

Современные проблемы  
МАТЕМАТИКИ

---

---

А. Г. Витуцкин

О МНОГОМЕРНЫХ  
ВАРИАЦИЯХ



Государственное издательство  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
Москва · 1955

---

# СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

СЕРИЯ ВЫПУСКАЕТСЯ ПОД ОБЩИМ РУКОВОДСТВОМ  
РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ ЖУРНАЛА  
«УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК»

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1955

А. Г. ВИТУШКИН

О МНОГОМЕРНЫХ  
ВАРИАЦИЯХ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1955

*Витушкин Анатолий Георгиевич. О многомерных вариациях.*

Редактор *М. М. Горячая*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов*

Корректор *Н. В. Казанская*

Сдано в набор 28/VI 1955 г. Подписано к печати 28/IX 1955 г. Бумага 84×108 $\frac{1}{32}$ .  
Физ. печ. л: 6,875. Условн. печ. л. 11,27. Уч.-изд. л. 11,65. Тираж 3000 экз. Т-05000.  
Заказ № 565. Цена книги 5 р. 85 к.

---

Государственное издательство технико-теоретической литературы  
Москва, В-71. Б. Калужская, 15.

---

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической  
промышленности. 4-я тип. им. Евг. Соколовой.  
Ленинград, Измайловский пр., 29.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	7
<b>Г л а в а 1. Вместо введения . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1. Вариация функции одного переменного . . . . .	9
§ 2. Некоторые определения вариации функции двух переменных . . . . .	11
§ 3. Вариации А. С. Кронрада . . . . .	14
<b>Г л а в а 2. Определение вариаций . . . . .</b>	<b>16</b>
§ 4. Вариации плоского подмножества . . . . .	16
§ 5. Вариации подмножества трёхмерного евклидова пространства . . . . .	20
§ 6. Некоторые сведения из теории меры . . . . .	22
§ 7. Некоторые вспомогательные пространства . . . . .	25
§ 8. Определение меры в пространствах $\Phi_k^n$ и $\Omega_k^n$ . . . . .	27
§ 9. Определение некоторых функций множества . . . . .	30
§ 10. Вариации множества . . . . .	40
§ 11. Вариации функции многих переменных . . . . .	42
<b>Г л а в а 3. Свойства вариаций множества . . . . .</b>	<b>46</b>
§ 12. Некоторые классы измеримых ( $v_k$ ) множеств . . . . .	46
§ 13. Простейшие свойства вариаций множества . . . . .	51
§ 14. Линейная вариация и длина множества . . . . .	52
§ 15. Пример Д. Е. Меньшова . . . . .	66
§ 16. Вариация как мера множества . . . . .	73
§ 17. Независимость вариаций множества . . . . .	75
<b>Г л а в а 4. Свойства вариаций функций . . . . .</b>	<b>84</b>
§ 18. Измеримость ( $v_k$ ) непрерывных функций . . . . .	84
§ 19. Простейшие свойства вариаций функций . . . . .	86
§ 20. Независимость вариаций функций . . . . .	89
§ 21. Свойства старшей вариации функции . . . . .	102
§ 22. Ещё три определения старшей вариации . . . . .	104
§ 23. Вычисление старшей вариации функции . . . . .	107
<b>Г л а в а 5. Свойства функции ограниченной вариации . . . . .</b>	<b>111</b>
§ 24. Одномерное дерево функции . . . . .	111
§ 25. Разложение функции ограниченной вариации в разность двух монотонных функций . . . . .	115

§ 26. Гладкость функции ограниченной вариации . . . . .	124
§ 27. Сходимость ряда Фурье функции ограниченной вариации . . . . .	131
<b>Г л а в а 6. Достаточные условия для ограниченности вариаций функции . . . . .</b>	<b>133</b>
§ 28. Достаточные условия для ограниченности старшей вариации функции . . . . .	133
§ 29. Регулярная компонента уровня гладкой функции . . . . .	134
§ 30. Кольцоид и его строение . . . . .	136
§ 31. Связки кольцоидов . . . . .	142
§ 32. Вариация гладкой функции одного переменного . . . . .	145
§ 33. Теорема Е. М. Ландиса . . . . .	147
§ 34. Уровни полинома . . . . .	152
§ 35. Основная лемма . . . . .	155
§ 36. Оценка сверху величины $H_1^l$ . . . . .	160
§ 37. Оценка сверху величины $H_k^l$ ( $1 < k < n$ ) . . . . .	165
§ 38. Оценка сверху величины $H_n^l$ . . . . .	174
§ 39. Достаточные условия для ограниченности $k$ -кратной вариации функции . . . . .	185
§ 40. Достаточные условия для ограниченности вариаций множества . . . . .	190
<b>Г л а в а 7. Приложения вариаций . . . . .</b>	<b>194</b>
§ 41. Вариации внутри области . . . . .	194
§ 42. Метрический закон двойственности . . . . .	195
§ 43. Тринадцатая проблема Гильберта . . . . .	199
§ 44. Аппроксимация суперпозиции функций суперпозицией полиномов . . . . .	203
§ 45. Оценка вариаций некоторых множеств . . . . .	206
§ 46. Основная лемма . . . . .	209
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>216</b>
<b>Цитированная литература . . . . .</b>	<b>218</b>
<b>Основные понятия и некоторые систематически встречающиеся обозначения . . . . .</b>	<b>219</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предметом этой монографии являются вариации подмножеств многомерных евклидовых пространств и вариации функций многих переменных.

Для множеств вариации являются своеобразными метрическими характеристиками. Подобно мерам они характеризуют интенсивность множества. Как известно, меры множества обладают тем свойством, что если мера некоторого порядка положительна и конечна, то все меры высших порядков равны нулю, а низших — бесконечности.

Это означает, что меры, даже все вместе, описывают множество лишь с точки зрения некоторой одной размерности. Вариации в этом отношении более совершенны. Они независимы в том смысле, что для любых наперёд заданных положительных чисел (конечных или бесконечных) можно указать множество, вариации которого равны этим числам. Это означает, что вариации множества характеризуют его с точки зрения всех размерностей одновременно. Для простейших множеств одна из вариаций обычно совпадает с мерой соответствующей размерности. Например, линейная вариация простой дуги всегда равна её длине, плоская вариация достаточно гладкой поверхности — равна её площади и т. п. Более того, некоторые группы мер полностью охватываются системой вариаций. Так, например, меры Фавара всех порядков однозначно восстанавливаются по численным значениям вариаций множества. При этом полезно отметить, что как меры Фавара, так и вариации вычисляются по индуктивным формулам через соответствующие характеристики меньших размерностей. Это делает их удобными в приложениях. Но по сравнению с мерами, как и следовало ожидать, вариации имеют ряд дефектов. Наиболее ощутимым из них является, пожалуй, тот факт, что вариации в общем виде не только не аддитивны, но даже и не монотонны.

Вариации множества обладают тем интересным свойством, что, характеризуя интенсивность множества, они одновременно описывают и некоторые метрические свойства дополнения к этому множеству. Это позволило сформулировать в терминах вариаций некоторые метрические теоремы, аналогичные топологическим законам двойственности. Подобного рода теоремы привели к некоторым существенным аналитическим приложениям. С помощью вариаций удалось решить некоторые задачи о невозможности представления некоторых функций многих переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных (13-я проблема Д. Гильберта).

Вариации функции многих переменных получаются как интегралы по всем уровням от вариаций множеств уровня. Таким образом, для функции  $n$  переменных получается  $n$  вариаций. Для непрерывной функции, заданной на отрезке, таким образом определённая вариация совпадает с изменением этой функции, а для непрерывных функций двух переменных, определённых на квадрате, эти вариации оказываются равными линейной и плоской вариациям А. Кронрода. Вариации функции, так же как и вариации множества, оказываются независимыми. Как функционалы все вместе вариации функции обладают всеми свойствами, присущими изменению функции одного переменного. Функции ограниченной вариации, т. е. функции, вариации всех порядков от которых конечны, в той или иной форме обладают, по существу, всеми свойствами, аналогичными свойствам функций с конечным изменением. Такие функции представимы в виде разности двух монотонных функций, почти всюду имеют полный дифференциал, разлагаются в сходящийся ряд Фурье и т. п.

В заключение хочется самым искренним образом поблагодарить рецензентов книги А. Н. Колмогорова и Е. М. Ландиса, просмотревших рукопись и давших ряд ценных советов, а также терпеливого и энергичного редактора М. М. Горячую, положившую немало труда на то, чтобы придать книге удобный для чтения вид.

## ГЛАВА 1

### ВМЕСТО ВВЕДЕНИЯ

#### § 1. Вариация функции одного переменного

Впервые с определением понятия вариации (изменения) функции и изучением этого понятия мы встречаемся в мемуарах Жордана.

**Определение 1.** Пусть  $y = f(x)$  есть однозначная вещественная функция, определённая на некотором подмножестве  $e$  действительных чисел, а  $x_1, x_2, \dots, x_l$  — произвольный набор чисел из  $e$ . Верхняя грань

$$v(f, e) = \sup_{x_1, x_2, \dots, x_l} \sum_{i=1}^{l-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

по всевозможным  $l$  и всевозможным конечным наборам чисел  $x_1, x_2, \dots, x_l$  из  $e$ , таким, что  $x_1 < x_2 < \dots < x_l$ , называется *изменением (вариацией) функции  $f(x)$  на множестве  $e$* . Если  $v(f, e) < +\infty$ , то  $f(x)$  называется *функцией с конечным изменением*.

Функции с конечным изменением образуют сравнительно широкий класс функций одного переменного \*), и в то же время такие функции обладают рядом разнообразных интересных свойств. В этом параграфе мы ограничимся лишь формулировкой наиболее существенных свойств изменения функции и свойств функций с конечным изменением [1].

**Свойство 1.** Для всякой константы  $c$  имеем:

$$v(f + c, e) = v(f, e) \quad \text{и} \quad v(cf, e) = |c| v(f, e).$$

---

\*) Например, функция с условием Липшица имеет конечное изменение на всяком ограниченном множестве.

**Свойство 2.** Пусть  $f(x)$  и  $g(y)$  суть две функции, определённые соответственно на  $e_1$  и  $e_2$ . Пусть существует взаимно однозначное монотонное преобразование  $y = \varphi(x)$  множества  $e_1$  в  $e_2$  такое, что для всякого  $x$  из  $e_1$  имеет место равенство  $g(\varphi(x)) = f(x)$ . Тогда  $v(f, e_1) = v(g, e_2)$ .

**Свойство 3.** Для всякого множества  $e$  и функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , определённых на нём, имеет место неравенство

$$v(f+g, e) \leq v(f, e) + v(g, e).$$

**Свойство 4.** Если на множестве  $e$  последовательность функций  $f_k(x)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) сходится к функции  $f(x)$ , то

$$v(f, e) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} v(f_k, e).$$

**Свойство 5.** Пусть  $f(x)$  есть непрерывная функция, определённая на отрезке  $r$ , а  $\xi(t)$  — число точек множества уровня  $t$  функции  $f(x)$ . Тогда  $\xi(t)$  измерима по Лебегу и

$$v(f, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) dt \text{ (теорема С. Банаха).}$$

**Свойство 6.** Если  $f(x)$  имеет на отрезке  $[a, b]$  конечное изменение, то она представима на этом отрезке в виде разности двух неубывающих функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ :  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ . При этом, если  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то соответствующие функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  могут быть выбраны также непрерывными на рассматриваемом отрезке.

**Свойство 7.** Если  $v(f, e) < +\infty$ , то функция  $f(x)$  имеет производную почти всюду на  $e$ .

**Свойство 8.** Если  $f(x)$  абсолютно непрерывна на отрезке  $r$  ( $a \leq x \leq b$ ), то

$$v(f, r) = \int_a^b \left| \frac{df}{dx} \right| dx.$$

**Свойство 9.** Пусть  $f(x)$  есть периодическая (с периодом  $2\pi$ ) непрерывная на всей прямой функция, имеющая на отрезке  $0 \leq x \leq 2\pi$  конечное изменение. Тогда ряд Фурье, соответствующий функции  $f(x)$ , равномерно сходится на всей прямой к  $f(x)$ .

**Свойство 10** (принцип выбора Хелли). Пусть  $f_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) есть семейство функций, равномерно

ограниченное на отрезке  $r$  ( $a \leq x \leq b$ ). Пусть  $v(f_i, r) < c$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), где  $c$  — некоторая положительная константа, не зависящая от  $i$ . Тогда из последовательности  $\{f_i(x)\}$  можно выделить подпоследовательность функций, сходящуюся в каждой точке из  $r$ .

## § 2. Некоторые определения вариации функции двух переменных

Известно много обобщений понятия вариации (изменения) функции одного переменного на случай функции многих переменных. Например, вариации Витали, Арцеля, Фреше, Хаана, Харди, Перпонта [2], Тонелли [6], А. С. Кронрода [3], Л. Д. Кудрявцева [4], Р. А. Минлоса [5] и др. являются такого рода обобщениями.

Большинство известных определений вариации функции многих переменных сводится к тому, что автор определяет один функционал, ограниченность которого гарантирует наличие у рассматриваемой функции ряда свойств, аналогичных свойствам функции с конечным изменением. Такой подход к обобщению понятия изменения функции не давал возможности построить сколько-нибудь полную теорию. Выходило так, что перечень свойств функции с ограниченной вариацией оказывался односторонним и ощутимо бедным по сравнению со списком свойств функции с конечным изменением, хотя в терминах каждой из таких вариаций удавалось формулировать отдельные интересные теоремы. Опыт подобного рода обобщений натолкнул на мысль о том, что функция многих переменных характеризуется несколькими функционалами (вариациями), которые в некотором смысле независимы. Последнее вполне чётко и обоснованно впервые было высказано А. С. Кронродом. Для функции двух переменных он определил две вариации (линейную и плоскую). Определение этих вариаций будет приведено в следующем параграфе, здесь же мы остановимся на определении наиболее типичных и независимых друг от друга вариаций функции двух переменных, которые появились раньше вариаций А. С. Кронрода, и укажем на некоторые их приложения.

Пусть  $E_2$  есть двумерная плоскость;  $x, y$  — координаты произвольной точки из  $E_2$  относительно прямоугольной системы координат  $X, Y$ ;  $R$  ( $a \leq x \leq b; c \leq y \leq d$ ) — прямоугольник из  $E_2$ ;  $f(x, y)$  — функция, заданная на  $R$ .

Определение 2 (Витали). Пусть  $x_i$  и  $y_j$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ) суть числа такие, что

$$\left. \begin{array}{l} a = x_1 < x_2 < \dots < x_l = b, \\ c = y_1 < y_2 < \dots < y_m = d. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Положим:

$\varphi_j^i = f(x_{i+1}, y_{j+1}) + f(x_i, y_j) - f(x_i, y_{j+1}) - f(x_{i+1}, y_j)$   
 $(i = 1, 2, \dots, l-1, j = 1, 2, \dots, m-1)$ . Верхнюю грань  
 $v(f, R) = \sup_{l, m, \{x_i\} \{y_j\}} \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=1}^{m-1} |\varphi_j^i|$  по всевозможным  $l, m$  и  
 всевозможным набором чисел  $x_i$  и  $y_j$  ( $i = 1, \dots, l$ ;  $j = 1, \dots, m$ ), удовлетворяющим соотношениям (1), Витали называет *вариацией функции*  $f(x, y)$  на *прямоугольнике*  $R$ .

С помощью вариации Витали легко обобщить понятие интеграла Стильеса на случай функции многих переменных.

Пусть  $\varphi(x, y)$  есть фиксированная функция, определённая и непрерывная на  $R$ , с конечной вариацией Витали на прямоугольнике  $R$ , а  $g(x, y)$  — произвольная непрерывная на  $R$  функция. Обозначим через  $r(n, n_1, n_2)$  прямоугольник из  $R$ , определяемый соотношениями

$$\begin{aligned} a + \frac{n_1(b-a)}{n} &\leq x \leq a + \frac{(n_1+1)(b-a)}{n}, \\ c + \frac{n_2(d-c)}{n} &\leq y \leq c + \frac{(n_2+1)(d-c)}{n} \end{aligned}$$

$$(n_1 = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots, n-1; \\ n = 1, 2, \dots).$$

Можно доказать, что последовательность

$$\sum_{n_1=0}^{n-1} \sum_{n_2=0}^{n-1} g\left(a + \frac{n_1(b-a)}{n}, c + \frac{n_2(d-c)}{n}\right) v(\varphi, r(n, n_1, n_2))$$

имеет предел  $I_\varphi(g)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Величина

$$I_\varphi(g) = \int_R g(x, y) v(\varphi, dR)$$

называется *определенным интегралом Стильтьеса*—*Витали* от функции  $g(x, y)$  по функции  $\varphi(x, y)$  на прямоугольнике  $R^*$ .

**Определение 3** (Арцеля). Пусть  $x_i$  и  $y_j$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ,  $j = 1, \dots, l$ ) суть числа такие, что

$$\left. \begin{array}{l} a = x_1 < x_2 < \dots < x_l = b, \\ c = y_1 < y_2 < \dots < y_l = d. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Функцию  $f(x, y)$  Арцель называет функцией с *ограниченной вариацией*, если величина  $\sum_{i=1}^{l-1} |f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)|$  ограничена (равномерно по  $l, x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l$ ) для всевозможных  $l, x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l$ , удовлетворяющих неравенствам (2).

Всякая непрерывная функция с ограниченной вариацией Арцеля разлагается в разность двух более простых по своему строению функций.

**Теорема 1** (Арцеля). *Всякая непрерывная функция  $f(x, y)$  с ограниченной на прямоугольнике  $R$  вариацией Арцеля представима на  $R$  в виде разности двух неубывающих по  $y$ \*\*) непрерывных функций с ограниченными вариациями Арцеля [6].*

**Определение 4** (Тонелли). Обозначим через  $\psi_1(x_0)$  изменение функции  $f(x_0, y)$  (в смысле определения 1) на отрезке  $c \leq y \leq d$  при  $x_0 = \text{const}$ , а через  $\psi_2(y_0)$ —изменение  $f(x, y_0)$  на отрезке  $a \leq x \leq b$  при  $y_0 = \text{const}$ . Пусть  $f(x, y)$  такова, что  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(y)$  измеримы по Лебегу. Тонелли называет  $f(x, y)$  *функцией с ограниченной вариацией*, если

$$\int_a^b \psi_1(x) dx + \int_c^d \psi_2(y) dy < +\infty.$$

В терминах вариаций Тонелли можно сформулировать некоторые достаточные условия для сходимости рядов Фурье.

---

\*) Если  $\varphi(x, y) = xy$ , то  $I_\varphi(g) = \int_a^b \int_c^d g(x, y) dx dy$ .

\*\*) Функция двух переменных  $\varphi(x, y)$  называется *неубывающей по  $y$* , если при каждом фиксированном  $x_0$  функция одного переменного  $y$   $\varphi(x_0, y)$  не убывает.

**Теорема 2 (Тонелли).** Пусть функция  $f(x, y)$  и точка  $(x_0, y_0)$  таковы, что  $\psi_1(x_0) < +\infty$ ;  $\psi_2(y_0) < +\infty$ , и  $f(x, y)$  на некотором квадрате  $R$ , содержащем  $(x_0, y_0)$  своей внутренней точкой, имеет ограниченную вариацию Тонелли. Тогда бирияд Фурье функции  $f(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  сходится к

$$\frac{1}{4} [f(x_0, y_0 + 0) + f(x_0, y_0 - 0) + f(x_0 + 0, y_0) + f(x_0 - 0, y_0)]$$

(см. [6]).

**Теорема 3 (Харди).** Пусть  $f(x, y)$  есть непрерывная периодическая с периодом  $2\pi$  функция, определённая на всей плоскости. Пусть вариации Витали и Тонелли функции  $f(x, y)$  конечны на квадрате  $R$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ;  $0 \leq y \leq 2\pi$ ). Тогда соответствующий функции  $f(x, y)$  бирияд Фурье равномерно сходится на всей плоскости к функции  $f(x, y)$  [7].

### § 3. Вариации А. С. Кронрода

Пусть  $f(x, y)$  есть непрерывная функция, определённая на прямоугольнике  $R$  ( $a \leq x \leq b$ ;  $c \leq y \leq d$ ), а  $e_t$  — множество уровня  $t$  этой функции.

**Определение 5 (А. С. Кронрода).** Обозначим через  $v_0(e_t)$  число компонент \*) множества  $e_t$  уровня  $t$  функции  $f(x, y)$ . А. С. Кронродом доказано, что  $v_0(e_t)$  как функция  $t$  измерима по Лебегу [3]. Величину

$$w^1(f, R) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(e_t) dt$$

А. С. Кронрод называет *линейной вариацией* функции  $f(x, y)$ .

**Определение 6 (А. С. Кронрода).** Обозначим через  $h_1(e_t)$  длину (по Хаусдорфу) множества  $e_t$  \*\*). Величина

\*) Компонентой  $v$  множества  $e$  называется связное подмножество из  $e$ , не содержащееся ни в каком другом связном подмножестве из  $e$ , отличном от  $v$ .

\*\*) Длина по Хаусдорфу определяется следующим образом.

Пусть  $e \subset E_2$ . Построим систему замкнутых кругов  $\sigma_i$  с радиусами  $r_i$  такую, что  $r_i < \epsilon$  и  $\sum \sigma_i \supset e$ . Такая система называется  $\epsilon$ -покрытием множества  $e \subset E_2$ .

$h_1(e_t)$  как функция от  $t$  измерима по Лебегу [3]. Число  $\omega_2(f, R) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(e_t) dt$  называется *плоской вариацией* функции  $f(x, y)$ .

Линейная и плоская вариации функции двух переменных независимы.

Для функций с конечными вариациями Кронрода в той или иной форме имеют место теоремы, аналогичные свойствам 1—9 из § 1.

Последующие главы книги посвящаются обобщению понятия вариаций А. С. Кронрода на случай функций многих переменных, определению аналогичных понятий для подмножеств многомерных евклидовых пространств, изучению и некоторым приложениям этих понятий. Поэтому мы пока оставим вариации А. С. Кронрода без подробного рассмотрения и перейдём к систематическому изложению материала.

---

Обозначим через  $h_\epsilon^1(e)$  нижнюю грань величины  $\sum_i 2rl$  по всем возможным  $\epsilon$ -покрытиям ( $\epsilon$  фиксировано).

Пусть  $\epsilon \rightarrow 0$ . Число  $h_1(e) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon^1(e)$  называется *длиной множества*  $e$  (по Хаусдорфу) [9].

---

## ГЛАВА 2

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВАРИАЦИЙ

В этой главе мы приведём несколько эквивалентных определений вариаций подмножества многомерного евклидова пространства и с их помощью определим систему вариаций для функций многих переменных. Для этого нам придётся познакомиться с декартовым произведением метрических пространств и понятием меры подмножества такого произведения (произведением мер). Общность определений принуждает к сравнительно формальному изложению материала. Поэтому прежде всего мы рассмотрим понятие вариации подмножества многомерного евклидова пространства в его некоторых частных случаях.

#### § 4. Вариации плоского подмножества

Для подмножества двумерной плоскости мы определим три вариации — нулевую, линейную и плоскую.

*Нулевой вариацией*  $v_0^2(e)$  плоского подмножества  $e$ , так же как и всякого произвольного множества, мы будем называть число компонент этого множества \*).

Нулевая вариация множества, будучи топологической характеристикой, естественно, не может отображать метрических свойств этого множества. Но, как мы убедимся ниже, с помощью этой характеристики удобно формулировать некоторые теоремы относительно метрического строения дополнения к этому множеству. Крайне простым, но в то же время характерным примером такого рода теорем может послужить, например, следующее утверждение.

---

\* ) См. сноску на стр. 14.

Теорема 4. Если нульмерное множество  $e$ , принадлежащее квадрату  $R$  с единичной стороной, имеет нулевую вариацию, не превосходящую  $v$ , т. е. если множество  $e$  состоит не более чем из  $v$  точек, то в  $R$  —  $e$  можно вписать замкнутый квадрат со стороной длины не менее чем  $\frac{1}{1 + \sqrt{v + 1}}$ .

Линейная, или одномерная, вариация плоского подмножества определяется следующим образом.

Пусть  $e$  есть замкнутое множество, лежащее на плоскости  $E_2$ . Фиксируем некоторую точку  $O$  из  $E_2$  и обозначим через  $S_1$  окружность единичного радиуса с центром в точке  $O$ , лежащую в  $E_2$ . Обозначим, далее, через  $r$  произвольную точку окружности  $S_1$ ; через  $\tau(r)$  — направленную прямую  $Or$ , проходящую через точки  $O$  и  $r$ ; через  $q$  — произвольную точку прямой  $\tau(r)$ ; через  $\beta(r, q)$  — прямую из  $E_2$ , содержащую точку  $q$  и перпендикулярную к прямой  $\tau(r)$ ; через  $v_0^2[e \cap \beta(r, q)]$  — нулевую вариацию (число компонент) пересечения  $e \cap \beta(r, q)$ . Ниже мы докажем \*), что для замкнутого множества  $e$  соответствующая функция  $v_0^2[e \cap \beta(r, q)]$  как функция точки  $q$  ( $r$  — произвольная, но фиксированная точка) измерима по Лебегу.

Величину

$$v_{1\tau(r)}^2(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0^2[e \cap \beta(r, q)] dq$$

(точка  $r$  фиксирована) мы назовём *линейной вариацией* множества  $e$  относительно прямой  $\tau(r)$ .

Число

$$v_1^2(e) = \frac{1}{4} \int_{S_1} v_{1\tau(r)}^2(e) dr$$

мы назовём *линейной вариацией* множества  $e$ . При этом нетрудно убедиться, что линейная вариация множества не зависит от выбора точки  $O$ . Именно поэтому точка  $O$  и не фигурирует в названии линейной вариации множества. Нетрудно

\*) В этом и следующем параграфе мы не будем останавливаться на доказательстве измеримости встречающихся функций, поскольку всё это ниже будет сделано в более общей форме.

также убедиться, что линейная вариация множества есть инвариант движения, и для замкнутых попарно не пересекающихся множеств она является вполне аддитивной функцией множества.

На некоторых простеньких примерах усвоим геометрический смысл линейной вариации. Пусть для начала  $e = \rho$  есть отрезок длины  $d$ . Обозначим через  $c(\rho, r)$  абсолютную величину косинуса угла, составленного прямой  $\tau(r)$  и продолжением отрезка  $\rho$ . Ясно, что для всякой точки  $q \subset \tau(r)$ , принадлежащей проекции  $\rho(r)$  отрезка  $\rho$  на  $\tau(r)$ , соответствующее этой точке и множеству  $\rho = e$  множество  $e \cap \beta(r, q)$  состоит из одной компоненты (либо точки, либо всего отрезка  $\rho$ ); следовательно, для такой точки  $q$  число  $v_0^2[e \cap \beta(r, q)] = 1$ .

В то же время во всякой точке  $q$ , не принадлежащей отрезку  $\rho(r)$ ,  $v_0^2[e \cap \beta(r, q)] = 0$ . А так как  $|\rho(r)| = c(\rho, r) \cdot d$ , то

$$v_{1\tau(r)}^2(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0^2[e \cap \beta(r, q)] dq = c(\rho, r) \cdot d.$$

А поэтому линейная вариация отрезка  $\rho$  равна

$$v_1^2(\rho) = \frac{1}{4} \int_{S_1} v_{1\tau(r)}^2(\rho) dr = \frac{d}{4} \int_{S_1} c(\rho, r) dr = \frac{4d}{d} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = d.$$

Итак, для всякого отрезка его линейная вариация равна длине этого отрезка. Из этого с помощью обычных теоретико-множественных приёмов можно вывести, что для всякой лежащей на плоскости гладкой дуги  $l$  длины  $s$  линейная вариация  $v_1^2(l) = s$ .

Линейная вариация является хорошим формальным выражением интуитивного понимания длины множества. Рассмотрим один пример. Пусть  $e$  есть множество, напоминающее уложенную без самопересечений на плоскости узкую и длинную «ленту». Формально множество  $e$  можно задать, например, как множество всех точек плоскости, удалённых от некоторой гладкой дуги  $l$  длины  $s$ , лежащей в нашей плоскости, не более чем на  $\varepsilon > 0$ . При этом предполагается, что  $\varepsilon$  достаточно мало по сравнению с длиной и кривизной дуги  $l$ .

Длиной такого множества  $e$  естественно назвать некоторое число, близкое к  $s$ . Нетрудно проверить, что для указанного множества  $e$  имеет место неравенство

$$s + \varepsilon' > v_1(e) > s - \varepsilon',$$

т. е. линейная вариация множества  $e$  с точностью до достаточно малого по абсолютной величине слагаемого  $\varepsilon'$  равна длине множества  $e$  (в вышеуказанном смысле). Последнее следует, например, из того, что линейные вариации гладкой дуги и достаточно малых её раздутьй численно близки.

Последний пример показывает, что линейная вариация множества характеризует его линейную протяжённость (длину) вне зависимости от того, одномерно рассматриваемое множество или двумерно. Это означает, что линейная вариация множества является в некотором смысле обобщением длины, поскольку во всех простейших случаях указанная вариация и длина численно равны и в некоторых случаях (например, когда рассматриваемое множество двумерно) линейная вариация множества более удачно, чем соответствующая мера Хаусдорфа, отражает интуитивное понимание длины множества.

На формальном определении плоской вариации  $v_2^3(e)$  для плоских множеств здесь мы останавливаться не будем. Отметим лишь, что это определение будет иметь смысл для всякого измеримого по Лебегу подмножества плоскости и для всякого такого множества плоская вариация окажется численно равной двумерной мере Лебега того же множества.

Из приведённых определений видно, что название каждой из вариаций (точнее, её размерность) выбирается нами в зависимости от степени однородности этой вариации относительно равномерных растяжений плоскости. Нулевая вариация множества не изменяется даже при гомеоморфизмах этого множества. Та из вариаций множества, которая при равномерном его растяжении изменяется линейно относительно коэффициента растяжения, названа нами линейной, или одномерной, а плоская вариация потому и названа плоской, что такая вариация от равномерно растянутого в  $k$  раз множества равна плоской вариации исходного множества, умноженной на  $k^3$ .

### § 5. Вариации подмножества трёхмерного евклидова пространства

Пусть  $e$  есть ограниченное замкнутое подмножество трёхмерного евклидова пространства. Определим для такого множества систему вариаций, состоящую из четырёх чисел  $v_0^3(e)$ ,  $v_1^3(e)$ ,  $v_2^3(e)$  и  $v_3^3(e)$ , которые в дальнейшем мы будем называть нулевой, линейной, плоской и кубической вариациями указанного множества.

Как и в предыдущем случае, за нулевую вариацию  $v_0^3(e)$  примем число компонент множества  $e$ .

Для определения остальных трёх вариаций фиксируем целое число  $k$  ( $0 < k \leq 3$ ) и введём следующие обозначения:  $O$  — некоторая раз и навсегда фиксированная точка трёхмерного евклидова пространства  $E_3$ ;  $S_2$  — сфера единичного радиуса с центром в  $O$ ;  $r$  — точка на сфере  $S_2$ ;  $\tau_k(r)$  — плоскость размерности  $k$ , содержащая точку  $O$ , с положительным направлением, заданным вектором  $\vec{Or}$  \*);  $\beta_{3-k}(r, q)$  — плоскость из  $E_3$  размерности  $3-k$ , содержащая точку  $q$  из  $\tau_k(r)$  и ортогональная к  $\tau_k(r)$  \*\*);  $v_0^3[e \cap \beta_{3-k}(r, q)]$  — нулевая вариация (число компонент) множества  $e \cap \beta_{3-k}(r, q)$ .

Величину

$$v_{k\tau_k(r)}^3(e) = \int_{\tau_k(r)} v_0^3[e \cap \beta_{3-k}(r, q)] dq$$

мы назовём *вариацией порядка  $k$  множества  $e$  относительно плоскости  $\tau_k(r)$* , а число

$$v_k^3(e) = \frac{1}{a_k} \int_{S_2} v_{k\tau_k(r)}^3(e) dr,$$

где  $a_1 = 2\pi$ ,  $a_2 = 2\pi$ ,  $a_3 = 4\pi$ , мы назовём *вариацией порядка  $k$  множества  $e$  или  $k$ -й вариацией* того же множества.

\*) При  $k = 1$   $\tau_1(r)$  — прямая, совпадающая по направлению с  $\vec{Or}$ . При  $k = 2$   $\tau_2(r)$  — плоскость, ортогональная вектору  $\vec{Or}$  и ориентированная так, что с конца вектора  $\vec{Or}$  видна положительная сторона плоскости  $\tau_2(r)$ . При  $k = 3$   $\tau_3(r) = r = E_3$  совпадает со всем пространством и от выбора точки  $r$  не зависит.

\*\*) При  $k = 3$   $\beta_{3-k}$  вырождается в точку  $q$ .

Точка  $O$  не участвует в обозначении вариаций потому, что, как нетрудно показать, каждая из них не зависит от выбора указанной точки.

Предложенные вариации имеют наглядную геометрическую интерпретацию.

Можно доказать, что для всякой гладкой дуги, лежащей в  $E_3$ , линейная вариация равна её длине. Также и в общем случае — линейная вариация множества представляет собой формальное выражение «длины», или одномерной протяжённости, множества (или его границы) в том пространстве, где это множество расположено.

Можно доказать, что плоская вариация всякого полиэдра из  $E_3$  равна его площади. А из этого следует, что плоская вариация всякой достаточно гладкой (например, дважды непрерывно дифференцируемой) поверхности, лежащей в пространстве  $E_3$ , равна площади этой поверхности. Для всякого достаточно «хорошего» трёхмерного множества (например, для суммы конечного числа трёхмерных шаров) плоская вариация равна той же вариации от границы рассматриваемого множества, а следовательно, равна площади поверхности, ограничивающей наше множество. Таким образом, плоская вариация множества характеризует его двумерную (плоскую) протяжённость в пространстве.

По определению, кубическая вариация множества  $e$

$$v_3^3(e) = v_{3E_3}^3(e) = \int_{E_3} v_0^3 [e \cap \beta_0(r, q)] dq.$$

Ясно, что  $v_0^3 [e \cap \beta_0(r, q)] = 1$  для всех точек  $q \in e$  и  $v_0^3 [e \cap \beta_0(r, q)] = 0$  для  $q \notin e$ , т. е.  $v_0^3 [e \cap \beta_0(r, q)]$  является характеристической функцией множества  $e$ . Следовательно, вариация  $v_3^3(e)$  определена для всякого измеримого по Лебегу множества и численно равна его мере Лебега (объёму).

Итак, различные (в смысле порядка) вариации множества характеризуют его с точки зрения различных размерностей. Ниже мы покажем, что вариации суть функции множества, не зависящие друг от друга. Например, можно определить двумерную поверхность, линейная вариация которой конечна, а плоская — бесконечна, и, наоборот, существует двумерная поверхность такая, что её линейная вариация бесконечна, а плоская — конечна.

Отметим, что определённая выше система вариаций в известном смысле полна: эти четыре вариации в своей совокупности показывают, как сильно рассматриваемое множество разрезает пространство, в котором оно лежит. Подтверждением последнего может служить, например, такая теорема.

**Теорема 5.** *Пусть  $e$  есть замкнутое подмножество трёхмерного замкнутого шара радиуса  $r \leq 1$ , имеющее нулевой объём, т. е.  $v_3^3(e) = 0$ , и такое, что его полная вариация  $V^3(e) = \sum_{k=0}^3 v_k^3(e)$  конечна. Тогда в дополнение к множеству  $e$  (до указанного шара) можно вписать трёхмерный замкнутый шар радиуса не менее чем  $\frac{\alpha r}{1 + v^3(e)}$ , где  $\alpha > 0$  есть некоторая абсолютная константа, не зависящая ни от  $r$ , ни от  $e$ .*

Это утверждение в более общей формулировке будет доказано в последней главе. Там же мы укажем на одно существенное аналитическое приложение обобщения этой теоремы на случай большего числа переменных.

На этом мы закончим наш предварительный обзор и перейдём к строгому и систематическому изложению.

Ниже для подмножества  $n$ -мерного евклидова пространства мы определим систему вариаций, состоящую из  $n+1$  вариации порядков от нуля до  $n$ . Вариация порядка  $k$  будет определяться как среднее от некоторой функции (вариации порядка  $k$  относительно  $k$ -мерной плоскости), заданной на пучке  $k$ -мерных плоскостей  $n$ -мерного евклидова пространства. Поэтому нам необходимо задать аддитивную функцию пучка  $k$ -мерных плоскостей  $n$ -мерного евклидова пространства. Это мы сделаем с помощью определения аддитивной функции подмножества декартова произведения многомерных сфер. Поэтому несколько последующих параграфов мы посвятим определению декартова произведения пространств и введению меры в пространствах — произведениях.

## § 6. Некоторые сведения из теории меры

Пусть  $X$  и  $Y$  — два произвольных пространства. *Декартовым произведением*  $X \times Y$  пространств  $X$  и  $Y$  назовём пространство всевозможных пар  $(x, y)$ , где  $x$  и  $y$  суть (соответственно) произвольные элементы пространств  $X$  и  $Y$ .

Если пространства  $X$  и  $Y$  являются топологическими, то топология в пространстве  $X \times Y$  вводится следующим образом: окрестностью точки  $(x, y)$  в пространстве  $X \times Y$  мы назовём декартово произведение произвольных окрестностей точек  $x$  и  $y$  в пространствах  $X$  и  $Y$  (соответственно).

Пусть на  $\sigma$ -кольцах \*) пространств  $X$  и  $Y$ , содержащих все борелевские множества этих пространств, заданы функции  $\mu_X$  и  $\mu_Y$ , являющиеся мерами \*\*), и пусть каждое из пространств  $X$  и  $Y$  представимо в виде суммы счётного числа множеств конечной меры. Пусть, далее,  $e$  есть множество из  $X \times Y$ ,  $e_x$  — проекция сечения  $x = \text{const}$  этого множества на пространство  $Y$ , т. е. множество всех таких точек из  $Y$ , для каждой из которых соответствующая пара  $(x, y)$  принадлежит  $e$ . Аналогично определяется  $e_y$ . Пусть множество  $e$  и точки  $x$  и  $y$  из  $X$  и  $Y$  (соответственно) таковы, что  $e_x$  и  $e_y$  принадлежат (соответственно)  $\sigma$ -кольцам измеримых множеств из пространств  $Y$  и  $X$ .

Обозначим через  $\mu_Y(e_x)$  и  $\mu_X(e_y)$  меры множеств  $e_x$  и  $e_y$ .

Если  $e = B$  есть борелевское множество из  $X \times Y$ , то функции  $\mu_X(B_y)$  и  $\mu_Y(B_x)$  измеримы по Лебегу и

$$\int_X \mu_Y(B_x) d\mu_X = \int_Y \mu_X(B_y) d\mu_Y = \mu'_{X \times Y}(B).$$

Для произвольного множества  $e \in X \times Y$  через  $\mu'_{X \times Y}(B)$  обычным способом определяются внешняя мера  $\mu_{X \times Y}(e)$  и

---

\*) Совокупность подмножеств пространства  $\sigma$  называется его  $\sigma$ -*кольцом*, если вместе с множествами  $A$  и  $B$  в ней входит и  $A - B$  и вместе с множествами  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) в этой совокупности содержится и их сумма  $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ .

\*\*) Аксиомы меры следующие: а) для всякого множества, принадлежащего  $\sigma$ -кольцу, рассматриваемая функция  $\mu$  неотрицательна; б) для всяких измеримых множеств  $A$  и  $B \subset A$   $\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B)$  и в) для всяких измеримых, попарно не пересекающихся множеств  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) имеет место равенство  $\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ .

внутренняя мера  $\underline{\mu}_{X \times Y}(e)$ :

$$\bar{\mu}_{X \times Y}(e) = \inf_{e \subset B \subset X \times Y} \mu'_{X \times Y}(B),$$

$$\underline{\mu}_{X \times Y}(e) = \sup_{B \subset e \subset X \times Y} \mu'_{X \times Y}(B).$$

Если  $\bar{\mu}_{X \times Y}(e) = \underline{\mu}_{X \times Y}(e)$ , то множество  $e$  называется *измеримым* ( $\mu_{X \times Y}$ ), а число  $\mu_{X \times Y}(e) = \bar{\mu}_{X \times Y}(e) = \underline{\mu}_{X \times Y}(e)$  называется *произведением мер*  $\mu_X(e_y)$  и  $\mu_Y(e_x)$ .

Совокупность измеримых ( $\mu_{X \times Y}$ ) множеств из  $X \times Y$  есть  $\sigma$ -кольцо пространства  $X \times Y$ , содержащее все борелевские множества  $B$  из  $X \times Y$ , а функция  $\mu_{X \times Y}$  является мерой [10].

Относительно произведения мер и интегралов по произведению пространств имеют место следующие две теоремы Фубини [10].

**Теорема 6 (Фубини).** Пусть  $e$  есть измеримое ( $\mu_{X \times Y}$ ) множество из пространства  $X \times Y$ . Тогда почти для всякого  $x \in X$  множество  $e_x$  измеримо ( $\mu_Y$ ),  $\mu_Y(e_x)$  как функция точки  $x$  измерима по Лебегу (аналогично для  $e_y$  и  $\mu_X(e_y)$ ), и

$$\mu_{X \times Y}(e) = \int_X \mu_Y(e_x) d\mu_X = \int_Y \mu_X(e_y) d\mu_Y.$$

**Теорема 7 (Фубини).** Пусть  $f(x, y)$  есть интегрируемая по Лебегу функция точки  $(x, y) \in X \times Y$ . Тогда почти для всякого  $x \in X$   $f(x, y)$  как функция точки  $y$  интегрируема,  $\int_Y f(x, y) d\mu_Y$  есть интегрируемая функция точки  $x \in X$  и

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu_{X \times Y} = \int_X \int_Y f(x, y) d\mu_X d\mu_Y.$$

Известно, что во всяком сепарабельном локально-компактном пространстве, для множеств которого определено понятие конгруэнтности, существует единственная (с точностью до нормировки) мера Хаара [10].

Напомним, что мерой Хаара (для пространства  $\alpha$ ) называется такая определённая на некотором  $\varepsilon$ -кольце подмножеств пространства  $\alpha$  функция множества, которая

- 1) удовлетворяет обычным требованиям понятия меры;
- 2) для всякого компактного множества определена и конечна;
- 3) для всякого открытого множества положительна;
- 4) на конгруэнтных, т. е. совместимых движением пространства  $\alpha$ , множествах эта функция принимает одно и то же значение.

Каждое из пространств, с которыми мы будем встречаться в дальнейшем, будет сепарабельным, локально-компактным и будет иметь свою группу движений, естественным образом индуцирующуюся группой движений евклидова пространства и, следовательно, в каждом из них можно определить единственную меру Хаара.

## § 7. Некоторые вспомогательные пространства

Обозначим через  $\Omega_k^n$  пространство всевозможных ( $n - k$ )-мерных плоскостей  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$ , через  $\Phi_k^n$  — пространство (связку) всевозможных  $k$ -мерных (неориентированных) плоскостей из  $E_n$ , проходящих через фиксированную точку  $O \in E_n$ .

В дальнейшем нам будет необходимо ввести меры в пространствах  $\Omega_k^n$  и  $\Phi_k^n$ . Для этого определим ещё два пространства  $\varphi_k^n$  и  $\omega_k^n$  и их преобразования (соответственно) в  $\Phi_k^n$  и  $\Omega_k^n$ .

Пусть  $\{E_l\}$  ( $l = n, n - 1, \dots, n - k + 1$ ) — система вложенных друг в друга линейных подпространств (плоскостей) пространства  $E_n$  размерностей  $n, \dots, n - k + 1$  (соответственно) ( $0 \leq k \leq n$ ) и пусть точка  $O$  принадлежит всем  $E_l$ . Пусть  $S_{n-l}$  есть  $(n - l)$ -мерная сфера единичного радиуса с центром в точке  $O$ , лежащая в плоскости  $E_{n-l+1}$  ( $l = 1, 2, 3, \dots, k$ ).

Обозначим через  $\varphi_k^n$  декартово произведение пространств  $S_{n-1}, \dots, S_{n-k}$  \*), а через  $r = (r_1, r_2, \dots, r_k)$  — произвольную

\*) При  $k = 0$  за  $\varphi_0^n$  принимаем пространство, состоящее из одного элемента.

точку пространства  $\varphi_k^n(r_i \in S_{n-i})$ . Через  $\omega_k^n$  обозначим произведение  $\varphi_k^n$  и  $k$ -мерного евклидова пространства  $E_k$ , а через  $q = (r_1, r_2, \dots, r_k z)$  — произвольную точку пространства  $\omega_k^n(r_i \in S_{n-i}, z \in E_k)$ . В плоскости  $E_k$  фиксируем ортонормированный базис  $z = \{z_1, \dots, z_k\}$  и обозначим через  $z_1, z_2, \dots, z_k$  координаты относительно  $z$  произвольной точки  $z$  из  $E_k$ . Тогда, так как точки  $z$  из  $E_k$  взаимно однозначно определяются их координатами  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , то элементом пространства  $\omega_k^n$  можно считать упорядоченную систему  $q = (r_1, r_2, \dots, r_k, z_1, \dots, z_k) = (r, z)$ , состоящую из  $2k$  компонент:  $k$  точек  $r_i (r_i \in S_{n-i}, i = 1, 2, \dots, k)$  и  $k$  чисел  $z_1, z_2, \dots, z_k$ .

Определим преобразования  $\tilde{\varphi}_k^n$  пространства  $\varphi_k^n$  в  $\Phi_k^n$  и  $\tilde{\omega}_k^n$  пространства  $\omega_k^n$  в  $\Omega_k^n$ .

Фиксируем точку  $r = (r_1, \dots, r_k)$  из  $\varphi_k^n$  и обозначим через  $r_l$  вектор пространства  $E_n$ , имеющий своими концами точки  $O$  и  $r_l \in S_{n-l}$ . Через  $X'_l$  обозначим вектор пространства  $E_{n-l+1}$  единичной длины, имеющий своим началом точку  $O$  и ортогональный к  $E_{n-l}$ ; через  $E'_{n-l-1} = (n-l-1)$ -мерную плоскость из  $E_{n-l}$ , содержащую точку  $O$  и ортогональную векторам  $r_l$  и  $X'_l$ . Обозначим через  $\gamma_l(r)$  преобразование поворота пространства  $E_{n-l+1}$  около плоскости  $E'_{n-l-1}(r)$ , переводящее вектор  $X'_l$  в  $r_l^*$  ( $l = 0, 1, \dots, k-1$ ), за  $\gamma_0(r)$  условно примем тождественное преобразование пространства  $E_n$ .

Преобразование  $\gamma_{k-1}(r)$  переводит точку  $r_k$  сферы  $S_{n-k}$  в некоторую точку  $r_k$  сферы  $S_{n-k+1}$ , преобразование  $\gamma_{k-2}(r)$  переводит точки  $r_{k-1}$  и  $r_k^1$  сферы  $S_{n-k+1}$  соответственно в точки  $r_{k-1}^1$  и  $r_k^2$  сферы  $S_{n-k+2}$ ; преобразование  $\gamma_l(r)$  перево-

\*) Пусть  $Y = \{Y_1, \dots, Y_{n-l+1}\}$  есть ортонормированный базис пространства  $E_{n-l+1}$  такой, что  $Y_1 = X'_l$ , а векторы  $Y_1, Y_2$  и  $r_l$  расположены в одной двумерной плоскости ( $y_1, \dots, y_{n-l+1}$  есть координаты произвольной точки из  $E_{n-l+1}$  относительно  $Y$ ). Преобразование  $y'_1 = y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha$ ;  $y'_2 = y_1 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha$  и  $y'_i = y_i$  ( $i = 3, \dots, n-l+1$ ) называется *поворотом пространства  $E_{n-l+1}$  около  $E_{n-l-1}$ , переводящим  $X'_l$  в  $r_l$* , где  $\alpha$  есть угол между осями векторов  $X'_l$  и  $r_l$  ( $0 \leq \alpha \leq \pi$ ).

дит точки  $r'_{l+1}, r'_{l+2}, \dots, r_k^{k-l-1}$  сферы  $S_{n-l-1}$  в точки  $r'_{l+1}, r'_{l+2}, \dots, r_k^{k-l}$  из  $S_{n-l}$  ( $l = k-1, \dots, 1$ ) и, наконец, преобразование  $\gamma_0(r)$  переводит точки  $r_1, r'_2, \dots, r_k^{k-1}$  сферы  $S_{n-1}$  в те же точки  $r_i^i = r_i^{i-1}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) сферы  $S_{n-1}$ . Отображение пространства  $\varphi_k^n$  в произведение  $(S_{n-1})^k$ , которое точке  $r = (r_1, \dots, r_k)$  пространства  $\varphi_k^n$  с помощью соответствующих преобразований  $\gamma_l(r)$  ( $l = k-1, \dots, 0$ ) ставит в соответствие систему точек  $r'_1, \dots, r_k^k$  сферы  $S_{n-1}$ , мы обозначим через  $\gamma_k^n(\gamma_k^n(r))$  — произведение преобразований  $\gamma_{k-1}, \gamma_{k-2}, \dots, \gamma_0$ . Так как точки  $r'_{l+1}, r'_{l+2}, \dots, r_k^{k-l-1}$  сферы  $S_{n-l-1}$  принадлежат плоскости  $E_{n-l}$ , а вектор  $X'_l$  по определению ортогонален к этой плоскости, то  $r_l$  ортогонален к каждому из векторов  $r_{l+1}^1, r_{l+2}^2, \dots, r_k^{k-l}$ , ибо преобразование  $\gamma_l(r)$  ортогонально. Применяя последовательно  $k$  раз последнее рассуждение, нетрудно заключить, что векторы  $X_i = r_i^i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) попарно ортогональны.

Обозначим через  $\tau_k(r)$   $k$ -мерное подпространство пространства  $E_n$ , натянутое на векторы  $r_1^1, r_2^2, \dots, r_k^k$ , через  $x_1, \dots, x_k$  — координаты произвольной точки из  $\tau_k(r)$  относительно этих векторов, а через  $\beta_{n-k}(q) = \beta_{n-k}(r_1, \dots, r_k, z_1, \dots, z_k)$  обозначим  $(n-k)$ -мерное подпространство, ортогональное к  $\tau_k(r)$  и содержащее точку  $q$  из  $\tau_k(r)$  с координатами  $x_i = z_i$  ( $z_1, z_2, \dots, z_k$  суть числовые компоненты точки  $q \in \omega_k^n$ ). Обозначим через  $\tilde{\varphi}_k^n$  преобразование пространства  $\varphi_k^n$  в  $\Phi_k^n$ , которое точке  $r$  из  $\varphi_k^n$  ставит в соответствие  $k$ -мерную плоскость  $\tau_k(r)$  из  $\Phi_k^n$ , а через  $\tilde{\omega}_k^n$  — отображение пространства  $\omega_k^n$  на  $\Omega_k^n$ , которое точке  $q$  из  $\omega_k^n$  ставит в соответствие (вышеуказанным способом) плоскость  $\beta_{n-k}(q)$  из  $\Omega_k^n$ .

Нетрудно проверить, что  $\Phi_k^n \in \tilde{\varphi}_k^n(\varphi_k^n)$  и  $\Omega_k^n \in \tilde{\omega}_k^n(\omega_k^n)$ .

### § 8. Определение меры в пространствах $\Phi_k^n$ и $\Omega_k^n$

Меру множества, принадлежащего пространству  $\Phi_k^n$ , мы определим через меру прообраза этого множества в пространстве  $\varphi_k^n$  при отображении  $\tilde{\varphi}_k^n$ .

Аналогично, меру множества, принадлежащего пространству  $\Omega_k^n$ , мы определим через меру его прообраза при отображении  $\tilde{\omega}_k^n$  в пространстве  $\omega_k^n$ .

Поэтому, прежде чем приступить к разрешению непосредственной задачи этого параграфа, мы должны определить меру в пространствах  $\varphi_k^n$  и  $\omega_k^n$ , а для этого необходимо определить меру в пространстве  $S_{n-m}$  ( $1 \leq m \leq k$ ,  $k \leq n$ ,  $n > 0$ ).

Пусть  $B$  — борелевское подмножество сферы  $S_{n-m}$  ( $m$  фиксировано). Фиксируем борелевские подмножества  $e_j^i$  ( $j = 1, 2, \dots, l_i$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots$ ) сферы  $S_{n-m}$ , точки  $c_j^i$  ( $j = 1, 2, \dots, l_i$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots$ ) той же сферы и числа  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) такие, что:

- 1)  $\sum_{j=1}^{l_i} e_j^i = B$  для любого  $i$ ;
- 2) при  $j_1 \neq j_2$  пересечение множеств  $e_{j_1}^i \cdot e_{j_2}^i = 0$  ( $1 \leq j_1, j_2 \leq l_i$ );
- 3) для всякой пары точек  $a$  и  $b$  из  $e_j^i + c_j^i$  расстояние  $\rho(a, b) < \varepsilon_i$ ;
- 4)  $\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0$ .

Обозначим через  $\tau_j^i$  гиперплоскость пространства  $E_{n-m+1}$ , касающуюся сферы  $S_{n-m}$  в точке  $c_j^i$ , а через  $m^{n-m}(g_j^i)$  — меру Лебега борелевского множества  $g_j^i$  из  $\tau_j^i$ , являющегося проекцией множества  $e_j^i$  на гиперплоскость  $\tau_j^i$ .

**Л е м м а 1.** Для всякого борелевского подмножества  $B$  сферы  $S_{n-m}$  и всевозможных  $e_j^i$ ,  $c_j^i$  и  $\varepsilon_i$ , удовлетворяющих сформулированным выше условиям 1), 2), 3) и 4), соответствующая последовательность чисел  $\sum_{j=1}^{l_i} m^{n-m}(g_j^i)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) имеет при  $i \rightarrow \infty$  предел  $\mu_{S_{n-m}}(B)$ , не зависящий ни от  $e_j^i$ , ни от  $c_j^i$ , ни от  $\varepsilon_i$  (доказательство опускаем).

Число  $\mu_{S_{n-m}}(B)$  ( $B \subset S_{n-m}$ ) назовём гиперплощадью, или мерой множества  $B$ .

**Определение 7.** Пусть  $e$  — произвольное подмножество сферы  $S_{n-m}$ . Внешней мерой множества  $e$  назы-

вается нижняя грань мер всевозможных борелевских подмножеств из  $S_{n-m}$ , содержащих множество  $e$ , и, аналогично, *внутренней мерой* множества  $e$  называется верхняя грань мер всевозможных борелевских множеств, лежащих в  $e$ . Обозначим через  $\bar{\mu}(e)$  и  $\underline{\mu}(e)$  соответственно внешнюю и внутреннюю меры множества  $e$ . Если  $\bar{\mu}(e) = \underline{\mu}(e)$ , то множество  $e$  называется *измеримым* ( $\mu_{S_{n-m}}$ ), а число  $\mu_{S_{n-m}}(e) = \bar{\mu}(e) = \underline{\mu}(e)$  называется его *мерой*.

Лемма 2.

$$C_{n-m} = \mu_{S_{n-m}}(S_{n-m}) = 2 \frac{\frac{n-m+1}{2}}{\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right)}.$$

Доказательство этой леммы опускаем.

Нетрудно убедиться, что  $\mu_{S_{n-m}}$  есть мера Хаара (под группой движений в пространстве  $S_{n-m}$  подразумевается группа вращений пространства  $E_n$  вокруг точки  $O$ , являющейся центром сферы  $S_{n-m}$ ).

Теперь с помощью понятия произведения мер уже не трудно дать конструктивное определение мер в  $\varphi_k^n$  и  $\omega_k^n$ .

Меры  $\mu_{\varphi_k^n}$  и  $\mu_{\omega_k^n}$  в пространствах (соответственно)  $\varphi_k^n$  и  $\omega_k^n$  вводятся следующим образом:

$$\mu_{\varphi_k^n} = \mu_{S_{n-1}} \times \mu_{S_{n-2}} \times \cdots \times \mu_{S_{n-k}}^{\text{*}}),$$

$$\mu_{\omega_k^n} = \mu_{\varphi_k^n} \times m^k \text{ **}),$$

где  $m^k = \mu_{E_k}$  есть  $k$ -мерная мера Лебега.

Теперь определим в пространствах  $\Phi_k^n$  и  $\Omega_k^n$  меры (соответственно)  $\mu_{\Phi_k^n}$  и  $\mu_{\Omega_k^n}$ .

Множество  $\Phi \subset \Phi_k^n$  мы назовём *измеримым* ( $\mu_{\Phi_k^n}$ ), если его полный прообраз  $\Phi^* = (\tilde{\varphi}_k^n)^{-1}(\Phi)$  в  $\varphi_k^n$  измерим ( $\mu_{\varphi_k^n}$ ),

\*) Полагаем  $\mu_{\varphi_0^n}(\varphi_0^n) = 1$ .

\*\*) Полагаем  $\mu_{\omega_0^n}(\omega_0^n) = 1$ .

и положим:

$$\mu_{\Phi_k^n}(\Phi) = \mu_{\varphi_k^n}(\Phi^*).$$

Аналогично множество  $\Omega \subset \Omega_k^n$  называется *измеримым* ( $\mu_{\Omega_k^n}$ ), если его полный прообраз  $\Omega^* = (\tilde{\omega}_k^n)^{-1}(\Omega)$  измерим в  $\omega_k^n(\mu_{\omega_k^n})$ , и положим:

$$\mu_{\Omega_k^n}(\Omega) = \mu_{\omega_k^n}(\Omega^*).$$

Пространства  $\Phi_k^n$  и  $\Omega_k^n$  сепарабельны и локально-компактны. Под конгруэнциями в этих пространствах будем понимать всевозможные преобразования этих пространств в себя, порождаемые ортогональными преобразованиями пространства  $E_n$ .

Можно доказать, что  $\mu_{\Phi_k^n}$  и  $\mu_{\Omega_k^n}$ , определённые выше указаным способом, являются мерами Хаара в этих пространствах, а потому не зависят от системы плоскостей  $\{E_l\}$  и выбора сфер  $S_{n-l}$  ( $l = 1, 2, \dots, k$ ).

### § 9. Определение некоторых функций множества

Пусть  $f(e)$  — некоторая функция, определённая для любого множества  $e \subset E_n$  и удовлетворяющая следующим четырём условиям:

- 1)  $f(e) \geq 0$  для всякого  $e$ ;
- 2)  $f(e) = 0$ , если  $e$  пусто;
- 3)  $f(e) = f(e')$ , если  $e$  и  $e'$ , лежащие в одном пространстве, совместимы движением этого пространства;
- 4)  $f(J_k \cap \beta_{n-k})$ , где  $J_k$  — единичный  $k$ -мерный куб, как функция плоскости  $\beta_{n-k}$  измерима ( $\mu_{\omega_k^n}$ ) по Лебегу.

Такие функции множества мы будем называть *регулярными функциями*. В качестве примера регулярной функции можно привести число точек множества, число компонент множества и т. п.

Фиксируем некоторую регулярную функцию множества  $f(e)$ .

Определение 8. Пусть  $e$  есть произвольное множество из  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$ , а  $\beta_{n-k}$  —  $(n-k)$ -мерная плоскость из  $E_n$ . Множество  $e$  мы назо-

вём измеримым  $(f_k^n)$ , если  $f(e \cap \beta_{n-k})$  как функция от  $\beta_{n-k}$  измерима  $(\mu_{\Omega_k^n})$  по Лебегу.

Обозначим через  $J_k$  единичный  $k$ -мерный куб при  $k > 0$  или точку при  $k = 0$ , а через  $D_k^n$  — интеграл

$$D_k^n = \int f(J_k \cap \beta_{n-k}) d\mu_{\Omega_k^n}.$$

Тогда число

$$f_k^n(e) = \frac{1}{D_k^n} \int_{\Omega_k^n} f(e \cap \beta_{n-k}) d\mu_{\Omega_k^n}^*$$

мы назовём, например, *изменением порядка*  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ;  $n > 0$ ) измеримого  $(f_k^n)$  множества  $e$  в пространстве  $E_n$ \*\*.

Пусть  $\tau_{k-l}$  ( $l \leq k \leq n$ ) есть  $(k-l)$ -мерная плоскость из  $E_n$ , принадлежащая связке  $\Phi_{k-l}^n$ , а  $z$  — произвольная точка этой плоскости. Пусть  $\beta_{n-k+l}(z) = E_{n-k+l}(z)$  —  $(n-k+l)$ -мерная плоскость из  $E_n$ , ортогональная к  $\tau_{k-l}$  и содержащая точку  $z \in \tau_{k-l}$ . Обозначим через  $\Omega_l^{n-k+l}(z)$  пространство всевозможных  $(n-k)$ -мерных плоскостей  $\beta_{n-k}$  из  $E_{n-k+l}(z) = \beta_{n-k+l}(z)$ .

Определение 9. Мы скажем, что *изменение порядка*  $k$  множества  $e$  относительно плоскости  $\tau_{k-l}$  определено, если почти для всякой точки  $z \in \tau_{k-l}$  (в смысле меры Лебега  $m^{k-l}$ ) соответствующее множество  $e \cap \beta_{n-k+l}(z)$  измеримо  $(f_l^{n-k+l})$  и функция

$$f_l^{n-k+l}(e \cap \beta_{n-k+l}(z)) = \frac{1}{D_l^{n-k+l}} \int_{\Omega_l^{n-k+l}(z)} f(e \cap \beta_{n-k}) d\mu_{\Omega_l^{n-k+l}}$$

измерима  $(m^{k-l})$  по Лебегу как функция от точки  $z$ . В таком случае число

$$f_{k\tau_{k-l}}^n(e) = \int_{\tau_{k-l}} f_l^{n-k+l}(e \cap \beta_{n-k+l}(z)) dm^{k-l}$$

мы назовём *изменением порядка*  $k$  множества  $e$  относительно плоскости  $\tau_{k-l}$ .

\*) Если  $f(e \cap \beta_{n-k})$  неинтегрируема, то полагаем  $f_k^n(e) = +\infty$ . Это не приведёт к противоречию, так как  $f(e) \geq 0$ .

\*\*) Условно считаем, что  $\int f(e \cap \beta_n) d\mu_{\Omega_0^n} = f(e)$ .

Теорема 8. Пусть  $n > 0$ ,  $k \geq 0$  и  $l \leq k \leq n$ , а  $e$  — измеримое  $(f_k^n)$  множество из  $E_n$ . Тогда почти всякая (в смысле меры  $\mu_{\Phi_{k-l}^n}$ ) плоскость  $\tau_{k-l}$  такова, что изменение  $f_{k\tau_{k-l}}^n(e)$  для неё определено,  $f_{k\tau_{k-l}}^n(e)$  как функция плоскости  $\tau_{k-l}$  измерима  $(\mu_{\Phi_{k-l}^n})$  по Лебегу, и

$$f_k^n(e) = \frac{D_l^{n-k+l}}{D_k^n} \int_{\omega_{k-l}^n} f_{k\tau_{k-l}}^n(e) d\mu_{\Phi_{k-l}^n}.$$

Доказательство. Первая часть теоремы (об определённости  $f_{k\tau_{k-l}}^n(e)$  и измеримости этой величины как функции плоскости  $\tau_{k-l}$ ) следует из теоремы Фубини (см. § 6). На доказательстве этой части мы останавливаться не будем, поскольку оно легко улавливается в нижеизложенном доказательстве второй части теоремы.

По определению

$$\begin{aligned} f_k^n(e) &= \frac{1}{D_k^n} \int_{\omega_k^n} f(e \cap \beta_{n-k}) d\mu_{\omega_k^n} = \frac{1}{D_k^n} \int_{\omega_k^n} f(e \cap \beta_{n-k}(q)) d\mu_{\omega_k^n} = \\ &= \frac{1}{D_k^n} \int_{\omega_{k-l}^n} \int_{\omega_l^{n-k+l}} f(e \cap \beta_{n-k}(r_1, \dots, r_k, z_1, \dots, z_k)) \times \\ &\quad \times d\mu_{\omega_{k-l}^n} d\mu_{\omega_l^{n-k+l}} = \\ &= \frac{D_l^{n-k+l}}{D_k^n} \int_{\omega_{k-l}^n} \frac{1}{D_l^{n-k+l}} \int_{\omega_l^{n-k+l}} f(e \cap \beta_{n-k}(r_1, \dots, r_k, \\ &\quad z_1, \dots, z_k)) d\mu_{\omega_{k-l}^n} d\mu_{\omega_l^{n-k+l}} = \\ &= \frac{D_l^{n-k+l}}{D_k^n} \int_{\omega_{k-l}^n} \left\{ \frac{1}{D_l^{n-k+l}} \int_{\omega_l^{n-k+l}(r_1, \dots, r_{k-l}, z_1, \dots, z_{k-l})} f(e \cap \beta_{n-k}(r_1, \dots, r_{k-l}, \right. \\ &\quad \left. r_{k-l+1}, \dots, r_k, z_1, \dots, z_{k-l}, z_{k-l+1}, \dots, z_k)) \times \right. \\ &\quad \left. \times d\mu_{\omega_l^{n-k+l}} \right\} d\mu_{\omega_{k-l}^n} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{D_l^{n-k+l}}{D_k^n} \int_{\omega_{k-l}^n} f_l^{n-k+l}(e \cap \beta_{n-k+l}(r_1, \dots, r_{k-l}, \\
 &\quad z_1, \dots, z_{k-l})) d\mu_{\omega_{k-l}^n} = \\
 &= \frac{D_l^{n-k+l}}{D_k^n} \int_{\varphi_{k-l}^n} \int_{\tau_{k-l}(r_1, \dots, r_{k-l})} f_l^{n-k+l}(e \cap \beta_{n-k+l}(r_1, \dots, \\
 &\quad \dots, r_{k-l}, z_1, \dots, z_{k-l})) dm^{k-l} d\mu_{\varphi_{k-l}^n} = \\
 &= \frac{D_l^{n-k+l}}{D_k^n} \int_{\varphi_{k-l}^n} f_{k\tau_{k-l}}^n(r_1, \dots, r_{k-l})(e) d\mu_{\varphi_{k-l}^n} = \\
 &= \frac{D_l^{n-k+l}}{D_k^n} \int_{\Phi_{k-l}^n} f_{k\tau_{k-l}}^n(e) d\mu_{\varphi_{k-l}^n} = \frac{D_l^{n-k+l}}{D_k^n} \int_{\Phi_{k-l}^n} f_{k\tau_{k-l}}^n(e) d\mu_{\Phi_{k-l}^n},
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 9.** Пусть  $n > 0$ ,  $k \geq 0$  и  $l \leq k \leq n$ , а  $e$  — измеримое ( $f_k^n$ ) множество из пространства  $E_n$ . Тогда почти для всякой плоскости  $\beta_{n-k+l}$  из пространства  $\Omega_{k-l}^n$  соответствующее множество  $e \cap \beta_{n-k+l}$  измеримо ( $f_l^{n-k+l}$ ),  $f_l^{n-k+l}(e \cap \beta_{n-k+l})$  как функция плоскости  $\beta_{n-k+l}$  измерима по Лебегу и

$$f_k^n(e) = \frac{D_l^{n-k+l}}{D_k^n} \int_{\omega_{k-l}^n} f_l^{n-k+l}(e \cap \beta_{n-k+l}) d\mu_{\omega_{k-l}^n}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 8, поэтому мы его повторять не будем.

Нормировка функций  $f_k^n(e)$  подобрана нами так, чтобы эти функции зависели только от множества  $e$  и не зависели от размерности пространства, в котором они вычисляются.

Это обстоятельство и выражает теорема 10.

**Теорема 10.** Пусть  $0 \leq k \leq n$  и  $m > 0$ . Множество  $e \subset E_n \subset E_{n+m}$  измеримо ( $f_k^{n+m}$ ) тогда и только тогда,

когда оно измеримо ( $f_k^n$ ), и если измеримость имеет место, то  $f_k^{n+m}(e) = f_k^n(e) = f_k(e)$  \*).

Доказательство. Докажем справедливость рассматриваемой теоремы для  $m = 1$ .

Пространство  $\Omega_k^{n+1}$  ( $n - k + 1$ )-мерных плоскостей  $\beta_{n-k+1}$  из  $E_{n+1}$  разобьём на три множества  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  следующим образом: плоскость  $\beta_{n-k+1} \subset \Omega_1$ , если  $\beta_{n-k+1} \cap E_n = 0$ ;  $\beta_{n-k+1} \subset \Omega_2$ , если  $\beta_{n-k+1} \subset E_n$ ;  $\beta_{n-k+1} \subset \Omega_3$ , если  $\beta_{n-k+1} \cap E_n \neq 0$  и  $\beta_{n-k+1} \cap E_n \neq 0$ .

Так как множество  $e \subset E_n$ , то на  $\Omega_1$  функция  $f(e \cap \beta_{n-k+1}) = 0$  (в силу второго свойства регулярной функции). А так как множество всевозможных плоскостей  $\beta_{n-k+1}$  из  $E_{n+1}$ , удалённых от  $E_n$  не менее чем на  $\frac{1}{\nu} > 0$ , замкнуто в  $\Omega_k^{n+1}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ), то  $\Omega_1$  как подмножество  $\Omega_k^{n+1}$  является boreлевским множеством.

Пусть  $\beta_{n-k+1} = \beta_{n-k+1}(r_1, \dots, r_k, z_1, \dots, z_k) = \beta_{n-k+1}(q)$ , где  $q \in \omega_k^{n+1}$  (см. § 7), и пусть  $\beta_{n-k+1}(q) \subset \Omega_2$ . Так как  $\beta_{n-k+1}(q)$  по определению ортогональна плоскости  $\tau_k(r) = \tau_k(r_1, \dots, r_k)$ , то  $\tau_k(r) \cap E_n \neq 0$ , ибо сумма размерностей плоскостей  $\tau_k(r)$  и  $\beta_{n-k+1}(q)$  больше (на единицу) размерности пространства  $E_n$ . Следовательно, размерность плоскости  $E_n \cap \tau_k(r)$  меньше  $k$ . А тогда  $m^k(E_n \cap \tau_k(r)) = 0$ . Последнее означает, что при всяких  $r_1, \dots, r_k$  множество всех точек  $q = (r_1, \dots, r_k, z_1, \dots, z_k) \subset \omega_k^{n+1}$ , для каждой из которых соответствующая плоскость  $\beta_{n-k+1}(q) \subset E_n$  (т. е.  $\beta_{n-k+1} \subset \Omega_2$ ), имеет нулевую меру. А тогда в силу теоремы Фубини (см. § 6)

$$\begin{aligned} \mu \omega_k^{n+1}(\Omega_2^*) &= \mu_{\varphi_k^{n+1} \times E_k}(\Omega_2^*) = \int_{E_k} \mu_{\varphi_k^{n+1}}(\Omega_2^*_{E_k}) dm^k = \\ &= \int_{E_k} m^k(E_n \cap \tau_k(r)) dm^k = 0, \end{aligned}$$

\*.) Под  $f_k(e)$  мы будем подразумевать в дальнейшем функцию, вычисленную в пространстве любой размерности  $m \geq n$ , где  $n$  — размерность минимального пространства, целиком содержащего множество  $e$ .

где  $\Omega_2^*$  — полный прообраз множества  $\Omega_2$  при преобразовании  $\omega_k^n$  (см. § 7).

Следовательно,  $\mu_{\omega_k^{n+1}}(\Omega_2) = \mu_{\omega_k^n}(\Omega_2^*) = 0$ .

