Учебное издание

ПОТАПОВ Михаил Константинович
ОЛЕХНИК Слав Николаевич
НЕСТЕРЕНКО Юрий Васильевич

КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Оригинал-макет: *Е.Ю. Морозов*

Подписано в печать 09.01.03. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 26. Уч.-изд. л. 28,5. Тираж 3000 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано в ПФ «Полиграфист»
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3
Тел.: (8172) 72-07-92, 72-61-75, 72-60-63; факс: (8172) 76-00-49, 72-71-11
E-mail: forma@pfpoligrafist.com

ISBN 978-5-9221-0373-2

УДК 512.1(075)
ББК 22.1
П 64

Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В. **Конкурсные задачи по математике:** Справочное пособие — 3-е изд., стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 416 с. — ISBN 978-5-9221-0373-2.

Приведены задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в вузы. Основное внимание уделено методам решения уравнений и неравенств, систем уравнений.

Пособие рассчитано на учащихся и учителей старших классов школ и лиц, готовящихся к вступительным экзаменам в вузы. Будет полезным учащимся подготовительных отделений вузов, а также всем, кто ведет преподавательскую деятельность в области элементарной математики.

ISBN 978-5-9221-0373-2

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ

Пусть даны две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Если надо найти все числа α из области, являющейся пересечением областей существования этих функций, для каждого из которых выполняется равенство $f(\alpha) = g(\alpha)$, то говорят, что требуется решить уравнение

$$f(x) = g(x)$$

или что дано уравнение $f(x) = g(x)$.

Процесс решения уравнения обычно состоит из ряда преобразований, имеющих целью заменить данное уравнение одним или несколькими более простыми уравнениями. Получающиеся в конце концов простейшие уравнения легко решаются, что позволяет найти и решения исходного уравнения.

Чтобы это нахождение было возможным, необходимо при выполнении каждого преобразования контролировать множество решений получающихся уравнений. Для этого обычно ограничивают допустимые преобразования двумя типами.

К первому относятся равносильные преобразования, т. е. такие, при выполнении которых множество корней исходного уравнения не меняется. Если в процессе решения применялись только равносильные преобразования, то множество решений исходного уравнения состоит из корней простейших уравнений, полученных в конце.

Второй тип составляют так называемые преобразования-следствия, которые могут приводить лишь к расширению множества корней. При использовании таких преобразований можно гарантировать, что все корни исходного уравнения содержатся среди корней найденной в процессе решения совокупности простейших уравнений. В этом случае все корни отсеиваются с помощью проверки.

Дальше в этой главе будет показано, какие преобразования уравнений относятся к первому типу, а какие — ко второму. Будет показано, как решать уравнения при помощи этих преобразований.

В § 2 – 4 настоящей главы почти не рассматриваются тригонометрические уравнения. Они содержатся в § 5, где их решения разбираются с помощью изложенных ранее и других приемов.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Область допустимых значений и корни уравнений. *Областью допустимых значений* (*ОДЗ*) уравнения $f(x) = g(x)$ называется общая часть (пересечение) областей существования функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, т. е. множество всех числовых значений неизвестного x, при каждом из которых имеют смысл (т. е. определены) левая и правая части уравнений.

Любое число x из ОДЗ уравнения называется *допустимым значением* для данного уравнения. Так, например, для уравнения

$$x^2 - 1 = 0$$

ОДЗ есть множество всех действительных чисел;

для уравнения

$$\sqrt{x} = 1$$

ОДЗ есть множество всех неотрицательных чисел;

для уравнения

$$\lg x = \sqrt{-x}$$

ОДЗ есть пустое множество.

Для уравнения

$$\sqrt{4x^2 - 1} = \sqrt{1 - 16x^4}$$

ОДЗ есть множество всех x, для которых одновременно неотрицательны оба подкоренные выражения: $4x^2 - 1 \geqslant 0$, $1 - 16x^4 \geqslant 0$, т. е. ОДЗ в этом случае состоит из двух чисел: $1/2$ и $-1/2$.

Число α из ОДЗ уравнения $f(x) = g(x)$ называется *решением* (*корнем*) этого уравнения, если при подстановке его вместо x в уравнение получается верное числовое равенство $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Так, например, число $x = 2$ является корнем уравнения

$$\log_2(2x + 4) - \log_4 2x = \log_2(3x - 2),$$

поскольку при $x = 2$ левая и правая части этого уравнения равны 2.

Решить уравнение $f(x) = g(x)$ — значит найти все его корни или доказать, что уравнение не имеет корней, т. е. что не существует ни одного числа α из ОДЗ уравнения, удовлетворяющего условию $f(\alpha) = g(\alpha)$, т. е. что множество решений уравнения пусто.

Если множество всех корней уравнения $f(x) = g(x)$ состоит из k различных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$, то говорят, что это уравнение имеет k корней.

Если множество всех корней уравнения $f(x) = g(x)$ состоит из одного числа x_1, то говорят, что это уравнение имеет единственный корень x_1.

При решении конкретного уравнения полезно знать его ОДЗ, так как иногда ее нахождение позволяет доказать, что уравнение не имеет решений, а в некоторых случаях непосредственная подстановка чисел из ОДЗ в уравнение позволяет найти корни уравнения.

Так, например, для уравнения

$$\sqrt{2-x} = \log_3(x-2)$$

область допустимых значений состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $2 - x \geqslant 0$ и $x - 2 > 0$, т. е. ОДЗ есть пустое множество. На этом решение уравнения и завершается, так как установлено, что уравнение не имеет корней.

Для уравнения

$$\sqrt{x} = \sqrt{-x}$$

область допустимых значений состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $x \geqslant 0$ и $(-x) \geqslant 0$, т. е. ОДЗ состоит из единственного числа $x = 0$. Подставляя это значение x в уравнение, получаем, что $x = 0$ — единственный его корень.

ОДЗ уравнения

$$\sqrt{x} = \sqrt{-x} + 1$$

состоит из единственного числа $x = 0$. Подставляя это значение в уравнение, получаем, что его левая часть равна 0, а правая — равна 1, т. е. получаем, что уравнение не имеет решений.

Нахождение ОДЗ уравнения не всегда обязательно. Так, например, уравнение $\sqrt{x^2+x+1} + x^2 = -2$ не имеет корней, поскольку при любом значении x из его ОДЗ (мы ее не находили) левая часть уравнения неотрицательна, а правая — отрицательна.

Иногда при решении уравнений бывает полезно не вычислять ОДЗ явно, а задать ее неравенством или системой неравенств.

Например, если надо решить уравнение

$$\overline{x^5 - x^4 + 1} = 1, \tag{1}$$

то для нахождения ОДЗ не обязательно решать неравенство

$$x^5 - x^4 + 1 \geqslant 0. \tag{2}$$

Можно лишь сказать, что ОДЗ уравнения (1) есть множество решений неравенства (2). Решать такое неравенство сложно и в данном случае не нужно. Как будет показано дальше, можно, и не решая неравенство (2), найти все корни уравнения (1): $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

1.2. Корни простейших уравнений. В этом пункте приведены решения некоторых простейших уравнений.

Алгебраическим уравнением степени n называется уравнение $f(x) = 0$, левая часть которого — функция $f(x)$ — является многочленом степени n, т. е.

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

К простейшим таким уравнениям относятся уравнения

$$x^{2m} = b \quad \text{и} \quad x^{2m+1} = b,$$

где m — данное натуральное число. Приведем их решения.

1. $x^{2m} = b$, m — натуральное число. При $b < 0$ уравнение не имеет корней. При $b = 0$ уравнение имеет единственный корень $x = 0$. При $b > 0$ уравнение имеет два корня:
$$x_1 = \sqrt[2m]{b}, \quad x_2 = -\sqrt[2m]{b}.$$

2. $x^{2m+1} = b$, m — натуральное число. При любом b уравнение имеет единственный корень, обозначаемый $x_1 = \sqrt[2m+1]{b}$.

Приведем решения простейших показательных и логарифмических уравнений.

3. $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$. При $b > 0$ уравнение имеет единственный корень $x = \log_a b$. При $b \leqslant 0$ уравнение корней не имеет.

4. $\log_a x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$. При любом b уравнение имеет единственный корень $x = a^b$.

Очень часто встречаются уравнения, содержащие знаки квадратного корня и модуля. Приведем решения простейших из таких уравнений.

5. $\sqrt{x} = b$. При $b \geqslant 0$ уравнение имеет единственный корень $x = b^2$. При $b < 0$ уравнение корней не имеет.

6. $|x| = b$. При $b > 0$ уравнение имеет два корня $x_1 = b$ и $x_2 = -b$. При $b = 0$ уравнение имеет единственный корень $x = 0$. При $b < 0$ уравнение корней не имеет.

Приведем теперь решения простейших тригонометрических уравнений.

7. $\sin x = b$. При $b < -1$ уравнение корней не имеет. При $b = -1$ решения уравнения есть $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. При $-1 < b < 1$ решения уравнения есть $x = (-1)^n \arcsin b + \pi n$, $n \in Z$. При $b = 1$ решения уравнения есть $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. При $b > 1$ уравнение корней не имеет.

8. $\cos x = b$. При $b < -1$ уравнение корней не имеет. При $b = -1$ решения уравнения есть $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. При $-1 < b < 1$ решения уравнения есть $x = \pm \arccos b + 2\pi n$, $n \in Z$. При $b = 1$ решения уравнения есть $x = 2\pi n$, $n \in Z$. При $b > 1$ уравнение корней не имеет.

9. $\operatorname{tg} x = b$. При любом b $(-\infty < b < +\infty)$ решения уравнения есть
$$x = \operatorname{arctg} b + \pi n, \quad n \in Z.$$

10. $\operatorname{ctg} x = b$. При любом b $(-\infty < b < +\infty)$ решения уравнения есть
$$x = \operatorname{arcctg} b + \pi n, \quad n \in Z.$$

При решении тригонометрических уравнений иногда числа $\arcsin b$, $\arccos b$, $\operatorname{arctg} b$, $\operatorname{arcctg} b$ могут быть явно вычислены.

Например, так как $\arcsin 1/2 = \pi/6$, то решения уравнения $\sin x = 1/2$ можно записать в виде
$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$$
но лучше их записать в виде
$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Приведем табл. 1 и 2 для явных вычислений $\arcsin b$, $\arccos b$, $\operatorname{arctg} b$, $\operatorname{arcctg} b$ (см. с. 11).

Таблица 1

	$b=0$	$b=1/2$	$b=\sqrt{2}/2$	$b=\sqrt{3}/2$	$b=1$
$\arcsin b$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\arccos b$	1	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

Таблица 2

	$b=0$	$b=\sqrt{3}/3$	$b=1$	$b=\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} b$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\operatorname{arcctg} b$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$

При записи решений тригонометрических уравнений часто пользуются формулами

$$\begin{aligned} \arcsin(-a) &= -\arcsin a, \quad |a| \leqslant 1; \\ \arccos(-a) &= \pi - \arccos a, \quad |a| \leqslant 1; \\ \operatorname{arctg}(-a) &= -\operatorname{arctg} a, \quad |a| < \infty; \\ \operatorname{arcctg}(-a) &= \pi - \operatorname{arcctg} a, \quad |a| < \infty. \end{aligned}$$

Так, например, решения уравнения $\sin x = -1/2$ можно записать в виде

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, \quad n \in Z,$$

или, используя формулу $\arcsin(-1/2) = -\arcsin(1/2)$, в виде

$$x = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$$

или в виде

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Заметим, что простейшие тригонометрические уравнения имеют бесконечное множество решений, которое часто называют «серией решений». При записи зависящей от буквы серии решений тригонометрического уравнения, обязательно надо писать, какому множеству чисел принадлежит эта буква.

1.3. Уравнение-следствие. Пусть даны два уравнения

$$f_1(x) = g_1(x) \quad \text{и} \quad f_2(x) = g_2(x).$$

Если любой корень первого уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ является корнем второго уравнения $f_2(x) = g_2(x)$, то второе уравнение называется *следствием* первого уравнения. Таким образом, при переходе к следствию не происходит потери корней.

Рассмотрим некоторые примеры.

1) Уравнение

$$(x-1)^2 = (2x+1)^2 \tag{1}$$

является следствием уравнения

$$x - 1 = 2x + 1, \tag{2}$$

поскольку единственный корень уравнения (2), равный -2, является корнем уравнения (1).

Заметим, что уравнение (1) имеет еще один корень $x = 0$, не являющийся корнем уравнения (2).

2) Уравнение

$$x^2 + 2x = 6 + 3x \tag{3}$$

является следствием уравнения

$$\log_2 (x^2 + 2x) = \log_2 (6 + 3x), \tag{4}$$

поскольку очевидно, что любой корень уравнения (4) удовлетворяет уравнению (3).

Заметим, что уравнение (3) имеет корень $x = -2$, не являющийся корнем уравнения (4).

3) Уравнение

$$x - 2 = x^2 + 2x - 8 \tag{5}$$

является следствием уравнения

$$\frac{x-2}{x^2+2x-8} = 1, \tag{6}$$

поскольку очевидно, что любой корень уравнения (6) является корнем уравнения (5).

Заметим, что уравнение (5) имеет корень $x = 2$, который не является корнем уравнения (6).

4) Уравнение

$$x + 1 = (x+1)^2 \tag{7}$$

является следствием уравнения

$$x + 1 + \frac{1}{x} = (x+1)^2 + \frac{1}{x}, \tag{8}$$

поскольку очевидно, что любой корень уравнения (8) является корнем и уравнения (7).

Заметим, что уравнение (7) имеет корень $x = 0$, который не является корнем уравнения (8).

Утверждения о том, когда одно уравнение является следствием другого

1. Пусть n — натуральное число, тогда уравнение $f^n(x) = g^n(x)$ есть следствие уравнения $f(x) = g(x)$.

2. Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то уравнение $f(x) = g(x)$ есть следствие уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

3. Уравнение $f(x) = g(x)\varphi(x)$ есть следствие уравнения $f(x)/g(x) = \varphi(x)$.

4. Уравнение $f(x) = g(x)$ есть следствие уравнения $f(x) = g(x) + \varphi(x) + (-\varphi(x))$.

Эти утверждения часто формулируют иначе.

1. При возведении в натуральную степень обеих частей уравнения можно приобрести посторонние корни (при этом не происходит потери корней).

2. При потенцировании обеих частей уравнения можно приобрести посторонние корни (потери корней не происходит).

3. При освобождении уравнения от знаменателя можно приобрести посторонние корни (потери корней не происходит).

4. Замена в уравнении выражения $\varphi(x) + (-\varphi(x))$ нулем может привести к появлению посторонних корней (потери корней не происходит).

Подчеркнем, что если при решении уравнений применялось хотя бы одно из утверждений 1 – 4, то в конце решения необходима проверка: является ли корень уравнения-следствия корнем исходного уравнения, так как могли появиться посторонние корни. Отметим, что не всегда при замене уравнения на его следствие появляются посторонние корни. Например, при замене уравнения $x^2 = 1$ уравнением $x^4 = 1$ посторонних корней не появилось, так как исходное уравнение и уравнение-следствие имеют одни и те же корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$, и только эти корни.

1.4. Равносильные уравнения. Пусть даны два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$. Если любой корень первого уравнения является корнем второго уравнения, а любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения, то такие два уравнения называются *равносильными* (или *эквивалентными*).

Например, уравнения

$$(x-1)^2 = 0, \quad x - 1 = 0$$

равносильны, так как множество корней каждого из этих уравнений состоит из единственного числа $x = 1$. Уравнения

$$\sin x = 0, \quad \cos^2 x = 1$$

равносильны, так как множество корней каждого из них есть $x = \pi n, n \in Z$.

Отметим, что если каждое из двух уравнений является следствием другого, то такие два уравнения равносильны.

Замена одного уравнения другим уравнением, ему равносильным, называется *равносильным переходом* от одного уравнения к другому.

Утверждения о равносильности уравнений

1. Уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) - g(x) = 0$ равносильны.

2. Уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) + \alpha = g(x) + \alpha$ равносильны для любого числа α.

3. Уравнения $f(x) = g(x)$ и $\alpha f(x) = \alpha g(x)$ равносильны для любого числа $\alpha \neq 0$.

4. Уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ и $f(x) = g(x)$ равносильны для любого фиксированного положительного и не равного единице числа a.

5. Уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) = \varphi(x)$ равносильны, если для любого действительного числа x_0 справедливо равенство $g(x_0) = \varphi(x_0)$.

Свойство 5 может быть сформулировано и так: если функции $y = \varphi(x)$ и $y = g(x)$ тождественно равны, то уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) = \varphi(x)$ равносильны.

Напомним, что две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ называются тождественно равными, если для любого действительного числа x_0 значения функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ равны, т. е. $f(x_0) = g(x_0)$.

Отметим, что утверждение 1 позволяет рассматривать вместо уравнения $f(x) = g(x)$ равносильное ему уравнение $f(x) - g(x) = 0$. Поэтому в дальнейшем в теоретической части преимущественно рассматриваются уравнения вида $F(x) = 0$.

1.5. Равносильность уравнений на множестве. Пусть даны уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ и некоторое множество M.

Если любой корень первого уравнения, принадлежащий множеству M, удовлетворяет второму уравнению, а любой корень второго уравнения, принадлежащий множеству M, удовлетворяет первому уравнению, то эти уравнения называются *равносильными на множестве M*.

Например, уравнения

$$\sqrt[4]{x} = 1, \quad x^4 = 1$$

не являются равносильными на множестве всех действительных чисел, так как первое уравнение имеет единственный корень $x_1 = 1$, а второе имеет два корня $x_2 = 1$ и $x_3 = -1$. Но эти уравнения равносильны на множестве всех неотрицательных чисел, так как каждое из них имеет на этом множестве единственный корень $x = 1$.

Приведенные выше утверждения 1 – 4 о равносильности уравнений справедливы и на любом множестве. Приведем теперь другие утверждения о равносильности уравнений на множестве.

Утверждения о равносильности уравнений на множестве

6. Пусть n — натуральное число и на некотором множестве M функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ неотрицательны. Тогда на этом множестве M уравнения $f(x) = g(x)$ и $f^n(x) = g^n(x)$ равносильны.

7. Пусть фиксированное число a таково, что $a > 0$ и $a \neq 1$, и на некотором множестве M функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ положительны; тогда на этом множестве M уравнения $f(x) = g(x)$ и $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильны. В частности, если $b > 0$, то уравнения $a^{h(x)} = b$ и $h(x) = \log_a b$ равносильны.

8. Пусть функция $y = \varphi(x)$ определена и не обращается в нуль ни в одной точке множества M. Тогда на этом множестве M уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$ равносильны.

9. Уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) = \varphi(x)$ равносильны на множестве M, если для любого числа x_0 из M справедливо равенство $g(x_0) = \varphi(x_0)$.

Это свойство может быть сформулировано и так: уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) = \varphi(x)$ равносильны на множестве M, если функции $y = g(x)$ и $y = \varphi(x)$ тождественно равны на M.

Напомним, что две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *тождественно равными на множестве* M, если для любого x из множества M их значения совпадают.

Отметим, что часто множество M совпадает либо с ОДЗ уравнения $f(x) = g(x)$, либо с множеством всех действительных чисел.

1.6. Совокупность уравнений. Пусть даны уравнения

$$f_1(x) = g_1(x), \quad f_2(x) = g_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x) = g_n(x), \quad \ldots,$$

где уравнений или конечное число, или их бесконечно много.

Обозначим через Q область, являющуюся пересечением областей допустимых значений всех этих уравнений. Если нужно найти все числа α из области Q, каждое из которых является корнем хотя бы одного из этих уравнений, то говорят, что дана совокупность уравнений

$$f_1(x) = g_1(x), \quad f_2(x) = g_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x) = g_n(x), \quad \ldots,$$

и область Q называют областью допустимых значений (ОДЗ) заданной совокупности уравнений. При этом, если уравнений бесконечно много, то говорят, что дана бесконечная совокупность уравнений. Число α из ОДЗ этой совокупности называется *корнем* (или *решением*) этой совокупности, если оно является корнем хотя бы одного уравнения совокупности. Решить совокупность уравнений — это значит найти множество всех ее корней. Если это множество окажется пустым, то говорят, что совокупность уравнений не имеет решений.

Проиллюстрируем введенные понятия.

Областью допустимых значений совокупности уравнений

$$\sqrt{x^2 - 4} = 0, \quad \log_2 x = 0 \tag{9}$$

является пересечение областей допустимых значений уравнения $\sqrt{x^2 - 4} = 0$ и уравнения $\log_2 x = 0$, т. е. множество всех x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geqslant 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Следовательно, ОДЗ совокупности уравнений (9) есть множество всех $x \geqslant 2$. Решением совокупности уравнений (9) является только $x = 2$, так как множество решений уравнения $\sqrt{x^2 - 4} = 0$ состоит из $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$, а решение уравнения $\log_2 x = 0$ есть $x_3 = 1$, но условию $x \geqslant 2$ удовлетворяет только $x_1 = 2$.

Говорят, что уравнение $F(x) = G(x)$ равносильно совокупности уравнений

$$f_1(x) = g_1(x), \quad f_2(x) = g_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x) = g_n(x), \quad \ldots,$$

на множестве M, если множество корней уравнения, принадлежащих множеству M, совпадает с множеством корней совокупности уравнений, принадлежащих множеству M.

Например, уравнение

$$(x+3)(x+2)(x-1)(x-2)=0 \tag{10}$$

и совокупность уравнений

$$x-1=0, \quad x-2=0 \tag{11}$$

равносильны на множестве всех положительных чисел, так как на этом множестве они имеют своими корнями только числа $x_1=1$ и $x_2=2$. Однако это уравнение и совокупность уравнений не являются равносильными на множестве всех действительных чисел, поскольку, кроме корней $x_1=1$ и $x_2=2$, уравнение (10) имеет еще корни $x_3=-2$ и $x_4=-3$, не являющиеся корнями совокупности уравнений (11).

При решении уравнений часто пользуются следующим утверждением: *Уравнение*

$$F_1(x)\cdot F_2(x)\cdot\ldots\cdot F_m(x)=0$$

равносильно на своей ОДЗ совокупности уравнений

$$F_1(x)=0, \quad F_2(x)=0, \quad \ldots, \quad F_m(x)=0.$$

Например, уравнение

$$(x-1)(x+2)(x^2+2)=0$$

равносильно на множестве всех действительных чисел совокупности уравнений

$$x-1=0, \quad x+2=0, \quad x^2+2=0.$$

Уравнение

$$(x^2-1)\cdot\sqrt{x}=0$$

равносильно на своей ОДЗ, т. е. на множестве неотрицательных чисел, совокупности уравнений

$$x^2-1=0, \quad \sqrt{x}=0.$$

Упражнения

Найти область допустимых значений уравнения; проверить, являются ли числа x_0, x_1 и x_2 корнями уравнения.

1) $(x+1)^2=x+1, \quad x_0=-1, \quad x_1=0, \quad x_2=2.$

2) $\dfrac{x+4}{x^2+x}=1, \quad x_0=-2, \quad x_1=0, \quad x_2=2.$

3) $\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}=1, \quad x_0=-2, \quad x_1=-1, \quad x_2=0.$

4) $x+\dfrac{1}{x+1}=x^2+\dfrac{1}{x+1}, \quad x_0=-1, \quad x_1=0, \quad x_2=1.$

5) $x + \dfrac{1}{x} = x^2 + \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$
6) $\sqrt{x^2+3} = 2, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$
7) $\sqrt{x(x+1)} = 0, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = -1/2, \quad x_2 = 0.$
8) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1} = 0, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = -1/2, \quad x_2 = 0.$
9) $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$
10) $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = \log_2 x, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$
11) $\sqrt{(x+1)^2x^2(x-2)} = |x||x+1|\sqrt{x-2}, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$
12) $x\sqrt{x-5} = 2x, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 9.$
13) $x\sqrt{x+5} = 2|x|, \quad x_0 = -9, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0.$
14) $|x-1| = 2x+1, \quad x_0 = -2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$
15) $|x-1| = |2x+1|, \quad x_0 = -2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1/2.$

Объяснить, почему следующее уравнение не имеет решений.
16) $\sqrt{2-x} = -1.$ 17) $\log_2(-x) + \log_2(x) = 1.$
18) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3} = 2.$ 19) $|2x-3| = -2.$
20) $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-1} = 1.$ 21) $3^{x^2-5x+6} = -2.$
22) $\sqrt{3-x} = \log_5(x-3).$ 23) $|x-2| + |x-3| = 0.$
24) $|x^2+1| + |x^2+4x-5| = 1.$ 25) $\sin x = x^2+2x+4.$
26) $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x+2} = 0.$ 27) $\sqrt{5-x} - \sqrt{x-6} = 2.$
28) $\sqrt[3]{x-4} = \sqrt{-1-x}.$ 29) $2^{x^2+1} = 1 - x^2.$
30) $\sqrt[100]{x} + \sqrt{x+5} = 2.$ 31) $\sqrt[3]{x + \dfrac{1}{x}} = \sqrt{-x} - 1.$
32) $\sqrt{10 + 3\sqrt{x^2-1}} + x^4\sqrt{5-x} = 3.$
33) $(x^2+x+1)(x^2+2x+3) = 1.$
34) $\log_5(x+1) + 2\log_5(x-1) = \log_5(1-x^2) + 1.$
35) $2\log_3(4+x^2) = \log_2\left(1-(x+3)^2\right).$
36) $\log_4\left(x^2+1+\dfrac{1}{x^2+1}\right) = \log_4(2-\sqrt{x+3}).$
37) $\log_{1/2}(3x-\sqrt{x-2}) = 1 - \log_3(x^2-2x-\sqrt{1-x}).$
38) $\log_2(2+\sqrt{x}) + \log_2(1+x^2) = 0.$
39) $\log_{1/3}(x-3) - \log_{1/3}(x+6) = \log_{1/3}(x-2).$
40) $\log_2(x^8+2) - \log_2(4+x^2) = \log_5(2+\sqrt{x(1-x)}).$
41) $\sqrt{5-x} + \sqrt{x-2} = (x-1)^2(x-6).$
42) $(x+2)(4-x)\left(\sqrt{x-7}+1\right) = 5.$

Объяснить, почему следующие два уравнения не являются равносильными.
43) $\sqrt{x-1} = -2, \quad x-1 = 4.$ 44) $x^2 + x + \sqrt{x} = \sqrt{x}, \quad x^2 + x = 0.$
45) $\dfrac{(x+2)(x+1)}{x+1} = 1, \quad x+2 = 1.$
46) $(x+1)(x+3) = x+3, \quad x+1 = 1.$
47) $x + \dfrac{1}{x^2} = x^5 + \dfrac{1}{x^2}, \quad x = x^5.$ 48) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = 0, \quad \operatorname{ctg} x = 0.$
49) $\operatorname{tg} x = 0, \quad \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x} = 0.$

50) $3^{\log_3(x^2-4x+3)} = x-3, \quad x^2-4x+3 = x-3.$
51) $\sqrt{x+3} = \sqrt{2x+8}, \quad x+3 = 2x+8.$
52) $\log_2(x+1) = \log_2(2x+4), \quad x+1 = 2x+4.$
53) $\log_2(x+3)^2 = 4, \quad x+3 = 4.$ 54) $\overline{(x+1)^2} = 2, \quad x+1 = 2.$
55) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+2} = 0, \quad \overline{(x+1)(x+2)} = 0.$
56) $\overline{x^2(x-1)(x+2)} = 0, \quad |x| \quad \overline{(x-1)(x+2)} = 0.$
57) $\sqrt{x-3}(x^2+3) = 4x\sqrt{x-3}, \quad x^2+3 = 4x.$
58) $(x^2-2x)2^{\sqrt{x}} = 8\cdot 2^{\sqrt{x}}, \quad x^2-2x = 8.$
59) $|x+1| = |2x-3|, \quad x+1 = 2x-3.$
60) $\sqrt{2x^2-x-6} = 3, \quad \sqrt{x-2}\cdot\sqrt{2x+3} = 3.$
61) $(x+2)^4 = (2x)^4, \quad x+2 = 2x.$
62) $2\sqrt{x+5} = x+2, \quad 4(x+5) = (x+2)^2.$
63) $\log_7(x^2-4) = \log_7(4x-7), \quad x^2-4 = 4x-7.$
64) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x, \quad x = 2x.$
65) $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{\pi}{6}.$
66) $\overline{\frac{x-5}{x}} + \frac{6}{x} = 0, \quad \sqrt{x-5} + \frac{6}{\sqrt{x}} = 0.$
67) $\sin x\cdot\cos x = \cos^2 x, \quad \operatorname{tg} x = 1.$
68) $\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} = 1, \quad \operatorname{tg} \quad x - \frac{\pi}{4} \quad = 1.$
69) $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} x = 0, \quad \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0.$
70) $\sin 2x - 3\cos 2x = 3, \quad \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} - \frac{3(1-\operatorname{tg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 3.$
71) $\frac{\sin^4 x - 1}{\cos^4 x} = 1, \quad \cos 2x = -1.$
72) $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}} = 1, \quad \overline{\frac{x-1}{2x-1}} = 1.$ 73) $\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}} = 1, \quad \sqrt{x+2} = 1.$
74) $\log_3 x + \log_3(2x+3) = 2, \quad \log_3 x(2x+3) = 2.$
75) $\log_5 x - \log_5(2x+5) = 0, \quad \log_5\frac{x}{2x+5} = 0.$
76) $\log_2(x^2+3x) = 2, \quad \log_2 x + \log_2(x+3) = 2.$
77) $2\log_3 x = 3, \quad \log_3 x^2 = 3.$
78) $\frac{2}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2\sqrt{x}-x}, \quad 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - x = 8.$
79) $x = (\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{10+x}-4), \quad x(\sqrt{1+x}-1) = x(\sqrt{10+x}-4).$
80) $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1, \quad (2x-1)(x-1) = (1-x)^3.$
81) $\overline{x^2(x-1)} = x - \sqrt{x}, \quad x\sqrt{x-1} = x - \sqrt{x}.$
82) $\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}} = \frac{2}{x}, \quad x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}) = 2(\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}).$
83) $\sqrt{x^2-1} = (x+5)\ \overline{\frac{x+1}{x-1}}, \quad |x-1| = x+5.$
84) $\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}} = \frac{2}{x}, \quad \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}} = \frac{2-x}{2+x}.$

85) $2^{\log_2(5x-6)} = -1, \quad 5x - 6 = -1.$
86) $x \cdot 4^{2+x} = x \cdot 4^{4-x}, \quad 2 + x = 4 - x.$
87) $(x-1)3^x = ((x-1)3^x)^2, \quad 1 = (x-1)3^x.$

Объяснить, почему следующие два уравнения равносильны.
88) $(x+1)^2 = 0, \quad x + 1 = 0.$ 89) $\sqrt{x+2} = 2, \quad x + 2 = 4.$
90) $x^2 + 5 = x + 5, \quad x^2 = x.$ 91) $(x+2)(x^2+1) = 0, \quad x + 2 = 0.$
92) $|x+1| = 3, \quad (x+1)^2 = 9.$ 93) $\dfrac{x}{x^2+2} = \dfrac{x^2}{x^2+2}, \quad x = x^2.$
94) $x^2 + 1 = 0, \quad x^2 + 2 = 0.$ 95) $x = 4, \quad \sqrt{x} = 2.$
96) $\log_2 x^2 = 4, \quad \log_2 |x| = 2.$ 97) $\sqrt{x+1} = \sqrt{3-x}, \quad x + 1 = 3 - x.$
98) $\sqrt{x} = \sqrt{-x}, \quad x^4 = 0.$ 99) $\sin x = 0, \quad \operatorname{tg} x = 0.$
100) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = 0, \quad x^3 = 1.$ 101) $\sqrt{x^2} = 4, \quad |x| = 2.$
102) $\sqrt{x^2+x+1} = 1, \quad \log_2(1 + x^2(1+x)^2) = 0.$
103) $\dfrac{x^2-1}{x-1} = 6, \quad x + 1 = 6.$
104) $\sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} = \log_5(x-2), \quad (x-3)^2 = 0.$

Указать, какое из двух следующих уравнений является следствием другого.
105) $x^2 + x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}, \quad x^2 + x = 0.$
106) $x^2 - 4 = 0, \quad x^2 - 4 + \sqrt{x-2} - \sqrt{x-2} = 0.$
107) $\dfrac{x^2-4x+3}{x-3} = 1, \quad x^2 - 4x + 3 = x - 3.$
108) $\dfrac{x^2-2x+3}{3-x} = 1, \quad x^2 - 2x + 3 = 3 - x.$
109) $\sqrt{x(x-1)} = -1, \quad x(x-1) = 1.$
110) $x^2 - 4 = 3x, \quad \dfrac{x^2-4}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{3x}{\sqrt{4-x^2}}.$
111) $x^2 - 4 = 3x, \quad \dfrac{x^2-4}{\sqrt{10-x^2}} = \dfrac{3x}{\sqrt{10-x^2}}.$
112) $x^4 - \dfrac{4x^3}{x} = 0, \quad x^4 - 4x^2 = 0.$
113) $\sqrt{x^2+5x+6} = 2, \quad x^2 + 5x + 6 = 4.$
114) $\log_2(x+2)^2 = 1, \quad 2\log_2(x+2) = 1.$
115) $\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = \log_2 3, \quad (x+1)(x+3) = 3.$
116) $\sqrt{x^2+x-5} = \sqrt{x-1}, \quad x^2 + x - 5 = x - 1.$
117) $\sqrt{x-5}(x^2+3) = \sqrt{x-5} \cdot 4x, \quad x^2 + 3 = 4x.$
118) $3^{\log_3(x^2-4x+3)} = x - 3, \quad x^2 - 4x + 3 = x - 3.$
119) $\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} = 1.$
120) $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0, \quad \sin 2x = 0.$ 121) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = 0, \quad \operatorname{ctg} x = 0.$
122) $3^{x^2-x} = 3^{1-(\sqrt{x})^2}, \quad x^2 - x = 1 - x.$
123) $x^2 - 4 = 4x - 7, \quad \log_2(x^2-4) = \log_2(4x-7).$

124) $\dfrac{\sin^4 x - 1}{\cos^4 x} = 1, \quad \cos 2x = -1.$

Являются ли следующие два уравнения равносильными на данном множестве M?

125) $x^2 - x + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x+1}, \quad x^2 = x; \quad M = \{x : x \neq -1\}.$

126) $x^3 - x^4 + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}, \quad x^3 - x^4 = 0; \quad M = \{x : x \neq 1\}.$

127) $(x^2-1)(x+2) = 0, \quad x^2 - 1 = 0; \quad M = \{x : x \geqslant 0\}.$

128) $|x-1| = 2x+4, \quad x - 1 = 2x + 4; \quad M = \{x : x \geqslant 1\}.$

129) $|x^2-1| - |x| + |2x+3| = 4x - 6, \quad x^2 - 1 - x + 2x + 3 = 4x - 6;$
$M = \{x : x \in [0,1)\}.$

130) $\log_2(x^2-4) = \log_2(4x-7), \quad x^2 - 4 = 4x - 7; \quad M = \{x : x > 2\}.$

131) $\dfrac{2(x-7)}{x^2-6x-7} = 1, \quad 2x - 14 = x^2 - 6x - 7; \quad M = \{x : x^2 - 6x - 7 \neq 0\}.$

132) $|\sin x| = |\cos x|, \quad \sin^2 x = \cos^2 x; \quad M = \{x : x \in R\}.$

133) $\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x \cdot \cos 5x} = 0, \quad \sin 2x = 0; \quad M = \{x : x \in R\}.$

134) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x \cdot \sin 4x = 0, \quad \sin 4x = 0; \quad M = \{x : x \neq \pi/2 + \pi n, n \in Z\}.$

135) $\dfrac{2x-3}{x-1} = \dfrac{5-2x}{x-1}, \quad 2x - 3 = 5 - 2x; \quad M = \{x : x$ — целое число$\}.$

136) $\dfrac{x^2-1}{x+1} = -2, \quad x - 1 = -2; \quad M = \{x : x$ — целое число$\}.$

Найти область допустимых значений совокупности уравнений.

137) $2x - 1 = 3, \quad x^2 - 4x + 5 = 0.$ 138) $\sqrt{x^2-8} = 0, \quad x + 2 = 0.$

139) $\sqrt{x^2-9} = 0, \quad \log_3 x = 0.$

140) $\sqrt{x+2} = 0, \quad \log_2(x-1) = 0, \quad \dfrac{x}{x-3} = 1.$

141) $\sqrt{x+1} \cdot \cos x = 0, \quad \dfrac{x-1}{x^2+x} = 1.$

142) $\overline{(x-1)^2(x-2)} = 1, \quad \operatorname{tg} x = 1.$

143) $\overline{x^2(x-1)^2(x-3)} = 2, \quad x^2 - 4x + \log_2 x = \log_2 x.$

144) $2^{\sqrt{1-x^2}} = 1, \quad \log_5 x = -1, \quad \operatorname{ctg} \dfrac{15x}{2} = 0.$

145) $\overline{\dfrac{x+4}{x+2}} = 2, \quad \dfrac{x^3}{x} = 1.$ 146) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x \cdot \sin 2x = 0, \quad \dfrac{\sin x}{\sin x + 1} = 0.$

147) $\dfrac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} = 0, \quad \sin \quad x + \dfrac{\pi}{4} \quad = 0.$

148) $x\sqrt{x-1} = 0, \quad \overline{x^2(x-1)} = 0, \quad \dfrac{1}{x^2+x-2} = 1.$

149) $\sqrt{\sin x} = 0, \quad \sqrt{\cos x} = 0, \quad \sin x - \cos x = 0.$

150) $\log_2 x + \log_2(-x) = 1, \quad x^2 = 3.$

Равносильны ли уравнение а) и совокупность уравнений б) на множестве M?

151) а) $(x+3)(x-2) = 0$; б) $x + 3 = 0, \quad x - 2 = 0; \quad M = \{x : x \in R\}.$

152) а) $(x+3)(x-2)=0$; б) $x+3=0$, $x-2=0$; $M=\{x : x \geqslant 0\}$.
153) а) $(x+1)\sqrt{x}=x+1$; б) $x+1=0$, $\sqrt{x}=1$; $M=\{x : x \geqslant 0\}$.
154) а) $(x+1)\sqrt{x}=x+1$; б) $x+1=0$, $\sqrt{x}=1$; $M=\{x : x \in R\}$.
155) а) $\sqrt{x^2(x-1)}=0$; б) $|x|=0$, $\sqrt{x-1}=0$; $M=\{x : x \geqslant 0\}$.
156) а) $\sqrt{x+1}=x-1$; б) $(x-1)^2=x+1$, $x-3=0$;
$M=\{x : x \geqslant -1\}$.
157) а) $\sqrt{x+1}=x-1$; б) $(x-1)^2=x+1$, $x-3=0$; $M=\{x : x \geqslant 1\}$.
158) а) $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}=\dfrac{2x^2+x}{x^2+x+1}$; б) $2x+1=0$, $x=1$;
$M=\{x : x \geqslant -2\}$.
159) а) $|x-3|=(x-3)^2$; б) $x-3=0$, $x-3=1$; $M=\{x : x \geqslant 3\}$.
160) а) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2x+5}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{3x+7}$; б) $\sqrt{1-x^2}=0$, $2x+5=3x+7$;
$M=\{x : |x| \leqslant 1\}$.
161) а) $\dfrac{\sqrt{41-x^2}}{x}=\dfrac{\sqrt{41-x^2}}{2x+5}$; б) $\sqrt{41-x^2}=0$, $x=2x+5$;
$M=\{x : |x| \leqslant 1\}$.
162) а) $\sqrt{(x^2-5x+6)(x^2-x)}=0$; б) $\sqrt{x^2-5x+6}=0$, $\sqrt{x^2-x}=0$;
$M=\{x : x \geqslant 2\}$.
163) а) $\sqrt{(x^2-x)(x-3)(x+4)}=0$; б) $\sqrt{x^2-x}=0$, $\sqrt{x-3}=0$,
$\sqrt{x-4}=0$; $M=\{x : x \in R\}$.
164) а) $\log_2 x^2=1$; б) $x-\sqrt{2}=0$, $(x+\sqrt{2})=0$; $M=\{x : x \in R\}$.
165) а) $\log_2 x+\log_2 (x+2)=\log_2 3$; б) $x+3=0$, $x-1=0$;
$M=\{x : x > 0\}$.

§ 2. РАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ

Уравнения, не являющиеся простейшими, с помощью различных преобразований стараются привести к простейшим уравнениям или их совокупности.

В этом параграфе рассматриваются лишь равносильные преобразования уравнений.

2.1. Простейшие преобразования уравнений. При решении уравнений часто приходится пользоваться утверждениями 1 – 5 п. 1.4 о равносильности уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$3^{x+2}=27.$$

Решение. Поскольку $27=3^3$, то данное уравнение, согласно утверждению 4 п. 1.4, равносильно уравнению $x+2=3$, которое на основании утверждения 2 п. 1.4 равносильно уравнению $x+2+(-2)=3+(-2)$. Это уравнение имеет единственный корень $x_1=1$. Следовательно, и исходное уравнение имеет единственный корень $x_1=1$.

Ответ. $x_1=1$.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^3 + 3x + 1 = 1 + x^3. \tag{1}$$

Решение. На основании утверждения 1 п. 1.4 уравнение (1) равносильно уравнению

$$(x^3 + 3x + 1) - (1 + x^3) = 0. \tag{2}$$

Учитывая, что функция $y = (x^3 + 3x + 1) - (1 + x^3)$ тождественно равна функции $y = 3x$, получаем, на основании утверждения 5 п. 1.4, что уравнение (2) равносильно уравнению $3x = 0$, имеющему единственный корень $x_1 = 0$. Следовательно, исходное уравнение (1) также имеет единственный корень $x_1 = 0$.

Ответ. $x_1 = 0$.

В рассмотренном примере 2 утверждение 5 п. 1.4 использовано при приведении подобных членов в алгебраическом уравнении.

Тождественные преобразования типа приведения подобных членов возможны и для других уравнений, в которые входят функции, определенные для всех действительных x; к таким функциям относятся, в частности, функции $y = a^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Пример 3. Решить уравнение

$$6 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x = 2. \tag{3}$$

Решение. Так как функция $y = 6 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x$ тождественно равна функции $y = 2^x$, то уравнение (3) равносильно уравнению

$$2^x = 2,$$

имеющему единственный корень $x_1 = 1$. Следовательно, уравнение (3) также имеет единственный корень $x_1 = 1$.

Ответ. $x_1 = 1$.

В дальнейшем при применении тождественных преобразований вместо слов «данное уравнение равносильно уравнению» будем часто писать «данное уравнение перепишем в виде».

2.2. Преобразования, связанные с применением тождественных равенств. Решение уравнений с применением тождественных равенств основано на утверждении 5 п. 1.4 о равносильности уравнений. Это утверждение позволяет использовать для проведения равносильных преобразований уравнений различные тождественные равенства, т. е. формулы, справедливые при всех действительных значениях переменного x.

Примерами таких тождественных равенств являются, например, формулы сокращенного умножения, формула $\sqrt{x^2} = |x|$, формулы $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$, $a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$, $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Приведем некоторые примеры.

Пример 4. Решить уравнение

$$(1 - x)(1 + x)(1 + x^2) = \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Р е ш е н и е. Применяя формулы сокращенного умножения, преобразуем левую часть уравнения (4):

$$(1-x)(1+x)(1+x^2) = (1-x^2)(1+x^2) = 1-x^4.$$

Следовательно, уравнение (4) равносильно на основании утверждения 5 п. 1.4 уравнению $1-x^4 = 1/2$, которое на основании утверждений 2 и 3 п. 1.4 равносильно уравнению $x^4 = 1/2$. Решения простейшего уравнения $x^4 = 1/2$, а следовательно, и исходного есть $x_1 = 1/\sqrt[4]{2}$ и $x_2 = -1/\sqrt[4]{2}$.

О т в е т. $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$, $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

П р и м е р 5. Решить уравнение

$$(1-x)(1+x+x^2) + 2 - 2x^3 = 0.$$

Р е ш е н и е. Применяя формулу сокращенного умножения, получим уравнение

$$1 - x^3 + 2 - 2x^3 = 0,$$

равносильное исходному. Перепишем это уравнение в виде $3 - 3x^3 = 0$. Последнее уравнение на основании утверждений 2 и 3 п. 1.4 равносильно простейшему уравнению $x^3 = 1$. Решение этого уравнения, а следовательно, и исходного есть $x_1 = 1$.

О т в е т. $x_1 = 1$.

П р и м е р 6. Решить уравнение

$$3|x| - 2\sqrt{x^2} = 4.$$

Р е ш е н и е. Воспользовавшись тождеством $\sqrt{x^2} \equiv |x|$, перепишем исходное уравнение в виде $3|x| - 2|x| = 4$ или в виде $|x| = 4$. Решения этого уравнения, а следовательно, и исходного есть $x_1 = 4$ и $x_2 = -4$.

О т в е т. $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

П р и м е р 7. Решить уравнение

$$3 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^x - 2^{x+2} = 21.$$

Р е ш е н и е. Поскольку $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, $2^{x+2} = 4 \cdot 2^x$, то исходное уравнение можно переписать в виде

$$6 \cdot 2^x + 5 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x = 21$$

или в виде $2^x = 3$. Единственное решение $x_1 = \log_2 3$ последнего уравнения является решением исходного уравнения.

О т в е т. $x_1 = \log_2 3$.

2.3. Решение алгебраических уравнений. Уравнение первой степени $a_0 x + a_1 = 0$, $a_0 \neq 0$, имеет единственный корень $x_0 = -a_1/a_0$.

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0: \tag{5}$$

при $D = b^2 - 4ac < 0$ корней не имеет;

при $D = b^2 - 4ac = 0$ имеет единственный корень $x_0 = -b/2a$, или, как иногда говорят, два совпадающих корня $x_1 = x_2 = x_0$, при этом

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2;$$

при $D = b^2 - 4ac > 0$ имеет два различных корня

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},$$

при этом

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Для корней квадратного уравнения (5) справедлива теорема Виета. *Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то сумма корней равна $-b/a$, а произведение корней равно c/a, т. е.*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Верно и обратное утверждение: *если числа x_1 и x_2 удовлетворяют условиям $x_1 + x_2 = -b/a$ и $x_1 \cdot x_2 = c/a$, то они являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.*

Этими фактами мы дальше будем пользоваться.

Существуют формулы, дающие решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степени, однако они применяются редко. Что же касается алгебраических уравнений более высоких степеней, то таких общих формул, дающих решение уравнения, вообще не существует.

Основным методом решения алгебраических уравнений $P(x) = 0$, степени большей чем 2, является метод разложения левой части уравнения на множители и замены уравнения $P(x) = 0$ на равносильную ему совокупность уравнений. Если

$$P(x) = Q(x)R(x),$$

где $Q(x)$ и $R(x)$ — многочлены, то уравнение

$$P(x) = 0$$

равносильно совокупности уравнений

$$Q(x) = 0, \quad R(x) = 0.$$

Это утверждение остается справедливым и в случае разложения многочлена $P(x)$ в произведение не только двух, но и большего числа множителей.

Пример 8. Решить уравнение

$$(x - 1)(x^2 + 5x + 4) = 0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x - 1 = 0, \quad x^2 + 5x + 4 = 0.$$

Решение первого уравнения этой совокупности есть $x_1 = 1$. Решения второго уравнения есть $x_2 = -1$ и $x_3 = -4$. Итак, данное уравнение имеет три корня: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -4$.

Ответ. $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = -4.$

Не всегда левая часть алгебраического уравнения уже разложена на множители. Поэтому рассмотрим несколько способов разложения многочлена на множители.

Одним из распространенных способов разложения многочлена на множители является применение формул сокращенного умножения.

Пример 9. Решить уравнение

$$(x+1)^3 - 8 = 0.$$

Решение. Применяя формулу $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, исходное уравнение перепишем в виде

$$[(x+1) - 2][(x+1)^2 + 2(x+1) + 4] = 0$$

или в виде

$$(x-1)(x^2+4x+7) = 0.$$

Отсюда следует, что исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x - 1 = 0, \quad x^2 + 4x + 7 = 0.$$

Поскольку квадратное уравнение $x^2+4x+7=0$ корней не имеет, то решением совокупности уравнений, а значит, и исходного уравнения является $x_1 = 1$.

Ответ. $x_1 = 1.$

Иногда при разложении левой части уравнения $P(x) = 0$ на множители бывает полезным следующее утверждение.

Если многочлен

$$f(x) = a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

имеет целые коэффициенты и рациональный корень $\alpha = p/q$, $\alpha \neq 0$, где дробь p/q — несократимая, то свободный член a_n делится на p, а коэффициент при старшем члене a_0 делится на q.

Отсюда, в частности, следует, что при $a_0 = 1$ все рациональные корни многочлена $f(x)$ являются целыми числами.

С помощью этих утверждений можно, перебирая пары делителей чисел a_0 и a_n, найти все рациональные корни многочлена $f(x)$.

Если каким-либо способом подобран корень $x = \alpha$ многочлена $P_n(x)$ степени n, то многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = (x - \alpha)P_{n-1}(x),$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$.

Многочлен $P_{n-1}(x)$ можно найти либо делением «уголком» многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x - \alpha$, либо группировкой слагаемых многочлена $P_n(x)$ и выделением из них множителя $x - \alpha$.

Пример 10. Решить уравнение

$$x^3 + x^2 - x + 2 = 0.$$

Р е ш е н и е. Так как коэффициенты многочлена $P_3(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ — целые числа, то его целые корни, если они есть, являются делителями числа 2, т. е. целые корни данного многочлена могут быть только среди чисел $1, -1, 2, -2$. Легко проверить, что число (-2) является корнем многочлена $P_3(x)$. Следовательно, данный многочлен $P_3(x)$ делится на двучлен $x - (-2) = x + 2$. Произведем деление многочлена $P_3(x)$ на двучлен «уголком»:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^3 + x^2 - x + 2 \\ x^3 + 2x^2 \qquad\quad \end{array} & \begin{array}{l} x + 2 \\ \hline x^2 - x + 1 \end{array} \\
\cline{1-1}
-\begin{array}{r} -x^2 - x + 2 \\ -x^2 - 2x \quad \end{array} & \\
\cline{1-1}
-\begin{array}{r} x + 2 \\ x + 2 \end{array} & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Следовательно,

$$x^3 + x^2 - x + 2 = (x + 2)(x^2 - x + 1).$$

Итак, исходное уравнение равносильно уравнению

$$(x + 2)(x^2 - x + 1) = 0 \qquad (6)$$

или совокупности уравнений

$$x + 2 = 0, \quad x^2 - x + 1 = 0.$$

Поскольку квадратный трехчлен $x^2 - x + 1 = 0$ корней не имеет, то единственный корень уравнения (6), а значит, и исходного уравнения есть $x_1 = -2$.

О т в е т. $x_1 = -2$.

П р и м е р 11. Решить уравнение

$$x^3 + 3x^2 + x - 5 = 0.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим многочлен

$$P_3(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5.$$

Поскольку делители его свободного члена есть числа $1, -1, 5$ и -5, то целые корни данного уравнения, если они есть, находятся только среди этих чисел. Подставляя $x = 1$ в многочлен, имеем $P_3(1) = 0$. Итак, многочлен $P_3(x)$ имеет корень $x = 1$. Выделим множитель $(x - 1)$ группировкой слагаемых. Имеем

$$x^3 + 3x^2 + x - 5 = x^3 - x^2 + 4x^2 - 4x + 5x - 5 = (x - 1)(x^2 + 4x + 5).$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x - 1 = 0, \quad x^2 + 4x + 5 = 0.$$

Решение ее, а значит, и исходного уравнения есть $x_1 = 1$.

О т в е т. $x_1 = 1$.

2.4. Уравнения, сводящиеся к квадратным уравнениям. Довольно часто встречаются уравнения

$$f(x) = 0,$$

где $f(x) = p(g(x))$ — сложная функция, являющаяся суперпозицией двух функций $y = g(x)$ и $y = p(g)$, причем $p(g)$ — квадратный трехчлен: $p(g) = ag^2 + bg + c$. В таких случаях уравнение $f(x) = 0$ записывают в виде

$$a(g(x))^2 + b(g(x)) + c = 0$$

и называют квадратным уравнением относительно $g(x)$. Для решения такого уравнения решают сначала квадратное уравнение

$$at^2 + bt + c = 0. \tag{7}$$

В случае, если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ этого уравнения положителен, то уравнение (7) имеет два корня t_1 и t_2, и в этом случае уравнение $f(x) = 0$ равносильно совокупности уравнений

$$g(x) = t_1, \quad g(x) = t_2.$$

Если $D = 0$, то уравнение (7) имеет единственное решение $t_0 = -b/2a$, и в этом случае уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению

$$g(x) = -\frac{b}{2a}.$$

Если же $D < 0$, то уравнение (7), а значит, и уравнение $f(x) = 0$ не имеют решений.

П р и м е р 12. Решить уравнение

$$2(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 5 = 0.$$

Р е ш е н и е. Поскольку квадратное уравнение

$$2y^2 - 3y - 5 = 0$$

имеет два корня $y_1 = 5/2$ и $y_2 = -1$, то исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\log_2 x = 5/2, \quad \log_2 x = -1.$$

Уравнение $\log_2 x = 5/2$ имеет решение $x_1 = 2^{5/2}$, а решение уравнения $\log_2 x = -1$ есть $x_2 = 1/2$.

Следовательно, исходное уравнение имеет два корня $x_1 = 2^{5/2}$ и $x_2 = 1/2$.

О т в е т. $x_1 = 2^{5/2}$, $x_2 = 1/2$.

П р и м е р 13. Решить уравнение

$$4^x - 2^{x+1} - 3 = 0.$$

Р е ш е н и е. Перепишем исходное уравнение в виде

$$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 3 = 0.$$

Квадратное уравнение $y^2 - 2y - 3 = 0$ имеет два корня $y_1 = 3$ и $y_2 = -1$, поэтому исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$2^x = 3, \quad 2^x = -1.$$

Уравнение $2^x = 3$ имеет единственное решение $x_1 = \log_2 3$. Уравнение $2^x = -1$ решений не имеет, так как 2^x положительно для любого действительного числа x.

Следовательно, исходное уравнение имеет единственное решение $x_1 = \log_2 3$.

Ответ. $x_1 = \log_2 3$.

2.5. Преобразования, связанные с суперпозицией функций. В этом пункте будут рассмотрены уравнения

$$f(x) = 0, \tag{8}$$

где $f(x) = p(g(x))$ — сложная функция, являющаяся суперпозицией двух функций $y = g(x)$ и $y = p(g)$, причем функция $y = p(g)$ — не обязательно квадратный трехчлен относительно g.

Для решения таких уравнений сначала решают уравнение

$$p(t) = 0.$$

Если это уравнение не имеет корней, то не имеет решений и уравнение $p(g(x)) = 0$. Если множество корней (конечное или бесконечное) уравнения $p(t) = 0$ есть $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$, то уравнение $p(g(x)) = 0$ равносильно совокупности уравнений

$$g(x) = t_1, \quad g(x) = t_2, \quad \ldots, \quad g(x) = t_n, \quad \ldots \tag{9}$$

Множество всех корней совокупности (9) совпадает с множеством всех корней уравнения (8).

Пример 14. Решить уравнение

$$\sin\left(\frac{4}{3}\pi \sin x\right) = \frac{1}{2}.$$

Решение. Поскольку уравнение $\sin t = 1/2$ имеет решения $t = (-1)^k \pi/6 + \pi k,\ k \in Z$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\frac{4}{3}\pi \sin x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z.$$

Перепишем эту совокупность в виде

$$\sin x = (-1)^k \frac{1}{8} + \frac{3}{4}k, \quad k \in Z. \tag{10}$$

Из уравнений этой совокупности будут иметь решения лишь те, для которых

$$\left|(-1)^k \frac{1}{8} + \frac{3}{4}k\right| \leqslant 1.$$

Легко видеть, что этому условию удовлетворяют лишь значения k равные 0, 1 и -1. Следовательно, только три уравнения:

$$\sin x = \frac{1}{8}, \quad \sin x = \frac{5}{8}, \quad \sin x = -\frac{7}{8}, \tag{11}$$

из совокупности (10) будут иметь решения, а остальные уравнения решений иметь не будут. Решая уравнения (11), находим множество решений исходного уравнения:

$$x_1 = (-1)^n \arcsin\frac{1}{8} + \pi n, \quad n \in Z,$$
$$x_2 = (-1)^m \arcsin\frac{5}{8} + \pi m, \quad m \in Z,$$
$$x_3 = (-1)^{p+1} \arcsin\frac{7}{8} + \pi p, \quad p \in Z.$$

Ответ. $x_1 = (-1)^n \arcsin\frac{1}{8} + \pi n,\ n \in Z;\quad x_2 = (-1)^m \arcsin\frac{5}{8} + \pi m,\ m \in Z;\quad x_3 = (-1)^{p+1} \arcsin\frac{7}{8} + \pi p,\ p \in Z.$

Частными случаями суперпозиции $p(f)$ являются функции $y = |f(x)| + a$ и $y = \sqrt{f(x)} + a$, где a — некоторое число.

Для решения уравнения

$$|f(x)| = A$$

сначала решают уравнение $|t| = A$, которое при $A < 0$ решений не имеет, при $A = 0$ имеет единственное решение $t_1 = 0$, а при $A > 0$ имеет два решения: $t_1 = A$ и $t_2 = -A$.

Таким образом, уравнение $|f(x)| = A$ при $A > 0$ равносильно совокупности уравнений

$$f(x) = A, \quad f(x) = -A.$$

При $A = 0$ оно равносильно уравнению $f(x) = 0$, а при $A < 0$ решений не имеет.

Пример 15. Решить уравнение

$$|5x^2 - 3| = 2.$$

Решение. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$5x^2 - 3 = 2, \quad 5x^2 - 3 = -2.$$

Первое из этих уравнений имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Второе уравнение также имеет два корня: $x_3 = 1/\sqrt{5}$ и $x_4 = -1/\sqrt{5}$. Следовательно, исходное уравнение имеет четыре корня:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1/\sqrt{5}, \quad x_4 = -1/\sqrt{5}.$$

Ответ. $x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1/\sqrt{5}, \quad x_4 = -1/\sqrt{5}.$

Для решения уравнения

$$\sqrt{f(x)} = A$$

сначала решают уравнение $\sqrt{t} = A$, которое при $A < 0$ решений не имеет, а при $A \geqslant 0$ имеет единственное решение $t = A^2$. Таким образом, уравнение $\sqrt{f(x)} = A$ при $A \geqslant 0$ равносильно уравнению $f(x) = A^2$, а при $A < 0$ решений не имеет.

П р и м е р 16. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+5x+10}=2.$$

Р е ш е н и е. Данное уравнение равносильно уравнению

$$x^2+5x+10=4$$

или уравнению

$$x^2+5x+6=0.$$

Решениями этого уравнения, а значит, и исходного уравнения являются $x_1=-2$ и $x_2=-3$.

О т в е т. $x_1=-2,\ x_2=-3$.

Упражнения

Решить уравнение.

1) $(x-1)^2=1$. 2) $(2x+1)^3=8$. 3) $x^4-4x^2+4=1$. 4) $2^{x+3}=4$.
5) $5^{2x+1}=25$. 6) $\sqrt{x-2}=1$. 7) $\sqrt{1-4x}=5$.
8) $\log_{1/3}(x-1)=2$. 9) $\log_2^2 x=4$. 10) $|x-2|=1$.
11) $|1-3x|=4$. 12) $|(x-1)^2+1|=2$. 13) $|3x^2-20|=7$.
14) $|43-2x^2|=7$. 15) $\sqrt{x^2-6x+9}=1$.
16) $x^4-(2x^2+3x+7)+x^2+x+4=-2x-x^2+11$.
17) $3\{10-2[3x-2(x-5)+7x]\}=3x-4$.
18) $\dfrac{3x-4}{3}+\dfrac{(x+2)(x-1)}{4}=\dfrac{x(x+1)}{4}$.
19) $3\cdot 2^{2x}-4=8$. 20) $4^{x-1}+4^x+4^{x+1}=84$.
21) $3(\log_2 x-1)+5(2\log_2 x-1)=5$.
22) $(x^2+x)^2-(x^2-x)^2=1$. 23) $(x^3-1)+2(x-1)=0$.
24) $(1+x)(1-x)(1+x^2)=-15$.
25) $(1-2x)(1+2x+4x^2)=x^3$. 26) $\sqrt{x^2}-|x|+5^{x+1}=3$.
27) $3\cos^2 x+x-3x+4=1-3\sin^2 x$.
28) $8|x+1|-3\sqrt{x^2+2x+1}=5$.
29) $\sqrt{x^4+6x^2+9}+\sqrt{16x^4+8x^2+1}=9$.
30) $2\sqrt{x^4+4x^2+4}-\sqrt{x^4+2x^2+1}=18$.
31) $x^2-4x-5=0$. 32) $x^2-6x+9=0$. 33) $2x^2+4x+7=0$.
34) $x^4-7x^2+6=0$. 35) $(x^2-1)^2+3(x^2-1)=0$.
36) $(x^2+x-2)(x^2+x-3)=12$.
37) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$.
38) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=35$.
39) $x-5\sqrt{x}+6=0$. 40) $x^2+13-2\sqrt{x^2+13}=35$.
41) $41-x^2-2\sqrt{41-x^2}=15$. 42) $x^2-24-15=2\sqrt{x^2-24}$.
43) $3\sqrt{\log_3 x}-\log_3 3x-1=0$. 44) $5\sqrt{\log_2 x}-4=\log_2 4x$.
45) $5\sqrt{\log_3 x}-\log_3 9x=4$. 46) $9^x-3^{x+1}=4$. 47) $4^{x-1}=3+2^{x-2}$.
48) $\dfrac{3^{2x}}{100^x}=2\cdot(0,3)^x+3$. 49) $16^x=10^{2x}\cdot(4+3\cdot(0,4)^x)$.
50) $1=4^{x-2}\cdot(2^{5-x}+9)$. 51) $5^{2x-3}=\dfrac{2}{5^{1-x}}$.

52) $\dfrac{1}{6}^{\;x-3} = 6^{5-2x} - 12.$ 53) $(\log_5 x)^2 + \dfrac{1}{2}(1 + \log_5 x) - 2 = 0.$

54) $2(\log_3 x)^2 - 7(1 + \log_3 x) + 3 = 0.$

55) $(\log_4 x)^2 + \dfrac{1}{2}(2 + \log_4 x) - 4 = 0.$

56) $2^{x+4} \cdot 7^{x+4} = 2^{3x} \cdot 7^{3x}.$ 57) $3^{2x+3} \cdot 5^{2x+3} = 3^{5x} + 5^{5x}.$

58) $3^{x+3} \cdot 7^{x+3} = 3^{2x} \cdot 7^{2x}.$ 59) $4^{\log_9 x} - 6 \cdot 2^{\log_9 x} + 2^{\log_3 27} = 0.$

60) $25^{\log_2 x} - 6 \cdot 5^{\log_2 x} + 5^{1/2 \log_2 4} = 0.$

61) $3 \cdot 9^{\log_4 x} - 10 \cdot 3^{\log_4 x} + \log_2 8 = 0.$

62) $4^{\log_3 x} - 5 \cdot 2^{\log_3 x} + 2^{\log_3 9} = 0.$

63) $9^{\sqrt[3]{x}} - 2 \cdot 3^{\sqrt[3]{x}} = 3.$ 64) $x^3 - 3x^2 + 4x = 0.$

65) $(x+1)^3 + (x-1)^3 = 0.$ 66) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0.$

67) $x^3 + 4 = 3x^2.$ 68) $x^5 - 3x^3 + x = 0.$ 69) $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0.$

70) $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18 = 0.$

71) $2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0.$

72) $(x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5)(x^2 - 5x + 6) = 0.$

73) $(x^2 - x)^4 - 5(x^2 - x)^2 \cdot x^2 + 6x^4 = 0.$

74) $x^6 - 8x^4 + 19x^2 - 12 = 0.$

75) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = -30.$

§ 3. РАВНОСИЛЬНОСТЬ УРАВНЕНИЙ НА МНОЖЕСТВЕ

Иногда, рассматривая уравнение, можно из каких-либо соображений сразу выделить область, содержащую все его корни, отбросив участки числовой прямой, в которых заведомо корней быть не может. Допустим, что преобразования, выполняемые в процессе решения, сохраняют равносильность уравнений на этой выделенной области. Обозначим ее для определенности буквой M. Тогда, решив получившееся в конце концов простейшее уравнение или совокупность простейших уравнений и отобрав среди найденных чисел только те, которые лежат в M, можно утверждать, что отобранные числа составляют множество всех решений исходного уравнения.

Отметим также, что можно быть уверенным в сохранении равносильности уравнений на множестве M, если преобразования выполнялись по правилам 1 – 9, указанным в п. 1.5.

Эти общие замечания мы поясним ниже рядом конкретных примеров. Разбираясь в каждом из них, полезно сравнивать ход рассуждений с высказанным выше общим планом решения.

Отметим, что очень часто бывает удобно взять в качестве M область допустимых значений уравнения.

3.1. Приведение подобных членов уравнения. Нужно быть внимательным при уничтожении подобных членов, если эти подобные члены определены не на всей числовой прямой, ибо при этом преобразовании могут появиться посторонние корни.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^2 + \sqrt{x^2 - 1} - (x + \sqrt{x^2 - 1}) = 0. \tag{1}$$

Решение. ОДЗ уравнения (1) состоит из всех чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 - 1 \geqslant 0$, т. е. ОДЗ состоит из двух промежутков $-\infty < x \leqslant -1$ и $1 \leqslant x < +\infty$. На этом множестве функция

$$y = x^2 + \sqrt{x^2 - 1} - (x + \sqrt{x^2 - 1})$$

тождественно равна функции

$$y = x^2 - x.$$

Поэтому исходное уравнение равносильно на этом множестве (см. п. 1.5, утверждение 9) уравнению

$$x^2 - x = 0. \tag{2}$$

Это уравнение имеет два корня $x_2 = 0$ и $x_1 = 1$. Из них только $x_1 = 1$ лежит в рассматриваемом множестве. Следовательно исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = 1$.

Ответ. $x_1 = 1$.

Заметим, что уравнения (1) и (2) не равносильны на всей числовой прямой, второе из них имеет еще корень $x = 0$.

3.2. Освобождение уравнения от знаменателя. Лишние корни могут появиться и при освобождении от знаменателя.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{2x^2 - 3x + 1}. \tag{3}$$

Решение. ОДЗ уравнения состоит из всех чисел, отличных от корней уравнений $x^2 - 3x + 2 = 0$ и $2x^2 - 3x + 1 = 0$, т. е. от чисел $1, 2, 1/2$.

На этой области обе функции $y = x^2 - 3x + 2$ и $y = 2x^2 - 3x + 1$ определены и отличны от нуля. Поэтому (см. п. 1.5, утверждение 9), умножив уравнение (3) на произведение знаменателей, получим уравнение

$$2x^2 - 3x + 1 = x^2 - 3x + 2, \tag{4}$$

равносильное исходному уравнению на его ОДЗ. После приведения подобных членов получаем уравнение $x^2 - 1 = 0$, имеющее два корня $x_2 = 1$ и $x_1 = -1$, из которых только один $x_1 = -1$ лежит в ОДЗ исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = -1$.

Отметим, что уравнения (3) и (4) не равносильны на всей числовой прямой.

3.3. Тождественные преобразования уравнения на множестве. При решении уравнений часто приходится пользоваться утверждением 9 п. 1.5 о равносильности уравнений на множестве. При этом важную роль играют различные равенства, являющиеся тождествами лишь на множествах.

Рассмотрим некоторые примеры.

а) *Тождества с радикалами.* Если функция $y = f(x)$ определена и неотрицательна на множестве M, то на M справедливо тождество

$$(\sqrt{f(x)})^2 = f(x).$$

Очень часто замена функции $y = (\sqrt{f(x)})^2$ на функцию $y = f(x)$, выполняемая без учета области, где $y = f(x)$ неотрицательна, приводит к ошибкам.

Пример 3. Решить уравнение

$$(\sqrt{x^2 - 7x + 10})^2 = 2x^2 - 9x + 7.$$

Решение. Область допустимых значений этого уравнения состоит из всех чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 - 7x + 10 \geqslant 0$, т. е. является объединением двух промежутков $x \leqslant 2$ и $x \geqslant 5$. Обозначим ОДЗ через M. На множестве M справедливо тождество

$$(\sqrt{x^2 - 7x + 10})^2 = x^2 - 7x + 10.$$

Поэтому исходное уравнение равносильно на множестве M уравнению

$$x^2 - 7x + 10 = 2x^2 - 9x + 7 \tag{5}$$

или уравнению

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Последнее уравнение имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Из них множеству M принадлежит только $x_1 = -1$. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = -1$.

