора R_4, то D^{-1} пропорционален A (с ограниченным операторным коэффициентом). Вместе с тем в силу условия $|\alpha_{12}| + |\beta_{13}| > 0$ оператор $L_1(u)$ содержит дифференцирование, которое «гасит» множитель $A^{-1/2}$, стоящий в функциях $V_i(t)$ ($i = 0, 1, 2$). В результате оператор

$$S_2(t) = \begin{vmatrix} A^{-1/2} V(t) & A^{-1/2} V(T - t) \\ L_1(V_1) & L_1(V_2) \end{vmatrix}$$

содержит множителем лишь $A^{-1/2}$, и произведение $D^{-1} S_2(t)$ оказывается неограниченным оператором вида $RA^{1/2}$. Это означает, что задача (2.3)—(2.9) для рассматриваемых краевых условий

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{21} & \beta_{12} \\ \tilde{\alpha}_{21} & 0 & \tilde{\beta}_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \left.\begin{aligned} &|\alpha_{12}| + |\beta_{12}| > 0, \\ &d_{24} = d_{23} - d_{14} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

в целом некорректна. Но если предположить, что $f_2 \in D(A^{1/2})$, то элемент $D^{-1}S_2(t) f_2$ будет вполне определен. Далее, выражение для $S_1(t)$ содержит множитель A^{-1}. Следовательно, оператор $D^{-1}S_1(t)$ будет ограниченным, и из формулы (2.16) можно получить обобщенное решение.

В связи с этим краевые задачи вида (2.40) будем называть *полукорректными*.

Заметим, что при всяком $f_2 \in E$ функция $D^{-1}S_2(t) f_2$ будет определена при любом $t \in (0, T)$, так как при этих t операторы $A^{1/2}V(t)$ и $A^{1/2}V(T-t)$ ограничены. Однако эта функция, а значит, и функция $V(t)$, может неограниченно возрастать при $t \to 0$ и $t \to T$. Если все же считать функцию $u(t)$ в каком-то смысле решением задачи, то это решение не будет непрерывно зависеть от f_2 в норме $C(E)$, но будет от него непрерывно зависеть при каждом фиксированном $t \in (0, T)$.

Пусть, наконец, к условиям (2.38) добавится еще одно, $d_{13} = 0$. Тогда

$$D = 2(d_{12} + d_{34}) A^{-1/2} V(T),$$

откуда

$$D^{-1} = \frac{1}{2(d_{12} + d_{34})} A^{1/2} V^{-1}(T).$$

Оператор D^{-1}, вообще говоря, неприменим ни к одному из членов, стоящих справа в (2.14). Краевая задача (2.3) — (2.9) оказывается «сильно некорректной».

Общий вид соответствующих краевых условий будет таким:

$$\alpha u'(0) - \beta u'(T) = f_1,$$
$$\alpha u(0) + \beta u(T) = f_2.$$

При $\beta = 0$ получаем условия задачи Коши.

Теорема 2.8. *Задача Коши является некорректной для уравнения* (2.3).

Задача Коши для уравнения (2.3) естественно порождает задачу Коши для системы (2.6) с начальными условиями

$$z(0) = \frac{1}{2}\left(u_0 - A^{-1/2}u_0'\right) \quad \text{и} \quad w(0) = \frac{1}{2}\left(u_0 + A^{-1/2}u_0'\right).$$

Для первого уравнения (2.6) задача Коши равномерно корректна, для второго — некорректна. Однако, поскольку оператор $-A^{1/2}$ является производящим оператором аналитической полугруппы, то для него обратная задача Коши корректна в классе ограниченных решений (см. § 3 гл. I). Таким образом, для второго уравнения задача Коши будет корректной в классе равномерно ограниченных решений $w(t)$. Мы приходим к утверждению:

Теорема 2.9. *Задача Коши для уравнения* (2.3) *корректна в классе решений* $u(t)$, *для которых функции* $u(t)+A^{-1/2}u'(t)$ *равномерно на* $[0, T]$ *ограничены некоторой константой* M.

Следствие. *Если решение задачи Коши для уравнения* (2.3) *существует, то оно единственно.*

7. Случай вполне непрерывного оператора A^{-1}. При регулярных краевых условиях теорема 2.6 сводит вопрос о равномерной корректности задачи (2.3) — (2.9) к вопросу о существовании ограниченного обратного к оператору $I-R$. Такой оператор заведомо не существует, если D обращается в нуль на некотором ненулевом элементе. В силу теоремы 2.3 это будет иметь место в том и только том случае, когда соответствующая однородная краевая задача имеет нетривиальные решения. Однако оператор D может быть неограниченным и в других случаях.

Пусть, например, оператор A имеет точку α в своем непрерывном спектре. Рассмотрим регулярные краевые условия, определяемые матрицей

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\alpha} & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $D=(\alpha I-A)A^{-1}[I-V(2T)]$ и $I-R=\left(I-\frac{1}{\alpha}A\right)\times$ $\times[I-V(2T)]$. Если множитель $I-V(2T)$ имеет ограниченный обратный, то $I-R$ не имеет его из-за множителя $\left(I-\frac{1}{\alpha}A\right)$.

Указанные трудности устраняются при рассмотрении частного, но важного класса операторов A, имеющих вполне непрерывный обратный. Получаемая для этого случая теория аналогична теории скалярных краевых задач. Примером тому служит

Теорема 2.10. *Пусть краевые условия* (2.9) *регулярны, и оператор* A^{-1} *вполне непрерывен. Для того чтобы краевая задача* (2.3)—(2.9) *была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая* *однородная краевая задача имела только нулевое решение.*

Если область определения сопряженного оператора A' плотна в E', то это же условие необходимо и достаточно для равномерной корректности сопряженной задачи

$$\frac{d^2y}{dt^2} = A'y; \quad L_1'(y) = \varphi_1; \quad L_2'(y) = \varphi_2. \tag{2.41}$$

Доказательство. Если оператор A^{-1} вполне непрерывен, то таким же будет и оператор $A^{-1/2}$. Далее, оператор

$$V(t) = A^{1/2}V(t)A^{-1/2}$$

при $t > 0$ является вполне непрерывным как произведение ограниченного оператора на вполне непрерывный. По теореме 2.6 при регулярных краевых условиях

$$D = cA^{-\alpha}(I - R),$$

где α принимает одно из значений 0; $1/2$; 1, а R — некоторый многочлен от вполне непрерывных операторов $A^{-1/2}$ и $V(T)$ и, следовательно, вполне непрерывный оператор. Но тогда точка 1 комплексной плоскости либо является собственным значением оператора R, либо принадлежит его резольвентному множеству. В первом случае определитель D не имеет обратного, и однородная задача имеет нетривиальное решение. Во втором случае оператор $(I - R)^{-1}$ существует, ограничен и определен на всем пространстве, следовательно, в силу теоремы 2.6 краевая задача (2.3) — (2.9) равномерно корректна.

По теореме 2.4 определитель $D(A')$ сопряженной краевой задачи как оператор в E' сопряжен к определителю $D(A)$. Спектры сопряженных операторов $D(A)$ и $D(A')$ совпадают; более того, из полной непрерывности оператора R следует полная непрерывность оператора R'. Поэтому все сказанное сейчас о задаче (2.3) — (2.9) остается верным для неоднородной сопряженной задачи (2.41).

Тем самым доказательство теоремы закончено.

8. Ограниченные на бесконечности решения. Пусть $u(t)$ — обобщенное решение уравнения (2.3), определенное на $[0, \infty)$. Предположим, что оно ограничено:

$$\sup_{0 \leqslant t < \infty} \|u(t)\| < \infty. \tag{2.42}$$

Функции $u(t)$ и $A^{-1/2}u$ непрерывны в нуле. В силу теоремы 2.1 при любом $T > 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ имеет место представление

$$u(t) = \frac{1}{2} V(t) \left[u(0) - \left(A^{-1/2}u\right)'(0)\right] + \\ + \frac{1}{2} V(T - t) \left[u(T) + \left(A^{-1/2}u\right)'(T)\right]. \tag{2.43}$$

Полагая в этом тождестве $t = 0$, а затем $t = T$, получаем

$$\left.\begin{aligned} u(0) + \left(A^{-1/2}u\right)'(0) &= V(T)\left[u(T) + \left(A^{-1/2}u\right)'(T)\right], \\ u(T) - \left(A^{-1/2}u\right)'(T) &= V(T)\left[u(0) - \left(A^{-1/2}u\right)'(0)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.44}$$

Исключив из этих уравнений член с $\left(A^{-1/2}u\right)'(T)$, приходим к соотношению

$$u(0) + \left(A^{-1/2}u\right)'(0) = 2V(T)\,u(T) - V(2T)\left[u(0) - \left(A^{-1/2}u\right)'(0)\right]. \tag{2.45}$$

Из теоремы 5.4 гл. I вытекает, что для резольвенты оператора $A^{1/2}$ справедлива оценка

$$\|R_{A^{1/2}}(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{1 + |\lambda|} \qquad (\lambda \leqslant 0),$$

из которой в свою очередь следует оценка для полугруппы $V(t)$:

$$\|V(t)\| \leqslant Me^{-t}. \tag{2.46}$$

Устремляя в равенстве (2.45) T к бесконечности, учитывая (2.42) и (2.46), приходим к выводу, что

$$u(0) + \left(A^{-1/2}u\right)'(0) = 0. \tag{2.47}$$

Воспользуемся теперь тем, что аналитическая полугруппа $V(t)$ ни при каком t не может обращаться в нуль на ненулевом элементе. Тогда из первого равенства (2.44) получаем, что

$$u(T) + \left(A^{-1/2}u\right)'(T) = 0. \tag{2.48}$$

Равенства (2.47), (2.48) и (2.43) приводят к формуле

$$u(t)=V(t)\,u_0. \tag{2.49}$$

Мы доказали следующее утверждение:

Теорема 2.11. *Для всякого* $u_0\in E$ *существует единственное, ограниченное на полуоси* $[0,\infty)$ *обобщенное решение уравнения* (2.3), *удовлетворяющее начальному условию* $u(0)=u_0$. *Это решение задается формулой* (2.49).

9. Неоднородное уравнение. Перейдем теперь к рассмотрению неоднородного уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2}=Au+f(t) \tag{2.50}$$

с тем же оператором A и непрерывной на $[0, T]$ функцией $f(t)$.

Определения решения, ослабленного и обобщенного решения для уравнения (2.50) остаются такими же, как и для однородного уравнения (2.3).

Заменами $v=A^{-1/2}\dfrac{du}{dt}$; $z=\dfrac{1}{2}(u-v)$; $w=\dfrac{1}{2}(u+v)$ уравнение (2.50) сводится к системе

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=-A^{1/2}z+\frac{1}{2}A^{-1/2}f(t),\\ \frac{dw}{dt}&=A^{1/2}w-\frac{1}{2}A^{-1/2}f(t)\end{aligned}\right.\qquad (0\leqslant t\leqslant T). \tag{2.51}$$

Решение первого уравнения с начальным условием $z(0)=z_0$ запишется в виде

$$z(t)=V(t)\,z_0+\frac{1}{2}\int_0^t V(t-\tau)\,A^{-1/2}f(\tau)\,d\tau. \tag{2.52}$$

Для второго уравнения решается обратная задача Коши с конечным условием $w(T)=w_T$

$$w(t)=V(T-t)\,w_T+\frac{1}{2}\int_t^T V(\tau-t)\,A^{-1/2}f(\tau)\,d\tau. \tag{2.53}$$

Для общего решения $u(t)$ уравнения (2.50) получаем формулу

$$u(t) = V(t)\,z_0 + V(T-t)\,w_T + \frac{1}{2}\int_0^T V(|t-\tau|)\,A^{-1/2} f(\tau)\,d\tau. \qquad (2.54)$$

Первые два слагаемых в формуле (2.54) представляют собой общее решение однородного уравнения, которое нами уже изучено.

Остановимся более подробно на функции

$$V_0(t,\ \tau) = \frac{1}{2}V(|t-\tau|)\,A^{-1/2} = \begin{cases} \frac{1}{2}V(t-\tau)\,A^{-1/2} & \text{при } t \geqslant \tau, \\ \frac{1}{2}V(\tau-t)\,A^{-1/2} & \text{при } t \leqslant \tau. \end{cases}$$

Из определения функции $V_0(t,\ \tau)$ непосредственно усматривается, что она обладает следующими свойствами, характеризующими фундаментальное решение дифференциального уравнения (2.50):

(I) $V_0(t,\ \tau)$ есть операторная функция двух переменных, определенная и сильно непрерывная в квадрате $0 \leqslant t,\ \tau \leqslant T$;

(II) как функция от t она сильно непрерывно дифференцируема в каждом из интервалов $[0,\ \tau)$ и $(\tau,\ T]$ и дважды сильно непрерывно дифференцируема в интервалах $(0,\ \tau)$ и $(\tau,\ T)$, причем для любого $x \in E$

$$\lim_{t \to \tau - 0} \frac{\partial}{\partial t}[V_0(t,\ \tau)\,x] - \lim_{t \to \tau + 0} \frac{\partial}{\partial t}[V_0(t,\ \tau)\,x] = x;$$

(III) функция $A^{1/2}V_0(t,\ \tau)$ определена и сильно непрерывна на всем квадрате $0 \leqslant t,\ \tau \leqslant T$, а функция $AV_0(t,\ \tau)$, рассматриваемая как функция от t, определена и сильно непрерывна в каждом из интервалов $0 < t < \tau$ и $\tau < t < T$;

(IV) как функция от $tV_0(t,\ \tau)$ в каждом из интервалов $0 < t < \tau$ и $\tau < t < T$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2} = AV_0.$$

Рассмотрим теперь последнее слагаемое в формуле (2.54):

$$g(t)=\frac{1}{2}\int_0^T V(|t-\tau|)\,A^{-1/2}f(\tau)\,d\tau \tag{2.55}$$

и выясним, при каких условиях оно будет ослабленным решением уравнения (2.50). Имеем

$$\frac{dg}{dt}=-\frac{1}{2}\int_0^t V(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int_t^T V(\tau-t)\,f(\tau)\,d\tau. \tag{2.56}$$

Из формул (2.55) и (2.56) видно, что функция $g(t)$ непрерывна и имеет первую непрерывную производную на $[0, T]$. Функция

$$A^{1/2}g(t)=\frac{1}{2}\int_0^T V(|t-\tau|)\,f(\tau)\,d\tau$$

также непрерывна на $[0, T]$.

Однако, вообще говоря, функция $g(t)$ может не иметь второй производной, и ее значения могут не принадлежать $\mathscr{D}(A)$. На основании § 6 гл. I обе эти свойства будут выполнены при $0<t<T$, если функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера. Дифференцированием проверяется, что тогда формула (2.54) дает решение уравнения (2.50).

Рассмотрим теперь для уравнения (2.50) краевую задачу с условиями (2.9). Эта задача нами изучена для однородного уравнения, поэтому в силу линейности уравнения (2.50) для него достаточно изучить задачу с однородными краевыми условиями

$$L_1(u)=L_2(u)=0. \tag{2.57}$$

Решение (2.54) представим в виде

$$u(t)=V_1(t)\,g_1+V_2(t)\,g_2+g(t), \tag{2.58}$$

где $V_1(t)$, $V_2(t)$, g_1 и g_2 те же, что и в (2.10), а

$$g(t)=\int_0^1 V_0(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau. \tag{2.59}$$

Подставляя решение в условия (2.57), мы придем к системе для определения g_1 и g_2, аналогичной (2.13):

$$\left.\begin{aligned} Dg_1 &= -L_2(V_2)L_1(g)+L_1(V_2)L_2(g), \\ Dg_2 &= -L_1(V_1)L_2(g)+L_2(V_1)L_1(g). \end{aligned}\right\} \tag{2.60}$$

Функция $g(t)$, являясь частным ослабленным решением уравнения (2.50), непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, T]$, причем

$$\frac{dg}{dt}=\int_0^T\left[\frac{\partial}{\partial t}V_0(t, \tau)\right]f(\tau)\,d\tau.$$

Поэтому

$$L_l(g)=\int_0^T L_l(V_0)_t f(\tau)\,d\tau,$$

где индекс t показывает, что оператор L_l действует на $V_0(t, \tau)$ как на функцию от t.

Применяя к (2.58) оператор D и используя (2.60), получаем

$$Du(t)=\int_0^T G_0(t, \tau)f(\tau)\,d\tau, \tag{2.61}$$

где

$$\begin{aligned} G_0(t, \tau) = V_1(t)\,&[-L_2(V_2)L_1(V_0)_t+L_1(V_2)L_2(V_0)_t]- \\ &-V_2(t)[L_1(V_1)L_2(V_0)_t-L_2(V_1)L_1(V_0)_t]+DV_0(t, \tau). \end{aligned}$$

Всякую непрерывную функцию $u(t)$, удовлетворяющую уравнению (2.61), будем называть *обобщенным решением задачи* (2.50) — (2.57). Функцию $G_0(t, \tau)$ можно записать в виде определителя

$$G_0(t, \tau)=\begin{vmatrix} V_1(t) & V_2(t) & V_0(t, \tau) \\ L_1(V_1) & L_1(V_2) & L_1(V_0)_t \\ L_2(V_1) & L_2(V_2) & L_2(V_0)_t \end{vmatrix}. \tag{2.62}$$

Как видно, вопрос о разрешимости задачи (2.50) — (2.57) сводится к вопросу о существовании оператора D^{-1} и его связи с оператором $G_0(t, \tau)$.

Задачу (2.50) — (2.57) назовем *равномерно корректной*, если обобщенное решение существует при всякой непрерывной функции $f(t)$ и непрерывно от нее зависит в метрике пространства $C(E)$. Для равномерной корректности задачи (2.50)—(2.57) необходимо и достаточно, чтобы интегральный оператор

$$Gf = D^{-1}\int_0^T G_0(t, \tau) f(\tau)\, d\tau$$

был ограниченным оператором в $C(E)$.

Пусть краевые условия регулярны. Тогда по теореме 2.6 оператор D представим в одном из видов 1°—3°. Предположим, что 1 не является точкой спектра оператора R. В случае 1° оператор D^{-1} ограничен, оператор $G_0(t, \tau)$ ограничен равномерно по t, τ $(0 \leqslant t, \tau \leqslant T)$ и, следовательно, оператор G ограничен в $C(E)$.

В случае 2° оператор D^{-1} содержит неограниченный множитель $A^{1/2}$. Однако оператор $L_2(u)$ в этом случае не содержит производной, и поэтому все операторы в нижней строке определителя имеют множитель $A^{-1/2}$. Оператор $D^{-1}G_0(t, \tau)$ будет равномерно по t, τ ограниченным. Аналогично в случае 3° оператор D^{-1} имеет множитель A, а операторы второй и третьей строк определителя (2.62) имеют множителем $A^{-1/2}$. Оператор $D^{-1}G_0(t, \tau)$ снова равномерно ограничен.

Теорема 2.12. *Если краевые условия регулярны и единица является регулярной точкой операторов R (см. теорему 2.6), то задача (2.50) — (2.57) равномерно корректна. Если функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, то обобщенные решения являются ослабленными.*

Нетрудно проверить, что для уравнения (2.50) будет равномерно корректной и краевая задача, которая для неоднородных краевых условий была полукорректной.

Остановимся на функции $G(t, \tau) = D^{-1}G_0(t, \tau)$, которую естественно назвать *функцией Грина*, ибо она дает решение неоднородного дифференциального уравнения $u'' = Au + f(t)$ при однородных краевых условиях $L_1(u) = L_2(u) = 0$ в форме

$$u(t) = \int_0^T G(t, \tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Запись функции Грина вполне аналогична скалярному случаю

$$G(t, \tau) = D^{-1} \begin{vmatrix} V_1(t) & V_2(t) & V_0(t, \tau) \\ L_1(V_1) & L_1(V_2) & L_1(V_0)_t \\ L_2(V_1) & L_2(V_2) & L_2(V_0)_t \end{vmatrix}, \qquad (2.63)$$

да и по своим свойствам она также напоминает функцию Грина для скалярной краевой задачи:

(I) $G(t, \tau)$ есть фундаментальное решение уравнения (2.50);

(II) при каждом фиксированном τ $(0 \leqslant \tau \leqslant T)$ как функция от t она удовлетворяет однородным краевым условиям $L_1(G)_t = L_2(G)_t = 0$.

Оба свойства немедленно вытекают из представления (2.63). Действительно, из него следует, во-первых, что $G(t, \tau)$ есть линейная комбинация (с ограниченными операторными коэффициентами) частных решений $V_1(t)$ и $V_2(t)$ и фундаментального решения $V_0(t, \tau)$ однородного дифференциального уравнения, т. е. сама есть фундаментальное решение, и во-вторых, после применения оператора L_i $(i = 1, 2)$ получается

$$L_i(G)_t = D^{-1} \begin{vmatrix} L_i(V_1) & L_i(V_2) & L_i(V_0)_t \\ L_1(V_1) & L_1(V_2) & L_1(V_0)_t \\ L_2(V_1) & L_2(V_2) & L_2(V_0)_t \end{vmatrix}.$$

Первая строка этого определителя совпадает либо со второй (при $i = 1$), либо с третьей (при $i = 2$), т. е. определитель обращается в нуль, а это и означает, что $G(t, \tau)$ удовлетворяет однородным краевым условиям.

Приведем примеры функций Грина.

1°. Первая краевая задача:

$$u(0) = u(T) = 0.$$

Функция Грина имеет вид

$$G(t, \tau) = \frac{1}{2}\{V(|t - \tau|) - [I - V(2T)]^{-1} [V(t + \tau) + \\ + V(2T - t - \tau) - V(2T + t - \tau) - V(2T - t + \tau)]\} A^{-1/2}.$$

2°. Вторая краевая задача:

$$u'(0) = u'(T) = 0.$$

Функция Грина:

$$G(t, \tau)=\frac{1}{2}\{V(|t-\tau|)+[I-V(2T)]^{-1}[V(t+\tau)+$$
$$+V(2T-t-\tau)+V(2T+t-\tau)+V(2T-t+\tau)]\}A^{-1/2}.$$

3°. Задача о периодических решениях:

$$u(T)=u(0), \quad u'(T)=u'(0).$$

Функция Грина

$$G(t, \tau)=\frac{1}{2}\{V(|t-\tau|)+[I-V(T)]^{-1}[V(T+t-\tau)+$$
$$+V(T-t+\tau)]A^{-1/2}.$$

§ 3. Задача Коши для полного уравнения второго порядка

1. Полное уравнение второго порядка. Поведение решений и характер задач, которые естественно ставить для полного однородного уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2}=A(t)\frac{du}{dt}+B(t)u, \tag{3.1}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — линейные операторы с плотными в E областями определения, зависят от того, какой из членов, стоящих справа, является главным. Если таким будет второй член, то уравнение может быть гиперболического или эллиптического типа в зависимости от свойств оператора $B(t)$. Если главным является первый член, то свойства решений уравнения (3.1) тесно связаны со свойствами решений уравнения первого порядка с операторным коэффициентом $A(t)$. Этому случаю как раз и посвящен настоящий параграф. В процессе исследования определится, когда можно считать первый член справа главным.

Так же как и в предыдущих параграфах, введем понятия решений уравнения (3.1).

Определение 3.1. *Решением* уравнения (3.1) назовем функцию $u(t)$, дважды непрерывно дифференцируемую на отрезке $[0, T]$, для которой определены и непрерывны на

$[0, T]$ функции $A(t)\dfrac{du}{dt}$ и $B(t)u$ и которая удовлетворяет уравнению (3.1) на отрезке $[0, T]$.

Определение 3.2. *Ослабленным решением* уравнения (3.1) назовем функцию $u(t)$, обладающую свойствами:

1) $u(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, T]$ и дважды непрерывно дифференцируема на полуинтервале $(0, T]$; 2) функция $A(t)u(t)$ определена и непрерывна на $[0, T]$, а функции $A(t)\dfrac{du}{dt}$ и $B(t)u(t)$ — на $(0, T]$; 3) функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (3.1) на $(0, T]$.

Как обычно, *под задачей Коши* (*ослабленной задачей Коши*) понимается задача об отыскании решения (ослабленного решения), удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u'_0. \tag{3.2}$$

2. Сведе́ние к системе уравнений первого порядка. Предположим, что оператор $A(t)$ имеет не зависящую от t область определения $\mathscr{D}(A)$, сильно непрерывен на ней и имеет ограниченный обратный оператор $A^{-1}(t)$.

Пусть $u(t)$ — решение уравнения (3.1) такое, что $u(0) \in \mathscr{D}(A)$. Из непрерывности функции $A(t)\dfrac{du}{dt}$ и непрерывности оператора $A(0)A^{-1}(t)$ следует непрерывность функции $A(0)\dfrac{du}{dt}$. Так как оператор $A(0)$ замкнут, то

$$\int_0^t A(0)\frac{du}{d\tau}\,d\tau = A(0)\int_0^t \frac{du}{d\tau}\,d\tau = A(0)[u(t) - u(0)]. \tag{3.3}$$

По предположению, $u(0) \in \mathscr{D}(A)$, поэтому из (3.3) следует, что $u(t) \in \mathscr{D}(A)$ и функция $A(0)u(t)$ непрерывно на $[0, T]$ дифференцируема, причем

$$\frac{d(A(0)u(t))}{dt} = A(0)\frac{du}{dt}. \tag{3.4}$$

Сделаем теперь замену

$$\frac{du}{dt} = v(t) \quad \text{и} \quad A(0)u(t) = w(t). \tag{3.5}$$

Обе функции $v(t)$ и $w(t)$ будут непрерывно дифференцируемыми на $[0, T]$ и в силу (3.1) и (3.4) будут удовлетворять уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= A(t)v + B(t)A^{-1}(0)w, \\ \frac{dw}{dt} &= A(0)v. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Систему (3.6) можно рассматривать как одно уравнение в сдвоенном пространстве $E \times E$:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \mathfrak{A}(t)\tilde{x} + \mathfrak{B}(t)\tilde{x}, \tag{3.7}$$

где операторы $\mathfrak{A}(t)$ и $\mathfrak{B}(t)$ задаются матрицами

$$\mathfrak{A}(t) = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ A(0) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathfrak{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 & B(t)A^{-1}(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Областью определения оператора $\mathfrak{A}(t)$ естественно считать множество $\mathscr{D}(A) \times E$, а областью определения оператора $\mathfrak{B}(t)$ — множество $E \times \mathscr{D}\big(B(t)A^{-1}(0)\big)$.

Мы показали, что всякое решение уравнения (3.1) с условием $u(0) \in \mathscr{D}(A)$ порождает по формулам (3.5) решение $\tilde{x}(t) = \begin{Bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{Bmatrix}$ уравнения (3.7).

Обратно, пусть $\tilde{x}(t) = \begin{Bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{Bmatrix}$ — решение уравнения (3.7). Рассмотрим

$$u(t) = \int_0^t v(\tau)\,d\tau + A^{-1}(0)w(0). \tag{3.8}$$

Так как функции $v(t)$ и $w(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$ и удовлетворяют уравнениям (3.6), то функция $u(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, T]$. Далее, из второго уравнения (3.6) и замкнутости оператора $A(0)$ вытекает, что

$$w(t) = \int_0^t A(0)v(\tau)\,d\tau + w(0) = A(0)u(t).$$

Из первого уравнения (3.6) тогда получаем, что функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (3.1). Наконец, из непрерывности на $[0, T]$ функции $\frac{dw}{dt} = A(0)\,v(t)$ следует непрерывность

$$A(t)\frac{du}{dt} = A(t)\,v(t) = A(t)\,A^{-1}(0)\,A(0)\,v(t),$$

а тогда из непрерывности $\frac{dv}{dt}$ и непрерывность $B(t)\,A^{-1}(0)\,w(t) = B(t)\,u(t)$ на $[0, T]$. Итак, функция $u(t)$ из (3.8) является решением уравнения (3.1). Очевидно, что $u(0) \in \mathscr{D}(A)$.

Перейдем к рассмотрению взаимной связи ослабленных решений уравнений (3.1) и (3.7). Вследствие непрерывности $A(t)\,u(t)$ для ослабленного решения тождество (3.3) остается в силе. Из него снова вытекает (3.4), и замена (3.5) приводит к уравнению (3.7). Нетрудно проверить, что функция $\tilde{x}(t) = \begin{Bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{Bmatrix}$, определяемая по формулам (3.5), будет ослабленным решением уравнения (3.7).

Обратно, пусть $\tilde{x}(t) = \begin{Bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{Bmatrix}$ — ослабленное решение уравнения (3.7). Введем функцию (3.8). Из свойств $v(t)$ сразу следует, что функция $u(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и дважды непрерывно дифференцируема на $(0, T]$. Далее, из непрерывности $A(0)\,v(t)$ на $(0, T]$ следует непрерывность на $(0, T]$ функции $A(t)\,v(t) = A(t)\frac{du}{dt}$. Проинтегрируем последнее уравнение (3.6) в пределах от ε до t. Тогда получим

$$w(t) - w(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{t} A(0)\,v(\tau)\,d\tau = A(0)\,[u(t) - u(\varepsilon)].$$

В силу непрерывности $w(t)$ на $[0, T]$ правая часть при $\varepsilon \to 0$ стремится к пределу $w(t) - w(0)$. Функция $u(t)$ также непрерывна на $[0, T]$, поэтому $u(t) - u(\varepsilon) \to u(t) - u(0) = u(t) - A^{-1}(0)\,w(0)$. Из замкнутости оператора $A(0)$ вытекает, что $u(t) - A^{-1}(0)\,w(0) \in \mathscr{D}(A)$, а значит, $u(t) \in \mathscr{D}(A)$

и $A(0)u(t)=w(t)$ непрерывна. Отсюда немедленно следует, что $A(t)u(t)$ непрерывна на $[0, T]$, что $u(t)$ удовлетворяет на $(0, T]$ уравнению (3.1), из которого видно, что функция $B(t)u(t)$ непрерывна на $(0, T]$.

Итак, мы установили взаимно однозначное соответствие между решениями (ослабленными решениями) уравнения (3.1), удовлетворяющими условию $u(0) \in \mathscr{D}(A)$, и решениями (ослабленными решениями) уравнения (3.7). В этом смысле уравнения (3.1) и (3.7) эквивалентны.

3. Равномерно корректная задача Коши. Дополнительно к предположениям, сделанным ранее, будем считать оператор $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируемым на $\mathscr{D}(A)$ и таким, что задача Коши для уравнения

$$\frac{dv}{dt}=A(t)v \tag{3.9}$$

равномерно корректна на $[0, T]$. Обозначим через $U(t, s)$ соответствующий ей эволюционный оператор.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (3.7) в треугольнике $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ в случае, когда $\mathfrak{B}=0$. Если $\tilde{x}_0= \begin{Bmatrix} v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} \in \mathscr{D}(\mathfrak{A})$, то из первого уравнения (3.6) находим $v(t, s)=U(t, s)v_0$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим

$$w(t, s)=\int_s^t A(0)U(\tau, s)v_0\,d\tau+w_0. \tag{3.10}$$

Оператор $A(0)U(\tau, s)$, вообще говоря, неограничен, поэтому не ясно, будет ли $w(t, s)$ выражаться с помощью ограниченного оператора через v_0 и w_0. Однако интегрированием по частям можно (3.10) преобразовать к виду

$$w(t, s)=A(0)A^{-1}(t)U(t, s)v_0-A(0)A^{-1}(s)v_0+$$
$$+\int_s^t A(0)A^{-1}(\tau)A'(\tau)A^{-1}(\tau)U(\tau, s)v_0\,d\tau+w_0.$$

Здесь уже к элементам v_0 и w_0 применяются равномерно по t и s ограниченные операторы. Мы приходим к следующему выводу: если оператор $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем на $\mathscr{D}(A)$ и для уравнения (3.9) задача Коши равномерно корректна, то для уравнения

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \mathfrak{A}\tilde{x} \tag{3.11}$$

задача Коши также равномерно корректна.

Уравнение (3.7) теперь можно рассматривать как возмущенное уравнение (3.11) и применять для его исследования теоремы § 3 гл. II. Если ограниченные операторы $A_n(t)$ сильно и равномерно по t сходятся к оператору $A(t)$, то операторы

$$\mathfrak{A}_n(t) = \begin{pmatrix} A_n(t) & 0 \\ A_n(0) & 0 \end{pmatrix}$$

обладают тем же свойством по отношению к оператору $\mathfrak{A}(t)$. Предположим, что операторы $A_n(t)$ осуществляют устойчивую аппроксимацию оператора $A(t)$ и являются сильно непрерывно дифференцируемыми. Эволюционные операторы, отвечающие операторам $\mathfrak{A}_n(t)$, будут строиться по эволюционным операторам $U_n(t, s)$, соответствующим $A_n(t)$, согласно формулам

$$v_n(t, s) = U_n(t, s)\, v_0,$$

$$w_n(t, s) = A_n(0)\, A_n^{-1}(t)\, U_n(t, s)\, v_0 - A_n(0)\, A_n^{-1}(s)\, v_0 + \\ + \int_s^t A_n(0)\, A_n^{-1}(\tau)\, A_n'(\tau)\, A_n^{-1}(\tau)\, U_n(\tau, s)\, v_0\, d\tau + w_0.$$

Если предположить, что операторы $A_n(0)\, A_n^{-1}(t)$ и $A_n'(t)\, A_n^{-1}(t)$ равномерно по n и t ограничены, то операторы $\mathfrak{A}_n(t)$ будут осуществлять устойчивую аппроксимацию оператора $\mathfrak{A}(t)$. Операторы $\mathfrak{A}_n(t)$ коммутируют, если коммутируют $A_n(t)$. Таким образом, для оператора $\mathfrak{A}(t)$ будут выполнены все условия теоремы 3.6 гл. II, за исключением того, что он не имеет обратного. Однако этого можно достичь, добавив к нему оператор, пропорциональный единичному.

Отметим, что в случае, когда операторы $A_n(t)$ строятся по формулам (3.27) гл. II,

$$A_n(t) = -nA(t)\,R_{A(t)}(n), \tag{3.12}$$

то равномерная ограниченность операторов $A_n(0)\,A_n^{-1}(t)$ и $A_n'(t)\,A_n^{-1}(t)$ автоматически выполняется, если для резольвенты оператора $A(t)$ выполняется оценка

$$\|R_{A(t)}(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{\lambda-\omega} \qquad (\lambda > \omega).$$

Действительно,

$$A_n(0)\,A_n^{-1}(t) = I + nR_{A(0)}(n) - nR_{A(0)}(n)\,A(0)\,A^{-1}(t),$$

поэтому

$$\|A_n(0)\,A_n^{-1}(t)\| \leqslant 1 + \frac{Mn}{n-\omega}\left(1 + \max\|A(0)\,A^{-1}(t)\|\right) \leqslant c_1.$$

Далее,

$$\|A_n'(t)\,A_n^{-1}(t)\| = \|-nR_{A(t)}(n)\,A'(t)\,A^{-1}(t)\| \leqslant c_2.$$

Пусть теперь $\mathfrak{B} \neq 0$. Если воспользоваться теоремой 3.7 гл. II, то мы придем к выводу, что при условии ограниченности и непрерывной дифференцируемости оператора $B(t)\,A^{-1}(0)$ для уравнения (3.7) задача Коши равномерно корректна. Отсюда будет вытекать теорема о разрешимости задачи Коши для уравнения (3.1).

Подведем итог нашему исследованию.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть оператор* $A(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3.6 гл. II *относительно операторов* $A_n(t)$ *вида* (3.12). *Если оператор* $B(t)\,A^{-1}(0)$ *ограничен и сильно непрерывно дифференцируем на* $[0, T]$, *то задача Коши для уравнения* (3.1) *имеет единственное решение при любых* u_0, $u_0' \in \mathscr{D}(A)$.

Можно сузить формулировку теоремы, но сделать ее более эффективной, если воспользоваться теоремой 3.11 гл. II.

Т е о р е м а 3.2. *Если оператор* $A(t)$ *сильно непрерывно дифференцируем на* $\mathscr{D}(A)$ *и удовлетворяет условию*

$$\|R_{A(t)}(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{1+\lambda} \quad \textit{при} \quad \lambda \geqslant 0,$$

а оператор $B(t)A^{-1}(0)$ *ограничен и сильно непрерывно дифференцируем по* $t \in [0, T]$, *то задача Коши для уравнения* (3.1) *имеет единственное решение при любых* u_0, $u_0' \in \mathscr{D}(A)$.

Можно было пытаться применить к уравнению (3.7) теорему 3.4 гл. II, в которой не требуется дифференцируемость возмущающего оператора. Нетрудно проверить, что это приведет к требованию ограниченности и непрерывности оператора $A(t)B(t)A^{-1}(t)$, которое значительно грубее требования ограниченности оператора $B(t)A^{-1}(0)$.

Аналогично рассматривается задача Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A(t)\frac{du}{dt} + B(t)u + f(t).$$

Читатель легко применит теоремы 3.2 и 3.3 гл. II для получения критериев разрешимости этой задачи.

4. Абстрактное параболическое уравнение. Мы рассмотрим ослабленную задачу Коши сначала для уравнения с постоянными операторами

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A\frac{du}{dt} + Bu. \tag{3.13}$$

Перейдем снова от этого уравнения к уравнению вида (3.7). В случае постоянного оператора A полугрупповой оператор $U(t)$, отвечающий оператору $\mathfrak{A}$, очень просто выражается через полугрупповой оператор $U(t)$ оператора A:

$$\mathfrak{U}(t) = \begin{pmatrix} U(t) & 0 \\ U(t) - I & I \end{pmatrix}.$$

Отсюда немедленно следует, что для абстрактного параболического уравнения

$$\frac{dv}{dt} = Av \tag{3.9}$$

соответствующее уравнение (3.11) будет также абстрактным параболическим. Если оператор BA^{-1}, и значит, оператор $\mathfrak{B}$, ограничен, то из сказанного следуют утверждения о разрешимости ослабленной задачи Коши для уравнения (3.7), и следовательно, теоремы о разрешимости этой задачи для уравнения (3.13). Однако в рассматриваемой ситуации естественно попытаться избавиться от условия ограниченности оператора BA^{-1} и применить к уравнению (3.7) теорему 7.2 гл. I о возмущенном абстрактном параболическом уравнении, где допускаются неограниченные возмущения.

Здесь возникает обстоятельство, мешающее это сразу сделать. Резольвента оператора $\mathfrak{A}$ имеет вид

$$(\mathfrak{A}-\lambda I)^{-1}=\begin{pmatrix} R_A(\lambda) & 0 \\ \frac{1}{\lambda} AR_A(\lambda) & -\frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Если теперь вычислить оператор $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}-\lambda I)^{-1}$, то получим

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{A}-\lambda I)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} BA^{-1}AR_A(\lambda) & -\frac{1}{\lambda} BA^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда видно, что в случае неограниченности оператора BA^{-1} резольвента оператора $\mathfrak{A}$ не гасит неограниченности оператора $\mathfrak{B}$. Это связано с наличием на диагонали матрицы $(\mathfrak{A}-\lambda I)^{-1}$ оператора, пропорционального единичному. Чтобы избавиться от этого, введем новую функцию,

$$z(t)=v(t)-w(t)$$

и преобразуем систему (3.6) к виду

$$\frac{dv}{dt}=Av+BA^{-1}v-BA^{-1}z,$$

$$\frac{dz}{dt}=BA^{-1}v-BA^{-1}z.$$

Запишем ее как одно уравнение в $E\times E$

$$\frac{d\tilde{y}}{dt}=\mathfrak{A}_0\tilde{y}+\mathfrak{B}_0\tilde{y}, \tag{3.14}$$

где

$$\mathfrak{A}_0=\begin{pmatrix} A & A_0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix},\quad \mathfrak{B}_0=\begin{pmatrix} -A_0 & 0 \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix},\quad A_0=-BA^{-1}.$$

Изучим оператор $\mathfrak{A}_0$. Областью определения его будет совокупность элементов $\tilde{x}=\begin{Bmatrix} v \\ z \end{Bmatrix}$, для которых $v\in\mathscr{D}(A)$ и

$z \in \mathscr{D}(A_0)$. Если операторы A и A_0 замкнуты, то оператор $\mathfrak{A}_0$ замкнут. Пусть при некотором λ операторы A и A_0 имеют соответственно резольвенты $R(\lambda)$ и $R_0(\lambda)$; тогда оператор $\mathfrak{A}_0$ имеет резольвенту

$$(\mathfrak{A}_0 - \lambda I)^{-1} = \begin{pmatrix} R(\lambda) & -R(\lambda) A_0 R_0(\lambda) \\ 0 & R_0(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы оператор $\mathfrak{B}_0$ был определен на $\mathscr{D}(\mathfrak{A}_0)$, нужно потребовать, чтобы $\mathscr{D}(A_0) \supset \mathscr{D}(A)$. Тогда вычисляем

$$\mathfrak{B}_0(\mathfrak{A}_0 - \lambda I)^{-1} = \begin{pmatrix} -A_0 R(\lambda) & A_0 R(\lambda) A_0 R_0(\lambda) \\ -A_0 R(\lambda) & A_0 R(\lambda) A_0 R_0(\lambda) \end{pmatrix}. \qquad (3.15)$$

Если оператор A_0 замкнут и $\mathscr{D}(A_0) \supset \mathscr{D}(A)$, то в силу леммы 7.1 гл. I оператор $A_0 R(\lambda)$ ограничен, и следовательно, резольвента оператора $\mathfrak{A}_0$ гасит неограниченность оператора $\mathfrak{B}_0$. Однако достигнутый успех не обошелся без существенных жертв. Теперь на диагонали оператора в главной части уравнения (3.14) стоят операторы A и $A_0 = -BA^{-1}$, и чтобы изучить свойства уравнения

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = \mathfrak{A}_0 \tilde{y}, \qquad (3.16)$$

нам нужно будет знать свойства уравнений первого порядка с операторными коэффициентами A и A_0.