Пусть теперь  $\beta_{n-k+1} \subset \Omega_3$ . Ясно, что в таком случае  $E_n \cap \beta_{n-k+1} = \beta_{n-k}$  есть плоскость из  $E_n$  размерности  $n - k$ . Пусть  $\tau_{k+1}$  есть  $(k+1)$ -мерная плоскость из  $E_{n+1}$ , ортогональная к  $\beta_{n-k}$  и содержащая некоторую точку  $O$  из  $\beta_{n-k}$ , а  $l(\beta_{n-k+1})$  — прямая из  $\beta_{n-k+1}$  (лежащая также и в  $\tau_{k+1}$ ), ортогональная к  $\beta_{n-k}$  и проходящая через точку  $O$ . Если считать  $\beta_{n-k+1} \cap E_n = \beta_{n-k}$  фиксированной, то  $\beta_{n-k+1}$  взаимно однозначно определяется прямой  $l(\beta_{n-k+1}) = \tau_{k+1} \cap \beta_{n-k+1}$ . А из последнего вытекает, что  $\Omega_3$  является декартовым произ-

ведением  $\Omega_k^n$  и открытой  $k$ -мерной полусферы  $S_k^{(\frac{1}{2})}$ , поскольку при всякой фиксированной  $\beta_{n-k+1} \cap E_n \subset \Omega_k^n$  множество всевозможных неориентированных прямых  $l(\beta_{n-k+1}) = \tau_{k+1} \cap \beta_{n-k+1}$  ( $\beta_{n-k+1} \subset \Omega_3$ ) образует (как топологическое пространство) полусферу  $S_k^{(\frac{1}{2})}$ . Но  $f(e \cap \beta_{n-k+1}) = f(e \cap \beta_{n-k})$ , так как  $\beta_{n-k+1} \subset \Omega_3$ . Поэтому функция  $f(e \cap \beta_{n-k+1})$  как функция плоскости  $\beta_{n-k+1} \subset \Omega_3$  зависит лишь от  $\beta_{n-k} = \beta_{n-k+1} \cap E_n$  и не зависит от прямой  $l(\beta_{n-k+1})$ . А тогда  $f(e \cap \beta_{n-k+1})$  на множестве  $\Omega_3 = \Omega_k^n \times S_k^{(\frac{1}{2})}$  будет измеримой  $\left( \mu_{\omega_k^n} \times \mu_{S_k} \right)$  тогда и только тогда, когда  $f(e \cap \beta_{n-k})$  измерима на  $\Omega_k^n \left( \mu_{\omega_k^n} \right)$  по Лебегу. Из того, что  $\mu_{\omega_k^{n+1}}$  и  $\mu_{\omega_k^n} \times \mu_{S_k}$  суть меры Хаара, следует, что они совпадают с точностью до нормировки, т. е.

$$\mu_{\omega_k^{n+1}} = c \cdot \mu_{\omega_k^n} \times \mu_{S_k}.$$

А так как из того, что для  $e \subset E_n$   $f(e \cap \beta_{n-k+1}) = 0$  на boreлевском множестве  $\Omega_1$ , и из того, что  $\mu_{\omega_k^{n+1}}(\Omega_2) = 0$ , следует, что для  $e \subset E_n$   $f(e \cap \beta_{n-k+1})$  на множестве  $\Omega_1 + \Omega_2$  измерима  $\left( \mu_{\omega_k^{n+1}} \right)$ , то из всего вышесказанного мы немедленно

получаем, что  $e$  измеримо  $(f_k^{n+1})$  тогда и только тогда, когда оно измеримо  $f_k^n$ .

Этим доказана первая часть теоремы для  $m = 1$ .

Докажем вторую часть теоремы для  $m = 1$ .

Так как при  $\beta_{n-k+1} \subset \Omega_1$   $f(e \cap \beta_{n-k+1}) = 0$ , то интеграл

$$\int_{\Omega_1} f(e \cap \beta_{n-k+1}) d\mu_{\Omega_k^{n+1}} = 0.$$

Так как  $\mu_{\Omega_k^{n+1}}(\Omega_2) = 0$ , то

$$\int_{\Omega_2} f(e \cap \beta_{n-k+1}) d\mu_{\Omega_k^{n+1}} = 0.$$

А тогда

$$\int_{\Omega_k^{n+1}} f(e \cap \beta_{n-k+1}) d\mu_{\Omega_k^{n+1}} = \int_{\Omega_3} f(e \cap \beta_{n-k+1}) d\mu_{\Omega_k^{n+1}}.$$

Но, с другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_3} f(e \cap \beta_{n-k+1}) d\mu_{\Omega_k^{n+1}} &= \int_{\Omega_k^n \times S_k^{\left(\frac{1}{2}\right)}} f(e \cap \beta_{n-k+1}) d\mu_{\Omega_k^{n+1}} = \\ &= \int_{\Omega_k^n} \int_{S_k^{\left(\frac{1}{2}\right)}} f(e \cap \beta_{n-k+1}) \frac{1}{c} d\mu_{\Omega_k^n} \cdot d\mu_{S_k} = \\ &= \int_{\Omega_k^n} f(e \cap \beta_{n-k}) \frac{1}{c} \left\{ \int_{S_k^{\left(\frac{1}{2}\right)}} d\mu_{S_k} \right\} d\mu_{\Omega_k^n}, \end{aligned}$$

так как  $f(e \cap \beta_{n-k+1})$  для  $\beta_{n-k+1} \subset \Omega_3$  зависит лишь от  $\beta_{n-k} = E_n \cap \beta_{n-k+1}$ .

Таким образом,

$$\int_{\Omega_k^{n+1}} f(e \cap \beta_{n-k+1}) d\mu_{\Omega_k^{n+1}} = \frac{c_k}{2c} \int_{\Omega_k^n} f(e \cap \beta_{n-k}) d\mu_{\Omega_k^n}, \quad (1)$$

ибо  $\int_{S_k^{\left(\frac{1}{2}\right)}} d\mu_{S_k} = \frac{1}{2} c_k$  (см. лемму 2 § 8).

Если  $e = J_k$ , т. е. является единичным  $k$ -мерным кубом, то

$$\begin{aligned} f_k^n(e) &= \frac{1}{D_k^n} \int_{\Omega_k^n} f(e \cap \beta_{n-k}) d\mu_{\Omega_k^n} = 1 = \\ &= \frac{1}{D_k^{n+1}} \int_{\Omega_k^{n+1}} f(e \cap \beta_{n-k+1}) d\mu_{\Omega_k^{n+1}} = f_k^{n+1}(e). \end{aligned}$$

Из последнего и (1) следует, что  $\frac{1}{D_k^n} = \frac{c_k}{2c} \cdot \frac{1}{D_k^{n+1}}$ . А тогда, разделив равенство (1) на  $D_k^{n+1}$  и заменив  $\frac{c_k}{2cD_k^{n+1}}$  на  $\frac{1}{D_k^n}$ , получаем, что для всякого измеримого  $(f_k^n)$  множества  $e \subset E_n \subset E_{n+1}$

$$f_k^n(e) = f_k^{n+1}(e).$$

Для  $m = 1$  теорема 10 доказана полностью.

Далее индукцией по числу  $m$  получаем справедливость утверждения теоремы 10 для произвольных  $m$ .

Для вычисления коэффициентов  $D_k^n$  можно указать рекуррентную формулу, дающую возможность выразить константу  $D_k^n$  через  $D_0^0$ .

**Теорема 11.** Пусть  $f(e)$  есть регулярная функция множества  $e$  такая, что для всякого  $e_0$ , состоящего из одной точки,  $f(e_0) = D_0^0 = 1$ . Тогда для всех  $n$  и  $k < n$  имеет место формула

$$D_k^n = \prod_{l=1}^k (c_{l-1} \prod_{m=1}^{n-k} a_{l+m-1}),$$

где

$$a_{l+m-1} = \int_0^\pi \sin^{l+m-1} t dt.$$

**Доказательство.** Так как  $D_0^0 = 1$  по предположению, то

$$\begin{aligned} D_0^n &= \int_{\Omega^n} f(e_0 \cap \beta_n) d\mu_{\Omega^n} = \int_{\Omega_0^n} f_0^0(e_0) d\mu_{\Omega_0^n} = f_0^0(e_0) = D_0^0 = 1 \\ &\quad (n = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

Вычислим теперь  $D_n^n$ . Пусть  $e_n \subset E_n$  есть  $n$ -мерный единичный куб. Из определения  $D_n^n$  и теоремы 8 получаем:

$$\begin{aligned} f_n^n(e_n) &= \frac{1}{D_n^n} \int_{\Omega_n^n} f(e_n \cap \beta_0) d\mu_{\Omega_n^n} = \\ &= \frac{1}{D_n^n} \int_{\Phi_n^n} \int_{E_n} f(e_n \cap \beta_0) dm^n d\mu_{\Phi_n^n} = \frac{1}{D_n^n} \int_{\Phi_n^n} d\mu_{\Phi_n^n}, \end{aligned}$$

так как

$$\int_{E_n} f(e_n \cap \beta_0) dm^n = 1,$$

поскольку  $f(e_n \cap \beta_0)$  является характеристической функцией множества  $e_n$  ( $f(e_n \cap \beta_0) = f(e_0) = f_0^0(e_0) = D_0^0 = 1$ ).

А так как  $f_n^n(e_n) = 1$ , то

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{D_n^n} \int_{\Phi_n^n} d\mu_{\Phi_n^n} = \frac{1}{D_n^n} \int_{\Omega_n^n} d\mu_{\Omega_n^n} = \\ &= \frac{1}{D_n^n} \int_{S_{n-1}} d\mu_{S_{n-1}} \dots \int_{S_0} d\mu_{S_0} = \frac{1}{D_n^n} C_{n-1} \cdot C_{n-2} \dots C_0 \end{aligned}$$

(см. лемму 2 § 8), т. е.

$$D_n^n = C_{n-1} C_{n-2} \dots C_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Выведем теперь рекуррентную формулу.

Фиксируем  $0 < k < n$ ,  $n \geq 0$  и обозначим через  $E_{n+1}$   $(n+1)$ -мерное евклидово пространство, содержащее  $E_n \supset e$ ; через  $O$  — некоторую точку из  $E_n$ ; через  $S_n$  —  $n$ -мерную сферу из  $E_{n+1}$  единичного радиуса с центром в  $O$ ; через  $S_{n-1}$  — сферу из  $E_n$ , являющуюся пересечением  $S_n$  и  $E_n$ ; через  $\tau_1(r)$  — прямую из  $E_{n+1}$ , проходящую через точки  $O$  и  $r \subset S_n$ ; через  $\tau_1^*(r) = \tau_1(r^*)$  — проекцию прямой  $\tau_1(r)$  на  $E_n$  ( $r^* = S_{n-1} \cap \tau_1^*(r)$ ); через  $x$  — произвольную точку на  $\tau_1(r)$ ; через  $x^*$  — такую точку из  $\tau_1^*(r)$ , что  $\angle x^* x O = \frac{\pi}{2}$ ; через  $\beta_n(r, x)$  —  $n$ -мерную плоскость пространства  $E_{n+1}$ , содер-

жащую точку  $x$  из  $\tau_1(r)$  и ортогональную к  $\tau_1(r)$ ; через  $\beta_{n-1}^*(r, x) = \beta_{n-1}(r^*, x^*)$  — пересечение  $E_n$  и  $\beta_n(r, x)$ . Пусть  $J_k$  есть единичный  $k$ -мерный замкнутый куб из  $E_n$ ,  $J_k(r, x) = J_k(r^*, x^*) = J_k \cap \beta_n(r, x) = J_k \cap \beta_{n-1}(r^*, x^*)$ .

Из теоремы 8 нетрудно вывести, что

$$f_k(J_k) = \frac{D_{k-1}^{n-1}}{D_k^n} \int_{S_{n-1}} f_{k\tau_1(r)}^n(J_k) d\mu_{S_{n-1}}$$

и

$$f_k^{n+1}(J_k) = \frac{D_{k-1}^n}{D_k^{n+1}} \int_{S_n} f_{k\tau_1(r)}^{n+1}(J_k) d\mu_{S_n}.$$

Отметим, что  $f_k^n(J_k) = f_k^{n+1}(J_k) = 1$  по определению  $D_k^n$  и  $D_k^{n+1}$ .

Пусть  $\alpha(r)$  есть острый угол, составленный прямой  $\tau_1(r)$  и нормалью к  $E_n$ , проходящей через точку  $O$ . Ясно, что  $|Ox| = |Ox^*| \cdot \sin \alpha(r)$ . А тогда

$$\begin{aligned} f_{k\tau_1(r)}^{n+1}(J_k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{k-1}^n(J_k \cap \beta_n(r, x)) dx = \\ &= \sin \alpha(r) \int_{-\infty}^{+\infty} f_{k-1}^{n-1}(J_k \cap \beta_{n-1}(r^*, x^*)) dx^* = \\ &= \sin \alpha(r) f_{k\tau_1(r^*)}^n(J_k), \end{aligned}$$

так как  $f_{k-1}^n(J_k \cap \beta_n(r, x)) = f_{k-1}^{n-1}(J_k \cap \beta_{n-1}(r^*, x^*))$  для  $x \neq O$ , поскольку при  $x \neq O$

$$J_k \cap \beta_n(r, x) = J_k \cap \beta_{n-1}(r^*, x^*).$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_k^{n+1}(J_k) &= \frac{D_{k-1}^n}{D_k^{n+1}} \int_{S_n} \sin \alpha(r) f_{k\tau_1(r)}^n(J_k) d\mu_{S_n} = \\ &= \frac{D_{k-1}^n}{D_k^{n+1}} \int_0^\pi \sin \alpha(r) \left\{ \int_{S_{n-1}} f_{k\tau_1(r^*)}^n(J_k) \sin^{n-1} \alpha(r) d\mu_{S_{n-1}} \right\} d\alpha(r) = \\ &= \frac{D_{k-1}^n}{D_k^{n+1}} \int_0^\pi \sin^n \alpha(r) \cdot \frac{D_k^n}{D_{k-1}^{n-1}} d\alpha(r) = \frac{D_{k-1}^n D_k^n}{D_k^{n+1} D_{k-1}^{n-1}} \int_0^\pi \sin^n t dt, \end{aligned}$$

так как

$$\int_{S_{n-1}} f_{k\tau_1(r^*)}^n(J_k) d\mu_{S_{n-1}} = f_k^n(J_k) \frac{D_k^n}{D_{k-1}^{n-1}} = \frac{D_k^n}{D_{k-1}^{n-1}}.$$

А так как  $f_k^{n+1}(J_k) = 1$ , то

$$D_k^{n+1} = \frac{D_k^n \cdot D_{k-1}^n}{D_{k-1}^{n-1}} a_n,$$

где

$$0 < k \leq n, \quad a_n = \int_0^\pi \sin^n t \, dt.$$

С помощью индукции по числу  $k$  нетрудно показать, что  $D_k^n = D_{n-1}^{n-1} a_{n-1} \dots a_{n-k}$  для  $0 < k < n$ ,  $n \geq 1$ .

Теперь, имея последнюю рекуррентную формулу для вычисления  $D_k^{n+1}$  через коэффициенты с меньшими индексами и зная  $D^n = 1$ ,  $D^n = C_0 \dots C_{n-1}$ , получаем:

$$\begin{aligned}
 D_k^k &= C_0 \dots C_{k-1}, \\
 D_k^{k+1} &= C_0 \dots C_{k-1} a_k \dots a_1, \\
 D_k^{k+2} &= C_0 \dots C_{k-1} a_k \dots a_1 a_{k+1} \dots a_2, \\
 &\dots \\
 D_k^n &= C_0 \dots C_{k-1} a_k \dots a_1 a_{k+1} \dots a_2 a_{k+2} \dots a_3 \dots \\
 &\dots a_{n-1} \dots a_{n-k} = \prod_{l=1}^k (C_{l-1} \prod_{m=1}^{n-k} a_{m+l-1}).
 \end{aligned}$$

## § 10. Вариации множества

Примем за функцию  $f(e)$  число  $v_0(e)$  компонент множества  $e$ .

Функция  $v_0(e)$  является регулярной: выполнение первых трёх условий регулярности очевидно, а измеримость функции  $v_0(J_k \cap \beta_{n-k})$  на  $\Omega_k^n$  будет доказана ниже.

Определение 10. Функция  $v_0(e \cap \beta_{n-k})$  плоскости  $\beta_{n-k}$ , определённая на пространстве  $\Omega_k^n$  и равная для всякой плоскости  $\beta_{n-k}$  числу компонент пересечения множе-

ства  $e \subset E_n$  с этой плоскостью, называется  $k$ -й функцией кратности множества  $e \subset E_n$  ( $0 \leq k \leq n$ ).

Определение 11. Множество  $e \subset E_n$  называется измеримым ( $v_k^n$ ), если соответствующая ему функция кратности  $v_0(e \cap \beta_{n-k})$  измерима ( $\mu_{\Omega_k^n}$ ) по Лебегу, а число

$$v_k^n(e) = \frac{1}{d_k^n} \int_{\Omega_k^n} v_0(e \cap \beta_{n-k}) d\mu_{\Omega_k^n},$$

где

$$d_k^n = D_k^n(v_0) = \int_{\Omega_k^n} v_0(e \cap \beta_{n-k}) d\mu_{\Omega_k^n}$$

(величину  $D_k^n$  см. в § 9), называется *вариацией порядка  $k$*  или  $k$ -й *вариацией* измеримого ( $v_k^n$ ) множества  $e \subset E_n$ .

Так как для функций  $v_k^n(e)$  имеет место теорема 10 (§ 9), мы будем в дальнейшем опускать верхний индекс  $n$ , понимая под  $v_k(e)$  функцию, вычисленную в пространстве любой размерности  $m \geq n$ , где  $n$  — минимальная размерность пространства, целиком содержащего  $e$ .

Определение 12. Пусть  $\tau_{k-l}$  есть  $(k-l)$ -мерная плоскость из  $E_n$ , а  $\beta_{n-k+l}(z)$  —  $(n-k+l)$ -мерная плоскость из  $E_n$ , содержащая точку  $z \in \tau_{k-l}$  и ортогональная к  $\tau_{k-l}$ .

Если почти для всякой точки  $z \in \tau_{k-l}$  (в смысле  $m^{k-l}$ ) соответствующее множество  $e \cap \beta_{n-k+l}$  измеримо ( $v_l$ ) и функция  $v_l(e \cap \beta_{n-k+l}(z)) = \frac{1}{d_l^{n-k+l}} \int_{\Omega_l^{n-k+l}(z)} f(e \cap \beta_{n-k}) d\mu_{\Omega_l^{n-k+l}}$

измерима ( $m^{k-l}$ ) по Лебегу как функция от  $z$ , то число

$$v_{k-l}(e) = \int_{\tau_{k-l}} v_l(e \cap \beta_{n-k+l}(z)) dm^{k-l}$$

мы назовём *вариацией порядка  $k$*  множества  $e$  относительно плоскости  $\tau_{k-l}$ .

Для  $v_k(e)$  справедлива теорема 8. Особый интерес для нас будут представлять в дальнейшем два частных случая этой теоремы, которые мы здесь отметим.

Теорема 12. Пусть  $1 \leq k \leq n$ , а  $e$  — измеримое ( $v_k$ ) множество из пространства  $E_n$ . Тогда почти всякая прямая

(одномерная плоскость)  $\tau_1$  такова, что  $\tau_{1, \tau_1}(e)$  для неё определена и как функция прямой  $\tau_1$  измерима ( $\mu_{\Phi_1^n} = \mu_{S_{n-1}}$ ) по Лебегу, и

$$v_k(e) = \frac{d_{k-1}^{n-1}}{d_k^n} \int_{S_{n-1}} v_{k\tau_1(r)}(e) d\mu_{S_{n-1}}.$$

Эта теорема является частным случаем теоремы 8 и получается из неё при  $f(e) = f_0(e)$  и  $l = k - 1$ .

Определение  $k$ -й вариации множества, задаваемое теоремой 12, мы будем называть в дальнейшем *индуктивным определением* вариации.

Теорема 13. Пусть  $0 \leq k \leq n$ , а  $e$  — измеримое ( $v_k$ ) множество из  $E_n$ . Тогда почти всякая (в смысле меры  $\mu_{\Phi_k^n}$ ) плоскость  $\tau_k$  такова, что вариация  $v_{k\tau_k}(e)$  для неё определена и измерима ( $\mu_{\Phi_k^n}$ ) как функция плоскости  $\tau_k$  по Лебегу, и

$$v_k(e) = \frac{1}{d_k^n} \int_{\Phi_k^n} v_{k\tau_k}(e) d\mu_{\Phi_k^n}.$$

Эта теорема получается как частный случай теоремы 8 при  $f(e) = v_0(e)$  и  $l = 0$ . Формулу  $k$ -й вариации, задаваемую теоремой 13, мы будем называть *конструктивным определением* вариации.

Это определение наиболее прозрачно вскрывает геометрический смысл вариаций.  $k$ -я вариация поверхности относительно плоскости  $\tau_k$  характеризует  $k$ -мерную «протяжённость» поверхности относительно этой плоскости. А сама  $k$ -я вариация описывает «сумму размеров» всевозможных  $k$ -мерных «складок» этой поверхности. Для достаточно гладкой  $k$ -мерной поверхности вариация порядка  $k$  оказывается численно равной её  $k$ -мерной мере.

## § 11. Вариации функции многих переменных

Пусть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  — однозначная функция, определённая на некотором множестве  $e$  из евклидова пространства  $E_n$ .

Обозначим через  $T$  направленную прямую, являющуюся осью значений функции  $t = f(x)$ ; через  $\Omega_k^{nT}$  — декартово

произведение  $\Omega_k^n \times T$ ; через  $\varphi_k^{nT}$  — декартово произведение  $\varphi_k^n \times T$ . Элементом пространства  $\Omega_k^{nT}$  является пара  $(\beta_{n-k}, t)$ , а элементом пространства  $\varphi_k^{nT}$  — пара  $(r_k^n, t)$ , где  $r_k^n \in \varphi_k^n$ .

За меры в пространствах  $\varphi_k^{nT}$  и  $\Omega_k^{nT}$  примем соответственно

$$\mu_{\varphi_k^{nT}} = \mu_{\varphi_k^n} \times \mu_T$$

$$\mu_{\Omega_k^{nT}} = \mu_{\Omega_k^n} \times \mu_T,$$

где  $\mu_T = m$  — линейная мера Лебега.

Обозначим через  $e_t$  множество уровня  $t$  функции  $f(x)$ .  
Определение 13. Пусть  $1 \leq k \leq n$ . Мы скажем, что функция  $f(x)$ , определённая на множестве  $e \subset E_n$ , измерима ( $v_k$ ), если соответствующая ей величина  $v_0(e_t \cap \beta_{n-k+1})$  как функция пары  $(\beta_{n-k+1}, t) \in \Omega_{k-1}^{nT}$  измерима ( $\mu_{\Omega_{k-1}^{nT}}$ ) по

Лебегу. Число

$$v_k(f, e) = \frac{1}{d_{k-1}^n} \int_{\Omega_{k-1}^{nT}} v_0(e_t \cap \beta_{n-k+1}) d\mu_{\Omega_{k-1}^{nT}}$$

мы назовём  $k$ -й вариацией функции  $f(x)$  на множестве  $e$ .

Этому определению можно было бы дать следующую геометрическую интерпретацию.

Будем мыслить ось  $T$  как направленную прямую из  $E_{n+1}$ , ортогональную к  $E_n$ . Обозначим через  $F$  график функции  $f(x)$ , т. е. множество всех таких точек пространства  $E_{n+1}$ , проекция каждой из которых на  $E_n$  содержится в  $e$ , а координаты  $t, x_1, x_2, \dots, x_n$  удовлетворяют уравнению  $t = f(x_1 \dots x_n)$ . Пусть  $\beta_{n-k+1}$  — любая  $(n-k+1)$ -мерная плоскость из  $E_n$ . Обозначим через  $\beta_{n-k+1}^t$  ортогональную проекцию плоскости  $\beta_{n-k+1} \subset \Omega_{k-1}^n$  на гиперплоскость  $E_n^t$  из  $E_{n+1}$ , параллельную гиперплоскости  $E_n$  и отстоящую от последней (по оси  $T$ ) на расстоянии  $t$ .

Совершенно очевидно, что для любой пары  $(\beta_{n-k+1}, t) \in \Omega_{k-1}^{nT} = \Omega_{k-1}^n \times T$   $v_0(e_t \cap \beta_{n-k+1}) = v_0(F \cap \beta_{n-k+1}^t)$ . Следовательно, для измеримой функции  $f(x)$   $k$ -я вариация может

быть представлена как такой интеграл:

$$v_k = \frac{1}{d_{k-1}^n} \int_{\Omega_{k-1}^{nT}} v_0(F \cap \beta_{n-k+1}^t) d\mu_{\Omega_{k-1}^{nT}},$$

геометрический смысл которого вполне прозрачен.

Теорема 14. Пусть  $1 \leq k \leq n$ . Если функция  $f(x)$ , определённая на  $e \subset E_n$ , измерима ( $v_k$ ), то почти для всякого  $t$  (в смысле меры вдоль оси  $T$ ) соответствующее множество уровня  $e_t$  измеримо ( $v_{k-1}$ ) и величина  $v_{k-1}(e_t)$  как функция от  $t$  измерима по Лебегу, при этом

$$v_k(f, e) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{k-1}(e_t) dt.$$

Эта теорема является простым следствием теоремы Фубини (см. теорему 7).

Мы опускаем из рассмотрения  $(n+1)$ -ю вариацию функции  $n$  переменных, поскольку для всякой однозначной измеримой по Лебегу функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  эта вариация равна нулю. Последнее утверждение следует из того, что для такой функции  $f(x)$  множество всех множеств уровней, каждое из которых имеет положительную меру Лебега ( $m^n$ ), не более чем счётно (см. лемму 22 § 18), а вариация порядка  $n$  всякого множества  $e$  из  $E_n$ , как будет показано ниже (см. теорему 22 § 16), равна его мере Лебега  $m^n(e)$ .

В силу теоремы Банаха (см. § 1, свойство 5) первая вариация непрерывной функции одного переменного (единственная вариация в данном случае) равна изменению функции (в смысле определения 1) на этом отрезке.

Если сравнить определения величины  $v_1(f, e)$  для  $e \subset E_2$  с определением линейной вариации А. С. Кронрада (см. § 5), то нетрудно убедиться, что определения этих величин тождественны. Ниже мы покажем, что вторая вариация функции двух переменных равна плоской вариации Кронрада от той же функции.

Теорема 15. Пусть  $f(x)$  есть измеримая ( $v_k$ ) на множестве  $e \subset E_n$  функция, и  $0 \leq l < k \leq n$ . Тогда почти всякая плоскость  $\beta_{n-k+l+1} \subset E_n$  такова, что  $f(x)$  на соответствующем этой плоскости множестве  $e \cap \beta_{n-k+l+1}$  измерима ( $v_{l+1}$ ),  $v_{l+1}(f, e \cap \beta_{n-k+l+1})$  как функция от  $\beta_{n-k+l+1}$

измерима по Лебегу, и

$$v_k(f, e) = \frac{d_l^{n-k+l+1}}{d_{k-1}^n} \int_{\Omega_{k-l-1}^n} v_{l+1}(f, e \cap \beta_{n-k+l+1}) d\mu_{S_{k-l-1}^n}.$$

Определение 14. Пусть  $\beta_{n-k+l+1}(z)$  есть  $(n-k+l+1)$ -мерная плоскость из  $E_n$ , ортогональная к плоскости  $\tau_{k-l-1} \subset \Phi_{k-l-1}^n$  и содержащая точку  $z \in \tau_{k-l-1}$ . Мы скажем, что *вариация порядка  $k$  функции  $f(x)$  (на множестве  $e$ ) относительно плоскости  $\tau_{k-l-1}$*  (или вдоль направления  $\beta_{n-k+l+1}$ ) определена, если почти для всякой  $z \in \tau_{k-l-1}$  функция  $f(x)$  измерима ( $v_{l+1}$ ) на множестве  $e \cap \beta_{n-k+l+1}(z)$  и  $v_{l+1}(f, e \cap \beta_{n-k+l+1}(z))$  как функция от  $z \in \tau_{k-l-1}$  измерима по Лебегу. Число

$$v_{k-l-1}(f, e) = \int_{\tau_{k-l-1}} v_{l+1}(f, e \cap \beta_{n-k+l+1}(z)) dm^{k-l-1}$$

мы назовём  *$k$ -й вариацией функции  $f(x)$  относительно плоскости  $\tau_{k-l-1}$*  (на множестве  $e$ ).

Теорема 16. Пусть  $0 \leq l < k \leq n$ . Пусть  $f(x)$  на множестве  $e \subset E_n$  измерима ( $v_k$ ). Тогда  $v_{k-l-1}(f, e)$  определена относительно почти всякой плоскости  $\tau_{k-l-1} \subset \Phi_{k-l-1}^n$ , и

$$v_k(f, e) = \frac{d_l^{n-k+l+1}}{d_{k-1}^n} \int_{\Phi_{k-l-1}^n} v_{l+1, \tau_{k-l-1}}(f, e) \cdot d\mu_{\Phi_{k-l-1}^n}.$$

Теоремы 15 и 16 являются следствиями теорем 9 и 8 (соответственно) и теоремы Фубини.

Для нас в дальнейшем особый интерес будет представлять частный случай теоремы 16.

Теорема 17. Пусть  $f(x)$  удовлетворяет условиям предыдущей теоремы 16. Тогда

$$v_n(f, e) = \frac{d_{n-2}^{n-1}}{d_{n-1}^n} \int_{S_{n-1}} v_{n-1, \tau_1(r)}(f, e) \cdot d\mu_{S_{n-1}}.$$

Эта теорема получается из теоремы 16 при  $k = n$  и  $l = n - 2$ .

## ГЛАВА 3

### СВОЙСТВА ВАРИАЦИЙ МНОЖЕСТВА

#### § 12. Некоторые классы измеримых $(\sigma_k)$ множеств

Докажем следующие теоремы.

Теорема 18. Пусть  $0 \leq k \leq n$ . Всякое замкнутое множество  $e \subset E_n$  измеримо  $(\sigma_k)$ .

Теорема 19. Пусть  $0 \leq k \leq n$ . Пусть  $e \subset E_n$  есть аналитическое множество [11] ( $A$ -множество) такое, что  $\sigma_{k+1}(e) = 0$ . Тогда  $e$  измеримо  $(\sigma_k)^*$ .

Займёмся доказательством этих теорем.

Пусть  $e \subset E_n$ . Множество  $e^* \subset \Omega_k^n$ , состоящее из всех тех плоскостей  $\beta_{n-k} \in \Omega_k^n$ , которые пересекаются с множеством  $e$ , мы назовём проекцией  $e$  в пространство  $\Omega_k^n$ . Определённое таким образом соответствие  $e^* = \psi_{\Omega_k^n}(e)$  мы будем называть проектированием пространства  $E_n$  в  $\Omega_k^n$ .

Лемма 3. Проекция в  $\Omega_k^n$  всякого аналитического множества  $a \subset E_n$  является аналитическим множеством пространства  $\Omega_k^n$  ( $0 \leq k \leq n$ ).

Доказательство. Пусть  $E_{n+1} \supset E_n$ . Обозначим через  $T$  единичный вектор из  $E_{n+1}$  с началом в точке  $O \subset E_n$  и ортогональный к  $E_n$ ; через  $T$  — прямую, содержащую вектор  $T$ ; через  $\Phi_{n-k}^n$  — совокупность  $n-k$ -мерных плоскостей из  $E_n$ , проходящих через точку  $O$ .

Аналогично тому, как строится непрерывное отображение отрезка на квадрат, можно задать непрерывное отобра-

\*) При  $k = n$  смысл теоремы сохраняется, поскольку в силу теоремы 10  $(n+1)$ -й вариацией множества  $e \subset E_n$  можно считать  $(n+1)$ -ю вариацию того же множества  $e \subset E_{n+1}$  ( $E_{n+1} \supset E_n \supset e$ ).

жение прямой  $T$  на компактное пространство  $\Phi_{n-k}^n$ . Фиксируем одно из таких преобразований и обозначим его через  $\psi_1$ . Через  $\psi_2$  обозначим преобразование пространства  $E_{n+1}$ , состоящее в ортогональном проектировании этого пространства на  $E_n$ . Через  $\psi_3$  обозначим преобразование  $E_{n+1}$  в  $\Omega_k^n$ , задаваемое следующим образом: точке  $x \in E_{n+1}$  преобразование  $\psi_3$  ставит в соответствие плоскость  $\beta_{n-k} \subset E_n$ , проходящую через точку  $\psi_2(x) \subset E_n$  и параллельную плоскости  $\beta_{n-k}(t, 0) \subset \Phi_{n-k}^n$ , где  $t = t(x)$  есть координата точки  $x$  относительно вектора  $T$ , а  $\beta_{n-k}(t, 0) = \psi_1(t)$  — образ точки из  $T$  с координатой  $t$  (относительно  $T$ ) при преобразовании  $\psi_1$ .

Нетрудно убедиться, что  $\psi_2$  и  $\psi_3$  непрерывны и что  $a^* = \psi_{\Omega_k^n}(a) = \psi_3(a')$ , где  $a'$  есть полный прообраз (в  $E_{n+1}$ )

множества  $a$ , принадлежащего  $E_n$ , при преобразовании  $\psi_2$ .

Если  $a$  является аналитическим множеством, то  $a'$ , будучи его полным прообразом при непрерывном преобразовании  $\psi_2$ , также является аналитическим множеством [11]. Следовательно, и  $a^* = \psi_3(a')$ , будучи непрерывным образом аналитического множества  $a'$  при непрерывном преобразовании  $\psi_3$ , также есть аналитическое множество.

Лемма 3 доказана.

В пространстве  $E_n$  фиксируем счётное всюду плотное множество  $B$ , состоящее из точек  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Замкнутый  $n$ -мерный шар из  $E_n$  мы будем называть допустимым, если его центр принадлежит множеству  $B$ , а радиус рационален. Ясно, что множество допустимых шаров счётно. Обозначим систему этих шаров через  $\Sigma = \{\Sigma_i\}$ .

Лемма 4. Если множество  $e \subset E_n$  замкнуто, то всякое лебеговское множество из  $\Omega_k^n$ , на котором  $v_0(e \cap \beta_{n-k}) \geq c$ , представимо в виде разности двух  $A$ -множеств.

Доказательство. Фиксируем целое число  $c > 0$  и обозначим через  $\Omega_k^n(c)$  такое лебеговское подмножество из  $\Omega_k^n$ , что  $v_0(e \cap \beta_{n-k}) \geq c$  для  $\beta_{n-k} \in \Omega_k^n(c)$ .

Так как система  $\Sigma$  содержит лишь счётное множество шаров, то множество всевозможных систем, состоящих из конечного числа допустимых шаров, счётно. Перенумеруем эти конечные наборы шаров и обозначим их через  $\delta_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Обозначим далее через  $\delta$ , теоретико-множественную сумму всех шаров из  $\delta_j$ , а через  $D_j$  — границу этого множества  $\delta_j$ .

Фиксируем  $\nu$  ( $\nu \geq c$ ) попарно не пересекающихся множеств  $\delta_{j1}, \delta_{j2}, \dots, \delta_{js}$  из  $\{\delta_j\}$ . Такой набор множеств мы назовём допустимым.

Положим:

$$\Omega_k^n(j_1, j_2, \dots, j_s) = \prod_{m=1}^s \psi_{\Omega_k^n}^m(e \cap \delta_{jm}) - \sum_{m=1}^s \psi_{\Omega_k^n}^m(e \cap D_{jm}).$$

Сумму множеств  $\Omega_k^n(i_1, \dots, i_s)$  по всевозможным допустимым наборам, состоящим не менее чем из  $c$  допустимых множеств, мы обозначим через  $\Omega'(c)$ .

Нетрудно сообразить, что точка  $\beta_{n-k}$  принадлежит  $\Omega'(c)$  тогда и только тогда, когда существует набор попарно не пересекающихся множеств  $\delta_{j1}, \delta_{j2}, \dots, \delta_{js}$  из  $\{\delta_j\}$  ( $\nu \geq c$ ) такой, что при всяком  $j \leq \nu$  множество  $e \cap \delta_{jm} \cap \beta_{n-k}$  не пусто и располагается строго внутри  $\delta_{jm}$ . А так как различные множества такого набора, будучи замкнутыми попарно не пересекающимися множествами, отстоят друг от друга на положительное расстояние, то множество  $e \cap \beta_{n-k}$  состоит не менее чем из  $c$  компонент.

Следовательно, для всякой точки из  $\Omega'(c)$   $v_0(e \cap \beta_{n-k}) \geq c$ , т. е.  $\Omega'(c) \subset \Omega_k^n(c)$ .

Покажем теперь, что  $\Omega'(c) \supset \Omega_k^n(c)$ . Фиксируем плоскость  $\beta_{n-k} \in \Omega_k^n(c)$ . Так как  $e$  замкнуто, то замкнуто и  $e \cap \beta_{n-k}$ . А тогда из того, что  $v_0(e \cap \beta_{n-k}) \geq c$ , следует, что  $e \cap \beta_{n-k}$  можно разбить не менее чем на  $c$  попарно отстоящих друг от друга не менее чем на  $\varepsilon(\beta_{n-k}) > 0$  замкнутых множеств  $e_1(\beta_{n-k}), \dots, e_c(\beta_{n-k})$ . Так как  $e \cap \beta_{n-k}$  замкнуто, то его можно заключить строго внутрь суммы конечного числа шаров из  $\Sigma$  радиуса не более чем  $\frac{1}{5}\varepsilon(\beta_{n-k})$  и притом таким образом, что каждый из указанных шаров будет иметь общие точки с  $e \cap \beta_{n-k}$ . Обозначая через  $\delta_{jm}$  сумму всех шаров из выбранной системы, имеющих общие точки с  $e_m(\beta_{n-k})$ , получаем, что при всяком  $m \leq c$   $e \cap \delta_{jm} \cap \beta_{n-k}$  не пусто. Граница  $D_{jm}(\beta_{n-k})$  множества  $\delta_{jm}$  не пересекается с  $e \cap \beta_{n-k}$ , и множества  $\{\delta_{jm}\}$  попарно не пересекаются, поскольку радиус каждого из выбранных шаров не превосходит

$$\frac{1}{5}\varepsilon(\beta_{n-k}) > 0.$$

Следовательно,  $\beta_{n-k} \subset \Omega'(c)$ , т. е.  $\Omega'(c) \supset \Omega_k^n(c)$  и, значит,  $\Omega'(c) = \Omega_k^n(c)$ .

Так как  $e$  замкнуто и, следовательно, является  $A$ -множеством, то при всяких  $m \leq v$  ( $v \geq c$ )  $e \cap \delta_{jm}$  и  $e \cap D_{jm}$  суть  $A$ -множества. Следовательно, в силу леммы 3  $\Omega_k^n(j_1 \dots j_v)$  есть разность двух  $A$ -множеств

$$\coprod_{m=1}^v \psi_{\Omega_k^n}(e \cap \delta_{jm}) \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^v \psi_{\Omega_k^n}(e \cap D_{jm})$$

при всяком  $v \geq c$ . А так как  $\Omega_k^n(c) = \Omega'(c)$  является суммой счтного множества разностей  $\Omega_k^n(j_1, \dots, j_v)$  аналитических множеств, то и  $\Omega_k^n(c)$  представима в виде разности двух  $A$ -множеств ( $c > 0$ ).

При  $c = 0$   $\Omega_k^n(c) = \Omega_k^n$ , поскольку

$$v_0(e \cap \beta_{n-k}) \geq 0.$$

Так как  $v_0(e \cap \beta_{n-k})$  принимает лишь целочисленные неотрицательные значения, то при всяком  $c$   $\Omega_k^n(c)$  представимо в виде разности двух  $A$ -множеств.

Лемма 4 доказана.

Обозначим через  $\mu_0(e \cap \beta_{n-k})$  число точек пересечения множества  $e \subset E_n$  и  $(n-k)$ -мерной плоскости  $\beta_{n-k} \subset E_n$ .

Лемма 5. Для всякого аналитического множества  $e \subset E_n$   $\mu_0(e \cap \beta_{n-k})$  является  $A$ -функцией плоскости  $\beta_{n-k}$  \*).

Доказательство. Пусть  $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{ic}$  ( $c > 0$ ) — попарно не пересекающиеся допустимые шары из системы  $\Sigma$ . Положим

$$\Omega_k^n(i_1, i_2, \dots, i_c) = \coprod_{j=1}^c \psi_{\Omega_k^n}(e \cap \delta_{ij}) \quad \text{и} \quad \Omega'(c)$$

равным теоретико-множественной сумме множеств  $\Omega_k^n(i_1 \dots i_c)$  по всевозможным наборам  $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{ic}$ , состоящим из  $c$  попарно не пересекающихся допустимых шаров.

По аналогии с тем, как это делалось в лемме 4, здесь можно показать, что при всяком  $c > 0$   $\Omega_k^n(c)$  совпадает

\*) Функция  $q(x)$ , определённая на некотором множестве  $\omega$ , называется  $A$ -функцией аргумента  $x$ , если всякое лебеговское множество из  $\omega$ , на котором  $q(x) \geq c$ , при любом  $c$  является  $A$ -множеством.

с лебеговским множеством, на котором  $\mu_0(e \cap \beta_{n-k}) \geq c$ , а при  $c = 0$   $\Omega_k^n(c) = \Omega_k^n$ . Следовательно, при всяком  $e$  множество, на котором  $\mu_0(e \cap \beta_{n-k}) \geq c$ , есть  $A$ -множество.

Лемма 5, таким образом, доказана.

Лемма 6. Функции  $v_0(e \cap \beta_{n-k})$  и  $\mu_0(e \cap \beta_{n-k})$  суть регулярные функции множества.

Доказательство этой леммы с очевидностью следует из леммы 4 и леммы 5.

Лемма 7. Если  $v_{k+1}(e) = 0$ , то почти всюду на  $\Omega_k^n$   $v_0(e \cap \beta_{n-k}) = \mu_0(e \cap \beta_{n-k})$ .

Доказательство. Пусть  $\Omega^*$  есть множество всех таких плоскостей  $\beta_{n-k}$ , для каждой из которых  $v_1(e \cap \beta_{n-k}) = 0$ . Так как  $v_{k+1}(e) = 0$ , то в силу теоремы 9 почти всякая плоскость  $\beta_{n-k}$  (в смысле меры  $\mu_{\Omega_k^n}$ ) такова, что  $v_1(e \cap \beta_{n-k}) = 0$ .

Следовательно,  $\mu_{\Omega_k^n}(\Omega^*) = \mu_{\Omega_k^n}(\Omega_k^n)$ .

Пусть  $\beta_{n-k} \subset \Omega^*$ . Так как  $v_1(e \cap \beta_{n-k}) = 0$ , то почти на всякую прямую из  $\beta_{n-k}$  (в смысле меры  $\mu_{S_{n-k-1}}$ ) множество  $e \cap \beta_{n-k}$  проектируется в множество нулевой меры, дополнение к которому вследствие этого должно быть几乎处处 плотным на такой прямой. Но через всякую точку этого дополнения можно пропустить ортогональную к этой прямой гиперплоскость пространства  $\beta_{n-k}$ , не пересекающуюся с  $e \cap \beta_{n-k}$ . А из этого следует, что всякое подмножество из  $e \cap \beta_{n-k}$ , состоящее более чем из одной точки, можно разрезать некоторой гиперплоскостью, с ним не пересекающейся, на две части  $e_1$  и  $e_2$  такие, что  $e_1 \cap e_2 = \emptyset$  и  $e_1 \cup e_2 = e$  (чертой сверху обозначено замыкание). Это означает, что  $e \cap \beta_{n-k}$  содержит лишь точечные компоненты. Следовательно,

$$v_0(e \cap \beta_{n-k}) = \mu_0(e \cap \beta_{n-k})$$

для  $\beta_{n-k} \subset \Omega^*$ . Но, как уже указывалось, множество  $\Omega^*$  имеет полную меру.

Лемма доказана.

Так как всякое  $A$ -множество является измеримым в смысле всякой неотрицательной меры, обладающей свойством полной аддитивности (см. [11]), и так как совокупность измеримых множеств (в смысле некоторой фиксированной меры) образует  $\sigma$ -кольцо (см. § 6), то все аналитические подмножества про-

странства  $\Omega_k^n$  и их попарные разности измеримы  $(\mu_{\Omega_k^n})$ . А тогда, в силу лемм 4, 5 и 7, теоремы 18 и 19 можно считать доказанными.

### § 13. Простейшие свойства вариаций множества

Пусть  $E_n$  есть  $n$ -мерное евклидово пространство ( $n$  произвольно),  $e$  — измеримое ( $v_k$ ) подмножество этого пространства (см. определение 11),  $v_k(e)$  —  $k$ -я вариация множества  $e$  в пространстве  $E_n$ .

$v_k(e)$  ( $0 \leq k \leq n$ ) как функция множества  $e$  обладает следующими свойствами.

Свойство 1.  $v_k(e) \geq 0$  и  $v_k(0) = 0$ .

Свойство 2. Пусть  $e$  есть измеримое ( $v_k$ ) подмножество пространства  $E_n$ , а  $e'$  — множество из  $E_n$ , конгруэнтное множеству  $e$ , т. е. существует ортогональное преобразование  $\omega$  пространства  $E_n$  такое, что  $e' = \omega(e)$ . Тогда множество  $e'$  измеримо ( $v_k$ ) и  $v_k(e') = v_k(e)$ .

Свойство 3. Пусть  $e$  есть измеримое ( $v_k$ ) подмножество пространства  $E_n$  и  $e' = \omega_l(e)$ , где  $\omega_l$  — преобразование пространства  $E_n$  на себя такое, что для всяких точек  $a$  и  $b$  из  $E_n$  имеет место равенство: расстояние  $\rho(\omega_l(a), \omega_l(b)) = l\rho(a, b)$  ( $l$  не зависит от точек  $a$  и  $b$ ). Тогда  $e'$  измеримо ( $v_k$ ) и  $v_k(e') = l^k v_k(e)$ .

Свойство 4. Пусть  $e$  есть сумма попарно отстоящих друг от друга на положительном расстоянии измеримых ( $v_k$ ) подмножеств  $e_i$  пространства  $E_n$ . Тогда  $e = \sum_{i=1}^{\infty} e_i$  измеримо

$$(v_k) \text{ и } v_k(e) = \sum_{i=1}^{\infty} v_k(e_i).$$

Свойство 5. Пусть замкнутое множество  $e$  есть теоретико-множественная сумма замкнутых множеств  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) таких, что при всевозможных  $i \neq j$   $v_k(e_i \cap e_j) = 0$ . Тогда

$$v_k(e) = \sum_{i=1}^{\infty} v_k(e_i).$$

Свойство 6. Пусть  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) есть измеримые  $v_k$  множества такие, что  $v_{k+1}(e_i) = 0$  и  $v_k(e_i \cap e_j) = 0$  для  $i \neq j$ .

$$\text{Тогда } v_k\left(\sum_{i=1}^{\infty} e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} v_k(e_i).$$

Свойства 1—4 являются тривиальными следствиями свойств интеграла Лебега, свойство 5 легко доказывается с помощью индуктивного определения вариаций множества, а доказательство свойства 6 будет с очевидностью следовать из леммы 18 (которая будет доказана в § 16), аддитивности меры Фавара (§ 16) и теоремы 9.

### § 14. Линейная вариация и длина множества

Здесь мы покажем, что для всякого достаточно простого множества (например, для простой дуги или континуума нулевой площади) линейная вариация и длина (по Хаусдорфу) численно равны. Но отметим при этом, что для более общего типа множеств (например, для класса всевозможных замкнутых множеств) линейная вариация и линейная мера (длина) существенно отличаются друг от друга. Например, для двумерного множества линейная мера всегда бесконечна, а линейная вариация может быть конечной даже для самых простых множеств (например, двумерный круг является таким множеством).

Примеры такого рода существуют в силу того, что для множеств ненулевой площади линейная вариация как функция множества не аддитивна, а линейная мера аддитивна для всех измеримых множеств. Более того, можно указать примеры замкнутых множеств (см. следующий параграф) нулевой площади, линейная вариация которых равна нулю, а длина — бесконечности. Такого рода примеры возникают из-за того, что линейная мера в силу своего определения \*) не возрастает при сжатом преобразовании множества, в то время как линейная вариация множества при преобразованиях такого рода может возрастать. Доказательство этому будет дано в следующем параграфе.

Для простоты изложения ограничимся рассмотрением плоских подмножеств. Далее будет видно, что это ограничение несущественно.

*Лемма 8. Линейная вариация  $v_1(k)$  произвольного отрезка  $k$  равна его длине.*

Эта лемма следует непосредственно из определения  $v_1(e)$  и свойства 3 § 13.

\*) Имеется в виду аксиоматика А. Н. Колмогорова [12].

Пусть  $X, Y$  есть прямоугольная декартова система координат плоскости  $E_2$  ( $x, y$  — координаты произвольной точки из  $E_2$  относительно  $X, Y$ ). Точка  $O$  для определённости принимается за начало координат. Пусть, далее,  $l$  есть простая дуга из  $E_2$ , задаваемая функциями  $x = f_1(t)$  и  $y = f_2(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). При этом отображение отрезка  $0 \leq t \leq 1$  на дугу  $l$ , задаваемое указанными функциями, взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

**Лемма 9 (Жордана).** Для того чтобы дуга  $l$ , задаваемая функциями  $x = f_1(t)$  и  $y = f_2(t)$ , где  $t \in e (0 \leq t \leq 1)$ , была спрямляемой, необходимо и достаточно, чтобы функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  на отрезке  $e$  имели конечное изменение (в смысле определения 1).

**Доказательство.** Пусть  $s$  есть длина дуги  $l$ . Из определения длины дуги следует, что существует последовательность ломаных  $\lambda_k (k = 1, 2, \dots)$  таких, что длина максимального звена ломаной монотонно убывает, стремясь к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , все вершины всякой из указанных ломаных расположены на  $l$ , вершины ломаной  $\lambda_k$  на дуге  $l$  имеют тот же порядок, что и на самой ломаной \*), концы ломаной  $\lambda_k$  совпадают с концами дуги  $l$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и  $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = s$ , где  $s_k$  есть длина ломаной  $\lambda_k$ .

Пусть  $a_k^m (m = 1, 2, \dots, m_k)$  суть точки отрезка  $e (0 \leq t \leq 1)$  такие, что соответствующие точки  $[f_1(a_k^m), f_2(a_k^m)] (m = 1, 2, \dots, m_k)$  представляют собой множество всех вершин ломаной  $\lambda_k$ . При этом нумерация такова, что при всяком  $\mu > \nu$  точка  $a_k^\mu$  на отрезке  $0 \leq t \leq 1$  лежит правее точки  $a_k^\nu$ . Обозначим через  $f_{1\lambda_k}(t)$  функцию, определённую на отрезке  $e (0 \leq t \leq 1)$  следующим образом: на отрезке  $[a_k^m, a_k^{m+1}]$

$$f_{1\lambda_k}(t) = \frac{f_1(a_k^{m+1}) - f_1(a_k^m)}{|a_k^{m+1} - a_k^m|} \cdot (t - a_k^m) + f_1(a_k^m) \quad (m = 1, 2, \dots, m_{k-1}).$$

Аналогично определяется функция  $f_{2\lambda_k}(t)$ . Нетрудно сообразить, что отображение отрезка  $e (0 \leq t \leq 1)$  на плоскость  $E_2$ ,

\*) Это означает, что если некоторая вершина ломаной  $\lambda_k$  не принадлежит некоторому звену этой ломаной, то она не принадлежит и дуге из  $l$ , ограниченной концами того же звена.

задаваемое функциями  $x = f_{1\lambda_k}(t)$  и  $y = f_{2\lambda_k}(t)$ , переводит (гомеоморфно) указанный отрезок в ломаную  $\lambda_k$  и при этом

$$s_k = \sum_{m=1}^{m_k-1} \sqrt{[f_{1\lambda_k}(a_k^{m+1}) - f_{1\lambda_k}(a_k^m)]^2 + [f_{2\lambda_k}(a_k^{m+1}) - f_{2\lambda_k}(a_k^m)]^2},$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Так как длина максимального звена ломаной  $\lambda_k$  с ростом  $k$  убывает к нулю, то и длина максимального отрезка из  $[a_k^m, a_k^{m+1}]$  ( $m = 1, \dots, m_k - 1$ ) также стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , а тогда из непрерывности функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  следует, что изменение (вариация) функции  $f_1(t)$  на отрезке  $e$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) равно

$$v_1(f_1, e) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^{m_k-1} |f_1(a_k^{m+1}) - f_1(a_k^m)| \leq$$

$$\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^{m_k-1} \sqrt{[f_1(a_k^{m+1}) - f_1(a_k^m)]^2 + [f_2(a_k^{m+1}) - f_2(a_k^m)]^2} =$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = s,$$

и аналогично  $v_1(f_2, e) \leq s$ . Последнее означает, что если дуга  $l$  спрямляема, то функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  имеют конечное изменение.

Предположим, что изменение функции  $f_1(t)$  на отрезке  $e$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), так же как и изменение функции  $f_2(t)$  на том же отрезке, не превосходит некоторого числа  $c < +\infty$ . Тогда

$$s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{m_k-1} \sqrt{[f_1(a_k^{m+1}) - f_1(a_k^m)]^2 + [f_2(a_k^{m+1}) - f_2(a_k^m)]^2} \leq$$

$$\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{m_k-1} \{ |f_1(a_k^{m+1}) - f_1(a_k^m)| + |f_2(a_k^{m+1}) - f_2(a_k^m)| \} \leq$$

$$\leq \lim_{k \rightarrow \infty} [v_1(f_1) + v_1(f_2)] \leq 2c < +\infty,$$

т. е. если функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  имеют конечное изменение, то дуга  $l$  имеет конечную длину.

Лемма 9 доказана,

Пусть  $E_2$  есть двумерная плоскость,  $O$  — некоторая точка этой плоскости,  $S_1$  — окружность из  $E_2$  единичного радиуса с центром в точке  $O$ ,  $\tau_1(r)$  — направленная прямая из  $E_2$ , проходящая через точки  $O$  и  $r \in S_1$ , а  $\beta_1(r, x)$  — прямая из  $E_2$ , перпендикулярная к  $\tau_1(r)$  и содержащая точку  $x$  из  $\tau_1(r)$ .

Лемма 10. Линейная вариация  $v_{1\tau_1(r)}(l)$  спрямляемой дуги  $l$  относительно произвольной прямой  $\tau_1(r)$  не превосходит длины  $s$  дуги  $l$ .

Доказательство. Поскольку оси  $X$  и  $Y$  мы выбрали совершенно произвольно, то для упрощения обозначений мы, очевидно, можем предполагать, что ось  $X$  совпадает с прямой  $\tau_1(r)$ . Пусть  $e_x$  — множество уровня  $x$  функции  $x = f_1(t)$ .

По теореме С. Банаха (см. 5 § 1)  $v_0(e_x)$  как функция  $x$  измерима по Лебегу и

$$v(f, \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(e_x) dx.$$

С другой стороны,

$$v_{1\tau_1(r)}(l) = \int_{-\infty}^{\infty} v_0[l \cap \beta_1(r, x)] dx = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(e_x) dx,$$

поскольку  $v_0(e_x) = v_0(l \cap \beta_1(r, x))$  при всяком  $x$  в силу того, что преобразование отрезка  $[0, 1]$  в дугу  $l$ , задаваемое функциями  $x = f_1(t)$  и  $y = f_2(t)$ , есть гомеоморфизм. А тогда

$$\begin{aligned} v_{1\tau_1(r)}(l) &= \int_{-\infty}^{\infty} v_0(e_x) dx = v(f_1, l) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{m_k-1} |f_1(a_k^{m+1}) - f_1(a_k^m)| \leqslant \\ &\leqslant \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{m_k-1} \sqrt{[f_1(a_k^{m+1}) - f_1(a_k^m)]^2 + [f_2(a_k^{m+1}) - f_2(a_k^m)]^2} = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = s, \end{aligned}$$

т. е.  $v_{1\tau_1(r)}(l) \leqslant s$ .

**Лемма 11.** *Если дуга  $l$  имеет конечную длину, то для всякой прямой  $\tau_1(r)$  множество всех таких точек  $x \in \tau_1(r)$ , для каждой из которых соответствующая прямая  $\beta_1(r, x)$  (см. обозначения перед леммой 10) касается дуги  $l$  хотя бы в одной точке, имеет меру нуль.*

**Доказательство.** Пусть для определённости  $\tau_1(r) = X$ , а параметр  $t$  точки  $(x, y) \in l$  равен  $\frac{p}{s}$ , где  $s$  есть длина дуги  $l$ , а  $p = p(x, y)$  — расстояние по дуге  $l$  от точки  $(x, y)$  до одного из концов дуги. Пусть  $e$  есть множество всех таких точек  $x \in X$ , для каждой из которых соответствующая прямая  $\beta_1(r, x)$  хотя бы в одной точке касается дуги  $l$ , а  $e_x$  — множество уровня функции  $f_1(t)$ . Если  $x \in e$ , то хотя бы в одной точке множества  $e_x$  производная функции  $f_1(t)$  существует и равна нулю. Предположим, что внешняя мера  $m(e) = \alpha > 0$ .

Пусть  $t$  таково, что  $\frac{df_1(t)}{dt} = 0$ . Тогда на отрезке  $0 \leq t \leq 1$  для всякого положительного числа  $k$  можно указать интервал  $e_{kt}$  такой, что отношение колебания функции  $f_1(t)$  на этом интервале к длине интервала не превосходит  $\frac{1}{k}$ . Обозначим через  $e_k(t)$  множество значений функции  $f_1(t)$  на интервале  $e_{kt}$ , а через  $L_{kt}$  — интервал из области значений функции  $f_1(t)$  длины  $2|e_k(t)| + \frac{1}{k}|e_{kt}|$  с центром в точке  $f_1(t)$ .

Ясно, что совокупность всевозможных интервалов  $L_{mt}$ , где  $m > k$ , а  $t$  таково, что  $\frac{df_1(t)}{dt} = 0$ , представляет собой покрытие (в смысле Витали) множества  $e$ .

Тогда в силу теоремы Витали из этой совокупности интервалов можно выделить счётную систему попарно не пересекающихся интервалов  $l_{kt}^p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) таких, что

$$m(e - \sum_{p=1}^{\infty} l_{kt}^p) = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{p=1}^{\infty} m(l_{kt}^p) \geq \alpha.$$

Пусть  $e_{kt}^p = e_{kt}$  есть интервал на отрезке  $0 \leq t \leq 1$ , из которого вышеуказанным способом был получен интервал

$$l_{kt}^p = L_{kt}.$$

Обозначим через  $h_{kt}^p$  колебание функции  $f_1(t)$  на интервале  $e_{kt}^p$ . Из того, что

$$\frac{h_{kt}^p}{|e_{kt}^p|} \leq \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad |l_{kt}^p| = 2h_{kt}^p + \frac{1}{k} |e_{kt}^p|,$$

следует, что

$$m(e_{kt}^p) = |e_{kt}^p| \geq k \cdot h_{kt}^p = k \left( \frac{1}{2} |l_{kt}^p| - \frac{|e_{kt}^p|}{2k} \right),$$

откуда  $m(e_{kt}^p) \geq km(l_{kt}^p)$ .

Так как интервалы  $l_{kt}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) попарно не пересекаются, то не пересекаются попарно и интервалы  $e_{kt}^p$ , а тогда

$$m \sum_{p=1}^{\infty} e_{kt}^p \geq k \sum_{p=1}^{\infty} m(l_{kt}^p) \geq k\alpha.$$

При  $k > \frac{2}{\alpha}$  последнее неравенство противоречиво, поскольку

$$m \left( \sum_{p=1}^{\infty} e_{kt}^p \right) \leq 1.$$

Противоречие получено из предположения о том, что  $\alpha > 0$ . Следовательно,  $\alpha = 0$ .

**Лемма 12.** Пусть  $l$  есть дуга конечной длины, а  $l'$  — замкнутая дуга, содержащаяся в  $l$ . Тогда линейная вариация  $v_1(l')$  и длина  $h_1(l')$  дуги  $l'$  равны:  $v_1(l') = h_1(l')$ .

**Доказательство.** Пусть  $x = f_1(t)$  и  $y = f_2(t)$  суть функции, осуществляющие параметрическое задание дуги  $l$  и  $t = t(x, y) = \frac{\rho}{s}$ , где  $s$  есть длина дуги  $l$ , а  $\rho = \rho(x, y)$  — расстояние по дуге  $l$  от точки  $(x, y)$  до одного из её концов. Так как  $s < +\infty$ , то в силу леммы 9 функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  имеют конечное изменение, а следовательно, они почти всюду дифференцируемы. Из последнего следует, что почти во всякой точке из  $e(0 \leq t \leq 1)$  (с точностью до некоторого множества нулевой длины) дуга  $l$  имеет касательную. Пусть  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) есть последовательность ломаных из  $E_2$  с вершинами на  $l'$  и с концами в конце дуги  $l'$  такая, что длина максимального звена ломаной  $\lambda_k$  с ростом  $k$  убывает к нулю, при всяком  $k$  на куске дуги из  $l'$ , ограниченном концами некоторого звена ломаной  $\lambda_k$ , нет других вершин

той же ломаной, не принадлежащих указанному звену, и, наконец, такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s'$ , где  $s_k$  есть длина ломаной  $\lambda_k$ . Из леммы 8 следует, что  $v_0(\lambda_k) = s_k$ . Фиксируем прямую  $\tau_1(r)$  и точку  $x$  этой прямой такую, чтобы во всякой точке из пересечения  $l \cap \beta_1(r, x)$  дуга  $l'$  имела касательную, не совпадающую с  $\beta_1(r, x)$ , т. е. пересекающую прямую  $\beta_1(r, x)$  под некоторым ненулевым углом. Покажем, что в таком случае при достаточно большом  $k$

$$v_0(l' \cap \beta_1(r, x)) = v_0(\lambda_k \cap \beta_1(r, x)), \quad k \geq k_0 = k_0(r, x).$$

Если прямая  $\beta_1(r, x)$  имеет общую точку с некоторым звеном  $\lambda'_k$  ломаной  $\lambda_k$ , то та же прямая  $\beta_1(r, x)$  пересекается и с дугой  $\tilde{\lambda}'_k$  из  $l'$ , ограниченной концами звена  $\lambda'_k$ , поскольку в таком случае концы звена  $\lambda'_k$  располагаются по разные стороны от прямой  $\beta_1(r, x)$ , а следовательно,  $\tilde{\lambda}'_k$ , будучи связным множеством, соединяющим концы рассматриваемого звена, обязана пересекаться с прямой  $\beta_1(r, x)$ . Поэтому при всяком  $k$   $v_0(\lambda_k \cap \beta_1(r, x)) \leq v_0(l' \cap \beta_1(r, x))$ . Пусть  $q_l$  ( $l = 1, 2, \dots$ ,  $v_0(l' \cap \beta_1(r, x))$  суть точки, составляющие множество  $l' \cap \beta_1(r, x)$ ). Так как в силу леммы 10

$$v_{1\tau_1(r)}(l') = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(l' \cap \beta_1(r, x)) dx \leq s' < +\infty,$$

то почти для всякой точки  $x$  из  $\tau_1(r)$   $v_0(l' \cap \beta_1(r, x)) < \infty$ . Пусть точка  $x$  из  $\tau_1(r)$  такова, что, кроме вышепрописанного ей свойства, она обладает ещё и тем свойством, что  $v_0(l' \cap \beta_1(r, x)) < +\infty$ . Пусть  $\lambda'_k$  есть звено ломаной  $\lambda_k$ , концы которого ограничивают дугу  $\tilde{\lambda}'_k \in l'$ , содержащую точку  $q_l$  из  $l' \cap \beta_1(r, x)$ . Так как во всякой точке  $q_l$  из  $l' \cap \beta_1(r, x)$  кривая  $l'$  имеет касательную, не совпадающую с прямой  $\beta_1(r, x)$ , то можно указать  $k_0 = k_0(r, x)$  такое, что при  $k > k_0$  концы звена  $\lambda'_k$  оказываются лежащими по разные стороны от  $\beta_1(r, x)$ , т. е. в таком случае звено  $\lambda'_k$  будет пересекаться с прямой  $\beta_1(r, x)$ . Но тогда при  $k > k_0$   $v_0(l' \cap \beta_1(r, x)) \leq v_0(\lambda_k \cap \beta_1(r, x))$ , а следовательно, при  $k > k_0$   $v_0(l' \cap \beta_1(r, x)) = v_0(\lambda_k \cap \beta_1(r, x))$ . Последнее означает, что для всякой точки  $r \in S_1$  соответствующая последовательность функций  $v_0(\lambda_k \cap \beta_1(r, x))$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) почти во всякой точке  $x$  из  $\tau_1(r)$  сходится к функции  $v_0(l \cap \beta_1(r, x))$  и при этом (почти всюду) равномерно огра-

ничена той же функцией, интеграл от которой в силу леммы 10 не превосходит  $s$ . Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_0(\lambda_k \cap \beta_1(r, x)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} v_0(\lambda_k \cap \beta_1(r, x)) dx,$$

т. е.

$$v_{1\tau_1(r)}(l') = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_{1\tau_1(r)}(\lambda_k),$$

а тогда

$$\begin{aligned} v_1(l') &= \frac{1}{4} \int_{S_1} v_{1\tau_1(r)}(l') d\mu_{s_1} = \frac{1}{4} \int_{S_1} \lim_{k \rightarrow \infty} v_{1\tau_1(r)}(\lambda_k) d\mu_{s_1} = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \int_{S_1} v_{1\tau_1(r)}(\lambda_k) d\mu_{s_1} = \lim_{k \rightarrow \infty} v_1(\lambda_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s', \end{aligned}$$

поскольку семейство функций  $v_{1\tau_1(r)}(\lambda_k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) равномерно ограничено константой  $s' \geq s_k$ . Итак,  $v_1(l') = s'$ .

*Лемма 13.* *Пусть  $l$  есть дуга конечной длины, а  $B$  — борелевское множество из  $l$ . Тогда линейная вариация  $v_1(B)$  и длина  $h_1(B)$  (по Хаусдорфу) множества  $B$  равны*

$$v_1(B) = h_1(B).$$

*Доказательство.* Так как  $B$  является измеримым подмножеством дуги  $l$ , то существует система интервалов  $l_k^m$  ( $k = 1, 2, \dots$ ;  $m = 1, 2, \dots$ ) из  $l$  таких, что при всяком  $m$  дуги  $l_k^m$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) попарно не пересекаются и

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_k^m = g^m \supset B \quad \text{и} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} h_1(g^m) = h_1(B).$$

Положим  $g = \prod_{m=1}^{\infty} g^m$ .

Так как  $B$  и  $g - B$  являются борелевскими множествами, то  $h_1(B) = h_1(g) = h_1(B) + h_1(g - B) = h_1(B) + 0$ .

Тогда из того, что всякое множество нулевой длины (в том числе и множество  $g - B$ ) на всякую прямую проектируется в множество нулевой меры, следует, что почти во всякой точке  $x$  из  $\tau_1(r)$  (точка  $r$  произвольна, но фиксирована) последовательность функций  $v_0(g^m \cap \beta_1(r, x))$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) сходится к  $v_0(B \cap \beta_1(r, x))$ . А так как последовательность

функций  $v_0(g^m \cap \beta_1(r, x))$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) при всяком  $r \in s_1$  почти всюду равномерно ограничена интегрируемой функцией  $v_0(l \cap \beta_1(r, x))$  и так как последовательность функций  $v_{1\tau_1(r)}(g^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(g^m \cap \beta_1(r, x)) dx$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) равномерно ограничена константой  $s$ , то

$$\begin{aligned}
 v_1(B) &= \frac{1}{4} \int_{s_1} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(B \cap \beta_1(r, x)) dx d\mu_{s_1} = \\
 &= \frac{1}{4} \int_{s_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} v_0(g^m \cap \beta_1(r, x)) dx d\mu_{s_1} = \\
 &= \frac{1}{4} \int_{s_1} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(g^m \cap \beta_1(r, x)) dx d\mu_{s_1} = \\
 &= \frac{1}{4} \int_{s_1} \lim_{m \rightarrow \infty} v_{1\tau_1(r)}(g^m) d\mu_{s_1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \int_{s_1} v_{1\tau_1(r)}(g^m) d\mu_{s_1} = \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} v_1(g^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_1(l_k^m) = \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_1(l_k^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} h_1(g^m) = h_1(g) = h_1(B),
 \end{aligned}$$

т. е.

$$v_1(B) = h_1(B).$$

**Теорема 20.** Для всякой простой дуги  $l$ , лежащей в плоскости  $E_2$ , её линейная вариация и длина равны

$$v_1(l) = h_1(l).$$

**Доказательство.** Если дуга  $l$  имеет конечную длину, то утверждение сформулированной теоремы следует из леммы 13. Пусть  $l$  имеет бесконечную длину. Покажем, что в таком случае и её линейная вариация равна бесконечности. Из того, что длина дуги равна бесконечности, следует, что существует последовательность ломаных  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) с вершинами на  $l$  такая, что на всякой дуге  $\tilde{\lambda}_k^m$  из  $l$ , ограниченной концами некоторого звена  $\lambda_k^m$  ломаной  $\lambda_k$ , нет вершин ломаной  $\lambda_k$ ,

принадлежащих какому-либо другому звену той же ломаной ( $m = 1, \dots, m_k$ ) и  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty$ , где  $s_k$  есть длина ломаной  $\lambda_k$ .

По не раз уже высказанным выше соображениям  $v_1(l) \geq v_1(\lambda_k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ); следовательно,

$$v_1(l) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} v_1(\lambda_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_1(\lambda_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty,$$

т. е.

$$v_1(l) = \infty.$$

**Лемма 14.** *Пусть  $K$  есть континуум из  $E_2$  нулевой площади (по Лебегу) и бесконечной длины (по Хаусдорфу). Тогда его линейная вариация бесконечна.*

**Доказательство.** Обозначим через  $N_\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) максимум числа кругов по всевозможным системам попарно не пересекающихся открытых кругов радиуса  $\varepsilon$  из  $E_2$  с центрами на континууме  $K$ , т. е.  $N_\varepsilon$  есть минимальное целое число такое, что, каковы бы ни были круги  $\sigma_1, \dots, \sigma_{N_\varepsilon+1}$  радиусов  $\varepsilon$  с центрами на континууме  $K$ , найдутся два из них с общими внутренними точками. Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и обозначим через  $\sigma_l^e$  ( $l = 1, \dots, N_\varepsilon$ ) систему попарно не пересекающихся открытых кругов из  $E_2$  радиуса  $\varepsilon$  с центрами в точках  $c_l^e \in K$  ( $l = 1, \dots, N_\varepsilon$ ) (соответственно); через  $K_l^e$  — компоненту множества  $K \cap \sigma_l^e$ , содержащую точку  $c_l^e$ ; через  $D_l^e$  — точку из границы круга  $\sigma_l^e$ , принадлежащую также и континууму  $K$  и такую, что  $K_l^e + D_l^e$  связно (если  $N_\varepsilon \geq 2$ , то точка  $D_l^e$  в силу связности континуума  $K$  существует).

Далее будем предполагать, что  $\varepsilon$  столь мало, что  $N_\varepsilon \geq 2$ .