Ответ. $x_1 = -1$.

Заметим, что замена исходного уравнения уравнением (5) приводит к появлению постороннего корня $x = 3$. Действительно, при $x = 3$ левая часть заданного уравнения равна 2, а правая его часть равна -2.

Решая уравнения, содержащие радикалы, следует быть внимательными при замене функций $\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)}$ на $\sqrt{f(x)g(x)}$ и $\sqrt{f(x)}/\sqrt{g(x)}$ на $\sqrt{f(x)/g(x)}$ соответственно, а также при обратных заменах. Область существования функций $y = \sqrt{f(x)g(x)}$ и $y = \sqrt{f(x)/g(x)}$ может быть шире областей существования функций $y = \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)}$ и $y = \sqrt{f(x)}/\sqrt{g(x)}$, поэтому, например, функции $y = \sqrt{f(x) \cdot g(x)}$ и $y = \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)}$ могут не быть тождественно равными.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+2} = \sqrt{(x-1)(x+2)} + (x+5)(x-3). \tag{6}$$

Решение. ОДЗ уравнения (6) есть множество всех $x \geqslant 1$. На этой области выполняется тождество

$$\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+2} \equiv \sqrt{(x-1)(x+2)},$$

так что уравнение (6) равносильно на множестве $x \geqslant 1$ уравнению

$$\sqrt{(x-1)(x+2)} = \sqrt{(x-1)(x+2)} + (x+5)(x-3) \tag{7}$$

и, значит, (см. п. 3.1) уравнению

$$(x+5)\cdot(x-3)=0.$$

Получившееся уравнение имеет два корня $x_2=-5$ и $x_1=3$, из которых в множество $x\geqslant 1$ попадает только $x_1=3$. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1=3$.

Ответ. $x_1=3$.

Заметим, что функции $y=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+2}$ и $y=\sqrt{(x-1)(x+2)}$ не являются тождественно равными, так как имеют различные области существования: первая из них определена на промежутке $1\leqslant x<+\infty$, а вторая — на двух промежутках $-\infty<x\leqslant -2$ и $1\leqslant x<+\infty$. Поэтому уравнение (7) имеет два корня $x_1=-5$ и $x_2=3$, в чем легко убедиться подстановкой, а уравнение (6) — лишь один корень $x=3$. Формальный переход от уравнения (6) к уравнению (7) привел бы к появлению постороннего корня $x=-5$.

б) *Основное логарифмическое тождество*. Не всегда допустима замена функции $y=a^{\log_a f(x)}$ на функцию $y=f(x)$. Область существования функции $y=a^{\log_a f(x)}$ включает в себя лишь те x из области существования $y=f(x)$, где выполнено неравенство $f(x)>0$. Поэтому замена в уравнении функции $y=a^{\log_a f(x)}$ на функцию $y=f(x)$ может привести к появлению посторонних корней. Если же в точках множества M функция $y=f(x)$ принимает только положительные значения, то равенство

$$a^{\log_a f(x)}=f(x)$$

является тождеством на M и эта замена есть равносильное преобразование на M.

Пример 5. Решить уравнение

$$2^{\log_2 (x-4)}=2x-7.$$

Решение. ОДЗ уравнения состоит из чисел x, удовлетворяющих неравенству $x-4>0$, т. е. $x>4$. На ОДЗ выполняется тождественное равенство $2^{\log_2 (x-4)}=x-4$, поэтому исходное уравнение равносильно на ОДЗ уравнению

$$x-4=2x-7.$$

Единственный корень этого уравнения $x=3$ не лежит в ОДЗ исходного уравнения. Значит, исходное уравнение не имеет решений.

Ответ. Решений нет.

в) *Тождества с логарифмами*. При решении уравнений, содержащих логарифмические функции, иногда применяются различные преобразования, сводящие заданное уравнение к виду, удобному для потенцирования уравнения, т. е. к виду

$$\log_a f(x)=\log_a g(x).$$

Так, применяется замена функции $y=\log_a f(x)+\log_a g(x)$ на функцию $y=\log_a (f(x)\cdot g(x))$, функции $y=\log_a f(x)-\log_a g(x)$ на функцию

$y = \log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$, функции $y = 2N \log_a f(x)$ на функцию $y = \log_a (f(x))^{2N}$. Выполняя такие преобразования, следует помнить, что они сохраняют равносильность уравнений на некотором множестве M только в том случае, когда все входящие в уравнения функции определены на M.

Пример 6. Решить уравнение

$$\log_2 (x - 1) + \log_2 x = 1.$$

Решение. Область допустимых значений данного уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $x - 1 > 0$ и $x > 0$, т. е. ОДЗ есть промежуток $1 < x < +\infty$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению $\log_2((x-1)x) = 1$ или уравнению $x^2 - x = 2$. Последнее уравнение имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = -1$. Из них ОДЗ принадлежит только x_1, значит, $x_1 = 2$ является единственным корнем исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = 2$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\log_2 \left(\frac{x^4}{1 - x^2} \right) - \log_2 \left(\frac{x^2}{1 - x^2} \right) = 6. \tag{8}$$

Решение. ОДЗ уравнения (8) состоит из всех x, удовлетворяющих одновременно условиям $x \neq 0$ и $1 - x^2 > 0$ и, следовательно, является объединением двух промежутков $-1 < x < 0$ и $0 < x < 1$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_2 \left(\frac{x^4}{1 - x^2} : \frac{x^2}{1 - x^2} \right) = 6,$$

т. е. уравнению

$$\log_2 x^2 = 6. \tag{9}$$

Потенцируя это уравнение, а затем решая квадратное уравнение $x^2 = 2^6$, находим два корня $x_1 = 8$ и $x_2 = -8$ уравнения (9). Ни один из них не входит в ОДЗ исходного уравнения, и, значит, исходное уравнение решений не имеет.

Ответ. Решений нет.

Подчеркнем, что уравнения (8) и (9) не равносильны, они имеют различные области допустимых значений и, как следствие, различные множества корней.

Иногда используют тождества

$$\log_a (f \cdot g) \equiv \log_a |f| + \log_a |g|,$$

$$\log_a \left(\frac{f}{g} \right) \equiv \log_a |f| - \log_a |g|,$$

справедливые в той части области существования функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, где выполнено неравенство $f(x) \cdot g(x) > 0$, а также тождество

$$\log_a f^{2m} \equiv 2m \log_a |f|,$$

где m — натуральное число, выполняющееся на той части области существования функции $f(x)$, где $f(x) \neq 0$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\log_2 x^4 + \log_2 x^2 = 6.$$

Решение. ОДЗ данного уравнения состоит из всех $x \neq 0$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$4\log_2 |x| + 2\log_2 |x| = 6,$$

т. е. уравнению

$$\log_2 |x| = 1,$$

которое в свою очередь равносильно уравнению

$$|x| = 2.$$

Решение этого уравнения есть $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Оба эти значения входят в ОДЗ исходного уравнения и поэтому являются его решениями.

Ответ. $x_1 = 2, \quad x_2 = -2$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\log_2 \frac{x}{1-x^2} - \log_2 \frac{x^3}{1-x^2} = -2.$$

Решение. ОДЗ данного уравнения состоит из двух промежутков $0 < x < 1$ и $-\infty < x < -1$. На ОДЗ данное уравнение равносильно уравнению

$$\log_2 |x| - \log_2 |1-x^2| - \log_2 |x|^3 + \log_2 |1-x^2| = -2,$$

т. е. уравнению

$$\log_2 |x| - \log_2 |x|^3 = -2,$$

которое в свою очередь равносильно уравнению

$$\log_2 |x| = 1.$$

Решение последнего уравнения есть $x_2 = 2$ и $x_1 = -2$. Значение $x_2 = 2$ не входит в ОДЗ исходного уравнения, поэтому не может являться решением исходного уравнения. Значение $x_1 = -2$ входит в ОДЗ исходного уравнения и является единственным его решением.

Ответ. $x_1 = -2$.

г) *Приведение логарифмов к одному основанию*. Часто в уравнениях бывают заданы логарифмические функции при различных основаниях. Обычно в этом случае все логарифмы приводят к одному основанию с помощью тождества

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b},$$

справедливого при положительных a, b, c, а также при $b \neq 1$, $c \neq 1$. Получившееся уравнение решают с помощью изложенных выше приемов.

Пример 10. Решить уравнение

$$\log_2 x + \log_3 \quad \frac{3}{x} \quad - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}.$$

Решение. Областью допустимых значений данного уравнения является множество $0 < x < +\infty$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_2 x + (1 - \log_3 x) - 3\log_3 x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2 x.$$

Перейдем в логарифмах к логарифмам по основанию 3. Получим уравнение

$$(1 - \log_3 x) + \frac{\log_3 x}{\log_3 2} - 3\log_3 x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 2},$$

равносильное исходному на его ОДЗ. Последнее уравнение можно переписать так:

$$1 - 4\log_3 x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 2} = 0.$$

Теперь очевидно, что на множестве $0 < x < +\infty$ исходное уравнение равносильно уравнению

$$(8\log_3 2 - 1)\log_3 x = 2\log_3 2.$$

Это уравнение имеет единственный корень $x_1 = \dfrac{8\log_3 2 - 1}{\log_3 4}$. Это число лежит в ОДЗ исходного уравнения и, следовательно, является его решением.

Ответ. $x_1 = \dfrac{8\log_3 2 - 1}{\log_3 4}$.

3.4. Замена уравнения совокупностью уравнений. Напомним, что уравнение

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0$$

равносильно совокупности уравнений

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad \ldots, \quad f_n(x) = 0$$

только на ОДЗ уравнения.

Пример 11. Решить уравнение

$$(x^2 - 4) \cdot \sqrt{x} = 0.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих неравенству $x \geqslant 0$. На этом множестве данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\sqrt{x} = 0, \quad x^2 - 4 = 0. \tag{10}$$

Первое уравнение этой совокупности имеет один корень: $x_1 = 0$, а второе — два корня: $x_2 = 2$ и $x_3 = -2$. Из них в ОДЗ исходного уравнения входят только $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Они и являются решениями исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

Подчеркнем, что формальное объединение множеств решений уравнений (10) приводит к появлению постороннего корня.

3.5. Сокращение уравнения на общий множитель. Иногда при решении уравнения
$$\varphi(x)\cdot f(x)=\varphi(x)\cdot g(x)$$
от этого уравнения переходят к уравнению
$$f(x)=g(x),$$
т. е. сокращают уравнение на общий множитель — функцию $y=\varphi(x)$, забывая о том, что при некоторых значениях x функция $y=\varphi(x)$ может обращаться в нуль или не иметь смысла. Это ошибка может привести как к потере корней исходного уравнения, так и к приобретению посторонних корней.

Например, переходя от уравнения $x^3=x$ к уравнению $x^2=1$ (т. е. сокращая исходное уравнение на x), мы, как легко видеть, теряем корень $x_1=0$ исходного уравнения, а переходя от уравнения $\sqrt{x-3}\cdot x^2=2\sqrt{x-3}$ к уравнению $x^2=2$ (т. е. сокращая исходное уравнение на общий множитель $\sqrt{x-3}$), мы приобретаем два посторонних корня $x_1=\sqrt{2}$ и $x_2=-\sqrt{2}$, но теряем корень $x_3=3$.

Подобные уравнения надо решать следующим образом:

1) найти ОДЗ уравнения $\varphi(x)f(x)=\varphi(x)g(x)$;

2) переписать уравнение в равносильном виде
$$\varphi(x)\cdot[f(x)-g(x)]=0;$$

3) перейти от этого уравнения к равносильной ему на ОДЗ исходного уравнения совокупности уравнений
$$\varphi(x)=0,\quad f(x)-g(x)=0;$$

4) решить эту совокупность уравнений на ОДЗ исходного уравнения; множество всех корней этой совокупности, каждый из которых принадлежит ОДЗ исходного уравнения, и есть множество всех корней исходного уравнения.

Пример 12. Решить уравнение
$$(x^2+2x)\log_2 x=8\log_2 x. \tag{11}$$

Решение. ОДЗ уравнения состоит из всех $x>0$. Перепишем исходное уравнение в виде
$$(x^2+2x-8)\cdot\log_2 x=0.$$
На ОДЗ это уравнение равносильно совокупности уравнений
$$\log_2 x=0,\quad x^2+2x-8=0.$$
Корень первого уравнения этой совокупности есть $x_1=1$, корнями второго уравнения являются $x_2=2$ и $x_3=-4$. Из этих чисел в ОДЗ исходного уравнения входят лишь $x_1=1$ и $x_2=2$. Следовательно, решениями исходного уравнения являются $x_1=1$ и $x_2=2$.

Ответ. $x_1=1,\ \ x_2=2$.

Подчеркнем, что сокращение уравнения (11) на общий множитель $\log_2 x$ приводит к уравнению
$$x^2+2x=8,$$
имеющему два корня $x_2=2$ и $x_3=-4$. При этом $x_3=-4$ не удовлетворяет уравнению (11), а корень $x_1=1$ теряется.

3.6. Возведение обеих частей уравнения в четную степень. Отметим еще раз, что возведение в четную степень обеих частей уравнения сохраняет равносильность уравнений на множестве M, если:

1) обе части уравнения определены на множестве M;
2) обе части уравнения неотрицательны на множестве M.

Пример 13. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2} = \sqrt{2x-1}. \tag{12}$$

Решение. ОДЗ уравнения состоит из чисел x, удовлетворяющих неравенствам $x - 2 \geqslant 0$ и $2x - 1 \geqslant 0$, т. е. имеет вид $x \geqslant 2$. На ОДЗ обе части уравнения (12) определены и неотрицательны, поэтому (см. п. 1.5, утверждение 6) оно равносильно на ОДЗ уравнению

$$(\sqrt{x-2})^2 = (\sqrt{2x-1})^2,$$

т. е. уравнению

$$x - 2 = 2x - 1.$$

Это уравнение имеет единственный корень $x_1 = -1$, не принадлежащий ОДЗ исходного уравнения. Значит, исходное уравнение решений не имеет.

Ответ. Решений нет.

Отметим, что формальное возведение в квадрат уравнения (12) приводит к появлению постороннего корня $x_1 = -1$ вследствие того, что на множестве $(-\infty, +\infty)$ нарушается первое из двух указанных условий.

Пример 14. Решить уравнение

$$\overline{2x^2+1} = 2x - 1. \tag{13}$$

Решение. Так как левая часть уравнения (13) принимает только неотрицательные значения, то все решения уравнения (13) должны удовлетворять неравенству $2x - 1 \geqslant 0$, т. е. лежать в области $x \geqslant 1/2$. Обозначим для краткости эту область буквой M. Обе части исходного уравнения определены и неотрицательны на множестве M. Значит, это уравнение равносильно на M уравнению

$$(\quad \overline{2x^2+1})^2 = (2x-1)^2,$$

т. е. уравнению

$$2x^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 1. \tag{14}$$

Это уравнение имеет два корня: $x_2 = 0$ и $x_1 = 2$. Из них в M лежит только $x_1 = 2$. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = 2$.

Ответ. $x_1 = 2$.

Заметим, что ОДЗ уравнения (13) совпадает со всей числовой прямой и на ОДЗ нарушается второе из указанных выше условий. Уравнения (13) и (14) не равносильны на ОДЗ, второе из них имеет корень $x_1 = 0$, подстановка которого в (13) дает неверное равенство $\sqrt{1} = -1$.

Пример 15. Решить уравнение

$$\sqrt{3-3x} = 2x + 1.$$

Решение. ОДЗ уравнения состоит из чисел x, удовлетворяющих неравенству $3-3x \geqslant 0$, т. е. неравенству $x \leqslant 1$. Кроме того, для решений должно выполняться неравенство $2x+1 \geqslant 0$, т. е. неравенство $x \geqslant -1/2$. Обозначим буквой M множество $-1/2 \leqslant x \leqslant 1$. Все искомые решения лежат в M. На множестве M обе части исходного уравнения определены и неотрицательны, поэтому оно равносильно на M уравнению

$$(\sqrt{3-3x})^2 = (2x+1)^2,$$

т. е. уравнению

$$3-3x = 4x^2+4x+1.$$

Это уравнение имеет два корня $x_1 = 1/4$ и $x_2 = -2$. Из них в M лежит только $x_1 = 1/4$. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = 1/4$.

Ответ. $x_1 = 1/4$.

При решении более сложных задач возведение в степень может применяться неоднократно. Однако всякий раз нужно следить за соблюдением условий 1) и 2).

Пример 16. Решить уравнение

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+2} = 4.$$

Решение. ОДЗ уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x \geqslant 1$. Так как на ОДЗ обе части исходного уравнения неотрицательны, то, возведя его в квадрат, получим уравнение

$$x-1+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+2}+2x+2 = 16, \tag{15}$$

равносильное исходному на его ОДЗ. Перепишем уравнение (15) в виде

$$2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+2} = 15-3x. \tag{16}$$

Заметим, что на ОДЗ выражение $2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+2}$ неотрицательно, а выражение $15-3x$ может принимать значения разных знаков, поэтому ни одно x из множества $x > 5$ не может являться решением уравнения (16), а значит, и исходного уравнения.

При $1 \leqslant x \leqslant 5$ обе части уравнения (16) определены и неотрицательны, поэтому на этом множестве уравнение (16), а значит, и исходное уравнение равносильны уравнению

$$4(x-1)(2x+2) = (15-3x)^2,$$

т. е. уравнению

$$x^2 - 90x + 233 = 0. \tag{17}$$

Решения уравнения (17) есть $x_2 = 45+16\sqrt{7}$ и $x_1 = 45-16\sqrt{7}$. Оба эти значения x входят в ОДЗ исходного уравнения, однако условию $1 \leqslant x \leqslant 5$ удовлетворяет только значение $x_1 = 45-16\sqrt{7}$, следовательно, только оно и является решением исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = 45-16\sqrt{7}$.

3.7. Преобразования, связанные с логарифмированием уравнения. Пусть a — положительное число, отличное от единицы. Рассмотрим уравнение

$$f(x) = g(x).$$

Замена этого уравнения на уравнение

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

называется *логарифмированием* уравнения.

При логарифмировании уравнения возможна потеря корней, например, при переходе от уравнения $x = x^3$ к уравнению $\log_2 x = \log_2 x^3$ корни $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$ уравнения $x = x^3$ теряются, а корень $x_3 = 1$ остается. Поэтому формальное применение преобразования логарифмирования иногда приводит к уравнению, не равносильному исходному. Логарифмировать уравнение можно только на множестве M-той части ОДЗ, где обе части исходного уравнения положительны. При этом на множестве M уравнения $f(x) = g(x)$ и $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильны.

Часто преобразование логарифмирования применяется к уравнениям

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},$$

где $a > 0$, $a \neq 1$. При этом пользуются тем, что обе части этого уравнения положительны на его ОДЗ.

Пример 17. Решить уравнение

$$2^{x+2} \cdot 5^{x+2} = 2^{3x} \cdot 5^{3x}.$$

Решение. Используя свойство степени, перепишем уравнение в виде

$$10^{x+2} = 10^{3x}.$$

Поскольку при любом действительном x обе части уравнения положительны, то оно равносильно уравнению

$$x + 2 = 3x,$$

имеющему единственный корень $x_1 = 1$. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = 1$.

Ответ. $x_1 = 1$.

3.8. Преобразования, связанные с потенцированием уравнения. Рассмотрим уравнение

$$\log_a f(x) = \log_a g(x). \tag{18}$$

Замена этого уравнения уравнением

$$f(x) = g(x) \tag{19}$$

называется *потенцированием* уравнения. Как уже отмечалось (см. п. 1.5, утверждение 7), уравнения (18) и (19) будут равносильными на некотором множестве M, если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены и положительны на M.

Пример 18. Решить уравнение

$$\log_3 (x^2 - 7) = \log_3 (3x - 3). \tag{20}$$

Решение. ОДЗ этого уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих одновременно условиям $x^2 - 7 > 0$ и $3x - 3 > 0$, т. е. ОДЗ есть множество $\sqrt{7} < x < +\infty$. На этом множестве исходное уравнение равносильно уравнению

$$x^2 - 7 = 3x - 3. \tag{21}$$

Множество всех решений последнего уравнения состоит из двух чисел $x_1 = 4$ и $x_2 = -1$. Поскольку число $x_2 = -1$ не принадлежит ОДЗ исходного уравнения, а число $x_1 = 4$ ему принадлежит, то $x_1 = 4$ является единственным корнем исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = 4$.

Подчеркнем, что формальный переход от уравнения (20) к уравнению (21) влечет за собой появление лишнего корня $x_2 = -1$.

3.9. Решение уравнений, содержащих абсолютную величину. Нужно четко представлять, что в области существования функции $y = f(x)$

$$|f(x)| = \begin{array}{ll} f(x) & \text{для тех значений } x, \text{ при которых } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x) & \text{для тех значений } x, \text{ при которых } f(x) < 0. \end{array}$$

При решении уравнений, содержащих функцию $|f(x)|$, обычно область допустимых значений M разбивают на две части M_1 и M_2. В первой из них выполняется неравенство $f(x) \geqslant 0$, а во второй $f(x) < 0$. Затем решают заданное уравнение отдельно в области M_1, пользуясь тождеством $|f(x)| = f(x)$, а затем в области M_2, где справедливо тождество $|f(x)| = -f(x)$. Объединяя множества решений из M_1 и из M_2, получают множество решений исходного уравнения.

Пример 19. Решить уравнение

$$|2x - 3| = x + 2.$$

Решение. Точка $x = 3/2$ разбивает числовую ось на два промежутка: 1) $x < 3/2$; 2) $x \geqslant /2$. Решим исходное уравнение на каждом из этих промежутков.

1) На промежутке $3/2 \leqslant x < +\infty$ выражение $2x - 3$ положительно, поэтому на этом промежутке исходное уравнение равносильно уравнению

$$2x - 3 = x + 2,$$

имеющему единственное решение $x_1 = 5$. Поскольку это значение x_1 принадлежит рассматриваемому промежутку, то $x_1 = 5$ является решением исходного уравнения на промежутке $3/2 \leqslant x < +\infty$.

2) На промежутке $-\infty < x < 3/2$ выражение $2x - 3$ отрицательно, поэтому $|2x - 3| = -(2x - 3)$ и исходное уравнение на этом промежутке равносильно уравнению

$$-(2x - 3) = x + 2,$$

т. е. уравнению

$$-3x = -1,$$

имеющему единственный корень $x_2 = 1/3$. Этот корень принадлежит промежутку $-\infty < x \leqslant 3/2$. Значит, на этом промежутке исходное уравнение имеет единственный корень $x_2 = 1/3$.

Следовательно, решениями исходного уравнения являются $x_1 = 1/3$ и $x_2 = 5$.

Ответ. $x_1 = 1/3,\ x_2 = 5$.

Может случиться так, что в уравнение входит несколько функций под знаком модуля. Тогда ОДЗ уравнения разбивают на большее количество областей, в каждой из которых все функции, входящие в заданное уравнение под знаком модуля, принимают или только неотрицательные, или только неположительные значения. Затем в каждой из выделенных областей решают заданное уравнение, пользуясь указанным выше тождеством, и, объединяя множества решений, полученных в каждой области, находят множество решений исходного уравнения.

Пример 20. Решить уравнение

$$|x+1| - |2x-3| = x-5.$$

Решение. Для освобождения от знаков абсолютной величины разобьем числовую ось на три области: первую, в которой $\geqslant 3/2$, вторую, в которой $-1 < x < 3/2$, и третью, в которой $x \leqslant -1$.

В первой области $|x+1| = x+1$, $|2x-3| = 2x-3$, и поэтому исходное уравнение перепишется так:

$$x+1-(2x-3) = x-5.$$

Полученное уравнение имеет решение $x_1 = 9/2$. Это значение $x_1 = 9/2$ попадает в рассматриваемую область и, значит, является решением исходного уравнения.

Во второй области $|x+1| = x+1$ и $|2x-3| = -(2x-3)$, поэтому исходное уравнение перепишется так:

$$x+1+(2x-3) = x-5.$$

Полученное уравнение имеет решение $x_2 = -3/2$. Это значение не попадает в рассматриваемую область и, значит, не является решением исходного уравнения.

В третьей области $|x+1| = -(x+1)$ и $|2x-3| = -(2x-3)$, поэтому исходное уравнение перепишется так:

$$-(x+1)+(2x-3) = x-5.$$

Это уравнение решений не имеет, значит, и исходное уравнение не имеет решений на множестве $x \leqslant -1$.

Следовательно, решением исходного уравнения является $x_1 = 9/2$.

Ответ. $x_1 = 9/2$.

Пример 21. Решить уравнение

$$|5x-13| - |6-5x| = 7.$$

Решение. Для освобождения от знаков абсолютной величины разобьем числовую ось на три области: первую, в которой $x \geqslant 13/5$, вторую, в которой $6/5 < x < 13/5$, и третью, в которой $x \leqslant 6/5$.

В первой области $|5x-13| = 5x-13$, $|6-5x| = -(6-5x)$, и поэтому исходное уравнение перепишется так:

$$5x - 13 + (6 - 5x) = 7.$$

Это уравнение решений не имеет, значит, и исходное уравнение не имеет решений на множестве $x \geqslant 13/5$.

Во второй области $|5x-13| = -(5x-13)$ и $|6-5x| = -(6-5x)$, поэтому исходное уравнение перепишется так:

$$-5x + 13 + 6 - 5x = 7.$$

Полученное уравнение имеет решение $x_1 = 6/5$. Это значение x не попадает в рассматриваемую область и, значит, не является решением исходного уравнения.

В третьей области $|5x-13| = -(5x-13)$ и $|6-5x| = 6-5x$, поэтому исходное уравнение перепишется так:

$$-5x + 13 - 6 + 5x = 7.$$

Этому уравнению удовлетворяют все x из промежутка $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, решением исходного уравнения являются все x из третьей области, т. е. все x из промежутка $-\infty < x \leqslant 6/5$.

Ответ. $-\infty < x \leqslant 6/5$.

Отметим, что особенностью предыдущего примера является то, что его решением является не одно число или несколько чисел, а целый числовой промежуток.

Из утверждения 6 п. 1.5, в частности, следует, что уравнения $|f(x)| = |g(x)|$ и $f^2(x) = g^2(x)$ равносильны на любом множестве M, где определены функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Этим утверждением часто пользуются при решении уравнений.

Пример 22. Решить уравнение

$$|x + 2| = |2x - 1|.$$

Решение. ОДЗ данного уравнения состоит из всех действительных чисел. Данное уравнение равносильно уравнению

$$|x + 2|^2 = |2x - 1|^2,$$

т. е. уравнению

$$(x + 2)^2 = (2x - 1)^2,$$

или уравнению

$$3x^2 - 8x - 3 = 0.$$

Корнями этого уравнения, а следовательно, и исходного являются $x_1 = 3$ и $x_2 = -1/3$.

Ответ. $x_1 = 3$, $x_2 = -1/3$.

Упражнения

Решить уравнение.

1) $x^4 - \sqrt{x^2-4} - (9x^2 - \sqrt{x^2-4}) = 0.$

2) $x^2 - 5x + 5 + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{x-2} - 1.$

3) $\log_2(2x+3) - \log_2(2x+3) = x+3.$

4) $\dfrac{1}{2x^2-x-3} = \dfrac{1}{x^2-3x-4}.$ 5) $\dfrac{x+2}{x^2-4} = 1.$ 6) $\dfrac{3x-7}{x^2+x+1} = \dfrac{4-5x}{2x^2+2x+2}.$

7) $\dfrac{x+4}{x^2-x-2} = \dfrac{x+4}{x^2+x-2}.$ 8) $\sqrt{x^2-4x+1}\ ^2 = 2x^2-7x+3.$

9) $\sqrt{x^2+x-2}\ ^2 = x^2+4x+4.$ 10) $\overline{x^2(x-2)} = x.$

11) $\sqrt{x^2+x-2} = \sqrt{x^2-x+2}.$ 12) $\overline{x^2(x-1)^2(x-3)} = x(1-x).$

13) $4\sqrt{x+6} = x+1.$ 14) $\sqrt{5-x^2} = x-1.$ 15) $\sqrt{x^2+8} = 2x+1.$

16) $\sqrt{1+4x-x^2} = x-1.$ 17) $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2.$

18) $x + \sqrt{2x^2-14x+13} = 5.$ 19) $(x+1)\sqrt{x^2+x-2} = 2x+2.$

20) $(x-1)\sqrt{x^2-x-6} = 6x-6.$

21) $3(4x+3)\sqrt{16x+17} = (4x+3)(8x+5).$

22) $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x-3} = \sqrt{3x-11}.$

23) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x-2} = \sqrt{x+3} - \sqrt{x}.$

24) $(x+1)^2 - \sqrt{1-x^2} = \dfrac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}.$ 25) $(16-x^2)\sqrt{3-x} = 0.$

26) $(9-6x+x^2)\cdot\sqrt{2-x} = 0.$ 27) $(\log_2(1-x))\cdot\sqrt{4-x^2} = 0.$

28) $\sqrt{x+1}\log_2(x-3) = 2\log_2(x-3).$ 29) $\dfrac{\sqrt{x^2+5x+7}}{x^2+x-2} = \dfrac{1}{x^2+x-2}.$

30) $\log_5(x+3) = \log_5(2x-7).$ 31) $\log_3\dfrac{2+x}{10} = \log_3\dfrac{2}{x+1}.$

32) $\log_2(x-1) + \log_2 x = 1.$ 33) $\log_3 x + \log_3(x+2) = 1.$

34) $\log_2(x^2-3) - \log_2(6x-10) + 1 = 0.$

35) $\log_2\dfrac{x}{1-x^2} - \log_2\dfrac{x^3}{1-x^2} = -2.$ 36) $2(\lg x)^2 + (1-\sqrt{2})\lg x^2 = 2\sqrt{2}.$

37) $3(\log_3 x)^2 + (\sqrt{5}-2)\log_3 x^3 - 6\sqrt{5} = 0.$

38) $(\log_5 x)^2 + 2\sqrt{2} = 3(2+\sqrt{2})\log_5\sqrt[3]{x}.$

39) $3\log_8(x-2) = \log_2\sqrt{2x-1}.$

40) $\log_{1/2}\ 1-\dfrac{x}{2}\ + \log_2\ \overline{2-\dfrac{x}{4}}.$

41) $\log_{1/3}(x-3) = -\log_3\sqrt{3x+1}.$

42) $2\lg(x+1/2) - \lg(x-1) = \lg(x+5/2) + \lg 2.$

43) $\lg x - \dfrac{1}{2}\lg\ x-\dfrac{1}{2}\ - \lg\ x+\dfrac{1}{2}\ + \dfrac{1}{2}\lg\ x+\dfrac{1}{8}\ = 0.$

44) $\lg\ x+\dfrac{4}{3}\ - \dfrac{1}{2}\lg(x+6) = \lg\ x-\dfrac{1}{3}\ - \dfrac{1}{2}\lg x.$

45) $2 + \lg(1+4x^2-4x) - \lg(19+x^2) = 2\lg(1-2x).$

46) $2 - 2\lg(2+x) = \lg(36+x^2) - \lg(4+x^2+4x).$

47) $\log_5\dfrac{x^3}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\log_5 x}{\log_3 1/\sqrt{x}}.$

48) $\log_3\sqrt{x} - 2 = (\log_3 x)\ \log_2\dfrac{1}{x}\ + \log_2\dfrac{x^2}{4}.$

49) $\dfrac{1}{3}(\log_2(3x-4)^6)\log_2 x^2 = 8(\log_2\sqrt{x})^2 + (\log_2(3x-4)^2)^2.$

50) $x^2 + 4|x-3| - 7x + 11 = 0.$ 51) $x^2 - 4|x+1| + 5x + 3 = 0.$

52) $x^2 - 2|x+1| - 3x - 5 = 0$. 53) $|3x - 8| = 6 + |3x - 2|$.
54) $1 + |7x - 11| = |7x - 12|$. 55) $|x - 3| + |x + 2| - |x - 4| = 3$.
56) $|3 - x| + |2x + 4| - |x + 1| = 2x + 4$.

§ 4. НЕРАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ

А. Переход к следствию

Одним из часто используемых приемов решения уравнений является замена уравнения его следствием, т.е. другим уравнением, вообще говоря, более простым, содержащим среди своих корней все корни предшествующего уравнения. Выполнив цепочку таких преобразований, получают одно или несколько простейших уравнений, среди корней которых содержатся все корни исходного уравнения. Решив эти простейшие уравнения, можно найти некоторое множество чисел — корней простейших уравнений, из которого с помощью проверки отбираются затем все корни исходного уравнения. Проверка, т.е. подстановка чисел, среди которых содержатся решения, в исходное уравнение, является неотъемлемой частью такого способа решения уравнений. Иногда он оказывается удобнее, чем выполнение равносильных преобразований (см. § 3).

В § 1 указаны наиболее часто используемые преобразования, приводящие к следствию.

4.1. Приведение подобных членов уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^2 + \sqrt{x^2 - 1} - x + \sqrt{x^2 - 1} = 0.$$

Решение. Приведя подобные члены в этом уравнении, приходим к уравнению

$$x^2 - x = 0, \tag{1}$$

являющемуся следствием исходного уравнения. Решения уравнения (1) есть $x_2 = 0$ и $x_1 = 1$. Подставляя эти числа вместо x в исходное уравнение, убеждаемся, что $x_1 = 1$ ему удовлетворяет, а $x_2 = 0$ ему не удовлетворяет, т.е. является посторонним корнем. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = 1$.

Ответ. $x_1 = 1$.

4.2. Освобождение от знаменателя.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{2x+1}{2x^2+5x+1} = 1.$$

Решение. Умножая обе части заданного уравнения на знаменатель $2x^2 + 5x + 1$ левой его части, приходим к уравнению

$$2x + 1 = 2x^2 + 5x + 1$$

— следствию исходного (см. п. 1.3, утверждение 3). Его решения есть $x_1 = -1$ и $x_2 = -1/2$. Подставляя эти числа в исходное уравнение, убеждаемся, что $x_1 = -1$ ему удовлетворяет, а $x_2 = -1/2$ есть посторонний корень.

Ответ. $x_1 = -1$.

4.3. Возведение в степень. Пусть n — натуральное фиксированное число. Как отмечено в § 1, уравнение $f^n(x) = g^n(x)$ есть следствие уравнения $f(x) = g(x)$. При переходе от уравнения $f(x) = g(x)$ к уравнению $f^n(x) = g^n(x)$ не происходит потери корней, однако могут возникнуть посторонние корни.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + 6x + 8} = \sqrt{x + 2}.$$

Решение. Возведя обе части исходного уравнения в квадрат и заменяя $\sqrt{x^2 + 6x + 8}\;^2$ и $\sqrt{x + 2}\;^2$ на подкоренные выражения, получим уравнение

$$x^2 + 6x + 8 = x + 2, \tag{2}$$

являющееся следствием исходного уравнения. Множество всех корней уравнения (2) состоит из двух чисел $x_1 = -2$ и $x_2 = -3$. Поскольку в процессе решения уравнения проводилось возведение уравнения в квадрат и замена квадрата корня подкоренным выражением, то могли появиться посторонние корни, поэтому необходима проверка. Проверка показывает, что корень $x_2 = -3$ не является корнем исходного уравнения, а корень $x_1 = -2$ является корнем исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = -2$.

Иногда прием возведения в степень можно использовать несколько раз.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{4x - 1} - \sqrt{x - 2} = 3.$$

Решение. Если возвести обе части данного уравнения в квадрат, то получим уравнение

$$4x - 1 - 2\sqrt{4x - 1} \cdot \sqrt{x - 2} + x - 2 = 9,$$

т.е. уравнение

$$2\sqrt{4x - 1} \cdot \sqrt{x - 2} = 5x - 12.$$

Возводя это уравнение в квадрат, имеем уравнение

$$4(4x - 1)(x - 2) = (5x - 12)^2,$$

т.е. уравнение

$$9x^2 - 84x + 136 = 0,$$

являющееся следствием исходного. Корнями этого уравнения являются $x_2 = (14 - 2\sqrt{15})/3$ и $x_1 = (14 + 2\sqrt{15})/3$. Проверить значения этих корней не так просто, поскольку надо доказать или опровергнуть равенства

$$\sqrt{4\cdot\frac{14-2\sqrt{15}}{3}-1}-\sqrt{\frac{14-2\sqrt{15}}{3}-2}=3, \qquad (3)$$

$$\sqrt{4\cdot\frac{14+2\sqrt{15}}{3}-1}-\sqrt{\frac{14+2\sqrt{15}}{3}-2}=3. \qquad (4)$$

Преобразуем подкоренные выражения:

$$4\cdot\frac{14-2\sqrt{15}}{3}-1=\frac{53-8\sqrt{15}}{3}=\frac{159-24\sqrt{15}}{9}=\left(\frac{12-\sqrt{15}}{3}\right)^2;$$

$$\frac{14-2\sqrt{15}}{3}-2=\frac{8-2\sqrt{15}}{3}=\frac{24-6\sqrt{15}}{9}=\left(\frac{3-\sqrt{15}}{3}\right)^2;$$

$$4\cdot\frac{14+2\sqrt{15}}{3}-1=\left(\frac{12+\sqrt{15}}{3}\right)^2;$$

$$\frac{14+2\sqrt{15}}{3}-2=\left(\frac{3+\sqrt{15}}{3}\right)^2.$$

Поэтому левая часть равенства (3) равна

$$\frac{12-\sqrt{15}}{3}-\frac{\sqrt{15}-3}{3}=5-\frac{2\sqrt{15}}{3}\neq 3,$$

а левая часть равенства (4) равна

$$\frac{12+\sqrt{15}}{3}-\frac{3+\sqrt{15}}{3}=3,$$

т.е. $x_1=(14+2\sqrt{15})/3$ является корнем исходного уравнения, а x_2 не является.

О т в е т. $x_1=\dfrac{14+2\sqrt{15}}{3}$.

Этот пример показывает, что иногда удобнее пользоваться методами, изложенными в § 3. Но бывает и обратная ситуация.

П р и м е р 5. Решить уравнение

$$\sqrt{x^3-x+5}=\sqrt{x^3+x^2-1}.$$

Р е ш е н и е. Если возвести данное уравнение в квадрат, то получим уравнение

$$x^3-x+5=x^3+x^2-1,$$

являющееся следствием исходного. Это уравнение после приведения подобных членов может быть переписано в виде

$$x^2+x-6=0,$$

откуда следует, что оно имеет два корня: $x_1=2$ и $x_2=-3$. Подстановка этих чисел в исходное уравнение показывает, что $x_1=2$ является его корнем, а $x_2=-3$ — посторонний корень.

О т в е т. $x_1=2$.

Заметим, что ОДЗ уравнения, заданного в этом примере, определяется неравенствами

$$x^3 - x + 5 \geqslant 0, \quad x^3 + x^2 - 1 \geqslant 0$$

и явное ее вычисление затруднительно.

4.4. Потенцирование уравнений. Пусть a — фиксированное положительное число, отличное от 1. Рассмотрим уравнение

$$\log_a f(x) = \log_a g(x). \tag{5}$$

Замена этого уравнения уравнением

$$f(x) = g(x) \tag{6}$$

называется *потенцированием*. Как отмечено в § 1, уравнение (6) есть следствие уравнения (5). При потенцировании уравнения потерять корни нельзя, но можно приобрести посторонние корни.

Пример 6. Решить уравнение

$$\log_3(1 - x) = \log_3 \frac{6}{2 - x}. \tag{7}$$

Решение. Потенцируя данное уравнение, получим уравнение

$$1 - x = \frac{6}{2 - x}. \tag{8}$$

Освобождаясь от знаменателя, получаем уравнение

$$(1 - x)(2 - x) = 6$$

или уравнение

$$x^2 - 3x - 4 = 0. \tag{9}$$

Решениями этого уравнения являются $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$. Поскольку в процессе решения исходного уравнения применялось потенцирование уравнения (7) и освобождение от знаменателя в уравнении (8), то последнее из уравнений — (9) является следствием исходного. Проверка показывает, что число $x_2 = 4$ не является корнем исходного уравнения, а число $x_1 = -1$ ему удовлетворяет. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = -1$.

Ответ. $x_1 = -1$.

Решение следующего примера с помощью равносильных преобразований потребовало бы значительных усилий для нахождения ОДЗ заданного уравнения.

Пример 7. Решить уравнение

$$\log_2 \left(x^2 - \sqrt{x^2 - 4} + x + 2\right) = \log_2 \left(x^4 - \sqrt{x^2 - 4} + x - 10\right).$$

Решение. Потенцируя исходное уравнение, получаем его следствие — уравнение

$$x^2 - \sqrt{x^2 - 4} + x + 2 = x^4 - \sqrt{x^2 - 4} + x - 10.$$

Следствием этого уравнения является уравнение

$$x^4 - x^2 - 12 = 0,$$

решениями которого являются $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Поскольку в процессе решения применено потенцирование уравнения и уничтожение противоположных членов $\sqrt{x^2-4}$ и $-\sqrt{x^2-4}$, то необходима проверка.

Проверка показывает, что оба найденных числа являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = 2, x_2 = -2$.

4.5. Преобразования, связанные с квадратными корнями. Если при решении уравнения заменить:

функцию $y = \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)}$ на функцию $y = \sqrt{f(x) \cdot g(x)}$;

функцию $y = \dfrac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$ на функцию $y = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$;

то могут возникнуть посторонние корни.

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2x-5} = 2. \tag{10}$$

Решение. Заменим исходное уравнение уравнением

$$\sqrt{(x+1)(2x-5)} = 2, \tag{11}$$

являющимся следствием уравнения (10). Найдя корни уравнения (11), надо проверить, какие из них являются корнями уравнения (10).

ОДЗ уравнения (11) состоит из двух промежутков $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 5/2$. На своей ОДЗ уравнение (11) равносильно уравнению

$$(x+1)(2x-5) = 4. \tag{12}$$

Уравнение (12) имеет два корня: $x_1 = 3$ и $x_2 = -3/2$. Так как эти корни входят в ОДЗ уравнения (11), то они являются его решениями.

Проверкой убеждаемся, что $x_1 = 3$ удовлетворяет уравнению (10), а $x_2 = -3/2$ уравнению (10) не удовлетворяет. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень: $x_1 = 3$.

Ответ. $x_1 = 3$.

Отметим, что уравнение (11) проще решить, возведя его в квадрат, т.е. перейдя к его следствию. Приведенное выше решение уравнения (11) подчеркивает, что лишние корни возникли при переходе от уравнения (10) к уравнению (11).

4.6. Преобразования, связанные с логарифмическими формулами. Пусть a — положительное число, не равное единице, а n — натуральное число. Если при решении уравнения заменить:

функцию $y = \log_a f(x) + \log_a g(x)$ на функцию

$$y = \log_a [f(x) \cdot g(x)];$$

функцию $y = \log_a f(x) - \log_a g(x)$ на функцию $y = \log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$;

функцию $y = 2n \log_a f(x)$ на функцию $y = \log_a [f(x)]^{2n}$;

функцию $y = \log_a[f(x)\cdot g(x)]$ на функцию
$$y = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|;$$
функцию $y = \log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$ на функцию $y = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|$;

функцию $y = a^{\log_a f(x)}$ на функцию $y = f(x)$;

то могут возникнуть посторонние корни.

П р и м е р 9. Решить уравнение
$$2\log_3 x = \log_3(x+6). \tag{13}$$

Р е ш е н и е. Заменим уравнение (13) уравнением
$$\log_3 x^2 = \log_3(x+6), \tag{14}$$
являющимся следствием уравнения (13). Поэтому, найдя корни уравнения (14), надо проверить, какие из них являются корнями уравнения (13).

ОДЗ уравнения (14) состоит из всех $x > -6$, $x \neq 0$. На этой области уравнение (14) равносильно уравнению
$$x^2 = x + 6,$$
имеющему два корня $x_1 = 3$ и $x_2 = -2$. Оба эти корня принадлежат ОДЗ уравнения (14) и поэтому являются его корнями. Проверкой убеждаемся, что $x_1 = 3$ удовлетворяет уравнению (13), а $x_2 = -2$ ему не удовлетворяет. Следовательно, уравнение (13) имеет единственный корень $x_1 = 3$.

О т в е т. $x_1 = 3$.

Отметим, что уравнение (14) можно решить, потенцируя его без учета ОДЗ, т.е. переходя к его следствию. Приведенное выше решение уравнения (14) подчеркивает, что лишние корни возникли при переходе от уравнения (13) к уравнению (14).

В заключение заметим, что можно привести примеры и других преобразований уравнения, приводящих к его уравнению-следствию. Подчеркнем, что в каждом таком случае проверка найденных корней является неотъемлемой частью решения уравнения.

Б. Потеря решений уравнения

В предыдущих пунктах были рассмотрены некоторые неравносильные преобразования уравнений, которые могут привести к приобретению корней.

Однако имеются и преобразования, которые могут привести к потере корней. Такие преобразования проводить недопустимо, ибо если посторонний корень можно отбросить после проверки, то потерянный корень никак нельзя восстановить.

Отметим некоторые из таких преобразований.

I. Замена при решении уравнения:

функции $y = \sqrt{f(x)\cdot g(x)}$ на функцию $y = \sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}$;

функции $y = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$ на функцию $y = \dfrac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$;

функции $y = \sqrt{f^2(x) \cdot g(x)}$ на функцию $y = |f(x)|\sqrt{g(x)}$;
может привести к потере корней исходного уравнения.

Приведем примеры.

Уравнение

$$\sqrt{(3x+8)(x+3)} = 2 \tag{15}$$

имеет два корня $x_1 = -4$ и $x_2 = -5/3$, а уравнение

$$\sqrt{3x+8} \cdot \sqrt{x+3} = 2 \tag{16}$$

имеет единственный корень $x_3 = -5/3$.

При замене уравнения (15) уравнением (16) произошло сужение ОДЗ и поэтому корень $x_1 = -4$ уравнения (15) был потерян. Такое «решение» уравнения (15) недопустимо.

Уравнение

$$\sqrt{(x+1)^2 x} = x + 1 \tag{17}$$

имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, а уравнение

$$|x+1|\sqrt{x} = x + 1 \tag{18}$$

имеет единственный корень $x_3 = 1$.

При замене уравнения (17) уравнением (18) произошло сужение ОДЗ, и поэтому корень $x_1 = -1$ уравнения (17) был потерян. Такое «решение» уравнения (17) недопустимо.

II. Пусть a — фиксированное число такое, что $a > 0$ и $a \neq 1$, n — натуральное число.

Замена при решении уравнения:

функции $y = \log_a f^{2n}(x)$ на функцию $y = 2n \log_a f(x)$;

функции $y = \log_a f(x)g(x)$ на функцию $y = \log_a f(x) + \log_a g(x)$;

функции $y = \log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$ на функцию $y = \log_a f(x) - \log_a g(x)$;

функции $y = f(x)$ на функцию $y = a^{\log_a f(x)}$;

может привести к потере корней исходного уравнения.

Приведем примеры.

Уравнение

$$\log_3 (x-2)^2 = 2 \tag{19}$$

имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$, а уравнение

$$2 \log_3 (x-2) = 2 \tag{20}$$

имеет единственный корень $x_3 = 5$.

При замене уравнения (19) уравнением (20) произошло сужение ОДЗ, и поэтому корень уравнения (19) $x_1 = -1$ был потерян. Такое «решение» уравнения (19) недопустимо.

Уравнение

$$\log_2 x(x+1) = 1 \tag{21}$$

имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$, а уравнение

$$\log_2 x + \log_2 (x+1) = 1 \tag{22}$$

имеет единственный корень $x_3 = 1$.

При замене уравнения (21) уравнением (22) произошло сужение ОДЗ, и поэтому корень $x_2 = -2$ уравнения (21) был потерян. Такое «решение» уравнения (21) недопустимо.

К потере корней уравнения может также привести:

а) логарифмирование уравнения;

б) сокращение обеих частей уравнения на общий множитель (об этом уже говорилось в § 3);

в) применение некоторых тригонометрических формул (об этом речь будет в § 5) и некоторые другие.

Подчеркнем еще раз, что применение преобразований, при которых возможна потеря корней уравнения, недопустимо.

Упражнения

Решить уравнение.

1) $x - x^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x} - 2$. 2) $2x - x^3 + \frac{1}{x} + \quad x - \frac{1}{x} \quad + x = 0$.

3) $\sqrt{x^2+3} + \log_2 x = 2 + \log_2 x$.

4) $\sqrt{x^2+3} + \log_2 x = 2 + \frac{1}{2}\log_2 x^2$.

5) $\sqrt{x^2+3} + \log_2 x^2 = 2 + \log_2 x^2$.

6) $x^3 - \frac{4x^2}{x} = 0$. 7) $\frac{2x-14}{x^2-6x-7} = 1$. 8) $\frac{2}{3-x} + \frac{1}{2} = \frac{6}{x(3-x)}$.

9) $\frac{(x-4)(x-3)}{x^2-2x-8} = 0$. 10) $\frac{x(x+4)}{\log_2(1-x^2)} = \frac{x+4}{\log_2(1-x^2)}$.

11) $\frac{(x+3)[\log_2(x+5)-3]}{x^2-5x+6} = 0$. 12) $\overline{x} \cdot \overline{x^3} = 1$.

13) $\sqrt{x-3} \cdot \frac{2x+2}{x-3} = \sqrt{x-3}$. 14) $\overline{x(x-3)} \cdot \frac{2x+2}{x-3} = \overline{x(x-3)}$.

15) $\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-3} = \sqrt{6}$. 16) $(x^2+4x+3) \cdot 3^{\sqrt{x+2}} = 0$.

17) $\sqrt{4-x^2}(x^2-7x) = 8\sqrt{4-x^2}$.

18) $\log_2(x^2-12) = \log_2(3x-8)$.

19) $\log_3 \frac{x+1}{x} = \log_3 \frac{x}{2-x}$. 20) $\log_5(x-1) = \log_5 \frac{x}{1+x}$.

21) $\log_2 \quad \frac{12}{\quad - 3 - x} \quad = \log_2(1-x)$.

22) $\log_2(x+1) + \log_2 x = 1$. 23) $\lg x + \lg(x-3) = 1$.

24) $\log_2(x+3)+\log_2(x-1)=\dfrac{1}{\log_5 2}$.

25) $\log_3(x+4)+\log_3(x-1)=1+\dfrac{1}{\log_2 3}$.

26) $1+\lg(1+x^2-2x)-\lg(1+x^2)=2\lg(1-x)$.

27) $1+\lg(1+x^2+2x)-\lg(6+x^2)=2\lg(1+x)$.

28) $\log_2(x^2+3)+\log_{1/2}5=2\log_{1/4}(x-1)-\log_2(x+1)$.

29) $\log_3(x^2-6)-\log_3(x-2)-1=0$.

30) $\log_3(3^x-8)=2-x$. 31) $\log_7(6+7^{-x})=1+x$.

32) $(\log_2(2^x-7))-3+x=0$.

33) $\log_2((-2x+4)(2-x))-\log_2((2-x)(3-x))=2$.

34) $\log_{1/2}\dfrac{x+2}{x-2}+\log_{1/2}(x-2)+2=0$.

35) $\log_2((2x+3)(2-x))-\log_2(2-x)=3$.

36) $|x-1|=2x+4$. 37) $2^{\log_2(x^2-4x+3)}=x-3$.

38) $\overline{(\log_2 x)+x}=\overline{(\log_2 x)+x^2-2}$.

39) $\log_{1/3}(x^4-17x^2+\log_2 x)=\log_{1/3}((\log_2 x)+19x^2)$.

40) $\log_3\ x^2-\sqrt{x^2-8}+1\ =\log_3\ x^4-\sqrt{x^2-8}-24x+1\ $.

41) $\sqrt{x+11}=x-1$. 42) $2\sqrt{x+5}=x+2$. 43) $\sqrt{2x^2+8x+7}-x=2$.

44) $x+\sqrt{2x^2-7x+5}=1$. 45) $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$.

46) $x^2-x=1-(\sqrt{x})^2$. 47) $(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23)$.

48) $(x+2)\sqrt{16x+33}=(x+2)(8x-15)$.

49) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$. 50) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.

51) $3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=7$. 52) $\sqrt{x+7}\cdot\sqrt{3x-2}=3\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+2}$.

53) $\sqrt{x^6-2x^5+4x+1}=x^3-x^2+1$.

54) $\sqrt{1-4x}+2=\overline{(2x+1)^2-8x}$.

55) $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=0$.

56) $x=\ \sqrt{x+4}+2\quad\sqrt{2x+6}-3\ $.

57) $x=\ \sqrt{1+x}+1\quad\sqrt{1+x}+x^2-x-7\ $.

58) $\sqrt{x^2+3x+4}-\sqrt{x^2+3x+1}=1$.

59) $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\dfrac{1}{x}$.

60) $\sqrt{x^2-1}=(x+7)\ \overline{\dfrac{x+1}{x-1}}$. 61) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

Объяснить, почему второе уравнение не есть следствие первого.

62) $(x+1)^2(x^2+5x+7)=(x+1)^2$ и $x^2+5x+7=1$.

63) $(x-3)\sqrt{x^2-3x+2}=x-3$ и $\sqrt{x^2-3x+2}=1$.

64) $\overline{(x+2)^2}=2$ и $x+2=2$.

65) $\sqrt{2x^2-x-6}=3$ и $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{2x+3}=3$.

66) $\overline{\dfrac{2x-3}{x-2}}=1$ и $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-2}}=1$.

67) $\overline{(x-1)^2(x-3)}=x-1$ и $|x-1|\sqrt{x-3}=x-1$.

68) $x^2-7=6x$ и $x^2-7x=3^{\log_3 6x}$.

69) $\log_3 x^4 = 4$ и $4\log_3 x = 4$.
70) $\log_{1/2}((2x-1)(3x-1)) = 0$ и $\log_{1/2}(2x-1) + \log_{1/2}(3x-1) = 0$.
71) $\log_2 \dfrac{x-4}{x-2} = 1$ и $\log_2(x-4) - \log_2(x-2) = 1$.
72) $\log_2((x-2)(2x)) - \log_2 \dfrac{x-2}{2x} = 4$ и $\log_2 2x = 2$.
73) $(3+x)\sqrt{3-x} = (3-x)\sqrt{3+x}$ и $\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}} = \dfrac{3-x}{3+x}$.
74) $\sqrt{x(x-1)} - \sqrt{x(x-2)} = \sqrt{x(x-3)}$ и $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} = \sqrt{x-3}$.

§ 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Для решения уравнений, содержащих тригонометрические функции, применимы все рассмотренные в § 2 и § 3 равносильные преобразования общего характера. Преобразования, допускающие появление посторонних корней, обычно не используются. Это связано с тем, что множество решений тригонометрического уравнения, как правило, состоит из одной или нескольких бесконечных серий решений и преобразования, для которых получающееся уравнение является следствием предыдущего, могут приводить к появлению бесконечного множества посторонних корней.

5.1. Разложение на множители. Часто используется прием, связанный с разложением на множители левой части уравнения $F(x) = 0$ и заменой его на равносильную совокупность уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$2\sin x\cos x = \sin x - \cos x + \frac{1}{2}.$$

Решение. Перенесем правую часть данного уравнения налево и преобразуем получившееся выражение следующим образом:

$$2\sin x\cos x - \sin x + \cos x - \frac{1}{2} = 2\sin x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) + \\ + \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = (2\sin x + 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right).$$

Отсюда получаем, что исходное уравнение равносильно уравнению

$$(2\sin x + 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

или совокупности уравнений

$$2\sin x + 1 = 0 \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Множество решений первого из уравнений совокупности (1) есть $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. Решения второго уравнения совокупности (1) таковы: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. Обе эти серии решений являются решениями исходного уравнения.

О т в е т. $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z; \quad x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

В случае если среди сомножителей левой части уравнения

$$f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0 \tag{2}$$

есть функции, определенные не на всей числовой прямой, нужно проявлять особую осторожность, так как формальная замена уравнения (2) совокупностью уравнений

$$f_1(x) = 0, \quad \ldots, \quad f_n(x) = 0$$

может привести к появлению посторонних корней.

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$\cos 3x \cdot \operatorname{tg} x = 0. \tag{3}$$

Р е ш е н и е. Обозначим область допустимых значений этого уравнения буквой M. Множество M состоит из всех чисел $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. Уравнение (3) равносильно на M совокупности двух уравнений:

$$\cos 3x = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = 0. \tag{4}$$

Множество решений первого уравнения совокупности (4) есть серия $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. Из этих чисел множеству M принадлежат только $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

Решения второго уравнения совокупности (4) есть $x = \pi m$, $m \in Z$, и все они содержатся в множестве M.

О т в е т. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z; \quad x = \pi m,\ m \in Z.$

Заметим, что первое из уравнений совокупности (4) имеет серию решений $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, не удовлетворяющих исходному уравнению.

5.2. Замена переменных. Уравнение $P(\sin x) = 0$, где $P(y)$ — многочлен, и аналогичные ему решаются заменой переменной так же, как в п. 2.4.

П р и м е р 3. Решить уравнение

$$2\sqrt{2}\sin^2 x - \left(4 + \sqrt{2}\right)\sin x + 2 = 0. \tag{5}$$

Р е ш е н и е. Так как квадратное уравнение

$$2\sqrt{2}y^2 - \left(4 + \sqrt{2}\right)y + 2 = 0$$

имеет корни $y_1 = \sqrt{2}$ и $y_2 = 1/2$, то уравнение (5) равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = \sqrt{2} \quad \text{и} \quad \sin x = 1/2.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$ для любого действительного α. Решениями второго уравнения являются

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$$

О т в е т. $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, \ \ n \in Z.$

5.3. Уравнения вида $P(\sin x, \cos x) = 0$. Встречаются уравнения вида

$$P(\sin x, \cos x) = 0, \tag{6}$$

где $P(y, z)$ — многочлен от двух переменных y и z.

а) *Уравнения, в которые* $\sin x$ *входит только в четных степенях.* Если в уравнение (6) $\sin x$ входит только в четных степенях, то, заменив $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$, можно получить уравнение вида

$$Q(\cos x) = 0, \tag{7}$$

где $Q(t)$ — многочлен от одной переменной. Уравнение (7) решается так, как это указано в п. 5.2.

Аналогично следует поступать и в случае, когда уравнение (6) содержит $\cos x$ только в четных степенях.

П р и м е р 4. Решить уравнение

$$\cos^2 x + \sin x - 1/4 = 0.$$

Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулой $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, исходное уравнение можно переписать в виде

$$\sin^2 x - \sin x - 3/4 = 0. \tag{8}$$

Поскольку квадратное уравнение

$$y^2 - y - 3/4 = 0$$

имеет корни $y_1 = 3/2$ и $y_2 = -1/2$, то уравнение (8) равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = 3/2 \quad \text{и} \quad \sin x = -1/2.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$ для любого действительного α. Решениями второго уравнения, а значит, и исходного являются $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

О т в е т. $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

Отметим, что если в уравнении (6) имеются и $\sin x$ и $\cos x$ в нечетных степенях, то указанный прием неприменим.

б) *Уравнения, в которых $P(y, z)$ — однородный многочлен.* Уравнение

$$a\cos x + b\sin x = 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \tag{9}$$

не имеет решений вида $\pi/2 + \pi n$, $n \in Z$. Все его решения содержатся в множестве M, состоящем из чисел $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$. Функция $\cos x$

определена и отлична от нуля на этом множестве, поэтому (см. § 1), разделив уравнение (9) на $\cos x$, получим уравнение

$$b\operatorname{tg} x + a = 0, \tag{10}$$

равносильное на M, а следовательно, и на всей числовой прямой уравнению (9). Решая простейшее уравнение (10), находим множество решений уравнения (9).

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{5}\sin x = \cos x.$$

Решение. Поскольку исходное уравнение не имеет решений вида $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$, то $\cos x \neq 0$ на множестве M, состоящем из чисел $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$. Разделив исходное уравнение на $\sqrt{5}\cos x$, получим уравнение

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

равносильное исходному на множестве M, а значит, и на всей числовой прямой. Решения этого уравнения, а значит, и исходного есть $x = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ. $x = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \pi n, n \in Z.$

Рассмотрим уравнение (6), где $P(y, z)$ — однородный многочлен от переменных y и z, т.е. имеет вид

$$P(y, z) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} z + \ldots + a_{n-1} y z^{n-1} + a_n z^n. \tag{11}$$

В этом случае при $a_0 \neq 0$ уравнению (6) не удовлетворяют числа $x_0 = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$, поскольку $P(\sin x_0, \cos x_0) = a_0 \sin^n x_0 = (-1)^n a_0 \neq 0$, и, значит, все его решения содержатся в множестве M, состоящем из чисел $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$. Разделив уравнение (6) на $\cos^n x$, как и в п. 5.3 Б), заключаем, что уравнение (6) в рассматриваемом случае равносильно уравнению

$$P(\operatorname{tg} x, 1) = 0.$$

Последнее уравнение решается приемом, изложенным в п. 5.2.

Пример 6. Решить уравнение

$$5\sin^4 x - \cos^4 x = 4\sin^2 x\cos^2 x.$$

Решение. Для решений этого уравнения выполняется условие $\cos x \neq 0$, поэтому, разделив уравнение на $\cos^4 x$, получим уравнение

$$5\operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0, \tag{12}$$

равносильное исходному уравнению. Поскольку квадратное уравнение $5z^2 - 4z - 1 = 0$ имеет два корня $z_1 = 1$ и $z_2 = -1/5$, то уравнение (12), а следовательно, и исходное равносильны совокупности уравнений

$$\operatorname{tg}^2 x = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}^2 x = -1/5.$$

Второе уравнение этой совокупности решений не имеет. Решениями уравнения $\operatorname{tg}^2 x = 1$, а значит, и исходного уравнения являются $x = \pm\pi/4 + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ. $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

в) *Уравнения вида* $P(\sin x, \cos x) = D$, *в которых* $P(y, z)$ — *однородный многочлен.* К рассматриваемым в п. б) уравнениям легко свести уравнение вида

$$A\sin^2 x + B\sin x\cos x + C\cos^2 x = D, \quad D \neq 0,$$

если воспользоваться тождеством $D = D(\sin^2 x + \cos^2 x)$. Получившееся в результате уравнение

$$A\sin^2 x + B\sin x\cos x + C\cos^2 x = D(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

может быть решено с помощью указанных выше рассуждений. Так можно действовать и в общем случае $P(\sin x, \cos x) = D$, если многочлен (11) имеет четную степень: $n = 2k$. Достаточно заменить D на выражение $D(\sin^2 x + \cos^2 x)^k$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \quad \sqrt{3} - 1 \quad \cos^2 x + 1.$$

Решение. Данное уравнение перепишем в виде

$$1+\sqrt{3} \quad \sin x\cos x = \quad \sqrt{3} - 1 \quad \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x.$$

Решения этого уравнения удовлетворяют условию $\cos x \neq 0$, поэтому, разделив обе его части на $\cos^2 x$, получим уравнение

$$1+\sqrt{3} \quad \operatorname{tg} x = \sqrt{3} + \operatorname{tg}^2 x$$

или уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x - \quad 1+\sqrt{3} \quad \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0,$$

равносильное исходному. Квадратное уравнение $z^2 - \quad \sqrt{3}+1 \quad z + \sqrt{3} = 0$ имеет корни $z_1 = 1$ и $z_2 = \sqrt{3}$. Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$

Решая эти простейшие уравнения, получаем ответ задачи: $x = \pi/4 + \pi n$, $n \in Z$; $x = \pi/3 + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ. $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in Z; \quad x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k, \ k \in Z.$

5.4. Уравнения вида

$$\boldsymbol{a}\sin \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\cos \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}. \tag{13}$$

Случай $c = 0$ уже разобран в п. 5.3. Приводимый ниже способ решения уравнения (13) годится для всех значений c, в том числе и для $c = 0$.

Уравнение (13) равносильно уравнению

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{14}$$

Выберем угол φ, $0 < \varphi < 2\pi$, так, чтобы

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ и } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ясно, что такой угол всегда можно выбрать, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Тогда уравнение (14) может быть переписано в виде

$$\sin x \cdot \cos\varphi + \cos x \cdot \sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

или в виде

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{15}$$

Мы воспользовались здесь формулой для синуса суммы двух углов. Если $|c| > \sqrt{a^2+b^2}$, то уравнение (15), а значит, и уравнение (13) решений не имеют. В случае $|c| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$, решая простейшее уравнение (15), находим множество решений уравнения (13):

$$x = -\varphi + (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Пример 8. Решить уравнение

$$\cos 3x = 1 - \sqrt{3}\sin 3x.$$

Решение. Данное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x = \frac{1}{2}$$

или, поскольку $\sin\pi/6 = 1/2$, $\cos\pi/6 = \sqrt{3}/2$, в виде

$$\sin\frac{\pi}{6}\cos 3x + \cos\frac{\pi}{6}\sin 3x = \frac{1}{2}.$$

Пользуясь формулой для синуса суммы двух углов, получаем уравнение

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

равносильное исходному. Отсюда $3x + \pi/6 = \pi/6 + 2\pi n$, $n \in Z$, или $3x + {} + \pi/6 = 5\pi/6 + 2\pi k$, $k \in Z$. Следовательно, получаем две серии решений:

$$x = \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z; \quad x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in Z.$$

Ответ. $x = \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$; $\quad x = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Пример 9. Решить уравнение

$$3\sin x + 5\cos x = 4.$$

Решение. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$, имеем уравнение

$$\frac{3}{\sqrt{34}}\sin x + \frac{5}{\sqrt{34}}\cos x = \frac{4}{\sqrt{34}}, \tag{16}$$

равносильное исходному.

Положим $\varphi = \arcsin 5/\sqrt{34}$, тогда $\sin\varphi = 5/\sqrt{34}$ и $\cos\varphi = 3/\sqrt{34}$. Уравнение (16) можно переписать в виде

$$\sin(x+\varphi) = \frac{4}{\sqrt{34}}.$$

Решая это уравнение, находим, что

$$x+\varphi = (-1)^n \arcsin\frac{4}{\sqrt{34}} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Следовательно, решениями исходного уравнения являются

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{4}{\sqrt{34}} - \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Ответ. $x = (-1)^n \arcsin\dfrac{4}{\sqrt{34}} - \arcsin\dfrac{5}{\sqrt{34}} + \pi n,\ n \in Z.$

5.5. Равносильные преобразования уравнений с применением тригонометрических формул. Если в уравнение входят тригонометрические функции от различных аргументов или долей аргумента x, например $\cos 2x$, $\sin x$, $\sin\dfrac{x}{4}$ и т.д., то обычно с помощью тригонометрических тождеств все функции, входящие в уравнение, приводятся к одному и тому же аргументу. Затем используются приемы, изложенные в пп. 5.1 – 5.4. Перечислим некоторые из часто встречающихся тождеств:

а) *формулы двойного и половинного аргументов*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$

б) *формулы для синуса и косинуса суммы и разности углов*

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

в) *формулы для суммы или разности синусов и косинусов углов*

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2};$$

г) *формулы приведения*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha.$$

С помощью этих формул получаются и другие формулы приведения. Например,

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

Рассмотрим несколько задач, в решении которых используются указанные тождества.

Пример 10. Решить уравнение

$$4\cos^3 x+3\sqrt{2}\sin 2x=8\cos x.$$

Решение. Используя формулу синуса двойного угла, исходное уравнение можно переписать в виде

$$4\cos^3 x+6\sqrt{2}\sin x\cos x-8\cos x=0$$

или в виде

$$\cos x\left(2\cos^2 x+3\sqrt{2}\sin x-4\right)=0. \tag{17}$$

Поскольку $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, то уравнение (17) можно переписать в виде

$$\cos x\left(2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+2\right)=0.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\cos x=0 \quad \text{и} \quad 2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+2=0. \tag{18}$$

Первое из уравнений совокупности (18) имеет решения $x=\pi/2+\pi n, n\in Z$. Так как квадратное уравнение $2t^2-3\sqrt{2}t+2=0$ имеет корни $t_1=\sqrt{2}$ и $t_2=\sqrt{2}/2$, то второе уравнение совокупности (18) равносильно совокупности уравнений

$$\sin x=\sqrt{2} \quad \text{и} \quad \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, поскольку $|\sin\alpha|\leqslant 1$ для любого действительного числа α. Решениями второго уравнения являются $x=(-1)^m\dfrac{\pi}{4}+\pi m, m\in Z$.