Лемма 3.1. *Если операторы A и A_0 являются производящими операторами аналитических полугрупп, то оператор $\mathfrak{A}_0$ также обладает этим свойством.*

Доказательство. По условию

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{M}{|\lambda - \omega|} \qquad (\mathrm{Re}\,\lambda > \omega)$$

и

$$\|R_0(\lambda)\| \leqslant \frac{M_0}{|\lambda - \omega_0|} \qquad (\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0). \qquad (3.17)$$

Тогда при $\mathrm{Re}\,\lambda > \bar{\omega} = \max(\omega, \omega_0)$

$$\|(\mathfrak{A}_0 - \lambda I)^{-1}\| \leqslant \max\left\{ \frac{M}{|\lambda - \omega|}, \frac{M_0}{|\lambda - \omega_0|}, \right.$$
$$\left. \left(1 + \frac{|\lambda| M_0}{|\lambda - \omega_0|}\right) \frac{M}{|\lambda - \omega|} \right\} \leqslant \frac{M_0}{|\lambda - \bar{\omega}|}. \qquad (3.18)$$

Лемма доказана.

Теорема 3.3. *Если операторы A и $A_0 = -BA^{-1}$ являются производящими операторами аналитических полугрупп и оператор A_0 вполне подчинен оператору A, то для всяких $u_0 \in \mathscr{D}(B) \cap \mathscr{D}(A)$ и $u_0' \in \mathscr{D}(A)$ существует единственное решение задачи Коши для уравнения* (3.13). *Для любых $u_0 \in \mathscr{D}(A)$ и u_0' из E существует единственное решение ослабленной задачи Коши, аналитическое в некотором секторе, содержащем положительную вещественную полуось.*

Доказательство. Покажем, что оператор $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{B}_0$ является производящим оператором аналитической полугруппы. Имеем

$$\|(\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{B}_0 - \lambda I)^{-1}\| \leqslant \|(\mathfrak{A}_0 - \lambda I)^{-1}\| \, \|[I + \mathfrak{B}_0(\mathfrak{A}_0 - \lambda I)^{-1}]^{-1}\|.$$

Если показать, что оператор $\mathfrak{B}_0(\mathfrak{A}_0 - \lambda I)^{-1}$ при достаточно больших $|\lambda|$ мал по норме, то для резольвенты $(\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{B}_0 - \lambda I)^{-1}$ будет получена оценка типа (3.18). При доказательстве теоремы 7.2 гл. I было показано, что при полной подчиненности оператора A_0 оператору A норма оператора $A_0 R(\lambda)$ становится сколь угодно малой при больших $|\lambda|$ ($\operatorname{Re}\lambda > \omega$). Норма оператора $A_0 R_0(\lambda)$ при больших $|\lambda|$ и ($\operatorname{Re}\lambda > \omega$) равномерно ограничена. Из (3.15) тогда вытекает, что $\|\mathfrak{B}_0(\mathfrak{A}_0 - \lambda I)^{-1}\| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$ ($\operatorname{Re}\lambda > \max(\omega, \omega_0)$).

Итак, уравнение (3.13) является абстрактным параболическим, и все его ослабленные решения аналитичны.

Если $u_0 \in \mathscr{D}(B) \cap \mathscr{D}(A)$ и $u_0' \in \mathscr{D}(A)$, то мы полагаем $v_0 = u_0'$ и $z_0 = u_0' - Au_0$. Тогда, так как $\mathscr{D}(A_0) \supset \mathscr{D}(A)$, то определен элемент $A_0 z_0 = A_0 u_0' - Bu_0$, т. е. $z_0 \in \mathscr{D}(A_0)$. Строим решение $\tilde{z}(t) = \left\{ \begin{matrix} v(t) \\ z(t) \end{matrix} \right\}$ задачи Коши для уравнения (3.14) с начальными данными $\tilde{z}_0 = \left\{ \begin{matrix} v_0 \\ z_0 \end{matrix} \right\}$. Тогда функция

$$u(t) = \int_0^t v(\tau)\, d\tau + u_0$$

будет решением задачи (3.13) — (3.2).

При любых $u_0 \in D(A)$, $u_0' \in E$ мы таким же образом строим ослабленное решение задачи (3.13) — (3.2).

Единственность соответствующих решений следует из эквивалентности уравнений (3.13) и (3.14).

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A\frac{du}{dt} + \varepsilon Bu \qquad (\varepsilon > 0). \tag{3.19}$$

Ему будет отвечать уравнение

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \mathfrak{A}_\varepsilon \tilde{x} + \mathfrak{B}_\varepsilon \tilde{x},$$

где всюду вместо оператора A_0 стоит оператор $A_\varepsilon = -\varepsilon BA^{-1} = \varepsilon A_0$.

Для резольвенты $R_\varepsilon(\lambda)$ оператора A_ε имеем

$$\|R_\varepsilon(\lambda)\| = \left\|\frac{1}{\varepsilon} R_0\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)\right\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\frac{M_0}{\left|\frac{\lambda}{\varepsilon} - \omega_0\right|} \leqslant \frac{M}{|\lambda - \omega_0'|},$$

где ω_0' равно максимуму $\varepsilon\omega_0$ при всех рассматриваемых значениях ε. Отсюда вытекает, что для резольвенты оператора $\mathfrak{A}$ справедлива оценка (3.18) с константами, не зависящими от ε. Далее, оператор $A_\varepsilon R_\varepsilon(\lambda)$ будет ограниченным при больших $|\lambda|$ с $\operatorname{Re}\lambda > \omega_0'$ равномерно по ε и λ. Если теперь предположить, что оператор A_0 подчинен оператору A, то оператор

$$\mathfrak{B}_\varepsilon(\mathfrak{A}_\varepsilon - \lambda I)^{-1} = \varepsilon\begin{pmatrix} -A_0R(\lambda) & A_0R(\lambda)A_\varepsilon R_\varepsilon(\lambda) \\ -A_0R(\lambda) & A_0R(\lambda)A_\varepsilon R_\varepsilon(\lambda)\end{pmatrix}$$

может быть сделан при больших $|\lambda|$ сколь угодно малым по норме за счет множителя ε.

Повторяя рассуждения в доказательстве теоремы 7.2 гл. I, мы приходим к следующему утверждению:

Теорема 3.4. *Если в условиях теоремы* 3.3 *оператор* $A_0 = -BA^{-1}$ *просто подчинен оператору* A, *то утверждение теоремы справедливо для уравнения* (3.19) *при достаточно малом* ε.

Замечание 3.1. Утверждение теоремы 3.4 справедливо и для уравнения

$$\varepsilon \frac{d^2u}{d\tau^2} = A \frac{du}{d\tau} + Bu. \tag{3.20}$$

Действительно, замена $\tau = \varepsilon t$ сводит это уравнение к (3.19).

Замечание 3.2. Оператор A_0 будет подчинен (вполне подчинен) оператору A, если оператор B подчинен (вполне подчинен) оператору A^2.

5. Ослабленная задача Коши. Предположим теперь, что операторы A и A_0 обладают свойствами, обеспечивающими для соответствующих дифференциальных уравнений первого порядка корректность ослабленной задачи Коши на $\mathscr{D}(A)$. А именно, предположим, что при некоторых β и β_0 $(0 < \beta, \beta_0 < 1)$ выполнены неравенства

$$\| R(\lambda) \| \leqslant M(1 + |\lambda|)^{-\beta}$$

и

$$\| R_0(\lambda) \| \leqslant M_0(1 + |\lambda|)^{-\beta_0} \qquad (\operatorname{Re}\lambda > \omega). \tag{3.21}$$

Тогда

$$\| R(\lambda) A_0 R_0(\lambda) \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{(1+|\lambda|)^{\beta}} \left(1 + \frac{|\lambda| M_0}{(1+|\lambda|)^{\beta_0}}\right) \leqslant \frac{M(1+M_0)}{(1+|\lambda|)^{\beta+\beta_0-1}},$$

поэтому для резольвенты оператора $\mathfrak{A}_0$ также будет справедлива оценка

$$\| (\mathfrak{A}_0 - \lambda I)^{-1} \| \leqslant \frac{M_1}{(1+|\lambda|)^{\beta+\beta_0-1}}.$$

Если $\beta + \beta_0 - 1 > 0$, то эта оценка обеспечивает, в силу теоремы 3.3 гл. I, корректность на $\mathscr{D}(\mathfrak{A}_0)$ ослабленной задачи Коши для уравнения (3.16). Чтобы получить аналогичную оценку для оператора $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{B}_0$, достаточно на оператор $\mathfrak{B}_0$ наложить такие условия, чтобы

$$\| \mathfrak{B}_0 (\mathfrak{A}_0 - \lambda I)^{-1} \| \to 0 \quad \text{при } |\lambda| \to \infty. \tag{3.22}$$

Здесь можно воспользоваться леммой 7.8 гл. I. Если оператор A_0 подчинен оператору A с порядком α, то в силу этой леммы

$$\| A_0 R(\lambda) \| \leqslant \frac{C}{(1+|\lambda|)^{\beta-\alpha}} \tag{3.23}$$

и

$$\|A_0R(\lambda)A_0R_0(\lambda)\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{(1+|\lambda|)^{\beta-\alpha}}\left[1+\frac{M_0|\lambda|}{(1+|\lambda|)^{\beta_0}}\right] \leqslant \frac{C_1}{(1+|\lambda|)^{\beta+\beta_0-1-\alpha}}.$$

Таким образом, если $\alpha<\beta+\beta_0-1$, то (3.22) выполнено. Если $\alpha=\beta+\beta_0-1$, то из (3.23) и (3.22) вытекает ограниченность оператора $\mathfrak{B}_0(\mathfrak{A}_0-\lambda I)^{-1}$. Повторяя рассуждения предыдущего пункта, отсюда получаем, что

$$\|\mathfrak{B}_\varepsilon(\mathfrak{A}_\varepsilon-\lambda I)^{-1}\| \to 0$$

при $\varepsilon\to 0$ равномерно по λ при достаточно больших $|\lambda|$.

Мы приходим к следующей теореме:

Теорема 3.5. *Если операторы A и $A_0=-BA^{-1}$ удовлетворяют условиям* (3.21), *причем* $\beta+\beta_0>1$, *и оператор A_0 подчинен оператору A с порядком* $\alpha<\beta+\beta_0-1$, *то при любых* $u_0\in\mathscr{D}(B)\cap\mathscr{D}(A)$ и $u_0'\in\mathscr{D}(A)$ *существует единственное ослабленное решение задачи* (3.13)—(3.2). *Это решение является бесконечно дифференцируемой функцией при* $t>0$.

Если оператор A_0 подчинен оператору A с порядком $\alpha=\beta+\beta_0-1$, *то предыдущие утверждения справедливы для уравнений* (3.19) *и* (3.20) *при достаточно малом* ε.

Исследование ослабленной задачи Коши, изложенное в последних двух пунктах, можно провести и для уравнения (3.1) с переменными коэффициентами. Здесь удобно ввести в рассмотрение функции

$$v(t)=\frac{du}{dt} \quad \text{и} \quad z(t)=\frac{du}{dt}-A(t)u.$$

Тогда для вектор-функции $\tilde{x}(t)=\begin{Bmatrix} v(t) \\ z(t) \end{Bmatrix}$ получится уравнение вида (3.14) с дополнительным членом $\mathfrak{L}(t)$, где

$$\mathfrak{L}(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A'(t)A^{-1}(t) & A'(t)A^{-1}(t) \end{pmatrix}.$$

В наших предположениях оператор $A'(t)A^{-1}(t)$ ограничен, поэтому добавление члена $\mathfrak{L}(t)\tilde{x}$ не меняет существенно свойств уравнения при условиях определенной гладкости $\mathfrak{L}(t)$ как функции от t.

В качестве примера сформулируем следующее утверждение:

Теорема 36. *Пусть операторы* $A(t)$ *и* $A_0(t) = B(t)A^{-1}(t)$ *имеют не зависящие от* t *области определения и при каждом* t *удовлетворяют условиям* (3.17) *с константами, не зависящими от* t. *Пусть операторы* $A'(t)A^{-1}(t)$, $A_0(t)A_0^{-1}(0)$ *и* $A_0(t)A^{-\alpha}(0)$ *при некотором* $\alpha \in [0, 1]$ *ограничены и удовлетворяют по* t *какому-нибудь условию Гёльдера. Тогда для каждых* $u_0 \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{D}(B)$ *и* $u_0' \in \mathscr{D}(A^{\rho})$ *при* $\rho > \alpha$ *существует единственное ослабленное решение задачи* (3.1) — (3.2).

ГЛАВА IV

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

§ 1. Уравнения с малым параметром при старшей производной

1. Уравнение с постоянным оператором. Предположим, что для уравнения $x' = Ax$ задача Коши равномерно корректна и соответствующая ей полугруппа $U(t)$ имеет отрицательный тип:

$$\|U(t)\| \leqslant Ce^{-at} \qquad (a > 0). \tag{1.1}$$

Оператор A тогда имеет ограниченный обратный A^{-1}. Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \qquad (0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0), \tag{1.2}$$

где $f(t)$ — непрерывная функция. Нас будет интересовать поведение его решений при $\varepsilon \to 0$.

Оператор $\frac{1}{\varepsilon} A$ будет производящим оператором полугруппы $U_\varepsilon(t)$, причем $U_\varepsilon(t) = U(t/\varepsilon)$. Поэтому

$$\|U_\varepsilon(t)\| \leqslant Ce^{-\frac{at}{\varepsilon}}. \tag{1.3}$$

Если $x_\varepsilon(t)$ — обобщенное решение уравнения (1.2) с начальным значением $x_\varepsilon(0) = x_0$, не зависящим от ε, то

$$x_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t) x_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U_\varepsilon(t-s) f(s)\, ds$$

или (см. 6.7 гл. I)

$$x_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t)\, x_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t U_\varepsilon(t-s)\,[f(s) - f(t)]\, ds +$$
$$+ U_\varepsilon(t)\, A^{-1} f(t) - A^{-1} f(t). \qquad (1.4)$$

Покажем, что интегральный член равномерно на $[0, T]$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Имеем

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t U_\varepsilon(t-s)\,[f(s) - f(t)]\, ds \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{a\tau}{\varepsilon}} \|f(t-\tau) - f(t)\|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{\varepsilon}\int_0^{r\varepsilon} e^{-\frac{a\tau}{\varepsilon}} \|f(t-\tau) - f(t)\|\, d\tau + \frac{2C}{a} \max_{0 \leqslant s \leqslant T} \|f(s)\| e^{-ar} =$$
$$= C\int_0^r e^{-a\sigma} \|f(t - \varepsilon\sigma) - f(t)\|\, d\sigma + \frac{2C}{a} \max_{0 \leqslant s \leqslant T} \|f(s)\| e^{-ar}$$

при любом $r > 0$. Выберем r настолько большим, чтобы второй член справа был достаточно малым. Затем при фиксированном r сделаем ε столь малым, чтобы колебание функции на любом отрезке длиной εr, а вместе с ним и первое слагаемое справа, было достаточно малым. При этих значениях ε интегральный член в (1.4) будет достаточно малым.

Из проведенного рассуждения и оценки (1.3) следует, что

$$x_\varepsilon(t) \to -A^{-1} f(t) \qquad (1.5)$$

равномерно на каждом отрезке $[\delta, T]$, где $0 < \delta < T$. Эта сходимость будет равномерной на $[0, T]$ лишь для того частного решения уравнения (1.2), для которого $x_\varepsilon(0) = -A^{-1} f(0)$. Действительно, в этом случае

$$U_\varepsilon(t)\, x_0 + U_\varepsilon A^{-1} f(t) = U_\varepsilon(t)\, A^{-1}\,[f(t) - f(0)].$$

На достаточно малом отрезке $[0, \delta]$ эта функция мала, в силу непрерывности $f(t)$ и равномерной ограниченности $U_\varepsilon(t)$, а на отрезке $[\delta, T]$ она мала при достаточно малом ε в силу (1.3).

При любом $x_0 \in E$ характер сходимости в (1.5) может быть еще уточнен. Введем следующее определение:

Определение 1.1. Семейство функций $\varphi_\varepsilon(t)$ $(0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$ на интервале $(0, T]$ *почти равномерно сходится* к функции $\varphi(t)$, если для каждого η найдутся такие $r(\eta)$ и $\varepsilon_1(\eta)$, что

$$\|\varphi_\varepsilon(t) - \varphi(t)\| \leqslant \eta$$

при всех $\varepsilon < \varepsilon_1(\eta)$ и $t \in [r(\eta)\varepsilon, T]$.

Простейшим примером семейства скалярных функций, почти равномерно сходящихся к нулю на $(0, T]$, является семейство $\varphi_\varepsilon(t) = e^{-at/\varepsilon}$. Из почти равномерной сходимости на $(0, T]$ следует равномерная сходимость на любом отрезке $[\delta, T] \in (0, T]$. Обратное не всегда верно. Так, например, семейство $\frac{1}{\varepsilon} e^{-at/\varepsilon}$ равномерно сходится к нулю на любом $[\delta, T]$ и не сходится почти равномерно.

Из оценки (1.3) и проведенных рассуждений вытекает, что последовательность $x_\varepsilon(t)$ почти равномерно на $(0, T]$ сходится к функции $A^{-1}f(t)$.

Предположим теперь, что функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема. Тогда (см. (6.8) гл. I)

$$x_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t)x_0 + \int_0^t U_\varepsilon(t-s)A^{-1}f'(s)\,ds + U_\varepsilon(t)A^{-1}f(0) - A^{-1}f(t). \qquad (1.6)$$

Если $x_\varepsilon(t)$ — решение уравнения (1.2), то применяя к обеим частям (1.6) оператор A, получаем

$$Ax_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t)Ax_0 + \int_0^t U_\varepsilon(t-s)f'(s)\,ds + U_\varepsilon(t)f(0) - f(t), \qquad (1.7)$$

откуда следует, что функции $Ax_\varepsilon(t)$ почти равномерно на $(0, T]$ сходятся к функции $-f(t)$. Этому утверждению можно придать следующий смысл. Рассмотрим уравнение

$$A\bar{x}+f(t)=0. \tag{1.8}$$

Невязкой этого уравнения, отвечающей функции $y(t)$, назовем функцию $\Delta(t)=\|Ay(t)+f(t)\|$. Из предыдущего тогда вытекает, что невязки $\Delta_\varepsilon(t)=\|Ax_\varepsilon(t)+f(t)\|$ почти равномерно на $(0, T]$ сходятся к нулю.

Рассмотрим, наконец, производные от решений $x_\varepsilon(t)$. Из уравнения (1.2) и (1.7) получаем соотношение

$$\frac{dx_\varepsilon(t)}{dt}=\frac{1}{\varepsilon}U_\varepsilon[Ax_0+f(0)]+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t U_\varepsilon(t-s)\times$$
$$\times\left[f'(s)-f'(t)\right]ds+U_\varepsilon(t)A^{-1}f'(t)-A^{-1}f'(t), \tag{1.9}$$

из которого видно, что производные решений $\frac{dx_\varepsilon(t)}{dt}$ стремятся к производной решения уравнения (1.8) $\frac{d\bar{x}}{dt}=-A^{-1}f'(t)$ равномерно на каждом внутреннем к $[0, T]$ отрезке. Производные частных решений, для которых $x_\varepsilon(0)=-A^{-1}f(0)$, стремятся к $\frac{d\bar{x}}{dt}$ почти равномерно на $(0, T]$.

Подведем итог.

Теорема 1.1. *Если задача Коши для уравнения $x'=Ax$ равномерно корректна и имеет отрицательный тип, то обобщенное решение $x_\varepsilon(t)$ уравнения (1.2) с начальным значением $x_\varepsilon(0)=x_0\in E$ почти равномерно на $(0, T]$ стремится к решению $\bar{x}(t)=-A^{-1}f(t)$ уравнения (1.8). Если функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема и $x_0\in\mathscr{D}(A)$, то невязки уравнения (1.8) относительно функций $x_\varepsilon(t)$ почти равномерно на $(0, T]$ стремятся к нулю, а производные $\frac{d\bar{x}_\varepsilon}{dt}$ стремятся к $\frac{dx}{dt}$ равномерно на каждом внутреннем к $[0, T]$ отрезке.*

Для частных решений $x_\varepsilon^0(t)$ с начальными значениями $x_\varepsilon^0(0)=-A^{-1}f(0)$ имеет место равномерная сходимость к $\bar{x}(t)$ на $[0, T]$, равномерная на $[0, T]$ сходимость к нулю невязок и почти равномерная на $(0, T]$ сходимость производных к $\frac{d\bar{x}}{dt}$.

Замечание 1.1. Из (1.7) видно, что функции $Ax_\varepsilon(t)$ равномерно по ε и t ограничены.

2. Уравнение с переменным оператором. Совершенно аналогичная картина имеет место и для уравнения

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t)\, x + f(t) \tag{1.10}$$

с переменным оператором, если предположить, что оператор $A(t)$ имеет не зависящую от t область определения $\mathscr{D}(A)$, сильно непрерывно дифференцируем на ней и что для уравнения

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t)\, x$$

при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задача Коши равномерно корректна, а для соответствующего эволюционного оператора $U_\varepsilon(t, s)$ справедлива оценка

$$\| U_\varepsilon(t, s) \| \leqslant C e^{-\frac{a(t-s)}{\varepsilon}}. \tag{1.11}$$

Для обобщенного решения $x_\varepsilon(t)$ уравнения (1.10) с начальным значением $x_\varepsilon(0) = x_0$, аналогично (1.4), имеем

$$x_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t, 0)\, x_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U_\varepsilon(t, s)\, f(s)\, ds =$$

$$= U_\varepsilon(t, 0)\, x_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U_\varepsilon(t, s)\, [f(s) - f(t)]\, ds +$$

$$+ \int_0^t U_\varepsilon(t, s) \frac{dA^{-1}(s)}{ds} f(t)\, ds +$$

$$+ U_\varepsilon(t, 0)\, A^{-1}(0)\, f(t) - A^{-1}(t)\, f(t). \tag{1.12}$$

Здесь мы воспользовались свойством (3.12) гл. II эволюционного оператора и проинтегрировали по частям.

Из оценки (1.11) и непрерывности $f(t)$ снова вытекает, что интегральные члены стремятся к нулю равномерно на $[0, T]$ и, значит, функции $x_\varepsilon(t)$ почти равномерно на $(0, T]$ сходятся к функции $\bar{x}(t) = -A^{-1}(t) f(t)$, которая является решением уравнения

$$A(t)\bar{x}(t) + f(t) = 0. \tag{1.13}$$

Если $f(t)$ дифференцируема, то, аналогично (1.6),

$$x_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t, 0) x_0 + \int_0^t U_\varepsilon(t, s) \frac{dA^{-1}(s) f(s)}{ds} ds + \\ + U_\varepsilon(t, 0) A^{-1}(0) f(0) - A^{-1}(t) f(t). \tag{1.14}$$

Введем теперь оператор

$$V_\varepsilon(t, s) = A(t) U_\varepsilon(t, s) A^{-1}(s).$$

Если для него также справедлива оценка

$$\| V_\varepsilon(t, s) \| \leqslant C_1 e^{-a(t-s)/\varepsilon}, \tag{1.15}$$

то, применяя к обеим частям в (1.14) оператор $A(t)$, при $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ получаем соотношение

$$A(t) x_\varepsilon(t) = V_\varepsilon(t, 0) A(0) x_0 + \\ + \int_0^t V_\varepsilon(t, s) \left[-A'(s) A^{-1}(s) f(s) + f'(s) \right] ds + \\ + V_\varepsilon(t, 0) f(0) - f(t), \tag{1.16}$$

из которого следует почти равномерная сходимость к нулю невязок уравнения (1.13), отвечающих функциям $x_\varepsilon(t)$.

Наконец, преобразовывая интегральный член в (1.14), как это сделано в (1.12), имеем

$$x_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t,\ 0)\,x_0 + \int_0^t U_\varepsilon(t,\ s)\left[\frac{d}{ds}\left(A^{-1}(s)\,f(s)\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t)\,f(t)\right)\right] ds + \varepsilon \int_0^t U_\varepsilon(t,\ s)\,\frac{dA^{-1}(s)}{ds} \times$$

$$\times \left[\frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t)\,f(t)\right)\right] ds + \varepsilon U_\varepsilon(t,\ 0)\,A^{-1}(0)\,\frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t)\,f(t)\right) -$$

$$- \varepsilon A^{-1}(t)\,\frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t)\,f(t)\right) +$$

$$+ U_\varepsilon(t,\ 0)\,A^{-1}(0)\,f(0) - A^{-1}(t)\,f(t).$$

Применяя к обеим частям оператор $\frac{1}{\varepsilon}A(t)$ и добавляя $\frac{1}{\varepsilon}f(t)$, приходим к выражению

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}V_\varepsilon(t,\ 0)\,A(0)\,x_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t V_\varepsilon(t, s) \times$$

$$\times \left[-A'(s)\,A^{-1}(s)\,f(s) + f'(s) + A(s)\,A^{-1}(t)\,A'(t)\,A^{-1}(t) f(t) - \right.$$

$$\left. - A(s)\,A^{-1}(t)\,f'(t)\right] ds + \int_0^t V_\varepsilon(t,\ s)\,A'(s)\,A^{-1}(s) \times$$

$$\times \frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t)\,f(t)\right) ds - V_\varepsilon(t,\ 0)\,\frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t)\,f(t)\right) -$$

$$- \frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t)\,f(t)\right) - \frac{1}{\varepsilon}V_\varepsilon(t,\ 0)\,f(0), \qquad (1.17)$$

из которого видно, что производные $\frac{dx_\varepsilon(t)}{dt}$ равномерно на каждом внутреннем к $[0,\ T]$ отрезке стремятся к производной $\frac{d\bar{x}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t)\,f(t)\right)$ решения уравнения (1.13).

Из формул (1.14), (1.16) и (1.17) вытекает, что частные решения $x_\varepsilon^0(t)$ с начальными данными $x_\varepsilon^0(t) = -A^{-1}(0)\,f(0)$ равномерно на $[0,\ T]$ стремятся к функции $\bar{x}(t)$, отвечающие им невязки в уравнении (1.13) равномерно на $[0, T]$ стремятся к нулю, а производные $\frac{dx_\varepsilon}{dt}$ почти равномерно на $(0, T]$ стремятся к $\frac{d\bar{x}}{dt}$.

Теорема 1.2. *Пусть оператор $A(t)$ имеет не зависящую от t область определения и сильно непрерывно дифференцируем на ней. Если при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задача Коши для уравнения $\varepsilon x' = A(t)x$ равномерно корректна и справедливы оценки* (1.11) *и* (1.15), *то все утверждения теоремы* 1.1 *остаются справедливыми и для уравнений* (1.10) *и* (1.13).

Если для оператора $\frac{1}{\varepsilon}A(t)$ выполнены условия теоремы 3.6 гл. II, то неравенство (1.15) следует из неравенства (1.11). Действительно, в силу замечания 3.1 к этой теореме,

$$V_\varepsilon(t, s) = U_\varepsilon(t, s) + \int_s^t U_\varepsilon(t, \tau) A'(\tau) A^{-1}(\tau) V_\varepsilon(\tau, s)\, d\tau,$$

откуда

$$\|V_\varepsilon(t, s)\| \leqslant Ce^{-a(t-s)/\varepsilon} + \\ + C\int_s^t e^{-a(t-\tau)/\varepsilon} \|A'(\tau)A^{-1}(\tau)\| \|V_\varepsilon(\tau, s)\|\, d\tau,$$

или

$$\|e^{at/\varepsilon}V_\varepsilon(t, s)\| \leqslant Ce^{as/\varepsilon} + C_2 \int_s^t \|e^{a\tau/\varepsilon}V_\varepsilon(\tau, s)\|\, d\tau.$$

Из этого интегрального неравенства для функции $e^{at/\varepsilon}V_\varepsilon(t, s)$ от t следует неравенство

$$\|e^{at/\varepsilon}V_\varepsilon(t, s)\| \leqslant Ce^{as/\varepsilon}e^{C_2(t-s)} \leqslant Ce^{C_2T}e^{as/\varepsilon} = C_1 e^{as/\varepsilon},$$

эквивалентное (1.15).

Неравенство (1.11) имеет место для операторов, удовлетворяющих условию теоремы 3.11 гл. II:

$$\|R_{A(t)}(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{1+\lambda} \quad \text{при} \quad \lambda \geqslant 0. \qquad (1.18$$

Действительно, в этом случае

$$\left\| R_{\frac{1}{\varepsilon} A(t)}(\lambda) \right\| = \varepsilon \| R_{A(t)}(\varepsilon\lambda) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\lambda} = \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Из замечания 3.3 гл. II тогда следует оценка:

$$\| U_\varepsilon (t, s) \| \leqslant e^{-(t-s)/\varepsilon},$$

т. е. (1.11) с $a=1$.

Теорема 1.3. *Если оператор* $A(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3.11 гл. II, *то для уравнений* (1.10) *и* (1.13) *справедливы утверждения теоремы* 1.1.

Замечание 1.2. Теоремы 1.2 и 1.3 можно было бы доказать для более общего уравнения

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon) x + f(t),$$

если оценки (1.11) и (1.15) справедливы для операторов $\frac{1}{\varepsilon} A(t, \varepsilon)$, и операторы $A(t, \varepsilon)$ сильно на $\mathscr{D}(A)$ сходятся к оператору $A_0(t)$ так, что функции $A^{-1}(t, \varepsilon)$ и $A'_t(t, \varepsilon) A^{-1}(t, \varepsilon)$ сильно и равномерно по t на $[0, T]$ сходятся к функциям $A_0^{-1}(t)$ и $A'_0(t) A_0^{-1}(t)$. При этом роль уравнения (1.13) играет уравнение $A_0(t) \bar{x}(t) + f(t) = 0$.

3. Пограничный слой. Для сглаживания разницы между решениями $x_\varepsilon(t)$ и $\bar{x}(t)$ уравнений (1.10) и (1.13), возникающей вблизи нуля из-за несогласованности их начальных значений, вводят еще вспомогательные функции, которые находятся из более простых уравнений, чем (1.10).

Рассмотрим наряду с (1.10) уравнение с постоянным оператором

$$\varepsilon \frac{d\tilde{x}_\varepsilon}{dt} = A(0) \tilde{x}_\varepsilon + f(0) \tag{1.19}$$

и его решение $\tilde{x}_\varepsilon(t)$, для которого $\tilde{x}_\varepsilon(0) = x_0 = x_\varepsilon(0)$.

Для разности $z_\varepsilon(t) = \tilde{x}_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t)$ получим уравнение

$$\varepsilon \frac{dz_\varepsilon}{dt} = A(t) z_\varepsilon + [A(0) - A(t)] \tilde{x}_\varepsilon + f(0) - f(t),$$

откуда

$$z_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t U_\varepsilon(t, s)[A(0) - A(s)]\,\tilde{x}_\varepsilon(s)\,ds + \\ + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t U_\varepsilon(t, s)[f(0) - f(s)]\,ds.$$

Из замечания 1.1 следует, что $A_0\tilde{x}_\varepsilon(s)$ ограничены равномерно по ε и s, оператор $A(t)A^{-1}(0)$ непрерывен по норме, поэтому величина $\|[A(0) - A(s)]\,A^{-1}(0)\,A(0)\,\tilde{x}_\varepsilon(s)\|$ при достаточно малых s будет малой равномерно по ε. Положим $t = \varepsilon r$ и сделаем в интеграле замену $s = \varepsilon\sigma$. Тогда получим

$$\|z_\varepsilon(\varepsilon r)\| \leqslant C\int_0^r \|[A(0) - A(\varepsilon\sigma)]\,A^{-1}(0)\,A(0)\,\tilde{x}_\varepsilon(\varepsilon\sigma)\|\,d\sigma + \\ + C\int_0^r \|f(0) - f(\varepsilon\sigma)\|\,d\sigma.$$

Из этой оценки вытекает, что каково бы ни было $r > 0$, для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon_2(r, \eta)$, что для $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2(r, \eta)$

$$\|x_\varepsilon(t) - \tilde{x}_\varepsilon(t)\| \leqslant \eta \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon r. \tag{1.20}$$

Это свойство характеризует асимптотическую при $t \to 0$ близость решений $x_\varepsilon(t)$ и $\tilde{x}_\varepsilon(t)$.

Введем теперь в рассмотрение четыре функции: решение уравнения (1.10) $x_\varepsilon(t)$, решение уравнения (1.13) $\bar{x}(t) = -A^{-1}(t)f(t)$, решение уравнения (1.19) $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ и функцию $\bar{\tilde{x}} = -A^{-1}(0)f(0)$. Из предыдущих пунктов следует, что $x_\varepsilon(t) \to \bar{x}(t)$ и $\tilde{x}_\varepsilon(t) \to \bar{\tilde{x}}$ почти равномерно на $(0, T]$. Тогда

$$v_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t) - \bar{x}(t) - \tilde{x}_\varepsilon(t) + \bar{\tilde{x}}$$

почти равномерно стремятся к нулю на $(0, T]$. Это означает, что для любого η найдутся $r(\eta)$ и $\varepsilon_1(\eta)$ такие, что

$$\|v_\varepsilon(t)\| \leqslant \eta \quad \text{при} \quad r(\eta)\,\varepsilon \leqslant t \leqslant T$$

и всех $\varepsilon < \varepsilon_1(\eta)$.

Далее, из (1.20) следует, что для $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2(r(\eta), \eta/2)$ выполнено $\|x_\varepsilon(t) - \tilde{x}_\varepsilon(t)\| \leqslant \eta/2$ при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon r(\eta)$. Наконец, из непрерывности функции $A^{-1}(t) f(t)$ получаем, что $\|\bar{x}(t) - \bar{\bar{x}}\| < \eta/2$ при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_3(\eta)$. Тогда $\|v_\varepsilon(t)\| \leqslant \eta$ на всем отрезке $[0, T]$ при $\varepsilon \leqslant \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Итак, функции $v_\varepsilon(t)$ равномерно на $[0, T]$ стремятся к нулю.

Теорема 1.4. *При условиях теорем* 1.2 *или* 1.3 *решение уравнения* (1.10) *для достаточно малого* ε *равномерно близко к функции*

$$y_\varepsilon(t) = -A^{-1}(t) f(t) + \tilde{x}_\varepsilon(t) + A^{-1}(0) f(0),$$

где $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ — *решение уравнения* (1.19) *с постоянным оператором.*

Отметим, что функция $y_\varepsilon(t)$ явно выражается через полугруппу оператора $A(0)$. Имеем

$$\tilde{x}_\varepsilon(t) = U_{A(0)}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) x_0 + U_{A(0)}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) A^{-1}(0) f(0) - A^{-1}(0) f(0),$$

поэтому

$$y_\varepsilon(t) = -A^{-1}(t) f(t) + U_{A(0)}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) x_0 + U_{A(0)}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) A^{-1}(0) f(0).$$

Два последних слагаемых «исправляют» поведение функции $\bar{x}(t) = -A^{-1}(t) f(t)$ вблизи нуля (в пограничном слое).

4. Возмущенное уравнение. Рассмотрим уравнение (1.10) с возмущением специального вида:

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t) y + \int_0^t B(\tau) y(\tau) d\tau + f(t), \tag{1.21}$$

где оператор $B(t)$ обладает тем свойством, что $B(t) A^{-1}(t)$ ограничен и сильно непрерывен по t. Наряду с уравнением (1.21) будем рассматривать вырожденное уравнение

$$A(t) \bar{y}(t) + \int_0^t B(\tau) \bar{y}(\tau) d\tau + f(t) = 0. \tag{1.22}$$

Сделаем в нем замену $A(t)\bar{y}(t)=v(t)$. Тогда

$$v(t)+\int_0^t B(\tau)A^{-1}(\tau)v(\tau)\,d\tau+f(t)=0. \tag{1.23}$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{dv}{dt}=-B(t)A^{-1}(t)v-f'(t).$$

Это уравнение с ограниченным сильно непрерывным оператором $B(t)A^{-1}(t)$ имеет решение. Нас интересует его решение $\bar{v}(t)$, удовлетворяющее условию $\bar{v}(0)=-f(0)$. Очевидно, оно будет и решением уравнения (1.23). Функция $\bar{y}(t)=A^{-1}(t)\bar{v}(t)$ будет тогда решением уравнения (1.22). Это решение будет дифференцируемым, причем

$$\frac{d\bar{y}}{dt}=-A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t)\bar{v}(t)+A^{-1}(t)\frac{d\bar{v}}{dt},$$

и поэтому функция

$$A(t)\frac{d\bar{y}}{dt}=-A'(t)A^{-1}(t)\bar{v}(t)+\frac{d\bar{v}}{dt}$$

непрерывна. Наконец, $\bar{y}(0)=A^{-1}(0)f(0)$.

Пусть $y_\varepsilon(t)$ — решение уравнения (1.21) с начальным значением $y_\varepsilon(0)=x_0\in\mathscr{D}(A)$. Для разности $z_\varepsilon(t)=\bar{y}(t)-y_\varepsilon(t)$ получим уравнение

$$\varepsilon\frac{dz_\varepsilon}{dt}=A(t)z_\varepsilon+\int_0^t B(\tau)z_\varepsilon(\tau)\,d\tau+\varepsilon\frac{d\bar{y}}{dt}.$$

Учитывая, что $z_\varepsilon(0)=-A^{-1}(0)f(0)-x_0$, получаем

$$z_\varepsilon(t)=-U_\varepsilon(t,0)\left(x_0+A^{-1}(0)f(0)\right)+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t U_\varepsilon(t,s)\int_0^s B(\tau)z_\varepsilon(\tau)\,d\tau\,ds+\int_0^t U_\varepsilon(t,s)\frac{d\bar{y}}{dt}\,ds. \tag{1.24}$$

Меняя порядок интегрирования и пользуясь тем, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} U_{\varepsilon}(t,\ s)\, g\, ds =$$

$$= -U_{\varepsilon}(t,\ s)\, A^{-1}(s)\, g\Big|_{\tau}^{t} + \int_{\tau}^{t} U_{\varepsilon}(t,\ s)\,\frac{dA^{-1}(s)}{ds}\, g\, ds,$$

получаем

$$z_{\varepsilon}(t) = -U_{\varepsilon}(t,\ 0)\big(x_0 + A^{-1}(0)\, f(0)\big) +$$

$$+ \int_{0}^{t} U_{\varepsilon}(t,\ \tau)\, A^{-1}(\tau)\, B(\tau)\, z_{\varepsilon}(\tau)\, d\tau - \int_{0}^{t} A^{-1}(t)\, B(\tau)\, z_{\varepsilon}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{t}\int_{\tau}^{t} U_{\varepsilon}(t,\ s)\frac{dA^{-1}(s)}{ds}\, B(\tau)\, z_{\varepsilon}(\tau)\, ds\, d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{t} U_{\varepsilon}(t,\ s)\,\frac{d\bar{y}}{ds}\, ds.$$

Применим к обеим частям оператор $A(t)$. Имеем

$$A(t)\, z_{\varepsilon}(t) = -V_{\varepsilon}(t,\ 0)\,(A(0)\, x_0 + f(0)) +$$

$$+ \int_{0}^{t} V_{\varepsilon}(t,\ \tau)\, B(\tau)\, A^{-1}(\tau)\, A(\tau)\, z_{\varepsilon}(\tau)\, d\tau -$$

$$- \int_{0}^{t} B(\tau)\, A^{-1}(\tau)\, A(\tau)\, z_{\varepsilon}(\tau)\, d\tau -$$

$$- \int_{0}^{t}\int_{\tau}^{t} V_{\varepsilon}(t,\ s)\, A'(s)\, A^{-1}(s)\, B(\tau) A^{-1}(\tau)\, A(\tau)\, z_{\varepsilon}(\tau)\, ds\, d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{t} V_{\varepsilon}(t,\ s)\, A(s)\,\frac{d\bar{y}}{ds}\, ds.$$

Первое слагаемое справа, в силу оценки (1.15), равномерно по ε и t ограничено и почти равномерно на $(0,\ T]$

стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Последнее слагаемое в виду непрерывности функции $A(t)\frac{d\bar{y}}{dt}$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ равномерно на $[0, T]$. Тогда для функций $\| A(t) z_\varepsilon(t) \|$ получаем интегральное неравенство вида

$$\| A(t) z_\varepsilon(t) \| \leqslant \varphi_\varepsilon(t) + C \int_0^t \| A(\tau) z_\varepsilon(\tau) \| \, d\tau, \tag{1.25}$$

где функции $\varphi_\varepsilon(t)$ равномерно ограничены и почти равномерно на $(0, T]$ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, а константа C не зависит от ε. Из этого неравенства в первую очередь получаем, что функции $A(t) z_\varepsilon(t)$ равномерно по ε и t ограничены. Далее, для произвольного $\eta > 0$ выберем $r_1 = r\left(\frac{\eta}{2e^{CT}}\right)$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon\left(\frac{\eta}{2e^{CT}}\right)$ так, чтобы было $\varphi_\varepsilon(t) < \frac{\eta}{2e^{CT}}$ при $\varepsilon r_1 \leqslant t \leqslant T$. Затем найдем ε_2 так, чтобы при $\varepsilon < \varepsilon_2$

$$C \int_0^{\varepsilon r_1} \| A(\tau) z_\varepsilon(\tau) \| \, d\tau < \frac{\eta}{2e^{CT}}.$$

Это можно сделать в силу равномерной ограниченности подынтегральных функций. Тогда

$$\| A(t) z_\varepsilon(t) \| \leqslant \frac{\eta}{e^{CT}} + C \int_{\varepsilon r_1}^t \| A(\tau) z_\varepsilon(\tau) \| \, d\tau \quad \text{при} \quad \varepsilon r_1 \leqslant t \leqslant T.$$

Отсюда следует, что

$$\| A(t) z_\varepsilon(t) \| \leqslant \frac{\eta}{e^{CT}} e^{C(t - \varepsilon r_1)} \leqslant \eta \quad \text{при} \quad \varepsilon r_1 \leqslant t \leqslant T.$$

Мы доказали, что функции $A(t) z_\varepsilon(t)$, а значит, и функции $z_\varepsilon(t)$, почти равномерно на $(0, T]$ стремятся к нулю.