Если некоторая прямая  $\beta_1(r, x)$  пересекается с отрезком  $[c_l^e, D_l^e]$ , то та же прямая имеет хотя бы одну общую точку и с множеством  $K_l^e + D_l^e \subset K$ , поскольку это множество связно и соединяет точки  $c_l^e$  и  $D_l^e$ , которые разделены прямой  $\beta_1(r, x)$ . А из последнего следует, что

$$v_1(K_l^e) = \frac{1}{4} \int_{s_1}^{s_1} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0 [K_l^e \cap \beta_1(r, x)] dx d\mu_{s_1} \geq \varepsilon.$$

Из того, что  $m(K) = 0$ , и теоремы Фубини следует, что для всякой точки  $r \in S_1$  прямая  $\tau_1(r)$  такова, что почти для всякой

её точки  $x$  соответствующая прямая  $\beta_1(r, x)$  такова, что множество  $K \cap \beta_1(r, x)$  не содержит отрезков, т. е. состоит из точечных компонент. А поэтому

$$v_1(K) \geq \sum_{i=1}^{N_\epsilon} v_1(K_i^\epsilon) \geq \epsilon N_\epsilon.$$

Предположим, что существует положительное число  $c$  такое, что при всяком  $\epsilon$  имеет место неравенство  $\epsilon N_\epsilon < c$ . Обозначим через  $\xi_i^\epsilon$  открытый круг радиуса  $3\epsilon$ , концентрический кругу  $\sigma_i^\epsilon$ . Тогда из определения числа  $N_\epsilon$  следует, что

$\sum_{i=1}^{N_\epsilon} \xi_i^\epsilon \supset K$ , а следовательно, нижняя грань  $h_1^{2\epsilon}(K)$  сумм диаметров кругов, в сумме покрывающих континуум  $K$ , имеющих радиусы не более  $3\epsilon$ , не превосходит  $\sum_{i=1}^{N_\epsilon} 6\epsilon = 6\epsilon \cdot N_\epsilon < 6c$ .

А тогда и

$$h_1(K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_1^{2\epsilon}(K) \leq 6c < +\infty.$$

Последнее противоречит предположению леммы о том, что  $h_1(K) = +\infty$ . А тогда  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon N_\epsilon = \infty$ . Из последнего получаем:  $v_1(K) \geq \epsilon N_\epsilon \rightarrow +\infty$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Следовательно,  $v_1(K) = +\infty$ .

**Теорема 21.** *Линейная вариация  $v_1(K)$  произвольного континуума  $K$  из  $E_2$ , имеющего нулевую площадь, равна его длине  $h_1(K)$ :  $v_1(K) = h_1(K)$ .*

**Доказательство.** Если континуум  $K$  имеет бесконечную длину, то утверждение доказываемой теоремы следует из утверждения леммы 14. Поэтому далее мы будем предполагать, что длина  $h_1(K) = s$  континуума  $K$  конечна.

Р. С. Гутером доказано, что континуум, лежащий в евклидовом пространстве и имеющий конечную длину, почти всюду (с точностью до множества нулевой длины) имеет касательную \*) [13]. А тогда во всякой точке из  $K$ , не принадлежащей

\*) Мы скажем, что прямая  $\lambda$  касается континуума  $K$  в точке  $a \subset k$ , если  $a \subset \lambda$ , и для всякой пары прямых  $\lambda$  и  $\lambda_2$ , проходящих через  $a$ , можно указать окрестность  $\gamma$  такую, что всякая точка  $x \subset \gamma$ , отдалённая от прямой  $\lambda$  множеством  $\lambda_1 + \lambda_2$ , не принадлежит континууму  $K$ .

некоторому множеству  $K_0$  нулевой длины, континуум  $K$  имеет касательную.

Обозначим через  $K_n^x$  множество всех таких точек  $a$  из  $K$ , для каждой из которых имеет место следующее: какова бы ни была точка  $b$  континуума  $K$ , отстоящая от  $a$  не более чем на  $\frac{1}{n}$ , для неё имеет место неравенство

$$\left| \frac{y(b) - y(a)}{x(b) - x(a)} \right| \leq 2.$$

Аналогично определяется множество  $K_n^y$ . Ясно, что при  $n_2 > n_1$   $K_{n_2}^x \subset K_{n_1}^x$  и  $K_{n_2}^y \subset K_{n_1}^y$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Так как во всякой точке из  $K - K_0$  континуум  $K$  имеет касательную, то всякая точка множества  $K - K_0$  принадлежит хотя бы одному из множеств  $K_n^x$  и  $K_n^y$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Отметим при этом, что если, например, точка  $a$  из  $K$  принадлежит множеству  $K_{n_0}^x$ , то эта точка принадлежит и всем следующим множествам того же вида  $K_n^x$  ( $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ ). Обозначим через  $K_{nm}^x$  множество всех таких точек  $a$  из  $K_n^x$ , координата  $y(a)$  каждой из которых удовлетворяет неравенству  $\frac{m}{n} \leq y(a) \leq \frac{m+1}{n}$ , где  $m = 1, \dots, m(K)$  \*). При этом число  $m(K)$  предполагается столь большим, что каждая точка из  $K - K_0$  оказывается принадлежащей хотя бы одному из множеств  $K_{nm}^x, K_{nm}^y$  ( $m = 1, \dots, m(K)$ ). Из определения множества  $K_{nm}^x, K_{nm}^y$  следует, что на всякой прямой, параллельной оси  $Y$ , имеется не более чем по одной точке из  $K_{nm}^x$ , поскольку в противном случае оказалось бы, что в множестве  $K_{nm}^x$  есть две точки  $a$  и  $b$  такие, что расстояние между ними не превосходит  $\frac{1}{n}$ , а отношение  $\left| \frac{y(b) - y(a)}{x(b) - x(a)} \right| = +\infty$ , что невозможно. Поэтому координата  $y(a)$  произвольной точки  $a$  из  $K_{nm}^x$  представляет собой функцию, зависящую лишь от координаты  $x$  точки  $a$ .

\*) Здесь для простоты предполагается, что весь континуум лежит в первом квадранте. В противном случае этого можно было бы добиться параллельным переносом осей координат.

Нетрудно сообразить, что для всякой пары точек  $a$  и  $b$  из  $K_{nm}^x$  имеет место неравенство

$$|y(b) - y(a)| \leq 2|x(b) - x(a)|,$$

т. е. указанная функция удовлетворяет условию Липшица с константой, равной 2. В силу теоремы Уитнея [15] функцию  $y(x)$  можно доопределить для всевозможных  $x$  так, что она будет удовлетворять условию Липшица с той же константой и на расширенной области определения. Пусть  $R$  есть отрезок из  $X$ , содержащий проекцию (на  $X$ ) континуума  $K$ , а  $F_{nm}^x$  — график указанной функции  $y(x)$ , рассматриваемой лишь на  $R$ . Так как функция  $y(x)$  удовлетворяет условию Липшица и рассматривается лишь на конечном отрезке, то её график есть простая дуга конечной длины. Следовательно, множество  $K_{nm}^x$  укладывается на простой дуге конечной длины.

Аналогично доказывается, что и множество  $K_{nm}^y$  укладывается на простой дуге конечной длины. А тогда, очевидно, и множество  $K_n = \sum_{m=1}^{m(K)} (K_{nm}^x + K_{nm}^y)$  укладывается на конечном числе дуг конечной длины. Из замкнутости континуума  $K$  следует, что множества  $K_n^x$  и  $K_n^y$  замкнуты, а следовательно, замкнуто и множество  $K_n = K_n^x + K_n^y$ .

Тогда из леммы 13 следует, что

$$v_1(K_n) = h_1(K_n).$$

Из того, что континуум  $K$  имеет конечную длину, следует, что лишь на не более чем счётном множестве прямых  $\beta_1(r, x)$  могут содержаться отрезки из континуума  $K$ , а следовательно, для всякой точки  $r$  из  $S_1$  прямая  $\tau_1(r)$  такова, что почти для всякой её точки  $x$  соответствующее множество  $K \cap \beta_1(r, x)$  состоит лишь из одноточечных компонент, а тогда почти для всякой точки  $x$  из  $\tau_1(r)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_0(K_n \cap \beta_1(r, x)) = v_0(K \cap \beta_1(r, x)),$$

ибо почти всякая точка континуума  $K$  принадлежит всем множествам  $K_n$  ( $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ ), начиная с некоторого множества  $K_{n_0}$ . А так как последовательность функций

$v_0(K_n \cap \beta_1(r, x))$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) почти всюду не убывает и так как множество  $K_0$  проектируется на всякую прямую  $\tau_1(r)$  в множество нулевой меры, то

$$\begin{aligned} v_1(K) &= v_1(K - K_0) = \frac{1}{4} \int_{S_1} \int_{-\infty}^{\infty} v_0(K \cap \beta_1(r, x)) dx d\mu_{S_1} = \\ &= \frac{1}{4} \int_{S_1} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} v_0(K_n \cap \beta_1(r, x)) dx d\mu_{S_1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \int_{S_1} \int_{-\infty}^{\infty} v_0(K \cap \beta_1(r, x)) dx d\mu_{S_1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} v_1(K_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_1(K_n) = h_1(K), \end{aligned}$$

т. е.

$$v_1(K) = h_1(K) = s.$$

**Замечание.** Условие равенства нулю площади континуума  $K$  в формулировке теоремы 21 существенно, поскольку, например, для двумерного круга линейная вариация равна его диаметру, а длина (по Хаусдорфу) — бесконечности. Но, более того, можно построить одномерный континуум, линейная вариация которого конечна, а длина бесконечна.

Одномерный континуум такого рода строится следующим образом: в двумерном замкнутом круге  $\sigma$  единичного диаметра фиксируем счётное всюду (на  $\sigma$ ) плотное множество точек  $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), состоящее из внутренних точек круга  $\sigma$ . Обозначим через  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) попарно не пересекающиеся открытые круги из  $\sigma$  радиусов (соответственно)  $r_k$  с центром в  $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) такие, что каждый из указанных кругов  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) лежит строго внутри круга  $\sigma$ , сумма площадей кругов  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) не превосходит половины площади круга  $\sigma$  и  $\sum_{i=1}^{\infty} r_i < 1$ .

Положим  $K = \sigma - \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k = \prod_{k=1}^{\infty} (\sigma - \sum_{l=1}^k \sigma_l)$ . Так как  $K$  есть общая часть вложенных друг в друга континуумов  $\sigma - \sum_{l=1}^k \sigma_l$ ,

( $k = 1, 2, \dots$ ), то  $K$  есть континуум и его размерность равна 1, поскольку круги  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) расположены на круге  $\sigma$  всюду плотно. Длина континуума  $K$  бесконечна, поскольку его площадь не равна нулю. Ясно, что для всякой прямой  $\beta_1(r, x)$   $v_0(K(r, x)) \leq 1 + v_0\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k\right)$ , а поэтому

$$v_1(K) \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} v_1(\sigma_k) \leq 1 + 1 = 2,$$

т. е. линейная вариация континуума  $K$  конечна.

### § 15. Пример Д. Е. Меньшова \*)

Здесь мы построим предложенный Д. Е. Меньшовым пример множества  $e_0^\infty$ , лежащего на двумерной плоскости и обладающего следующими свойствами:

- множество  $e_0^\infty$  замкнуто;
- длина  $h_1(e_0^\infty)$  (по Хаусдорфу) множества  $e_0^\infty$  равна бесконечности;
- на всякую прямую, лежащую в той же плоскости, что и само множество  $e_0^\infty$ , последнее проектируется в множество нулевой меры, а следовательно, линейная вариация множества  $e_0^\infty$  равна нулю.

Но прежде чем определять множество  $e_0^\infty$ , построим замкнутое множество  $e'_0$ , лежащее в двумерной плоскости  $E_2$ , имеющее длину 1 и проектирующееся на всякую прямую из  $E_2$  в множество нулевой длины.

Построение множества  $e'_0$ . На двумерной плоскости  $E_2$  фиксируем точку  $O$  и обозначим через  $S_1$  окружность из  $E_2$  единичного радиуса с центром в точке  $O$ , а через  $\tau_1(r)$  — направленную прямую  $Or$ , проходящую через точки  $O$  и  $r \in S_1$ . Фиксируем произвольное натуральное число  $m$  и обозначим через  $\{r_l^m\}$  ( $l = 1, \dots, m$ ) равномерно распределенную на  $S_1$  систему из  $m$  точек ( $m = 1, 2, \dots$ ).

На плоскости  $E_2$  фиксируем замкнутый круг  $\sigma_1 = \sigma_l$  радиуса  $\frac{1}{2}$  и обозначим через  $d_1$  отрезок из  $\sigma_1$  единичной

\*) Пример публикуется впервые.

длины, являющийся диаметром круга  $\sigma_1$  и проектирующийся на прямую  $\tau_1(r_1^2)$  в одну точку. Отрезок  $d_1$  разделим на два равных отрезка и на каждом из них, как на диаметре, построим замкнутый круг. Эти круги мы обозначим через  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{12}$ .

Обозначим через  $d_{l_1 l_2}$  отрезок из  $E_2$ , являющийся диаметром круга  $\sigma_{l_1 l_2}$  и проектирующийся на прямую  $\tau_1(r_2^2)$  в одну точку ( $l_1 = 1, l_2 = 1, 2$ ).

Отрезок  $d_{l_1 l_2}$  мы разделим на два равных отрезка и на каждом из них, как на диаметре, построим замкнутый круг. Эти круги мы обозначим через  $\sigma_{l_1 l_2 l_3}$  ( $l_3 = 1, 2$ ). Нижние индексы  $l_1, l_2$  показывают, что круг  $\sigma_{l_1 l_2 l_3} \subset \sigma_{l_1 l_2}$ . Положим

$$a_1 = \sigma_1 = \sigma_{l_1} \text{ и } a_2 = \sum_{l_2=1}^2 \sum_{l_3=1}^2 \sigma_{l_1 l_2 l_3}.$$

Обозначим через  $d_{l_1 l_2 l_3}$  ( $l_3 = 1, 2$ ) диаметры кругов  $\sigma_{l_1 l_2 l_3}$ , перпендикулярные к прямой  $\tau_1(r_1^3)$ . Каждый диаметр  $d_{l_1 l_2 l_3}$  разделим на три равных отрезка, на которых построим круги  $\sigma_{l_1 l_2 l_3 l_4}$  ( $l_4 = 1, 2, 3$ ). В каждом  $\sigma_{l_1 l_2 l_3 l_4}$  находим диаметр  $d_{l_1 l_2 l_3 l_4}$ , перпендикулярный к  $\tau_1(r_2^3)$ , и делим его на три равных отрезка, на которых строим круги  $\sigma_{l_1 l_2 l_3 l_4 l_5}$  ( $l_5 = 1, 2, 3$ ). В каждом круге  $\sigma_{l_1 l_2 l_3 l_4 l_5}$  находим диаметр  $d_{l_1 l_2 l_3 l_4 l_5}$ , ортогональный к  $\tau_1(r_3^3)$ , делим его на три равных отрезка, на каждом из которых строим круг  $\sigma_{l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_6}$  ( $l_6 = 1, 2, 3$ ).

Положим  $a_3 = \sum_{l_2=1}^2 \sum_{l_3=1}^2 \sum_{l_4=1}^3 \sum_{l_5=1}^3 \sum_{l_6=1}^3 \sigma_{l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_6}$  и т. д. Пусть множества  $a_1, \dots, a_{m-1}$  уже определены и при этом множество  $a_{m-1}$  оказывается суммой конечного числа попарно не имеющих общих внутренних точек замкнутых кругов  $\sigma_{l_1 l_2 \dots l_p}$  ( $p = p_{m-1}$ ). Построим множество  $a_m$ .

Пусть  $d_{l_1 \dots l_p}$  — отрезок из  $E_2$ , являющийся диаметром круга  $\sigma_{l_1 \dots l_p}$  и ортогональный к прямой  $\tau_1(r_1^m)$ . Разделим отрезок  $d_{l_1 \dots l_p}$  на  $m$  равных отрезков, на которых, как на диаметрах, построим круги  $\sigma_{l_1 \dots l_p l_{p+1}}$  ( $l_{p+1} = 1, 2, \dots, m$ ). При этом индексы  $l_1, \dots, l_p$  говорят о том, что круг  $\sigma_{l_1 \dots l_p l_{p+1}} \subset \sigma_{l_1 \dots l_p}$ .

В каждом круге  $\sigma_{l_1 l_2 \dots l_{p+1}}$  найдём диаметр  $d_{l_1 l_2 \dots l_{p+1}}$ , ортогональный к прямой  $\tau_1(r_2^m)$ , разделим его на  $m$

отрезков, на которых построим круги  $\sigma_{l_1 l_2 \dots l_{p+1} l_{p+2}} (l_{p+2} = 1, 2, \dots, m)$ . В каждом круге  $\sigma_{l_1 l_2 \dots l_{p+1} l_{p+2}}$  найдём диаметр  $d_{l_1 l_2 \dots l_{p+2}}$ , ортогональный к  $\tau_1(r_k^m)$ , и т. д.

Аналогичным образом определим круги  $\sigma_{l_1 l_2 \dots l_{p+3}} (l_{p+3} = 1, 2, \dots, m)$ , затем круги  $\sigma_{l_1 l_2 \dots l_{p+4}} (l_{p+4} = 1, 2, \dots, m)$ ... и, наконец, круги  $\sigma_{l_1 l_2 \dots l_{p+m}} (p+m=p_m, l_{p+m} = 1, 2, \dots, m)$ . Отметим, что все круги  $\sigma_{l_1 \dots l_{p+k}} (l_{p+k} = 1, \dots, m)$  на прямую  $\tau_1(r_k^m)$  проектируются в один и тот же отрезок ( $k = 1, 2, \dots, m$ ).

Положим множество  $a_m$  равным теоретико-множественной сумме всевозможных кругов типа  $\sigma_{l_1 \dots l_{p_m}}$  (каждый из индексов  $l_1, \dots, l_{p_m}$  принимает все возможные для него значения).

Положим  $e'_0 = \prod_{m=1}^{\infty} a_m$ .

Лемма 15. Множество  $e'_0$  замкнуто.

Доказательство. Каждое множество из  $a_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), будучи суммой конечного числа замкнутых кругов, замкнуто, а следовательно, замкнуто и множество

$e'_0 = \prod_{m=1}^{\infty} a_m$ .

Лемма 15 доказана.

Лемма 16. Длина множества  $e'_0$  (по Хаусдорфу)  $h_1(e'_0) = 1$ .

Доказательство. Так как множество  $a_m$  получается из множества  $a_{m-1}$  последовательной заменой всякого из кругов на  $m$  попарно не имеющих общих внутренних точек в  $m$  раз меньших (по диаметру) кругов \*), то при всякой такой замене диаметр исходного круга и сумма диаметров кругов, его заменяющих, численно равны, а тогда с помощью математической индукции, очевидно, получаем, что сумма диаметров всевозможных кругов типа  $\sigma_{l_1 \dots l_k}$  (с одинаковым числом индексов) равна диаметру круга  $\sigma_1$ , т. е. равна 1. А так как диаметры кругов  $\sigma_{l_1 \dots l_k}$  с ростом  $k$  равномерно

\*) Для получения из  $a_{m-1}$  множества  $a_m$  подобного рода замену необходимо произвести  $m$  раз.

стремятся к нулю и так как сумма всевозможных кругов типа  $\sigma_{l_1 \dots l_k}$  покрывает множество  $e'_0$ , то из определения длины множества (по Хаусдорфу) немедленно следует, что длина множества  $e'_0$   $h_1(e'_0) \leq 1$ .

Покажем теперь, что  $h_1(e'_0) \geq 1$ . Всякая точка множества  $e'_0$  по определению является общей частью некоторой последовательности кругов  $\sigma_{l_1 \dots l_k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Обозначим через  $a_{l_1 l_2 \dots}$  точку множества  $e'$ , являющуюся общей частью последовательности

$$\sigma_{l_1}, \sigma_{l_1 l_2}, \dots, \sigma_{l_1 l_2 \dots l_k}, \dots$$

Определим теперь отображение без растяжения множества  $e'_0$  на отрезок  $d_1$ . Точке  $a_{l_1 l_2 \dots}$  множества  $e'_0$  мы поставим в соответствие точку  $a'_{l_1 l_2 \dots}$  отрезка  $d_1$  следующим образом: обозначим через  $\psi_{l_1 l_2}$  преобразование плоскости  $E_2$ , состоящее в минимальном повороте плоскости  $E_2$  около центра круга  $\sigma_{l_1 l_2}$ , которое отрезок  $d_{l_1 l_2}$  переводит в отрезок  $d_{l_1} = d_1$ ; через  $\psi_{l_1 l_2 l_3}$  — минимальный поворот плоскости  $\psi_{l_1 l_2}(E_2)$  около центра круга  $\sigma_{l_1 l_2 l_3}$ , переводящий отрезок  $\psi_{l_1 l_2}(d_{l_1 l_2 l_3})$  внутрь отрезка  $d_1$ ; через  $\psi_{l_1 l_2 \dots l_k}$  — минимальный поворот плоскости около точки, получаемой из центра круга  $\sigma_{l_1 \dots l_{k+1}}$  последовательным применением преобразований  $\psi_{l_1 l_2}, \psi_{l_1 l_2 l_3}, \dots, \psi_{l_1 l_2 \dots l_{k-1}}$ , такой, что последовательное применение преобразований

$$\psi_{l_1 l_2}, \dots, \psi_{l_1 \dots l_k}$$

переводит отрезок  $d_{l_1 \dots l_k}$  внутрь  $d_1$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Обозначим, далее, через  $\Phi_{l_1 l_2 \dots l_k}$  произведение преобразований

$$\psi_{l_1 l_2}, \dots, \psi_{l_1 \dots l_k}$$

и положим

$$a'_{l_1 l_2 \dots l_k} = \Phi_{l_1 l_2 \dots l_k}(a_{l_1 l_2 \dots}) \\ (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Так как, по построению, радиус круга  $\sigma_{l_1 \dots l_{p_m}}$  равен  $\frac{1}{2 \cdot 11 \cdot 2^2 \dots m^m}$  и так как  $a_{l_1 l_2 \dots} \subset \sigma_{l_1 l_2 \dots l_k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ),

то последовательность точек  $a'_{l_1 l_2 \dots l_k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) сходится. Положим

$$a'_{l_1 l_2 \dots} = \psi_{l_1 l_2 \dots} (a_{l_1 l_2 \dots}) = \lim_{k \rightarrow \infty} a'_{l_1 l_2 \dots l_k}.$$

Ясно, что точка  $a'_{l_1 l_2 \dots}$  принадлежит отрезку  $d_1$ . С помощью математической индукции нетрудно показать, что при всяком  $k$  теоретико-множественная сумма всех кругов типа  $\Phi_{l_1 l_2 \dots l_k}(\sigma_{l_1 \dots l_k})$  содержит в себе отрезок  $d_1$ . А отсюда уже следует, что для всякой точки  $a'$  из  $d_1$  найдётся последовательность целых чисел  $l_1, l_2, \dots, l_k, \dots$  такая, что  $\psi_{l_1 l_2 \dots} (a_{l_1 l_2 \dots}) = a'$ , т. е. выше определённое преобразование  $\psi_{l_1 l_2 \dots} (a_{l_1 l_2 \dots})$  переводит множество  $e'_0$  в множество, покрывающее отрезок  $d_1$ .

Опять-таки с помощью математической индукции нетрудно показать, что для всякой пары точек  $a'_{l'_1 l'_2 \dots}$  и  $a''_{l''_1 l''_2 \dots}$  из множества  $e'_0$  расстояние

$$\rho(a'_{l'_1 l'_2 \dots l'_k}, a''_{l''_1 l''_2 \dots l''_k}) \leq \rho(a'_{l'_1 l'_2 \dots}, a''_{l''_1 l''_2 \dots}),$$

а тогда

$$\rho(a'_{l'_1 l'_2 \dots}, a''_{l''_1 l''_2 \dots}) \leq \rho(a'_{l'_1 l'_2 \dots}, a''_{l''_1 l''_2 \dots}),$$

т. е. преобразование  $\psi_{l_1 l_2 \dots}$  есть преобразование без растяжения. Но при преобразовании множества без растяжения его длина может либо уменьшиться, либо сохраниться, но не возрасти. А тогда из того, что  $h_1(d_1) = 1$ , следует, что  $h_1(e'_0) \geq h_1(d_1) = 1$ .

Но выше было доказано, что  $h_1(e'_0) \leq 1$ . Следовательно,  $h_1(e'_0) = 1$ .

Лемма 16 доказана.

Лемма 17. На всякую прямую из  $E_2$  множество  $e'_0$  проектируется в множество нулевой длины.

Доказательство. Пусть  $\tau_1(r)$  есть прямая из  $E_2$ , проходящая через точки  $O$  и  $r \in S_1$ , а  $e'_0(r), a_m(r), \sigma_{l'_1 l'_2 \dots l'_k}(r)$  и  $d_{l_1 \dots l_k}(r)$  (соответственно) — проекции множеств  $e'_0, a_m, \sigma_{l_1 \dots l_k}$  и  $d_{l_1 \dots l_k}$  на  $\tau_1(r)$ . Ясно, что  $e'_0(r) \subset a_m(r)$ .

Оценим сверху величину  $\text{mes } a_m(r) = h_1[a_m(r)]$ . Обозначим через  $r_i^m$  одну из ближайших к точке  $r$  (по окружности  $S_1$ ) точку системы  $\{r_i^m\}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) и фиксируем число  $q$  таким, чтобы отрезок  $d_{l_1 l_2 \dots l_q}$  оказывался перпендикулярным к прямой  $\tau_1(r_i^m)$ . Обозначим через  $\Delta_{l_1 l_2 \dots l_q}(r)$  отрезок из  $\tau_1(r)$ , центр которого совпадает с центром отрезка  $d_{l_1 l_2 \dots l_q}(r)$  и длина которого

$$\text{mes } \Delta_{l_1 l_2 \dots l_q}(r) = \text{mes } d_{l_1 l_2 \dots l_q}(r) + 2 \text{mes } d_{l_1 l_2 \dots l_q l_{q+1}},$$

где  $d_{l_1 l_2 \dots l_q l_{q+1}}$  — диаметр круга  $\sigma_{l_1 l_2 \dots l_q l_{q+1}}$ .

Оценим величину  $\omega_m(r) = \sum \text{mes } \Delta_{l_1 \dots l_q}(r)$  (суммирование производится по всем индексам  $l_1, l_2, \dots, l_q$ ).

Так как угол  $\alpha$ , составленный прямыми  $\tau_1(r)$  и  $\tau_1(r_i^m)$ , не превосходит  $\frac{2\pi}{m}$  и так как каждый из отрезков  $d_{l_1 \dots l_q}$  ( $l_q = 1, 2, \dots, m$ ), которые ортогональны к  $\tau_1(r_i^m)$ , составляет с прямой  $\tau_1(r)$  угол  $\beta = 90^\circ + \alpha$  (или  $\beta = 90^\circ - \alpha$ ), то получаем:

$$\begin{aligned} \omega_m(r) &= \\ &= 1^1 \cdot 2^2 \dots (m-1)^{m-1} (\text{mes } d_{l_1 \dots l_q}(r) + 2 \text{mes } d_{l_1 \dots l_q l_{q+1}}) = \\ &= 1^1 \cdot 2^2 \dots (m-1)^{m-1} \left( \frac{|\cos \beta|}{1^1 \cdot 2^2 \dots (m-1)^{m-1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{1^1 \cdot 2^2 \dots (m-1)^{m-1}} \cdot \frac{1}{m} \right) \leq \sin \alpha + \frac{2}{m} \leq \frac{2\pi}{m} + \frac{2}{m} < \frac{3\pi}{m}, \end{aligned}$$

т. е.  $\omega_m(r) < \frac{3\pi}{m}$ .

Так как всякая точка  $a_{l_1 l_2 \dots}$  множества  $e'_0$ , содержащаяся в круге  $\sigma_{l_1 \dots l_{p_{m-1}+1}}$ , отстоит от отрезка  $d_{l_1 \dots l_{p_{m-1}}}$  не более чем на  $m^1 \{d_{l_1 \dots l_{p_{m-1}}}\} + 1$ , то множество  $a_m(r)$  содержится в сумме всевозможных отрезков типа  $\Delta_{l_1 \dots l_{p_{m-1}}}(r)$ .

Следовательно,  $m^1(a_m(r)) \leq \omega_m(r) < \frac{3\pi}{m}$ . Но  $m^1(e'_0(r)) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} m^1(a_m(r)) = 0$ , т. е.  $m^1(e'_0(r)) = 0$ .

Лемма 17 доказана.

**Построение множества  $e_0^\infty$ .** На плоскости  $E_2$  фиксируем последовательность замкнутых попарно не пересекающихся квадратов  $K_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), сходящихся к некоторой точке  $K_0$  из  $E_2$  (сторона квадрата  $K_n$  равна  $\frac{1}{n}$ ).

Квадрат  $K_n$  разобьём на  $n^2$  равных квадратов  $K_n^l$ . Обозначим через  $e'_{0nl}$  равномерно сжатое в  $n$  раз по всем направлениям и перенесённое с помощью параллельного переноса в квадрат  $K_n^l$  множество  $e'_0$ .

$$\text{Положим } e_0^\infty = K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n^2} e'_{0nl}.$$

Множество  $e_0^\infty$  замкнуто, поскольку каждое из множеств  $e'_{0nl}$  ( $l = 1, \dots, n^2$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) замкнуто (это следует из леммы 15) и в качестве множества предельных точек множества  $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n^2} e'_{0nl}$  не принадлежащих  $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n^2} e'_{0nl}$ , имеет лишь точку  $K_0$ , которая по определению принадлежит множеству  $e_0^\infty$ .

Длина  $h_1(e_0^\infty)$  множества  $e_0^\infty$ , очевидно, равна

$$h_1(e_0^\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n^2} h_1(e'_{0nl}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n^2} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty,$$

ибо  $h_1(e'_{nl}) = \frac{1}{n}$  (это следует из леммы 16 и из того, что при равномерном сжатии по всем направлениям множества в  $n$  раз его длина уменьшается также в  $n$  раз). Итак, множество  $e_0^\infty$  имеет бесконечную длину.

Множество  $e_0^\infty$  на всякую прямую из  $E_2$  проектируется в множество нулевой меры, поскольку этим свойством обладает каждое из множеств  $K_0$  и  $e'_{0nl}$  при любых  $n$  и  $l$  (последнее вытекает из леммы 17).

**Замечание.** Если плоскость  $E_2$  вместе с множеством  $e_0^\infty$  поместить в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$ , то его длина (равная бесконечности) и свойство проектироваться на всякую прямую (из рассматриваемого пространства  $E_n$ )

в множество нулевой меры не изменяется, т. е. в пространстве произвольной размерности вышеуказанным способом строится множество, обладающее свойствами множества  $e_0^\infty$ .

### § 16. Вариация как мера множества

Докажем теорему, связывающую  $k$ -кратную меру Лебега ( $m^k$ ) множества  $e$  с его  $k$ -й вариацией.

Теорема 22. Пусть  $e \subset E_k \subset E_n (k < n)$  есть измеримое ( $m^k$ ) по Лебегу подмножество плоскости  $E_k$ . Тогда оно измеримо ( $v_k$ ) и  $v_k(e) = m^k(e)$ .

Доказательство. Из определения меры Лебега и  $k$ -й вариации множества получаем:

$$v_k(e) = v_k^k(e) = \frac{1}{d_k^k} \int_{\Omega_k^k} v_0(e \cap \beta_0) d\mu_{\Omega_k^k} = \\ = \frac{C_{k-1} C_{k-2} \dots C_0}{d_k^k} \int_{E_k} v_0(e \cap \beta_0) dm^k = \int_{E_k} v_0(e \cap \beta_0) dm^k = m^k(e),$$

поскольку  $v_0(e \cap \beta_0)$  является характеристической функцией множества  $e$ .

Вариации множества естественнее всего связываются с мерами Фавара.

Обозначим через  $\mu_0(e)$  число точек множества  $e \subset E_n$ . Как было доказано в лемме 6,  $\mu_0(e)$  есть регулярная функция множества.

Определение 15. Множество  $e$  назовём измеримым ( $\mu_k$ ) в  $E_n$ , если  $\mu_0(e \cap \beta_{n-k})$  как функция плоскости  $\beta_{n-k}$  измерима по Лебегу на  $\Omega_k^n$ . Число

$$\mu_k(e) = \frac{1}{d_k^n} \int_{\Omega_k^n} \mu_0(e \cap \beta_{n-k}) d\mu_{\Omega_k^n}$$

( $d_k^n$  см. § 9) называется  $k$ -й мерой Фавара множества  $e$  \*).

Нетрудно убедиться, что совокупность  $\Sigma_k^n$  всевозможных подмножеств из  $E_n$ , каждое из которых представимо в виде

\*) Это определение представляет собой естественное обобщение длины по Фавару (см. [18]).

суммы некоторого  $B$ -множества и множества нулевой меры (в смысле  $\mu_0$ ), образует  $\sigma$ -кольцо (см. § 6). Из леммы 5 следует, что всякое множество из совокупности  $\Sigma_k^n$  измеримо ( $\mu_k$ ), т. е.  $\mu_k(e)$  определена на всей совокупности  $\Sigma_k^n$ . Из свойств интеграла Лебега нетрудно вывести, что  $\mu_k(e)$  как функция множества удовлетворяет всем аксиомам меры (см. § 6).

Лемма 18. Пусть  $e \subset E_n$  измеримо ( $v_k$ ) и ( $v_{k+1}$ ) и  $v_{k+1}(e) = 0$ . Тогда  $\mu_k(e) = v_k(e)$  ( $0 \leq k \leq n$ ) \*).

Доказательство. В силу леммы 7, если  $v_{k+1}(e) = 0$ , то почти для всякой  $\beta_{n-k} \subset \Omega_k^n$   $v_0(e \cap \beta_{n-k}) = \mu_0(e \cap \beta_{n-k})$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} v_k(e) &= \frac{1}{d_k^n} \int_{\Omega_k^n} v_0(e \cap \beta_{n-k}) d\mu_{\Omega_k^n} = \\ &= \frac{1}{d_k^n} \int_{\Omega_k^n} \mu_0(e \cap \beta_{n-k}) d\mu_{\Omega_k^n} = \mu_k(e), \end{aligned}$$

ибо

$$d_k^n = \int_{\Omega_k^n} v_0(j_k \cap \beta_{n-k}) d\mu_{\Omega_k^n} = \int_{\Omega_k^n} \mu_0(j_k \cap \beta_{n-k}) d\mu_{\Omega_k^n}$$

( $j_k$  —  $k$ -мерный единичный куб).

Лемма 19. Пусть  $e \subset E_n$  таково, что  $v_{k+1}(e) \neq 0$  \*\*). Тогда  $\mu_k(e) = +\infty$  ( $0 \leq k \leq n$ ).

Доказательство. Утверждение леммы докажем посредством индукции по числу  $k$ . Если линейная вариация множества  $e$   $v_1(e) \neq 0$ , то, очевидно, множество  $e$  состоит из бесконечного числа точек, т. е.  $\mu_0(e) = +\infty$ .

Если  $v_{k+1}(e) \neq 0$ , то в  $\Omega_1^n$  существует множество  $\Omega^*$  ненулевой меры (в смысле  $\mu_{\Omega_1^n}$ ) такое, что для всякой плоскости  $\beta_{n-1} \subset \Omega^*$   $v_k(e \cap \beta_{n-1}) \neq 0$ . Это следует из теоремы 9.

\*) В силу теоремы 10 можно полагать, что для всякого  $e \subset E_n$   $v_{n+1}(e) = 0$ .

\*\*) Если  $e$  неизмеримо ( $v_{k+1}$ ), то под  $v_{k+1}(e)$  будем понимать внешний интеграл от  $v_0(e \cap \beta_{n-k})$ . Аналогично, если  $e$  неизмеримо ( $\mu_k$ ), то под  $\mu_k(e)$  будем понимать внешний интеграл от  $\mu_0(e \cap \beta_{n-k})$ .

А тогда в силу предположения индукции для всякой плоскости  $\beta_{n-1} \subset \Omega^* \cup_{k-1} (e \cap \beta_{n-1}) = +\infty$ . Но тогда из теоремы 9 и из того, что  $\mu_{\Omega^n}(\Omega^*) \neq 0$ , следует, что  $\mu_k(e) = +\infty$ .

Теорема 23. Для всякого множества  $e \subset E_n$  числа  $\{\mu_k(e)\}$  однозначно определяются числами  $\{v_k(e)\}$ .

Это следует из двух предыдущих лемм.

Эта теорема фактически означает, что вариации множества содержат в себе меры Фавара того же множества в том смысле, что по вариациям меры восстанавливаются однозначно, т. е., несмотря на то, что вариации в общем виде не только не аддитивны, но даже и не монотонны, они характеризуют интенсивность множества. Но при этом в описании интенсивности множества с точки зрения какой-нибудь одной размерности принимает участие не только вариация этой размерности (этого порядка), но и вариации прочих порядков. Например, для множества Д. Е. Меньшова (см. § 15) длина по Хаусдорфу бесконечна, в то время как его линейная вариация равна нулю. Но при этом оказывается, что нулевая вариация множества  $e_0^\infty \cup v_0(e_0^\infty) = +\infty$ .

Повидимому, имеет место следующее: для всякого множества, вариации всех порядков от которого конечны, меры Фавара и Хаусдорфа численно равны. Если это утверждение справедливо, то меры будут однозначно восстанавливаться по вариациям.

В отличие от мер вариации не только описывают интенсивность множества, но и показывают, сколь сильно множество разрезает пространство, в котором оно лежит. Что это означает более точно, мы выясним в последней главе.

Сейчас же покажем, что вариации различных порядков независимы в том смысле, что значение одной или нескольких из них никак не предопределяет значения других вариаций.

## § 17. Независимость вариаций множества

Пусть  $E_{k+1}$  есть  $(k+1)$ -мерное подпространство из  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$ , а  $e_k$  — подмножество из  $E_{k+1}$ , обладающее следующими свойствами:

а)  $e_k$  есть связное множество, являющееся суммой конечного числа  $k$ -мерных выпуклых замкнутых множеств, лежащих в некоторых  $k$ -мерных плоскостях из  $E_{k+1}$ ;

б) замыкание множества всех таких точек из  $E_{k+1} - e_k$ , каждая из которых отделена в плоскости  $E_{k+1}$  от бесконечности множеством  $e_k$ , есть выпуклое множество;

в) всякая компонента множества  $E_{k+1} - e_k$ , отделённая в плоскости  $E_{k+1}$  от бесконечности множеством  $e_k$ , представляет собой выпуклое множество.

Верхнюю грань расстояний  $\rho(a, b)$  между точками  $a$  и  $b$  множества  $e \subset E_n$  при всевозможных  $a$  и  $b$  из  $e$  мы назовём одномерным диаметром множества  $e$  и обозначим через  $d_1(e)$ .

Лемма 20. Для всякого множества  $e_k$ , удовлетворяющего сформулированным выше условиям а), б) и в), имеет место

$$v_l(e_k) \leq \lambda_k [d_1(e_k)]^l$$

( $l = 0, 1, 2, \dots, k-1; k = 1, \dots, n-1, n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Доказательство. Так как нулевая вариация по определению есть число компонент, а множество  $e_k$  связное, то  $v_0(e_k) = 1$ , т. е. при  $e = 0$  утверждение леммы 20 справедливо. Далее будем доказывать по индукции.

Предположим, что утверждение леммы доказано для вариаций порядков  $0, 1, 2, \dots, l-1$ .

Обозначим через  $S_k$   $k$ -мерную сферу из пространства  $E_{k+1}$ ; через  $O$  — центр  $S_k$ ; через  $\tau_1(r)$  — прямую, проходящую через точки  $O$  и  $r \subset S_k$ ; через  $\beta_k(r, x)$  — плоскость, ортогональную прямой  $\tau_1(r)$  и проходящую через  $x \in \tau_1(r)$ .

Покажем, что

$$v_{l\tau_1(r)} = \int_{-\infty}^{\infty} v_{l-1}(e_k \cap \beta_k(r, x)) dx < (d_1(e_k))^l.$$

Так как множество  $e_k$  удовлетворяет условию а), то оно есть сумма конечного числа замкнутых выпуклых множеств  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m(e_k)$ ), каждое из которых является подмножеством одной из  $k$ -мерных плоскостей  $\tau_k^i$  ( $i = 1, \dots, m(e_k)$ ).

Обозначим через  $\tau_k^i(r)$  проекцию плоскости  $\tau_k^i$  из  $E_{k+1}$  на прямую  $\tau_1(r)$ . Очевидно, множество  $\tau_k^i \cap \beta_k(r, x)$ , если оно не пусто, есть плоскость размерности либо  $k$ , либо  $k-1$ . Пусть точка  $x \in \tau_1(r)$  такова, что соответствующее множество  $\tau_k^i \cap \beta_k(r, x)$  не пусто ( $i$  фиксировано). Если плоскость  $\tau_k^i \cap \beta_k(r, x)$  имеет размерность  $k$ , т. е.  $\tau_k^i = \beta_k(r, x)$ , то проекция  $\tau_k^i(r)$  пло-

скости  $\tau_k^i$  на прямую  $\tau_1(r)$  есть множество, состоящее лишь из одной точки  $x = \tau_k^i(r)$  ( $i = 1, \dots, m(e_k)$ ). Из последнего следует, что почти для всякой точки  $x \in \tau_1(r)$  (исключается не более чем  $m(e_k)$  точек  $x$  прямой  $\tau_1(r)$ ) соответствующая плоскость  $\tau_k^i \cap \beta_k(r, x)$ , если она не является пустым множеством, имеет размерность  $k - 1$ .

Пусть  $x \in \tau_1(r)$  — такая точка, что  $\tau_k^i \cap \beta_k(r, x)$  имеет размерность  $k - 1$ , и множество  $e_k \cap \beta_k(r, x)$  не пусто. Тогда нетрудно проверить, что  $e_k \cap \beta_k(r, x)$  как подмножество  $k$ -мерной плоскости  $\beta_k(r, x)$  удовлетворяет условиям а), б) и в), сформулированным перед леммой 20 (при проверке выполнимости указанных условий надо заменить  $k$  на  $k - 1$ ).

Так как в силу определения одномерного диаметра для всяких точек  $a$  и  $b$  из  $e_k$  соответствующее им расстояние  $\rho(a, b) \leq d_1(e_k)$ , то  $d(e_k \cap \beta_k(r, x)) \leq d_1(e_k)$ , а тогда в силу предположения индукции

$v_{l-1}(e_k \cap \beta_k(r, x)) \leq \lambda_{k-1} [d_1(e_k \cap \beta_k(r, x))]^{l-1} \leq \lambda_{k-1} [d_1(e_k)]^{l-1}$  ( $l = 1, 2, \dots, k - 1$ ). Но тогда из того, что проекция  $e_k$  на прямую  $\tau_1(r)$  есть отрезок длины не более чем  $d_1(e_k)$ , и того, что для всякой точки  $x$  прямой  $\tau_1(r)$ , не принадлежащей отрезку  $e_k(r)$ ,  $v_{l-1}(e_k \cap \beta_k(r, x)) = 0$ , следует, что

$$v_{l\tau_1(r)}(e_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{l-1}(e_k \cap \beta_k(r, x)) dx \leq d(e_k) \lambda_{k-1} [d_1(e_k)]^{l-1} = \lambda_{k-1} [d_1(e_k)]^l \quad (l = 1, 2, \dots, k - 1).$$

А тогда

$$v_l(e_k) = \frac{d_{l-1}^k}{d_l^{k+1}} \int_{S_k} v_{l\tau_1(r)}(e_k) d\mu_{S_k} \leq \frac{d_{l-1}^k}{d_l^{k+1}} C_k \lambda_{k-1} [d_1(e_k)]^l = \lambda_{kl} [d_1(e_k)]^l.$$

Положим теперь  $\lambda_k = \sup_{l \leq k-1} \lambda_{kl}$ . Тогда

$$v_l(e_k) \leq \lambda_{kl} [d_1(e_k)]^l \leq \lambda_k [d_1(e_k)]^l.$$

Лемма доказана.

Пусть  $X = (x_1, \dots, x_{k+1})$  — ортонормированный базис пространства  $E_{k+1}$ ,  $x_1, \dots, x_{k+1}$  — координаты произвольной

точки из  $E_{k+1}$  относительно системы  $X$ ,  $I_k(a, i, l, m)$  —  $k$ -мерный замкнутый куб из  $E_{k+1}$ , определяемый соотношениями

$$x_i = \frac{al}{m} \text{ и } 0 \leq x_j \leq a$$

$(j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, k+1; i = 1, \dots, k+1;$   
 $0 < a < 1; l = 0, 1, \dots, m; m = 1, 2, \dots; k = 0, \dots, n-1).$

$$\text{Положим } e_k(a, m) = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{l=0}^m I_k(a, i, l, m).$$

**Лемма 21.** *Множество  $e_k(a, m)$  таково, что при  $k \neq 0$*   
 $v_0(e_k(a, m)) = 1; v_l(e_k(a, m)) \leq \lambda_k a (k+1)^{k+1}$  для  $l = 1, \dots$   
 $\dots, k-1, v_k[e_k(a, m)] = (k+1)(m+1)a^k$  и  $v_p(e_k(a, m)) = 0$   
*при  $p > k$ , а при  $k = 0$   $v_0(e_0(a, m)) = m+1$  и  $v_l(e_0(a, m)) = 0$  для  $l \neq 0$ .*

**Доказательство.** Нетрудно проверить, что множество  $e_k(a, m)$  удовлетворяет условиям а), б) и в), сформулированным перед леммой 20, а тогда в силу леммы 20 имеем:

$$v_l(e_k(a, m)) \leq \lambda_k [d_1(e_k(a, m))]^l \quad (l = 0, \dots, k-1).$$

Тогда  $v_0(e_k(a, m)) = 1$ , а при  $l > 0$

$$v_l(e_k(a, m)) \leq \lambda_k [d_1(e_k(a, m))]^l = \lambda_k [a \sqrt{k+1}]^l < \\ < \lambda_k a (\sqrt{k+1})^{k-1} < \lambda_k a (k+1)^{k+1}, \text{ так как } a < 1 \text{ и } d_1(e_k(a, m)) = \\ = a \sqrt{k+1}.$$

Ясно, что  $m^k [I_k(a, i, l, m)] = a^k$ , а тогда в силу теоремы 22 и свойства 5 § 13 получаем:

$$v_k[e_k(a, m)] = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{l=0}^m m^k [I_k(a, i, l, m)] = (k+1)(m+1)a^k.$$

Так как каждый из  $k$ -мерных кубов  $I_k(a, i, l, m)$  проектируется на всякую  $p$ -мерную плоскость ( $p > k$ ) в замкнутый параллелепипед размерности не выше чем  $k$ , имеющий  $p$ -мерную меру Лебега ( $m^p$ ), равную нулю, то вариация порядка  $p$  множества  $e_k(a, m)$  относительно всякой  $p$ -мерной плоскости  $\tau_p$  пространства  $E_n$  равна нулю, а тогда и

$$v_p[e_k(a, m)] = \frac{1}{d_p^n} \int_{\Phi_p^n} v_{p-p}[e_k(a, m)] d\mu_{\Phi_p^n} = 0 \\ (p = k+1, \dots, n).$$

Таким образом, при  $k \neq 0$  лемма 21 доказана.

Из определения множества  $e_k(a, m)$  следует, что  $e_0(a, m)$  есть множество, состоящее из  $m + 1$  точки, а тогда

$$v_0(e_0(a, m)) = m + 1$$

и при  $l \neq 0$

$$v_l(e_0(a, m)) = 0.$$

Независимость вариаций множества выражается следующим образом.

Теорема 24. Вариации  $v_k(e)$  ( $k = 0, \dots, n - 1$ ) подмножества  $e$  из  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  независимы в том смысле, что для всяких наперёд заданных положительных чисел  $a_k \leqslant +\infty$  ( $k = 0, \dots, n - 1$ ,  $a_0$  — целое число) в пространстве  $E_n$  можно указать ограниченное замкнутое подмножество  $e$  такое, что  $v_k(e) = a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ).

Доказательство. Пусть  $a_k$  ( $k = 0, \dots, n - 1$ ) суть положительные числа ( $a_0$  — целое число \*). С помощью индукции (по числу  $\nu$ ) определим замкнутые подмножества  $e_{k,\nu}$  пространства  $E_n$  ( $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ ) такие, что

$$1) \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} v_k(e_{m,\mu}) < a_k \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1);$$

$$2) \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} v_k(e_{m,\mu}) = a_k \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1).$$

Зададим  $e_{k,0}$  пустое множество из  $E_n$  ( $k = 1, \dots, n - 1$ ). Пусть множества  $l_{k,\mu}$  ( $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ,  $\mu = 0, \dots, \nu - 1$ ), удовлетворяющие первому условию, уже определены. Построим множества

$$e_{k,\nu} \quad (k = 1, \dots, n - 1).$$

Положим

$$a_{k,\nu} = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} v_k(e_{m,\mu}) \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1),$$

$$b_{k,\nu} = a_k - a_{k,\nu} > 0 \text{ и } b_\nu = \inf b_{k,\nu}.$$

\*) Ещё раз особо подчёркнём, что некоторые  $a_k$  могут быть бесконечны.

Положим, далее,  $d_{k,} = b_{k,}$  при  $b_{k,} < \infty$ ,  $d_{k,} = 1$  при  $b_{k,} = \infty$ ,  $d_{,} = b_{,}$  при  $b_{,} < \infty$ ,  $d_{,} = \frac{1}{\nu+1}$  при  $b_{,} = \infty$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ). Обозначим через  $m_{k,}$  целое положительное число такое, что  $m_{k,} + 1 > \left(\frac{d_{,}}{5n^{n+1}\lambda_k}\right)^{-k} \cdot \frac{d_{k,}}{2(k+1)}$ ,

и положим  $a_k^{\nu} = \left(\frac{d_{k,}}{2(k+1)(m_{k,}+1)}\right)^{\frac{1}{k}}$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ).

За  $e_k$ , примем множество  $e_k(a_k^{\nu}, m_{k,}) = e_k(a, m)$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ). Так как  $a_{k,} = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} v_k(e_{m\mu}) < a_k$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ) (в силу предположения индукции), то

$$a_{k+1} = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} v_k(e_{m\mu}) = \dots$$

$$= a_{k,} + \sum_{m=1}^{n-1} v_k(e_{m,}) = a_{k,} + v_k(e_{1,}) + \dots + v_k(e_{k-1,}) + \\ + (k+1)(m_{k,}+1)(a_k^{\nu})^k + \underbrace{0 + \dots + 0}_{n-k-1}$$

(см. лемму 21). А тогда в силу леммы 21

$$a_{k+1} \leq a_{k,} + \lambda_k(k+1)^{k+1} \sum_{m=1}^{k-1} a_m^{\nu} +$$

$$+ (k+1)(m_{k,}+1) \left[ \left( \frac{d_{k,}}{2(k+1)(m_{k,}+1)} \right)^{\frac{1}{k}} \right]^k =$$

$$= a_{k,} + \lambda_k(k+1)^{k+1} \sum_{m=1}^{k-1} a_m^{\nu} + \frac{1}{2} d_{k,} = a_{k,} + \frac{1}{2} d_{k,} +$$

$$+ \lambda_k(k+1)^{k+1} \sum_{p=1}^{k-1} \left( \frac{d_{p,}}{2(p+1)(m_{p,}+1)} \right)^{\frac{1}{k}} \leq$$

$$\leq a_{k,} + \frac{1}{2} d_{k,} + \lambda_k n^n n \cdot \frac{d_{,}}{5n^{n+1}\lambda_k} = a_{k,} + \frac{1}{2} d_{k,} + \frac{d_{,}}{5},$$

так как  $k+1 \leq n$  и  $m_{p,}+1 > \left(\frac{d_{,}}{5n^{n+1}\lambda_k}\right)^{-k} \cdot \frac{d_{p,}}{2(p+1)}$ ,

имеем  $a_{k+1} \leq a_{k,} + \frac{1}{2} d_{k,} + \frac{1}{5} d_{,} \leq a_k$  (см. определение  $d_{k,}$  и  $d_{,}$ ) ( $k = 1, \dots, n-1$ ).

Итак, множества  $e_{k\gamma}$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $\gamma = 0, 1, 2, \dots$ ) построены.

Докажем, что

$$\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} v_k(e_{m\mu}) = a_k \quad (k = 1, \dots, m-1).$$

Предположим сначала, что  $a_k = +\infty$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n-1} v_k(e_{m\mu}) &\geq v_k(e_{k\gamma}) = (k+1)(m_{k\gamma}+1)(a_k^\gamma)^k = \\ &= \frac{1}{2} d_{k\gamma} = \frac{1}{2} b_{k\gamma} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ибо  $b_{k\gamma} = 1$  в рассматриваемом случае, а тогда

$$\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\gamma=0}^{\infty} v_k(e_{m\gamma}) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} v_k(e_{m\mu}) \geq \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma \cdot \frac{1}{2} = +\infty = a_k.$$

Предположим теперь, что  $a_k < +\infty$ . Индукцией (по числу  $\gamma$ ) докажем, что

$$0 \leq a_k - a_{k\gamma} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma a_k \quad (\gamma = 1, 2, \dots).$$

При  $\gamma = 1$  имеем:

$$\begin{aligned} a_k - a_{k1} &= a_k - \sum_{m=1}^{n-1} v_k(e_{m1}) \leq \\ &\leq a_k - v_k(e_{k1}) = a_k - (k+1)(m_{k1}+1)(a_k^1)^k = \\ &= a_k - \frac{a_k - a_{k0}}{2} = a_k - \frac{1}{2} a_k = \frac{1}{2} a_k. \end{aligned}$$

Пусть уже доказано, что  $0 < a_k - a_{k\gamma} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma a_k$ . Тогда в силу определения  $a_{k\gamma}$  имеем:

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_k - a_{k\gamma+1} = a_k - a_{k\gamma} - \sum_{m=1}^{n-1} v_k(e_{m\gamma}) \leq \\ &\leq a_k - a_{k\gamma} - v_k(e_{k\gamma}) = a_k - a_{k\gamma} - (k+1)(m_{k\gamma}+1)(a_k^\gamma)^k = \\ &= a_k - a_{k\gamma} - \frac{1}{2} b_{k\gamma} = (a_k - a_{k\gamma}) - \left(\frac{a_k - a_{k\gamma}}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} (a_k - a_{k\gamma}) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma+1} a_k; \end{aligned}$$

итак,

$$0 < a_k - a_{k+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{v+1} a_k \quad (v = 1, 2, \dots),$$

а тогда

$$\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{v=0}^{\infty} v_k(e_m) = \lim_{v \rightarrow \infty} a_k = a_k.$$

Итак, независимо от того, конечно  $a_k$  или бесконечно, имеем:

$$a_k = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{v=0}^{\infty} v_k(e_m).$$

Пусть  $\psi_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, n-1, v = 1, 2, \dots$ ) суть ортогональные преобразования пространства  $E_n$ ,  $e_k$  — образ множества  $e_k$ , при преобразовании  $\psi_k$ ,  $O$  — некоторая точка пространства  $E_n$ . Нетрудно сообразить, что преобразования  $\psi_k$ , можно выбрать такими, что точка  $O$  будет полной общей частью всякой пары множеств из  $\bar{e}_k$ , ( $k = 1, \dots, n-1, v = 1, 2, \dots$ ).

Положим

$$e' = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{v=1}^{\infty} \bar{e}_k.$$

Множество  $e'$  замкнуто; так как каждое из множеств  $\bar{e}_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, n-1, v = 1, 2, \dots$ ) замкнуто, все эти множества содержат точку  $O$  и

$$\lim_{v \rightarrow \infty} d_1(\bar{e}_k) = \lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt{k+1} a_k^v \leq \lim_{v \rightarrow \infty} n^{n+1} a_k^v = 0,$$

ибо

$$0 < a_k^v \left( \frac{d_{k+1}}{2^{k+1} (m_{k+1} + 1)} \right)^{\frac{1}{k}} \rightarrow 0 \quad \text{при } v \rightarrow \infty.$$

Пусть  $e'_i$  ( $i = 1, \dots, a_0 - 1$ ) суть точки пространства  $E_n$ , не принадлежащие множеству  $e'$ . Положим  $e = e' + \sum_{i=1}^{a_0-1} e'_i$ . Ясно, что множество  $e$  замкнуто и, следовательно, это мно-

жество измеримо ( $v_k$ ). Множество  $e'$ , будучи суммой связных множеств  $\bar{e}_{k''}$ , имеющих общую точку  $O$ , связно, а тогда

$$v_0(e) = v_0(e') + \sum_{i=1}^{a_0-1} v_0(e'_i) = 1 + (a_0 - 1) = a_0;$$

в силу свойств 3 и 4 § 13 получаем:

$$\begin{aligned} v_k(e) &= v_k(e') + \sum_{i=1}^{a_0-1} v_k(e'_i) = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{v=1}^{+\infty} v_k(\bar{e}_{m''}) + \underbrace{0 + \dots + 0}_{a_0-1} = \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{v=1}^{+\infty} v_k(e_{m''}) = a_k \end{aligned}$$

( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ), а тогда для всякого  $k$  ( $0 \leq k < n$ )  $v_k(e) = a_k$ . Теорема 24 доказана.

Замечание. От  $n$ -кратной вариации  $v_n(e)$  множества  $e \subset E_n$  (подразумевается, что  $E_n$  — пространство наименьшей размерности, целиком содержащее  $e$ ) в некотором смысле зависят другие вариации множества  $e$ , например  $v_1(e)$  от этой вариации зависит следующим образом: если  $v_n(e)$  достаточно велико, то  $v_1(e)$  не может быть очень малой. В таком же смысле каждая из вариаций  $v_k(e)$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ) зависит от  $v_n(e)$ . Но при этом следует отметить, что  $v_n(e)$  лишь снизу ограничивает прочие вариации рассматриваемого множества.

## ГЛАВА 4

### СВОЙСТВА ВАРИАЦИЙ ФУНКЦИЙ

#### § 18. Измеримость ( $v_k$ ) непрерывных функций

Теорема 25. Пусть  $1 \leq k \leq n$ . Пусть  $f(x)$  есть функция, определенная и непрерывная на замкнутом множестве  $e \subset E_n$ . Тогда  $f(x)$  измерима ( $v_k$ ) на  $e$ .

Доказательство. Пусть  $T$  есть ось значений функции  $f(x)$ , перпендикулярная к  $E_n$ , а  $F \subset E_{n+1} = E_n \times T$  — график функции  $f(x)$  (см. § 11). Обозначим через  $E_n^t$  гиперплоскость пространства  $E_{n+1}$ , параллельную гиперплоскости  $E_n$  и отстоящую от неё (по оси  $T$ ) на расстоянии  $t$ . Пусть  $\beta_{n-k+1}^t$  —  $(n-k+1)$ -мерная плоскость из  $E_n^t$ , а  $\beta_{n-k+1}$  — ортогональная проекция плоскости  $\beta_{n-k+1}^t$  на гиперплоскость  $E_n$ . Ввиду параллельности гиперплоскостей  $E_n$  и  $E_n^t$  плоскость  $\beta_{n-k+1}$  есть  $(n-k+1)$ -мерная плоскость из  $E_n$ , т. е.  $\beta_{n-k+1} \subset \Omega_{k-1}^{n+1}$ .

В пространстве  $\Omega_k^{n+1}$  рассмотрим подмножество  $\Omega'$ , состоящее из плоскостей  $\beta_{n-k+1}^t$ , параллельных гиперплоскости  $E_n$ . Ясно, что  $\Omega'$  замкнуто в  $\Omega_k^{n+1}$ .

Так как  $e$  замкнуто в  $E_n$  и  $f(x)$  непрерывна на  $e$ , то  $F$  замкнуто в  $E_{n+1}$ . Следовательно (в силу леммы 4 § 12), функция  $v_0(F \cap \beta_{n-k+1})$ , где  $\beta_{n-k+1} \in \Omega_k^{n+1}$ , есть  $A^2$ -функция на  $\Omega_k^{n+1}$ . Но, так как  $\Omega'$  замкнуто в  $\Omega_k^{n+1}$ , то  $v_0(F \cap \beta_{n-k+1}^t)$  на  $\Omega' \subset \Omega_k^{n+1}$  тоже есть  $A^2$ -функция.

Из последнего ввиду того, что между парами  $(\beta_{n-k+1}, t) \in \Omega_{k-1}^{n+1}$  и плоскостями  $\beta_{n-k+1}^t \in \Omega'$  существует взаимно однозначное и взаимно-непрерывное соответствие, и так как  $v_0(e_t \cap \beta_{n-k+1}) = v_0(F \cap \beta_{n-k+1}^t)$  для любой пары  $(\beta_{n-k+1}, t) \in \Omega_{k-1}^{n+1}$ ,

получаем, что  $v_0(e_t \cap \beta_{n-k+1})$  есть  $A^2$ -функция на  $\Omega_{k-1}^{nT}$ . Следовательно,  $v_0(e_t \cap \beta_{n-k+1})$  измерима  $(\mu_{\Omega_{k-1}^{nT}})$  на  $\Omega_{k-1}^{nT}$ . А из этого следует, что  $f(x)$  измерима  $(v_k)$  на  $e$ .

Лемма 22. Для всякой непрерывной однозначной функции, заданной на некотором измеримом множестве  $e \subset E_n$ , множество всех уровней, имеющих положительную меру Лебега  $m^n$ , не более чем счётно.

Доказательство. Представим множество  $e \in E_n$  в виде суммы счётного числа измеримых множеств  $e_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), для каждого из которых  $m^n(e_k) < \infty$ , и положим  $e_{kt} = e_k \cap e_t$ .

Покажем, что для всякого  $k$  множество  $G_k$  таких значений  $t$ , для каждого из которых  $m^n(e_{kt}) > 0$ , не более чем счётно. Действительно, из предположения, что  $G_k$  несчётно, следовало бы, что мы можем указать такое  $\varepsilon > 0$ , что при некотором бесконечном наборе  $G'_k$  значений  $t$  из  $G_k$   $\text{mes}_n e_{kt} > \varepsilon$ . Но, поскольку различные множества уровня однозначной функции  $f(x)$  попарно не пересекаются, то

$$m^n(e_k) \geq \sum_{t \in G'_k} m^n(e_{kt}) = \infty.$$

Последнее противоречит тому, что по определению множества  $e_k$   $m^n(e_k) < \infty$ . Следовательно,  $G_k$  не более чем счётно.

Пусть  $G$  есть множество всех таких значений  $t$ , для каждого из которых  $m^n(e_t) > 0$ . Так как  $m^n(e_t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p m^n(e_{kt})$ , то  $G \subset \sum_{k=1}^{\infty} G_k$ . А так как каждое из множеств  $G_k$  не более чем счётно, то и  $G$  не более чем счётно.

Замечание. Отметим, что из этой леммы, теоремы 22 (§ 16) и теоремы 14 (§ 11) следует, что для всякой функции, однозначной и непрерывной на измеримом  $e \subset E_n$ ,  $v_{n+1}(f, e) \leq v_{n+1}(f, E_n) = 0$ . Именно из этих соображений мы и опустили из рассмотрения  $(n+1)$ -ю вариацию функции  $n$  переменных.

Лемма 23. Для того чтобы непрерывная функция, определённая на измеримом множестве  $e \subset E_n$ , была измерима  $(v_n)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\mu_0(e_t \cap \beta_1)$  была измерима  $(\mu_{\Omega_{n-1}^{nT}})$ .

При этом для измеримой  $(v_n)$  функции  $f(x)$

$$v_n(f, e) = \frac{1}{d_{n-1}^n} \int_{\Omega_{n-1}^{nT}} \mu_0(e_t \cap \beta_1) du_{\Omega_{n-1}^{nT}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{n-1}(e_t) dt.$$

**Доказательство.** Так как согласно лемме 22 почти для всякого  $t$   $m^n(e_t) = 0$ , то в силу теоремы 22 (§ 16) и леммы 7 (§ 12) почти для всякого  $t$ , почти всюду на  $\Omega_{n-1}^n$

$$\mu_0(e_t \cap \beta_1) = v_0(e_t \cap \beta_1).$$

А тогда из теоремы 6 (Фубини) следует, что последнее равенство справедливо почти всюду на  $\Omega_{n-1}^n$ .

Отсюда сразу следует утверждение леммы 23.

**Теорема 26.** *Пусть  $f(x)$  определена и непрерывна на аналитическом множестве  $e \subset E_n$ . Тогда на этом множестве  $f(x)$  измерима  $(v_n)$ .*

**Доказательство.** Так как  $f(x)$  непрерывна на  $e$ , то её график  $F$ , будучи непрерывным образом аналитического множества  $e$ , сам является аналитическим множеством. В силу леммы 5 (§ 13)  $\mu_0(F \cap \beta_1)$  является  $A$ -функцией на  $\Omega_n^{n+1}$ .

Из последнего следует, что  $\mu_0(e_t \cap \beta_1)$  как функция пары  $(\beta_1, t)$  есть  $A$ -функция на  $\Omega_{n-1}^n$  (это доказывается точно так же, как в теореме 25 для  $v_0(F \cap \beta_{n-k+1})$  на  $\Omega_k^{n+1}$  и  $v_0(e_t \cap \beta_{n-k+1})$  на  $\Omega_{k-1}^n$ ). Следовательно, согласно лемме 23  $f(x)$  измерима  $(v_n)$  на  $e$ .

### § 19. Простейшие свойства вариаций функций

Пусть  $t = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  есть измеримая  $(v_k)$  функция  $n$  переменных, определённая на измеримом  $(v_{k-1})$  подмножестве  $e$  пространства  $E_n$ .

Функционал  $v_k(f, e)$  обладает следующими свойствами.

**Свойство 1.**  $v_k(f, e) \geq 0$  и  $v_k(c, e) = 0$ , где  $c$  есть произвольная константа.

**Свойство 2.** Для всякой константы  $c$   $v_k(cf, e) = |c|v_k(f, e)$ .

**Свойство 3.** Для всякого числа  $c$   $v_k(f + c, e) = v_k(f, e)$ .

**Свойство 4.** Пусть  $e$  есть сумма попарно отстоящих друг от друга на положительном расстоянии множеств  $e_i (i = 1, 2, \dots)$  таких, что функция  $f(x)$ , рассмотренная лишь на множестве  $e_i$ , измерима  $(v_k) (i = 1, 2, \dots)$ .

Тогда  $v_k(f, e) = \sum_{i=1}^{\infty} v_k(f, e_i)$ .

**Свойство 5.** Пусть  $e$  есть сумма счтного числа замкнутых областей  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) и функция  $f(x)$  постоянна на каждой из компонент границы всякого из множеств  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Тогда в предположении, что  $f(x)$  непрерывна и что множества  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) не имеют попарно общих внутренних точек, получаем:

$$v_k(f, e) = \sum_{i=1}^{\infty} v_k(f, e_i).$$

**Свойство 6.** Пусть  $e'$  есть образ множества  $e$  при преобразовании  $\omega_l$  пространства  $E_n$  (см. свойство 3 § 13), а  $f_l^*(x)$  — функция, определённая на множестве  $e'$  и такая, что для всякой точки  $x$  из  $e' f_l^*[\omega_l(x)] = f(x)$ . Тогда функция  $f_l^*(x)$  измерима ( $v_k$ ) и  $v_k(f_l^*, e') = l^{k-1} v_k(f, e)$ . В частности, если  $l = 1$ , то  $v_k(f_1^*, e') = v_k(f, e)$ .

**Свойство 7.** Пусть  $e = I_n$  есть  $n$ -мерный замкнутый куб из  $E_n$ , а  $f_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) — последовательность непрерывных на  $I_n$  функций, равномерно (на  $I_n$ ) сходящаяся к непрерывной функции  $f(x)$ . Тогда  $v_k(f, I_n) \leq \inf_{i \rightarrow \infty} v_k^n(f_i, I_n)$ ,

т. е. функционал  $v_k(f, I_n)$  полуценпрерывен снизу.

Из сформулированных предложений мы докажем лишь последнее и то лишь для  $k = n$ . На остальных доказательствах останавливаться не будем ввиду их простоты.

**Лемма 24.** Пусть  $y = f(x)$  есть непрерывная функция, определённая на отрезке  $I_1$ , являющаяся пределом последовательности непрерывных функций  $f_i(x)$ , определённых также на отрезке  $I_1$ . Тогда

$$v_1(f, I_1) \leq \inf_{i \rightarrow \infty} v_1(f_i, I_1).$$

**Доказательство.** Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_l$  есть система точек из  $I_1$ , перенумерованная по возрастанию. Так как  $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = f(x)$ , то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{l-1} |f_i(a_{j+1}) - f_i(a_j)| = \sum_{j=1}^{l-1} |f(a_{j+1}) - f(a_j)|. \quad (1)$$

В силу теоремы С. Банаха (см. свойство 5 § 1) однократная вариация  $v_1(f, I_1)$  и изменение  $v(f, I_1)$  функции  $f(x)$  на отрезке  $I_1$  численно равны, и по аналогичной причине  $v_1(f_i, I_1) = v(f_i, I_1)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Пусть для начала  $v(f, I_1) = v_1(f, I_1) < +\infty$ . Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Тогда в силу (1) и определения изменения функции (см. определение 1) точки  $a_1, \dots, a_l$  можно выбрать так, что  $v(f, I_1) - \sum_{j=1}^{l-1} |f(a_{j+1}) - f(a_j)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ , а число  $i_0$  можно выбрать таким, что при  $i = i_0$

$$\left| \sum_{j=1}^{l-1} |f(a_{j+1}) - f(a_j)| - \sum_{j=1}^{l-1} |f_i(a_{j+1}) - f_i(a_j)| \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е. при  $i > i_0$

$$\begin{aligned} v(f_i, I_1) &\geq \sum_{j=1}^{l-1} |f_i(a_{j+1}) - f_i(a_j)| \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^{l-1} |f(a_{j+1}) - f(a_j)| - \frac{1}{2}\varepsilon \geq v(f, I_1) - \varepsilon. \end{aligned}$$

А так как  $\varepsilon$  произвольно, то

$$v(f, I_1) \leq \inf_{i \rightarrow \infty} v(f_i, I_1).$$

Пусть теперь  $v(f, I_1) = \infty$ . Тогда для всякого числа  $c$  можно выбрать числа  $a_1, \dots, a_l$  и  $i_0$  такими, что  $\sum_{j=1}^{l-1} |f_i(a_{j+1}) - f_i(a_j)| > c$  при  $i > i_0$ . А тогда при  $i > i_0$   $v(f_i, I_1) > c$ . А так как константа  $c$  произвольна, то  $\inf_{i \rightarrow \infty} v(f_i, I_1) = \infty$ , т. е.

$$v(f, I_1) = \inf_{i \rightarrow \infty} v(f_i, I_1).$$

Итак, какова бы ни была функция  $f(x)$ , неравенство  $v(f, I_1) = v_1(f, I_1) \leq \inf_{i \rightarrow \infty} v_1(f_i, I_1)$  имеет место.

Теорема 27. Пусть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  есть непрерывная функция, определённая на  $n$ -мерном замкнутом

кубе  $I_n$ , а  $f_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) — сходящаяся на  $I_n$  к функции  $f(x)$  последовательность непрерывных и определённых на  $I_n$  функций. Тогда  $v_n(f, I_n) \leq \inf_{i \rightarrow \infty} v_n(f_i, I_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Доказательство. При  $n = 1$  утверждение теоремы 27 уже доказано (см. лемму 24).