Итак, решениями исходного уравнения являются $x=\pi/2+\pi n,\ n\in Z$, и $x=(-1)^m\dfrac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in Z$.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\quad x=(-1)^m\dfrac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in Z.$

Пример 11. Решить уравнение

$$\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{2}.$$

Решение. Используя формулу для косинуса двойного угла $\cos 2\,(x+\pi/3)=1-2\sin^2(x+\pi/3)$, исходное уравнение перепишем в

виде
$$2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{2}=0. \tag{19}$$
Так как квадратное уравнение $2y^2-4y+3/2=0$ имеет корни $y_1=3/2$ и $y_2=1/2$, то уравнение (19) равносильно совокупности уравнений
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}.$$
Первое уравнение совокупности решений не имеет, так как $|\sin\alpha|\leqslant 1$ для любого действительного числа α. Решениями второго уравнения совокупности являются $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$. Значит, эти и только эти x являются решениями исходного уравнения.

Ответ. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$

Пример 12. Решить уравнение
$$\cos\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)=\sin(4x+3\pi).$$

Решение. Так как $\cos(2x-7\pi/2)=-\sin 2x$ и $\sin(4x+3\pi)=-\sin 4x$, то исходное уравнение можно переписать в виде
$$\sin 2x=\sin 4x.$$
Поскольку $\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x$, то последнее уравнение равносильно совокупности уравнений
$$\sin 2x=0 \quad \text{и} \quad \cos 2x=1/2. \tag{20}$$
Первое из уравнений совокупности (20) имеет решения $x=\pi k/2,\ k\in Z$. Второе уравнение имеет решения $x=\pm\pi/6+\pi m,\ m\in Z$. Множество решений исходного уравнения является объединением множеств решений уравнений совокупности (20), т.е. исходное уравнение имеет решения $x=\pi k/2$, $k\in Z$; $x=\pm\pi/6+\pi m, m\in Z$.

Ответ. $x=\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;\quad x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi m,\ \ m\in Z.$

Пример 13. Решить уравнение
$$-5\cos 4x=2\cos^2 x+1.$$

Решение. Используя формулы $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ и $\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha-1$, перепишем исходное уравнение в виде
$$10\cos^2 2x+\cos 2x-3=0.$$
Квадратное уравнение $10y^2+y-3=0$ имеет корни $y_1=1/2$ и $y_2=-3/5$. Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности уравнений
$$\cos 2x=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \cos 2x=-\frac{3}{5}.$$

Первое уравнение совокупности имеет две серии решений: $x = \pi/6 + \pi p$, $p \in Z$; $x = -\pi/6 + \pi q$, $q \in Z$; второе — также две серии: $x = (1/2)\arccos(-3/5) + \pi m$, $m \in Z$; $x = -(1/2)\arccos(-3/5) + \pi l$, $l \in Z$. Объединение найденных серий и составит множество решений исходного уравнения.

Ответ. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z;\quad x = \pm\frac{1}{2}\arccos\ -\frac{3}{5}\ + \pi n,\ n \in Z.$

Пример 14. Решить уравнение

$$\sin(x - 60^\circ) + 2\cos(x + 30^\circ) = 0.$$

Решение. Так как

$$\cos(x + 30^\circ) = \sin(90^\circ - (x + 30^\circ)) = \sin(60^\circ - x) = -\sin(x - 60^\circ),$$

то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin(x - 60^\circ) = 0,$$

решениями которого являются $x = 60^\circ + 180^\circ \cdot n,\ n \in Z$.

Ответ. $x = 60^\circ + 180^\circ \cdot n,\ n \in Z$.

Пример 15. Решить уравнение

$$\sin\ \frac{\pi}{3} - x\ + \cos\ \frac{\pi}{6} - x\ = \sqrt{3}.$$

Решение. Так как

$$\sin\ \frac{\pi}{3} - x\ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x,$$

$$\cos\ \frac{\pi}{6} - x\ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x,$$

то исходное уравнение можно переписать в виде

$$\cos x = 1.$$

Это уравнение, а следовательно, и исходное уравнение имеет решения $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ. $x = 2\pi k,\ k \in Z$.

Пример 16. Решить уравнение

$$\sin 2x + \sin 6x = 3\cos^2 2x.$$

Решение. Применив формулу сложения синусов, исходное уравнение запишем так:

$$2\sin 4x\cos 2x = 3\cos^2 2x$$

или, поскольку $\sin 4x = 2\cos 2x\sin 2x$, так:

$$\cos^2 2x \cdot (3 - 4\sin 2x) = 0,$$

откуда получаем, что исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\sin 2x = \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad \cos^2 2x = 0.$$

Решениями первого уравнения совокупности являются $x = (-1)^m \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4} + \frac{\pi m}{2},\ m \in Z$; решениями второго уравнения являются $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$. Их объединение и дает множество решений исходного уравнения.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\quad k \in Z;\quad x = \frac{(-1)^m}{2}\arcsin\frac{3}{4} + \frac{\pi m}{2},\quad m \in Z.$

Пример 17. Решить уравнение

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x).$$

Решение. Применяя формулу суммы косинусов, перепишем данное уравнение в виде

$$2\cos 2x \cos\frac{\pi}{4} + 4\sin x = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}\sin x.$$

Применяя формулу косинуса двойного угла, перепишем это уравнение в виде

$$2\sqrt{2}\sin^2 x - (4 + \sqrt{2})\sin x + 2 = 0. \tag{21}$$

Так как квадратное уравнение

$$2\sqrt{2}t^2 - (4 + \sqrt{2})\,t + 2 = 0$$

имеет корни $t_1 = \sqrt{2}$ и $t_2 = 1/2$, то уравнение (21) равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = \sqrt{2} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$ для любого действительного числа α. Решениями второго уравнения являются $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

Ответ. $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

Пример 18. Решить уравнение

$$\sin 5x - 1 = 2\sin x\cos 4x.$$

Решение. Применяя формулу $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$, перепишем уравнение в виде

$$\sin 5x - 1 = \sin 5x + \sin(-3x)$$

или в виде

$$\sin 3x = 1.$$

Решениями этого уравнения, а значит, и исходного являются $x = \pi/6 + 2\pi n/3$, $n \in Z$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z.$

Сделаем общее замечание, касающееся решения тригонометрических уравнений.

Некоторые тригонометрические уравнения можно решить различными методами и не всегда при различных способах решения форма записи ответа будет одинаковой. Особенно часто это происходит, если в записи ответа участвуют $\arcsin\alpha$, $\arccos\beta$, $\operatorname{arctg}\gamma$ или $\operatorname{arcctg}\varphi$. Между обратными тригонометрическими функциями существуют определенные соотношения, поэтому разные формы записи ответа могут быть приведены друг к другу. Так, например, если решать уравнение из примера 5 с помощью метода, описанного в п. 5.3б), вводя угол φ так, что

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{6}},$$

то получится ответ $x = \arccos\sqrt{\frac{5}{6}} + \pi n$, $n \in Z$, внешне отличающийся от ответа, полученного в примере 5: $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n, n \in Z$. Можно доказать, что $\arccos\sqrt{\frac{5}{6}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$.

5.6. Преобразования уравнений с применением тригонометрических формул, справедливых на некотором множестве. Иногда при решении тригонометрических уравнений приходится использовать формулы, справедливые лишь на некотором множестве M действительных чисел, а не для всех значений x. К таким формулам относятся, например, формулы:

а) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \quad x \neq \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z\ ;$

б) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad x \neq \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z\ ;$

в) $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\ ;$

г) $\cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\ ;$

д) $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \quad \begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2},\ m \in Z \end{array}\ ;$

е) $\operatorname{tg}(x+\alpha) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\alpha} \quad \begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z \\ x + \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in Z \end{array}\ ;$

$$\text{ж)}\ \operatorname{tg}(x-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\alpha}\qquad \begin{pmatrix} x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z\\ x-\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in Z\end{pmatrix};$$

$$\text{з)}\ \operatorname{ctg}(x+\alpha)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}\alpha-1}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}\alpha}\qquad \begin{pmatrix} x\neq\pi k,\ k\in Z\\ \alpha\neq\pi n,\ n\in Z\\ x+\alpha\neq\pi m,\ m\in Z\end{pmatrix};$$

$$\text{и)}\ \operatorname{ctg}(x-\alpha)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}\alpha+1}{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}\alpha}\qquad \begin{pmatrix} x\neq\pi k,\ k\in Z\\ \alpha\neq\pi n,\ n\in Z\\ x-\alpha\neq\pi l,\ l\in Z\end{pmatrix}.$$

В скобках указаны те значения x и α, при которых эти формулы справедливы.

Применяя каждую из этих формул на том множестве M_1 из ОДЗ решаемого уравнения, на котором эти формулы являются тождествами, получим уравнение, равносильное исходному на множестве M_1. Решив полученное уравнение и отобрав его корни, которые принадлежат множеству M_1, найдем все корни исходного уравнения на этом множестве M_1. Затем надо еще найти решение уравнения на той части ОДЗ — множестве M_2, — которая остается после выделения из ОДЗ множества M_1. Как правило, на этом множестве M_2 факт наличия корней или установления, что их нет, проверяется подстановкой значений x из M_2 в уравнение.

Пример 19. Решить уравнение

$$\sin x-\operatorname{ctg}x/2=0.$$

Решение. ОДЗ данного уравнения есть множество всех действительных чисел, кроме чисел $x=2\pi n$, $n\in Z$. При решении будем заменять синус и котангенс через тангенс половинного угла, поэтому надо выделить множество, на котором справедливы используемые формулы.

Разобьем ОДЗ исходного уравнения на два множества: M_1 — множество всех x из ОДЗ, где справедливы формулы

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}x/2}{1+\operatorname{tg}^2 x}\quad\text{и}\quad \operatorname{ctg}x/2=\frac{1}{\operatorname{tg}x/2}$$

и M_2 — оставшаяся часть ОДЗ. Тогда M_1 есть множество всех действительных чисел, кроме чисел $x=2\pi n$, $n\in Z$, и $x=\pi+2\pi m$, $m\in Z$, и M_2 — множество чисел $x=\pi+2\pi m$, $m\in Z$. На множестве M_1 исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{2\operatorname{tg}x/2}{1+\operatorname{tg}^2 x/2}-\frac{1}{\operatorname{tg}x/2}=0,$$

т.е. уравнению

$$\operatorname{tg}^2 x/2=1.$$

Множество всех решений этого уравнения есть серия $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$. Вся эта серия принадлежит множеству M_1, т.е. является решением исходного уравнения на множестве M_1.

Решим уравнение на множестве M_2. Подставляя числа $x = \pi + 2\pi m$, $m \in Z$, в исходное уравнение, получаем, что любое $x = \pi + 2\pi m$, $m \in Z$, также является его решением. Следовательно, множеством всех решений исходного уравнения на множестве M_2 является серия $x = \pi + 2\pi m$, $m \in Z$.

Объединяя решения, найденные на множествах M_1 и M_2, получим, что решением исходного уравнения являются две серии:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z; \quad x = \pi + 2\pi m,\ m \in Z.$$

Ответ. $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z; \quad x = \pi + 2\pi m,\ m \in Z.$

Пример 20. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 2x + \sin 2x = \frac{16}{15} \operatorname{ctg} x.$$

Решение. ОДЗ исходного уравнения состоит из всех x таких, что $x \neq \pi/4 + \pi m/2$, $m \in Z$, и $x \neq \pi n$, $n \in Z$. Воспользуемся формулами

$$\begin{gathered} \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi q}{2},\ q \in Z,\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi p,\ p \in Z \right), \\ \sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi p,\ p \in Z \right), \\ \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} l,\ l \in Z \right). \end{gathered} \tag{22}$$

Разобьем ОДЗ исходного уравнения на два множества: M_1 — множество всех x из ОДЗ, на которых справедливы формулы (22), и M_2 — множество всех x из ОДЗ без множества M_1.

Легко видеть, что множество M_1 состоит из всех x таких, что $x \neq \pi/4 + \pi m/2$, $m \in Z$ и $x \neq \pi l/2$, $l \in Z$. Множество M_2 состоит из $x = \pi/2 + \pi p$, $p \in Z$.

На множестве M_1 исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{16}{15} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

или уравнению

$$4 \operatorname{tg}^4 x - 15 \operatorname{tg}^2 x - 4 = 0.$$

Поскольку биквадратное уравнение

$$4y^4 - 15y^2 - 4 = 0$$

имеет два корня: $y_1 = 2$ и $y_2 = -2$, то на множестве M_1 исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\operatorname{tg} x = 2 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = -2,$$

имеющей две серии решений:

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z; \quad x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi s,\ s \in Z.$$

Так как обе эти серии входят в множество M_1, то они обе являются решениями исходного уравнения.

Решим исходное уравнение на множестве M_2. Для этого надо проверить, какие из чисел $x = \pi/2 + \pi p, p \in Z$, являются его решениями. Подставляя эти числа в исходное уравнение, убеждаемся, что они ему удовлетворяют. Следовательно, все эти числа являются решениями исходного уравнения.

Объединяя решения на множествах M_1 и M_2, находим решения исходного уравнения.

Ответ. $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z; \quad x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi s,\ s \in Z;$ $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi p,\ p \in Z.$

Заметим, что если при решении уравнения формально применить любую из формул а) – з) так, что левая часть этой формулы будет заменена правой частью, то возможна потеря корней исходного уравнения. Поэтому такие замены недопустимы.

Если при решении уравнения формально применить любую из формул а) – з) так, что правая часть этой формулы будет заменена левой, то возможно приобретение посторонних корней. Поэтому после такой замены необходима проверка найденных корней.

Упражнения

Решить уравнение.

1) $\sin \quad 2x + \dfrac{\pi}{4} \quad = \dfrac{1}{2}.$ 2) $\cos \quad \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{5x}{2} \quad = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ 3) $\sin^2 x = \dfrac{3}{4}.$

4) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}.$ 5) $\sin^4 x = \dfrac{1}{4}.$ 6) $\operatorname{tg}^2 x = 1.$ 7) $\operatorname{tg}^3 x = \dfrac{1}{3}.$

8) $\operatorname{ctg}^2 x = 3.$ 9) $\sin 2x \cos 3x = 0.$ 10) $4 \sin x \cos x = \sqrt{3}.$

11) $\sin 2x \cos 2x \cos 4x = \dfrac{1}{8}.$ 12) $\cos x + \sin x = 1.$

13) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$ 14) $\sin 2x - \cos 2x = 0.$

15) $\cos^2 3x - \sin^2 3x = 1.$ 16) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1.$

17) $3 \sin^2 x - \cos^2 x - 1 = 0.$ 18) $2 \sin^2 x - 3 = -6 \cos^2 x.$

19) $2 \cos^2 3x - \cos 3x = 0.$ 20) $\sqrt{2} \sin^2 5x - \sin 5x = 0.$

21) $\sin 2x = \sqrt{3} \sin x.$ 22) $2 \sin x + 3 \sin 2x = 0.$

23) $3 \cos x + 2 \sin 2x = 0.$ 24) $\sin \dfrac{x}{4} + \cos \dfrac{x}{2} = 1.$

25) $\cos \dfrac{x}{3} = 2 \cos \dfrac{x}{6} - 1.$ 26) $1 - 2 \sin \dfrac{x}{6} = \cos \dfrac{x}{3}.$

27) $\cos 7x + \cos 9x = 0.$ 28) $\sin 3x - \sin 11x = 0.$

29) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$. 30) $\cos x + \cos 7x = \cos 3x$.

31) $\cos 3x - \cos 5x = \sin x$. 32) $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$.

33) $\sin\frac{x}{2} - \sqrt{2}\sin\frac{3x}{2} + \sin\frac{5x}{2} = 0$.

34) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

35) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

36) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

37) $5\sin x + 6\sin 2x + 5\sin 3x + \sin 4x = 0$.

38) $\sin 8x - 1 = 2\sin x\cos 7x$. 39) $1 + \sin 4x = 2\sin x\cos 3x$.

40) $2\sin x\sin 3x = \cos 2x$. 41) $\cos(50^\circ - x)\cos(40^\circ + x) = \frac{1}{4}$.

42) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2}$.

43) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}$.

44) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2}$.

45) $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}$. 46) $\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = \sqrt{2}$.

47) $\sqrt{2}\sin 5x = 2 - \sqrt{5}\cos 5x$. 48) $\sin 4x + \cos 4x = \sqrt{2}$.

49) $7\cos 6x - 8\sin 6x = 10$.

50) $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 3\sin(\pi - x) + \sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1$.

51) $\sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) + 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(3x + \pi)$.

52) $\sin\left(3x - \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

53) $\sin\left(2x - \frac{7\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 8x\right) + \cos 6x = 1$.

54) $2\cos x + 3\cos 2x = 3$. 55) $\sin x + \cos 2x + 1 = 0$.

56) $2\cos x + 4\cos\frac{x}{2} + 1 = 0$. 57) $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$.

58) $\cos 4x - 3\sin 2x + 1 = 0$. 59) $17\sin\frac{3x}{2} - \sqrt{17}\cos 3x = 0$.

60) $\cos\frac{x}{4} - \sqrt{8}\cos\frac{x}{8} = 0$. 61) $\cos^2 2x - 5\cos^2 x = -1$.

62) $\cos\left(2x - \frac{7\pi}{2}\right) = \sin(4x + 3\pi)$. 63) $\sin\left(3x - \frac{5\pi}{2}\right) = \sin(6x - 3\pi)$.

64) $\sqrt{3}\cos \quad 2x+\dfrac{9\pi}{2} \quad = \sin(4x-5\pi)$.

65) $\sqrt{3}(1+2\cos x)+\cos \quad 2x+\dfrac{\pi}{6} \quad +\cos \quad 2x-\dfrac{\pi}{6} \quad = 6(1+\cos x)$.

66) $\sqrt{2}(\sin x-1) = 4(\sin x-1)-\cos \quad 2x+\dfrac{\pi}{4} \quad -\sin \quad 2x+\dfrac{\pi}{4} \quad .$

67) $2\sin \quad x+\dfrac{\pi}{3} \quad +2\cos \quad \dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4} \quad = 3\sin \quad \dfrac{x}{4}+\dfrac{\pi}{8} \quad +\sqrt{3}\cos \quad \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{x}{4} \quad .$

68) $\sqrt{2}\sin \quad \dfrac{2x}{3}-\dfrac{\pi}{3} \quad -\sqrt{6}\sin \quad \dfrac{2x}{3}+\dfrac{\pi}{6} \quad =$

$$= 2\sin \quad \frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6} \quad -2\cos \quad \frac{x}{6}+\frac{2\pi}{3} \quad .$$

69) $\sin 2x+\sin 6x = 3\cos^2 2x$. 70) $\sin x+\sin 3x+4\cos^3 x = 0$.

71) $\sin^2 2x+\cos^2 x = 1$. 72) $\cos 2x-\sin 2x = 1-\cos x-\sin x$.

73) $\cos 2x = 1-2\sin x+\sqrt{3}\sin 2x$.

74) $\sin 2x+\cos 2x = 1+\sqrt{6}\sin x$.

75) $2-\cos 2x+2\sqrt{2}\cos \quad x+\dfrac{\pi}{2} \quad = 0$.

76) $5+2\cos 2x-4\sqrt{3}\sin \quad x+\dfrac{\pi}{2} \quad = 0$.

77) $\sin^2 2x-\cos^2 x+\dfrac{3}{4} = 0$.

78) $2\cos x\cos 2x- \quad 1-2\sqrt{2} \quad \sin 2x = 2 \quad 1-\sqrt{2} \quad \cos x$.

79) $3\sqrt{3}\sin 2x = 10\sin x-4\sin^3 x$.

80) $2\cos 2x+\cos^2 \dfrac{x}{2}-10\cos \quad \dfrac{5\pi}{2}-x \quad +\dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2}\cos x$.

81) $\sin^2 \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x+2 = 4\sin \quad x-\dfrac{7\pi}{2} \quad .$

82) $\cos^2 x-6\cos^2 \quad \dfrac{x}{2} \quad +\dfrac{1}{2}\cos 2x = \dfrac{1}{2}+4\sin \quad \dfrac{9\pi}{2}-x \quad .$

83) $\sin^2 x+\cos^2 3x = 1$.

84) $\sin^2(2+3x)+\cos^2 \quad \dfrac{\pi}{4}+2x \quad = \cos^2(2-5x)+\sin^2 \quad \dfrac{\pi}{4}-6x \quad .$

85) $\sqrt{2}\cos \quad \dfrac{x}{5}-\dfrac{\pi}{12} \quad -\sqrt{6}\sin \quad \dfrac{x}{5}-\dfrac{\pi}{12} \quad =$

$$= 2\sin \quad \frac{x}{5}+\frac{2\pi}{3} \quad -2\sin \quad \frac{3x}{5}+\frac{\pi}{6} \quad .$$

86) $\sin^2(1{,}5x)+\sin^2 \quad \dfrac{\pi}{4}-2{,}5x \quad = \sin^2 5{,}5x+\sin^2 \quad \dfrac{\pi}{4}-6{,}5x \quad .$

87) $\cos 3x+\sin 7x = 2\sin^2 \quad \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{5x}{2} \quad -2\cos^2 \quad \dfrac{9x}{2} \quad .$

88) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+3x\right) = 1+\sin 4x + 2\sin 5x\cos^2 x$.

89) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+5x\right) = \sin^2 x\cos 9x + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)$.

90) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+7x\right) = \sin^2(12x-3)\cos(2x-3)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+3{,}5x\right)$.

91) $\cos 4x = \sin^2 x - \frac{3}{4}$. 92) $-5\cos 4x = 2\cos^2 x + 1$.

93) $2\sin^2 2x + \sin^2 4x = \frac{5}{4}$. 94) $8\cos^4 x = 11\cos 2x - 1$.

95) $4\sin^4 x + 7\cos 2x = 1$. 96) $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{15}{8}\cos 2x - \frac{1}{2}$.

97) $\cos^8 x - \sin^8 x = \cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x$. 98) $\sin x \operatorname{ctg} x = 0$.

99) $\sin x \operatorname{tg} x \cos x \operatorname{ctg} x = 0$. 100) $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = 0$. 101) $\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = 0$.

102) $\cos x(\operatorname{tg} x + 1) = 0$. 103) $\cos 2x \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

104) $\sin 3x \operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 0$. 105) $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + 3\cos 2x = -4$.

106) $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$. 107) $3\sin x\cos x + \cos^2 x = 2$.

108) $\sqrt{2}\sin x + \operatorname{ctg} x = 0$. 109) $\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg} x = 0$.

110) $3\operatorname{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$. 111) $\operatorname{ctg}^2 x - 8\sin^2 x = 1$.

112) $\operatorname{tg} 2x + \sin 2x = \frac{8}{3}\operatorname{ctg} x$. 113) $\cos 2x = 2\operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x$.

114) $\frac{\cos x}{1-\sin x} = 1+\sin x$. 115) $\frac{1+2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x\cos x - 1} = 1$.

116) $\frac{\sin 4x}{\cos 6x} = 1$. 117) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x$. 118) $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} 5x$.

119) $(1-\operatorname{tg} x)(1+\sin 2x) = 1+\operatorname{tg} x$.

120) $$\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\left(\sin 4x\cos 5x - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{5}{2}x\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{x}{2} - \sin 5x\cos 4x\right).$$

§ 6. УРАВНЕНИЯ, ПРЕДЛАГАВШИЕСЯ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В ВУЗЫ

6.1. Решение уравнений с применением различных приемов. При решении многих уравнений, предлагаемых на вступительных экзаменах в вузы, приходится применять комбинации различных приемов, описанных выше.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x}\quad 9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}}\quad = 3^{2\sqrt{x^2-3}+1} - 3^{\sqrt{x^2-3}+1} + 6\sqrt{x} - 18. \tag{1}$$

Решение. ОДЗ уравнения (1) состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x^2 - 3 \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, т.е. ОДЗ есть промежуток $\sqrt{3} \leqslant x < +\infty$. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{x} - 3 \quad 9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}} - 6 \quad = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) равносильно на ОДЗ исходного уравнения совокупности уравнений

$$\sqrt{x} - 3 = 0 \quad \text{и} \quad 9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}} - 6 = 0. \tag{3}$$

Решение первого уравнения совокупности (3) есть $x_1 = 9$. Это число входит в ОДЗ исходного уравнения и, следовательно, является единственным решением первого уравнения совокупности (3) на множестве $\sqrt{3} \leqslant x < +\infty$.

Для решения второго уравнения обозначим $3^{\sqrt{x^2-3}}$ через y, тогда второе уравнение совокупности (3) запишется в виде

$$y^2 - y - 6 = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) имеет два корня $y_1 = -2$ и $y_2 = 3$. Это означает, что второе уравнение совокупности (3) равносильно на ОДЗ исходного уравнения совокупности уравнений

$$3^{\sqrt{x^2-3}} = -2 \quad \text{и} \quad 3^{\sqrt{x^2-3}} = 3 \tag{5}$$

Первое уравнение совокупности (5) решений не имеет. Второе уравнение равносильно на множестве $\sqrt{3} \leqslant x < \infty$ уравнению $\quad \overline{x^2 - 3} = 1$ или уравнению $x^2 = 4$. Последнее уравнение имеет два корня: $x_2 = 2$ и $x_3 = -2$. Из этих чисел только $x_2 = 2$ входит в множество $\sqrt{3} \leqslant x < \infty$ и поэтому является единственным решением второго уравнения совокупности (5) на ОДЗ исходного уравнения. Объединяя решения на множестве $\sqrt{3} \leqslant x < \infty$ первого и второго уравнений совокупности (3), получим, что множество решений исходного уравнения состоит из двух чисел: $x_1 = 9$ и $x_2 = 2$.

Ответ. $x_1 = 9$, $x_2 = 2$.

Пример 2. Решить уравнение

$$3^{1/2+\log_3 \cos x} + 6^{1/2} = 9^{1/2+\log_9 \sin x}.$$

Решение. ОДЗ данного уравнения состоит из всех чисел x, одновременно удовлетворяющих неравенствам $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$. В этой области данное уравнение равносильно такому:

$$\sqrt{3}\cos x + \sqrt{6} = 3\sin x.$$

Получившееся уравнение можно переписать так:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

или, воспользовавшись формулой для синуса разности двух углов, в виде

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Последнее уравнение имеет две серии решений:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z; \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in Z.$$

Из этих решений решениями исходного уравнения будут те, которые входят в ОДЗ исходного уравнения, т.е. те, которые удовлетворяют неравенствам $\cos x > 0$ и $\sin x > 0$. Легко видеть, что это только все числа из первой серии.

Значит, исходное уравнение имеет одну серию решений:

$$x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Ответ. $x = \dfrac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Пример 3. Решить уравнение

$$|\sin x| = \sin x + 2\cos x.$$

Решение. Для освобождения от знака абсолютной величины разобьем числовую ось на две области: первую, в которой $\sin x \geqslant 0$, и вторую, в которой $\sin x < 0$. В первой области $|\sin x| = \sin x$ и исходное уравнение переписывается

$$\sin x = \sin x + 2\cos x$$

или

$$\cos x = 0.$$

Решениями последнего уравнения будут $x = \pi/2 + \pi m, \quad m \in Z$. Из этих значений x надо выбрать те, которые лежат в рассматриваемой области, т.е. там, где $\sin x \geqslant 0$. Легко видеть, что такими значениями x будут лишь $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.

Во второй области $|\sin x| = -\sin x$ и исходное уравнение перепишется

$$-\sin x = \sin x + 2\cos x$$

или

$$\sin x + \cos x = 0.$$

Переписав это уравнение в виде

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

находим его решения: $x = -\pi/4 + \pi l$, $l \in Z$. Из этих значений в рассматриваемой области лежат лишь $x = -\pi/4 + 2\pi k$, $k \in Z$. Следовательно, решениями исходного уравнения будут

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in Z; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z.$$

Второе решение. Возведя в квадрат обе части уравнения, получим уравнение

$$\sin^2 x = \sin^2 x + 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x$$

или

$$\cos x(\sin x + \cos x) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\cos x = 0 \quad \text{и} \quad \sin x + \cos x = 0.$$

Первое уравнение имеет решения $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$, второе уравнение имеет решения $x = -\pi/4 + \pi l$, $l \in Z$. Поскольку при возведении в квадрат могли появиться посторонние корни, необходимо сделать проверку. Непосредственная подстановка показывает, что решениями исходного уравнения будут лишь

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z; \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m, \ m \in Z.$$

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ \ n \in Z; \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m, \ \ m \in Z.$

Пример 4. Решить уравнение

$$2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8\sin 2x\cos^2 2x}.$$

Решение. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение

$$4\sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 8\sin 2x\cos^2 2x. \tag{6}$$

Все корни исходного уравнения являются корнями уравнения (6), но не обязательно все корни уравнения (6) будут корнями исходного уравнения. Поэтому после нахождения корней уравнения (6) из них надо отобрать те, которые будут корнями исходного уравнения. Применяя известные формулы, имеем

$$\sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \cos(6x + \pi/2)}{2} = \frac{1}{2}(1 + \sin 6x),$$

$$8\sin 2x\cos^2 2x = 4\cos 2x(2\sin 2x\cos 2x) = \\ = 4\cos 2x\sin 4x = 2(\sin 6x + \sin 2x).$$

Поэтому уравнение (6) можно переписать как

$$2 + 2\sin 6x = 1 + 2\sin 6x + 2\sin 2x$$

или как

$$\sin 2x = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Последнее уравнение имеет две серии решений:

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z; \quad x = \frac{5\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z.$$

Так как уравнение (7) равносильно уравнению (6), то надо проверить, все ли его решения будут решениями исходного уравнения.

Подставляя найденные значения x в правую часть исходного уравнения, получаем число 2. Для $x = \pi/12 + \pi n$, $n \in Z$, левая часть исходного уравнения равна

$$2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi n\right) = 2\cos\pi n.$$

Если n — четное число, то $2\cos\pi n = 2$, если n — нечетное число, то $2\cos\pi n = -2$. Значит, из первой серии решениями исходного уравнения являются лишь числа

$$x = \frac{\pi}{12} + 2\pi m,\ m \in Z.$$

Для $x = 5\pi/12 + \pi k$, $k \in Z$, левая часть исходного уравнения равна

$$2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3\pi k\right) = -2\cos\pi k.$$

Если k — четное число, то $-2\cos\pi k = -2$, если k — нечетное число, то $-2\cos\pi k = 2$. Следовательно, из второй серии решениями исходного уравнения являются лишь числа

$$x = \frac{5\pi}{12} + (2l + 1)\pi,\ l \in Z.$$

Ответ. $x = \dfrac{\pi}{12} + 2\pi m,\ \ m \in Z; \quad x = \dfrac{5\pi}{12} + (2l + 1)\pi,\ l \in Z.$

Пример 5. Решить уравнение

$$\log_2\left(\cos 2x + \cos\frac{x}{2}\right) + \log_{1/2}\left(\sin x + \cos\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Решение. ОДЗ исходного уравнения состоит из всех значений x, одновременно удовлетворяющих условиям

$$\cos 2x + \cos\frac{x}{2} > 0 \quad \text{и} \quad \sin x + \cos\frac{x}{2} > 0.$$

Поскольку

$$\log_{1/2}\left(\sin x + \cos\frac{x}{2}\right) = -\log_2\left(\sin x + \cos\frac{x}{2}\right),$$

то исходное уравнение можно записать в виде

$$\log_2\left(\cos 2x + \cos\frac{x}{2}\right) = \log_2\left(\sin x + \cos\frac{x}{2}\right).$$

Потенцируя его, получим уравнение

$$\cos 2x + \cos\frac{x}{2} = \sin x + \cos\frac{x}{2}, \tag{8}$$

равносильное исходному уравнению на его ОДЗ. Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то уравнение (8) можно записать в виде

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Поскольку квадратное уравнение $2t^2 + t - 1 = 0$ имеет корни $t_1 = 1/2$ и $t_2 = -1$, то уравнение (8) равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = -1 \quad \text{и} \quad \sin x = 1/2.$$

Решения уравнения

$$\sin x = -1 \tag{9}$$

не являются решениями исходного уравнения, так как для любого решения уравнения (9) имеем

$$\sin x_0 + \cos\frac{x_0}{2} = -1 + \frac{\cos x_0}{2} \leqslant 0,$$

т.е. x_0 не входит в ОДЗ исходного уравнения. Уравнение

$$\sin x = 1/2 \tag{10}$$

имеет две серии решений

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z, \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Проверим, какие из этих решений входят в ОДЗ исходного уравнения. Легко видеть, что

$$\cos 2x_1 + \cos\frac{x_1}{2} = \sin x_1 + \cos\frac{x_1}{2} = \frac{1}{2} + \cos \quad \frac{\pi}{12} + \pi k \quad =$$
$$= \frac{1}{2} + (-1)^k \cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3} + (-1)^k \cos\frac{\pi}{12}.$$

Так как $\cos\pi/3 < \cos\pi/12$, то при $k = 2l$ получим, что

$$\cos\frac{\pi}{3} + (-1)^k \cos\frac{\pi}{12} > 0,$$

а при $k = 2l + 1$ получим, что

$$\cos\frac{\pi}{3} + (-1)^k \cos\frac{\pi}{12} < 0.$$

Следовательно, из первой серии решений уравнения в ОДЗ исходного уравнения входят

$$x = \frac{\pi}{6} + 4\pi l,\ l \in Z.$$

Они и будут решениями исходного уравнения.

Также легко видеть, что

$$\cos 2x_2 + \cos\frac{x_2}{2} = \sin x_2 + \cos\frac{x_2}{2} = \frac{1}{2} + \cos \quad \frac{5\pi}{12} + \pi n \quad =$$
$$= \frac{1}{2} + (-1)^n \cos\frac{5\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3} + (-1)^n \cos\frac{5\pi}{12}.$$

Так как $0 < \cos 5\pi/12 < \cos\pi/3$, то при любом $n \in Z$

$$\cos\frac{\pi}{3} + (-1)^n \cos\frac{5\pi}{12} > 0.$$

Следовательно, все решения второй серии решений входят в ОДЗ исходного уравнения и являются его решениями.

Ответ. $x = \dfrac{\pi}{6} + 4\pi l,\ l \in Z; \quad x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

6.2. Уравнения с дополнительными условиями. В некоторых задачах требуется найти решения уравнения, удовлетворяющие дополнительным условиям. Как правило, такие задачи сводятся к решению уравнения и отбору корней, удовлетворяющих этому условию. Приведем соответствующие примеры.

Пример 6. Найти все корни уравнения

$$|x^2 + x - 1| = 2x - 1,$$

удовлетворяющие неравенству $x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Квадратный трехчлен x^2+x-1 имеет корни $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, причем как легко видеть, $x_2 > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Будем решать исходное уравнение отдельно в областях $-\infty < x \leqslant \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

В области $-\infty < x \leqslant \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ квадратный трехчлен $x^2 + x - 1$ неотрицателен, так что $|x^2 + x - 1| = x^2 + x - 1$ и исходное уравнение можно переписать в виде

$$x^2 + x - 1 = 2x - 1,$$

или в виде

$$x^2 - x = 0.$$

Полученное уравнение имеет два корня: $x_3 = 0$ и $x_4 = 1$, ни один из которых не лежит в области $-\infty < x \leqslant \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Значит, исходное уравнение не имеет корней в области $-\infty < x \leqslant \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

В области $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ квадратный трехчлен $x^2 + x - 1$ отрицателен, так что $|x^2 + x - 1| = -(x^2 + x - 1)$, и исходное уравнение можно переписать в виде

$$-x^2 - x + 1 = 2x - 1,$$

или в виде

$$x^2 + 3x - 2 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня $x_5 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ и $x_6 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$, из которых, как легко проверить, только корень x_6 принадлежит множеству $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Итак, исходное уравнение имеет в множестве $x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ только один корень $x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

Ответ. $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

Пример 7. Найти все решения уравнения

$$4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3,$$

принадлежащие отрезку $[3/4; 1]$.

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде

$$4^{2\cos^2 x - 1} + 4^{\cos^2 x} = 3.$$

Обозначив $4^{\cos^2 x}$ через t, будем иметь уравнение

$$\frac{1}{4}t^2 + t - 3 = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения $t_1 = -6$, $t_2 = 2$. Значит, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$4^{\cos^2 x} = -6 \quad \text{и} \quad 4^{\cos^2 x} = 2.$$

Первое уравнение этой совокупности решений не имеет, так как число (-6) не входит в область значений показательной функции. Второе уравнение равносильно уравнению $\cos^2 x = 1/2$, которое, в свою очередь, равносильно совокупности уравнений

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решениями первого из этих уравнений являются $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$, решениями второго — $x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Среди найденных чисел имеется только одно, лежащее на отрезке $[3/4; 1]$, а именно $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ. $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Пример 8. Найти все решения уравнения

$$|\sin(2x-1)| = \cos x,$$

удовлетворяющие условию $|x| \leqslant 2\pi$.

Решение. Искомыми значениями x будут те решения уравнения

$$\sin^2(2x-1) = \cos^2 x, \tag{1}$$

которые удовлетворяют условиям $\cos x \geqslant 0$ и $|x| \leqslant 2\pi$. Решим уравнение (1). Пользуясь формулами синуса и косинуса половинных углов, перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{1-\cos(4x-2)}{2} = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

или в виде

$$\cos(4x-2)+\cos 2x=0.$$

Применяя формулу суммы косинусов, перепишем его в виде

$$2\cos(x-1)\cos(3x-1)=0.$$

Последнее уравнение, а следовательно, и уравнение (1) равносильны совокупности двух уравнений

$$\cos(x-1)=0 \quad \text{и} \quad \cos(3x-1)=0.$$

Первое из этих уравнений имеет решения $x=\dfrac{\pi+2}{2}+\pi n,\ n\in Z$; решения второго уравнения: $x=\dfrac{\pi+2}{6}+\dfrac{\pi k}{3},\ k\in Z$. Выберем из этих решений числа, удовлетворяющие условию $\cos x\geqslant 0$. Имеем

$$\cos\left(\frac{\pi+2}{2}+\pi n\right)=(-1)^n\cos\frac{\pi+2}{2}.$$

Так как $\cos\dfrac{\pi+2}{2}<0$, то из первой серии неравенству $\cos\geqslant 0$ удовлетворяют числа, соответствующие нечетным n $(n=2l+1)$, т.е. числа $x=\dfrac{3\pi+2}{2}+2\pi l$, $l\in Z$. Из них в область $|x|\leqslant 2\pi$ попадают только те, для которых $l=-1$ и $l=0$, т.е. $\dfrac{-\pi+2}{2}$ и $\dfrac{3\pi+2}{2}$. Вторая серия $\dfrac{\pi+2}{6}+\dfrac{\pi k}{3}$, $k\in Z$, может быть разбита на шесть серий с периодом 2π:

$$x=\frac{\pi+2}{6}+2\pi m;\qquad x=\frac{3\pi+2}{6}+2\pi m;\qquad x=\frac{5\pi+2}{6}+2\pi m;$$
$$x=\frac{7\pi+2}{6}+2\pi m;\qquad x=\frac{-\pi+2}{6}+2\pi m;\qquad x=\frac{-3\pi+2}{6}+2\pi m;$$

где всюду $m\in Z$. Поскольку

$$\cos\frac{\pi+2}{6}>0,\qquad \cos\frac{3\pi+2}{6}<0,\qquad \cos\frac{5\pi+2}{6}<0,$$
$$\cos\frac{7\pi+2}{6}<0,\qquad \cos\frac{-\pi+2}{6}>0,\qquad \cos\frac{-3\pi+2}{6}>0,$$

то неравенству $\cos x\geqslant 0$ удовлетворяют только числа из трех серий:

$$x=\frac{\pi+2}{6}+2\pi m,\quad m\in Z;$$
$$x=\frac{-\pi+2}{6}+2\pi r,\quad r\in Z;$$
$$x=\frac{-3\pi+2}{6}+2\pi q,\quad q\in Z.$$

Из них в область $|x| \leqslant 2\pi$ попадают только те, для которых $m=-1$, $m=0$; $r=0$, $r=1$, $q=0$, $q=1$, т.е. $\frac{-11\pi+2}{6}$, $\frac{\pi+2}{6}$, $\frac{-\pi+2}{6}$, $\frac{11\pi+2}{6}$, $\frac{-3\pi+2}{6}$, $\frac{9\pi+2}{6}$.

О т в е т. $\frac{-\pi+2}{2}$, $\frac{3\pi+2}{2}$, $\frac{\pm 11\pi+2}{6}$, $\frac{\pm\pi+2}{6}$, $\frac{-3\pi+2}{6}$, $\frac{9\pi+2}{6}$.

П р и м е р 9. Найти все решения уравнения

$$2-\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=4\cos^2 3x,$$

удовлетворяющие неравенству $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>0$.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись тем, что

$$2\cos^2 3x = 1+\cos 6x \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right),$$

перепишем исходное уравнение в виде

$$2-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=2+2\cos 6x. \tag{2}$$

Уравнение (2) равносильно такому:

$$\cos 6x+\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

или такому:

$$2\cos\left(4x+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=0.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\cos\left(4x+\frac{\pi}{12}\right)=0 \quad \text{и} \quad \cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=0.$$

Эти уравнения имеют решения соответственно $x=\frac{5\pi}{48}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$, и $x=\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. Найденные серии решений составляют множество решений исходного уравнения.

Теперь выберем из них те, которые удовлетворяют условию $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>0$.

Пусть $x=\frac{5\pi}{48}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$; тогда $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=$ $=\cos\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\right)$. Легко видеть, что условию задачи удовлетворяют следующие подмножества первой серии решений исходного уравнения, получающиеся при $k = 4m$ и $k = 4m + 1$:

$$x = \frac{5\pi}{48} + \frac{4\pi m}{4} = \frac{5\pi}{48} + \pi m, \quad m \in Z;$$
$$x = \frac{5\pi}{48} + \frac{\pi(4m+1)}{4} = \frac{17\pi}{48} + \pi m, \quad m \in Z.$$

Пусть $x = \dfrac{7\pi}{24} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, тогда $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{7\pi}{12} + \pi n - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi n\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos\pi n - \sin\dfrac{\pi}{3}\sin\pi n = (-1)^n\cdot\dfrac{1}{2}$. Условию задачи удовлетворяют решения, соответствующие четным значениям n, т.е. полагая $n = 2l$, получим, что условию задачи удовлетворяет следующее подмножество второй серии решений исходного уравнения: $x = \dfrac{7\pi}{24} + \pi l$, $l \in Z$.

Значит, ответ к задаче дают следующие три серии решений:

$$x = \frac{5\pi}{48} + \pi m,\ m \in Z; \quad x = \frac{17\pi}{48} + \pi n,\ n \in Z; \quad x = \frac{7\pi}{24} + \pi l,\ l \in Z.$$

Ответ. $x = \dfrac{5\pi}{48} + \pi m$, $m \in Z$; $x = \dfrac{17\pi}{48} + \pi n$, $n \in Z$; $x = \dfrac{7\pi}{24} + \pi l$, $l \in Z$.

Часто встречаются задачи, в которых требуется решить уравнение, но его решение приводит к решению другого уравнения с дополнительным условием.

Пример 10. Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{(x+3/2)^2} = |\cos x|.$$

Решение. Правая часть исходного уравнения и знаменатель левой части неотрицательны. Поэтому решение данного уравнения должно удовлетворять неравенству $\cos x \geqslant 0$. Но $|\cos x| = \cos x$ для таких x, и поэтому задача может быть переформулирована так: найти все решения уравнения

$$\frac{\cos x}{(x+3/2)^2} = \cos x, \tag{3}$$

удовлетворяющие условию $\cos x \geqslant 0$.

Область допустимых значений уравнения (3) состоит из всех x, кроме $x = -\dfrac{3}{2}$. Уравнение (3) равносильно на своей ОДЗ совокупности уравнений

$$\cos x = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{(x+3/2)^2} = 1.$$

Первое уравнение этой совокупности имеет серию решений $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$, второе уравнение имеет два корня $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $x_2 = -\dfrac{5}{2}$. Выясним теперь, какие из найденных решений удовлетворяют условиям $\cos x \geqslant 0$ и $x \neq -\dfrac{3}{2}$ (они и будут решениями исходного уравнения).

Ясно, что любое из решений $x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z$, удовлетворяет этим условиям, так как $\frac{\pi}{2} + \pi m$ не равно $-\frac{3}{2}$ ни для одного целого m. Так как $0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\left(-\frac{1}{2}\right) = \cos\frac{1}{2} > 0$. Значит, $x = -\frac{1}{2}$ удовлетворяет условиям $\cos x \geqslant 0$ и $x \neq -\frac{3}{2}$, т.е. является корнем исходного уравнения. Так как $-\pi < -\frac{5}{2} < -\frac{\pi}{2}$, то $\cos\left(-\frac{5}{2}\right) < 0$ и $x = -\frac{5}{2}$ не является корнем исходного уравнения. Итак, исходное уравнение имеет решения $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ. $x = -\frac{1}{2}$; $\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

6.3. Решение уравнений нестандартными способами. При решении некоторых уравнений знание ОДЗ уравнения и применение некоторых оценок позволяет найти все его корни или доказать, что их нет. Приведем примеры.

Пример 11. Решить уравнение

$$\sqrt{x^3 + 2} + \sqrt{x^3 - 2} = 1.$$

Решение. ОДЗ этого уравнения определяется условиями $x^3 + 2 \geqslant 0$ и $x^3 - 2 \geqslant 0$, т.е. состоит из всех x, принадлежащих промежутку $\sqrt[3]{2} \leqslant x < +\infty$. Для таких x выражение $\sqrt{x^3 - 2}$ неотрицательно, а выражение $\sqrt{x^3 + 2}$ больше или равно 2, поэтому выражение $\sqrt{x^3 + 2} + \sqrt{x^3 - 2}$ больше или равно 2. Следовательно, левая часть исходного уравнения не меньше двух; его правая часть равна 1, т.е. ни для каких x равенство невозможно.

Ответ. Решений нет.

Пример 12. Решить уравнение

$$\log_2(4x - x^2) = x^2 - 4x + 6.$$

Решение. ОДЗ этого уравнения определяется условием $4x - x^2 > 0$, т.е. ОДЗ есть промежуток $0 < x < 4$. Поскольку на ОДЗ имеем

$$\log_2(4x - x^2) = \log_2(4 - (x - 2)^2) \leqslant \log_2 4 = 2$$

и

$$x^2 - 4x + 6 = (x - 2)^2 + 2 \geqslant 2,$$

то исходное уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда x одновременно удовлетворяет двум уравнениям:

$$\log_2(4x - x^2) = 2 \quad \text{и} \quad x^2 - 4x + 6 = 2.$$

Решение второго из этих уравнений есть $x = 2$, которое удовлетворяет первому уравнению и входит в ОДЗ исходного уравнения. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = 2$.

Ответ. $x_1 = 2$.

П р и м е р 13. Решить уравнение

$$(x^2+2x+3)(2x^4-4x^2+3)=2.$$

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде

$$((x+1)^2+2)(2(x+1)^2(x-1)^2+1)=2.$$

Поскольку для любого x имеем $(x+1)^2+2 \geqslant 2$ и $2(x+1)^2(x-1)^2+1 \geqslant 1$, то данное уравнение равносильно уравнению $(x+1)^2=0$. Решение этого уравнения, а следовательно, и исходного есть $x_1=-1$.

О т в е т. $x_1=-1$.

На вступительных экзаменах иногда предлагается решить уравнение, которое внешне выглядит как стандартное уравнение, но для решения которого нужны нестандартные рассуждения. Приведем несколько таких примеров.

П р и м е р 14. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1.$$

Р е ш е н и е. Исходное уравнение можно переписать в виде

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}=1-2x^2, \tag{1}$$

откуда следует, что все его решения удовлетворяют неравенству $1-2x^2 \geqslant 0$, т.е. лежат в области $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. Легко проверить, что для всех этих x справедливо равенство

$$1+2x\sqrt{1-x^2}=\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2,$$

откуда следует, что уравнение (1) на этой области может быть записано в виде

$$\frac{\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|}{\sqrt{2}}=1-2x^2. \tag{2}$$

Так как на множестве $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ справедливо неравенство $1-2x^2 \geqslant 0$, то на этом множестве $1-x^2 \geqslant x^2$, $\sqrt{1-x^2} \geqslant |x|$. Значит, на этом множестве $x+\sqrt{1-x^2} \geqslant 0$, и уравнение (2) можно переписать в виде

$$\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}=1-2x^2. \tag{3}$$

На рассматриваемом множестве $1-2x^2=\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)$, поэтому уравнение (3) преобразуется к такому:

$$\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1-x^2}-x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0.$$

Теперь получаем, что на множестве $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\overline{1-x^2} = -x \quad \text{и} \qquad \overline{1-x^2} = x + \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{4}$$

Решения первого уравнения лежат в области $-1 \leqslant x \leqslant 0$. На этой области оно равносильно уравнению

$$1 - x^2 = x^2,$$

которое имеет в области $-1 \leqslant x \leqslant 0$ единственный корень $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, первое уравнение из совокупности (4) имеет единственный корень $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Все решения второго уравнения (4) лежат в области $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant 1$. На этой области оно равносильно уравнению

$$1 - x^2 = x^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\,x + \frac{1}{2},$$

которое можно записать в виде

$$2x^2 + \sqrt{2}x - \frac{1}{2} = 0.$$

Это уравнение в области $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant 1$ имеет единственный корень $x_2 = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Следовательно, второе уравнение совокупности также имеет единственный корень $x_2 = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Итак, совокупность уравнений (4) имеет два корня:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \tag{5}$$

Оба они, как легко проверить, лежат в области $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и потому являются решениями исходного уравнения. Множество решений исходного уравнения состоит из двух чисел (5).

Ответ. $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$

Пример 15. Решить уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3).$$

Решение. Обозначим $y = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3)$, тогда

$$x^2 - 2x - 3 = (2+\sqrt{3})^y$$

и

$$x^2 - 2x - 2 = (2+\sqrt{3})^y + 1.$$

Поэтому исходное уравнение можно переписать в виде

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left((2+\sqrt{3})^y+1\right)=y. \tag{6}$$

Так как $\left(2+\sqrt{3}\right)^y+1>0$ при любом y, то уравнение (6) равносильно уравнению

$$(2+\sqrt{3})^y+1=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^y.$$

Так как $\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^y>0$ для любого y, то это уравнение равносильно уравнению

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^y+\frac{1}{\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^y}=1. \tag{7}$$

Поскольку $\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, то уравнение (7) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^y+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^y=1. \tag{8}$$

Так как

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2=1,$$

то $y=2$ есть решение уравнения (8). Покажем, что уравнение (8) не имеет других решений.

Так как $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}<1$ и $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}<1$, то для $y>2$ справедливы неравенства

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^y<\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^y<\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2,$$

откуда получаем, что

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^y+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^y<\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2=1.$$

Это равенство означает, что никакое $y>2$ не может быть решением уравнения (8).

Если $y<2$, то справедливы неравенства

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^y>\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^y>\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2,$$

откуда получаем, что

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}^{\,y} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}^{\,y} > \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}^{\,2} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}^{\,2} = 1.$$

Это неравенство означает, что никакое $y < 2$ не может быть решением уравнения (8).

Итак, уравнение (8), а следовательно, и равносильное ему уравнение (6) имеют единственный корень $y_1 = 2$.

Следовательно, решение исходного уравнения свелось к решению уравнения

$$\log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3) = 2. \tag{9}$$

Потенцируя его, приходим к уравнению

$$x^2 - 2x - 3 = (2+\sqrt{3})^2, \tag{10}$$

равносильному уравнению (9).

Корни уравнения (10) есть

$$x_1 = 1 + \sqrt{11 + 4\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad x_1 = 1 - \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}.$$

Следовательно, и исходное уравнение имеет два этих корня.

О т в е т. $x_1 = 1 + \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$, $x_2 = 1 - \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$.

П р и м е р 16. Решить уравнение

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Разобьем числовую прямую на промежутки $x < 0$, $0 \leqslant x < 1$, $x \geqslant 1$ и докажем, что на каждом из этих промежутков исходное уравнение решений не имеет.

В самом деле, при $x < 0$ имеем $-x^3 > 0$, $-x > 0$, и поэтому для таких x верно $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 > 0$ и, значит, на этом промежутке исходное уравнение решений не имеет. При $0 \leqslant x < 1$ имеем $-x+1 > 0$ и $x^2 - x^3 > 0$, поэтому для таких x верно $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = x^4 + (-x^3 + x^2) + (-x + 1) > 0$, и, значит, на этом промежутке исходное уравнение решений не имеет. При $x \geqslant 1$ имеем $x^4 \geqslant x^3$, $x^2 \geqslant x$ и поэтому $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = (x^4 - x^3) + (x^2 - x) + 1 > 0$, и, значит, на этом промежутке исходное уравнение решений не имеет.

В т о р о й с п о с о б. Умножим обе части исходного уравнения на $x + 1$, получим уравнение

$$(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = 0$$

или уравнение

$$x^5 + 1 = 0, \tag{11}$$

являющееся следствием исходного. Уравнение (11) имеет единственный корень $x = -1$, который не удовлетворяет исходному уравнению. Следовательно, исходное уравнение решений не имеет.

Третий способ. Очевидно, что $x = 0$ не есть решение исходного уравнения. Поэтому, разделив исходное уравнение на x^2, получим уравнение

$$x^2 - x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \tag{12}$$

равносильное исходному.

Обозначим $x + \frac{1}{x}$ через y, тогда $y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$. Поэтому уравнение (12) можно переписать в виде

$$y^2 - y - 1 = 0.$$

Последнее уравнение имеет два корня:

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Следовательно, уравнение (12), а значит, и исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad x + \frac{1}{x} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{13}$$

Если $x > 0$, то $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, и так как $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$, то среди положительных x ни одно из уравнений совокупности (13) решений не имеет.

Если $x < 0$, то $x + \frac{1}{x} \leqslant -2$, и так как $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1-\sqrt{5}}{2} > -2$, то среди отрицательных x также нет решений совокупности уравнений (13).

Заметим, что каждое из уравнений совокупности (13) равносильно соответствующему квадратному уравнению, не имеющему решений.

Ответ. Исходное уравнение решений не имеет.

Пример 17. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 5x = 2.$$

Решение. Поскольку $|\sin x| \leqslant 1$ и $|\sin 5x| \leqslant 1$, то исходное уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда x одновременно удовлетворяет двум уравнениям

$$\sin x = 1 \quad \text{и} \quad \sin 5x = 1.$$

Решения первого уравнения есть $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \;\; k \in Z$. Легко видеть, что все они удовлетворяют второму уравнению, следовательно, являются решениями исходного уравнения.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \; k \in Z$.

Иногда на вступительных экзаменах предлагается решить уравнение, нестандартное по внешнему виду. Для решения таких уравнений обычно применяются свойства функций, входящих в это уравнение.

Пример 18. Решить уравнение

$$2^x + 2^{-x} = 2\cos^2 \frac{x^2+x}{6} . \qquad (14)$$

Решение. ОДЗ уравнения (14) состоит из всех x. Так как $2^x + 2^{-x} \geqslant 2$ и $2\cos^2 \frac{x^2+x}{6} \leqslant 2$ для любых x, то уравнение (14) имеет решения тогда и только тогда, когда x одновременно удовлетворяет двум уравнениям:

$$2^x + 2^{-x} = 2 \quad \text{и} \quad 2\cos^2 \frac{x^2+x}{6} = 2.$$

Первое из этих уравнений имеет единственное решение $x_1 = 0$, которое удовлетворяет и второму уравнению. Следовательно, уравнение (14), а значит, и исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = 0$.

Ответ. $x_1 = 0$.

Пример 19. Решить уравнение

$$\log_2 x = 3 - x. \qquad (15)$$

Решение. ОДЗ уравнения (15) состоит из всех $x > 0$. Очевидно, что $x = 2$ есть решение уравнения (15). Покажем, что других решений это уравнение не имеет. Действительно, если $x > 2$, то правая часть уравнения (15) меньше 1, а левая — больше 1, т.е. среди $x > 2$ нет решений уравнения (15).

Если же $0 < x < 2$, то левая часть уравнения (15) меньше 1, а правая — больше 1, т.е. среди этих x также нет решений уравнения (15).

Ответ. $x = 2$.

6.4. Уравнения, содержащие неизвестную в основании логарифма. Если в основании логарифма есть x, то при определении ОДЗ уравнения надо учитывать, что основание логарифма всегда больше нуля и не равно единице.

Пример 20. Решить уравнение

$$\log_{1-2x^2} x = \frac{1}{4} - \frac{3}{\log_2(1-2x^2)^4}.$$

Решение. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих одновременно условиям $1 - 2x^2 > 0$, $1 - 2x^2 \neq 1$, $x > 0$, т.е. ОДЗ имеет вид $0 < x < \sqrt{2}/2$. Так как на ОДЗ

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\log_{1-2x^2}(1-2x^2), \quad \frac{3}{\log_2(1-2x^2)^4} = \frac{3}{4}\log_{1-2x^2} 2,$$

то исходное уравнение равносильно на ОДЗ такому:

$$\log_{1-2x^2} x = \frac{1}{4}\log_{1-2x^2}(1-2x^2) - \frac{3}{4}\log_{1-2x^2} 2.$$

Умножая обе части последнего уравнения на 4, получаем уравнение

$$\log_{1-2x^2} x^4 = \log_{1-2x^2} \frac{1-2x^2}{8},$$

потенцируя его, имеем уравнение

$$8x^4 = 1 - 2x^2, \tag{1}$$

равносильное исходному уравнению на его ОДЗ. Уравнение $8z^2 + 2z - 1 = 0$ имеет корни $z_1 = -\frac{1}{2}$; $z_2 = \frac{1}{4}$. Значит, уравнение (1) равносильно совокупности двух уравнений:

$$x^2 = -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad x^2 = \frac{1}{4}.$$

Первое уравнение не имеет корней, а второе имеет корни $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$. Таким образом, множество решений уравнения (1) состоит из двух этих чисел. Из них только x_1 входит в ОДЗ исходного уравнения. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = \frac{1}{2}$.

Ответ. $x_1 = \frac{1}{2}$.

Пример 21. Решить уравнение

$$\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4.$$

Решение. Поскольку

$$9 + 12x + 4x^2 = (2x+3)^2$$

и

$$6x^2 + 23x + 21 = (3x+7)(2x+3),$$

то область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям

$$2x + 3 > 0, \quad 2x + 3 \neq 1, \quad 3x + 7 > 0, \quad 3x + 7 \neq 1,$$

т.е. ОДЗ состоит из двух промежутков:

$$-\frac{3}{2} < x < -1 \quad \text{и} \quad -1 < x < +\infty.$$

На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$2\log_{3x+7}(2x+3) + \log_{2x+3}(3x+7) + 1 = 4. \tag{2}$$

Обозначим $\log_{3x+7}(2x+3)$ через z. Тогда уравнение (2) можно переписать в виде

$$2z + \frac{1}{z} = 3. \tag{3}$$

Уравнение (3) равносильно уравнению $2z^2 - 3z + 1 = 0$ и потому имеет корни $z_1 = \frac{1}{2}$ и $z_2 = 1$. Следовательно, исходное уравнение на своей ОДЗ равносильно совокупности двух уравнений:

$$\log_{3x+7}(2x+3) = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \log_{3x+7}(2x+3) = 1.$$

Первое уравнение этой совокупности равносильно на ОДЗ уравнению

$$(2x+3)^2 = 3x+7.$$

Это уравнение имеет два корня $x_1 = -\frac{1}{4}$ и $x_2 = -2$, из которых только $x_1 = -\frac{1}{4}$ лежит в ОДЗ исходного уравнения. Второе уравнение равносильно на ОДЗ уравнению

$$2x+3 = 3x+7.$$

Последнее уравнение совокупности имеет корень $x_3 = -4$, не лежащий в ОДЗ исходного уравнения. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = -\frac{1}{4}$.

Ответ. $x_1 = -\frac{1}{4}$.

Пример 22. Решить уравнение

$$3 + \frac{1}{\log_{32}(x/2)} = \log_{x/2}\quad \frac{75x}{4} - \frac{11}{x}\quad .$$

Решение. Область допустимых значений данного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих одновременно следующим условиям $x > 0$, $x \neq 2$, $\frac{75x}{4} - \frac{11}{x} > 0$, т.е. ОДЗ состоит из двух промежутков: $\sqrt{\frac{44}{75}} < x < 2$ и $2 < x < +\infty$. Так как на ОДЗ

$$3 + \frac{1}{\log_{32}(x/2)} = 3 + \log_{x/2} 32 = \log_{x/2} 4x^3,$$

то исходное уравнение равносильно на своей ОДЗ уравнению

$$\log_{x/2} 4x^3 = \log_{x/2}\quad \frac{75x}{4} - \frac{11}{x}$$

или уравнению

$$16x^4 - 75x^2 + 44 = 0. \tag{4}$$

Квадратное уравнение $16z^2 - 75z + 44 = 0$ имеет корни $z_1 = 4$ и $z_2 = \frac{11}{16}$. Значит, уравнение (4) равносильно совокупности двух уравнений:

$$x^2 = 4 \quad \text{и} \quad x^2 = \frac{11}{16}.$$

Это означает, что уравнение (4) имеет четыре корня: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = \frac{\sqrt{11}}{4}$, $x_4 = \frac{-\sqrt{11}}{4}$. Только один из них, а именно $x_3 = \frac{\sqrt{11}}{4}$, содержится в ОДЗ исходного уравнения. Таким образом, исходное уравнение имеет единственный корень $x_3 = \frac{\sqrt{11}}{4}$.

Ответ. $x = \frac{\sqrt{11}}{4}$.

Если же в уравнении переходят к логарифму по основанию, содержащему x, то может произойти сужение ОДЗ, а следовательно, и потеря корня. Так, например, переходя от уравнения

$$\log_{2x} x^2 + \log_{4x} x^2 = 0 \tag{5}$$

к уравнению

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x 2x} + \frac{\log_x x^2}{\log_x 4x} = 0, \tag{6}$$

видим, что уравнение (6) при $x = 1$ не имеет смысла, в то время как $x = 1$ является корнем уравнения (5). Поэтому при переходе в уравнении к логарифмам по некоторому основанию $h(x)$, содержащему x, вначале надо проверить, не являются ли те значения x, при которых $h(x) = 1$, решением исходного уравнения, а затем уже переходить к этому основанию.

Пример 23. Решить уравнение

$$\log_{x/2} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0. \tag{7}$$

Решение. ОДЗ этого уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих одновременно условиям $x > 0$, $x \neq 2$, $x \neq \frac{1}{4}$, $x \neq \frac{1}{16}$. Будем решать это уравнение, переходя к логарифмам по основанию x. Но прежде, чем сделать этот переход, надо проверить, является ли $x = 1$ корнем исходного уравнения. Подставляя 1 вместо x в уравнение (7), получаем, что $x = 1$ есть его корень. Переходя теперь в уравнении (7) к логарифмам по основанию x, получим уравнение

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x \frac{1}{2}x} - 14\frac{\log_x x^3}{\log_x 16x} + 40\frac{\log_x \sqrt{x}}{\log_x 4x} = 0, \tag{8}$$

равносильное исходному на множестве

$$x > 0, \quad x \neq 2, \quad x \neq \frac{1}{4}, \quad x \neq \frac{1}{16}, \quad x \neq 1. \tag{9}$$

Уравнение (8) на этом множестве можно переписать так:

$$\frac{2}{1 - \log_x 2} - \frac{42}{1 + 4\log_x 2} + \frac{20}{1 + 2\log_x 2} = 0. \tag{10}$$

На множестве (9) имеем $1 - \log_x 2 \neq 0$, $1 + 4\log_x 2 \neq 0$, $1 + 2\log_x 2 \neq 0$, поэтому на нем уравнение (10) равносильно уравнению

$$2(1 + 4\log_x 2)(1 + 2\log_x 2) - 42(1 - \log_x 2)(1 + 2\log_x 2) + \\ + 20(1 - \log_x 2)(1 + 4\log_x 2) = 0,$$

которое можно записать в виде

$$2(\log_x 2)^2 + 3\log_x 2 - 2 = 0. \tag{11}$$

Квадратное уравнение

$$2y^2 + 3y - 2 = 0$$

имеет два корня: $y_1 = \frac{1}{2}$ и $y_2 = -2$. Поэтому уравнение (11) равносильно совокупности двух уравнений:

$$\log_x 2 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \log_x 2 = -2. \tag{12}$$

Первое уравнение этой совокупности имеет единственный корень $x_2 = 4$, а второе уравнение — единственный корень $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому совокупность уравнений (12), а значит, и уравнение (11) имеют два корня $x_2 = 4$, $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как оба эти корня входят в множество (9), то они являются решениями исходного уравнения.

Следовательно, исходное уравнение имеет три корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6.5. Уравнения, содержащие неизвестную в основании и показателе степени. Если x входит в основание и показатель степени, то принято считать, что основание степени должно быть больше нуля. Это надо учитывать при нахождении ОДЗ уравнения.

Например, ОДЗ уравнения

$$x^{x+2} + x + 3 = 0$$

состоит из всех $x > 0$. Легко видеть, что это уравнение не имеет решений, так как для $x > 0$ имеем $x^{x+2} > 0$ и $x + 3 > 0$, откуда $x^{x+2} + x + 3 > 0$ для любого $x > 0$.

Далее будем в основном рассматривать уравнения двух типов:

I. $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$;

II. $f(x)^{g(x)} = h(x)^{g(x)}$.

Рассмотрим уравнение типа I.

Используя свойство 7 равносильности уравнений (см. п. 1.4, § 1), получаем, что для любого числа a ($a > 0$, $a \neq 1$) уравнение I на его ОДЗ, т.е. на множестве тех x, для которых $f(x) > 0$ и $g(x)$ и $h(x)$ имеют смысл, равносильно уравнению

$$g(x) \log_a f(x) = h(x) \log_a f(x). \tag{13}$$

Замена уравнения I уравнением (13) называется логарифмированием уравнения I.

Пример 24. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\log_{1/25}(2+5x-x^2)}.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям

$$3x - 5 > 0,$$
$$2 + 5x - x^2 > 0.$$

Решая эту систему неравенств, находим, что ОДЗ есть интервал $\frac{5}{3} < x < \frac{5+\sqrt{33}}{2}$. Пользуясь формулами

$$\log_{1/25} z = -\frac{1}{2}\log_5 z \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{-1/2},$$

перепишем исходное уравнение в виде

$$(3x-5)^{-1/2} = (3x-5)^{-\frac{1}{2}\log_5(2+5x-x^2)}.$$

Логарифмируя это уравнение, например, по основанию 2, получим уравнение

$$-\frac{1}{2}\log_2(3x-5) = -\frac{1}{2}\log_5(2+5x-x^2)\cdot\log_2(3x-5), \tag{14}$$

равносильное исходному уравнению на его ОДЗ. Уравнение (14) можно переписать в виде

$$\log_2(3x-5)\cdot(\log_5(2+5x-x^2)-1) = 0,$$

откуда следует, что оно равносильно на ОДЗ совокупности двух уравнений:

$$\log_2(3x-5) = 0 \quad \text{и} \quad \log_5(2+5x-x^2) = 1.$$

Первое уравнение имеет единственный корень $x_1 = 2$, который входит в ОДЗ исходного уравнения. Второе уравнение равносильно на ОДЗ квадратному уравнению $2 + 5x - x^2 = 5$, которое имеет два корня: $x_2 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$ и $x_3 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$. Из этих чисел в ОДЗ лежит только $x_2 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

Ответ. $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

Уравнение типа I можно решать и иначе: заменить уравнение I совокупностью уравнений

$$g(x) = h(x) \quad \text{и} \quad f(x) = 1,$$

равносильной уравнению I на его ОДЗ.

Пример 25. Решить уравнение

$$(1-x^2)^{(2+x)^2} = (1-x^2)^{(8x-2)(x+2)}.$$

Решение. ОДЗ уравнения состоит из всех таких значений x, для которых $1-x^2 > 0$, т.е. ОДЗ есть множество всех x из промежутка $-1 < x < 1$. На этом множестве исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$(2+x)^2 = (8x-2)(x+2) \quad \text{и} \quad 1 - x^2 = 1.$$

Решениями этой совокупности являются $x_1 = 4/7$, $x_2 = 0$ и $x_3 = -2$. Из этих x множеству $-1 < x < 1$ принадлежат $x_1 = 4/7$ и $x_2 = 0$. Эти значения x и есть решения исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = 4/7, \quad x_2 = 0.$

Рассмотрим уравнение типа II.

Используя свойство 6 равносильности уравнений (см. п. 1.4), получаем, что для любого числа a ($a > 0$, $a \neq 1$) уравнение II на его ОДЗ, т.е. на множестве тех x, для которых одновременно $f(x) > 0$ и $h(x) > 0$ и $g(x)$ имеет смысл, равносильно уравнению

$$g(x)\log_a f(x) = g(x)\log_a h(x). \tag{15}$$

Замена уравнения II уравнением (15) также называется логарифмированием уравнения II.