Теорема 1.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.2 *или* 1.3, *функция* $B(t) A^{-1}(t)$ *ограничена и сильно непрерывна и функция* $f(t)$ *непрерывно дифференцируема; тогда решение* $y_\varepsilon(t)$ *уравнения* (1.21) *с начальным значением* $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ *почти равномерно сходится к решению* $\bar{y}(t)$

уравнения (1.22). *При этом невязки уравнения* (1.22), *отвечающие функциям* $y_\varepsilon(t)$, *равномерно ограничены и почти равномерно стремятся к нулю. Если* $x_0 = -A^{-1}(0) f(0)$, *то* $y_\varepsilon(t)$ *сходятся к* $\bar{y}(t)$ *и невязки сходятся к нулю равномерно на* $[0, T]$.

В доказательстве нуждаются лишь последние два утверждения. Первое из них вытекает из того, что равномерная ограниченность и почти равномерная сходимость на $(0, T]$ к нулю функций $A(t) z_\varepsilon(t)$ влечет за собой равномерную на $[0, T]$ сходимость к нулю $\int\limits_0^t B(\tau) A^{-1}(\tau) A(\tau) z_\varepsilon(\tau)\, d\tau$.

Если $x_0 = -A^{-1}(0) f(0)$, то в (1.25) функции $\varphi_\varepsilon(t)$ равномерно на $[0, T]$ сходятся к нулю, откуда следует последнее утверждение теоремы.

5. Уравнение второго порядка. Перейдем теперь к рассмотрению практически важного случая уравнения второго порядка с малым параметром при второй производной

$$\varepsilon \frac{d^2u}{dt^2} = A(t) \frac{du}{dt} + B(t) u + f(t). \qquad (1.26)$$

Разрешимость задачи Коши для такого уравнения исследована нами в § 3 гл. III.

Рассмотрим вырожденное уравнение

$$A(t) \frac{d\bar{u}}{dt} + B(t) \bar{u} + f(t) = 0. \qquad (1.27)$$

Замена $A(t) \bar{u} = w(t)$ сведет его к уравнению

$$\frac{dw}{dt} = [A'(t) - B(t)] A^{-1}(t) w - f(t).$$

В предположениях предыдущего параграфа это будет уравнение с ограниченным оператором, которое имеет решение $\bar{w}(t)$, удовлетворяющее начальному условию $\bar{w}(0) = A(0) u(0)$. Обозначим тогда $\bar{u}(t) = A^{-1}(t) \bar{w}(t)$. Легко проверяется, что $\bar{u}(t)$ будет решением уравнения (1.27), причем функции $A(t) \frac{d\bar{u}}{dt}$

и $B(t)\bar{u}(t)$ непрерывны. Вернемся теперь к уравнению (1.26) и обозначим $\frac{du}{dt} = y(t)$. Для функции $y(t)$ получим уравнени

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)\,y + B(t)\int_0^t y(\tau)\,d\tau + f(t) + B(t)\,u(0), \quad (1.28$$

сходное с уравнением (1.21). Повторяя рассуждения преды дущего пункта, мы придем к необходимости исследовани интеграла

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t U_\varepsilon(t, s)\,B(s)\int_0^s z_\varepsilon(\tau)\,d\tau,$$

который в предположении сильной непрерывной дифферен цируемости оператора $B(t)\,A^{-1}(0)$ можно преобразовать к вид

$$\int_0^t U_\varepsilon(t, \tau)\,A^{-1}(\tau)\,B(\tau)\,z_\varepsilon(\tau)\,d\tau - \int_0^t A^{-1}(t)\,B(t)\,z_\varepsilon(\tau)\,d\tau -$$
$$- \int_0^t \int_\tau^t U_\varepsilon(t, s)\,A^{-1}(s)\left[A'(s)\,A^{-1}(s)\,B(s)\,A^{-1}(t) + \right.$$
$$\left. + B'(s)\,A^{-1}(\tau)\right] A(\tau)\,z_\varepsilon(\tau)\,ds\,d$$

Таким образом, снова получается неравенство типа (1.25 Итак, мы пришли к выводу, что решение $y_\varepsilon(t)$ уравнения (1.2 с начальным значением $y_\varepsilon(0) = u_0'$, не зависящим от ε, пр $\varepsilon \to 0$ сходится почти равномерно к решению $\bar{y}(t)$ уравнени

$$A(t)\,\bar{y} + B(t)\int_0^t \bar{y}(\tau)\,d\tau + f(t) + B(t)\,u_0 = 0.$$

Решением этого уравнения, очевидно, является функция $\frac{d\bar{u}}{dt}$ Далее, функции $A(t)\,y_\varepsilon(t)$ равномерно ограничены и поч равномерно на $(0, T]$ сходятся к функции $A(t)\frac{d\bar{u}}{dt}$.

Если теперь обозначить через $u_\varepsilon(t)$ решение задачи Ко для уравнения (1.26) с начальными данными $u_\varepsilon(0) = u_0$

$u'_\varepsilon(0)=u'_0$, то из предыдущего следует равномерная ограниченность и почти равномерная на $(0, T]$ сходимость $\frac{du_\varepsilon}{dt}$ к $\frac{d\bar{u}}{dt}$ и $A(t)\frac{du_\varepsilon}{dt}$ к $A(t)\frac{d\bar{u}}{dt}$. Заметим, что отсюда следует равномерная на $[0, T]$ сходимость функций $u_\varepsilon(t)$ к $\bar{u}(t)$ и $A(t)u_\varepsilon(t)$ к $A(t)\bar{u}(t)$. Первое очевидно, а второе следует из тождества

$$A(t)u_\varepsilon(t)=A(0)u_0+\\+\int_0^t\left[A(\tau)\frac{du_\varepsilon}{d\tau}+\frac{d(A(\tau)A^{-1}(0))}{d\tau}A(0)u_\varepsilon(\tau)\right]d\tau.$$

Мы пришли к следующей теореме:

Теорема 1.6. *Пусть оператор $A(t)$ удовлетворяет условиям теоремы* 1.3, *а оператор $B(t)$ сильно непрерывно дифференцируем на $\mathscr{D}(A)$. Тогда при непрерывно дифференцируемой функции $f(t)$ решение $u_\varepsilon(t)$ задачи Коши для уравнения* (1.26) *с начальными данными u_0, $u'_0\in\mathscr{D}(A)$, не зависящими от ε, обладает свойствами:*

1. *Функции $u_\varepsilon(t)$ равномерно на $[0, T]$ стремятся к решению $\bar{u}(t)$ уравнения* (1.27) *с начальным значением $\bar{u}(0)=u_0$.*

2. *Функции $A(t)u_\varepsilon(t)$, а значит, и $B(t)u_\varepsilon(t)$ равномерно на $[0, T]$ сходятся к $A(t)\bar{u}(t)$ и $B(t)\bar{u}(t)$ соответственно.*

3. *Производные $\frac{du_\varepsilon}{dt}$ равномерно ограничены и почти равномерно на $(0, T]$ сходятся к $\frac{d\bar{u}}{dt}$.*

4. *Невязки в уравнении* (1.27), *отвечающие функциям $u_\varepsilon(t)$, равномерно ограничены и почти равномерно на $(0, T]$ сходятся к нулю.*

Для частных решений, с условием $u'_0=-A^{-1}(0)f(0)-A^{-1}(0)B(0)u_0$ в пунктах 3 *и* 4 *имеет место равномерная на $[0, T]$ сходимость.*

Замечание 1.3. Существование решений $u_\varepsilon(t)$ в условиях теоремы 1.6 вытекает из аналога теоремы 3.2 гл. III для неоднородного уравнения (1.26).

Как видно из предыдущего, для уравнения второго порядка несогласованность решений уравнений (1.26) и (1.27) происходит из-за разных начальных значений производных у этих решений. Можно поставить вопрос о равномерной на $[0, T]$ аппроксимации решения $u_\varepsilon(t)$ вместе с его первой производной более простыми функциями. Здесь можно аналогично тому, как это сделано в п. 3, применить метод теории пограничного слоя и построить функцию

$$v_\varepsilon(t) = \bar{u}(t) + \tilde{u}_\varepsilon(t) - \tilde{\tilde{u}}(t),$$

где $\tilde{u}_\varepsilon(t)$ и $\tilde{\tilde{u}}(t)$ — решения уравнений

$$\varepsilon \frac{d^2u}{dt^2} = A(0)\frac{du}{dt} + B(0)u + f(0)$$

и

$$A(0)\frac{du}{dt} + B(0)u + f(0) = 0$$

соответственно, удовлетворяющие начальным условиям

$$\tilde{u}_\varepsilon(0) = u_0, \quad \tilde{u}'_\varepsilon(0) = u'_0, \quad \tilde{\tilde{u}}(0) = u_0.$$

Разность $u_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t)$ вместе со своей первой производной равномерно на $[0, T]$ стремится к нулю.

6. Однородное уравнение с малым возмущением. Для дальнейшего нам понадобится еще рассмотреть случай уравнения

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + \varepsilon B(t)y \tag{1.29}$$

и сравнить его решения с решениями уравнения

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t)x. \tag{1.30}$$

Предположим, что $B(t)$ — ограниченный оператор, сильно непрерывно зависящий от t. Если для уравнения (1.30) задача Коши равномерно корректна, то для уравнения (1.29) в силу теоремы 3.4 гл. II задача Коши будет также равномерно корректной, если выполнено условие: оператор $A(t)B(t)A^{-1}(t)$ определен, ограничен и сильно непрерывен по t. Пусть это условие выполнено, тогда для решения уравнения (1.29) с начальным значением $y(0)=x_0$ можно записать интегральное уравнение

$$y(t)=U_\varepsilon(t,\ 0)x_0+\int_0^t U_\varepsilon(t,\ \tau)B(\tau)y(\tau)\,d\tau.$$

Первое слагаемое есть решение $x(t)$ уравнения (1.30) с тем же начальным значением $x(0)=x_0$. Поэтому

$$y(t)-x(t)=\int_0^t U_\varepsilon(t,\ \tau)B(\tau)y(\tau)\,d\tau. \tag{1.31}$$

Если оператор $U_\varepsilon(t,\ s)$ удовлетворяет условию (1.11), то из интегрального неравенства

$$\|y(t)\|\leqslant Ce^{-at/\varepsilon}+M\int_0^t \|y(\tau)\|\,d\tau$$

следует равномерная по ε и t ограниченность функции $y(t)$, а тогда из (1.11) и (1.31) вытекает, что разность $y(t)-x(t)$ при $\varepsilon\to 0$ равномерно (с порядком ε) стремится к нулю.

Далее, так как $A(t)B(t)A^{-1}(t)$ ограничен и непрерывен, то

$$A(t)y(t)-A(t)x(t)=$$
$$=\int_0^t V_\varepsilon(t,\ \tau)A(\tau)B(\tau)A^{-1}(\tau)A(\tau)y(\tau)\,d(\tau).$$

Из оценки (1.15) следует, что функции $A(t)y(t)$ равномерно по ε и t ограничены и при $\varepsilon\to 0$ разность $A(t)y(t)-$ $-A(t)x(t)$ равномерно на $[0,\ T]$ стремится к нулю.

Мы пришли к следующему утверждению:

Теорема 1.7. *Если задача Коши для уравнения* (1.30) *равномерно корректна и справедливо неравенство* (1.11), *оператор* $B(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3.4 *гл.* II, *то при* $\varepsilon\to 0$ *разность решений* $y(t)-x(t)$ *уравнений* (1.29) *и* (1.30) *с одинаковыми не зависящими от* ε *начальными значениями равномерно на* $[0,\ T]$ *с порядком* $O(\varepsilon)$ *стремится к нулю; при этом* $A(t)[y(t)-x(t)]$ *также равномерно на* $[0,\ T]$ *стремится к нулю.*

§ 2. Эволюция подпространств в банаховом пространстве

1. Постановка задачи. Пусть $P(t)$ — проекционный оператор, непрерывно зависящий от t по норме операторов. При каждом t область значений оператора $P(t)$ образует замкнутое подпространство $\mathscr{L}_t = P(t)E$ пространства E. При изменении t это подпространство как-то перемещается в пространстве E. Так как оператор $P(t)$ непрерывен по норме, то размерность подпространства $\mathscr{L}_t$ при этом перемещении не изменяется. Покажем это. Пусть t и τ таковы, что

$$\|P(t)-P(\tau)\|<1. \tag{2.1}$$

Выберем произвольный элемент $x \in \mathscr{L}_\tau$, построим элемент $z=(I-P(\tau)+P(t))^{-1}x$, который существует, в силу условия (2.1), и обозначим $y=P(t)z$. Тогда $y \in \mathscr{L}_t$. Далее, $x=(I-P(\tau)+P(t))z$ и поэтому $x=P(\tau)x=[P(\tau)-P^2(\tau)+$ $+P(\tau)P(t)]z=P(\tau)y$. Таким образом, для каждого $x \in \mathscr{L}_\tau$ мы нашли $y \in \mathscr{L}_t$ такой, что $P(\tau)y=x$, т. е. при проектировании на $\mathscr{L}_\tau$ образ подпространства $\mathscr{L}_t$ покрывает все $\mathscr{L}_\tau$. При проектировании размерность не может возрасти, поэтому $\dim \mathscr{L}_\tau \leqslant \dim \mathscr{L}_t$. В силу симметрии условия (2.1) относительно t и τ $\dim \mathscr{L}_t = \dim \mathscr{L}_\tau$. Из равномерной непрерывности $P(t)$ по норме на каждом конечном промежутке вытекает, что последнее соотношение справедливо при всех t и τ.

Мы показали, что при условии (2.1) $P(\tau)\mathscr{L}_t = \mathscr{L}_\tau$, однако при других t и τ это соотношение может быть неверным. Например, за промежуток времени от τ до t подпространство $\mathscr{L}_t$ может стать ортогональным к $\mathscr{L}_\tau$, т. е. $P(\tau)\mathscr{L}_t = 0$. Для различных вопросов спектральной теории важно уметь строить операторы $Q(t, \tau)$, определенные во всем пространстве E, осуществляющие изоморфное отображение подпространства $\mathscr{L}_\tau$ на подпространство $\mathscr{L}_t$ и достаточно гладко зависящие от параметров t и τ.

Определение 2.1. Будем говорить, что действующий во всем пространстве E ограниченный и сильно непрерывный по t и s оператор $Q(t, s)$ $(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T)$ *следит за эволюцией подпространства* $\mathscr{L}_t$, если

$$Q(t, s)Q(s, \tau)=Q(t, \tau) \tag{2.2}$$

и

$$P(t)Q(t, \tau)P(\tau)=Q(t, \tau)P(\tau), \tag{2.3}$$

и *осуществляет эволюцию подпространства* $\mathscr{L}_t$, если, кроме того, он определен при всех $0 \leqslant s,\ t \leqslant T$ и

$$Q(\tau,\ t)\,Q(t,\ \tau)\,P(\tau) = P(\tau). \tag{2.4}$$

Обозначим через $\mathscr{M}_t$ дополнительное к $\mathscr{L}_t$, ортогональное в смысле проектирования $P(t)$ подпространство, а через $\tilde{P}(t)$ — проектирующий на него оператор $\tilde{P}(t) = I - P(t)$. Все пространство E разлагается в прямую сумму $E = \mathscr{L}_t \dotplus \mathscr{M}_t$. Если оператор $Q(t,\ \tau)$ следит как за эволюцией $\mathscr{L}_t$, так и за эволюцией $\mathscr{M}_t$, то, кроме (2.3), выполнено еще тождество

$$\tilde{P}(t)\,Q(t,\ \tau)\,\tilde{P}(\tau) = Q(t,\ \tau)\,\tilde{P}(\tau). \tag{2.5}$$

Отсюда следует, что

$$P(t)\,Q(t,\ \tau)\,\tilde{P}(\tau) = 0.$$

Складывая это равенство с (2.3), получаем соотношение

$$P(t)\,Q(t,\ \tau) = Q(t,\ \tau)\,P(\tau), \tag{2.6}$$

которое содержит в себе (2.3) и (2.5).

Определение 2.2. Будем говорить, что оператор $Q(t,\ s)$ $(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T)$ *следит за эволюцией прямого разложения* $E = \mathscr{L}_t \dotplus \mathscr{M}_t$, если выполнено (2.2) и (2.6), и *осуществляет эволюцию прямого разложения* $E = \mathscr{L}_t \dotplus \mathscr{M}_t$, если, кроме того, он определен при всех $t \in [0,\ T]$ и

$$Q(\tau,\ t)\,Q(t,\ \tau) = I. \tag{2.7}$$

2. Конструкция оператора, осуществляющего эволюцию подпространства. Так как при мало отличающихся t и τ оператор $P(\tau)$ осуществляет отображение $\mathscr{L}_t$ на $\mathscr{L}_\tau$, то естественно пытаться строить оператор $Q(t,\ \tau)$ как произведение операторов $P(t)$ с мало отличающимися аргументами.

Обозначим через q разбиение отрезка $[\tau,\ t]$ на части точками $\tau = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ и построим операторы

$$Q_q(t,\ \tau) = P(t_n)\,P(t_{n-1})\,\ldots\,P(t_1)\,P(t_0)$$

и

$$Q_q(\tau,\ t) = P(t_0)\,P(t_1)\,\ldots\,P(t_{n-1})\,P(t_n).$$

Операторы $P(t)\,(0 \leqslant t \leqslant T)$ равномерно ограничены

$$1 \leqslant \|P(t)\| \leqslant M \qquad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{2.8}$$

Однако отсюда, вообще говоря, не следует равномерная по всем разбиениям q ограниченность операторов $Q_q(t, \tau)$. Мы лишь можем утверждать, что

$$\|Q_q(t, \tau)\| \leqslant M^{n+1} \qquad (0 \leqslant \tau < t \leqslant T). \tag{2.9}$$

Наложив дополнительные требования на зависимость операторов $P(t)$ от t, можно достичь равномерной по q ограниченности операторов $Q_q(t, \tau)$. Пусть оператор $P(t)$ имеет по t ограниченную вариацию в том смысле, что

$$V = \sup_N \sum_{k=1}^{N} \|P(\tau_k) - P(\tau_{k-1})\| < \infty, \tag{2.10}$$

где supremum берется по всевозможным конечным наборам точек

$$0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_N \leqslant T.$$

Лемма 2.1. *При условии* (2.9) *операторы* $Q_q(t, \tau)$ *и* $Q_q(\tau, t)$ *равномерно ограничены по* t, τ *и* q.

Доказательство. Обозначим сокращенно $P(t_k) = P_k$. Оператор $Q_q(t, \tau)$ представим в виде

$$Q_q(t, \tau) = P_n P_0 + P_n(P_1 - P_n) P_0 + \ldots \\ \ldots + P_n(P_{n-1} - P_n) P_{n-2} \ldots P_0 \tag{2.11}$$

или, пользуясь тождеством

$$P_n(P_k - P_n) P_{k-1} = P_n(P_k - P_n)(P_{k-1} - P_k),$$

в виде

$$Q_q(t, \tau) = P_n P_0 + \sum_{k=1}^{n} P_k(P_k - P_n)(P_{k-1} - P_k) P_{k-2} \ldots P_0. \tag{2.12}$$

Обозначим

$$M_n = \sup \|P(t_n) \ldots P(t_0)\| = \sup \|Q_q(t, \tau)\|,$$

где supremum берется по всем наборам точек $\{t_k\}$: $\tau \leqslant t_0 \leqslant \ldots \ldots \leqslant t_n \leqslant t$. Очевидно, $M_0 = M \leqslant M_1 \leqslant \ldots \leqslant M_n \leqslant M_{n+1}$. Из (2.9) следует, что $M_n \leqslant M^{n+1}$. Через $\omega(t, \tau)$ обозначим колебание функции $P(s)$ на отрезке $[\tau, t]$, т. е.

$$\omega(t, \tau) = \sup_{\tau \leqslant s, s' \leqslant t} \|P(s) - P(s')\|.$$

Тогда

$$\|Q_q(t,\ \tau)\| \leqslant \|P_n\|\|P_0\| +$$
$$+\sum_{k=1}^{n} \|P_n\|\|P_k - P_n\|\|P_{k-1} - P_k\|\|P_{k-2} \ldots P_0\| \leqslant$$
$$\leqslant M^2 + M\omega M_{n-1} \sum_{k=1}^{n} \|P_{k-1} - P_k\| \leqslant M^2 + MM_{n-1}V\omega(t,\ \tau).$$

Будем считать отрезок $[\tau,\ t]$ достаточно малым, так что

$$\omega(t,\ \tau) \leqslant \frac{\alpha}{MV},\quad 0 < \alpha < 1. \tag{2.13}$$

Тогда

$$\|Q_q(t,\ \tau)\| \leqslant M^2 + \alpha M_{n-1}.$$

Отсюда

$$M_n \leqslant M^2 + \alpha M_{n-1}.$$

Последовательно применяя это соотношение, получим

$$M_n \leqslant M^2 \frac{1}{1-\alpha}.$$

В силу равномерной непрерывности оператора $P(t)$ можно отрезок $[0,\ T]$ разбить на N_0 частей так, чтобы в каждой из них выполнялось (2.13), например, с $\alpha = 1/2$. Тогда

$$Q_q(t,\ \tau) \leqslant [2M^2]^{N_0} = C$$

при всех t, τ и q.

Аналогично показывается равномерная ограниченность $Q_q(\tau,\ t)$.

Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Если число точек деления в разбиении q неограниченно возрастает так, что диаметр разбиения $d(q)$ стремится к нулю, то существуют в смысле нормы операторов пределы*

$$Q(t,\ \tau) = \lim_{d(q)\to 0} Q_q(t,\ \tau) \ \text{и} \ \lim_{d(q)\to 0} Q_q(\tau,\ t) = Q(\tau,\ t).$$

Доказательство. Пусть число $\delta = \delta(\varepsilon)$ таково, что на любом отрезке из $[0,\ T]$ длиной $\delta(\varepsilon)$ колебание функции $P(t)$ не превосходит ε; и пусть q_1 и q_2 — два разбиения, диаметры которых не превосходят δ. Как обычно, сначала предположим, что разбиение q_2 есть продолжение разбиения q_1. Пусть q_1 построено по точкам $\tau = t_0 < t_1 < \ldots < t_j < t_{j+1} < \ldots < t_n = t$, а q_2 — по точкам $\tau = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{k_1} = t_1 < \ldots < \tau_{k_2} = t_2 < \ldots < \tau_{k_j} = t_j < \ldots < \tau_{k_n} = t$. Тогда оператор $Q_{q_2}(t, \tau)$ имеет вид

$$Q_{q_2}(t, \tau) = R_n R_{n-1} \ldots R_1 P(\tau),$$

где

$$R_j = P(\tau_{k_j}) P(\tau_{k_j - 1}) \ldots P(\tau_{k_{j-1}+1}) P(\tau_{k_{j-1}}).$$

Оператор $Q_{q_1}(t, \tau)$ можно представить в подобном виде

$$Q_{q_1}(t, \tau) = R'_n R'_{n-1} \ldots R'_1 P(\tau),$$

где

$$R'_j = P(t_j) P(t_{j-1}) = P(\tau_{k_j}) P(\tau_{k_{j-1}}) \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Оценим разность операторов R_j и R'_j. Для этого снова воспользуемся тождеством, аналогичным (2.12). Имеем

$$\|R_j - R'_j\| = \Bigg\| \sum_{s=1}^{k_j - k_{j-1} - 1} P(\tau_{k_j}) [P(\tau_{k_j - s}) - P(\tau_{k_j})] [P(\tau_{k_j - s - 1}) - P(\tau_{k_j - s})] P(\tau_{k_j - s - 2}) \ldots P(\tau_{k_{j-1}}) \Bigg\| \leqslant$$

$$\leqslant MC\varepsilon \sum_{i = k_{j-1}+1}^{k_j} \| P(\tau_{i-1}) - P(\tau_i) \|.$$

Для разности операторов $Q_{q_2}(t, s)$ и $Q_{q_1}(t, s)$ тогда получаем

$$\| Q_{q_1}(t, \tau) - Q_{q_2}(t, \tau) \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \| R_n \ldots R_{j+1} (R'_j - R_j) R'_{j-1} \ldots R'_1 P(\tau) \| \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \sum_{j=1}^{n} \| R'_j - R_j \| \leqslant MC^3 \varepsilon \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{n} \sum_{l = k_{j-1}+1}^{k_{j-1}} \| P(\tau_{l-1}) - P(\tau_l) \| \leqslant MC^3 V \varepsilon.$$

Для произвольных q_1 и q_2 с диаметрами, не превосходящими δ, получим

$$\left\|Q_{q_1}(t, \tau) - Q_{q_2}(t, \tau)\right\| \leqslant 2MC^3V\varepsilon.$$

Теорема доказана.

3. Свойства оператора $Q(t, \tau)$. Все свойства $Q(t, \tau)$ выводятся предельным переходом из свойств операторов $Q_q(t, \tau)$. Найдем их.

1°. Очевидно, $P(t)Q_q(t, \tau) = Q_q(t, \tau)P(\tau) = Q_q(t, \tau)$, поэтому

$$P(t)Q(t, \tau) = Q(t, \tau)P(\tau) = Q(t, \tau). \tag{2.14}$$

2°. Докажем, что

$$Q(t, \tau)Q(\tau, t) = P(t) \text{ и } Q(\tau, t)Q(t, \tau) = P(\tau). \tag{2.15}$$

Для этого преобразуем

$$P(\tau) - Q_q(\tau, t)Q_q(t, \tau) =$$
$$= P_0P_0 - P_0P_1 \ldots P_{n-1}P_nP_{n-1} \ldots P_0 =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} P_0 \ldots P_k(P_k - P_{k+1})P_k \ldots P_0.$$

Воспользуемся тождеством

$$P_k(P_k - P_{k+1})P_k = P_k(P_k - P_{k+1})^2 P_k$$

и оценим

$$\|P(\tau) - Q_q(\tau, t)Q_q(t, \tau)\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \|P_0 \ldots P_k(P_k - P_{k+1})^2 P_k \ldots P_0\| \leqslant$$
$$\leqslant C^2\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \|P_k - P_{k+1}\| \leqslant C^2\varepsilon V.$$

Устремляя $d(q)$, а значит и ε, к нулю, получаем второе из тождеств (2.15). Первое устанавливается аналогично.

3°. Тождество

$$Q(t, s)Q(s, \tau) = Q(t, \tau) \tag{2.16}$$

при $\tau \leqslant s \leqslant t$, очевидно, следует из построения оператора $Q(t, \tau)$. Оно справедливо и при произвольных соотношениях между τ, s и t, что вытекает из предыдущего и свойств 1° и 2°.

$$4°. \ \lim_{t \to \tau} Q(t, \tau) = P(\tau). \tag{2.17}$$

Из тождества (2.12) при $t > \tau$ вытекает, что

$$\|Q_q(t, \tau) - P(\tau)\| = \|Q_q(t, \tau) - P_0\| \leqslant$$
$$\leqslant \|(P_n - P_0)P_0\| + \sum_{k=1}^{n} \|P_n(P_k - P_n)(P_{k-1} - P_k)P_{k-2} \ldots P_0\| \leqslant$$
$$\leqslant M\|P(t) - P(\tau)\| + MC\omega(t, \tau)V.$$

Переходя к пределу при $d(q) \to 0$, получаем

$$\|Q(t, \tau) - P(\tau)\| \leqslant M\|P(t) - P(\tau)\| + MC\omega(t, \tau)V,$$

откуда следует (2.17). Аналогично проверяется случай $t < \tau$.

5°. Функция $Q(t, \tau)$ непрерывна по t и τ. Действительно, в силу (2.14) и (2.16)

$$\|Q(t_1, \tau) - Q(t, \tau)\| =$$
$$= \|(Q(t_1, t) - P(t))Q(t, \tau)\| \leqslant C\|Q(t_1, t) - P(t)\| \to 0$$

при $t_1 \to t$. Аналогично проверяется непрерывность по τ.

Из свойств 1° — 5° вытекает, что оператор $Q(t, \tau)$ осуществляет эволюцию подпространства $\mathscr{L}_t$.

Теорема 2.2. *Если оператор $P(t)$ сильно непрерывно дифференцируем по t, то оператор $Q(t, \tau)$ также сильно непрерывно дифференцируем по t и удовлетворяет уравнению*

$$\frac{dQ(t, \tau)}{dt} = P'(t)P(t)Q(t, \tau). \tag{2.18}$$

Доказательство. Из тождества (2.12) находим, что

$$\frac{Q_q(t, \tau) - P(\tau)}{t - \tau} - \frac{P(t) - P(\tau)}{t - \tau} P(\tau) =$$
$$= \frac{1}{t - \tau} \sum_{k=1}^{n} P_n(P_k - P_n)(P_{k-1} - P_k)P_{k-2} \ldots P_0,$$

откуда

$$\left\| \frac{Qq(t, \tau) - P(\tau)}{t-\tau} - \frac{P(t) - P(\tau)}{t-\tau} P(\tau) \right\| \leqslant \frac{MC\omega(t, \tau)V}{t-\tau}.$$

Переход к пределу при $d(q) \to 0$ дает

$$\left\| \frac{Q(t, \tau) - P(\tau)}{t-\tau} - \frac{P(t) - P(\tau)}{t-\tau} P(\tau) \right\| \leqslant \frac{MC\omega(t, \tau)V}{t-\tau}. \qquad (2.19)$$

Оператор $P(t)$ удовлетворяет условию Липшица, поэтому

$$V \leqslant K|t-\tau|$$

и, следовательно, правая часть в (2.19) стремится к нулю. Отсюда вытекает, что существует производная от функции $Q(t, \tau)$ в точке $t=\tau$

$$\left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=\tau} = P'(\tau)P(\tau). \qquad (2.20)$$

Вычислим теперь производную при любом t. Имеем

$$\frac{Q(t+\Delta t, \tau) - Q(t, \tau)}{\Delta t} = \frac{Q(t+\Delta t, t) - P(t)}{\Delta t} Q(t, \tau).$$

Отсюда с помощью (2.20) получаем формулу (2.18). Теорема доказана.

4. Оператор, осуществляющий эволюцию прямого разложения. По проекционному оператору $\tilde{P}(t) = I - \tilde{P}(t)$ построим описанным выше способом соответствующий оператор $\tilde{Q}(t, \tau)$, осуществляющий эволюцию подпространства $\mathcal{M}_t$. Очевидно,

$$Q(t, s)\tilde{Q}(s, \tau) = Q(t, s)P(s)\tilde{P}(s)\tilde{Q}(s, \tau) = 0. \qquad (2.21)$$

Положим

$$R(t, \tau) = Q(t, \tau) + \tilde{Q}(t, \tau). \qquad (2.22)$$

Этот оператор обладает свойствами, которые непосредственно следуют из свойств операторов $Q(t, \tau)$, $\tilde{Q}(t, \tau)$ и (2.22).

1°. Имеет место тождество (2.6):

$$P(t)R(t, \tau) = R(t, \tau)P(\tau).$$

Действительно, в силу (2.14)

$$P(t)R(t, \tau)=P(t)Q(t, \tau)+P(t)\tilde{Q}(t, \tau)= \\ =Q(t, \tau)+P(t)\tilde{P}(t)\tilde{Q}(t, \tau)=Q(t, \tau)$$

и

$$R(t, \tau)P(\tau)=Q(t, \tau)P(\tau)+\tilde{Q}(t, \tau)P(\tau)= \\ =Q(t, \tau)+\tilde{Q}(t, \tau)\tilde{P}(\tau)P(\tau)=Q(t, \tau).$$

2°. Операторы $R(t, \tau)$ и $R(\tau, t)$ взаимно обратны. Действительно, в силу (2.15) и (2.22)

$$R(t, \tau)R(\tau, t)=P(t)+\tilde{P}(t)=I.$$

3°. Из (2.16) и (2.21) следует, что

$$R(t, s)R(s, \tau)=R(t, \tau).$$

4°. Из (2.17) вытекает, что

$$\lim_{t\to\tau} R(t, \tau)=I.$$

5°. Оператор $R(t, \tau)$ непрерывен по t и τ.

Из свойств 1°—5° следует, что оператор $R(t, \tau)$ осуществляет эволюцию прямого разложения $E=\mathscr{L}_t\dot{+}\mathscr{M}_t$.

6°. Если оператор $P(t)$ сильно непрерывно дифференцируем, то таким же будет оператор $R(t, \tau)$ и

$$\frac{dR}{dt}=(P'(t)P(t)+\tilde{P}'(t)\tilde{P}(t))R. \tag{2.23}$$

Действительно, в силу (2.18) и (2.14)

$$\frac{dR}{dt}=P'(t)P(t)Q(t, \tau)+\tilde{P}'(t)\tilde{P}(t)\tilde{Q}(t, \tau)= \\ =(P'(t)P(t)+\tilde{P}'(t)\tilde{P}(t))R(t, \tau).$$

Для случая дифференцируемого оператора $P(t)$ оператор $R(t, \tau)$ можно было сразу строить как эволюционный оператор для дифференциального уравнения (2.23) с ограниченным операторным коэффициентом.

Можно рассмотреть более общий случай, когда пространство E разлагается в прямую сумму подпространств $\mathscr{L}_t^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots, N)$ таких, что им соответствуют проекционные взаимно ортогональные операторы $P_k(t)$. Если ввести отвечающие $P_k(t)$ операторы $Q_k(t, \tau)$, то оператор

$$R(t, \tau) = \sum_{k=1}^{N} Q_k(t, \tau)$$

будет обладать свойствами 1° — 6°.

При этом свойство 1° запишется так:

$$P_k(t) R(t, \tau) = R(t, \tau) P_k(\tau),$$

а дифференциальное уравнение (2.23) примет вид

$$\frac{dR}{dt} = \sum_{k=1}^{N} P_k'(t) P_k(t) R. \tag{2.24}$$

Функция $R(t, \tau)$ является его решением с начальным значением $R(\tau, \tau) = I$.

Отметим, что из тождества

$$\sum_{k=1}^{N} P_k^2(t) = I$$

следует соотношение

$$\sum_{k=1}^{N} P_k'(t) P_k(t) = -\sum_{k=1}^{N} P_k(t) P_k'(t),$$

поэтому уравнение (2.24) можно переписать в виде

$$\frac{dR}{dt} = -\sum_{k=1}^{N} P_k(t) P_k'(t) R. \tag{2.25}$$

Оператор $R(t, \tau)$ обладает той же гладкостью, что и операторы $P_k(t)$. Если операторы $P_k(t)$ будут допускать аналитическое продолжение в некоторую область комплексной плоскости t, то оператор $R(t, \tau)$ также допускает аналитическое продолжение в эту область.

5. Гильбертово пространство. В гильбертовом пространстве интересен тот случай, когда пространство H разлагается в ортогональную сумму подпространств $\mathscr{L}_t^{(k)}$. В этом случае операторы $P_k(t)$ естественно считать операторами ортогонального проектирования.

Теорема 2.3. *Если пространство* H *разложено в ортогональную сумму подпространств* $\mathcal{L}_t^{(k)}$ ($k=1, 2, \ldots, N$) *и операторы ортогонального проектирования на эти подпространства непрерывны по* t *по норме и имеют ограниченную вариацию, то существует унитарный оператор* $R(t, \tau)$, *осуществляющий эволюцию ортогонального разложения* $H = \mathcal{L}_t^{(1)} \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_t^{(N)}$.

В доказательстве нуждается лишь унитарность оператора $R(t, \tau)$. Из построения операторов $Q_q(t, \tau)$ по самосопряженному проекционному оператору $P_k(t)$ следует, что

$$Q_q^*(t, \tau) = Q_q(\tau, t).$$

Тогда такое же соотношение будет справедливым для оператора $Q(t, \tau)$, а значит, и для $R(t, \tau)$.

Поэтому

$$R^*(t, \tau) = R(\tau, t) = R^{-1}(t, \tau).$$

Теорема доказана.

6. Эволюция инвариантных подпространств. Пусть $A(t)$ — замкнутый оператор с плотной в E областью определения $\mathcal{D}(A)$, не зависящей от t, сильно непрерывно дифференцируемый на $\mathcal{D}(A)$ и имеющий ограниченный обратный $A^{-1}(t)$.

Пусть $\Lambda_1(t)$ — замкнутая часть спектра $\Lambda(t)$ оператора $A(t)$, имеющая замкнутое дополнение $\Lambda(t) - \Lambda_1(t)$, и $\Gamma_1(t)$ — гладкая дуга, отделяющая $\Lambda_1(t)$ от $\Lambda(t) - \Lambda_1(t)$. Если для любого $t_0 \in [0, T]$ при t, достаточно близких к t_0, $\Lambda_1(t)$ совпадает с частью множества $\Lambda(t)$, остающейся внутри области, ограниченной контуром $\Gamma_1(t_0)$, то мы будем называть $\Lambda_1(t)$ изолированной ветвью спектра оператора $A(t)$.

Допустим, что спектр оператора $A(t)$ распадается на сумму изолированных ветвей

$$\Lambda(t) = \Lambda_0(t) + \Lambda_1(t) + \ldots + \Lambda_n(t)$$

так, что множества $\Lambda_1(t), \ldots, \Lambda_n(t)$ ограничены. Через $\Gamma_k(t)$ обозначается гладкий простой замкнутый контур, отделяющий $\Lambda_k(t)$ от его дополнения.

Как было описано в § 4 введения, операторы

$$P_k(t) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_k(t)} R_{A(t)}(\lambda)\,d\lambda \qquad (k=1, \ldots, n)$$

будут при каждом $t \in [0, T]$ проекционными попарно ортогональными операторами, коммутирующими с оператором $A(t)$. В инвариантных подпространствах $\mathscr{L}_t^{(k)} = P_k(t)E$ оператор $A(t)$ ограничен и имеет спектр, совпадающий с множеством $\Lambda_k(t)$.

Операторы $P_k(t)$ сильно непрерывно дифференцируемы. Это связано с тем, что при t, близких к t_0, в силу изолированности ветвей $\Lambda_k(t)$, можно $P_k(t)$ вычислять по формуле

$$P_k(t) \equiv -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k(t_0)} R_{A(t)}(\lambda)\,d\lambda,$$

и тогда сильно непрерывная дифференцируемость $P_k(t)$ непосредственно следует из сильно непрерывной дифференцируемости по t резольвенты $R_{A(t)}(\lambda)$.

Определим оператор $P_0(t) = I - \sum\limits_{k=1}^{n} P_k(t)$. Он будет обладать теми же свойствами, что и операторы $P_k(t)$, и будет им ортогонален. По системе операторов $P_0(t)$, $P_1(t), \ldots$ $\ldots, P_n(t)$ строим оператор $R(t, \tau)$, являющейся эволюционным для уравнения

$$\frac{dR}{dt} = \sum_{k=0}^{n} P_k'(t)\,P_k(t)\,R. \tag{2.26}$$

Теорема 2.4. *Оператор $R(t, \tau)$ оставляет инвариантной область определения оператора $A(t)$, оператор $A(t)R(t, \tau)A^{-1}(\tau)$ ограничен и сильно непрерывно дифференцируем по t.*

Доказательство. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{k=0}^{n} P_k'(t)\,P_k(t)\,S + \sum_{k=0}^{n} P_k(t)\,A'(t)\,A^{-1}(t)\,P_k(t)\,S. \tag{2.27}$$

Обозначим через $S(t, \tau)$ его решение, удовлетворяющее начальному условию $S(\tau, \tau) = I$. Это решение существует и сильно непрерывно дифференцируемо в силу того, что все операторные коэффициенты в уравнении (2.27) ограничены и сильно непрерывны.

Обозначим $V(t, \tau) = A^{-1}(t) S(t, \tau)$. Тогда

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dA^{-1}(t)}{dt} S(t, \tau) + A^{-1}(t) \sum_{k=0}^{n} P'_k(t) P_k(t) S +$$
$$+ A^{-1}(t) \sum_{k=0}^{n} P_k(t) A'(t) A^{-1}(t) P_k(t) S. \quad (2.28)$$

Рассмотрим операторы

$$B_k(t) = A^{-1}(t) P'_k(t) + A^{-1}(t) P_k(t) A'(t) A^{-1}(t) =$$
$$= A^{-1}(t) P'_k(t) - P_k(t) \frac{dA^{-1}}{dt}. \quad (2.29)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$P_k(t) A^{-1}(t) = A^{-1}(t) P_k(t).$$

Дифференцируя это тождество по t, имеем

$$P_k(t) \frac{dA^{-1}(t)}{dt} + P'_k(t) A^{-1}(t) = \frac{dA^{-1}(t)}{dt} P_k(t) + A^{-1}(t) P'_k(t).$$

Выражая первый член через остальные и подставляя его в (2.29), получаем

$$B_k(t) = P'_k(t) A^{-1}(t) - \frac{dA^{-1}(t)}{dt} P_k(t).$$

Отсюда

$$\sum_{k=0}^{n} B_k(t) P_k(t) = \sum_{k=0}^{n} P'_k(t) P_k(t) A^{-1}(t) - \frac{dA^{-1}(t)}{dt}.$$

Дифференциальное уравнение (2.28) принимает вид

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=0}^{n} P'_k(t) P_k(t) V$$

и совпадает с уравнением (2.26). Нас интересует его решение, удовлетворяющее начальному условию $V(\tau, \tau) = A^{-1}(\tau) S(\tau, \tau) = A^{-1}(\tau)$. В силу единственности такого решения $V(t, \tau) = R(t, \tau) A^{-1}(\tau)$ и, следовательно,

$$S(t, \tau) = A(t) R(t, \tau) A^{-1}(\tau).$$

Теорема доказана.