Пусть  $n > 1$ . Согласно теореме 15 имеем:

$$v_n(f, I_n) = \frac{1}{d_{n-1}^n} \int_{\Omega_{n-1}^n} v_1(f, I_n \cap \beta_1) d\mu_{\Omega_{n-1}^n}.$$

Но по предыдущей лемме  $v_1(f, I_n \cap \beta_1) \leq \inf_{i \rightarrow \infty} v_1(f_i, I_n \cap \beta_1)$  для каждой  $\beta_1$ . Отсюда

$$\begin{aligned} v_n(f, I_n) &\leq \frac{1}{d_{n-1}^n} \int_{\Omega_{n-1}^n} \inf_{i \rightarrow \infty} v_1(f_i, I_n \cap \beta_1) d\mu_{\Omega_{n-1}^n} \leq \\ &\leq \frac{1}{d_{n-1}^n} \inf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{n-1}^n} v_1(f_i, I_n \cap \beta_1) d\mu_{\Omega_{n-1}^n} = \inf_{i \rightarrow \infty} v_n(f_i, I_n). \end{aligned}$$

Теорема 27 доказана.

## § 20. Независимость вариаций функции

Пусть  $I_n$  есть  $n$ -мерный замкнутый куб из  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$ , а  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  — функция, определённая на этом кубе.

Независимость вариаций функции многих переменных выражается следующей теоремой.

Теорема 28. Вариации  $v_k(f)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) независимы в том смысле, что для всяких наперёд заданных положительных чисел  $a_k \leq +\infty$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) на кубе  $I_n$  можно определить непрерывную функцию  $f(x)$  такую, что  $v_k(f, I_n) = a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ).

Перейдём к доказательству сформулированной теоремы.

Лемма 25. Пусть  $\sigma_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) суть выпуклые замкнутые множества из  $E_n$  и  $\sigma = \sum_{i=1}^m \sigma_i$ , а  $s$  — граница множества  $\sigma$ . Тогда  $v_0(s) \leq c(m)$ , где  $c(m)$  — некоторая

константа, зависящая лишь от  $m$  (подчеркнём, что  $c(m)$  не зависит от множества  $\sigma$ ).

На доказательстве сформулированной леммы мы останавливаются не будем. Отметим лишь, что лемма 25 сравнительно просто доказывается с помощью индукции по  $m$ .

**Лемма 26.** Пусть  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) суть замкнутые выпуклые подмножества из пространства  $E_n$  такие, что  $d_1(\sigma_i) \leq 1$  для  $i = 1, 2, \dots, m$ . Пусть  $\sigma = \sum_{i=1}^m \sigma_i$ , а  $E_k$  — пространство наименьшей размерности, в котором целиком укладывается множество  $\sigma$ . Тогда

$$v_p(s) \leq c(m, k) \quad (0 \leq p \leq k),$$

где  $s$  — граница множества  $\sigma$ , а константа  $c(m, k)$  зависит только от  $m$  и  $k$  и не зависит от  $\sigma$ .

**Доказательство.** Для  $p = 0$  утверждение леммы 26 совпадает с леммой 25 и потому может считаться доказанным.

Пусть лемма 26 справедлива для  $p = 0, 1, \dots, l-1$ . Покажем, что тогда она справедлива и для  $p = l$ .

Рассмотрим  $v_{l_{\tau_1}(r)}(s)$  (см. определение 14 § 11):

$$v_{l_{\tau_1}(r)}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{l-1}(s \cap \beta_{k-1}(r, x)) dx.$$

Обозначим через  $s_i$  границу множества  $\sigma_i$ , а через  $\sigma_i(r)$  — проекцию множества  $\sigma_i$  на прямую  $\tau_1(r)$ . Так как  $\sigma_i$  есть замкнутое выпуклое множество и так как  $d(\sigma_i) \leq 1$ , то  $\sigma_i(r)$  — отрезок, причём  $d[\sigma_i(r)] \leq 1$ .

Пусть точка  $x \in \tau_1(r)$  не является концом ни одного из отрезков  $\sigma_i(r)$ . Тогда, как нетрудно показать, границей множества  $\sigma_i \cap \beta_{n-1}(r, x)$  является множество  $s_i \cap \beta_{n-1}(r, x)$ , а границей множества  $\sigma \cap \beta_{k-1}(r, x) = \sum_{i=1}^m \sigma_i \cap \beta_{k-1}(r, x)$  является множество  $s \cap \beta_{k-1}(r, x)$ , причём  $d_1[\sigma_i \cap \beta_{k-1}(r, x)] \leq d_1(\sigma_i) \leq 1$ .

Следовательно, почти для всех  $x \in \tau_1(r)$  (за исключением  $2m$  точек, являющихся концами отрезков  $\sigma_i(r)$ ) в силу предположения индукции существует константа  $c(m, k-1)$  такая, что  $v_{l-1}(s \cap \beta_{k-1}(r, x)) \leq c(m, k-1)$ .

Из того, что каждое из множеств  $\sigma_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) проектируется на прямую  $\tau_1(r)$  в отрезок не более чем единичной длины, а также из того, что множества  $\sigma_i$   $m$  штук, следует, что линейная мера Лебега множества всех таких точек  $x \in \tau_1(r)$ , для каждой из которых соответствующее множество  $s \cap \beta_{k-1}(r, x)$  не пусто, не превосходит  $m$ .

А тогда

$$v_{l_{\tau_1}(r)}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{l-1}(s \cap \beta_{k-1}(r, x)) dx \leq mc(m, k-1).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} v_l(s) &= \frac{d_{l-1}^{n-1}}{d_l^n} \int_{S_{k-1}} v_{l_{\tau_1}(r)}(s) d\mu_{S_{k-1}} \leq \\ &\leq \frac{d_{l-1}^{n-1}}{d_l^n} C_{k-1} mc(m, k-1) = c_{l, k}(m, k) \leq c(m, k), \end{aligned}$$

где

$$c(m, k) = \sup_{l \leq k} c_{l, k}(m, k).$$

Лемма 26 доказана.

Пусть  $\tau_{k-1}^i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) суть  $k-1$ -мерные плоскости из  $E_n$ , а  $e_{k-1}^i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) — замкнутые выпуклые множества из  $\tau_{k-1}^i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) такие, что множество  $e_{k-1} = \sum_{i=1}^m e_{k-1}^i$  удовлетворяет условиям а), б) и в) из § 17.

Пусть, далее,  $\sigma_\mu^i$  есть  $n$ -мерное замкнутое выпуклое подмножество пространства  $E_n$ , содержащее множество  $e_{k-1}^i$  своим подмножеством и такое, что всякая точка  $c$  из  $\sigma_\mu^i$  удалена от множества  $e_{k-1}^i$  на расстояние  $\rho(c, e_{k-1}^i) < \varepsilon_\mu$  ( $\varepsilon_\mu$  не зависит ни от  $c$ , ни от индекса  $i$ ).

Положим  $\sigma_\mu = \sum_{i=1}^m \sigma_\mu^i$  и обозначим через  $\tilde{\sigma}_\mu$  границу множества  $\sigma_\mu$ .

Лемма 27. Пусть множества  $\sigma_\mu^i$  таковы, что  $d_1(\sigma_\mu^i) \leq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), а соответствующая последователь-

нность чисел  $\varepsilon_\mu > 0$  ( $\mu = 1, 2, \dots$ ) удовлетворяет условию  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \varepsilon_\mu = 0$ . Тогда

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} v_p(\tilde{\sigma}_\mu) = v_p(e_{k-1}) \quad (0 \leq p < n, 0 < k < n, n > 0).$$

**Доказательство.** Пусть последнее утверждение имеет место при  $p = 0, 1, 2, \dots, l-1$ . Покажем, что тогда оно будет справедливо и для  $p = l$ .

Пусть  $O, S_{n-1}, r \subset S_{n-1}, \tau_1(r), x, \beta_{n-1}(r, x)$  есть набор объектов из  $E_n$ , необходимый для индуктивного определения вариаций (см. теорему 12),  $\sigma_\mu^i(r, x) = \sigma_\mu^i \cap \beta_{n-1}(r, x)$ ,

$$\sigma_\mu(r, x) = \sum_{i=1}^m \sigma_\mu^i(r, x), \quad \tilde{\sigma}_\mu(r, x) — граница множества \sigma_\mu(r, x),$$

$$\tilde{\sigma}'_\mu(r, x) = \beta_{n-1}(r, x) \cap \tilde{\sigma}_\mu, \quad e_{k-2}^i(r, x) = e_{k-1}^i \cap \beta_{n-1}(r, x),$$

$$\varepsilon_\mu(r, x) = \sup \rho(c_1, e_{k-2}^i(r, x)),$$

где  $c_1$  есть произвольная точка множества  $\sigma_\mu^i(r, x)$ , а  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Нетрудно показать, что почти для всякой точки  $x$  прямой  $\tau_1(r)$  соответствующее множество  $e_{k-2}^i(r, x) = \sum_{i=1}^m e_{k-2}^i(r, x)$  имеет размерность  $k-2$  и как подмножество пространства  $\beta_{n-1}(r, x)$  удовлетворяет условиям а), б) и в) из § 17 (помимо этого мы доказывали в лемме 20).

Пусть точка  $x$  прямой  $\tau_1(r)$  такова, что соответствующая гиперплоскость  $\beta_{n-1}(r, x)$  не является опорной\*) ни для какого множества  $\sigma_\mu^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Тогда в силу замкнутости множеств  $e_{k-1}^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) имеем  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \varepsilon_\mu(r, x) = 0$ ,  $\tilde{\sigma}'_\mu(r, x) = \tilde{\sigma}_\mu(r, x)$  ( $\mu = 1, 2, \dots$ ). Отсюда, так как для каждого выпуклого множества  $\sigma_\mu^i$  ( $i = 1, \dots, m; \mu = 1, 2, \dots$ ) существует не более двух опорных гиперплоскостей, ортогональных прямой  $\tau_1(r)$ , следует, что почти для всякой точки  $x \in \tau_1(r)$ ,  $\tilde{\sigma}_\mu(r, x) = \tilde{\sigma}_\mu(r, x)$  ( $\mu = 1, 2, \dots$ ) и

\*) Гиперплоскость  $\beta_{n-1}$  называется опорной для множества  $\sigma$ , если она содержит хотя бы одну точку границы множества  $\sigma$  и всё множество  $\sigma$  расположено по одну сторону от  $\beta_{n-1}$ .

$\lim_{\mu \rightarrow \infty} e_\mu(r, x) = 0$ . Но тогда в силу предположения индукции

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} v_{p-1}[\tilde{\sigma}'_\mu(r, x)] = \lim_{\mu \rightarrow \infty} v_{p-1}[\tilde{\sigma}_\mu(r, x)] = v_{p-1}[e_{k-2}(r, x)]$$

$$(p = 1, \dots, l; k = 2, \dots, n-1).$$

Пусть  $e_k(r)$  есть проекция множества  $\sum_{\mu=1}^{\infty} \tilde{\sigma}_\mu$  на прямую  $\tau_1(r)$ . Так как  $e_{k-1}$  связно и  $d_1(\tilde{\sigma}_\mu^i) \leq 1$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $\mu = 1, 2, \dots$ ), то  $m^1[e_k(r)] = d_1[e_k(r)] \leq d_1(e_{k-1}) + 2 = c(e_{k-1})$ .

В то же время для всякой точки  $x \in \tau_1(r)$ , не принадлежащей множеству  $e_k(r)$ ,  $v_{p-1}[\tilde{\sigma}'_\mu(r, x)] = 0$  и  $v_{p-1}[e_{k-2}(r, x)] = 0$  ( $p = 1, 2, \dots, l$ ;  $\mu = 1, 2, \dots$ ). Итак, последовательность функций  $v_{p-1}[\tilde{\sigma}_\mu(r, x)]$  ( $\mu = 1, 2, \dots$ ) сходится почти всюду (по  $x$ ) к функции  $v_{p-1}[e_{k-2}(r, x)]$ ; при этом последовательность функций равномерно ограничена константой  $c(m, n)$  и каждая из рассматриваемых функций равна нулю вне множества  $e_k(r)$ , а тогда для  $p = 1, \dots, l$

$$\begin{aligned} v_{p\tau_1(r)}(e_{k-1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v_{p-1}(e_{k-2}(r, x)) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} v_{p-1}(\tilde{\sigma}_\mu(r, x)) dx = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{p-1}(\tilde{\sigma}_\mu(r, x)) dx = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} v_{p\tau_1(r)}(\tilde{\sigma}_\mu) < c(e_{k-1}) \cdot c(m, n-1). \end{aligned}$$

Так как последовательность функций  $v_{p\tau_1(r)}(\tilde{\sigma}_\mu)$  ( $\mu = 1, 2, \dots$ ) от  $r$  равномерно ограничена константой  $c(e_{k-1}) \cdot c(m, n-1)$  и для всякой точки  $r$  сферы  $S_{n-1} v_{p\tau_1(r)}(e_{k-1}) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} v_{p\tau_1(r)}(\tilde{\sigma}_\mu)$ ,

то

$$\begin{aligned} v_p(e_{k-1}) &= \frac{d_{p-1}^{n-1}}{d_p^n} \int_{S_{n-1}} \lim_{\mu \rightarrow \infty} v_{p\tau_1(r)}(\tilde{\sigma}_\mu) d\mu_{S_{n-1}} = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{d_{p-1}^{n-1}}{d_p^n} \int_{S_{n-1}} v_{p\tau_1(r)}(\tilde{\sigma}_\mu) d\mu_{S_{n-1}} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} v_p(\tilde{\sigma}_\mu). \end{aligned}$$

Из того, что  $e_{k-1}$ , будучи  $(k-1)$ -мерным замкнутым множеством ( $k < n$ ), не разделяет пространства  $E_n$ , из того, что это множество представляет сумму конечного числа замкнутых выпуклых множеств, и из того, что

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \varepsilon_\mu = 0,$$

следует, что  $v_0(e_{k-1}) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} v_0(\sigma_\mu)$ . Отсюда по индукции получаем:

$$v_p(e_{k-1}) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} v_p(\tilde{\sigma}_\mu) \quad (p = 0, 1, \dots, l).$$

Лемма 27 доказана.

Пусть  $e$  есть произвольное множество из  $E_n$ . Тогда через  $\varepsilon_n(e)$  мы будем обозначать множество всех таких точек пространства  $E_n$ , каждая из которых отстоит от множества  $e$  не более чем на  $\varepsilon \geq 0$ , а через  $\tilde{\varepsilon}_n(e)$  — множество точек пространства  $E_n$ , равноудалённых от множества  $e$  на расстояние  $\varepsilon$ .

Отметим, что  $\tilde{\varepsilon}_n(e)$  является границей множества  $\varepsilon_n(e)$  и что  $\varepsilon_n(e)$  отделяет множество  $e$  от бесконечности. Обозначим через  $y_k^v$  ( $k = 1, \dots, n$ ;  $v = 1, 2, \dots$ ) попарно не пересекающиеся во внутренних точках  $n$ -мерные кубы из  $I_n$  с рёбрами, параллельными рёбрам куба  $I_n$  и имеющими длины  $l_k^v$  ( $k = 1, \dots, n$ ;  $v = 1, 2, \dots$ ).

Лемма 28. Для любых целых чисел  $n > 0$  и  $1 \leq k < n$  и конечных чисел  $\alpha_k^v > 0$ ,  $\varepsilon_k^v > 0$  и  $\delta_k^v > 0$  на соответствующем кубе  $y_k$  можно задать непрерывную функцию  $f_k^v = f_k^v(x)$  такую, что

- 1) во всякой точке  $x \in y_k^v$   $0 \leq f_k^v(x) \leq \varepsilon_k^v$ ;
- 2) для всякой точки  $x$ , принадлежащей границе куба  $y_k^v$ ,  $f_k^v(x) = 0$ ;
- 3)  $v_k(f_k^v, y_k^v) = \alpha_k^v$ ;
- 4) при  $p \neq k$  ( $p \leq n$ )  $v_p(f_k^v) \leq \delta_k^v$ .

Пусть  $e_{k-1}(a, m)$  есть множество, определённое в § 17 перед леммой 21 ( $a < l_k^v$ ), лежащее строго внутри куба  $y_k^v$ . Легко проверить, что множество  $e_{k-1}(a, m)$  удовлетворяет условиям а), б) и в) из § 17. По определению  $e_{k-1}(a, m) =$

$= \sum_{i=1}^k \sum_{l=0}^m e_{k-1}(a, i, l, m)$ , и при этом каждое из множеств  $e_{k-1}(a, i, l, m)$  замкнуто и выпукло, а тогда  $\varepsilon_n[e_{k-1}(a, i, l, m)]$  ( $i = 1, \dots, k; l = 0, \dots, m$ ) суть выпуклые замкнутые множества. Из определения  $\varepsilon_n[e_{k-1}(a, i, l, m)]$ ,  $\varepsilon_n[e_{k-1}(a, m)]$  и  $\tilde{\varepsilon}_n[e_{k-1}(a, m)]$  следует, что множество  $\varepsilon_n[e_{k-1}(a, m)] = \sum_{i=1}^k \sum_{l=0}^m \varepsilon_n[e_{k-1}(a, i, l, m)]$  и что  $\tilde{\varepsilon}_n[e_{k-1}(a, m)]$  совпадает с границей множества  $\varepsilon_n[e_{k-1}(a, m)]$ . А тогда в силу леммы 27 для всякой стремящейся к нулю последовательности чисел  $\varepsilon_\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots$ ) имеют место равенства

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} v_p[\tilde{\varepsilon}_\mu(e_{k-1}(a, m))] = v_p[e_{k-1}(a, m)] \quad (p = 0, \dots, n-1).$$

Следовательно,  $v_p[\tilde{\varepsilon}_n(e_{k-1}(a, m))]$  как функция  $\varepsilon$  непрерывна при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_p[\tilde{\varepsilon}_n(e_{k-1}(a, m))] = v_p[e_{k-1}(a, m)]$  ( $p = 0, \dots, n-1$ ). Нетрудно убедиться, что числа  $a = a_k^v$  и  $m = m_k$ , можно выбрать такими, что

$$a_k^v < l_k^v, \quad a_k^v < \delta_k^v \frac{\lambda_k}{\varepsilon_k^v n^n} \quad \text{и} \quad k(m_{k^v} + 1)(a_k^v)^{k-1} \varepsilon_k^v = 2\alpha_k^v \quad (1)$$

(см. лемму 21). Фиксируем числа  $a_k^v$  и  $m_k$ , именно такими и обозначим через  $\rho_k^v$  расстояние между границей куба  $y_k^v$  и множеством  $e_{k-1}(a_k^v, m_k)$ . Фиксируем число  $\rho_k^v < \rho_k^v$  таким, что для всякого  $0 < \varepsilon < \rho_k^v$  имеет место

$$\left. \begin{aligned} & |v_{k-1}[e_{k-1}(a_{k-1}^v m_{k^v})] - v_{k-1}[\tilde{\varepsilon}_n(e_{k-1}(a_k^v, m_{k^v}))]| < \\ & < \frac{\alpha_k^v}{\varepsilon_k^v} \quad \text{для } k \leq n, \quad v_{p-1}[\tilde{\varepsilon}_n(e_{k-1}(a_k^v m_{k^v}))] < \frac{\delta_k^v}{\varepsilon_k^v} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

для  $p = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ .

Последнее имеет место в силу лемм 21 и 27.

Пусть  $e_k^v$  есть множество всех таких точек  $x$  из  $y_k^v$ , для каждой из которых расстояние  $\rho[x, e_{k-1}(a_k^v, m_k)] \leq \rho_k^v$ . Обозначим через  $\varphi_k^v = \varphi_k^v(x)$  функцию точки  $x$ , определённую на кубе  $y_k^v$  следующим образом:  $\varphi_k^v(x) = 0$ , если  $x \in y_k^v - e_k^v$ ,

и  $\varphi_k^v(x) = \varepsilon_k^v \frac{\rho_k^v - \rho[x, e_{k-1}(a_k^v, m_{kv})]}{\rho_k^v}$ , если  $x \subset e_k^v$ . Ясно, что

$0 \leq \varphi_k^v \leq \varepsilon_k^v$  непрерывна и равна нулю на границе куба  $y_k^v$ .

Пусть  $e_\varepsilon$  есть множество уровня  $\varepsilon$  функции  $\varphi_k^v$ . Ясно, что если  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_k^v$ , то  $e_\varepsilon = \varepsilon_n [e_{k-1}(a_k^v, m_{kv})]$ . Если же  $\varepsilon$  не удовлетворяет условию  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_k^v$ , то  $e_\varepsilon = \emptyset$ , где  $\emptyset$  — пустое множество.

А тогда в силу (2) для  $p = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$  имеем:

$$v_p(\varphi_k^v y_k^v) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{p-1}(e_t) dt = \int_0^{\varepsilon_k^v} v_{p-1}(e_t) dt \leq \varepsilon_k^v \frac{\delta_k^v}{\varepsilon_k^v} = \delta_k^v,$$

т. е.

$$v_p(\varphi_k^v y_k^v) < \delta_k^v \quad (p \neq k).$$

В силу леммы 24, леммы 21 и (1) получаем:

$$\begin{aligned} v_k(\varphi_k^v, y_k^v) &= \int_0^{\varepsilon_k^v} v_{k-1}(e_t) dt \geq \varepsilon_k^v \left| v_{k-1}[e_{k-1}(a_k^v m_{kv})] - \frac{a_k^v}{\varepsilon_k^v} \right| = \\ &= k(m_{kv} + 1)(a_k^v)^{k-1} \varepsilon_k^v - a_k^v = a_k^v. \end{aligned}$$

Нетрудно также убедиться, что  $v_k(\varphi_k^v, y_k^v) < +\infty$ . Итак,  $a_k^v < v_k(\varphi_k^v, y_k^v) < +\infty$ . Положим  $f_k^v(x) = \frac{a_k^v}{v_k(\varphi_k^v, y_k^v)} \varphi_k^v(x)$ .

В силу свойства 2 § 19  $v_k(f_k^v, y_k^v) = a_k^v$ . Но так как  $\frac{a_k^v}{v_k(\varphi_k^v, y_k^v)} \leq 1$ , то в силу того, что  $0 \leq \varphi_k^v \leq \varepsilon_k^v$  непрерывна и равна нулю на границе куба  $y_k^v$ , функция  $0 \leq f_k^v(x) \leq \varepsilon_k^v$  тоже непрерывна и равна нулю на границе куба  $y_k^v$ .

При  $p \neq k$

$$v_p(f_k^v, y_k^v) = \frac{a_k^v}{v_k(\varphi_k^v, y_k^v)} \cdot v_p(\varphi_k^v, y_k^v) \leq \delta_k^v.$$

Лемма 28 доказана.

Лемма 29. Для всяких целых  $v > 0$  и  $n > 0$  и конечных положительных  $\alpha_n^v$ ,  $\varepsilon_n^v$  и  $\delta_n^v$  на кубе  $y_n^v$  ( $y_n^v$  см. перед леммой 28) можно определить неотрицательную непрерывную функцию  $f_n^v(k) = f_n^v \leq \varepsilon_k^v$  такую, что

- 1) для всякой точки  $x$ , принадлежащей границе куба  $y_n^v$ ,  $f_n^v(x) = 0$ ;
- 2)  $v_p(f_n^v) \leq \delta_n^v$  для  $p < n$ ;
- 3)  $v_n(f_n^v) = \alpha_n^v$ .

Доказательство. Пусть  $O$  есть некоторая точка  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$ , содержащего куб  $I_n \supset y_n^v$ ,  $\tau_1$  — прямая из  $E_n$ , содержащая точку  $O$ ,  $\beta_{n-1}$  — гиперплоскость пространства  $E_n$ , ортогональная прямой  $\tau_1$  и содержащая точку  $q$  прямой  $\tau_1$ ,  $X = x_1, \dots, x_n$  — ортонормированный базис пространства  $E_n$  ( $O$  является общим началом векторов  $x_1, \dots, x_n$ , а прямая  $\tau_1$  — осью вектора  $x_n$ ),  $x_1, \dots, x_n$  — координаты произвольной точки  $x$  из  $E_n$  относительно этой системы. Пусть  $a \leq n^{-n}$ ,  $k_{n-1}(a)$  есть  $(n-1)$ -мерный куб из  $\beta_{n-1}$ , определяемый соотношениями  $-\frac{a}{2} \leq x_i \leq \frac{a}{2}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) и  $x_n = x_n(g)$ ;  $k_{n-2}(a, l, m)$  —  $(n-2)$ -мерный куб из  $k_{n-1}(a)$ , определяемый равенством  $x_1 = \frac{al}{m}$  ( $\pm l = 0, 1, \dots, m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ );  $o(a, l, m)$  — центр куба  $k_{n-2}(a, l, m)$ ;  $o'(a, l, m)$  — точка из  $E_n$ , не принадлежащая гиперплоскости  $\beta_{n-1}$ , проектирующаяся на  $\beta_{n-1}$  в точку  $o(a, l, m)$ ,  $(x_n [o'(a, l, m)])$  не зависит от  $l$ );  $P(a, l, m)$  —  $(n-1)$ -мерная пирамида, основанием которой является куб  $k_{n-2}(a, l, m)$ , а вершиной — точка  $o'(a, l, m)$ , т. е.  $P(a, l, m)$  есть теоретико-множественная сумма всех возможных отрезков с концами в точках  $o'(a, l, m)$  и  $x$ , где  $x$  есть произвольная точка куба  $k_{n-2}(a, l, m)$ . Положим

$e_n(a, m) = k_{n-1}(a) + \sum_{\pm l=0}^m P(a, l, m)$ . Из построения множества  $e_n(a, m)$  следует, что это множество замкнуто и не разделяет пространства  $E_n$ . Пусть  $o''(a, l, m)$  есть центр одной из  $(n-3)$ -мерных граней куба  $k_{n-2}(a, l, m)$ . Ясно, что угол  $\varphi(a, m) = o(a, l, m) o''(a, l, m) o'(a, l, m)$ , образуемый  $(n-2)$ -мерной боковой гранью пирамиды  $P(a, l, m)$

с её основанием, взаимно однозначно определяется числом  $a$  и координатой  $x_n$  [ $o(a, l, m)$ ].

Пусть, далее,  $\tau_k$  есть произвольная  $k$ -мерная плоскость пространства  $E_n$ , содержащая точку  $O$  ( $0 \leq k < n-1$ );  $\zeta = \zeta_k$  — произвольная точка этой плоскости;  $\beta_{n-k}(\zeta)$  —  $(n-k)$ -мерная плоскость пространства  $E_n$ , содержащая точку  $\zeta_k$  и ортогональная плоскости  $\tau_k$ ;  $k_{n-1}^{\tau_k}(a)$ ,  $k_{n-2}^{\tau_k}(a, l, m)$ ,  $P^{\tau_k}(a, l, m)$ ,  $e_n^{\tau_k}(a, m)$ ,  $o^{\tau_k}(a, l, m)$  и  $o'^{\tau_k}(a, l, m)$  — проекции на плоскость  $\tau_k$  множеств  $k_{n-1}(a)$ ,  $k_{n-2}(a, l, m)$ ,  $p(a, l, m)$ ,  $e_n(a, m)$ ,  $o(a, l, m)$  и  $o'(a, l, m)$  соответственно.

Из определения  $e_n(a, m)$  и функции  $v_0(e \cap \beta_{n-k}(\zeta))$  получаем:

$$\begin{aligned}
 v_{k\tau_k}[e_n(a, m)] &= \int_{\tau_k} v_0[e_n(a, m) \cap \beta_{n-k}(\zeta)] dm^k = \\
 &= \int_{\tau_k} v_0[e_n(a, m) \cap \beta_{n-k}(\zeta)] dm^k + \\
 &+ \sum_{\pm l=1}^m \int_{P^{\tau_k}(a, l, m) - k_{n-2}^{\tau_k}(a, l, m)} v_0[e_n(a, m) \cap \beta_{n-k}(\zeta)] dm^k \leqslant \\
 &\leqslant m^k [k_{n-1}^{\tau_k}(a)] + (2m+1)m^k [P^{\tau_k}(a, l, m) - k_{n-2}^{\tau_k}(a, l, m)] = \\
 &= m^k [k_{n-1}^{\tau_k}(a)] + (2m+1)m^k [\tilde{P}^{\tau_k}(a, l, m)], \quad (3)
 \end{aligned}$$

где  $\tilde{P}^{\tau_k}(a, l, m) = P^{\tau_k}(a, l, m) - k_{n-2}^{\tau_k}(a, l, m)$ , так как  $m^k [P^{\tau_k}(a, l, m)]$  не зависит от  $l$ , ибо множества  $\tilde{P}^{\tau_k}(a, l, m)$  ( $\pm l = 0, \dots, m$ ) попарно конгруэнтны. Обозначим через  $\Phi_n^{n*}[\varphi(a, m)]$  множество всех таких плоскостей  $\tau_k$  пространства  $E_n$ , для каждой из которых соответствующее множество  $\tilde{P}^{\tau_k}(a, l, m)$  не пусто. Заметим, что если  $\tilde{P}^{\tau_k}(a_0, l_0, m_0)$  не пусто, то и все  $\tilde{P}^{\tau_k}(a_0, l, m_0)$  не пусты ( $\pm l = 0, \dots, m$ ), ибо при фиксированных  $a_0$  и  $m_0$  эти множества попарно конгруэнтны.

Пусть  $\tau_k$  не принадлежит множеству  $\Phi_n^{n*}[\varphi(a, m)]$ . Тогда

$$v_{k\tau_k}[e_n(a, m)] = m^k [k_{n-1}^{\tau_k}(a)] \leqslant n^k a^k \leqslant 1,$$

ибо  $a \leqslant n^{-n}$ .

Пусть  $\tau_k \in \Phi_k^{n^*}[\varphi(a, m)]$  и  $\zeta \in \tilde{P}^{\tau_k}(a, l, m)$ . Ясно, что  $k_{n-2}^{\tau_k}(a, l, m)$  есть  $k$ -мерный параллелепипед,  $P^{\tau_k}(a, l, m)$  — выпуклое множество из  $\tau_k$ , содержащее параллелепипед  $k_{n-2}^{\tau_k}(a, l, m)$  своим подмножеством, и при этом всякая точка  $\zeta$  из  $\tilde{P}^{\tau_k}(a, l, m)$  отстоит от  $k_{n-2}^{\tau_k}(a, l, m)$  на расстоянии

$$\rho[\zeta, k_{n-2}^{\tau_k}(a, l, m)] \leq \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \varphi(a, m) = x_n [o'(a, l, m)].$$

А тогда из (3) имеем:

$$\begin{aligned} v_{k\tau_k}[e_n(a, m)] &\leq n^k a^k + (2m+1) A'(a, n) \cdot \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \varphi(a, m) < \\ &< A(a, n) + A(a, n) m \operatorname{tg} \varphi(a, m), \end{aligned}$$

где  $A(a, n)$  — некоторая константа, зависящая лишь от  $a$  и  $n$ . Тогда

$$\begin{aligned} v_k[e_n(a, m)] &= \frac{1}{d_k^n} \int_{\Phi_k^n} v_{k\tau_k}[e_n(a, m)] d\mu_{\Phi_k^n} \leq \\ &\leq \frac{1}{d_k^n} \mu_{\Phi_k^n} \{ \Phi_k^n - \Phi_k^{n^*}[\varphi(a, m)] \} + \\ &+ \frac{1}{d_k^n} [A(a, n) + A(a, n) m \operatorname{tg} \varphi(a, m)] \mu_{\Phi_k^n} \{ \Phi_k^{n^*}[\varphi(a, m)] \} < \\ &< B(a, n) + B(a, n) m \operatorname{tg} \varphi(a, m) \mu_{\Phi_k^n} \{ \Phi_k^{n^*}[\varphi(a, m)] \}, \quad (4) \end{aligned}$$

где  $B(a, n)$  есть константа, зависящая лишь от  $a$  и  $n$ , такая, что  $\lim_{a \rightarrow \infty} B(a, n) = 0$  ( $k = 0, \dots, n-2$ ).

В силу теоремы 22

$$\begin{aligned} v_{n-1}[e_n(a, m)] &= m^{n-1} [k_{n-1}(a)] + (2m+1) m^{n-1} [P(a, l, m)] = \\ &= a^{n-1} + (2m+1) B(n) a^{n-1} \operatorname{tg} \varphi(a, m). \quad (5) \end{aligned}$$

Пусть  $\beta_{n-2}(a, l, m)$  —  $(n-2)$ -мерная плоскость, содержащая  $k_{n-2}(a, l, m)$ . Обозначим через  $\Phi_k^{n^*}(a, m)$  множество всех таких плоскостей  $\tau_k \in \Phi_k^n$ , для каждой из которых плоскость  $\beta_{n-k-1}$ \*, являющаяся общей частью ортогонального

\*)  $\beta_{n-k-1}$  имеет размерность либо  $(n-k)$ , либо  $(n-k-1)$ .

дополнения к плоскости  $\tau_k$  в точке  $O$  и гиперплоскости  $\beta_{n-1}$ , параллельна плоскости  $\beta_{n-2}(a, l, m)^*$ ). Можно доказать, что мера  $\mu_{\Phi_k^n}[\Phi_k^{n*}(a, m)] = 0$  и что

$$\Phi_k^{n*}(a, m) = \prod_{p=1}^{\infty} \Phi_k^{n*}[\varphi_p(a, m)],$$

где  $\varphi_p(a, m) = \frac{1}{p}$ .

А тогда

$$\lim_{\varphi(a, m) \rightarrow 0} \mu_{\Phi_k^n} \{ \Phi_k^{n*} [\varphi(a, m)] \} = 0. \quad (6)$$

Из (4)–(6) следует, что  $a < n^{-n}$ ,  $m$  и функцию  $\varphi(a, m)$  можно подобрать так, чтобы выполнялось:

$$v_k [e_n(a, m)] < \frac{\delta_n^y}{\epsilon_n^y} \quad (k = 0, \dots, n-2), \quad (7)$$

$$v_{n-1} [e_n(a, m)] > \frac{a_n^y}{\epsilon_n^y}. \quad (8)$$

Числа  $a$ ,  $m$  и функцию  $\varphi(a, m)$  можно выбрать, например, таким образом: 1) фиксируем  $a$  столь малым, чтобы  $B(a, n) < \frac{1}{2} \frac{\delta_n^y}{\epsilon_n^y}$ ; 2) фиксируем  $\varphi(a, m) < \frac{\pi}{4}$  так, что  $\operatorname{tg} \varphi(a, m) \cdot m \cdot \mu_{\Phi_k^n} \{ \Phi_k^{n*} [\varphi(a, m)] \} \leq 1$  для любого  $m$  и  $\lim_{m \rightarrow \infty} m \operatorname{tg} \varphi(a, m) = +\infty$ ; 3) фиксируем  $m$  таким, чтобы

$$v_{n-1} [e_n(a, m)] > \frac{a_n^y}{\epsilon_n^y}.$$

Ясно, что для дальнейшего можно предполагать, что множество  $e_n(a, m)$  лежит строго внутри куба  $u_n^y$ , а числа  $a$ ,  $m$  и  $\varphi(a, m)$  таковы, что (7) и (8) имеют место.

\* ) Это означает, что в  $\beta_{n-2}(a, l, m)$  найдется плоскость  $\beta_{n-k-1}$ , для которой в  $E_n$  можно указать  $\beta_{n-k}$  такую, что  $\beta_{n-k} \subset \beta_{n-k-1} + \beta_{n-k-1}'$  и  $\beta_{n-k-1}$  и  $\beta_{n-k-1}'$  параллельны как гиперплоскости пространства  $\beta_{n-k}$ .

Дальнейшая часть доказательства рассматриваемой леммы по существу ничем не отличается от доказательства леммы 27. Поэтому далее мы ограничимся лишь формулировкой основных моментов доказательства.

В терминах леммы 25 (см. стр. 89) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_k [\tilde{\epsilon}_n (e_n (a, m))] &= v_k [e_n (a, m)] \\ (k = 0, \dots, n-2), \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_{n-1} [\tilde{\epsilon}_n (e_n (a, m))] &= 2v_{n-1} [e_n (a, m)]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Обозначим через  $\theta$  пустое множество. В силу (7)–(9) можно указать  $\rho_n^v > 0$  такое, что для всякого  $\epsilon \leq \rho_n^v$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\epsilon}_n [e_n (a, m)] - y_n^v &= \theta, \\ v_k [\tilde{\epsilon}_n (e_n (a, m))] &< \frac{\delta_n^v}{\epsilon_n^v} \quad (k = 0, \dots, n-2), \\ v_{n-1} [\tilde{\epsilon}_n (e_n (a, m))] &> \frac{\alpha_n^v}{\epsilon_n^v}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Обозначим через  $\varphi_n^v = \varphi_n^v (x)$  функцию точки  $x$ , определённую на кубе  $y_n^v$  следующим образом:

$$\varphi_n^v (x) = \begin{cases} 0, & \text{если расстояние } \rho [x, e_n (a, m)] \geq \rho_n^v; \\ \frac{\epsilon_n^v \{ \rho_n^v - \rho [x, e_n (a, m)] \}}{\rho_n^v}, & \text{если } \rho [x, e_n (a, m)] \leq \rho_n^v. \end{cases}$$

Положим

$$f_n^v (x) = f_n^v = \frac{\alpha_n^v}{v_n (\varphi_n^v)} \varphi_n^v (x).$$

Пользуясь определением функции  $f_n^v (x)$ , нетрудно доказать, что функция  $f_n^v (x)$  удовлетворяет требованиям леммы 29.

Доказательство теоремы 28. На кубе  $I_n$  определим функцию  $f = f(x)$  следующим образом: если точка  $x$  принадлежит кубу  $y_k^v$ , то  $f(x) = f_k^v (x)$  (см. леммы 28 и 29) для  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $v = 1, 2, \dots$  (параметры  $\alpha_k^v$ ,  $\epsilon_k^v$  и  $\delta_k^v$ .

упомянутые в леммах 28 и 29, мы фиксируем ниже); если же  $x \in I_n - \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^{\infty} y_k^v$ , то  $f(x) = 0$ .

Положим

$$\varepsilon_k^v = \frac{1}{v} \quad (k = 1, 2, \dots, n, v = 1, 2, \dots).$$

Ясно, что при всевозможных  $\alpha_k^v$  и  $\delta_k^v$  соответствующая функция  $f(x)$  непрерывна в каждой точке куба  $I_n$ . В силу свойства 5 § 19  $v_k(f) = \sum_{m=1}^n \sum_{v=1}^{\infty} v_k(f_m^v)$ . Почти дословным повторением доказательства теоремы 24 доказывается, что числа  $\alpha_k^v$  и  $\delta_k^v$  ( $k = 1, 2, \dots, n; v = 1, 2, \dots$ ) можно фиксировать такими, что  $v_k(f) = \sum_{m=1}^n \sum_{v=1}^{\infty} v_k(f_m^v) = a_k$  для  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Теорема 28 доказана.

## § 21. Свойства старшей вариации функции

Пусть  $t = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — однозначная непрерывная функция  $n$  переменных ( $n$  произвольно), определённая и измеримая ( $v_n$ ) на  $e \subset E_n$ .

Старшая вариация  $v_n(f, e)$  как функционал функции  $f(x)$  обладает следующими свойствами.

Свойство 1.  $0 \leq v_n(f, e) \leq \infty$ .

Свойство 2. Для всякой константы  $c$   $v_n(cf, e) = |c| v_n(f, e)$ .

Свойство 3. Пусть  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) суть попарно не пересекающиеся аналитические множества такие, что  $\sum_{i=1}^{\infty} e_i = e$ . Тогда  $f(x)$  измерима ( $v_n$ ) на  $e$  и  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) и

$$v_n(f, e) = \sum_{i=1}^{\infty} v_n(f, e_i).$$

Свойство 4. Для всякой константы  $c$   $v_n(f + c, e) = v_n(f, e)$ .

Свойство 5. Если  $e = I_n$  есть  $n$ -мерный куб, то функционал  $v_n(f, I_n)$  полунепрерывен снизу (см. теорему 27).

Свойство 6. Пусть  $e$  и  $e'$  суть конгруэнтные  $A$ -множества, а  $\omega$  — преобразование, осуществляющее конгруэнцию этих множеств ( $e' = \omega(e)$ ). Тогда  $v_n(f, e) = v_n[f(\omega), e']$ .

**Свойство 7.** Если  $e = J_n$  —  $n$ -мерный единичный куб из  $E_n$  и  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$  — непрерывная функция, определённая на  $J_n$ , то  $v_n(f, J_n) = 1$ .

**Свойство 8.** Если  $e = I_n$  —  $n$ -мерный куб из  $E_n$ , а  $f(x_1, \dots, x_n)$  и  $g(x_1, \dots, x_n)$  — непрерывные функции, определённые на  $I_n$ , то

$$v_n(f+g, I_n) \leq v_n(f, I_n) + v_n(g, I_n).$$

Из сформулированных свойств 1—8 мы докажем лишь 3 и 8.

**Доказательство свойства 3.** Так как  $f(x)$  — однозначная непрерывная функция, то почти для всякого  $t$   $m^n(e_t) = 0$  (см. лемму 22 § 18), где  $e_t$  — множество уровня функции  $f(x)$ . Но тогда  $v_n(e_t) = m^n(e_t) = 0$  (см. теорему 22 § 16). Следовательно, и  $v_n(e_t \cap e_i) = 0$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). Отсюда получаем (см. теорему 19 § 12), что попарно не пересекающиеся множества  $e_t \cap e_i$  измеримы  $v_{n-1}$ . Следовательно (свойство 4 § 13),

$$v_{n-1}(e_t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_{n-1}(e_t \cap e_i).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} v_n(f, e) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v_{n-1}(e_t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v_{n-1}(e_t \cap e_i) \right\} dt = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{n-1}(e_t \cap e_i) dt = \sum_{i=1}^{\infty} v_n(f, e_i). \end{aligned}$$

Докажем теперь свойство 8. В силу теоремы 15, определения  $v_1(f, e)$ , теоремы Банаха (теорема 5) и свойства 3 § 1 (при  $k = n$  и  $l = 0$ ) имеем:

$$\begin{aligned} v_n(f+g, I_n) &= \frac{1}{d_{n-1}^n} \int_{\Omega_{n-1}^n} v_1(f+g, I_n \cap \beta_1) d\mu_{\Omega_{n-1}^n} = \\ &= \frac{1}{d_{n-1}^n} \int_{\Omega_{n-1}^n} v(f+g, I_n \cap \beta_1) d\mu_{\Omega_{n-1}^n} \leq \\ &\leq \frac{1}{d_{n-1}^n} \int_{\Omega_{n-1}^n} [v(f, I_n \cap \beta_1) + v(g, I_n \cap \beta_1)] d\mu_{\Omega_{n-1}^n} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{d_{n-1}^n} \int_{\Omega_{n-1}^n} [v_1(f, I_n \cap \beta_1) + v_1(g, I_n \cap \beta_1)] d\mu_{\Omega_{n-1}^n} = \\
 &= \frac{1}{d_{n-1}^n} \int_{\Omega_{n-1}^n} v_1(f, I_n \cap \beta_1) d\mu_{\Omega_{n-1}^n} + \\
 &+ \frac{1}{d_{n-1}^n} \int_{\Omega_{n-1}^n} v_1(g, I_n \cap \beta_1) d\mu_{\Omega_{n-1}^n} = v_n(f, I_n) + v_n(g, I_n),
 \end{aligned}$$

т. е.  $v_n(f+g, I_n) \leq v_n(f, I_n) + v_n(g, I_n)$ .  
Утверждение 7 доказано.

Замечание. Отметим, что утверждения 1—8 имеют место для произвольной измеримой  $(v_n)$  функции  $f(x)$ .

## § 22. Ещё три определения старшей вариации

Понятия метрической теории функций возникают двумя путями. Вначале обычно появляются конструктивные определения таких понятий, а затем, после того как выясняется плодотворность этих понятий, их пытаются ввести аксиоматически.

Так оказалось и со старшей вариацией функции многих переменных. За короткое время появилось несколько конструктивных определений этого понятия, наиболее естественные из которых приводят в конечном счёте к одному и тому же. Здесь мы остановимся на двух таких определениях.

Определение 16 (А. С. Кронрада). Пусть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  есть непрерывная функция, определённая на некотором борелевском подмножестве  $B$   $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  ( $n$  произвольно),  $e_t$  — множество уровня  $t$  этой функции,  $h_{n-1}(e_t)$  — гиперплощадь, или  $(n-1)$ -мерная мера множества  $e_t$  (по Хаусдорфу) \*). Р. А. Минлосом [5]

\*) Система  $n$ -мерных замкнутых шаров  $\sigma_i$  с радиусом  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) называется  $\epsilon$ -покрытием множества  $e \subset E_n$ , если  $r_i < \epsilon$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) и  $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \supset e$ .

Обозначим через  $h_{n-1}^{n-1}(e)$  нижнюю грань величины  $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_{n-1} r_i^{n-1}$  (где  $\mathcal{E}_{n-1}$  есть  $(n-1)$ -мерная мера Лебега  $(n-1)$ -мерного шара

доказано, что  $h_{n-1}(e_t)$  как функция от  $t$  измерима по Лебегу.

$$\text{Функционал } w^n(f) = w^n(f, B) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{n-1}(e_t) dt$$

А. С. Кронрод [3] называет *n-мерной* (плоской при  $n = 2$ ) *вариацией функции*  $f(x)$  на множестве  $B$ .

Определение 17 (Р. А. Минлоса). Пусть  $e$  есть произвольное подмножество  $(n+1)$ -мерного евклидова пространства  $E_{n+1}$ ,  $T$ —некоторая прямая из  $E_{n+1}$ ,  $E_n$ — $n$ -мерное подпространство пространства  $E_{n+1}$ , ортогональное прямой  $T$ .

Цилиндрическим телом  $C_t(d, h)$  назовём максимальное подмножество пространства  $E_{n+1}$ , проектирующееся на прямую  $T$  в отрезок длины  $h$ , а на  $E_n$ —в  $n$ -мерный замкнутый шар радиуса  $r$ . Систему цилиндрических тел  $C_t^i = \{C_t^i(r_i, h_i)\}$  ( $i = -1, 2, \dots$ ) мы назовём  $\varepsilon$ -покрытием множества  $e$  цилиндрическими телами, если  $e \subset \sum C_t^i(r_i, h_i)$  и  $r_i < \varepsilon$ ,  $h_i < \varepsilon$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Положим  $\mu_\varepsilon^{(n)}(C_t^i) = \sum \mathcal{E}_{n-1} h_i r_i^{n-1}$ , где  $\mathcal{E}_{n-1}$  есть  $(n-1)$ -мерная мера Лебега от  $(n-1)$ -мерного шара единичного радиуса. Обозначим через  $\mu_\varepsilon^{(n)}(e)$  нижнюю грань  $\mu_\varepsilon^{(n)}(C_t^e)$  по всевозможным  $\varepsilon$ -покрытиям  $C_t^e$  множества  $e$  цилиндрическими телами ( $\varepsilon$  фиксировано).

Ясно, что величина  $\mu_\varepsilon^{(n)}(e)$  как функция от  $\varepsilon$  не убывает при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и ограничена снизу. Величину  $\mu^{(n)}(e) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon^{(n)}(e)$

Р. А. Минлос называет *цилиндрической мерой* множества  $e$  относительно прямой  $T$  [5].

Пусть теперь  $F$  есть график некоторой функции, определённой на множестве  $e$  пространства  $E_n$  (прямая  $T$  принимается за ось значений функции  $f(x)$ ). Тогда величина  $\mu^{(n)}(f, e) = \mu^{(n)}(F)$  называется *цилиндрической мерой функции*  $f(x)$  на множестве  $e$ .

---

единичного радиуса) по всевозможным  $\varepsilon$ -покрытиям ( $\varepsilon$  фиксировано). Так как при уменьшении  $\varepsilon$  совокупность  $\varepsilon$ -покрытий сужается (вследствие чего  $h_\varepsilon^{n-1}(e)$  не убывает при уменьшении  $\varepsilon$ ), то  $h_\varepsilon^{n-1}(e)$ , будучи неубывающей функцией, имеет предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Число  $h_{n-1}(e) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon^{n-1}(e)$  называется *гиперплощадью* множества  $e$  (по Хаусдорфу) [9].

Теорема 29 (Р. А. Минлоса). Пусть  $f(x)$  есть непрерывная функция, определённая на борелевском подмножестве  $B$  пространства  $E_n$ . Тогда

$$w^n(f, B) = \mu^{(n)}(f, B).$$

Доказательство этой теоремы см. [5].

Далее мы покажем, что определённые здесь вариации А. С. Кронрада и Р. А. Минлоса в наиболее естественных случаях совпадают со старшей вариацией  $v_n$ . Это мы получим с помощью аксиоматического определения старшей вариации.

Определение 18 (Е. В. Гливенко). Пусть  $w_a(f, e)$  есть функционал, зависящий от множества  $e$  и функции  $f(x)$ , определённой на  $e$ , заданный для всех множеств  $e \subset I_n$  типа  $F_\sigma$  и всех непрерывных на  $I_n$  функциях. Функционал  $w_a(f, e)$  мы будем называть аксиоматической вариацией, если он удовлетворяет следующим аксиомам:

1.  $w_a(f, e) \geq 0$  (допускается  $w_a(f, e) = +\infty$ ).
2.  $w_a(c \cdot f, e) = |c| w_a(f, e)$ , где  $c$  — любое действительное число.

3. Пусть  $e = \sum_{i=1}^{\infty} e_i$ , причём  $e_i \cap e_j = 0$  при  $i \neq j$  и все  $e_i$  суть множества типа  $F_\sigma$ . Тогда

$$w_a(f, e) = \sum_{i=1}^{\infty} w_a(f, e_i).$$

4.  $w_a(f + c, e) = w_a(f, e)$ , где  $c$  — любое действительное число.

5. Пусть  $G \subset I_n$  — открытое множество и  $\{f_i(x)\}$  — равномерно сходящаяся на  $G$  последовательность функций. Тогда

$$w_a[(\lim_{i \rightarrow \infty} f_i), G] \leq \lim_{i \rightarrow \infty} w_a(f_i, G).$$

6. Пусть множество  $e'$  конгруэнтно множеству  $e$ . Положим  $\varphi(x') = f(x)$ , где  $x'$  и  $x$  — соответственные точки при отображении, осуществляющем конгруэнцию  $e$  и  $e'$ .

7. Пусть  $f(x) = \varphi(x)$ , если  $x \in e$ , тогда

$$w_a(f, e) = w_a(\varphi, e).$$

8. Пусть  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$ . Тогда

$$w_a(f, I_n) = 1.$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 30** (Е. В. Глиденко). Для функций  $f(x)$ , определённых и непрерывных на замкнутом кубе  $I_n$ , аксиоматическая вариация  $w_a(f, I_n)$  совпадает с  $n$ -мерной вариацией  $w^n(f, I_n)$ .

Доказательство этой теоремы см. [16].

Из последней теоремы и результатов предыдущего параграфа, получаем следующее.

**Теорема 31.** Пусть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  есть непрерывная функция, определённая на  $n$ -мерном замкнутом кубе  $I_n$  пространства  $E_n$ . Тогда старшая вариация  $v_n(f, I_n)$ ,  $n$ -мерная вариация  $w^n(f, I_n)$  и цилиндрическая мера  $\mu^{(n)}(f, I_n)$  функции  $f(x)$  попарно численно равны

$$v_n(f, I_n) = w^n(f, I_n) = \mu^{(n)}(f, I_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Заметим, что теорему 31 нельзя распространить на класс замкнутых множеств. Существуют такое замкнутое множество  $e_0$ , лежащее в  $I_n$ , и такая непрерывная функция  $f_0(x)$ , определённая на  $e_0$ , что  $v_n(f_0, e_0) = 0$ , а  $w^n(f_0, e_0) = +\infty$ . Множество  $e_0$  строится так же, как множество Меньшова (см. § 15), и представляет собой теоретико-множественную сумму континуума замкнутых множеств  $e_0'$  таких, что  $v_{n-1}(e_0') = 0$ , а мера Хаусдорфа  $h_{n-1}(e_0') = +\infty$ . Множества  $e_0'$  объявляются уровнями непрерывной функции  $f_0(x)$ .

### § 23. Вычисление старшей вариации функции

Докажем следующее:

**Теорема 32.** Пусть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  есть функция, непрерывно дифференцируемая на замкнутом кубе  $I_n$ . Тогда

$$v_n(f, I_n) = \int_{I_n} |\operatorname{grad} f(x)| dm^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

**Доказательство.** Докажем теорему 32 с помощью индукции по числу  $n$ .

Пусть  $y = f(x)$  есть непрерывно дифференцируемая на отрезке  $\rho = [a, b]$  функция одного переменного  $x$ .

Так как функция  $f(x)$ , будучи непрерывно дифференцируемой, абсолютно непрерывна, то в силу свойств изменения функции  $v(f, e)$  (см. § 1) и в силу определения  $v_1(f, e)$  получаем:

$$v_1(f) = \int_a^b \left| \frac{df}{dx} \right| dx.$$

Предположим, что для всякой функции, определённой и дифференцируемой на выпуклой области  $\sigma_{n+1} \subset E_{n-1}$ , имеет место равенство

$$v_{n-1}(f, \sigma_{n-1}) = c'_{n-1} \int_{\sigma_{n-1}} |\operatorname{grad} f(x_1, \dots, x_{n-1})| dx_1 \dots dx_{n-1},$$

где  $c'_{n-1}$  есть константа, зависящая лишь от  $n$  и не зависящая от  $f(x)$ .

Пусть  $f(y) = f(y_1, \dots, y_n)$  есть функция, определённая и дифференцируемая на  $n$ -мерной замкнутой выпуклой области  $\sigma_n$  пространства  $E_n$ , а  $O, S_{n-1}, r_1, x, \beta_{n-1}(r_1, x)$  — набор объектов, необходимый для индуктивного определения вариаций функции (см. теорему 12).

Пусть, далее,  $\sigma_{n-1}(r_1, x)$  есть общая часть множеств  $\sigma_n$  и  $\beta_{n-1}(r_1, x)$ , а  $f_{r_1, x}(y_1, \dots, y_{n-1}) = f_{r_1, x}(y)$  — та же функция  $f(y)$ , но рассматриваемая уже лишь на множестве  $\sigma_{n-1}(r_1, x)$ . Ясно, что  $\sigma_{n-1}(r_1, x)$  есть замкнутая выпуклая область, а  $f_{r_1, x}(y)$  — дифференцируемая на этой области функция. Тогда в силу предположения индукции

$$v_{n-1}(f_{r_1, x}) = c'_{n-1} \int_{\sigma_{n-1}(r_1, x)} |\operatorname{grad} f_{r_1, x}(y)| dm^{n-1}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} v_n(f, \sigma_n) &= \frac{d_{n-2}^{n-1}}{d_n^n} \int_{S_{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{n-1}(f, \sigma_n \cap \beta_{n-1}(r_1, x)) dx d\mu_{S_{n-1}} = \\ &= \frac{d_{n-2}^{n-1}}{d_n^n} \int_{S_{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{n-1}(f_{r_1, x}, \sigma_{n-1}(r_1, x)) dx d\mu_{S_{n-1}} = \\ &= \frac{d_{n-2}^{n-1} c'_{n-1}}{d_n^n} \int_{S_{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\sigma_{n-1}(r_1, x)} |\operatorname{grad} f_{r_1, x}(y)| dm^{n-1} dx d\mu_{S_{n-1}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d_{n-2}^{n-1} c'_{n-1}}{d_n^n} \int_{S_{n-1}} \int_{\sigma_n} |\operatorname{grad} f_{r_1, x}(y)| dm^n d\mu_{S_{n-1}} = \\
 &= \frac{d_{n-2}^{n-1} c'_{n-1}}{d_n^n} \int_{\sigma_n} \int_{S_n} |\operatorname{grad} f_{r_1, x}(y)| d\mu_{S_{n-1}} dm^n = \\
 &= \frac{d_{n-2}^{n-1} c'_{n-1}}{d_n^n} \int_{\sigma_n} \int_{S_{n-1}} |\operatorname{grad} f(y)| |\cos \alpha(y, r_1, x)| d\mu_{S_{n-1}} dm^n,
 \end{aligned}$$

так как  $|\operatorname{grad} f_{r_1, x}(y)| = |\operatorname{grad} f(y)| |\cos \alpha(y, r_1, x)|$ , где  $\alpha(y, r_1, x) = \alpha(y, r_1)$  есть угол, образуемый вектором  $\operatorname{grad} f(y)$  с гиперплоскостью  $\beta_{n-1}(r_1, x)$  пространства  $E_n$ .

Положим  $A_n = \int_{S_{n-1}} |\cos \alpha(y, r_1)| d\mu_{S_{n-1}}$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 v_n(f, \sigma_n) &= \frac{d_{n-2}^{n-1} c'_{n-1}}{d_n^n} \int_{\sigma_n} \int_{S_{n-1}} |\operatorname{grad} f(y)| |\cos \alpha(y, r_1)| d\mu_{S_{n-1}} dm^n = \\
 &= \frac{d_{n-2}^{n-1} c'_{n-1}}{d_n^n} \int_{\sigma_n} |\operatorname{grad} f(y)| \int_{S_{n-1}} |\cos \alpha(y, r_1)| d\mu_{S_{n-1}} dm^n = \\
 &= \frac{d_{n-2}^{n-1} c'_{n-1}}{d_n^n} A_n \int_{\sigma_n} |\operatorname{grad} f(y)| dm^n = c'_n \int_{\sigma_n} |\operatorname{grad} f(y)| dm^n,
 \end{aligned}$$

где  $c'_n$  есть константа, зависящая лишь от  $n$ .

Таким образом, для всякой выпуклой замкнутой области  $\sigma_n$  и всякой  $f(y)$ , непрерывно дифференцируемой в каждой точке области  $\sigma_n$ , имеем:

$$v_n(f, \sigma_n) = c'_n \int_{\sigma_n} |\operatorname{grad} f(x)| dx_1 \dots dx_n,$$

где  $c'_n$  не зависит от  $f(x)$  и от  $\sigma_n$ .

Покажем, что  $c'_n = 1$ . Для этого за область  $\sigma_n$  примем единичный куб  $I_n$ , а в качестве функции  $f(y)$  рассмотрим функцию  $\varphi(y_1, \dots, y_n) = y_1$ . Тогда согласно только что доказанному

$$v_n(\varphi, I_n) = c'_n \int_{I_n} |\operatorname{grad} \varphi(y)| dm^n,$$

где  $c'_n$  не зависит от функции и области её определения. Но так как всякое множество уровня  $e_t$  для  $0 \leq t \leq 1$  функции  $\varphi(y_1 \dots y_n) = y_1$  есть  $(n-1)$ -мерный единичный куб, то по теореме 14  $v_n(\varphi, I_n) = 1$ . В то же время  $\int_{I_n} |\operatorname{grad} \varphi(x)| dm^n = 1$ . Следовательно,  $c'_n = 1$  для всех  $n$ .

Теорема 32 доказана.

А. С. Кронродом доказано следующее [3].

Теорема 33 (А. С. Кронрода). Пусть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  есть функция, определённая на  $n$ -мерном замкнутом кубе  $I_n$  и имеющая на этом кубе конечную  $n$ -мерную вариацию  $w^n(f, I_n)$  (см. определение 15). Тогда почти во всякой точке  $x$  куба  $I_n$  функция  $f(x)$  имеет полный асимптотический дифференциал, и если  $f(x)$  абсолютно непрерывна (в смысле  $n$ -мерной вариации) на кубе  $I_n^*$ , то

$$w^n(f, I_n) = \int_{I_n} |\operatorname{as} \cdot \operatorname{grad} f(x)| dm^{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

С помощью теорем 31 и 33 теорему 32 можно усилить следующим образом.

Теорема 34. Пусть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  есть функция, определённая на  $n$ -мерном замкнутом кубе  $I_n$  и имеющая на этом кубе конечную старшую вариацию. Тогда почти во всякой точке  $x$  куба  $I_n$  функция  $f(x)$  имеет полный асимптотический дифференциал, и если  $f(x)$  абсолютно непрерывна в смысле рассматриваемой вариации  $v_n(f, I_n)$ \*) на кубе  $I_n$ , то старшая вариация этой функции равна

$$v_n(f, I_n) = \int_{I_n} |\operatorname{as} \cdot \operatorname{grad} f(x)| dm^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

На доказательство этой теоремы мы останавливаться не будем.

---

\*) Функция  $f(x)$  называется абсолютно непрерывной на  $I_n$  в смысле вариации  $v^*(f, e)$ , если она такова, что для всякого подмножества  $e$  куба  $I_n$ , имеющего нулевую меру ( $m^n$ ) Лебега, имеет место равенство  $v^*(f, e) = 0$ .

---

## ГЛАВА 5

### СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

В этой главе мы сформулируем и докажем некоторые теоремы относительно свойств функции, вариации всех порядков от которой конечны. Такие функции мы будем называть функциями *ограниченной вариации*. Мы покажем, что функция ограниченной вариации представима в виде разности двух монотонных функций, что функция ограниченной вариации почти всюду дифференцируема и что многократный ряд Фурье, соответствующий такой функции, почти всюду к ней сходится. Для этого познакомимся прежде с понятием одномерного дерева, введённым А. С. Кронродом. Это понятие в значительной степени облегчит наши рассмотрения в этой и следующей главах.

#### § 24. Одномерное дерево функции

Определение 19 (А. С. Кронрод). Пусть  $t = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  есть непрерывная функция, определённая на  $n$ -мерном замкнутом кубе  $I_n$  ( $n$  произвольно). Одномерным деревом  $T_f$  функции  $f(x)$  назовём топологическое пространство, элементами которого являются компоненты множества уровня, а топология вводится следующим образом: окрестностью точки дерева называется множество компонент, каждая из которых целиком лежит в некоторой окрестности (в смысле окрестности в кубе  $I_n$ ) исходной компоненты. При этом получается естественное отображение  $\tilde{f}$  области задания  $I_n$  функции  $f(x)$  на дерево: каждой точке  $a$  из  $I_n$  ставится в соответствие точка дерева — компонента множества уровня функции  $f(x)$ , содержащая точку  $a$ . Функции  $f(x)$  ставится в соответствие функция  $f^*(\eta)$ , определённая на дереве и равная в каждой точке дерева  $\eta$  значению функции  $f(x)$ .

в точках прообраза точки  $\eta$  при отображении  $\tilde{f}$ . Концами одномерного дерева назовём точки дерева, полные прообразы которых не разделяют области задания функции.

Сформулируем некоторые свойства пространства  $T_f$ , доказанные А. С. Кронродом [3].

**Свойство 1.** Одномерное дерево  $T_f$  есть локально связанный одномерный континуум ( $\dim T_f = 1$ ), являющийся непрерывным образом области задания функции при отображении  $\tilde{f}$ .

**Свойство 2.** Любые две точки дерева  $T_f$  можно соединить простой дугой \*) из  $T_f$  и притом единственной.

Прообраз при отображении  $\tilde{f}$  всякой внутренней точки этой простой дуги разделяет в кубе  $I_n$  прообразы концов этой дуги, и, кроме того, прообразы двух любых точек простой дуги разделены прообразом всякой точки, лежащей между ними. Если ни один из прообразов концов простой дуги  $l$  дерева  $T_f$  не отделяет в области задания функции прообраз дугого конца от бесконечности, то на  $l$  существует хотя бы одна точка ветвления \*\*) дерева  $T_f$ .

**Свойство 3.** Прообраз при отображении  $\tilde{f}$  точки ветвления дерева  $T_f$  разделяет куб  $I_n$  более чем на две части.

**Свойство 4.** Функция  $f^*(\eta)$  не постоянна ни на какой простой дуге, принадлежащей дереву.

**Свойство 5.** Одномерное дерево  $T_f$  представимо в виде суммы счётного множества простых дуг, попарно пересекающихся не более чем в одной точке, концы каждой из которых являются концами дерева, плюс некоторое множество концов дерева. Такое разложение одномерного дерева функции называется кононическим.

**Лемма 30** (А. С. Кронрода). *Пусть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  есть непрерывная функция, определённая на  $n$ -мерном замкнутом кубе  $I_n$ ,  $\alpha_0$  — некоторая компонента некоторого множества уровня этой функции,  $\alpha_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) — последовательность компонент множеств уровня такая, что расстояние  $\rho(\alpha_i, \alpha_0) \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ .*

\*) Простой дугой называется взаимно однозначный и взаимно непрерывный образ отрезка.

\*\*) Точка  $a$  называется точкой континуума  $K$ , если существуют три подконтинуума континуума  $K$  такие, что никакой из них не сводится к точке и их попарные пересечения равны  $a$ .

Тогда для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $i(\varepsilon)$  такое, что при всяком  $i > i(\varepsilon)$  соответствующая компонента  $\alpha_i$  целиком лежит внутри  $\varepsilon$ -окрестности компоненты  $\alpha_0$ .

**Доказательство.** Предположим, что утверждение сформулированной леммы неверно. Тогда существует  $\varepsilon > 0$ , для которого можно указать сколь угодно большое число  $i$  такое, что теоретико-множественная разность множества  $\alpha_i$  и  $\varepsilon$ -окрестности  $\varepsilon(\alpha_0)$  компоненты  $\alpha_0$  не пуста:

$$\alpha_i - \varepsilon(\alpha_0) \neq 0 \quad (i = i_1, i_2, \dots).$$

Так как  $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(\alpha_i, \alpha_0) = 0$ , то существует последовательность точек  $a_{k_l} (k = k_1, k_2, \dots, k_l, \dots + \infty, a_{k_l} \in \alpha_{k_l}, l = 1, 2, \dots)$ , сходящаяся к некоторой точке  $a_0$  из  $\alpha_0$ .

Пусть  $\alpha$  есть топологический предел последовательности множеств  $\alpha_{k_l} (l = 1, 2, \dots)$ . Ясно, что множество  $\alpha \ni a_0$  связное и содержит точки из  $\alpha_0$ , причём  $\alpha - \varepsilon(\alpha_0) \neq 0$ . Так как множества  $\alpha$  и  $\alpha_0$  связные и имеют общую точку  $a_0$ , то множество  $\alpha + \alpha_0$  связное.

В то же время в силу непрерывности функции  $f(x)$  имеем:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f^*(a_{k_l}) = f^*(\alpha) = \lim_{l \rightarrow \infty} f(a_{k_l}) = f(a_0) = f^*(\alpha_0),$$

т. е. на связном множестве  $\alpha + \alpha_0$  функция  $f(x)$  постоянна. А тогда  $\alpha \subset \alpha_0$  в силу определения компоненты множества уровня, следовательно,  $\alpha - \varepsilon(\alpha_0) = 0$ , что противоречит вышедоказанному. Следовательно, предположение о несправедливости леммы 30 неверно.

Лемма 30 доказана.

**Лемма 31.** Пусть  $f(x)$  есть определённая и непрерывно дифференцируемая на  $I_n$  функция, а  $l$  — простая дуга из  $T_f$ , никакая внутренняя точка которой не является точкой ветвления континуума  $T_f$ . Тогда, если соответствующая функция  $f(x)$  функция  $f^*(\eta)$  (см. определение 19) не монотонна на  $l$ , то на  $l$  существует внутренняя точка  $a$  такая, что  $|\operatorname{grad} f(x)| = 0$  для всякой точки  $x$  из  $I_n$ , принадлежащей прообразу точки  $a$  при отображении  $f$ .

**Доказательство.** Так как функция  $f^*(\eta)$  не монотонна на дуге  $l$ , то существует такая внутренняя точка  $a$  дуги  $l$  и такая её окрестность  $\varepsilon(a)$  (окрестность в смысле топологии

на дереве), не содержащая концов дуги  $l$ , что либо  $f^*(\eta) \leq f^*(l)$  для всякой точки  $\eta$  из  $\varepsilon(a) \cap l$ , либо  $f^*(\eta) \geq f^*(a) \geq f^*(l)$  для всякой точки  $\eta$  из  $\varepsilon(a) \cap l$ , т. е.  $f^*(\eta)$  как функция, рассматриваемая лишь на дуге  $l$ , достигает в точке  $a$  либо своего локального максимума, либо локального минимума. Для определенности мы будем считать, что

$$f^*(\eta) \leq f^*(a) \quad (1)$$

для всякой точки  $\eta$  из  $\varepsilon(a) \cap l$ .

Пусть  $\alpha$  есть компонента множества уровня, являющаяся прообразом точки  $a$  из  $l$  при отображении  $\tilde{f}$ . Покажем, что  $|\text{grad } f(x)| = 0$  для всякой точки  $x \in \alpha$ . Допустим, что это не так. Тогда в  $\alpha$  существует точка  $x_0$  такая, что  $|\text{grad } f(x_0)| > 0$ . А тогда, очевидно, в кубе  $I_n$  существует последовательность точек  $y_i (i = 1, 2, \dots)$ , сходящаяся к точке  $x_0$  и такая, что  $t_i = f(y_i) > f(x_0) (i = 1, 2, \dots)$ .

Пусть  $\alpha_i$  есть компонента множества уровня  $e_{t_i}$  функции  $f(x)$ , содержащая точку  $y_i$ , а  $a_i = \tilde{f}(\alpha_i)$  — образ множества  $\alpha_i$  при отображении  $\tilde{f}$  куба  $I_n$  на дерево  $T_f (i = 1, 2, \dots)$ . Так как  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = x_0 \in \alpha$ , то в силу леммы 30 и определения топологии на дереве  $T_f$  последовательность точек  $a_i (i = 1, 2, \dots)$  дерева  $T_f$  сходится на  $T_f$  к точке  $a$ , и при этом  $f^*(a_i) > f(a)$  для всех  $i$  (ибо  $f(y_i) > f(x_0)$  для всех  $i$ ). Из последнего и (1) следует, что существует  $i_0$  такое, что при  $i > i_0$  соответствующие точки  $a_i, a_{i+1}, \dots$  не принадлежат множеству  $\varepsilon(a) \cap l$  и содержатся в окрестности  $\varepsilon(a)$  точки  $a$ . Так как  $T_f$  есть локально связный континуум (свойство 1 § 25), то существует  $i_1 > i_0$  такое, что при  $i \geq i_1$  соответствующую точку  $a_i$  можно соединить в  $T_f$  с точкой  $a$  локально связным подконтинуумом, принадлежащим  $\varepsilon(a)$ . А тогда из того, что всякие две точки локально связного континуума можно соединить простой дугой, принадлежащей этому континууму, следует, что в  $T_f$  существует простая дуга  $L_{a_{i_1}, a}$  с концами в точках  $a_{i_1}$  и  $a (i \geq i_1)$ , лежащая в  $\varepsilon(a)$ . Пусть  $i_2 > i_1 > i_0$  есть целое число, а  $g_{i_2}$  — общая часть дуг  $l$  и  $L_{a_{i_1}, a}$ . Ясно, что множество  $g_{i_2} \supset a$  не пусто. Пусть  $b_1$  и  $b_2$  суть концы дуги  $l$ , а  $b_0$  — «ближайшая» к точке  $a_{i_2}$  точка множества  $g_{i_2}$ , т. е.  $b_0$  есть такая точка множества  $g_{i_2}$ , что никакая другая

точка из  $g_{i_2}$  не разделяет на дуге  $L_{a_{i_2}}$  а точек  $a_{i_2}$  и  $b_0$ . Нетрудно убедиться, что дуги  $L_{a_{i_0}, b_0}$ ,  $L_{b_1, b_0}$  и  $L_{b_2, b_0}$  имеют общей частью точку  $b_0$  и только её, т. е.  $b_0 \in \varepsilon(a) \cap l$  есть внутренняя точка дуги  $l$ , являющаяся точкой ветвления континуума  $T_f$ , но это противоречит условиям леммы 31. Следовательно, компонента  $\alpha$  такова, что для всякой  $x \subset \alpha$   $|\operatorname{grad} f(x)| = 0$ .