Пример 26. Решить уравнение

$$(x^2 + x + 1)^{x^2-5x+6} = (x + 3)^{x^2-5x+6}.$$

Решение. ОДЗ исходного уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям

$$x^2 + x + 1 > 0,$$
$$x + 3 > 0,$$

т.е. ОДЗ есть множество всех x из промежутка $-3 < x < +\infty$. Логарифмируя обе части уравнения, например, по основанию 2, получим уравнение

$$(x^2 - 5x + 6)\log_2(x^2 + x + 1) = (x^2 - 5x + 6)\log_2(x + 3),$$

равносильное исходному на его ОДЗ. Полученное уравнение можно переписать в виде

$$(x^2 - 5x + 6)(\log_2(x^2 + x + 1) - \log_2(x + 3)) = 0,$$

откуда следует, что оно равносильно на его ОДЗ совокупности двух уравнений:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \text{и} \quad \log_2(x^2 + x + 1) - \log_2(x + 3) = 0.$$

Первое уравнение имеет два решения $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, входящие в ОДЗ исходного уравнения. Второе уравнение равносильно на ОДЗ уравнению

$$x^2 + x + 1 = x + 3,$$

имеющему два корня $x_3 = \sqrt{2}$ и $x_4 = \sqrt{-2}$, из которых в ОДЗ исходного уравнения входит только $x_3 = \sqrt{2}$. Итак, решениями исходного уравнения являются $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ и $x_3 = \sqrt{2}$.

Ответ. $x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = \sqrt{2}.$

Уравнение типа II можно решать и иначе: заменить уравнение II совокупностью уравнений

$$g(x) = 0 \quad \text{и} \quad f(x) = h(x),$$

равносильной уравнению II на его ОДЗ.

Пример 27. Решить уравнение

$$(1 + x^2 + \cos x)^{\sqrt{1-x^2}} = (1 + x^2 + \sin x)^{\sqrt{1-x^2}}.$$

Р е ш е н и е. Область допустимых значений этого уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям

$$1 + x^2 + \cos x > 0,$$
$$1 + x^2 + \sin x > 0,$$
$$1 - x^2 \geqslant 0,$$

т.е. ОДЗ есть множество всех x из промежутка $-1 \leqslant x \leqslant 1$. На этом множестве исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sqrt{1 - x^2} = 0 \quad \text{и} \quad 1 + x^2 + \cos x = 1 + x^2 + \sin x.$$

Решениями этой совокупности уравнений являются

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1 \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$$

Из этих x множеству $-1 \leqslant x \leqslant 1$ принадлежат $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ \ x_3 = \dfrac{\pi}{4}$ и $x_4 = -\dfrac{\pi}{4}$. Они и являются решением исходного уравнения.

О т в е т. $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = \dfrac{\pi}{4},\ x_4 = -\dfrac{\pi}{4}$.

6.6. Уравнения с параметрами. На вступительных экзаменах довольно часто предлагается решить уравнение с параметром. Это означает, что надо для каждого значения параметра решить соответствующее уравнение.

П р и м е р 28. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$\sqrt{2|x| - x^2} = a.$$

Р е ш е н и е. При $a < 0$ уравнение, очевидно, решений не имеет. При $a = 0$ исходное уравнение, очевидно, имеет три корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

Пусть a — фиксированное положительное число. Тогда данное уравнение равносильно уравнению

$$2|x| - x^2 = a^2$$

или уравнению

$$|x|^2 - 2|x| + a^2 = 0. \tag{1}$$

Дискриминант квадратного трехчлена $z^2 - 2z + a^2$ равен $4 - 4a^2$. Поэтому при $a > 1$ квадратное уравнение

$$z^2 - 2z + a^2 = 0 \tag{2}$$

не имеет решений, а значит, не имеет решений и уравнение (1).

Если $a = 1$, то уравнение (2) имеет единственный корень $z = 1$, и тогда уравнение (1) равносильно уравнению $|x| = 1$ и имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$.

Если $0 < a < 1$, то уравнение (2) имеет два корня: $z_1 = 1 + \sqrt{1-a^2}$ и $z_2 = 1 - \sqrt{1-a^2}$. Следовательно, в этом случае уравнение (1) равносильно совокупности двух уравнений:

$$|x| = 1 + \quad \overline{1-a^2} \quad \text{и} \quad |x| = 1 - \quad \overline{1-a^2}. \tag{3}$$

Так как числа z_1, z_2 неотрицательны, то первое уравнение совокупности уравнений (3) имеет два решения:

$$x_{1,2} = \pm\ 1 + \quad \overline{1-a^2}$$

и второе уравнение — два решения:

$$x_{3,4} = \pm\ 1 - \quad \overline{1-a^2}\ .$$

О т в е т. Если $a < 0$, то решений нет; если $a = 0$, то три решения: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$; если $0 < a < 1$, то четыре решения: $x_{1,2} = \pm\ 1 + \sqrt{1-a^2}\ $, $x_{3,4} = \pm\ 1 - \sqrt{1-a^2}\ $; если $a = 1$, то два решения: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; если $a > 1$, то решений нет.

Часто встречаются задачи с параметрами, в которых требуется найти все те значения параметра, при каждом из которых уравнение или имеет решения, или имеет указанное число решений, или имеет решения, удовлетворяющие некоторому условию.

П р и м е р 29. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$5\sin x + 2\cos x = a$$

имеет решение.

Р е ш е н и е. Так как $\sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$, то найдется угол φ, для которого $\cos\varphi = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$, $\sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$, например $\varphi = \arccos\dfrac{5}{\sqrt{29}}$. Тогда

$$5\sin x + 2\cos x = \sqrt{29}(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x) = \sqrt{29}\sin(x+\varphi)$$

и исходное уравнение можно переписать так:

$$\sin(x+\varphi) = \frac{a}{\sqrt{29}}. \tag{4}$$

Уравнение (4) имеет решения тогда и только тогда, когда $\dfrac{a}{\sqrt{29}} \leqslant 1$, т.е. когда $-\sqrt{29} \leqslant a \leqslant \sqrt{29}$.

О т в е т. $-\sqrt{29} \leqslant a \leqslant \sqrt{29}$.

П р и м е р 30. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|1-ax| = 1 + (1-2a)x + ax^2$$

имеет один корень.

Р е ш е н и е. Пусть $a = 0$, тогда исходное уравнение можно переписать в виде

$$1 = 1 + x,$$

откуда ясно, что при $a = 0$ исходное уравнение имеет только один корень: $x_0 = 0$. Следовательно, $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a \neq 0$. Выясним, сколько корней имеет исходное уравнение на каждой из областей $1 - ax \geqslant 0$ и $1 - ax < 0$. Если $1 - ax \geqslant 0$, то исходное уравнение можно переписать в виде

$$ax^2 + (1 - a)x = 0, \tag{5}$$

откуда видно, что при $a = 1$ уравнение (5) имеет только один корень $x_0 = 0$, который удовлетворяет условию $1 - ax \geqslant 0$. Следовательно, при $a = 1$ исходное уравнение имеет в области $1 - ax \geqslant 0$ только один корень.

Если $a \neq 1$, то уравнение (5) имеет два корня:

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{a-1}{a},$$

первый из которых удовлетворяет условию $1 - ax \geqslant 0$.

Рассмотрим, при каких a второй корень удовлетворяет условию $1 - ax \geqslant$ $\geqslant 0$. Для этого надо решить неравенство $1 - a \cdot \dfrac{a-1}{a} \geqslant 0$. Решение этого неравенства есть $a \leqslant 2$.

Следовательно, если $a \neq 0$, $a \neq 1$, но $a \leqslant 2$, то в области $1 - ax \geqslant 0$ исходное уравнение имеет два корня. Поэтому все a, такие, что $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \leqslant 2$, не удовлетворяют условию задачи.

Если же $a = 1$ или $a > 2$, то исходное уравнение имеет в области $1 - ax \geqslant 0$ только один корень. Рассмотрим есть ли при этих a корни исходного уравнения, лежащие в области $1 - ax < 0$.

Если $1 - ax < 0$, то исходное уравнение можно переписать в виде

$$ax^2 + (1 - 3a)x + 2 = 0. \tag{6}$$

Дискриминант этого уравнения

$$D = (1 - 3a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot a = 9a^2 - 14a + 1.$$

При $a > 2$ этот дискриминант положителен. Следовательно, уравнение (6) имеет два корня:

$$x_1 = \frac{3a - 1 + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{3a - 1 - \sqrt{D}}{2a}.$$

Очевидно, что корень x_1 удовлетворяет условию $1 - ax < 0$. Действительно,

$$1 - ax_1 = 1 - \frac{3a - 1 + \sqrt{D}}{2} = -\frac{1}{2}\ \ \sqrt{D} + 3(a - 1)\ \ < 0,$$

так как при $a > 2$ в квадратных скобках стоит положительное число.

Следовательно, при $a > 2$ исходное уравнение имеет, по крайней мере, два корня и поэтому ни одно $a > 2$ условию задачи не удовлетворяет.

Если $a = 1$, то дискриминант уравнения (6) $D = -4 < 0$, и поэтому в области $1 - ax < 0$ исходное уравнение не имеет корней. Следовательно, при $a = 1$ исходное уравнение имеет только один корень: $x = 0$.

Итак, условию задачи удовлетворяют только $a = 0$ и $a = 1$.

Ответ. $a = 0, \quad a = 1$.

Пример 31. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_3(9^x + 9a^3) = x \qquad (7)$$

имеет два решения.

Решение. Пусть a — некоторое фиксированное число. Область допустимых значений данного уравнения состоит из всех чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$9^x + 9a^3 > 0.$$

Значит, если $a \geqslant 0$, то ОДЗ совпадает с множеством всех действительных чисел, если $a < 0$, то ОДЗ есть множество $x > \log_9(-9a^3)$.

На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$9^x + 9a^3 = 3^x.$$

Обозначив 3^x через t, получим квадратное уравнение

$$t^2 - t + 9a^3 = 0. \qquad (8)$$

Дискриминант полученного уравнения равен $1 - 36a^3$. Поэтому если $1 - 36a^3 < 0$, т.е. если $a > 1/\sqrt[3]{36}$, то квадратное уравнение (8) не имеет корней. Но тогда не имеет их и исходное уравнение.

Если $a = 1/\sqrt[3]{36}$, то уравнение (8) имеет единственный корень $t_1 = 1/2$. Это значит, что исходное уравнение равносильно на своей ОДЗ уравнению $3^x = 1/2$, которое имеет единственный корень $x = \log_3 \dfrac{1}{2}$. Не проверяя, входит или нет этот корень в ОДЗ исходного уравнения, приходим к выводу, что при $a = 1/\sqrt[3]{36}$ исходное уравнение имеет не более одного корня.

Если $a < 1/\sqrt[3]{36}$, то уравнение (8) имеет два корня:

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 36a^3}}{2} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 36a^3}}{2}.$$

Значит, в этом случае исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$3^x = \frac{1 - \sqrt{1 - 36a^3}}{2} \quad \text{и} \quad 3^x = \frac{1 + \sqrt{1 - 36a^3}}{2}. \qquad (9)$$

При $a \leqslant 0$ выполнено неравенство $\dfrac{1 - \sqrt{1 - 36a^3}}{2} \leqslant 0$, и первое уравнение совокупности (9) решений не имеет. Тогда исходное уравнение равносильно на своей ОДЗ второму уравнению (9), которое имеет единственное решение $x = \log_3 \dfrac{1 + \sqrt{1 - 36a^3}}{2}$. Следовательно, при $a \leqslant 0$ исходное уравнение имеет не более одного решения.

Если a удовлетворяет неравенствам $0 < a < 1/\sqrt[3]{36}$, то совокупность уравнений (9) имеет корни $x_1 = \log_3 \dfrac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2}$ и $x_2 = \log_3 \dfrac{1+\sqrt{1-36a^3}}{2}$. В этом случае ОДЗ исходного уравнения совпадает с множеством всех действительных чисел и, значит, исходное уравнение имеет два корня: x_1 и x_2.

Ответ. $0 < a < 1/\sqrt[3]{36}$.

Пример 32. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$10x - 15a = 13 - 5ax + 2a$$

имеет корень, который больше 2.

Решение. При любом значении параметра a исходное уравнение равносильно уравнению

$$x(a+2) = \frac{17a+13}{5}. \tag{10}$$

При $a = -2$ уравнение (10) запишется в виде

$$0 \cdot x = -\frac{21}{5},$$

и теперь очевидно, что при $a = -2$ исходное уравнение не имеет решений. Следовательно, $a = -2$ не удовлетворяет условию задачи.

При любом значении параметра $a \neq -2$ уравнение (10) имеет одно решение:

$$x = \frac{17a+13}{5(a+2)}.$$

Следовательно, условию задачи удовлетворяют те и только те a ($a \neq -2$), которые являются решениями неравенства

$$\frac{17a+13}{5(a+2)} > 2. \tag{11}$$

Неравенство (11) равносильно неравенству

$$\frac{17a+13}{5(a+2)} - 2 > 0,$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{7}{5} \cdot \frac{a-1}{a+2} > 0. \tag{12}$$

Решая неравенство (12), получаем, что множеством его решений являются два промежутка $a < -2$ и $a > 1$.

Следовательно, условию задачи удовлетворяют только a из этих двух промежутков.

Ответ. $a > 1, \quad a < -2$.

Упражнения

Решить уравнение.

1) $|2x-3| = 3-2x$. 2) $4-5x = |5x-4|$.

3) $|5x-18| - |11-5x| = 7$. 4) $|16-9x| - |9x-5| = 11$.

5) $x^2-4x+|x-3|+3=0$. 6) $x^2+6x+|x+2|+8=0$.
7) $x^2-6|x-2|-8x+11=0$. 8) $(x^2-x)^2-|x^2-x|-6=0$.
9) $|x^2-3|+|x^2-1|=2$. 10) $x^2+13-2\sqrt{x^2+11}=26$.
11) $x^2-x-3+\sqrt{x^2-x-1}=4$.
12) $2x^2+3|x|+\sqrt{2x^2+3|x|+9}=33$.
13) $x\sqrt{36x+1261}=18x^2-17x$.
14) $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}=-2$.
15) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.
16) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2$. 17) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$.
18) $\sqrt[3]{(8-x)^2}+\sqrt[3]{(x+27)^2}=\sqrt[3]{(8-x)(x+27)}$.
19) $3\sqrt{\log_3 x}-\log_3(3x)-1=0$.
20) $5\sqrt{\log_2 x}-\log_2(4x)-4=0$.
21) $(\log_2 x)^2=2\left(1+\sqrt{3}\right)\log_2\sqrt{x}$.
22) $2\log_9(3x-1)=\log_3\sqrt{x+3}$.
23) $1+\lg(1+x^2-2x)-\lg(1+x^2)=2\lg(1-x)$.
24) $2\lg\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\lg(1-x)+\lg\left(\dfrac{3}{2}-x\right)+\lg 2$.
25) $\log_2(1-x^2)+\log_2(x^4-1)=0$. 26) $\log_2\left(\dfrac{1}{|x-1|-1}\right)=1$.
27) $\log_3\left(\dfrac{2}{|x+2|-3}\right)=0$. 28) $\log_5(|x-3|-2)=-1$.
29) $\dfrac{4}{3}(\log_3(5x-6)^3)^2-(\log_3(5x-6)^3)\log_3 x^6=-6\left(\log_3\dfrac{1}{x}\right)^2$.
30) $\dfrac{4}{9}(\log_6(4x-5)^3)^2=(\log_6(4x-5)^3)\log_6 x^2-2\left(\log_6\dfrac{1}{x}\right)^2$.
31) $\log_9(x^2-5x+6)^2=2^{-1}\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x-1}{2}+\log_3|x-3|$.
32) $2\log_3\dfrac{x^2}{27}-\dfrac{\log_3(1/x)}{\log_5\sqrt{x}}=2$. 33) $\dfrac{2\lg x}{\lg x-1}=-\lg x+\dfrac{2}{\lg x-1}$.
34) $\dfrac{6\log_{32}^2 x-11\log_{32}-2}{\log_{32} x-2}=2+\log_{32} x$.
35) $x^2\log_6\sqrt{5x^2-2x-3}-x\log_{1/6}(5x^2-2x-3)=x^2+2x$.
36) $x^2\log_2\dfrac{3+x}{10}-x^2\log_{1/2}(2+3x)=x^2-4+2\log_{\sqrt{2}}\dfrac{3x^2+11x-6}{10}$.
37) $2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}=1$. 38) $5^{|4x-6|}=25^{3x-4}$.
39) $25^{|1-2x|}=5^{4-6x}$. 40) $3^{8x-2}=9^{|3x-1|}$.
41) $5^{x+1/2}-9^x=3^{2x-2}-5^{x-1/2}$.
42) $2^{2x+5}-3^{x+9/2}=3^{x+7/2}-4^{x+4}$.
43) $4^{\log_9 x}-6\cdot 2^{\log_9 x}+2^{\log_3 27}=0$.

44) $9 \cdot 4^{1/x} + 5 \cdot 6^{1/x} = 4 \cdot 9^{1/x}$. 45) $5 \cdot 25^{1/x} + 3 \cdot 10^{1/x} = 2 \cdot 4^{1/x}$.

46) $\log_6(5 + 6^{-x}) = x + 1$.

47) $2\sqrt{x} \cdot 4^x + 5 \cdot 2^{x+1} + 2\sqrt{x} = 2^{2x+2} + 5\sqrt{x} \cdot 2^x + 4$.

48) $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x+3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$.

49) $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+1} - 3) = 6$.

50) $\log_3(4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1$. 51) $\sin x \cdot \sin 3x + \cos 4x = 0$.

52) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos 2x = 1$.

53) $8\sin^2 x - 7\cos^2 x = 8$. 54) $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$.

55) $\sin 7x - \sin 3x = \sin 2x$. 56) $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0$.

57) $\cos 5x + \cos 7x = \cos x$. 58) $\cos 3x - \sin 2x - \cos x = 0$.

59) $\cos\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

60) $\cos x + \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) + 1 = \sqrt{3}(1 + 2\cos x)$.

61) $2\cos\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{8}\right) - 2\cos\left(\dfrac{x}{6} - \dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3}\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{16}\right) + 3\sin\left(\dfrac{x}{12} - \dfrac{\pi}{16}\right)$.

62) $\sin^4 x + 5\cos 2x + 4 = 0$. 63) $4\sin x + \sqrt{3}\sin 2x = 2\cos 2x \sin x$.

64) $2\sin^2\left(5x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 + \sin(3 + 2x) + 2\sin^2\left(4x - \dfrac{3}{2}\right)\cos\left(6x + \dfrac{3}{2}\right)$.

65) $2\,\mathrm{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$.

66) $\cos(3 + 2x) + \sin 9x = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3x}{2}\right) - 2\cos^2\left(\dfrac{3}{2} - 5x\right)$.

67) $9\,\mathrm{ctg}^2 x + 4\sin^2 x = 6$. 68) $8\sin^4 x - 13\cos 2x = 7$.

69) $\sin^2 6x + 5\sin^2 3x = 2$. 70) $2\cos^4 x + 1 = 3\cos 2x$.

71) $\sin^8 x - \cos^8 x = \dfrac{1}{2}\cos^2 2x - \dfrac{1}{2}\cos 2x$. 72) $\cos^6 x - \sin^6 x = \dfrac{13}{8}\cos^2 2x$.

73) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 + \dfrac{1}{2}\cos\left(2x + \dfrac{9\pi}{2}\right)$.

74) $\mathrm{tg}\, 2x - 4\sin x\cos x = 4\sin^2 x$.

75) $4\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin 2x + \dfrac{\sqrt{3}}{\mathrm{tg}\, 2x} = 5$.

76) $$(1 + \mathrm{tg}^2\, 2x)\left(\sin\frac{21}{4}x\cos\frac{7x}{4} + \sin\frac{5x}{4}\cos\frac{x}{4}\right) = \left(\sin\frac{x}{4}\cos\frac{5x}{4} - \sin\frac{7x}{4}\cos\frac{21}{4}x\right) \cdot \frac{1}{\cos^2 2x}.$$

77) $$\sin^2 5x\left(\sin 7x\cos x - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\right) = \left(\sin\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2} + \sin x\cos 7x\right) : (1 + \mathrm{ctg}^2\, 5x).$$

78) $(1+\operatorname{ctg}^2 x)\left(\sin\frac{3}{2}x\cos 2x-\sin\frac{x}{4}\cos\frac{9x}{4}\right)=$

$$=\left(\sin\frac{9}{4}x\cos\frac{x}{4}+\sin 2x\cos\frac{3}{2}x\right)\cdot\frac{1}{\sin^2 x}.$$

79) $\sqrt{3}^{\operatorname{tg}2x}-\dfrac{3\sqrt{3}}{3^{\operatorname{tg}2x}}=0.$ 80) $2^{\cos 2x}-\dfrac{1}{2\cdot 2^{\cos 2x}}=0.$

81) $2^{\sin 2x}-\dfrac{1}{2\cdot 2^{\sin 2x}}=0.$

82) $5^{1/2}+5^{1/2+\log_5\sin x}=15^{1/2+\log_{15}\cos x}.$

83) $3^{-1/2}+6^{-1/2+\log_6\sin x}=2^{-1/2+\log_2\cos x}.$

84) $2-6^{1/2+\log_6\sin x}=2^{1/2+\log_2\cos x}.$

85) $|\operatorname{tg}x|=\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}.$ 86) $|\cos x|=\cos x-2\sin x.$

87) $|\operatorname{ctg}x|=\operatorname{ctg}x+\dfrac{1}{\sin x}.$ 88) $1+2|\cos x|\sin x=0.$

89) $4|\sin x|+2\cos 2x=3.$

90) $\sqrt{3}\cos\frac{3}{4}x=\sqrt{\frac{3}{4}+6\sin^2\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)}.$

91) $\sqrt{\dfrac{1-4\cos^2 3x}{8\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}}=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right).$

92) $\sqrt{\dfrac{4\sin^2\left(\frac{3x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)-1}{2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}}=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right).$

93) $\sqrt{37-48\operatorname{ctg}x}=8\operatorname{ctg}x-5.$ 94) $\sqrt{13-18\operatorname{tg}x}=6\operatorname{tg}x-3.$

95) $\sqrt{5-2\sin x}=6\sin x-1.$ 96) $\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2.$

97) $\sqrt{3+4\sqrt{6}-\left(16\sqrt{3}-8\sqrt{2}\right)\cos x}=4\cos x-\sqrt{3}.$

98) $\sqrt{9-4\sqrt{3}-\left(16-8\sqrt{3}\right)\sin x}=4\sin x-3.$

99) $\sqrt{9-6\sqrt{2}-\left(12-8\sqrt{2}\right)\cos x}+2\sqrt{2}=2\sqrt{2}\cos x+1.$

100) $\sqrt{2+\sqrt{6}-\left(6\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\sin x}=2\sin x-\sqrt{2}.$

101) $2\sin x-\sqrt[4]{3}=\left(\sqrt{2}-\sqrt[4]{12}\right)\sqrt{\sin x}.$

102) $\sqrt[4]{3}\operatorname{tg}x-1=\left(\sqrt[4]{3}-1\right)\sqrt{\operatorname{tg}x}.$

103) $\sqrt[4]{8}\cos x-1=\left(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}\right)\sqrt{\cos x}.$

104) $\operatorname{tg}x-\sqrt[4]{3}=\left(\sqrt[4]{3}-1\right)\sqrt{\operatorname{tg}x}.$ 105) $\sqrt{2-3\cos 2x}=\sqrt{\sin x}.$

106) $\sqrt{1+4\cos 2x}=\sqrt{1-4\cos x}.$ 107) $\sqrt{3+4\cos 2x}=\sqrt{2\cos x}.$

108) $\sqrt{1-4\sin x}=\sqrt{1-4\cos 2x}.$ 109) $\sqrt{5\sin x+\cos 2x}+2\cos x=0.$

110) $\sqrt{2\cos x\sin 2x}=\sqrt{5\sin x+4\sin 2x}.$

111) $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} + 2\sin x = 0$.

112) $\sqrt{2\sin x \sin 2x} = \sqrt{5\cos x + 4\sin 2x}$.

113) $\log_5\left(\cos\dfrac{x}{2} + 3\operatorname{tg} x - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \log_{1/5}\left(\cos\dfrac{x}{2} + \operatorname{tg} 2x - \dfrac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.

114) $\log_{1/3}\left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos 2x\right) + \log_3\left(\sin\dfrac{x}{2} - \sin x\right) = 0$.

115) $\log_{1/6}\left(\sin\dfrac{x}{2} - 3\operatorname{tg} x - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \log_6\left(\sin\dfrac{x}{2} - \operatorname{tg} 2x - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.

116) $\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi\cos x\right) = -\dfrac{1}{2}$. 117) $\sin\left(\dfrac{13}{9}\pi\sin x\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

118) $\sin\left(\dfrac{11}{8}\pi\cos x\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

119) Найти все корни уравнения $2|x^2 + 2x - 5| = x - 1$, удовлетворяющие неравенству $x < \sqrt{2}$.

120) Найти все корни уравнения $1 + x + |x^2 - x - 3| = 0$, удовлетворяющие неравенству $x + \sqrt{14}/3 > 0$.

121) Найти все корни уравнения $|x^2 + 2x - 4| + 2x - 6 = 0$, удовлетворяющие неравенству $x + \sqrt{18} < 1$.

122) Найти все решения уравнения $2 + \sin 12x - 2\cos 8x = 0$, принадлежащие отрезку $[-\pi/6, \pi/6]$.

123) Найти все корни уравнения $2 - \cos 9x + 2\cos 6x = 0$, принадлежащие отрезку $[-7\pi/18, \pi/18]$.

124) Найти все корни уравнения $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$, принадлежащие отрезку $[3/4, 1]$.

125) Найти все корни уравнения $9^{\sin^2 x} - 3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\cos^2 x} = 6$, принадлежащие отрезку $[-2, -3/2]$.

126) Найти все корни уравнения $\sin x\cos\dfrac{\pi}{8} + \cos x\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[-3\pi/2, \pi]$.

127) Найти все корни уравнения $\cos x\cos\dfrac{\pi}{5} + \sin x\sin\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi/4, 9\pi/4]$.

128) Найти все корни уравнения $\sin x\cos\dfrac{\pi}{7} - \cos x\sin\dfrac{\pi}{7} = -\dfrac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi, 3\pi/2]$.

129) Найти все решения уравнения $\cos x\cos\dfrac{\pi}{8} - \sin x\sin\dfrac{\pi}{8} = -\dfrac{1}{2}$, удовлетворяющие условию $-\dfrac{3}{2}\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

130) Найти все решения уравнения $\cos x\cos\dfrac{\pi}{7} + \sin x\sin\dfrac{\pi}{7} = \dfrac{1}{2}$, удовлетворяющие условию $-\pi/2 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

131) Найти все решения уравнения $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$, удовлетворяющие условию $0{,}4\pi < x < 6\pi/7$.

132) Найти все решения уравнения $\sqrt{2}\cos 8x + \sqrt{2}\sin 8x = -1$, удовлетворяющие условию $3\pi/8 < x < 0{,}7\pi$.

133) Найти все решения уравнения $\sqrt{3}\cos 7x + \sin 7x = -\sqrt{2}$, удовлетворяющие условию $5\pi/7 < x < 1,1\pi$.

134) Найти все решения уравнения $\sqrt{2}\cos 8x - \sqrt{2}\sin 8x = -\sqrt{3}$, удовлетворяющие условию $0{,}6\pi < x < 7\pi/8$.

135) Найти все решения уравнения $|\cos x| + \sin(2x+3) = 0$, удовлетворяющие условию $|x| \leqslant 3\pi/2$.

136) Найти все решения уравнения $|\cos(2x-3)| = \sin x$, удовлетворяющие условию $|x| \leqslant 2\pi$.

137) Найти все решения уравнения $|\sin x| + \cos(2x+1) = 0$, удовлетворяющие условию $|x| \leqslant 3\pi/2$.

138) Найти все решения уравнения $\log_2 |\operatorname{tg} x| + \log_4 \dfrac{\cos x}{2\cos x + \sin x} = 0$, удовлетворяющие условию $9/4 \leqslant x \leqslant 3$.

139) Найти все решения уравнения $2\log_5 |\operatorname{ctg} x| - \log_{1/5} \dfrac{\sin x}{5\sin x - 4\cos x} = 0$, удовлетворяющие условию $3{,}3 \leqslant x \leqslant 4$.

140) Найти все решения уравнения $1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0$, удовлетворяющие условию $\cos x \geqslant 0$.

141) Найти все решения уравнения $8\sin x + 5 = 2\cos 2x$, удовлетворяющие условию $\cos x \geqslant 0$.

142) Найти все решения уравнения $4 - 5\cos x - 2\sin^2 x = 0$, удовлетворяющие условию $\sin x \geqslant 0$.

143) Найти все решения уравнения $2\cos 2x - 4\cos x = 1$, удовлетворяющие условию $\sin x \geqslant 0$.

144) Найти все решения уравнения $2 - \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 4\cos^2 3x$, удовлетворяющие условию $\cos\quad 2x - \dfrac{\pi}{4}\quad > 0$.

145) Найти все решения уравнения

$$\cos\quad \frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3}\quad + \cos\quad \frac{9}{2}x + \frac{\pi}{6}\quad = 2\sin\quad \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}\quad \sin\quad \frac{5\pi}{8} - \frac{3x}{2}\quad ,$$

удовлетворяющие условию $\sin \dfrac{3}{2}x < 0$.

146) Найти все решения уравнения $2 + \cos \dfrac{3}{2}x + \sqrt{3}\sin \dfrac{3}{2}x = 4\sin^2 \dfrac{x}{4}$, удовлетворяющие условию $\sin\quad \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\quad > 0$.

147) Найти все решения уравнения

$$\sin\quad \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\quad + \sin\quad \frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\quad = 2\sqrt{2}\cos\quad \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\quad \cos\quad \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\quad ,$$

удовлетворяющие условию $\cos\quad \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\quad < 0$.

Решить уравнение.

148) $\dfrac{\sin x}{(x-4)^2} + |\sin x| = 0.$ 149) $(x-2)^2 |\cos x| = \cos x.$

150) $\quad x + \dfrac{1}{2} \quad ^{2} |\sin x| + \sin x = 0.$ 151) $\sqrt{9-x^2}(2\sin 2\pi x + 5\cos \pi x) = 0.$

152) $\sqrt{25-4x^2}(3\sin 2\pi x + 8\cos \pi x) = 0.$

153) $\sqrt{49-4x^2} \quad \sin \pi x + 3\cos \dfrac{\pi}{2} x \quad = 0.$

154) $\dfrac{\sin 2x}{1+\sin x} = -2\cos x.$ 155) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} = 1 - \cos x.$

156) $\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x} = 2\sin x.$ 157) $\dfrac{1-\cos x}{\cos\left(\dfrac{\pi+x}{2}\right)} = 2.$

158) $\dfrac{1+2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x\cos x - 1} = 1.$

159) $\dfrac{\cos x\left(3\sqrt{2} - 2\cos x\right) - 2\sin x\cos x - 1}{\sin 2x - 1} = -1.$

160) $\dfrac{2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1}{2\sin x\cos x + 1} = -1.$

161) $\dfrac{\cos x\left(2\sin x + 3\sqrt{2}\right) - 2\cos^2 x - 1}{\sin 2x + 1} = 1.$

162) $\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x} = 1.$ 163) $\dfrac{\sin 4x}{\sin 6x} = 1.$ 164) $\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x} = -1.$

165) $\dfrac{2-3\sin x - \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0.$ 166) $\dfrac{\cos 2x - 2\cos^2 x - 2}{12x^2 - 8\pi x + \pi^2} = 0.$

167) $\dfrac{2\sin^2 x - \cos 2x}{12x^2 - 4\pi x - \pi^2} = 0.$ 168) $\dfrac{\cos 2x - \sin x}{12x^2 + 8\pi x + \pi^2} = 0.$

169) $x^4 - x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0.$ 170) $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0.$

171) $2x^3 - 4x^2 - x - 15 = 0.$ 172) $x^3 + 2x - 5\sqrt{3} = 0.$

173) $x^2(1+x)^2 + x^2 = 8(1+x)^2.$

174) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15 = 0.$

175) $(x-1)^3 + (2x+3)^3 = 27x^3 + 8.$ 176) $x^4 + x^3 - x^2 + x + 1 = 0.$

177) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$ 178) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2.$

179) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = 0.$ 180) $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0.$

181) $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0.$ 182) $x^8 - \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{1}{16} = 2x^2 \quad x^4 - \dfrac{1}{4} \quad .$

183) $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 5.$ 184) $(x+1)^4 = 2(1+x^4).$

185) $(3-x)^4 + (2-x)^4 = (5-2x)^4.$ 186) $x^4 - 2x^3 + x - 132 = 0.$

187) $x^3 - 3x = 8\dfrac{1}{8}.$ 188) $(x^2 - x + 1)^4 - 6x^2(x^2 - x + 1)^2 + 5x^4 = 0.$

189) $x^2(x-1)^2 - 8(x-1)^2 + x^2 = 0.$

190) $x(5-x)(x(x+1)+5-x) = 6(x+1).$

191) $(x^2-6x-9)^2 = x(x^2-4x-9).$ 192) $x^4 = \dfrac{11x-6}{6x-1}.$

193) $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1} + \dfrac{x^2+8x+20}{x+4} = \dfrac{x^2+4x+6}{x+2} + \dfrac{x^2+6x+12}{x+3}.$

194) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 10 \quad \dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x} \quad .$ 195) $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \dfrac{3x}{x^2-8x+15}.$

196) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3.$ 197) $\quad \sqrt{1+x}+1 \quad \sqrt{1+x}+2x+5 \quad = x.$

198) $\sqrt{x^2+3x+9} - \sqrt{x^2+3x+4} = 1.$ 199) $3^{x-2} + 5^{x-2} = 34.$

200) $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6-2x.$ 201) $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2.$

202) $\sin x = x^2+x+1.$ 203) $2\sin x = 5x^2+2x+3.$

204) $2\cos^2 \dfrac{x^2+x}{6} = 2^x + 2^{-x}.$ 205) $\sqrt{\dfrac{x^2-x-2}{\sin x}} + \sqrt{\dfrac{\sin x}{x^2-x-2}} = \dfrac{3}{2}.$

206) $\sin^8 x + \cos^8 x = 1.$ 207) $\cos^9 x + \sin^4 x = 1.$

208) $\sin^6 x + \cos^{10} x = 1.$ 209) $\sin^{41} x + \cos^{70} x = 1.$

210) $\sqrt{\sin 4x} + \sqrt{\cos 4x} = 1.$ 211) $\sqrt{\sin^5 x} + \sqrt{\cos^5 x} = \sqrt[4]{2}.$

212) $\sin x + \sin 9x = 2.$ 213) $\cos x - \cos \dfrac{x}{2} = 2.$

214) $\cos \pi x = x^2-4x+5.$ 215) $\log_2 x = 3-x.$ 216) $\log_{1/3} x = x-4.$

217) $\quad \dfrac{1}{3}^{\;x} = x+4.$ 218) $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} + \sqrt{x^2-3x} = \sqrt{2}.$

219) $\dfrac{x^2+5}{2} = x - 2\cos(7x+3).$ 220) $8 - x\cdot 2^x + 2^{3-x} - x = 0.$

221) $(4x-x^2-3)\log_2(\cos^2 \pi x + 1) = 1.$

222) $2^{-|x-2|}\log_2(4x-x^2-2) = 1.$

223) $\log_{1/3}(3+|\sin^3 x|) = 2^{|x^3|} - 2.$

224) $\log_2(3-|\sin x|) = 2^{-|\pi-x|}.$ 225) $\log_3 \quad \dfrac{1}{3} - \quad \dfrac{3\pi}{2} - x \quad = \sin x.$

226) $\sin \dfrac{2\pi}{x^2+6x+13} = \dfrac{\log_5 |x| + \log_{|x|} 5}{2\sqrt{2}}.$

227) $\log_3 \quad 4 - \quad \cos \dfrac{4x}{3} \quad = \sin x.$ 228) $2x - \sqrt{1-4x^2} \quad = \sqrt{2}(8x^2-1).$

229) $\sqrt{\dfrac{1-4x\sqrt{1-4x^2}}{2}} = 1-8x^2.$ 230) $x + \sqrt{1-x^2} \quad = \sqrt{2}(2x^2-1).$

231) $\log_{2/\sqrt{2-\sqrt{3}}}(x^2+4x-2) = \log_{1/(2-\sqrt{3})}(x^2+4x-3).$

232) $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2+2x-2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2+2x-3).$

233) $\log_{2/\sqrt{2-\sqrt{3}}}(x^2-4x-2) = \log_{1/(2-\sqrt{3})}(x^2-4x-3).$

234) $\log_{x-1} 3 = 2.$ 235) $\log_{x+2} 3 = 2.$ 236) $\log_{x+1}(x^2-3x+1) = 1.$

237) $\log_x(2x^2 - 3x - 4) = 2$. 238) $\log_x \dfrac{4x+5}{6-5x} = -1$.

239) $\log_{x^2} \dfrac{4x-5}{|x-2|} = \dfrac{1}{2}$. 240) $(\log_{\sin x} \cos x)^2 = 1$.

241) $\log_{1/(8\cos^2 x)} \sin x = \dfrac{1}{2}$. 242) $\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 = 4$.

243) $\log_{(x-6)^2}(x^2 - 5x + 9) = \dfrac{1}{2}$.

244) $\log_{(x-2)^2}(4 - 4x + x^2) = 2 + \log_{(x-2)^2}(x+5)^2$.

245) $\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) = 2$.

246) $\log_{5x-1}(10x^2 - 7x + 1)^4 = 2 + \log_{2x+1}(25x^2 - 10x + 1)$.

247) $\log_{3-4x^2}(9 - 16x^4) = 2 + \dfrac{1}{\log_2(3 - 4x^2)}$.

248) $\log_{2x^2-1}\left(x^2 - \dfrac{2}{3}\right) = 2 - \dfrac{1}{\log_3(2x^2 - 1)}$.

249) $\log_{2-2x^2}(2 - x^2 - x^4) = 2 - \dfrac{1}{\log_{4/3}(2 - 2x^2)}$.

250) $\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4$.

251) $\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) = 2$.

252) $2\log_4(3x-2) + 2\log_{3x-2} 4 = 5$. 253) $3\log_8(x+1) = 8 + 3\log_{x+1} 8$.

254) $3 + \dfrac{1}{\log_{32}(x/2)} = \log_{x/2}\left(\dfrac{75x}{4} - \dfrac{11}{x}\right)$.

255) $\dfrac{1}{\log_{11}(x/3)} - 3 = \log_{x/3}\left(\dfrac{114}{x} - 9x\right)$.

256) $\log_{2x}\left(\dfrac{32}{x} - 16x\right) = \dfrac{1}{\log_{56}(2x)} - 3$.

257) $\sqrt{\log_x \sqrt{7x}} \cdot \log_7 x = -1$. 258) $\sqrt{\log_x 5x} \cdot \log_5 x = -\sqrt{2}$.

259) $\log_x 2x = \sqrt{\log_x 2x^3}$. 260) $\log_x[\log_2(4^x - 6)] = 1$.

261) $2\log_x 3 + \log_{3x} 3 + 3\log_{9x} 3 = 0$.

262) $(\log_4^2 x + 2)\log_{16x} 4 = \log_x 4 \cdot \log_4 \dfrac{x^2}{4}$.

263) $\log_{\sqrt{x}}(x + |x-2|) = \log_x(5x - 6 + 5|x-2|)$.

264) $\log_{\sqrt{2x-1}}(2x-3) = 2\log_8 4 + \log_2 \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

265) $(\log_x 2)(\log_{2x} 2)(\log_2 4x) = 1$. 266) $\log_{x/2} 8 + \log_{x/4} 8 = \dfrac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$.

267) $(\log_3 x)|\log_x 3 - \log_2 3| = \log_x 3x - \log_2 9 + \log_3 x \cdot \log_2 3$.

268) $\log_{1/2} x + \log_{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \log_{1/2} x\right)\right) = \dfrac{1}{2}\log_x \dfrac{1}{2}$.

269) $2\log_{x-2}\sqrt{3} + (x-4)^4 \log_3(x-2) = (x-4)^2 \log_{x-2} 3 + 2\log_3\sqrt{x-2}$.

270) $(x-3)^2 \log_2(x-1) + 2\log_{x-1}\sqrt{2} = (x-3)^2 \log_{x-1} 2 + 2\log_2 \sqrt{x-1}$.
271) $2\log_3(x-2)^2 + (x-5)^2 \log_{x-2} 3 = 2\log_{x-2} 9 + (x-5)^2 \log_3(x-2)$.
272) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} = (2x-1)^{\log_{1/4}(1+7x-2x^2)}$.
273) $\dfrac{1}{\sqrt{4x-3}} = (4x-3)^{\log_{1/9}(2+5x-x^2)}$.
274) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}} = (2x-3)^{\log_{1/16}(9x-x^2+1)}$.
275) $|x+1|^{x^2-x-2} = 1$. 276) ${\log_{x/2} 2}^{\,x^2-7x+10} = 1$.
277) ${\log_2 \dfrac{x}{6}}^{\,x^2-18x+56} = 1$. 278) $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4$.
279) $x^{2-\lg^2 x - \lg x^2} - \dfrac{1}{x} = 0$. 280) $x^{\sqrt[3]{x^2}} = (\sqrt{x})^x$.
281) $|x|^{x^2-x-2} = 1$. 282) $(x^2+x+1)^{x^2-x/2} = 1$.
283) $|x-1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x-1|^3$. 284) $(1+x^2)^{2x+3} = (1+x^2)^{4x-3}$.
285) $|\cos x|^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1$. 286) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{\sin^2 x}{\sin x + 1}}$.
287) $(4-x^2)^{-\frac{\cos^2 x}{1+\cos x}} = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. 288) $(\sin x)^{x^2-x} = (\cos x)^{x^2-x}$.
289) $x^{\lg \sin x} = 1$. 290) $x^{2\sin x - \cos 2} = 1/x$.
291) $(\sin x)^{-\sin x} - 1 = \operatorname{ctg}^2 x$. 292) ${\dfrac{3}{2}}^{|x+7|} = {\dfrac{3}{2}}^{|x^2-3x+2|}$.
293) $|3^x - 2\cdot 3^{-x}|^{\log_4(x+2) - \log_2 x} = 1$. 294) $(\operatorname{tg} x)^{\cos^2 x} = (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.
295) $(\sin x + \cos x)^{-13x} = (\sin x + \cos x)^{5-x}$.
296) $(\cos x)^{\sin x} = (\sin x)^{\cos x}$.
297) ${\cos \dfrac{x}{2} + 2 - \dfrac{3}{4\cos(x/2)}}^{\sqrt{x^2+3x-10}} = 1$.
298) ${\operatorname{ctg} \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{\operatorname{ctg}(x/2)}}^{\sqrt{8x-x^2-6}} = 1$.
299) ${10\sin \dfrac{x}{2} - 6 + \dfrac{1}{\sin(x/2)}}^{\sqrt{x^2-12x+6}} = 1$.
300) $(1+x+x^2+\sin x)^{2x-1} = (1+x+x^2+\sin x)^{2-x}$.

Для каждого значения параметра a решить уравнение.
301) $x-1 = a+2x+3$. 302) $ax = 1$. 303) $ax = x+2$.
304) $(a-1)x+2 = a+1$. 305) $a^2x = x+1+a$. 306) $(2x-1)^2 = a$.
307) $ax^2 = 1-a$. 308) $ax^2 - x + 3 = 0$. 309) $|x-2| = a$.
310) $|x-a| = a$. 311) $|x-a| = x-2$. 312) $|x-a| = x-a$.
313) $|ax-1| = ax-1$. 314) $a - |x| = 1 - a^2x$.

315) $(x-1)^2+(x-a)^2=0$. 316) $\sqrt{x+2}=2a+3$. 317) $\sqrt{x+a}=2$.
318) $\sqrt{x+a}=a$. 319) $\log_2 x=2-a$. 320) $\log_3(ax)=2$.
321) $2^{2x-1}=2a+3$. 322) $3\sin x=4a-7$.

323) $2\cos\ \ x+\dfrac{\pi}{3}\ \ =a^2-3a$. 324) $\sin^2 x=a-4$.

325) $\operatorname{tg}(2x-5)+a^2=1-3a$. 326) $a\operatorname{ctg}(x-7)=2+a$.

327) $(a^2-1)\operatorname{tg}x=a-1$. 328) $\dfrac{a}{a-2x}=3$. 329) $\dfrac{x+a}{x+2}=0$.

330) $\dfrac{x+a}{x-2a}=0$. 331) $\dfrac{(x-4a)(x+2a+3)}{x+3a}=0$.

332) $2x^2-(a-1)x+a+1=0$. 333) $ax^2+2x+1=0$.
334) $(a+1)x^2+2(a+1)x+a-2=0$.
335) $(1+a^2)x^2+2(x-a)(1+ax)+1=0$.
336) $x|x+1|=a$. 337) $|x+a|-|2x-a+2|=a$.
338) $|x-a|+|x+a+1|=3$. 339) $x+\sqrt{1-x^2}=a$.

340) $\sqrt{x^2-1}+x=a$. 341) $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=a$.

342) $ax^4-x^3+a^2x-a=0$. 343) $(ax-1)^3+(a+1)^3x^2=0$.
344) $x^4+x^3-3a^2x^2-2a^2x+2a^4=0$.
345) $4a^3x^4+4a^2x^2+32x+a+8=0\quad(a\geqslant 0)$.
346) $\quad\overline{\log_x ax}\,\log_a x=-\sqrt{2}\quad(a>0,\ a\neq 1)$.
347) $(\lg\sin x)^2-2a\lg\sin x-a^2+2=0$.
348) $(\log_a\sin x)^2+\log_a\sin x-a=0\quad(a>0,\ a\neq 1)$.

349) $[1+(a+2)^2]\log_3(2x-x^2)+[1+(3a-1)^2]\log_{11}\ \ 1-\dfrac{x^2}{2}\ \ =$
$$=\log_3(2x-x^2)+\log_{11}\ \ 1-\frac{x^2}{2}\ \ .$$

350) $[1+(a-1)^2]\log_6(4x-4x^2)+[1+(4a+3)^2]\log_5(1-3x^2)=$
$$=\log_6(4x-4x^2)+\log_5(1-3x^2).$$

Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения.
351) $|2x-3|=a$. 352) $|x+1|=x-a\ \ (a\neq -1)$.

353) $|x-2|=ax$. 354) $|x-4|=\dfrac{a}{x}$. 355) $\sqrt{x}=x+a$.

356) $\sqrt{1-x^2}=|ax|$. 357) $\sqrt{x-1}=ax$. 358) $x^4-2x^2+1=a$.
359) $|x^2-2x-3|=a$. 360) $\sqrt{x-a}=3-x$. 361) $||2x|-6|=x+a$.
362) $\sqrt{a^2-x^2}=1-x$. 363) $\sqrt{ax}=1+x$.
364) $x^4+(1-2a)x^2+a^2-1$. 365) $\quad\overline{x-\sqrt{x-a}}=a$.

366) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x+a}=1$. 367) $\log_2 x^4+\log_a x^2=1$.

368) $\ \ x+\dfrac{1}{x}-3\ \ =a-3$. 369) $\ \ x^2-\dfrac{3}{2}x-1\ \ =-x^2-4x+a$.

370) $\log_a x+|a+\log_a x|\log_{\sqrt{x}} a=a\log_x a$.

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет хотя бы одно решение.

371) $a(x-1)=|x|$. 372) $||x|-1|=-|a-x|+1$.

373) $4\sin x+9\cos x=a$. 374) $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-3}=a$.

375) $\sqrt{2x+a}=x$. 376) $a\sqrt[4]{1+x}+\dfrac{a}{x}\sqrt[4]{1+x}=\sqrt[4]{x}$.

377) $81^{|x+1|}-2\cdot 9^{|x+1|}+a=0$. 378) $\log_{x^2-1}(x+a)=1$.

379) $\log_{100}x^2=\log_{\sqrt{x}}10\cdot\ \lg 10a-\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{a}\ \ .$

380) $$[1+(3a-2)^2]\log_3(-4x-4x^2)+[1+(a+1)^2]\log_7(1-2x^2)=$$
$$=\log_3(-4x-4x^2)+\log_7(1-2x^2).$$

381) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $6-3a+4ax=4a+12x$ имеет корень, меньший 1.

382) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $14x+8a=8+2ax+3a$ имеет корень, больший 1.

383) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2-4ax+4a^2+3a+1=0$ не имеет решений.

384) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2-4ax+4a^2+a+3=0$ не имеет решений.

Найти все целые значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет решения. Найти все эти решения.

385) $5-4\sin^2 x-8\cos^2\dfrac{x}{2}=3a$. 386) $2-2\cos 2x=3a+4\sin x$.

387) $2\sin^2 x+6\cos^2\dfrac{x}{2}=5-2a$. 388) $2-8\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-2\cos 2x=4a$.

389) Найти все значения параметра a из интервала $(2,5)$, при каждом из которых существует хотя бы одно число x из отрезка $[2,3]$, удовлетворяющее уравнению

$$\log_2(3-|\sin ax|)=\cos\quad \pi x-\frac{\pi}{6}\quad .$$

390) Найти все значения параметра a из интервала $(5,16)$, при каждом из которых существует хотя бы одно число x из отрезка $[1,2]$, удовлетворяющее уравнению

$$1-\cos^2\quad \frac{ax}{2}+\frac{3\pi}{8}\quad =\quad \frac{1}{3}^{\,|\cos\pi x-\sin\pi x|}\ .$$

391) Найти все значения параметра a из интервала $(2,7)$, при каждом из которых существует хотя бы одно число x из отрезка $[1,2]$, удовлетворяющее уравнению

$$\log_3\quad 1+\sin^2\quad \frac{\pi}{2}x+\frac{5\pi}{12}\qquad =|\cos xa|-1.$$

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет единственное решение.

392) $(x-2)a = |x|$. 393) $\sqrt{x-a} = 2-x$. 394) $\sqrt{ax} = x+2$.

395) $|a+x| = 1 + \frac{a}{4}x$. 396) $(3+2a-a^2)\sqrt{x} = a-3$.

397) $1 - ||x|-1| = |a-x|+1$. 398) $\overline{a(2^x-2)+1} = 1-2^x$.

399) $\frac{1+x}{\sqrt{x}}^{\,2} + 2a\cdot\frac{1+x}{\sqrt{x}} + 1 = 0$. 400) $144^{|x|} - 2\cdot 12^{|x|} + a = 0$.

401) $\log_{1/2}\ 4^a\cdot\frac{2x-1}{x+1} = 0$. 402) $x^2 + \frac{6x}{\sqrt{\sin a}} + \frac{9\sqrt{3}}{\cos a} + 36 = 0$.

403) $x^2 + \frac{2x}{\sqrt{\sin a}} + \frac{1}{\cos a} + 2\sqrt{2} = 0$. 404) $x^2 - \frac{2x}{\sqrt{\sin a}} - \frac{1}{\cos a} - 2\sqrt{2} = 0$.

405) $x^2 + \frac{6x}{\sqrt{\sin a}} + \frac{3\sqrt{3}}{\cos a} + 12\sqrt{3} = 0$. 406) $x|x+2a| + 1 - a = 0$.

407) $|x+2| - |x-2| = \frac{1}{2}x + a$. 408) $|1-ax| = 1 + (1-2a)x + ax^2$.

409) $|(a+1)x-2| = (1+a)x^2 - 2ax + 2$. 410) $\lg(ax) = 2\lg(x+1)$.

Для каждого значения параметра a найти все значения x, удовлетворяющие уравнению, и найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет только один корень.

411) $(x-3)(x+1) + 3(x-3)\ \overline{\frac{x+1}{x-3}} = (a-1)(a+2)$.

412) $(x-2)(x-4) - 5(x-2)\ \overline{\frac{x-4}{x-2}} = (a-2)(a+3)$.

413) $(x-5)(x-1) + 3(x-5)\ \overline{\frac{x-1}{x-5}} - (a+1)(a-2) = 0$.

414) $(x+2)(x+4) + 5(x+2)\ \overline{\frac{x+4}{x+2}} - (a+2)(a-3) = 0$.

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет два различных корня.

415) $|x+1| - 2ax = 1-x$. 416) $||x|-2| = \frac{1}{2}x + a$.

417) $ax^2(1+x^2) = 1$. 418) $x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 4 = 0$.

419) $(3a-1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$. 420) $(2a+1)x^2 - ax + a - 2 = 0$.

421) $|x+2| - |x-2| = \frac{1}{2}x + a$. 422) $|x - \sqrt{x}| = a-3$.

423) $\lg(ax) = 2\lg(x+1)$. 424) $x^3 - x^2|2+a| + ax = a|2+a|$.

425) $\sqrt{1-x^2} = (a-\sqrt{x})^2$. 426) $x^2 + 4x - 2|x-a| + 2 = a$.

427) $\log_2(4^x - a) = x$. 428) $x + \log_{1/2}(4^x + a^3) = 0$.

429) $x + \log_{1/3}(9^x - 2a) = 0$.

Для каждого значения параметра a найти все x, удовлетворяющие уравнению и найти все значения параметра a, при каждом из которых это уравнение имеет два решения.

430) $ax^2 = 1 + |x|$. 431) $(x+1)|x-1| - a = 0$. 432) $\sqrt{2x+a} = x$.

433) $\sqrt{x^2 - 2a} = a - 1$. 434) $\sqrt{x^2 + a^2} = x + a$.

435) $\log_2(|a|x - x^2) = 0$. 436) $\log_a x + \log_a(x-2) = 1$.

437) $4^x - 2^{x+1} \cdot a - 2^x + a(a+1) = 0$.

438) $\log_{a^2 - x^2}[(ax)^2 - 1] = 1$. 439) $\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} = a$.

440) $|x+3| - a|x-1| = 4$. 441) $|x-2| + a|x+3| = 5$.

442) $a|x+3| + 2|x+4| = 2$. 443) $3|x-2| - a|2x+3| = 21/2$.

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет три различных корня. Найти эти корни.

444) $x^4 - x^2 + a^2 - 3a = 1$. 445) $||2x| - 4| = x + a$.

446) $4^{-|x-a|}\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x}\log_{1/3}(2|x-a| + 2) = 0$.

447) $x - a = 2|2|x| - a^2|$. 448) $x - \dfrac{a}{2} = 2|2|x| - a^2|$.

449) $x - \dfrac{a}{3} = 9|9|x| - a^2|$. 450) $x - \dfrac{a}{2} = 4|4|x| - a^2|$.

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

451) $(x-a)^2[a(x-a)^2 - a - 1] = -1$.

452) $[(x-a-1)^2 - 2](x-a-1)^2 = a^2 - 1$.

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет больше отрицательных корней, чем положительных.

453) $[(x-a)^2 - 2a - 4](x-a)^2 = -2a - 3$.

454) $(x+2a)^2[(x+2a)^2 - a - a^4] = -a^5$.

455) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $||2x| - 4| = x + a$ имеет не менее трех корней.

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение на заданном отрезке имеет нечетное число различных корней.

456) $a - x^2 - \cos\dfrac{11\pi x}{4} \quad \sqrt{8 - ax} = 0, \quad x \in [-2, 3]$.

457) $a - 3x^2 + \cos\dfrac{9\pi x}{2} \quad \sqrt{3 - ax} = 0, \quad x \in [-1, 5]$.

458) $a - x^2 + \cos\dfrac{13\pi x}{4} \quad \sqrt{8 + ax} = 0, \quad x \in [-5, 2]$.

459) $a - 5x^2 - \cos\dfrac{15\pi x}{2} \quad \sqrt{5 + ax} = 0, \quad x \in [-3, 1]$.

ГЛАВА II

НЕРАВЕНСТВА

Пусть даны две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Если надо найти все числа α из области, являющейся пересечением областей существования этих функций, для каждого из которых выполняется неравенство $f(\alpha) > g(\alpha)$, то говорят, что стоит задача решить неравенство

$$f(x) > g(x)$$

с одним неизвестным x, или что дано неравенство $f(x) > g(x)$.

Аналогично формулируются задачи: решить неравенство $f(x) < g(x)$, решить неравенство $f(x) \geqslant g(x)$, решить неравенство $f(x) \leqslant g(x)$.

Отметим, что множество решений неравенства $f(x) \geqslant g(x)$ состоит из решений строгого неравенства $f(x) > g(x)$ и решения уравнения $f(x) = g(x)$. Поэтому в дальнейшем часто мы будем формулировать утверждения для строгих неравенств, имея в виду, что случай нестрогих неравенств может быть сведен к этому случаю.

Как уже отмечено, при решении уравнений в основном используются два метода. Первый из них основан на выполнении равносильных преобразований (вообще говоря, на некотором множестве). Второй же использует переход к уравнениям, являющимся следствиями исходного, и обязательную проверку, т.е. отбор среди найденных чисел искомых корней с помощью подстановки этих чисел в исходное уравнение.

При решении неравенств второй способ, как правило, не используется. Ведь множество решений неравенства чаще всего есть бесконечное множество, и в связи с этим проверка решений бывает затруднительной. Основной метод решения неравенств есть его упрощение с помощью преобразований, равносильных, вообще говоря, на некотором множестве M. В результате исходное неравенство оказывается равносильным на M совокупности систем простейших неравенств, каждая из которых может быть решена непосредственно.

В § 2 рассматриваются преобразования, равносильные для всех действительных x; в § 3 — преобразования, равносильные на некотором множестве M; § 4 посвящен решению неравенств, предлагавшихся на вступительных экзаменах в вузы.

Отметим, что решение тригонометрических неравенств не входит в программу вступительных экзаменов в вузы и поэтому здесь не рассматривается.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ПРОСТЕЙШИЕ НЕРАВЕНСТВА

1.1. Область допустимых значений и множество решений неравенства. *Областью допустимых значений* (ОДЗ) неравенства $f(x) > g(x)$ ($f(x) < g(x)$, $f(x) \geqslant g(x)$, $f(x) \leqslant g(x)$) называется общая часть (пересечение) областей существования функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, т.е. множество всех числовых значений неизвестного x, при каждом из которых имеют смысл (т.е. определены) левая и правая части неравенства.

Любое число x из ОДЗ неравенства называется *допустимым значением* для данного неравенства.

Так, например, для неравенства

$$x - x^3 > 2x + 2$$

ОДЗ является множеством всех действительных чисел, для неравенства

$$\sqrt{x+2} > 3$$

ОДЗ есть множество всех чисел, удовлетворяющих условию $x \geqslant -2$, а для неравенства

$$\log_2 x > \sqrt{-x}$$

ОДЗ является пустым множеством.

Число α из ОДЗ неравенства называется решением неравенства, если при подстановке его вместо неизвестного в неравенство оно превращается в верное числовое неравенство.

Например, число $x = 1$ является решением неравенства

$$\sqrt{x+8} - \sqrt{x} > \sqrt{x+1},$$

так как при $x = 1$ левая его часть равна 2, правая равна $\sqrt{2}$ и поэтому получаем верное числовое неравенство $2 > \sqrt{2}$.

Решить неравенство – это значит найти множество всех его решений.

Если множество всех решений неравенства есть пустое множество, то говорят, что данное неравенство не имеет решений.

Нахождение ОДЗ неравенства позволяет в некоторых случаях доказать, что неравенство не имеет решений, и часто позволяет упрощать процесс решения неравенства.

Так, например, ОДЗ неравенства

$$\sqrt{x-8} + \sqrt{4-x} > \sqrt{x}$$

есть пустое множество, поэтому неравенство не имеет решений.

Решениями неравенства

$$\overline{x^2 + 5x + 6} > -2$$

являются все x из его ОДЗ, поскольку для таких значений левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна.

ОДЗ неравенства

$$2^{x^2+x} \geqslant \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x \geqslant 0$. Для таких значений x имеем, что
$$2^{x^2+x} \geqslant 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leqslant 1.$$
Следовательно, все x из ОДЗ, т.е. все $x \geqslant 0$, являются решениями исходного неравенства.

1.2. Решение простейших неравенств. В этом пункте приведем решения некоторых простейших неравенств.

Алгебраическим неравенством степени n называется неравенство $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$, $f(x) \geqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$), в котором функция $y = f(x)$ является многочленом степени n, т.е.
$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$
К простейшим таким неравенствам относятся неравенства
$$x^{2m} > b \quad \text{и} \quad x^{2m+1} > b,$$
где m — данное натуральное число.

Приведем их решения.

1. $x^{2m+1} > b$, m — натуральное число.

При любом b множество решений неравенства есть промежуток $\sqrt[2m+1]{b} < x < +\infty$.

2. $x^{2m+1} < b$, m — натуральное число.

При любом b множество решений неравенства есть промежуток $-\infty < x < \sqrt[2m+1]{b}$.

3. $x^{2m} > b$, m — натуральное число.

При $b < 0$ множество решений неравенства совпадает с множеством всех действительных чисел: $-\infty < x < +\infty$.

При $b \geqslant 0$ множество решений неравенства состоит из двух промежутков $-\infty < x < -\sqrt[2m]{b}$ и $\sqrt[2m]{b} < x < +\infty$.

4. $x^{2m} < b$, m — натуральное число.

При $b < 0$ и при $b = 0$ неравенство не имеет решений.

При $b > 0$ множество решений неравенства состоит из промежутка $-\sqrt[2m]{b} < x < \sqrt[2m]{b}$.

Приведем решения простейших показательных неравенств.

5. $a^x > b$, $a > 1$.

При $b < 0$ и $b = 0$ множество решений неравенства совпадает с множеством всех действительных чисел: $-\infty < x < +\infty$.

При $b > 0$ множество решений неравенства есть промежуток $\log_a b < x < +\infty$.

6. $a^x < b$, $a > 1$.

При $b < 0$ и $b = 0$ неравенство не имеет решений.

При $b > 0$ множество решений неравенства есть промежуток $-\infty < x < \log_a b$.

7. $a^x > b$, $0 < a < 1$.

При $b < 0$ и $b = 0$ множество решений неравенства совпадает с множеством всех действительных чисел: $-\infty < x < +\infty$.

При $b > 0$ множество решений неравенства есть промежуток $-\infty < < x < \log_a b$.

8. $a^x < b,\ 0 < a < 1$.

При $b < 0$ и $b = 0$ неравенство не имеет решений.

При $b > 0$ множество решений неравенства есть промежуток $\log_a b < < x < +\infty$.

Приведем еще решения простейших логарифмических неравенств.

9. $\log_a x > b,\ a > 1$.

При любом b множество решений неравенства есть промежуток $a^b < < x < +\infty$.

10. $\log_a x < b,\ a > 1$.

При любом b множество решений неравенства есть промежуток $0 < < x < a^b$.

11. $\log_a x > b,\ 0 < a < 1$.

При любом b множество решений неравенства есть промежуток $0 < < x < a^b$.

12. $\log_a x < b,\ 0 < a < 1$.

При любом b множество решений неравенства есть промежуток $a^b < < x < +\infty$.

1.3. Равносильность неравенств. Пусть даны два неравенства. Если любое решение первого неравенства является решением второго неравенства, а любое решение второго неравенства является решением первого неравенства, то такие два неравенства называются равносильными, иными словами, если множества решений двух неравенств совпадают, то эти неравенства называются равносильными.

Например, неравенства

$$x^2 > 0 \quad \text{и} \quad x^4 > 0$$

равносильны, так как множество решений каждого из них есть объединение двух промежутков: $-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty$. Неравенства

$$\sqrt{x} > 1 \quad \text{и} \quad x^2 > 1$$

не являются равносильными, так как, например, число $x = -2$ является решением неравенства $x^2 > 1$, но не является решением неравенства $\sqrt{x} > 1$.

Подразумевается, что если каждое из неравенств не имеет решений, то такие два неравенства равносильны.

Замена одного неравенства другим неравенством, ему равносильным, называется равносильным переходом от одного неравенства к другому.

Пусть даны два неравенства и некоторое множество M. Если любое решение первого неравенства, принадлежащее множеству M, является решением второго неравенства, а любое решение второго неравенства, принадлежащее множеству M, является решением первого неравенства, то такие два неравенства называются равносильными на множестве M.

Например, неравенства

$$x + 1 + \frac{1}{x} \geqslant x + \frac{1}{x} \quad \text{и} \quad x + 1 \geqslant x$$

не являются равносильными на множестве всех действительных чисел, но равносильны, например, на промежутке $-\infty < x < 0$.

Неравенства

$$\sqrt{x} > 1 \quad \text{и} \quad x^4 > 1$$

не являются равносильными на множестве всех действительных чисел, но равносильны на множестве положительных чисел.

Отметим, что если каждое из двух неравенств не имеет решений на множестве M, то такие неравенства также называются равносильными на множестве M.

Замена одного неравенства другим неравенством, равносильным ему на некотором множестве M, называется равносильным переходом на множестве M.

Утверждения о равносильности неравенств

1. Неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) - g(x) > 0$ равносильны.

2. Неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) + \alpha > g(x) + \alpha$ равносильны для любого числа α.

3. Неравенства $f(x) > g(x)$ и $\alpha f(x) > \alpha g(x)$ равносильны для любого положительного числа α.

4. Неравенства $f(x) > g(x)$ и $\alpha f(x) < \alpha g(x)$ равносильны для любого отрицательного числа α.

5. Неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $f(x) > g(x)$ равносильны для любого фиксированного числа a из промежутка $(1, +\infty)$.

6. Неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $f(x) < g(x)$ равносильны для любого фиксированного числа a из промежутка $(0, 1)$.

7. Если функции $y = \varphi(x)$ и $y = g(x)$ тождественно равны, то неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) > \varphi(x)$ равносильны.

8. Пусть n – натуральное число и на некотором множестве M функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ неотрицательны. Тогда на этом множестве неравенства $f(x) > g(x)$ и $(f(x))^n > (g(x))^n$ равносильны.

9. Пусть a – фиксированное число из промежутка $(1, +\infty)$ и на некотором множестве M функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ положительны. Тогда на этом множестве равносильны неравенства

$$f(x) > g(x) \quad \text{и} \quad \log_a f(x) > \log_a g(x).$$

10. Пусть a — фиксированное число из промежутка $(0, 1)$ и на некотором множестве M функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ положительны. Тогда на этом множестве равносильны неравенства

$$f(x) > g(x) \quad \text{и} \quad \log_a f(x) < \log_a g(x).$$

11. Пусть на множестве M, содержащемся в ОДЗ неравенства $f(x) > g(x)$, функция $y = \varphi(x)$ положительна. Тогда на этом множестве равносильны неравенства

$$f(x) > g(x) \quad \text{и} \quad f(x)\varphi(x) > g(x)\varphi(x).$$

12. Пусть на множестве M, содержащемся в ОДЗ неравенства $f(x) > g(x)$, функция $y = \varphi(x)$ отрицательна. Тогда на этом множестве равносильны неравенства

$$f(x) > g(x) \quad \text{и} \quad f(x)\varphi(x) < g(x)\varphi(x).$$

13. Если функции $y = \varphi(x)$ и $y = g(x)$ тождественно равны на множестве M, то неравенства $f(x) + \varphi(x) > 0$ и $f(x) + g(x) > 0$ равносильны на множестве M.

Отметим, что утверждение 1 позволяет рассматривать вместо неравенства $f(x) > g(x)$ равносильное ему неравенство $f(x) - g(x) > 0$. Поэтому в дальнейшем в теоретической части преимущественно рассматриваются неравенства вида $F(x) > 0$.

1.4. Системы неравенств. Пусть дано m неравенств $f_1(x) > g_1(x), \ldots$ $\ldots, f_m(x) > g_m(x)$. Обозначим через Q область, являющуюся пересечением областей допустимых значений всех этих неравенств. Если нужно найти все числа α из области Q, каждое из которых является решением каждого из этих неравенств, то говорят, что дана система m неравенств

$$\begin{gathered} f_1(x) > g_1(x), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_m(x) > g_m(x) \end{gathered}$$

и область Q называют *областью допустимых значений* (ОДЗ) этой системы. Число α из ОДЗ системы неравенств называется *решением* этой системы, если оно является решением каждого из неравенств системы. Решить систему неравенств – это значит найти множество всех ее решений. Если это множество окажется пустым, то говорят, что система неравенств не имеет решений.

Например, число $x = 5$ является решением системы неравенств

$$\begin{gathered} x^2 + 1 > x, \\ 1/x > 1/x^2 - 1. \end{gathered}$$

Решением системы неравенств

$$\begin{gathered} x^2 > 0, \\ x^4 > 0 \end{gathered}$$

является любое отличное от нуля действительное число.

Система неравенств

$$\begin{aligned} &x^2 > 1, \\ &x > 1, \\ &x^2 + 1 < 0 \end{aligned}$$

не имеет решений, так как неравенство $x^2 + 1 < 0$ не имеет решений.