§ 3. Расщепление уравнения на уравнения в подпространствах

1. Решения уравнения в подпространстве. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x, \tag{3.1}$$

где $A(t)$ замкнут, имеет не зависящую от t область определения $\mathscr{D}(A)$ и сильно непрерывен на ней. Предположим, что для уравнения (3.1) задача Коши равномерно корректна, и обозначим через $U(t, s)$ соответствующий ей эволюционный оператор. Пусть пространство E разложено в прямую сумму подпространств $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$. Обозначим через P и $\widetilde{P}$ проекционные операторы, порожденные этим разложением: $PE = \mathscr{L}$, $\widetilde{P}E = \mathscr{M}$, $P\widetilde{P} = 0$. Нас будет интересовать вопрос о том, когда подпространства $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ остаются инвариантными при преобразовании $U(t, s)$.

Свойство инвариантности подпространств можно записать (см. (2.6)) в виде соотношения

$$PU(t, s) = U(t, s) P. \tag{3.2}$$

Предположим теперь, что проекционный оператор P обладает тем свойством, что $P\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(A)$. Тогда, если (3.2) выполнено тождественно по t и s, то при $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ равенство

$$PU(t, s) x_0 = U(t, x) P x_0 \tag{3.3}$$

можно продифференцировать по t. Получаем

$$PA(t) U(t, s) x_0 = A(t) U(t, s) P x_0.$$

Полагая теперь $s=t$, имеем

$$PA(t)x_0=A(t)Px_0 \qquad (x_0\in\mathscr{D}(A)). \tag{3.4}$$

Обратно, если выполнено (3.4), то функция $y(t)=PU(t, s)x_0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dt}=PA(t)y(t)=A(t)Py(t)=A(t)y(t)$$

и начальному условию $y(s)=Px_0$. В силу единственности решения задачи Коши для уравнения (3.1), $y(t)=U(t, s)Px_0$ и мы приходим к тому, что (3.3) выполнено на элементах $x_0\in\mathscr{D}(A)$. Из плотности $\mathscr{D}(A)$ в E и ограниченности операторов $U(t, s)$ и P следует справедливость (3.2).

Итак, для того, чтобы при условии $P\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{D}(A)$ эволюционный оператор $U(t, s)$ сохранял подпространства $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ инвариантными, необходимо и достаточно, чтобы проекционный оператор P коммутировал с оператором $A(t)$ на его области определения.

Если нас интересуют только решения с начальными условиями из $\mathscr{L}$ и выполнено (3.4), то вместо уравнения (3.1) во всем пространстве E можно рассматривать уравнение $\frac{dx}{dt}=PAx$ в подпространстве $\mathscr{L}$.

2. Эволюционный оператор, следящий за прямым разложением. Пусть теперь дано переменное прямое разложение $E=\mathscr{L}_t\dot{+}\mathscr{M}_t$ пространства E с соответствующими проекционными операторами $P(t)$ и $\tilde{P}(t)$ $(P(t)E=\mathscr{L}_t,\ \tilde{P}(t)E=\mathscr{M}_t,\ P(t)+\tilde{P}(t)=I)$. Поставим задачу о нахождении условий, при которых эволюционный оператор $U(t, s)$ уравнения (3.1) следит за прямым разложением $E=\mathscr{L}_t\dot{+}\mathscr{M}_t$. Мы найдем эти условия тем же методом, как и выше, предполагая, что оператор $P(t)$ сильно непрерывно дифференцируем по t и $P(t)\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{D}(A)$.

Пусть оператор $U(t, s)$ следит за прямым разложением, т. е. выполнено

$$P(t)U(t, s)=U(t, s)P(s) \qquad (0\leqslant s\leqslant t\leqslant T). \tag{3.5}$$

Применяя операторы, стоящие справа и слева, к элементу $x_0\in\mathscr{D}(A)$ и дифференцируя по t, получаем

$$P'(t)U(t, s)x_0+P(t)A(t)U(t, s)x_0=A(t)U(t, s)P(s)x_0.$$

Полагая $s=t$, имеем

$$A(t)P(t)-P(t)A(t)]\,x_0=P'(t)\,x_0 \qquad (x_0\in\mathscr{D}(A)). \tag{3.6}$$

Обратно, если выполнено (3.6), то функция $y(t)=P(t)\times\times U(t,\ s)\,x_0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dy}{dt}=P'(t)\,U(t,\ s)\,x_0+P(t)\,A(t)\,U(t,\ s)\,x_0=$$
$$=A(t)\,P(t)\,U(t,\ s)\,x_0=A(t)\,y \tag{3.7}$$

и начальному условию $y(s)=P(s)\,x_0$. Отсюда, так же как и выше, следует (3.5). Итак, условие (3.6) необходимо и достаточно для того, чтобы оператор $U(t,\ s)$ следил за прямым разложением $E=\mathscr{L}_t\dotplus\mathscr{M}_t$.

При выполнении тождества (3.6) возникает следующая задача: если нас интересуют лишь те решения $x(t)$ уравнения (3.1), для которых начальные данные лежат в $\mathscr{L}_s$, то нельзя ли эти решения находить из более простого дифференциального уравнения? Особенно важной эта задача является для случая, когда $\mathscr{L}_s$ конечномерно. Равенство (3.6) показывает, что соответствующее уравнение нужно написать в виде

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\,P(t)x. \tag{3.8}$$

Это уравнение проще исходного уравнения (3.1) (особенно, если $P(t)$ конечномерен). Однако оно имеет тот недостаток, что его нельзя рассматривать как дифференциальное уравнение в некотором подпространстве, так как значения его решения вместе с подпространством $\mathscr{L}_t$ могут «путешествовать» по всему пространству E. Для сведѐния уравнения (3.8) к уравнению в подпространстве, например, в подпространстве $\mathscr{L}_0$, можно воспользоваться оператором $R(t,\ \tau)$, осуществляющим эволюцию подпространств $\mathscr{L}_t$ и $\mathscr{M}_t$. Если ввести функцию $z(t)=R(0,\ t)\,x(t)$, то при условии $x_0\in\mathscr{L}_0$ ее значения уже при всех t лежат в подпространстве $\mathscr{L}_0$. Составим дифференциальные уравнения для функции $z(t)$. Имеем

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dR(0,\ t)}{dt}\,x(t)+R(0,\ t)\,A(t)\,x(t).$$

Вспоминая, что $R(0,\ t)=R^{-1}(t,\ 0)$, получаем уравнение

$$\frac{dz}{dt}=\left[\frac{dR^{-1}(t,\ 0)}{dt}\,R(t,\ 0)+R^{-1}(t,\ 0)\,A(t)\,R(t,\ 0)\right]z, \tag{3.9}$$

и начальное условие $z(0)=x(0)=x_0$.

Используя дифференциальное уравнение для оператора $R(t, 0)$, записываем уравнение (3.9) в виде

$$\frac{dz}{dt} = R(0, t)[-P'(t)P(t) - \tilde{P}'(t)\tilde{P}(t) + A(t)]R(t, 0)z \tag{3.10}$$

или в виде

$$\frac{dz}{dt} = R(0, t)[P(t)P'(t) + \tilde{P}(t)\tilde{P}'(t) + A(t)]R(t, 0)z.$$

Заметим, что оператор

$$S(t) = -P'(t)P(t) - \tilde{P}'(t)\tilde{P}(t) + A(t) \tag{3.11}$$

в силу условия (3.6) коммутирует с оператором $P(t)$ на $\mathscr{D}(A)$. Действительно, используя тождество $P'P = \tilde{P}P'$, получаем

$$\begin{aligned} P(t)S(t) &= \\ &= -P(t)P'(t)P(t) - P(t)\tilde{P}'(t)\tilde{P}(t) + P(t)A(t) = \\ &= P(t)P'(t)[\tilde{P}(t) - P(t)] + A(t)P(t) - P'(t) = \\ &= -P'(t)P(t) + A(t)P(t) = S(t)P(t). \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, непосредственно видно, что операторный коэффициент в уравнении (3.10) коммутирует с оператором $P(0)$:

$$\begin{aligned} P(0)R(0, t)S(t)R(t, 0) &= R(0, t)P(t)S(t)R(t, 0) = \\ &= R(0, t)S(t)P(t)R(t, 0) = R(0, t)S(t)R(t, 0)P(0). \end{aligned}$$

Легко проверить, что из равенства (3.11) с коммутирующим с $P(t)$ оператором $S(t)$ вытекает условие (3.6).

Сформулируем наши выводы в виде следующей теоремы:

Теорема 3.1. *Пусть дано прямое разложение пространства $E: E = \mathscr{L}_t \dotplus \mathscr{M}_t$, причем проекционные операторы $P(t)$ и $\tilde{P}(t)$, порожденные этим разложением, сильно непрерывно дифференцируемы по t и оставляют инвариантной область определения оператора $A(t)$. Для того, чтобы эволюционный оператор $U(t, s)$ урав-*

нения (3.1) *следил за этим разложением, необходимо и достаточно, чтобы оператор* $A(t)$ *представлялся в виде*

$$A(t) = P'(t)\,P(t) + \tilde{P}'(t)\,\tilde{P}(t) + S(t),$$

где оператор $S(t)$ *определен на* $\mathscr{D}(A)$ *и коммутирует с операторами* $P(t)$ *и* $\tilde{P}(t)$ *на* $\mathscr{D}(A)$.

Для нахождения решений уравнения (3.1) с начальными условиями из $\mathscr{L}_0$ можно решать упрощенное уравнение (3.8). После замены $z = R(0, t)\,x$ уравнение для z приводится к двум независимым уравнениям

$$\frac{dz}{dt} = P(0)\,R(0, t)\,S(t)\,R(t, 0)\,z$$

и

$$\frac{dz}{dt} = \tilde{P}(0)\,R(0, t)\,S(t)\,R(t, 0)\,z,$$

каждое из которых можно решать в подпространствах $\mathscr{L}_0$ и $\mathscr{M}_0$ соответственно.

Предположим теперь, что в спектре оператора $A(t)$ имеется изолированная часть $\Lambda_1(t)$. Как описано выше, ей соответствует проекционный оператор $P(t)$ и инвариантное подпространство $\mathscr{L}_t = P(t)\,E$. Предположим, что оператор $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем на $\mathscr{D}(A)$, тогда оператор $P(t)$ будет сильно непрерывно дифференцируем. Оператор $A(t)$ коммутирует с $P(t)$, поэтому соотношение (3.6), как правило, не выполняется. Тождественно оно может выполняться лишь в случае постоянного оператора $P(t)$. Таким образом, эволюционный оператор $U(t, s)$, как правило, не следит за инвариантными подпространствами оператора $A(t)$. В этом заложены основные трудности теории линейных уравнений с переменными коэффициентами.

3. Расщепление эволюционного оператора. Для рассмотренного только что случая, когда оператор $P(t)$ соответствует изолированной части спектра оператора $A(t)$, попытаемся эволюционный оператор представить в виде произведения двух операторов, один из которых следит за эволюцией подпространства $\mathscr{L}_t$, а другой выводит из $\mathscr{L}_t$. Желательно при этом, чтобы оба эти оператора находились из более простых, чем (3.1), уравнений.

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = (A(t) + P'(t)P(t) + \tilde{P}'\tilde{P}(t))\,v. \tag{3.12}$$

Это уравнение можно рассматривать как возмущенное по отношению к уравнению (3.1) с ограниченным возмущающим оператором $B(t) = P'(t)P(t) + \tilde{P}'(t)\tilde{P}(t)$. Если для уравнения (3.1) задача Коши равномерно корректна, то в силу теоремы 3.4 гл. II задача Коши для уравнения (3.12) будет равномерно корректной, если определен и сильно непрерывен по t оператор $A(t)B(t)A^{-1}(t)$. Дифференцируя по t равенство

$$A(t)P(t) = P(t)A(t),$$

получаем

$$A'(t)P(t) + A(t)P'(t) = P'(t)A(t) + P(t)A'(t).$$

Пользуясь этим соотношением, преобразуем

$$\begin{aligned}
A(t)B(t)A^{-1}(t) &= \\
&= A(t)P'(t)P(t)A^{-1}(t) - A(t)P'(t)\tilde{P}(t)A^{-1}(t) = \\
&= [P'(t)A(t) + P(t)A'(t) - A'(t)P(t)] \times \\
&\quad \times [P(t)A^{-1}(t) - \tilde{P}(t)A^{-1}(t)] = \\
&= P'(t)P(t) + \tilde{P}'(t)\tilde{P}(t) - \tilde{P}(t)A'(t)A^{-1}(t)P(t) - \\
&\quad - P(t)A'(t)A^{-1}(t)\tilde{P}(t).
\end{aligned}$$

Отсюда видна сильная непрерывность оператора $A(t) \times B(t)A^{-1}(t)$.

Итак, для уравнения (3.12) задача Коши равномерно корректна. Обозначим через $U_1(t, s)$ соответствующий ей эволюционный оператор.

Оператор $A_1(t) = A(t) + B(t)$ удовлетворяет условию (3.6), и поэтому оператор $U_1(t, s)$ следит за эволюцией прямого разложения $E = \mathscr{L}_t \dotplus \mathscr{M}_t$. Если нас интересуют лишь решения (3.12) с начальными условиями из $\mathscr{L}_s$, то их можно находить из уравнения

$$\frac{dv}{dt} = A_1(t)P(t)v = [A(t)P(t) + P'(t)P(t)]\,v. \tag{3.13}$$

Желая теперь найти решения уравнения (3.1) с начальными данными из $\mathscr{L}_0$, попытаемся представить оператор $U(t, 0)P(0)$

в виде произведения оператора $U_1(t, 0)P(0)$ и «исправляющего оператора» $Y(t)$:

$$U(t, 0)P(0) = Y(t)U_1(t, 0)P(0). \tag{3.14}$$

Попробуем подобрать оператор $Y(t)$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{dY}{dt}P(t) = A(t)Y(t)P(t) - Y(t)A(t)P(t) - Y(t)P'(t)P(t). \tag{3.15}$$

Если это сделано, то в силу (3.13) и (3.15) при $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ функция $z(t) = Y(t)U_1(t, 0)P(0)x_0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dY}{dt}U_1(t, 0)P(0)x_0 + $$
$$+ Y(t)[(A(t)P(t) + P'(t)P(t)]U_1(t, 0)P(0)x_0 =$$
$$= A(t)Y(t)P(t)U_1(t, 0)P(0)x_0 = A(t)z(t).$$

Таким образом, функция $z(t)$ есть решение уравнения (3.1), и если предположить, что $Y(0) = P(0)$, то $z(0) = P(0)x_0$, и, следовательно,

$$z(t) = Y(t)U_1(t, 0)P(0)x_0 = U(t, 0)P(0)x_0,$$

т. е. выполнено (3.14).

Для нахождения оператор-функции $Y(t)$, удовлетворяющей соотношению (3.15), можно рассмотреть дифференциальное уравнение

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y(t) - Y(t)A(t)P(t) -$$
$$- Y(t)(P'(t)P(t) + \tilde{P}'(t)\tilde{P}(t)). \tag{3.16}$$

Умножением справа на $P(t)$ легко проверяется, что всякое решение уравнения (3.16) удовлетворяет и соотношению (3.15). Решение, удовлетворяющее начальному условию $Y(0) = P(0)$, обладает тем свойством, что

$$Y(t)P(t) = Y(t). \tag{3.17}$$

Действительно, если продифференцировать левую часть, то нетрудно проверить, что она удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению (3.16) и тому же начальному условию, что и функция $Y(t)$.

Мы не ставим здесь перед собою задачу об исследовании вопроса о существовании решения уравнения (3.16), в связи с чем утверждение следующей теоремы носит формальный характер. Заметим только, что для случая конечномерного оператора $P(t)$ это нетрудно сделать, рассматривая уравнение как возмущенное уравнение (3.1).

Теорема 3.2. *Пусть* $x_0 \in \mathscr{L}_0 \cap \mathscr{D}(A)$. *Тогда решение* $x(t)$ *уравнения* (3.1) *можно представить в виде*

$$x(t) = Y(t) V(t, 0) x_0,$$

где $V(t, s)$ — *эволюционный оператор, отвечающий уравнению* (3.13), *а* $Y(t)$ — *решение дифференциального уравнения* (3.16) *с начальным условием* $Y(0) = P(0)$.

Конечно, трудно утверждать, что уравнение (3.16) имеет более простую структуру, чем исходное уравнение (3.1). Однако в некоторых случаях можно считать, что главная часть эволюционного оператора $U(t, s)$ описывается оператором $U_1(t, s)$, а оператор $Y(t)$ состоит из оператора $P(t)$ и добавки, которая может находиться приближенно. Такая ситуация рассматривается в следующем пункте.

4. Уравнение с малым параметром при производной. Пусть исходное дифференциальное уравнение содержит малый параметр при производной

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t) x \qquad (0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0). \tag{3.18}$$

Для применения теоремы 3.2 составляем дифференциальные уравнения, аналогичные (3.12) и (3.15):

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} = A(t) v + \varepsilon (P'(t) P(t) + \tilde{P}'(t) \tilde{P}(t)) v \tag{3.19}$$

и

$$\varepsilon \frac{dY}{dt} P(t) = A(t) Y(t) P(t) - Y(t) A(t) P(t) - \\ - \varepsilon Y(t) P'(t) P(t). \tag{3.20}$$

Если ε — мало́, то в уравнении (3.20) можно отбросить члены, содержащие ε, и тогда приближенно положить

$$Y(t) \equiv Y_0(t) = P(t).$$

Если $x_0 \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{L}_0$, то согласно (3.14) находим функцию

$$v_\varepsilon^0(t) = P(t)\,U_1(t,\ 0)\,x_0 = U_1(t,\ 0)\,x_0$$

(последнее в силу того, что $U_1(t, s)$ следит за эволюцией $\mathscr{L}_t$).

Для сравнения решений уравнений (3.18) и (3.19) можно применить теорему 1.7, которая нас приводит к следующему утверждению:

Теорема 3.3. *Пусть оператор $A(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.7. Если при $x_0 \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{L}_0$ взять в качестве нулевого приближения к решению уравнения (3.18) с начальным значением $x(0) = x_0$ функцию $v_\varepsilon^0(t)$, являющуюся решением с тем же начальным значением уравнения*

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} = A(t)\,v + \varepsilon P'(t)\,P(t)\,v,$$

лежащим в пространстве $\mathscr{L}_t$, то разность $x(t) - v_\varepsilon^0(t)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно на $[0, T]$ с порядком $O(\varepsilon)$ стремится к нулю; при этом функции $A(t)[x(t) - v_\varepsilon^0(t)]$ также равномерно на $[0, T]$ стремятся к нулю.

Перейдем к построению дальнейших приближений к решению (3.18). Попробуем удовлетворить уравнению (3.20) с точностью до членов порядка ε^2. Положим

$$Y(t) = P(t) + \varepsilon Y_1(t), \tag{3.21}$$

подставим это выражение в (3.20) и отбросим члены порядка ε^2. Тогда придем к равенству

$$A(t)\,Y_1(t)\,P(t) - Y_1(t)\,A(t)\,P(t) = \tilde{P}(t)\,P'(t)\,P(t). \tag{3.22}$$

В силу условия (3.17) естественно искать $Y_1(t)$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$Y_1(t)\,P(t) = Y_1(t). \tag{3.23}$$

Доказательство существования решения уравнения (3.22) основано на следующей лемме:

Лемма 3.1. *Пусть E_1 и E_2 — два банаховых пространства, A_1 и A_2 — замкнутые операторы, действующие в этих пространствах, T — ограниченный оператор, действующий из E_2 в E_1. Если спектры операторов A_2 и A_1 в расширенной комплексной плоскости не* *пересекаются, то существует единственный ограниченный оператор X, действующий из E_2 в E_1 и удовлетворяющий уравнению*

$$A_1X - XA_2 = T. \tag{3.24}$$

Доказательство. Предположим сначала, что A_1 и A_2 ограничены. Пусть области G_l содержат спектры операторов A_l и не пересекаются, пусть Γ_l — их границы. Рассмотрим ограниченный оператор, действующий из E_2 в E_1, определенный формулой

$$X = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_2}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{R_{A_1}(\lambda)\,TR_{A_2}(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\lambda\,d\mu. \tag{3.25}$$

Вычисляем

$$A_1X = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_2}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{TR_{A_2}(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\lambda\,d\mu - \\ -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_2}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\lambda R_{A_1}(\lambda)\,TR_{A_2}(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\lambda\,d\mu$$

и

$$XA_2 = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{R_{A_1}(\lambda)\,T}{\lambda-\mu}\,d\mu\,d\lambda - \\ -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_2}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\mu R_{A_1}(\lambda)\,TR_{A_2}(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\lambda\,d\mu.$$

Первые интегралы в обоих равенствах равны нулю в силу аналитичности подынтегральных функций внутри одного из контуров интегрирования. Тогда

$$A_1X - XA_2 = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}R_{A_1}(\lambda)\,d\lambda\,T\int\limits_{\Gamma_2}R_{A_2}(\mu)\,d\mu = T.$$

Докажем единственность решения. Если $A_1X - XA_2 = 0$, то $(A_1 - \lambda I)X - X(A_2 - \lambda I) = 0$. Применяя резольвенты справа и слева, получим

$$XR_{A_2}(\lambda) = R_{A_1}(\lambda)X.$$

Отсюда

$$X = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} XR_{A_2}(\lambda)\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} R_{A_1}(\lambda)\,X\,d\lambda = 0.$$

Перейдем теперь к общему случаю. Если спектры операторов A_1 и A_2 не пересекаются, то эти операторы имеют хотя бы одну общую регулярную точку λ_0. Составим уравнение

$$R_{A_1}(\lambda_0)\,X - XR_{A_2}(\lambda_0) = -R_{A_1}(\lambda_0)\,TR_{A_2}(\lambda_0). \qquad (3.26)$$

По предыдущему, у него имеется решение, которое и будет решением уравнения (3.5) в том смысле, что уравнение (3.24) обращается в тождество на каждом элементе $u \in \mathscr{D}(A_2)$. Действительно, представим элемент u в виде $u = R_{A_2}(\lambda_0)\,v$ и применим (3.26) к v. Тогда

$$R_{A_1}(\lambda_0)\,Xv - Xu = -R_{A_1}(\lambda_0)\,Tu.$$

Из этого равенства следует, что элемент $Xu \in \mathscr{D}(A_1)$, поэтому к обеим частям можно применить оператор $A_1 - \lambda_0 I$. Сделав это, получим

$$X(A_2 - \lambda_0 I)\,u - (A_1 - \lambda_0 I)\,Xu = -Tu$$

или

$$A_1 Xu - XA_2 u = Tu.$$

Лемма доказана.

Возвратимся теперь к уравнению (3.22). Применяя к обеим частям этого уравнения оператор $P(t)$, получаем уравнение

$$A(t)\,P(t)Y_1(t)\,P(t) - P(t)\,Y_1(t)\,A(t)\,P(t) = 0,$$

которому можно удовлетворить, положив $P(t)\,Y_1(t) \equiv 0$. Учитывая (3.23), имеем

$$Y_1(t) = \tilde{P}(t)\,Y_1(t)\,P(t). \qquad (3.27)$$

Применяя теперь к (3.22) оператор $\tilde{P}(t)$, приходим к уравнению

$$\tilde{P}(t)\,A(t)\,Y_1(t)\,P(t) - \tilde{P}(t)\,Y_1(t)\,A(t)\,P(t) = \tilde{P}(t)\,P'(t)\,P(t).$$

Используя (3.27) и перестановочность операторов $A(t)$, $P(t)$ и $\tilde{P}(t)$, окончательно получаем

$$\tilde{P}(t) A(t) Y_1(t) - Y_1(t) A(t) P(t) = \tilde{P}(t) P'(t) P(t). \quad (3.28)$$

Это уравнение можно рассматривать при каждом t как уравнение вида (3.24), полагая

$$E_1 = \mathcal{M}_t, E_2 = \mathcal{L}_t \text{ и } A_1 = \tilde{P}(t) A(t),$$
$$A_2 = A(t) P(t) \text{ и } T = \tilde{P}(t) P'(t) P(t).$$

Условия леммы 3.1 выполнены, поэтому существует решение уравнения (3.28), определенное единственным образом на $\mathcal{L}_t$ и отображающее $\mathcal{L}_t$ в $\mathcal{M}_t$. Если доопределить оператор $Y_1(t)$ на $\mathcal{M}_t$ нулем и линейно на E, то мы получим решение (3.22), удовлетворяющее условию (3.27). Из формул (3.25) и (3.28) видно, что это решение будет сильно непрерывно дифференцируемым по t, если оператор $A(t)$ дважды сильно непрерывно дифференцируем на $\mathcal{D}(A)$.

Итак, $Y_1(t)$ найдено. По формуле (3.14) для

$$x_0 \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{L}_0$$

строим функцию

$$w_\varepsilon^{(1)}(t) = (P(t) + \varepsilon Y_1(t)) U_1(t, 0) x_0 = (I + \varepsilon Y_1(t)) U_1(t, 0) x_0.$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon \frac{dw}{dt} = A(t) w + \varepsilon^2 \frac{dY_1}{dt} P(t) U_1(t, 0) x_0,$$

отличающемуся от уравнения (3.18) на члены второго порядка малости. Однако функция $w_\varepsilon^{(1)}(t)$ обладает одним недостатком — ее начальное значение отличается от начального значения функции $x(t)$ на члены первого порядка малости: $w_\varepsilon^{(1)}(0) = x_0 + \varepsilon Y_1(0) x_0$.

Заметим, что добавка $Y_1(0) x_0$ принадлежит уже пространству $\mathcal{M}_0$. Для устранения этой невязки начальных условий построим нулевое приближение к решению уравнения (3.18) с начальным данным $Y_1(0) x_0$. Имеем

$$\tilde{w}_\varepsilon^{(0)}(t) = U_1(t, 0) Y_1(0) x_0.$$

Тогда функция $v_\varepsilon^{(1)}(t)=w_\varepsilon^{(1)}(t)-\varepsilon\dot{\tilde{w}}_\varepsilon^{(0)}(t)$ будет удовлетворять начальному условию $v_\varepsilon^{(1)}(0)=x_0$ и уравнению

$$\varepsilon\frac{dv_\varepsilon^{(1)}}{dt}=A(t)\,v_\varepsilon^{(1)}+$$
$$+\varepsilon^2\left[\frac{dY_1}{dt}P(t)\,U_1(t,\ 0)\,x_0-\tilde{P}'(t)\,\tilde{P}(t)\,U_1(t,\ 0)\,Y_1(0)x_0\right].\tag{3.29}$$

Обозначим через $g_2(t)$ функцию, стоящую в квадратных скобках. Из предыдущего ясно, что эта функция равномерно ограничена по ε и t. Решая уравнение (3.29), получаем

$$v_\varepsilon^{(1)}(t)=x(t)+\varepsilon\int_0^t U_\varepsilon(t,\ s)\,g_2(s)\,ds,\tag{3.30}$$

откуда следует оценка

$$\left\|v_\varepsilon^{(1)}(t)-x(t)\right\|\leqslant C_2\varepsilon^2.$$

З а м е ч а н и е. Если для оператора $U_\varepsilon(t,\ s)$ вместо оценки (1.11) справедливо лишь неравенство

$$\|U_\varepsilon(t,\ s)\|\leqslant M,\tag{3.31}$$

то из (3.30) получим $\left\|v_\varepsilon^{(1)}(t)-x(t)\right\|\leqslant C_2'\varepsilon$, т. е. и в этом случае будет иметь место равномерная на $[0,\ T]$ сходимость к нулю разности между точным решением и его первым приближением.

Существенным является то, что для отыскания первого приближения $v_\varepsilon^{(1)}(t)$ нам приходится решать уравнение (3.19) не только в подпространстве $\mathscr{L}_t$, но и в подпространстве $\mathscr{M}_t$.

Т е о р е м а 3.4. *Если оператор $A(t)$ дважды сильно непрерывно дифференцируем на $\mathscr{D}(A)$ и удовлетворяет условиям теоремы* 3.6 *гл.* II, *то первое приближение к решению $x(t)$ уравнения* (3.18) *с начальным значением $x_0\in\mathscr{D}(A)\cap\mathscr{L}_0$ можно построить по формуле*

$$v_\varepsilon^{(1)}(t)=(I+\varepsilon Y_1(t))\,U_1(t,\ 0)\,x_0-\varepsilon U_1(t,\ 0)\,Y_1(0)\,x_0,$$

где $Y_1(t)$ есть однозначно определенное решение уравнения (3.22), *удовлетворяющее условию* (3.23).

Если выполнено неравенство (1.11), то справедлива оценка

$$\left\| x(t) - v_\varepsilon^{(1)}(t) \right\| \leqslant C_2\varepsilon^2;$$

если выполнено лишь неравенство (3.31), то оценка

$$\left\| x(t) - v_\varepsilon^{(1)}(t) \right\| \leqslant C_2'\varepsilon.$$

5. Приближения высших порядков. Процесс построения приближенных решений уравнения (3.18) можно попытаться продолжить, удовлетворяя уравнению (3.20) с точностью до членов более высокого порядка малости относительно ε. Рассмотрим подробно построение второго приближения. Положим

$$Y(t) = P(t) + \varepsilon Y_1(t) + \varepsilon^2 Y_2(t). \tag{3.32}$$

Подставим это выражение в уравнение (3.20), отбросим члены порядка ε^3 и приравняем слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях ε. Тогда получим уравнение (3.22) и уравнение

$$A(t)\,Y_2(t)\,P(t) - Y_2(t)\,A(t)\,P(t) = \frac{d\,(Y_1(t)\,P(t))}{dt}\,P(t). \tag{3.33}$$

Мы хотим, чтобы оператор $Y_2(t)$ также отображал подпространство $\mathscr{L}_t$ в подпространство $\mathscr{M}_t$. Тогда было бы $P(t)\,Y_2(t) = 0$, и из уравнения (3.33) следовало бы, что $P(t)\,\dfrac{d\,(Y_1(t)\,P(t))}{dt}\,P(t) \equiv 0$. Это, однако, никак не вытекает из уравнения (3.22), из которого находилась функция $Y_1(t)$. В связи с этим процедуру отыскания второго приближения придется усложнить.

Мы воспользуемся тем, что эволюционный оператор $W(t, s)$ уравнения

$$\varepsilon\,\frac{dW}{dt} = A(t)\,W + {} \\ + \varepsilon\,(P'(t)\,P(t) + \tilde{P}'(t)\,\tilde{P}(t))\,W + \varepsilon^2 S_1(t)\,W \tag{3.34}$$

будет в силу теоремы 3.1 следить за эволюцией подпространств $\mathscr{L}_t$ и $\mathscr{M}_t$, при произвольном операторе $S_1(t)$, коммутирующем с оператором $P(t)$. Если теперь пытаться представить эволюционный оператор $U_\varepsilon(t, s)$ на подпространстве $\mathscr{L}_0$ в виде

$$U_\varepsilon(t, 0) P(0) = Y(t) W(t, 0) P(0), \tag{3.35}$$

то для $Y(t)$ получим уравнение

$$\varepsilon \frac{dY}{dt} P(t) = A(t) Y(t) P(t) - Y(t) A(t) P(t) - \\ - \varepsilon^2 Y(t) S_1(t) P(t) - \varepsilon Y(t) P'(t) P(t).$$

Если в это уравнение подставить $Y(t)$ из (3.32) и приравнять коэффициенты при ε^2, то получится уравнение, аналогичное (3.33), с дополнительным членом

$$A(t) Y_2(t) P(t) - Y_2(t) A(t) P(t) - P(t) S_1(t) P(t) = \\ = \frac{d(Y_1(t) P(t))}{dt} P(t). \tag{3.36}$$

Выберем теперь оператор $S_1(t)$ так, чтобы

$$S_1(t) = P(t) S_1(t) P(t) = -P(t) \frac{dY_1(t) P(t)}{dt} P(t). \tag{3.37}$$

Очевидно, оператор $S_1(t)$ коммутирует с $P(t)$.

Тогда уравнение, получаемое из (3.36) применением оператора $P(t)$, будет тождественно удовлетворяться, если $P(t) Y_2(t) \equiv 0$. Таким образом, можно искать решение уравнения (3.36), удовлетворяющее условию

$$Y_2(t) = \tilde{P}(t) Y_2(t) P(t). \tag{3.38}$$

Применяя к (3.36) оператор $\tilde{P}(t)$, получим

$$\tilde{P}(t) A(t) Y_2(t) - Y_2(t) A(t) P(t) = \tilde{P}(t) \frac{d(Y_1(t) P(t))}{dt} P(t). \tag{3.39}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию (3.38), существует и единственно на основании леммы 3.1. Оно будет непрерывно дифференцируемым по t, если функция $Y_1(t)$ дважды непрерывно дифференцируема, а это в свою очередь будет иметь место, если оператор $A(t)$ трижды сильно непрерывно дифференцируем на $\mathscr{D}(A)$.

Функция

$$v_\varepsilon^{(2)}(t) = (I + \varepsilon Y_1(t) + \varepsilon^2 Y_2(t)) W(t, 0) x_0$$

будет удовлетворять уравнению (3.18) с точностью до членов порядка ε^3.

Здесь снова имеется осложнение, связанное с начальным значением функции $v_\varepsilon^{(2)}(t)$:

$$v_\varepsilon^{(2)}(0) = x_0 + \varepsilon Y_1(0)\,x_0 + \varepsilon^2 Y_2(0)\,x_0.$$

Для устранения невязки начальных значений можно снова применить метод их последовательного исправления с помощью функций, удовлетворяющих уравнению (3.18) с точностью до членов порядка ε^3. Построим функцию

$$\begin{aligned} v_\varepsilon^{(2)}(t) &= (I + \varepsilon Y_1(t) + \varepsilon^2 Y_2(t))\, W(t, 0)\, x_0 - \\ &- \varepsilon\big(I + \varepsilon \tilde{Y}_1(t)\big)\, U_1(t, 0)\,(Y_1(0)\,x_0 + \varepsilon Y_2(0)\,x_0) + \\ &+ \varepsilon^2 U_1(t, 0)\, \tilde{Y}_1(0)\,(Y_1(0)\,x_0 + \varepsilon Y_2(0)\,x_0), \end{aligned} \qquad (3.40)$$

где $\tilde{Y}_1(t)$ — оператор, построенный по $\tilde{P}(t)$ так же, как и оператор $Y_1(t)$ по $P(t)$.

Очевидно, $v_\varepsilon^{(2)}(0) = x_0$, и функция $v_\varepsilon^{(2)}(t)$ удовлетворяет уравнению (3.18) с точностью до членов порядка ε^3.

Мы приходим к следующему утверждению:

Теорема 3.5. *Если в условиях теоремы* 3.4 *оператор $A(t)$ трижды непрерывно дифференцируем на $\mathscr{D}(A)$, то по формуле* (3.40) *можно построить второе приближение $v_\varepsilon^{(2)}(t)$ к решению $x(t)$ уравнения* (3.18) *с начальным значением $x_0 \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{L}_0$, обладающее тем свойством, что*

$$\|x(t) - v_\varepsilon^{(2)}(t)\| \leqslant C_3\varepsilon^3,$$

если выполнено (1.11), *и*

$$\|x(t) - v_\varepsilon^{(2)}(t)\| \leqslant C_3'\varepsilon^2,$$

если выполнено лишь (3.31).

При построении дальнейших приближений новых принципиальных затруднений уже не возникает. Мы вкратце опишем этот процесс в следующем пункте для более общего уравнения.

6. Уравнение с малым возмущением. Общие асимптотические разложения. Перейдем от уравнения (3.18) к более сложному уравнению вида

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t)\, x + \varepsilon B(t,\ \varepsilon)\, x, \tag{3.41}$$

где оператор $B(t,\ \varepsilon)$ возлагается в степенной ряд

$$B(t,\ \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)\, \varepsilon^k,$$

с ограниченными сильно непрерывно дифференцируемыми по t коэффициентами $B_k(t)\,(k = 0,\ 1, \ldots)$.

Снова будем пытаться представить эволюционный оператор уравнения (3.41) на подпространстве $\mathscr{L}_0$ в виде произведения

$$U(t,\ 0)\, P(0)\, x_0 = Y(t,\ \varepsilon)\, W(t,\ 0,\ \varepsilon)\, P(0)\, x_0.$$

Для оператора $W(t,\ 0,\ \varepsilon)$ составляем уравнение

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} = A(t)\, v + \varepsilon\, (P'(t)\, P(t) + \widetilde{P}'(t)\, \widetilde{P}(t))\, v + \varepsilon S(t,\ \varepsilon)\, v. \tag{3.42}$$

Оператор $S(t,\ \varepsilon)$ будем подбирать так, чтобы эволюционный оператор $W(t,\ s,\ \varepsilon)$ этого уравнения следил за эволюцией подпространств $\mathscr{L}_t$ и $\mathscr{M}_t$. В силу теоремы 3.1 и коммутируемости операторов $A(t)$ и $P(t)$ для этого необходимо и достаточно, чтобы оператор $S(t,\ \varepsilon)$ коммутировал с $P(t)$.

Мы будем считать, что оператор $S(t,\ \varepsilon)$ также разлагается в ряд

$$S(t,\ \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(t)\, \varepsilon^k. \tag{3.43}$$

Для оператора $Y(t,\ \varepsilon)$ теперь получается уравнение

$$\varepsilon \frac{dY}{dt} P = AYP - YAP - \varepsilon YSP - \varepsilon YP'P + \varepsilon BYP. \tag{3.44}$$

Ищем $Y(t,\ \varepsilon)$ в виде разложения

$$Y(t) = P(t) + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(t)\, \varepsilon^k,$$

Подстановка в (3.44) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε приводит к системе уравнений

$$AY_kP - Y_kAP = \frac{d\dot{Y}_{k-1}\dot{P}}{dt}P + \sum_{i=1}^{k-1} Y_iS_{k-i-1}P - \\ - \sum_{i=0}^{k-1} B_{k-i-1}Y_iP + PS_{k-1}P \quad (3.45)$$

$$(Y_0(t) \equiv P(t),\ k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Предположим, что операторы $Y_1, \ldots, Y_{k-1}$ и $S_0, \ldots, S_{k-2}$ уже найдены, причем так, что

$$Y_i = \tilde{P}Y_iP \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1)$$

и

$$S_j = PS_jP \qquad (j = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-2).$$

Будем находить операторы S_{k-1} и Y_k. Для того чтобы Y_k действовал в подпространстве $\mathcal{M}_t$, полагаем

$$S_{k-1} \equiv PS_{k-1}P = -P\frac{dY_{k-1}P}{dt}P + \sum_{i=0}^{k-1} PB_{k-i-1}Y_iP. \quad (3.46)$$

Применяя к (3.45) оператор $\tilde{P}$ и считая при этом

$$Y_k = \tilde{P}Y_kP, \quad (3.47)$$

получаем

$$\tilde{P}AY_k - Y_kAP = \\ = \tilde{P}\frac{dY_{k-1}P}{dt}P + \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{P}Y_iS_{k-i-1}P - \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{P}B_{k-i-1}Y_iP. \quad (3.48)$$

Это уравнение имеет единственное решение, удовлетворяющее условию (3.47) на основании леммы 3.1.

Таким образом, формальный процесс определения операторов S_k и Y_k неограниченно продолжим. Для осуществления N шагов процесса нужно, чтобы оператор $A(t)$ был N раз сильно непрерывно дифференцируем на $\mathcal{D}(A)$, а операторы $B_k(t)$ $(k = 0, \ldots, N-1)$ непрерывно дифференцируемы $N-k-1$ раз. Для того чтобы $Y_N(t)$ имел непрерывную производную, гладкость операторов $A(t)$ и $B_k(t)$ должна быть повышена на единицу. Операторы $S_0(t), \ldots, S_{N-1}(t)$ при этом также будут непрерывно дифференцируемыми. Если теперь в сумме (3.43) оставить члены до $k=N-1$, то для уравнения

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} = A(t)v + \varepsilon(P'(t)P(t) + \widetilde{P}'(t)\widetilde{P}(t))v + \\ + \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} S_k(t)\varepsilon^k v \quad (3.49)$$

задача Коши будет равномерно корректной, если оператор $\frac{1}{\varepsilon}A(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.7 гл. II. Соответствующий эволюционный оператор обозначим через $W_\varepsilon^{(N)}(t, s)$. Этот оператор следит за эволюцией подпространств $\mathscr{L}_t$ и $\mathscr{M}_t$, поэтому при начальных данных из $\mathscr{L}_t$ или $\mathscr{M}_t$ уравнение (3.48) сводится к уравнению в подпространстве. Если теперь при $x_0 \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{L}_0$ построить функцию

$$z_\varepsilon^{(N)}(t) = \left(I + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k Y_k(t)\right) W_\varepsilon^{(N)}(t, 0)x_0,$$

то она будет удовлетворять уравнению (3.41) с точностью до членов порядка ε^{N+1}.