## § 25. Разложение функции ограниченной вариации в разность двух монотонных функций

Определение 20 (А. С. Кронрода). Пусть  $f(x)$  есть функция точки  $x$ , определённая на  $n$ -мерном замкнутом кубе  $I_n$ ,  $O$  — некоторая точка из  $I_n$ ,  $e_t$  — множество уровня  $t$  функции  $f(x)$ . Множество  $e_t$  уровня  $t$  функции  $f(x)$  называется *уровнем роста функции  $f(x)$  в кубе  $I_n$  относительно точки  $O$* , если

1) для всякой точки  $x'$  из  $I_n$ , не отделённой (в кубе  $I_n$ ) множеством  $e_t$  от точки  $O$ , и  $x \subset e_t$   $f(x') < f(x)$ ;

2) для всякой точки  $x''$ , не принадлежащей множеству  $e_t$  и отделённой (в кубе  $I_n$ ) множеством  $e_t$  от точки  $O$ , и  $x \subset e_t$   $f(x'') > f(x)$ .

Функция  $f(x)$  называется *монотонно возрастающей* (в кубе  $I_n$ ) *относительно точки  $O$* , если для всякого  $t$  соответствующее этой функции множество  $e_t$  уровня  $t$  является уровнем роста функции  $f(x)$  (в кубе  $I_n$ ) относительно точки  $O$ .

*Монотонное убывание, невозрастание и неубывание функции относительно точки* определяются аналогично.

В этом параграфе мы докажем следующее.

Теорема 35 (А. С. Кронрода). Пусть  $f(x)$  есть непрерывная на  $I_n$  функция, для которой  $v_1(f, I_n) < \infty$ . Тогда для всякой точки  $O$  из  $I_n$  существуют две непрерывные на  $I_n$  функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , монотонно возрастающие на  $I_n$  относительно точки  $O$ , такие, что  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ .

Перейдём к доказательству этой теоремы.

Определение 21. Пусть  $l$  есть ориентированная простая дуга,  $\tau$  — произвольная точка этой дуги,  $f(\tau)$  — функция точки  $\tau$ , определённая на всей дуге  $l$ ,  $a_i (i=1, 2, \dots, m)$  — система точек из  $l$ , перенумерованная так, что при движении точки  $a_i$  по дуге  $l$  в положительном направлении (в смысле

фиксированной на дуге  $l$  ориентации) индекс  $i$  монотонно пробегает целочисленные значения от 1 до  $m$ .

Положим

$$f^+(a_i) = \begin{cases} f(a_{i+1}) - f(a_i) & \text{при } f(a_{i+1}) > f(a_i), \\ 0 & \text{при } f(a_{i+1}) \leq f(a_i) \end{cases}$$

и

$$f^-(a_i) = \begin{cases} f(a_i) - f(a_{i+1}) & \text{при } f(a_{i+1}) < f(a_i), \\ 0 & \text{при } f(a_{i+1}) \geq f(a_i) \quad (i = 1, \dots, m). \end{cases}$$

Число  $v^+(f, l) = \sup_{a_1 \dots a_m, m} \sum_{i=1}^{m-1} f^+(a_i)$ , где верхняя грань берётся по всевозможным  $m$  и всевозможным наборам точек  $a_1, \dots, a_m$ , называется *положительной* (относительно фиксированной на дуге  $l$  ориентации) *вариацией* функции  $f(\tau)$  на дуге  $l$ . А число  $v^-(f, l) = \sup_{a_1 \dots a_m, m} \sum_{i=1}^{m-1} f^-(a_i)$  называется *отрицательной* *вариацией* функции  $f(\tau)$  на дуге  $l$ .

Ясно, что

$$\begin{aligned} v(f, l) &= \sup_{a_1 \dots a_m, m} \sum_{i=1}^{m-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| = \\ &= \sup_{a_1 \dots a_m, m} \sum_{i=1}^{m-1} [f^+(a_i) + f^-(a_i)], \end{aligned}$$

где  $v(f, l)$  — изменение (или вариация) функции  $f(\tau)$  на дуге  $l$  (см. определение 1).

**Лемма 32.** *Пусть  $l_{\tau_0, \tau_1}$  есть ориентированная простая дуга с концами  $\tau_0$  и  $\tau_1$  (направление от  $\tau_0$  к  $\tau_1$  положительно), а  $f(\tau)$  — непрерывная на  $l_{\tau_0, \tau_1}$  функция с вариацией  $v(f, l_{\tau_0, \tau_1}) < \infty$ . Тогда  $v^+(f, l_{\tau_0, \tau})$  и  $v^-(f, l_{\tau_0, \tau})$  (где  $l_{\tau_0, \tau}$  — отрезок дуги  $l_{\tau_0, \tau_1}$  с концами  $\tau_0$  и  $\tau$ ) как функции точки  $\tau \subset l$  непрерывны всюду на  $l$ , не убывают при движении точки  $\tau$  к  $\tau_1$  и*

$$f(\tau) \equiv f(\tau_0) + v^+(f, l_{\tau_0, \tau}) - v^-(f, l_{\tau_0, \tau}).$$

Доказательство этой леммы см. в [1]. Там сформулированное предложение доказывается для случая, когда  $l$  есть отрезок, но после очевидных обобщений этого доказательства оно проходит и для рассматриваемого случая.

Лемма 33. Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на  $I_n$ , а  $l_k$  ( $k = 1, 2, \dots, \mu$ ;  $\mu \leq \infty$ ) суть попарно не пересекающиеся простые дуги из  $T_r$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^{\mu} v(f^*, l_k) \leq v_1(f, I_n).$$

Доказательство. Пусть  $R$  есть отрезок. Так как  $l_k$  есть простая дуга, то по определению существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование  $\psi_k$  отрезка  $R$  на дугу  $l_k$ , переводящее концы отрезка  $R$  в концы дуги  $l_k$ . Положим

$$f_k^{**}(\rho) = f^*[\psi_k(\rho)] = f^*(\eta),$$

где  $\rho \in R$  и  $\eta = \psi_k(\rho) \in l_k$ .

Так как  $\psi_k$  есть гомеоморфизм, то функция  $f_k^{**}(\rho)$  однозначна и непрерывна на отрезке  $R$ . Ясно, что изменение  $v(f_k^{**}, R)$  функции  $f_k^{**}(\rho) = f^{**}(\psi_k(\eta))$  на отрезке  $R$  равно вариации  $v(f^*, l_k)$  функции  $f^*(\eta)$  на дуге  $l_k$ :  $v(f_k^{**}, R) = v(f^*, l_k)$ .

Пусть  $l_{kt}$  и  $R_{kt}$  суть множества уровня  $t$  функций  $f^*(\eta)$  и  $f_k^{**}(\rho) = f^*(\psi_k(\rho))$ .

В силу теоремы С. Банаха (см. свойство 5 § 1).

$$v(f_k^{**}, R) = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(R_{kt}) dt.$$

Отсюда, так как  $v_0(l_{kt}) = v_0(R_{kt})$  (ибо  $\psi_k$  — гомеоморфизм) и  $v(f_k^{**}, R) = v(f^*, l_k)$ , получаем:

$$v(f^*, l_k) = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(l_{kt}) dt,$$

т. е. теорема С. Банаха имеет место для всякой непрерывной функции, заданной на дуге.

Обозначим через  $e_k$  полный прообраз дуги  $l_k$  в  $I_n$  при отображении  $\tilde{f}$  ( $k = 1, 2, \dots, \mu$ ).

Пусть  $\bar{l}_t$  есть множество всех таких точек из  $l = \sum_{k=1}^{\mu} l_k$ , в каждой из которых функция  $f^*(\eta)$  принимает одно и то же

значение  $t$ , т. е.  $\bar{l}_t$  есть множество уровня функции  $f^*(\eta)$ , рассматриваемой лишь на  $I$ . Пусть, далее,  $\bar{e}_t$  есть множество уровня  $t$  функции  $f(x)$ , рассматриваемой лишь на множестве  $e = \sum_{k=1}^{\mu} e_k$ .

Ясно, что нулевая вариация  $v_0(\bar{l}_t) = \sum_{k=1}^{\mu} v_0(l_{kt})$  множества  $\bar{l}_t$  равна числу компонент множества  $\bar{e}_t$  ( $t$  произвольно), а тогда

$$v(f^*, I) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(\bar{l}_t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(\bar{e}_t) dt \leq v_1(f, I_n),$$

ибо  $v_0(\bar{e}_t) \leq v_0(e_t)$  для всех  $t$  ( $e_t$  — множество уровня  $t$  функции  $f(x)$ , определённой на  $I_n$ ) в силу построения множества  $\bar{e}_t$ .

Так как дуги  $l_k$  попарно не пересекаются, то

$$v(f^*, I) = \sum_{k=1}^{\mu} v(f^*, l_k).$$

А тогда  $\sum_{k=1}^{\mu} v(f^*, l_k) \leq v_1(f, I_n)$  доказано.

Пусть  $f(x)$  есть непрерывная на  $I_n$  функция,  $T_f$  — одномерное дерево этой функции,  $o$  — некоторая точка из  $I_n$ ,  $\tilde{o} = \tilde{f}(o)$  — образ на  $T_f$  точки  $o$  при отображении  $\tilde{f}$ ,  $x$  — произвольная точка из  $I_n$ , а  $\tilde{x} = \tilde{f}(x)$ . В силу свойства 2 § 25 точки  $\tilde{o}$  и  $\tilde{x}$  из  $T_f$  соединимы на  $T_f$  единственной простой дугой  $l_{\tilde{o}, \tilde{x}}$ .

Положим

$$f_1(x) = f(o) + v^+ [f, l_{\tilde{o}, \tilde{x}}],$$

$$f_2(x) = v^- [f^*, l_{\tilde{o}, \tilde{x}}],$$

где  $v^+ [f^*, l_{\tilde{o}, \tilde{x}}]$  и  $v^- [f^*, l_{\tilde{o}, \tilde{x}}]$  — соответственно положительная и отрицательная вариации функции  $f^*(\eta)$  на дуге  $l_{\tilde{o}, \tilde{x}}$  (за положительное направление на этой дуге принимается направление от  $\tilde{o}$  к  $\tilde{x}$ ).

**Лемма 34.** *Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $I_n$  и имеет на  $I_n$  конечную первую вариацию (см. определение 11), то соответствующие функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  непрерывны на  $I_n$ .*

Доказательство. Пусть  $x \in I_n$ , а  $\tilde{x} = \tilde{f}(x)$ . По определению

$$f_1(x) = f(o) + v^+ [f^*, l_{\tilde{o}, \tilde{x}}] \leq |f(o)| + v [f^*, l_{\tilde{o}, \tilde{x}}],$$

так как

$$v^+ [f^*, l_{\tilde{o}, \tilde{x}}] \leq v [f^*, l_{\tilde{o}, \tilde{x}}].$$

Так как  $f(x)$  непрерывна на  $I_n$  и, следовательно, равномерно на  $I_n$  ограничена некоторой константой  $C$  и так как  $v [f^*, l_{\tilde{o}, \tilde{x}}] \leq v_1 [f, I_n]$ , то

$$|f_1(x)| \leq |f(o)| + v^+ [f^*, l_{\tilde{o}, \tilde{x}}] \leq C + v_1 [f, I_n] = C_1 < \infty,$$

т. е.  $f_1(x)$  равномерно ограничена на  $I_n$  константой  $C_1$ .

Докажем теперь, что функция  $f_1(x)$  непрерывна в каждой точке из  $I_n$ . Допустим противное. Тогда в  $I_n$  существует последовательность точек  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), сходящаяся к точке  $x_0$ , такая, что последовательность чисел  $f_1(x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) имеет предел, но  $\lim_{i \rightarrow \infty} f_1(x_i) \neq f_1(x_0)$ . Положим  $\varepsilon_0 = |f_1(x_0) - \lim_{i \rightarrow \infty} f_1(x_i)| > 0$ . Пусть  $\alpha_i$  есть компонента множества уровня  $t_i = f(x_i)$  функции  $f(x)$ , содержащая точку  $x_i$ , а  $\tilde{x}_i = \tilde{f}(x_i)$  — образ точки  $x_i$  на  $T_f$  при отображении  $\tilde{f}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ).

В силу леммы 30 для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $i(\varepsilon)$  такое, что при  $i > i(\varepsilon)$  соответствующая компонента  $\alpha_i$  целиком лежит внутри  $\varepsilon(\alpha_0)$ , т. е. последовательность точек  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) на  $T_f$  сходится к  $\tilde{x}_0$ .

Положим  $f'_1(\eta) = f^*(\tilde{o}) + v^+ (f^* l_{\tilde{o}, \eta}) = f(\tilde{\eta})$ , где  $\eta = \tilde{f}(\tilde{x}_0)$ . В силу определения  $\varepsilon_0$  получаем:

$$|f'_1(\tilde{x}_0) - \lim_{i \rightarrow \infty} f'_1(\tilde{x}_i)| = \varepsilon_0 > 0. \quad (1)$$

Пусть  $l_{\tilde{x}_0 \tilde{x}_i}$  есть простая дуга из  $T_f$ , соединяющая на  $T_f$  точки  $\tilde{x}_0$  и  $\tilde{x}_i$ . Покажем, что  $f'_1(\eta)$  как функция точки  $\eta$ , рассматриваемая лишь на  $l_{\tilde{x}_0 \tilde{x}_i}$ , непрерывна на  $l_{\tilde{x}_0 \tilde{x}_i}$ .

Пусть  $\tilde{y}_i$  есть ближайшая (по дуге  $l_{\tilde{o}, \tilde{x}_0}$ ) к точке  $\tilde{o}$  точка из  $l_{\tilde{o}, \tilde{x}_0}$ , принадлежащая также  $l_{\tilde{x}_0 \tilde{x}_i}$ , а  $\eta$  — произвольная точка дуги  $l_{\tilde{x}_0 \tilde{x}_i}$ . Тогда дуга

$$l_{\tilde{o}, \tilde{y}_i} + l_{\tilde{y}_i \eta} = l(\eta)$$

является единственной простой дугой, соединяющей на  $T_f$  точки  $\tilde{o}$  и  $\eta \in l_{\tilde{x}_0 \tilde{x}_i}$ .

Из леммы 33 следует, что  $v(f^*, l_{\tilde{o}, \tilde{x}_0})$  и  $v(f^*, l_{\tilde{o}, \tilde{x}_i})$  не превосходят первой вариации  $v_1(f, I_n)$  функции  $f(x)$  на кубе  $I_n$ , которая конечна в силу предположения доказываемой леммы. А тогда в силу леммы 32

$$f'_1(\eta) = f(\tilde{o}) + v^+(f^*, l_{\tilde{o}, \eta})$$

как функция, рассматриваемая лишь на какой-нибудь одной из дуг  $l_{\tilde{o}, \tilde{x}_0}$  и  $l_{\tilde{o}, \tilde{x}_i}$ , непрерывна, а следовательно,  $f'_1(\eta)$  непрерывна на  $l_{\tilde{x}_0 \tilde{x}_i}$  как функция точки  $\eta \in l_{\tilde{x}_0 \tilde{x}_i}$ .

В силу (1) можно указать  $i$  такое, что при  $i \geqslant i_1$

$$|f'_1(x_0) - f'_1(x_i)| > \frac{1}{2} \varepsilon_0.$$

На дуге  $l_{\tilde{x}_0 \tilde{x}_{i_1}}$  из  $T_f$ , соединяющей точки  $\tilde{x}_0$  и  $\tilde{x}_{i_1}$ , можно фиксировать простую дугу  $l_1 \in l_{\tilde{x}_0 \tilde{x}_i}$ , не содержащую точки  $\tilde{x}_0$ , и такую, что разность значений функции  $f'_1(\eta)$  на концах этой дуги будет не менее чем  $\frac{1}{4} \varepsilon_0$ .

Пусть уже фиксированы числа  $i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1}$  и попарно не пересекающиеся простые дуги  $l_1, l_2, \dots, l_k$  из  $T_f$ , не содержащие точку  $\tilde{x}_0$ , и такие, что разность значений функции  $f'_1(\eta)$  на концах каждой из этих дуг не менее  $\frac{1}{4} \varepsilon_0$ .

Так как  $\sum_{p=1}^{k-1} l_p$  замкнуто, то существует окрестность  $\omega_k$  точки  $\tilde{x}_0$ , не содержащая точек из  $\sum_{p=1}^{k-1} l_p$ .

А так как  $T_f$  локально связно, то существует  $l_k > l_{k-1}$  такое, что точки  $\tilde{x}_0$  и  $\tilde{x}_{ik}$  соединены на  $T_f$  некоторым локально связным континуумом, лежащим в  $\omega_k$ , и, следовательно, существует простая дуга  $l_{\tilde{x}_0 \tilde{x}_{ik}}$  из  $T_f$ , соединяющая на  $T_f$  точки  $\tilde{x}_0$  и  $\tilde{x}_{ik}$  и принадлежащая окрестности  $\omega_k$ . Так как  $l_k > l_{k-1}$ , то в силу выбора чисел  $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}$

$$|f'_1(\tilde{x}_0) - f'_1(\tilde{x}_{ik})| > \frac{1}{2} \varepsilon_0.$$

А тогда в силу непрерывности функции  $f'_1(\eta)$  на  $l_{\tilde{x}_0 \tilde{x}_{ik}}$  можно фиксировать дугу  $l_k \in l_{\tilde{x}_i \tilde{x}_{ik}}$ , не содержащую точки  $x_0$  и такую, что разность значений функции  $f'_1(\eta)$  на концах этой дуги не менее  $\frac{1}{4} \varepsilon_0$ . Нетрудно проверить, что дуга  $l$  удовлетворяет условиям проводимой нами индукции.

Итак, на  $T_f$  мы фиксировали счётную систему простых дуг  $l_1, \dots, l_k$  таких, что разность значений функции  $f'_1(\eta)$  на концах каждой из этих дуг не менее  $\frac{1}{4} \varepsilon_0$ .

Пусть  $z_k$  есть некоторая точка из  $l_k$ ,  $y_k$  — ближайшая (по дуге  $l_{\tilde{o}, z_k}$ ) точка к  $\tilde{o}$  из  $l_{\tilde{o}, z_k}$ , принадлежащая также дуге  $l_k$ , а  $\eta$  — произвольная точка из  $l_k$ . Тогда дуга  $l_{\tilde{o}\eta} = l_{oy_k} + l_{y_k\eta}$  является единственной простой дугой, соединяющей на  $T_f$  точки  $o$  и  $\eta$  (см. свойство 2 § 24).

По определению

$$f'_1(\eta) = f(\tilde{o}) + v^+(f^*, l_{\tilde{o}\eta}).$$

Обозначая через  $\eta_{k_1}$  и  $\eta_{k_2}$  концы дуги  $l_k$ , имеем:

$$f'_1(\eta_{k_1}) - f'_1(y_k) \leq v^+(f^*, l_{y_k \eta_{k_1}}),$$

$$f'_1(\eta_{k_2}) - f'_1(y_k) \leq v^+(f^*, l_{y_k \eta_{k_2}}).$$

А тогда

$$\begin{aligned} v(f^*, l_k) &\geq v^+(f^*, l_k) = v^+(f^*, l_{\eta_{k_1} \eta_{k_2}}) \geq \\ &\geq v^+(f^*, l_{y_k \eta_{k_1}}) + v^+(f^*, l_{y_k \eta_{k_2}}) \geq \\ &\geq |f'_1(\eta_{k_1}) - f'_1(y_k)| + |f'_1(\eta_{k_2}) - f'_1(y_k)|, \end{aligned}$$

так как  $f'_1(\eta_{k_1}) \geq f'_1(y_k)$  и  $f'_1(\eta_{k_2}) \geq f'_1(y_k)$ , ибо функция  $v^+(f^*, l_{\tilde{o}\eta})$  не убывает при удалении точки  $\eta$  от  $o$  (см. лемму 32).

Следовательно,

$$v(f^*, l_k) \geq |f'_1(\eta_{k_1}) - f'_1(y_k)| + |f'_1(\eta_{k_2}) - f'_1(y_k)| \geq \frac{1}{4} \varepsilon_0,$$

но тогда согласно лемме 33  $v_1(f, I_n) \geq \sum_{k=1}^{\infty} v(f^*, l_k) = +\infty$ .

Последнее противоречит условиям рассматриваемой леммы. Следовательно,  $f_1(x)$  непрерывна в каждой точке из  $I_n$ . Аналогично доказывается, что функция  $f_2(x)$  непрерывна на кубе  $I_n$ .

**Лемма 35.** *Функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  монотонно возрастают в кубе  $I_n$  относительно точки  $o$ .*

**Доказательство.** Пусть  $e_t$  есть множество уровня  $t$  функции  $f_1(x)$ , рассматриваемой на  $I_n$ , а  $T_f$  — одномерное дерево функции  $f(x)$ .

Положим  $\tilde{x} = \tilde{f}(x)$ ,  $\tilde{o} = \tilde{f}(o)$ . Обозначим через  $\tilde{e}_t$  множество уровня  $t$  функции  $f_1(\eta) = f^*(\tilde{o}) + v^+(f^*, l_{\tilde{o}\eta})$ , рассматриваемой как функция точки  $\eta \in T_f$ . Ясно, что  $\tilde{e}_t = \tilde{f}(e_t)$ .

Пусть  $x$  есть произвольная точка куба  $I_n$ , не отделённая (в кубе  $I_n$ ) множеством  $e_t$  от точки  $o$ . Тогда в  $I_n$  существует простая дуга  $L_{ox}$ , не имеющая общих точек с множеством  $e_t$ , концами которой являются точки  $o$  и  $x$ . Пусть  $l'(o, x) = \tilde{f}(L_{ox})$ . Так как  $L_{ox}$ , будучи простой дугой, локально связно и так как преобразование  $\tilde{f}$  непрерывно, то  $l'(o, x)$ , будучи непрерывным образом локально связного множества, локально связно, а тогда  $l'(o, x)$  содержит простую дугу  $l_{\tilde{o}\tilde{x}}$ , соединяющую на  $l'(o, x)$ , а следовательно, и на  $T_f$  точки  $\tilde{o}$  и  $\tilde{x}$ . Эта дуга  $l_{\tilde{o}\tilde{x}}$  единственна на  $T_f$  (см. свойства 2 § 24). Так как точка  $x$  не принадлежит множеству  $e_t$ , а следовательно, точка  $\tilde{x}$  из  $T_f$  не принадлежит множеству  $\tilde{e}_t$ , то  $f'_1(\tilde{x}) \neq f'_1(\tilde{e}_t)$ .

Предположим, что  $f'_1(x) > f'_1(e_t)$ . Тогда из того, что в силу леммы 32 функция  $f'_1(\eta) = f^*(\tilde{o}) + v^+[f^*, l_{\tilde{o}\eta}]$  непрерывна и монотонно возрастает при движении точки  $\eta$  на дуге  $l_{\tilde{o}\tilde{x}}$  от точки  $\tilde{o}$  к  $\tilde{x}$ , следует, что на дуге  $l_{\tilde{o}\tilde{x}}$  найдётся точка  $\tilde{x}'$  такая, что  $f'_1(\tilde{x}') = f'_1(\tilde{e}_t)$ , ибо  $f'_1(\tilde{o}) \leq$

$\leq f'_1(\tilde{e}_t)$ . Но это означает, что дуга  $l_{\tilde{o} \tilde{x}}$  содержит точку из  $\tilde{e}_t$ , что невозможно, ибо  $L_{ox} \cap e_t$  пусто. Следовательно,  $f'_1(\tilde{x}) < f'_1(\tilde{e}_t)$  для любой точки  $\tilde{x}$  из  $I_n$ , не отделённой в кубе  $I_n$  множеством  $e_t$  от точки  $o$ .

Пусть теперь  $x$  есть произвольная точка из  $I_n$ , отделённая в кубе  $I_n$  множеством  $e_t$  от точки  $o$ ,  $l_{\tilde{o} \tilde{x}}$  — простая дуга из  $T_f$ , соединяющая точки  $\tilde{o} = f(\tilde{o})$  и  $\tilde{x} = \tilde{f}(x)$ , а  $K_{ox}$  — полный прообраз в  $I_n$  этой дуги. Так как преобразование  $\tilde{f}$  монотонно, т. е. полный прообраз всякой точки из  $T_f$  является связным множеством в  $I_n$ , то  $K_{ox}$  связно, а так как  $\tilde{f}$  непрерывно, то  $K_{ox}$  замкнуто и ограничено, будучи подмножеством  $I_n$ , т. е.  $K_{ox}$  есть континуум, лежащий в  $I_n$  и содержащий точки  $o$  и  $x$ .

Так как множество  $e_t$  разделяет в кубе  $I_n$  точки  $o$  и  $x$ , то на  $K_{ox}$  найдётся точка  $y$ , принадлежащая множеству  $e_t$ . А тогда  $f'_1(\tilde{y}) = f'_1(\tilde{l}_t)$ , где  $\tilde{y} = \tilde{f}(y) \in l_{\tilde{o} \tilde{x}}$ . Пусть  $x$  не принадлежит множеству  $e_t$ . Тогда из того, что в силу леммы 32 функция  $f'_1(\eta) = f^*(\tilde{o}) + v^+[f^*, l_{o\eta}]$  не убывает при движении точки  $\eta$  по дуге  $l_{\tilde{o} \tilde{x}}$  от  $\tilde{o}$  к  $x$ , и того, что  $\tilde{f}'_1(x) \neq f'_1(e_t)$  (ибо  $\tilde{x} \in e_t$ ), следует, что  $f'_1(\tilde{x}) > f'_1(e_t)$  для всякой точки  $x$ , не принадлежащей множеству  $e_t$  и отделённой в кубе  $I_n$  множеством  $e_t$  от точки  $o$ .

Таким образом, мы доказали, что функция  $f_1(x)$  монотонно возрастает в кубе  $I_n$  относительно точки  $o$ .

Аналогично доказывается, что функция  $f_2(x)$  монотонно возрастает в кубе  $I_n$  относительно точки  $o$ .

### Доказательство теоремы 35.

Пусть  $f(x)$  есть непрерывная на  $I_n$  функция, имеющая на  $I_n$  конечную первую вариацию, а  $o$  — некоторая точка из  $I_n$ . Тогда соответствующие функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  в силу лемм 34 и 35 непрерывны на  $I_n$  и монотонно возрастают в кубе  $I_n$  относительно точки  $o$ .

Пусть  $x$  есть произвольная точка из  $I_n$ ,  $\tilde{x} = \tilde{f}(x)$  и  $\tilde{o} = \tilde{f}(o)$ . Тогда в силу леммы 32

$$\begin{aligned} f(x) &= f^*(\tilde{x}) = f^*(\tilde{o}) + v^+[f^*, l_{\tilde{o} \tilde{x}}] - v^-[f^*, l_{\tilde{o} \tilde{x}}] = \\ &= f'_1(\tilde{x}) - f'_2(\tilde{x}) = f_1(x) - f_2(x), \end{aligned}$$

т. е.  $f(x) \equiv f_1(x) - f_2(x)$ .

Теорема 35 доказана.

Отметим, что можно доказать следующее.

Теорема 36. Пусть  $f(x)$  есть непрерывная на  $I_n$  функция, имеющая на  $I_n$  конечные вариации всех порядков, а о — некоторая точка из  $I_n$ . Тогда существует две функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , имеющие на  $I_n$  ограниченные вариации всех порядков, непрерывные и монотонно возрастающие на  $I_n$  относительно точки о и такие, что  $f(x) \equiv f_1(x) - f_2(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) (доказательство этой теоремы опускаем).

### § 26. Гладкость функции ограниченной вариации

Докажем следующее.

Теорема 37 (А. С. Кронрада). Пусть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  есть непрерывная на  $n$ -мерном замкнутом кубе  $I_n$  функция, имеющая на  $I_n$  конечные вариации всех порядков. Тогда почти во всякой точке  $x$  из  $I_n$  функция  $f(x)$  имеет полный дифференциал ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Пусть  $E_n$  есть  $n$ -мерное евклидово пространство, содержащее  $I_n$  своим подмножеством;  $S_n$  —  $n$ -мерный замкнутый шар из  $E_n$ ,  $O$ ,  $S_{n-1}$ ,  $r$ ,  $\tau_1(r_1)$ ,  $x$ ,  $\beta_{n-1}(r_1 x)$  — объекты из  $E_n$ , необходимые для индуктивного определения вариаций (см. § 10). С помощью индукции (по числу  $n$ ) определим понятие  $k$ -кратной вариации множества внутри  $n$ -мерного шара.

Нулевой вариацией  $v_0^{S_n}(e)$  произвольного подмножества  $e$   $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  внутри  $n$ -мерного шара  $S_n$  ( $S_n \in E_n$ ) назовём число всех таких компонент множества  $e$ , каждая из которых содержится в  $S_n$  и не имеет общих точек с границей  $\tilde{S}_n$  шара  $S_n$ , т. е.  $v_0^{S_n}(e)$  есть число лежащих строго внутри  $S_n$  компонент множества  $e$ .

Определение 22. Предположим, что для подмножества  $e \cap \beta_{n-1}(r_1, x)$  ( $n-1$ -мерного евклидова пространства  $E_{n-1} = \beta_{n-1}(r_1, x)$ ) определено понятие  $k$ -й вариации внутри шара  $S_{n-1}$ ,  $v_k^{S_{n-1}}(e \cap \beta_{n-1}(r_1, x))$ .

Пусть  $e$  таково, что  $v_k^{S_{n-1}}(e \cap \beta_{n-1}(r_1, x))$  как функция точки  $x(r_1)$  фиксирована) измерима по Лебегу, а функция

$$v_{k+1\tau_1(r_1)}^{S_n}(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_k^{S_{n-1}(r_1, x)}(e \cap \beta_{n-1}(r_1, x)) dx$$

как функция точки  $r_1 \in S_{n-1}$  измерима (у доказательства).

Тогда число

$$v_{k+1}^{S_n}(e) = \frac{d_k^{n-1}}{d_{k+1}^n} \int_{S_{n-1}} v_{k+1}^{S_n}(r)(e) d\mu_{S_{n-1}},$$

где

$$d_k^n = \int_{\Omega_k^n} v_0^{S_n}(J_k \cap \beta_{n-k}) d\mu_{\Omega_k^n}$$

( $\Omega_k^n$  см. § 7,  $J_k$  — единичный  $k$ -мерный куб), мы назовём  $(k+1)$ -й вариацией множества  $e$  внутри шара  $S_n$ , а множество  $e$  назовём измеримым ( $v_{k+1}^{S_n}$ ).

Лемма 36. Пусть  $0 \leq k < n$ . Всякое замкнутое множество  $e \subset E_n$  измеримо ( $v_k^{S_n}$ ). (Доказательство этой леммы опускаем.)

Положим  $A(e, S_n) = \sup \rho(a, \tilde{S}_n)$ , где  $\rho(a, \tilde{S}_n)$  есть расстояние от произвольной точки  $a$  из  $e \cap S_n$  до границы  $\tilde{S}_n$  шара  $S_n$ .

Лемма 37 (А. С. Кронрод). Пусть  $e$  есть замкнутое подмножество евклидова пространства  $E_n$ , имеющее нулевую меру Лебега ( $m^n(e) = 0$ ), а  $S_n$  —  $n$ -мерный замкнутый шар из  $E_n$  радиуса  $R \leq 1$ . Тогда, если  $v_{k+1}^{S_n}(e) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k^{S_n}(e) \neq 0$ , то  $v^{S_n}(e) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k^{S_n}(e) \geq \geq A_n [A(e, S_n)]$ , где  $0 < A_n < 1$  есть константа, зависящая лишь от  $n$ .

Доказательство. Лемму 37 докажем индукцией по числу  $n$ . При  $n = 1$   $S_1$  — отрезок. Если никакая внутренняя точка отрезка  $S_1$  не принадлежит множеству  $e$ , то  $v^{S_1}(e) = 0$ .

Если же множество  $e$  имеет хотя бы одну компоненту (точку в рассматриваемом случае, ибо  $m_1(e) = 0$ ), принадлежащую  $S_1$  и не «выходящую» на границу отрезка  $S_1$ , то  $v_0^{S_1}(e) \geq 1$ . А тогда существует такое  $0 < A_1 < 1$ , что  $v^{S_1}(e) \geq A_1 [A(e, S_1)]^0$ , ибо  $v^{S_1}(e) = v_0^{S_1}(e) \geq 1$ , а  $[A(e, S_1)]^0 = 1$ . При  $n = 1$  лемма доказана.

Пусть лемма 36 доказана уже для  $n = 1, 2, \dots, v - 1$ . Докажем утверждение этой леммы для  $n = v$ .

Если  $A(e, S_v) = 0$ , то  $v^{S_v}(e) \geq A_v [A(e, S_v)]^{v-1} = 0$ , т. е. в таком случае лемма 36 справедлива. Поэтому далее мы будем предполагать, что  $A(e, S_v) \geq 0$ .

Так как множество  $e$  замкнуто, то в  $e \cap S_v$  найдётся точка  $C$ , отстоящая от границы  $\tilde{S}_v$ , шара  $S_v$ , на расстоянии  $A(e, S_v)$ .

Пусть  $e'$  есть компонента множества  $e \cap S_v$ , содержащая точку  $C$ . Тогда возможны два случая.

1) Компонента  $e'$  не имеет общих точек с границей  $\tilde{S}_v$ , шара  $S_v$ . Тогда  $v_0^{S_v}(e) \geq v_0^{S_v}(e') = 1$ , т. е.  $v^{S_v}(e) \geq 1 \geq A'_v [A(e, S_v)]^{v-1}$ , ибо  $A(e, S_v) \leq 1$  (за  $A'_v$  в рассматриваемом случае можно принять всякую положительную константу, не превосходящую 1).

2) Компонента  $e'$  имеет хотя бы одну общую точку с множеством  $\tilde{S}_v$ . Пусть  $C_0$  есть центр шара  $S_v$ , а  $R$  — радиус шара  $S_v$ . Обозначим через  $S'_v$   $v$ -мерный замкнутый шар из  $E$ , с центром в точке  $C_0$  и радиусом  $R' = R - \frac{1}{2} A(e, S_v)$ .

Ясно, что  $A(e, S'_v) = \frac{1}{2} A(e, S_v)$ . Так как компонента  $e'$  от точки  $C$  «дотягивается» до сферы  $\tilde{S}_v$ , то компонента множества, содержащая точку  $C$ , имеет хотя бы одну общую точку с границей  $\tilde{S}'_v$  шара  $S'_v$  (в силу связности множества  $e'$ ).

Пусть  $C'$  есть точка из  $e' \cap \tilde{S}'_v$ , принадлежащая компоненте  $e_1$  множества  $e' \cap S_v$ , содержащей точку  $C$ , а  $\tau(CC')$  — прямая из  $E_v$ , проходящая через точки  $C$  и  $C'$ .

Так как вариации множества не зависят от выбора точки  $O$  (см. § 10), то мы, очевидно, можем предполагать, что точка  $O$  принадлежит прямой  $\tau_1(CC')$ .

Пусть  $S_{v-1}^*$  есть множество всех таких точек  $r_1$  сферы  $S_{v-1}$ , для каждой из которых угол, образованный соответствующей прямой  $\tau_1(r_1)$  и прямой  $\tau_1(CC')$ , не превосходит  $\frac{\pi}{3}$ . Обозначим через  $\rho(r_1)$  проекцию отрезка  $[CC']$  на прямую  $\tau_1(r_1)$ . Так как  $|CC'| \geq A(e, S'_v) = \frac{1}{2} A(e, S_v)$ , то

$$|\rho(r_1)| \geq \frac{1}{2} |CC'| \geq \frac{1}{2} A(e, S'_v) = \frac{1}{4} A(e, S_v).$$

Пусть  $x$  — точка из  $\rho(r_1)$ , тогда соответствующая этой точке гиперплоскость  $\beta_{v-1}(r_1, x)$  разделяет в пространстве  $E$ ,

точки  $C$  и  $C_1$ . Следовательно, множество  $e_1 \cap \beta_{v-1}(r_1, x)$  не пусто. А тогда

$$A[e \cap \beta_{v-1}(r_1, x), S_v \cap \beta_{v-1}(r_1, x)] \geq \frac{1}{2} A(e, S_v),$$

ибо всякая точка из  $e_1 \cap \beta_{v-1}(r_1, x)$  отстоит от границы  $\tilde{S}_v$  шара  $S_v$ , следовательно, и от границы шара  $S_{v-1}(r_1, x) = S_v \cap \beta_{v-1}(r_1, x)$  не менее чем на  $\frac{1}{2} A(e, S_v)$ . А тогда в силу предположения индукции для указанной точки  $x$

$$\begin{aligned} & v^{S_{v-1}(r_1, x)}(e \cap \beta_{v-1}(r_1, x)) \geq \\ & \geq A_{v-1} \{ A[e \cap \beta_{v-1}(r_1, x), S_{v-1}(r_1, x)] \}^{v-1} \geq A_{v-1} \left[ \frac{1}{2} A(e, S_v) \right]^{v-1}. \end{aligned}$$

И для указанной точки  $r_1$  из  $S_{v-1}^*$  имеем:

$$\begin{aligned} v_{\tau_1(r_1)}^{S_v}(e) &= \sum_{k=0}^{v-1} v_{k, \tau_1(r_1)}^{S_v}(e) - v_0^{S_v}(e) + \\ &+ \sum_{k=1}^{v-1} \int_{-\infty}^{\infty} v_{k-1}^{S_{v-1}(r_1, x)}[e \cap \beta_{v-1}(r_1, x)] dx \geq \\ &\geq 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{v-1} v_{k-1}^{S_{v-1}(r_1, x)}[e \cap \beta_{v-1}(r_1, x)] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} v^{S_{v-1}(r_1, x)}[e \cap \beta_{v-1}(r_1, x)] dx \geq \\ &\geq |\rho(r_1)| A_{v-1} \left[ \frac{1}{2} A(e, S_v) \right]^{v-2} \geq \\ &\geq \frac{1}{4} A(e, S_v) A_{v-1} \left[ \frac{1}{2} A(e, S_v) \right]^{v-2} = \\ &= \frac{A_{v-1}}{2^v} [A(e, S_v)]^{v-1} = A'_v [A(e, S_v)]^{v-1}, \end{aligned}$$

где  $0 < A'_v < 1$ . Множество  $S_{v-1}^*$  имеет положительную меру:

$$\mu_{S_{v-1}}(S_{v-1}^*) = B_v \cdot C_{v-1} > 0.$$

В силу полученных выше неравенств, обозначив  $D_v = \min_{0 \leq k \leq v} \left\{ \frac{d_{k-1}^{v-1}}{d_k^v} \right\}$ , получаем:

$$\begin{aligned} v^{S_v}(e) &= \sum_{k=0}^{v-1} \frac{d_{k-1}^{v-1}}{d_k^v} \int_{S_{v-1}}^v \int_{-\infty}^{+\infty} v_k^{S_{v-1}(r_1, x)} [e \cap \beta_{v-1}(r_1, x)] dx d\mu_{S_{v-1}} \geq \\ &\geq D_v \int_{S_{v-1}}^v \int_{-\infty}^{+\infty} v^{S_{v-1}(r_1, x)} [e \cap \beta_{v-1}(r_1, x)] dx d\mu_{S_{v-1}} \geq \\ &\geq D_v \cdot B_v \cdot C_{v-1} \frac{A_{v-1}}{2^v} [A(e, S_v)]^{v-1} = A_v'' [A(e, S_v)]^{v-1}, \end{aligned}$$

где  $A_v'' = D_v \cdot B_v \cdot C_{v-1} \frac{A_{v-1}}{2^v}$ .

Обозначив теперь  $A_v = \min \{A_v', A_v''\}$ , мы получим, что в любом из рассмотренных нами случаев  $v^{S_v}(e) \geq A_v [A(e, S_v)]^{v-1}$ , где  $0 < A_v < 1$ .

Лемма 37 доказана.

Теорема 38 (В. В. Степанова). Пусть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  есть непрерывная на  $I_n$  функция, а  $e^*$  — множество точек, в каждой из которых функция  $f(x)$  недифференцируема. Тогда  $e^*$  измеримо ( $m^n$ ) и почти для всякой точки  $a$  этого множества

$$\sup_{x' \rightarrow x} \left| \frac{f(x') - f(x)}{\rho(x, x')} \right| = +\infty \quad (n = 1, 2, \dots)$$

доказательство см. [11].

Доказательство теоремы 37. Предположим, что теорема 37 неверна. Тогда на  $I_n$  можно определить такую непрерывную функцию  $f(x)$ , для которой соответствующее множество  $e^*$  всех таких точек из  $I_n$ , в каждой из которых функция  $f(x)$  недифференцируема, имеет положительную меру Лебега:  $m^n(e^*) > 0$  (множество  $e^*$  измеримо в силу теоремы 38). Положим  $\alpha = m^n(e^*) > 0$  и обозначим через  $e^\infty$  множество всех таких точек  $x$  из  $e^*$ , для каждой из которых

$$\sup_{x' \rightarrow x} \left| \frac{f(x') - f(x)}{\rho(x, x')} \right| = +\infty.$$

В силу теоремы 38  $m^n(e^\infty) = \alpha > 0$ .

Пусть  $c$  есть неотрицательная константа, точное значение которой мы укажем ниже, а  $y$  — произвольная точка из  $e^\infty$ . Из определения множества  $e^\infty$  следует, что для всякой точки  $y$  из  $e^\infty$  можно фиксировать последовательность точек  $y_i$  из  $I_n$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), сходящуюся к точке  $y$  и такую, что

$$\left| \frac{f(y_i) - f(y)}{\rho(y, y_i)} \right| > c \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Обозначим через  $S_i^y$   $n$ -мерный замкнутый шар из  $I_n$  радиуса  $r_i^* = 2\rho(y_i, y)$  с центром в точке  $y \in e^\infty$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), а через  $\Gamma_c$  — систему всевозможных шаров типа  $S_i^y$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), а  $y$  — произвольная точка множества  $e^\infty$ . Ясно, что  $\Gamma_c$  есть покрытие множества  $e^\infty$  в смысле Витали. При этом каждому шару  $S_i^y$  поставлена в соответствие точка  $y_i = z'_i$ , равнодistantная от центра и границы шара  $S_i^y$  и такая, что

$$\left| \frac{f(y_i) - f(y)}{\rho(y, y_i)} \right| > c. \quad (1)$$

В силу теоремы Витали из системы  $\Gamma_c$  можно выделить такую счётную систему шаров  $S_i$  с центрами в точках  $z_i \in e^\infty$  и радиусами  $r_i = 2\rho(z_i, z'_i)$ , что шары  $S_i$  попарно не имеют общих внутренних точек и

$$\left. \begin{aligned} m^n \left( \sum_{i=1}^{\infty} S_i \right) &= B_n \sum_{i=1}^{+\infty} r_i^n \geq \alpha > 0, \\ m^n \left( e^* - \sum_{i=1}^{\infty} S_i \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Нетрудно доказать, что

$$\begin{aligned} V(f, I_n) &= \sum_{k=1}^n v_k(f, I_n) = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} v_{k-1}(e_t) dt \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{\infty} v_{k-1}^{S_i}(e_t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^n v_{k-1}^{S_i}(e_t) dt = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v^{S_i}(e_t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} v^{S_i}(f, I_n), \end{aligned}$$

т. е. что

$$V(f, I_n) \geq \sum_{i=1}^{\infty} v^{S_i}(f, I_n), \quad (3)$$

где

$$v^{S_i}(f, I_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} v^{S_i}(e_t) dt.$$

В силу (1) и (2) в шаре  $S_i$  найдётся точка  $z'_i$ , отстоящая от границы  $\tilde{S}_i$  этого шара на расстоянии  $\frac{1}{2}r_i$  и такая, что  $\frac{|f(z'_i) - f(z_i)|}{\rho(z_i, z') \cdot \frac{1}{2}r_i} > c$ , т. е.  $|f(z'_i) - f(z_i)| > \frac{1}{2}cr_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Пусть  $f(z'_i) > f(z_i)$  (это предполагается для определённости), а  $t$  таково, что  $f(z'_i) \geq t \geq f(z_i)$ . В силу непрерывности функции  $f(x)$  на отрезке  $[z_i, z'_i]$ , соединяющем точки  $z_i$  и  $z'_i$ , существует точка  $C_{it}$  такая, что  $f(C_{it}) = t$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Ясно, что  $\rho(C_{it}, \tilde{S}_i) > \frac{1}{2}r_i$ , а тогда в силу леммы 37 для указанного  $t$

$$v^{S_i}(e_t) \geq A_n [A(e_t, S_i)]^{n-1} \geq A_n \left[ \frac{1}{2}r_i \right]^{n-1}.$$

А тогда

$$\begin{aligned} v^{S_i}(f, I_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v^{S_i}(e_t) dt \geq \\ &\geq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z'_i) - f(z_i)| A_n \left( \frac{1}{2}r_i \right)^{n-1} dt \geq \frac{cA_n r_i^n}{2^n}. \end{aligned}$$

Но тогда в силу (3)

$$V(f, I_n) \geq \sum_{i=1}^{\infty} v^{S_i}(f, I_n) \geq \frac{cA_n}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} r_i^n \geq \frac{cA_n}{B_n 2^n} \alpha,$$

т. е.

$$V(f, I_n) \geq \frac{cA_n \alpha}{B_n 2^n}. \quad (4)$$

По условию рассматриваемой теоремы  $V(f, I_n) = \sum_{k=1}^n v_k(f, I_n) < +\infty$ . Положим

$$c = \frac{V(f, I_n) B_n 2^n}{2 A_n \alpha}.$$

Тогда в силу (4)  $V(f, I_n) \geq \frac{c A_n \alpha}{B_n 2^n} = \frac{1}{2} V(f, I_n)$ , т. е.  $V(f, I_n) = \frac{1}{2} V(f, I_n)$ , что возможно только при  $V(f, I_n) = 0$ .

Но нетрудно сообразить, что непрерывная на  $I_n$  функция, для которой  $V(f, I_n) = 0$ , обязана быть константой. А тогда  $f(x)$ , будучи константой, во всякой точке её области определения имеет полный дифференциал, равный нулю, что противоречит неравенству  $m^n(e^\infty) = \alpha > 0$ .

Следовательно,  $m^n(e^*) = 0$ .

### § 27. Сходимость ряда Фурье функции ограниченной вариации

На примере функций двух переменных рассмотрим вопрос о сходимости рядов Фурье от функций ограниченной вариации.

Пусть  $E_2$  есть двумерная плоскость,  $X, Y$  — прямоугольная декартова система координат этой плоскости,  $(x, y)$  — координаты произвольной точки из  $E_2$  относительно этой системы,  $R$  — квадрат из  $E_2$ , определяемый соотношениями  $-\pi \leq x \leq \pi$  и  $-\pi \leq y \leq \pi$ .

Пусть  $f(x, y)$  есть интегрируемая на  $R$  функция. Ряд

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \left[ \cos mx \cos ny \int_R \int f(x, y) \cos mx \cos ny dx dy + \right. \\ & + \sin mx \sin ny \int_R \int f(x, y) \sin mx \sin ny dx dy + \\ & + \cos mx \sin ny \int_R \int f(x, y) \cos mx \sin ny dx dy + \\ & \left. + \sin mx \cos ny \int_R \int f(x, y) \sin mx \cos ny dx dy \right], \end{aligned}$$

где  $\lambda_{mn} = \frac{1}{4}$  при  $n = 0$  и  $m = 0$ ,  $\lambda_{mn} = \frac{1}{2}$  при  $m = 0$  и  $n > 0$ ,  $\lambda_{mn} = \frac{1}{2}$  при  $m > 0$  и  $n = 0$ ,  $\lambda_{mn} = 1$  при  $n > 0$ ,  $m > 0$ , называется рядом Фурье функции  $f(x, y)$ , или двойным рядом Фурье функции  $f(x, y)$ .

Из результатов Тонелли и А. С. Кронрода вытекает следующее.

Теорема 39. Пусть  $f(x, y)$  есть периодическая (с периодом  $2\pi$ ) непрерывная на  $E_2$  функция, имеющая на квадрате  $R$  конечную вторую (старшую) вариацию. Тогда двойной ряд Фурье, соответствующий этой функции, почти во всякой точке  $(x, y)$  из  $E_2$  сходится к  $f(x, y)$ .

Сформулированная теорема является тривиальным следствием теоремы 2 и нижеследующего результата А. С. Кронрода.

Теорема 40 (А. С. Кронрода). Для всякой непрерывной на  $R$  функции  $f(x, y)$  вариация  $v(f, R)$  Тонелли и плоская вариация  $w_2(f, R)$  функции связаны следующим соотношением:  $A\bar{v}(f, R) \leq w_2(f, R) \leq Bv(f, R)$ , где  $A > 0$  и  $B > 0$  есть абсолютные константы (см. определения 4 и 6).

## ГЛАВА 6

### ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОСТИ ВАРИАЦИЙ ФУНКЦИИ

#### § 28. Достаточные условия для ограниченности старшей вариации функции

Докажем следующее.

Теорема 41. Пусть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  есть функция, определённая в  $n$ -мерной ограниченной замкнутой выпуклой области  $\sigma_n$ , удовлетворяющая на этой области условию Липшица. Тогда старшая вариация функции  $f(x)$  на  $\sigma_n$  конечна:  $v_n(f, \sigma_n) < +\infty$ .

Доказательство \*). Пусть  $\sigma_1$  есть отрезок длины  $\rho$ ,  $f(x_1)$  — функция, определённая на этом отрезке и удовлетворяющая условию Липшица. Пусть  $L_1$  — константа Липшица для  $f(x_1)$ . Так как в силу условия Липшица для всяких точек  $a_i$  и  $a_{i+1}$  из  $\sigma_1$   $|f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq L_1 |a_{i+1} - a_i|$ , то из определения 1 (см. § 1) следует, что изменение  $v(f, \sigma_1)$  функции  $f(x_1)$  на отрезке  $\sigma_1$  не превосходит  $\rho L_1$ . А тогда из свойства 5 § 1 и того, что  $f(x_1)$ , будучи функцией с условием Липшица, непрерывна на отрезке  $\sigma_1$ , следует, что  $v_1(f, \sigma_1) = v(f, \sigma_1) = \rho L_1$ , т. е. для  $n = 1$  теорема доказана.

Предположим, что для всякой функции  $f(y) = f(y_1, \dots, y_{n-1})$ , определённой на ограниченной замкнутой выпуклой области  $\sigma_{n-1}$  из  $(n-1)$ -мерного евклидова пространства, удовлетворяющей на этой области условию Липшица с некоторой константой  $L$ , имеет место неравенство

$$v_{n-1}(f, \sigma_{n-1}) < D_{n-1} L \cdot d_1(\sigma_{n-1}),$$

\*) Теорему 41 можно было бы легко вывести из теоремы 34, но, желая ещё раз продемонстрировать эффективность индуктивного определения, мы остановимся на доказательстве этой теоремы.

где  $d_1(\sigma_{n-1})$  есть одномерный диаметр области  $\sigma_{n-1}$ , а  $D_{n-1}$  — константа, зависящая только от размерности пространства  $E_{n-1}$ .

Пусть  $\sigma_n$  — ограниченная замкнутая выпуклая область из  $E_n$ , а  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  — функция, удовлетворяющая на  $\sigma_n$  условию Липшица с некоторой константой  $L$ .

Ясно, что тогда  $\sigma_n \cap \beta_{n-1}(r_1, x)$  есть ограниченная замкнутая выпуклая область и функция  $f(x)$  удовлетворяет на  $\sigma_n \cap \beta_{n-1}(r_1, x)$  условию Липшица с той же константой  $L$ . Тогда в силу предположения индукции

$$v_{n-1}(f, \sigma_n \cap \beta_{n-1}(r_1, x)) < D_{n-1} L d_1(\sigma_n \cap \beta_{n-1}(r_1, x)) \leqslant D_{n-1} L d_1(\sigma_n).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} v_n(f, \sigma_n) &= \frac{d_{n-2}^{n-1}}{d_{n-1}^n} \int_{S_{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{n-1}(f, \sigma_n \cap \beta_{n-1}(r_1, x)) dx d\mu_{S_{n-1}} < \\ &< \frac{d_{n-2}^{n-1}}{d_{n-1}^n} C_{n-1} D_{n-1} L d_1^{n-1}(\sigma_n) d_1(\sigma_n) = D_n L d_1^n(\sigma_n), \end{aligned}$$

где  $D_n$  зависит только от  $n$  и не зависит от  $f(x)$  и от  $\sigma_n$ .

Теорема 41 доказана.

## § 29. Регулярная компонента уровня гладкой функции

Пусть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  — непрерывно дифференцируемая на  $I_n \subset E_n$  функция.

Определение 23. Компонента  $k$  множества  $e_t$  уровня  $t$  непрерывно дифференцируемой функции  $f(x)$  называется *регулярной* (в кубе  $I_n$ ), или просто *регулярной*, если, во-первых, эта компонента не имеет общих точек с границей куба  $I_n$  и, во-вторых, во всякой точке  $x \in k$  функция  $f(x)$  имеет ненулевой дифференциал. В противном случае компонента  $k$  называется *нерегулярной*.

Лемма 38. Регулярная (в  $I_n$ ) компонента  $k$  уровня  $t$  непрерывно дифференцируемой функции  $f(x)$  представляет собой  $(n-1)$ -мерное гладкое \*) многообразие без

\*) Многообразие называется гладким, если оно имеет в каждой своей точке касательную плоскость, непрерывно вращающуюся при движении точки касания по многообразию,

края\*), разделяющее как куб  $I_n$ , так и всё пространство  $E_n$  на две части ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Доказательство. Пусть  $k$  есть регулярная компонента множества уровня функции  $f(x)$ , а  $x$  — некоторая точка этой компоненты. Так как  $|\operatorname{grad} f(x)| > 0$ , то без ограничения общности можно предполагать, что  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  в точке  $x$  отлично от нуля. Тогда в силу теоремы о неявной функции уравнение  $f(x) — t = 0$  в достаточно малой окрестности точки  $x$  разрешимо относительно  $x_1$ :  $x_1 = g(x_2, \dots, x_n) = g(q)$ , где  $g(q)$  есть непрерывно дифференцируемая по  $x_2, \dots, x_n$  функция. Очевидно, что общая часть графика функции  $g(q)$  и достаточно малого  $n$ -мерного параллелепипеда, содержащего точку  $x$  своей внутренней точкой, представляет собой окрестность (на  $k$ ) точки  $x$ , которая, очевидно, гомеоморфна  $(n — 1)$ -мерному шару. А это и означает, что  $k$  есть  $(n — 1)$ -мерное многообразие без края. А так как  $g(q)$  — функция непрерывно дифференцируемая, то  $k$  обладает непрерывно вращающейся (при движении точки  $x$  по  $k$ ) касательной гиперплоскостью, т. е.  $k$  — гладкое многообразие. Из топологии известно, что  $(n — 1)$ -мерное многообразие без края разделяет  $n$ -мерное евклидово пространство, в котором оно лежит, на две части. А тогда из того, что  $k$ , будучи регулярной в  $I_n$  компонентой множества уровня, не имеет общих точек с границей куба  $I_n$ , следует, что  $k$  разделяет и  $I_n$ , и  $E_n$  на две части.

Лемма 39. Теоретико-множественная сумма  $K' = K$  всех регулярных в  $I_n$  компонент всех множеств уровней непрерывно дифференцируемой функции  $f(x)$  есть множество, открытое как в кубе  $I_n$ , так и во всём пространстве  $E_n$ .

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы 39 неверно. Тогда существуют такая точка  $c \in K$  и такая последовательность  $c_1, c_2, \dots$  точек из  $I_n — K$ , что  $c = \lim_{i \rightarrow \infty} c_i$ . Пусть  $C_i$  есть компонента некоторого множества уровня функции  $f(x)$ , содержащая точку  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

\*<sup>\*)</sup>  $n$ -мерным многообразием без края называется замкнутое множество, обладающее тем свойством, что всякая его точка имеет сколь угодно малую открытую окрестность, гомеоморфную  $n$ -мерному открытому шару.

Очевидно, можно предполагать, что никакие две точки из  $\{c_i\}$  не принадлежат одной и той же компоненте множества уровня. Пусть  $C$  — регулярная (в  $I_n$ ) компонента множества уровня той же функции, содержащая точку  $c$ .

Обозначим через  $\varepsilon(C)$  множество всех таких точек из  $I_n$ , каждая из которых отстоит от  $C$  менее чем на  $\varepsilon > 0$ . Из определения регулярности (в  $I_n$ ) компоненты  $C$  и непрерывной дифференцируемости функции  $f(x)$  следует, что  $\varepsilon > 0$  можно фиксировать таким, что  $\varepsilon(C)$  не будет иметь общих точек с границей куба  $I_n$ , и во всякой точке  $x$  из  $\varepsilon(C)$   $|\operatorname{grad} f(x)| > 0$ . Далее будем предполагать, что  $\varepsilon$  именно таково.

В силу леммы 30 при достаточно большом  $i$   $C_i = \varepsilon(C) = 0$ , т. е. при  $i > i_0(\varepsilon)$  компонента  $C_i$  содержится в  $\varepsilon(C)$ , т. е. при  $i > i_0(\varepsilon)$  компонента  $C_i$  регулярна (в  $I_n$ ), что противоречит определению множества  $I_n - K$ . Пришли к противоречию. Следовательно,  $K$  открыто в  $I_n$ . А так как всякая точка границы куба  $I_n$  принадлежит некоторой нерегулярной компоненте уровня, т. е. всякая точка границы куба  $I_n$  не принадлежит множеству  $K$ , то  $K$ , будучи открытым в  $I_n$  множеством, открыто и во всём пространстве  $E_n$ .

### § 30. Кольцоид и его строение

Пусть  $f(x)$  есть непрерывно дифференцируемая на  $I_n$  функция, а  $K$  — теоретико-множественная сумма всех регулярных (в  $I_n$ ) компонент, собранных со всех уровней функции  $f(x)$ .

Определение 24. Компоненту множества  $K$  (в теоретико-множественном смысле) мы назовём *кольцоидом* и обозначим через  $K_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), при этом  $K = \sum_{i=1}^{\infty} K_i$  (так как множество  $K$ , будучи в силу леммы 39 открытым в  $E_n$  множеством, состоит из счётного числа компонент, то мы были вправе перенумеровать кольцоиды).

Кольцоид, будучи компонентой открытого множества, является связным открытым множеством.

Отметим, что при  $n = 1$  кольцоид есть интервал, концы которого обладают тем свойством, что либо конец совпадает с концом области задания функции, либо производная от рассматриваемой функции в нём обращается в нуль (не исключается одновременное выполнение и первого и второго).

Далее мы докажем некоторые теоремы относительно топологического строения кольцоида в общем случае и относительно поведения на нём рассматриваемой функции.

**Теорема 42.** *Образ  $l_i$  кольцоида  $K_i$  на дереве  $T_f$  при отображении  $f$  есть гомеоморф интервала, лежащий на некоторой простой дуге канонического разложения дерева  $T_f$ , причём  $l_i$  и  $l_j$  не пересекаются при  $i \neq j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ).*

**Доказательство.** Пусть  $l_i$  есть образ  $K_i$  при отображении  $\tilde{f}$ . При  $i \neq j$   $l_i$  и  $l_j$  не пересекаются, так как каждая точка из  $T_f$  имеет прообразом лишь одну компоненту множества уровня. Будучи образом связного множества  $K_i$  при непрерывном отображении  $\tilde{f}$ , множество  $l_i$  связно. На дереве  $T_f$   $l_i$  образует открытое множество. В самом деле,  $l_i$  является окрестностью для всякой своей точки, ибо кольцоид  $K_i$  является в области задания функции окрестностью для каждой компоненты уровня, в него входящей.

Покажем, что  $l_i$  располагается лишь на одной простой дуге канонического разложения дерева  $T_f$ . Допустим противное, т. е. что существуют две такие точки  $a'_i$  и  $a''_i$  из  $l_i$ , принадлежащие на  $T_f$  двум простым дугам  $\bar{l}'_i$  и  $\bar{l}''_i$  соответственно ( $a'_i \in \bar{l}_i, a'_i \in \bar{l}''_i, a''_i \in \bar{l}'_i, a''_i \in \bar{l}''_i$ ) канонического разложения дерева.

Соединим на  $T_f$  точки  $a'_i$  и  $a''_i$  простой дугой (в силу свойства 2 § 24 такая дуга существует). Пусть  $b'_i$  есть некоторая внутренняя точка простой дуги  $l_{a'_i, a''_i}$ , а  $\alpha'_i, \alpha''_i, \beta'_i$  суть соответственно полные прообразы точек  $a'_i, a''_i, b'_i$  в кубе  $I_n$ .

Пусть, далее,  $c'_i$  и  $c''_i$  суть соответственно некоторые точки из  $a'_i$  и  $a''_i$ . Как всякие две внутренние точки из  $K_i$ , точки  $c'_i$  и  $c''_i$  можно соединить ломаной  $\delta$ , целиком лежащей внутри  $K_i$ . В силу свойства 2 § 24  $\beta'_i$  разделяет  $\alpha'_i$  и  $\alpha''_i$ , а следовательно, по определению разделимости пересекается с  $\delta$ , т. е. на  $\beta'_i$  существует точка, принадлежащая  $K_i$ , а тогда и вся компонента  $\beta'_i$  принадлежит  $K_i$ , откуда следует, что на  $T_f$   $b'_i$  принадлежит  $l_i$ .

Итак, каждая внутренняя точка простой дуги  $l_{a'_i, a''_i}$  принадлежит  $l_i$ , а тогда  $l_{a'_i, a''_i}$  лежит в  $l_i$ , так как по предположению  $a'_i \in l_i$ .

Пересечение дуги  $l_{a'_i, a''_i}$  и  $\bar{l}''$  не пусто, так как оно содержит точку  $a''_i$ . Пусть  $b''_i$  есть точка этого пересечения, ближайшая к  $a'_i$  по дуге  $l_{a'_i, a''_i}$ . Пусть  $A_i$  и  $B_i$  суть концы простой дуги  $\bar{l}''_i$ . Так как  $A_i$  и  $B_i$  имеют прообразом в кубе  $I_n$  нерегулярные компоненты, то  $b''_i$  не может совпадать ни с  $A_i$ , ни с  $B_i$ , ибо  $b''_i$ , как и всякая точка дуги  $l_{a'_i, a''_i}$ , принадлежит  $l_i$ , т. е. является образом регулярной компоненты. Так как  $l_{a'_i, a''_i}$  имеет только одну общую точку  $b''_i$  с  $\bar{l}''_i$ , то дуги  $l_{a'_i, b''_i}$ ,  $l_{A_i, b''_i}$ ,  $l_{B_i, b''_i}$  попарно пересекаются лишь в  $b''_i$ . Мы пришли к противоречию, так как получили, что  $b''_i$ , будучи образом регулярной компоненты, является в то же время точкой ветвления, что противоречит лемме 38 \*).

Противоречие получено из допущения того, что  $a'_i$  и  $a''_i$ , принадлежащие  $l_i$ , лежат на разных простых дугах  $\bar{l}'_i$  и  $\bar{l}''_i$  канонического разложения дерева. Следовательно,  $l_i$  укладывается целиком в одной дуге  $\bar{l}'_i \in T_f$ . Но на простой дуге открытым связным множеством может быть лишь гомеоморф интервала, следовательно,  $l_i$  есть гомеоморф интервала.

Теорема 42 доказана.

Можно доказать, что всякие две компоненты уровня, входящие в один и тот же кольцоид, гомеоморфны. А из этого и теоремы 42 будет следовать, что кольцоид топологически устроен, как произведение некоторого  $(n-1)$ -мерного многообразия и интервала.

Теорема 43. Функция  $f^*(\eta)$  монотонна на каждом из образов  $l_i$  кольцоида  $K_i$  при отображении  $\tilde{f}$ .

Доказательство. Пусть  $l_i$  есть образ кольцоида  $K_i$  на  $T_f$  при отображении  $\tilde{f}$ , а  $\lambda_i$  — замыкание на  $T_f$  множества  $l_i$ . Так как в силу теоремы 42  $l_i$  есть гомеоморф интервала и принадлежит одной простой дуге канонического разложения, то  $\lambda_i$  есть гомеоморф отрезка. В таком случае  $\lambda_i$  есть простая дуга дерева  $T_f$ . Предположим, что утверждение теоремы 43 неверно, т. е.  $f^*(\eta)$  не монотонна на  $\lambda_i$ .

\*) Ибо в силу свойства 3 § 24 прообраз в  $I_n$  точки  $b''_i$  при отображении  $\tilde{f}$  разделяет  $I_n$  не менее чем на три части.

По определению прообраз в  $I_n$  при отображении  $\tilde{f}$  всякой внутренней точки из  $\lambda_i$  есть регулярная в кубе  $I_n$  компонента уровня. Тогда из определения регулярной компоненты и леммы 31 следует, что на  $l_i$  найдётся хотя бы одна точка ветвления дерева  $T_f$ , прообраз в  $I_n$  которой (при отображении  $\tilde{f}$ ) есть регулярная в  $I_n$  компонента множества уровня, разделяющая  $I_n$  не менее чем на три части (в силу свойства 3 § 24), что противоречит лемме 38. Пришли к противоречию. Следовательно, функция  $f^*(\eta)$  монотонна на  $l_i$ .

*Теорема 44. Граница кольцоида  $K_i$  состоит из двух компонент  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ , одна из которых отделяет другую от бесконечности. Значение функции  $f(x)$  на  $\alpha_i$  и на  $\beta_i$  постоянно и равно верхней и нижней граням множества значений функции  $f(x)$  на кольцоиде  $K_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).*

*Доказательство.* Пусть  $l_i$  есть образ кольцоида  $K_i$  на  $T_f$ . Теорема 41 утверждает, что  $l_i$  есть гомеоморф интервала. На  $l_i$  фиксируем две последовательности точек  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), соответственно монотонно сходящиеся к концам  $a_i$  и  $b_i$  дуги  $l_i$  и такие, что отрезок  $l_{a_i, a_j}$  не содержит ни одной из точек  $b_{ij}$ . Обозначим через  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\bar{\alpha}_i$ ,  $\bar{\beta}_i$  прообразы точек  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $a_i$ ,  $b_i$ .

Докажем, что либо  $\alpha_{i1}$  отделяет  $\beta_{i1}$  от бесконечности, либо  $\beta_{i1}$  отделяет  $\alpha_{i1}$  от бесконечности. Предположим противное, т. е. что ни одна из указанной пары компонент уровня не отделяет другую от бесконечности. Тогда в силу свойств 2 и 3 § 24 на отрезке  $l_{a_{i1}, b_{i1}}$  существует точка  $\gamma$  такая, что её прообраз  $\gamma'$  разделяет  $I_n$  более чем на две части, причём  $\gamma'$  принадлежит  $K_i$ , а этого быть не может, так как  $\gamma'$ , будучи регулярной компонентой, в силу леммы 39 разделяет  $I_n$  лишь на две части. Мы пришли к противоречию, и следовательно, либо  $\alpha_{i1}$  отделяет  $\beta_{i1}$  от бесконечности, либо  $\beta_{i1}$  отделяет  $\alpha_{i1}$  от бесконечности. Для определённости мы будем предполагать первое.

Ясно, что из каждой тройки точек интервала  $l_i$  одна разделяет две другие на  $l_i$ , а поэтому из каждой тройки компонент уровней, лежащих в  $K_i$ , одна разделяет в кубе  $I_n$  две другие (см. свойство 2 § 24). Из последнего утверждения и того, что  $\alpha_{i1}$  отделяет  $\beta_{i1}$  от бесконечности, следует по индукции, что  $\alpha_{ij+1}$  отделяет  $\alpha_{ij}$  от бесконечности и  $\beta_{ij}$  отделяет  $\beta_{i, j+1}$  от бесконечности. Из последнего вытекает, что

топологический предел  $\alpha_i$  последовательности  $\alpha_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) отделяет от бесконечности топологический предел  $\beta_i$  последовательности  $\beta_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ).

Покажем, что  $\alpha_i + \beta_i$  совпадает с границей  $\Gamma_i$  кольцоида  $K_i$ . Пусть  $\bar{d}$  есть точка из  $\Gamma_i$ , а  $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots$  — последовательность точек из  $K_i$ , сходящаяся к  $\bar{d}$ , и  $\delta_1, \delta_2, \dots$  — последовательность компонент уровней, содержащих соответственно точки  $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, \dots$  (очевидно, можно предполагать, что на каждой  $\delta_i$  из множества  $\sum_{i=1}^{\infty} \bar{d}_i$  лежит лишь одна точка  $\bar{d}_i$ ). Отображение  $\tilde{f}$  ставит в соответствие компоненте  $\delta_j$  точку  $\bar{d}_j$  на  $l_i$ . Из того, что  $\bar{d}$  принадлежит  $\Gamma_i$ , очевидно, следует, что последовательность  $\{\bar{d}'_j\}$  не может иметь предельных точек внутри  $l_i$ , а тогда хотя бы одна из  $a_i$  и  $b_i$  является предельной точкой для  $\{\bar{d}'_j\}$ . Для определенности предположим, что  $a_i$  есть предельная точка для  $\{\bar{d}'_j\}$ . Покажем, что во всякой окрестности точки  $\bar{d}$  есть точки из множества  $\{a_{ij}\}$ .

Пусть задано  $\varepsilon > 0$ , тогда, начиная с некоторого номера  $j_0$ , расстояние  $|\bar{d}\bar{d}_j| < \varepsilon$ . Из того факта, что  $a_i$  является предельной точкой для последовательностей  $\{a_{ij}\}$  и  $\{\bar{d}'_j\}$ , следует, что можно указать три числа  $j_1, j_2$  и  $j_3$  такие, что  $j_1 > j_0$ ,  $j_3 > j_0$  и точка  $a_{ij_3}$  лежит между  $\bar{d}'_{j_1}$  и  $\bar{d}'_{j_3}$ . По свойству 2 § 24 компонента  $\alpha_{ij_3}$  разделяет в кубе  $I_n$  компоненты  $\delta_{j_1}$  и  $\delta_{j_3}$ , а тогда на отрезке  $[\bar{d}_{j_1}\bar{d}_{j_3}]$  существует точка  $q$ , принадлежащая компоненте уровня  $\alpha_{ij_3}$ . Так как  $|\bar{d}\bar{d}_{j_3}| < \varepsilon$  и  $|\bar{d}\bar{d}_{j_3}| < \varepsilon$ , то  $|\bar{d}q| < \varepsilon$ . Последнее означает, что  $\Gamma_i$  содержитя в  $\alpha_i + \beta_i$ . Из того факта, что  $K_i$  является полным прообразом в кубе  $I_n$  гомеоморфа интервала  $l_i$  при отображении  $\tilde{f}$ , и из непрерывности  $\tilde{f}$  следует, что  $\alpha_i + \beta_i$  содержитя в  $\Gamma_i$ . Значит,  $\alpha_i + \beta_i$  является границей  $K_i$ . Ясно, что  $\alpha_i + \beta_i$  состоит из двух компонент (в теоретико-множественном смысле).

Из непрерывности функции  $f(x)$  следует, что  $f(x)$  постоянна на каждой из  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ . В силу теоремы 43 функция  $f^*(\eta)$  монотонна на  $l_i$ , а из этого вытекает, что  $f^*(a_i)$  и  $f^*(b_i)$ , а следовательно, и  $f(\alpha_i)$  и  $f(\beta_i)$  суть верхняя и нижняя грани

значений функции  $f(x)$  на кольцоиде  $K_i$ , где  $f(\alpha_i)$  и  $f(\beta_i)$  суть значения (постоянные) функции  $f(x)$  на множествах  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ .

Теорема 45. *На внутренней границе  $\beta_i$  кольцоида  $K_i$  существует точка  $O_i$ , в которой функция  $f(x)$  имеет нулевой градиент.*

Доказательство. Обозначим через  $\beta_i^*$  ту компоненту уровня, которая содержит  $\beta_i$ .

Допустим, что ни в какой точке из  $\beta_i$  градиент функции  $f(x)$  не обращается в нуль.

Тогда разность множеств  $\beta_i^* — \beta_i$  не пуста. В самом деле, будучи внутренней границей кольцоида,  $\beta_i$  не может пересекаться с границей куба  $I_n$ , но тогда оказалось бы, что  $\beta_i^*$  есть регулярная (в  $I_n$ ) компонента множества уровня, чего быть не может.

Из того, что  $\beta_i^* — \beta_i$  не пусто, и из определения связности следует, что существует последовательность точек  $O_i^{(1)}, O_i^{(2)}, \dots$ , лежащая в  $\beta_i^* — \beta_i$  и сходящаяся к некоторой точке  $O_i$  из  $\beta_i$ . Ясно, что пересечение  $\beta_i$  с достаточно малой окрестностью  $\varepsilon(O_i)$  точки  $O_i$  гомеоморфно куску гиперплоскости. Кроме того, в  $\varepsilon(O_i)$  содержится некоторая система точек из последовательности  $O_i^{(1)}, O_i^{(2)}, \dots$ .

Полученное противоречит теореме единственности неявной функции. Теорема 45 доказана.

Замечание. Относительно внешней границы кольцоида можно доказать следующее: если внешняя граница кольцоида не имеет общих точек с границей куба  $I_n$ , то на ней существует хотя бы одна точка, в которой градиент функции  $f(x)$  равен нулю.

Теорема 46. *Если две точки из  $I_n$ , не лежащие на некотором кольцоиде, разделены этим кольцоидом, то эти точки разделены каждой из компонент границы рассматриваемого кольцоида \*).*

Доказательство. Пусть  $a$  и  $b$  суть две точки из  $I_n$ , разделённые кольцоидом  $K_i$ .

Предположим, что одна из компонент  $\alpha_i$  границы кольцоида  $K_i$  не разделяет точек  $a$  и  $b$ . Тогда существует континуум  $\beta$ , содержащий точки  $a$  и  $b$  и не пересекающийся с  $\alpha_i$ .

\*) При этом считается, что всякое множество отделяет любую свою точку от всякой другой точки пространства.

Так как  $\alpha_i$  и  $\beta$  замкнуты и не пересекаются, то расстояние  $\rho(\alpha_i, \beta) = \varepsilon > 0$ .

Обозначим через  $\varepsilon(\beta)$  множество всех таких точек из  $I_n$ , каждая из которых удалена от  $\beta$  менее чем на  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Ясно, что  $\varepsilon(\beta)$  является открытым связным множеством, для которого  $a$  и  $b$  являются внутренними точками. В таком случае существует ломаная  $\gamma$  с концами в  $a$  и  $b$ , лежащая целиком внутри  $\varepsilon(\beta)$ . Ясно, что  $\gamma$  не имеет общих точек с  $\alpha_i$ . Обозначим через  $u(c)$  длину куска ломаной  $\gamma$  от точки  $a$  до произвольной точки  $c$  из  $\gamma$ . Так как  $a$  и  $b$  разделены кольцоидом  $K_i$ , то пересечение  $\gamma$  с  $K_i$  не пусто. Но в то же время точка  $a$ , не принадлежащая кольцоиду  $K_i$ , лежит на  $\gamma$ , а тогда  $\gamma$  обязана пересекаться с границей кольцоида  $K_i$ . По теореме 43 граница  $K_i$  состоит из двух компонент  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ . Так как  $\gamma$  не пересекается с  $\alpha_i$ , то она пересекается с  $\beta_i$ .

Пусть  $c_1$  и  $c_2$  суть две такие точки из  $\beta_i$ , что  $u(c_1)$  и  $u(c_2)$  представляют собой минимальное и максимальное значения параметра  $u(c)$  для множества точек  $c$ , принадлежащих пересечению  $\gamma$  с  $\beta_i$ . Очевидно, что куски ломаной  $ac_1$  и  $bc_2$  не пересекаются с  $K_i$ , так как в противном случае на одном из них нашлась бы точка из  $\beta_i$ , что противоречит выбору точек  $c_1$  и  $c_2$ . Так как сумма пересекающихся связных множеств связна, то множество  $\delta$ , являющееся суммой кусков  $ac_1$  и  $bc_2$  ломаной  $\gamma$  и множества  $\beta_i$ , связно. А тогда ясно, что  $\delta$  есть континуум, содержащий точки  $a$  и  $b$  и не пересекающийся с  $K_i$ , а это означает, что  $K_i$  не разделяет точек  $a$  и  $b$ , что противоречит условиям рассматриваемой теоремы.

### § 31. Связки кольцоидов

Пусть  $f(x)$  есть непрерывно дифференцируемая на  $I_n$  функция,  $K_1, K_2$  — кольцоиды, соответствующие этой функции.

**Определение 25.** Пусть  $\{K_i\} = Q$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) есть конечная подсистема кольцоидов из  $K$ . Мы скажем, что кольцоид  $K_j$  вложен в  $K_i$  ( $i \neq j$ ), если  $K_i$  отделяет  $K_j$  от бесконечности. Так как система  $K_1, \dots, K_m$  состоит из конечного числа кольцоидов, то существует хотя бы один кольцоид системы  $Q$  такой, что никакой другой кольцоид из  $Q$  в него не вложен. Назовём *связкой* конечную последовательность вложенных друг в друга кольцоидов. Обозначим через  $a_i$

и  $b_i$  верхнюю и нижнюю грани значений функции  $f(x)$  на кольцоиде  $K_i$  и положим  $\eta'_i = b_i - a_i$ . Пусть  $\{\Psi'_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, m'$ ) суть всевозможные связки, составленные из кольцоидов системы  $Q$ , а  $\eta'_i$  — сумма колебаний  $\eta'_i$  по всевозможным кольцоидам, входящим в связку  $\Psi'_i$ . Обозначим через  $\eta_1$  верхнюю грань значений  $\eta'_i$  по всевозможным связкам из  $\{\Psi'_i\}$ . Так как число  $m'$  всевозможных связок, составленных из кольцоидов системы  $Q$ , конечно, то существует некоторая связка  $\Psi_1$ , на которой величина  $\eta'_i$  достигает своей верхней грани  $\eta_1$ . Связку  $\Psi_1$  мы называем *регулярной связкой системы  $Q$* . Из системы  $Q$  вычтем все кольцоиды, вошедшие в  $\Psi_1$ , и для оставшейся системы  $Q - \Psi_1$  аналогичным образом фиксируем регулярную связку  $\Psi_2$  системы  $Q - \Psi_1$  и т. д. Таким образом, система  $Q$  распадается на связки  $\Psi_1, \dots, \Psi_{m_0}$ , где  $\Psi_i$  является регулярной связкой системы  $Q - \sum_{j=1}^{i-1} \Psi_j$  ( $i = 1, 2, \dots, m_0$ ).

При этом каждой из указанных связок  $\Psi_i$  ставится в соответствие число  $\eta_i$ , равное сумме колебаний функции  $f(x)$  на кольцоидах, входящих в  $\Psi_i$ . Приведённое разбиение системы  $Q$  мы будем называть *правильным разбиением системы  $Q$  на связки  $\Psi_i$* .

Отметим, что правильное разбиение системы кольцоидов на связки, вообще говоря, неоднозначно.

Из определения нетрудно вывести следующие свойства правильного разбиения конечной системы кольцоидов на связки.

**Свойство 1.** Любая связка  $\Psi_i$  есть такая конечная последовательность вложенных друг в друга кольцоидов  $\{K_i^p\}$  ( $p = 1, 2, \dots, m_i$ ), что  $K_i^{p_2}$  разделяет кольцоиды  $K_i^{p_1}$  и  $K_i^{p_3}$ , если  $p_1 < p_2 < p_3$ , и  $K_i^{p_2}$  отделяет от бесконечности  $K_i^{p_1}$ , если  $p_1 < p_2$ .

**Свойство 2.** Если некоторый кольцоид  $K_j^k$  из связки  $\Psi_j$  разделяет кольцоиды  $K_i^{k_1}$  и  $K_i^{k_2}$  из связки  $\Psi_i$  ( $k_2 > k_1$ ), т. е. если кольцоид  $K_j^k$  вложен в  $K_i^{k_2}$  и не вложен в  $K_i^{k_1}$ , то и всякий другой кольцоид из связки  $\Psi_j$  расположен между кольцоидами  $K_i^{k_1}$  и  $K_i^{k_2}$ .

**Свойство 3.** Если некоторый кольцоид связки  $\Psi_j$  располагается между кольцоидами  $K_i^{k_1}$  и  $K_i^{k_2}$  связки  $\Psi_i$ , то никакой

кольцоид связки  $\Psi_i$  не вложен ни в один из кольцоидов связки  $\Psi_j$ .

**Свойство 4.** Если некоторый кольцоид связки  $\Psi_j$  располагается между кольцоидами  $K_i^{k_1}$  и  $K_i^{k_2}$  ( $k_1 < k_2$ ) из связки  $\Psi_i$ , то

$$\sum_{k=1}^{m_j} \eta_j^{*k} \leq \sum_{k=1}^{k_1} \eta_i^{*k},$$

где  $\eta_j^{*k}$  и  $\eta_i^{*k}$  суть соответственно колебания функции  $f(x)$  на кольцоидах  $K_j^k$  и  $K_i^k$ .

Доказательство свойства 1 ввиду его простоты опускаем.

**Доказательство свойства 2.** Пусть кольцоид  $K_j^k$  располагается между кольцоидами  $K_i^{k_1}$  и  $K_i^{k_2}$  ( $k_2 > k_1$ ). Так как по определению кольцоид  $K_i^{k_2}$ , отделяющий кольцоид  $K_j^k$  от бесконечности, не принадлежит связке  $\Psi_j$ , то, очевидно,  $j > i$ , т. е. связка  $\Psi_j$  построена «позже», чем связка  $\Psi_i$ , ибо в противном случае кольцоид  $K_i^{k_2}$  как кольцоид, охватывающий  $K_j^k$ , а следовательно, охватывающий самый внутренний кольцоид из связки  $\Psi_j$ , был бы включён в  $\Psi_i$ . Из последнего и свойства 1 следует, что произвольный кольцоид  $K_j^l$  связки  $\Psi$  не отделяет ни одного из кольцоидов связки  $\Psi_i$  от бесконечности. Рассмотрим теперь два возможных случая: 1) кольцоид  $K_j^k$  отделяет кольцоид  $K_j^l$  от бесконечности и 2) кольцоид  $K_j^l$  отделяет  $K_j^k$  от бесконечности.

В первом случае кольцоид  $K_i^{k_2}$ , отделяющий от бесконечности  $K_j^k$ , отделяет также и  $K_j^l$ . Во втором случае  $K_i^{k_2}$  также отделяет  $K_j^l$  от бесконечности, ибо в противном случае кольцоид  $K_j^k$ , не будучи отделённым от  $K_j^l$  кольцоидом  $K_i^{k_2}$ , не был бы отделён им и от бесконечности. Следовательно,  $K_j^l$  располагается между теми же кольцоидами, что и  $K_j^k$ .

**Доказательство свойства 3.** Как уже указывалось в доказательстве свойства 2, из того, что  $K_j^k$  располагается между кольцоидами  $K_i^{k_1}$  и  $K_i^{k_2}$ , следует, что  $i < j$ . Если предположить, что  $K_i^{k_0}$  вложен в некоторый  $K_j^{k_3}$ , то из того, что  $K_j^{k_3}$  отделяет от бесконечности  $K_i^{k_0}$ , и того, что связка  $\Psi_i$

построена «раньше», чем связка  $\Psi_j$ , следует, что  $K_j^{k_3}$  должен принадлежать связке  $\Psi_i$ , но это противоречит первоначальному условию.

Доказательство свойства 4. Так как  $K_j^k$  располагается между  $K_i^{k_1}$  и  $K_i^{k_3}$ , то каждый из кольцоидов  $K_i^{k_1}$ ,  $K_i^{k_1+1}, \dots, K_i^{m_i}$  отделяет от бесконечности связку  $\Psi_j$  (свойство 3). Ясно, что  $i < j$ .

Если предположить, что  $\sum_{k=1}^{m_j} \eta_j^{*k} > \sum_{k=1}^{k_1} \eta_i^{*k}$ , то

$$\sum_{k=1}^{m_j} \eta_j^{*k} + \sum_{l=k_1}^{m_i} \eta_i^{*l} > \sum_{l=1}^{m_i} \eta_i^{*l}.$$

Но тогда при построении  $i$ -й связки за  $\Psi_i$  должна быть принята система кольцоидов  $K_j^1, \dots, K_j^{m_j}, K_i^{k_1}, K_i^{k_1+1}, \dots, K_i^{m_i}$ , а не  $K_i^1, K_i^2, \dots, K_i^{m_i}$ , ибо ни один из кольцоидов связки  $\Psi_j$  не принадлежит  $\sum_{l=1}^{i-1} \Psi_l$ . Но это противоречит первоначальному условию.

## § 32. Вариация гладкой функции одного переменного

Докажем следующее:

Теорема 47. Пусть функция  $y = f(x)$ , заданная на единичном отрезке  $I_1$ , и её производные всех порядков до  $l-1$  включительно удовлетворяют условию Липшица с константой  $L_1 < 1$ .

Тогда  $H = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt[l]{\eta_i} < 2l$ , где  $\eta_i$  есть сумма колебаний  $\eta_i^{*k}$  по всем кольцоидам  $K_i^k \in \Psi_i$ .

Лемма 40. Пусть функция  $y = f(x)$ , заданная на отрезке  $I_1$  длины  $\rho$ , и её производные всех порядков до  $l-1$  включительно удовлетворяют условию Липшица с константой  $L_1 < 1$ . Пусть  $x_1, \dots, x_{l-1}$  — такие точки из  $I_1$ , что для  $k = 1, 2, \dots, l-1$

$$\frac{d^k f(x_k)}{dx^k} = 0.$$

Тогда колебание функции  $f(x)$  на отрезке  $I_1$  не превосходит  $\rho^l$ .

Доказательство. Обозначим через  $\eta_0$  колебание функции  $f(x)$  на отрезке  $I_1$ . Пусть  $M_k$  есть максимум модуля  $k$ -й производной функции  $f(x)$  на отрезке  $I_1$ . Из теоремы Лагранжа следует, что

$$\eta_0 \leq \rho M_1; \quad M_1 \leq \rho M_2; \dots; \quad M_{l-1} \leq \rho L_1,$$

так как производная любого порядка, меньшего чем  $l$  хотя бы в одной точке отрезка  $I_1$ , обращается в нуль.

Собирая эти неравенства в одно, получим:

$$\eta_0 \leq \rho^l L_1 \leq \rho^l,$$

так как  $L_1 < 1$ .

Доказательство теоремы 47. Пусть  $K_i = \Psi_i$  есть интервал, являющийся кольцом и в то же время связкой, соответствующей функции  $f(x)$ .

Если множество  $\{K_i\}$  состоит из одного интервала  $K_1$ , то  $H \leq \sqrt[l]{L_1} < l$ , ибо  $L_1 < 1$ , т. е. в таком случае утверждение теоремы 47 очевидно. Поэтому далее мы будем предполагать, что множество  $\{K_i\}$  состоит более чем из одного интервала.

Пусть  $K_1, \dots, K_m$  есть произвольная конечная подсистема интервалов из системы  $\{K_i\}$ , перенумерованная слева направо. Обозначим через  $R_p$  интервал из области задания функции  $f(x)$ , левым концом которого является левый конец интервала  $K_{(p-1)l+1}$ , а правым концом — правый конец интервала  $K_{pl}$  ( $p = 1, 2, \dots, v = \left[ \frac{m}{l} \right]$ ), а через  $R_{v+1}$  — некоторый интервал из области задания функции  $f(x)$ , содержащий интервалы  $K_i$  ( $i = v+1, \dots, m$ ), где  $v = \left[ \frac{m}{l} \right]$ . Так как во всяком конце каждого из интервалов  $K_i$ , не совпадающем с концом области задания функции  $f(x)$ , производная  $f'(x)$  равна нулю, то в силу теоремы Ролля на каждом из интервалов  $R_p$  производные всех порядков (до  $l-1$  включительно) обращаются в нуль. А тогда в силу леммы 40

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt[l]{\eta_i(R_p)} \leq l \rho_p \quad (p = 1, \dots, v),$$

где  $\eta_i(R_p) = \eta_i$ , если  $K_i \subset R_p$ , и  $\eta_i(R_p) = 0$ , если  $K_i \not\subset R_p$ , а  $\rho_p$  — длина интервала  $R_p$ . Так как  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица и так как  $R_{v+1}$  содержит не более  $l-1$  интервалов из  $K_1, \dots, K_m$ , то

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt[l]{\eta_i(R_{v+1})} \leq l \rho_{v+1} \leq l.$$

Собирая полученные неравенства, имеем:

$$\sum_{i=1}^m \eta_i = \sum_{p=1}^{v+1} \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(R_p) \leq 2l.$$

А так как система интервалов  $K_1, \dots, K_m$  есть произвольная конечная подсистема из  $\{K_i\}$ , то

$$H = \sup_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m \eta_i \leq 2l.$$

### § 33. Теорема Е. М. Ландиса

Ниже нам придётся неоднократно пользоваться следующим результатом Е. М. Ландиса.

**Теорема 48 (Е. М. Ландиса).** Пусть функция  $n$  первых ( $n \geq 2$ )  $y = f(x_1, \dots, x_n) = f(x)$ , заданная на единичном кубе  $J_n$ , и её частные производные всех порядков до  $n-1$  включительно удовлетворяют условию Липшица.

Пусть  $Q$  — множество точек  $x \in J_n$  таких, что  $\text{grad } f(x) = 0$  для  $x \in Q$ .

Тогда

$$m^1 \{f(Q)\} = 0,$$

где  $f(Q)$  — множество значений функции  $f(x)$  на множестве  $Q$ .

Доказательству теоремы предполём несколько лемм.

Пусть  $L$  есть константа Липшица для всех частных производных функции  $f(x)$  порядка  $n-1$ . Обозначим через  $Q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-2$ ) совокупность таких точек  $x \in J_n$ , где все частные производные функции  $f(x)$  до порядка  $k$  включительно обращаются в нуль, но где найдётся хотя бы одна производная  $k+1$ -го порядка, отличная от нуля. Через  $Q_{n-1}$  обозначим множество таких точек, где все частные

производные функции  $f(x)$  до  $n-1$ -го порядка включительно обращаются в нуль.

Лемма 41.  $m^1\{f(Q_{n-1})\} = 0$ .

Доказательство. Пусть  $\Gamma = f(Q_{n-1})$  и  $m^1(\Gamma) = v$ . Пусть через  $Q'_{n-1}$  обозначено множество точек из  $Q_{n-1}$ , являющихся точками плотности, и  $Q''_{n-1} = Q_{n-1} - Q'_{n-1}$  ( $Q''_{n-1}$  может быть пусто). Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $x \in Q'_{n-1}$  — произвольная точка. Найдём такое число  $\rho'_{x'}$ , что для любого числа  $r'_{x'} < \rho'_{x'}$  имеет место

$$\frac{m^n(s(r'_{x'}, x') \cap Q_{n-1})}{V(r'_{x'})} > 1 - \varepsilon^n, \quad (1)$$

где  $s(R, x)$  —  $n$ -мерный шар радиуса  $R$  с центром в  $x$  и  $V(R)$  — объём  $n$ -мерного шара радиуса  $R$ .

Покроем точку  $x'$  всевозможными такими шарами  $s(r'_{x'}, x')$  с центром в  $x'$  и радиусами  $r'_{x'} < \rho'_{x'}$ . Для любой точки  $\eta \in s(r'_{x'}, x')$  найдётся в силу (1) точка  $\zeta \in Q_{n-1}$  такая, что расстояние  $\rho(\eta, \zeta) < \varepsilon \cdot r'_{x'}$ . Отсюда следует, что все  $(n-1)$ -е производные функции  $f(x)$  на  $s(r'_{x'}, x')$  по модулю не превосходят  $\varepsilon \cdot r'_{x'} \cdot L$ , откуда, принимая во внимание, что в точке  $x'$  все производные до  $(n-1)$ -го порядка обращаются в нуль, находим, что колебание функции  $f(x)$  на  $s(r'_{x'}, x')$  не превосходит  $c\varepsilon \cdot L \cdot r'^n_{x'}$ , где  $c$  — константа, зависящая от размерности  $n$  пространства. Или, положив  $\Delta'_{x', r'_{x'}} = f[s(r'_{x'}, x')]$ , имеем:

$$|\Delta'_{x', r'_{x'}}| \leq c \cdot \varepsilon \cdot L \cdot r'^n_{x'}. \quad (2)$$

(Для определённости будем считать, что шар  $s(r'_{x'}, \xi')$  замкнут, так что  $\Delta'_{x', r'_{x'}}$  есть отрезок, через  $|\Delta'_{x', r'_{x'}}|$  обозначена его длина.)

Заключим далее множество  $Q''_{n-1}$  в открытое множество  $G$  такое, что  $m^n(G) < \varepsilon$ .

Пусть  $x' \in Q''_{n-1}$  — произвольная точка. Пусть  $\rho''_{x''} > 0$  — расстояние от  $x''$  до границы  $G$ . Покроем точку  $x''$  всевозможными  $n$ -мерными шарами  $s(r''_{x''}, x'')$  радиуса  $r''_{x''} < \rho''_{x''}$ . Колебание функции  $f$  на  $s(r'', x'')$  не превосходит  $c \cdot L \cdot r'^n_{x''}$ .

или, положив  $\Delta''_{x'', r''_{x''}} = f[s(r''_{x''}, x'')]$ , имеем:

$$|\Delta''_{x'', r''_{x''}}| \leq c \cdot L \cdot r''_{x''}^n. \quad (3)$$

Отрезки  $\{\Delta'_{x', r'_{x'}}\}$ ,  $\{\Delta''_{x'', r''_{x''}}\}$ , где  $x' \in Q'_{n-1}$ ,  $x'' \in Q''_{n-1}$ , образуют покрытие множества  $\Upsilon$  в смысле Витали. Выберем из них счётное число непересекающихся отрезков, покрывающих почти всё множество  $\Upsilon$ . Пусть эти отрезки суть

$$\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta''_1, \Delta''_2, \dots,$$

где  $\Delta'_i$  есть отрезок типа  $\Delta'_{x', r'_{x'}}$  и  $\Delta''_i$  — типа  $\Delta''_{x'', r''_{x''}}$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta'_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |\Delta''_i| = v. \quad (4)$$

С другой стороны, из (2) и (3) имеем:

$$|\Delta'_i| \leq c_1 \cdot \varepsilon \cdot L \cdot m^n \{f^{-1}(\Delta'_i)\} \quad (5)$$

и

$$|\Delta''_i| \leq c_1 \cdot L \cdot m^n \{f^{-1}(\Delta''_i)\}, \quad (6)$$

где  $c_1$  — константа, зависящая только от размерности пространства.

Отсюда находим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta'_i| \leq c_1 \cdot \varepsilon \cdot L \cdot \sum_{i=1}^{\infty} m^n \{f^{-1}(\Delta'_i)\} \leq c_1 \cdot \varepsilon \cdot L$$

и

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta''_i| \leq c_1 \cdot L \cdot \sum m^n \{f^{-1}(\Delta''_i)\} \leq c_1 \cdot \varepsilon \cdot L,$$

или  $v \leq 2c_1 \cdot \varepsilon \cdot L$ , и так как  $\varepsilon$  произвольно, то  $v = 0$ .

Определение 26. Пусть  $f(x)$  — функция, заданная на множестве  $e \in I_n$ . Мы скажем, что функция  $f(x)$  слабо дифференцируема в точке  $x_0 \in e$  до порядка  $k$  по множеству  $e$ , если существует полином  $P_{x_0}^k(x_1, \dots, x_n) \equiv P_{x_0}^k(x)$  степени не выше  $k$  такой, что

$$f(x) - f(x_0) - P_{x_0}^k(x) = o(\rho(x, x_0))^k \quad \text{при } x \in e.$$

Полином  $P_{x_0}^k(x)$  будем называть в этом случае слабым дифференциалом порядка  $k$  функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  по множеству  $e$ .

Скажем, что функция  $f(x)$ , заданная на множестве  $e \in I_n$ , сильно дифференцируема на множестве  $e$  до порядка  $k$ , если в каждой точке  $x_0 \in e$  существует слабый дифференциал  $k$ -го порядка  $P_{x_0}^k(x)$ , коэффициенты которого равномерно непрерывны на  $e$ , и для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для любой пары точек  $x', x'' \in e$  при  $\rho(x', x'') < \delta$  имеет место  $|f(x') - f(x'') - P_{x'}^k(x'')| < \varepsilon (\rho(x', x''))^k$ .

Замечание. По теореме Уитнея [15], если функция  $f(x)$  сильно дифференцируема до порядка  $k$  на замкнутом множестве  $e \subset I_n$ , то её можно распространить на  $I_n$  так, что она будет непрерывно дифференцируема  $k$  раз на  $I_n$ , и её дифференциалы в точках из  $e$  будут совпадать со слабыми дифференциалами функции  $f(x)$  в точках из  $e$  по  $e$ .

Лемма 42. Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) — m$  раз дифференцируемая функция, заданная в  $I_n$ . Пусть в точке  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  первые  $k$  ( $k < m$ ) последовательных полных дифференциалов функции  $f(x)$  равны нулю. Пусть  $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_n$  — функция, заданная на  $I_{n-1}$  и обладающая в точке  $x_1, \dots, x_{n-1}^0$  слабыми дифференциалами до порядка  $m-k$  включительно по  $I_{n-1}$ .

Тогда функция  $(n-1)$ -го переменного  $f(x_1, \dots, x_{n-1})$ ,  $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$  в точке  $x_1^0, \dots, x_{n-1}^0$  слабо дифференцируема до порядка  $m$  по  $I_{n-1}$ .

Доказательство этой леммы сразу получается с помощью разложений функций  $f(x)$  и  $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$  в ряд Тейлора с остаточным членом.

Лемма 43. Пусть  $f(x)$  — непрерывная функция, заданная в  $I_n$ . Пусть  $B \subset I_n$  — борелевское множество, в каждой точке которого функция  $f$  слабо дифференцируема до порядка  $m$  по  $I_n$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется замкнутое множество  $e \subset B$  такое, что функция  $f$  сильно дифференцируема на множестве  $e$  до порядка  $m$  и  $m^1 \{f[B]\} — m^1 \{f[e]\} < \varepsilon$ .

Доказательство. Возьмём последовательность положительных чисел  $\{\eta_n\}$ ,  $\eta_n \rightarrow 0$ . Построим по индукции последовательность целых чисел  $\{n_k\}$  и борелевских мно-

жеста  $\{B_k\}$  таких, что

$$1) \quad B_k \subset B_{k+1};$$

$$2) \quad |f(x) - f(x_0) - P_{x_0}^k(x)| < \eta_k (\rho(x, x_0))^m,$$

если только  $\rho(x, x_0) < \frac{1}{n_k}$ ,  $x_0 \in B_k$  и  $x \in I_n$ ;

$$3) \quad m^1 \{f[B_k]\} > m^1 \{f[B]\} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим  $\tilde{B} = \prod B_k$ . Тогда

$$m^1 \{f[\tilde{B}]\} \geq m^1 \{f[B]\} - \frac{\varepsilon}{2}$$

(заметим, что множества  $f[B_k]$  и  $f[\tilde{B}]$  суть  $a$ -множества и, следовательно, измеримы). Далее в  $f[\tilde{B}]$  мы можем выбрать такое замкнутое множество  $D$ ,  $m^1 D > m^1 \{f[B]\} - \varepsilon$ , что на множестве  $e = f^{-1}[D]$  коэффициенты слабых дифференциалов будут непрерывны. Множество  $e$ , очевидно, и будет искомым.

Приступим теперь к доказательству теоремы 48.

Доказательство теоремы 48. Будем вести доказательство по индукции по числу  $n$  переменных функции  $f(x)$ .

Для  $n = 2$  справедливость теоремы следует непосредственно из леммы 41. Пусть для всех  $n < m$  теорема верна и в то же время не верна для  $n = m$ :

$$m^1 \{f[Q]\} > 0.$$

Так как  $Q = \sum_{k=1}^{m-1} Q_k$ , то найдётся такое  $k$ , что  $m^1 \{f[Q_k]\} > 0$ .

Из леммы 41 следует, что  $k < m - 1$ .

Для каждой точки  $x \in Q_k$  найдётся частная производная порядка  $k+1$ , отличная от нуля в точке  $x$ . Так как различных частных производных порядка  $k$  конечное число, то найдётся такое множество  $\tilde{Q}_k \subset Q_k$ , что  $m^1 \{f[\tilde{Q}_k]\} > 0$  и в каждой точке из  $\tilde{Q}_k$  отлична от нуля частная производная  $k+1$ -го порядка по данной последовательности переменных.

Пусть это

$$\frac{\partial^{k+1} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что  $a_m \neq 0$  (если это не так, то изменим названия координат). Положим  $\varphi(x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_m^{a_{m-1}}}$ . Тогда при  $(x_1, \dots, x_m) \in \tilde{Q}_k$  имеем:

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_m)}{\partial x_m} \neq 0.$$

Функция  $\varphi$  непрерывно дифференцируема  $m - k - 1$  раз. В окрестности  $\varepsilon(x)$  каждой точки  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \tilde{Q}_k$  равенство  $\varphi(x_1, \dots, x_m) = 0$  может быть разрешено относительно  $x_m$  так, что функция  $\Phi(x_1, \dots, x_{m-1}) = x_m$   $m - k - 1$  раз дифференцируема в соответствующей замкнутой области на плоскости  $x_m = 0$ . Найдётся, далее, такая из этих окрестностей, что  $m^1 \{f[\varepsilon(x) \cap \tilde{Q}_k]\} > 0$ .

Обозначим через  $\tilde{\varepsilon}(x)$  проекцию на координатную плоскость  $x_m = 0$  пересечения  $\varepsilon(x)$  с поверхностью  $\varphi = 0$  и через  $\tilde{\tilde{Q}}_k$  — проекцию пересечения  $\varepsilon(x) \cap \tilde{Q}_k$  на ту же координатную плоскость. Положим  $f^1 = f(x_1, \dots, x_{m-1}, \Phi(x_1, \dots, x_{m-1}))$  при  $(x_1, \dots, x_{m-1}) \in \tilde{\varepsilon}(x)$ . Функция  $f^1$  равномерно непрерывна на  $\tilde{\varepsilon}(x)$ , и потому её можно продолжить непрерывным отрезком на единичный куб  $I_{m-1}$  гиперплоскости  $x_m = 0$ . Далее, по лемме 42 в каждой точке  $(x_1, \dots, x_{m-1}) \in \tilde{\tilde{Q}}_k$  функция  $f^1$  слабо дифференцируема  $m - 1$  раз, причём слабые дифференциалы первого порядка равны нулю. Наконец,  $f^1[\tilde{\tilde{Q}}_k] > 0$ .

Применяя лемму 43, а затем упомянутую теорему Уитнея о продолжении функций, мы находим функцию  $f^2$ , заданную на  $I_{m-1}$ , непрерывно дифференцируемую  $m - 1$  раз и такую, что  $\text{grad } f^2 = 0$  на некотором множестве  $e(\tilde{\tilde{Q}}_k)$ , таком, что  $m \{f[e]\} > 0$ . Но это противоречит предположению индукции.

Теорема 48 доказана.

### § 34. Уровни полинома

Относительно полиномов мы докажем две следующие леммы.

**Лемма 44.** *Пусть  $P_n^m(x_1, \dots, x_n) = P_n^m$  есть полином относительно  $x_1, \dots, x_n$  степени  $m$ , рассматриваемый*

лишь на кубе  $I_n$ . Тогда существует константа  $c_2(m, n)$ , зависящая лишь от  $m$  и  $n$ , такая, что число компонент произвольного множества уровня полинома  $P_n^m$  не превосходит константы  $c_2(m, n)$ .

**Доказательство.** Из результатов О. А. Олейник [14] следует, что для всяких  $m_1$  и  $n_1$  существует константа  $c'(m_1, n_1)$  такая, что число компонент \*) произвольного множества уровня произвольного полинома  $P_{n_1}^{m_1}$  от  $n_1$  переменных степени не выше чем  $m_1$  (по каждому из переменных) не превосходит  $c'_2(m_1, n_1)$ .

Теперь с помощью индукции по числу  $n$  докажем утверждение леммы 44.

При  $n = 1$  в качестве константы  $c(m, 1)$  можно взять  $m$  (степень полинома  $P_1^m$ ), так как число компонент множества уровня полинома от одного переменного не превосходит числа корней уравнения  $P_1^m - t = 0$ , которых в свою очередь не более чем  $m$ .

Предположим, что утверждение леммы 44 доказано уже для  $n = 1, \dots, n-1$ . Пусть  $e_t$  есть множество уровня  $t$  полинома  $P_n^m$ , рассматриваемого лишь на  $I_n$ ,  $P_{nk}^m$  — тот же полином  $P_n^m$ , но рассматриваемый уже лишь на одной из  $n-1$ -мерных граней границы  $I_n$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, 2n$ ),  $e_{t_k}$  — множество уровня полинома  $P_{nk}^m$ . Так как каждая из компонент множества  $e_t$ , имеющая общие точки с границей куба  $I_n$ , с некоторой  $n-1$ -мерной гранью границы куба  $I_n$  имеет общую часть, состоящую не менее чем из одной компоненты, то число компонент множества  $e_t$ , пересекающихся с границей  $I_n$  куба  $I_n$ , не более  $2nc_2(m, n-1)$ . В силу последнего и результата О. А. Олейник получаем, что число компонент множества  $e_t$  не превосходит  $c'_2(m, n) + 2nc_2(m, n-1) = c_2(m, n)$ .

**Определение 27.** Компонента  $k$  множества уровня  $e_t$  функции  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  называется *экстремальной*, если существует окрестность  $\varepsilon(k)$  компоненты  $k$  такая, что

\*) В данный момент полином  $P_{n_1}^{m_1}$  рассматривается на всём пространстве  $E_{n_1}$ , содержащем  $I_{n_1}$ , и имеются в виду лишь ограниченные компоненты множества уровня.

выполняется одно из двух условий: 1) для всякой точки  $x$  из  $\varepsilon(k)$   $f(x) \geq f(k)$ ; 2) для всякой точки  $x$  из  $\varepsilon(k)$   $f(x) \leq f(k)$ .

**Лемма 45.** *Существует константа  $c_3(m, n)$ , зависящая лишь от  $m$  и  $n$ , такая, что число экстремальных компонент полинома  $P_n^m$  не превосходит  $c_3(m, n)$ .*

**Доказательство.** Нетрудно показать, что если экстремальная компонента  $k$  гладкой функции  $f(x)$  не пересекается с границей куба  $I_n$ , то в каждой точке  $x \in k$  градиент этой функции равен нулю.

Пусть  $k$  есть экстремальная компонента уровня полинома  $P_n^m$ , не выходящая на границу куба  $I_n$ , а  $c_3'(m, n)$  — число экстремальных компонент уровня полинома  $P_n^m$ , не имеющих общих точек с границей куба  $I_n$ . Обозначим через  $P_2^{mn}$  сумму квадратов всех частных производных первого порядка от полинома  $P_n^m$ . Тогда в каждой точке из  $k$  полином  $P_2^{mn}$  равен нулю.

Пусть  $k_0$  есть компонента нулевого множества уровня полинома  $P_2^{mn}$ . Так как  $k_0$ , будучи компонентой множества уровня, связно, и так как  $P_n^m$  представляет собой непрерывную функцию, то  $P_n^m$ , принимая на  $k_0$  два каких-либо значения  $t_1$  и  $t_2$ , принимает на  $k_0$  и всякое промежуточное значение  $t_1 \leq t_0 \leq t_2$ .

Пусть  $t_1$  и  $t_2$  суть два произвольных значения, принимаемых полиномом  $P_n^m$  на  $k_0$ . Предположим, что  $t_1 \neq t_2$ . Пусть  $t_1 < t_2$ . Тогда на всяком множестве уровня  $t$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ , существует хотя бы по одной точке из  $k_0$ , в каждой из которых градиент полинома  $P_n^m$  равен нулю, что противоречит теореме 48. Следовательно,  $t_1 = t_2$ .

Из последнего следует, что  $k_0$  совпадает с некоторой компонентой некоторого множества уровня полинома  $P_n^m$  а тогда в силу леммы 44  $c_3'(m, n) \leq c_2(2m, n)$ , так как относительно каждого из своих переменных полином  $P_2^{mn}$  имеет степень не выше чем  $2m$ .

Докажем лемму 45 с помощью индукции по числу  $n$ . При  $n = 1$  утверждение доказываемой леммы очевидно, поскольку число экстремальных компонент полинома  $P_1^m$  не превосходит числа корней уравнения  $(P_1^m)' = 0$ , т. е. число

экстремальных компонент полинома  $P_1^m$  не превосходит  $m-1$ .

Если  $c_3(m, n-1)$  есть константа, ограничивающая сверху число экстремальных компонент полинома  $P_{n-1}^m$ , рассматриваемого на  $(n-1)$ -мерном замкнутом кубе, то число экстремальных компонент полинома  $P_n^m$ , пересекающихся с границей куба  $I_n$ , не превосходит  $2nc_3(m, n-1)$ . Из последнего и того, что  $c'_3(m, n) \leq c_3(2m, n)$ , следует, что число всех экстремальных компонент уровня полинома  $P_n^m$ , рассматриваемого на  $I_n$ , не превосходит константы  $c'_3(m, n) + 2nc_3(m, n-1) = c_3(m, n)$ , зависящей лишь от  $m$  и  $n$ .

### § 35. Основная лемма

Этот и три нижеследующих параграфа мы посвятим доказательству основной леммы:

Лемма 46. Пусть  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  — функция, заданная на  $I_n$  со стороной  $\rho$ , и её частные производные всех порядков до  $l-1$  включительно ( $l > 1$ ) удовлетворяют условию Липшица с константой  $L_1$ .

Тогда существует константа  $c_4$ , зависящая лишь от  $n$ ,  $l$ ,  $\rho$  и  $L_1$ , такая, что для всякого правильного разбиения на связки произвольной конечной системы кольцоидов, соответствующих функции  $f(x)$ , величина

$$H^l = \sum_{i=1}^{m_0} (\eta_i)^{\frac{n}{l}} < c_4,$$

где  $\eta_i$  — сумма колебаний функции на кольцоидах связки  $\Psi_i$ , а  $m_0$  — число связок в правильном разбиении ( $n = 1, 2, \dots$ ;  $l = 2, 3, \dots$ ).

Отметим, что при  $n = 1$  утверждение леммы 46 уже доказано (см. теорему 48). Поэтому далее мы будем предполагать, что  $n > 1$ .

Отметим также, что, не уменьшая общности, константу Липшица  $L_1$  мы можем предполагать достаточно малой, поскольку, во-первых, домножением функции  $f(x)$  на константу можно добиться того, что рассматриваемая функция (уже домноженная) будет удовлетворять вместе со всеми своими частными производными до порядка  $l-1$  включительно

условию Липшица с достаточно малой константой, и, во-вторых, потому, что от умножения функции на положительную константу с соответствующая сумма  $H^l = \sum_{i=1}^m (\eta_i)^{\frac{n}{l}}$  домножается

на константу  $c^{\frac{n}{l}}$ . Поэтому в дальнейшем мы несколько раз будем ограничивать сверху константу  $L_1$ .

**Лемма 47.** *Пусть  $y = f(x) = f(x_1)$  есть определённая на некотором подмножестве отрезка  $I_1$  функция,  $m$  и  $M$  суть соответственно нижняя и верхняя грани значений этой функции. Тогда, если для всякого  $t$   $v_0(e_t) \leq l$ , то  $M - m \geq \frac{v_1(f, I_1)}{l}$ .*

**Доказательство.** По определению  $v_1(f, I_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(e_t) dt = \int_m^M v_0(e_t) dt$ , так как вне отрезка  $[m, M]$  функция  $v_0(e_t)$  равна нулю. А тогда  $v_1(f, I_1) \leq (M - m)l$ ; следовательно,  $M - m \geq \frac{v_1(f, I_1)}{l}$ . Лемма доказана.

Фиксируем теперь некоторую конечную систему кольцоидов  $\{K_1, \dots, K_m\} = Q$ , соответствующих непрерывно дифференцируемой функции  $f(x)$ .

Пусть  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m$  суть связки, образованные из кольцоидов  $K_1, K_2, \dots, K_m$ , полученные в результате некоторого правильного разбиения системы  $Q$ .

Пусть  $\Psi_i$  есть одна из вышеупомянутых связок, а  $K_i^j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_i$ ) — кольцоиды, образующие эту связку, причём нумерация этих кольцоидов такова, что  $K_i^{j+1}$  отделяет от бесконечности  $K_i^j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_i - 1$ ).

Пусть  $\eta_i^{*j}$  — колебание функции  $f(x)$  на кольцоиде  $K_i^j$ . Назовём  $\eta_i = \sum_{j=1}^{m_i} \eta_i^{*j}$  линейной вариацией функции  $f(x)$  на связке  $\Psi_i$ .

Фиксируем отрезок  $r_i$  длины  $\eta_i$  и точки  $b_i^0, \dots, b_i^m$  этого отрезка такие, что длина отрезка  $[b_i^0, b_i^p]$  равна  $\sum_{j=1}^p \eta_i^{*j}$  ( $p = 1, \dots, m$ ).

Пусть  $L_i^j$  есть образ кольцоида  $K_i^j$  на дереве  $T_f$  при отображении  $\tilde{f}$ . Так как в силу теоремы 42  $L_i^j$  есть гомеоморф интервала, то существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование  $\tilde{\chi}_i^j$  замкнутой дуги  $\tilde{L}_i^j$  на отрезок  $[b_i^{j-1}, b_i^j]$ . Положим  $\tilde{\chi}_i^j = \gamma_i^j(\tilde{f})$ .

Ясно, что  $\tilde{\chi}_i^j$  есть непрерывное преобразование кольцоида  $K_i^j$  в отрезок  $[b_i^{j-1}, b_i^j]$ , которое всякую компоненту уровня из  $K_i^j$  целиком переводит в одну точку из  $[b_i^{j-1}, b_i^j]$ . Нетрудно также убедиться, что преобразование  $\tilde{\chi}_i^j$  доопределяется по непрерывности на  $[b_i^{j-1}, b_i^j]$  таким образом, что компоненты границы кольцоида  $K_i^j$  перейдут при этом преобразовании в концы отрезка  $[b_i^{j-1}, b_i^j]$ , и при этом преобразования  $\tilde{\chi}_i^j$  ( $j = 1, 2, \dots, m_i$ ) можно считать такими, что внутренняя компонента границы кольцоида  $K_i^j$  при преобразовании  $\tilde{\chi}_i^j$  перейдёт в точку  $b_i^{j-1}$ , а внешняя — в точку  $b_i^j$ . Итак, в точку  $b_i^j$  из  $r_i$  преобразование  $\tilde{\chi}_i^j$  переводит внутреннюю компоненту границы кольцоида  $K_i^{j+1}$  и внешнюю компоненту границы кольцоида  $K_i^j$ , а во всякую точку  $c$  отрезка  $r_i$ , не совпадающую ни с одной из  $b_i^j$  ( $j = 0, \dots, m_i$ ), преобразование  $\tilde{\chi}_i^j$  переводит некоторую регулярную компоненту уровня функции  $f(x)$  и притом лишь одну.

На отрезке  $r_i$  определим функцию  $v^*(c)$  точки  $c$  следующим образом: пусть  $\gamma$  есть регулярная компонента уровня из  $K_i^j$ , а  $c$  — её образ в  $[b_i^{j-1}, b_i^j]$  при отображении  $\tilde{\chi}_i^j$ . В точке  $c$  функцию  $v^*(c)$  положим равной сумме колебаний  $\eta_i^{*k}$  функции  $f(x)$  на кольцоидах связки  $\Psi_i$ , отделённых компонентой  $\gamma$  от бесконечности, плюс  $|f(\beta_i^j) - f(\gamma)|$ , где  $f(\gamma)$  есть значение функции  $f(x)$  на компоненте  $\gamma$ , а  $f(\beta_i^j)$  — значение той же функции на внутренней границе кольцоида, содержащего  $\gamma$ . В точках  $b_i^j$  ( $j = 0, \dots, m_i$ ) функция  $v^*(c)$  доопределяется по непрерывности, что возможно, поскольку функция  $v^*(c)$  на ранее определённой области монотонна и равномерно непрерывна.

Положим  $\rho_c$  равным длине отрезка  $[b_i^0, c]$ . Ясно, что функция  $v^*(c) = v_1(\rho_c)$  есть непрерывная монотонно возрастающая функция от  $\rho_c$ , причём  $v_1(0) = 0$  и  $v_1(\eta_i) = \eta_i$ .

Пусть  $c_i^1, c_i^2, \dots, c_i^n$  суть точки отрезка  $r_i$  такие, что для всякого  $k \leq n$   $v^*(c_i^k) = p_i k = \frac{k \eta_i}{l \cdot n \cdot 2^l}$ , где  $l$  — некоторая константа. Точки  $c_i^k$  поставим в соответствие множество  $\gamma_i^k$  из замыкания  $\bar{\Psi}_i$  следующим образом: если  $c_i^k = b_i^j$ , то за  $\gamma_i^k$  примем внешнюю границу кольца  $K_i^j (j = 1, \dots, m_i)$ , если же  $c_i^k$  не совпадает ни с одной точкой из  $b_i^j (j = 1, \dots, m_i)$ , то за  $\gamma_i^k$  примем регулярную компоненту уровня из  $K_i^j$  такую, что  $\bar{\gamma}_i^j(\gamma_i^k) = c_i^k$ .

Обозначим через  $\alpha_i^k$  множество всех таких точек из  $\Psi_i$ , каждая из которых отделена от бесконечности множеством  $\gamma_i^k$ , но не отделена от бесконечности множеством  $\gamma_i^{k-1} (l = 1, \dots, m_0; T_i^0 — пустое множество)$ .

Ясно, что  $\alpha_i^k$  состоит из конечного числа вложенных друг в друга кольца  $K_i^{k'} + K_i^{k''}$ , где  $K_i^{k'}$  есть часть кольца, содержащего  $\gamma_i^{k-1}$ , ограниченная его внешней границей и компонентой  $\gamma_i^{k-1}$ , а  $K_i^{k''}$  — часть кольца из  $\Psi_i$ , содержащего  $\gamma_i^k$ , ограниченная его внутренней границей и множеством  $\gamma_i^k$ .

Ясно также, что

$$p_i = \frac{\eta_i}{l n 2^l} = \sum_{\alpha_i^k} \eta_i^{*k} + \eta_i^{*k'} + \eta_i^{*k''},$$

где  $\sum_{\alpha_i^k} \eta_i^{*k}$  — сумма колебаний функции  $f(x)$  на кольцах, содержащихся в  $\alpha_i^k$ , а  $\eta_i^{*k'}$  и  $\eta_i^{*k''}$  — колебания функции соответственно на  $K_i^{k'}$  и  $K_i^{k''}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Отметим, что  $K_i^{k'}$  и  $K_i^{k''}$  устроены так же, как и кольца, т. е. для них имеют место теоремы 42—46. В  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$ , содержащим куб  $I_n$  (см. лемму 46), фиксируем ортонормированный базис  $X = (x_1, \dots, x_n)$  (оси векторов  $x_1, \dots, x_n$  параллельны ребрам куба  $I_n$ ) и обозначим через  $x_1, \dots, x_n$  координаты произвольной точки  $x$  из  $E_n$  относительно этой системы.

Определение 28. Пусть  $e$  есть произвольное множество из  $E_n$ , проектирующееся на всякую  $k$ -мерную коор-

динатную плоскость  $\tau_k^i$  ( $k$ -мерную плоскость из  $E_n$ , содержащую  $k$  векторов из  $X = x_1, \dots, x_n$ ) в измеримое ( $m^k$ ) по Лебегу множество. Верхнюю грань численного значения  $k$ -мерной меры Лебега от проекции множества  $e$  на  $k$ -мерную координатную плоскость (по всевозможным  $k$ -мерным координатным плоскостям) мы назовём  *$k$ -мерным диаметром множества  $e$*  и обозначим через  $d_k(e)$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

Пусть  $\{\Psi_i^1\}$  ( $i = 1, 2, \dots, m_0^1; m_0^1 \leq m_0$ ) суть все такие связки из  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{m_0}$ , для каждой из которых одномерный диаметр соответствующего множества  $\alpha_i^1 = \alpha_{i1}^1$  не превосходит  $\sqrt[l]{\eta_i \cdot \frac{1}{n}}$ ,  $\{\Psi_i^k\}$  ( $i = 1, \dots, m_0^k; m_0^k \leq m_0$ ) — все такие связки из  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{m_0}$ , для каждой из которых  $k$ -мерный диаметр соответствующего множества  $\gamma_i^k = \gamma_{ik}^k$  не более

чем  $\frac{(\eta_i)^{\frac{k}{l}}}{n}$ , а  $(k-1)$ -мерный диаметр множества  $\gamma_{ik}^{k-1}$  не менее

чем  $\frac{(\eta_i)^{\frac{k-1}{l}}}{n}$  ( $i = 1, \dots, m_0^k; k = 2, 3, \dots, n-1$ ),

$\{\Psi_i^n\}$  ( $i = 1, \dots, m_0^n; m_0^n \leq m_0$ ) — все такие связки из  $\Psi_1, \dots, \Psi_{m_0}$ , для каждой из которых  $(n-1)$ -мерный диа-

метр множества  $\gamma_{in}^{n-1}$  не менее  $\frac{(\eta_i)^{\frac{n-1}{l}}}{n}$ .

Нетрудно сообразить, что каждая связка из  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{m_0}$  принадлежит хотя бы одной из систем  $\{\Psi_i^k\}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Обозначим через  $\eta_{ik}$  сумму колебаний функции  $f(x)$  на всех

кольцоидах, входящих в связку  $\Psi_i^k$ , и положим  $H_k^l = \sum_{i=1}^{m_0^k} (\eta_{ik})^{\frac{n}{l}}$ . Тогда, очевидно,

$$H^l = \sum_{i=1}^{m_0} (\eta_i)^{\frac{n}{l}} \leq \sum_{k=1}^n H_k^l. \quad (a)$$

В трёх нижеследующих параграфах мы оценим сверху каждую из величин  $H_k^l$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Отметим, что нижние индексы у связок  $\Psi_i^k$  фиксированы так, что при всяких  $i_1 < i_2$  соответствующие связки  $\Psi_{i_1}^k$  и  $\Psi_{i_2}^k$  таковы, что  $\eta_{i_1 k} \geq \eta_{i_2 k}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

### § 36. Оценка сверху величины $H_1^l$

На внутренней границе самого внутреннего кольцоида из  $\Psi_i^l$  фиксируем точку  $O_i$  и обозначим через  $\sigma_i$   $n$ -мерный замкнутый шар из  $E_n$  радиуса  $r_i^l = \sqrt{\eta_{i1}}$  с центром в точке  $O_i$  ( $i = 1, \dots, m_0^l$ ).

Из определения одномерного диаметра множества нетрудно вывести, что

$$\alpha_{i1}^l - \sigma_i = 0,$$

где  $\alpha_{i1}^l$  есть  $\alpha_i^l$  для  $\Psi_i^l$ .

Пусть  $O_i'$  есть точка пространства  $E_n$ , содержащего куб  $I_n$ , такая, что расстояние между точками  $O_i$  и  $O_i'$  равно  $10r_i^l$ , а  $\sigma_i'$  —  $n$ -мерный замкнутый шар из  $E_n$  радиуса  $r_i^l$  с центром в  $O_i'$ . Пусть  $r$  есть отрезок из  $E_n$ , один конец которого совпадает с точкой  $O_i$ , лежащей на внутренней границе самого внутреннего кольцоида из  $\Psi_i^l$ , а другой принадлежит границе куба  $I_n$ . Ясно, что вариация (изменение)  $v_1(f, r)$  функции  $f(x)$  на отрезке  $r$  не менее чем  $\eta_i$ . Но так как  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица, то  $v_1(f, r) \leq \leq |r| L_1$ . Мы можем считать, что константа Липшица  $L_1$  не превосходит  $\left[\frac{d_1(I_n)}{100n}\right]^l$ , а тогда  $r_i^l < \frac{d_1(I_n)}{100n}$ . Отсюда следует, что шары  $\sigma_i'$  ( $i = 1, 2, \dots, m_0^l$ ) можно предполагать лежащими строго внутри куба  $I_n$ .

**Лемма 48.** *Пусть  $f(x)$  есть функция, удовлетворяющая условиям леммы 46. Тогда, если  $L_1 < \frac{1}{n^l 2^l}$ , колебание функции  $f(x)$  на  $\alpha_{i1}^l - \eta_{i1}^l \geq \frac{p_{i1}}{l} \frac{\eta_{i1}}{n^l 2^l}$  ( $i = 1, 2, \dots, m_0^l$ ).*

**Доказательство.** Пусть  $a$  есть некоторая точка границы шара  $\sigma_i$ . Так как  $\alpha_{i1}^l - \sigma_i = 0$ , то, очевидно, множество  $\alpha_{i1}^l$  не отделяет точку  $a$  от бесконечности. В силу теоремы 46 отрезок  $[O_i, a]$  пересекается и с внешней, и с внутренней границами всякого кольцоида, целиком входящего в  $\alpha_{i1}^l$ , а также пересекается с обеими компонентами границы множества  $K_i^{l''}$  (см. § 35). Из последнего нетрудно заключить, что однократная вариация  $v_1(f, \bar{r}_{i1})$  функции  $f(x)$  на отрезке  $\bar{r}_{i1} = [O_i, a]$  не менее чем  $p_{i1}$ .

Пусть число компонент  $v_0(e_t)$  множества уровня  $t$  функции  $f(x)$ , рассматриваемой лишь на отрезке  $\bar{r}_{i1}$ , при некотором  $t$  не менее чем  $l$ . Тогда, применяя последовательно теорему Ролля, из того, что функция  $f(x)$  на отрезке  $\bar{r}_{i1}$  одно и то же значение  $t$  принимает не менее чем  $l$  раз, получим, что производная каждого порядка (до  $l-1$  включительно) функции  $f(x)$  хотя бы в одной точке отрезка  $\bar{r}_{i1}$  обращается в нуль. Пусть  $M_k$  есть максимальное значение абсолютной величины  $k$ -й производной функции  $f(x)$  на отрезке  $\bar{r}_{i1}$ .

Тогда

$$v_1(f, \bar{r}_{i1}) = \int_{\delta_i}^a \left| \frac{df}{d\bar{r}_{i1}} \right| d\bar{r}_{i1} \leq |\bar{r}_{i1}| M_1 = r_i^1 M_1.$$

Так как производные всех порядков до  $l-1$  включительно функции  $f(x)$  на отрезке  $\bar{r}_{i1}$  принимают нулевое значение, то из теоремы Лагранжа следует, что

$$M_k \leq r_i^1 \cdot M_{k+1} \quad (k = 1, \dots, l-1),$$

а тогда, собирая полученные неравенства в одно, имеем:

$$v_1(f, \bar{r}_{i1}) \leq (r_i^1)^{l-1} \cdot M_{l-1} \leq (r_i^1)^l L_1.$$

Но  $v_1(f, \bar{r}_{i1}) \geq p_{i1}$ , т. е.  $\frac{\eta_{i1}}{nl2^l} \leq (r_i^1)^l \cdot L_1 = \eta_{i1} \cdot L_1$ , т. е.  $L_1 \geq \frac{1}{nl2^l}$ , что противоречит условиям рассматриваемой леммы.

Следовательно, предположение о том, что при некотором  $t$   $v_0(e_t) > l$ , неверно, и для всякого  $t$   $v_0(e_t) \leq l$ .

Тогда в силу леммы 47  $\eta_{i1}^a \geq \frac{v_1(f, \bar{r}_{i1})}{l}$ , и, следовательно,  $\eta_{i1}^a \geq \frac{p_{i1}}{l}$ .

Лемма 48 доказана.

Пусть  $O$  есть точка из  $I_n$ , а  $P_{l-1}^n(f, O, x)$  — полином от  $n$  переменных  $x_1 \dots x_n = x$  степени  $l-1$ , все частные производные от которого до порядка  $l-1$  включительно в рассматриваемой точке совпадают с соответствующими частными производными функции  $f(x)$  в той же точке.

Положим далее,

$$\rho(O, x) = \sum_{i=1}^n [x_i - x_i(O)]^2.$$

**Лемма 49.** *Пусть  $f(x)$  есть функция, удовлетворяющая условиям леммы 46. Тогда  $|f(x) - P_{l-1}^n(f, O, x)| \leq \rho^l(O, x) L_1 \cdot L_2$ , где  $L_2$  есть константа, зависящая лишь от  $n, l$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).*

**Доказательство.** Положим  $G(x) = f(x) - P_{l-1}^n(f, O, x)$ . Очевидно, что все частные производные всех порядков до  $l-1$  (включительно) функции  $G(x)$  в точке  $O$  равны нулю.

Пусть  $x$  есть произвольная точка из  $I_n$ . Для простоты будем предполагать, что система координат  $X = (x_1, \dots, x_n)$  выбрана так, что относительно этой системы точка  $x$  имеет координаты  $(x_1, 0, 0, \dots, 0)$ . Пусть  $M_1, M_2, \dots, M_{l-1}$  быть соответственно максимальные значения абсолютных величин частных производных порядков  $1, 2, \dots, l-1$  по переменному  $x_1$  от функции  $G(x)$  на отрезке  $[O, x_1]$ .

Тогда из теоремы Лагранжа получаем:

$$|G(x)| < x_1 M_1, \quad M_1 \leq x_1 M_2, \quad \dots, \quad M_{l-2} \leq x_1 M_{l-1};$$

$$|G(x)| \leq x_1^{l-1} M_{l-1}.$$

Нетрудно сообразить, что  $\frac{\partial^{l-1}}{\partial x^{l-1}} |G(x)|$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $L_1 \cdot L_2$ , где  $L_2$  есть число слагаемых полинома  $P_{l-1}^n(f, O, x)$ , т. е. число, зависящее лишь от  $n$  и  $l$ .

А тогда  $M_{l-1} \leq x_1 L_1 L_2$ , откуда  $|G(x)| \leq x_1^l L_1 \cdot L_2$ , т. е. в общем случае имеем:

$$|G(x)| \leq \rho^l(O, x) L_1 L_2.$$

Лемма 49 доказана.

**Лемма 50.** *Пусть  $f(x)$  есть функция, удовлетворяющая условиям леммы 46. Тогда никакая точка из  $I_n$  не может принадлежать сразу более чем  $c_3(l, n)$  (см. лемму 45) шарам из  $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_{m^1}$ .*

**Доказательство.** Предположим, что утверждение леммы 50 неверно. Тогда в кубе  $I_n$  существует точка  $O$ , принадлежащая более чем  $c_3(l, n)$  шарам из  $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_{m^1}$ .

Покажем, что в таком случае число экстремальных компонент полинома  $P_{l-1}^n(f, O, x)$ , рассматриваемого лишь на кубе  $I_n$ , более чем  $c_3(l, n)$ .

Пусть  $\alpha_{ii}^1$  и  $\alpha_{j1}^1$  таковы, что  $\alpha_{ii}^1 - \sigma_i = \alpha_{j1}^1 - \sigma_j = 0$ , а шары  $\sigma_i'$  и  $\sigma_j'$  содержат точку  $O$ .

Покажем, что тогда ни одно из множеств  $\gamma_{ii}^1$  и  $\gamma_{j1}^1$  не отделяет другого от бесконечности. Допустим противное. Тогда из свойств связки (см. § 31) нетрудно вывести, что либо  $\eta_{ii} \leq \frac{\eta_{j1}}{nl2^l}$ , либо  $\eta_{j1} \leq \frac{\eta_{ii}}{nl2^l}$ . Для определённости будем предполагать, что  $\gamma_{ii}^1$  отделяет  $\gamma_{j1}^1$  от бесконечности; тогда имеет место второе неравенство, ибо при невыполнении последнего неравенства связка  $\Psi_i^1$  содержала бы  $\alpha_{j1}^1$ , а не  $\alpha_{ii}^1$ , так как такое предпочтение увеличило бы линейную вариацию  $\eta_{ii}$  функции  $f(x)$  на связке  $\Psi_i^1$ , к чему мы и стремились при построении связки (см. определение 23). Итак,  $\eta_{j1} \leq \frac{\eta_{ii}}{nl2^l}$ . Тогда  $r_j^1 \leq \frac{r_i^1}{\frac{l}{2}\sqrt{ln}} \leq \frac{1}{2}r_i^1$ , и расстояние  $\rho(O_j, O_j') \leq \frac{1}{2}\rho(O_i, O_i')$ , так как  $\rho(O_j, O_j') = 10r_j^1$ , а  $\rho(O_i, O_i') = 10r_i^1$ . Следовательно,

$$\rho(O_j, O_j') \leq 5r_i^1. \quad (1)$$

Так как  $\alpha_{ii}^1$  отделяет  $\gamma_{j1}^1$  от бесконечности и так как множество  $\alpha_{ii}^1 - \sigma_i$  пусто, то точка  $O_j$  принадлежит шару  $\sigma_i'$ . Так как шары  $\sigma_i'$  и  $\sigma_j'$  пересекаются, то  $\rho(O_i', O_j') \leq 2r_i^1$ . Поэтому  $\rho(O_j, O_j') \geq 7r_i^1$ , что противоречит утверждению (1). Следовательно, ни одно из множеств  $\gamma_{ii}^1$  и  $\gamma_{j1}^1$  не может отделять от бесконечности другое множество.

Пусть шар  $\sigma_i'$  содержит точку  $O$ . Покажем, что в таком случае существует экстремальная компонента  $\xi_i$  полинома  $P_{l-1}^n(f, O, x)$  (см. обозначения перед леммой 49), отделённая множеством  $\gamma_{ii}^1$  от бесконечности.

Пусть  $c$  есть произвольная точка из  $\gamma_{ii}^1$ . Ясно, что расстояние  $\rho(O, c) \leq 12r_i^1$ . В силу леммы 49

$$|G(x)| = |f(x) - P_{l-1}^n(f, O, x)| \leq \varepsilon = L_1 L_2 (12r_i^1)^l.$$

Мы можем предполагать, что  $L_1 < \frac{1}{7 \cdot 12^l L_2} \cdot \frac{1}{l^2 n L_2^l}$ , а тогда

$$\varepsilon \leq \frac{\eta_{i1}}{7l^2 n 2^l} = \frac{p_{i1}}{7l}. \quad (2)$$

Лемма 48 утверждает, что колебание  $\eta_{i1}^\alpha$  функции  $f(x)$  на  $\alpha_{i1}^1$  не менее чем  $\frac{p_{i1}}{l}$ . Следовательно, существует точка  $c_1$  из  $\alpha_{i1}^1$ , отделённая множеством  $\gamma_{i1}^1$  от бесконечности, такая, что

$$|f(c_1) - f(\gamma_{i1}^1)| \geq \frac{1}{2} \eta_{i1}^\alpha \geq \frac{p_{i1}}{2l}.$$

Пусть для определённости  $f(c_1) > f(\gamma_{i1}^1)$ . Так как  $\rho(O, c_1) \leq 12r_i^1$ , то в силу (2)

$$|G(c_1)| \leq \frac{p_{i1}}{7l}.$$

По той же причине для всякой точки  $c_2$  из  $\gamma_{i1}^1$

$$|G(c_2)| \leq \frac{p_{i1}}{7l}.$$

А тогда из того, что

$$f(c_1) - f(\gamma_{i1}^1) \geq \frac{p_{i1}}{2l},$$

следует, что для всякой точки  $c_3$  из  $\gamma_{i1}^1$

$$P_{l-1}^n(f, O, c_3) < P_{l-1}^n(f, O, c_1).$$

Пусть  $\delta_i$  есть множество всех точек из  $I_n$ , отделённых множеством  $\gamma_{i1}^1$  от бесконечности, а  $c_3$  — точка из  $\delta_i$ , в которой полином  $P_{l-1}^n(f, O, x)$  достигает своего максимального значения среди его значений на множестве  $\delta_i$ . Пусть  $\xi_i$  есть компонента множества уровня  $P_{l-1}^n(f, O, \xi_i)$  полинома  $P_{l-1}^n(f, O, x)$ , содержащая точку  $c_3$ .

Так как  $P_{l-1}^n(f, O, c_3) > P_{l-1}^n(f, O, c_2)$ , то  $\xi_i$  не пересекается с  $\gamma_{i1}^1$ . Ясно, что  $\delta_i$  является окрестностью компоненты  $\xi_i$  такой, что для всякой точки  $d$  из  $\delta_i$   $P_{l-1}^n(f, O, d) \leq P_{l-1}^n(f, O, \xi_i)$ , т. е.  $\xi_i$  есть экстремальная компонента

уровня полинома  $P_{l-1}^n(f, O, x)$ , отделённая множеством  $\gamma_{i1}^1$  от бесконечности.

Следовательно, каждое из множеств  $\gamma_{i1}^1$  (индекс  $i$  принимает не менее чем  $c_3(l, n)$  значений), для каждого из которых соответствующий шар  $\sigma'_i$  содержит точку  $O$ , отделяет от бесконечности хотя бы одну экстремальную компоненту уровня полинома  $P(f, O)$ , и при этом каждая пара из указанных множеств такова, что никакое из них не отделяет другое от бесконечности.

Последнее означает, что число экстремальных компонент уровня полинома, лежащих строго внутри куба  $I_n$ , превосходит константу  $c_3(l, n)$ , что противоречит лемме 45. Противоречие получено в результате допущения несправедливости леммы 50.

Лемма 50 доказана.

Из леммы 50 следует, что сумма  $n$ -мерных мер Лебега (объёмов) всех шаров  $\sigma'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m_0^1$ ) таких, что  $\alpha_{i1}^1 - \sigma'_i = 0$ , численно не превосходит числа  $m^n(I_n) c_3(l, n) \geq \mathcal{E}_n \sum_{i=1}^{m_0^1} (r_i^1)^n$ , где  $\mathcal{E}_n$  есть  $n$ -мерная мера Лебега  $n$ -мерного шара единичного радиуса. Но  $\sum_{i=1}^{m_0^1} \mathcal{E}_n (r_i^1)^n = \sum_{i=1}^{m_0^1} \mathcal{E}_n (\eta_{i1})^{\frac{n}{l}}$ , так как  $r_i^1 = \sqrt[l]{\eta_{i1}}$ . А тогда

$$H_1^l = \sum_{i=1}^{m_0^1} (\eta_{i1})^{\frac{n}{l}} \leq c_3(l, n) \cdot \frac{m^n(I_n)}{\mathcal{E}_n} = c(l, n, L_1, I_n), \quad (b)$$

где  $c(l, n, L_1, I_n)$  есть константа, зависящая лишь от  $n, l, L_1$  и размеров куба  $I_n$ .

### § 37. Оценка сверху величины $H_k^l$ ( $1 < k < n$ )

Фиксируем число  $k$  такое, что  $1 < k < n$ . Пусть  $\tau_{k-1}$  есть  $(k-1)$ -мерная координатная (см. § 35) плоскость из  $E_n$ ,  $e_i^{k-1}$  — проекция множества  $\gamma_i^{k-1}$  (см. § 35) на плоскость  $\tau_{k-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, m_0^k$ ).

Чтобы не загромождать обозначений, предположим вначале, что все связки  $\Psi_i^k$  таковы, что

$$m^{k-1}(e_i^{k-1}) = d_{k-1}(\gamma_i^{k-1})$$

для всех  $i = 1, 2, \dots, m_0^k$ .

Пусть  $q$  есть точка из  $\tau_{k-1}$ ,  $\beta_{n-k-1}(q) — n — k + 1$ -мерная плоскость из  $E_n$ , содержащая точку  $q \in \tau_{k-1}$  и ортогональная координатной плоскости  $\tau_{k-1}$ ,  $\gamma_i^k(q)$  и  $\gamma_i^{k-1}(q)$  — соответственно общие части множеств  $\gamma_i^k$  и  $\gamma_i^{k-1}$  с плоскостью  $\beta_{n-k+1}(q)$ . Ясно, что  $\gamma_i^k(q)$  и  $\gamma_i^{k-1}(q)$  суть замкнутые множества. Фиксируем некоторую компоненту  $\gamma_{iq}^{k-1}$  множества  $\gamma_i^{k-1}(q)$ .

Теорема 49 (А. С. Кронрада). *Если замкнутое множество некоторого евклидова пространства разделяет в этом пространстве две некоторые точки, то существует компонента того же множества, также разделяющая эти точки.* (Доказательство этой теоремы см. [3].)

Так как  $\gamma_i^k$  отделяет в пространстве  $E_n$  от бесконечности множество  $\gamma_i^{k-1}$ , то  $\gamma_i^k(q)$  в плоскости  $\beta_{n-k+1}(q)$  отделяет от бесконечности множество  $\gamma_{iq}^{k-1}(q)$ . Из теоремы 49 следует, что существует компонента  $\gamma_{iq}^k$  множества  $\gamma_i^k(q)$ , отделяющая в плоскости  $\beta_{n-k+1}(q)$  множество  $\gamma_{iq}^{k-1}$  от бесконечности. Обозначим через  $\alpha_i(q)$  теоретико-множественную сумму множеств в  $\gamma_{iq}^{k-1}$ ,  $\gamma_{iq}^k$  и множества всех таких точек плоскости  $\beta_{n-k+1}(q)$ , каждая из которых отделена от бесконечности множеством  $\gamma_{iq}^k$  и не отделена от бесконечности множеством  $\gamma_{iq}^{k-1}$ . Пусть  $O_i(q)$  есть некоторая точка из  $\gamma_{iq}^{k-1}$ ,  $\sigma_i(q) — n — k + 1$ -мерный замкнутый шар из  $\beta_{n-k+1}(q)$  радиуса  $r_i$  с центром в  $O_i(q)$ , где  $r_i = 2n\sqrt{\gamma_{iq}^k}$ . Обозначим через  $e_i'$  множество всех таких точек  $q$  из  $e_i^{k-1}$ , для каждой из которых одномерный диаметр  $d_1(\gamma_{iq}^k)$  соответствующего множества  $\gamma_{iq}^k$  не менее чем  $nr_i$ .

Обозначим через  $\tau_k^u$   $k$ -мерную плоскость из  $E_n$ , натянутую на  $\tau_{k-1}$  и одну из осей системы  $X = x_1, \dots, x_n$ , не содержащуюся в  $\tau_{k-1}$  ( $u = 1, 2, \dots, n — k + 1$ ), а через  $f^k$  —

проекцию множества  $\gamma_i^k$  на  $\tau_k^{\mu}$ . Положим функцию  $\varphi_{i\mu}(q)$  в точке  $q$  из  $\tau_{k-1}$  равной одномерной мере Лебега (длине) пересечения множества  $f_{i\mu}^k$  с прямой из  $\tau_k^{\mu}$ , содержащей точку  $q$  и ортогональной к  $\tau_{k-1}$ .