Систему неравенств обычно решают следующим образом: сначала решают каждое неравенство на ОДЗ этой системы, т.е. находят множества решений каждого из этих неравенств на ОДЗ системы, затем находят множество, являющееся пересечением всех этих множеств. Это множество и будет множеством всех решений системы неравенств.

Две системы неравенств называются равносильными, если множества их решений совпадают.

Заметим, что замена в системе одного из неравенств равносильным неравенством приводит к системе, равносильной исходной. Например, равносильны системы неравенств

$$\begin{array}{l} x+3 > 2x-5, \\ x^2 < 2 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{l} (x+3)-(2x-5) > 0, \\ x^2 < 2. \end{array}$$

1.5. Совокупность неравенств и систем неравенств. Пусть дано k систем неравенств

$$\begin{array}{lcl} f_1(x) > g_1(x), & & f_k(x) > g_k(x), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \ldots, & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ h_1(x) > s_1(x), & & h_x(x) > s_k(x). \end{array} \tag{1}$$

Обозначим через Q область, являющуюся пересечением областей допустимых значений всех этих систем. Если нужно найти все числа α из области Q, каждое из которых является решением хотя бы одной из этих систем, то говорят, что дана совокупность k систем неравенств и область Q называют *областью допустимых значений* (ОДЗ) совокупности систем неравенств (1). Число α из ОДЗ совокупности систем неравенств (1) называют решением этой совокупности, если оно является решением хотя бы одной системы неравенств из совокупности (1).

Так, например, числа $x = 0$ и $x = 2$ являются решениями совокупности систем неравенств

$$\begin{array}{ll} x > 1, & x \leqslant 1/2, \\ x^2 > 1, & x > x^4 - 2x - 1, \end{array} \tag{2}$$

так как оба они входят в ОДЗ совокупности (2) и $x = 0$ есть решение второй системы совокупности (2) (заметим, что $x = 0$ не является решением первой системы совокупности (2), а $x = 2$ не является решением второй системы совокупности (2)).

Решить совокупность систем неравенств (1) это значит найти множество всех ее решений; если это множество оказывается пустым множеством, то говорят, что совокупность систем неравенств (1) не имеет решений.

Отметим, что если каждая из k систем (1) состоит только из одного неравенства, то говорят, что дана совокупность k неравенств.

Говорят, что неравенство $f(x) > g(x)$ равносильно совокупности систем неравенств (1), если множество решений неравенства $f(x) > g(x)$ совпадает с множеством решений совокупности систем неравенств (1).

Замена неравенства $f(x) > g(x)$ равносильной ему совокупностью систем неравенств (1) называется равносильным переходом от неравенства к совокупности систем неравенств.

Например, неравенство

$$(x+2)(x^2-1) > 0$$

равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} x+2 > 0, \\ x^2-1 > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+2 < 0, \\ x^2-1 < 0. \end{cases}$$

Иногда приходится совершать переход от неравенства к совокупности систем неравенств на каком-то множестве M. Говорят, что неравенство $f(x) > g(x)$ равносильно на множестве M совокупности систем (1), если любое решение неравенства $f(x) > g(x)$, принадлежащее множеству M, является решением совокупности (1), а любое решение совокупности (1), принадлежащее множеству M, является решением неравенства $f(x) > g(x)$.

Например, неравенство

$$(\log_2 x)(x+1)(x-2) > 0$$

на множестве $x > 0$ равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} \log_2 x > 0, \\ x-2 > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \log_2 x < 0, \\ x-2 < 0. \end{cases}$$

Систему неравенств

$$\begin{cases} h(x) < g(x), \\ g(x) < f(x) \end{cases}$$

часто записывают в виде двойного неравенства

$$h(x) < g(x) < f(x).$$

Упражнения

Найти область допустимых значений неравенства.

1) $3x^3 - x^2 + x^4 - 1 > 0$. 2) $\dfrac{(x-4)(x+3)}{x^2+1} < 0$.

3) $\dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-1)x} \leqslant 0$. 4) $x^2 - \dfrac{1}{x} > x - \dfrac{1}{x}$. 5) $\sqrt{x+2} > x+1$.

6) $\sqrt{x-3} + \sqrt{7-x} > \sqrt{x}$. 7) $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-7} > 1$.

8) $\overline{x^2(x-1)} \leqslant 1$. 9) $\overline{x^2-x} - \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} + x > 1$.

10) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} > \sqrt{1+x} + x + 2$. 11) $\log_2(2x-3) \geqslant 2$.

12) $\log_{1/2}(x-3) - \log_{1/3}(x-3) + x^2 - 3x \geqslant 4$.

13) $(2x-5) \cdot \sqrt{x} \cdot \log_5 x \geqslant 0$. 14) $\log_2(\log_{1/3}(x+1)) > 1$.

15) $\log_\pi x + \dfrac{1}{\log_\pi x} \geqslant 2$. 16) $\sqrt{x^2-1} > \dfrac{1}{\log_2 x - 1}$.

17) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{|x-2|} > 0$. 18) $\log_2(2^x-1) - \log_4(1-3^x) < 0$.

19) $\sqrt{4^{2x} - 2\cdot 4^x + 1} - \sqrt[4]{x+1} < 0$. 20) $\dfrac{1}{2^x-1} - \dfrac{1}{2^{x+1}-1} > 2$.

21) $2^{\log_2 x} - |x+1| < 4$.

22) $\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{6x-x^2-9} > \log_{1/5}(x^3-18x+28)$.

23) $\sqrt{x^2(x-1)^2(x-2)} - \log_7\sqrt{-x+2} \geqslant 0$.

24) $\dfrac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3} \leqslant 1$. 25) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{x}} > \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Доказать, что следующее неравенство не имеет решений.

26) $\sqrt{2x-4+x^2} < -1$. 27) $\log_2(-x) + 3\log_2 x > x+1$.

28) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+4} \geqslant 2$. 29) $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-1} > 0$.

30) $|x^2-x| \leqslant -1$. 31) $5^{x^2-4x+7} < -1/2$. 32) $|x-1| + |2x+3| \leqslant 0$.

33) $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-4} \geqslant -7$. 34) $|x^2+1| + |x^2-4x+7| \leqslant 1$.

35) $\sqrt{2x^2-4x+3} + \sqrt{5-4x+x^2} < 3/2$.

36) $\sqrt{x^2-x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} < 2$.

37) $\sqrt[4]{x+1} + \sqrt{\sqrt{x+1}+3} < \sqrt{2\sqrt{x+1}+2}$.

38) $\dfrac{1}{x^2-2x+3} > 1 + \sqrt{x^2-2x+3}$.

39) $2^{x^2-4x+9} < \dfrac{1}{1+|x-3|}$. 40) $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x+5} \leqslant 2{,}2$.

41) $(x^2+x+4)(x^2+2x+3) \leqslant 1$. 42) $\sqrt[3]{x+\dfrac{1}{x}} \geqslant \sqrt{-2x} - 1$.

43) $\sqrt{10+3\sqrt{x^2-1}} + x^8\sqrt{5-x} \leqslant 3$.

44) $\log_5(x+2) + 3\log_5(x-2) \geqslant \log_5(4-x^2) + 1$.

45) $2\log_3(4+x^2) \leqslant \log_2(1-(x+3)^2)$.

46) $\log_2\left(x^2+1+\dfrac{1}{x^2+1}\right) \leqslant \log_2\left(2-\sqrt{x+5}\right)$.

47) $\log_4\left(2+\sqrt{x}\right) + \log_2(1+x^2) \leqslant 0$. 48) $2^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}} + 4^{\sqrt{x}+1} \leqslant 5$.

49) $\sqrt{5-x} + \sqrt{x-2} < (x-1)^2(x-6)$. 50) $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} < \sqrt{3}$.

51) $\sqrt{4+x} + \sqrt[4]{16-x} < 2$. 52) $\sqrt{x} + \sqrt{3-x} + \sqrt{x^2-5x} > \sqrt{3}$.

53) $\left(\sqrt{2}|x|-1\right)\cdot\log_2(2-2x^2) > 1$.

54) $3^{-|x-2|}\cdot\log_2(4x-x^2-2) > 1$.

55) $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^4-x^2+1} < 2\sqrt[4]{x^6+1}$.

Являются ли равносильными следующие неравенства?

56) $\dfrac{1}{3}(x+2) > \dfrac{1}{3}(2x-4)$ и $x+2 > 2x-4$.

57) $-3(2x-7) < -3(x+5)$ и $2x-7 > x+5$.

58) $x+1+\dfrac{1}{x-6} < 4+\dfrac{1}{x-6}$ и $x+1 < 4$.

59) $x+2-\dfrac{1}{x-1} < -x+5-\dfrac{1}{x-1}$ и $x+2 < -x+5$.

60) $x^2 > 1$ и $\dfrac{2}{x-1} > 0$. 61) $(x-1) > 0$ и $x(x-1) > 0$.

62) $x-1 > 0$ и $\sqrt{x}-1 > 0$. 63) $x^2 > x^4$ и $x^2 < 1$.

64) $x(x^2+1) > 2(x^2+1)$ и $x-2 > 0$. 65) $x^2 < x^4$ и $x^2 > 1$.

66) $\dfrac{x-3}{x+2} < 0$ и $(x-3)(x+2) < 0$. 67) $\dfrac{x+4}{x-1} \geqslant 0$ и $(x+4)(x-1) \geqslant 0$.

68) $(3x-1)^2 < (x+3)^2$ и $3x-1 < x+3$.

69) $|x+1| > |x|$ и $(x+1)^2 > x^2$. 70) $(2x+1)^2 > 1$ и $|2x+1| > 1$.

71) $|1-x| \leqslant 1$ и $1-x \leqslant 1$. 72) $\sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{x^2}$ и $x-1 < 2x$.

73) $\sqrt{(x-3)^2} > \sqrt{(2x+1)^2}$ и $|x-3| > |2x+1|$.

74) $x^5 > 1$ и $x > 1$. 75) $\dfrac{1}{x} \leqslant 1$ и $1 \leqslant x$.

76) $x^2 > 1$ и $x > 1$. 77) $\dfrac{x-3}{(x-4)^2} > 0$ и $x-3 > 0$.

78) $\dfrac{x-2}{(x+1)^2} > 0$ и $x-2 > 0$. 79) $\dfrac{x+1}{(x-2)^2} < 0$ и $x+1 < 0$.

80) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} > 0$ и $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 > 0$. 81) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} < 0$ и $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)^2 < 0$.

82) $\dfrac{x-3}{x^2-5x+6} \leqslant 2$ и $2x^2-11x+15 \geqslant 0$.

83) $\dfrac{1}{x^2+1} > \dfrac{1}{x^2+x+1}$ и $x^2+x+1 > x^2+1$.

84) $\dfrac{x^2}{x} < 0$ и $x < 0$. 85) $\dfrac{x^2}{x} \leqslant 0$ и $x \leqslant 0$.

86) $\sqrt{3x-2} \geqslant -1$ и $3x-2 \geqslant 1$. 87) $\sqrt{x+2} \leqslant -3$ и $x+2 \leqslant 9$.

88) $\sqrt{2x-3} \geqslant 2$ и $2x-3 \geqslant 4$. 89) $\sqrt{x^2+2} < 2$ и $x^2+2 < 4$.

90) $\sqrt{2x-1} \geqslant \sqrt{1-3x}$ и $2x-1 \geqslant 1-3x$.

91) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} > 1$ и $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$. 92) $\dfrac{\sqrt{25x+1}}{\sqrt{x-1}} \geqslant 3$ и $\sqrt{\dfrac{25x+1}{x-1}} \geqslant 3$.

93) $\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}} \leqslant 1$ и $\dfrac{x-2}{x+3} \leqslant 1$. 94) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-1} \geqslant 1$ и $x \geqslant 2$.

95) $\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-2} < \dfrac{1}{4}$ и $4\sqrt{x^2-4} < 1$.

96) $\sqrt{x^2(x-1)} < 1$ и $|x|\sqrt{x-1} < 1$.

97) $x^2 + \sqrt{x} > x + \sqrt{x}$ и $x^2 > x$.

98) $\dfrac{\sqrt{x}\cdot(x-1)}{x-4} > 0$ и $\dfrac{x-1}{x-4} > 0$.

99) $\log_2(x+1) > \log_2(2x-5)$ и $x+1 > 2x-5$.

100) $\log_3 \dfrac{3x+2}{x+3} \geqslant 1$ и $\log_3(3x+2) - \log_3(x+3) \geqslant 1$.

101) $\log_2 x^2 > 1$ и $2\log_2|x| > 1$.

102) $\log_{2/5}(x+4)(x-2) \leqslant 2$ и $\log_{2/5}(x+4) + \log_{2/5}(x-2) \leqslant 2$.

103) $\log_3 \dfrac{x+1}{x} + \log_3 x(x+1) \leqslant 1$ и $\log_3(x+1)^2 \leqslant 1$.

104) $2^{\log_2 x} + x^2 > 1$ и $x^2 + x > 1$.

105) $\log_7 x^3 > \log_7\left(x^5 + 1 + \sqrt{1-x}\right)$ и $x^3 > x^5 + 1 + \sqrt{1-x}$.

106) $\log_2 \dfrac{x+2}{2x} + \log_2 \dfrac{2x}{x+2} \geqslant 0$ и $x \geqslant 2$.

107) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{7}{x+2}} < \sqrt[3]{\dfrac{6}{x-1}}$ и $\dfrac{4x^2-15x-25}{(x+1)(x+2)(x-1)} < 0$.

108) $2^{x^2-x} < 2^{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}$ и $x^2 - x < 1 - x$.

109) $(2x-3)\log_5(1+x^2) \geqslant (x+1)\log_5(1+x^2)$ и $2x-3 \geqslant x+1$.

110) $x > \left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{10+x}-4\right)$ и

$x\left(\sqrt{1+x}-1\right) > x\left(\sqrt{10+x}-4\right)$.

Являются ли равносильными следующие неравенства на заданной области M?

111) $x^2 - \dfrac{1}{x} \geqslant x - \dfrac{1}{x}$ и $x^2 \geqslant x$, $M = \{x\colon x \neq 0\}$.

112) $x^2 - \dfrac{1}{x} \geqslant x - \dfrac{1}{x}$ и $x^2 \geqslant x$, $M = \{x\colon x > 0\}$.

113) $\sqrt{x+1} > x$ и $x+1 > x^2$, $M = \{x\colon x \geqslant 0\}$.

114) $\sqrt{x+1} > x$ и $x+1 > x^2$, $M = \{x\colon x \geqslant -1\}$.

115) $x^2 > 1$ и $x > 1$, $M = \{x\colon x \geqslant 0\}$.

116) $\sqrt{x-1} < \sqrt{2-x}$ и $x-1 < 2-x$, $M = \{x\colon x \in [1,2]\}$.

117) $\dfrac{1}{x+2} > 1$ и $1 > x+2$, $M = \{x\colon x > -2\}$.

118) $\dfrac{1}{x+2} > 1$ и $1 < x+2$, $M = \{x\colon x < -2\}$.

119) $x^2 - \log_2 x > 2x - \log_2 x$ и $x^2 - 2x > 0$, $M = \{x\colon x > 0\}$.

120) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2-x} + x < 2x+3$ и $x < 2x+3$, $M = \{x\colon x \geqslant 1\}$.

121) $2^{\sqrt{x}} > 2^{1-\sqrt{x}}$ и $\sqrt{x} > 1 - \sqrt{x}$, $M = \{x\colon x \in R\}$.

122) $\sqrt{x}(x+2) > \sqrt{x}(2x-5)$ и $x+2 > 2x-5$, $M = \{x\colon x > 0\}$.

123) $\sqrt{x}(x+2) > \sqrt{x}(2x-5)$ и $x+2 > 2x-5$, $M = \{x\colon x \geqslant 0\}$.

124) $\log_2(x+1)+\log_2(x-2)>1 \quad$ и $\quad \log_2(x+1)(x-2)>1,$
$M=\{x\colon\ x>2\}.$

125) $\overline{(x-1)(x+2)} \geqslant 2 \quad$ и $\quad \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+2} \geqslant 2, \quad M=\{x\colon\ x\geqslant 1\}.$

126) $\overline{x^2(x-2)} \geqslant x \quad$ и $\quad |x|\sqrt{x-2} \geqslant x, \quad M=\{x\colon\ x=0\}.$

127) $\dfrac{x+3}{(x+2)^2}>0 \quad$ и $\quad x+3>0, \quad M=\{x\colon\ x\in R\}.$

128) $\dfrac{x\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+3}}{x^2+1}>0 \quad$ и $\quad \dfrac{x}{x^2+1}>0, \quad M=\{x\colon\ x\in R\}.$

129) $2^{\log_2(x^2-x)}>1 \quad$ и $\quad x^2-x>1, \quad M=\{x\colon\ x>1\}.$

130) $(-4-x)\log_4(1+x^2) \geqslant (2+x)\log_4(1+x^2) \quad$ и $\quad -4-x \geqslant 2+x,$
$M=\{x\colon\ x\in R\}.$

Являются ли равносильными неравенство и система неравенств?

131) $\sqrt{x+2}>x \quad$ и $\quad \begin{array}{l} x+2\geqslant 0,\\ (x+2)>x^2. \end{array}$

132) $\sqrt{x+2}>x \quad$ и $\quad \begin{array}{l} x+2>x^2,\\ x\geqslant 0. \end{array}$

133) $\sqrt{x+2}<x \quad$ и $\quad \begin{array}{l} x+2\geqslant 0,\\ x>0,\\ x+2<x^2. \end{array}$

134) $x+\sqrt{x-2}<\sqrt{x-2}+x^2 \quad$ и $\quad \begin{array}{l} x-2\geqslant 0,\\ x<x^2. \end{array}$

135) $\dfrac{\sqrt{x}(x+4)}{x+3}\geqslant 0 \quad$ и $\quad \begin{array}{l} x\geqslant 0,\\ (x+4)(x+3)\geqslant 0. \end{array}$

136) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}}>0 \quad$ и $\quad \begin{array}{l} x+3>0,\\ x+4>0. \end{array}$

137) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}\geqslant 1 \quad$ и $\quad \begin{array}{l} x\geqslant 1,\\ x(x-1)\geqslant 1. \end{array}$

138) $\dfrac{(x-2)(x+3)^2}{x+5}<0 \quad$ и $\quad \begin{array}{l} (x+3)^2>0,\\ (x-2)(x+5)<0. \end{array}$

139) $\dfrac{(x-2)(x+3)^2}{x-2}>0 \quad$ и $\quad \begin{array}{l} (x+3)^2>0,\\ (x-2)^2>0. \end{array}$

140) $|x+2| > x$ и $\begin{cases} x+2 > x, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$ 141) $|x+2| < x$ и $\begin{cases} (x+2)^2 < x^2, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

142) $\sqrt{x^2(x-3)} < 1$ и $\begin{cases} x-3 \geqslant 0, \\ x^2(x-3) < 1. \end{cases}$

143) $\log_3(2x-3) + \log_3(x-1) > 1$ и $\begin{cases} 2x-3 > 0, \\ x-1 > 0, \\ (2x-3)(x-1) > 3. \end{cases}$

144) $\sqrt{x^2-4}(x^2-5) \leqslant \sqrt{x^2-4}$ и $\begin{cases} x^2-4 \geqslant 0, \\ x^2-5 \leqslant 1. \end{cases}$

145) $\sqrt{x^2-4}(x^2-2) \leqslant \sqrt{x^2-4}$ и $\begin{cases} x^2-4 \geqslant 0, \\ x^2-2 \leqslant 1. \end{cases}$

Являются ли равносильными неравенство и совокупность систем неравенств?

146) $\sqrt{x+2} > x$ и $\begin{cases} x+2 \geqslant 0, \\ x < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x+2 \geqslant x^2, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

147) $(x-2)(x+3) \geqslant 0$ и $\begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ x+3 \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 < 0, \\ x+3 < 0. \end{cases}$

148) $(x-2)(x+3) \leqslant 0$ и $\begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ x-2 \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 \leqslant 0, \\ x+3 \leqslant 0. \end{cases}$

149) $\sqrt{x^2(x-5)} > x-7$ и $\begin{cases} (x-5) \geqslant 0, \\ x^2(x-5) > (x-7)^2, \\ x-7 \geqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x-5 \geqslant 0, \\ x-7 < 0. \end{cases}$

150) $|x^2-x| < 1$ и $\begin{cases} x^2-x \geqslant 0, \\ x^2-x < 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-x < 0, \\ x-x^2 < 1. \end{cases}$

151) $\lg|x-4| > 2$ и $\begin{cases} x-4 > 0, \\ \lg(x-4) > 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x-4 < 0, \\ \lg(4-x) > 2. \end{cases}$

152) $\dfrac{x+1}{3x+2} > 1$ и $\begin{cases} 3x+2 > 0, \\ x+1 > 3x+2, \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+2 < 0, \\ x+1 < 3x+2. \end{cases}$

153) $(x-2)(x-1) > (x-2)(2x+5)$ и

$$\begin{array}{l} x-2>0, \\ x-1>2x+5, \end{array} \qquad \begin{array}{l} x-2<0, \\ x-1<2x+5. \end{array}$$

154) $\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x-2} < 2$ и

$$\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{(x-2)^2} < 4, \\ x-2>0, \end{array} \qquad \begin{array}{l} x^2+x \geqslant 0, \\ x-2<0. \end{array}$$

155) $\dfrac{(x+3)(x+2)}{x+2} > 0$ и

$$\begin{array}{l} x+3>0, \\ x+2>0, \end{array} \qquad \begin{array}{l} x+3>0, \\ x+2<0. \end{array}$$

156) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3} < 1$ и

$$\begin{array}{l} x+2 \geqslant 0, \\ \sqrt{x+2} \geqslant \sqrt{x+3}, \\ \sqrt{x+2} - \sqrt{x+3}\ ^2 < 1, \end{array} \qquad \begin{array}{l} x+2 \geqslant 0, \\ \sqrt{x+2} < \sqrt{x+3} + 1. \end{array}$$

§ 2. РАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕРАВЕНСТВ

Неравенства, не являющиеся простейшими, с помощью различных преобразований стараются привести к простейшим неравенствам. В этом параграфе рассматриваются лишь равносильные преобразования неравенств, т.е. преобразования, сохраняющие равносильность неравенств для всех действительных x.

2.1. Алгебраические неравенства первой степени. Неравенства вида

$$ax+b>0 \tag{1}$$

и

$$ax+b<0, \tag{2}$$

где $a \neq 0$, называются алгебраическими неравенствами первой степени.

Заметим, что если $a<0$, то, умножив неравенство (1) на (-1), получим на основании утверждения 4 § 1, равносильное ему неравенство

$$a'x+b'<0, \tag{3}$$

где $a'=-a$ и $b'=-b$ и $a'>0$, т.е. неравенство вида (1) при $a<0$ умножением его на (-1) можно привести к виду (3), где $a'>0$. Аналогично можно поступить и с неравенством типа (2), если в нем $a<0$. Поэтому будем рассматривать решение неравенств (1) и (2) при $a>0$.

На основании утверждения 1 § 1 неравенство (1) равносильно неравенству

$$ax+b+(-b) > -b,$$

т.е. неравенству

$$ax > -b. \tag{4}$$

Так как $a > 0$, то на основании утверждения 3 § 1 неравенство (4) равносильно неравенству

$$ax \cdot \frac{1}{a} > (-b) \cdot \frac{1}{a},$$

т.е. неравенству

$$x > -\frac{b}{a}.$$

Следовательно, все $x > -b/a$ будут решениями неравенства (1) (при $a > 0$).

Аналогично показывается, что при $a > 0$ все $x < -b/a$ будут решениями неравенства (2).

Пример 1. Решить неравенство

$$-2x + 3 < 0. \tag{5}$$

Решение. На основании утверждения 1 § 1 неравенство (5) равносильно неравенству

$$3 < 2x$$

т.е. неравенству

$$2x > 3. \tag{6}$$

На основании утверждения 3 § 1 неравенство (6) равносильно неравенству

$$x > \frac{3}{2}.$$

Следовательно, все $x > \dfrac{3}{2}$ будут решениями исходного неравенства.

Ответ. $\dfrac{3}{2} < x < +\infty$.

2.2. Простейшие преобразования неравенств. При решении неравенств часто приходится пользоваться утверждениями 1–7 § 1 о равносильности неравенств.

Пример 2. Решить неравенство

$$5^{-2x+1} < 5^4. \tag{7}$$

Решение. На основании утверждения 5 § 1 неравенство (7) равносильно неравенству

$$-2x + 1 < 4,$$

которое, в свою очередь, на основании утверждения 1 § 1 равносильно неравенству

$$1 - 4 < 2x,$$

т.е. неравенству

$$2x > -3. \tag{8}$$

Неравенство (8) на основании утверждения 3 § 1 равносильно неравенству

$$x > -\frac{3}{2}.$$

Следовательно, все $x > -3/2$ будут решениями исходного неравенства.

Ответ. $-\dfrac{3}{2} < x < +\infty$.

Пример 3. Решить неравенство

$$x^5 - 2x + 2 > 1 + x^5 - x. \tag{9}$$

Решение. На основании утверждения 1 § 1 неравенство (9) равносильно неравенству

$$(x^5 - 2x + 2) - (1 + x^5 - x) > 0. \tag{10}$$

Учитывая, что функция $y = (x^5 - 2x + 2) - (1 + x^5 - x)$ тождественно равна функции $y = (1 - x)$, получаем на основании утверждения 7 § 1, что неравенство (10) равносильно неравенству

$$1 - x > 0,$$

которое на основании утверждения 1 § 1 равносильно неравенству

$$1 > x,$$

т.е. неравенству

$$x < 1.$$

Следовательно, все $x < 1$ будут решениями исходного неравенства.

Ответ. $-\infty < x < 1$.

В примере 3 утверждение 7 § 1 использовалось при приведении подобных членов в алгебраическом неравенстве. Тождественные преобразования типа приведения подобных членов возможны и для других неравенств, в которые входят функции, определенные для всех действительных x; к таким функциям относится, в частности, функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} < 3^{-x} + 2. \tag{11}$$

Решение. Поскольку $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2} = 9 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$ и $3^{-x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$, то неравенство (11) равносильно неравенству

$$9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x} + 2,$$

которое на основании утверждения 1 § 1 равносильно неравенству

$$9\left(\frac{1}{3}\right)^{x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x} < 2. \tag{12}$$

Так как функция $y = 9 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$ тождественно равна функции $y = 8 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$, то неравенство (12) равносильно неравенству

$$8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x} < 2,$$

которое на основании утверждения 3 § 1 равносильно неравенству

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{4}. \tag{13}$$

Так как $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{1/3}(1/4)}$, то неравенство (13) на основании утверждения 5 § 1 равносильно неравенству

$$x > \log_{1/3}\frac{1}{4}.$$

Так как $\log_{1/3}\frac{1}{4} = \log_3 4$, то приходим к выводу, что все $x > \log_3 4$ будут решениями исходного неравенства.

Ответ. $\log_3 4 < x < +\infty$.

В дальнейшем при применении тождественных преобразований вместо слов «данное неравенство равносильно неравенству» будем часто писать «данное неравенство перепишем в виде».

2.3. Преобразования, связанные с применением тождественных равенств. Решение неравенств с применением тождественных равенств основано на утверждении 7 § 1 о равносильности неравенств. Это утверждение позволяет использовать различные формулы, справедливые при всех действительных значениях x, например формулы сокращенного умножения, основное тригонометрическое тождество, формулы степеней и т.д.

Приведем некоторые примеры.

Пример 5. Решить неравенство

$$(1-x)(1+x+x^2) - 2 + 2x^3 > 0. \tag{14}$$

Решение. Применяя формулу разности кубов, получаем, что неравенство (14) равносильно неравенству

$$1 - x^3 - 2 + 2x^3 > 0.$$

Перепишем это неравенство в виде

$$x^3 - 1 > 0$$

или в виде

$$x^3 > 1. \tag{15}$$

Простейшее неравенство (15), а следовательно, и исходное неравенство имеют решениями все $x > 1$.

Ответ. $1 < x < +\infty$.

Пример 6. Решить неравенство

$$5 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^x < 9 \cdot 2^x + 4. \tag{16}$$

Решение. Поскольку $5 \cdot 2^{x+2} = 20 \cdot 2^x$, то неравенство (16) можно переписать в виде

$$20 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x - 9 \cdot 2^x < 4$$

или в виде

$$8 \cdot 2^x < 4$$

или, наконец, в виде

$$2^x < \frac{1}{2}. \qquad (17)$$

Простейшее неравенство (17), а следовательно, и исходное неравенство имеют решениями все $x < -1$.

Ответ. $-\infty < x < -1$.

2.4. Квадратные неравенства. Квадратными неравенствами называются неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (18)$$

и

$$ax^2 + bx + c < 0, \qquad (19)$$

где $a \neq 0$.

Как и в п. 2.1, эти неравенства можно привести к случаю, когда $a > 0$.

Множество решений неравенств (18) и (19) зависит от дискриминанта $D = b^2 - 4ac$, а в случае $D \geqslant 0$ и от корней

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенств (18) и (19). Дискриминант D часто называют дискриминантом неравенств (18) и (19).

а) Рассмотрим решение неравенства (18) в случае, когда $a > 0$, $D = b^2 - 4ac > 0$. Тогда квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два различных корня

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \qquad (20)$$

таких, что $x_1 < x_2$. В этом случае, как известно, справедливо тождественное равенство

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Поэтому неравенство (18) равносильно на основании утверждения 7 § 1 неравенству

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0. \qquad (21)$$

Так как $a > 0$, то на основании утверждения 3 § 1 неравенство (21) равносильно неравенству

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0. \qquad (22)$$

Отметим на координатной оси точки x_1 и x_2 (рис. 1). Очевидно, что про-

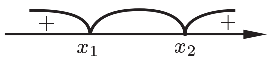


Рис. 1

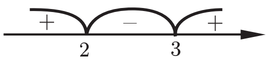


Рис. 2

изведение $(x - x_1)(x - x_2)$ для любого $x > x_2$ положительно, для любого x из промежутка $x_1 < x < x_2$ отрицательно, для любого $x < x_1$ положительно. Откуда следует, что решениями неравенства (22) будут все x из двух промежутков $x < x_1$ и $x > x_2$. Так как неравенство (22) равносильно неравенству (18), то только эти x будут решениями неравенства (18).

Аналогично показывается, что решениями неравенства (19) при $a > 0$, $D = b^2 - 4ac > 0$ будут все x из промежутка $x_1 < x < x_2$, где x_1 и x_2 определены формулами (20).

Пример 7. Решить неравенство

$$-x^2 + 5x - 6 < 0. \tag{23}$$

Решение. Умножая неравенство (23) на (-1), перепишем его в виде

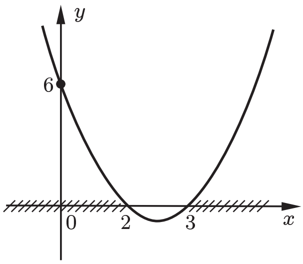


Рис. 3

$$x^2 - 5x + 6 > 0. \tag{24}$$

Так как дискриминант неравенства (24)

$$D = b^2 - 4ac = 1 > 0,$$

то трехчлен $x^2 - 5x + 6$ имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Поэтому неравенство (24) равносильно неравенству

$$(x - 2)(x - 3) > 0. \tag{25}$$

Отметив на координатной оси точки $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, видим, что решениями неравенства (25) являются все числа из двух промежутков: $x > 3$ и $x < 2$ (рис. 2).

Заметим, что нахождение решений неравенства (24) можно проиллюстрировать, используя график функции $y = x^2 - 5x + 6$ (рис. 3).

Ответ. $-\infty < x < 2,\ 3 < x < +\infty$.

б) Рассмотрим решение неравенства (18) в случае, когда $a > 0$, $D = 0$. Тогда квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два совпадающих корня:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = x_0.$$

В этом случае, как известно, справедливо тождественное равенство

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

Поэтому неравенство (18) можно переписать в виде

$$a(x - x_0)^2 > 0. \tag{26}$$

Так как $a > 0$, то неравенство (26) равносильно неравенству

$$(x - x_0)^2 > 0,$$

которое, очевидно, справедливо для любого x, кроме $x = x_0$.

Аналогично показывается, что неравенство (19) при $a > 0$ и $D = 0$ не имеет решений.

Пример 8. Решить неравенство

$$4x^2 - 4x + 1 > 0. \tag{27}$$

Решение. Так как дискриминант неравенства (27)

$$D = b^2 - 4ac = 0,$$

то перепишем неравенство (27) в виде

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > 0. \tag{28}$$

Очевидно, что неравенство (28) справедливо для всех x, кроме $x = 1/2$. К этому же выводу мы приходим, рассматривая график функции $y = 4x^2 - 4x + 1$ (рис. 4).

О т в е т. $-\infty < x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < +\infty$.

в) Рассмотрим решение неравенства (18) в случае, когда $a > 0$, $D < 0$. Тогда квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней. В этом случае, как известно, справедливо тождественное равенство

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a^2}\right).$$

Поэтому неравенство (18) можно переписать в виде

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a^2}\right) > 0. \tag{29}$$

Так как $a > 0$, $D < 0$, то очевидно, что для любых x неравенство (29) справедливо. Поэтому решениями неравенства (18) будут все действительные x.

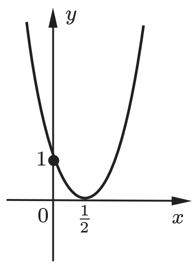


Рис. 4

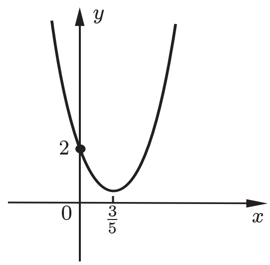


Рис. 5

Аналогично показывается, что неравенство (19) при $a > 0$, $D < 0$ не имеет решений.

П р и м е р 9. Решить неравенство

$$5x^2 - 6x + 2 > 0. \tag{30}$$

Р е ш е н и е. Так как дискриминант неравенства (30)

$$D = b^2 - 4ac = -4 < 0,$$

то перепишем неравенство (30) в виде

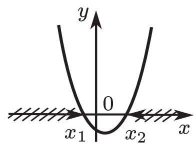
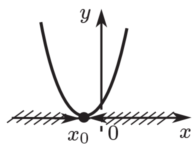
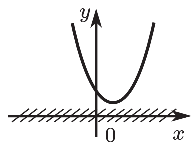
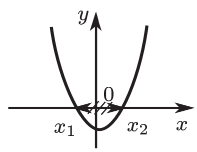
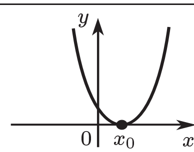
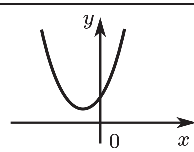
$$5\left(\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{4}{100}\right) > 0. \tag{31}$$

Очевидно, что неравенство (31) справедливо для всех x. К этому же выводу приходим, рассматривая график функции $y = 5x^2 - 6x + 2$ (рис. 5).

О т в е т. $-\infty < x < +\infty$.

Приведенные выше решения неравенств можно свести в табл. 3.

Таблица 3

Неравенство	Дискриминант и корни	График трехчлена ax^2+bx+c	Множество решений неравенства
	$D>0$, $x_1<x_2$		$-\infty<x<x_1$, $x_2<x<+\infty$
$ax^2+bx+c>0$, $a>0$	$D=0$, в этом случае $x_0=x_1=$ $=x_2=-\dfrac{b}{2a}$		$-\infty<x<x_0$, $x_0<x<+\infty$
	$D<0$, корней нет		$-\infty<x<+\infty$
	$D>0$, $x_1<x_2$		$x_1<x<x_2$
$ax^2+bx+c<0$, $a<0$	$D=0$, в этом случае $x_0=x_1=$ $=x_2=-\dfrac{b}{2a}$		решений нет
	$D<0$, корней нет		решений нет

2.5. Неравенства, сводящиеся к квадратным неравенствам. Довольно часто встречаются неравенства вида $f(x)>0$, где $f(x)=p(g(x))$ — сложная функция, составленная из двух функций $y=g(x)$ и $y=p(g)$, причем $p(g)$ — квадратный трехчлен $p(g)=ag^2+bg+c$. В таких случаях неравенство $f(x)>0$ записывают в виде

$$a(g(x))^2+b(g(x))+c>0, \qquad a\neq 0, \tag{32}$$

и называют квадратным неравенством относительно $g(x)$. Неравенство (32) решают следующим образом. Сначала находят дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $at^2 + bt + c$. Возможны следующие четыре случая.

1. Если $a < 0$ и $D \leqslant 0$, то неравенство (32) не имеет решений.

2. Если $a < 0, D > 0$, а t_1 и t_2 – корни квадратного трехчлена at^2+bt+c, причем $t_1 < t_2$, то неравенство (32) равносильно двойному неравенству

$$t_1 < g(x) < t_2.$$

3. Если $a > 0, D \geqslant 0$, а t_1 и t_2 – корни квадратного трехчлена at^2+bt+c, причем $t_1 \leqslant t_2$ (если $D = 0$, то $t_1 = t_2$), то неравенство (32) равносильно совокупности неравенств

$$g(x) < t_1,$$
$$g(x) > t_2.$$

4. Если $a > 0$ и $D < 0$, то множество решений неравенства (32) совпадает с областью определения функции $y = g(x)$.

Пример 10. Решить неравенство

$$x^4 - 10x^2 + 16 > 0.$$

Решение. Обозначив x^2 через y, получим неравенство

$$y^2 - 10y + 16 > 0. \tag{33}$$

Так как квадратное уравнение $y^2 - 10y + 16 = 0$ имеет корни $y_1 = 2$ и $y_2 = 8$, то неравенство (33) можно записать в виде

$$(y-2)(y-8) > 0,$$

откуда очевидно, что это неравенство равносильно совокупности неравенств

$$y < 2 \quad \text{и} \quad y > 8.$$

Поэтому исходное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$x^2 < 2 \quad \text{и} \quad x^2 > 8.$$

Решением неравенства $x^2 > 8$ являются все x из двух промежутков $x > \sqrt{8}$ и $x < -\sqrt{8}$. Решениями неравенства $x^2 < 2$ являются все x из промежутка $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Следовательно, множество решений исходного неравенства состоит из промежутков $-\infty < x < -\sqrt{8}$, $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ и $\sqrt{8} < x < +\infty$.

Ответ. $-\infty < x < -\sqrt{8}$, $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, $\sqrt{8} < x < +\infty$.

Пример 11. Решить неравенство

$$(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 > 0.$$

Решение. Обозначив $\log_2 x$ через y, перепишем данное неравенство в виде $y^2 - 3y + 2 > 0$. Множество решений этого неравенства состоит из двух промежутков $-\infty < y < 1$ и $2 < y < +\infty$. Следовательно, исходное неравенство равносильно совокупности двух простейших логарифмических неравенств:

$$\log_2 x < 1 \quad \text{и} \quad \log_2 x > 2.$$

Множество решений первого неравенства есть промежуток $0 < x < 2$.

Множество решений второго есть промежуток $4 < x < +\infty$. Объединение этих промежутков и дает множество всех решений исходного неравенства. Значит, множество всех решений исходного неравенства состоит из двух промежутков: $0 < x < 2$ и $4 < x < +\infty$.

О т в е т. $0 < x < 2,\ 4 < x < +\infty$.

2.6. Метод интервалов. Часто при решении алгебраических неравенств используется метод интервалов, который состоит в следующем.

Пусть надо решить неравенство

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) > 0, \tag{34}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — фиксированные числа такие, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$. Тогда поступают следующим образом: на координатную ось наносят числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, в промежутке справа от наибольшего из них ставят знак «плюс», в следующем за ним справа налево промежутке ставят знак «минус», затем — «плюс», затем — «минус» и т.д. (рис. 6). Тогда множество всех ре-

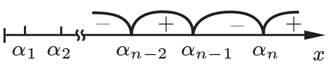


Рис. 6

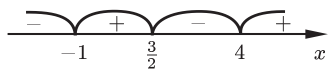


Рис. 7

шений неравенства (34) будет объединением всех промежутков, в которых поставлен знак плюс.

Отметим, что объединение всех промежутков, где поставлен знак минус, будет множеством всех решений неравенства

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) < 0,$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$.

П р и м е р 12. Решить неравенство

$$(x+1)(x-4)(2x-3) > 0. \tag{35}$$

Р е ш е н и е. Перепишем неравенство (35) в виде

$$2[(x-(-1)]\quad x-\frac{3}{2}\quad (x-4) > 0.$$

Отметим на координатной оси числа (-1), $\dfrac{3}{2}$ и 4 и расставим знаки плюс и минус так, как указано на рис. 7. Решениями неравенства (35) будут все x из объединения промежутков $4 < x < +\infty$ и $-1 < x < 3/2$.

О т в е т. $-1 < x < 3/2,\quad 4 < x < +\infty$.

П р и м е р 13. Решить неравенство

$$(x^4-1)(2-5x) > 0.$$

Р е ш е н и е. Поскольку данное неравенство можно переписать в виде

$$-5(x^2+1)(x-1)(x+1)\quad x-\frac{2}{5}\quad > 0$$

и так как $(x^2+1) > 0$ при любом x, то оно равносильно неравенству

$$(x-1)(x+1)\left(x-\frac{2}{5}\right) < 0.$$

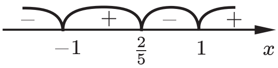


Рис. 8

Применяя метод интервалов (рис. 8), находим решения последнего неравенства, а значит, и исходного неравенства: это есть объединение двух промежутков: $-\infty < x < -1$ и $2/5 < x < 1$.

О т в е т. $-\infty < x < -1,\ 2/5 < x < 1$.

2.7. Обобщенный метод интервалов. Иногда встречаются неравенства вида $f(x) > 0$, где

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_n)^{k_n}, \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n.$$

Здесь $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — целые положительные числа, часть из которых больше 1. Такие неравенства также могут быть решены с помощью так называемого обобщенного метода интервалов, если несколько уточнить правило расстановки знаков, а именно: в промежутке справа от α_n — наибольшего из корней многочлена $f(x)$ — ставят знак «плюс», а затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередной корень α_i меняют знак, если k_i — нечетное число, и сохраняют знак, если k_i — четное число.

П р и м е р 14. Решить неравенство

$$x(x+1)(x-2)^2 > 0.$$

Р е ш е н и е. Отметив на координатной оси корни -1, 0, 2 многочлена $x(x+1)(x-2)^2$, расставим знаки «плюс» и «минус» на интервалах между

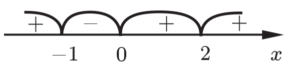


Рис. 9

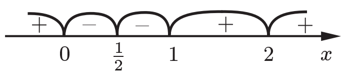


Рис. 10

корнями, пользуясь указанным выше правилом (рис. 9). Множество решений исходного неравенства состоит из трех интервалов: $(-\infty; -1)$, $(0; 2)$; $(2; +\infty)$.

О т в е т. $-\infty < x < -1,\ \ 0 < x < 2,\ \ 2 < x < +\infty$.

Такое же правило расстановки знаков следует соблюдать и при решении неравенства $f(x) < 0$, где $f(x)$ — многочлен.

П р и м е р 15. Решить неравенство

$$(4x^2-4x+1)(x^2-4x+4)(x^2-x) < 0.$$

Р е ш е н и е. Многочлен $f(x)$, стоящий в левой части неравенства, может быть разложен на множители следующим образом:

$$f(x) = (2x-1)^2(x-2)^2x(x-1),$$

так что исходное неравенство может быть переписано в виде

$$(x-0)(x-1/2)^2(x-1)(x-2)^2 < 0.$$

Множество решений этого неравенства состоит из двух промежутков (рис. 10): $0 < x < 1/2,\ \ 1/2 < x < 1$.

О т в е т. $0 < x < 1/2,\ 1/2 < x < 1$.

2.8. Рациональные неравенства. Решение неравенства

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > \frac{R(x)}{T(x)}, \tag{36}$$

где $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ и $T(x)$ — многочлены, в общем случае проводится следующим образом. Неравенство (36) заменяется равносильным неравенством

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{R(x)}{T(x)} > 0,$$

или, после приведения дробей левой части к общему знаменателю — многочлену $D(x)$, — заменяется равносильным неравенством

$$\frac{\Phi(x)}{D(x)} > 0, \tag{37}$$

которое, в свою очередь, равносильно неравенству

$$\Phi(x)D(x) > 0. \tag{38}$$

Решение этого неравенства проводится методом интервалов. Иной путь состоит в замене неравенства (38) равносильной ему совокупностью систем неравенств

$$\begin{cases} \Phi(x) > 0, \\ D(x) > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \Phi(x) < 0, \\ D(x) < 0 \end{cases}$$

и последующим решением каждой из них.

Заметим, что иногда метод интервалов применяют сразу к неравенству (37), не переходя к неравенству (38).

П р и м е р 16. Решить неравенство

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{(x+4)(x+1)} < 0.$$

Р е ш е н и е. Поскольку корни квадратного трехчлена $x^2 - 5x + 6$ равны 2 и 3, то исходное неравенство можно переписать в виде

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x+4)(x+1)} < 0. \tag{39}$$

Неравенство (39) равносильно неравенству

$$(x+4)(x+1)(x-2)(x-3) < 0. \tag{40}$$

Решим неравенство (40) методом интервалов. На координатной оси (рис. 11) наносим точки -4, -1, 2 и 3. Справа от точки 3 ставим знак «плюс», затем знак «минус», потом опять знак «плюс», затем «минус» и наконец опять «плюс». Так как знак минус поставлен на промежутках $2 < x < 3$ и $-4 < x < -1$, то все x из этих промежутков и являются решениями исходного неравенства.

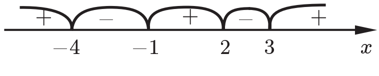


Рис. 11

О т в е т. $2 < x < 3$, $\quad -4 < x < -1$.

Пример 17. Решить неравенство
$$\frac{2x-3}{4-x} > \frac{1}{x}.$$

Решение. Перенося правую часть неравенства налево и приводя слагаемые к общему знаменателю, получим неравенство
$$\frac{2x^2-2x-4}{x(4-x)} > 0, \tag{41}$$
равносильное исходному. Поскольку корнями квадратного трехчлена $x^2 - x - 2$ являются $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$, то неравенство (41) равносильно неравенству
$$\frac{(x+1)(x-2)}{x(4-x)} > 0,$$
или неравенству
$$\frac{(x+1)(x-2)}{(x-0)(x-4)} < 0. \tag{42}$$
Применяя метод интервалов (рис. 12), находим, что множество всех решений неравенства (42), а следовательно, и исходного неравенства состоит из двух промежутков: $-1 < x < 0$ и $2 < x < 4$.

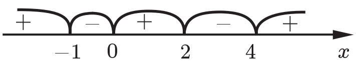


Рис. 12

Ответ. $-1 < x < 0$, $2 < x < 4$.

2.9. Нестрогие неравенства. Все неравенства, рассмотренные выше в этом параграфе, были строгими. Для решения аналогичных неравенств, но нестрогих, надо к найденным решениям строгого неравенства добавить корни соответствующего уравнения.

В частности, решение неравенства
$$ax + b \geqslant 0 \quad (a > 0) \tag{43}$$
состоит из решений неравенства
$$ax + b > 0, \tag{44}$$
рассмотренного в п. 2.1., и решения уравнения
$$ax + b = 0. \tag{45}$$
Так как решение уравнения (45) есть $x = -b/a$, а решениями неравенства (44) являются все $x > -b/a$, то решениями неравенства (43) являются все $x \geqslant -b/a$.

Аналогично решения неравенства
$$ax^2 + bx + c \geqslant 0,$$
где $a > 0$, $D = b^2 - 4ac > 0$, $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, составляют два промежутка: $-\infty < x \leqslant x_1$ и $x_2 \leqslant x < +\infty$.

Приводим примеры решения нестрогих неравенств.

Пример 18. Решить неравенство
$$4^x - 3\cdot 2^x - 4 \geqslant 0. \tag{46}$$

Р е ш е н и е. Обозначив 2^x через y, получим неравенство

$$y^2 - 3y - 4 \geqslant 0. \tag{47}$$

Решениями квадратного уравнения $y^2 - 3y - 4 = 0$ являются $y_1 = -1$ и $y_2 = 4$. Решениями квадратного неравенства $y^2 - 3y - 4 > 0$ являются $y < -1$ и $y > 4$. Следовательно, решения неравенства (47) составляют два промежутка:

$$-\infty < y \leqslant -1 \quad \text{и} \quad 4 \leqslant y < +\infty.$$

Поэтому неравенство (46) равносильно совокупности двух неравенств:

$$2^x \leqslant -1 \quad \text{и} \quad 2^x \geqslant 4.$$

Первое из этих неравенств не имеет решений, а второе имеет решениями все $x \geqslant 2$.

О т в е т. $2 \leqslant x < +\infty$.

П р и м е р 19. Решить неравенство

$$\frac{30x - 9}{x - 2} \geqslant 25(x + 2).$$

Р е ш е н и е. Перенося левую часть неравенства направо и приводя слагаемые к общему знаменателю, получим неравенство

$$\frac{25x^2 - 30x - 91}{x - 2} \leqslant 0, \tag{48}$$

равносильное исходному. Поскольку корнями квадратного трехчлена $25x^2 - 30x - 91$ являются $x_1 = -1{,}4$ и $x_2 = 2{,}6$, то неравенство (48) равносильно неравенству

$$\frac{(x - 2{,}6)(x + 1{,}4)}{x - 2} \leqslant 0. \tag{49}$$

Множество решений неравенства (49) состоит из всех решений уравнения

$$\frac{(x - 2{,}6)(x + 1{,}4)}{x - 2} = 0 \tag{50}$$

и всех решений неравенства

$$\frac{(x - 2{,}6)(x + 1{,}4)}{x - 2} < 0. \tag{51}$$

Уравнение (50) имеет решения $x_1 = -1{,}4$ и $x_2 = 2{,}6$. Применяя метод интервалов (рис. 13), получаем, что множество всех решений неравенства (51) состоит из двух промежутков $x < -1{,}4$ и $2 < x < 2{,}6$. Объединяя множество решений уравнения (50) и множество решений неравенства (51), получаем, что множество решений исходного неравенства состоит из двух промежутков: $x \leqslant -1{,}4$ и $2 < x \leqslant 2{,}6$.

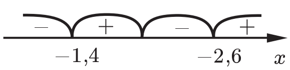


Рис. 13

О т в е т. $-\infty < x \leqslant 1{,}4$, $2 < x \leqslant 2{,}6$.

2.10. Системы неравенств. В § 1 уже было написано, как обычно решают системы неравенств. В этом пункте будет только проиллюстрирован этот метод решения на нескольких простых примерах. В следующих параграфах системы неравенств будут возникать при решении неравенств.

Пример 20. Решить систему неравенств

$$\begin{aligned} &3x - 7 < 0, \\ &2 - x > 0. \end{aligned} \qquad (52)$$

Решение. Решения первого из неравенств системы (52) составляют промежуток $-\infty < x < 7/3$, решения второго — промежуток $-\infty < x < 2$. Общей частью этих промежутков (рис. 14) является промежуток $-\infty < x < 2$. Все x из промежутка $-\infty < x < 2$ являются решениями системы (52).

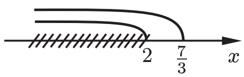


Рис. 14

Ответ. $-\infty < x < 2$.

Пример 21. Решить систему неравенств

$$\begin{aligned} &x^2 - 6x + 8 < 0, \\ &x^2 - 8x + 15 \leqslant 0. \end{aligned} \qquad (53)$$

Решение. Решения первого неравенства системы составляют промежуток $2 < x < 4$, решения второго — промежуток $3 \leqslant x \leqslant 5$. Общей

Рис. 15

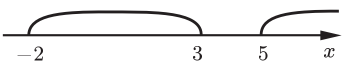


Рис. 16

частью этих промежутков (рис. 15) является промежуток $3 \leqslant x < 4$. Все эти x являются решениями системы (53).

Ответ. $3 \leqslant x < 4$.

Пример 22. Решить систему неравенств

$$\begin{aligned} &x^2 - x - 6 < 0, \\ &x - 5 \geqslant 0. \end{aligned} \qquad (54)$$

Решение. Решения первого неравенства системы (54) составляют промежуток $-2 < x < 3$, решения второго – промежуток $5 \leqslant x < +\infty$. У этих промежутков (рис. 16) нет общих точек, поэтому система неравенств (54) не имеет решений.

Ответ. Нет решений.

Упражнения

Решить неравенство.

1) $2x - 7 > 0$. 2) $1 - 9x > 0$. 3) $2 - 3x > 1 - 4x$.

4) $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}x - 1 < \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{7}$. 5) $0{,}2(x - 1) + 0{,}5(3x - 9) > \dfrac{x}{3} - 2$.

6) $2x + (2x + 3) - (4x - 1 + 2x - 3 - (7 - 4x)) < 0$.

7) $(1 - x)(1 + x) > 2x - x^2 + 0{,}3$.

8) $(1 + x)(x^2 - x + 1) - x^3 + 3x + 4 > 2x - 6$.

9) $2(1 - x)(1 + x)(1 + x^2) < -2x^4 + 3$.

10) $x^2 > 4$. 11) $2x^2 < 3$. 12) $3x^2 + 2 > 0$. 13) $7x^2 + 5 < 0$.
14) $2x^2 - 4x^2 + 3 > 6x^2 + 7 - (2x^2 + 3) - 4$. 15) $x^2 + 2x - 3 > 0$.
16) $x^2 - 4x + 4 > 0$. 17) $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$. 18) $1 - 3x^2 + 4x < 0$.
19) $x^2 > 1 - x$. 20) $x^2 + 1 < 3x - x^2 - 3$. 21) $2x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$.
22) $(x - 2)(2x + 1) < 1 - x + x^2$. 23) $(2x - 3)(2x + 2) + 1 \geqslant 0$.
24) $(3x - 4)(2x - 7) < (x + 2)(1 - 3x)$. 25) $(1 - x^2)x + 1 > x(2x^2 + 1)$.
26) $2x^4 - 3 > 5 - 3x^4$. 27) $(1 - x^3)(2 + x) < x(2 - x^2) - x(1 - x^2)$.
28) $2x^4 + 3 - (x + 4)x < x(x - 4) - 2x^2 + 8$. 29) $(x - 2)(x + 3) > 0$.
30) $(2x + 1)(x - 2) \leqslant 0$. 31) $x^2 - 4x - 5 > 0$.
32) $(x - 1)(x + 2)(x + 3) < 0$. 33) $(x + 4)(2x + 3)(3x - 1) \geqslant 0$.
34) $(2x - 1)(x + 3)(x - 4) > 0$. 35) $(2x - 1)(x + 3)(x - 4) < 0$.
36) $(2x - 1)(x + 3)(x - 4) \leqslant 0$. 37) $(2x - 1)(x + 3)(x - 4) \geqslant 0$.
38) $(x - \pi)(x^2 - 9)(x + \pi) < 0$. 39) $(2 - x)x \geqslant (2 - x)(3x - 1)$.
40) $(3x + 2)(x^2 - 5x + 6) > (3x + 2)(x^2 - x - 2)$. 41) $x^3 - 8 > 0$.
42) $x^5 + 1 < 0$. 43) $x^3 - 3x^2 + x < 0$. 44) $x^3 - 3x^2 + x - 5 \geqslant 0$.
45) $x^3 + 2x^2 + x + 2 > 0$. 46) $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 \leqslant 0$.
47) $x^2(x - 2) < 0$. 48) $(2x + 1)^2(x + 1)(x + 2) \leqslant 0$.
49) $(x^2 - x)^2(x^2 - 4) \geqslant 0$. 50) $(x - 1)(x^2 - 1)(x^3 - 1)(x^4 - 1) > 0$.
51) $(x - 1)^4 - (x + 1)^4 \leqslant 0$.
52) $(x + 3)(3x - 2)^5(7 - x)^3(5x + 8)^4 \leqslant 0$.
53) $(x^2 - 3x + 2)^2(x^3 - 3x^2)(4 - x^2) \leqslant 0$.
54) $(x - 1)^2(x + 2)^4(x - 4)^2 \leqslant 0$.
55) $2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x + 2 < 0$.
56) $\dfrac{x + 2}{x - 1} < 0$. 57) $\dfrac{2x + 4}{4 - x} \leqslant 0$. 58) $\dfrac{(x + 3)(x - 2)}{x + 1} > 0$.
59) $\dfrac{(x + 3)(x - 2)}{(x + 1)^2} \leqslant 0$. 60) $\dfrac{x^2(x - 1)^3}{x + 2} \geqslant 0$.
61) $\dfrac{(x - 1)(3x + 2)^2(x + 1)^3}{x^5(x^2 - 1)(2 - 3x)^4} \geqslant 0$. 62) $\dfrac{x^2(x - 1)^4}{(x + 7)^3(10 - x)^5} \leqslant 0$.
63) $\dfrac{(x + 3)^4(2x + 3)^2}{(1 - x)^3} \leqslant 0$. 64) $\dfrac{(x + 3)^4(2x + 3)^2}{(1 - x)^3} \geqslant 0$.
65) $\dfrac{1}{4x} > x$. 66) $2 - x > \dfrac{1}{1 - x}$. 67) $\dfrac{1}{3x + 5} < \dfrac{x}{3x + 5}$. 68) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x} > \dfrac{4}{3}$.
69) $\dfrac{x + 2}{x - 1} > \dfrac{x + 4}{x - 3}$. 70) $\dfrac{x^2 + 7x + 6}{x} < 2$. 71) $\dfrac{2 - x^2}{1 - x} \leqslant x$.
72) $\dfrac{20}{(x - 3)(x - 4)} + \dfrac{10}{x - 4} + 1 > 0$.
73) $(x^2 + 3x)(2x + 3) - \dfrac{16(2x + 3)}{x^2 + 3x} \geqslant 0$.
74) $7^x < 343$. 75) $5^x > 3125$. 76) $3^{2x} + 1 \leqslant 0$. 77) $4^{x+2} + 8 > 0$.
78) $2 \cdot {\dfrac{1}{2}}^{x} + 3 > 0$. 79) ${\dfrac{1}{2}}^{-x} < 3 \cdot 2^x - 4$.

80) $125^{2-3x} < \sqrt{\dfrac{1}{125}}$. 81) $4^x + 3\cdot 2^{2x} - 5\cdot 2^{2x} > 2^{2x} - 3$.

82) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^x < 2\left(\dfrac{1}{6}\right)^x - \dfrac{4}{36}$. 83) $\sqrt{2} + 9^x < 3^{2x+1} + 1{,}41$.

84) $4^{2x+3} \geqslant 5\cdot 2^{4x-1} + 1$. 85) $3\log_2 x < -2$. 86) $2\log_{1/7} x - 3 \geqslant 0$.

87) $2\lg x - 3(4\lg x + 1) > 7\lg x - 4$.

88) $(3\log_2 x - 1)\log_2 x - 3\log_2^2 x \leqslant 5$.

89) $(2\log_{1/2} x - 4) - 3\log_{1/2} x - 5 > 1 + 2\log_{1/2} x$.

90) $x^4 - 5x^2 + 6 \geqslant 0$. 91) $x^4 - x^2 - 6 \leqslant 0$.

92) $3\log_3^2 x + 2\log_3 x - 4 < 0$. 93) $5\log_{1/3}^2 x - 3\log_{1/3} x + 1 \geqslant 0$.

94) $\lg^4 x - 13\lg^2 x + 36 > 0$. 95) $\log_2^2 x + 3\log_2 x \geqslant \dfrac{5}{2}\log_{4\sqrt{2}} 16$.

96) $4^x + 2^{x+1} - 6 \leqslant 0$. 97) $2\cdot 4^x + 4 < 33\cdot 2^{x-1}$.

98) $4^{x+1} - 16^x < 2\log_4 8$. 99) $25^x - 2^{2\log_4 6 - 1} < 10\cdot 5^{x-1}$.

100) $2\cdot 3^{2x^2} + 4 \leqslant 3^{x^2+2}$. 101) $3\cdot 9^{3-x^2} - 4\cdot 3^{3-x^2} + 1 \leqslant 10$.

Решить систему неравенств.

102) $\begin{cases} 2x + 3 > x - 4, \\ 3x - 2 < 5. \end{cases}$ 103) $\begin{cases} 5x - 3 > 1 - 2x, \\ 2 - 3x > \dfrac{1}{2} - 5x. \end{cases}$

104) $\begin{cases} -4 - 2x > 1 - 3x, \\ 5x + 2 < 3 + x. \end{cases}$ 105) $\begin{cases} 8x - 2 < x - 1, \\ 2x^2 \leqslant x + 1. \end{cases}$

106) $\begin{cases} \dfrac{x}{x-5} > \dfrac{1}{2}, \\ x^2 - 36 \leqslant 0. \end{cases}$ 107) $\begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-2)}{x-6} \geqslant 0, \\ \dfrac{(x+5)}{(4-x)(x-3)} \geqslant 0. \end{cases}$

108) $\begin{cases} 2(x-1) - 3(x-4) > x + 5, \\ \dfrac{3x-4}{x^2+4x+4} \geqslant 0. \end{cases}$ 109) $\begin{cases} x^2 - 4 < 0, \\ x + 1 > 0, \\ \dfrac{1}{2} - x > 0. \end{cases}$

110) $\begin{cases} \dfrac{1}{3x} < 1, \\ x + \dfrac{4}{x} \geqslant \dfrac{4}{3}x, \\ 9x^2 - 9x + 1 < 0. \end{cases}$ 111) $\begin{cases} \dfrac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} > 1, \\ \dfrac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} \leqslant 2. \end{cases}$

112) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-1} \geqslant \dfrac{1}{x}, \\ x^2 - 5x + 6. \end{cases}$ 113) $\begin{cases} 3x + 4 < 0, \\ \dfrac{x^2 + 4x - 4}{(2x^2 - x)(x^2 + 1) - x^2 - 1} > 0. \end{cases}$

114) $\begin{cases} x^4 - 3x^3 - x^2 - x - 2 \leqslant 0, \\ x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12 \geqslant 0. \end{cases}$ 115) $\begin{cases} x^3 - 5x^2 + 10x - 12 \leqslant 0, \\ x^2 - 4x + 3 \geqslant 0, \\ x^2 - 6x + 8 \leqslant 0. \end{cases}$

116) $\begin{cases} 9^x - 10 \cdot 3^x + 9 < 0, \\ \dfrac{2}{x} < 2 + \dfrac{3}{x-1}. \end{cases}$ 117) $\begin{cases} x \geqslant \dfrac{4-x^2}{3-x}, \\ 3^{2x} < 7 \cdot 3^x + 9 \log_3 9. \end{cases}$

118) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x+2} \geqslant \dfrac{2x-3}{4x-1}, \\ x^4 - 10x^2 + 16 \geqslant 0. \end{cases}$

119) $\begin{cases} 3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 > 0, \\ \lg_3^2 x + 4\lg_3 x + 3 \geqslant 0. \end{cases}$ 120) $\begin{cases} \lg_2^2 x + \lg_2 x - 2 \leqslant 0, \\ 4^x - 3 \cdot 2^x < 4. \end{cases}$

§ 3. РАВНОСИЛЬНОСТЬ НЕРАВЕНСТВ НА МНОЖЕСТВЕ

В этом параграфе рассматриваются преобразования неравенств, сохраняющие равносильность неравенств лишь на некотором множестве.

3.1. Приведение подобных членов. При замене функции $y = (\varphi(x) + (-\varphi(x)))$ на нуль, т.е. при приведении подобных членов, нужно быть очень внимательными, если эти подобные члены определены не на всей числовой прямой.

Пример 1. Решить неравенство

$$(x^2 + \log_2 x) - (1 + \log_2 x) \leqslant 0. \tag{1}$$

Решение. ОДЗ неравенства (1) состоит из всех $x > 0$. На этой области функция $y = (\log_2 x - \log_2 x)$ тождественно равна нулю. Поэтому на основании утверждения 13 § 1 на этой области неравенство (1) равносильно неравенству

$$x^2 - 1 \leqslant 0. \tag{2}$$

Множеством решений неравенства (2) является промежуток $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Из этих x в ОДЗ неравенства (1) входят лишь x из промежутка $0 < x \leqslant 1$. Эти значения и будут решениями неравенства (1).

Ответ. $0 < x \leqslant 1$.

Заметим, что если бы мы заменили нулем функцию $y = (\log_2 x - \log_2 x)$, не учитывая ОДЗ неравенства (1), то мы бы приобрели лишние решения неравенства (1).

3.2. Разложение на множители. Неравенство вида

$$f(x)\varphi(x) > 0 \tag{3}$$

выполняется для тех и только для тех x, для которых значения $f(x)$ и $\varphi(x)$ отличны от нуля и имеют одинаковые знаки. Поэтому неравенство (3) равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{aligned} f(x) &> 0, \\ \varphi(x) &> 0 \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} f(x) &< 0, \\ \varphi(x) &< 0. \end{aligned}$$

Аналогично неравенство

$$f(x)\varphi(x) < 0 \tag{4}$$

равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{aligned} f(x) &> 0, \\ \varphi(x) &< 0 \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} f(x) &< 0, \\ \varphi(x) &> 0. \end{aligned}$$

Пример 2. Решить неравенство

$$(4x^2 + 8x - 5) \cdot \log_2 x > 0. \tag{5}$$

Решение. Неравенство (5) равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{aligned} &4x^2 + 8x - 5 > 0, \\ &\log_2 x > 0 \end{aligned} \tag{6}$$

и

$$\begin{aligned} &4x^2 + 8x - 5 < 0, \\ &\log_2 x < 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Множество решений первого неравенства системы (6) составляют два промежутка: $-\infty < x < -\dfrac{5}{2}$ и $\dfrac{1}{2} < x < +\infty$. Множество решений второго неравенства системы (6) есть промежуток $1 < x < +\infty$. Множество решений системы неравенств (6) есть общая часть множеств решений ее первого и второго неравенств, т.е. есть промежуток $1 < x < +\infty$.

Множество решений первого неравенства системы (7) есть промежуток $-\dfrac{5}{2} < x < \dfrac{1}{2}$. Множество решений второго неравенства — промежуток $0 < x < 1$. Множество решений системы (7) есть промежуток $0 < x < \dfrac{1}{2}$.

Объединяя множества решений системы (6) и системы (7), получаем множество решений исходного неравенства.

Ответ. $0 < x < \dfrac{1}{2}$, $1 < x < +\infty$.

В случае когда в неравенстве вида (3) один из сомножителей, например $\varphi(x)$, положителен на некотором множестве M, неравенство вида (3) на основании утверждения 2 § 1 равносильно на M неравенству $f(x) > 0$.

Пример 3. Решить неравенство

$$(3 - x)\sqrt{x^2 - x - 2} > 0.$$

Решение. Область допустимых значений данного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x^2 - x - 2 \geqslant 0$ и, значит, состоит из двух промежутков $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 2$. Точки $x = -1$, $x = 2$ не удовлетворяют неравенству, так как в них левая часть обращается в нуль. На множестве M, состоящем из двух промежутков $x < -1$ и $x > 2$, функция $y = \sqrt{x^2 - x - 2}$ положительна, значит, на этом множестве исходное неравенство равносильно неравенству $x - 3 < 0$. Множество решений последнего неравенства, содержащихся в M, состоит из двух промежутков $-\infty < x < -1$ и $2 < x < 3$, которые и составляют множество решений исходного неравенства.

Ответ. $-\infty < x < -1,\ \ 2 < x < 3$.

Так же, как выше, показывается, что неравенство вида

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} > 0 \tag{8}$$

равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{aligned} f(x) &> 0, \\ \varphi(x) &> 0 \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} f(x) &< 0, \\ \varphi(x) &< 0, \end{aligned}$$

а неравенство вида

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} < 0 \tag{9}$$

равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{aligned} f(x) &> 0, \\ \varphi(x) &< 0 \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} f(x) &< 0, \\ \varphi(x) &> 0. \end{aligned}$$

Отметим еще, что решение нестрогих неравенств вида (3) или (4), или (8), или (9) сводится к решению соответствующих уравнений и строгих неравенств.

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{(\log_{\sqrt{2}}(x-3))^2}{x^2 - 4x - 5} \geqslant 0.$$

Решение. Множество решений этого неравенства состоит из решений уравнения

$$\frac{(\log_{\sqrt{2}}(x-3))^2}{x^2 - 4x - 5} = 0 \tag{10}$$

и решений строгого неравенства

$$\frac{(\log_{\sqrt{2}}(x-3))^2}{x^2 - 4x - 5} > 0. \tag{11}$$

Из (10) следует, что $\log_{\sqrt{2}}(x-3) = 0$, т.е. что $x = 4$. Проверкой убеждаемся, что $x_1 = 4$ есть корень уравнения (10).