Функция $z_\varepsilon^{(N)}(t)$ не удовлетворяет нужным начальным условиям. Здесь можно применить описанную в предыдущих пунктах процедуру последовательного исправления начальных условий, либо сразу искать решение

$$v_\varepsilon^{(N)}(t) = \left(I + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k Y_k(t)\right) W_\varepsilon^{(N)}(t, 0)x_0(\varepsilon) - \\ - \varepsilon\left(I + \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon^k \widetilde{Y}_k(t)\right) \widetilde{W}_\varepsilon^{(N+1)}(t, 0)u_0(\varepsilon), \quad (3.50)$$

где элементы

$$\left.\begin{aligned} x_0(\varepsilon) &= x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots + \varepsilon^N x_N, \\ u_0(\varepsilon) &= u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots + \varepsilon^{N-1} u_{N-1} \end{aligned}\right\} \quad (3.51)$$

подбираются так, чтобы разность начальных значений

$$v_\varepsilon^{(N)}(0)-x_0=\left(I+\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^k Y_k(0)\right)x_0(\varepsilon)-$$
$$-\varepsilon\left(I+\sum_{k=1}^{N-1}\varepsilon^k \widetilde{Y}_k(0)\right)u_0(\varepsilon)-x_0 \quad (3.52)$$

являлась величиной порядка ε^{N+1}. Легко проверить, что благодаря тому, что операторы $Y_k^{(0)}$ действуют из $\mathscr{L}_0$ в $\mathscr{M}_0$, а операторы $\widetilde{Y}_k(0)$—из $\mathscr{M}_0$ в $\mathscr{L}_0$, элементы $x_1, \ldots, x_N, u_0, \ldots, u_{N-1}$ однозначно определяются. При этом $x_i \in \mathscr{L}_0$ и $u_i \in \mathscr{M}_0$.

Итак, процедура нахождения N-го приближения сводится к следующему: 1) последовательно решаются N уравнений вида (3.48), в результате чего находятся операторы $Y_1, \ldots, Y_N$ и по формулам (3.46) операторы $S_0, \ldots, S_{N-1}$; 2) последовательно решается $N-1$ аналогичное уравнение с заменой $\widetilde{P}$ на P и наоборот, в результате чего находятся операторы $\widetilde{Y}_1, \ldots, \widetilde{Y}_{N-1}$ и $\widetilde{S}_0, \ldots, \widetilde{S}_{N-2}$; 3) находятся элементы $x_0(\varepsilon) \in \mathscr{L}_0$ и $u_0(\varepsilon) \in \mathscr{M}_0$ вида (3.51) путем приравнивания к нулю коэффициентов при степенях ε до N-й в уравнении (3.52); 4) решается уравнение

$$\varepsilon\frac{dv}{dt}=A(t)P(t)v+\varepsilon P'(t)P(t)v+\varepsilon\sum_{k=0}^{N-1}S_k(t)\varepsilon^k v$$

с начальным условием $v(0)=x_0(\varepsilon)$ в подпространстве $\mathscr{L}_0$, а затем уравнение

$$\varepsilon\frac{dv}{dt}=A(t)\widetilde{P}(t)v+\varepsilon\widetilde{P}'(t)\widetilde{P}(t)v+\varepsilon\sum_{k=0}^{N-2}\widetilde{S}_k(t)\varepsilon^k v$$

с начальным условием $v(0)=u_0(\varepsilon)$ в подпространстве $\mathscr{M}_0$; 5 найденные решения $W_\varepsilon^{(N)}(t,\ 0)x_\varepsilon(0)$ и $\widetilde{W}_\varepsilon^{(N)}(t,\ 0)u_\varepsilon(0)$ подставляются в формулу (3.50) для N-го приближения.

Можно поставить задачу о нахождении решения уравнения (3.41) с произвольным начальным данным $x_0 \in \mathscr{D}(A)$.

Тогда $x_0 = Px_0 + \tilde{P}x_0$ и N-е приближение к решению можно записать в виде

$$v_\varepsilon^N(t) = U(t,\ s)\,x_0 =$$
$$= \left(I + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k Y_k(t)\right) W_\varepsilon^{(N)}(t,\ 0)\,Px_0(\varepsilon) +$$
$$+ \left(I + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k \tilde{Y}_k(t)\right) \tilde{W}_\varepsilon^{(N)}(t,\ 0)\,\tilde{P}x_0(\varepsilon),$$

где элемент $x_0(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots + \varepsilon^N x_N$ и подбирается так, чтобы

$$v_\varepsilon^N(0) - x_0 = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k \left[Y_k(0) + \tilde{Y}_k(0)\right] x_0(\varepsilon)$$

была величиной порядка ε^{N+1}.

Описанная процедура асимптотического расщепления уравнения на уравнения в подпространствах легко обобщается на тот случай, когда спектр оператора распадается на сумму изолированных ветвей $\Lambda_0(t)$, $\Lambda_1(t)$, ..., $\Lambda_n(t)$ с соответствующими операторами $P_0(t)$, ..., $P_n(t)$. В этом случае для построения полного решения приходится решать уравнения типа (3.48) и дифференциальные уравнения в подпространствах типа (3.49), отличающиеся тем, что вместо операторов $P(t)$ и $\tilde{P}(t)$ в них фигурируют всевозможные пары операторов $P_i(t)$ и $P_k(t)$ с $i \neq k$.

7. Неоднородное уравнение. В § 1 мы рассмотрели уравнение

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{3.53}$$

и нашли условия, при которых его решение стремится к функции $-A^{-1}(t)\,f(t)$. Используя методы этого параграфа, можно получать асимптотические формулы разного порядка точности для решений уравнения (3.53). Будем искать решение в виде ряда

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k(t). \tag{3.54}$$

Формальная подстановка (3.54) в (3.53) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε дает систему уравнений

$$0 = A(t)\,h_0(t) + f(t)$$

и

$$\frac{dh_{k-1}}{dt} = A(t)\,h_k \qquad (k = 1, \ldots).$$

Предположим, что оператор $A(t)$ имеет ограниченный обратный. Тогда получаем нулевое приближение $x_\varepsilon^{(0)}(t) = h_0(t) = -A^{-1}(t)\,f(t)$, к которому, как уже говорилось, почти равномерно стремятся все решения.

Далее, если оператор $A^{-1}(t)$ и функция $f(t)$ непрерывно дифференцируемы, то можно построить первое приближение: $x_\varepsilon^{(1)}(t) = h_0(t) + \varepsilon h_1(t) =$

$$= -A^{-1}(t)\,f(t) - \varepsilon A^{-1}(t)\,\frac{dA^{-1}(t)\,f(t)}{dt}.$$

Для получения N-го приближения нужно потребовать от оператора $A^{-1}(t)$ и функции $f(t)$ N-кратной непрерывной дифференцируемости. Тогда

$$x_\varepsilon^{(N)}(t) = -\sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \left[A^{-1}(t)\,\frac{d}{dt}\right]^k \left(A^{-1}(t)\,f(t)\right). \qquad (3.55)$$

Для того чтобы эта функция была дифференцируемой, нужно условия гладкости $A^{-1}(t)$ и $f(t)$ повысить еще на единицу. Тогда функция $x_\varepsilon^{(N)}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_\varepsilon^{(N)}}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\,A(t)\,x_\varepsilon^{(N)} + \frac{1}{\varepsilon}\,f(t) -$$

$$- \varepsilon^N \frac{d}{dt}\left[A^{-1}(t)\,\frac{d}{dt}\right]^N \left(A^{-1}(t)\,f(t)\right).$$

Решая это дифференциальное уравнение, получаем

$$x_\varepsilon^{(N)}(t) = U_\varepsilon(t,\ 0)\, x_\varepsilon^{(N)}(0) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t U_\varepsilon(t,\ s) f(s)\, ds -$$

$$- \varepsilon^N \int\limits_0^t U_\varepsilon(t,\ s) \frac{d}{ds}\left[A^{-1}(s)\frac{d}{ds}\right]^N \left(A^{-1}(s) f(s)\right) ds.$$

Сумма первых двух членов справа представляет собой частное решение $\bar{x}_\varepsilon(t)$ уравнения (3.53). Если оператор $A^{-1}(t)$ и функция $f(t)$ непрерывно дифференцируемы $N+1$ раз и выполнено неравенство (1.11), то последний член справа имеет порядок ε^{N+1}. Если воспользоваться тождеством

$$\frac{d}{ds}\left[A^{-1}(s)\frac{d}{ds}\right]^N =$$

$$= -A^{-1}(s)\, A'(s)\left[A^{-1}(s)\frac{d}{ds}\right]^N + A^{-1}(s)\frac{d^2}{ds^2}\left[A^{-1}(s)\frac{d}{ds}\right]^{N-1}$$

и предполагать выполненными неравенства (1.1) и (1.15), то можно прийти к выводу, что

$$\left\| A(t)\, x_\varepsilon^{(N)}(t) - A(t)\, \bar{x}_\varepsilon(t) \right\| = O\left(\varepsilon^{N+1}\right) \tag{3.56}$$

и

$$\left\| \frac{dx_\varepsilon^{(N)}(t)}{dt} - \frac{d\bar{x}_\varepsilon(t)}{dt} \right\| = O(\varepsilon^N). \tag{3.57}$$

Мы доказали следующее утверждение:

Теорема 3.6. *Если оператор* $A^{-1}(t)$ *и функция* $f(t)$ $N+1$ *раз сильно непрерывно дифференцируемы и выполнены условия теоремы* 1.2, *то можно по формуле* (3.55) *построить функцию* $x_\varepsilon^{(N)}(t)$, *отличающуюся от некоторого частного решения* $\bar{x}_\varepsilon(t)$ *уравнения* (3.53) *на величину порядка* ε^{N+1}; *при этом выполнены соотношения* (3.56) *и* (3.57).

Рассмотренная задача становится менее тривиальной в случае, когда оператор $A(t)$ может при некоторых t не иметь ограниченного обратного, который естественно назвать случаем резонанса. Выделим как можно более узкую изолированную часть $\Lambda_1(t)$ спектра оператора $A(t)$, которая содержит точку $\lambda=0$ при тех t, когда оператор $A(t)$ не имеет ограниченного обратного, определенного во всем пространстве. Пусть $P(t)$ — проекционный оператор, отвечающий ветви $\Lambda_1(t)$. Применим снова метод расщепления уравнения. Будем искать решение $x(t)$ уравнения (3.53) в виде

$$x(t)=Y(t)v(t)+h(t,\ \varepsilon), \tag{3.58}$$

где $v(t)$ является решением уравнения

$$\varepsilon\frac{dv}{dt}=A(t)P(t)v+\varepsilon P'(t)P(t)v+\varepsilon S(t,\ \varepsilon)v+g(t,\ \varepsilon),$$

принимающим значения $v(t)\in\mathscr{L}_t$, $S(t,\varepsilon)$ — оператор, коммутирующий с $P(t)$, $g(t,\ \varepsilon)$ — функция со значениями в $\mathscr{L}_t$:

$$P(t)g(t,\ \varepsilon)=g(t,\ \varepsilon).$$

Подставляя (3.58) в уравнение (3.53) и приравнивая отдельно члены, содержащие v, и свободные члены, получаем два уравнения:

$$\varepsilon\frac{dY}{dt}P+Y(A+\varepsilon P'P+\varepsilon S)P=AYP \tag{3.59}$$

и

$$\varepsilon\frac{dh}{dt}+Yg=Ah+f. \tag{3.60}$$

Уравнение вида (3.59) было детально изучено в предыдущих пунктах. Разлагая функции Y и S в ряды, мы можем при достаточной гладкости $A(t)$ и $f(t)$ находить их решения с точностью до любых степеней ε. Если оператор Y найден, то из (3.60) будем находить функции g и h, предполагая их снова разложенными в ряды по степеням ε:

$$h(t,\ \varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}h_k(t)\varepsilon^k \quad\text{и}\quad g(t,\ \varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}g_k(t)\varepsilon^k.$$

Начнем с нулевого приближения. Напомним, что $Y_0(t)\equiv\equiv P(t)$. Приравнивая в (3.60) свободные от ε члены, имеем

$$P(t)g_0(t)=A(t)h_0(t)+f(t). \tag{3.61}$$

Будем считать, что $Ph_0(t)\equiv 0$. Тогда, применяя к (3.61) оператор $P(t)$, получаем

$$g_0(t)=P(t)g_0(t)=P(t)f(t).$$

В инвариантном подпространстве $\mathcal{M}_t$ спектр оператора $A(t)$ не содержит точки $\lambda = 0$. Обозначим через $\tilde{A}^{-1}(t)$ обратный оператор к $A(t)$ в подпространстве $\mathcal{M}_t$. Применим теперь к (3.61) оператор $\tilde{P}(t)$. Тогда

$$0 = A(t)\tilde{P}(t)h_0(t) + \tilde{P}(t)f(t),$$

откуда

$$h_0(t) = \tilde{P}(t)h_0(t) = -\tilde{A}^{-1}(t)\tilde{P}(t)f(t).$$

Итак, для получения нулевого приближения к решению уравнения (3.53) нужно решить уравнение

$$\varepsilon\frac{dv}{dt} = A(t)P(t)v + \varepsilon P'(t)P(t)v + P(t)f(t) \tag{3.62}$$

при каком-нибудь начальном условии из $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{L}_0$ и составить функцию

$$x_\varepsilon^{(0)}(t) = v(t) - \tilde{A}^{-1}(t)\tilde{P}(t)f(t).$$

Функция $x_\varepsilon^{(0)}(t)$ удовлетворяет уравнению, отличающемуся от (3.53) членами порядка ε. Если мы решим это дифференциальное уравнение относительно $x_\varepsilon^{(0)}(t)$, то придем к соотношению

$$x_\varepsilon^{(0)}(t) = \bar{x}_\varepsilon(t) + \int_0^t U_\varepsilon(t, s)P'(s)P(s)v(s)\,ds + {}$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t U_\varepsilon(t, s)\varphi(s)\,ds, \tag{3.63}$$

где $\bar{x}_\varepsilon(t)$ — некоторое частное решение уравнения (3.53), а $\varphi(s)$ — известная функция, которая при гладких $A(t)$ и $f(t)$ будет непрерывной. Поскольку мы допустили, что у оператора $A(t)$ точка нуль может принадлежать спектру, то, вообще говоря, предположение о том, что для оператора $U_\varepsilon(t, s)$ выполнена оценка (1.11), не является естественным (хотя такие случаи и могут быть). Более естественным является условие (3.31). Заметим еще, что переходом от уравнения (3.62) к интегральному уравнению можно показать, что функция $v(t)$ равномерно по ε ограничена при условии (1.11), и порядка $1/\varepsilon$ при условии (3.31). Таким образом интегральные члены в (3.63) будут ограниченными, если выполнено (1.11), и порядка $1/\varepsilon$, если справедливо лишь (3.31). Это говорит о том, что при наличии резонанса нулевое приближение никак не отражает поведения решений уравнения (3.53).

Перейдем к построению первого приближения. Согласно изложенному в п. 4, оператор $Y_1(t)$ находится из (3.28). Для нахождения функций $h_1(t)$ и $g_1(t)$ приравняем члены первого порядка малости в уравнении (3.60). Получим

$$\frac{dh_0}{dt} + P(t)\,g_1(t) + Y_1(t)\,g_0(t) = Ah_1(t). \tag{3.64}$$

Потребуем, чтобы $Ph_1(t) \equiv 0$. В силу того, что $PY_1(t) \equiv 0$, для этого достаточно, чтобы

$$g_1(t) = P(t)\,g_1(t) = -P(t)\,\frac{dh_0}{dt}.$$

После того как $g_1(t)$ так выбрана, из уравнения (3.64) можно найти $h_1(t)$:

$$h_1(t) = \tilde{A}^{-1}\tilde{P}(t)\,\frac{dh_0}{dt} + \tilde{A}^{-1}Y_1(t)\,P(t)\,f(t).$$

Первым приближением к решению уравнения (3.53) будет функция

$$x_\varepsilon^{(1)}(t) = (I + \varepsilon Y_1(t))\,w^{(1)}(t) + h_0(t) + \varepsilon h_1(t),$$

где функция $w^{(1)}(t)$ является решением уравнения

$$\varepsilon\frac{dw}{dt} = A(t)\,P(t)\,w + \varepsilon P'(t)\,P(t)\,w + P(t)\,f(t) + \varepsilon g_1(t)$$

с начальным условием из $\mathscr{D}(A) \cap \mathscr{L}_0$.

Простой подсчет показывает, что для первого приближения справедливо соотношение

$$x_\varepsilon^{(1)}(t) = \bar{x}_\varepsilon(t) + \varepsilon\int_0^t U_\varepsilon(t, s)\left[\frac{d(Y_1P)}{ds}\,w^{(1)}(s) + \right.$$
$$\left. + Y_1(s)\,g_1(s) + \frac{dh_1(s)}{ds}\right]ds,$$

где $\bar{x}_\varepsilon(t)$ — некоторое частное решение уравнения (3.53). Здесь при условии (1.11) можно гарантировать равномерную сходимость к нулю с порядком ε разности $x_\varepsilon^{(1)}(t) - \bar{x}_\varepsilon(t)$. При условии (3.31) удается показать лишь ее ограниченность.

Приведем формулы для второго приближения. Оператор $Y_2(t)$ находится из (3.39). Далее,

$$g_2(t) = P(t)\,g_2(t) = -P(t)\frac{dh_1}{dt},$$

$$h_2(t) = \tilde{P}(t)\,h_2(t) = \tilde{A}^{-1}\tilde{P}(t)\frac{dh_1}{dt} + \\ + \tilde{A}^{-1}Y_2(t)\,P(t)\,f(t) + \tilde{A}^{-1}Y_1(t)\,g_1(t).$$

Наконец,

$$x_\varepsilon^{(2)}(t) = (I + \varepsilon Y_1(t) + \varepsilon^2 Y_2(t))\,w^{(2)}(t) + \\ + h_0(t) + \varepsilon h_1(t) + \varepsilon^2 h_2(t), \quad (3.65)$$

где функция $w^{(2)}(t)$ является решением уравнения

$$\varepsilon\frac{dw}{dt} = A(t)\,P(t)\,w + \varepsilon P'(t)\,P(t)\,w + \\ + \varepsilon^2 S_1(t)\,w + P(t)\,f(t) + \varepsilon g_1(t) + \varepsilon^2 g_2(t) \quad (3.66)$$

с начальным условием из $\mathscr{D}(A) \cap \mathscr{L}_0$, а оператор $S_1(t)$ определен формулой (3.37).

Рассуждения, аналогичные проведенным выше, позволяют теперь получить оценку

$$\|x_\varepsilon^{(2)}(t) - \bar{x}_\varepsilon(t)\| \leqslant C\varepsilon$$

и в случае выполнения условия (3.31).

Теорема 3.7. *Если оператор* $A(t)$ *трижды непрерывно дифференцируем на* $\mathscr{D}(A)$ *и функция* $f(t)$ *трижды непрерывно дифференцируема, то и в случае резонанса можно построить по формуле* (3.65) *функцию, отличающуюся при условии* (3.31) *от некоторого частного решения уравнения* (3.53) *на величину порядка* ε *равномерно на* $[0, T]$. *Для ее построения нужно решить операторные уравнения* (3.28) *и* (3.39) *и дифференциальное уравнение* (3.66) *в инвариантном подпространстве оператора* $A(t)$, *в котором его спектр может содержать точку* $\lambda = 0$.

Читателя может удивить то, что рассматриваемый нами случай назван случаем резонанса, который обычно связывается с наличием колеблющихся членов в уравнении. Этот вопрос станет более ясным, если рассмотреть уравнение

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A_1(t)\, y + f(t)\, e^{\frac{1}{\varepsilon} Q(t)}, \tag{3.67}$$

где $Q(t)$ — достаточно гладкая скалярная функция.

Замена $y(t) = e^{\frac{1}{\varepsilon} Q(t)} x(t)$ приводит это уравнение к виду (3.53) с оператором

$$A(t) = A_1(t) - \nu(t) I,$$

где $\nu(t) = \frac{dQ}{dt}$.

Функция $\nu(t)$ играет роль частоты колебаний, и мы видим, что в случае, когда значения частоты $\nu(t)$ попадают в спектр оператора $A_1(t)$, оператор $A(t)$ не будет иметь ограниченного обратного, определенного на всем пространстве E.

Формула $y_\varepsilon^{(2)}(t) = x_\varepsilon^{(2)}(t)\, e^{\frac{1}{\varepsilon} Q(t)}$ позволяет построить приближение к частному решению $\bar{y}_\varepsilon(t)$ уравнения (3.67). При условии $\operatorname{Re} Q(t) \leqslant 0$ можно доказать равномерную сходимость $\bar{y}_\varepsilon(t) - y_\varepsilon^{(2)}(t)$ к нулю.

ГЛАВА V

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

§ 1. Фактор-метод решения операторных уравнений

1. Фактор-пространство. Мы здесь напомним ряд известных фактов, связанных с понятием фактор-пространства. Пусть E_1 — подпространство банахова пространства E. Для любого элемента $u \in E$ множество всех элементов вида $u + x$, где $x \in E_1$, называется *классом смежности* $\bar{u}$ элемента u по подпространству E_1. Совокупность всех классов смежности, в которой естественным образом вводятся операции сложения и умножения на скаляр, является линейным пространством и называется *фактор-пространством* E/E_1 пространства E по подпространству E_1.

Фактор-пространство E/E_1 можно нормировать, положив

$$\|\bar{u}\|_{E/E_1} = \inf_{v \in \bar{u}} \|v\|. \tag{1.1}$$

В этой норме пространство E/E_1 является банаховым (см., например, [4]). В дальнейшем мы будем рассматривать в пространстве E/E_1 и другие нормы. В отличие от них, норму (1.1) будем называть *естественной*.

Соответствие $u \to \bar{u}$ является гомоморфизмом E на E/E_1, ядром которого является E_1. Этот гомоморфизм будем обозначать через φ_1: $\varphi_1 u = \bar{u}$. В естественной норме линейный оператор φ_1 имеет норму, равную 1. В дальнейшем предполагается, что при введенной в E/E_1 норме гомоморфизм E на E/E_1 непрерывен.

2. Последовательности фактор-пространств, фактор-сходимость. Пусть теперь в пространстве E выделена последовательность подпространств E_n. Построим фактор-пространства E/E_n и соответствующие им гомоморфизмы φ_n и нормы $\| \ \|_{E/E_n}$.

Если нормы в фактор-пространствах обладают тем свойством, что для каждого элемента $v \in E$

$$\sup_n \|\varphi_n v\|_{E/E_n} < \infty, \tag{1.2}$$

то в силу принципа равномерной ограниченности, примененного к функционалам $\|\varphi_n v\|_{E/E_n}$, существует такая константа c, что

$$\|\varphi_n v\|_{E/E_n} \leqslant c \|v\|_E. \tag{1.3}$$

В частности, соотношение (1.2), а значит, и (1.3), будут выполненными, если

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n v\|_{E/E_n} = \|v\|_E. \tag{1.4}$$

Определение 1.1. Пусть дана последовательность $\{\bar{u}_n\}$ такая, что $\bar{u}_n \in E/E_n$. Будем говорить, что последовательность $\bar{u}_n$ *фактор-сходится* к элементу u из E, если

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n u - \bar{u}_n\|_{E/E_n} = 0. \tag{1.5}$$

Конечно, при произвольном выборе подпространств E_n и норм в фактор-пространствах E/E_n понятие фактор-сходимости может не соответствовать никакому естественному понятию близости элементов u и $\bar{u}_n$. В связи с этим в дальнейшем на этот выбор налагается ряд ограничений.

Лемма 1.1. *Пусть выполнено либо условие* (1.4), *либо условие*: $E_{n+1} \subset E_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{0\}$ *и нормы в фактор-пространствах* E/E_n — *естественные. Тогда последовательность* $\bar{u}_n$ *не может фактор-сходиться к двум различным пределам.*

Доказательство. Пусть u и u' из E таковы, что

$$\|\varphi_n u - \bar{u}_n\|_{E/E_n} \to 0 \quad \text{и} \quad \|\varphi_n u' - \bar{u}_n\|_{E/E_n} \to 0.$$

Тогда

$$\|\varphi_n (u - u')\|_{E/E_n} \leqslant \|\varphi_n u - \bar{u}_n\|_{E/E_n} + \|\bar{u}_n - \varphi_n u'\|_{E/E_n} \to 0.$$

Если выполнено (1.4), то отсюда сразу вытекает, что $u=u'$. Если $E_{n+1}\subset E_n$ и норма в E/E_n естественна, то последовательность $\|\varphi_n(u-u')\|_{E/E_n}$ не убывает, следовательно,

$$\|\varphi_n(u-u')\|_{E/E_n}=0 \text{ при всех } n=1,\ 2,\ldots$$

Это означает, что $u-u'\in E_n$ $(n=1,\ 2,\ldots)$ и, так как $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n=\{0\}$, $\quad u=u'$.

Лемма доказана.

Связь между приближениями к элементу в смысле фактор-сходимости и в обычном смысле устанавливается следующим утверждением:

Лемма 1.2. *Пусть в фактор-пространствах введена естественная норма и последовательность $\bar{u}_n$ фактор-сходится к элементу $u\in E$. Тогда из каждого класса $\bar{u}_n$ можно выбрать по представителю $u_n\in E$ так, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|_E=0. \tag{1.6}$$

Доказательство. Пусть w — произвольный представитель класса $\bar{u}_n$. Если w пробегает весь класс $\bar{u}_n$, то разность $u-w$ пробегает весь класс $\varphi_n u-\bar{u}_n$. В силу естественности нормы в E/E_n отсюда вытекает, что найдется такой элемент $w=u_n\in\bar{u}_n$, что

$$\|u-u_n\|_E\leqslant\|\varphi_n(u-u_n)\|_{E/E_n}+\frac{1}{n}=\|\varphi_n u-\bar{u}_n\|_{E/E_n}+\frac{1}{n}. \tag{1.7}$$

Из (1.7) и (1.5) вытекает (1.6).

Лемма доказана.

3. Видоизменение принципа равномерной ограниченности. В дальнейшем основную роль играет следующее простое видоизменение принципа ограниченности.

Принцип равномерной фактор-ограниченности. *Пусть в пространстве E/E_n $(n=1,\ 2,\ldots)$ введена естественная норма и определен непрерывный* *функционал* $\Phi_n(\bar{u})$, *обладающий свойствами*

$$|\Phi_n(\alpha\bar{u})| = |\alpha\Phi_n(\bar{u})| \qquad (\alpha > 0)$$

и

$$|\Phi_n(\bar{u}+\bar{v})| \leqslant |\Phi_n(\bar{u})| + |\Phi_n(\bar{v})|.$$

Если для каждого $u \in E$

$$\sup_n |\Phi_n(\varphi_n u)| < \infty,$$

то существует такая константа k, *что*

$$|\Phi_n(\bar{u})| \leqslant k \|\bar{u}\|_{E/E_n}. \tag{1.8}$$

Доказательство. Функционалы $\Phi_n(\varphi_n u)$ в силу линейности и непрерывности гомоморфизма φ_n удовлетворяют на пространстве E условиям принципа равномерной ограниченности, поэтому существует константа k такая что

$$|\Phi_n(\bar{u})| = |\Phi_n(\varphi_n u)| \leqslant k \|u\|_E.$$

Беря справа infimum по всем представителям класса $\bar{u}$, получаем (1.8).

Утверждение доказано.

Из принципа равномерной фактор-ограниченности, как обычно, выводится ряд следствий об операторах, определенных на фактор-пространствах E/E_n.

Теорема 1.1. *Пусть в пространстве* E/E_n $(n=1, 2, \ldots)$ *введена естественная норма и определен линейный ограниченный оператор* A_n, *отображающий пространство* E/E_n *в банахово пространство* E'_n. *Если на каждом элементе* $u \in E$

$$\sup_n \|A_n \varphi_n u\| < \infty,$$

то нормы операторов A_n *равномерно ограничены*

$$\|A_n\|_{E/E_n \to E'_n} \leqslant k.$$

Доказательство непосредственно следует из принципа равномерной фактор-ограниченности, примененного к функционалам

$$\Phi_n(\bar{u}) = \|A_n \bar{u}\|_{E'_n}.$$

Пусть теперь F — другое банахово пространство, F_n — семейство его подпространств, F/F_n — фактор-пространства, ψ_n — соответствующие гомоморфизмы. Предположим, что операторы A_n являются ограниченными операторами, действующими из E/E_n в F/F_n.

Определение 1.2. Последовательность операторов A_n *фактор-сходится*, если для любого $v \in E$ последовательность $A_n\varphi_n v$ фактор-сходится к некоторому элементу из F.

Теорема 1.2. *Пусть нормы в пространствах E/E_n естественные, а в пространствах F/F_n удовлетворяют условию*

$$\|\psi_n g\|_{F/F_n} \leqslant c\|g\|_F. \tag{1.9}$$

Если ограниченные линейные операторы A_n, действующие из E/E_n в F/F_n, фактор-сходятся, то их нормы равномерно ограничены.

Доказательство. Пусть v — произвольный элемент из E и g — тот элемент из F, к которому фактор-сходится последовательность $A_n\varphi_n v$. Тогда

$$\|A_n\varphi_n v - \psi_n g\|_{F/F_n} \to 0.$$

Отсюда следует, что

$$\|A_n\varphi_n v\|_{F/F_n} \leqslant \|A_n\varphi_n v - \psi_n g\|_{F/F_n} + \|\psi_n g\|_{F/F_n} \leqslant$$
$$\leqslant \|A_n\varphi_n v - \psi_n g\|_{F/F_n} + C\|g\|_F < \infty.$$

Из теоремы 1.1 вытекает, что

$$\|A_n\|_{E/E_n \to F/F_n} \leqslant k.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.3. *Если нормы в пространствах F/F_n удовлетворяют условию*

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n g\|_{F/F_n} = \|g\|_F \quad (g \in F), \tag{1.10}$$

то фактор-сходящаяся последовательность операторов A_n определяет в пределе ограниченный линейный оператор, действующий из E в F.

Доказательство. Для любого v из E обозначим через $g = Av$ элемент из F, к которому фактор-сходится последовательность элементов $A_n\varphi_n v$. Этот элемент однозначно определен в силу условия (1.10) и леммы 1.1. Очевидно, что так определенный оператор A — линеен. Покажем его ограниченность. При доказательстве предыдущей теоремы было показано, что функционалы $\|A_n\varphi_n v\|_{F/F_n}$ равномерно ограничены на каждом элементе $v \in E$. Из обычного принципа равномерной ограниченности тогда вытекает, что

$$\|A_n\varphi_n v\|_{F/F_n} \leqslant C\|v\|_E,$$

где C не зависит от n и v.

Далее, из определения элемента Av следует, что

$$\|A_n\varphi_n v - \psi_n Av\|_{F/F_n} \to 0,$$

и значит, в силу (1.10)

$$\|Av\|_F = \lim_{n\to\infty}\|\psi_n Av\|_{F/F_n} = \lim_{n\to\infty}\|A_n\varphi_n v\|_{F/F_n} \leqslant C\|v\|_E.$$

Теорема доказана.

4. Основные понятия фактор-метода. Рассмотрим уравнение

$$Tu = f, \tag{1.11}$$

где T — линейный оператор, определенный на линейном множестве $\mathscr{D}(T)$ банахова пространства E, действующий в банахово пространство F. Пусть в E и F выделены последовательности подпространств E_n и F_n, построены фактор-пространства E/E_n и F/F_n и гомоморфизмы φ_n и ψ_n. На линейном подмножестве пространства E/E_n, содержащем образ области определения $\mathscr{D}(T)$ оператора T, определяется оператор T_n, аппроксимирующий в каком-то смысле оператор T, и рассматривается приближенное уравнение

$$T_n\bar{u}_n = \psi_n f. \tag{1.12}$$

Решение $\bar{u}_n \in E/E_n$ уравнения (1.12) считается приближением к решению уравнения (1.11). Заметим, что это приближение лежит не в том пространстве, где ищется само решение.

Переход от уравнения (1.11) к уравнению (1.12) и будем называть *фактор-методом* приближенного решения уравнения (1.11).

Основными характеристиками фактор-метода служат свойства аппроксимации и устойчивости.

Определение 1.3. Говорят, что операторы T_n *аппроксимируют* оператор T на элементе $v \in \mathscr{D}(T)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n T v - T_n \varphi_n v\|_{F/F_n} = 0, \tag{A}$$

т. е. если $T_n\varphi_n v$ фактор-сходится к Tv.

Определение 1.4. Фактор-метод называется *устойчивым*, если для всех n, начиная с некоторого номера n_0, существуют ограниченные обратные операторы T_n^{-1}, определенные на пространствах F/F_n, и такие, что

$$\|T_n^{-1}\|_{F/F_n \to E/E_n} \leqslant k \qquad (n \geqslant n_0), \tag{У}$$

где константа k не зависит от n.

5. Сходимость и устойчивость фактор-метода. Основным является следующее простое утверждение:

Теорема. 1.4. *Пусть u — решение уравнения* (1.11). *Если операторы T_n аппроксимируют оператор T на решении u, и выполнено условие устойчивости* (У), *то приближенные решения $\bar{u}_n$ фактор-сходятся к точному решению u.*

Доказательство. Из условия устойчивости при $n \geqslant n_0$ имеем

$$\|\varphi_n u - \bar{u}_n\|_{E/E_n} = \|T_n^{-1}T_n\varphi_n u - T_n^{-1}\psi_n f\|_{E/E_n} =$$
$$= \|T_n^{-1}(T_n\varphi_n u - \psi_n T u)\|_{E/E_n} \leqslant k\|T_n\varphi_n u - \psi_n T u\|_{F/F_n}. \tag{1.13}$$

Из условия аппроксимации следует, что правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$.

Теорема доказана.

Из неравенства (1.13) вытекает также, что порядок сходимости приближений к решению совпадает с порядком аппроксимации T операторами T_n на решении u.

Для сходимости к нулю левой части в неравенстве (1.13) не является необходимой равномерная ограниченность норм $\|T_n^{-1}\|$. Они могут, вообще говоря, расти с увеличением n, но так, чтобы порядок их роста был меньше порядка аппроксимации. В связи с этим интересным является вопрос о том, насколько необходимым является условие устойчивости для сходимости. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 1.5. *Пусть в F/F_n введена естественная норма, а норма в E/E_n удовлетворяет условию* (1.3).

Если при всех $n \geqslant n_0$ существуют ограниченные обратные операторы T_n^{-1} и для любого $f \in F$ приближенные решения $T_n^{-1}\psi_n f$ фактор-сходятся, то фактор-метод устойчив.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1.2, если за операторы A_n принять операторы T_n^{-1}, а пространства E и F поменять ролями.

Пусть G — подпространство пространства F. Предположим, что фактор-сходимость приближенных решений $T_n^{-1}\psi_n g$ имеет место не для всех элементов из F, а лишь для элементов g из подпространства G. Посмотрим, как нужно видоизменить теорему 1.5 в этом случае.

Обозначим $G_n = G \cap F_n$ и образуем фактор-пространство G/G_n. Очевидно, это фактор-пространство алгебраически изоморфно образу $\psi_n G$ подпространства G. Для естественных норм в G/G_n и $\psi_n G$ имеет место соотношение

$$\|\bar{g}\|_{G/G_n} = \inf_{h \in G_n} \|g + h\|_F \geqslant \inf_{h \in F_n} \|g + h\|_F = \|\psi_n g\|_{F/F_n}. \tag{1.14}$$

Если обозначить через $\hat{T}_n^{-1}$ сужение оператора T_n^{-1} на $\psi_n G$, то $\{\hat{T}_n^{-1}\}$ $(n \geqslant n_0)$ можно рассматривать как семейство операторов, заданных на G/G_n и действующих в E/E_n. Из неравенства (1.14) следует, что каждый из этих операторов ограничен и, следовательно, для них выполнены условия теоремы 1.5. Мы приходим к следующему утверждению:

Следствие 1.1. *Если в условиях теоремы* 1.5 *приближенные решения $T_n^{-1}\varphi_n g$ фактор-сходятся при всех g из подпространства G, то существует константа k_1 такая, что*

$$\|\hat{T}_n^{-1}\|_{G/G_n \to E/E_n} \leqslant k_1, \tag{1.15}$$

где $G_n = G \cap F_n$, оператор $\hat{T}_n^{-1}$ — сужéние оператора T_n^{-1} на $\psi_n G = G/G_n$, норма в G/G_n — естественная.

Из неравенства (1.14) видно, что, как и следовало ожидать, условие (1.15) слабее требования (У) устойчивости фактор-метода.

6. Сходимость фактор-метода и разрешимость уравнения (1.11). Фактор-метод может служить и средством доказательства существования решений уравнения (1.11).

Теорема 1.6. *Пусть норма в* E/E_n — *естественна, а в* F/F_n *удовлетворяет условию* (1.10). *Если оператор* T *определен на всем пространстве* E, *операторы* T_n *ограничены и аппроксимируют* T *на любом элементе* $v \in E$, *то из фактор-сходимости приближенных решений* $\overline{u}_n$ *к элементу* $u \in E$ *следует, что и является решением уравнения* (1.11).

Доказательство. Из условий аппроксимации следует, что операторы T_n фактор-сходятся к оператору T. Как указывалось в п. 2, из соотношения (1.10) вытекает соотношение (1.9) и в силу теоремы 1.2

$$\| T_n \|_{E/E_n \to F/F_n} \leqslant k. \tag{1.16}$$

Тогда из (1.12) и (1.16) получаем

$$\| \psi_n (Tu - f) \|_{F/F_n} \leqslant \| \psi_n Tu - T_n \varphi_n u \|_{F/F_n} + \| T_n \varphi_n u - \\ - \psi_n f \|_{F/F_n} \leqslant \| \psi_n Tu - T_n \varphi_n u \|_{F/F_n} + k \| \varphi_n u - \overline{u}_n \|_{E/E_n}.$$

Первое слагаемое стремится к нулю в силу условия аппроксимации, второе — по условию сходимости приближенных решений. Значит,

$$\| Tu - f \|_F = \lim_{n \to \infty} \| \psi_n (Tu - f) \|_{F/F_n} = 0,$$

т. е.

$$Tu = f.$$

Теорема доказана.

§ 2. Конечно-разностный фактор-метод для эволюционных уравнений

1. Описание метода. В банаховом пространстве E рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x + f(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{2.1}$$

где $A(t)$ — замкнутый линейный оператор с плотной в E и не зависящей от t областью определения $\mathscr{D}(A)$, сильно непрерывный на $\mathscr{D}(A)$ и имеющий ограниченный обратный $A^{-1}(t)$. Функция $f(t)$ предполагается непрерывной.

Если в качестве модели уравнения (2.1) иметь в виду уравнение в частных производных, то процесс составления разностной схемы для приближенного решения этого уравнения можно разбить на два этапа: 1) замена дифференциального оператора $A(t)$, связанного с пространственными координатами, конечно-разностным выражением; 2) замена производной по времени t разностным отношением. В нашей абстрактной схеме будут предусмотрены эти два этапа.

Разделим отрезок $[0, T]$ на n равных частей длины $\Delta_n t = T/n$ точками $t_k = k\Delta_n t$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ (вообще говоря, нужно писать $t_k^{(n)}$, но мы опускаем (n) для сокращения записи). Будем приближенно находить значения решения $x(t)$ в точках t_k: $x(t_k)$. Производную в точке t_k заменим простейшим разностным отношением $\dfrac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{\Delta_n t}$.

В пространстве E выделим подпространство $\mathscr{L}_n$, образуем фактор-пространство $E/\mathscr{L}_n$ и заменим оператор $A(t_i)$ приближенно ограниченными операторами $A_n(t_i)$, действующими в фактор-пространстве $E/\mathscr{L}_n$. Вместо уравнения (2.1) рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\overline{x}_{i+1}^{(n)} - \overline{x}_i^{(n)}}{\Delta_n t} = A_n(t_i)\,\overline{x}_i^{(n)} + \overline{f}_i^{(n)} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{2.2}$$

где $\overline{f}_i^{(n)} = \varphi_n f(t_i)$, φ_n — естественный гомоморфизм E на $E/\mathscr{L}_n$.

Решением этой системы будет набор из $n+1$ элемента $\left\{\overline{x}_0^{(n)}, \ldots, \overline{x}_n^{(n)}\right\}$ пространства $E/\mathscr{L}_n$.

Задачу Коши об отыскании решения уравнения (2.1), удовлетворяющего начальному условию

$$x(0) = x_0 \in \mathscr{D}(A), \tag{2.3}$$

заменим задачей о решении системы (2.2) при условии

$$\overline{x}_0^{(n)} = \varphi_n x_0. \tag{2.4}$$

Найдя решение задачи (2.2) — (2.4), будем считать, что

$$\varphi_n x(t_k) \approx \overline{x}_k^{(n)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Определение 2.1. Будем говорить, что приближенные решения $\bar{x}_k^{(n)}$ сходятся к функции $x(t)$, если

$$\max_{k=0,\,1,\,\ldots,\,n} \left\| \varphi_n x(t_k) - \bar{x}_k^{(n)} \right\|_{E/\mathscr{L}_n} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Введем в рассмотрение пространство $C(E)$ непрерывных функций со значениями в E, наделенное обычной нормой

$$\| x \|_{C(E)} = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \| x(t) \|_E,$$

и пространство $F(E) = E \times C(E)$ с нормой

$$\| (x_0, f(t)) \|_{F(E)} = \max \left\{ \| x_0 \|_E, \; \| f \|_{C(E)} \right\}.$$

Через $\mathscr{D}(T)$ обозначим множество всех функций $x(t)$ из $C(E)$, непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$ и таких, что функции $A(t)\,x(t)$ определены и непрерывны на $[0, T]$. Каждая функция из $\mathscr{D}(T)$ является решением задачи (2.1)—(2.3) при некоторых $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ и $f \in C(E)$. На $\mathscr{D}(T)$ определим оператор T формулой

$$Tx = \left\{ x(0), \; \frac{dx}{dt} - A(t)\,x \right\}.$$

Линейный оператор T будет действовать из $\mathscr{D}(T)$ в пространство $F(E)$.