Теорема Фубини утверждает, что

$$m^k(f_{i\mu}^k) = \int_{\tau_{k-1}} \varphi_{i\mu}(q) dq.$$

Пусть  $\varepsilon_{i\mu}$  есть множество всех точек  $q$  из  $\tau_{k-1}$ , для каждой из которых функция  $\varphi_{i\mu}(q)$  не менее чем  $r_i$ . Так как по определению связки  $\Psi_i^k$

$$d_k(\gamma_i^k) \leq \frac{(\eta_{ik})^{\frac{k}{l}}}{n},$$

то из теоремы Фубини следует, что

$$m^{k-1}(\varepsilon_{i\mu}) \leq \frac{(\eta_{ik})^{\frac{k}{l}}}{nr_i}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} m^{k-1}(\varepsilon_{i\mu}) \leq \frac{n(\eta_{ik})^{\frac{k}{l}}}{nr_i} = \frac{(\eta_{ik})^{\frac{k}{l}}}{2n \sqrt[n]{\eta_{ik}}} = \frac{(\eta_{ik})^{\frac{k-1}{l}}}{2n}.$$

А тогда

$$A_i = \sum_{\mu=1}^{n-k+1} m^{k-1}(\varepsilon_{i\mu}) \leq \frac{(\eta_{ik})^{\frac{k-1}{l}}}{2n}. \quad (1)$$

Пусть  $q$  есть точка из  $e_i'$ . Так как  $\gamma_i^k(q)$  отделяет в плоскости  $\beta_{n-k+1}(q)$  множество  $\gamma_i^{k-1}(q)$  от бесконечности, то  $d_1[\gamma_i^k(q)] \geq nr_i$ , а тогда хотя бы одна из функций  $\varphi_{i\mu}(q)$  ( $\mu = 1, 2, \dots, n-k+1$ ) не менее чем  $r_i$ , т. е.  $e_i'$  содержитя в  $\sum_{\mu=1}^{n-k+1} \varepsilon_{i\mu}$ . Следовательно, в силу (1)

$$m^{k-1}(e_i') \leq A_i \leq \frac{(\eta_{ik})^{\frac{k-1}{l}}}{2n}.$$

Положим  $e_i'' = e_i^{k-1} - e_i'$ . Тогда

$$m^{k-1}(e_i'') \geq \frac{(r_{ik})^{\frac{k-1}{l}}}{2n}. \quad (2)$$

Пусть  $q$  есть точка из  $e_i''$ . Покажем, что

$$\sigma_i(q) - \sigma_i(q) = 0. \quad (3)$$

Допустим противное. Очевидно, что  $d_1[\gamma_{iq}^k] = d_1[\sigma_i(q)]$ . Так как в силу сделанного нами предположения  $\sigma_i(q) - \sigma_i(q) \neq 0$ , то существует точка  $c_i(q)$ , принадлежащая множеству  $\sigma_i(q)$  и не принадлежащая  $\sigma_i(q)$ . Ясно, что одномерный диаметр  $d_1$  отрезка  $[O_i(q), c_i(q)]$  не менее чем  $\rho [O_i(q), c_i(q)] \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ .

А тогда из того, что проекция связного множества связна, и из того, что множество  $\sigma_i(q)$  связно и содержит концы отрезка  $[O_i(q), c_i(q)]$ , следует, что

$$d_1[\sigma_i(q)] = d_1[\gamma_{iq}^k] \geq \frac{\rho [O_i(q), c_i(q)]}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{r_i}{\sqrt[n]{n}} > \frac{r_i}{n} \geq 2 \sqrt[n]{r_{ik}}.$$

Пришли к противоречию. Утверждение (3) доказано.

Обозначим через  $\delta_i(q)$  компоненту множества  $\beta_{n-k+1}(q) - \gamma_i^k(q)$ , содержащую  $\gamma_{iq}^{k-1}$  своим подмножеством. Такая компонента существует, поскольку множество  $\gamma_{iq}^{k-1}$  связно и не пересекается с  $\gamma_i^k(q)$ . Так как  $\gamma_i^k(q)$  замкнуто, то  $\delta_i(q)$  есть область плоскости  $\beta_{n-k+1}(q)$ . Очевидно, что граница  $\delta_i(q)$  области  $\delta_i(q)$  содержится в  $\gamma_i^k(q)$ .

Лемма 51. Пусть  $f(x)$  есть функция, удовлетворяющая условиям леммы 46, а точка  $q$  из  $\tau_{k-1}$  такова, что  $\sigma_i(q) - \sigma_i(q) = 0$ . Тогда, если  $L_1 < \frac{1}{n(4n)^l l}$ , то колебание функции  $f(x)$  на области  $\delta_i(q)$  не менее чем  $\frac{p_i}{l}$ .

Доказательство. Пусть  $f_*(x)$  есть функция  $f(x)$ , но рассматриваемая уже лишь на отрезке  $R_i(q)$ , одним концом которого является точка  $O_i(q)$ , а другим — точка  $c_i(q)$ , принадлежащая границе шара  $\sigma_i(q)$ . Ясно, что точки  $O_i(q)$  и  $c_i(q)$  (концы отрезка  $R_i(q)$ ) разделены множеством  $\gamma_{iq}^k$ .

Обозначим через  $b$  ближайшую к точке  $O_i(q)$  точку отрезка  $R_i(q)$ , принадлежащую также и множеству  $\gamma_{iq}^k$ . Ясно,

что всякая внутренняя точка отрезка  $[b, O_i(q)] = R'_i(q)$  принадлежит области  $\delta_i(q)$  и что  $0 < \rho [b, O_i(q)] \leq r_i$ . Так как точки  $O_i(q)$  и  $b$  (концы отрезка  $R'_i(q)$ ) разделены всяким кольцоидом из  $\Psi_i^k$ , лежащим между  $\gamma_i^k$  и  $\gamma_i^{k-1}$ , и частями  $K_i^{k'}$  и  $K_i^{k''}$  (см. § 35) некоторых кольцоидов из  $\Psi_i^k$ , также лежащими между  $\gamma_i^k$  и  $\gamma_i^{k-1}$ , то отрезок  $R'_i(q)$  пересекается в силу теоремы 47 с обеими компонентами границы каждого из кольцоидов связки  $\Psi_i^k$ , лежащего между  $\gamma_i^k$  и  $\gamma_i^{k-1}$ , и областей  $K_i^{k'}$  и  $K_i^{k''}$ . Из последнего следует, что вариация  $v_1(f_*, R'_i(q))$  функции  $f_*(x)$  на отрезке  $R'_i(q)$  не менее  $p_i$ .

Пусть  $v(e_y \cap R'_i(q))$  есть число компонент пересечения множества  $e_y$  уровня  $y$  функции  $f(x)$  с отрезком  $R'_i(q)$ . Если предположить, что для некоторого  $y$   $v_0(e_y \cap R'_i(q)) \geq l$ , то с помощью теорем Ролля и Лагранжа (аналогично тому, как это делалось в лемме 48) нетрудно доказать, что для всякой точки  $x$  отрезка  $R'_i(q)$

$$\left| \frac{df_*(x)}{dx} \right| \leq |R'_i(q)|^{l-1} L_1,$$

где  $|R'_i(q)|$  есть длина отрезка  $R'_i(q)$ . В силу последнего имеем:

$$v_1(f_*, R'_i(q)) = \int_{O_i(q)}^b \left| \frac{df_*(x)}{dx} \right| dx \leq$$

$$\leq |R'_i(q)| \sup |f'_*(x)| \leq |R'_i(q)|^l \cdot L_1 = (2n)^l \cdot \eta_{ik} L_1,$$

т. е.

$$L_1 \geq \frac{v_1(f_*, R'_i(q))}{(2n)^l \eta_{ik}} \geq \frac{p_i}{(2n)^l \eta_{ik}} \geq \frac{1}{n(4n)^l l},$$

что противоречит условиям рассматриваемой леммы. Следовательно, для всякого  $y$

$$v_0(e_y \cap R'_i(q)) < l.$$

А тогда в силу леммы 47 колебание функции  $f_*(x)$  на отрезке  $R'_i(q)$  не менее  $\frac{p_i}{l}$ , а колебание функции  $f(x)$  на области  $\delta_i(q)$  и подавно не меньше чем  $\frac{p_i}{l}$ .

Лемма 51 доказана.

Обозначим через  $\lambda_i$  множество из  $E_n$ , образованное следующим образом: точка  $x$  из  $E_n$  входит в это множество тогда и только тогда, когда её проекция  $q$  на плоскость  $\tau_{k-1}$  принадлежит множеству  $e'_i$ , и  $\rho(x, q) \leq r_i$ . Так как множества  $e_i^{k-1}$  и  $e'_i$  замкнуты, то  $e''_i = e_i^{k-1} - e'_i$  измеримо ( $m^{k-1}$ ), а следовательно,  $\lambda_i$ , будучи прямым произведением замкнутого шара и измеримого множества, измеримо ( $m^n$ ).

Положим  $\mu_i = m^n(\lambda_i)$ . По теореме Фубини  $\mu_i = m^{k-1}(e''_i) \times \mathcal{E}_{n-k+1} r_i^{n-k+1}$ , где  $\mathcal{E}_{n-k+1}$  есть  $n-k+1$ -мерная мера Лебега единичного шара соответствующей размерности. В силу (2)

$$\begin{aligned} \mu_i &\geq \frac{\mathcal{E}_{n-k+1} \cdot r_i^{n-k+1} (\eta_{ik})^{\frac{k-1}{l}}}{2n} = \\ &= \frac{\mathcal{E}_{n-k+1} (\eta_{ik})^{\frac{n}{l}}}{2n} = c_4(k, n) (\eta_{ik})^{\frac{n}{l}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Определим функцию  $\xi(x)$  следующим образом: в точке  $x = r_q$ , где  $q$  — точка из  $E_n$ , функцию  $\xi(x)$  положим равной числу всех таких множеств  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m_k$ ), каждое из которых содержит точку  $x$ . Очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots n \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x) dx = \sum_{i=1}^{m_k} m^n(\lambda_i).$$

Положим

$$\mu(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots n-k+1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(z_q, q) dz_q, \quad \beta_{n-k+1}(q)$$

где  $z_q$  есть произвольная точка плоскости  $\beta_{n-k+1}(q)$ .

По теореме Фубини

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots n \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots k-1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(q) dq. \quad (5)$$

Займёмся теперь оценкой сверху величины  $\rho(q)$ . Фиксируем точку  $q$  из  $\tau_{k-1}$ , принадлежащую  $e_i^{k-1}$ . Пусть  $O'_i(q)$  есть точка из  $\beta_{n-k+1}(q)$  такая, что  $\rho[O_i(q), O'_i(q)] = 10r_i$ , а  $\sigma'_i(q)$  —  $n-k+1$ -мерный замкнутый шар из  $\beta_{n-k+1}(q)$  радиуса  $r_i$  с центром в точке  $O'_i(q)$ .

Так как константу  $L_1$  можно считать достаточно малой (см. замечание после формулировки леммы 46), то очевидно, что шары  $\sigma'_i(q)$  ( $i = 1, 2, \dots, m_k$ ) можно выбрать лежащими строго внутри куба  $I_n$ .

**Лемма 52.** *Если  $f(x)$  удовлетворяет условиям леммы 46, то каждая точка из  $I_n \cap \beta_{n-k+1}(q)$  принадлежит не более чем  $c_3(l, n-k+1)$  (см. лемму 45) шарам из  $\sigma'_i(q)$  ( $i = 1, 2, \dots, m_k$ ).*

**Доказательство.** Допустим противное. Тогда существует точка  $O$  из  $\beta_{n-k+1}(q)$ , которая принадлежит более чем  $c_3(l, n-k+1)$  шарам из  $\sigma'_i(q)$  ( $i = 1, 2, \dots, m_k$ ) таким, что для каждого из них  $\alpha_i(q) - \sigma_i(q) = 0$ .

Пусть  $P_{l-1}^{n-k+1}(f, O, q, x)$  есть полином степени  $l-1$ , рассматриваемый лишь на кубе  $I_n \cap \beta_{n-k+1}(q)$ , частные производные от которого в точке  $O$  совпадают с соответствующими частными производными функции  $f(x)$  в той же точке.

Положим  $g(z_q) = P_{l-1}^{n-k+1}(f, O, q, x) - f(z_q)$ . Так как  $\alpha_i(q) - \sigma_i(q) = 0$ , то  $\delta_i(q) - \sigma_i(q) = 0$ . Пусть  $a$  есть точка области  $\delta_i(q)$ . Ясно, что  $\rho(O, a) \leq 12r_i$ , ибо предполагается, что шар  $\sigma'_i(q)$  содержит точку  $O$ . В силу леммы 49 для всякой точки  $a$  из  $\delta_i(q)$

$$|g(a)| \leq (12r_i)^l L_1 \cdot L_2 = 12^l \eta_{ik} \cdot L_1 L_2 (2n)^l.$$

Можно считать, что  $L_1 < \frac{1}{5(48n)^l \cdot n \cdot l L_2}$ . А тогда

$$|g(a)| \leq \frac{\eta_{ik}}{5nl(2n)^l} \leq \frac{p_i}{5l}. \quad (6)$$

Пусть  $\delta_i(q)$  и  $\delta_j(q)$  таковы, что соответствующие им шары  $\sigma'_i(q)$  и  $\sigma'_j(q)$  содержат точку  $O$ .

Покажем, что в таком случае

$$\delta_i(q) \cap \delta_j(q) = 0. \quad (7)$$

Предположим противное, т. е. что существует точка  $c$ , принадлежащая и  $\delta_i(q)$ , и  $\delta_j(q)$ .

Пусть  $r$  есть бесконечный луч, лежащий в  $\beta_{n-k+1}(q)$  и выходящий из точки  $c$ ,  $d$  — ближайшая к точке  $c$  точка луча  $r$ , принадлежащая множеству  $\tilde{\delta}_i(q) + \tilde{\delta}_j(q)$ . Так как  $\gamma_i^k \cap \gamma_i^{k-1} = 0$ , то  $\tilde{\delta}_i(q) \cap \tilde{\delta}_j(q) = 0$ , т. е. точка  $d$  принадлежит либо  $\tilde{\delta}_i(q)$ , либо  $\tilde{\delta}_j(q)$ . Для определенности будем предполагать, что точка  $d$  принадлежит  $\tilde{\delta}_i(q)$ . Тогда  $d$  является внутренней точкой области  $\delta_j(q)$ , так как она является ближайшей к  $c$  точкой из  $r \cap [\tilde{\delta}_i(q) + \tilde{\delta}_j(q)]$ .

Пусть  $b$  есть точка из  $\gamma_{jq}^{k-1}$ . Так как  $b$  и  $d$  являются внутренними точками области  $\delta_j(q)$ , то существует ломаная  $\mu$  с концами в  $b$  и  $d$ , целиком лежащая в  $\delta_j(q)$ , а поэтому не пересекающаяся с  $\gamma_j^k(q)$ , ибо  $\delta_j(q)$  лежит в  $\beta_{n-k+1}(q) — \gamma_j^k(q)$ . Итак,  $\mu$  есть континuum, соединяющий точки  $b$  из  $\gamma_j^{k-1}$  и  $d$  из  $\gamma_i^k$ , не пересекающийся с  $\gamma_j^k$ . Последнее в сочетании с тем, что  $\gamma_j^k$  отделяет  $\gamma_j^{k-1}$  от бесконечности, означает, что  $\gamma_j^k$  во всём пространстве  $E_n$  отделяет от бесконечности множество  $\gamma_i^k$ .

Из свойств связки следует, что  $\gamma_j^k$  отделяет  $\Psi_i^k$  от бесконечности, а тогда  $\eta_{ik} < \frac{\eta_{jk}}{n/2^l}$ , ибо в противном случае все кольцоиды, принадлежащие  $\Psi_j^k$  и охватывающие  $\gamma_j^k$ , принадлежали бы связке  $\Psi_i^k$ , что противоречит определению  $\Psi_i^k$  и  $\Psi_j^k$ . А тогда

$$r_i < \frac{1}{2} r_j. \quad (8)$$

Так как  $\delta_j(q) \cap \delta_i(q)$  не пусто и

$$\delta_j(q) — \sigma_j(q) = \delta_i(q) — \sigma_i(q) = 0,$$

то в силу (8)  $\rho [O_i(q), O_j(q)] < \frac{3}{2} r_j$ . Так как  $\sigma'_i(q) \cap \sigma'_j(q)$  содержит точку  $O$ , то  $\rho [O'_i(q), O'_j(q)] < \frac{3}{2} r_j$ .

Следовательно,

$$\rho [O_i(q), O'_i(q)] \geq 10r_i - \frac{6}{2} r_j = 7r_i \geq 14r_i.$$

Но по определению  $\rho [O_i(q), O'_i(q)] = 10r_i$ . Пришли к противоречию, ибо  $r_i > 0$ , а следовательно, (7) доказано.

Пусть  $a$  есть точка из  $\tilde{\delta}_i(q)$ . Так как в силу леммы 51 колебание функции  $f(x)$  на  $\delta_i(q)$  не менее  $\frac{p_i}{l}$ , то существует точка  $b$  из  $\delta_i(q)$  такая, что  $|f(b) - f(a)| \geq \frac{p_i}{2l}$ . Для определенности будем считать, что  $f(b) > f(a)$ . В силу (6) имеем:  $|g(a)| \leq \frac{p_i}{5l}$  и  $|g(b)| \leq \frac{p_i}{5l}$ . А тогда

$$P_{l-1}^{n-k+1}(f, O, q, b) - P_{l-1}^{n-k+1}(f, O, q, a) \geq \frac{p_i}{2l} - \frac{2p_i}{5l} = \frac{p_i}{10l},$$

т. е.  $P_{l-1}^{n-k+1}(f, O, q, b)$  превосходит максимальное значение полинома  $P_{l-1}^{n-k+1}(f, O, q, x)$  на  $\delta_i(q)$ , и следовательно, строго внутри области  $\delta_i(q)$  существует экстремальная компонента уровня полинома  $P_{l-1}^{n-k+1}(f, O, q, x)$ .

Но индекс  $i$ , для которого доказано последнее, принимает не менее  $c_3(l, n-k+1)$  значений, и различные  $\delta_i(q)$  и  $\delta_j(q)$  не пересекаются, а это означает, что полином  $P_{l-1}^{n-k+1}(f, O, q, x)$  имеет не менее  $c_3(l, n-k+1)$  экстремальных компонент, лежащих строго внутри  $I_n \cap \beta_{n-k+1}(q)$ , что противоречит лемме 45.

Лемма 52 доказана.

Из леммы 52 следует, что сумма  $n-k+1$ -мерных мер Лебега всех шаров  $\sigma'_i(q)$  ( $i = 1, \dots, m_0^k$ ) не превосходит  $c_3(l, n-k+1) m^{n-k+1} [I_n \cap \beta_{n-k+1}(q)]$ . А тогда из теоремы Фубини следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m_0^k} \mu_i &= \int_{I_n} \xi(x) dx = \int_{\tau_{k-1}} \left[ \int_{I_n \cap \beta_{n-k+1}(q)} \xi(z_q, q) dz_q \right] dq \leq \\ &\leq [d_1(I_n)]^{k-1} c_3(l, n-k+1) [d_1(I_n)]^{n-k+1} = \\ &= [d_1(I_n)]^n c_3(l, n-k+1). \end{aligned}$$

Пусть теперь  $\{\Psi_{i\mu}^k\}$  суть все такие связки из  $\{\Psi_i^k\}$ , для каждой из которых мера проекции соответствующего множества  $\gamma_i^{k-1} = \gamma_{i\mu}^{k-1}$  на плоскость  $\tau_{k-1} = \tau_{k-1}^\mu$  равна  $d_{k-1}(\gamma_{i\mu}^{k-1})$ . Тогда в силу (8) для всякого  $\mu$

$$\sum_i (\eta_{ik}^\mu)^{\frac{n}{l}} \leq \frac{c_3(l, n-k+1)}{c_4(k, n)} [d_1(I_n)]^n$$

где  $\eta_{ik}^{\mu}$  есть сумма колебаний функции  $f(x)$  по всем кольцоидам связки  $\Psi_{ik}^{\mu}$ .

А тогда, так как различных плоскостей  $\tau_{k-1} = \tau_{k-1}^{\mu}$  имеется не более чем  $C_n^{k-1}$  (число сочетаний из  $n$  по  $k-1$ ) штук, то

$$H_k^l = \sum_{i=1}^{\infty} (\eta_{ik})^{\frac{n}{l}} \leq \frac{C_n^{k-1} c_3(l, n-k+1) [d_1(I_n)]^n}{c_4(k, n)} \quad (c)$$

$(k = 2, 3, \dots, n-1).$

### § 38. Оценка сверху величины $H_n^l$

Пусть рёбра куба  $I_n$  параллельны координатным векторам. Пусть  $\tau_{n-1}$  есть координатная гиперплоскость, содержащая векторы  $x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ , а  $q$  — произвольная точка этой гиперплоскости,  $e_i^{n-1}$  — проекция множества  $\gamma_i^{n-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, m_n$ ) на  $\tau_{n-1}$ ,  $\bar{\beta}_1(q)$  — отрезок длины  $\rho$ , перпендикулярный к гиперплоскости  $\tau_{n-1}$ , содержащий точку  $q$  из  $\tau_{n-1}$  и лежащий в кубе  $I_n$  со стороной  $\rho$ . Ясно, что  $\bar{\beta}_1(q)$  определён лишь для такой точки  $q$  из  $\tau_{n-1}$ , которая принадлежит границе куба  $I_n$ . Обозначим через  $\lambda_i$  декартово произведение множества  $e_i^{n-1}$  и отрезка длины  $\sqrt[n]{\eta_{in}}$ , т. е. множество, образованное следующим образом: точка  $x$  включается в множество  $\lambda_i$  тогда и только тогда, когда она принадлежит кубу  $I_n$ , её проекция на  $\tau_{n-1}$  точка  $q(x)$  принадлежит множеству  $e_i^{n-1}$  и координата её  $x_1(x) \leq \sqrt[n]{\eta_{in}}$ .

Так как  $\gamma_i^{n-1}$  замкнуто, то  $e_i^{n-1}$  тоже замкнуто, а тогда замкнуто и множество  $\lambda_i$ . Из теоремы Фубини следует, что

$$\mu_i = m^n(\lambda_i) = m^{n-1}(e_i^{n-1}) \sqrt[n]{\eta_{in}} \geq (\eta_{in})^{\frac{n}{l}} \frac{1}{n}. \quad (1)$$

Пусть  $\xi(x)$  есть функция точки  $x = (x_1, q)$  из  $I_n$ , равная в точке  $x$  числу множеств из  $\{\lambda_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, m_n$ ), содержащих эту точку. Очевидно, что  $\mu = \sum_{i=1}^{m_n} \mu_i = \int_{I_n} \xi(x) dx$ .

Положим  $\mu(q) = \int_{\bar{\beta}_1(q)} \xi(x_1, q) dx_1$ . По теореме Фубини

$$\mu = \int_{I_n \cap \mathbb{r}_{n-1}} \mu(q) dq. \quad (2)$$

Для конкретности дальнейших построений условимся считать точку  $q$  правым концом отрезка  $\bar{\beta}_1(q)$ . Обозначим через  $a_i^k$  самую правую точку отрезка  $\bar{\beta}_1(q)$ , принадлежащую внутренней границе кольцоида  $K_i^k$  из  $\Psi_i^n$ , а через  $b_i^k$  — ближайшую к  $a_i^k$  точку отрезка  $\bar{\beta}_1(q)$ , лежащую справа от  $a_i^k$  и принадлежащую внешней границе кольцоида  $K_i^k$ . Нетрудно убедиться, что всякая точка интервала  $(a_i^k, b_i^k) = r_i^k$  принадлежит кольцоиду  $K_i^k$ , а поэтому интервалы  $r_i^k$  ( $k = 1, \dots, m(i)$ ) попарно не пересекаются, ибо различные кольцоиды в силу их определения попарно не пересекаются. Ясно также, что если кольцоид  $K_i^{k_1}$  отделяет  $K_i^{k_2}$  от бесконечности, т. е. если  $k_1 > k_2$ , то на отрезке  $\bar{\beta}_1(q)$  интервал  $r_i^{k_1}$  лежит правее интервала  $r_i^{k_2}$ .

Пусть  $c_i$  есть ближайшая к  $q$  точка отрезка  $\bar{\beta}_1(q)$ , принадлежащая множеству  $\gamma_i^{n-1}$ , а  $d_i$  — ближайшая к  $c_i$  точка отрезка  $\bar{\beta}_1(q)$ , лежащая справа от  $c_i$  и принадлежащая множеству  $\gamma_i^n$ .

Условимся, что если фиксированная нами точка  $q$  не принадлежит множеству  $e_i^{n-1}$ , то под  $r_i^k$ ,  $c_i$  и  $d_i$  будем понимать пустые множества. Обозначим через  $\rho_j$  ( $j = 1, \dots, m_q$ ) перенумерованные слева направо интервалы открытого на  $\bar{\beta}_1(q)$  множества  $\sum_{i=1}^{m_n} \sum_{k=1}^{m(i)} r_i^k \cap (c_i, d_i)$ , а через  $a'_j$  и  $b'_j$  — соответственно левый и правый концы интервала  $\rho_j$ .

Положим

$$A_j = |f(a'_j) - f(b'_j)|.$$

Условимся, что  $\eta_{in}(q) = \eta_{in}$ , если точка  $q$  принадлежит множеству  $e_i^{n-1}$ , и  $\eta_{in}(q) = 0$ , если точка  $q$  не принадлежит множеству  $e_i^{n-1}$ . Нетрудно сообразить, что сумма чисел  $A_j$

по всем интервалам  $\rho_j$ , принадлежащим связке  $\Psi_i^n$ , равна

$$p_i(q) = \frac{\eta_{in}(q)}{\ln 2^l}.$$

Тогда ясно, что  $\mu(q) = \sum_{i=1}^{m_n} \sqrt[l]{\eta_{in}(q)}$ . Следовательно,

$$\mu(q) = 2 \sqrt[l]{nl} \sum_{i=1}^{m_n} \sqrt[l]{p_i(q)}. \quad (3)$$

Построим теперь систему интервалов  $G_m (m=1, 2, \dots, m(q))$ .

Пусть  $f(x_1)$  есть та же функция  $f(x)$ , но рассматриваемая уже лишь на отрезке  $\bar{\beta}_1(q)$ ,  $e^0$  — множество всех таких точек

из  $\bar{\beta}_1(q) - \sum_{j=1}^{m_q} \rho_j$ , в каждой из которых производная функции  $f(x_1)$

равна нулю,  $G_1$  — интервал из  $\bar{\beta}_1(q)$ , левым концом которого является левый конец интервала  $\rho_1$ , а правый конец есть ближайшая к  $\rho_1$ , лежащая справа от  $\rho_1$  точка множества  $e^0 + q$ .

Пусть интервалы  $G_1, G_2, \dots, G_{m-1}$  уже построены и  $\rho_{jm}$  есть ближайший к  $G_{m-1}$  интервал типа  $\rho_j$ , лежащий справа от  $G_{m-1}$  и не пересекающийся с  $G_{m-1}$ . Тогда за  $G_m$  примем интервал из  $\bar{\beta}_1(q)$ , левым концом которого является правый конец интервала  $G_{m-1}$ , а правым концом является ближайшая к  $\rho_{jm}$  точка из  $e^0 + q$ , лежащая справа от  $\rho_{jm}$ .

Рассмотрим  $v_1(f, G_m)$  — вариацию функции  $f(x_1)$  на  $G_m$ .

Лемма 53. Пусть  $L_1 < 1$  и  $L_1 < \rho^{l-1}$ , тогда для всякой точки  $q$  из  $\tau_{k-1}$  имеет место неравенство

$$\sum_{m=1}^{m(q)} [v_1(f, G_m(q))]^{\frac{1}{l}} \leq 2l\rho.$$

Доказательство. Пусть  $\nu$  есть целая часть числа  $\frac{m(q)}{l}$ , а  $y_m$  и  $z_m$  — концы интервала  $G_m$ . Обозначая через  $\rho'_m$  длину интервала  $G_m$ , получаем:

$$v_1(f, G_m) = \int_{G_m} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| dx_1 \leq \rho'_m \cdot L_1,$$

а тогда

$$\sum_{m>l} \sqrt[l]{v_1(f, G_m)} \leq l \sqrt[l]{\rho L_1}. \quad (4)$$

Обозначим через  $D_p$  интервал с концами в  $y_{l(p-1)+1} \dots z_{pl}$ , через  $D_{l+1}$  — минимальный интервал, содержащий интервалы  $G_{l+1}, \dots, G_{m(q)}$ , через  $f_p$  — сумму величин  $\sqrt[l]{v_1(f, G_m)}$  по всем интервалам  $G_m$ , содержащимся в  $D_p$ , через  $\rho_p$  — длину интервала  $D_p$ .

Последовательным применением теоремы Ролля нетрудно показать, что производная всякого порядка до  $l-1$  включительно от функции  $f(x_1)$  хотя бы в одной точке интервала  $D_p$  обращается в нуль. А тогда, обозначая через  $M_p^k$  максимальное значение абсолютной величины  $k$ -й производной функции  $f(x_1)$  на интервале  $D_p$ , из теоремы Лагранжа получаем:

$$v_1(f, D_p) = \int_{D_p} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| dx_1 \leq \rho_p' M_p^1 \leq \dots \leq [\rho_p']^{l-1} M_p^{l-1} \leq [\rho_p']^l L_1,$$

или  $f_p \leq l \sqrt[l]{v_1(f, D_p)} \leq l \rho_p' \sqrt[l]{L_1}$ . Из того, что  $\sum_{p=1}^v \rho_p' \leq \rho$ , получаем, что  $\sum_{p=1}^v f_p \leq l \rho \sqrt[l]{L_1}$ . Ясно, что

$$\sum_{m=1}^{m(q)} [v_1(f, G_m)]^{\frac{1}{l}} \leq \sum_{p=1}^v f_p + \sum_{m>v} \sqrt[l]{v_1(f, G_m)}.$$

А тогда из последних неравенств и (4) следует, что

$$\sum_{m=1}^{m(q)} [v_1(f, G_m)]^{\frac{1}{l}} \leq l \rho \sqrt[l]{L_1} + l \rho L_1 \leq 2l \rho,$$

ибо  $L_1 < 1$  и  $L_1 < \rho^{l-1}$ .

Лемма 53 доказана.

Обозначим через  $\rho_{jm}$  интервал  $\rho_j$ , если  $\rho_j$  содержится в  $G_m$ , и пустое множество, если  $\rho_j$  не содержится в  $G_m$ , и положим  $\eta_j^m$  равным колебанию функции  $f(x_1)$  на интервале  $\rho_{jm}$  ( $\eta_j^m = 0$ , если  $\rho_{jm}$  является пустым множеством). Обозначая через  $\varphi_{im}$

сумму величин  $\eta_j^m$  по всем интервалам типа  $\rho_{jm}$ , содержащимся в  $G_m$ , получаем  $p_i(q) = \sum_{m=1}^{m(q)} \varphi_{im}$ .

Так как  $L_1 \leq 1$ , то  $\varphi_{im} \leq 1$ . А тогда

$$\sqrt[m]{p_i(q)} \leq \sum_{m=1}^{m(q)} \sqrt[m]{\varphi_{im}}. \quad (5)$$

Лемма 54.  $\sum_{i=1}^{m_n} \sqrt[m]{\varphi_{im}} \leq 3 \sqrt[m]{v_1(f, G_m)}$ .

Доказательство. Пусть  $\rho_{im}^k$  ( $k = 1, \dots, m_{im}$ ) суть все интервалы типа  $\rho_{jm}$  из  $G_m$ , принадлежащие связке  $\Psi_i^n$ , перенумерованные слева направо (в смысле ориентации на отрезке  $\bar{\beta}_1(q)$ ).

Фиксируем  $i \leq m_n$  и  $k \leq m_{im}$  и докажем, что на отрезке  $g_m^k$ , левым концом которого является правый конец  $b_{im}^{k-1}$  интервала  $\rho_{im}^{k-1}$ , а правым — левый конец  $a_{im}^k$  интервала  $\rho_{im}^k$ ,

нет ни одной точки из множества  $\sum_{j=1}^{m_q} \rho_j$ .

Предположим, что это неверно. Тогда существует интервал  $\rho_0^k$  типа  $\rho_j$ , не принадлежащий связке  $\Psi_i^n$  и целиком лежащий внутри отрезка  $g_i^k$ .

Пусть  $K_{i_1}^{nk_1}$  есть кольцоид, содержащий в себе  $\rho_0^k$ . Представляются два случая.

1) Кольцоид  $K_{i_1}^{nk_1}$ , содержащий  $\rho_{im}^k$ , отделяет от бесконечности кольцоид  $K_{i_1}^{nk_2}$ .

Пусть  $K_{i_1}^{nk_3}$  есть кольцоид, содержащий интервал  $\rho_{im}^{k-1}$ . Так как  $\rho_0^k$  лежит правее интервала  $\rho_{im}^{k-1}$ , то, очевидно, кольцоид  $K_{i_1}^{nk_3}$  не отделяет от бесконечности  $K_{i_1}^{nk_1}$ , а тогда  $K_{i_1}^{nk_1}$  располагается между кольцоидами  $K_{i_1}^{nk_3}$  и  $K_{i_1}^{nk_2}$ , ибо по условию  $K_{i_1}^{nk_2}$  отделяет  $K_{i_1}^{nk_1}$  от бесконечности. Очевидно, можно предполагать, что интервал  $\rho_0^k$  выбирался так, что он оказался самым левым интервалом типа  $\rho_j$ , принадлежащим отрезку  $g_i^k$ .

Пусть  $a_0^k$  и  $b_0^k$  суть соответственно левый и правый концы интервала  $\rho_0^k$ . Отрезок  $[b_{im}^{k-1}, a_0^k]$  не вырождается в точку, ибо в противном случае точка  $a_0^k$  оказалась бы континуумом,

не пересекающимся с внешней границей кольцоида  $K_{i_1}^{nk_1}$  и соединяющим внутреннюю границу кольцоида  $K_{i_1}^{nk_1}$  с внешней границей кольцоида  $K_i^{nk_1}$ , что невозможно, поскольку  $K_{i_1}^{nk_1}$  не вложен в  $K_i^{nk_1}$ . Итак,  $b_{im}^{k-1} \neq a_0^k$ .

Пусть  $\delta_0^k$  есть такая окрестность точки  $a_0^k$  на отрезке  $G_0^k = [b_{im}^{k-1}, b_0^k]$ , никакая точка которой не принадлежит внешней границе кольцоида  $K_{i_1}^{nk_1}$ . Такая окрестность  $\delta_0^k$  существует, поскольку  $f(a_0^k) \neq f(b_0^k)$ , ибо во всякой точке кольцоида  $K_{i_1}^{nk_1}$  в силу определения регулярной компоненты уровня и кольцоида градиент функции  $f(x)$  не обращается в нуль. Ясно, что первый конец интервала  $\delta_0^k$  лежит левее точки  $b_0^k$ , а поэтому всякая точка из  $\delta_0^k$ , лежащая справа от  $a_0^k$ , принадлежит кольцоиду  $K_{i_1}^{nk_1}$ , так как весь интервал  $\rho_0^k$  принадлежит кольцоиду  $K_{i_1}^{nk_1}$ . А тогда на  $\delta_0^k$  не существует точки, отличной от  $a_0^k$ , принадлежащей внутренней границе кольцоида  $K_{i_1}^{nk_1}$ , ибо в противном случае на отрезке  $G_0^k$  в силу теоремы Ролля нашлась бы точка  $a$ , в которой производная функции  $f(x_1)$  вдоль отрезка  $\bar{\beta}_1(q)$  равна нулю, что противоречит определению интервала  $G_m$ .

Из определения интервала  $G_m$  следует, что  $G_m - \sum_{j=1}^{m_q} \rho_j$  не содержит точек с нулевой производной функции  $f(x_1)$  вдоль отрезка  $\bar{\beta}_1(q)$ . Следовательно,  $\frac{\partial f(a_0^k)}{\partial x_1} \neq 0$ . Для определенности будем считать, что  $\frac{\partial f(a_0^k)}{\partial x_1} < 0$ , т. е. правее точки  $a_0^k$  в достаточно малой окрестности (положим, что  $\delta_0^k$  является такою) функция  $f(x_1)$  строго больше, чем  $f(a_0^k)$ , а тогда для точки  $x$ , лежащей в достаточно близости от точки  $a_0^k$  и левее её, имеем  $f(x) < f(a_0^k)$ . Пусть  $x_0$  есть точка из  $\delta_0^k$ , лежащая левее  $a_0^k$  и правее  $b_0^k$ . Предположим, что  $x_0$  принадлежит  $K_{i_1}^{nk_1}$ . Тогда  $f(a_0^k)$  не может быть ни верхней, ни нижней границей значений функции  $f(x)$  на кольцоиде  $K_{i_1}^{nk_1}$ , так как левее точки  $a_0^k$  функция  $f(x_1)$  меньше  $f(a_0^k)$ , а правее — больше  $f(a_0^k)$ . Последнее противоречит теореме 45,

а следовательно, точка  $x_0$  не принадлежит кольцоиду  $K_{i_1}^{nk_1}$ . Если точка  $x_0$  не отделена кольцоидом  $K_{i_1}^{nk_1}$  от бесконечности, то существует континуум  $K^0$ , не пересекающийся с внешней границей кольцоида  $K_{i_1}^{nk_1}$  и соединяющий точку  $x_0$  с границей куба  $I_n$ , а тогда континуум  $K^0 + [x_0, a_0^k]$ , не пересекаясь с внешней границей кольцоида  $K_{i_1}^{nk_1}$ , соединяет точку  $a_0^k$ , лежащую на внутренней границе кольцоида  $K_{i_1}^{nk_1}$ , с границей куба  $I_n$ , что противоречит определению внешней и внутренней границ кольцоида.

Следовательно,  $x_0$  отделена кольцоидом  $K_{i_1}^{nk_1}$  от бесконечности. Но так как точка  $b_{im}^{k-1}$ , находясь на внешней границе кольцоида  $K_i^{nk_3}$ , не отделена кольцоидом  $K_{i_1}^{nk_1}$  от бесконечности, а следовательно, отрезок  $[x_0, b_{im}^{k-1}]$  в силу теоремы 42 пересекается с внутренней границей кольцоида  $K_{i_1}^{nk_1}$ , то на отрезке  $G_0^k$  в силу теоремы Ролля существует точка, в которой производная вдоль  $\bar{\beta}_1(q)$  функции  $f(x_1)$  равна нулю (ибо  $a_0^k$  принадлежит внутренней границе кольцоида  $K_{i_1}^{nk_1}$ ), что противоречит определению интервалов  $G_m$ .

Следовательно,  $K_i^{nk_3}$  не отделяет  $K_{i_1}^{nk_1}$  от бесконечности.

2)  $K_i^{nk_3}$  не отделяет  $K_{i_1}^{nk_1}$  от бесконечности. Пусть для определенности  $\frac{\partial f(a_0^k)}{\partial x_1} < 0$ , а  $\delta_0^k$  — окрестность точки  $a_0^k$  на отрезке  $\bar{\beta}_1(q)$  такая, что в этой окрестности правее точки  $a_0^k$  функция  $f(x_1)$  больше  $f(a_0^k)$ , а левее — меньше  $f(a_0^k)$ .

Пусть  $x_0$  есть точка из  $\delta_0^k$ , лежащая левее  $a_0^k$ . Точка  $x_0$  не может принадлежать кольцоиду  $K_{i_1}^{nk_1}$ , поскольку в противном случае  $f(a_0^k)$  не могло бы быть ни верхней, ни нижней гранью значений функции  $f(x)$  на  $K_{i_1}^{nk_1}$ , что противоречило бы теореме 43. Аналогично тому, как это делалось в пункте 1), можно показать, что кольцоид  $K_{i_1}^{nk_1}$  отделяет  $x_0$  от границы куба  $I_n$ . Если  $K_{i_1}^{nk_1}$  отделяет  $K_i^{nk_3}$  от бесконечности, то отрезок  $[b_{im}^k, q]$  ( $q$  есть правый конец отрезка  $\bar{\beta}_1(q)$ ) пересекается с внутренней границей кольцоида  $K_{i_1}^{nk_1}$ , что невозможно, поскольку  $a_0^k$  есть самая правая точка пересечения  $\bar{\beta}_1(q)$  и внутренней границы кольцоида  $K_{i_1}^{nk_1}$ . Следовательно,  $K_{i_1}^{nk_1}$

не отделяет  $K_i^{nk_2}$  от бесконечности, а тогда в силу свойств связки  $K_i^{nk_3}$  не вложен в  $K_{i_1}^{nk_1}$ , который в свою очередь не вложен в  $K_i^{nk_2}$  (это следует из начального условия пункта 2)).

Итак, ни один из  $K_i^{nk_3}$  и  $K_{i_1}^{nk_1}$  не отделяет другого от бесконечности.

Тогда в силу теоремы 43 отрезок  $[b_{im}^{k-1}, x_0]$  пересекается с внутренней границей кольцоида  $K_i^{nk_2}$ ; следовательно, на отрезке  $[b_{im}^{k-1}, a_0^k]$  имеются две точки, принадлежащие внутренней границе кольцоида  $K_{i_1}^{nk_1}(a_0^k)$  принадлежит внутренней границе того же кольцоида). Но тогда в силу теоремы Ролля на этом отрезке есть точка с нулевой производной функции  $f(x_1)$  вдоль отрезка  $\bar{\beta}_1(q)$ , что противоречит выбору интервалов  $G_m$ .

Следовательно,  $K_{i_1}^{nk_1}$  не может быть не вложен в  $K_i^{nk_2}$ .

Положим  $\rho_{im}^0 = \sum_{k=1}^{m_{im}} \rho_{im}^k$  и обозначим через  $a_{im}^0$  и  $b_{im}^0$  соответственно самую левую и самую правую предельные точки множества  $\rho_{im}$ . Ясно, что  $a_{im}^0 = a_{im}^1$  и  $b_{im}^0 = b_{im}^{m_{im}}$ . Пусть  $\rho_{im}^0$  есть ближайшее к  $\rho_{im}^0$ , лежащее справа от  $\rho_{im}^0$ , множество из всех множеств того же типа, принадлежащее  $G_m$ . Тогда всякий кольцоид  $K_{i_1}^{nk_1}$ , содержащий в себе интервал типа  $\rho_{im}^k$ , принадлежащий  $\rho_{im}^0$ , отделяет от бесконечности всякий кольцоид  $K_i^{nk_2}$ , содержащий интервал типа  $\rho_j$  из  $\rho_{im}^0$ .

Ясно, что  $\rho_{im}^0$  состоит из  $m_{im}$  интервалов типа  $\rho_j$ , принадлежащих связке  $\Psi_i^n$ . Пусть  $\rho'$  есть самый правый интервал типа  $\rho_j$ , принадлежащий связке  $\Psi_i^n$ , а  $\rho''$  — самый левый интервал типа  $\rho_j$ , принадлежащий связке  $\Psi_{i_1}^n$ . Ясно, что  $a_{im}^0$  есть левый конец интервала  $\rho''$ , а  $b_{im}^0$  — правый конец интервала  $\rho'$ .

В силу выбора  $G_m$   $\frac{\partial f(a_{im}^0)}{\partial x_1} \neq 0$ . Пусть для определен-

ности  $\frac{\partial f(a_{im}^0)}{\partial x_1} < 0$ , а  $\rho_0^i$  — окрестность (на  $\bar{\beta}_1(q)$ ) точки  $a_{im}^0$ , не пересекающаяся с внешней границей кольцоида  $K_{i_1}^{nk_1}$  ( $K_{i_1}^{nk_1}$  есть кольцоид, содержащий интервал  $\rho''$ ) и такая, что

для всякой точки  $x_0$  этой окрестности, лежащей правее  $a_{im}^0$ ,  $f(x_0) > f(a_{im}^0)$ , а для точки  $x_1$  из  $\delta_i^i$ , лежащей левее  $a_{im}^0$ ,  $f(x_1) < f(a_{im}^0)$ .

Пусть  $x_0$  есть точка из  $\delta_i^i$ , лежащая левее точки  $a_i^0$ . Точка  $x_0$  не принадлежит кольцоиду  $K_{i_1}^{nk_2}$ , ибо в противном случае, как уже дважды указывалось,  $f(a_{im}^0)$  не могло бы быть ни верхней, ни нижней гранью значений функции  $f(x)$  на кольцоиде  $K_{i_1}^{nk_2}$ , что невозможно.

Если существует континуум  $K^0$ , соединяющий точку  $x_0$  с границей куба  $I_n$  и не пересекающийся с внешней границей кольцоида  $K_{i_1}^{nk_2}$ , то континуум  $K^0 + [x_0, a_{im}^0]$ , не пересекаясь с внешней границей кольцоида  $K_{i_1}^{nk_2}$ , соединяет точку  $a_{im}^0$ , лежащую на внутренней границе того же кольцоида, с границей куба  $I_n$ , что противоречит определению внешней границы кольцоида. Следовательно,  $K_{i_1}^{nk_2}$  отделяет точку  $x_0$  от бесконечности. Если точка  $x_2$  из  $[b_{im}^0, a_{i,m}^0]$  принадлежит внутренней границе кольцоида  $K_{i_1}^{nk_2}$  и не совпадает с точкой  $a_{i,m}^0$ , то в силу теоремы 43  $f(x_2) = f(a_{i,m}^0)$ , а следовательно, по теореме Ролля на отрезке  $[x_2, a_{i,m}^0]$  производная функции  $f(x_1)$  вдоль  $\beta_1(q)$  обращается в нуль, что невозможно. Следовательно, отрезок  $[b_{im}^0, x_0]$  не имеет общих точек с внутренней границей кольцоида  $K_{i_1}^{nk_2}$ . Тогда, так как  $K_{i_1}^{nk_2}$  отделяет точку  $x_0$  от бесконечности, то  $K_{i_1}^{nk_2}$  отделяет от бесконечности и точку  $b_{im}^0$ , лежащую на внешней границе кольцоида  $K_{i_1}^{nk_1}$ , т. е.  $K_{i_1}^{nk_1}$  вложен в  $K_{i_1}^{nk_2}$ . После этого нетрудно вывести из свойств связки, что всякий кольцоид связки  $\Psi_i^n$  вложен в  $K_{i_1}^{nk_2}$ . Но тогда  $\eta_{in} \leq \eta_{i_1 n} \cdot \frac{1}{nl2^l}$ , т. е.

$$p_i \leq p_{i_1} \cdot \frac{1}{nl2^l}. \quad (6)$$

Пусть  $\rho_{im}^{0k}$  ( $k = 1, 2, \dots, k(m)$ ) быть перенумерованные справа налево интервалы типа  $\rho_{im}^0$ . По определению  $\varphi_{im}$  есть сумма колебаний функции  $f(x)$  по всем интервалам типа  $\rho_j$ , принадлежащим связке  $\Psi_i^n$  и интервалу  $G_m$ , т. е.  $\varphi_{im}$  есть сумма колебаний функции  $f(x)$  по всем интервалам типа  $\rho_j$ , принадлежащим  $\rho_{im}^{0k}$ . Так как  $\varphi_{im}$  включает в себя колебания

функции  $f(x)$  лишь на тех кольцоидах из  $\Psi_i^n$ , каждый из которых располагается между  $\gamma_i^n$  и  $\gamma_i^{n-1}$ , то  $\varphi_{im} \leq p_i(m) = \frac{\eta_i^m}{ln 2^l}$ . В силу (6) при  $k_2 > k_1$   $p_{k_2}(m) \leq p_{k_1}(m) \frac{1}{2^l}$ . А тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m_n} \overline{V}_{\varphi_{im}}^l &= \overline{V}_{\varphi_{1m}}^l + \sum_{i=2}^{m_n} \overline{V}_{\varphi_{im}}^l \leq \\ &\leq \overline{V}_{\varphi_{1m}}^l + \sum_{i=2}^{m_n} \overline{V}_{p_i(m)}^l \leq \overline{V}_{\varphi_{1m}}^l + \overline{V}_{p_2(m)}^l + \frac{1}{2} \overline{V}_{p_2(m)}^l + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2^{k(m)-2}} \overline{V}_{p_2(m)}^l \leq \overline{V}_{\varphi_{1m}}^l + 2 \overline{V}_{p_2(m)}^l. \end{aligned} \quad (7)$$

Ясно, что  $\varphi_{1m} \leq v_1(f, G_m)$ .

Оценим сверху величину  $p_2(m)$ . Пусть  $a$  есть самая правая предельная точка множества  $\rho_{im}^{02}$ ,  $b$  — самая левая предельная точка множества  $\rho_{im}^{01}$ ,  $\rho_0$  — самый левый интервал типа  $\rho_j$ , принадлежащий множеству  $\rho_{im}^{01}$ . Ясно, что  $b$  является левым концом интервала  $\rho_0$ . Пусть  $\Psi_i^n$  есть связка, содержащая множество  $\rho_{im}^{02}$ . Из свойств связки нетрудно заключить, что всякий кольцоид связки  $\Psi_i^n$  вложен в  $K^0$ , где  $K^0$  есть кольцоид, содержащий интервал  $\rho_0$ . Пусть  $K_i^{nk_0}$  есть кольцоид, содержащий самый правый интервал типа  $\rho_j$  из  $\rho_{im}^{02}$ . Ясно, что  $a$  принадлежит внешней границе кольцоида  $K_i^{nk_0}$ . Положим  $\eta_{in}^k$  равным колебанию функции  $f(x)$  на кольцоиде  $K_i^{nk}$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^{m_{im}} \eta_{in}^k = \eta_{in} - p_i.$$

В силу теоремы 47 отрезок  $[a, b]$  пересекается с обеими компонентами границы каждого из кольцоидов  $K_i^{nk_0+1}$ ,  $K_i^{nk_0+2}$ , ...,  $K_i^{nm_{im}}$ . Тогда вариация  $v_1(f, [a, b])$ , функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  не менее чем

$$\sum_{k=k_0+1}^{m_{im}} \eta_{in}^k \geq \eta_{in} - p_i = \eta_i^n - \frac{\eta_{in}}{ln 2^l} \geq p_i,$$

так как  $l \geq 1$  и  $n > 1$ , а тогда

$$v_1(f, G_m) > v_1(f, [a, b]) > p_i = p_i(m).$$

Последнее в сочетании с (7) означает следующее:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m_{im}} \sqrt[l]{\varphi_{im}} &= \sqrt[l]{\varphi_{1m}} + 2 \sqrt[l]{p_2(m)} \leq \sqrt[l]{v_1(f, G_m)} + \\ &+ 2 \sqrt[l]{v_1(f, G_m)} = 3 \sqrt[l]{v_1(f, G_m)}. \end{aligned}$$

А это и означает, что лемма 54 доказана.

Как уже указывалось  $\sum_{m=1}^{m(q)} \sqrt[l]{\varphi_{im}} \geq \sqrt[l]{p_i(q)}$ . Отсюда и в силу леммы 54

$$\begin{aligned} \mu(q) &= 2 \sqrt[l]{ln} \sum_{i=1}^{m_{im}} \sqrt[l]{p_i(q)} \leq \\ &\leq 2 \sqrt[l]{ln} \sum_{i=1}^{m_{im}} \sum_{m=1}^{m(q)} \sqrt[l]{\varphi_{im}} = \sum_{i=1}^{m_{im}} \sum_{m=1}^{m(q)} \sqrt[l]{\varphi_{im}} \cdot 2 \sqrt[l]{ln} \leq \\ &\leq 2 \sqrt[l]{ln} \sum_{m=1}^{m(q)} \sum_{i=1}^{m_{im}} \sqrt[l]{v_1(f, G_m)}. \end{aligned}$$

Но в силу леммы 53

$$\sum_{m=1}^{m(q)} \sqrt[l]{v_1(f, G_m)} \leq 2l\rho,$$

и

$$\mu(q) \leq 12l(\rho + 1) \sqrt[l]{ln}.$$

В силу (2)

$$\mu = \int_{I_n \cap \tau_{n-1}} \mu(q) dq.$$

Тогда  $\mu \leq 12l(\rho + 1) \sqrt[l]{ln}$ , и в силу (1)  $\mu_i \geq (\eta_{in})^{\frac{n}{l}} \cdot \frac{1}{n}$ .

А тогда  $\sum_{i=1}^n (\eta_{in})^{\frac{n}{l}} \leq 12l(\rho + 1) \sqrt[l]{ln}$ .

По аналогии с тем, как это делалось в предыдущем параграфе, теперь уже нетрудно показать, что

$$H_n^l \leq 12 \ln(\rho + 1) \sqrt[l]{\ln n}. \quad (d)$$

Утверждения (а), (б), (с) и (д) в своей совокупности дают нам доказательство леммы 46.

### § 39. Достаточные условия для ограниченности $k$ -кратной вариации функции

В этом параграфе мы сформулируем по существу минимальные достаточные условия (минимальные среди условий, формулируемых в терминах гладкости функции) для ограниченности вариаций функции многих переменных.

**Теорема 50.** Пусть  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  есть функция, заданная на замкнутом кубе  $I_n$  и обладающая на  $I_n$  всеми частными производными всех порядков до  $n-k$  включительно, при этом каждая из указанных производных, так же как и сама функция  $f(x)$ , удовлетворяет на  $I_n$  условию Липшица с константой  $L_1$ .

Тогда  $k$ -вариация  $v_k(f, I_n)$  функции  $f(x)$  на кубе  $I_n$  конечна и не превосходит некоторой константы  $c_5$ , зависящей лишь от  $n$ ,  $L_1$  и размеров куба  $I_n$ :

$$v_k(f, I_n) \leq c_5(n, L_1, I_n) \\ (k = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, 3, \dots).$$

Перейдём к доказательству сформулированной теоремы.

Пусть  $\Sigma_\mu^n$  есть выпуклая  $n$ -мерная замкнутая область из  $E_n$ , границей которой является полиэдр  $\tilde{\Sigma}_\mu^n$  ( $\mu$  есть общее число граней всех размерностей полиэдра  $\tilde{\Sigma}_\mu^n$ ),  $f(x)$  — непрерывно дифференцируемая функция точки  $x$  из  $\Sigma_\mu^n$ , определённая на  $\Sigma_\mu^n$ ,  $K$  — теоретико-множественная сумма всех регулярных в  $\Sigma_\mu^n$  компонент множеств уровней этой функции (т. е.  $K$  есть сумма всех таких компонент уровня функции  $f(x)$ , каждая из которых не имеет общих точек с границей  $\tilde{\Sigma}_\mu^n$  области  $\Sigma_\mu^n$ , а градиент функции  $f(x)$  на каждой из таких компонент не обращается в нуль),  $\{K_i\} (i = 1, 2, \dots)$ \*) —

\*) Аналогично тому, как доказывалась лемма 39, можно доказать, что  $K$  открыто в  $E_n$ , а поэтому мы были вправе перенумеровать компоненты множества.

компоненты (в теоретико-множественном смысле) множества  $K$  ( $K_i$  — кольцоиды),  $\eta_i$  — колебание функции  $f(x)$  на  $K_i$ .

Лемма 55. Для всякой  $n-1$  раз дифференцируемой на  $\Sigma_{\mu}^n$  функции  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ , у которой все частные производные всех порядков до  $n-1$  включительно, так же как и сама функция  $f(x)$ , удовлетворяют на  $\Sigma_{\mu}^n$  условию Липшица с константой  $L_1$ , имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \leq c_6 [L_1, n, d_1(\Sigma_{\mu}^n)],$$

где  $c_6$  есть константа, зависящая лишь от  $n$ ,  $L_1$  и размеров области  $\Sigma_{\mu}^n$ , а точнее, от её одномерного диаметра ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Доказательство. Пусть  $d_1(\Sigma_{\mu}^n)$  есть одномерный диаметр области  $\Sigma_{\mu}^n$ . Ясно, что в пространстве  $E_n$  можно фиксировать куб  $I_n$  со стороной длины  $2d_1(\Sigma_{\mu}^n)$  такой, что  $\Sigma_{\mu}^n \subset I_n$ . В силу теоремы Уитнея [15] функцию  $f(x)$  можно доопределить на кубе  $I_n$ , сохранив её гладкость, т. е. на кубе  $I_n$  можно задать  $n-1$  раз дифференцируемую функцию  $g(x)$ , частные производные всех порядков от которой, так же как и она сама, удовлетворяют на кубе  $I_n$  условию Липшица с константой  $L'_1$ , и такую, что для всякой точки  $x$  из  $\Sigma_{\mu}^n$   $g(x) = f(x)$ , и при этом константа  $L'_1$  взаимно однозначно определяется константой  $L_1$ . Пусть  $\{K_{i_1}^*\}$  ( $i_1 = 1, 2, \dots$ ) есть полная система кольцоидов, соответствующая функции  $g(x)$  (см. определение 22), а  $\eta_{i_1}$  — колебание функции  $g(x)$  на  $K_{i_1}^*$ . Ясно, что всякая регулярная в  $\Sigma_{\mu}^n$  компонента уровня функции  $f(x)$  является регулярной в  $I_n$  компонентой уровня функции  $g(x)$ , а тогда очевидно, что каждый кольцоид из  $K_{i_1}$  ( $i_1 = 1, 2, \dots$ ) целиком располагается внутри одного из  $K_{i_1}^*$  ( $i_1 = 1, 2, \dots$ ).

Покажем, что внутри  $K_{i_1}^*$  располагается не более чём один кольцоид из  $\{K_i\}$  ( $i_1 = 1, 2, \dots$ ).

Допустим противное, тогда в  $K_{i_1}^*$  содержатся хотя бы два кольцоида  $K_i$  и  $K_j$  функции  $f(x)$ . Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  суть две регулярные компоненты уровня функции  $f(x)$ , лежащие соответственно в  $K_i$  и  $K_j$ . Так как  $\alpha$  и  $\beta$  в то же время являются регулярными компонентами уровня функции  $g(x)$ , лежащими

в одном и том же кольцоиде  $K_{i_1}^*$ , то из свойств кольцоида нетрудно вывести, что одна из компонент  $\alpha$  и  $\beta$  отделяет другую от бесконечности, а тогда один из кольцоидов  $K_i$  и  $K_j$  отделяет другой от бесконечности. Для определенности будем предполагать, что  $K_i$  отделяет  $K_j$  от бесконечности. Пусть  $\gamma$  есть компонента уровня функции  $g(x)$ , содержащая внешнюю границу кольцоида  $K_j$ .

Ясно, что  $\gamma$  отделяет от бесконечности  $\beta$  и отделена от бесконечности компонентой  $\alpha$ .

В силу свойства 2 § 24 и теоремы 42 компонента  $\gamma$ , разделяющая  $\alpha$  и  $\beta$ , является регулярной компонентой уровня функции  $g(x)$ , принадлежащей  $K_{i_1}^*$ , а следовательно, градиент функции  $g(x)$  на  $\gamma$  не обращается в нуль. А так как  $\alpha$  отделяет  $\gamma$  от бесконечности и так как область  $\Sigma_{\mu}^n$  выпукла, а следовательно, односвязна, то компонента  $\gamma$  не имеет общих точек с границей  $\tilde{\Sigma}_{\mu}^n$  области  $\Sigma_{\mu}^n$ . Значит,  $\gamma$  есть регулярная в  $\Sigma_{\mu}^n$  компонента уровня функции  $f(x)$ . Но в таком случае  $\gamma$  не может содержать границы кольцоида  $K_j$ . Пришли к противоречию. Следовательно, внутри  $K_{i_1}^*$  располагается не более чем один кольцоид из  $\{K_i\}$  ( $i_1 = 1, 2, \dots$ ).

Так как  $K_i$  целиком содержится в некотором кольцоиде  $K_{i_1}^*$ , то из определения колебания функции на множестве следует, что  $\eta_i \leq \eta_{i_1}^*$ , и в силу только что доказанного

$$\sum_{i_1=1}^{\infty} (\eta_{i_1}^*)^{\frac{n}{l}} \geq \sum_{i=1}^{\infty} (\eta_i)^{\frac{n}{l}}.$$

Но тогда в силу леммы 46

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} (\eta_i)^{\frac{n}{l}} \leq \sum_{i_1=1}^{\infty} (\eta_{i_1}^*)^{\frac{n}{l}} \leq c_4(n, n-1, \rho, L_1') = \\ = c_6 [n, L_1, d_1(\Sigma_{\mu}^n)] = c_6,$$

где  $c_4$  есть константа, зависящая лишь от  $n$ ,  $L_1'$  и размеров куба  $I_n$ , а так как  $L_1'$  и  $d_1(\Sigma_{\mu}^n)$  связаны с  $L_1$  и  $\rho$  в полне определенными соотношениями, то константу  $c_6$  можно считать зависящей лишь от  $n$ ,  $L_1$  и размеров области  $\Sigma_{\mu}^n$ .

Лемма 56. Пусть  $f(x)$  есть функция, удовлетворяющая условиям леммы 55, а  $\mu$  — константа, ограничивающая сверху общее число граней всех размерностей границы области задания функции  $f(x)$ . Тогда линейная вариация

$v_1(f, \Sigma_{\mu}^n)$  функции  $f(x)$  на  $\Sigma_{\mu}^n$  конечна и не превосходит некоторой константы  $c_7$ , зависящей лишь от  $n, L_1, \mu$  и размеров области  $\Sigma_{\mu}^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ;  $\mu$  — произвольно).

Доказательство. Пусть  $K$  есть теоретико-множественная сумма всех регулярных в  $\Sigma_{\mu}^n$  компонент уровня функции  $f(x)$ ,  $K_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) — компоненты (кольцоиды) множества  $K$ ,  $\eta_i$  — колебание функции  $f(x)$  на  $K_i$ ,  $\bar{K}_i$  — замыкание  $K_i$ ,  $c(K) = \Sigma_{\mu}^n - K$  — дополнение до  $\Sigma_{\mu}^n$  к множеству  $K$ . Тогда в силу свойства 5 § 19 на  $K' = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{K}_i$

$$v_1(f, K') = \sum_{i=1}^{\infty} v_1(f, \bar{K}_i), \quad (1)$$

Нетрудно убедиться, что для множеств  $K_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) как кольцоидов функции  $f(x)$  имеют место теоремы 42—46. А тогда из теорем 42 и 43 следует, что

$$v_1(f, \bar{K}_i) = v_1(f, K_i) = \eta_i \text{ и } v_1(f, K') = v_1(f, K). \quad (2)$$

Пусть  $\Sigma_{\mu, i}^{n-1}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ;  $\mu_1 < \mu$ ) суть  $(n-1)$ -мерные грани границы  $\bar{\Sigma}_{\mu}^n$  области  $\Sigma_{\mu}^n$ ,  $e_t$  — множество уровня  $t$  функции  $f(x)$ ,  $\tilde{v}_0(e_t)$  — число компонент множества  $e_t$ , выходящих на границу области  $\Sigma_{\mu}^n$ ,  $v_0^0(e_t)$  — число всех таких компонент множества  $e_t$ , на каждой из которых градиент функции  $f(x)$  хотя бы в одной точке обращается в нуль.

В силу теоремы 48  $\int_{-\infty}^{+\infty} v_0^0(e_t) dt = 0$ . А тогда

$$v_1(f, \Sigma_{\mu}^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} [v_0(e_t \cap K) + \tilde{v}_0(e_t)] dt = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}_0(e_t) dt.$$

Пусть  $\tilde{v}_{0i}(e_t)$  есть число компонент множества  $e_t \cap \Sigma_{\mu, i}^{n-1}$ . Так как каждая компонента, выходящая на границу области  $\Sigma_{\mu}^n$ , пересекается хотя бы с одной  $(n-1)$ -мерной гранью полигонов

эдра  $\tilde{\Sigma}_{\mu}^n$ , то  $\tilde{v}_0(e_t) < \sum_{i=1}^{\mu_1} \tilde{v}_{0i}(e_t)$ . А тогда

$$\begin{aligned} v_1[f_1 c(K)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}_0(e_t) dt \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{\mu_1} \tilde{v}_{0i}(e_t) dt \leq \sum_{i=1}^{\mu_1} v_1(f, \Sigma_{\mu, i}^{n-1}). \end{aligned} \quad (3)$$

Докажем теперь утверждение леммы 56 с помощью индукции по числу  $n$  переменных функции  $f(x)$ .

При  $n = 1$  утверждение рассматриваемой леммы следует из теоремы 41. Предположим, что лемма доказана для  $n = 1, 2, \dots, m-1$ , и докажем её для  $n = m$ . В силу (1) — (3) и леммы 55 получаем:

$$\begin{aligned} v_1(f, \Sigma_{\mu}^n) &= \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}_0(e_t) dt \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i + \sum_{i=1}^{\mu_1} v_1(f, \Sigma_{\mu, i}^{n-1}) \leq c_6 + \mu_1 c' = \\ &= c_7 [n, L_1, \mu, d_1(\Sigma_{\mu}^n)], \end{aligned}$$

где  $c'$  и  $c_7$  суть константы, зависящие лишь от  $n, L_1, \mu$  и одномерных диаметров области  $\Sigma_{\mu}^n$  и  $(n-1)$ -мерных граней её границы  $\tilde{\Sigma}_{\mu}^n$ , а следовательно,  $c_7$  зависит лишь от  $n, L_1, \mu$  и размеров области  $\Sigma_{\mu}^n$ .

Лемма 56 доказана.

Доказательство теоремы 50. При  $n = 1$  утверждение теоремы 50 совпадает с утверждением теоремы 41. Предположим, что для всякой функции  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , заданной на выпуклой замкнутой области  $\Sigma_{\mu_1}^{n-1}$  из  $(n-1)$ -мерного евклидова пространства и удовлетворяющей на  $\Sigma_{\mu_1}^{n-1}$  условиям теоремы 50 (в смысле гладкости), теорема 50 имеет место.

Пусть  $\Sigma_{\mu}^n$  есть замкнутая выпуклая область  $n$ -мерного евклидова пространства  $\Sigma_n$ ,  $f(x)$  — функция, заданная на  $\Sigma_{\mu}^n$ , удовлетворяющая (в смысле гладкости) на этой области условиям теоремы 50.

Обозначим  $\Sigma_{\mu}^{n-1}(r_1, x) = \Sigma_{\mu}^n \cap \beta_{n-1}(r_1, x)$ .

Ясно, что общее число  $\mu(r_1, x)$  граней всех размерностей границы (в  $\beta_{n-1}(r_1, x)$ ) области  $\Sigma_{\mu}^{n-1}(r_1, x)$  пространства  $\beta_{n-1}(r_1, x)$  не превосходит общего числа граней всех размерностей границы области  $\Sigma_{\mu}^n$ . Тогда из предположения индукции получаем для  $k > 1$ :

$$\begin{aligned} v_k(f, \Sigma_{\mu}^n) &= \frac{d_{k-2}^{n-1}}{d_{k-1}^n} \int_{s_{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{k-1} [f, \Sigma_{\mu}^{n-1}(r_1, x)] dm^1 d\psi_{s_{n-1}} \leqslant \\ &\leqslant \frac{d_{k-2}^{n-1}}{d_{k-1}^n} C_{n-1} d_1(\Sigma_{\mu}^n) \cdot \sup v_{k-1} [f, \Sigma_{\mu}^{n-1}(r_1, x)] = \\ &= c'_7 [n, L_1, \mu, d_1(\Sigma_{\mu}^n)] = c'_7, \end{aligned}$$

где  $c'_7$  есть константа, зависящая лишь от  $n, L_1, \mu$  и размеров области  $\Sigma_{\mu}^n$  ( $k = 2, 3, \dots, n$ ).

При  $k = 1$  в силу леммы 56 линейная вариация  $v_1(f, \Sigma_{\mu}^n) \leqslant c_7$ . А тогда при всяком  $k$

$$v_k(f, \Sigma_{\mu}^n) \leqslant c'_7 + c_5 = c_5 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где  $c_5$  есть константа, зависящая лишь от  $n, L_1, \mu$  и размеров области  $\Sigma_{\mu}^n$  задания функции  $f(x)$ .

Теорема 50 доказана.

**З а м е ч а н и е.** Сформулированные в теореме 50 достаточные условия для ограниченности  $k$ -кратной вариации функции  $n$  переменных, по существу, минимальны среди условий, формулируемых в терминах гладкости функции, ибо на  $n$ -мерном замкнутом кубе  $I_n$  можно определить  $(n-k)$  раз дифференцируемую функцию, от которой  $k$ -кратная вариация на этом кубе бесконечна ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

#### § 40. Достаточные условия для ограниченности вариаций множества

Пусть  $E_n$  есть  $n$ -мерное евклидово пространство,  $X = x_1, \dots, x_n$  — ортонормированный базис этого пространства ( $x_1, \dots, x_n$  — координаты произвольной точки  $x$  из  $E$  относительно этого базиса), а  $M_l$  —  $l$ -мерное многообразие, лежащее в пространстве  $E_n$  ( $l \leqslant n$ ).

**Определение 29.** Мы скажем, что многообразие  $M_l$  *непрерывно дифференцируемо*  $m$  раз, если для всякой точки  $q$  из  $M_l$  существует окрестность  $\varepsilon_{M_l}(q)$  (на  $M_l$ ), параметрически задаваемая с помощью  $m$  раз непрерывно дифференцируемых функций, т. е. если существуют функции  $x_i = \varphi_i^q(u_1, \dots, u_l) = \varphi_i^q(u)$  ( $0 \leq u_j \leq 1$ ,  $j = 1, \dots, l$ ),  $m$  раз непрерывно дифференцируемые на кубе  $I_l$  ( $0 \leq u_j \leq 1$ ) и осуществляющие взаимно однозначное преобразование этого куба на окрестность  $\varepsilon_{M_l}(q)$ .

В терминах гладкости многообразия достаточные условия для ограниченности его вариаций можно сформулировать следующим образом:

**Теорема 51.** Пусть  $M_l$  есть ограниченное замкнутое (в теоретико-множественном смысле)  $l$ -мерное многообразие, лежащее в пространстве  $E_n$ . Тогда, если  $M_l$  непрерывно дифференцируемо  $l - k + 1$  раз ( $k \leq l$ ), то вариация порядка  $k$  этого многообразия конечна, а вариация того же многообразия любого порядка выше чем  $l$  равна нулю.

Следствие теоремы 51.  $n$  раз непрерывно дифференцируемое ограниченное и замкнутое многообразие (произвольной размерности), лежащее в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, имеет в этом пространстве конечные вариации всех порядков.

На доказательстве сформулированных выше предложений мы останавливаться не будем, поскольку оно достаточно сложно в техническом отношении и в то же время эти результаты представляются нам далеко не окончательными. Однако отметим, как, например, можно доказать, что линейная вариация  $l$  раз непрерывно дифференцируемого, ограниченного, замкнутого многообразия размерности  $l$ , лежащего в пространстве  $E_n$ , конечна. Действительно, пусть  $M_l$  есть такое многообразие. Из определения гладкости многообразия и теоремы Гейне—Бореля следует, что  $M_l$  можно покрыть конечным числом  $l$ -мерных многообразий  $M_l^p$  ( $p = 1, \dots, r_{M_l}$ ), каждое из которых задаётся параметрически с помощью  $l$  раз непрерывно дифференцируемых функций. Пусть  $x_i = \varphi_i^p(u_1, \dots, u_l) = \varphi_i^p(u)$  ( $u \in I_l$ ) суть функции, осуществляющие указанную параметризацию многообразия  $M_l^p$ , а  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — направляющие косинусы

некоторой прямой  $\tilde{l}_1(r)$  из  $E_n$ , проходящей через начало координат системы  $X$ .