Неравенство (11) равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{aligned} &(\log_{\sqrt{2}}(x-3))^2 > 0, \\ &x^2 - 4x - 5 > 0 \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} &(\log_{\sqrt{2}}(x-3))^2 < 0, \\ &x^2 - 4x - 5 < 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Вторая из этих систем решений не имеет, так как не имеет решений неравенство $(\log_{\sqrt{2}}(x-3))^2 < 0$.

Неравенство $(\log_{\sqrt{2}}(x-3))^2 > 0$ выполняется для всех $x > 3$, кроме $x = 4$. Неравенство $x^2 - 4x - 5 > 0$ имеет решением два промежутка: $-\infty < x < -1$ и $5 < x < +\infty$. Следовательно, первая из систем (12) имеет множество решений – промежуток $5 < x < +\infty$.

Итак, множество решений исходного неравенства состоит из точки $x = 4$ и интервала $(5; +\infty)$.

Ответ. $x = 4, \ \ 5 < x < +\infty$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{3}}(x-4)-1} \geqslant 0.$$

Решение. ОДЗ неравенства определяется условиями $x - 5 \geqslant 0$, $x - 4 > 0$, $x - 4 \neq \sqrt{3}$, т.е. ОДЗ состоит из чисел $x \geqslant 5$ и $x \neq 4 + \sqrt{3}$. Число 5 входит в ОДЗ и, очевидно, удовлетворяет исходному неравенству, т.е. является его решением. Будем далее искать решения, отличные от $x = 5$.

В области $x > 5$ и $x \neq 4 + \sqrt{3}$ функция $y = \sqrt{x-5}$ положительна, следовательно, в этой области исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(x-4)-1} \geqslant 0,$$

или неравенству

$$\log_{\sqrt{3}}(x-4) - 1 > 0.$$

Множество решений последнего неравенства есть $x > 4 + \sqrt{3}$. Все эти числа содержатся в области $x > 5$ и $x \neq 4 + \sqrt{3}$. Значит, все они являются решениями исходного неравенства.

Ответ. $x = 5, \ \ 4 + \sqrt{3} < x < +\infty$.

3.3. Освобождение от знаменателя. Рассмотрим неравенство вида

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} > g(x), \tag{13}$$

где $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ и $y = g(x)$ – некоторые функции. Умножая обе части неравенства (13) на $\varphi(x)$, т.е. освобождаясь от знаменателя, получим неравенство

$$f(x) > g(x)\varphi(x), \tag{14}$$

вообще говоря, не равносильное исходному неравенству (13).

Например, неравенства

$$\frac{1}{x} > 1 \quad \text{и} \quad 1 > x$$

не равносильны, ведь каждое отрицательное число будет решением второго неравенства, но не первого.

Пользуясь утверждением 11 о равносильности неравенств из § 1 (п. 1.2) можно утверждать, что если функция $y = \varphi(x)$ определена на множестве M

и положительна, то неравенства (13) и (14) равносильны на M. Если же функция $y = \varphi(x)$ определена и отрицательна на M, то, как следует из утверждения 12 (§ 1, п. 1.2), неравенство (13) равносильно на M неравенству

$$f(x) < g(x)\varphi(x).$$

Поэтому неравенства вида (13) часто решают следующим образом.

1. Находят ОДЗ неравенства (13).

2. ОДЗ разбивают на две области M_1 и M_2: M_1 — та часть ОДЗ, где функция $y = \varphi(x)$ положительна, а M_2 — та часть ОДЗ, где функция $y = \varphi(x)$ отрицательна.

3. На множестве M_1 находят решения неравенства $f(x) > \varphi(x)g(x)$, равносильного на этом множестве исходному неравенству.

4. На множестве M_2 находят решения неравенства $f(x) < \varphi(x)g(x)$, равносильного на этом множестве исходному неравенству.

5. Объединяя множества всех решений, найденные на множествах M_1 и M_2, получаем множество всех решений исходного неравенства.

Неравенства вида (13) можно решать и иначе: перенеся функцию $y = g(x)$ в левую часть неравенства и приводя затем левую часть к общему знаменателю, получают неравенство

$$\frac{f(x) - g(x)\varphi(x)}{\varphi(x)} > 0, \tag{15}$$

равносильное неравенству (13). Неравенство (15), как показано в предыдущем пункте, равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ f(x) - g(x)\varphi(x) > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) - g(x)\varphi(x) < 0. \end{cases} \tag{16}$$

Объединяя множества решений каждой из систем (16), получаем решение неравенства (13).

Приведем примеры решения неравенств этими способами.

Пример 6. Решить неравенство

$$\frac{\log_2 x}{1 - \log_2 x} < 2. \tag{17}$$

Решение. ОДЗ неравенства (17) состоит из двух промежутков $0 < x < 2$ и $2 < x < +\infty$. Разобьем ОДЗ на две области: M_1, где $1 - \log_2 x > 0$, т.е. M_1 есть множество $0 < x < 2$, и M_2, где $1 - \log_2 x < 0$, т.е. M_2 есть множество $2 < x < +\infty$. На множестве M_1 неравенство (17) равносильно неравенству

$$\log_2 x < 2(1 - \log_2 x). \tag{18}$$

Переписав неравенство (18) в виде

$$\log_2 x < \frac{2}{3}, \tag{19}$$

получим простейшее логарифмическое неравенство. Решениями неравенства (19) являются все x из промежутка $0 < x < \sqrt[3]{4}$. Все эти x находятся в M_1. Поэтому решениями исходного неравенства на множестве M_1 являются все x из промежутка $0 < x < \sqrt[3]{4}$.

На множестве M_2 неравенство (18) равносильно неравенству

$$\log_2 x > 2(1 - \log_2 x). \tag{20}$$

Перепишем неравенство (20) в виде

$$\log_2 x > \frac{2}{3}. \tag{21}$$

Решениями простейшего неравенства (21) являются все $x > \sqrt[3]{4}$. Из этих x в M_2 входят лишь $x > 2$. Именно эти x и будут решениями исходного неравенства на множестве M_2. Объединяя решения, найденные на множествах M_1 и M_2, получаем, что решения исходного неравенства составляют два промежутка: $0 < x < \sqrt[3]{4}$ и $x > 2$.

О т в е т. $0 < x < \sqrt[3]{4}$, $2 < x < +\infty$.

П р и м е р 7. Решить неравенство

$$\frac{x+5}{x-1} < x + 1. \tag{22}$$

Р е ш е н и е. Перепишем неравенство (22) в виде

$$\frac{(x+5) - (x+1)(x-1)}{x-1} < 0. \tag{23}$$

Неравенство (23) равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{aligned} &x - 1 > 0, \\ &x + 5 < (x+1)(x-1), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &x - 1 < 0, \\ &x + 5 > (x+1)(x-1). \end{aligned}$$

Первая система после тождественных преобразований может быть записана так:

$$\begin{aligned} &x - 1 > 0, \\ &x^2 - x - 6 > 0. \end{aligned}$$

Квадратный трехчлен $x^2 - x - 6$ имеет корни $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$, и множество решений первой системы неравенств, как легко видеть, есть промежуток $(3; +\infty)$.

Вторая система может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} &x - 1 < 0, \\ &x^2 - x - 6 < 0. \end{aligned}$$

Множество ее решений есть промежуток $-2 < x < 1$.

Итак, множество решений исходной системы состоит из двух промежутков: $(-2; 1)$ и $(3; +\infty)$.

О т в е т. $-2 < x < 1$, $3 < x < +\infty$.

Заметим, что неравенство (23) может быть решено способом, изложенным в п. 2.8.

Отметим, что первый из приведенных выше способов часто применяется тогда, когда функция $\varphi(x) > 0$ на всей ОДЗ неравенства (13).

Пример 8. Решить неравенство

$$2^{2x+1} + 2 \geqslant \frac{21}{2^{2x+3}}. \tag{24}$$

Решение. Так как функция $y = 2^{2x+3}$ положительна для всех x, то неравенство (24) равносильно неравенству

$$(2^{2x+1} + 2)2^{2x+3} \geqslant 21. \tag{25}$$

Перепишем неравенство (25) в виде

$$4 \cdot (2^{2x+1})^2 + 8 \cdot 2^{2x+1} - 21 \geqslant 0. \tag{26}$$

Поскольку квадратный трехчлен $4y^2 + 8y - 21$ имеет корни $y_1 = -7/2$ и $y_2 = 3/2$, то множество решений неравенства $4y^2 + 8y - 21 \geqslant 0$ состоит из двух промежутков $y \leqslant -7/2$ и $y \geqslant 3/2$. Значит, множество решений неравенства (26) будет объединением множества решений неравенства $2^{2x+1} \leqslant -7/2$ и множества решений неравенства $2^{2x+1} \geqslant 3/2$. Первое из этих неравенств не имеет решений, а множество решений второго есть промежуток $x \geqslant \dfrac{1}{2}\log_2 3 - 1$. Поэтому множество решений неравенства (26), а значит, и исходного неравенства есть тот же самый промежуток.

Ответ. $\dfrac{1}{2}\log_2 3 - 1 \leqslant x < +\infty$.

3.4. Сокращение на общий множитель. Пусть дано неравенство вида

$$\varphi(x)f(x) > \varphi(x)g(x). \tag{27}$$

Замена этого неравенства неравенством $f(x) > g(x)$, т.е. сокращение обеих частей неравенства (27) на функцию $y = \varphi(x)$, часто является грубой ошибкой, так как полученное неравенство может не быть равносильным исходному.

Например, замена неравенства $x^2 > x$ неравенством $x > 1$, т.е. сокращение обеих частей неравенства $x^2 > x$ на x, приводит к тому, что теряются все отрицательные числа x, являющиеся решениями неравенства $x^2 > x$.

Неравенства вида (27) решаются следующим образом.

Неравенство (27) записывается в виде

$$\varphi(x)(f(x) - g(x)) > 0$$

и заменяется совокупностью систем неравенств

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ f(x) - g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) - g(x) < 0, \end{cases}$$

равносильной, как показано в п. 3.2, исходному неравенству (27). Множество решений этой совокупности систем и будет множеством решений исходного неравенства (27).

Пример 9. Решить неравенство

$$(3x + 2)\log_2(x + 1) > (5x - 2)\log_4(x^2 + 2x + 1).$$

Р е ш е н и е. Область допустимых значений этого неравенства имеет вид $x > -1$. На ОДЗ справедливо тождество

$$\log_4(x^2 + 2x + 1) = \log_4(x + 1)^2 = \log_2(x + 1).$$

Поэтому исходное неравенство может быть переписано так:

$$[(3x + 2) - (5x - 2)] \log_2(x + 1) > 0.$$

Отсюда следует, что оно равносильно на ОДЗ совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} \log_2(x + 1) > 0, \\ 3x + 2 > -5x - 2 > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \log_2(x + 1) < 0, \\ 3x + 2 < -5x - 2 < 0. \end{cases} \tag{28}$$

Первая из этих систем равносильна системе

$$\begin{cases} x + 1 > 1, \\ x < 2 \end{cases}$$

и потому множество ее решений есть промежуток $0 < x < 2$.

Аналогично система неравенств

$$\begin{cases} 0 < x + 1 < 1, \\ x > 2 \end{cases} \tag{29}$$

равносильна второй из систем (28). Так как система (29) не имеет решений, то не имеет их и вторая из систем (28). Следовательно, множество решений исходного неравенства есть промежуток $0 < x < 2$.

О т в е т. $0 < x < 2$.

Отметим, что если на некотором множестве M функция $y = \varphi(x)$ положительна, то неравенство (27) на основании утверждения 11 § 1 равносильно неравенству

$$f(x) > g(x).$$

Аналогично, на основании утверждения 12 § 1, если на множестве M функция $y = \varphi(x)$ отрицательна, то неравенство (27) равносильно неравенству

$$f(x) < g(x).$$

П р и м е р 10. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{2x + 5} \geqslant \frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{x + 4}.$$

Р е ш е н и е. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $6 + x - x^2 \geqslant 0$, $2x + 5 \neq 0$ и $x + 4 \neq 0$, т.е. ОДЗ есть промежуток $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

Если $x = -2$ или $x = 3$, то $2x + 5 \neq 0$, $x + 4 \neq 0$, $6 + x - x^2 = 0$. Поэтому при $x = -2$ и при $x = 3$ обе части исходного неравенства равны нулю. Следовательно, $x = -2$ и $x = 3$ — решения исходного неравенства.

Пусть, далее, x из промежутка $-2 < x < 3$. Для любого x из этого промежутка имеем $x + 4 > 0$, $2x + 5 > 0$, $6 + x - x^2 > 0$. Поэтому на множестве $-2 < x < 3$ исходное неравенство равносильно неравенству

$$x + 4 \geqslant 2x + 5.$$

Решениями этого неравенства являются все x из промежутка $x \leqslant -1$. Из этих значений x в множество $-2 < x < 3$ входят x из промежутка $-2 < x \leqslant -1$. Они будут решениями исходного неравенства на множестве $-2 < x < 3$. Следовательно, решениями исходного неравенства являются все x из промежутка $-2 \leqslant x \leqslant -1$ и $x = 3$.

Ответ. $-2 \leqslant x \leqslant -1,\ x = 3$.

Отметим, что иногда деление (или умножение) обеих частей неравенства на некоторую положительную функцию, даже не являющуюся общим делителем левой и правой частей, также может привести к упрощению неравенства.

Пример 11. Решить неравенство

$$5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2}).$$

Решение. Поскольку

$$3^{x+1} = 3 \cdot 3^x, \quad 5^{x-1} = \frac{1}{5} \cdot 5^x, \quad 3^{x-2} = \frac{1}{9} \cdot 3^x,$$

то, раскрывая скобки и перенося члены неравенства из левой части в правую и из правой в левую, получим неравенство, равносильное исходному:

$$\frac{3}{5} \cdot 5^x > \frac{25}{9} \cdot 3^x. \tag{30}$$

Так как $3^x > 0$ для любого x, то, разделив неравенство (30) на $\frac{3}{5} \cdot 3^x$, получим неравенство

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x > \left(\frac{5}{3}\right)^3, \tag{31}$$

равносильное неравенству (30). Так как $5/3 > 1$, то множеством решений неравенства (31), а значит, и исходного неравенства являются все x из промежутка $x > 3$.

Ответ. $3 < x < +\infty$.

3.5. Возведение в степень. Замена неравенства $f(x) > g(x)$ неравенством $(f(x))^n > (g(x))^n$, т.е. возведение обеих частей неравенства в натуральную степень, может привести к грубым ошибкам, так как может оказаться, что эти неравенства не равносильны. Например, замена неравенства $x^2 > x$ неравенством $x^4 > x^2$ приводит к тому, что теряется часть решений неравенства $x^2 > x$, составляющая промежуток $-1 \leqslant x < 0$.

При возведении в степень обеих частей неравенства нужно пользоваться утверждением 8 § 1 о равносильности неравенств.

Наиболее часто возведение обеих частей неравенства в степень проводится в тех случаях, когда неравенство содержит радикалы. Самыми простейшими среди неравенств, содержащих радикалы, являются неравенства

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{f(x)} < g(x),$$

где $n \geqslant 2$.

Начнем рассмотрение со случая $n = 2$.

Рассмотрим неравенство

$$\sqrt{f(x)} < g(x). \tag{32}$$

Обычно неравенства типа (32) решают следующим образом:

1. Находят ОДЗ неравенства.

2. Разбивают ОДЗ на два множества M_1 и M_2:

M_1 — та часть ОДЗ, где функция $y = g(x)$ неотрицательна,

M_2 — та часть ОДЗ, где функция $y = g(x)$ отрицательна.

3. Так как на M_2 нет решений неравенства (32), а на M_1 обе части неравенства (32) неотрицательны, то на M_1 решают неравенство $f(x) < g^2(x)$, равносильное на M_1 неравенству (32).

Все решения неравенства $f(x) < g^2(x)$, попавшие в множество M_1, и будут решениями неравенства (32).

Пример 12. Решить неравенство

$$\sqrt{3 + 2x - x^2} < 1 - x. \tag{33}$$

Решение. ОДЗ неравенства (33) состоит из промежутка $-1 \leqslant x \leqslant 3$. Разобьем ОДЗ на два множества: M_1 — ту часть ОДЗ, где $1 - x \geqslant 0$, и M_2 — ту часть ОДЗ, где $1 - x < 0$; тогда M_1 есть промежуток $-1 \leqslant x \leqslant 1$, а M_2 — промежуток $1 < x \leqslant 3$.

На множестве M_2 нет решений неравенства (33). На множестве M_1 обе части неравенства (33) неотрицательны, поэтому неравенство (33) равносильно на этом множестве неравенству

$$3 + 2x - x^2 < (1 - x)^2,$$

т.е. неравенству

$$x^2 - 2x - 1 > 0. \tag{34}$$

Решения неравенства (34) составляют два промежутка $-\infty < x < 1 - \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2} < x < +\infty$. Из этих значений x множеству M_1 принадлежат x из промежутка $-1 \leqslant x < 1 - \sqrt{2}$. Следовательно, эти x являются решениями исходного неравенства.

Ответ. $-1 \leqslant x < 1 - \sqrt{2}$.

Неравенства вида (32) можно решать и иначе. Все решения неравенства (32) должны удовлетворять условиям

$$f(x) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad g(x) > 0. \tag{35}$$

Если M — область, задаваемая неравенствами (35) (в частности, это означает, что функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены на M), то по сформулированному выше утверждению, неравенство (32) равносильно на M неравенству $f(x) < g^2(x)$. Таким образом, можно утверждать, что неравенство (32) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases} \tag{36}$$

Пример 13. Решить неравенство

$$\sqrt{x+2} < 3 - x.$$

Решение. Как указывалось, это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{aligned} &x+2 \geqslant 0,\\ &3-x > 0,\\ &x+2 < (3-x)^2. \end{aligned}$$

После упрощений система может быть переписана так:

$$\begin{aligned} &-2 \leqslant x < 3,\\ &x^2 - 7x + 7 > 0. \end{aligned} \qquad (37)$$

Множество решений неравенства $x^2 - 7x + 7 > 0$ состоит из двух промежутков: $x < \frac{1}{2}\quad 7 - \sqrt{21}$ и $x > \frac{1}{2}\quad 7 + \sqrt{21}$. Поскольку $\frac{1}{2}\quad 7 + \sqrt{21}\quad > 3$ и $-2 < \frac{1}{2}\quad 7 - \sqrt{21}\quad < 3$, то множество решений системы (37), а значит, и исходного неравенства есть промежуток $-2 \leqslant x < \frac{1}{2}\quad 7 - \sqrt{21}$.

Ответ. $-2 \leqslant x < \dfrac{7-\sqrt{21}}{2}$.

Рассмотрим неравенство

$$\overline{f(x)} > g(x). \qquad (38)$$

Обычно неравенства типа (38) решают следующим образом.

1. Находят ОДЗ неравенства.
2. Разбивают ОДЗ на два множества M_1 и M_2:

M_1 — та часть ОДЗ, где функция $y = g(x)$ неотрицательна,

M_2 — та часть ОДЗ, где функция $y = g(x)$ отрицательна.

3. Все x из M_2 являются решениями неравенства (38).
4. На M_1 решают неравенство $f(x) > g^2(x)$, равносильное на M_1 неравенству (38).

Объединяя множества решений, найденные на M_1, с множеством M_2, получаем множество решений неравенства (38).

Пример 14. Решить неравенство

$$\overline{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x.$$

Решение. ОДЗ этого неравенства есть промежуток $1 \leqslant x \leqslant 5$. Разобьем его на два промежутка: $1 \leqslant x \leqslant 4$ и $4 < x \leqslant 5$.

1. Для x из множества $1 \leqslant x \leqslant 4$ обе части исследуемого неравенства определены и неотрицательны. Следовательно, на этом множестве исходное неравенство равносильно неравенству

$$-x^2 + 6x - 5 > (8 - 2x)^2$$

или неравенству
$$5x^2 - 38x + 69 < 0.$$
Множество решений последнего неравенства есть промежуток $3 < x < 4\frac{3}{5}$. Из этих x множеству $1 \leqslant x \leqslant 4$ принадлежат x, удовлетворяющие условию $3 < x \leqslant 4$; они и являются решениями исходного неравенства.

2. Для x из множества $4 < x \leqslant 5$ левая часть данного неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Значит, все x из множества $4 < x \leqslant 5$ являются решениями исходного неравенства. Следовательно, множество решений исходного неравенства является объединением множеств $3 < x \leqslant 4$ и $4 < x \leqslant 5$, т.е. решением исходного неравенства является промежуток $3 < x \leqslant 5$.

Ответ. $3 < x \leqslant 5$.

Неравенство вида (38) можно решать и иначе. Все решения этого неравенства должны удовлетворять условию
$$f(x) \geqslant 0.$$
Обозначим через M_1 множество точек, удовлетворяющих системе неравенств
$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0, \end{cases}$$
а через M_2 — множество решений системы
$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$
Очевидно, каждая точка из множества M_1 есть решение неравенства (38). На множестве M_2 обе части неравенства (38) определены и неотрицательны. Поэтому на M_2 это неравенство равносильно неравенству $f(x) > g^2(x)$.

Из сказанного следует, что неравенство (38) равносильно совокупности систем неравенств
$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$$
Заметим, что во второй системе первое неравенство $f(x) \geqslant 0$ есть следствие последнего неравенства $f(x) > g^2(x)$, так что первое неравенство можно опустить, не нарушая равносильности. Окончательно получаем, что неравенство (38) равносильно совокупности систем неравенств
$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \tag{39}$$

Пример 15. Решить неравенство
$$\sqrt{2x-3} > 2 - x.$$

Р е ш е н и е. Заданное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} 2x-3 \geqslant 0, \\ 2-x < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2-x \geqslant 0, \\ 2x-3 > (2-x)^2. \end{cases} \tag{40}$$

Множество решений первой системы есть промежуток $x > 2$.

Вторая система после упрощений может быть переписана так:

$$\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x^2 - 6x + 7 < 0. \end{cases}$$

Поскольку решения неравенства $x^2 - 6x + 7 < 0$ составляют промежуток $3-\sqrt{2} < x < 3+\sqrt{2}$ и так как $3-\sqrt{2} < 2 < 3+\sqrt{2}$, то множество решений второй системы неравенств (40) имеет вид $3-\sqrt{2} < x \leqslant 2$.

Объединяя найденные множества решений систем (40), получаем промежуток $x > 3-\sqrt{2}$ — множество решений исходного неравенства.

О т в е т. $3-\sqrt{2} < x < +\infty$.

Заметим, что замена неравенств (32), (38) равносильными им совокупностями систем неравенств (36) и (39) может проводиться при любом четном $n \geqslant 2$. Нужно только показатель степени 2 в системах заменить на $n = 2k$.

В случае же нечетного n ситуация намного проще. Так как при $n = 2m+1$ функция $y = x^n$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, то неравенства

$$\sqrt[2m+1]{f(x)} < g(x) \quad \text{и} \quad f(x) < g^{2m+1}(x)$$

равносильны. Равносильными будут также неравенства

$$\sqrt[2m+1]{f(x)} > g(x) \quad \text{и} \quad f(x) > g^{2m+1}(x).$$

Наконец заметим, что вместо того, чтобы запоминать совокупности систем (30) и (39), можно запомнить лишь способ, каким они были получены и применять его в каждой конкретной ситуации.

В более сложных неравенствах прием возведения в степень может использоваться неоднократно.

П р и м е р 16. Решить неравенство

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Р е ш е н и е. ОДЗ неравенства определяется условиями $1-x \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, т.е. представляет собой отрезок $0 \leqslant x \leqslant 1$. Заданное неравенство можно переписать в виде

$$\sqrt{1-x} > \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{3}},$$

и так как обе части последнего неравенства определены и неотрицательны на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, то оно равносильно на этом отрезке неравенству

$$\left(\sqrt{1-x}\right)^2 > \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

т.е. неравенству

$$1 - x > x + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x} + \frac{1}{3}.$$

Последнее неравенство после упрощений может быть записано в виде

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x} < \frac{1}{3} - x. \qquad (41)$$

Все решения получившегося неравенства, принадлежащие отрезку $0 \leqslant x \leqslant 1$, удовлетворяют также условию $1/3 - x > 0$, т.е. лежат в множестве $0 \leqslant x < 1/3$. Таким образом, все решения исходного неравенства принадлежат промежутку $0 \leqslant x < 1/3$. На этом множестве обе части неравенства (41) определены и неотрицательны. Следовательно, на промежутке $0 \leqslant x < 1/3$ неравенство (41) равносильно неравенству

$$\frac{1}{3}x < \frac{1}{9} - \frac{2}{3}x + x^2.$$

Решения последнего неравенства составляют два промежутка: $x < \dfrac{3-\sqrt{5}}{6}$ и $x > \dfrac{3+\sqrt{5}}{6}$. Из них в область $0 \leqslant x < 1/3$ попадают только числа из промежутка $0 \leqslant x < \dfrac{3-\sqrt{5}}{6}$. Итак, множество решений неравенства (41), попадающих в отрезок $0 \leqslant x \leqslant 1$, а следовательно, и множество решений исходного неравенства имеет вид $0 \leqslant x < \dfrac{3-\sqrt{5}}{6}$.

Ответ. $0 \leqslant x < \dfrac{3-\sqrt{5}}{6}$.

3.6. Потенцирование неравенств. Пусть a некоторое положительное число, отличное от единицы. Замена неравенства

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \qquad (42)$$

в случае $a > 1$ неравенством

$$f(x) < g(x),$$

а в случае $0 < a < 1$ неравенством

$$f(x) > g(x)$$

называется *потенцированием* неравенства (42).

В общем случае переход от неравенства (42) к неравенству $f(x) < g(x)$ либо к неравенству $f(x) > g(x)$ неравносилен. Например, замена неравенства $\log_2 x < \log_2 x^2$ неравенством $x < x^2$ есть неравносильный переход, ведь числа $x < 0$, являющиеся решениями неравенства $x < x^2$, не являются решениями неравенства $\log_2 x < \log_2 x^2$.

При решении неравенств вида (42) пользуются утверждениями 9 и 10 § 1.

Согласно этим утверждениям неравенства вида (42) решают следующим образом.

1. Находят ОДЗ неравенства.

2. Решают неравенство на ОДЗ, учитывая, что потенцирование есть равносильное преобразование на этом множестве.

Пример 17. Решить неравенство

$$\log_3(x^2-1) \leqslant 1.$$

Решение. Область допустимых значений неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x^2-1>0$, т.е. ОДЗ есть объединение двух промежутков $-\infty < x < -1$ и $1 < x < +\infty$. На этой области исходное неравенство равносильно неравенству

$$x^2-1 \leqslant 3,$$

которое удовлетворяется только для x из промежутка $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Из этих x в ОДЗ попадают лишь x из двух промежутков $-2 \leqslant x < -1$ и $1 < x \leqslant 2$. Следовательно, все x из этих промежутков являются решениями исходного неравенства.

Ответ. $-2 \leqslant x < -1,\ 1 < x \leqslant 2.$

Пример 18. Решить неравенство

$$\log_{\sin \pi/3}(x^2-3x+2) \geqslant 2.$$

Решение. Область допустимых значений неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x^2-3x+2>0$, т.е. ОДЗ состоит из двух промежутков: $-\infty < x < 1$ и $2 < x < +\infty$. Поскольку $\sin\pi/3 = \sqrt{3}/2 <$ < 1 и $2 = 2\log_{\sqrt{3}/2}\sqrt{3}/2 = \log_{\sqrt{3}/2} 3/4$, то исходное неравенство на ОДЗ равносильно неравенству

$$x^2-3x+2 \leqslant \frac{3}{4},$$

или неравенству

$$4x^2-12x+5 \leqslant 0. \tag{43}$$

Решения неравенства (43) составляют промежуток $1/2 \leqslant x \leqslant 5/2$. Поскольку $1/2 < 1$ и $5/2 > 2$, то множество решений исходного неравенства состоит из двух промежутков: $1/2 \leqslant x < 1$ и $2 < x \leqslant 5/2$.

Ответ. $\dfrac{1}{2} \leqslant x < 1,\quad 2 < x \leqslant \dfrac{5}{2}.$

Иногда неравенство

$$\log_a f(x) < \log_a g(x)$$

заменяют при $a > 1$ равносильной системой неравенств

$$\begin{aligned} &f(x) > 0,\\ &g(x) > f(x)\end{aligned}$$

или при $0 < a < 1$ равносильной системой неравенств

$$\begin{aligned} &g(x) > 0,\\ &f(x) > g(x).\end{aligned}$$

Пример 19. Решить неравенство

$$\log_2 \frac{x}{x-1} \geqslant -1.$$

Решение. Множество решений этого неравенства состоит из решений уравнения

$$\log_2 \frac{x}{x-1} = -1 \tag{44}$$

и решений неравенства

$$\log_2 \frac{x}{x-1} > -1. \tag{45}$$

Уравнение (44) равносильно уравнению

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2},$$

имеющему единственный корень $x_1 = -1$. Неравенство (45) равносильно, как указывалось выше, неравенству

$$\frac{x}{x-1} > \frac{1}{2},$$

множество решений которого состоит из двух промежутков $x < -1$ и $x > 1$.

Присоединяя к этому множеству точку $x_1 = -1$, получаем искомое множество решений заданного в условии неравенства.

Ответ. $-\infty < x \leqslant -1, \;\; 1 < x < +\infty$.

Прием с потенцированием неравенств может применяться неоднократно.

Пример 20. Решить неравенство

$$\log_3 \log_{9/16}(x^2 - 4x + 3) \leqslant 0.$$

Решение. Данное неравенство равносильно двойному неравенству

$$0 < \log_{9/16}(x^2 - 4x + 3) \leqslant 1,$$

которое, в свою очередь, равносильно двойному неравенству

$$1 > x^2 - 4x + 3 \geqslant 9/16.$$

Последнее неравенство можно переписать в виде следующей системы неравенств:

$$\begin{aligned} &x^2 - 4x + 3 < 1, \\ &x^2 - 4x + 3 \geqslant 9/16. \end{aligned}$$

Множество решений первого неравенства этой системы есть промежуток $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$, множество решений второго неравенства состоит из двух промежутков: $x \leqslant 3/4$ и $x \geqslant 13/4$. Так как $2 - \sqrt{2} < 3/4$ и $13/4 < 2 + \sqrt{2}$, то множество решений системы неравенств, а значит, и исходного неравенства состоит из двух промежутков: $2 - \sqrt{2} < x \leqslant 3/4$ и $13/4 \leqslant x < 2 + \sqrt{2}$.

Ответ. $2 - \sqrt{2} < x \leqslant 3/4, \;\; 13/4 \leqslant x < 2 + \sqrt{2}$.

Иногда, для того чтобы привести неравенство к виду (42), надо сделать различные преобразования, тождественные на ОДЗ исходного неравенства или на каком-либо ином множестве.

Пример 21. Решить неравенство

$$\log_{1/2}(4-x) \geqslant \log_{1/2} 2 - \log_{1/2}(x-1).$$

Решение. Область допустимых значений неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $4-x>0$ и $x-1>0$, т.е. ОДЗ является интервалом $1<x<4$. На этом интервале исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{1/2}(4-x)(x-1) \geqslant \log_{1/2} 2$$

или неравенству

$$(4-x)(x-1) \leqslant 2.$$

Решения последнего неравенства составляют два промежутка: $-\infty < x \leqslant 2$ и $3 \leqslant x < +\infty$. Из этих решений в интервале $1<x<4$ содержатся лишь x из двух промежутков $1<x\leqslant 2$ и $3 \leqslant x < 4$. Значит, множество всех решений исходного неравенства состоит из двух промежутков: $1<x\leqslant 2$ и $3\leqslant x<4$.

Ответ. $1<x\leqslant 2,\ 3\leqslant x<4$.

Если в неравенстве присутствуют логарифмические функции с различными основаниями, то, как правило, удобно бывает привести их к одному основанию с помощью тождества

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b},$$

где $a>0,\quad b>0,\quad c>0,\quad c\neq 1,\quad b\neq 1$.

Пример 22. Решить неравенство

$$\log_7 x - \frac{1}{\log_{1/49} x^2} \geqslant 2.$$

Решение. Область допустимых значений данного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x>0$, $x\neq 1$. На этом множестве справедливо тождество

$$\frac{1}{\log_{1/49} x^2} = \frac{-1}{\log_7 x}.$$

Поэтому исходное неравенство на своей ОДЗ равносильно неравенству

$$\log_7 x + \frac{1}{\log_7 x} \geqslant 2. \tag{46}$$

Обозначив $\log_7 x$ через y, неравенство (46) можно переписать в виде

$$y + \frac{1}{y} \geqslant 2$$

или в виде

$$\frac{(y-1)^2}{y} \geqslant 0. \tag{47}$$

Решения неравенства (47) составляют промежуток $0 < y < +\infty$. Следовательно, данное в условии задачи неравенство на своей ОДЗ равносильно неравенству $\log_7 x > 0$. Последнему неравенству удовлетворяют все числа x из области $x > 1$. Все они лежат в ОДЗ исходного неравенства и потому являются его решениями.

Ответ. $1 < x < +\infty$.

3.7. Логарифмирование неравенств. Пусть a — фиксированное положительное и отличное от единицы число. Замена неравенства

$$f(x) < g(x) \tag{48}$$

неравенством

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \tag{49}$$

при $a > 1$ либо неравенством

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \tag{50}$$

при $0 < a < 1$ называется логарифмированием неравенства (48).

В общем случае такой переход от неравенства (48) к неравенствам (49) или (50) неравносилен. Однако если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ одновременно положительны на ОДЗ неравенства (48), то при $a > 1$ неравенства (48) и (49) равносильны, а при $0 < a < 1$ неравенства (48) и (50) также равносильны (см. утверждения 9 и 10 § 1).

Наиболее часто логарифмирование неравенств применяется в случае, когда

$$f(x) = a^{f_1(x)}, \quad g(x) = a^{g_1(x)},$$

где число a таково, что $a > 0$ и $a \neq 1$. При этом применяются утверждения 5 и 6 § 1.

Пример 23. Решить неравенство

$$2^{x-1} > \frac{1}{16}^{1/x}.$$

Решение. Данное неравенство можно переписать в виде

$$2^{x-1} > 2^{-4/x}.$$

Логарифмируя по основанию 2 это неравенство, получим, что оно равносильно неравенству

$$x - 1 > -\frac{4}{x}.$$

Перенесем правую часть этого неравенства налево и приведем получившееся в левой части неравенства выражение к общему знаменателю. В результате получим неравенство

$$\frac{x^2 - x + 4}{x} > 0, \tag{51}$$

равносильные исходному. Дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - x + 4$ отрицателен (он равен (-15)). Значит, числитель неравенства (51) положителен при любом действительном x, и поэтому это неравенство равносильно неравенству

$$\frac{1}{x} > 0;$$

множество решений последнего неравенства есть промежуток $x > 0$.

О т в е т. $0 < x < +\infty$.

П р и м е р 24. Решить неравенство

$$3^{4x^2-3x+1/2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2}.$$

Р е ш е н и е. Так как $\left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2} = 3^{40x^2}$, то данное неравенство перепишется в виде

$$3^{4x^2-3x+1/2} < 3^{40x^2}.$$

Поскольку $3 > 1$, то это неравенство равносильно неравенству

$$4x^2 - 3x + \frac{1}{2} < 40x^2$$

или неравенству

$$36x^2 + 3x - \frac{1}{2} > 0. \qquad (52)$$

Корнями квадратного трехчлена $36x^2 + 3x - 1/2$ являются $x_1 = -1/6$ и $x_2 = 1/12$. Поэтому множество решений неравенства (52), а следовательно, и исходного неравенства есть два промежутка: $-\infty < x < -1/6$ и $1/12 < x < +\infty$.

О т в е т. $-\infty < x < -\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12} < x < +\infty$.

3.8. Решение неравенств, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины. Для решения таких неравенств обычно избавляются от знаков абсолютных величин.

Для освобождения от знаков абсолютной величины надо отметить на координатной оси все точки, в каждой из которых меняет знак хотя бы одна из функций, находящихся в неравенстве под знаком абсолютной величины. Таким образом, координатная ось разбивается на некоторое число промежутков. На каждом таком промежутке неравенство заменяется на другое неравенство, не содержащее знаков абсолютной величины и равносильное исходному неравенству на этом промежутке. Каждое из полученных неравенств решается, и из полученного множества решений отбираются числа, лежащие на рассматриваемом промежутке. Они и будут решениями исходного неравенства на этом промежутке. Наконец, для того чтобы выписать все решения исходного неравенства, объединяют все его решения, найденные на этих промежутках.

П р и м е р 25. Решить неравенство

$$x^2 - |5x - 3| - x < 2.$$

Р е ш е н и е. Для освобождения от знаков абсолютной величины разобьем координатную ось на две области: первую, в которой $5x - 3 \geqslant 0$, и вторую, в которой $5x - 3 < 0$, и будем искать решения исходного неравенства в каждой из этих областей отдельно.

В первой области $|5x-3| = 5x-3$ и исходное неравенство перепишется так:

$$x^2 - 5x + 3 - x < 2.$$

Решения этого неравенства образуют интервал $3 - \sqrt{8} < x < 3 + \sqrt{8}$. Из этого множества в рассматриваемую область $x \geqslant 3/5$ попадает промежуток $3/5 \leqslant x < 3 + \sqrt{8}$. Все эти x и будут решениями исходного неравенства в первой области.

Во второй области $|5x - 3| = -(5x - 3)$, и исходное неравенство перепишется так:

$$x^2 + 4x - 5 < 0.$$

Множество решений этого неравенства есть интервал $-5 < x < 1$. Из этого множества в рассматриваемую область $x < 3/5$ попадает интервал $-5 < x < 3/5$. Все эти x и будут решениями исходного неравенства во второй области. Поскольку множество решений исходного неравенства является объединением множеств решений в первой и во второй областях, т.е. объединением двух промежутков $-5 < x < 3/5$ и $3/5 \leqslant x < 3 + \sqrt{8}$, то это множество есть интервал $-5 < x < 3 + \sqrt{8}$.

О т в е т. $-5 < x < 3 + \sqrt{8}$.

П р и м е р 26. Решить неравенство

$$|5x - 13| - |6 - 5x| \geqslant 7.$$

Р е ш е н и е. Для освобождения от знаков абсолютной величины разобьем координатную ось на три области: первую, в которой $x \geqslant 13/5$, вторую, в которой $6/5 < x < 13/5$, и третью, в которой $x \leqslant 6{,}5$.

В первой области $|5x - 13| = 5x - 13$, $|6 - 5x| = -(6 - 5x)$, и поэтому исходное неравенство перепишется так:

$$5x - 13 + (6 - 5x) \geqslant 7.$$

Это неравенство решений не имеет, значит, и исходное неравенство решений не имеет на множестве $x \geqslant 13/5$.

Во второй области $|5x-13| = -(5x-13)$, $|6-5x| = -(6-5x)$, поэтому исходное неравенство перепишется так:

$$-5x + 13 + 6 - 5x \geqslant 7.$$

Множество решений этого неравенства есть промежуток $x \leqslant 6/5$, который не пересекается с интервалом $6/5 < x < 13/5$. Значит, и во второй области исходное неравенство не имеет решений.

В третьей области $|5x - 13| = -(5x - 13)$, $|6 - 5x| = 6 - 5x$, поэтому исходное неравенство запишется так:

$$-5x + 13 - 6 + 5x \geqslant 7.$$

Этому неравенству удовлетворяет любое действительное число, а значит, и любое число из третьей области $x \leqslant 6/5$. Следовательно, множество решений исходного неравенства есть промежуток $x \leqslant 6/5$.

О т в е т. $-\infty < x \leqslant 6/5$.

Неравенства вида
$$|f(x)| > |g(x)| \quad \text{и} \quad |f(x)| < |g(x)| \tag{53}$$
можно решать предложенным выше методом, т.е. освобождаться от знаков абсолютной величины на промежутках. Однако иногда бывает проще заменить неравенства вида (53), соответственно, равносильными им неравенствами
$$f^2(x) > g^2(x) \quad \text{и} \quad f^2(x) < g^2(x).$$

П р и м е р 27. Решить неравенство
$$|x^2 + x| > |x^2 - x|.$$

Р е ш е н и е. Данное неравенство равносильно неравенству
$$(x^2 + x)^2 > (x^2 - x)^2,$$
т.е. неравенству
$$x^3 > 0.$$
Решениями этого неравенства, а значит, и исходного являются все x из промежутка $x > 0$.

О т в е т. $0 < x < +\infty$.

Иногда возведение в квадрат неравенства, содержащего абсолютную величину, можно проводить на некотором множестве M.

П р и м е р 28. Решить неравенство
$$2|x + 1| > x + 4.$$

Р е ш е н и е. Все x из области $x < -4$ удовлетворяют данному неравенству, так как для любого такого x в левой его части будет находиться неотрицательное число, а в правой — отрицательное. На множестве $x \geqslant -4$ обе части неравенства неотрицательны, значит, оно равносильно на этом множестве неравенству $4(x + 1)^2 > (x + 4)^2$ или неравенству $x^2 > 4$. Последнему неравенству на множестве $x \geqslant -4$ удовлетворяют все x из двух промежутков $-4 \leqslant x < -2$ и $2 < x < +\infty$. Объединяя найденные решения, получаем, что множество решений исходного неравенства состоит из двух промежутков $-\infty < x < -2$ и $2 < x < +\infty$.

О т в е т. $-\infty < x < -2,\ 2 < x < +\infty$.

Упражнения

Решить неравенство.

1) $x^3 - \sqrt{1 + x} > x - \sqrt{1 + x}$. 2) $x^3 - \sqrt{2 + x} < x - \sqrt{2 + x}$.

3) $x^2 + 3x + \dfrac{2}{2x - 5} \leqslant 8x - 6 + \dfrac{2}{2x - 5}$. 4) $\log_2(x+3) - \log_2(x+3) + x + 5 > 0$.

5) $\log_3 x^2 - 2\log_3 |x| + 2x \leqslant 3$. 6) $(x - 3)\sqrt{x^2 + x - 2} \geqslant 0$.

7) $(1-x)\sqrt{x-x^2+6} \leqslant 0$. 8) $(4x^2-8x-5)\log_3(x+1) < 0$.

9) $(2^x-4)(x^2-2x-3) > 0$. 10) $\dfrac{[\log_{\sqrt{5}}(x-3)]^2}{x^2-5x+6} \geqslant 0$. 11) $\dfrac{\sqrt{\log_4(x-1)}}{x^2-3x-4} \geqslant 0$.

12) $(x+3)\sqrt{\dfrac{6-x}{8-x}} \geqslant 0$. 13) $\dfrac{(x+3)\sqrt{6-x}}{\sqrt{8-x}} \geqslant 0$.

14) $(2+x)\sqrt{4-x}\sqrt{5-x} \geqslant 0$. 15) $(2+x)\sqrt{(4-x)(5-x)} \geqslant 0$.

16) $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{3}}(x-4)-1} \geqslant 0$. 17) $\dfrac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3} \leqslant 0$. 18) $\dfrac{\log_3(x+2)}{\log_2(x-3)} < 0$.

19) $\dfrac{x^2-4}{\log_{1/2}(x^2-1)} < 0$. 20) $\dfrac{2^x-1}{3^x-1} > 0$. 21) $\dfrac{\log_3 x}{1-\log_3 x} < 3$.

22) $\dfrac{2\cdot 2^x+1}{2^x-1} \geqslant 1$. 23) $\dfrac{1}{2^x-1} > \dfrac{1}{1-2^{x-1}}$. 24) $2^x + \dfrac{9}{2^x-1} > 7$.

25) $7^{x+3} > 7\cdot 5^{2x-1}$. 26) $3^x - 2^{x+4} > 3^{x-1} - 55\cdot 2^{x-2}$.

27) $5^{x+2}+5^{x+1}+5^x > 7^{x/2+3}+7^{x/2+2}+6\cdot 7^{x/2+1}$.

28) $5^{2x+1}+6^{x+1} > 30+5^x\cdot 30^x$. 29) $3\cdot 9^x - 29\cdot 6^{x-1} + 2^{2x-1} < 0$.

30) $4x^2+3^{\sqrt{x}+1}+x\cdot 3^{\sqrt{x}} < 2x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}+2x+6$.

31) $(x-1)\log_2 x > (2x+3)\log_2 x$. 32) $\sqrt{x}(3x-1) \geqslant \sqrt{x}(2x+4)$.

33) $\dfrac{x^2+1}{\lg x} > \dfrac{4x}{\lg x}$. 34) $\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leqslant \dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$.

35) $\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11} \geqslant \dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$. 36) $\sqrt{x+2} > x$. 37) $\sqrt{x+2} \leqslant x$.

38) $x+1 > \sqrt{2+x}$. 39) $\sqrt{2x+2} \geqslant x-3$.

40) $\sqrt{2x^2-4x-7}-x+1 > 0$. 41) $\sqrt{(x-4)(5x+4)} < 2(2x-7)$.

42) $\sqrt{8+x}\cdot\sqrt{8-x} < x$. 43) $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}} > 1$.

44) $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1} > 1/2$. 45) $\sqrt{x+1} > 1+\sqrt{x-1}$.

46) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5} \geqslant \sqrt{5-x}$. 47) $\sqrt{7x-13}-\sqrt{3x-19} > \sqrt{5x-27}$.

48) $\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}-1 \geqslant 0$. 49) $\left(\dfrac{5}{9}\right)^{2x-7} > \sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{9}\right)^{1-3x}}$.

50) $2^{2x^2-x-1} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10x^2}$. 51) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-9x^2-8x+3} < 7^{-7x^2}$.

52) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\cdot 9^{x+2} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-5x+9/2}$. 53) $3^{x+1} < \dfrac{9^{4x^2}}{\sqrt{27}}$. 54) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+6/x} > \dfrac{1}{128}$.

55) $7^{x+1} < \left(\dfrac{1}{49}\right)^{1/x}$. 56) $2^{\sqrt{x^2-3x+3}} > 2^{\sqrt{x}}$.

57) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^6-2x^3+1}} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x}$. 58) $6^{2x+4} \geqslant 3^{3x}\cdot 2^{x+8}$.

59) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_3\log_{1/5}\left(x^2-4/5\right)} < 1$. 60) $(1{,}25)^{1-\log_2^2 x} < (0{,}64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}$.

61) $\log_{1,5}\dfrac{2x-8}{x-2}<0$. 62) $\log_8(x^2-4x+3)<1$. 63) $\log_{1/2}\dfrac{5x+4}{x-2}>\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}$.

64) $\log_{1/2}\log_3\dfrac{x-1}{x+1}>1$. 65) $\log_5(\log_4(\log_3 x))>0$.

66) $\log_2(4^x+5\cdot 2^x+2)>2$. 67) $\log_{1/2}\quad 4^x+2^x-\dfrac{3}{2}\quad >1$.

68) $\lg\dfrac{x+3}{x+4}>\lg\dfrac{x+5}{x+2}$. 69) $\log_{1/3}\quad\overline{x^2-2x}>\sin\dfrac{11\pi}{6}$.

70) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x\geqslant 7$. 71) $2\log_4(2x^2+3)<\log_2(x^2+6)$.
72) $\log_{1/2}x>\log_{1/3}x$. 73) $\lg(x-1)+\lg(x-2)<\lg 6$.
74) $\log_{\sqrt{3}}(x+1)-\log_{\sqrt{3}}(x-1)>\log_3 4$.
75) $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}>2+\lg 0{,}18$.
76) $\lg(x^2+6x+9)+\lg(x-1)>\lg(x+3)$.

77) $\log_3(x-3)+\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}\log_3(2x^2-6x+7)$.

78) $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{7-3x}{x+2}-\log_{1/\sqrt{2}}(x+2)>-\log_{1/2}4$.

79) $\log_9\quad\dfrac{1}{x-6}\quad+\dfrac{1}{2}\log_9(x^2-13x+50)\geqslant 0$.

80) $\log_{1/3}(x^2-6x+18)-2\log_{1/3}(x-4)<0$.

81) $\log_2(3-x)-\log_2\dfrac{\sin 3\pi/4}{5-x}>\dfrac{1}{2}+\log_2(x+7)$.

82) $x^2-5|x|+6<0$. 83) $x^2+|6x-5|<0$. 84) $x^2+x-10<2|x-2|$.
85) $|x^2-1|-2x<0$. 86) $|x^2+3x|+x^2-2\geqslant 0$.
87) $|x+1|>2|x+2|$. 88) $|3-x|+|2x+4|-|x+1|>2x+4$.

89) $\quad\dfrac{x+2}{x-1}\quad>3$. 90) $\quad\dfrac{2x-1}{x+2}\quad\leqslant 4$. 91) $|2x^2-9x+15|\geqslant 20$.

92) $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0$. 93) $\dfrac{2x-|3-x|}{|3-x|+2}<1$. 94) $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3}\geqslant 2x$.

§ 4. НЕРАВЕНСТВА, ПРЕДЛАГАВШИЕСЯ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В ВУЗЫ

4.1. Решение неравенств с применением различных приемов. При решении многих неравенств, предлагаемых на вступительных экзаменах в вузы, приходится применять несколько различных приемов, описанных выше.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^x-11\cdot 3^{x-1}-5}\geqslant 5.$$

Р е ш е н и е. Перенесем правую часть данного неравенства налево и приведем все члены неравенства к общему знаменателю. В результате получим неравенство

$$\frac{11\cdot 3^{x-1} - 31 - 20\cdot 9^x + 55\cdot 3^{x-1} + 25}{4\cdot 9^x - 11\cdot 3^{x-1} - 5} \geqslant 0, \qquad (1)$$

равносильное исходному. Обозначив 3^x через y, неравенство (1) можно переписать в виде

$$\frac{60y^2 - 66y + 18}{12y^2 - 11y - 15} \leqslant 0$$

или в виде

$$\frac{(y-1/2)\,(y-3/5)}{(y+3/4)\,(y-5/3)} \leqslant 0. \qquad (2)$$

Множество решений неравенства (2) есть объединение множества решений уравнения

$$\frac{(y-1/2)\,(y-3/5)}{(y+3/4)\,(y-5/3)} = 0$$

и неравенства

$$\frac{(y-1/2)\,(y-3/5)}{(y+3/4)\,(y-5/3)} < 0.$$

Уравнение имеет решения $y_1 = 1/2$ и $y_2 = 3/5$. Пользуясь методом интервалов (рис. 17), находим, что множество решений последнего неравенства есть два промежутка

$$-3/4 < y < 1/2, \quad 3/5 < y < 5/3.$$

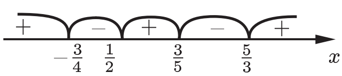


Рис. 17

Следовательно, множество решений неравенства (2) есть два промежутка

$$-\frac{3}{4} < y \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{3}{5} \leqslant y < \frac{5}{3}.$$

Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности двух двойных неравенств:

$$-\frac{3}{4} < 3^x \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{3}{5} \leqslant 3^x < \frac{5}{3}.$$

Множество решений первого неравенства есть промежуток $-\infty < x \leqslant \log_3 \frac{1}{2}$, множество решений второго — промежуток $\log_3 \frac{3}{5} \leqslant x < \log_3 \frac{5}{3}$. Значит, множество решений исходного неравенства есть два промежутка:

$$-\infty < x \leqslant \log_3 \frac{1}{2}, \quad \log_3 \frac{3}{5} \leqslant x < \log_3 \frac{5}{3}.$$

О т в е т. $-\infty < x \leqslant \log_3 \frac{1}{2}$, $\log_3 \frac{3}{5} \leqslant x < \log_3 \frac{5}{3}$.

П р и м е р 2. Решить неравенство

$$7^{-x} - 3 \cdot 7^{1+x} > 4.$$

Р е ш е н и е. Обозначив 7^x через y, исходное неравенство можно переписать в виде

$$\frac{1}{y} - 21y > 4.$$

Перенося все члены этого неравенства в левую часть и приведя их к общему знаменателю, получим, что оно равносильно неравенству

$$\frac{21y^2 + 4y - 1}{y} < 0.$$

На множестве $y > 0$ (нас интересуют только эти значения y, поскольку $y = 7^x$) последнее неравенство равносильно неравенству

$$21y^2 + 4y - 1 < 0.$$

Это неравенство имеет решения $-1/3 < y < 1/7$. Из них в множество $y > 0$ входят лишь y из промежутка $0 < y < 1/7$. Следовательно, неравенство, данное в условии задачи, равносильно неравенству $7^x < 1/7$. Множество решений этого неравенства, а значит, и исходного неравенства есть $x < -1$.

О т в е т. $-\infty < x < -1$.

П р и м е р 3. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{51 - 2x - x^2}}{1 - x} < 1.$$

Р е ш е н и е. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $x \neq 1$ и $51 - 2x - x^2 \geqslant 0$, т.е. ОДЗ состоит из двух промежутков $-1 - \sqrt{52} \leqslant x < 1$ и $1 < x \leqslant -1 + \sqrt{52}$.

Так как $1 - x > 0$ для любого x из промежутка $-1 - \sqrt{52} \leqslant x < 1$, то на множестве $-1 - \sqrt{52} \leqslant x < 1$ исходное неравенство равносильно неравенству

$$\overline{51 - 2x - x^2} < 1 - x.$$

На множестве $-1 - \sqrt{52} \leqslant x < 1$ обе части этого неравенства неотрицательны, поэтому оно на этом множестве равносильно неравенству

$$51 - 2x - x^2 < 1 - 2x + x^2,$$

которое равносильно неравенству

$$x^2 > 25.$$

Решения этого неравенства есть $x > 5$ и $x < -5$. Из этих значений x промежутку $-1 - \sqrt{52} \leqslant x < 1$ принадлежат x из промежутка $-1 - \sqrt{52} \leqslant x < -5$. Следовательно, все x из этого промежутка являются решениями исходного неравенства.

Так как $1-x<0$ для любого x из множества $1<x\leqslant -1+\sqrt{52}$, то левая часть исходного неравенства неположительна для любого x из этого множества, а это означает, что все эти x также являются решениями исходного неравенства. Объединяя множества решений, найденные на промежутках $1<x\leqslant \sqrt{52}-1$ и $-1-\sqrt{52}\leqslant x<1$, получаем множество решений исходного неравенства.

Ответ. $-1-\sqrt{52}\leqslant x<-5,\ 1<x\leqslant -1+\sqrt{52}$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\sqrt{2(5^x+24)}-\sqrt{5^x+7}\geqslant \sqrt{5^x-7}.$$

Решение. Область допустимых значений неравенства определяется из условия $5^x-7\geqslant 0$, т.е. является промежутком $\log_5 7\leqslant x<+\infty$. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{2(5^x+24)}\geqslant \sqrt{5^x+7}+\sqrt{5^x-7}.$$

Так как на ОДЗ обе части этого неравенства неотрицательны, то после возведения его в квадрат получим неравенство

$$2(5^x+24)\geqslant 5^x+7+5^x-7+2\sqrt{5^{2x}-49},$$

равносильное на ОДЗ исходному неравенству. Последнее неравенство можно переписать так:

$$24\geqslant \sqrt{5^{2x}-49}.$$

Так как обе части этого неравенства неотрицательны на ОДЗ, то после возведения в квадрат получим неравенство

$$576\geqslant 5^{2x}-49,$$

равносильное исходному на ОДЗ.

Множество всех решений последнего неравенства есть промежуток $-\infty<x\leqslant 2$. Из этих чисел решениями исходного неравенства будут лишь те, которые попадают в ОДЗ исходного неравенства, т.е. в промежуток $\log_5 7\leqslant x<+\infty$. Значит, множество всех решений исходного неравенства есть отрезок $\log_5 7\leqslant x\leqslant 2$.

Ответ. $\log_5 7\leqslant x\leqslant 2$.

Пример 5. Решить неравенство

$$5^{\log_3 \frac{2}{x+2}}<1.$$

Решение. Область допустимых значений данного неравенства состоит из всех $x>-2$. Так как основание степени в исходном неравенстве больше единицы, то исходное неравенство равносильно на ОДЗ неравенству

$$\log_3 \frac{2}{x+2}<0.$$

Основание логарифма в этом неравенстве больше единицы, значит, оно равносильно на множестве $x>-2$ неравенству

$$\frac{2}{x+2}<1. \tag{3}$$

На множестве $x > -2$ неравенство (3) равносильно неравенству

$$2 < x + 2,$$

множество решений которого состоит из всех $x > 0$. Все эти x входят в множество $x > -2$, следовательно, все они являются решениями исходного неравенства.

Ответ. $0 < x < +\infty$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\log_{1/\sqrt{5}}(6^{x+1} - 36^x) \geqslant -2.$$

Решение. Исходное неравенство равносильно двойному неравенству

$$0 < 6^{x+1} - 36^x \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2},$$

или, что одно и то же, системе неравенств

$$\left\{\begin{aligned} 6^{x+1} - 36^x &> 0,\\ 6^{x+1} - 36^x &\leqslant 5. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Обозначив 6^x через y, эту систему можно переписать так:

$$\left\{\begin{aligned} 6y - y^2 &> 0,\\ 6y - y^2 &\leqslant 5. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Множество решений первого неравенства есть промежуток $0 < y < 6$. Множество решений второго неравенства состоит из двух промежутков: $y \leqslant 1$ и $y \geqslant 5$. Таким образом, решениями системы (5) являются все y из областей $0 < y \leqslant 1$ и $5 \leqslant y < 6$. Значит, система (4) равносильна совокупности двух двойных неравенств:

$$0 < 6^x \leqslant 1, \quad 5 \leqslant 6^x < 6,$$

или, что одно и то же, совокупности двух систем неравенств:

$$\left\{\begin{aligned} 6^x &> 0,\\ 6^x &\leqslant 1, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} 6^x &\geqslant 5,\\ 6^x &< 6. \end{aligned}\right.$$

Множество решений первой системы есть промежуток $-\infty < x \leqslant 0$, множество решений второй — промежуток $\log_6 5 \leqslant x < 1$. Значит, множество решений исходной системы состоит из двух промежутков: $-\infty < x \leqslant 0$, $\log_6 5 \leqslant x < 1$.

Ответ. $-\infty < x \leqslant 0$, $\log_6 5 \leqslant x < 1$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_9(3x^2 - 4x + 2)} + 1 > \log_3(3x^2 - 4x + 2).$$

Решение. Поскольку $\log_3(3x^2 - 4x + 2) = 2\log_9(3x^2 - 4x + 2)$, то, обозначив $\log_9(3x^2 - 4x + 2)$ через y, перепишем исходное неравенство в виде

$$\sqrt{y} + 1 > 2y$$

или в виде
$$\sqrt{y} > 2y - 1. \tag{6}$$
Отрицательные значения y, очевидно, не удовлетворяют этому неравенству. Для y из промежутка $0 \leqslant y < 1/2$ правая часть неравенства (6) отрицательна, а левая неотрицательна; значит, все эти y будут решениями неравенства (6). Для $y \geqslant 1/2$ обе части неравенства (6) неотрицательны, поэтому после возведения в квадрат получим неравенство
$$y > (2y-1)^2, \tag{7}$$
равносильное неравенству (6) на множестве $y \geqslant 1/2$. Решениями квадратного неравенства (7) будут все y из промежутка $1/4 < y < 1$. Из них условию $y \geqslant 1/2$ удовлетворяют только y из промежутка $1/2 \leqslant y < 1$. Все эти y будут решениями неравенства (6) на множестве $y \geqslant 1/2$. Объединяя найденные решения, получаем, что решениями неравенства (6) будут все y из промежутка $0 \leqslant y < 1$. Поэтому исходное неравенство равносильно двойному неравенству
$$0 \leqslant \log_9(3x^2 - 4x + 2) < 1.$$
Потенцируя его, приходим к двойному неравенству
$$1 \leqslant 3x^2 - 4x + 2 < 9$$
или к системе неравенств
$$\begin{cases} 3x^2 - 4x + 2 \geqslant 1, \\ 3x^2 - 4x + 2 < 9, \end{cases}$$
равносильной исходному неравенству. Множество решений первого неравенства этой системы состоит из двух промежутков: $1 \leqslant x < +\infty$ и $-\infty < x \leqslant 1/3$. Множество решений второго неравенства системы есть промежуток $-1 < x < 7/3$. Следовательно, множество решений системы, а значит, и множество решений исходного неравенства состоит из двух промежутков: $-1 < x \leqslant 1/3$ и $1 \leqslant x < 7/3$.

Ответ. $-1 < x \leqslant \dfrac{1}{3}$, $1 \leqslant x < \dfrac{7}{3}$.

Пример 8. Решить неравенство
$$\frac{\log_5(x^2-4x-11)^2 - \log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2} \geqslant 0.$$

Решение. Область допустимых значений данного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x^2-4x-11 > 0$ и $2-5x-3x^2 \neq 0$, т.е. является объединением трех промежутков: $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2-\sqrt{15}$, $2+\sqrt{15} < x < +\infty$. Поскольку в этой области
$$\log_{11}(x^2-4x-11)^3 = \frac{3\log_5(x^2-4x-11)}{\log_5 11}$$
и
$$\log_5(x^2-4x-11)^2 = 2\log_5(x^2-4x-11),$$

то исходное неравенство равносильно на своей ОДЗ такому:

$$2 - \frac{3}{\log_5 11} \cdot \frac{\log_5(x^2 - 4x - 11)}{3x^2 + 5x - 2} \leqslant 0. \tag{8}$$

Из справедливости неравенства $121 < 125$ следует, что $11^2 < 5^3$ или $11 < 5^{3/2}$. Отсюда $\log_5 11 < \dfrac{3}{2}$ и $2 - \dfrac{3}{\log_5 11} < 0$. Поэтому неравенство (8) равносильно такому:

$$\frac{\log_5(x^2 - 4x - 11)}{3x^2 + 5x - 2} \geqslant 0.$$

Последнее неравенство равносильно на ОДЗ исходного неравенства совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 3x^2 + 5x - 2 > 0, \\ x^2 - 4x - 11 \geqslant 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x^2 + 5x - 2 < 0, \\ x^2 - 4x - 11 \leqslant 1. \end{cases}$$

Множество решений первой системы состоит из двух промежутков:

$$-\infty < x < -2, \quad 6 \leqslant x < +\infty. \tag{9}$$

Все эти числа лежат в ОДЗ исходного неравенства. Множество решений второй системы есть интервал $-2 < x < 1/3$. Из этих чисел в ОДЗ исходного неравенства попадают только числа из промежутка

$$-2 < x < 2 - \sqrt{15}. \tag{10}$$

Объединяя множества решений (9) и (10), получаем, что множество всех решений исходного неравенства состоит из трех промежутков: $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2 - \sqrt{15}$, $6 \leqslant x < +\infty$.

Ответ. $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2 - \sqrt{15}$, $6 \leqslant x < +\infty$.

Пример 9. Решить неравенство

$$\frac{3}{|x+3| - 1} \geqslant |x+2|.$$

Решение. Для освобождения от знаков абсолютной величины разобьем координатную ось на промежутки

$$-\infty < x < -3, \quad -3 \leqslant x < -2, \quad -2 \leqslant x < +\infty$$

и будем решать исходное неравенство на каждом из этих промежутков отдельно.

Если $-\infty < x < -3$, то $x+3 < 0$ и $2+x < 0$. Значит, $|x+3| = -(x+3)$, $|x+2| = -(x+2)$ и исходное неравенство имеет вид

$$\frac{3}{-x-3-1} \geqslant -x-2.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(x+5)(x+1)}{x+4} \geqslant 0. \tag{11}$$

Множество решений неравенства (11) есть объединение множества решений уравнения

$$\frac{(x+5)(x+1)}{x+4} = 0$$

и неравенства

$$\frac{(x+5)(x+1)}{x+4} > 0. \qquad (12)$$

Уравнение имеет решения $x = -5$ и $x = -1$. Пользуясь методом интервалов (рис. 18), находим, что множество решений неравенства (12) состоит из двух промежутков: $-5 < x < -4$ и $-1 < x < +\infty$. Следовательно, множество решений неравенства (11) состоит из двух промежутков: $-5 \leqslant x < -4$ и $-1 \leqslant x < +\infty$. Из этих чисел в области $-\infty < x < -3$ лежат числа из промежутка $-5 \leqslant x < -4$. Значит, в области $-\infty < x < -3$ множество всех решений исходного неравенства есть промежуток $-5 \leqslant x < -4$.

Рис. 18

Если $-3 \leqslant x < -2$, то $x+3 \geqslant 0$ и $x+2 < 0$. Значит, $|x+3| = x+3$, $|x+2| = -(x+2)$ и исходное неравенство имеет вид

$$\frac{3}{x+3-1} \geqslant -(x+2). \qquad (13)$$

Неравенство (13) может быть записано в виде

$$\frac{3+(x+2)^2}{x+2} \geqslant 0,$$

откуда очевидно, что оно не имеет решений в области $-3 \leqslant x < -2$. Значит, исходное неравенство не имеет решений в области $-3 \leqslant x < -2$.

Если $-2 \leqslant x < +\infty$, то $x+3 > 0$ и $x+2 \geqslant 0$. Значит, $|x+3| = x+3$, $|x+2| = x+2$, и исходное неравенство имеет вид

$$\frac{3}{x+3-1} \geqslant x+2.$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x^2+4x+1}{x+2} \leqslant 0. \qquad (14)$$

Множество решений неравенства (14) есть объединение множества решений уравнения $x^2+4x+1=0$ и неравенства

$$\frac{x^2+4x+1}{x+2} < 0. \qquad (15)$$

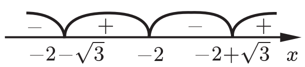


Рис. 19

Уравнение имеет решения $x = -2-\sqrt{3}$ и $x = -2+\sqrt{3}$. Пользуясь методом интервалов (рис. 19), находим, что множество решений неравенства (15) состоит из двух промежутков: $-\infty < x < -2-\sqrt{3}$ и $-2 < x < -2+\sqrt{3}$. Следовательно, множество решений неравенства (14) состоит из двух промежутков:

$-\infty < x \leqslant -2-\sqrt{3}$ и $-2 < x \leqslant -2+\sqrt{3}$. Из этого множества в область $-2 \leqslant x < +\infty$ попадает лишь промежуток $-2 < x \leqslant -2+\sqrt{3}$. Значит, в области $-2 \leqslant x < +\infty$ множество всех решений исходного неравенства есть промежуток $-2 < x \leqslant -2+\sqrt{3}$. Объединяя решения, найденные на областях $-\infty < x < -3$, $-3 \leqslant x < -2$, $-2 \leqslant x < +\infty$, находим, что множество всех решений исходного неравенства состоит из двух промежутков: $-5 \leqslant x \leqslant -4$ и $-2 < x \leqslant -2+\sqrt{3}$.

Ответ. $-5 \leqslant x < -4$, $\;-2 < x \leqslant -2+\sqrt{3}$.

4.2. Неравенства с дополнительными условиями.

Пример 10. Найти все решения неравенства

$$\cos\frac{3}{2} - 4x - x^2 \geqslant 0,$$

принадлежащие интервалу $-\dfrac{21}{5} < x < 0$.

Решение. Корни квадратного трехчлена $x^2+4x-\cos\dfrac{3}{2}$ есть $x_1 = -2+\sqrt{4+\cos\dfrac{3}{2}}$ и $x_2 = -2-\sqrt{4+\cos\dfrac{3}{2}}$. Поэтому множество решений данного неравенства имеет вид $x_2 \leqslant x \leqslant x_1$. В этом множестве нужно выбрать точки, принадлежащие интервалу $-\dfrac{21}{5} < x < 0$. Так как $0 < \dfrac{3}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos\dfrac{3}{2} > 0$ и, значит, $x_1 > 0$. Покажем, что точка x_2 принадлежит интервалу $-\dfrac{21}{5} < x < 0$. Неравенство $x_2 < 0$ очевидно. Для доказательства неравенства $-\dfrac{21}{5} < x_2$ воспользуемся тем, что $\dfrac{\pi}{3} < \dfrac{3}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\cos\dfrac{3}{2} < \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. Тогда

$$x_2 = -2-\sqrt{4+\cos\frac{3}{2}} > -2-\sqrt{4+\frac{1}{2}} = -2-\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Осталось проверить, что справедливо неравенство $-2-\dfrac{3\sqrt{2}}{2} > -\dfrac{21}{5}$ или, что равносильно, неравенство $\sqrt{2} < \dfrac{22}{15}$. Последнее неравенство справедливо, так как $\left(\dfrac{22}{15}\right)^2 = \dfrac{484}{225} > 2$. Итак, $-\dfrac{21}{5} < x_2 < 0$ и искомое множество имеет вид $x_2 \leqslant x < 0$.

Ответ. $-2-\sqrt{4+\cos\dfrac{3}{2}} \leqslant x < 0$.

Пример 11. Найти все решения неравенства

$$\log_{1/3}\sqrt{x+6} \leqslant \log_{1/3}(x+4) \tag{16}$$

такие, что $x+1/2$ есть целое число.