Рассмотрим теперь оператор, порожденный задачей (2.2)—(2.4). В множестве всех наборов $\hat{u} = \{\bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_n\}$ из $n+1$ элемента из $E/\mathscr{L}_n$ вводится норма

$$\| \hat{u} \| = \max_{i=0,\,\ldots,\,n} \| \bar{u}_i \|_{E/\mathscr{L}_n}.$$

В нем определяется оператор T_n формулой

$$T_n \hat{u} = \left\{ \bar{u}_0, \; \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_0}{\Delta_n t} - A_n(t_0)\,u_0, \; \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \; \frac{\bar{u}_n - \bar{u}_{n-1}}{\Delta_n t} - A_n(t_{n-1})\,u_{n-1} \right\}. \qquad (2.5)$$

Найдем обратный оператор T_n^{-1}. Имеем

$$T_n \hat{u} = \hat{f} \equiv \{ \bar{g}_0, \; \bar{f}_0, \; \ldots, \; \bar{f}_{n-1} \}.$$

Отсюда

$$\bar{u}_0=\bar{g}_0, \quad \frac{\bar{u}_{k+1}-\bar{u}_k}{\Delta_n t}=A_n(t_k)\bar{u}_k+\bar{f}_k \qquad (k=0, \ldots, n-1).$$

Решая относительно $\bar{u}_{k+1}$, получаем

$$\bar{u}_{k+1}=(I+\Delta_n t A_n(t_k))\bar{u}_k+\Delta_n t\bar{f}_k, \tag{2.6}$$

или, окончательно,

$$(T_n^{-1}\hat{f})_i=\bar{u}_i=\prod_{j=0}^{i-1}(I+\Delta_n t A_n(t_j))\bar{u}_0+$$
$$+\Delta_n t\sum_{k=0}^{i-2}\left[\prod_{j=k+1}^{i-1}(I+\Delta_n t A_n(t_j))\right]\bar{f}_k+\Delta_n t\bar{f}_{i-1}. \tag{2.7}$$

В силу ограниченности операторов $A_n(t_j)$ оператор T_n^{-1} будет ограниченным.

Описанным фактам мы сейчас дадим другое истолкование. Через $C_n(E)$ обозначим совокупность всех тех функций $u(t)$ из $C(E)$, для которых $u(t_k)\in\mathscr{L}_n$ при всех $k=0, 1, \ldots, n$. Из замкнутости $\mathscr{L}_n$ и вида нормы в $C(E)$ следует, что $C_n(E)$ — подпространство пространства $C(E)$. Заметим, что две функции $u(t)$ и $v(t)$ из $C(E)$ попадут в один класс смежности по $C_n(E)$ тогда и только тогда, когда при всех $k=0, 1, \ldots, n$ имеет место равенство

$$\varphi_n u(t_k)=\varphi_n v(t_k).$$

Отсюда следует, что каждому классу смежности пространства $C(E)$ по $C_n(E)$ отвечает набор $\{\varphi_n u(0), \varphi_n u(\Delta_n t), \ldots \ldots, \varphi_n u(T)\}$ из $n+1$ элемента из $E/\mathscr{L}_n$. Нетрудно проверить, что если в фактор-пространствах $E/\mathscr{L}_n$ введена естественная норма, то естественная норма в фактор-пространствах $C(E)/C_n(E)$ будет вычисляться по формуле

$$\|\Phi_n u\|_{C(E)/C_n(E)}=\max_{i=0, 1, \ldots, n}\|\varphi_n u(t_i)\|_{E/\mathscr{L}_n}, \tag{2.8}$$

где Φ_n — естественный гомоморфизм $C(E)$ на $C(E)/C_n(E)$.

Фактор-пространства $C(E)/C_n(E)$ и $E/\mathscr{L}_n$ можно рассматривать как нормированные пространства и относительно других норм, однако мы всегда будем предполагать, что нормы согласованы равенством (2.8). Таким образом, фактор-пространство $C(E)/C_n(E)$ можно рассматривать как совокупность наборов из $n+1$ элемента пространства $E/\mathscr{L}_n$ с нормой, равной максимуму норм компонент.

В пространстве $F(E)$ можно выделить подпространство $F_n(E)$, состоящее из пар $(v,\ u(t))$ таких, что $v \in \mathscr{L}_n$ и $u(t_k) \in \mathscr{L}_n$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.

Фактор-пространство $F(E)/F_n(E)$ также изоморфно пространству всех наборов из $n+1$ элемента пространства $E/\mathscr{L}_n$. Норму в $F(E)/F_n(E)$ введем по формуле, аналогичной (2.8):

$$\|\Psi_n(v,\ u)\|_{F(E)/F_n(E)} =$$
$$= \max\left\{\|\varphi_n v\|_{E/\mathscr{L}_n},\ \|\varphi_n u(0)\|_{E/\mathscr{L}_n},\ \ldots,\ \|\varphi_n u(t_{n-1})\|_{E/\mathscr{L}_n}\right\},$$

где Ψ_n — естественный гомоморфизм $F(E)$ на $F(E)/F_n(E)$.

Оператор T_n, определенный формулой (2.5), будем теперь рассматривать как ограниченный оператор, действующий из $C(E)/C_n(E)$ в $F(E)/F_n(E)$. Он имеет ограниченный обратный T_n^{-1}, который находится по формуле (2.7).

Таким образом, мы можем трактовать переход от задачи (2.1)—(2.3) к задаче (2.2)—(2.4) как переход от уравнения

$$Tx = f, \tag{2.9}$$

где $x \in \mathscr{D}(T)$, $f = (x_0,\ f(t)) \in F(E)$, к уравнению

$$T_n \hat{x}^{(n)} = \hat{f}^{(n)}, \tag{2.10}$$

где $\hat{x}^{(n)} \in C(E)/C_n(E)$ и $\hat{f}^{(n)} = \Psi_n f \in F(E)/F_n(E)$.

Мы получили фактор-метод для приближенного решения уравнения (2.9). Нашей ближайшей задачей будет исследование того, как свойства операторов $A_n(t)$ отражаются на свойствах полученного фактор-метода.

2. Устойчивость фактор-метода. Напомним, что свойство устойчивости фактор-метода состоит в равномерной ограниченности норм операторов T_n^{-1}.

Теорема 2.1. *Для устойчивости фактор-метода (2.10) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\left\|\prod_{j=k}^{i}(I+\Delta_n t A_n(t_j))\right\|_{E/\mathscr{L}_n} \leqslant M \quad (0 \leqslant k \leqslant i \leqslant n-1), \tag{2.11}$$

где M — константа, не зависящая от n, i, k.

Доказательство. Пусть выполнено (2.11). Тогда из формулы (2.7) получаем

$$\left\|\left(T_n^{-1}\hat{f}_i\right)\right\|_{E/\mathscr{L}_n} \leqslant$$

$$\leqslant M\|\bar{u}_0\|_{E/\mathscr{L}_n} + \Delta_n t M \sum_{k=0}^{i-1} \|\bar{f}_k\|_{E/\mathscr{L}_n} \leqslant M(1+T)\|\hat{f}\|_{F(E)/F_n(E)}.$$

Отсюда следует условие устойчивости

$$\|T_n^{-1}\|_{F(E)/F_n(E) \to C(E)/C_n(E)} \leqslant K, \tag{2.12}$$

где $K = M(1+T)$.

Наоборот, если выполнено (2.12), то, выбирая элемент $\hat{f} = \{\bar{u}_0, 0, \ldots, 0\}$, имеем

$$\|T_n^{-1}\hat{f}\|_{C(E)/C_n(E)} =$$

$$= \max\left\{\|\bar{u}_0\|_{E/\mathscr{L}_n}, \max_{i=1,\ldots,n}\left\|\prod_{j=0}^{i-1}(I + \Delta_n t A_n(t_j))\bar{u}_0\right\|_{E/\mathscr{L}_n}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant K\|\bar{u}_0\|_{E/\mathscr{L}_n}.$$

Отсюда вытекает (2.11) для $k=0$ с $M=K$. Для $k>0$ неравенство (2.11) устанавливается аналогично с помощью выбора элементов $\hat{f} = \{0, 0, \ldots, \bar{f}_{k-1}, \ldots, 0\}$.

Условие устойчивости (2.11) трудно проверяемо, поэтому часто применяют более простое достаточное условие:

Теорема 2.2. *Для устойчивости фактор-метода* (2.10) *достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\|I + \Delta_n t A_n(t_j)\|_{E/\mathscr{L}_n} \leqslant 1 + a\Delta_n t, \tag{2.13}$$

где $a \geqslant 0$ не зависит от n и j.

Доказательство. Из (2.13) следует, что

$$\left\|\prod_{j=k}^{i}(I + \Delta_n t A_n(t_j))\right\|_{E/\mathscr{L}_n} \leqslant (1 + a\,\Delta_n t)^{i-k+1} \leqslant$$

$$\leqslant (1 + a\,\Delta_n t)^n \leqslant e^{aT}.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.5 предыдущего параграфа позволяет установить следующее предложение:

Теорема 2.3. *Пусть в пространствах $E/\mathscr{L}_n$ введена естественная норма. Для того чтобы приближенные решения $\overline{x}_k^{(n)}$ однородного уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \tag{2.14}$$

сходились к некоторой непрерывной функции при всяком начальном значении $x_0 \in E$, необходимо, чтобы выполнялось условие устойчивости (2.11) *с* $k=0$.

Доказательство. Сходимость приближенных решений однородного уравнения, в силу определения 2.1, эквивалентна фактор-сходимости операторов T_n^{-1} на множестве всех элементов вида $\{x_0, 0\}$ $(x_0 \in E)$, которое, очевидно, образует замкнутое подпространство G пространства $F(E)/F_n(E)$. Из следствия 1.1 тогда вытекает, что равномерно ограничены нормы сужений операторов T_n^{-1} на подпространства $\Psi_n G$, которые, очевидно, изоморфны пространствам $E/\mathscr{L}_n$. Как показано при доказательстве теоремы 2.1, отсюда вытекает условие (2.11) с $k=0$.

Теорема доказана.

3. Аппроксимация и сходимость. Перейдем к выводу условий, при которых операторы T_n аппроксимируют оператор T. Предположим, что операторы $A_n(t)$ равномерно по t аппроксимируют оператор $A(t)$ на его области определения, т. е. что выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty} \max_{i=0,\,1,\,\ldots,\,n} \|\varphi_n A(t_i)\,u_0 - A_n(t_i)\,\varphi_n u_0\|_{E/\mathscr{L}_n} = 0 \tag{2.15}$$

при любом $u_0 \in \mathscr{D}(A)$.

Пусть v_0 — любой элемент из E; тогда $u_0 = A^{-1}(0)\,v_0 \in \mathscr{D}(A)$ и

$$\max_{i=0,\,1,\,\ldots,\,n} \|(\varphi_n A(t_i) - A_n(t_i)\,\varphi_n)\,A^{-1}(0)\,v_0\|_{E/\mathscr{L}_n} \to 0 \quad (v_0 \in E).$$

Из принципа равномерной ограниченности вытекает, что

$$\max_{i=0,\,1,\,\ldots,\,n} \|(\varphi_n A(t_i) - A_n(t_i)\,\varphi_n)\,A^{-1}(0)\,v_0\|_{E/\mathscr{L}_n} \leqslant \leqslant K\,\|v_0\|_E. \tag{2.16}$$

Лемма 2.1. *Пусть функция $v(t)$ такова, что определена и непрерывна функция $A(0)v(t)$. Тогда*

$$\max_{i=0,1,\ldots,n} \|\varphi_n A(t_i) v(t_i) - A_n(t_i)\varphi_n v(t_i)\|_{E/\mathscr{L}_n} \to 0$$

при $n \to \infty$ равномерно по $i = 0, 1, \ldots, n$.

Доказательство. Построим столь мелкое разбиение отрезка $[0, T]$ точками $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N$, чтобы

$$\|A(0)v(t_i) - A(0)v(\xi_k)\|_E \leqslant \varepsilon/2K,$$

где K — константа из (2.16), а ξ_k — ближайшая к t_i точка разбиения. В силу условия (2.15) найдется такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ и всех $i = 0, 1, \ldots, n$ и $k = 0, 1, \ldots, N$

$$\|\varphi_n A(t_i) v(\xi_k) - A_n(t_i)\varphi_n v(\xi_k)\|_{E/\mathscr{L}_n} < \varepsilon/2.$$

Тогда

$$\|\varphi_n A(t_i) v(t_i) - A_n(t_i)\varphi_n v(t_i)\|_{E/\mathscr{L}_n} \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi_n A(t_i) v(\xi_k) - A_n(t_i)\varphi_n v(\xi_k)\|_{E/\mathscr{L}_n} +$$
$$+ \|(\varphi_n A(t_i) - A_n(t_i)\varphi_n) A^{-1}(0)[A(0)v(t_i) -$$
$$- A(0)v(\xi_k)]\|_{E/\mathscr{L}_n} < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Пусть теперь $x(t)$ — решение уравнения (2.1). Тогда

$$Tx = (x_0, f(t))$$

и

$$\Psi_n Tx = (\varphi_n x_0, \varphi_n f(t_0), \ldots, \varphi_n f(t_{n-1})).$$

По построению оператора T_n

$$T_n \Phi_n x = \Bigl(\varphi_n x_0, \varphi_n \frac{x(t_1) - x_0}{\Delta_n t} - A_n(t_0)\varphi_n x_0,$$
$$\varphi_n \frac{x(t_2) - x(t_1)}{\Delta_n t} - A_n(t_1)\varphi_n x(t_1), \ldots,$$
$$\varphi_n \frac{x(T) - x(t_{n-1})}{\Delta_n t} - A_n(t_{n-1})\varphi_n x(t_{n-1})\Bigr).$$

Отсюда получаем

$$\|T_n\Phi_n x - \Psi_n T x\|_{F(E)/F_n(E)} = \max_{i=0,\ldots,n-1}\left\|\varphi_n \frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{\Delta_n t} - A_n(t_i)\varphi_n x(t_i) - \varphi_n f(t_i)\right\|. \tag{2.17}$$

Для оценки этой нормы заметим, что в силу уравнения (2.1)

$$\left\|\frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{\Delta_n t} - A(t_i)\,x(t_i) - f(t_i)\right\|_E = \left\|\frac{1}{\Delta_n t}\int_{t_i}^{t_{i+1}}[x'(s)-x'(t_i)]\,ds\right\|_E.$$

Предположим, что в фактор-пространстве $E/\mathscr{L}_n$ норма введена так, что

$$\|\varphi_n z\|_{E/\mathscr{L}_n} \leqslant C\|z\|_E \qquad (z \in E). \tag{2.18}$$

Тогда

$$\left\|\varphi_n \frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{\Delta_n t} - A_n(t_i)\varphi_n x(t_i) - \varphi_n f(t_i)\right\|_{E/\mathscr{L}_n} \leqslant$$
$$\leqslant \left\|\varphi_n \frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{\Delta_n t} - \varphi_n A(t_i)\,x(t_i) - \varphi_n f(t_i)\right\|_{E/\mathscr{L}_n} +$$
$$+ \|\varphi_n A(t_i)\,x(t_i) - A_n(t_i)\varphi_n x(t_i)\|_{E/\mathscr{L}_n} \leqslant$$
$$\leqslant C\left\|\frac{1}{\Delta_n t}\int_{t_i}^{t_{i+1}}[x'(s)-x'(t_i)]\,ds\right\|_E +$$
$$+ \|\varphi_n A(t_i)\,x(t_i) - A_n(t_i)\varphi_n x(t_i)\|_{E/\mathscr{L}_n}.$$

Решение $x(t)$ непрерывно дифференцируемо, и функция $A(t)\,x(t)$ непрерывна. Непрерывна также функция $A(0)\,x(t) = A(0)\,A^{-1}(t)\,A(t)\,x(t)$. Поэтому первое слагаемое при $n \to \infty$ становится сколь угодно малым равномерно по i за счет равномерной на $[0, T]$ непрерывности $x'(t)$, а второе — в силу леммы 2.1. Из (2.17) тогда получаем

$$\|T_n\Phi_n x - \Psi_n T x\|_{F(E)/F_n(E)} \to 0 \tag{2.19}$$

при $n \to \infty$.

Обратно, пусть выполнено (2.19) для любого решения уравнения (2.1). Возьмем $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ и положим $x(t) \equiv x_0$ и $f(t) = -A(t)x_0$. Тогда

$$\|\varphi_n A(t_i)x_0 - A_n(t_i)\varphi_n x_0\|_{E/\mathscr{L}_n} =$$
$$= \left\|\varphi_n \frac{x_0 - x_0}{\Delta_n t} - A_n(t_i)\varphi_n x_0 - \varphi_n f(t_i)\right\|_{E/\mathscr{L}_n} \leqslant$$
$$\leqslant \|T_n \Phi_n x - \Psi_n T x\|_{F(E)/F_n(E)} \to 0,$$

т. е. справедливо (2.15).

Мы приходим к следующему выводу:

Теорема 2.4. *Пусть выполнено условие* (2.18). *Для того чтобы операторы T_n аппроксимировали оператор T на множестве $\mathscr{D}(T)$ всех решений уравнения* (2.1), *необходимо и достаточно, чтобы операторы $A_n(t_i)$ удовлетворяли условию* (2.15).

Из теоремы 1.4 и теорем 2.1 и 2.4 непосредственно вытекает

Теорема 2.5. *Если выполнено условие* (2.18), *условие аппроксимации* (2.15) *и условие устойчивости* (2.11), *то приближенные решения $\overline{x}_k^{(n)}$ сходятся к точному решению задачи* (2.1) — (2.3), *если это решение существует.*

Заметим, что теорема 2.5 доказана без всяких априорных предположений о разрешимости задачи Коши, однако сама возможность построения последовательности операторов A_n, обладающей свойствами устойчивости и аппроксимации, содержит в себе большую информацию о свойствах задачи Коши (2.1) — (2.3).

Предположим теперь, что задача Коши для уравнения (2.14) равномерно корректна, и обозначим через $U(t, s)$ соответствующий эволюционный оператор. Всякое решение задачи (2.1) — (2.3) задается формулой

$$x(t) = U(t, 0)x_0 + \int_0^t U(t, s) f(s)\, ds. \qquad (2.20)$$

Согласно теореме 3.9 гл. II формула (2.20) будет давать непрерывно дифференцируемое решение уравнения (2.1), если $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ и функция $A(t)f(t)$ определена и непрерывна на $[0, T]$. При любых $x_0 \in E$ и $f \in C(E)$ формула (2.20) дает непрерывную функцию $x(t)$, называемую обобщенным решением уравнения (2.1). Каждое обобщенное решение может быть с любой точностью аппроксимировано в $C(E)$ истинными решениями уравнения (2.1). Действительно, элемент $x_0 \in E$ можно сколь угодно точно приблизить элементом $\tilde{x}_0$ из $\mathscr{D}(A)$, а функцию $f(t)$ равномерно на $[0, T]$ приблизить кусочно-линейной функцией $\tilde{f}(t)$ со значениями из $\mathscr{D}(A)$. Тогда функция $A(0)\tilde{f}(t)$ будет непрерывной, а значит, и функция $A(t)\tilde{f}(t) = A(t)A^{-1}(0)A(0)\tilde{f}(t)$ непрерывна. По $\tilde{x}_0$ и $\tilde{f}(t)$ строим решение $\tilde{x}(t)$ задачи (2.1)—(2.3). Очевидно,

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leqslant M\left(\|x_0 - \tilde{x}_0\| + \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|f(t) - \tilde{f}(t)\|\right).$$

Теперь можно показать, что при условиях теоремы 2.5 при любых $x_0 \in E$ и $f(t) \in C(E)$ приближенные решения $\bar{x}_k^{(n)}$ сходятся к обобщенному решению задачи (2.1)—(2.3). В самом деле,

$$\bar{x}_k^{(n)} - \varphi_n x(t_k) = \left(\bar{\tilde{x}}_k^{(n)} - \varphi_n \tilde{x}(t_k)\right) + \\ + \left(\bar{x}_k^{(n)} - \bar{\tilde{x}}_k^{(n)}\right) + \varphi_n\left(\tilde{x}(t_k) - x(t_k)\right). \qquad (2.21)$$

Последний член будет сколь угодно малым за счет построения $\tilde{x}(t)$ и свойства (2.18). Второй член можно записать в виде

$$\bar{x}_k^{(n)} - \bar{\tilde{x}}_k = (T_n^{-1}(\hat{f} - \hat{\tilde{f}}))_k.$$

По построению

$$\|f - \tilde{f}\|_{F(E)} = \max\left\{\|x_0 - \tilde{x}_0\|_E, \ \|f - \tilde{f}\|_{C(E)}\right\}$$

сколь угодно мала. В силу свойства (2.18) $\|\hat{f} - \hat{\tilde{f}}\|_{F(E)/F_n(E)}$, а вследствие устойчивости и $\left\|T_n^{-1}(\hat{f} - \hat{\tilde{f}})\right\|_{C(E)/C_n(E)}$, сколь угодно мала равномерно по n. Наконец, первое слагаемое в (2.21) при фиксированном решении $\tilde{x}(t)$ сколь угодно мало при $n \to \infty$ за счет сходимости приближенных решений к точному, в силу теоремы 2.5.

Теорема 2.6. *Если задача Коши для уравнения* (2.14) *равномерно корректна и выполнены условия теоремы* 2.5, *то приближенные решения* $\overline{x}_k^{(n)}$ *сходятся к обобщенному решению задачи* (2.1)—(2.3) *при любых* $x_0 \in E$ *и непрерывной функции* $f(t)$.

Из теоремы 2.6 и теоремы 2.1 можно еще сделать следующее заключение:

Теорема 2.7. *Пусть задача Коши для однородного уравнения* (2.14) *равномерно корректна, нормы в пространствах* $E/\mathscr{L}_n$ — *естественны и выполнено условие аппроксимации* (2.15). *Для того чтобы приближенные решения* $\overline{x}_k^{(n)}$ *сходились к обобщенным решениям задачи Коши для уравнения* (2.1) *при любых* $x_0 \in E$, $f \in C(E)$, *необходимо и достаточно условие устойчивости* (2.11).

Замечание 2.1. Иногда построение разностной схемы не разбивают явно на два этапа и сразу записывают систему (2.6) в форме рекуррентного соотношения

$$\overline{x}_0^{(n)} = \varphi_n x_0,$$
$$\overline{x}_{k+1}^{(n)} = C_n(t_k)\,\overline{x}_k^{(n)} + \Delta_n t \overline{f}_k \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1), \tag{2.22}$$

где $C_n(t_k)$ — ограниченный линейный оператор в пространстве $E/\mathscr{L}_n$.

Естественно, что эту систему можно преобразовать к виду (2.6) с оператором

$$A_n = \frac{C_n(t_k) - I}{\Delta_n t}.$$

Тогда условие устойчивости (2.11) примет вид

$$\| C_n(t_{i-1})\, C_n(t_{i-2}) \ldots C(t_k) \|_{E/\mathscr{L}_n} \leqslant M \qquad (i = 1,\ \ldots,\ n),$$

где M не зависит от n, k и i.

Условие аппроксимации (2.15) запишется в форме

$$\lim_{n\to\infty}\ \max_{i=0,\ 1,\ \ldots,\ n} \left\| \varphi_n A(t_i)\, u_0 - \frac{1}{\Delta_n t}\left[C_n(t_i)\, \varphi_n u_0 - \varphi_n u_0\right] \right\|_{E/\mathscr{L}_n} = 0$$

при любом $u_0 \in \mathscr{D}(A)$. В этой форме иногда условие аппроксимации называют условием согласованности (см. [89]).

4. Частный случай, неявная схема. Излагаемая теория охватывает и тот частный случай, когда все пространства $\mathscr{L}_n = \{0\}$. Тогда операторы $A_n(t_j)$ должны быть ограниченными операторами в самом пространстве E и приближенное уравнение рассматривается в этом же пространстве. Гомоморфизмы φ_n превращаются в тождественные.

Условие устойчивости записывается в виде

$$\left\| \prod_{j=k}^{i} (I + \Delta_n t A_n(t_j)) \right\|_E \leqslant M, \qquad (2.23)$$

где M не зависит от i, k и n.

Условие аппроксимации сводится просто к условию сильной равномерной по j сходимости операторов $A_n(t_j)$ к операторам $A(t_j)$ на $\mathscr{D}(A)$.

Предполагая, что оператор $A(t)$ является при каждом $t \in [0, T]$ производящим оператором полугруппы с C_0-условием, можно в качестве примера рассмотреть аппроксимирующие его операторы, уже не раз нами использованные. Положим

$$A_n(t) = -\frac{1}{\Delta_n t} A(t) R_{A(t)}\left(\frac{1}{\Delta_n t}\right).$$

Тогда

$$I + \Delta_n t A_n(t) = -\frac{1}{\Delta_n t} R_{A(t)}\left(\frac{1}{\Delta_n t}\right).$$

Условие (2.23) примет тогда вид

$$\left\| \prod_{j=k}^{i} R_{A(t_j)}\left(\frac{1}{\Delta_n t}\right) \right\| \leqslant M (\Delta_n t)^{i-k+1}.$$

Это условие можно заменить несколько более жестким:

$$\left\| \prod_{j=k}^{i} R_{A(t_j)}(\lambda) \right\| \leqslant \frac{M}{\lambda^{i-k+1}} \qquad (\lambda \geqslant \lambda_0). \qquad (2.24)$$

В случае постоянного оператора условие принимает вид

$$\| R_A^i(\lambda) \| \leqslant \frac{M}{\lambda^i} \qquad (\lambda \geqslant \lambda_0) \qquad (2.25)$$

и совпадает с условием равномерной корректности задачи Коши для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \qquad (2.26)$$

Мы приходим к следующему утверждению:

Теорема 2.8. *Если при каждом t оператор $A(t)$ является производящим оператором полугруппы с C_0-условием и выполнено условие (2.24), то приближенные решения, построенные по формулам*

$$x_0^{(n)} = x_0, \quad x_{k+1}^{(n)} = -\frac{1}{\Delta_n t} R_{A(t_k)}\left(\frac{1}{\Delta_n t}\right) x_k^{(n)} + \Delta_n t f(t_k) \quad (2.27)$$
$$(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n),$$

сходятся к решению задачи (2.1)—(2.3), *если оно существует. Условие* (2.24) *выполнено автоматически, если оператор* $A(t)$ *постоянен или удовлетворяет условию*

$$\|R_{A(t)}(\lambda)\| \leqslant 1/\lambda \qquad (\lambda > 0).$$

Для случая однородного уравнения соотношение (2.27) можно еще переписать в виде

$$\frac{x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}}{\Delta_n t} = A(t_k)\, x_{k+1}^{(n)},$$

и мы приходим к схеме, которую обычно называют неявной. Если записать аналогичную схему для того случая, когда оператор $A(t)$ фактор-аппроксимируется операторами $A_n(t)$, то получим

$$\frac{\bar{x}_{k+1}^{(n)} - \bar{x}_k^{(n)}}{\Delta_n t} = A_n(t_k)\, \bar{x}_{k+1}^{(n)}. \quad (2.28)$$

Эту схему можно преобразовать к виду (2.22) с оператором

$$C_n(t_k) = -\frac{1}{\Delta_n t}\left(A_n(t_k) - \frac{1}{\Delta_n t} I\right)^{-1} = -\frac{1}{\Delta_n t} R_{A_n(t_k)}\left(\frac{1}{\Delta_n t}\right).$$

Условие устойчивости для постоянного оператора A примет вид

$$\left\| R_{A_n}^i\left(\frac{1}{\Delta_n t}\right)\right\| \leqslant M(\Delta_n t)^i$$

или, в более жесткой форме,

$$\left\| R_{A_n}^i(\lambda)\right\| \leqslant \frac{M}{\lambda^i} \qquad (\lambda \geqslant \lambda_0).$$

Мы видим, что эти условия весьма близки к условиям равномерной корректности задачи Коши для исходного уравнения. Этим объясняется тот факт, что обычно при разумной аппроксимации оператора A операторами A_n для неявной схемы (2.28) условия устойчивости автоматически выполняются.

5. Гладкие решения, улучшенная сходимость. Переход от пространства E к фактор-пространству $E/\mathscr{L}_n$ в конечно-разностных методах соответствует переходу от функций, заданных в области, к функциям, заданным в узлах сетки. Однако если основным пространством E является пространство типа L_p, в котором, кстати, хорошо изучены параболические уравнения, то для функций этого пространства не определено их значение в узлах сетки. В связи с этим в нашу абстрактную схему вводится еще одно пространство (в приложениях пространство C), в котором и производится факторизация.

Мы сначала поясним нашу новую схему для однородного уравнения с постоянным оператором (2.26).

Пусть в пространство E вложено банахово пространство E_1 так, что

$$\|x\|_E \leqslant c_1 \|x\|_{E_1} \qquad (x \in E_1). \tag{2.29}$$

Предположим, что пространство E_1 охватывает область определения некоторой степени A^k (k — целое) оператора A: $\mathscr{D}(A^k) \subset E_1$ и

$$\|x\|_{E_1} \leqslant c_2 \|A^k x\|_E \qquad (x \in \mathscr{D}(A^k)). \tag{2.30}$$

Нас будут интересовать лишь $k+1$ раз непрерывно дифференцируемые решения уравнения (2.26), для которых

$$\frac{d^{k+1}x}{dt^{k+1}} = A^{k+1}x.$$

Значения этих решений принадлежат E_1 и из (2.30) следует, что функция $x(t)$ и ее производная $Ax(t)$ непрерывны в норме пространства E_1.

На время можно забыть о существовании пространства E и построить разностную схему, исходя из пространства E_1

и его подпространств $\mathscr{L}_n$. Построение операторов T_n остается таким же лишь с заменой всюду пространства E на пространство E_1. Эти операторы будут действовать из пространства $C(E_1)/C_n(E_1)$ в пространство $F(E_1)/F_n(E_1)$. Соответствующим образом изменится условие устойчивости.

Перейдем к рассмотрению условия аппроксимации. Предположим, что оно выполнено в следующей форме:

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n A u_0 - A_n \varphi_n u_0\|_{E_1/\mathscr{L}_n} = 0 \tag{2.31}$$

при любом $u_0 \in \mathscr{D}(A^{k+1})$. Здесь φ_n — естественный гомоморфизм E_1 на $E_1/\mathscr{L}_n$.

Подставляя вместо u_0 выражение $A^{-(k+1)}v_0$, мы так же, как в (2.16), придем к выводу, что

$$\left\|[\varphi_n A - A_n \varphi_n]\, A^{-k-1} v_0\right\|_{E_1/\mathscr{L}_n} \leqslant K \|v_0\|_E.$$

Аналогично тому, как это делалось в лемме 2.1, с использованием неравенства (2.30) показывается, что отсюда вытекает соотношение

$$\|\varphi_n A v(t) - A_n \varphi_n v(t)\|_{E_1/\mathscr{L}_n} \to 0 \tag{2.32}$$

равномерно по $t \in [0, T]$ при всякой функции $v(t)$, для которой определена и непрерывна функция $A^{k+1}v(t)$.

С помощью соотношения (2.32) при условии

$$\|\varphi_n z\|_{E_1/\mathscr{L}_n} \leqslant c \|z\|_{E_1} \tag{2.33}$$

проверка условия аппроксимации сводится к доказательству того, что

$$\left\| \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta_n t} - Ax(t_i) \right\|_{E_1} \to 0.$$

В силу неравенства (2.30) достаточно показать, что

$$\left\| \frac{A^k[x(t_{i+1}) - x(t_i)]}{\Delta_n t} - A^{k+1}x(t_i) \right\|_E =$$

$$= \left\| \frac{1}{\Delta_n t} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [A^{k+1}x(s) - A^{k+1}x(t_i)]\, ds \right\| \to 0.$$

Последнее вытекает из непрерывности функции $A^{k+1}x(t)$.

Мы пришли к следующему утверждению:

Теорема 2.9. *Пусть выполнены* (2.33), *условие аппроксимации* (2.31) *и условие устойчивости*

$$\|(I+\Delta_n t A_n)^i\|_{E_1/\mathscr{L}_n \to E_1/\mathscr{L}_n} \leqslant M \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где M не зависит от i и n. Тогда для всякого $k+1$ раз непрерывно дифференцируемого решения $x(t)$ уравнения (2.26) *приближенные решения $\overline{x}_k^{(n)}$ сходятся к $x(t)$ в норме пространств $E_1/\mathscr{L}_n$, т. е.*

$$\max_{i=0,\ 1,\ \ldots,\ n} \left\|\varphi_n x(t_k) - \overline{x}_k^{(n)}\right\|_{E_1/\mathscr{L}_n} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{2.34}$$

Замечание 2.2. В случае равномерно корректной задачи Коши ее решение $k+1$ раз непрерывно дифференцируемо, если $x_0 \in \mathscr{D}(A^{k+1})$. В этом случае, повторяя рассуждение (2.21), можно доказать, что и для k раз дифференцируемого решения ($x_0 \in \mathscr{D}(A^k)$) приближенные решения сходятся.

6. Улучшенная сходимость, переменный оператор. Перенесение теоремы 2.9 на уравнение (2.14) с переменным оператором $A(t)$ наталкивается на существенные трудности, связанные с тем, что степени оператора $A(t)$ уже могут не иметь общей области определения. В связи с этим мы ограничимся лишь рассмотрением случая $k=1$.

Итак, пусть пространство E_1 таково, что выполнено (2.29), $\mathscr{D}(A) \subset E_1$ и

$$\|x\|_{E_1} \leqslant c_2 \|A(0)x\|_E \leqslant c_2' \|A(t)x\|_E \tag{2.35}$$
$$(x\in\mathscr{D}(A),\ 0\leqslant t\leqslant T).$$

Мы будем предполагать, что оператор $A(t)$ удовлетворяет либо условиям теоремы 3.4, либо условиям теоремы 3.8 гл. II. В том и другом случае при $x_0 \in \mathscr{D}(A^2(0))$ решение задачи (2.14), (2.3) дважды непрерывно дифференцируемо, и функции $A(t)x'(t)$ и $A^2(t)x(t)$ непрерывны.

Условие устойчивости будем писать в виде

$$\left\|\prod_{j=k}^{i}(I+\Delta_n t A_n(t_j))\right\|_{E_1/\mathscr{L}_n} \leqslant M \qquad (0\leqslant k\leqslant i\leqslant n-1). \tag{2.36}$$

Условие аппроксимации попробуем сначала ввести в форме, аналогичной (2.31),

$$\lim_{n\to\infty} \max_{j=0,\,1,\,\ldots,\,n} \|\varphi_n A(t_j)\,u_0 - A_n(t_j)\,\varphi_n u_0\|_{E_1/\mathscr{L}_n} = 0 \tag{2.37}$$

для любого $u_0 \in \mathscr{D}(A^2(0))$. Отсюда будет следовать неравенство

$$\|(\varphi_n A(t_j) - A_n(t_j)\,\varphi_n)\,A^{-2}(0)\,v_0\|_{E_1/\mathscr{L}_n} \leqslant K\|v_0\|_E \quad (v_0 \in E) \tag{2.38}$$

с константой K, не зависящей от j и n.

К сожалению, это неравенство еще не дает возможности доказать аналог леммы 2.1, так как, например, не ясно, будет ли на решении $x(t)$ с $x_0 \in \mathscr{D}(A^2(0))$ определен оператор $A^2(0)$. Эта трудность не возникает, если дополнительно предположить, что оператор $A^2(t)$ имеет не зависящую от t область определения и сильно непрерывен на ней.

Лемма 2.2. *При сделанном дополнительном предположении из условия* (2.37) *следует, что*

$$\|\varphi_n A(t_j)\,x(t_j) - A_n(t_j)\,\varphi_n x(t_j)\|_{E_1/\mathscr{L}_n} \to 0 \tag{2.39}$$

при $n \to \infty$ равномерно по $j = 0, 1, \ldots, n$ для всякого решения уравнения (2.14) *с начальным значением $x_0 \in \mathscr{D}(A^2(0))$.*

Доказательство. Из непрерывности функции $A^2(t)\,x(t)$ следует непрерывность функции

$$A^2(0)\,x(t) = A^2(0)\,A^{-2}(t)\,A^2(t)\,x(t).$$

Тогда, повторяя доказательство леммы 2.1, получим

$$\begin{gathered}\|\varphi_n A(t_j)\,x(t_j) - A_n(t_j)\,\varphi_n x(t_j)\|_{E_1/\mathscr{L}_n} \leqslant \\ \leqslant \|\varphi_n A(t_j)\,x(\xi_k) - A_n(t_j)\,\varphi_n x(\xi_k)\|_{E_1/\mathscr{L}_n} + \\ + \|[\varphi_n A(t_j) - A_n(t_j)\,\varphi_n]\,A^{-2}(0)\,[A^2(0)\,x(t_j) - \\ - A^2(0)\,x(\xi_k)]\|_{E_1/\mathscr{L}_n}.\end{gathered} \tag{2.40}$$

Второе слагаемое может быть сделано сколь угодно малым благодаря (2.38) и равномерной непрерывности функции $A^2(0)\,x(t)$, первое — благодаря условию (2.37) и принадлежности $x(\xi_k)$ к $\mathscr{D}(A^2(0))$.

Лемма доказана.

Теперь можно доказать, что для операторов T_n выполнено условие аппроксимации; для этого нужно показать, что

$$\left\| \frac{\dot{x}(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta_n t} - A(t_i)\,x(t_i) \right\|_{E_1} \to 0 \tag{2.41}$$

(условие (2.33) предполагается выполненным).

Достаточно доказать, что

$$\left\| A(0)\left[\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta_n t} - A(t_i)\,x(t_i)\right] \right\|_E =$$
$$= \left\| \frac{1}{\Delta_n t} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [A(0)\,x'(s) - A(0)\,x'(t_j)]\,ds \right\|_E \to 0. \tag{2.42}$$

Как указывалось, функция $A(t)\,x'(t)$ непрерывна, а значит и $A(0)\,x'(t) = A(0)\,A^{-1}(t)\,A(t)\,x'(t)$ непрерывна. Отсюда следует (2.42) и, следовательно, (2.41). Условие аппроксимации для операторов T_n получено. Отметим, что на последнем этапе доказательства дополнительное предположение о постоянстве $\mathscr{D}(A^2(t))$ не использовалось.

Из проведенных рассуждений уже легко следует

Теорема 2.10. *Пусть оператор* $A(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3.4 *или* 3.8 *гл.* II. *Пусть, кроме того, область определения* $\mathscr{D}(A^2(t))$ *не зависит от* t *и оператор* $A^2(t)$ *на ней сильно непрерывен. Если выполнены условия* (2.33), (2.35), (2.36) *и* (2.37), *то приближенные решения в норме* $E_1/\mathscr{L}_n$ *сходятся к точному решению задачи* (2.14) — (2.4) *при любом* $x_0 \in \mathscr{D}(A(0))$.

Для $x_0 \in \mathscr{D}(A^2(0))$ утверждение теоремы непосредственно вытекает из предыдущего и теоремы 1.4.

Пусть $x_0 \in \mathscr{D}(A(0))$. Аппроксимируем элемент $A(0)x_0$ элементом $\tilde{y}_0 \in \mathscr{D}(A(0))$ и обозначим $A^{-1}(0)\,\tilde{y}_0 = \tilde{x}_0$. Тогда $\tilde{x}_0 \in \mathscr{D}(A^2(0))$ и

$$\|x_0 - \tilde{x}_0\|_{E_1} \leqslant c_2 \|A(0)\,x_0 - A(0)\,\tilde{x}_0\|_E =$$
$$= c_2 \|A(0)\,x_0 - \tilde{y}_0\|_E \leqslant c_2 \varepsilon. \tag{2.43}$$

Обозначим через $\tilde{x}(t)$ решение задачи Коши для уравнения (2.14) с начальным значением $\tilde{x}(0)=\tilde{x}_0$. Тогда аналогично (2.21) получим

$$\| \bar{x}_k^{(n)} - \varphi_n x(t_k) \|_{E_1/\mathscr{L}_n} \leqslant \| \bar{\tilde{x}}_n^{(n)} - \varphi_n \tilde{x}(t_k) \|_{E_1/\mathscr{L}_n} + \\ + \| \bar{x}_k^{(n)} - \bar{\tilde{x}}_k^{(n)} \|_{E_1/\mathscr{L}_n} + \| \varphi_n (\tilde{x}(t_k) - x(t_k)) \|_{E_1/\mathscr{L}_n}.$$

Последний член будет малым вследствие равномерной корректности задачи Коши и (2.33), второй — в силу (2.43) и равномерной ограниченности операторов T_n^{-1} в норме $E_1/\mathscr{L}_n$ и (2.43), первый из-за доказанной сходимости приближенных решений для решений из $\mathscr{D}(A^2(t))$.

Теорема доказана.

Напомним, что при сведéнии гиперболического уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве (п. 5 § 1 гл. III) к уравнению первого порядка мы встретились с оператором (там он обозначался через $B(t)$), для которого выполнены все условия теоремы 2.10, в связи с чем мы и включили этот случай в рассмотрение.

Для доказательства теоремы о сходимости для более общего случая мы сделаем более жестким условие аппроксимации. Вместо сильной сходимости к нулю операторов $[\varphi_n A(t_j) - A_n(t_j)\varphi_n] A^{-2}(0)$, которой эквивалентно условие (2.37), потребуем, чтобы операторы $[\varphi_n A(t_j) - A_n(t_j)\varphi_n] \times A^{-2}(t_j)$ стремились к нулю по норме. Точнее, предположим, что

$$\max_{j=0,1,\ldots,n} \| [\varphi_n A(t_j) - A_n(t_j)\varphi_n] A^{-2}(t_j) \|_{E \to E_1/\mathscr{L}_n} = \rho_n \to 0 \tag{2.44}$$

при $n \to \infty$.