Для того чтобы точка  $u$  куба  $I_l$  при преобразовании этого куба в  $M_l^p$ , осуществляя с помощью функций  $x_i = \varphi_i^p(u)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), переходила в точку из  $M_l^p$ , принадлежащую плоскости

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = t,$$

очевидно, необходимо и достаточно, чтобы эта точка принадлежала множеству уровня  $t$  функции

$$\varphi^{(a)p}(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i^p(u).$$

А тогда из того, что указанное преобразование куба  $I_l$  в  $M_l^p$  гомеоморфно, следует, что число  $v_0[M_l^p(r, t)]$  компонент множества  $M_l^p(r, t)$ , являющегося общей частью многообразия  $M_l^p$  и гиперплоскости  $\beta_{n-1}(r, t)$ , равно числу компонент множества уровня  $t$  функции  $\varphi^{(a)p}(u)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} v_{1\tau_1(r)}(M_l^p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v_0[M_l^p(r, t)] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(e_t) dt = v_1(\varphi^{(a)p}, I_l) < +\infty. \end{aligned}$$

А так как функция  $\varphi^{(a)p}(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i^p(u)$ , будучи линейной комбинацией  $l$  раз непрерывно дифференцируемых функций  $\varphi_i^p(u)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), также  $l$  раз непрерывно дифференцируема, а следовательно, имеет конечную линейную вариацию, то и вариация  $v_{1\tau_1(r)}(M_l^p)$  конечна, и при этом, как нетрудно сообразить, производимая оценка (сверху) величины  $v_{1\tau_1(r)}(M_l^p)$  не зависит от направления прямой  $\tau_1(r)$ .

Поэтому линейная вариация каждого из многообразий  $M_l^p$  ( $p = 1, \dots, p_{M_l}$ ) конечна, а следовательно, конечна и линейная вариация поверхности  $M_l$ .

Приведенные рассуждения могут натолкнуть на мысль о том, что условия гладкости многообразия  $M_l$  теоремы 51 не понижаемы, но это, повидимому, не так в силу следую-

щих соображений: линейная вариация поверхности относительно некоторого направления, выражаясь не совсем точно, показывает, сколь велика сумма протяжённостей относительно рассматриваемого направления всевозможных отростков поверхности. Но длина отростка достаточно гладкой поверхности её линейной вариацией учитывается лишь по малому множеству направлений (это множество тем меньше, чем меньше длина отростка и чем глаже поверхность). Это следует из того, что компоненты пересечения некоторой гиперплоскости пространства, содержащего поверхность, со всеми отростками поверхности, основания которых образуют большой угол с указанной гиперплоскостью, связываются поверхностью в одну компоненту. Поэтому линейная вариация поверхности даёт нам не сумму длин отростков этой поверхности, а сумму некоторых степеней этих длин.

Из-за подобного рода соображений следует ожидать, что, например, для конечности линейной вариации ( $n-1$ )-мерной поверхности, кроме прочих условий теоремы 51, достаточно потребовать, чтобы эта поверхность была непрерывно дифференцируема лишь  $\left[\frac{n}{2}\right]$  раз (с точностью до 1). Можно построить, например, такую функцию  $f(x)$ , линейная вариация графика которой в  $(n+1)$ -мерном пространстве конечна, несмотря на то, что линейная вариация того же графика относительно оси значений функции  $f(x)$  бесконечна. Этот неожиданный факт, конечно, несколько странен и, казалось бы, ставит под сомнение естественность введённых нами вариаций. Но это не совсем так. Ограничиваясь опять рассмотрением лишь линейной вариации, отметим, что она характеризует сумму длин достаточно «тонких» («острых») отростков поверхности и сумму некоторых степеней (больших 1) длин достаточно малых и гладких отростков (эти степени тем больше, чем сильнее сглажен отросток со всей поверхностью). При этом «протяжённость» достаточно расплющенных (сглаженных) отростков поверхности в основном учитывается вариациями высших порядков. В силу наличия именно этого факта вариации различных порядков поверхности оказываются независимыми. Поэтому предположение о понижаемости условий теоремы 51 представляется нам естественным.

## ГЛАВА 7

### ПРИЛОЖЕНИЯ ВАРИАЦИЙ

#### § 41. Вариации внутри области

Пусть  $E_n$  есть  $n$ -мерное евклидово пространство ( $n$  произвольно),  $X = x_1, x_2, \dots, x_n$  — ортонормированный базис этого пространства,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — координаты произвольной точки  $x$  из  $E_n$  относительно этого базиса,  $I_n$  —  $n$ -мерный замкнутый куб из  $E_n$  со стороныю длины  $\rho$ , рёбра которого попарно параллельны осям  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а  $\tau_k^i$  —  $k$ -мерная координатная плоскость, т. е. плоскость, натянутая на некоторые  $k$  векторов системы  $X$  ( $i = 1, \dots, C_n^k$ ). Пусть  $\beta_{n-k}^i(q)$  —  $n-k$ -мерная плоскость из  $E_n$ , содержащая точку  $q$  из  $\tau_k^i$  и ортогональная к  $\tau_k^i$ . Пусть, далее,  $e$  есть произвольное замкнутое подмножество пространства  $E_n$ ,  $v_0^{I_n}(e \cap \beta_{n-k}^i(q))$  — число компонент множества  $e \cap \beta_{n-k}^i(q)$ , лежащих внутри куба  $I_n$  и не имеющих общих точек с его границей.

**Лемма 57.** *Пусть  $e$  — замкнутое множество, тогда величина  $v_0^{I_n}(e \cap \beta_{n-k}^i(q))$  как функция точки  $q$  из  $\tau_k^i$  измерима ( $m^k$ ) по Лебегу.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 18.

**Определение 30.** Число  $v_{k\tau_k^i}^{I_n}(e) = \int_{\tau_k^i} v_0^{I_n}(e \cap \beta_{n-k}^i(q))$

называется *вариацией порядка  $k$  множества  $e$  внутри куба  $I_n$  относительно плоскости  $\tau_k^i$* , а число

$$v_k^{I_n}(e) = \frac{1}{C_n^k} \sum_{i=1}^{C_n^k} v_{k\tau_k^i}^{I_n}(e)$$

(где  $C_n^k$  — число сочетаний из  $n$  по  $k$ ) называется *вариацией множества  $e$  порядка  $k$  в кубе  $I_n$* , а  $V^{I_n}(e) = \sum_{k=0}^n v_k^{I_n}(e)$  — просто *вариацией множества  $e$  в кубе  $I_n$* .

Отметим, что вариации всех порядков множества внутри куба не зависят от выбора системы  $X$ , поскольку они определяются лишь относительно систем  $X$  таких, что векторы  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , составляющие эту систему, попарно параллельны рёбрам куба  $I_n$ , а от параллельного сдвига системы  $X$  вариации множества, очевидно, не изменяются. Поэтому приведённые в определении 30 вариации множества мы называем *вариациями в кубе* и не оговариваем, относительно какой системы они вычислены. Отметим также, что мы ограничиваемся рассмотрением замкнутых множеств лишь потому, что в таком случае измеримость функций, необходимых для определения вариаций множества, доказывается достаточно просто.

Пусть  $\beta_{n-1}(x_i)$  есть гиперплоскость пространства  $E_n$ , ортогональная к оси вектора  $x_i$  и содержащая точку  $x_i$  из этой оси.

Теорема 52. Для всякого замкнутого множества  $e$  из  $E_n$

$$v_k^{I_n}(e) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} v_{k-1}^{I_n \cap \beta_{n-1}(x_i)}(e \cap \beta_{n-1}(x_i)) dm^1 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

и

$$V^{I_n}(e) = v_0^{I_n}(e) +$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} v_k^{I_n \cap \beta_{n-1}(x_i)}(e \cap \beta_{n-1}(x_i)) dm^1 \quad (n=1, 2, \dots).$$

Эта теорема представляет собой тривиальное следствие теоремы Фубини.

## § 42. Метрический закон двойственности

В отличие от прочих метрических характеристик множества вариации обладают тем интересным свойством, что, зная величины вариаций этого множества, можно сказать нечто существенное о дополнении к этому множеству. Например, если вариации множества не очень велики, то в

дополнение к этому множеству можно вписать шар (или куб) достаточно больших размеров. Точнее последнее выражается следующим образом.

Теорема 53. Пусть  $I_n$  есть  $n$ -мерный замкнутый куб из  $E_n$  со стороной длины  $r \leq 1$ ,  $e$  — замкнутое множество из  $E_n$ , вариации всех порядков от которого внутри куба  $I_n$  конечны, и такое, что  $v_k^{I_n}(e) = 0$  при  $k > p$  ( $0 \leq p < n$ ).

Тогда в  $I_n$  —  $e$  содержится  $n$ -мерный замкнутый куб со стороной длины

$$d \geq \frac{\frac{n}{r^{n-p}}}{3 + 3 \sqrt[n-p]{(3p)^p A_n^p [1 + V^{I_n}(e)]}},$$

ребра которого параллельны ребрам куба  $I_n$  ( $n = 1, 2, \dots, p = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ); где  $A_n^p$  — число размещений из  $n$  по  $p$ .

Несколько ниже мы укажем на одно существенное аналитическое приложение этой теоремы, сейчас же займемся её доказательством.

Лемма 58. Пусть  $e$  есть замкнутое подмножество пространства  $E_n$ ,  $I_n$  —  $n$ -мерный замкнутый куб из  $E_n$  со стороной длины  $r \leq 1$ ,  $A(e, I_n) = A > 0$  — глубина погружения множества  $e$  в кубе  $I_n$ \*)

Пусть множество  $e$  таково, что  $v_k^{I_n}(e) = 0$  при  $k > p$  ( $0 \leq p < n$ ).

Тогда

$$V^{I_n}(e) \geq \frac{A^p}{p^p A_n^p} = \frac{A^p}{p^p n(n-1)\dots(n-p)} \quad \text{при } p > 0$$

и

$$V^{I_n}(e) \geq 1 \quad \text{при } p = 0.$$

Доказательство. Эту лемму мы докажем по индукции (по числу  $n$ ). Пусть  $n = 1$ . В таком случае  $I_n = I_1$ , очевидно, есть отрезок длины  $r \leq 1$ .

\*) Глубиной погружения множества  $e$  в кубе  $I_n$  называется число  $A(e, I_n) = \sup_a \rho(a, \tilde{I}_n)$ , где  $\tilde{I}_n$  есть граница  $I_n$ , а  $a$  — произвольная точка из  $e \cap I_n$ .

Так как  $0 = p < n = 1$ , т. е.  $v_1^{I_n}(e) = 0$ , то мера множества  $e \cap I_n$  равна нулю, а следовательно, всякая компонента множества  $e \cap I_n$ , лежащая строго внутри отрезка  $I_n$ , является точкой.

А так как  $A(e, I_1) > 0$ , то  $v_1^{I_1}(e) \geq 1$ . Следовательно, при  $n = 1$   $V^{I_1}(e) \geq 1$ .

Пусть утверждение рассматриваемой леммы доказано для всевозможных замкнутых подмножеств пространств размерностей  $1, 2, \dots, n-1$ ; докажем то же для произвольного замкнутого подмножества пространства  $E_n$ . Очевидно, мы можем полагать, что  $p > 0$ , так как при  $p = 0$  из того, что  $A(e, I_n) > 0$ , следует сразу, что  $V^{I_n}(e) \geq 1$ .

Пусть  $I_n'$  есть  $n$ -мерный замкнутый куб из  $I_n$  с центром в центре куба  $I_n$  с рёбрами, параллельными рёбрам куба  $I_n$ , и такой, что его граница удалена от границы куба  $I_n$  на  $\frac{p-1}{p} A(e, I_n)$ . Нетрудно сообразить, что глубина погружения множества  $e$  в кубе  $I_n'$  равна  $\frac{1}{p} A(e, I_n) = A(e, I_n')$ . Так как множество  $e$  замкнуто, то в  $e \cap I_n'$  существует точка  $c$  такая, что  $\rho(c, I_n) = A(e, I_n)$  и  $\rho(c, I_n') = A(e, I_n')$ , где  $I_n$  и  $I_n'$  суть соответственно границы кубов  $I_n$  и  $I_n'$ .

Обозначим через  $e'$  компоненту множества  $e \cap I_n'$ , содержащую точку  $c$ . Ясно, что если эта компонента не имеет общих точек с границей куба  $I_n'$ , то она лежит строго внутри куба  $I_n$ , а тогда

$$V^{I_n}(e) \geq v_0^{I_n}(e) \geq 1 \geq \frac{r^p}{p^p A_n^p} \geq \frac{[A(e, I_n)]^p}{p^p A_n^p},$$

ибо  $A(e, I_n) \leq \frac{1}{2} r \leq 1$ , т. е. в таком случае лемма 58 имеет место. Поэтому далее, желая продолжать доказательство, мы, очевидно, должны предполагать, что компонента  $e'$  имеет хотя бы одну общую точку  $c'$  с границей куба  $I_n'$ .

Пусть  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  есть система координат, оси которой параллельны рёбрам куба  $I_n$ . Для определённости будем предполагать, что точка  $c'$  принадлежит той грани границы куба  $I_n'$ , которая ортогональна к  $x_1$ . Пусть  $\delta$  есть отрезок из  $|x_1|$ , являющийся проекцией компоненты  $e'$  на

ось  $x_1$ . Ясно, что длина этого отрезка не менее  $\frac{1}{p} A(e, I_n)$ . Пусть  $b$  есть произвольная точка отрезка  $\delta$ , а  $\beta_{n-1}(b)$  — гиперплоскость пространства  $E_n$ , ортогональная к  $x_1$  и содержащая точку  $b$ . Так как  $e'$ , будучи компонентой множества  $e \cap I'_n$ , связно и гиперплоскость  $\beta_{n-1}(b)$  разделяет точки  $c$  и  $c'$ , то множество  $e' \cap \beta_{n-1}(b)$  не пусто. А так как  $e'$  принадлежит кубу  $I'_n$ , то, очевидно, множество  $e \cap \beta_{n-1}(b)$  погружается в куб  $I_n \cap \beta_{n-1}(b)$  не менее чем на  $\frac{p-1}{p} A(e, I_n)$ .

Так как, по предположению леммы  $v_{p+1}^{I_n}(e) = 0$ , то из теоремы 52 следует, что почти для всякой точки  $b$  из  $\delta$  соответствующее множество  $e \cap \beta_{n-1}(b)$  таково, что

$$v_{p+1+l}^{I_n \cap \beta_{n-1}(b)} [e \cap \beta_{n-1}(b)] = 0.$$

Тогда из теоремы 52 и предположения индукции получаем:

$$\begin{aligned} V^{I_n}(e) &= v_0^{I_n}(e) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k^{I_n}(e) \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p v_k^{I_n}(e) \geqslant \frac{1}{n} \int_{\delta} \sum_{k=1}^p v_{k-1}^{I_n \cap \beta_{n-1}(b)} [e \cap \beta_{n-1}(b)] dm^1 \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{n} \int_{\delta} V^{I_n \cap \beta_{n-1}(b)} [e \cap \beta_{n-1}(b)] dm^1 \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{n} |\delta| \frac{[A(e, I_n)]^{p-1} (p-1)^{p-1}}{(p-1)^{p-1} p^{p-1} A_{n-1}^{p-1}} \geqslant \\ &\geqslant \frac{[A(e, I_n)]^{p-1}}{p \cdot p^{p-1} \cdot n A_{n-1}^{p-1}} = \frac{[A(e, I_n)]^p}{p^p A_n^p}. \end{aligned}$$

**Доказательство теоремы 53.** Куб  $I_n$  гиперплоскостями, параллельными его  $n-1$ -мерным граням, разделим на  $m^n$  равных кубов  $I_n^i$  ( $i = 1, 2, \dots, m^n$ ) той же размерности; в каждый куб  $I_n^i$  впишем  $n$ -мерный замкнутый куб  $J_n^i$  с центром в центре  $I_n^i$  с ребрами, параллельными ребрам куба  $I_n$  и имеющими длину  $\frac{p}{3m}$ , где

$$m = 1 + \sqrt[p]{\frac{(3p)^p A_n^p [1 + V^{I_n}(e)]}{p^p}}.$$

С помощью леммы 58 мы покажем, что хотя бы один из кубов  $J_n^i$  не содержит точек из множества  $e$ .

Из определения вариаций нетрудно вывести, что  $V^{I_n}(e) \geq m^n \geq \sum_{i=1}^{m^n} V^{I_n^i}(e)$ . А тогда из леммы 66 получаем, что если в каждом из кубов  $J_n^i$  ( $i = 1, 2, \dots, m^n$ ) имеются точки множества  $e$ , то

$$V^{I_n}(e) \geq \sum_{i=1}^{m^n} V^{I_n^i}(e) \geq m^n \frac{\left(\frac{\rho}{3m}\right)^p}{p^p A_n^p} = m^{n-p} \frac{\rho^p}{(3p)^p A_n^p} \geq V^{I_n}(e) + 1,$$

ибо в таком случае множество  $e$  погружается в каждый из кубов  $I_n^i$  ( $i = 1, 2, \dots, m^n$ ) не менее чем на  $\frac{\rho}{3m}$ . Итак,  $V^{I_n}(e) \geq V^{I_n}(e) + 1$ , что невозможно. Следовательно, хотя бы один из кубов  $J_n^i$  ( $i = 1, 2, \dots, m^n$ ) не содержит точек множества  $e$ .

Пусть для определённости  $J_n^1$  является таковым. Из определения куба  $J_n^1$  легко усмотреть, что длина его сто-

$$\text{роны равны } d = \frac{\rho}{3m} \geq \frac{\rho \cdot \rho^{\frac{p}{n-p}}}{3(1 + \sqrt[n-p]{\frac{\rho \cdot \rho^{\frac{p}{n-p}}}{(3p)^p A_n^p [1 + V^{I_n}(e)]}})} = \\ = \frac{\rho^{\frac{n}{n-p}}}{3 + 3 \sqrt[n-p]{\frac{\rho^{\frac{n}{n-p}}}{(3p)^p A_n^p [1 + V^{I_n}(e)]}}}.$$

Теорема 53 доказана.

### § 43. Тринадцатая проблема Гильберта

Пусть  $E_3$  есть трёхмерное евклидово пространство,  $x, y, z$  — ортонормированный базис этого пространства,  $x, y, z$  — координаты произвольной точки  $a$  из  $E_3$  относительно этой системы,  $I_3$  — единичный куб из  $E_n$ , определяемый соотношениями

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Пусть, далее, нам задана система функций

$$\varphi^0 = \varphi^0(U_1^0, U_2^0),$$

$$\begin{aligned} \varphi_{v_1, v_2, \dots, v_\alpha}^\alpha &= \varphi_{v_1, v_2, \dots, v_\alpha}^\alpha (U_{v_1, v_2, \dots, v_\alpha}^0, 1; U_{v_1, v_2, \dots, v_\alpha}^0, 2), \\ \varphi_{v_1, v_2, \dots, v_s}^s &= \varphi_{v_1, v_2, \dots, v_s}^s (U_{v_1, v_2, \dots, v_s}^0, 1; U_{v_1, v_2, \dots, v_s}^0, 2) \\ (\alpha &= 0, 1, 2, \dots, s; v_i = 1, 2; i = 1, 2, \dots, s+1), \end{aligned}$$

связанных друг с другом следующим образом:

$$U_{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha+1}}^\alpha = \varphi_{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha+1}}^{\alpha+1};$$

при этом каждое из  $U_{v_1, \dots, v_{s+1}}^s$  тождественно равно либо  $x$ , либо  $y$ , либо  $z$ , т. е. каждая из функций  $\varphi_{v_1, \dots, v_s}^s$  зависит от какой-либо пары переменных из  $x, y, z$ .

Так как в силу теоремы Уитнея [15] функцию, заданную на замкнутом подмножестве евклидова пространства, можно доопределить на всём пространстве, сохранив при этом её гладкость, то для дальнейшего, не уменьшая общности, мы можем предполагать, что каждая из вышеуказанных функций определена для всех значений аргументов.

**Определение 31.** Систему функций

$$\varphi_{v_1, v_2, \dots, v_\alpha}^\alpha (U_{v_1, v_2, \dots, v_\alpha}^0, 1; U_{v_1, v_2, \dots, v_\alpha}^0, 2),$$

связанных друг с другом вышеуказанными условиями, мы назовём *суперпозицией функций двух переменных*.

Мы скажем, что функция  $f(x, y, z)$  есть *суперпозиция*, или представима в виде суперпозиции функций двух переменных (в системе  $xyz$ ), если существует набор функций  $\varphi_{v_1, \dots, v_\alpha}^\alpha (U_{v_1, \dots, v_\alpha}^0, 1; U_{v_1, \dots, v_\alpha}^0, 2)$  ( $\alpha = 0, \dots, s$ ;  $v_i = 1, 2$ ;  $i = 1, \dots, s+1$ ), таких, что  $f(x, y, z) \equiv \varphi^0(U_1^0, U_2^0)$  ( $\varphi(U_1^0, U_2^0)$  зависит от  $x, y, z$  через посредство всех функций  $\varphi_{v_1, \dots, v_\alpha}^\alpha$ ) для всякой точки  $x, y, z$  из области определения функции  $f(x, y, z)$ . При этом число  $s$  называется *кратностью суперпозиции*. *Видом суперпозиции* мы назовём правило, которое указывает, от какой пары переменных из  $x, y, z$  зависит каждая функция из  $\varphi_{v_1, v_2, \dots, v_s}^s$ .

Ещё в 1900 г. Д. Гильбертом было высказано предположение, состоящее в том, что существуют аналитические функции трёх переменных, не являющиеся суперпозицией никакой кратности непрерывных функций двух переменных. До настоящего времени эта гипотеза и не доказана, и не опровергнута. Ещё сам Гильберт указывал, что существуют аналитические функции трёх переменных, не представимые в виде суперпозиции конечной кратности аналитических функций двух переменных. Это следует из того, что между частными производными суперпозиции и функций, составляющих эту суперпозицию, существуют вполне определённые аналитические соотношения; но в то же время число всех частных производных достаточно высокого порядка от функции трёх переменных на порядок больше, чем всех частных производных того же порядка от конечного числа функций двух переменных, а поэтому из предположения, что всякая аналитическая функция трёх переменных является суперпозицией аналитических функций двух переменных, можно построить аналитическое отображение пространства коэффициентов разложений в ряды функций, составляющих суперпозицию, на пространство коэффициентов разложения в ряд функций трёх переменных, которое, как уже указывалось, имеет большую размерность, что, как известно, невозможно.

А. Я. Дубовитский построил пример дважды непрерывно дифференцируемой функции трёх переменных, не являющуюся однократной суперпозицией дважды непрерывно дифференцируемых функций двух переменных. Р. А. Минлос доказал, что полином  $[x^3 + (y - z)^2][y^2 + (x - z)][z^2 + (x - y)^3]$  на единичном кубе  $I_3$  не представим в виде однократной суперпозиции непрерывных функций двух переменных (относительно фиксированной системы координат).

Можно доказать большее, а именно: для всякой трёхмерной области из  $E_3$  можно указать  $\varepsilon > 0$  такое, что всякая функция трёх переменных, уклоняющаяся на этой области от полинома  $xy + xz + yz$  менее чем на  $\varepsilon$  (уклонение в смысле метрики пространства  $C$  непрерывных функций), не представима в виде суперпозиции первой кратности непрерывных функций двух переменных (относительно системы  $x, y, z$  или системы, достаточно близкой к  $x, y, z$ ). С помощью последнего нетрудно построить полином, который (вместе с некоторой своей окрестностью в смысле метрики  $C$ ) ни на какой

области и ни в какой системе координат не разлагается в однократную суперпозицию непрерывных функций двух переменных (при этом упомянутая окрестность полинома зависит от наперёд выбранной области определения полинома).

Ниже мы изложим решение некоторых частных случаев сформулированной проблемы. Наши условия, ограничивающие общность задачи, будут налагаться не на кратность суперпозиции, а на гладкость функций, её составляющих. Дело в том, что, например, гладких функций трёх переменных в некотором смысле больше, чем гладких функций двух переменных. Заслуга вариаций в данном вопросе состоит именно в том, что в терминах вариаций множества последнему предложению удаётся придать вполне точный смысл, что нетрудно будет увидеть в дальнейших рассуждениях.

С помощью вариаций можно доказать следующее.

Теорема 54. Для всякого наперёд заданного целого положительного числа  $l$  на кубе  $I_3$  можно определить  $l$  раз непрерывно дифференцируемую функцию (трёх переменных), не представимую на этом кубе в виде суперпозиции конечной (произвольной) кратности  $\left[\frac{2}{3}l\right]$  раз дифференцируемых функций двух переменных, все частные производные порядка  $\left[\frac{2}{3}l\right]$  от каждой из которых удовлетворяют условию Липшица.

Укажем на некоторые простые следствия теоремы 54.

Следствие 1. Для всяких наперёд заданных чисел  $s$  и  $L_1$  на кубе  $I_3$  можно определить аналитическую функцию (трёх переменных), удовлетворяющую на этом кубе условию Липшица с единичной константой и такую, что существует  $\varepsilon > 0$  такое, что всякая функция, уклоняющаяся на кубе  $I_3$  от указанной аналитической функции менее чем на  $\varepsilon$  (отклонение в смысле метрики пространства  $C$ ), не представима на кубе  $I_3$  в виде  $s$ -кратной суперпозиции функций двух переменных, удовлетворяющих условию Липшица с константой  $L_1$  (это нетрудно доказать с помощью теоремы Арцеля относительно компактности семейства равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций).

Следствие 2. На всём пространстве  $E_3$  можно задать функцию, бесконечное число раз непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую на всём пространстве условию

Липшица с константой 1, не являющуюся суперпозицией (на  $E_3$ ) функций двух переменных с условием Липшица. (Это делается с помощью следствия 1 и теоремы Уитнея [15].)

Чтобы не загромождать доказательство, теорему 54 мы докажем лишь для  $l = 1$ , поскольку в общем виде она доказывается точно так же, как и для  $l = 1$ .

Отметим, что если некоторая функция трёх переменных не является относительно некоторой системы координат суперпозицией никакой кратности функций двух переменных некоторого класса (в смысле гладкости), то та же функция ни в какой декартовой системе координат не представима в виде суперпозиции конечной кратности функций двух переменных того же (в смысле гладкости) класса, поскольку переход от одной системы координат к другой осуществляется линейным преобразованием переменных, увеличивающим кратность суперпозиции лишь на 1.

#### § 44. Аппроксимация суперпозиции функций суперпозицией полиномов

Лемма 59. Пусть  $f(x, y, z)$  есть суперпозиция (на кубе  $I_3$ ) функций  $\varphi_{v_1, \dots, v_\alpha}^a (U_{v_1, v_2, \dots, v_\alpha, 1}^a; U_{v_1, v_2, \dots, v_\alpha, 2}^a)$  ( $a = 0, 1, 2, \dots, s$ ,  $v_i = 1, 2, i = 1, 2, \dots, s+1$ ), удовлетворяющих условию Липшица с константой  $L_1$ .

Тогда для всякого целого положительного  $k$  можно указать полином  $P^k(x, y, z)$ , являющийся  $s$ -кратной суперпозицией того же вида, что и функция  $f(x, y, z)$  полиномов  $P_{v_1, v_2, \dots, v_\alpha}^a (U_{v_1, v_2, \dots, v_\alpha, 1}^a; U_{v_1, v_2, \dots, v_\alpha, 2}^a)$ , каждый из которых имеет по каждому из своих переменных степень не выше  $k$ , такой, что для всякой точки  $x, y, z$  из  $I_3$  имеет место неравенство

$$|f(x, y, z) - P^k(x, y, z)| \leq \frac{c_s}{k},$$

где  $c_s$  есть константа, зависящая лишь от  $s$  и  $L_1$ .

Доказательство. Так как функция  $f(x, y, z)$  рассматривается нами как суперпозиция функций  $\varphi_{v_1, \dots, v_\alpha}^a (U_{v_1, \dots, v_\alpha, 1}^a; U_{v_1, \dots, v_\alpha, 2}^a)$  лишь на единичном кубе  $I_3$ , то, очевидно, каждую из функций  $\varphi_{v_1, \dots, v_s}^s (U_{v_1, \dots, v_s, 1}^s; U_{v_1, \dots, v_s, 2}^s)$  ( $v_i = 1, 2, i = 1, 2, \dots, s+1$ ) мы можем рассматривать лишь

на соответствующем ей единичном квадрате:  $0 \leq U_{v_1, \dots, v_s}^s, 1 \leq 1$  и  $0 \leq U_{v_1, v_2, \dots, v_s, 2}^s \leq 1$ , ибо каждое из переменных  $x, y, z$  изменяется лишь от 0 до 1.

В силу теоремы Джексона об аппроксимации функций полиномами [17] для всякого  $k$  можно указать полином

$$P_{v_1, \dots, v_s}^s = P_{v_1, \dots, v_s}^s (U_{v_1, \dots, v_s, 1}^s; U_{v_1, \dots, v_s, 2}^s)$$

такой, что

$$\begin{aligned} & |\varphi_{v_1, \dots, v_s}^s (U_{v_1, \dots, v_s, 1}^s; U_{v_1, \dots, v_s, 2}^s) - \\ & - P_{v_1, \dots, v_s}^s (U_{v_1, \dots, v_s, 1}^s; U_{v_1, \dots, v_s, 2}^s)| \leq \frac{c'}{k} \end{aligned}$$

$(0 \leq U_{v_1, \dots, v_s, 1}^s \leq 1, 0 \leq U_{v_1, \dots, v_s, 2}^s \leq 1)$ , где  $c'$  есть константа, зависящая лишь от  $I_1$  ( $v_i = 1, 2; i = 1, 2, \dots, s+1$ ).

Ясно, что

$$\varphi_{v_1, \dots, v_s}^a (U_{v_1, v_2, \dots, v_s, 1}^a; U_{v_1, v_2, \dots, v_s, 2}^a) = \varphi_{v_1, v_2, \dots, v_s}^{(a)} (x, y, z)$$

как функция от  $x, y, z$  на кубе  $I_3$  представляет собой суперпозицию функций  $\varphi_{v_1, \dots, v_s}^{\gamma} (U_{v_1, v_2, \dots, v_s, 1}^{\gamma}; U_{v_1, v_2, \dots, v_s, 2}^{\gamma})$  ( $\gamma = a, a+1, \dots, s; v_i = 1, 2; i = \gamma+1, \dots, s+1$ ). Сделаем индуктивное предположение о том, что существует полином

$$P_{v_1, \dots, v_s}^a (U_{v_1, v_2, \dots, v_s, 1}^a; U_{v_1, v_2, \dots, v_s, 2}^a) = P_{v_1, \dots, v_s}^{(a)} (x, y, z),$$

являющийся суперпозицией того же вида, что и функция  $\varphi_{v_1, v_2, \dots, v_s}^{(a)} (x, y, z)$ , составленной из полиномов  $P_{v_1, \dots, v_s}^{\gamma} (U_{v_1, \dots, v_s, 1}^{\gamma}; U_{v_1, \dots, v_s, 2}^{\gamma})$ , имеющих по каждому из своих переменных степень не выше  $k$ , и такой, что для всякой точки  $x, y, z$  из  $I_3$  имеет место неравенство

$$|\varphi_{v_1, \dots, v_s}^{(a)} (x, y, z) - P_{v_1, \dots, v_s}^{(a)} (x, y, z)| \leq \frac{c_a}{k},$$

где  $c_a$  есть константа, зависящая лишь от  $a$  и  $I_1$

$$(v_i = 1, 2; i = a+1, \dots, s+1; 0 \leq a \leq s).$$

Пусть  $M_{v_1, v_2, \dots, v_s}^{(a)}$  и  $m_{v_1, v_2, \dots, v_s}^{(a)}$  суть соответственно верхняя и нижняя грани значений функции  $\varphi_{v_1, \dots, v_s}^{(a)} (x, y, z)$

на кубе  $I_3$ , а  $R_{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha-1}}^{\alpha-1}$  — квадрат плоскости  $U_{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha-1}, 1}^{\alpha-1}$ ,  $U_{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha-1}, 2}^{\alpha-1}$ , определяемый соотношениями

$$m_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 1}^{(\alpha)} - c_\alpha \leq U_{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha-1}, 1}^{\alpha-1} < M_{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha-1}, 1}^{(\alpha)}$$

и

$$m_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 2}^{(\alpha)} - c_\alpha \leq U_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 2}^{\alpha-1} < M_{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha-1}, 2}^{(\alpha)}.$$

Ясно, что размеры квадрата  $R_{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha-1}}^{\alpha-1}$  полностью определяются числом  $\alpha$  и константой Липшица  $L_1$ .

В силу уже упомянутой теоремы Джексона существует полином  $P_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}}^{\alpha-1}(U_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 1}^{\alpha-1}; U_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 2}^{\alpha-1})$ , имеющий по каждому из своих переменных  $U_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 1}^{\alpha-1}$  и  $U_{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha-1}, 2}^{\alpha-1}$  степень не выше  $k$ , и такой, что для всякой точки квадрата  $R_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}}^{\alpha-1}$  имеет место неравенство  $|\varphi_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}}^{(\alpha-1)}(U_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 1}^{\alpha-1}; U_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 2}^{\alpha-1}) - P_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}}^{\alpha-1}(U_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 1}^{\alpha-1}; U_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 2}^{\alpha-1})| \leq \frac{c_\alpha}{k}$ , где  $c_\alpha$  есть константа, зависящая лишь от  $L_1$  и размеров квадрата  $R_{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha-1}}^{\alpha-1}$ , а следовательно, зависит лишь от  $\alpha$  и  $L_1$ .

Обозначим через  $P_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}}^{(\alpha-1)}(x, y, z)$  полином от  $x, y, z$ , являющийся суперпозицией полиномов  $P_{v_1, v_2, \dots, v_\gamma}^{\gamma}(U_{v_1, \dots, v_\gamma, 1}^{\gamma}; U_{v_1, \dots, v_\gamma, 2}^{\gamma})$  ( $\gamma = \alpha - 1, \alpha, \dots, s$ ;  $v_i = 1, 2$ ;  $i = \alpha, \alpha + 1, \dots, s + 1$ ).

Оценим сверху отклонение полинома  $P_{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha-1}}^{\alpha-1}(x, y, z)$  от функции  $\varphi_{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha-1}}^{(\alpha-1)}(x, y, z)$ : из предположения индукции и того, что функции  $\varphi_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}}^{(\alpha-1)}(U_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 1}^{\alpha-1}; U_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 2}^{\alpha-1})$  удовлетворяют условию Липшица, получаем:

$$\begin{aligned} & |\varphi_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}}^{(\alpha-1)}(x, y, z) - P_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}}^{(\alpha-1)}(x, y, z)| = \\ & = |\varphi_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}}^{(\alpha-1)}(\varphi_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 1}^{(\alpha)}; \varphi_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 2}^{(\alpha)}) - \\ & - P_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}}^{(\alpha-1)}(P_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 1}^{(\alpha)}; P_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 2}^{(\alpha)})| = \\ & = |\varphi_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}}^{(\alpha-1)}(\varphi_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 1}^{(\alpha)}; \varphi_{v_1, \dots, v_{\alpha-1}, 2}^{(\alpha)}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\varphi_{v_1, \dots, v_{a-1}}^{a-1} (P_{v_1, \dots, v_{a-1}, 1}^{(a)}, P_{v_1, \dots, v_{a-1}, 2}^{(a)}) + \\
 & + \varphi_{v_1, \dots, v_{a-1}}^{a-1} (P_{v_1, \dots, v_{a-1}, 1}^{(a)}, P_{v_1, \dots, v_{a-1}, 2}^{(a)}) - \\
 & - P_{v_1, \dots, v_{a-1}}^{a-1} (P_{v_1, \dots, v_{a-1}, 1}^{(a)}, P_{v_1, \dots, v_{a-1}, 2}^{(a)}) \leq \\
 & \leq \left| \varphi_{v_1, \dots, v_{a-1}}^{a-1} (\varphi_{v_1, \dots, v_{a-1}, 1}^{(a)}, \varphi_{v_1, \dots, v_{a-1}, 2}^{(a)}) - \right. \\
 & \left. - \varphi_{v_1, \dots, v_{a-1}}^{a-1} (P_{v_1, \dots, v_{a-1}, 1}^{(a)}, P_{v_1, \dots, v_{a-1}, 2}^{(a)}) \right| + \\
 & + \left| \varphi_{v_1, \dots, v_{a-1}}^{a-1} (P_{v_1, \dots, v_{a-1}, 1}^{(a)}, P_{v_1, \dots, v_{a-1}, 2}^{(a)}) - \right. \\
 & \left. - P_{v_1, \dots, v_{a-1}}^{a-1} (P_{v_1, \dots, v_{a-1}, 1}^{(a)}, P_{v_1, v_2, \dots, v_{a-1}, 2}^{(a)}) \right| \leq \\
 & \leq L_1 [(\varphi_{v_1, \dots, v_{a-1}, 1}^{(a)} - P_{v_1, \dots, v_{a-1}, 1}^{(a)})^2 + \\
 & + (\varphi_{v_1, \dots, v_{a-1}, 2}^{(a)} - P_{v_1, \dots, v_{a-1}, 2}^{(a)})^2]^{1/2} + \\
 & + \frac{c'_a}{k} \leq L_1 \sqrt{\left(\frac{c_a}{k}\right)^2 + \left(\frac{c_a}{k}\right)^2} + \frac{c'_a}{k} = \frac{c_{a-1}}{k},
 \end{aligned}$$

где  $c_{a-1}$  есть константа, зависящая лишь от  $a-1$ ,  $s$  и  $L_1$ . При  $a-1=0$  последнее представляет собой утверждение леммы 59. Лемма 59 доказана.

#### § 45. Оценка вариаций некоторых множеств

Пусть  $E_p$  и  $E_n$  суть два евклидова пространства соответственно размерностей  $p$  и  $n$ ,  $Z = z_1, z_2, \dots, z_p$  и  $Y = y_1, y_2, \dots, y_n$  — базисы этих пространств,  $z_1, z_2, \dots, z_p$  и  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — координаты произвольных точек  $z$  и  $y$  из  $E_p$  и  $E_n$  относительно указанных базисов,  $\sigma_p^r$  —  $p$ -мерный замкнутый шар из  $E_p$  радиуса  $r$  с центром в начале координат,  $P_{p,i}^k = P_{p,i}^k(z_1, z_2, \dots, z_p)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — полиномы от  $z_1, z_2, \dots, z_p$ , имеющие по каждому из своих переменных степень не выше  $k$ ,  $\sigma_p^{r'} = \psi^k(\sigma_p^r)$  — образ шара  $\sigma_p^r$  при отображении  $\psi^k$  пространства  $E_p$  в пространство  $E_n$ , задаваемом равенствами  $y_i = P_{p,i}^k(z_1, z_2, \dots, z_p)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $I_n$  —  $n$ -мерный замкнутый куб из  $E_n$  с рёбрами, параллельными осям системы  $Y$ , с длиной ребра, равной  $\rho \leq 1$ .

Лемма 60. Если  $n > p$ , то для  $l = 1, 2, \dots, n-p$   $v_{p+l}^{I_n}(\sigma_p^{r'}) = 0$ .

**Доказательство.** Так как при дифференцируемых отображениях одного евклидова пространства в другое всякое множество, имеющее  $(p+l)$ -мерную меру Хаусдорфа (см. сноску на стр. 105), равную нулю, переводится таким отображением в множество, мера Хаусдорфа той же размерности от которого также равна нулю, то из того, что отображение  $\psi^k$  осуществляется полиномами, а следовательно, оно дифференцируемо, и того, что при  $l > 0$   $(p+l)$ -мерная мера Хаусдорфа  $h_{p+l}(E_n)$  всего пространства равна нулю, следует, что  $h_{p+l}(\sigma_p^{r'}) = 0$ . А тогда для всякого  $\varepsilon > 0$  существуют  $n$ -мерные шары  $\sigma_n^{r_i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) из  $E_n$  такие, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i^{p+l} < \varepsilon \text{ и } r_i < 1.$$

Пусть  $\tau_{p+l}^m$  есть  $(p+l)$ -мерная координатная плоскость пространства  $E_n$ ,  $\sigma_p^{mr'}$  — проекция множества  $\sigma_p^{r'}$  на эту плоскость,  $\sigma_{p+l}^{mr'}$  —  $(p+l)$ -мерный замкнутый шар из  $\tau_{p+l}^m$ , являющийся проекцией шара  $\sigma_n^{r_i}$  на  $\tau_{p+l}^m$ .

Ясно, что  $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_n^{mr'}$  содержит множество  $\sigma_p^{mr'}$  и при  $l > 0$

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i^{p+l} = \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{p+l} < \varepsilon.$$

А тогда из того, что  $\varepsilon > 0$  произвольно, следует, что  $h_{p+l}(\sigma_p^{mr'}) = 0$ , т. е. почти для всякой точки  $q$  из  $\tau_{p+l}^m$  общая часть множества  $\sigma_p^{r'}$  и плоскости  $\beta_{n-p-l}^m(q)$ , ортогональной к  $\tau_{p+l}^m$  в точке  $q$ , пуста.

Следовательно, при  $l > 0$

$$v_{p+l}^{I_n}(\sigma_p^{r'}) = \sum_{i=1}^{I_n^{p+l}} v_{p+l}^{I_n^i}(\sigma_p^{r'}) = 0.$$

**Лемма 61.** Для всякого  $k > 3$  число компонент  $v_0(e_t)$  множества  $e_t$  уровня  $t$  полинома  $P_p^k(z_1, \dots, z_p)$ , рассматриваемого лишь на шаре  $\sigma_p^r$ , не превосходит  $(2k)^p$ .

**Доказательство.** Из результатов О. А. Олейник [14] следует, что число ограниченных компонент произвольного множества уровня  $k$ -й степени от  $p$  переменных

не превосходит  $\frac{1}{2} k^p$ . Отсюда число компонент множества  $e_t$ , лежащих строго внутри шара  $\sigma_p^r$ , не превосходит  $\frac{1}{2} k^p$ .

Положим  $P_p^{2k} = (P^k - t)^2 + \left(r^2 - \sum_{i=1}^p z_i^2\right)^2$ . Обозначим через  $\tilde{\sigma}_p^r$  границу шара  $\sigma_p^r$ . Ясно, что множество  $e_t \cap \tilde{\sigma}_p^r$  совпадает с множеством нулевого уровня полинома  $P_p^{2k}$ , число компонент которого не превосходит  $\frac{1}{2} (2k)^p$ ; тогда из того, что число компонент множества  $e_t \cap \sigma_p^r$ , выходящих на границу  $\tilde{\sigma}_p^r$  шара  $\sigma_p^r$ , не превосходит числа компонент множества  $e_t \cap \tilde{\sigma}_p^r$ , следует, что число всех компонент множества  $e_t \cap \sigma_p^r$  не превосходит  $\frac{1}{2} k^p + \frac{1}{2} (2k)^p$ , т. е.  $v_0(e_t) \leq \frac{1}{2} k^p + \frac{1}{2} (2k)^p \leq (2k)^p$ .

*Лемма 62. Вариация  $V^{I_n}(\sigma_p^{r'})$  множества  $\sigma_p^{r'}$  внутри куба  $I_n$  не превосходит  $1 + pp(4k)^p$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\tau_l^i$  есть  $l$ -мерная координатная плоскость пространства  $E_n$  ( $n \geq l \geq p$ ),  $q$  — произвольная точка этой плоскости,  $I_l^i$  —  $l$ -мерный куб на  $\tau_l^i$  со стороной длины  $p$ , являющийся проекцией куба  $I_n$  на  $\tau_l^i$ ;  $\beta_{n-l}(q)$  есть  $(n-l)$ -мерная плоскость из  $E_n$ , ортогональная к  $\tau_l^i$  и содержащая точку  $q \subset \tau_l^i$ ;  $y_1^q, y_2^q, \dots, y_l^q, 0 \dots 0$  — координаты точки  $q$  относительно системы  $Y$  (для упрощения обозначений предполагается, что плоскость  $\tau_l^i$  натянута на  $l$  первых векторов из  $Y$ ),  $(\psi^k)^{-1}(\sigma_p^{r'} \cap \beta_{n-l}^i)$  — прообраз множества  $\sigma_p^{r'} \cap \beta_{n-l}^i$  при отображении  $\psi^k$ . Нетрудно сообразить, что  $(\psi^k)^{-1}(\sigma_p^{r'} \cap \beta_{n-l}^i)$  представляет собой множество нулевого уровня полинома  $\sum_{i=1}^l (p_i^k - y_i^q)^2$ . А тогда, в силу леммы 61, имеем:

$$v_0 [(\psi^k)^{-1}(\sigma_p^{r'} \cap \beta_{n-l}^i)] \leq (4k)^p.$$

Так как преобразование  $\psi^k$  непрерывно, то число компонент множества  $E_{n-l}^i(q)$  не превосходит числа компонент нулевого множества уровня того же полинома. Тогда из лемм 60 и 61

получаем:

$$\begin{aligned}
 V^I n(\sigma_p^{r'}) &= v_0^I n(\sigma_p^{r'}) + \sum_{l=1}^p v_l^I n(\sigma_p^{r'}) \leq 1 + \\
 &+ \sum_{l=1}^p \frac{1}{C_n^l} \sum_{i=1}^{C_n^l} \int_{\tau_l^i} v_0^I n(\sigma_p^{r'} \cap \beta_{n-l}^i(q)) dm^l \leq \\
 &\leq 1 + \sum_{l=1}^p p^l v_0 [(\psi^k)^{-1}(\sigma_p^{r'} \cap \beta_{n-l}^i(q))] \leq 1 + p p (4k)^p,
 \end{aligned}$$

ибо  $p \leq 1$ . Здесь  $C_n^l$  — число сочетаний из  $n$  по  $l$ .

Лемма 62 доказана.

## § 46. Основная лемма

Пусть  $P^k(x, y, z)$  есть полином от  $x, y, z$ , являющийся  $s$ -кратной суперпозицией некоторой системы полиномов  $P_{v_1, \dots, v_\alpha}^a (U_{v_1, \dots, v_\alpha, 1}^a; U_{v_1, \dots, v_\alpha, 2}^a)$  ( $a = 1, 2, \dots, s$ ;  $v_i = 1, 2$ ;  $i = 1, 2, \dots, s+1$ ), имеющих по каждому из своих переменных степень  $k$ .

Пусть  $\{\xi_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, p_s^k \leq s2^s(k+1)^3$ ) — все коэффициенты всех полиномов  $\{P_{v_1, \dots, v_\alpha}^a (U_{v_1, \dots, v_\alpha, 1}^a; U_{v_1, \dots, v_\alpha, 2}^a)\}$ , перенумерованные в некотором порядке. Коэффициенты  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p_s^k$ ) мы примем за координаты произвольной точки  $\xi$  евклидова пространства размерности  $p_s^k \leq s2^s(k+1)^3$  относительно некоторого ортонормированного базиса этого пространства.

Обозначим через  $R_\mu$  нульмерную в  $J_3$  решётку с шагом  $\frac{1}{\mu}$ , т. е. множества всех таких точек  $a_i$  ( $i = 1, \dots, (\mu+1)^3$ ) из  $J_3$ , всякая координата из  $x, y, z$  каждой из которых кратна  $\frac{1}{\mu}$ . И пусть  $\eta_i = P^k(a_i)$  есть значение полинома  $P^k(x, y, z)$  в точке  $a_i$ . Так как координаты  $x, y, z$  точки  $a_i$  фиксированы, то  $P^k(a_i)$  является функцией коэффициентов  $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, p_s^k$ ). Но так как при составлении суперпозиции  $P^k(x, y, z)$  из полиномов  $P_{v_1, \dots, v_\alpha}^a (U_{v_1, \dots, v_\alpha, 1}^a; U_{v_1, \dots, v_\alpha, 2}^a)$

коэффициенты  $\{\xi_i\}$  подвергаются лишь возведению в степень не выше  $k$  их попарному перемножению и их попарному сложению, то  $P^k(a_i)$  является полиномом относительно  $\{\xi_i\}$ , имеющим по каждому из переменных  $\{\xi_i\}$  степень не выше  $k^s$ , ибо каждый из указанных коэффициентов возведению в  $k$ -ю степень подвергается не более чем  $s$  раз.

Обозначим через  $E_n$   $n$ -мерное евклидово пространство, через  $\eta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n = (\mu + 1)^3$ ) — координаты произвольной точки  $\eta$  из  $E_n$  относительно некоторого ортонормированного базиса в  $E_n$ .

Всякой точке  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p_s^k})$  (всякому набору коэффициентов) соответствует некоторая система полиномов  $P_{v_1, \dots, v_\alpha}^a (U_{v_1, \dots, v_\alpha, 1}^a; U_{v_1, \dots, v_\alpha, 2}^a)$ , составляющих  $s$ -кратную суперпозицию  $P^k(x, y, z)$ , т. е. всякой точке  $\xi$  из  $E_{p_s^k}$  равенства  $\{\eta_i = P^k(a_i)\}$  ставят в соответствие систему чисел  $\eta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), которую мы можем считать точкой пространства  $E_n$ . Обозначим через  $\psi_\mu^{k\gamma}$  преобразование пространства  $E_{p_s^k}$  в  $E_n$ , задаваемое равенствами  $\eta_i = P^k(a_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $n = (\mu + 1)^3$ ;  $\gamma$  — индекс, фиксирующий вид суперпозиции полиномов  $P_{v_1, \dots, v_\alpha}^a (U_{v_1, \dots, v_\alpha, 1}^a; U_{v_1, \dots, v_\alpha, 2}^a)$ ). Обозначим далее через  $e_s^k$  образ всего пространства  $E_{p_s^k}$  при отображении  $\psi_\mu^{k\gamma}$ .

**Лемма 63.** *Пусть задано число  $\varepsilon > 0$  и фиксирован некоторый вид  $\gamma$   $s$ -кратной суперпозиции функций двух переменных.*

*Тогда существует  $k(s)$  такое, что при  $k > k(s)$  ( $k = [\mu^{1+0,1}]$  — целой части от  $\mu^{1+0,1}$ ) для всякой функции  $g(a_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), определённой на решётке  $R_\mu$ , можно задать такую функцию  $f(a_i)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), что:*

$$1) \quad |f(a_i) - g(a_i)| < \frac{\varepsilon}{\mu} \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

*2) всякая функция  $f_*(a_i)$  такая, что  $|f_*(a_i) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{7\mu}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) на решётке  $R_\mu$  не представима в виде  $s$ -кратной суперпозиции вида  $\gamma$ , составленной из полиномов двух переменных степени не выше  $k$  (т. е. всякая  $s$ -кратная суперпозиция вида  $\gamma$ , составленная из полино-*

мов двух переменных степени не выше чем  $k$ , хотя бы в одной точке решётки  $R_\mu$  отличается от значения функции  $f(a_i)$  в той же точке не менее чем на  $\frac{\epsilon}{7\mu}$ ).

**Доказательство.** Фиксируем функцию  $g(a_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Эта функция, а точнее набор чисел  $g(a_i) = \eta_i^0$ , определяет точку  $\eta^0$  пространства  $E_n$ , координаты которой суть  $\eta_i^0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ; число  $n = (\mu + 1)^3$  будет фиксировано ниже). Обозначим через  $I_n^0$   $n$ -мерный замкнутый куб из  $E_n$  с центром в точке  $\eta^0$ , с рёбрами, параллельными осям системы координат в  $E_n$ , со стороной длины  $d_\mu^0 = \frac{2\epsilon}{\mu}$ . Из определения преобразования  $\psi_\mu^k$  следует, что для доказательства рассматриваемой леммы достаточно показать, что в  $I_n^0 - e_s^k$  существует  $n$ -мерный открытый куб  $I_n^{00}$  со стороной длины  $\frac{2\epsilon}{7\mu}$  и рёбрами, параллельными осям системы координат. Обозначим через  $\sigma_{p_s^k}^{m'}$   $p_s^k$ -мерный замкнутый шар из  $E_{p_s^k}$  радиуса  $m$ , а через  $\sigma_k^{m'}$  — образ в  $E_n$  этого шара при преобразовании  $\psi_\mu^k$ . В силу теоремы 53 в  $I_n^0 - e_s^k$  существует  $n$ -мерный замкнутый куб  $I_n^{0m}$  с рёбрами, параллельными осям системы координат, и со стороной длины

$$d_\mu^{0m} = d_\mu^0 \geq \frac{\frac{p_s^k}{2\epsilon} \left( \frac{2\epsilon}{\mu} \right)^{\frac{n-p_s^k}{n-p_s^k}}}{3 + 3 \sqrt[n-p_s^k]{(3p_s^k)^{p_s^k} A_n^{p_s^k} \left[ 1 + V_{I_n^0}^{I_n^0} \left( \sigma_k^{m'} \right) \right]}},$$

ибо в силу леммы 60 при  $l > p_s^k$

$$V_{I_n^0}^{I_n^0} \left( \sigma_{p_s^k}^{m'} \right) = 0,$$

а в силу леммы 62

$$V_{I_n^0}^{I_n^0} \left( \sigma_{p_s^k}^{m'} \right) \leq 1 + p_s^k \frac{2\epsilon}{\mu} (4k)^{p_s^k}.$$

Помня, что  $k = [\mu^{1+0,1}]$ , нетрудно сообразить, что

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{\frac{p_s^k}{\mu^{\frac{n-p_s^k}{2\epsilon}}}}{3 + 3 \sqrt{(3p_s^k)^{p_s^k} \cdot A_n^{p_s^k} \left[ 1 + V^0_n \left( \sigma_{p_s^k}^{m'} \right) \right]}} \geq \frac{1}{6},$$

а тогда, очевидно, существует число  $k(s)$  такое, что при  $k > k(s)$   $d_\mu^{0m} > \frac{2\epsilon}{7\mu}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ). Но тогда длина  $d_\mu^{0m}$  ребра куба  $I_n^{0m}$  не менее  $\frac{2\epsilon}{7\mu}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ).

Фиксируем теперь произвольное число  $k > k(s)$  и обозначим через  $I_n^0$  топологический предел кубов  $I_n^{0m}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ). Так как каждый из кубов  $I_n^{0m}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) имеет длину ребра  $d_\mu^{0m}$  не менее чем  $\frac{2\epsilon}{7\mu}$ , то в  $I_n^0$ , очевидно, существует  $n$ -мерный открытый куб  $I_n^0$  со стороной длины  $d_\mu^0 \geq \frac{2\epsilon}{7\mu}$ , с рёбрами, параллельными рёбрам куба  $I_n^0$ , не содёржавший точек множества  $e_s^k = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_k^{m'}$ . Из последнего сразу следует утверждение леммы.

*Лемма 64.* Для всяких  $s$  и любого вида  $\gamma$   $s$ -кратной суперпозиции на кубе  $I_3$  можно задать непрерывно дифференцируемую функцию  $f(x, y, z)$ , не представимую на  $I_3$  в виде  $s$ -кратной суперпозиции вида  $\gamma$ , составленной из функций двух переменных, удовлетворяющих условию Липшица.

*Доказательство.* Фиксируем число  $s$  и столь быстро возрастающую последовательность чисел  $k_i = [\mu_i^{1+0,1}] > k(s)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), что при всяком  $i$

$$\sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^j \mu_j} \leq \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 2^{i+8} \mu_i}. \quad (1)$$

Функцию  $f(x, y, z)$ , удовлетворяющую условиям рассматриваемой леммы, мы определим как предел последовательности функций  $f_i(x, y, z)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). Обозначим

через  $f_1^*(a_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n_1 = (\mu_1 + 1)^3$ ) заданную на решётке  $R_{\mu_1}$  функцию, упомянутую в лемме 63 (при этом  $\varepsilon = \frac{1}{2^6}$ , а  $g(a_i)$  считается тождественным нулём). Нетрудно сообразить, что существует непрерывно дифференцируемая на  $I_3$  функция  $f_1(x, y, z)$ , абсолютные величины частных производных первого порядка от которой не превосходят  $\frac{1}{2}$ , и такая, что  $f_1^*(a_i) = f_1^*(x_i, y_i, z_i) = f_1(x_i, y_i, z_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Пусть функции  $f_l(x, y, z)$  ( $l = 1, 2, \dots, i-1$ ) уже определены, тогда функцию  $f_i(x, y, z)$  мы определим следующим образом:

Пусть  $f_i^*(a_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, n_i = (\mu_i + 1)^3$ ) есть заданная на решётке  $R_{\mu_i}$  функция, упомянутая в лемме 63 (при этом  $\varepsilon = \frac{1}{2^{i+5}} = \varepsilon_i$  и  $g(a_j) = f_{i-1}[x_j, y_j, z_j]$  ( $j = 1, \dots, n_i$ )), тогда за  $f_i(x, y, z)$  мы примем некоторую непрерывно дифференцируемую на  $I_3$  функцию, такую, что для всякой точки  $(x, y, z)$  из  $I_3$

$$|f_i(x, y, z) - f_{i-1}(x, y, z)| \leq \frac{1}{2^{i\mu_i}}$$

и

$$\frac{\partial [f_i(x, y, z) - f_{i-1}(x, y, z)]}{\partial x_m} \leq \frac{1}{2^i},$$

где  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ .

Из последних неравенств следует, что последовательность функций  $f_i(x, y, z)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) вместе с последовательностями частных производных от этих функций равномерно на  $I_3$  сходится к некоторой функции  $f(x, y, z)$ , которая непрерывно дифференцируема в силу тех же неравенств. Покажем, что  $f(x, y, z)$  на кубе  $I_3$  не является  $s$ -кратной суперпозицией вида  $\gamma$  функций двух переменных, удовлетворяющих условию Липшица.

Допустим противное, тогда существует система функций  $\varphi_{v_1, \dots, v_\alpha}^\alpha (U_{v_1, \dots, v_\alpha, 1}^\alpha, U_{v_1, \dots, v_\alpha, 2}^\alpha)$  ( $\alpha = 0, \dots, s; v_i = 1, 2; i = 1, 2, \dots, s+1$ ) такая, что составленная из них суперпозиция вида  $\gamma$  тождественно на  $I_3$  равна функции  $f(x, y, z)$ . Тогда в силу леммы 59 существует полином  $P^{k_i}(x, y, z)$ , являющийся  $s$ -кратной суперпозицией вида  $\gamma$  полиномов двух

переменных степени не выше  $k_i$ , такой, что для всякой точки  $(x, y, z)$  из  $I_3$

$$|P^{k_i}(x, y, z) - f(x, y, z)| \leq \frac{c_s}{k_i} = \frac{c_s}{[\mu_i^{1+0, 1}]},$$

где  $c_s$  есть константа, не зависящая от  $\mu_i$ .

Фиксируем  $i$  таким, что  $\frac{c_s}{k_i} \leq \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 2^{i+s\mu_i}}$ . Тогда в силу определения функций  $f_j(x, y, z)$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) и (1) получаем:

$$\begin{aligned} |f_i(x, y, z) - P^{k_i}(x, y, z)| &\leq \\ &\leq |f_i(x, y, z) - f(x, y, z)| + |f(x, y, z) - P^{k_i}(x, y, z)| \leq \\ &\leq \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j\mu_j}} + \frac{c_s}{k_i} \leq \frac{2}{3 \cdot 7 \cdot 2^{i+s\mu_i}} < \frac{\epsilon_i}{7\mu_i}. \end{aligned}$$

А тогда для всякой точки  $a_j$  решётки  $R_{\mu_i}$

$$|f(a_j) - P^{k_i}(a_j)| < \frac{\epsilon_i}{7\mu_i},$$

что противоречит лемме 63. Пришли к противоречию.

Лемма 64 доказана.

Доказательство теоремы 54 для  $l = 1$ . Пусть  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) быть всевозможные виды суперпозиций всех конечных кратностей, перенумерованные в некотором порядке (нумерация возможна, поскольку различных видов суперпозиций существует лишь счётное множество), а  $I_3^i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) — трёхмерные замкнутые попарно не пересекающиеся кубы из  $I_3$ , сходящиеся к некоторой внутренней точке  $O$  куба  $I_3$ , т. е. топологический предел последовательности  $I_3^i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) содержит лишь точку  $O$ . На кубе  $I_3^i$  в силу леммы 64 можно определить функцию  $f^i(x, y, z)$ , непрерывно дифференцируемую на  $I_3^i$  и не являющуюся суперпозицией вида  $\gamma_i$  функций с условием Липшица ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Пусть  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) быть числа, а  $f^*(x, y, z)$  — функция, определённая на множестве  $O + \sum_{i=1}^{\infty} I_3^i = e^0$  следующим образом: если точка  $(x, y, z)$  принадлежит кубу  $I_3^i$ , то  $f^*(x, y, z) = a_i f^i(x, y, z)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) и  $f^*(O) = 0$ . Так

как функции  $f^i(x, y, z)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) непрерывно дифференцируемы, то числа  $a_i$  можно выбрать столь малыми, что  $f^*(x, y, z)$  как функция точки  $(x, y, z)$  замкнутого множества  $e^0$  будет непрерывно дифференцируема. В силу теоремы Уитнея [15] на кубе  $I_3$  можно определить непрерывно дифференцируемую функцию  $f(x, y, z)$  такую, что для всякой точки  $(x, y, z)$  из  $e^0$

$$f(x, y, z) = f^*(x, y, z).$$

Если предположить, что  $f(x, y, z)$  на  $I_3$  является суперпозицией вида  $\gamma = \gamma_i$ , составленной из функций

$$\varphi_{v_1, \dots, v_\alpha}^\alpha (U_{v_1, \dots, v_\alpha, 1}^\alpha; U_{v_1, \dots, v_\alpha, 2}^\alpha)$$

( $\alpha = 0, \dots, s$ ;  $v_i = 1, 2$ ;  $i = 1, 2, \dots, s+1$ ), удовлетворяющих условию Липшица, то, очевидно,  $f^i(x, y, z)$  на кубе  $I_3^i$  является суперпозицией вида  $\gamma^i$ , составленной из  $\frac{1}{a_i} \varphi^0(U_1^0; U_2^0)$  и  $\varphi_{v_1, \dots, v_\alpha}^\alpha (U_{v_1, \dots, v_\alpha, 1}^\alpha; U_{v_1, \dots, v_\alpha, 2}^\alpha)$  ( $\alpha = 1, \dots, s$ ;  $v_i = 1, 2$ ;  $i = 1, 2, \dots, s+1$ ), которые, очевидно, также удовлетворяют условию Липшица, что противоречит определению функции  $f^i(x, y, z)$ .

Следовательно,  $f(x, y, z)$  на кубе  $I_3$  не представима в виде суперпозиции конечной кратности функции двух переменных, удовлетворяющих условию Липшица. А это и означает, что для  $l = 1$  теорема 54 доказана.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение мы сформулируем некоторые задачи по многомерным вариациям множеств и функций, решение которых представляется нам интересным.

Несколько лет назад А. С. Кронродом была высказана идея построения системы многомерных вариаций для произвольного метрического пространства с помощью внутренней метрики этого пространства. С помощью такого рода вариаций множества можно было бы определить и систему вариаций для функций, заданной на произвольном метрическом пространстве. Автору этой идеи осуществить её удалось, к сожалению, лишь для некоторых частных случаев, а именно определённые А. С. Кронродом линейная и плоская вариации функции двух переменных без труда переносятся на случай функций, заданных на произвольном метрическом пространстве. Но всевозможные попытки построить с помощью внутренней метрики полную систему вариаций к желаемому результату не привели. Однако попутно возник ряд интересных идей.

Например, А. С. Кронродом было высказано следующее определение длины (линейной вариации) поверхности.

На поверхности  $M$  фиксируем некоторую точку  $a$  и зададим на  $M$  функцию расстояния  $\rho_M(a, b)$ , полагая её равной в точке  $b$  из  $M$  расстоянию (по поверхности  $M$ ) от точки  $a$

до точки  $b$ . Линейную вариацию  $V_1^a(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_0(M_t) dt$  этой

функции, т. е. интеграл по всем множествам уровня от числа компонент множества  $M_t$  уровня  $t$ , А. С. Кронрод называет *длиной* поверхности  $M$ . Зависимость величины  $V_1^a(M)$  от точки  $a$  можно ликвидировать, например, взятием верхней грани её по всем точкам  $a$ . Автор этого определения забра-

ковал его, исходя из тех соображений, что одновременно с определением вариации должно порождаться и дерево этой поверхности соответствующей размерности (аналогичное одномерному дереву функции). В данном же случае удаётся построить лишь такое дерево поверхности, которое зависит от точки.

К последнему мы можем добавить то соображение, что для сравнительно широкого класса поверхностей (например, для всех достаточно сильно искривлённых поверхностей) малое локальное изменение поверхности (например, замена достаточно малого куска поверхности на часть плоскости, её пересекающей) ведёт к искривлению линий уровня функций  $r_M(a, b)$ , но не ведёт, вообще говоря, к изменению длины этой поверхности. В то же время, понятно, крайне желательно, чтобы высота всякого отростка поверхности (даже достаточно гладкого и пологого) каким-либо образом учитывалась линейной вариацией поверхности. Таким образом, первая задача — это определение системы вариаций множества в терминах его внутренней геометрии.

В связи с рассмотренными в этой работе инвариантными вариациями подмножеств евклидовых пространств отметим три следующие задачи.

1) Распространение определённых во второй главе вариаций множества на более широкий класс подмножеств евклидова пространства (например, на класс борелевских подмножеств), т. е. доказательство измеримости соответствующих функций кратности для более широкого класса множеств.

2) Аксиоматическое построение тех же вариаций, т. е. задание естественной аксиоматики вариаций, её однозначно определяющей (как функционал).

3) Отыскание минимальных достаточных условий для ограниченности вариаций поверхности, формулируемых, например, в терминах её гладкости.

---

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н а т а н с о н И. П., Теория функций вещественной переменной (глава 8), М.—Л., Гостехиздат, 1950.
  2. A d a m s C. R. and C l a r k s o n J. A., On definitions of bounded variation for functions of two variables. *Trans. of Am. Math. Soc.* **35**, 824 (1934).
  3. К р о н р о д А. С., О функциях двух переменных, Успехи математических наук **5**, 1 (35) 1950, 24.
  4. К у д р я в ц е в Л. Д., О свойствах дифференцируемых отображений областей евклидовых пространств, Математический сборник **32**, № 3, 493 (1953).
  5. М и н л о с Р. А., Плоская вариация функций двух переменных и цилиндрическая мера множеств в трёхмерном пространстве, ДАН СССР **81**, № 5, 733 (1951).
  6. T o p e l l i L., Serie trigonometrische, Bologna (1924).
  7. G e i r i n g e r H., Trigonometrische Doppelreihen, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, XXIX Jahrgang Wien (1918).
  8. Х а у с д о р ф Ф., Теория множеств, ОНТИ, М.—Л. (1937).
  9. H a u s d o r f F., Dimension und äußeres Maß. *Math. Annalen* **79**, 166 (1919).
  10. Х а л м о ш П., Теория меры, Москва, ИЛ (1953).
  11. С а к с С., Теория интеграла, ИЛ (1949).
  12. К о л м о г о р о в А. Н., Beiträge zur Maßtheorie. *Math. Annalen* **107**, 351 (1932).
  13. Г у т е р Р., Спрямляемые кривые в абстрактном пространстве, вестник Московского университета, серия физико-математических и естественных наук, 8 (1949).
  14. О л е й н и к О. А., Оценки чисел Бетти действительных алгебраических гиперповерхностей. Математический сборник **28**, № 3, 635. (1951).
  - 15 W h i t n e y H., Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. of Am. Math. Soc.* **36**, № 1 63 (1934).
  16. Г л и в е н к о Е. В., О плоской вариации, Математический сборник **30**, № 3, 580 (1952).
  17. А х и е з е р Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., Гостехиздат (1947).
  18. F a v a r d M., Une définition de la longueur et de l'aire C. R. **194**, № 4, Paris (1932).
-

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И НЕКОТОРЫЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИ ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ (цифры указывают страницы, где впервые определяется понятие или обозначение)

- Вариация множества 41  
— — , индуктивное определение 42  
— — , конструктивное определение 42  
— — относительно плоскости 41  
— — функции 43  
— — на дуге отрицательная 116  
— — — положительная 116  
— — относительно плоскости 45
- Декартово произведение пространств 22
- Дифференцируемость многообразия 191
- Измеримость множества ( $v_k$ ) 41  
— — ( $\mu_{S_n}$ ) 29  
— — ( $\mu_{\Phi_k^n}$ ) 29  
— — ( $\mu_{\varphi_k^n}$ ) 29  
— — ( $\mu_{\Omega_k^n}$ ) 30  
— — ( $\mu_{\omega_k^n}$ ) 29  
— функции ( $v_k$ ) 43
- Кольцоид 136  
— , правильное разбиение системы кольцоидов 143  
— , регулярная связка кольцоидов 143  
— , связка кольцоидов 142
- Компонента 136  
— , регулярная компонента уровня 134  
— экстремальная 153
- Мера, произведение мер 24  
— Фавара 73  
— Хаара 25  
— Хаусдорфа 14, 105
- Одномерное дерево функции 110
- Отрицательная вариация функции на дуге 116
- Положительная вариация функции на дуге 116
- Правильное разбиение системы кольцоидов 143
- Произведение мер 24
- Регулярная компонента уровня 134  
— функция 30
- Связка кольцоидов 142  
— регулярная 143
- Сильная дифференцируемость функции 150
- Слабая дифференцируемость функции 149
- Уровень роста функции относительно точки 115

Функция кратности множества	41	Функция, не убывающая относительно точки	115
—, монотонно возрастающая относительно точки	115	— ограниченной вариации	111
—, монотонно убывающая относительно точки	115	— сильно дифференцируемая	150
—, не возрастающая относительно точки	115	— слабо дифференцируемая	149
$C_m$	29	$v(f, e)$	9
$d_k(e)$	76, 159	$v^+(f, l)$	116
$d_k^n$	41	$v^-(f, l)$	116
$E_n$	25	$v_0(e)$	40
$\mathfrak{E}_{n-1}$	105 4	$v_{k\beta}(e)$	41, 42
$F_{43}$		$v_0(e \cap \beta_{n-k})$	40
$f^*(\eta)$	110	$v_{k\tau_{k-l}}(e)$	41
$\tilde{f}$	110	$v_{k\tau_{k-l-1}}(f, e)$	45
$H_k^l$	159	$V^I_n(e)$	194
$h_{n-1}(e)$	14, 105	$V^S_n(e)$	125
$I_n$	87	$v_k^I$	194
$J_k$	30	$v_{k\tau_k}^I(e)$	194
$K_k$	136	$v_k^S(e)$	124, 125
$K_k^j$	143	$w_a(f, e)$	106
$l_k$	137	$wn(f, B)$	14, 105
$l_{\tau_k}$	116	$\alpha_i^k$	158
$p_i$	158	$\beta_{n-k}$	25
$P_n^m$	152	$\beta_{n-k}(q)$	27
$P_{l-1}^n(f, O, x)$	161	$\tau_i^k$	158
$S_n$	25	$\varepsilon_n(e)$	94
$T_f$	110	$\tilde{\varepsilon}_n(e)$	94
$\times$ — знак декартова произведения			
$\tilde{e}$ — граница множества $e$			
$\bar{e}$ — замыкание множества $e$			

$\times$  — знак декартова произведения

$\tilde{e}$  — граница множества  $e$

$\bar{e}$  — замыкание множества  $e$

Цена 5 р. 85 к.