Решение. Область допустимых значений неравенства (16) состоит из всех x, удовлетворяющих одновременно условиям $x+6>0$ и $x+4>0$, т.е. ОДЗ состоит из всех x, принадлежащих промежутку $-4<x<+\infty$. На ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{x+6} \geqslant x+4. \tag{17}$$

Поскольку на ОДЗ $x+4>0$, то неравенство (17) равносильно на ОДЗ неравенству

$$x+6 \geqslant (x+4)^2,$$

которое можно записать в виде

$$x^2+7x+10 \leqslant 0. \tag{18}$$

Так как корнями квадратного трехчлена $x^2+7x+10$ являются (-5) и (-2), то все x из промежутка $-5 \leqslant x \leqslant -2$ являются решениями неравенства (18). Из этих x в ОДЗ входят только x из промежутка $-4<x\leqslant -2$. Они и являются решениями неравенства (16).

Теперь для решения задачи надо найти такие значения x из промежутка $-4<x\leqslant -2$, для которых число $x+1/2$ целое, иначе говоря, найти целые числа $n=x+1/2$, удовлетворяющие условию $-4<n+1/2\leqslant -2$. Такими числами являются числа -3 и -2. Следовательно, условию задачи удовлетворяют числа $x=-3\dfrac{1}{2}$ и $x=-2\dfrac{1}{2}$.

Ответ. $x_1=-3\dfrac{1}{2}$, $x_2=-2\dfrac{1}{2}$.

4.3. Решение неравенств нестандартными способами. При решении неравенств иногда знание ОДЗ и применение некоторых оценок позволяет быстро найти решение неравенства.

Пример 12. Решить неравенство

$$\overline{x^2-4x+3}+1 \quad \log_3 \frac{x}{5}+\frac{1}{x} \qquad \overline{8x-2x^2-6}+1 \quad \leqslant 0. \tag{19}$$

Решение. Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих одновременно условиям

$$x>0, \quad x^2-4x+3 \geqslant 0, \quad 8x-2x^2-6 \geqslant 0. \tag{20}$$

Разделив третье неравенство (20) на (-2), получим, что условия (20) можно записать в виде

$$x>0, \quad x^2-4x+3 \geqslant 0, \quad x^2-4x+3 \leqslant 0.$$

Отсюда ясно, что ОДЗ состоит из всех x, удовлетворяющих условиям

$$x>0 \quad \text{и} \quad x^2-4x+3=0. \tag{21}$$

Поскольку корнями квадратного уравнения (21) являются $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$, каждое из которых положительно, то ОДЗ исходного уравнения состоит из $x = 1$ и $x = 3$. Так как решения исходного неравенства лежат в ОДЗ, то его решения находятся среди чисел $x = 1$ и $x = 3$.

Пусть $x = 1$. Подставляя это значение в исходное неравенство, получаем

$$\log_5 \frac{1}{5} + 1 = -1 + 1 = 0,$$

т.е. значение $x = 1$ является его решением.

Пусть $x = 3$, тогда левая часть исходного неравенства равна

$$\log_5 \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \log_5 3 - \frac{2}{3} = \log_5 \frac{3}{5^{2/3}}.$$

Поскольку $27 > 25$, т.е. $3^3 > 5^2$, то $3 > 5^{2/3}$ и $\dfrac{3}{5^{2/3}} > 1$, т.е. $\log_5 \dfrac{3}{5^{2/3}} >$ $> \log_5 1 = 0$. Следовательно, значение $x = 3$ не является решением исходного неравенства.

Ответ. $x = 1$.

Иногда на вступительных экзаменах предлагается решить неравенство, нестандартное по внешнему виду. Для решения таких неравенств обычно пользуются свойствами функций, входящих в это неравенство.

Пример 13. Решить неравенство

$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1 + \log_2(2+x)}{x}.$$

Решение. Область допустимых значений данного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x > -2$, $x \neq -1/2$, $x \neq 0$. Таким образом, эта область состоит из трех промежутков: $-2 < x < -1/2$, $-1/2 < x < 0$, $0 < x < +\infty$. Рассмотрим данное неравенство на каждом из этих промежутков отдельно.

1) Пусть $-2 < x < -1/2$. Тогда, учитывая, что x отрицательно на этом интервале, получаем, что исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_2(2+x) > \frac{4x-1}{2x+1}. \tag{22}$$

Легко видеть, что на этом интервале справедливы неравенства

$$\log_2(2+x) < \log_2 \frac{3}{2} < 1, \quad \frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} > 2.$$

Значит, неравенство (22), а вместе с ним и исходное неравенство не имеет решений на интервале $-2 < x < -1/2$.

2) Пусть $-1/2 < x < 0$. Очевидно, что на этом интервале $1 + \log_2(2+$ $+x) > 1 + \log_2 \dfrac{3}{2} > 0$ и, следовательно, правая часть исходного неравенства отрицательна. В то же время для любого x из рассматриваемого интервала имеем $\dfrac{6}{2x+1} > 0$. Значит, для всех x из интервала $-\dfrac{1}{2} < x < 0$ исходное неравенство справедливо.

3) Пусть $x > 0$. На этом множестве исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_2(2+x) < \frac{4x-1}{2x+1}. \tag{23}$$

Очевидно, что на этом множестве справедливы неравенства

$$\frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} < 2, \quad 1 < \log_2(2+x).$$

Отсюда следует: 1) неравенство (23) не имеет решений на том множестве, где $\log_2(x+2) \geqslant 2$, т.е. неравенство (23) не имеет решений на множестве $x \geqslant 2$; 2) неравенство (23) не имеет решений на том множестве, где $\dfrac{4x-1}{2x+1} \leqslant 1$. Учитывая, что в рассматриваемом случае $x > 0$, получаем, что неравенство (23) не имеет решений на множестве $0 < x \leqslant 1$. Остается найти решения неравенства (23), принадлежащие интервалу $1 < x < 2$. Но на этом интервале

$$\frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} < 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}.$$

Покажем теперь, что справедливо числовое неравенство

$$\log_2 3 > \frac{7}{5}. \tag{24}$$

Действительно, поскольку $3^5 > 2^7$, то $3 > 2^{7/5}$, откуда и очевидна справедливость неравенства (24). Итак, на интервале $1 < x < 2$ имеем

$$\log_2(2+x) > \log_2 3 > \frac{7}{5} > \frac{4x-1}{2x+1}.$$

Значит, неравенство (23) не имеет решений на интервале $1 < x < 2$. Подводя итог, получаем, что множество решений исходного неравенства есть интервал $-1/2 < x < 0$.

Ответ. $-1/2 < x < 0$.

4.4. Неравенства, содержащие неизвестную в основании логарифма. Если в основании логарифма есть x, то при определении ОДЗ неравенства надо учитывать, что основание логарифма всегда больше нуля и не равно единице. Кроме того, надо учитывать, что свойства логарифмов при основании, большем чем единица, одни, а при основании, меньшем чем единица, другие.

Поэтому неравенства вида

$$\log_{\varphi(x)} f(x) < \log_{\varphi(x)} g(x) \tag{25}$$

решаются обычно следующим образом.

1. Находят ОДЗ неравенства.

2. ОДЗ разбивают на два множества M_1 и M_2:

M_1 — та часть ОДЗ, где $\varphi(x) > 1$,

M_2 — та часть ОДЗ, где $0 < \varphi(x) < 1$.

3. На M_1 решают неравенство $f(x) < g(x)$, равносильное на множестве M_1 неравенству (25).

4. На M_2 решают неравенство $f(x) > g(x)$, равносильное на множестве M_2 неравенству (25).

Объединив решения, найденные на M_1 и M_2, получают решение исходного неравенства (25).

Из сказанного также следует, что неравенство (25) равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{matrix} \varphi(x) > 1, \\ 0 < f(x) < g(x) \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) > g(x) > 0. \end{matrix} \tag{26}$$

Это позволяет решать неравенства вида (25) переходом к равносильной совокупности неравенств (26).

Приведем решение неравенств этими двумя способами.

Пример 14. Решить неравенство

$$\log_x \frac{2x + 2/5}{5(1-x)} > 0.$$

Решение. Поскольку свойства логарифмов зависят от основания, то рассмотрим два случая: 1) $x > 1$; 2) $0 < x < 1$.

1) Пусть $x > 1$; для этих x исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{2x + 2/5}{5(1-x)} > 1. \tag{27}$$

Неравенство (27) равносильно неравенству

$$\frac{2x + 2/5}{5(1-x)} - 1 > 0,$$

которое можно переписать так:

$$\frac{7x - 23/5}{5(1-x)} > 0.$$

Решая это неравенство методом интервалов, получаем, что его решения составляют промежуток $23/35 < x < 1$. Этот промежуток не имеет общих точек с областью $x > 1$. Значит, в случае 1) исходное неравенство не имеет решений.

2) Пусть $0 < x < 1$; для этих x исходное неравенство равносильно двойному неравенству

$$0 < \frac{2x + 2/5}{5(1-x)} < 1.$$

Это двойное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{aligned} &\frac{2x + 2/5}{5(1-x)} > 0, \\ &\frac{7x - 23/5}{5(1-x)} < 0. \end{aligned}$$

Решая каждое из этих неравенств методом интервалов, получаем, что множество решений первого неравенства есть промежуток $-1/5 < x < 1$, а множество решений второго — два промежутка: $x > 1$ и $x < 23/35$. Значит, множество решений системы есть промежуток $-1/5 < x < 23/35$. Из этого промежутка в область $0 < x < 1$ попадает лишь промежуток $0 < x < 23/35$. Это и есть множество решений исходного неравенства.

Ответ. $0 < x < \dfrac{23}{35}$.

Пример 15. Решить неравенство

$$\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 \geqslant 4.$$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x + 1 > 1, \\ (x^2 + x - 6)^2 \geqslant (x + 1)^4 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 0 < x + 1 < 1, \\ 0 < (x^2 + x - 6)^2 \leqslant (x + 1)^4. \end{cases}$$

Заметим, что в первой системе не написано неравенство $(x + 1)^4 > 0$, поскольку оно вытекает из неравенства $x + 1 > 1$.

Решим сначала первую систему. Второе неравенство этой системы равносильно каждому из следующих неравенств:

$$(x^2 + x - 6)^2 - (x + 1)^4 \geqslant 0,$$
$$(x^2 + x - 6 - (x + 1)^2)(x^2 + x - 6 + (x + 1)^2) \geqslant 0,$$
$$(-x - 7)(2x^2 + 3x - 5) \geqslant 0,$$
$$(x + 7)(x - 1)(x + 5/2) \leqslant 0.$$

Решая последнее неравенство, получаем, что его решениями являются два промежутка: $-\infty < x \leqslant -7$ и $-5/2 \leqslant x \leqslant 1$. Решения первого неравенства первой системы образуют промежуток $0 < x < +\infty$. Значит, множество решений первой системы есть промежуток $0 < x \leqslant 1$.

Теперь решим вторую систему. Неравенство

$$(x^2 + x - 6)^2 \leqslant (x + 1)^4$$

равносильно неравенству

$$(x + 7)(x - 1)\,(x + 5/2) \geqslant 0.$$

Множество решений этого неравенства состоит из двух промежутков: $-7 \leqslant$ $\leqslant x \leqslant -5/2$ и $1 \leqslant x < +\infty$. Множество решений неравенства $0 < x + 1 < 1$ есть промежуток $-1 < x < 0$. Неравенство $(x^2 + x - 6)^2 > 0$ справедливо для всех x, кроме тех, для которых $x^2 + x - 6 = 0$, т.е. кроме $x = 2$ и $x = -3$. Теперь очевидно, что вторая система неравенств решений не имеет.

Множеством решений исходного неравенства является объединение множеств решений первой и второй системы, т.е. промежуток $0 < x \leqslant 1$.

Ответ. $0 < x \leqslant 1$.

4.5. Неравенства, содержащие неизвестную в основании и показателе степени. Если x входит в основание и показатель степени, то принято считать, что основание степени должно быть больше нуля. Это надо учитывать при нахождении ОДЗ неравенства. Кроме того, надо учитывать, что свойства степеней при основании, большем единицы и меньшем единицы, разные.

Далее, будем рассматривать неравенства вида

$$(f(x))^{\varphi(x)} < (g(x))^{h(x)}, \tag{28}$$

где $\varphi(x) \not\equiv a$, и $h(x) \not\equiv b$, a и b — числа. Неравенства вида (28) решают обычно следующим образом.

1. Находят ОДЗ неравенства (обязательно учитывая, что должно быть $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$).

2. Логарифмируют неравенство (28), т.е. заменяют неравенство (28) равносильным ему при $a > 1$ на ОДЗ неравенством

$$\varphi(x)\log_a f(x) < h(x)\log_a g(x).$$

Затем решают это неравенство на ОДЗ неравенства (28). Найденные решения и дадут решения неравенства (28).

Пример 16. Решить неравенство

$$\left(2^x + 3\cdot 2^{-x}\right)^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1.$$

Решение. Область допустимых значений неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x > 0$. Обе части неравенства, как легко видеть, положительны на множестве $x > 0$. Поэтому, логарифмируя обе его части по основанию, большему чем 1, например по основанию 2, получим неравенство

$$(2\log_2 x - \log_2(x+6))\log_2(2^x + 3\cdot 2^{-x}) > 0, \tag{29}$$

равносильное исходному неравенству на ОДЗ. Так как в области $x > 0$ имеем

$$2^x + 3\cdot 2^{-x} > 2^x > 1,$$

то $\log_2(2^x + 3\cdot 2^{-x}) > 0$ для $x > 0$ и неравенство (29) равносильно на множестве $x > 0$ неравенству

$$2\log_2 x - \log_2(x+6) > 0$$

или неравенству

$$x^2 > x + 6. \tag{30}$$

Корнями квадратного трехчлена $x^2 - x - 6$ являются $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$. Поэтому решения неравенства (30) составляют два промежутка: $-\infty < x < -2$ и $3 < x < +\infty$. Из этих чисел в области $x > 0$ лежат только числа из множества $x > 3$. Следовательно, решения исходного неравенства составляют промежуток $3 < x < +\infty$.

Ответ. $3 < x < +\infty$.

П р и м е р 17. Решить неравенство

$$\frac{x^{\frac{1}{2}\log_2 x}}{4} \geqslant 2^{\frac{1}{4}(\log_2 x)^2}. \tag{31}$$

Р е ш е н и е. ОДЗ этого неравенства есть промежуток $0 < x < +\infty$. Обе части неравенства (31) положительны на ОДЗ. Логарифмируя неравенство (31) по основанию 2, получим неравенство

$$\frac{1}{2}\log_2 x \quad (\log_2 x) - 2 \geqslant \frac{1}{4}(\log_2 x)^2. \tag{32}$$

Перепишем неравенство (32) в виде

$$(\log_2 x)^2 \geqslant 8. \tag{33}$$

Неравенство (33) равносильно совокупности двух неравенств:

$$\log_2 x \geqslant 2\sqrt{2} \quad \text{и} \quad \log_2 x \leqslant -2\sqrt{2}. \tag{34}$$

Первое из неравенств совокупности (34) имеет решениями все $x \geqslant 2^{2\sqrt{2}}$, а второе – все x из промежутка $0 < x \leqslant 2^{-2\sqrt{2}}$. Объединение этих решений дает решение исходного неравенства, так как все эти x входят в его ОДЗ.

О т в е т. $0 < x \leqslant 2^{-2\sqrt{2}}$, $2^{2\sqrt{2}} \leqslant x < +\infty$.

Отметим, что неравенство

$$(f(x))^{\varphi(x)} < (f(x))^{g(x)} \tag{35}$$

равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) < g(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) > g(x) \end{cases} \tag{36}$$

и потому его решение сводится к решению систем неравенств (36).

П р и м е р 18. Решить неравенство

$$(x^2-1)^{2+x} > (x^2-1)^{5x-3}. \tag{37}$$

Р е ш е н и е. Неравенство (37) равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 1, \\ 2 + x > 5x - 3 \end{cases} \tag{38}$$

и

$$\begin{cases} 0 < x^2 - 1 < 1, \\ 2 + x < 5x - 3. \end{cases} \tag{39}$$

Множество решений первого неравенства системы (38) состоит из двух промежутков: $-\infty < x < -\sqrt{2}$ и $\sqrt{2} < x < +\infty$. Решениями второго являются все $x < 5/4$. Поэтому решения системы (38) составляют промежуток $-\infty < x < -\sqrt{2}$.

Первое неравенство системы (39) можно переписать в виде

$$1 < x^2 < 2,$$

откуда следует, что его решениями являются все x из двух промежутков: $-\sqrt{2} < x < -1$ и $1 < x < \sqrt{2}$. Решениями второго являются все $x > 5/4$. Поэтому решения системы (39) составляют промежуток $5/4 < x < \sqrt{2}$.

Объединяя решения системы (38) и (39), получаем решение исходного неравенства.

Ответ. $-\infty < x < -\sqrt{2},\ 5/4 < x < \sqrt{2}$.

Отметим еще, что неравенство

$$(f(x))^{\varphi(x)} > (g(x))^{\varphi(x)} \tag{40}$$

равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ g(x) > f(x) > 0 \end{cases} \tag{41}$$

и потому его решение сводится к решению систем неравенств (41).

Пример 19. Решить неравенство

$$(x^2 + x + 1)^{x^2-5x+6} > (x + 2)^{x^2-5x+6}. \tag{42}$$

Решение. Неравенство (42) равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 + x + 1 > x + 2 > 0 \end{cases} \tag{43}$$

и

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 0, \\ x + 2 > x^2 + x + 1 > 0. \end{cases} \tag{44}$$

Первое неравенство системы (43) имеет решениями все $x < 2$ и все $x > 3$. Второе неравенство можно записать в виде системы неравенств

$$\begin{cases} x > -2, \\ x^2 > 1, \end{cases}$$

которая имеет решениями все $x > 1$ и все x из промежутка $-2 < x < -1$. Следовательно, решения системы (43) составляют два промежутка: $-2 < x < -1$ и $3 < x < +\infty$.

Первое неравенство системы (44) имеет решениями все x из промежутка $2 < x < 3$. Второе неравенство можно записать в виде системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 > 0, \\ x^2 < 1, \end{cases}$$

которая имеет решениями все x из промежутка $-1 < x < 1$. Следовательно, система (44) не имеет решений.

Поэтому решения исходного неравенства совпадают с решениями системы (43).

Ответ. $-2 < x < -1,\ 3 < x < +\infty$.

4.6. Неравенства с параметрами. На вступительных экзаменах часто предлагается решить неравенство с параметром. Это означает, что надо для каждого значения параметра решить соответствующее неравенство.

Пример 20. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$a^2 - 9^{x+1} - 8 \cdot 3^x \cdot a > 0.$$

Решение. Если $a = 0$, то данное неравенство имеет вид

$$-9^{x+1} > 0$$

и не выполняется ни для одного x.

Пусть a — некоторое число, отличное от нуля. Обозначив 3^x через t, исходное неравенство можно переписать так:

$$9t^2 + 8at - a^2 < 0. \qquad (45)$$

Квадратный трехчлен $9t^2 + 8at - a^2$ имеет корни $t_1 = -a$ и $t_2 = \frac{1}{9}a$. Если a — положительное число, то $t_1 < t_2$ и множество решений неравенства (45) имеет вид $-a < t < \frac{1}{9}a$. Это значит, что при каждом положительном a исходное неравенство равносильно двойному неравенству $-a < 3^x < \frac{1}{9}a$, а следовательно, множество его решений есть промежуток $-\infty < x < \log_3 \frac{a}{9}$. Если a — отрицательное число, то $t_2 < t_1$ и множество решений неравенства (45) имеет вид $\frac{1}{9}a < t < -a$. Это значит, что при каждом отрицательном a исходное неравенство равносильно двойному неравенству $\frac{1}{9}a < 3^x < -a$ и, следовательно, множество его решений есть промежуток

$$-\infty < x < \log_3(-a).$$

Ответ. При $a = 0$ неравенство не выполняется ни для одного x; при $a > 0$ неравенство выполняется для x из промежутка $-\infty < x < -2 + \log_3 a$; при $a < 0$ неравенство выполняется для x из промежутка $-\infty < x < \log_3(-a)$.

Пример 21. Для каждого неотрицательного значения параметра a решить неравенство

$$a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 \geqslant 0.$$

Решение. Если $a = 0$, то данное неравенство перепишется в виде

$$-x + 3 \geqslant 0,$$

откуда следует, что множество его решений есть промежуток $-\infty < x \leqslant 3$.

Пусть теперь a — фиксированное положительное число. Преобразуем левую часть данного неравенства следующим образом:

$$\begin{aligned}a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 = a(a^2x^4 + 6ax^2 + 9) - x + 3 = \\ = a(ax^2+3)^2 - x + 3 = a(ax^2+3)^2 - x^2) + ax^2 - x + 3 = \\ = a(ax^2+3-x)(ax^2+3+x) + ax^2 - x + 3 = \\ = (ax^2 - x + 3)(a^2x^2 + ax + 3a + 1).\end{aligned}$$

Дискриминант квадратного трехчлена $a^2x^2 + ax + 3a + 1$ равен $D = -a^2(12a+3)$. Так как a — положительное число, то отсюда ясно, что D отрицателен. Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству

$$ax^2 - x + 3 \geqslant 0, \tag{46}$$

так как квадратный трехчлен $a^2x^2 + ax + 3a + 1$ положителен для любого x.

Дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 - x + 3$ равен $1 - 12a$. Следовательно, при $a \geqslant 1/12$ этот дискриминант не положителен, и поэтому множество решений неравенства (46), а следовательно, и исходного неравенства, есть вся координатная ось. В случае же, если $0 < a < 1/12$, то множество решений неравенства (46) состоит из двух промежутков: $-\infty < x \leqslant \dfrac{1-\sqrt{1-12a}}{2}$, $\dfrac{1+\sqrt{1-12a}}{2} \leqslant x < +\infty$. Эти промежутки составляют и множество решений исходного неравенства при a из промежутка $0 < a < 1/12$.

Ответ. Если $a = 0$, то $-\infty < x < 3$; если $0 < a < \dfrac{1}{12}$, то $-\infty < x \leqslant \dfrac{1-\sqrt{1-12a}}{2}$ и $\dfrac{1+\sqrt{1-12a}}{2} \leqslant x < +\infty$, если $a \geqslant \dfrac{1}{12}$, то $-\infty < x < +\infty$.

Часто встречаются задачи с параметром, в которых требуется найти те значения параметра, при каждом из которых неравенство имеет хотя бы одно решение, или имеет указанное число решений, или имеет решения, удовлетворяющие некоторому условию.

Пример 22. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\log_{1/a}\quad \overline{x^2+ax+5}+1 \quad\cdot \log_5(x^2+ax+6) + \log_a 3 \geqslant 0$$

имеет одно решение.

Решение. Прежде всего отметим, что числа a, удовлетворяющие условию задачи, нужно искать среди чисел a таких, что $a > 0$, $a \neq 1$, иначе не имеют смысла логарифмы, входящие в неравенство. Поскольку при $a > 0$, $a \neq 1$ и любом положительном y справедливы равенства

$$\log_{1/a} y = -\frac{\log_3 y}{\log_3 a}, \quad \log_a 3 = \frac{1}{\log_3 a},$$

то данное в условии задачи неравенство можно переписать в виде

$$\frac{-\log_3\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\log_5(x^2+ax+6)+1}{\log_3 a} \geqslant 0. \tag{47}$$

Будем искать значения a, удовлетворяющие условию задачи сначала для a из промежутка $0 < a < 1$, а затем из промежутка $1 < a < +\infty$.

1. Для каждого a, принадлежащего промежутку $0 < a < 1$, неравенство (47) равносильно неравенству

$$\log_3\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\log_5(x^2+ax+6) \geqslant 1. \tag{48}$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$\log_3\left(\sqrt{u}+1\right)\log_5(u+1) \geqslant 1,$$

где $u = x^2+ax+5$. Функция $f(u) = \log_3\left(\sqrt{u}+1\right)\log_5(u+1)$ определена на множестве $u \geqslant 0$, монотонно возрастает на этом множестве, так как каждый из множителей $\log_3\left(\sqrt{u}+1\right)$ и $\log_5(u+1)$, очевидно, монотонно возрастает и неотрицателен. Кроме того, $f(4) = \log_3 3 \cdot \log_5 5 = 1$. Значит, неравенство (48) можно записать в виде $f(u) \geqslant f(4)$. Так как $f(u)$ монотонно возрастает на множестве $u \geqslant 0$, то неравенство $f(u) \geqslant f(4)$ равносильно на этом множестве неравенству $u \geqslant 4$. А это означает, что неравенство (48) равносильно неравенству

$$x^2+ax+5 \geqslant 4.$$

Множество решений этого неравенства бесконечно. Поэтому для любого a из области $0 < a < 1$ исходное неравенство имеет бесконечно много решений, т.е. среди этих a нет чисел, удовлетворяющих условию задачи.

2. Для любого a, принадлежащего промежутку $1 < a < +\infty$, данное в условии задачи неравенство равносильно неравенству

$$\log_3\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\cdot\log_5(x^2+ax+6) \leqslant 1.$$

Из сказанного выше относительно функции $f(u)$ следует, что последнее неравенство равносильно двойному неравенству

$$0 \leqslant x^2+ax+5 \leqslant 4$$

или системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+ax+5 \geqslant 0, \\ x^2+ax+1 \leqslant 0. \end{cases} \tag{49}$$

Если дискриминант второго неравенства $D = a^2-4$ отрицателен, то оно, а значит, и система (49) не имеют решений. Следовательно, искомые значения параметра a находятся среди чисел a, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{cases} a^2-4 \geqslant 0, \\ a > 1, \end{cases}$$

т.е. лежат в области $a \geqslant 2$.

Если $a > 2$, то различные корни

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

квадратного трехчлена второго неравенства системы (49) удовлетворяют первому неравенству системы (49), так как $x_1^2 + ax_1 + 5 = x_1^2 + ax_1 + 1 + 4 = 4 > 0$ и $x_2^2 + ax_2 + 5 = 4 > 0$. Следовательно, данное в условии задачи неравенство имеет не менее двух решений (x_1 и x_2).

Если же $a = 2$, то второе неравенство системы (49), а значит, и исходное неравенство имеют единственное решение $x = -1$. Следовательно, условию задачи удовлетворяет лишь $a = 2$.

Ответ. $a = 2$.

Пример 23. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно решение неравенства

$$x^2 + (5a + 2)x + 4a^2 + 2a < 0,$$

удовлетворяющее условию $x^2 + a^2 = 4$.

Решение. Среди чисел a таких, что $|a| > 2$ нет ни одного значения a, удовлетворяющего условию задачи, ибо при любом таком a уравнение $x^2 + a^2 = 4$ не имеет решений. При $a = 2$, а также при $a = -2$ уравнение $x^2 + a^2 = 4$ имеет единственное решение $x = 0$, которое не удовлетворяет неравенству. Значит, $a = 2$ и $a = -2$ также не удовлетворяют условию задачи. Итак, если есть a, удовлетворяющие условию задачи, то они таковы, что $|a| < 2$, и для любого такого a уравнение $x^2 + a^2 = 4$ имеет два корня:

$$x_1 = -\sqrt{4 - a^2} \quad \text{и} \quad x_2 = \sqrt{4 - a^2}.$$

Рассмотрим теперь квадратный трехчлен

$$Q(x) = x^2 + (5a + 2)x + 4a^2 + 2a,$$

он имеет дискриминант $D = (3a + 2)^2$. Если $a = -2/3$, то $D = 0$ и квадратный трехчлен $Q(x)$ ни для одного x не может быть отрицательным. Значит, $a = -2/3$ не удовлетворяет условию задачи. Если $a \neq -2/3$, то $D > 0$ и квадратный трехчлен $Q(x)$ имеет два различных корня. Значит, при $a \neq -2/3$ квадратный трехчлен принимает отрицательные значения для любых x, расположенных между корнями трехчлена $Q(x)$.

Итак, если есть число a, удовлетворяющее условию задачи, то оно таково, что $|a| < 2$, $a \neq -2/3$ и хотя бы одно из чисел x_1 и x_2 лежит между корнями трехчлена $Q(x)$. Отметим, что корни квадратного трехчлена $Q(x)$ удобно записать в виде

$$x_3 = \frac{-(5a + 2) - |3a + 2|}{2}, \quad x_4 = \frac{-(5a + 2) + |3a + 2|}{2},$$

тогда очевидно, что $x_3 < x_4$.

Теперь вопрос задачи можно переформулировать так: при каких значениях параметра a, удовлетворяющего условиям $|a| < 2$ и $a \neq -2/3$, хотя бы одно из чисел x_1 и x_2 лежит между числами x_3 и x_4. Ясно, что искомое множество значений является объединением множеств решений из области $|a| < 2$ и $a \neq -2/3$ двух систем неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{-(5a+2) - |3a+2|}{2} < -\sqrt{4-a^2}, \\ -\sqrt{4-a^2} < \dfrac{-(5a+2) + |3a+2|}{2}, \end{cases} \tag{50}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-(5a+2) - |3a+2|}{2} < \sqrt{4-a^2}, \\ \sqrt{4-a^2} < \dfrac{-(5a+2) + |3a+2|}{2}. \end{cases} \tag{51}$$

Решим на области $|a| < 2$ и $a \neq -2/3$ отдельно систему (50) и систему (51).

На множестве $-2 < a < -2/3$ система (50) может быть переписана в виде

$$\begin{cases} -a < -\sqrt{4-a^2}, \\ -\sqrt{4-a^2} < 4a - 2, \end{cases}$$

или в виде

$$\begin{cases} \sqrt{4-a^2} < a, \\ 4a + 2 < \sqrt{4-a^2}. \end{cases}$$

Очевидно, что эта система неравенств на множестве $-2 < a < -2/3$ решений не имеет, так как на этом множестве левая часть первого неравенства неотрицательна, в то время как правая часть отрицательна.

На множестве $-2/3 < a < 2$ система (50) может быть переписана в виде

$$\begin{cases} -4a - 2 < -\sqrt{4-a^2}, \\ -\sqrt{4-a^2} < -a, \end{cases}$$

или в виде

$$\begin{cases} \sqrt{4-a^2} < 4a + 2, \\ a < \sqrt{4-a^2}. \end{cases} \tag{52}$$

На рассматриваемом множестве обе части первого неравенства положительны, и поэтому оно равносильно неравенству

$$4 - a^2 < 16a^2 + 16a + 4$$

или неравенству

$$17a^2 + 16a > 0.$$

Последнее неравенство имеет решения $a > 0$ и $a < -16/17$, и, значит, множество решений первого неравенства системы (52), содержащихся в промежутке $-2/3 < a < 2$, имеет вид

$$-\frac{2}{3} < a < -\frac{16}{17} \quad \text{и} \quad 0 < a < 2. \tag{53}$$

Второму неравенству системы (52) удовлетворяют все a из области $-2/3 < a < 0$, так как в этой области левая часть неравенства отрицательна, правая же положительна. В области $0 \leqslant a < 2$ обе части второго неравенства системы (52) неотрицательны и, значит, оно равносильно неравенству $a^2 < 4 - a^2$ или $a^2 < 2$. Множество решений последнего неравенства, содержащихся в области $0 \leqslant a < 2$, имеет вид $0 \leqslant a < \sqrt{2}$. Итак, множество всех решений второго неравенства системы (52), содержащихся в области $-2/3 < a < 2$, есть промежуток

$$-\frac{2}{3} < a < \sqrt{2}. \tag{54}$$

Из (53) и (54) следует, что множество решений системы (50) из области $|a| < 2$ и $a \neq -2/3$ является объединением двух промежутков:

$$-\frac{2}{3} < a < -\frac{16}{17} \quad \text{и} \quad 0 < a < \sqrt{2}. \tag{55}$$

Решим теперь систему (51). На множестве $-2 < a < -2/3$ ее можно переписать в виде

$$\begin{aligned} -a &< \sqrt{4 - a^2}, \\ \sqrt{4 - a^2} &< -4a - 2. \end{aligned}$$

На рассматриваемом множестве левые и правые части обоих неравенств полученной системы положительны. Поэтому она равносильна системе

$$\begin{aligned} &a^2 < 4 - a^2, \\ &4 - a^2 < 16a^2 + 16a + 4 \end{aligned}$$

или системе

$$\begin{aligned} &a^2 < 2, \\ &17a^2 + 16a > 0. \end{aligned}$$

Множество решений последней системы неравенств имеет вид $-\sqrt{2} < a < -16/17$ и $0 < a < \sqrt{2}$. Часть этого множества, содержащаяся в области $-2 < a < -2/3$, имеет вид $-\sqrt{2} < a < -16/17$.

На множестве $-2/3 < a \leqslant 2$ система (51) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} -4a - 2 &< \sqrt{4 - a^2}, \\ \sqrt{4 - a^2} &< -a. \end{aligned} \tag{56}$$

На множестве $0 < a < 2$ второе неравенство полученной системы, а значит, и системы (51) решений не имеет. Действительно, правая часть этого неравенства на рассматриваемом множестве отрицательна, а левая неотрицательна.

На множестве $-2/3 < a \leqslant 0$ обе части второго неравенства системы (56) неотрицательны, и, значит, оно равносильно неравенству $4 - a^2 < a$ или $a^2 > 2$. Это неравенство не имеет решений в области $-2/3 < a \leqslant 0$.

Итак, на множестве $-2/3 < a < 2$ система (51) решений не имеет и множество всех решений системы (51) из области $|a| < 2$ и $a \neq -2/3$ имеет вид
$$-\sqrt{2} < a < -\frac{16}{17}. \tag{57}$$
Объединяя (55) и (57), находим требуемое множество значений параметра a: $-\sqrt{2} < a < -16/17,\ 0 < a < \sqrt{2}$.

Ответ. $-\sqrt{2} < a < -\dfrac{16}{17},\ \ 0 < a < \sqrt{2}$.

Иногда на вступительных экзаменах предлагается решить систему неравенств с параметром.

Пример 24. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно общее решение у неравенств
$$x^2 + 4ax + 3a^2 > 1 + 2a \quad \text{и} \quad x^2 + 2ax \leqslant 3a^2 - 8a + 4.$$

Решение. Условие задачи можно переформулировать следующим образом: найти все значения a, при каждом из которых система неравенств
$$\begin{aligned} &x^2 + 4ax + 3a^2 - 2a - 1 > 0,\\ &x^2 + 2ax - 3a^2 + 8a - 4 \leqslant 0 \end{aligned} \tag{58}$$
имеет хотя бы одно решение. При фиксированном значении a корни квадратного трехчлена $x^2 + 2ax - 3a^2 + 8a - 4$ есть $x_1 = -a + 2|a-1|$ и $x_2 = -a - 2|a-1|$, поэтому множество решений второго неравенства системы (58) есть множество
$$-a - 2|a-1| \leqslant x \leqslant -a + 2|a-1|. \tag{59}$$
Найдем все значения a, при которых система (58) не имеет решений. Обозначим квадратный трехчлен $x^2 + 4ax + 3a^2 - 2a - 1$ через $f(x)$. Если система (58) не имеет решений, то одновременно выполнены неравенства
$$f(x_1) \leqslant 0, \quad f(x_2) \leqslant 0, \tag{60}$$
в противном случае хотя бы одно из чисел x_1 или x_2 было бы решением системы (58). С другой стороны, если выполнены неравенства (60), то числа x_1, x_2, а значит, и все множество (59) лежит между корнями (включая корни) квадратного трехчлена $f(x)$. Это значит, что для каждого решения x_0 второго неравенства системы (58) выполнено неравенство $f(x_0) \leqslant 0$, т.е. система (58) не имеет решений.

Итак, система (58) не имеет решений тогда и только тогда, когда одновременно выполнены неравенства (60). Легко видеть, что
$$\begin{aligned} f(x_1) &= 4a^2 - 4a|a-1| - 10a + 3,\\ f(x_2) &= 4a^2 + 4a|a-1| - 10a + 3. \end{aligned}$$
Рассматривая два случая $a \geqslant 1$ и $a < 1$, приходим к выводу, что система

неравенств (60) равносильна системе

$$\begin{gathered} 4a^2 - 4a(a-1) - 10a + 3 \leqslant 0, \\ 4a^2 + 4a(a-1) - 10a + 3 \leqslant 0 \end{gathered}$$

или системе

$$\begin{aligned} &-6a + 3 \leqslant 0, \\ &8a^2 - 14a + 3 \leqslant 0. \end{aligned} \qquad (61)$$

Множество решений первого неравенства системы (61) есть промежуток $1/2 \leqslant a < +\infty$, множество решений второго неравенства системы (61) есть отрезок $1/4 \leqslant a \leqslant 3/2$; поэтому множество всех решений системы (61) есть промежуток $1/2 \leqslant a \leqslant 3/2$.

Таким образом, система (58) не имеет решений тогда и только тогда, когда a принадлежит промежутку $1/2 \leqslant a \leqslant 3/2$. Значит, если $a < 1/2$ или $a > 3/2$, и только в этом случае, система (58) имеет хотя бы одно решение.

Ответ. $a < 1/2, \quad a > 3/2$.

Упражнения

Решить неравенство.

1) $\log_{1/8}(3x+4) > \log_{27} 81$. 2) $\log_{1/4}(2x+3) > \log_9 27$.
3) $\log(x^2 - 3x + 3) \geqslant 0$. 4) $\log_3(5x^2 + 6x + 1) \leqslant 0$.
5) $\dfrac{1}{2}\log_{1/3}(x^2 - 3x + 1) < 1$. 6) $\log_{5/8} \quad 2x^2 - x - \dfrac{3}{8} \quad \geqslant 1$.
7) $\log_{\sin\pi/12} \quad \dfrac{1}{6}x^2 - x + \dfrac{35}{24} \quad \geqslant 0$. 8) $2\log_3(2x^2 + x - 1) > \log_3 4$.
9) $\log_{0,3}(x^2 + x + 31) < \log_{0,3}(10x + 11)$.
10) $\log_{1/3}(x^2 - 6) + \log_9 x^2 \geqslant 0$. 11) $\log_3(2x^2 + 1) < 2\log_9(x^2 + 5)$.
12) $\dfrac{1}{2}\lg(x - 9) + \lg\sqrt{2x - 1} \geqslant 1$.
13) $1 + \log_{1/2}(3x^2 + 2) > \log_2 \dfrac{2}{2x^2 + 5}$.
14) $\dfrac{1}{2}\lg(x^2 - 10x + 25) + \lg(x^2 - 6x + 3) > 2\lg(x - 5) + \dfrac{1}{2}\lg 25$.
15) $\lg(x - 2) + \lg(x + 2) < \lg(4x + 1)$.
16) $\log_{1/2}(x - 1) + \log_{1/2}(x - 2) \geqslant -1$.
17) $2\log_{25}((1 + x)(3 - x)) - \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}(1 + x) > \log_{1/5}\dfrac{1}{2}$.
18) $\log_3((x + 2)(x + 4)) + \log_{1/3}(x + 2) < \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} 7$.
19) $\lg\sqrt{x - 30} + \dfrac{1}{2}\lg(x + 30) > 1 + 2\lg 2$.

20) $\log_{12/11}(\log_{1/2}(x^2+3x-4)) \leqslant 0$.
21) $\log_{27/41}(\log_5(x^2-2x-3)) \geqslant 0$. 22) $\log_{1/2} x \leqslant \log_{1/4} x$.
23) $\frac{5}{2}\log_5 \sqrt[5]{x} - \frac{1}{3}\log_{\sqrt{5}} x > 1$. 24) $\log_{1/3}(\log_5 x) > 0$.
25) $5^{x^2+x-1} > \left(\frac{1}{5}\right)^{5x^2}$. 26) $2^{3x}\cdot 3^x - 2^{3x-1}\cdot 3^{x+1} + 288 > 0$.
27) $7^x - 5^{x+2} < 2\cdot 7^{x-1} - 118\cdot 5^{x-1}$. 28) $3^{x+2} + 7^x < 4\cdot 7^{x-1} + 34\cdot 3^{x-1}$.
29) $9^x - 2^x\cdot\sqrt{2} > 4\sqrt{2}\cdot 2^{x+1} - 3^{2x-1}$.
30) $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} > 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$.
31) $\log_3(13-4^x) > 2$. 32) $\log_5(26-3^x) > 2$.
33) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{1/4}(x^2-3x+1)} < 9$. 34) $5^{\log_{1/2}(\log_2(3^{2\log_3 x}-3x+\log_3 9))} < 1$.
35) $3^{\log_{1/2}(\log_2(10^{2\lg x}-3x+\log_9 81))} > 1$. 36) $\frac{x+7}{x+3} < x+1$.
37) $x \geqslant \frac{4-x^2}{3-x}$. 38) $\log_{1/3}\frac{3x-1}{x+2} < -1$.
39) $\log_{1/4}\frac{x-3}{x+3} \geqslant -\frac{1}{2}$. 40) $\log_{1/2}\frac{5x+4}{x-2} > \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$.
41) $\log_{1/2}\frac{x^2-4x+6}{x} < 0$. 42) $\log_{\sqrt{2}}\frac{x^2-4x+3}{4} \leqslant 2\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$.
43) $\log_2\frac{(x+2)(x+3)}{(x-1)(7-x)} < 2$. 44) $\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$.
45) $\frac{1}{\lg x} + \frac{1}{1-\lg x} > 1$. 46) $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} < 1$.
47) $\frac{2^{-x}}{1-2^{1-x}} + 2^x < 0$. 48) $\frac{2^{2x-3}}{2^{x-2}+1} \geqslant 1$. 49) $\frac{4-7\cdot 5^x}{5^{2x+1}-12\cdot 5^x+4} \leqslant \frac{2}{3}$.
50) $\frac{15-2\cdot 13^{x+1}}{6\cdot 13^{2x}-13^{x+1}+6} \geqslant 2$. 51) $\frac{2^{x+3}+11}{2^{2x+1}+2^x-15} \leqslant 3$.
52) $\log_{0,5} 2^{\frac{1}{x+1}} > 0$. 53) $5^{x+1} < \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{x}}$.
54) $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \geqslant \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$. 55) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leqslant \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$.
56) $3^x\cdot 8^{\frac{x}{x+2}} > 6$. 57) $\log_{1/2}(x+1) > \log_2(2-x)$.
58) $\log_\pi(x+27) - \log_\pi(16-2x) < \log_\pi x$.
59) $\log_2(5-4x) + \log_{1/2}(2x-x^2) \geqslant 2$.
60) $\log_3((x+2)(x-3)) \leqslant 4\log_9(2x+1) - \log_{\sqrt{7}} 7$.
61) $\log_4(2x^2+x+1) - \log_2(2x-1) \leqslant -\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$.
62) $2\log_{1/2}(x-2) - \log_{1/2}(x^2-x+2) \geqslant 1$.

63) $3^{2x} < 7 \cdot 3^x + 9\log_3 9$. 64) $\log_3 x - \log_2^2 x \leqslant \frac{3}{2}\log_{1/(2\sqrt{2})} 4$.

65) $10^{7x-1} + 6 \cdot 10^{1-7x} - 5 \leqslant 0$. 66) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2^{3-x} + 25^{1/\log_3 5}$.

67) $\log_5^2(6-x) + 2\log_{1/\sqrt{5}}(6-x) + \log_3 27 \geqslant 0$.

68) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}\right)^x - \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}\right)^{-x} < 3$. 69) $3\log_{1/2} x < 1 - 2\sqrt{\log_{1/2} x}$.

70) $3\sqrt{\lg x} + 2\lg\sqrt{\frac{1}{x}} > 2$. 71) $\lg^4 x - 5\lg^2 x + 6 < 0$.

72) $(\log_2 x)^4 - \left(\log_{1/2}\frac{x^5}{4}\right)^2 - 20\log_2 x + 148 < 0$.

73) $\log_2^2(x - x^2 + 2) + 3\log_{1/2}(x - x^2 + 2) \leqslant -2$.

74) $4^{5+4x} - 15 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3+4x} + 8 \geqslant 0$. 75) $\log_{1/\sqrt{6}}(5^{x+1} - 25^x) \geqslant -2$.

76) $\log_{1/\sqrt{2}}(3^{x+2} - 9^x) + 6 \geqslant 0$. 77) $3 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}}$.

78) $9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 3^{\sqrt{x^2-3}-1} \cdot 28$. 79) $4^{\sqrt{9-x^2}+1} + 2 < 9 \cdot 2^{\sqrt{9-x^2}}$.

80) $4^x \leqslant 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$. 81) $(\log_{1/2} x)\log_2 x + \log_{1/2} x + 2 \leqslant 0$.

82) $x + \log_2(9 - 2^x) < 3$. 83) $\log_2(4^x + 4) < x + \log_2(2^{x+1} - 3)$.

84) $\log_2(2^x - 1) \cdot \log_{0,5}(2^{x+1} - 2) > -2$.

85) $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_{1/3}(3^{x+2} - 9) > -3$.

86) $\frac{(x+5)(x+2)(x-1)^2}{(x+1)^3(x-2)^2} > 0$. 87) $(x+2)^2(x-1)^2\sqrt{x-8} \geqslant 0$.

88) $(3^x - 3)(x^2 - 5x + 6) < 0$. 89) $(4x^2 - 16x + 7)\log_2(x-3) > 0$.

90) $(5x - 2x^2)\log_{1/5}(|x| - 2) > 0$. 91) $\frac{\log_{1/3}(x+2)}{x} > 0$.

92) $x\sqrt{\frac{x+2}{x+3}} \leqslant 0$. 93) $\frac{x\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}} \leqslant 0$.

94) $\sqrt{4-x^2}\left(\log_3\frac{x+1}{x} + 2\right) \leqslant 0$. 95) $\dfrac{\log_3\frac{x+1}{x}}{\log_2\frac{x-2}{x+2}} \geqslant 0$.

96) $\frac{\sqrt{2x-3}}{\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 3x + 3)} \geqslant 0$. 97) $\frac{2x^2 + 3x}{\lg(x+2)} < 0$.

98) $\frac{|x+2| - |x|}{\sqrt{4 - x^3}} > 0$. 99) $\frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-2} - 2)}{x} \geqslant 0$.

100) $\frac{\lg 7 - \lg(-8x - x^2)}{\lg(x+3)} > 0$. 101) $\frac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2 - 4x} < 0$.

102) $\dfrac{\log_{1,7}\left(\frac{1}{2}(1 - \log_8 5)\right)}{9x^2 - 1} \leqslant 0$. 103) $\frac{2^x + x - 10}{2^x - 8} \leqslant 1$.

104) $\dfrac{x+1-\log_3 9x}{1-\log_3 x} \geqslant 1.$ 105) $\dfrac{1-2x+\log_2 6x}{x-2} \leqslant -2.$

106) $\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7} \leqslant \dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}.$ 107) $\dfrac{\lg(4x^2+x)}{\lg 2x} \geqslant 1.$

108) $\dfrac{\log_2((x+2)(x+5/2))}{\log_2(x+2)} \geqslant 1.$

109) $\dfrac{\log_2(x^2-2x-7)^5-\log_3(x^2-2x-7)^8}{3x^2-13x+4} \leqslant 0.$

110) $\dfrac{\log_7(x^2-4x-4)^8-\log_2(x^2-4x-4)^3}{3+x-2x^2} \geqslant 0.$

111) $\dfrac{1}{\log_3(x^2-7x+12)} < \dfrac{1}{\log_3 20}.$ 112) $||3-2x|-1| \geqslant 2|x|.$

113) $|x-1|-|x-2|<1.$ 114) $|x+1|+|x+2| \geqslant 2.$

115) $x^2-|3x+2|+x \geqslant 0.$ 116) $|x^3-1| \leqslant x^2+x+1.$

117) $\dfrac{2x-5}{|x-1|} \leqslant 1.$ 118) $\dfrac{7}{|x-1|-3} \geqslant |x+2|.$

119) $|x-2| \leqslant \dfrac{9}{|x-5|-3}.$ 120) $|x^2-4|-|9-x^2| \geqslant 5.$

121) $\dfrac{|2x-1|}{x^2-x-2} \leqslant \dfrac{1}{2}.$ 122) $\dfrac{(1+x)(2+x)}{x^2-|x|-2} \geqslant -3x.$

123) $\log_3\left(\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}\right) \geqslant 0.$

124) $\log_{1/3}(3-x^2) > \log_{1/3}(4|x|-2).$

125) $\log_4(x^2-5) < \log_4\left(\dfrac{7}{3}|x|-3\right).$

126) $|\lg x-1|<1.$ 127) $|\log_2 x-2|<1.$ 128) $\sqrt{x^2+x-2} > x.$

129) $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}.$ 130) $\log_{1/3}\sqrt{x^2-2x} > \sin\dfrac{11\pi}{6}.$

131) $\log_4\left(2-\sqrt{x+3}\right) < 2\cos\dfrac{5\pi}{3}.$ 132) $\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+2}} \leqslant 0.$

133) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x} < 12.$ 134) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}.$

135) $\log_2\left(\sqrt{x+3}-x-1\right) \leqslant 0.$ 136) $\log_{1/5}\left(\sqrt{x^2-2}-x+1\right) \leqslant 0.$

137) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1} > 6.$

138) $x+13+6|4-\sqrt{6-x}| > 0.$ 139) $x-9 < 7|4-\sqrt{x+9}|.$

140) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x} > 0.$ 141) $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}}+2 > x.$

142) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} \leqslant 1.$

143) $\sqrt{\frac{1}{4} - x} \geqslant x + \frac{1}{2}$. 144) $\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 + x} > 3$.

145) $\sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 1} < 1$. 146) $\sqrt{x^2 + 17} - \sqrt[4]{x^2 + 17} > 6$.

147) $\sqrt{x + 2 + \sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} \leqslant 2$.

148) $\sqrt{8 - x^2} - \sqrt{25 - x^2} \geqslant x$. 149) $x\sqrt{10 - x^2} > x^2 - 6$.

150) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} < \sqrt{9x^2 + 12x + 4}$.

151) $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geqslant 7 - |x^2 + 2x|$. 152) $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$.

153) $\frac{4}{\sqrt{2 - x}} - \sqrt{2 - x} < 2$. 154) $\frac{2x}{\sqrt{2x + 9}} < \sqrt{1 + 2x} - 1$.

155) $\sqrt{\log_2 4x} - \sqrt{\log_2 x} \geqslant 1$. 156) $\frac{\sqrt{2 - x} + 4x - 3}{x} \geqslant 2$.

157) $\frac{\log_2 \left(\sqrt{4x + 5} - 1\right)}{\log_2 \left(\sqrt{4x + 5} + 1\right)} > \frac{1}{2}$. 158) $\frac{\log_{0,5} \left(\sqrt{3 + x} - 1\right)}{\log_{0,5} \left(\sqrt{x + 3} + 5\right)} < \frac{1}{2}$.

159) $\sqrt{13^x - 5} \leqslant \sqrt{2(13^x + 12)} - \sqrt{13^x + 5}$.

160) $\sqrt{\frac{1}{2}(15^x + 9)} \leqslant \sqrt{15^x + 12} - \sqrt{\frac{1}{2}(15^x - 9)}$.

161) $\frac{\sqrt{x + 5}}{1 - x} < 1$. 162) $\frac{3 - x}{\sqrt{15 - x}} < 1$. 163) $\frac{x^2 - 1}{\sqrt{13 - x^2}} \geqslant x - 1$.

164) $\frac{3(4x^2 - 9)}{\sqrt{3x^2 - 3}} \leqslant 2x + 3$. 165) $\frac{\sqrt{24 - 2x - x^2}}{x} < 1$.

166) $\frac{1 - \sqrt{1 - 8x^2}}{2x} < 1$. 167) $\frac{1 - \sqrt{1 - 8(\log_2 x)^2}}{2\log_2 x} < 1$.

168) $\frac{\sqrt{\log^2_{0,5} x - 81}}{\log_{0,5} x - 1} < 1$. 169) $\sqrt{8 + 2^{\sqrt{3-x}+1} - 4^{\sqrt{3-x}}} + 2^{\sqrt{3-x}-1} > 5$.

170) $\sqrt{\log_4 \left(\frac{2x^2 - 3x + 3}{2}\right)} + 1 > \log_2 \frac{2x^2 - 3x + 3}{2}$.

171) $\log_5 \left(\sqrt{2 + x - x^2} + 4\right) > \log_{1/5} \frac{25}{\sqrt{2 + x - x^2} + \sqrt{1 - x + 3}} + 2$.

172) $\log_{1/4} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{3} + 1\right) < \log_4 \frac{16}{1 + \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}} - 2$.

173) $\log_{1/3} \left(\sqrt{9x - x^2} + 3\right) > \log_3 \frac{27}{\sqrt{9x - x^2} + \sqrt{5 - x^2} + 2} - 3$.

174) $8\sqrt{1 - 2^x + 2^{2x-2}} > 2^{2x} - 2^{x+2} + 7$.

175) $\sqrt{9^x + 3^x - 2} \geqslant 9 - 3^x$.

176) $8 - 3^x \cdot \sqrt{3^{2x} - 6^x + 2^{2x-2}} > 2^{2x} - 4 \cdot 6^x + 7 \cdot 3^{2x}$.

177) $3 \cdot 2^{x+2} \cdot \sqrt{1 - 3 \cdot 2^x + 9 \cdot 2^{2x-2}} > 4 - 3 \cdot 2^{x+2} + 17 \cdot 2^{2x}$.

178) $\sqrt{4^x - 2^x - 6} \geqslant 8 - 2^x$.

Решить систему неравенств.

179) $\begin{cases} |2x+7|-|3x+5|>0, \\ \dfrac{x+2}{x-1} \geqslant 1. \end{cases}$ 180) $\begin{cases} x^2+2|x+3|-10<0, \\ \dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 1. \end{cases}$

181) $\begin{cases} \sqrt{4-3x} \geqslant x, \\ \sqrt{x}+\sqrt{x-1}<5. \end{cases}$

182) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x-8)(2-x)}}{\log_{0,3} \dfrac{10}{7}(\log_2 5-1)} \geqslant 0, \\ 2^{x-3}-31>0. \end{cases}$

183) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\log_2^2 x-3\log_2 x+2}}{\log_5 \dfrac{1}{3}(\log_3 5-1)} \geqslant 0, \\ x-\sqrt{x}-2 \geqslant 0. \end{cases}$

184) $\begin{cases} \dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\dfrac{1}{x}, \\ \sqrt{x-2}\cdot\sqrt{4-x^2} \leqslant 0. \end{cases}$

185) $\begin{cases} \sqrt{x^4-2x^2+1}>1-x, \\ \sqrt{x^2-25}\cdot\sqrt{25-x^2} \geqslant 0. \end{cases}$

Найти область определения функции.

186) $y=\lg\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-9x+20}$. 187) $y=\sqrt{x^2(x-2)}$.

188) $y=\sqrt{x^2(x-1)^2(x-3)^5}$. 189) $y=\lg(1-\lg(x^2-5x+16))$.

190) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x+3}}$. 191) $y=\sqrt{\lg\ 3-\sqrt{x-1}\ }$.

192) $y=\sqrt{\log_2(25\cdot 2^x-10^x+5^x-25)}$. 193) $y=\sqrt{\log_{0,4}(x-x^2)}$.

194) $y=\sqrt{\log_{1/2}\dfrac{x}{x-1}}$. 195) $y=\dfrac{\sqrt{8x^2-2x-1}}{x-1}\cdot\log_2\dfrac{3x-1}{x+1}$.

196) $y=\sqrt{\log_x 2\cdot\log_{2x} 2-\log_{4x} 2}$.

197) $y=\sqrt{\dfrac{\log_2 x}{\log_x 4}-\dfrac{1}{\log_x 8}-\dfrac{7}{2}}$. 198) $y=\sqrt{\log_{1/2}\log_3\dfrac{x+1}{x-1}}$.

199) $y=\sqrt{-\dfrac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+8}}}$. 200) $y=\sqrt{\log_{0,3}\dfrac{x-1}{x+5}}$.

201) $y=\dfrac{\sqrt{\cos x-1/2}}{\sqrt{-1+5x-6x^2}}$.

Решить неравенство.

202) $3x^2(x-4)^2 < 32 - 5(x-2)^2$. 203) $(x+3)^4 + (x+5)^4 \geqslant 4$.

204) $x^4 - 3x^2 + 6x + 13 > 0$. 205) $(x-1)x(x+2)(x+1) \leqslant 3$.

206) $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 > 0$. 207) $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 < 0$.

208) $x(x+1)(x-1)(x+2) > 24$.

209) $(x^2+x+5)^2 + 3x(x^2+x+5) + 2x^2 > 0$.

210) $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} < 5$.

211) $\dfrac{1}{1+2x} - \dfrac{2}{2+3x} + \dfrac{3}{3+4x} < \dfrac{4}{5x+4}$.

212) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{2+x} - \dfrac{1}{3+x} - \dfrac{1}{4+x} + \dfrac{1}{5+x} - \dfrac{1}{6+x} + \dfrac{1}{7+x} > 0$.

213) $\lg x \leqslant \sqrt{1-x^2}$. 214) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x^2+3} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^4+x^2+1} \leqslant 1$.

215) $2\cos^4 \dfrac{x^2+x}{6} \geqslant 4^x + 4^{-x}$. 216) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x \geqslant 4$.

217) $\log_6\left(\left(4+\sqrt{5}\right)^x - \left(\sqrt{5}-2\right)^x\right) > 1$.

218) $\sqrt{x^2-5x+6} + x + \sqrt{10x-2x^2-12} + 3\log_4 \dfrac{3}{2} \geqslant 3$.

219) $\left(2 + \sqrt{x^2-7x+12}\right)\left(\dfrac{2}{x} - 1\right) \leqslant \left(\sqrt{14x-2x^2-24} + 2\right) \log_x \dfrac{2}{x}$.

220) $\sqrt{x^2-7x+10} + 9\log_4 \dfrac{x}{8} \geqslant 2 + \sqrt{14x-20-2x^2} - 13$.

221) $\dfrac{2^{x+1}-7}{x-1} < \dfrac{10}{3-2x}$. 222) $\dfrac{6-3^{x+1}}{x} > \dfrac{10}{2x-1}$.

223) $\dfrac{2+\log_3 x}{x-1} < \dfrac{6}{2x-1}$. 224) $2^{-|x-3|} \cdot \log_3(6x-x^2-6) \geqslant 1$.

225) $|\sqrt{2}|x+1|-1| \cdot \log_2(-2x^2-4x) \geqslant 1$.

Найти все решения неравенства, принадлежащие заданному промежутку.

226) $x^4 + x^3 + x^2 - 4x \geqslant 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$.

227) $x^4 - x^2 - x - 1 < 0, \quad -\infty < x \leqslant 1$.

228) $x^2 + (x+1)\sin \dfrac{\pi x}{6} \geqslant \dfrac{3+x}{2}, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2$.

229) $x \leqslant \sin \pi\left(\dfrac{x+1}{3}\right) \cdot \sin \pi\left(\dfrac{1-x}{3}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$.

230) $(x - \log_3 75)(x - \log_2 22) > 0, \quad 3 \leqslant x \leqslant 4$.

231) $x^2 + 2x + \cos 5 < 0, \quad -2 \leqslant x \leqslant -1/3$.

232) $\operatorname{tg}\dfrac{5}{2} + 6x - x^2 > 0, \quad \dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant 6.$

233) $x^2 - 2x + \sin\dfrac{7}{2} \leqslant 0, \quad -\dfrac{1}{3} < x < 2.$

Решить неравенство.

234) $\log_{3x^2+1} 2 < \dfrac{1}{2}.$ 235) $\log_{\frac{x-1}{x-5}} 0{,}3 > 0.$

236) $\dfrac{1}{2}\log_{x^2-2x-10} 2 \leqslant \log_{81} 3.$

237) $\log_{(x-1)(x+2)} 4 \leqslant \log_{1/3} \operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{3}.$

238) $\log_{\frac{2x+1}{x^2-4}} 2 \leqslant \dfrac{1}{2}\log_{\sin\pi/3}\dfrac{4}{3}.$

239) $2\log_5\sqrt{x} - 2 \geqslant \log_x \dfrac{1}{5}.$ 240) $\log_{1/3}\dfrac{1}{x} + \log_x 3 \geqslant 2.$

241) $\log_3(7-x) \leqslant \dfrac{9}{16}\log^2_{2\sqrt{2}}\dfrac{1}{4} + \log_{7-x} 9.$

242) $2\log_{1/4}(x+5) > \dfrac{9}{4}\log_{1/(3\sqrt{3})} 9 + \log_{\sqrt{x+5}} 2.$

243) $\log_{\sqrt{3x+1}} 4 > 2 - \log_{3x+1}\dfrac{1}{25}.$

244) $\log_{6x^2-5x+1} 2 > \log_{\sqrt{6x^2-5x+1}} 2.$

245) $\log_x 3 - \log_{4x} 3 > 0.$ 246) $\log_{4/x} 2 > \log_2 x.$

247) $\log_{x/2} 8 + \log_{x/4} 8 < \dfrac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}.$

248) $(\log_x 2)(\log_{2x} 2)(\log_2 4x) > 1.$

249) $\log_{2-x}(x-3) \geqslant -3.$ 250) $\log_x \dfrac{3x+2}{4-4x} > 0.$

251) $\log_x \dfrac{2x+5}{4x-4} < 0.$ 252) $\log_x \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 0.$

253) $\log_{x+1} \quad x^2 - \dfrac{3}{2}x - 1 \quad > 0.$ 254) $\log_{2/3|x-2|} 2^{1-x^2} \geqslant 0.$

255) $\log_{\frac{3x}{x^2+1}} \quad x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1 \quad \geqslant 0.$ 256) $\log_{x+5/2} \quad \dfrac{x-5}{2x-3} \quad^2 > 0.$

257) $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}} \dfrac{x}{3} > 0.$

258) $\log_{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}(x^2-3x+1) \geqslant 0.$

259) $\log_{3^{2-x^2}} \quad \dfrac{3}{2} - |x-1| \quad \leqslant 0.$ 260) $\log_x \quad 2x - \dfrac{3}{4} \quad > 2.$

261) $\log_x(x+2) > 2$. 262) $\log_x\left(\dfrac{2x-1}{x-1}\right) > 1$.

263) $\log_{x^2}(x^2-4x+3) > 1$. 264) $\log_{(x+1)^2}(x+3) > 1$.

265) $\log_x(x^2+3x-3) > 1$. 266) $\log_{9x^2}(6+2x-x^2) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

267) $\log_{x-3}(x^2-4x)^2 \leqslant 4$. 268) $\log_{(x-6)^2}(x^2-5x+9) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

269) $\log_x\left(x^2-\dfrac{3}{16}\right) > 4$. 270) $\log_{1+x^4}\left(x^4+x^2+\dfrac{1}{2}\right) < 1$.

271) $\log_{x^2}\dfrac{4x-5}{|x-2|} \geqslant \dfrac{1}{2}$. 272) $\log_{x/6}\left(\log_x\sqrt{6-x}\right) > 0$.

273) $\log_x(16-6x-x^2) > 1$. 274) $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\dfrac{24-2x-x^2}{14}\right) > 1$.

275) $\log_{|x+6|}(\log_2(x^2-x-2)) \geqslant 1$. 276) $\log_{\frac{2x}{1+x^2}}(4-x) > -1$.

277) $\log_{x+1/x}\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}-4\right) \geqslant 1$. 278) $\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2}-x-1\right) \geqslant 1$.

279) $\log_x(\log_2(4^x-6)) \leqslant 1$. 280) $\log_{2^x}\left(\dfrac{1}{17}\cdot 2^{2x+1}+\dfrac{8}{17}\right) \geqslant 1$.

281) $\log_x(2x) > \log_{2x} x$.

282) $\log_{x+4}(5x+20) \leqslant \log_{x+4}(x+4)^2$.

283) $\log_3\sqrt{5-2x}\cdot\log_x 3 < 1$.

284) $\log_5 x + \log_x\dfrac{x}{3} < \dfrac{(\log_5 x)(2-\log_3 x)}{\log_3 x}$.

285) $\log_x(2x) \leqslant \sqrt{\log_x(2x^3)}$. 286) $(\log_2 x)\cdot\sqrt{\log_x\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{x}\right)} \leqslant 1$.

287) $|x|^{x^2-x-2} < 1$. 288) $x^{\frac{2x-1}{3-x}} > 1$. 289) $(x^2+x+1)^x < 1$.

290) $(x^2-x-1)^{x^2-1} < 1$. 291) $|x-1|^{x^2+x-2} > 1$.

292) $|x+1|^{x^2-x-2} < 1$. 293) $|x-2|^{\log_4(x+2)-\log_2 x} < 1$.

294) $x^{2-\log_2^2 x+2\log_{1/2} x} > \dfrac{1}{x}$. 295) $|\log_{x/2}|^{x^2-7x+10} < 1$.

296) $\left(\log_2\dfrac{x}{6}\right)^{x^2-18x+56} > 1$. 297) $x^{\lg x} > 10x^{-\lg x}+3$.

298) $x^{\log_2 x}+16x^{-\log_2 x} < 17$. 299) $x^{\lg^2 x-3\lg x+1} > 1000$.

300) $x^{\lg x-1} > 100$. 301) $x^{2-\lg x} < \dfrac{100}{\sqrt{x}}$. 302) $x^{1/\lg x}\cdot\lg x < 1$.

303) $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}} > 2$. 304) $x^3 > 2^{15\log_{2\sqrt{2}}\sqrt{3}}\cdot 3^{\log_{\sqrt{x}} 3}$.

305) $x^4\cdot 7^{\log_{\sqrt[3]{7}} 5} \leqslant 5^{-\log_{1/x} 5}$.

306) $(3^{x+2}+3^{-x})^{3\log_4 x-\log_4(x(2x+3))}<1$.
307) $(2^x+2^{3-x})^{2\log_2(x+3)-\log_2(x+9)}<1$.
308) $(4\cdot 3^x+3^{-x})^{3\log_3(x-1)-\log_3((x-1)(2x+1))}>1$.

Для каждого значения параметра a решить неравенство.
309) $ax>1$. 310) $12-ax>3x+4$. 311) $a^2-x-ax>1$.
312) $ax^2-2<0$. 313) $ax^2+1\geqslant 0$. 314) $(a+1)x^2-2\geqslant 0$.
315) $x-2\left(1-\dfrac{1}{a}\right)<\dfrac{2(x+1)}{3a}$. 316) $\dfrac{a}{x+1}\geqslant -1$. 317) $ax>\dfrac{1}{x}$.
318) $\dfrac{x-a}{x+2a}>0$. 319) $\dfrac{(x-a)(x+2a)}{x+3a}<0$. 320) $\dfrac{x-1}{a-1}+x<\dfrac{1}{1-a}$.
321) $\dfrac{(a-1)x+a+1}{x-1}>0$. 322) $\dfrac{ax+1}{ax-1}\geqslant\dfrac{a+1}{a-1}$.
323) $\dfrac{ax-(1-a)a}{a^2-ax-1}>0$. 324) $ax^2+x+1>0$. 325) $x^2+ax+1>0$.
326) $x^2+x+a>0$. 327) $ax^2+(a+1)x+1>0$. 328) $\dfrac{2a}{x}-\dfrac{1}{x-1}>1$.
329) $|x+a|<1$. 330) $|2x-3a|\geqslant 2$. 331) $|x|\geqslant x-a$.
332) $|x+2|<x+a$. 333) $|x-a|\geqslant x+1$. 334) $|x+a|>x+a$.
335) $|x-a|\leqslant x+3$. 336) $||x|-1|\geqslant x+a$. 337) $|x^2-1|>a$.
338) $|x|+1>|ax|$. 339) $|2x-4|\geqslant x+a$. 340) $|x-2|>|2x-a|$.
341) $|x-1|\geqslant ax$. 342) $|x+3|<ax$. 343) $|x-a|\geqslant x-2a$.
344) $|x+a|\leqslant x-2a$. 345) $|ax|\geqslant 1+x$.
346) $|x^2-1|\leqslant ax$. 347) $|x^2-1|<a$. 348) $|x^2+a|\geqslant x$.
349) $2|x-a|<2ax-x^2-2$. 350) $|2x+a|>\dfrac{3}{a}+|x-a|$.
351) $|1-|x||<a-x$. 352) $x|x-1|\leqslant a$.
353) $|x-a|-2a>|x-3a|$. 354) $|x+2a|+|x-a|<3x$.
355) $|x-3a|-|x+a|<2a$.
356) $a+\dfrac{4a^2}{|x-2a|}\geqslant 0$. 357) $|x+2a|<\dfrac{8a^2}{|x-2a|}$.
358) $x^2+|x|+a>0$. 359) $|x|\cdot|x+1|<ax$.
360) $|x^2-a|-|x^2-2a|<1$. 361) $\sqrt{2+x}>a+1$.
362) $\sqrt{2x-3}<4-a$. 363) $\sqrt{1-x}>3a-2$. 364) $\sqrt{x+2}\geqslant\sqrt{x-a}$.
365) $(1-a)\sqrt{2x+1}<1$. 366) $|x|+1>\sqrt{x+a}$.
367) $|x|+1\leqslant\sqrt{x}+a$. 368) $|x|+1>\sqrt{ax}$.
369) $\sqrt{1-x^2}>ax$. 370) $\sqrt{x-a}\geqslant x+2$. 371) $\sqrt{a-x}>2x+1$.
372) $\sqrt{a^2-x^2}<|x|+1$. 373) $\sqrt{x+a}\geqslant\sqrt{a-x}$.
374) $1-|x|\geqslant\sqrt{x^2-a^2}$. 375) $|ax|<\sqrt{x^2-a^2}$.
376) $\sqrt{ax}\geqslant x+1$. 377) $2\sqrt{x+a}>x+1$. 378) $x+\sqrt{x^2-x}<a$.
379) $\sqrt{a^2-x^2}>x+1$. 380) $a\sqrt{x+1}>1$. 381) $x+\sqrt{4-x^2}<a$.
382) $\sqrt{1-x^2}<x+a$. 383) $\sqrt{x^2+a^2}>x+a$.