Тогда справедлива

Лемма 2.2. *Если выполнено условие аппроксимации* (2.44), *то* (2.39) *справедливо для любого решения уравнения* (2.14) *с начальным значением* $x_0 \in \mathscr{D}(A^2(0))$.

Доказательство. Из (2.44) имеем

$$\| \varphi_n A(t_j) x(t_j) - A_n(t_j) \varphi_n x(t_j) \|_{E_1/\mathscr{L}_n} \leqslant \\ \leqslant \rho_n \| A^2(t_j) x(t_j) \|_E \leqslant c\rho_n \to 0,$$

где c — максимум непрерывной функции $\| A^2(t) x(t) \|_E$.

Лемма доказана.

Дальнейшая проверка условия аппроксимации остается такой же, поэтому справедлива

Теорема 2.11. *Пусть оператор* $A(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3.4 *или* 3.8 *гл.* II. *Если выполнены неравенства* (2.33) *и* (2.35), *условие устойчивости* (2.36) *и условие аппроксимации* (2.44), *то приближенные решения в норме* $E_1/\mathscr{L}_n$ *сходятся к точному решению задачи* (2.14) — (2.4) *при всяком* $x_0 \in \mathscr{D}(A(0))$.

Мы рассмотрели вопрос об улучшенной сходимости для однородного уравнения. При определенных условиях на функцию $f(t)$ аналогичные факты устанавливаются и для неоднородного уравнения.

Замечание 2.3. На практике чаще всего пространства $E/\mathscr{L}_n$ конечномерны. В этом случае все нормы в пространстве $E/\mathscr{L}_n$ эквивалентны. Однако константы в соотношениях эквивалентности могут существенно зависеть от n. Иногда удобно условие устойчивости проверять в одной норме $\| \quad \|'_{E_1/\mathscr{L}_n}$, а условие аппроксимации в другой $\| \quad \|_{E_1/\mathscr{L}_n}$. В этом случае нормы операторов $\|T_n^{-1}\|_{E_1/\mathscr{L}_n} = \gamma_n$ могут неограниченно расти. Если этот рост достаточно хорошо согласован с быстротой убывания констант ρ_n в условии аппроксимации (2.44), то сходимость конечно-разностного метода в норме $\| \quad \|_{E_1/\mathscr{L}_n}$ может иметь место на достаточно гладких решениях.

7. Пример: уравнение в частных производных параболического типа. Проиллюстрируем наши понятия на примере равномерно корректной задачи, рассмотренной в п. 3 § 8 гл. I. Это — однородная первая краевая задача для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathscr{L} u, \quad u(0, \mathscr{P}) = u_0(\mathscr{P}), \tag{2.45}$$

где $\mathscr{L}$ — эллиптическое дифференциальное выражение порядка $2m$ с достаточно гладкими коэффициентами, определенное в s-мерной области G с достаточно гладкой границей Γ.

Область определения $\mathscr{D}(A)$ оператора A, порождаемого выражением $\mathscr{L}$, состоит из всех функций $u(\mathscr{P}) \in W_p^{2m}(G)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$u=0,\ \frac{\partial u}{\partial n}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}}=0 \text{ на } \Gamma. \tag{2.46}$$

Без ограничения общности мы будем предполагать, что оператор A в L_p имеет ограниченный обратный.

Пусть K_n — некоторый кубильяж s-мерного пространства и A_n — конечно-разностный оператор, построенный по кубильяжу K_n и определенный в его узлах, принадлежащих G. Задача (2.45), (2.46) заменяется системой конечно-разностных уравнений

$$\frac{v(t_{k+1}, \mathscr{P}_r)-v(t_k, \mathscr{P}_r)}{\Delta_n t}=A_n v(t_k, \mathscr{P}_r), \tag{2.47}$$

$$v(0, \mathscr{P}_r)=u_0(\mathscr{P}_r).$$

Здесь точка $\mathscr{P}_r$ пробегает все узлы K_n, лежащие внутри G, а $t_k=k\Delta_n t$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$.

Граничные условия (2.46) учитываются при конструировании оператора A_n.

Задача (2.45) — (2.46) равномерно корректна в пространстве $L_p(G)$, где мы ее и будем рассматривать: $E=L_p(G)$. За пространство E_1 примем пространство $C(G)$ всех непрерывных в $\bar{G}$ функций с обычной нормой. Очевидно, соотношение (2.29) выполнено.

Для оператора A справедливо следующее неравенство коэрцитивности:

$$\| u\|_{W_p^l}\leqslant c(l)\| Au\|_{W_p^{l-2m}} \qquad (l>2m)$$

с константой c, не зависящей от $u\in\mathscr{D}(A)\cap W_p^l$. Отсюда следует, что для $u\in\mathscr{D}(A^k)$ справедливо неравенство

$$\| u\|_{W_p^{2km}}\leqslant c(2km)\ \ldots\ c(2m)\| A^k u\|_{L_p}. \tag{2.48}$$

В силу теорем вложения С. Л. Соболева при $kp>\frac{s}{2m}$ пространство $W_p^{2km}(G)$ вложено в пространство $C(\bar{G})$, поэтому из (2.48) вытекает, что

$$\| u\|_C\leqslant c_2\| A^k u\|_{L_p} \qquad \left(kp>\frac{s}{2m}\right),$$

т. е. выполнено неравенство (2.30).

Совокупность всех функций из $C(G)$, обращающихся в нуль во всех узлах K_n, принадлежащих G, образует подпространство $\mathscr{L}_n$. Фактор-пространство $C(G)/\mathscr{L}_n = E_1/\mathscr{L}_n$ можно рассматривать как совокупность функций, заданных на узлах K_n. Естественной нормой при этом будет

$$\|\bar{u}\|_{E_1/\mathscr{L}_n} = \max |u(\mathscr{P}_r)|, \tag{2.49}$$

где максимум берется по значениям функции $u(\mathscr{P})$ в узлах K_n из G. Кроме того, введем норму

$$\|\bar{u}\|'_{E_1/\mathscr{L}_n} = \sqrt[q]{h_n^s \sum |u(\mathscr{P}_r)|^q} \qquad (1 \leqslant q < \infty), \tag{2.50}$$

где h_n — ребро элементарного куба кубильяжа K_n, и под знаком суммы стоят все значения функции в узлах K_n, принадлежащих G. Для нормы (2.49) очевидно выполнено свойство (2.33) с константой 1. Далее,

$$\|\bar{u}\|'_{E_1/\mathscr{L}_n} \leqslant \sqrt[q]{\operatorname{mes} G_n}\, \|\bar{u}\|_{E_1/\mathscr{L}_n}, \tag{2.51}$$

где G_n — область, состоящая из всех кубиков, пересекающих G, и, следовательно, при $h \leqslant h_0$ для нормы (2.50) также выполнено (2.33).

Отметим еще, что

$$\|\bar{u}\|_{E_1/\mathscr{L}_n} = \max |u(\mathscr{P}_r)| \leqslant \frac{1}{h_n^{s/q}} \sqrt[q]{h_n^s \sum |u(\mathscr{P}_r)|^q} = \\ = \frac{1}{h_n^{s/q}} \|\bar{u}\|'_{E_1/\mathscr{L}_n}. \tag{2.52}$$

Проверка условия устойчивости (2.36) для операторов A_n является часто сложной алгебраической задачей. Проверке условий устойчивости и конструированию устойчивых схем посвящена большая литература. В наши задачи не входит освещение этого вопроса, и мы будем предполагать, что условие устойчивости выполнено.

Выясним вопрос об аппроксимации. Во многих случаях, чаще всего с помощью формулы Тейлора, легко оценивается разность между значениями в узлах конечно-разностного и дифференциального операторов на достаточно гладких функциях.

Будем говорить, что операторы A_n удовлетворяют естественному условию аппроксимации, если $A_n u$ равномерно по узлам сходится к $\mathscr{L}u$ для всякой функции, имеющей непрерывные производные порядка $2m$ и удовлетворяющей граничным условиям (2.46). Если теперь $u_0(\mathscr{P}) \in \mathscr{D}(A^{k+1})$, то $u_0(\mathscr{P}) \in W_p^{2(k+1)m}(G)$, и при условии $kp > s/2m$ производные $2m$-го порядка функции $u_0(\mathscr{P})$ будут непрерывными. Тогда из естественного условия аппроксимации вытекает, что

$$\| A_n\varphi_n u_0 - \varphi_n A u_0 \|_{E_1/\mathscr{L}_n} = \max | A_n u_0(\mathscr{P}_r) - A u_0(\mathscr{P}_r) | \to 0 \tag{2.53}$$

при $n \to \infty$, т. е. выполнено условие аппроксимации (2.31).

Из теоремы 2.9 тогда следует сходимость конечно-разностного метода при условиях устойчивости и естественной аппроксимации для любого решения задачи (2.45)—(2.41) с начальной функцией $u_0(\mathscr{P})$, принадлежащей $W_p^{2km}(G)$, для которой функции u_0, $\mathscr{L}u_0, \ldots, \mathscr{L}^{k-1}u_0$ удовлетворяют граничным условиям (2.46). Выбор k определяется неравенством $k > s/2mp$. Заметим, что увеличивая p, мы всегда можем добиться того, чтобы сходимость имела место при $k = 1$, т. е. для всех решений задачи (2.45) — (2.46).

Из (2.51) и (2.53) вытекает, что условие аппроксимации будет выполнено во всех нормах $\| \quad \|'_{E/\mathscr{L}_n}$, поэтому в той норме, где удается проверить условие устойчивости (чаще всего это норма с $q = 2$), и будет доказываться сходимость процесса. (Отметим, что для параболических уравнений второго порядка ($m = 1$) благодаря принципу максимума удается проверять условие устойчивости и в наиболее жесткой норме $\| \quad \|_{E/\mathscr{L}_n}$.)

Если условие устойчивости проверено в норме $\| \quad \|'_{E/\mathscr{L}_n}$ с некоторым q, то нормы γ_n операторов T_n^{-1} по отношению к норме (2.49) в пространстве $E_1/\mathscr{L}_n$ в силу (2.51) и (2.52) могут расти как $1/h_n^{s/q}$. Для погашения этого роста может служить усиленное условие аппроксимации. Будем говорить, что операторы A_n аппроксимируют A с порядком $l + \alpha$, если для всякой функции $u_0(\mathscr{P})$, удовлетворяющей граничным условиям (2.46), имеющей производные $2m$-го порядка, принадлежащие пространству Гёльдера $C^{\alpha}(G)$, имеет место неравенство

$$\max_{r} | A_n u_0(\mathscr{P}_r) - A u_0(\mathscr{P}_r) | \leqslant N h_n^{l+\alpha} \| u_0 \|_{C^{2m+l+\alpha}(G)}. \tag{2.54}$$

Покажем, как тогда можно проверить условие типа (2.38). Имеем

$$\| (A_n \varphi_n - \varphi_n A) A^{-2} v_0 \|_{E_1/\mathscr{L}_n} \leqslant N h_n^{l+\alpha} \| A^{-2} v_0 \|_{C^{2m+l+\alpha}(G)}.$$

Если $l + \alpha < 2m - s/p$, то пространство W_p^{4m}, которому принадлежит функция $A^{-2}v_0$, вложено в пространство $C^{2m+l+\alpha}$, и, следовательно,

$$\| (A_n \varphi_n - \varphi_n A) A^{-2} v_0 \|_{E_1/\mathscr{L}_n} \leqslant$$
$$\leqslant N_1 h_n^{l+\alpha} \| A^{-2} v_0 \|_{W_p^{4m}(G)} \leqslant N_2 h_n^{l+\alpha} \| v_0 \|_{L_p}$$

в силу (2.48). Таким образом, условие (2.38) выполнено с $\rho_n = N_2 h_n^{l+\alpha}$. Это позволяет применять теорему 2.11 к доказательству сходимости конечно-разностного метода для уравнения (2.45) с переменными по t и дважды непрерывно по t дифференцируемыми коэффициентами. Кроме того, можно устанавливать теоремы о равномерной по всем переменным сходимости приближенных решений к точным при выполнимости условия устойчивости в одной из слабых норм $\| \quad \|'_{E/\mathscr{L}_n}$.

ЗАМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

К главе I

Термины корректная, равномерно корректная и ослабленная задачи Коши для уравнения $x' = Ax$, которые изучаются в гл. I, были введены автором в [6] гл. III.

§ 1. Исследование корректной задачи Коши здесь проводится впервые, однако в своей главной части оно основано на хорошо известных результатах, изложенных в книге [1]. Сюда относятся утверждения об ограниченности, сильной непрерывности, росте полугруппы; о связи между полугруппой и резольвентой, осуществляемой преобразованием Лапласа. Теорема 1.4 сформулирована здесь впервые. Прием построения решений задачи Коши с помощью обратного преобразования систематически применялся Хилле (см [1]). В явной форме теорема 1.5 сформулирована в статье Ю. И. Любича [38].

Понятие множества корректности оператора и теоремы 1.5—1.7 были рассмотрены автором в [28].

§ 2. Здесь снова значительная часть результатов является методической переработкой теории полугрупп, удовлетворяющих C_0-условию, изложенной в [1]. Сюда относятся теоремы 2.2—2.5. Теоремы 2.6—2.8 были сформулированы П. Е. Соболевским и автором в работе [33] для случая гильбертова пространства, хотя доказательство без изменений переносилось на банахово пространство. Заметим, что доказательство единственности в теореме 2.7 заимствовано из работы Э. Хилле [77]. Достаточное условие (2.18) равномерной корректности задачи Коши было найдено в 1948 г. независимо Э. Хилле (см. [1]) и К. Иосида [107], и в литературе называется *условием Хилле — Иосида.* Необходимые и достаточные условия (2.17) были получены Феллером [68], Миядера [91] и Филлипсом [97]. Доказательство теорем 2.9 и 2.10 проведено по схеме Иосида [107]. Результаты п. 3 о связи разрешимости, единственности и корректности (теоремы 2.11—2.13) принадлежат Филлипсу [96].

Теоремы 2.14—2.15 с доказательством публикуются впервые (см. [28]).

§ 3. Теорема единственности ослабленного решеиия была получена Ю. И. Любичем [34] в 1960 г. (см. [38]). В дальнейшем она обобщалась в работах Л. Н. Прокопенко [154] и С. Агмона и Л. Ниренберга [168]. Теорема 3.2 также принадлежит Ю. И. Любичу [38].

Теоремы 3.3, 3.5, 3.8 и замечания 3.1—3.4 являются частными случаями результатов Э. Хилле (см. [1], § 2, гл. XII). Заметим, что полугруппы, порожденные операторами, резольвенты которых удовлетворяют условию (3.18) лишь на некоторой прямой, параллельной мнимой оси, изучались в работе М. А. Евграфова [128]. Замечание 3.6 принадлежит Ю. И. Домшлаку. Теорема 3.9 в основном принадлежит К. Иосида [110].

Тот факт, что на свойствах гладкости решений уравнения (1.1) сказывается не столько поведение резольвенты, сколько само расположение области регулярных точек, систематически использовался в работе С. Агмона и Л. Ниренберга [168]. Явление «запаздывания» гладкости также исследовал К. В. Валиков [116]. Теорема о принадлежности решений уравнения (1.1) к квазианалитическим классам была получена О. И. Прозоровской [44].

Исследование корректности обратной задачи Коши в классе ограниченных решений проводилось в работе автора [132] 1957 г., а затем в работе О. И. Прозоровской и автора [32], где и была получена теорема 3.12. Ряд близких утверждений, основанных также на различных свойствах «выпуклости» решений, содержится в работе С. Агмона и Л. Ниренберга [168]. Следует отметить, что большинство этих результатов относится к уравнениям с постоянным оператором A. Лишь для уравнений в гильбертовом пространстве с переменным самосопряженным оператором в [132], а затем в [168] и [215] были получены некоторые результаты о корректности обратных задач. Если в неравенстве типа (3.41) зафиксировать $\zeta=t_0$ и изменять T, то можно получить оценки снизу величины $\|U(T)x_0\|$ при $T\to\infty$, и в частности, оценки быстроты возможного стремления к нулю решений уравнения (1.1). Для различных классов полугрупп такие оценки на этом пути получались О. И. Прозоровской [153]. Другой метод получения оценок снизу для решений дифференциальных уравнений и неравенств в гильбертовом пространстве был ранее предложен П. Д. Лаксом [188]. В дальнейшем эти вопросы развивались в работах [168], [179].

§ 4. Полугруппы ограниченных самосопряженных операторов и их спектральные представления рассматривались еще в работах Б. Секефальви-Надя и Е. Хилле в 1938 г. (см. [1], стр. 601—607).

Теорема 4.2 была установлена В. Э. Лянце [39]. Теория максимальных диссипативных операторов (теоремы 4.3—4.5, 4.7) построена Р. С. Филлипсом [99]. Здесь приведено ее изложение, несколько отличающееся от оригинала. Теорема 4.6 принадлежит Ж. Л. Куперу [243], [244]. Отметим, что понятие диссипативного оператора обобщалось на случай банаховых пространств, у которых нормы дифференцируемы по Гато в работе В. Г. Мазья и П. Е. Соболевского [141] и, позднее, в работе Е. Нельсона [92]. Г. Лумер и Р. С. Филлипс [194] построили теорию таких операторов и соответствующих им сжимающих полугрупп в банаховом пространстве с помощью так называемого полускалярного произведения, введенного Г. Лумером [198] (см. также работу М. Хагесава [182]).

Дифференциальные уравнения в гильбертовом пространстве с неограниченным гамильтоновым оператором исследовались в работах В. И. Дергузова и В. А. Якубовича [122]—[124].

Результаты п. 5, а также теоремы 4.13, 4.14, по-видимому, принадлежат автору [28]. Отметим, что способ введения нового скалярного произведения при доказательстве теоремы 4.8 заимствован у М. Г. Крейна (см. [3]). Для случая, когда оператор A ограничен, в [3] показано, что получаемая при этом норма эквивалентна исходной (см. § 8). С. Р. Фогель [245], отвечая на вопрос Б. С. Надя, построил пример оператора U, для которого полугруппа степеней U^n равномерно ограничена, но этот оператор не является сжимающим ни в какой эквивалентной гильбертовой норме (см. также [248]). По-видимому, аналогичная ситуация может иметь место и для сильно непрерывной полугруппы операторов. (В связи с этим вопросом см. также [176].)

Рассмотрение операторов, порожденных формами, берет начало от работ К. О. Фридрихса. Содержание теоремы 4.15 в основном совпадает с содержанием так называемой леммы Лакса и Мильграма [88]. Многочисленные варианты подобных рассмотрений имеются в книге Ж. Л. Лионса [7]. Операторы, порожденные регулярно диссипативными формами, были исследованы Т. Като [84]. Отметим, что как раз такие операторы Т. Като назвал регулярно диссипативными. В тексте мы это понятие употребляем в более широком смысле.

Рассмотренные в п. 7 гиперболические уравнения и связанные с ними понятия были изучены Ю. Л. Далецким [18]. Теорема о представлении операторов, удовлетворяющих (4.61), в виде операторов умножения на функции и дифференциального оператора (4.59) является обобщением теоремы о представлении операторов, удовлетворяющих соотношению неопределенности квантовой механики $AX-XA=-iI$ (см. [250], [246] и указанную там литературу).

§ 5. Полугруппа дробных степеней ограниченного оператора в банаховом пространстве, по-видимому, впервые была введена и изучена в 1939 г. Э. Хилле [71]. Этот вопрос им рассмотрен с точки зрения возможности включения ограниченного оператора в аналитическую полугруппу (см. [1], стр. 510). Показана единственность такой полугруппы при определенных условиях на ее рост.

Метод дробных степеней операторов как орудие исследования решений линейных, а особенно нелинейных дифференциальных уравнений в гильбертовом и банаховом пространствах, с 1956 г. систематически развивался в работах М. А. Красносельского, П. Е. Соболевского и автора (см. обзорные доклады [23], [25], [51]).

Дробные степени производящего оператора полугруппы с C_0-условием и соответствующие им полугруппы впервые исследовались С. Бохнером [241] и Р. С. Филлипсом [94]. М. З. Соломяк [55], [57], используя формулу (5.29) для представления дробной степени, приведенную в [1], получил оценки произведений дробных степеней производящего оператора аналитической полугруппы на полугруппу (см. п. 3 § 7).

Построение и изучение дробных степеней операторов, удовлетворяющих условию (5.4), было проведено М. А. Красносельским и П. Е. Соболевским [26] (в их терминологии оператор с условием (5.4) называется слабо позитивным) и независимо при более общем условии (5.30) А. Балакришнаном [67]. В работе В. И. Мацаева и

Ю. А. Паланта [150] введены дробные степени ограниченного диссипативного оператора по тем же формулам типа (5.8), что и в [26] и [67], и детально изучены спектральные свойства этих степеней, доказана теорема единственности. Эти результаты были обобщены на неограниченные максимальные диссипативные операторы Х. Лангером [187].

Неравенство моментов (5.16) с константой $C(\alpha, \beta, \gamma) \equiv 1$ для положительного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве было установлено в [225] методом, изложенным в п. 9, а для слабо позитивного оператора в банаховом пространстве — в [26].

Теорема 5.4 принадлежит Т. Като [82]. Полугруппы, построенные по дробным степеням (теорема 5.5 и п. 5), изучены А. В. Балакришнаном [67]. Теорема о возведении степени в степень получена Ж. Ватанабе [106]. Теорему 5.6 доказал К. Иосида [112].

При изложении теории дробных степеней операторов с неограниченными обратными (п. 8) автор следовал работе Т. Като [84].

Отметим, что теория дробных степеней операторов изложена в книге [21], а для случая производящих операторов полугрупп в книге [8] Однако как в этих книгах, так и в настоящей не освещены глубокие исследования дробных степеней диссипативных и регулярно диссипативных операторов, проведенные Т. Като [84], [85] (см. также Ж. Л. Лионс [192]).

Разработка теории дробных степеней операторов интенсивно продолжается и в настоящее время (см. [160], [186]).

§ 6. Теорема 6.1 в такой формулировке является новой, хотя ее доказательство следует идее Данфорда. Теорема 6.4 близка к результату С. Я. Якубова [60], [61]. Теорема 6.5 установлена Р. С. Филлипсом [95].

Изучение неоднородного абстрактного параболического уравнения в гильбертовом пространстве было проведено М. А. Красносельским, П. Е. Соболевским и автором [24], в банаховом пространстве (теорема 6.7) — М. З. Соломяком [57]. Теорема 6.8 в основном принадлежит С. Я. Якубову [60], [61]. Теоремы 6.9 и 6.10 получены автором и О. И. Прозоровской в процессе работы над книгой.

Отметим, что ряд теорем о разрешимости и гладкости решений неоднородного уравнения имеется в [40].

§ 7. Лемма 7.1 содержится в работе Т. Като [79]. Связь между неравенствами типа (7.3) или, что то же, (7.9) и вопросом о подчиненности дробной степени оператора была обнаружена для случая самосопряженного оператора П. Е. Соболевским и автором в [33] и использована для изучения дробных степеней дифференциальных операторов В. П. Глушко и автором [9]. Для производящих операторов аналитических полугрупп в банаховом пространстве она изучена М. З. Соломяком [163] и в общем случае М. А. Красносельским и П. Е. Соболевским [26] (см. [21], а также работу К. Иосида [115]). В работе [26] доказана и лемма 7.3.

Теорема 7.1 была впервые открыта Е. Гайнцем [69], правда, с неточной константой в неравенстве (7.6). С уточненной константой она установлена Т. Като [78]. В дальнейшем последовали другие ее доказательства (Ж. Диксмье [172], П. С. Буллен [242]). В форме некоторых интерполяционных теорем она была доказана

Ж. Л. Лионсом [262] и автором [27]. Доказательство, приведенное в тексте, принадлежит автору. Т. Като [85] показал, что основное утверждение теоремы остается справедливым и для максимальных диссипативных операторов в гильбертовом пространстве. О переносе неравенства Гайнца на другие функции от операторов см. [247].

Утверждения, аналогичные леммам 7.4 и 7.5 о вполне подчиненных операторах, содержатся в работе В. П. Глушко и автора [221]. Теорема 7.2, по-видимому — новая; в близкой форме она доказана в дипломной работе Ю. Б. Савченко. Теоремы 7.3 и 7.4 являются обобщениями теорем С. Я. Якубова [59], [63]. Теорема 7.5 принадлежит Р. С. Филлипсу [95].

В работе Х. Ф. Троттера [210] рассмотрен случай, когда операторы A и B являются производящими операторами сжимающих полугрупп, причем $\mathscr{D}(B) \supset \mathscr{D}(A)$. Тогда при достаточно малом ε оператор $A+\varepsilon B$ является производящим оператором полугруппы с C_0-условием. В работе Е. Нельсона [92] показано, что в случае, когда $\|Bx\| \leqslant \|Ax\| + b\|x\|$ $(x \in \mathscr{D}(A))$, это будет иметь место при $0 \leqslant \varepsilon < 1/2$. Вообще говоря, оператор $A+B$ и даже его замыкание может не быть производящим оператором полугруппы с C_0-условием.

Теорема 7.6 является относительно новой. Тонкие теоремы о сравнении дробных степеней операторов содержатся в работах П. Е. Соболевского [47], [160]. В частности, ему принадлежит метод сравнения степеней операторов с различными областями определения, изложенный в п. 5.

§ 8. Пункты 1—2 этого параграфа написаны автором совместно с С. Д. Эйдельманом. Ссылки на соответствующую литературу делались по ходу изложения. Существование нормы, в которой равномерно корректна задача Коши для параболической системы, корректной по Петровскому, было установлено Г. Биркхофом и Т. Малликеном [240], а затем другим методом Г. Биркхофом [239]. Однако эта норма не была дифференциальной. Изложенные здесь доказательства теорем 8.3 и 8.4 принадлежат С. Д. Эйдельману и автору. Достаточность условий в теореме 8.4 была доказана ранее Е. А. Гориным [222].

Отметим, что в работе С. Мидзохата [263], посвященной задаче Коши для параболических по Петровскому систем с переменными коэффициентами, для возможности применения результатов Т. Като (см. § 3 гл. II) искусным образом вводились переменные дифференциальные нормы, в которых основной оператор становился диссипативным (идея такой конструкции восходит к Ж. Лере).

Сильно эллиптические операторы были изучены М. И. Вишиком. Полугрупповой подход к первой краевой задаче для сильно параболических уравнений и систем был применен П. Д. Лаксом и А. Н. Мильграмом [88] и В. Э. Лянце [39]. Как отмечено в тексте, оценка (8.30) для первой краевой задачи в пространствах $\mathscr{L}_p$ получена М. З. Соломяком [163]. Для общих краевых условий она исследовалась в работах С. Агмона [238], С. Агмона и Л. Ниренберга [168], М. С. Аграновича и М. И. Вишика [216]. Для второй краевой задачи для уравнения второго порядка оценка типа (8.30) в $\mathscr{L}_p$ получена в работе В. Г. Мазья и П. Е. Соболевского [141].

Симметрические гиперболические системы изучались с точки зрения теории дифференциальных уравнений в банаховом пространстве в работах П. Д. Лакса [253], Р. С. Филлипса [99], [266], Р. Д. Лакса и Р. С. Филлипса [254].

Трактовка уравнения с запаздывающим аргументом как уравнения в банаховом пространстве была дана Н. Н. Красовским в книге [227]. Описание производящего оператора соответствующей полугруппы сделано там недостаточно корректно Уточнение этого вопроса делалось Ю. Г. Борисовичем, Ю. С. Колесовым, К. В. Валиковым и др.

К главе II

1—2 параграфы в основном содержат вспомогательный материал, имеющийся в работах многих авторов. Теорема 1.2 принадлежит Ю. Л. Далецкому [11], теорема 2.1 — Ж. Кизинскому [87].

§ 3. Определение и исследование свойств равномерно корректной задачи Коши для уравнения с переменным оператором проводится здесь впервые (пп. 1—3). Соответствующие теоремы были получены ранее в предположениях об операторе $A(t)$, обеспечивающих равномерную корректность задачи Коши. Так, например, соответствующие аналоги теорем 3.1 и 3.2 содержатся в [79], теоремы 3.3 — в [80] и [22], теорема 3.4 — в [16]. Лемма 3.1 была установлена П. Е. Соболевским [45].

Центральными результатами параграфа являются фундаментальные теоремы единственности и существования 3.10 и 3.11, принадлежащие Т. Като [79]. Изложенное доказательство теоремы 3.11 принадлежит Ж. Кизинскому [87]. Анализ доказательства Ж. Кизинского привел автора к условной теореме о равномерной корректности 3.6. Теорема 3.8 в условиях Като была доказана в [16] (см. [17]).

Несущественное обобщение теоремы Като на тот случай, когда условие (3.35) выполнено в переменной по t норме, остающейся эквивалентной исходной норме, было проведено С. Мидзохата [263] и Ж. Кизинским [87].

В ряде работ доказательства равномерной корректности задачи Коши для уравнения с переменным оператором проводились методом Иосида: рассмотрение уравнения с ограниченным оператором $A_n(t) = -nI - n^2R(n)$, а затем предельный переход (см. К. Иосида [114], [214], Ж. Эллиот [173], Е. Гейн [183]). При этом снижаются требования либо на гладкость оператора, либо на область определения, либо на поведение резольвенты. Следует, однако, отметить, что эти доказательства проведены при достаточно трудно проверяемых, на наш взгляд, условиях.

Отметим в этом направлении еще недавнюю работу Я. Б. Лопатинского [138].

§ 4. Абстрактное параболическое уравнение с переменным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве было впервые рассмотрено П. Е. Соболевским [46]. Им были введены в рассмотрение интегральные уравнения (4.11) и (4.12), связывающие эволюционные операторы уравнения с переменным оператором и уравнения с «замороженным» постоянным оператором. Несколько позднее Х. Танабе [102], отправляясь от идей Леви, предложил новый метод доказательства теорем существования эволюционного оператора при условиях Като, также основанный на рассмотрении интегральных уравнений описанного выше типа (см. уравнения (5.13), (5.15)). После того как М. З. Соломяк [55] рассмотрел абстрактное параболическое уравнение с постоянным оператором, являющимся производящим оператором аналитической полугруппы, оба автора (Соболевский и Танабе), независимо, перенесли свой метод на уравнения с таким переменным оператором ([48], [103]).

В дальнейшем Я. Д. Мамедов и П. Е. Соболевский [41] заметили, что при исследовании соответствующих интегральных уравнений важна взаимная связь оценки производной полугруппы уравнения с «замороженным» коэффициентом и оценки приращений функций $A(t)A^{-1}(0)$ и $A^{-1}(0)A(t)$. Предполагая выполнение вместо (4.26) оценки $\|A(t_0)U_{A(t_0)}(r)\| \leqslant c/\omega_1(r)$ и вместо (4.29) и (4.32) оценок $\|[A(t)-A(s)]A^{-1}(0)\| \leqslant \omega_2(t-s)$ и $\|A^{-1}(0)[A(t)-A(s)]\| \leqslant \omega_2(t-s)$, они, при условии, связывающем функции ω_1 и ω_2, доказывают существование эволюционного оператора. Заметим, что при этом предполагалось, что «замороженная» задача Коши равномерно корректна. Метод доказательства, принятый в § 4, близок к работе [41], однако в нашем частном случае мы отказались от условия ограниченности в нуле полугрупп $U_{A(t_0)}(r)$. По-видимому, могут быть сформулированы более общие условия, связывающие функции ω_1, ω_2 и ω_0, где $\|U_{A(t_0)}(r)\| \leqslant c/\omega_0(r)$.

Так же, как и в [41], мы наложили на оператор $A(t)$ условие (4.32), которое облегчает доказательство, но является достаточно стеснительным. При его проверке приходится устанавливать неравенство типа (4.29) для сопряженного оператора $A^*(t)$. В первоначальных работах П. Е. Соболевского и Х. Танабе существование эволюционного оператора доказывалось без этого предположения. Е. Т. Паульсен [100] получил аналогичный результат в предположениях, что $U_{A(t_0)}(r)$ удовлетворяет C_0-условию, а для оператора $A(t)$ справедлива оценка (4.25) с $\beta > 5/6$.

Еще в докладе на Международном конгрессе в Эдинбурге [108] К. Иосида ставил вопрос о необходимости освободиться от требования постоянства области определения оператора $A(t)$. Для уравнений в частных производных это требование означает независимость от t коэффициентов граничных условий. Для абстрактных параболических уравнений в этом направлении первый существенный шаг был сделан П. Е. Соболевским [47]. Для уравнения с самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве он построил эволюционный оператор в предположении, что дробная степень оператора имеет постоянную область определения. (Естественность этого предположения для дифференциальных операторов исследовалась до этого О. М. Козловым [130], а затем П. Е. Соболевским [47], автором [27], Т. Като [84] и др.).

Вскоре П. Е. Соболевский [49] и Т. Като [83] перенесли эти результаты и на банахово пространство.

Х. Танабе [105] для случая, когда оператор имеет переменную область определения, наложил условия (5.1) и (5.2) на производную от резольвенты и также построил эволюционный оператор. Эти условия не включают в себя требования постоянства области определения дробной степени оператора, но требуют более гладкой зависимости резольвенты от t (дифференцируемость вместо условия Гёльдера). Наше изложение § 5 следует работе Т. Като и Х. Танабе [86].

Условия, налагаемые на оператор $A(t)$ с переменной областью определения, обычно удается проверить путем рассмотрения квадратичной формы, отвечающей оператору (см. [47], [83], [86] и др.). В недавней работе П. Е. Соболевского [162] получена новая теорема существования эволюционного оператора для уравнения в банаховом пространстве, в которой условия непосредственно формулируются в терминах свойств формы оператора и его сопряженного. Эта теорема в приложениях дает теорему существования решений параболических уравнений с общими нормальными граничными условиями в пространствах $\mathscr{L}_p$.

Отметим, что во всех указанных выше работах по абстрактным параболическим уравнениям в той или иной степени рассматриваются вопросы о повышении гладкости решений и об их аналитичности, которые не нашли отражения в нашем изложении.

К главе III

В § 1 и 3 исследованы сильные решения некоторых классов дифференциальных уравнений второго порядка.

Обобщенные и слабые решения различных типов дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве изучены в уже упоминавшихся работах М. И. Вишика [217] и О. Л. Ладыженской [228]—[230], а затем в работах Ж. Л. Лионса (см. его монографию [7]).

§ 1. Задача Коши для уравнения (1.1) и для более общего уравнения $x^{(n)}=B^n x$ исследовалась Хилле и Филлипсом. Результаты их исследований изложены в книге [1], стр. 630—645 (там же см. ссылки на оригинальные работы). Среди этих результатов, в частности, содержатся теоремы 1.1 и 1.1′. Для более широких классов уравнений исследования этими авторами как будто не проводились.

Гиперболическое уравнение (1.25) с переменным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве было изучено Ю. Л. Далецким в 1957 г. Позднее эти результаты и, в частности, теорема 1.7 вошли в его докторскую диссертацию [16]. Уточнение и развитие они получили в работе В. А. Погореленко и П. Е. Соболевского [152].

Гиперболическое уравнение второго порядка в банаховом пространстве изучалось в работах С. Я. Якубова [58], [59]. Им получены теоремы существования при более жестких условиях, чем в теореме 1.6.

Отметим еще работы Я. Д. Мамедова, посвященные в основном изучению нелинейных уравнений, но содержащие некоторые априорые оценки и для решений линейных уравнений, из которых вытеает ряд следствий о поведении решений [142]—[145].

§ 2. В параграфе изложены в основном результаты Г. И. Лапева и автора, полученные в работах [29]—[31]. Исключение предтавляет теорема 2.9, содержащаяся в диссертационной работе). И. Прозоровской, и теорема 2.11, принадлежащая А. В. Баларишнану [67]. Следует отметить, что в [67] эта теорема доказана ри более слабых ограничениях, когда оператор A может не иметь братного, и вместо оценки (2.2) имеется лишь оценка $R_{A(t)}(s)\|\leqslant M/s$.

Наличие формул для функции Грина позволяет построить теоию задач на собственные значения, что делалось в работах [29], 137].

Естественным является вопрос о возможности перенесения реультатов параграфа на уравнения с переменным оператором. простом случае этот вопрос рассматривался в работе А. Треногина [166]. Более глубокие результаты получил недавно . И. Лаптев.

§ 3. Сильные решения задачи Коши для уравнения второго и олее высокого порядка (типа (3.27)) с постоянными неограниченными операторами исследовались в работе Б. С. Митягина [42] в вязи с задачей об уравнениях с малым параметром при старшей роизводной. Им решен сам по себе интересный вопрос об условиях азложимости оператора $\varepsilon\dfrac{d^2}{dt^2}+A\dfrac{d}{dt}+B$ в произведение $\left(\dfrac{d}{dt}-C_1\right)\left(\dfrac{d}{dt}-C_2\right)$ операторов первого порядка.

Оказывается, что при достаточно малом ε это, например, можно сделать, если оператор $A^{-1}B$ ограничен. Для уравнения высокого юрядка разложение получается при более специальных ограничениях на операторы в подчиненных членах.

Основные результаты о разрешимости задачи Коши для уравнения второго порядка с переменными операторами были получены П. Е. Соболевским [53], [54] (теоремы 3.2—3.4 и 3.6 в нашем тексте). С. Я. Якубов в работах [59], [60], [62] разработал новый более простой метод доказательства теорем существования, который в основном и излагается в § 3. Это позволило ему обобщить результаты Б. С. Митягина (см п. 6 § 3) и освободиться от лишних ограничений на гладкость операторов в уравнениях с переменными коэффициентами. Кроме того, С. Я. Якубов рассмотрел случай неравномерно корректных задач (результат, близкий к теореме 3.5).

К главе IV

§ 1. По-видимому, первой работой, в которой рассматривался вопрос о поведении решений дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными операторами при наличии малого параметра при второй производной, была уже упоминавшаяся в главе III работа Б. С. Митягина [42]. Затем последовала работа П. Е. Соболевского [52], где тот же вопрос был рассмотрен другим методом и при более общих предположениях. Задача о ликвидации невязки в граничных условиях была рассмотрена Б. Н. Панайоти [43], где была получена и обоснована формула (1.29) и исследован вопрос о почти равномерной сходимости решений. В цитированных работах изучалось уравнение второго порядка, но все трудности фактически возникали при исследовании эволюционного оператора $U_\varepsilon(t, s)$ для уравнения первого порядка. В связи с этим мы предпочли изложить всю теорию для уравнения первого порядка, и, как видно из изложения, ее применение к уравнению второго порядка не вызывает новых затруднений. Попутно удалось снизить на единицу требования гладкости, налагаемые на оператор $A(t)$ в работах [52] и [43].

Нами рассмотрено уравнение второго порядка при условиях равномерной корректности задачи Коши. Для абстрактного параболического уравнения второго порядка аналогичное рассмотрение можно провести и в случае, когда оператор B является неограниченным (см. п. 4 § 3 гл. III). Это было сделано в работах П. Е. Соболевского [53] и [54].

По-видимому, так же можно исследовать и случай, когда корректна ослабленная задача Коши (см. п. 5 § 3 гл. III).

§ 2. Материал, изложенный во втором параграфе, имеет вспомогательное для нас значение, однако, как нам кажется, он имеет самостоятельный интерес. Вопрос о построении гладких операторов, осуществляющих эволюцию прямого разложения пространства, важен для различных задач спектральной теории операторов, зависящих от параметра, например, для задачи о приведении матрицы, зависящей от параметра, к квазидиагональному виду с помощью преобразования, обладающего той же степенью гладкости, что и исходная матрица. Теорема существования оператора, осуществляющего эволюцию подпространства, при условии дифференцируемости проекционного оператора $P(t)$ была получена Ю. Л. Далецким и автором в [20]. Позднее аналогичный результат тем же методом независимо был получен Т. Като [249]. В дальнейшем Ю. Л. Далецкому [12] удалось обобщить этот результат на случай оператора, осуществляющего эволюцию разложения пространства в прямую сумму нескольких подпространств, и заменить условие дифференцируемости на условие ограниченности вариации. Последнее потребовало существенного изменения метода доказательства. Ю. Л. Далецким [14] также доказана (другим методом) теорема 2.4.

Интересно отметить, что при одном только условии непрерывности проекционного оператора $P(t)$ не удается доказать существование оператора, осуществляющего эволюцию соответствующего подпространства. Возможно, впрочем, что непрерывность по норме оператора $P(t)$ не отражает адекватно наше геометрическое представление о непрерывном вращении подпространства.

§ 3. Асимптотические методы, излагаемые в основной части параграфа, берут начало от работ Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова и для различных классов уравнений развивались большим коллективом их учеников и последователей. Полный обзор соответствующей литературы имеется в монографии [235].

Для абстрактных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве с ограниченными операторами эти методы впервые были применены в работе Ю. Л. Далецкого и автора [19]. В дальнейшем на уравнения в банаховом пространстве и уравнения с неограниченными операторами они были перенесены Ю. Л. Далецким [14], [15].

Уравнения, к которым применялись асимптотические методы, мы писали в форме уравнений с малым параметром ε. Часто встречаются аналогичные задачи для уравнений с большим параметром μ. Так, уравнение, рассмотренное в п. 6, можно писать в форме

$$\frac{dx}{dt} = \mu A(t)\, x + B(t, \mu)\, x,$$

где оператор $B(t, \mu)$ задается разложением

$$B(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)\, \mu^{-k}.$$

В п. 7 мы рассмотрели вопрос об асимптотических приближениях к частному решению неоднородного уравнения на простейшем примере такого уравнения. Аналогично рассматривается уравнение

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t)\, x + \varepsilon B(t, \varepsilon)\, x + f(t, \varepsilon),$$

где $B(t, \varepsilon)$ и $f(t, \varepsilon)$ задаются разложениями по степеням ε. В такой форме это уравнение и изучалось в цитированных выше работах.

Можно рассмотреть вопрос о решении операторных уравнений, более общих, чем те, которые изучены в лемме 3.1. Для уравнения

$$\sum_{j,\, k=0}^{n} a_{jk} A_2^j X A_1^k = Y$$

с ограниченными операторами A_1 и A_2 при условии, что многочлен $P(\lambda, \mu) = \sum_{j,\, k=0}^{n} a_{jk}\lambda^j \mu^k$ не обращается в нуль, когда λ и μ пробегают спектры операторов A_1 и A_2, в пространствах E_1 и E_2 решение задается формулой

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{R_{A_2}(\lambda)\, Y R_{A_1}(\mu)}{P(\lambda, \mu)}\, d\lambda\, d\mu.$$

Эта формула использовалась в неопубликованных работах М. Г. Крейна, затем независимо была получена Ю. Л. Далецким [13], [15]. Позднее для случая уравнения (3.24) она вновь была найдена М. Розенблюмом [101].

В заключение заметим, что Ю. Л. Далецкий в работе [121] рассмотрел интересный тип уравнений, содержащих быстро осциллирующие члены:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t)\, x + \varepsilon \sum_{m} B_m(t, \varepsilon)\, e^{\frac{im\omega}{\varepsilon} t}\, x.$$

Здесь операторы $B_m(t, \varepsilon)$ снова задаются разложениями по степеням ε. Для отыскания решения с начальными данными из $\mathscr{L}_0$ применяются асимптотические разложения, аналогичные описанным в п. 6. Наиболее интересным является случай внутреннего резонанса, когда изолированные части спектра $\Lambda_0(t)$ и $\Lambda_1(t)$ могут иметь точки, отличающиеся на величину $im\omega$.

Особенностью является то, что при наличии резонанса для отыскания нулевого приближения приходится решать нелинейное дифференциальное уравнение, которое в скалярном случае является уравнением Риккати. Эти результаты изложены в монографии [3].

К главе V

Первой теоремой о сходимости конечно-разностного метода для решения эволюционного уравнения в банаховом пространстве была теорема П. Д. Лакса (см. [89]). В общих чертах она утверждает, что в случае равномерной корректности задачи Коши для уравнения $x' = Ax$ из условий согласованности и устойчивости следует сходимость. С точки зрения приложений эта теорема имеет недостатки: приближенное уравнение рассматривается в том же пространстве, что и исходное; условие согласованности требует сходимости приближенных операторов к исходному на всюду плотном множестве решений эволюционного уравнения без каких-либо указаний на выбор этого множества. Эти недостатки устранялись в работах Л. И. Якут [64], [65], в которых приближенные уравнения трактовались как уравнения в фактор-пространствах, что соответствует переходу от функций, заданных в области, к функциям, заданным лишь в узлах сетки (см. п. 7 § 2). На этом пути Л. И. Якут удалось получить теоремы о сходимости конечно-разностных методов для тех уравнений, для которых доказано существование решения.

Еще раньше X. Ф. Троттер [209], отправляясь также от критики теоремы П. Д. Лакса, построил теорию, в которой пространства, где решаются приближенные уравнения, произвольны и связаны с исходным пространством лишь системой равномерно ограниченных отображений. Полученная им теорема об аппроксимации соответствующих полугрупп изложена в [8].

Н. Н. Гудович [10] предложил абстрактную схему для конечно-разностных методов и детально исследовал связи между устойчивостью, сходимостью и аппроксимацией. Его результаты и представляют собою содержание § 1.

В § 2 изложены в основном результаты Л. И. Якут [64], [65], переработанные и дополненные с помощью общих подходов § 1.

Оба параграфа гл. V написаны автором совместно с Н. Н. Гудовичем.

Отметим еще, что некоторые разностные схемы для решения эволюционных уравнений фактически исследованы Ю. Л. Далецким в связи с вопросом о представимости решений континуальными интегралами [17].

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Общие монографии

1. Хилле Э., Филлипс Р. С., Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1962.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, 1962.
3. Крейн М. Г., Лекции по теории устойчивости дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, АН УССР, 1964.
4. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, изд. 2-е, «Наука», 1965.
5. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.
6. Функциональный анализ, СМБ, «Наука», 1964.
7. Lions S. L., Equations differentielles operationnelles et problèmes aux limites, Springer, 1961.
8. Yosida K., Functional, Analysis, Springer, 1965.

2. Использованная литература

9. Глушко В. П., Крейн С. Г., Дробные степени дифференциальных операторов и теоремы вложения, ДАН СССР **122**, 6 (1958), 963—966.
10. Гудович Н. Н., Об абстрактной схеме разностного метода, Ж. вычислит. матем. и матем. физики **6**, 5 (1966), 916—921.
11. Далецкий Ю. Л., Об одной задаче о дробных степенях самосопряженных операторов, Труды Воронеж. сем. функц. ан. **6** (1958), 44—48.
12. Далецкий Ю. Л., О непрерывном вращении подпространств в банаховом пространстве, УМН **XII**, 3 (1957), 147—154.
13. Далецкий Ю. Л., Об одном линейном уравнении относительно элементов нормированного кольца, УМН **XIV**, 1 (1959), 165—168.
14. Далецкий Ю. Л., О некоторых уравнениях с замкнутыми операторами, Изв. Киевского политехн. ин-та **19** (1956), 157—177.
15. Далецкий Ю. Л., Об асимптотическом решении одного векторного дифференциального уравнения, ДАН СССР **92**, 1953, 881—884.
16. Далецкий Ю. Л., Исследования, связанные с операторными эволюционными уравнениями (Континуальные интегралы. Асимптотическое интегрирование), Автореферат докт. дисс., МГУ, Москва, 1962.

17 Далецкий Ю. Л., Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями, УМН XVII, 5 (107) (1963), 3—115.

18. Далецкий Ю Л., Континуальные интегралы и характеристики, связанные с группой операторов, ДАН СССР 141 6 (1961), 1290—1293.

19. Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г., О дифференциальных уравнениях в гильбертовом пространстве, УМЖ 2, 4 (1950), 71—91.

20. Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г., Деякі властивості операторів, що залежать від параметра, ДАН УРСР 6 (1950), 433—436.

21. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, «Наука», 1966.

22. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Соболевский П. Е., О дифференциальных уравнениях с неограниченными операторами в банаховых пространствах, ДАН СССР 111, 1 (1956), 19—22.

23 Красносельский М. А., Крейн С. Г., О дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве, Труды III Всесоюз. матем. съезда, т. III (1957), 73—80.

24 Красносельский М. А., Крейн С. Г., Соболевский П. Е., О дифференциальных уравнениях с неограниченными операторами в гильбертовых пространствах, ДАН СССР 112, 6 (1957), 990—993.

25. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Об операторных уравнениях в функциональных пространствах, Труды IV Всесоюз. матем съезда, т. II (1964), 292—299.

26 Красносельский М. А., Соболевский П. Е., Дробные степени операторов, действующих в банаховых пространствах, ДАН СССР 129, 3 (1959), 499—502.

27. Крейн С Г., Об одной интерполяционной теореме в теории операторов, ДАН СССР 130, 1960, 491—494.

28 Крейн С. Г., Корректность задачи Коши и аналитичность решений эволюционного уравнения, ДАН СССР 171, 5 (1967), 1033—1036.

29 Крейн С. Г., Лаптев Г. И., Граничные задачи для уравнения в гильбертовом пространстве, ДАН СССР 146, 3 (1962), 535—538.

30. Крейн С. Г., Лаптев Г. И., Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве, I, Дифф. уравнения, II, 3 (1966), 382—390.

31. Крейн С. Г., Лаптев Г. И., Корректность граничных задач для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве. II, Дифф. уравнения, II, 7 (1966), 919—926.

32. Крейн С. Г., Прозоровская О. И., Аналитические полугруппы и некорректные задачи для эволюционных уравнений, ДАН СССР 133, 2 (1960), 277—280.

33. Крейн С. Г., Соболевский П. Е., Дифференциальные уравнения с абстрактным эллиптическим оператором в гильбертовом пространстве, ДАН СССР 118, 2 (1958), 233—236.

34. Любич Ю. И., Об условиях единственности решения абстрактной задачи Коши, ДАН СССР 130, 5 (1960), 969—972.

35. Любич Ю. И., К теореме единственности решения абстрактной задачи Коши, УМН **16**, 65 (1961), 181—182.
36. Любич Ю. И., Об условиях плотности начального многообразия для абстрактной задачи Коши, ДАН СССР **155**, 2 (1964), 262—265.
37. Любич Ю. И., Об условиях разрешимости абстрактной задачи Коши, ДАН СССР **154**, 1 (1964), 41—44.
38. Любич Ю. И., Классическое и локальное преобразование Лапласа в абстрактной задаче Коши, УМН **21**, 3 (1966), 3—51.
39. Лянце В. Э., Об одной краевой задаче для параболических систем дифференциальных уравнений с сильно эллиптической правой частью, Матем. сб. **35**, 2 (1954), 357—368.
40. Мамедов Я. Д., Соболевский П. Е., Дифференциальное уравнение с неограниченным постоянным оператором в банаховом пространстве, Уч. зап. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем. н., 3 (1963), 13—23.
41. Мамедов Я. Д., Соболевский П. Е., Дифференциальное уравнение с неограниченным переменным оператором в банаховом пространстве, Труды сем. по функц. анализу. Воронежск. ун-т, **7** (1963), 70—86.
42. Митягин Б. С., Дифференциальные уравнения с малым параметром в банаховом пространстве. Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-матем. и техн. н., 1 (1961), 23—38.
43. Панайоти Б. Н., Равномерная аппроксимация производной решения задачи Коши для уравнения второго порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-матем. и техн. н., **3** (1964), 53—64.
44. Прозоровская О. И., О квазианалитичности решений одного дифференциального уравнения, Труды сем. по функц. анализу, Воронежск. ун-т, **10** (1967), 144—148.
45. Соболевский П. Е., О приближенных методах решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, ДАН СССР **115**, 2 (1957), 240—243.
46. Соболевский П. Е., Обобщенные решения дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, ДАН СССР **122**, 6 (1958), 994—996.
47. Соболевский П. Е., О дифференциальных уравнениях первого порядка в гильбертовом пространстве с переменным положительно определенным самосопряженным оператором, дробная степень которого имеет постоянную область определения, ДАН СССР **123**, 6 (1958), 984—987.
48. Соболевский П. Е., Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве с неограниченным переменным оператором, имеющим постоянную область определения. ДАН Азерб. ССР **XVII**, 6 (1961).
49. Соболевский П. Е., Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве с неограниченным переменным оператором, дробная степень которого имеет постоянную область определения, ДАН СССР **138**, 1 (1961), 59—62.
50. Соболевский П. Е., Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве, Труды Моск. матем. о-ва **10** (1961), 297—350.

51. Соболевский П. Е., Исследование уравнений в частных производных с помощью дробных степеней операторов, Труды IV Всесоюз. матем. съезда, т. II, 1964, 519—525.
52. Соболевский П. Е., Об одном типе дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве, Уч. зап. Азерб. ун-та, 3 (1962), 87—106.
53 Соболевский П. Е., О дифференциальных уравнениях второго порядка в банаховом пространстве, ДАН СССР **146**, 4 (1962), 774—777.
54. Соболевский П. Е., Об уравнениях второго порядка с малым параметром при старшей производной, УМН **19**, 6 (1964), 217—219.
55. Соломяк М. З., Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха, ДАН СССР **122**, 5 (1958), 766—769.
56 Соломяк М. З., Дифференциальные уравнения в пространствах Банаха и их приложения, Труды Ленингр. корабл. ин-та, 28 (1959).
57. Соломяк М. З., О дифференциальных уравнениях в пространствах Банаха, Изв. высш. учебн. зав., Математика, 1 (1960), 198—209.
58. Якубов С. Я., Исследование задачи Коши для эволюционных уравнений гиперболического типа, ДАН Азерб. ССР **XX**, 4 (1964), 3—6.
59. Якубов С. Я., О задаче Коши для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве, ДАН СССР **168**, 4 (1966), 759—762.
60. Якубов С. Я., О разрешимости задачи Коши для эволюционных уравнений, ДАН СССР **156**, 5 (1964), 1041—1044.
61. Якубов С. Я., Разрешимость задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Функциональный анализ, Труды Ин-та матем. Азерб. ССР, 1967, 187—206.
62. Якубов С. Я., Дифференциальные уравнения высших порядков с переменными неограниченными операторами в банаховом пространстве, Изв. АН Азерб. ССР, 1 (1966), 20—27.
63. Якубов С. Я., Задача Коши для дифференциальных уравнений второго порядка параболического типа в банаховом пространстве, Изв. АН Азерб. ССР, 4 (1966), 3—8.
64. Якут Л. И., О сходимости конечно-разностных методов решения эволюционных уравнений, Труды сем. по функц. анализу, Воронеж. ун-т, 7 (1963), 76—79.
65. Якут Л. И., К вопросу обоснования сходимости разностных схем, ДАН СССР **151**, 1 (1963), 160—177.
66. Balakrishnan A. V., An operational calculus for infinitesimal generators of semi-groups, Trans. Amer. Math. Soc. **91**, 2 (1959), 330—353.
67. Balakrishnan A. V., Fractional powers of closed operators and the semi-groups generated by them, Pacific J. Math. **10**, 2 (1960), 419—437.
68. Feller W., On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators, Ann. Math. **58**, 1 (1953), 166—174.

69. Heinz E., Beitrage zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, Math. Ann. 123 (1951), 415—438.
70. Hille E., Notes on linear transformations I, Trans. Amer. Math. Soc. 39, 1 (1936), 131—153.
71. Hille E., Notes on linear transformations. Analyticity of semigroups, Ann. Math. 40, 1 (1939), 1—47.
72. Hille E., On semi-groups of transformations in Hilbert space, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 24 (1938), 159—161.
73. Hille E., On the analytical theory of semi-groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 28 (1942), 421—424.
74. Hille E., On the differentiability of semi-group operators, Acta Scient. Math. Szeged 12 (1950), 19—24.
75. Hille E., A note on Chauchy's problem, Ann. Soc. Polon. Math. 25 (1952), 56—68.
76. Hille E., Une généralisation du problème de Cauchy, Ann. Inst. Fourier 4 (1954), 31—48.
77. Hille E., Problème de Cauchy: existence et unicité de solutions, Bull. Math. R. P. R. 1, 2 (1957), 141—143.
78. Kato T., Notes on some inequalities for linear operators, Math. Ann. 125, 2 (1952), 208—212.
79. Kato T., Integration of the equation of evolution in a Banach space, J. Math. Soc. Japan 5 (1953), 208—234. (Русский перевод в сб. «Математика», 2 : 4 (1958).)
80. Kato T., On linear differential equations in Banach spaces, Comm. Pure Appl. Math. 9, 3 (1956), 479—486.
81. Kato T., Remarks on Pseudo-Resolvents and Infinitesimal Generators of semi-groups. Proc. Japan Acad. 35 (1959), 467.
82. Kato T, Note on fractional powers of linear operators, Proc. Japan Acad. 36 (1960), 94—96.
83. Kato T., Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces, Nagoya Math. 5, 19 (1961), 93—125.
84. Kato T., Fractional powers of dissipative operators, I—II, J. Math. Soc. Japan 13, 3 (1961), 246—274; 14, 2 (1962), 242—248.
85. Kato T., A generalisation of the Heinz Inequality, Proc. Japan Acad. 37, 6 (1961), 305—308.
86. Kato T., Tanabe H., On the abstract evolution equation, Osaka Math. J. 14 (1962), 107—133.
87. Kizynski J., Sur les opérateurs de Green des problèms de Cauchy abstraits, Studia Math. XXIII (1964), 285—328.
88. Lax P. D., Milgram A., Parabolic Equations, Contributions to the Theory of Partial Differential Equations, Ann. Math. Studies 33 (1954), 167—190.
89. Lax P. D., Richtmyer R. D., Survey of the stability of linear finite difference equations, Comm. Pure Appl. Math. 9 (1956), 267—293.
90. Miyadera J On one-parameter semi-group of operators, J. of Math. I (1951), 23—26.
91. Miyadera J., Generation of a strongly continuous semigroup operators, Tôhoku Math. J. 4 (1952), 109—114.

92. Nelson E., Feyman integral and the Schrödinger equations, J. Math. Phys. **V**, 3 (1964), 332—343.
93. Phillips R. S., On one parameter semi-group of linear transformations, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 234—237.
94. Phillips R. S., On the generation of semi-groups of linear operators, Pacific J. Math. 2 (1952), 343—369.
95. Phillips R. S., Perturbation theory for semi-groups of linear operators, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 199—221.
96. Phillips R. S., A note on the abstract Cauchy problem, Proc. Nat. Acad. Sci **40, 4** (1954), 244—248.
97. Phillips R. S., An inversion formula for Laplace transforms and semi-groups of linear operators, Ann. of Math. **59** (1954), 325—356.
98. Phillips R. S., Semi-groups of operators, Bull. Amer. Math. Soc. **61** (1955), 16—33.
99. Phillips R. S., Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. **90**, 2, 1959, 193—254.
100. Poulsen E. T., Evolutionsgleichungen in Banach — Räumen, Math. Zeitschr. **90** (1965), 286—309.
101. Rosenblum M., On the operator equation $BX - X\Lambda = Q$, Duke Math. J. **23**, 2 (1956), 263—269.
102. Tanabe H., A class of the equations of evolution in a Banach space, Osaka Math. J. **11**, 2 (1959), 121—145.
103. Tanabe H., Remarks on the equations of evolution in a Banach space, Osaka Math. J. **12**, 1 (1960), 145—166.
104. Tanabe H., On the equations of evolution in a Banach space, Osaka Math. J. **12**, 2 (1960), 363—376.
105. Tanabe H., Evolutional equations of parabolic type, Proc. Japan Acad. **37**, 10 (1961), 610—613.
106. Watanabe J., On some Properties of Fractional Powers of Linéar Operators, Proc. Japan Acad. **37**, 6 (1961), 273—275.
107. Yosida K., On the differentiability and the representation of one-parameter semi-group of operators, J. Math. Soc. Japan **1**, 1 (1948), 15—21.
108. Yosida K., Semi-group theory and the integration problem of diffusion equations, Proc. Intern. Congr. Amsterdam, 1954. (Русский перевод в сб. «Межд. матем. конгресс в Амстердаме», Физматгиз, 1961.)
109. Yosida K., An operator-theoretical integration of wave equations, J. Math. Soc. Japan **8**, 1 (1956), 79—82.
110. Yosida K., On the differentiability of semi-groups of linear operators, Proc. Japan Acad. **34** (1958), 337—340.
111. Yosida K., An abstract analyticity in time for solutions of a diffusion equation, Proc. Japan Acad. **35** (1959), 109—113.
112. Yosida K., Fractional Powers of infinitesimal Generators and the Analyticity of the Semi-groups Generated of them, Proc. Japan Acad. **36**, 1 (1960), 86—89.
113. Yosida K., On a class of infinitesimal generators and the integration problem of evolution equations, Proc. Fourth Berkl. Symp. Math. Statistics and Probability, v. II: Probability Theory, 1961.

114. Yosida K., On the integration of the equation evolution, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Soc. I 9, 4 (1963), 397—402.
115. Yosida K., A perturbation Theorem for Semi-groups of linear operators, Proc. Japan Acad. **41**, 8 (1965), 645—647.

3. Дополнительная литература

116. Валиков К. В., Характеристические показатели решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, ДАН СССР **153**, 5 (1964), 1010—1013.
117. Вишик М. И., Люстерник Л. А., Стабилизация решений некоторых дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, ДАН СССР **111**, 3 (1956), 12—15.
118. Далецкий Ю. Л., О представимости решений операторных уравнений в виде континуальных интегралов, ДАН СССР **134**, 5 (1960), 1013—1016.
119. Далецкий Ю. Л., Фундаментальные решения операторного уравнения и континуальные интегралы, Изв. высш. уч. зав., Математика **3** (22) (1961), 27—48.
120. Далецкий Ю. Л., Континуальные интегралы, связанные с некоторыми дифференциальными уравнениями и системами, ДАН СССР **137**, 2 (1961), 268—271.
121. Далецкий Ю. Л., Асимптотический метод для некоторых дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами, ДАН СССР **143**, 5 (1962), 1026—1029.
122. Дергузов В. И., Об устойчивости решений гамильтоновых уравнений в гильбертовом пространстве с неограниченными периодическими операторными коэффициентами, ДАН СССР **152**, 6 (1963), 1294—1296.
123. Дергузов В. И., Об устойчивости решений уравнений Гамильтона с неограниченными периодическими операторными коэффициентами. Матем. сб. **63**, **4** (1964), 591—619.
124. Дергузов В. И., Якубович В. А., Существование решений линейных гамильтоновых уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. ДАН СССР, **151**, 6 (1963), 1264—1267.
125. Домшлак Ю. И., О поведении на бесконечности решений эволюционного уравнения с неограниченным оператором. Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-матем. и техн. н. 5 (1961), 9—22.
126. Домшлак Ю. И., К теории дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с постоянным неограниченным оператором, ДАН АН Азерб. ССР, **XVIII**, 5 (1962), 3—6.
127. Домшлак Ю. И., О некоторых свойствах линейного дифференциального уравнения с неограниченным постоянным оператором в банаховом пространстве. Изв. АН Азерб. ССР, 1 (1963), 45—53.
128. Евграфов М. А., Структура решений экспоненциального роста для некоторых операторных уравнений, Труды Матем. ин-та им. Стеклова, **X** (1961), 145—180.

129. Иванов В. Н., Абстрактная задача Коши и теория возмущения замкнутых операторов, Труды Саратов. ин-та механизации с.-х., вып. 39, ч. III (1966), 3—58.
130. Козлов О. М., Дробные степени самосопряженных расширений операторов и некоторые граничные задачи, ДАН СССР, **123,** 6 (1958), 971—974.
131. Козлов О. М., О корнях из самосопряженных расширений операторов, Труды сем. по функц. анализу, Воронеж. ун-т, вып. 6 (1958), 66—82.
132. Крейн С. Г., О классах корректности для некоторых граничных задач. ДАН СССР **114,** 6 (1957), 1162—1165.
133. Крейн С. Г., Прозоровская О. И., О приближенных методах решения некорректных задач, Ж. вычислит. матем. и матем. физики **3,** 1 (1963), 120—130.
134. Красносельский М. А., Мамедов Я. Д., Замечание о применении дифференциальных и интегральных неравенств в вопросах о корректности задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, Научн. докл. Высш. шк. Отд. Физ.-матем. н. **2** (1959), 32—37.
135. Красносельский М. А., Левин А. Ю., Мамедов Я. Д., Об оценках решений дифференциальных уравнений второго порядка, Укр. матем. ж. **18,** 2 (1966), 110—116.
136. Кучеренко В. В., Некоторые классы возмущающих операторов для сильно непрерывных полугрупп. Вестник МГУ, сер. I, Матем.-мех., 6 (1966), 3—11.
137. Лаптев Г. И., Задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом и гильбертовом пространствах, Дифф. уравнения, II, 9 (1966), 1151—1160.
138. Лопатинский Я. Б., Об одном классе эволюционных уравнений, Докл. АН УРСР, 6 (1966), 711—714.
139. Любич Ю. И., Исследование дефекта абстрактной задачи Коши, ДАН СССР **166,** 4 (1966), 783—786.
140. Любич Ю. И., Ткаченко В. А., Теория и некоторые применения локального преобразования Лапласа, Матем. сб. **70,** 3 (1966), 416—437.
141. Мазья В. Г., Соболевский П. Е., О производящих операторах полугрупп, УМН **XVII,** 6 (1962), 151—154.
142. Мамедов Я. Д., Асимптотическая устойчивость дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченным оператором, Уч. зап. Азерб. гос. ун-та, сер. физ.-матем. и хим. н., 1 (1960), 3—7.
143. Мамедов Я. Д., О некоторых свойствах решений нелинейных уравнений гиперболического типа в гильбертовом пространстве, ДАН СССР **158,** 1 (1964), 45—48.
144. Мамедов Я. Д., Односторонние оценки при условиях исследования решений дифференциальных уравнений. Уч. зап. Азерб. гос. ун-та 5 (1964), 17—25.
145. Мамедов Я. Д., О некоторых свойствах решений нелинейных уравнений параболического типа в гильбертовом пространстве, ДАН СССР **161,** 5 (1965), 1011—1014.

46. Мамедов Я. Д., Соболевский П. Е., Об одной теореме Э. Хилле, ДАН Азерб. ССР, **XXII**, 7 (1966), 7—9
147. Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, МГУ, Москва, 1965.
148. Маслов В. П., Теория возмущений линейных операторных уравнений и проблема малого параметра в дифференциальных уравнениях. ДАН СССР **111**, 3 (1956), 531—534.
149. Маслов В. П., О некоторых методах функционального анализа в теории операторных и дифференциальных уравнений в частных производных с параметрами, УМН **XIV**, **4** (1959), 179—185.
150. Мацаев В. И., Палант Ю. А., О степенях ограниченного диссипативного оператора, Укр. матем. ж. **XIV**, **3** (1962), 329—337.
151. Меламед Е. Я., Применение полугрупп к исследованию ограниченности решений некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Изв. высш. уч. зав., Математика, 6 (1964), 123—133.
152. Погореленко В. А., Соболевский П. Е., Гиперболические уравнения в гильбертовом пространстве, Сиб. матем. ж., VIII, 1, 1967, 123—145.
153. Прозоровская О. И., О быстроте убывания решений эволюционных уравнений, Сиб. матем. ж. **3**, 3 (1962), 391—408.
154. Прокопенко Л. И., О единственности решения задачи Коши для операторно-дифференциальных уравнений, ДАН СССР **148**, 5 (1963), 1030—1033.
155. Раскин В. Г., Соболевский П. Е., Задача Коши для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховых пространствах, Сиб. матем. ж., VIII, 1, 1967, 70—90.
156. Рихтмайер Р. Д., Абстрактная теория линейной неоднородной задачи Коши, Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики, АН СССР СО, 1966.
157. Соболевский П. Е., Об одном приближенном методе решения дифференциальных уравнений, Записки ВСХИ, **XXVIII**, 2 (1958), 399—400.
158. Соболевский П. Е., Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений, ДАН СССР **157**, 1 (1964), 52—55.
159. Соболевский П. Е., Обобщенные решения дифференциальных уравнений первого порядка в банаховом пространстве, ДАН СССР **165**, 3 (1965), 486—489.
160. Соболевский П. Е., О дробных степенях слабо позитивных операторов, ДАН СССР **166**, 6 (1966), 1296—1299.
161. Соболевский П. Е., О разрешимости параболических уравнений в пространствах Лоренца, УМН **21**, 1 (1966), 169—171.
162. Соболевский П. Е., О параболических уравнениях с общими граничными условиями, ДАН СССР **170**, 5 (1966), 1024—1027.
163. Соломяк М. З., Аналитичность полугруппы, порожденной эллиптическим оператором в пространствах $\mathscr{L}_p$, ДАН СССР **127**, 1 (1959), 37—39.

164 Сулейманов Н. М., О корректных краевых задачах для операторных уравнений в полупространстве в классе обобщенных функций, Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 5 (1959), 21—35.
165. Треногин В. А., Асимптотика и существование решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве, ДАН СССР **152**, 1 (1963), 63—66.
165a. Треногин В. А., Существование и асимптотика решений типа уединенной волны для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, ДАН СССР **156**, 5 (1964), 1033—1036.
166. Треногин В. А., Краевые задачи для абстрактных эллиптических уравнений, ДАН СССР **170**, 5 (1966), 1028—1031.
167. Фомин В. Н., Об устойчивости линейных гамильтоновых уравнений с периодическими коэффициентами в гильбертовом пространстве, Вестник Ленингр. ун-та, 7 (1964), 37—45.
168. Agmon S., Nirenberg L., Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space, Commun. Pure Appl. Math. **16**, 2 (1963), 121—239.
169. Balakrishnan A. V., Abstract Cauchy problems of the elliptic type, Bull. Amer. Math. Soc. **64**, 5 (1958), 290—291.
170. Berens H., Butzer P. L., Über die Stetigkeit von Halbgruppen von Operatoren in intermediaren Räumen, Math. Ann. **163**, 3 (1966), 204—211.
171. Cohen P. J., Lees M., Asymptotic decay of solutions of differential inequalities, Pacific J. Math. **11**, 4 (1961), 1235—1250.
172. Dixmier J., Sur une inegalité de E. Heinz, Math. Ann. **126** (1953), 75—78.
173. Elliot J., The equation of evolution in a Banach space, Trans. Am. Math. Soc. **103**, 3 (1962), 470—483.
174. Feller W., The parabolic differential equations and associated semi-groups of transformations, Ann. Math. **55**, 3 (1952), 468—519. (Русский перевод в сб. «Математика», 1 : 4 (1957)).
175. Feller W., Semi-groups of transformations in general weak topologies, Ann. Math. **57**, 2 (1953), 287—308.
176. Foias C., On strongly continuous semigroups of spectral operators in Hilbert space, Acta Scient. Math. Szeged, **19**, 3 (1958), 188—191.
177. Foias C., Gussi Gh., Poenaru V. Sur les solutions généralisées de certaines équations linéaires et quasilinéaires dans l'espaces de Banach, Revue Matem. pure et appl. **3**, 1958.
178. Foias G., Gussi Gh., Poenaru V., L'etude de l'equation $\frac{du}{d\tau}=A(\tau)u$ pour certaines classes d'operateurs non bornés de l'espace de Hilbert, Trans. Amer. Math. Soc. **86**, 2 (1957), 335—347.
179. Friedman A., Uniqueness of Solutions of Ordinary Differential Inequalities in Hilbert Space, Arch. Rat. Mech. and Analysis, **17**, 5 (1964), 353—357.
180. Friedman A., Differentiability of solution of ordinary differential equations in Hilbert space, Pacific J. Math. **18**, 2 (1966), 267—271.

181. Hasegawa M., A note on the convergence of semi-groups of operators, Proc. Japan Acad. **40** (1964), 262—266.
182. Hasegawa M., On contraction semi-groups and (di)-operators, J. Math. Soc. Japan **18**, 3 (1966), 290—302.
183. Heyn E., Die Differentialgleichung für Operatorfunktionen, Math. Nachr. **24**, 5 (1962), 281—290.
184. Komatzu H., Abstract analiticity in time and unique continuotion property of solutions of a parabolic equation, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I **9**, 1 (1961), 1—11.
185. Komatzu H., Semi-groups of operators in locally convex spaces, J. Math. Soc. Japan **16**, 3 (1964).
186. Komatzu H., Fractional powers of operators, Pacific J. Math. **19**, 2 (1966).
187. Langer H., Über die Wurzeln eines maximalen dissipativen operators, Acta Math. Asad. Sci. Hunger **13**, 3—4 (1962), 415—424.
188. Lax P. D., A stability theorem for solutions of abstract differential equations and its application to the study of the local behavior of solutions of elliptic equations, Commun. Pure and Appl. Math. **9** (1956), 747—766.
189. Lions J. L., Une remarque sur les applications du théoreme de Hille — Yosida, J. Math. Soc. Japan **9**, 1 (1957), 62—70.
190. Lions J. L., Equations différentielles à coefficients opérateurs non bornés, Bull. Soc. Math. France **86**, 4 (1958), 321—330.
191. Lions J. L., Sur certaines équations différentielles à coefficients opérateurs non bornés, J. Analyse Math. Israel **6** (1958), 333—355.
192. Lions J. L., Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires d'operateurs, J. Math. Soc. Japan **14**, 2 (1962), 241—253.
193. Lummer G., Semi-inner product spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 29—43.
194. Lummer G., Phillips R. S., Dissipative operators in a Banach space. Pacific J. Math. **11**, 2 (1961), 679—698.
195. Miyadera J., On the generation of a strongly ergodic semi-group of operators, Tôhoku Math. J. (2) **6** (1954), 38—52, 231—254.
196. Miyadera J., A note on contraction semi-groups of operators, Tôhoku Math. J. (2); **11**, 2 (1959), 109—114.
197. Miyadera J. Semi-groups of operators in Fréchet space and applications to partial differential equations, Tôhoku Math. J. **XI**, 2 (1959), 162—183.
198. Mlak W., Integration of differential equations with unbounder operators in abstract (L)-spaces, Bull. Acad. Polon. sci. Sér. math., astron. et phys. **8**, 3 (1960), 163—168.
199. Mlak W., Differential inequalities with unbounded operators in Banach spaces, Ann. Polon. math. **9**, 1 (1960), 101—111.
200. Mlak W., On semi-groups of contractions in Hilbert spaces, studia Math. **26**, 3 (1966).
201. Olubummo A., A note on contraction semi-groups of operators, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1964), 818—822.

02. Phillips R. S., The adjoint semi-group, Pacific J. Math. **5**, 2 (1955), 269—283.

03. Phillips R. S., Dissipative operators and parabolic partial differential equations, Comm. pure and appl. math. **12**, 2 (1959), 249—276.

04. Phillips R. S., Semi-groups of positive contraction operators, Czechoslovak Math., J. **12**, 2 (1962), 294—313.

05. Phillips R. S., Spectral theory for semi-groups of linear operators, Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 3 (1951), 393—415.

06. Reuter G. E. H., A note on contraction semi-groups, Math., Scand. **3** (1955), 275—280.

07. Tanabe H., Note on singular perturbation for abstract differential equations, Osaka Math. J., 1 (1964), 239—252.

08. Tanabe H., Convergence to a Stationary State of the Solution of Some Kind of Differential Equations in a Banach Space, Proc. Japan Acad. **37**, 3 (1966), 127—130.

09. Trotter H. F., Approximation of semi-groups of operators, Pacific J. Math. **8**, 4 (1958), 887—919.

10. Trotter H. F., On the product of semi-groups of operators, Proc. Amer. Math. Soc. **10**, 4 (1959), 545—551.

11. Yosida K., An operator-theoretical treatment of temporally homogeneous Markoff process; J. Math. Soc. Japan **1**, 3 (1949), 244—283.

12. Yosida K., An operator theoretical Integration of the Temporally inhomogeneous Wave Equation, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **VII**, 4 (1957), 463—466.

13. Yosida K., Holomorphic semi-groups in a locally convex linear topological space, Osaka Math. J., **15**, 1 (1963), 51—57.

14. Yosida K., Time Dependent Evolution Equations in a Locally Convex Space, Math. Ann. **162**, 1 (1965), 83—86.

15. Zaidman S., Convexity properties for weak solutions of some differential equations in Hilbert spaces, Canad. J. Math. **17**, 5 (1965), 802—807.

4. Вспомогательная литература

16. Агранович М. С., Вишик М. И., Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН **XIX**, 3 (1964), 53—161.

17. Вишик М. И., Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения, Матем. сб. **39**, 1 (1956), 51—148.

18. Вишик М. И., Ладыженская О. А., Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений, УМН **11**, 6 (1956), 41—97.

19. Вишик М. И., Люстерник Л. А., Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН **XII**, 5 (1957), 3—122.

220. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Физматгиз, Москва, 1958.
221. Глушко В. П., Крейн С. Г., Неравенства для норм производных в пространствах $\mathscr{L}_p$ с весом. Сиб. матем. ж. **I**, 3 (1960), 343—382.
222. Горин Е. А., О квадратичной суммируемости решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, Сиб. матем. ж. **II**, 2 (1961), 221—232.
223. Горин Е. А., Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций от нескольких переменных, УМН **16**, 1 (1961), 91—118.
224. Горин Е. А., О разрешимости задачи Коши в классе квадратично интегрируемых функций для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, Вестник МГУ, 4 (1965), 6—12.
225. Дезин А. А., К теории операторов вида $\frac{d}{dt} - A$, ДАН СССР **164**, 5 (1965), 963—966.
226. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Итерационный процесс с минимальными невязками, Матем. сб. **31**, 2 (1952), 315—334.
227. Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959.
228. Ладыженская О. А., Применение функционального анализа для доказательства существования решений краевых задач для уравнений с частными производными трех основных типов, УМН **10**, 4 (1955), 200—201.
229. Ладыженская О. А., О решении нестационарных операторных уравнений, Матем. сб. **39**, 4 (1956), 491—524.
230. Ладыженская О. А., О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики, Матем. сб. **45**, 2 (1958), 123—158.
231. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952.
232. Петровский И. Г., О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций, Бюлл. МГУ, сер. матем. и мех. I, 7 (1938), 1—72.
233. Соломяк М. З., Оценка нормы резольвенты эллиптического оператора в пространствах $\mathscr{L}_p$. УМН **15**, 6 (1960), 141—148.
234. Фадеева Е. А., О задаче Коши для линейного гиперболического уравнения первого порядка с операторными коэффициентами, ДАН СССР, (1967).
235. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д., Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений «Наукова думка», 1966.
236. Халилов З. И., Об устойчивости решений уравнения в банаховом пространстве, ДАН СССР **137**, 4 (1961), 797—799.
237. Эйдельман С. Д., Параболические системы, «Наука», 1964.

238 Agmon S., On the Eigenfunctions and on the Eigenvalues of General Elliptic Boundary Value Problems, Commun. Pure Appl. Math. **XV**, 2 (1962), 119—147.

239. Birkhoff G., Well-set Cauchy Problems and Co-semigroups, J. Math. Analysis and Appl. **8** (1964), 303—324.

240. Birkhoff G., Mullikin T., Regular partial differential equations, Proc. Amer. Math. Soç. **9** (1958), 18—25.

241. Bochner S., Diffusion equations and stochastic processes, Proc. Nat. Ac. Sci. **35** (1949), 369—370.

242. Bullen P. S., A new proof of an inequality of Heinz, Canad. Math. Bull. **7**, 1 (1964), 97—100.

243. Cooper J. L. B., One parameter semi-groups of isometric operators in Hilbert space, Ann. Math. **48** (1947), 827—842.

244. Cooper J. L. B., Symmetric operators in Hilbert space, Proc. London Math. Soc. **50** (1948), 11—55.

245. Foguel S. R., A counterexample to a problem of SZ-Nagy, Proc. Amer. Math. Soc. **15**, 5 (1964), 788—790.

246. Foias C., Gehér C. L., Sz-Nagy B., On the permutability condition of quantum mechanics, Acta Sci. Math., Szeged **21** (1960), 78—79.

247. Foias C., Lions J. L., Sur certaines thèorémes d'interpolation, Acta Sc. Math. Szeged **22** (1961), 269—282.

248. Halmos A. R., On Foguel's answer to Nagy's question, Proc. Amer. Math. Soc. **15**, 5 (1964), 791—793.

249. Kato T., On the perturbation theory of closed linear operators, J. Math. Soc. Japan **4** (1952).

250. Kato T., On the Commutation Relation $AB-BA=c$, Arch. Rat. Mech. and Annal. **10**, 4 (1962), 273—275.

251. Kreiss G. O., Über Sachgemässe Cauchyprobleme für systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen, Kungliga Tekniska Högskolams Handlingar, Stockholm **127** (1958), 1—31 (Русский перевод в сб. «Математика», 7 : 2.)

252. Lax P. D., Operator theoretic treatment of hyperbolic equations, Abstract 180, Bull. Amer. Math. Soc. **58**, 182 (1952).

253. Lax P. D., On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations, Commun. Pure Appl. Math. **8** (1955), 615—633.

254. Lax P. D., Phillips R. S., Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators, Commun. Pure and Appl. Math. **13**, 3 (1960), 427—455.

255. Leader S., On the infinitesimal generator of a semi-groups of positive transformations with local character condition, Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 3 (1954), 401—406.

256. Lions J. L., Problèmes mixtes abstraits, Congr. Int. Math. Edinburg, 1958, 389—397.

257. Lions J. L., Equations differentielles du premier ordre dans un espace de Hilbert, C. R., Acad. Sci., **248** (1959), 1099—1102.

258. Lions J. L., Sur les semi-groupes distributions, Porteeg. Math. **19** (1960), 141—164.

259. Lions J. L., Remarques sur les équations differéntielles operationeles, Osaka, Math. J. **15**, 1 (1963), 131—142.

260. Lions J. L., Quelques remarques sur les équations differentielles operationelles du I-er ordre, Rend. Sem. Math. Univ. Padova, **33** (1963), 213—225.
261. Lions J. L., Malgrange B., Sur l'unicité rétrograde, Math. Scand. **8** (1960), 277—286.
262. Lions J. L., Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications, Bull. Math. R. P. R. Bucarest **2** (1958), 419—432.
263. Mizohata S., Le problème de Cauchy pour les équations paraboliques, J. Math. Soc. Japan **8**, 4 (1956), 269—299.
264. Mizohata S., Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques, Mem. Coll. Sci Univ. Kyoto, ser A. **XXX**, 2 (1957), 83—90.
265. Odnoff S., Un exemple de non-unicité d'une équation differentielle opérationele, C. r. Acad. Sci., **258**, 6 (1964), 1689—1691.
266. Phillips R. S., Dissipative hyperbolic systems, Trans. Amer. Math. Soc. **86** (1957), 109—173.
267. Schwartz L., Les équations d'évolution liees on produit de composition, Ann. Inst. Fourier **2** (1950), 19—49.
268. Shirota T., On Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients, Osaka, Math. J. **9**, 1 (1957), 43—59.
269. Shirota T., A remark on the abstract analyticity in time for solution of a parabolic equation, Proc. Japan Acad. **35**, 7 (1959), 367—369.