384) $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$. 385) $\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}\leqslant\sqrt{2}$.

386) $\sqrt{2ax-x^2}\geqslant a-x$. 387) $\sqrt{\dfrac{3x+a}{x-a}}<a-1$. 388) $2^x>a-1$.

389) $3^x<1-2a$. 390) $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-a\right)(2^x+3)>0$. 391) $9^x-a^2<0$.

392) $\log_2 x<a+2$. 393) $(\log_2 x-1)(\log_2 x+a)>0$.

394) $(\log_3 x+a)\left(\log_3\dfrac{1}{x}-2\right)>0$. 395) $(3^x+a)(3^x-2a)<0$.

396) $a^2-2\cdot 4^{x+1}-a\cdot 2^{x+1}>0$.

397) $4^{2x+1}a^2-65\cdot 4^{x-1}\cdot a+1>0$.

398) $4^{x+1}\cdot a^2-33\cdot 2^x\cdot a+8>0$.

399) $\dfrac{x^2-2x+2^{|a|}}{x^2-a^2}>0$.

400) $\dfrac{3+7\cdot a^x}{1+2a^x-a^{2x}}>a^x+3,\quad a>0,\quad a\neq 1$.

401) $\sqrt{\log_a\dfrac{3-2x}{1-x}}<1,\quad a>0,\quad a\neq 1$.

402) $\dfrac{1}{\log_a x^3+1}-\dfrac{1}{\log_a x-1}>-1,\quad a>0,\quad a\neq 1$.

403) $\dfrac{1}{\log_a x-1}-\dfrac{1}{\log_a x^2-1}<1,\quad a>0,\quad a\neq 1$.

404) $\log_x(a^2+1)<0,\quad x>0,\quad a\neq 1$.

405) $\dfrac{1}{\log_a x}>1,\quad a>0,\quad a\neq 1$.

406) $4a^3x^4+4a^2x^2+32x+a+8\geqslant 0,\quad a\geqslant 0$.

407) $16a^3x^4+8a^2x^2+16x+a+4\geqslant 0,\quad a\geqslant 0$.

408) $a^3x^4+2a^2x^2-8x+a+4\geqslant 0,\quad a\geqslant 0$.

409) $2\log_x a+\log_{ax} +3\log_{a^2x} a>0,\quad a>1$.

410) $\log_{x+a} 2<\log_x 4,\quad 0<a<1/4$.

411) $x^{\log_a x+1}>a^2x,\quad a>0,\quad a\neq 1$.

412) $(ax)^x\geqslant 1,\quad |a|<\infty$.

413) $\dfrac{2}{2a^x-1}>a^{2x}-\dfrac{5}{2}a^x-2,\quad a>0,\quad a\neq 1$.

414) $\dfrac{1}{\log_a x^2+1}+\dfrac{1}{\log_a x-2}>1,\quad a>0,\quad a\neq 1$.

415) $\dfrac{1}{\log_a x}<\dfrac{1}{\log_a x-1}-\dfrac{1}{2},\quad 0<a<1$.

416) $\dfrac{1}{5-\log_a x}+\dfrac{2}{1+\log_a x}<1,\quad 0<a<1$.

417) $\log_a\left(\sqrt{25-x^2}-1\right)\geqslant\log_a(|x|+1),\quad a>0,\quad a\neq 1$.

418) $\log_a x>6\log_x a-1,\quad 0<a<1$.

419) $\dfrac{\log_a(35-x^3)}{\log_a(5-x)} > 3, \quad a > 1.$

420) $\log_a(x-1) + \log_a x > 2, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

421) $\dfrac{3\log_a x + 6}{\log_a^2 x + 2} > 1, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

422) $\log_a(1 - 8a^{-x}) \geqslant 2(1-x), \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство имеет хотя бы одно отрицательное решение.

423) $3 - |x-a| > x^2.$ 424) $x^2 < 4 - |x-a|.$

Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство имеет хотя бы одно положительное решение.

425) $2 > |x+a| + x^2.$ 426) $x^2 + |x-a| < 1.$

Для каждого значения параметра a решить систему неравенств.

427) $\begin{cases} x - a > -1, \\ x + 3 < 3a + 1. \end{cases}$ 428) $\begin{cases} x^2 + a^2 < 1, \\ x^2 - a^2 > 0. \end{cases}$

429) $\begin{cases} x^2 + x \leqslant a, \\ 2x - x^2 \geqslant a - 1. \end{cases}$ 430) $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 + a < 0, \\ 2x + a + 6 > 0. \end{cases}$

431) $\begin{cases} x^2 + 2x + a \leqslant 0, \\ x^2 - 4x - 6a \leqslant 0. \end{cases}$ 432) $\begin{cases} \dfrac{(1-a)x - a}{x - 2(1-a)} \geqslant 0, \\ x - 8 \geqslant ax. \end{cases}$

433) $\begin{cases} 7 - \quad \dfrac{15a}{4} - 30 \quad x \geqslant 10, \\ \dfrac{x-1}{a-1} - 1 < \dfrac{a}{1-a} - x. \end{cases}$

434) $\begin{cases} \dfrac{2x^2 + ax + 4}{x^2 - x + 1} < 4, \\ \dfrac{2x^2 + ax - 6}{x^2 - x + 1} > -6. \end{cases}$

435) $\begin{cases} a(x-2) \geqslant x - 3, \\ 8(a+1)x > 8ax + 9. \end{cases}$

436) $\begin{cases} \dfrac{ax}{a-2} - \dfrac{x-1}{3} < \dfrac{2x+3}{4}, \\ \dfrac{x(a-10)}{2} + a > \dfrac{a(x+2)}{2} - 5x - 6. \end{cases}$

437) $$\left(\frac{1}{81}\right)^{8+\log_a x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_a x}, \quad 0 < x < 1.$$

438) Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно решение неравенства
$$x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2a < 0,$$
удовлетворяющее условию $x + a^2 = 0$.

439) Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно решение неравенства
$$x^2 + \left(1 - \frac{3}{2}a\right)x + \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} < 0,$$
удовлетворяющее условию $x = a^2 - 1/2$.

440) Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно решение неравенства
$$x^2 + (2-3a)x + 2a^2 - 2a < 0,$$
удовлетворяющее условию $ax = 1$.

Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств имеет единственное решение.

441) $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \leqslant a, \\ x^2 - 2x \leqslant 3 - 6a. \end{cases}$ 442) $\begin{cases} x^2 + 2x + a \leqslant 0, \\ x^2 - 4x - 6a \leqslant 0. \end{cases}$

Найти все значения параметра a, при каждом из которых решения системы неравенств образуют на числовой прямой отрезок длины 1.

443) $\begin{cases} x^2 + 6x + 7 + a \leqslant 0, \\ x^2 + 4x + 7 \leqslant 4a. \end{cases}$ 444) $\begin{cases} x^2 - 2x \leqslant a - 1, \\ x^2 - 4x \leqslant 1 - 4a. \end{cases}$

Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств не имеет решений.

445) $\begin{cases} (x-a)(ax-2a-3) \geqslant 0, \\ ax \geqslant 4. \end{cases}$

446) $\begin{cases} ax^2 + (a-3)x + 2/a - 2a \geqslant 0, \\ ax \geqslant a^2 - 2. \end{cases}$

447) $\begin{cases} \dfrac{a^2x + 2a}{ax - 2 + a^2} \geqslant 0, \\ ax + a > 5/4. \end{cases}$ 448) $\begin{cases} \dfrac{(1-a)x - a}{x - 2(1-a)} \geqslant 0, \\ x - 8 \geqslant ax. \end{cases}$

ГЛАВА III

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

1.1. Основные определения. Пусть даны два многочлена $R(x, y)$ и $Q(x, y)$ относительно x и y. Говорят, что дано алгебраическое уравнение

$$R(x, y) = Q(x, y) \tag{1}$$

с двумя неизвестными x и y, если требуется найти все пары чисел $(x_0; y_0)$, для каждой из которых справедливо числовое равенство $R(x_0; y_0) = Q(x_0; y_0)$. Каждая такая пара чисел $(x_0; y_0)$ называется решением уравнения (1). Решить уравнение (1) — это значит найти множество всех его решений.

Если множество всех решений уравнения (1) состоит из k пар действительных чисел $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \ldots, (x_k; y_k)$, то говорят, что уравнение (1) имеет k решений.

Например, уравнение

$$(x^2 + y^2)((x + 1)^2 + y^2) = 0$$

имеет два решения: $(0; 0)$ и $(-1; 0)$. Уравнение

$$x^2 + y^2 = 0$$

имеет единственное решение $(0; 0)$.

В случае если множество всех решений уравнения (1) есть пустое множество, то говорят, что уравнение (1) не имеет решений.

Например, уравнение

$$x^2 + y^2 = -2$$

решений не имеет.

Пусть даны два алгебраических уравнения с двумя неизвестными:

$$R(x, y) = Q(x, y) \quad \text{и} \quad T(x, y) = S(x, y).$$

Эти уравнения называются равносильными, если совпадают множества их решений.

Справедливы следующие утверждения.

1. Уравнения $R(x, y) = Q(x, y)$ и $R(x, y) - Q(x, y) = 0$ равносильны.

2. Уравнения $R(x, y) = Q(x, y)$ и $R(x, y) + P(x, y) = Q(x, y) + P(x, y)$, где $P(x, y)$ — любой многочлен относительно x и y, равносильны.

3. Уравнения $R(x, y) = Q(x, y)$ и $\alpha R(x, y) = \alpha Q(x, y)$ равносильны для любого отличного от нуля числа α.

Из этих утверждений, в частности, вытекает, что каждое алгебраическое уравнение $R(x, y) = Q(x, y)$ с двумя неизвестными x и y можно заменить равносильным ему уравнением

$$P(x, y) = 0, \tag{2}$$

где $P(x, y)$ — многочлен относительно x и y.

Пусть даны многочлены $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ относительно x и y. Говорят, что дана система двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными x и y

$$\begin{aligned} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

если требуется найти все пары чисел $(x_0; y_0)$, каждая из которых является решением каждого из уравнений (3). Пара чисел $(x_0; y_0)$ называется решением системы уравнений (3), если одновременно справедливы два числовых равенства $P(x_0; y_0) = 0$ и $Q(x_0; y_0) = 0$. Решить систему уравнений (3) — это значит найти множество всех ее решений.

Говорят, что дана совокупность m алгебраических уравнений с двумя неизвестными x и y

$$P_1(x, y) = 0, \quad P_2(x, y) = 0, \quad \ldots, \quad P_m(x, y) = 0, \tag{4}$$

где $P_1(x, y), \ldots, P_m(x, y)$ — многочлены относительно x и y, если требуется найти все пары чисел $(x_0; y_0)$, каждая из которых является решением хотя бы одного из уравнений (4). Каждая такая пара чисел $(x_0; y_0)$ называется решением совокупности (4). Решить совокупность уравнений (4) — это значит найти множество всех ее решений.

Говорят, что уравнение (2) равносильно совокупности (4), если совпадают множества всех решений уравнения (2) и совокупности уравнений (4).

Например, уравнение

$$x^2 - 4y^2 = 0$$

равносильно совокупности уравнений

$$x - 2y = 0 \quad \text{и} \quad x + 2y = 0.$$

Говорят, что дана совокупность k систем двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} P_1(x, y) = 0, \\ Q_1(x, y) = 0, \end{aligned} \quad \ldots, \quad \begin{aligned} P_k(x, y) = 0, \\ Q_k(x, y) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $P_i(x, y)$ и $Q_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — многочлены относительно x и y, если требуется найти все пары чисел $(x_0; y_0)$, каждая из которых является решением хотя бы одной из систем уравнений (5). Каждая такая пара чисел $(x_0; y_0)$ называется решением совокупности систем уравнений (5). Решить совокупность систем уравнений (5) — это значит найти множество всех ее решений. Система уравнений (3) равносильна совокупности систем уравнений (5), если совпадают множества их решений.

Например, система уравнений

$$\begin{aligned} &x^2 - y^2 = 0,\\ &x + 2y + 1 = 0 \end{aligned}$$

равносильна совокупности систем

$$\begin{aligned} &x - y = 0,\\ &x + 2y + 1 = 0 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} &x + y = 0,\\ &x + 2y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Пусть даны система алгебраических уравнений с двумя неизвестными (3), а также система

$$\begin{aligned} &R(x, y) = 0,\\ &S(x, y) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $R(x, y)$ и $S(x, y)$ – многочлены относительно x и y. Две системы алгебраических уравнений (3) и (6) называются равносильными, если совпадают множества их решений.

Например, системы уравнений

$$\begin{aligned} &x - y = 0,\\ &x^2 + y^2 = 1 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} &(x^2 + 1)(x - y) = 0,\\ &x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

равносильны.

Утверждения о равносильности систем уравнений.

1. Если изменить порядок уравнений системы (3), то полученная система равносильна системе (3).

2. Если одно из уравнений системы (3) заменить на равносильное уравнение, то полученная система равносильна системе (3).

3. Если первое уравнение системы (3) заменить уравнением, равным сумме первого уравнения, умноженного на некоторое отличное от нуля число α, и второго уравнения, умноженного на некоторое число β, то полученная система уравнений равносильна системе (3); другими словами, для любых β и α ($\alpha \neq 0$) две следующие системы уравнений равносильны:

$$\begin{aligned} &P(x, y) = 0,\\ &Q(x, y) = 0 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} &\alpha P(x, y) + \beta Q(x, y) = 0,\\ &Q(x, y) = 0. \end{aligned}$$

4. Пусть в системе уравнений (3) одно из уравнений записано в виде, где в левой части стоит одно из неизвестных, например x в первой степени, а в правой части — многочлен относительно y. Тогда говорят, что неизвестное x выражено через неизвестное y. Если неизвестное x выражено из первого уравнения системы (3), то, подставив во второе уравнение системы (3) вместо x этот многочлен от y, получим систему, равносильную системе (3), другими словами равносильны следующие системы:

$$\begin{aligned} &x = R(y),\\ &Q(x, y) = 0 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} &x = R(y),\\ &Q(R(y), y) = 0. \end{aligned}$$

5. Если первое уравнение системы (3) равносильно совокупности k алгебраических уравнений

$$P_1(x, y) = 0, \quad \ldots, \quad P_k(x, y) = 0,$$

то система (3) равносильна совокупности k систем уравнений

$$\begin{matrix} P_1(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{matrix} \quad \ldots, \quad \begin{matrix} P_k(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0. \end{matrix}$$

Отметим, что аналогичные определения и утверждения можно привести и для алгебраических уравнений и систем уравнений с более чем двумя неизвестными.

1.2. Система двух уравнений первой степени. Так называется система уравнений

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{aligned}$$

где $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

Основными методами решения таких систем являются метод подстановки и метод линейного преобразования.

Метод подстановки основан на утверждении 4 о равносильности систем уравнений.

Рассмотрим решение системы уравнений этим методом.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3, \\ 3x - 4y &= 10. \end{aligned}$$

Решение. Из первого уравнения системы находим $y = 3 - 2x$. Данная система равносильна системе

$$\begin{aligned} y &= 3 - 2x, \\ 3x - 4y &= 10. \end{aligned} \tag{1}$$

Подставляя $3 - 2x$ вместо y во второе уравнение, получим на основании утверждения 4, что исходная система равносильна системе

$$\begin{aligned} y &= 3 - 2x, \\ 3x - 4(3 - 2x) &= 10, \end{aligned}$$

которую после тождественных преобразований можно переписать так:

$$\begin{aligned} y &= 3 - 2x, \\ x &= 2. \end{aligned} \tag{2}$$

Подставляя 2 вместо x в первое уравнение системы (2), найдем после тождественных преобразований, что она равносильна системе

$$\begin{aligned} y &= -1, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Следовательно, исходная система имеет единственное решение $(2; -1)$.

Ответ. $(2; -1)$.

Метод линейного преобразования системы основан на утверждении 3 о равносильности систем алгебраических уравнений.

Рассмотрим решение системы уравнений этим методом.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} 3x + y &= -2, \\ 2x - 3y &= -5. \end{aligned}$$

Решение. Умножив первое уравнение системы на (-2), а второе на 3, получим систему

$$\begin{aligned} -6x - 2y &= 4, \\ 6x - 9y &= -15, \end{aligned}$$

равносильную исходной.

Складывая первое и второе уравнения этой системы, получим на основании утверждения 3 о равносильности систем уравнений систему

$$\begin{aligned} -11y &= -11, \\ 6x - 9y &= -15, \end{aligned}$$

равносильную исходной.

Умножив первое уравнение этой системы на $(-1/11)$ и разделив второе на 3, получим систему

$$\begin{aligned} y &= 1, \\ 2x - 3y &= -5, \end{aligned} \tag{3}$$

равносильную исходной.

Умножив первое уравнение системы (3) на 3 и складывая затем полученное уравнение со вторым уравнением системы (3), имеем систему

$$\begin{aligned} y &= 1, \\ 2x &= -2, \end{aligned}$$

равносильную исходной. Отсюда следует, что исходная система имеет единственное решение $(-1; 1)$.

Ответ. $(-1; 1)$.

При решении системы двух линейных уравнений первой степени возможны три ситуации:

система имеет единственное решение;

система имеет бесконечно много решений;

система решений не имеет.

Приведем пример системы, имеющей бесконечно много решений, и пример системы, которая решений не имеет.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ 3x + 3y &= 3. \end{aligned}$$

Решение. Поделив второе уравнение системы на 3, получим систему

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ x + y &= 1, \end{aligned}$$

равносильную исходной системе. Эта система состоит из двух одинаковых уравнений:

$$x + y = 1.$$

Полагая $x = t$, где t – любое действительное число, находим, что $y = 1 - t$. Следовательно, решениями данной системы являются все пары $(t; 1 - t)$, $t \in R$.

Ответ. $(t; 1 - t)$, $t \in R$.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x - 2y &= 5, \\ 2x - 4y &= 8. \end{aligned}$$

Решение. Разделив второе уравнение на 2, получим систему

$$\begin{aligned} x - 2y &= 5, \\ x - 2y &= 4, \end{aligned}$$

равносильную исходной. Эта система противоречива, так как не существует чисел x_0 и y_0 таких, чтобы одна и та же их линейная комбинация $x_0 - 2y_0$ равнялась одновременно и 5, и 4. Следовательно, исходная система решений не имеет.

Ответ. Решений нет.

1.3. Метод подстановки. Метод подстановки в основном применяется в тех ситуациях, когда в одно из уравнений системы одна из неизвестных входит только в первой степени. Тогда, применяя утверждение 4, находим решение системы.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &2x^2 + y^2 - xy + 2x + 3y = 7, \\ &x + y = 2. \end{aligned}$$

Решение. Данная система равносильна системе

$$\begin{aligned} &2x^2 + (2 - x)^2 - x(2 - x) + 2x + 3(2 - x) = 7, \\ &y = 2 - x, \end{aligned}$$

или, после тождественных преобразований, системе

$$\begin{aligned} &4x^2 - 7x + 3 = 0, \\ &y = 2 - x. \end{aligned} \tag{4}$$

Первое уравнение системы (4) имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 3/4$. Поэтому система (4), а значит, и исходная система имеет два решения $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ и $x_2 = 3/4$, $y_2 = 5/4$.

Ответ. $(1; 1)$, $(3/4; 5/4)$.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned}&x - y = 6,\\ &x^3 - y^3 = 126.\end{aligned}$$

Решение. Из первого уравнения получаем $y = x - 6$. Подставляя $x - 6$ вместо y во второе уравнение, получим уравнение

$$x^3 - (x-6)^3 = 126,$$

которое можно переписать в виде

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Последнее уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$, следовательно, система имеет два решения: $x_1 = 1$, $y_1 = -5$; $x_2 = 5$, $y_2 = -1$.

Ответ. $(1; -5)$, $(5; -1)$.

Иногда при решении системы алгебраических уравнений приходится делать подстановку не только вместо какого-то одного неизвестного, но и вместо целого выражения, зависящего от нескольких переменных. Равносильность системы при этом сохраняется.

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned}&y - x = 5,\\ &zx = (z-4)y + 30,\\ &2zx = (2z-4)y.\end{aligned}$$

Решение. Данная система равносильна системе

$$\begin{aligned}&y - x = 5,\\ &z(y-x) - 4y + 30 = 0,\\ &2z(y-x) - 4y = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Заменяя во втором и третьем уравнениях $y - x$ на 5, получим систему

$$\begin{aligned}&y - x = 5,\\ &5z - 4y + 30 = 0,\\ &10z - 4y = 0,\end{aligned} \tag{6}$$

равносильную исходной. Из третьего уравнения системы (6) следует, что

$$x = \frac{2y}{5}. \tag{7}$$

Подставляя $2y/5$ вместо z во второе уравнение системы (6), получим уравнение $2y - 4y + 30 = 0$, которое имеет единственное решение $y = 15$. Подставляя 15 вместо y в уравнение (7) и в первое уравнение системы (6), находим, что $z = 6$, $x = 10$.

Ответ. $(10; 15; 6)$.

1.4. Линейные преобразования систем. В следующих примерах метод линейного преобразования используется для того, чтобы получить систему, равносильную исходной и включающую уравнение, зависящее только от одной переменной, или уравнение, в которое одна из переменных входит в первой степени, что в дальнейшем позволит сделать подстановку.

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &2x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1,\\ &3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y = 5. \end{aligned}$$

Решение. Умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым; тогда получим систему

$$\begin{aligned} &7x^2 - 14x = 7,\\ &3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y = 5, \end{aligned}$$

или систему

$$\begin{aligned} &x^2 - 2x - 1 = 0,\\ &3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y = 5, \end{aligned} \qquad (8)$$

равносильную исходной.

Умножим первое уравнение системы (8) на 3 и вычтем из второго. Получим в результате систему уравнений

$$\begin{aligned} &x^2 - 2x - 1 = 0,\\ &-2y^2 - 4y + 3 = 5, \end{aligned} \qquad (9)$$

равносильную исходной.

Первое уравнение системы (9) имеет корни $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ и $x_2 = 1 - \sqrt{2}$. Второе уравнение имеет единственный корень $y = -1$. Следовательно, исходная система уравнений имеет два решения: $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $y_1 = -1$; $x_2 = 1 - \sqrt{2}$, $y_2 = -1$.

Ответ. $(1 + \sqrt{2}; -1)$; $(1 - \sqrt{2}; -1)$.

Иногда надо применять и метод линейного преобразования и метод подстановки.

Пример 9. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3,\\ &4{,}5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7. \end{aligned}$$

Решение. Заменяя второе уравнение системы суммой первого уравнения, умноженного на 3, и второго, умноженного на (-2), получим, что исходная система равносильна системе

$$\begin{aligned} &3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3,\\ &y = 5 - 3x, \end{aligned}$$

или системе

$$\begin{aligned} &3x^2 + 2(5 - 3x)^2 - 3x + 5(5 - 3x) = 3,\\ &y = 5 - 3x. \end{aligned} \qquad (10)$$

Первое уравнение системы (10) имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 12/7$. Поэтому система (10) имеет два решения: $x_1 = 2$, $y_1 = -1$ и $x_2 = 12/7$, $y_2 = -1/7$.

Ответ. $(2;-1)$; $\left(\frac{12}{7}; -\frac{1}{7}\right)$.

Пример 10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 9x - 4y + 6 = 0, \\ 5x^2 + 2xy - 12x - 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Заменяя первое уравнение системы разностью первого уравнения системы и второго уравнения, получим, что исходная система уравнений равносильна системе

$$\begin{cases} -2x^2 + 3x + 2 = 0, \\ 5x^2 + 2xy - 12x - 4y + 4 = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Первое уравнение этой системы имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = -1/2$. Подставляя 2 вместо x во второе уравнение системы (11), получаем, что оно удовлетворяется при любом значении y. Следовательно, система (11), а значит, и исходная система имеют решение вида $(2; y)$, где y — любое действительное число. Подставляя $(-1/2)$ вместо x во второе уравнение системы (11), получаем, что $y = 9/4$. Следовательно, исходная система имеет еще одно решение $(-1/2; 9/4)$.

Второе решение. Данную систему уравнений можно переписать в виде

$$\begin{cases} (x-2)(3x + 2y - 3) = 0, \\ (x-2)(5x + 2y - 2) = 0, \end{cases} \qquad (12)$$

откуда следует, что ей удовлетворяют все пары чисел $(2, y)$, где y — любое число. Для $x \neq 2$ система (12) равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0, \\ 5x + 2y - 2 = 0, \end{cases} \qquad (13)$$

имеющей единственное решение $x = -1/2$, $y = 9/2$.

Ответ. $(-1/2; 9/4)$, $(2; y)$, где y — любое действительное число.

1.5. Метод разложения на множители. Часто для понижения степени уравнений, входящих в систему, используется прием разложения одного из уравнений на множители и замена системы уравнений равносильной ей совокупностью систем уравнений.

Пример 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x - y), \\ x^3 + y^3 = 7(x + y). \end{cases}$$

Решение. Из тождества

$$x^3 - y^3 - 19(x - y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 19)$$

следует, что заданная система уравнений равносильна совокупности уравнений

$$\begin{array}{ll} x-y=0, & x^2+xy+y^2-19=0, \\ x^3+y^3=7(x+y), & x^3+y^3=7(x+y). \end{array} \qquad (14)$$

Так как

$$x^3+y^3-7(x+y)=(x+y)(x^2-xy+y^2-7),$$

то совокупность (14) равносильна в свою очередь совокупности трех систем

$$\begin{array}{ll} x-y=0, & x^2+xy+y^2-19=0, \\ x^3+y^3=7(x+y), & x+y=0, \end{array}$$
$$\begin{array}{l} x^2+xy+y^2-19=0, \\ x^2-xy+y^2-7=0. \end{array} \qquad (15)$$

Решая первые две системы из (15) методом подстановки, находим, соответственно, их решения: $(0;0)$, $(\sqrt{7};\sqrt{7})$, $(-\sqrt{7};-\sqrt{7})$, $(\sqrt{19};-\sqrt{19})$, $(-\sqrt{19};\sqrt{19})$.

Для решения третьей из систем (15) умножим первое из входящих в нее уравнений на 3 и вычтем из результата второе уравнение. Из тождества

$$\begin{aligned} 3(x^2+xy+y^2-19)-(x^2-xy+y^2-7)= \\ =2(x^2+2xy+y^2-25)=2((x+y)^2-25)= \\ =2(x+y-5)(x+y+5) \end{aligned}$$

следует, что третья система (15) равносильна совокупности систем

$$\begin{array}{ll} x+y-5=0, & x+y+5=0, \\ x^2-xy+y^2-7=0, & x^2-xy+y^2-7=0. \end{array}$$

Решая каждую из них методом подстановки, находим их решения соответственно: $(2;3)$, $(3;2)$, $(-2;-3)$, $(-3;-2)$.

Итак, исходная система имеет девять решений.

Ответ. $(0;0)$, $(\sqrt{7};\sqrt{7})$, $(-\sqrt{7};-\sqrt{7})$, $(\sqrt{19};-\sqrt{19})$, $(-\sqrt{19};\sqrt{19})$, $(2;3)$, $(3,2)$, $(-2;-3)$, $(-3;-2)$.

Пример 12. Решить систему уравнений

$$\begin{array}{l} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0. \end{array}$$

Решение. Преобразуем, выделяя полный квадрат по x, многочлен, стоящий в левой части второго уравнения данной системы с целью разложения его на множители:

$$
\begin{aligned}
&3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=\\
&\quad=3\left(x^2+2\cdot\frac{5y-17}{6}x+\left(\frac{5y-17}{6}\right)^2\right)-2y^2-6y+20-\\
&\quad-3\left(\frac{5y-17}{6}\right)^2=3\left(x+\frac{5y-17}{6}\right)^2-\frac{1}{2}(49y^2-98y+49)=\\
&\qquad=\frac{1}{12}((6x+5y-17)^2-(7y-7)^2)=\\
&\quad=\frac{1}{12}(6x+12y-24)(6x-2y-10)=(x+2y-4)(3x-y-5).
\end{aligned}
$$

Теперь понятно, что данная система уравнений равносильна следующей совокупности систем уравнений:

$$\begin{cases}10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0,\\ x+2y-4=0\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0,\\ 3x-y-5=0.\end{cases}$$

Каждая из этих систем имеет единственное решение $x_0=2, y_0=1$. Значит, исходная система имеет единственное решение $x_0=2$, $y_0=1$.

Ответ. $(2;1)$.

1.6. Использование однородности одного из уравнений. Рассмотрим применение метода линейного преобразования и метода подстановки на примере решения системы двух уравнений с двумя неизвестными, когда одно из уравнений этой системы есть однородное уравнение второй степени, т.е. уравнение

$$ax^2+bxy+cy^2=0.$$

Итак, рассмотрим систему

$$\begin{cases}ax^2+bxy+cy^2=0,\\ P(x,y)=0,\end{cases}\tag{16}$$

где $P(x,y)$ – многочлен относительно x и y.

Если $a=0$, то в силу равенства $bxy+cy^2=y(bx+cy)$, система (16) равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases}y=0,\\ P(x,y)=0,\end{cases}\qquad\begin{cases}bx+cy=0,\\ P(x,y)=0,\end{cases}$$

решаемых методом подстановки. Поэтому далее будем считать, что $a\neq 0$.

Первое уравнение данной системы имеет решение $x=0$, $y=0$ и при $a\neq 0$ не имеет других решений, у которых $y=0$.

Будем дальше искать решения, у которых $y\neq 0$.

Если $b^2 - 4ac < 0$, т.е. если квадратный трехчлен $at^2 + bt + c$ не имеет корней, то первое уравнение системы (16) в силу равенства (для $y \neq 0$)

$$ax^2 + bxy + cy^2 = y^2\left(a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b\left(\frac{x}{y}\right) + c\right)$$

имеет единственное решение $x = 0$, $y = 0$.

Если эта пара чисел $(0; 0)$ удовлетворяет второму уравнению системы (16), т.е. выполнено равенство $P(0, 0) = 0$, то система имеет единственное решение $(0; 0)$. В случае же $P(0, 0) \neq 0$ исходная система не имеет решений.

Если $b^2 - 4ac \geqslant 0$ и уравнение $at^2 + bt + c = 0$ имеет корни t_1 и t_2 (возможно, $t_2 = t_1$), то из равенства

$$at^2 + bt + c = a(t - t_1)(t - t_2)$$

следует (для $y \neq 0$) тождество

$$ax^2 + bxy + cy^2 = y^2\left(a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b\left(\frac{x}{y}\right) + c\right) =$$
$$= ay^2\left(\frac{x}{y} - t_1\right)\left(\frac{x}{y} - t_2\right) = a(x - t_1y)(x - t_2y),$$

и, значит, исходная система равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} x - t_1y = 0, \\ P(x, y) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - t_2y = 0, \\ P(x, y) = 0, \end{cases}$$

каждую из которых можно решить методом подстановки.

П р и м е р 13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 + 3y - x = 4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Поскольку $x = 0$ и $y = 0$ не являются решением данной системы и квадратное уравнение $2t^2 - t - 1 = 0$ имеет корни $t_1 = 1$ и $t_2 = -1/2$, то исходная система равносильна совокупности систем уравнений

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 + y^2 + 3y - x = 4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y = 0, \\ x^2 + y^2 + 3y - x = 4. \end{cases}$$

Решая первую систему методом подстановки, получаем, что она равносильна системе

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 + x - 2 = 0, \end{cases}$$

множество решений которой, а значит, и исходной состоит из двух пар чисел: $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $x_2 = -2$, $y_2 = -2$. Решая вторую систему методом подстановки, получаем, что она равносильна системе

$$\begin{cases} y = -2x, \\ 5x^2 - 7x - 1 = 0, \end{cases}$$

множество решений которой есть также две пары чисел: $x_3 = \dfrac{7+\sqrt{69}}{10}$, $y_3 = \dfrac{-7-\sqrt{69}}{5}$ и $x_4 = \dfrac{7-\sqrt{69}}{10}$, $y_4 = \dfrac{-7+\sqrt{69}}{5}$.

Итак, исходная система имеет четыре решения: $(1;1)$, $(-2;-2)$, $\dfrac{7+\sqrt{69}}{10};\dfrac{-7-\sqrt{69}}{5}$, $\dfrac{7-\sqrt{69}}{10};\dfrac{-7+\sqrt{69}}{5}$.

О т в е т. $(1;1), (-2;-2)$, $\dfrac{7+\sqrt{69}}{10};\dfrac{-7-\sqrt{69}}{5}$, $\dfrac{7-\sqrt{69}}{10};\dfrac{-7+\sqrt{69}}{5}$.

Отметим, что подобные же рассуждения применимы и в случае, когда система включает однородное уравнение степени, большей чем два.

Иногда для решения системы сначала применяют способ линейного преобразования системы, чтобы сделать одно из уравнений однородным.

П р и м е р 14. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &x^2 - 4xy + y^2 = 3,\\ &y^2 - 3xy = 2. \end{aligned}$$

Р е ш е н и е. Умножив первое уравнение на 2, второе на 3 и из первого уравнения вычтя второе уравнение, будем иметь систему

$$\begin{aligned} &2x^2 + xy - y^2 = 0,\\ &y^2 - 3xy = 2, \end{aligned}$$

равносильную исходной, в которой одно из уравнений однородное. Поскольку корнями квадратного уравнения

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

являются $t_1 = -1$ и $t_2 = 1/2$, то данная система равносильна совокупности систем

$$\begin{aligned} &x = -y,\\ &y^2 - 3xy = 2 \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} &2x = y,\\ &y^2 - 3xy = 2. \end{aligned}$$

Решениями первой системы этой совокупности являются $-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}$, а вторая система решений не имеет.

Итак, множество решений исходной системы есть две пары чисел $-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}$.

О т в е т. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

1.7. Симметрические системы уравнений. Многочлен $P(x,y)$ называется *симметрическим*, если он не изменяется от перестановки букв x и y, т.е. если выполняется равенство $P(x,y) = P(y,x)$ для любых x и y.

Например, симметрическими будут многочлены

$$x^3 + y^3, \quad x^2y + xy^2, \quad (x+1)(y+1).$$

Систему уравнений

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 0,\\ Q(x,y) &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

будем называть симметрической, если оба многочлена $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются симметрическими многочленами.

Для решения симметрических систем уравнений часто используют прием, основанный на введении новых переменных с помощью равенств

$$\begin{aligned} u &= x+y,\\ v &= x\cdot y. \end{aligned} \tag{18}$$

Каждый симметрический многочлен $P(x,y)$ может быть записан как многочлен от новых переменных u и v. Например:

$$x^2y+xy^2 = xy(x+y) = u\cdot v,$$
$$x^3+y^3 = (x+y)^3-3xy(x+y) = u^3-3uv,$$
$$(x+1)(y+1) = xy+x+y+1 = v+u+1.$$

Уравнения, переписанные в переменных u и v, как правило, имеют меньшую степень, и новая система уравнений относительно u и v решается проще, чем исходная. Решив новую систему, можно затем найти решения $(x;y)$ исходной системы с помощью равенств (18).

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 15. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} xy+x+y &= 1,\\ x^2+y^2 &= 6. \end{aligned}$$

Решение. Вводя неизвестные u и v с помощью равенств (18), находим

$$xy+x+y = u+v,$$
$$x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy = u^2-2v.$$

Так что исходная система уравнений может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} u+v &= 1,\\ u^2-2v &= 6. \end{aligned} \tag{19}$$

Заменяя второе уравнение получившейся системы суммой его и удвоенного первого уравнения, приходим к системе

$$\begin{aligned} u+v &= 1,\\ u^2+2u-8 &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

равносильной системе (19). Система уравнений (20) имеет два решения: $(2;-1)$ и $(-4;5)$. Таким образом, исходная система уравнений равносильна совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{aligned} x+y &= 2, \qquad & x+y &= -4,\\ xy &= -1, \qquad & xy &= 5. \end{aligned} \tag{21}$$

Первая из систем (21) имеет два решения: $(1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2})$ и $(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$, а вторая система решений не имеет.

О т в е т. $(1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$.

1.8. Рациональные системы уравнений. Так называются системы уравнений вида

$$\begin{cases} P_1(x,y) = Q_1(x,y), \\ P_2(x,y) = Q_2(x,y), \end{cases}$$

где $P_i(x,y)$ и $Q_i(x,y)$, $i = 1, 2$, — рациональные дроби, т.е. частные многочленов от переменных x и y.

Решение рациональной системы уравнений, как правило, сводится к решению некоторой алгебраической системы уравнений, получающейся из исходной домножением на подходящий многочлен. После того как найдены все корни алгебраической системы уравнений, следует отбросить те из них, которые обращают в нуль знаменатель хотя бы одной из рациональных функций, входящих в систему. Оставшиеся решения алгебраической системы составят множество решений исходной системы рациональных уравнений.

П р и м е р 16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Умножив первое уравнение заданной системы на $2xy$, получим алгебраическую систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 5xy = 0, \\ x^2 - y^2 = 3, \end{cases} \tag{22}$$

не имеющую решением пару чисел $(0; 0)$. Квадратное уравнение $2t^2 - 5t + 2 = 0$ имеет корни $t_1 = 2$ и $t_2 = 1/2$. Поэтому для $y \neq 0$ справедливо тождество

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = y^2\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) + 2\right) =$$
$$= 2y^2\left(\frac{x}{y} - 2\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{1}{2}\right) = (x-2y)(2x-y),$$

и, следовательно, система уравнений (22) равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ x^2 - y^2 = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 0, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Методом подстановки легко убедиться, что первая из этих систем имеет решения $(2; 1)$, $(-2; -1)$, а вторая система решений не имеет. Ни одна из двух найденных пар чисел не обращает в нуль знаменатель xy рациональной функции $\dfrac{x^2+y^2}{xy}$, входящей в систему. Следовательно, исходная система уравнений имеет два решения: $(2;1)$ и $(-2;-1)$.

Ответ. $(2;1), (-2;-1)$.

Пример 17. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x+y&=1/z,\\ y+z&=1/x,\\ z+x&=1/y. \end{aligned}$$

Решение. Умножая уравнения заданной системы, соответственно на z, x и y, получим алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned} xz+yz&=1,\\ xy+xz&=1,\\ xy+yz&=1. \end{aligned} \tag{23}$$

Вычитая первое уравнение системы (23) из второго и третьего уравнений, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} z(y+x)&=1,\\ y(x-z)&=0,\\ x(y-z)&=0, \end{aligned} \tag{24}$$

равносильную системе (23).

Поскольку все решения исходной системы удовлетворяют условию $xyz\neq 0$, то из (24) следует, что для любого решения исходной системы должны выполняться равенства

$$x=y=z.$$

Подставляя x вместо y и z в первое уравнение системы (24), приходим к квадратному уравнению

$$2x^2=1,$$

имеющему корни $x_1=1/\sqrt{2}$, $x_2=-1/\sqrt{2}$. Отсюда следует, что все решения системы (23), удовлетворяющие условию $xyz\neq 0$, имеют вид $\left(1/\sqrt{2};1/\sqrt{2};1/\sqrt{2}\right)$, $\left(-1/\sqrt{2};-1/\sqrt{2};-1/\sqrt{2}\right)$. Ими и исчерпывается множество решений заданной системы уравнений.

Ответ. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Иногда удачная замена некоторого выражения новой неизвестной позволяет свести задачу к решению алгебраической системы уравнений.

Пример 18. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{2}{2x-y}+\frac{3}{x-2y}&=\frac{1}{2},\\ \frac{2}{2x-y}-\frac{1}{x-2y}&=\frac{1}{18}. \end{aligned}$$

Р е ш е н и е. Обозначим $\dfrac{1}{2x-y}$ через u и $\dfrac{1}{x-2y}$ через v. В новых обозначениях данная система имеет вид

$$2u+3v=\frac{1}{2},$$
$$2u-v=\frac{1}{18}.$$

Решая эту линейную систему уравнений, находим $u=1/12$, $v=1/9$. Этим доказано, что все решения исходной системы удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}&2x-y=12,\\&x-2y=9.\end{aligned}$$

Этим уравнениям удовлетворяет единственная пара чисел $x_1=5$ и $y_1=$ $=-2$. Подставляя найденные числа в исходную систему, убеждаемся, что они составляют ее решение.

О т в е т. $(5;-2)$.

Иногда алгебраическую систему уравнений можно свести к рациональной системе подстановкой.

П р и м е р 19. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned}&x^2-4xy+y^2=3,\\&y^2-3xy=2.\end{aligned}\tag{25}$$

Р е ш е н и е. Легко видеть, что никакая пара чисел $x=a$ и $y=0$ не удовлетворяет второму уравнению исходной системы. Поэтому любое решение этой системы $(x;y)$ таково, что у него $y\neq 0$. Будем решать исходную систему при условии, что $y\neq 0$. Но тогда из второго уравнения системы имеем

$$x=\frac{y^2-2}{3y}.\tag{26}$$

Подставляя $\dfrac{y^2-2}{3y}$ вместо x в первое уравнение системы, получим уравнение

$$\frac{(y^2-2)^2}{9y^2}-4y\quad\frac{y^2-2}{3y}\quad+y^2-3=0.$$

На множестве $y\neq 0$ это уравнение равносильно уравнению

$$-2y^4-7y^2+4=0.\tag{27}$$

Поскольку квадратное уравнение $2t^2+7t-4=0$ имеет корни $t_1=-4$ и $t_2=1/2$, то уравнение (27) равносильно совокупности уравнений

$$y^2=-4\quad\text{и}\quad y^2=1/2.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, а второе имеет два решения: $y_1=1/\sqrt{2}$ и $y_2=-1/\sqrt{2}$. Оба этих решения удовлетворяют условию $y \neq 0$. Подставляя эти значения y в (26), находим, что $x_1 = -1/\sqrt{2}$ и $x_2 = 1/\sqrt{2}$. Следовательно, исходная система имеет два решения: $1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}$ и $-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}$.

О т в е т. $\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1.9. Геометрическая интерпретация алгебраического уравнения. а) Если на плоскости введена прямоугольная система координат XOY, то уравнение $P(x, y) = 0$, где $P(x, y)$ — многочлен, определяет некоторое множество точек координатной плоскости, координаты x и y каждой из которых являются решением этого уравнения. Так, например, на координатной плоскости каждое уравнение первой степени с двумя неизвестными

$$ax + by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

есть уравнение некоторой прямой и обратно, каждая прямая на плоскости задается некоторым уравнением первой степени с двумя неизвестными. В частности, уравнение $x - d = 0$ является уравнением прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $A(d; 0)$; уравнение $y - d = 0$ есть уравнение прямой параллельной оси абсцисс, проходящей через точку $B(0; d)$; уравнение

$$y = kx + d, \quad k \neq 0,$$

является уравнением прямой, проходящей через точку $B(0; b)$ и образующей с положительным направлением оси OX угол, тангенс которого равен k.

Прямая $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ разбивает плоскость на две полуплоскости; для точек $(x_1; y_1)$ одной полуплоскости выполняется неравенство $ax_1 + by_1 + c > 0$, а для точек $(x_2; y_2)$ другой полуплоскости выполняется неравенство $ax_2 + by_2 + c < 0$.

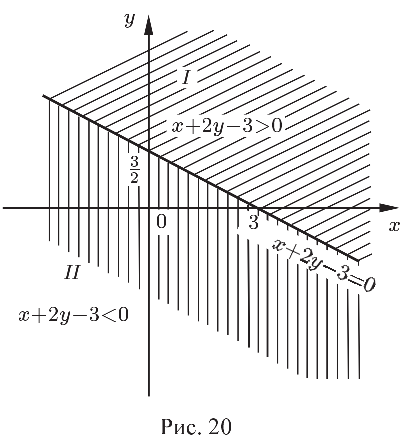


Рис. 20

Так, например, прямая $x + 2y - 3 = 0$ разбивает плоскость на две полуплоскости I и II (рис. 20). Для точек полуплоскости I выполняется соотношение $x + 2y - 3 > 0$, а для точек полуплоскости II выполняется соотношение $x + 2y - 3 < 0$.

П р и м е р 20. Изобразить на плоскости XOY множество точек, координаты которых одновременно удовлетворяют соотношениям

$$x + y \geqslant 1 \quad \text{и} \quad x - y \leqslant 2.$$

Р е ш е н и е. Множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению $x + y = 1$, есть прямая I (рис. 21); множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению $x - y = 2$, есть прямая II (рис. 22).

Прямая $x + y = 1$ разбивает плоскость на две полуплоскости α и β. Для точек полуплоскости α выполнено соотношение $x+y > 1$. Значит, множество

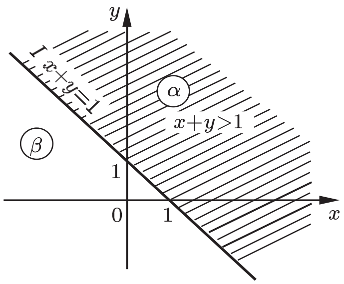


Рис. 21

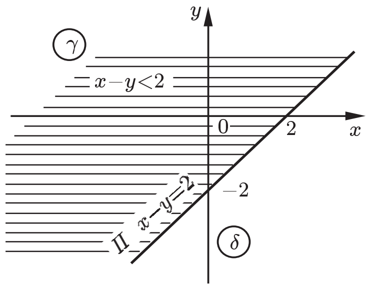


Рис. 22

точек плоскости XOY, для которых $x + y \geqslant 1$, есть множество, заштрихованное на рис. 21 (включая и точки, лежащие на прямой $x + y = 1$). Прямая $x - y = 2$ разбивает плоскость XOY на две полуплоскости γ и δ. Для точек полуплоскости γ выполнено соотношение $x - y < 2$. Значит, множество точек плоскости XOY, для которых $x - y \geqslant 2$, есть множество, заштрихованное на рис. 22 (включая и точки, лежащие на прямой $x - y = 2$). Пересечение двух этих заштрихованных множеств на рис. 21 и на рис. 22 и есть множество точек плоскости, координаты которых одновременно удовлетворяют условиям $x + y \geqslant 1$ и $x - y \leqslant 2$ (рис. 23), т.е. это есть угол ABC вместе с его границей.

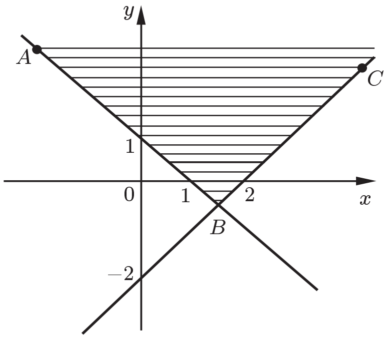


Рис. 23

П р и м е р 21. Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости условием

$$|x| + |y - 1| \leqslant 4.$$

Р е ш е н и е. Каждая точка плоскости лежит в какой-то из четырех областей, задаваемых неравенствами:

$$\begin{array}{llll} x \geqslant 0, & x \geqslant 0, & x \leqslant 0, & x \leqslant 0, \\ y - 1 \geqslant 0, & y - 1 \leqslant 0, & y - 1 \geqslant 0, & y - 1 \leqslant 0. \end{array}$$

Упростим теперь в каждой из этих областей неравенство, данное в условии задачи. В первой области оно примет вид

$$x + (y - 1) \leqslant 4, \quad \text{или} \quad x + y \leqslant 5;$$

во второй

$$x + (1 - y) \leqslant 4, \quad \text{или} \quad y - x \geqslant -3;$$

в третьей
$$-x + (y-1) \leqslant 4, \quad \text{или} \quad y - x \leqslant 5;$$
и в четвертой
$$-x + (1-y) \leqslant 4, \quad \text{или} \quad x + y \geqslant -3.$$

Следовательно, данная в условии задачи фигура является объединением четырех множеств, задаваемых неравенствами

$$\begin{array}{llll} x \geqslant 0, & x \geqslant 0, & x \leqslant 0, & x \leqslant 0, \\ y \geqslant 1, & y \leqslant 1, & y \geqslant 1, & y \leqslant 1, \\ x + y \leqslant 5; & y - x \geqslant -3; & y - x \leqslant 5; & x + y \geqslant -3. \end{array}$$

Изобразим теперь каждое из множеств на плоскости XOY (рис. 24). Первое множество есть прямоугольный треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 1$ и $x + y = 5$; катеты этого треугольника лежат на прямых $x = 0$ и $y = 1$ и имеют длины, равные 4. Следовательно, его площадь равна
$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$$

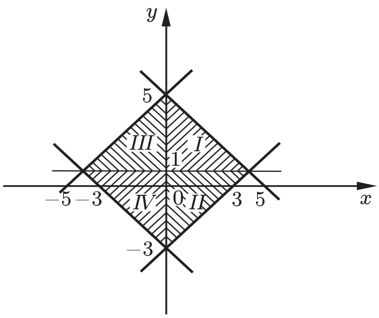


Рис. 24

Остальные три множества также являются прямоугольными треугольниками, полученными симметричным отображением первого треугольника: а) второй — относительно прямой $y = 1$; б) третий — относительно прямой $x = 0$; в) четвертый — относительно точки $(0; 1)$ — точки пересечения прямых $x = 0$ и $y = 1$. Данная в условии задачи фигура складывается из этих четырех треугольников и поэтому ее площадь равна $4 \cdot 8 = 32$.

О т в е т. 32.

П р и м е р 22. Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств
$$\begin{aligned} y &\leqslant 6 - 2|x|, \\ y &\geqslant 2 + 2|x|. \end{aligned}$$

Р е ш е н и е. Для того чтобы нарисовать заданную фигуру, разобьем координатную плоскость XOY на две полуплоскости: первую, в которой $x \geqslant 0$, и вторую, в которой $x < 0$. Часть фигуры, лежащая в первой полуплоскости, задается неравенствами
$$\begin{aligned} y &\leqslant 6 - 2x, \\ y &\geqslant 2 + 2x. \end{aligned} \tag{28}$$

Для точек второй полуплоскости $|x| = -x$, и поэтому часть фигуры, лежащая в этой полуплоскости, задается неравенствами

$$\begin{aligned} y &\leqslant 6 + 2x, \\ y &\geqslant 2 - 2x. \end{aligned} \tag{29}$$

Итак, заданная фигура состоит из двух частей: первая состоит из тех точек плоскости $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют условиям

$$x \geqslant 0, \quad 2 + 2x \leqslant y \leqslant 6 - 2x;$$

вторая состоит из тех точек плоскости $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют условиям

$$x < 0, \quad 2 - 2x \leqslant y \leqslant 6 + 2x.$$

Рассмотрим первую часть. Прямые

$$y = 6 - 2x \quad \text{и} \quad y = 2 + 2x$$

пересекаются в точке $B(1; 4)$. Эти прямые пересекают ось OY соответственно в точках $A(0; 6)$ и $C(0; 2)$. Теперь легко видеть, что первая часть фигуры есть треугольник ABC (рис. 25). Аналогично показывается, что вторая часть фигуры есть треугольник ADC, где точка $D(-1; 4)$ есть точка пересечения прямых $y = 6 + 2x$ и $y = 2 - 2x$. Таким образом, заданная в условии задачи фигура есть четырехугольник $ABCD$. Стороны AB и DC этого четырехугольника лежат на прямых $y = 6 - 2x$ и $y = 2 - 2x$, а стороны AD и BC — на прямых $y = 6 + 2x$ и $y = 2 + 2x$. Поскольку прямые $y = 6 - 2x$ и $y = 2 - 2x$ и прямые $y = 6 + 2x$ и $y = 2 + 2x$ параллельны, то четырехугольник $ABCD$ есть параллелограмм. Очевидно, что диагонали его AC и BD перпендикулярны. Следовательно, $ABCD$ — ромб и площадь его равна $\frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$.

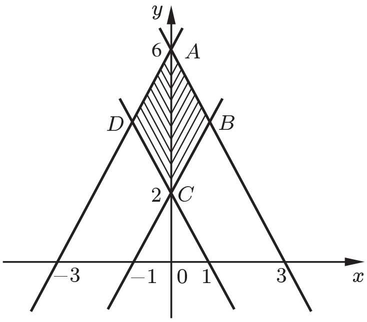


Рис. 25

Ответ. 4.

Пример 23. Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости условием

$$2|x| + |y + 2x + 1| \leqslant 5.$$

Решение. Каждая точка координатной плоскости лежит в какой- нибудь из четырех областей, задаваемых системами неравенств:

$$\text{I.} \quad \begin{aligned} &x \geqslant 0, \\ &y + 2x + 1 \geqslant 0; \end{aligned} \qquad \text{II.} \quad \begin{aligned} &x \geqslant 0, \\ &y + 2x + 1 \leqslant 0; \end{aligned}$$

$$\text{III.} \quad \begin{aligned} &x \leqslant 0, \\ &y + 2x + 1 \geqslant 0; \end{aligned} \qquad \text{IV.} \quad \begin{aligned} &x \leqslant 0, \\ &y + 2x + 1 \leqslant 0. \end{aligned}$$

При этом граничные точки областей мы включили в каждую из этих областей.

Упростим теперь в каждой из этих областей неравенство, данное в условии задачи. В первой области оно примет вид

$$2x + y + 2x \leqslant 5 \quad \text{или} \quad 4x + y - 4 \leqslant 0; \tag{30}$$

во второй

$$2x - y - 2x - 1 \leqslant 5 \quad \text{или} \quad y \geqslant -6; \tag{31}$$

в третьей

$$-2x + y + 2x + 1 \leqslant 5 \quad \text{или} \quad y \leqslant 4; \tag{32}$$

и в четвертой

$$-2x - y - 2x - 1 \leqslant 5 \quad \text{или} \quad 4x + y + 6 \geqslant 0. \tag{33}$$

Выясним, какое множество точек координатной плоскости удовлетворяет условию (30) в области I.

При решении будем пользоваться утверждением: всякая прямая $ax + by + c = 0$ делит плоскость на две полуплоскости такие, что результат подстановки в выражение $ax + by + c$ координат любой точки, лежащей по одну сторону от этой прямой, положителен, а результат подстановки координат любой точки, лежащей по другую сторону от этой прямой, отрицателен.

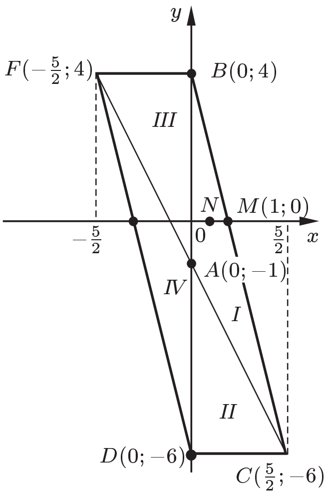


Рис. 26

Рассмотрим на координатной плоскости XOY три прямые:

1) $y+2x+1 = 0$; 2) $x = 0$; 3) $4x+y-4 = 0$. Первая и вторая из них пересекаются в точке $A(0; -1)$, вторая и третья — в точке $B(0; 4)$, первая и третья — в точке $C(5/2; -6)$ (рис. 26). Так как прямая 3) пересекает ось OX в точке $M(1; 0)$, то точка $N(1/2; 0)$ лежит внутри треугольника ABC. Результат подстановки координат точки N в выражение $y+2x+1$ положителен, в выражение x — положителен, в выражение $4x + y - 4$ — отрицателен. Поэтому любая точка, лежащая внутри треугольника ABC и на его сторонах, удовлетворяет условию (30) и лежит в области I. Следовательно, множество точек, удовлетворяющих условию (30) в области I, есть треугольник ABC.

Аналогично показывается, что множество точек, удовлетворяющих условию (31) в области II, есть треугольник ACD, где $D(0; -6)$; множество точек, удовлетворяющих условию (33) в области III, есть треугольник ADF, где $F(-5/2; 4)$ — точка пересечения прямых $y + 2x + 1 = 0$ и $4x + y + 6 = 0$; множество точек, удовлетворяющих условию (34) в области IV, есть треугольник ABF. Объединение этих четырех множеств и дает фигуру, задаваемую исходным неравенством. Полученная фигура является параллелограммом, так как прямые $y = 4$ и $y = -6$ параллельны и прямые $4x + y = 4$ и $4x + y = -6$ также параллельны. Поскольку высота этого параллелограмма равна расстоянию между прямыми $y = 4$ и $y = -6$, то она равна 10. Так как прямые $y = -6$ и $y = -2x - 1$ пересекаются в точке $(5/2; -6)$, то длина основания этого параллелограмма равна $5/2$. Следовательно, искомая площадь равна $\frac{5}{2} \cdot 10 = 25$.

Ответ. 25.

б) Уравнение

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

на координатной плоскости определяет окружность радиуса R с центром в точке $A(a; b)$.

Окружность разбивает плоскость на два множества: множество точек $(x_0; y_0)$, для которых $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < R^2$, является внутренностью круга с центром в точке $A(a; b)$, радиус которого равен R (рис. 27); мно-

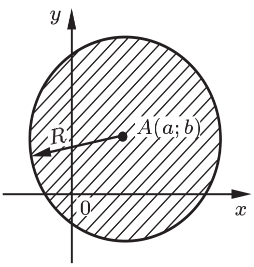


Рис. 27

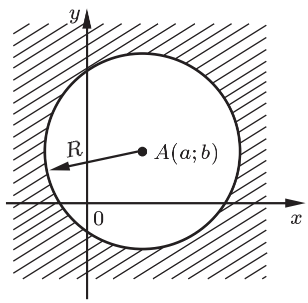


Рис. 28

жество точек $(x_1; y_1)$, для которых $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > R^2$, является внешностью круга с центром в точке $A(a; b)$, радиус которого равен R (рис. 28).

Пример 24. Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости следующими условиями

$$\begin{aligned} &||x-y| - |y-1|| = x - 2y + 1, \\ &(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1. \end{aligned}$$

Решение. Обозначим $x - y$ через a и $1 - y$ через b. Тогда данное в условии задачи равенство запишется в виде

$$||a| - |b|| = a + b. \tag{34}$$

Найдем все пары чисел a и b, удовлетворяющих этому равенству. Рассмотрим два случая.

1) Предположим, что $a \geqslant 0$. Тогда равенство (34) переписывается в виде

$$|a - |b|| = a + b. \tag{35}$$

Если $b > 0$, то равенство (35) перепишется в виде $|a-b| = a+b$ и, очевидно, не может выполняться. Следовательно, $b \leqslant 0$ и равенство принимает вид

$$|a + b| = a + b,$$

откуда находим, что $a+b \geqslant 0$. Итак, все пары чисел $(a; b)$, удовлетворяющие равенству (34) и условию $a \geqslant 0$, лежат в области, задаваемой неравенствами

$$\begin{aligned} &a \geqslant 0,\\ &b \leqslant 0,\\ &a + b \geqslant 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Легко видеть, что и, обратно, любая пара чисел, удовлетворяющая неравенствам (36), удовлетворяет также равенству (34).

2) Рассмотрим теперь пары $(a; b)$, удовлетворяющие равенству (34) и условию $a \leqslant 0$. Если $b < 0$, то правая часть равенства (34) будет отрицательной, что, конечно, не может выполняться. Значит, $b \geqslant 0$ и равенство (34) принимает вид

$$|-a-b| = a + b,$$

откуда следует, что $a + b \geqslant 0$. Поэтому все пары чисел $(a; b)$, удовлетворяющие равенству (34) и условию $a \leqslant 0$, лежат в области, задаваемой неравенствами

$$\begin{aligned} &a \leqslant 0,\\ &b \geqslant 0,\\ &a + b \geqslant 0. \end{aligned}$$

Любая пара чисел, удовлетворяющая этим неравенствам, будет, как легко видеть, удовлетворять и равенству (34). Следовательно, пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие данному в условии задачи равенству, есть те и только те пары чисел, которые удовлетворяют одной из следующих двух систем неравенств:

$$\begin{aligned} &x - y \geqslant 0, \qquad && x - y \leqslant 0,\\ &1 - y \leqslant 0, && 1 - y \geqslant 0,\\ &x - 2y + 1 \geqslant 0; && x - 2y + 1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Проведем на координатной плоскости (рис. 29) прямые $1 - y = 0$, $x - y = 0$ и $x-2y+1 = 0$. Они пересекаются в точке $K(1; 1)$. Тогда все точки, координаты которых удовлетворяют первой системе неравенств, будут лежать внутри и на сторонах угла, обозначенного на рис. 29 цифрой I, а все точки, координаты которых удовлетворяют второй системе неравенств, будут лежать внутри и на сторонах угла, обозначенного на рис. 29 цифрой II. Неравенству, данному в условии задачи, удовлетворяют точки круга, т.е. точки, лежащие внутри и на окружности радиуса 1 с центром в точке

$K(1;1)$. Следовательно, фигура, площадь которой надо найти, состоит из двух секторов AKB и CKD. Очевидно, что в силу симметрии площадь сектора CKD равна площади сектора EKB, и поэтому искомая площадь равна площади сектора EKA. Сектор EKA образуется прямыми $x - y = 0$ и $1 - y = 0$. Прямые $x - y = 0$ и $1 - y = 0$ проходят через центр окружности и угол между ними равен $\dfrac{360^\circ}{8} = 45^\circ$, поэтому площадь сектора EKA равна $1/8$ части площади круга с радиусом 1 и с центром в точке $K(1;1)$, т.е. равна $\pi/8$.

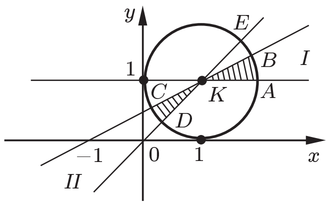


Рис. 29

Ответ. $\pi/8$.

Упражнения

Решить систему уравнений.

1) $\begin{cases} 2x + 3y = -7, \\ 3x - y = 6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + y = 5, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 2y = 1{,}5, \\ 2x - 4y = 3. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 3x - 6y = 5. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 2x + y + z = 7, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - y + z = 2, \\ 3x + y + z = -2. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + y - 2z = 1, \\ x - y + 3z = 1, \\ x - 5y + 13z = 1. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ 3x + y - z = 3, \\ -5x - y + 2z = 0. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 6. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 215. \end{cases}$

11) $\begin{cases} x - y = 3, \\ (x^2 - y^2)(x + y) = 147. \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ y^2 + xy = 2. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 14, \\ y^3 + 3x^2y = 13. \end{cases}$ 14) $\begin{cases} y^2 + xy = 15, \\ x^2 + xy = 10. \end{cases}$ 15) $\begin{cases} 2x = 4, \\ x^2 + 1 = 5. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x + yx = 1, \\ x = 3y + 1. \end{cases}$ 17) $\begin{cases} \dfrac{2}{3x - y} - \dfrac{5}{x - 3y} = 3, \\ \dfrac{1}{3x - y} + \dfrac{2}{x - 3y} = \dfrac{3}{5}. \end{cases}$

18) $\begin{cases} x^2 + y - 2 = 0, \\ x + y^2 - 2 = 0. \end{cases}$ 19) $\begin{cases} x^2 + 3 = 2xy, \\ 6x^2 - 11y^2 = 10. \end{cases}$

20) $\dfrac{1}{x+y} - \dfrac{10}{x-y} = 1,$ $\dfrac{1}{x+y} - \dfrac{2}{x-y} = -\dfrac{3}{5}.$ 21) $x + y^2 = 5,$ $y + x^2 = 3.$ 22) $xy = 2,$ $y = x^2 + 1.$

23) $x^3 - y = 0,$ $x^2 + y^2 - 2 = 0.$ 24) $x^2 + xy = 10,$ $x^3 + x^2y = 20.$

25) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{y}{3} = 3,$ $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{3}{2}.$ 26) $x^2 - y^2 = 2(x+y),$ $x^2 + y^2 = 8.$

27) $x^3 = 5x + 3y,$ $y^3 = 3x + 5y.$ 28) $x^2 - y = 23,$ $x^2 \cdot y = 50.$ 29) $x^3 + y^3 = 7(x+y),$ $x^2 + y^2 = 10.$

30) $(x-y)(x^2 - y^2) = 45,$ $x + y = 5.$

31) $x^3 - y^3 = 8(x-y),$ $x^2 + y^2 = 8.$ 32) $x^2 - y^2 + 3y = 0,$ $x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0.$

33) $x^2 - y + x - y^2 = 14,$ $(x-y)(x^2 - y^2) = 24.$ 34) $xy + x - y = 3,$ $x^2y - xy^2 = 2.$

35) $x^3 + x^3y^3 + y^3 = 12,$ $x + xy + y = 0.$ 36) $(x-y)(x^2 + y^2) = 447,$ $xy(x-y) = 210.$

37) $(x-1)^2 + y^2 = 2,$ $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2.$ 38) $(x^2+1)(y^2+1) = 10,$ $(x+y)(xy-1) = 3.$

39) $x^2 + y^2 = 13,$ $x^3 + y^3 = 19.$ 40) $x^2 + y^2 = 34,$ $x + y + xy = 23.$

41) $x^4 + y^4 = 17,$ $x + y = 3.$ 42) $2xy - x - y = -7,$ $3xy + x - y = -23.$

43) $3x^2 - y^2 - 12x + 4y = -11,$ $4x^2 + 2y^2 - 16x - 8y = -18.$ 44) $5x^2 - 3y^2 + 10x - 12y = 17,$ $2x^2 + y^2 + 4x + 4y = -2.$

45) $2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0,$ $xy + 3y^2 - 2x - 14y + 16 = 0.$ 46) $3y^2 + xy - 2x + y - 5 = 0,$ $2x^2 - xy - 3x - y - 5 = 0.$

47) $5x^2 + y^2 + x - 2y = 1,$ $5x^2 + 2{,}5y^2 + 3x - 4y = 4.$ 48) $2x^2 - 4y^2 - 1{,}5x + y = 0,$ $3x^2 - 6y^2 - 2x + 2y = 0{,}5.$

49) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{36},$ $xy^2 - x^2y = 324.$ 50) $\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2},$ $x^2 + y^2 = 45.$

51) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=13. \end{cases}$ 52) $\begin{cases} 2x^2-y^2=31, \\ \dfrac{x^2+4y^2}{xy}=5. \end{cases}$

53) $\begin{cases} 2xy-\dfrac{x}{y}=34, \\ xy-3\dfrac{x}{y}=12. \end{cases}$ 54) $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x, \\ \dfrac{1+x^2}{1+y^2}=\dfrac{1}{5}. \end{cases}$

55) $\begin{cases} x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0, \\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0. \end{cases}$

56) $\begin{cases} 2x^3+x^2y+4x^2-4xy-xy^2+3y-6x+y^2=0, \\ 3x^2+3xy-2x-3y-1=0. \end{cases}$

57) $\begin{cases} xy+yz=18, \\ xz+zy=20, \\ yx+xz=8. \end{cases}$ 58) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ xy+yz+xz=-3, \\ xyz=0. \end{cases}$

59) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ xy+xz+zy=-4, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$ 60) $\begin{cases} x^3=yz, \\ y^3=zx, \\ z^3=xy. \end{cases}$ 61) $\begin{cases} x(y+z)=27, \\ y(z+x)=32, \\ z(x+y)=35. \end{cases}$

62) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{2}{11}, \\ \dfrac{xz}{x+z}=\dfrac{1}{9}, \\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{2}{17}. \end{cases}$ 63) $\begin{cases} x=z+1, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1. \end{cases}$

64) $\begin{cases} 2(x+y)=xy, \\ xy+yz+xz=108, \\ xyz=180. \end{cases}$ 65) $\begin{cases} x+y+z=13, \\ x^2+y^2+z^2=91, \\ y^2=xz. \end{cases}$

66) $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=64, \\ x^2+y^2+z^2=10, \\ x+y+z=4. \end{cases}$ 67) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{13}{3}, \\ x+y+z=\dfrac{13}{3}, \\ xyz=1. \end{cases}$

68) $\begin{cases} x(x+y+z)=1, \\ y(x+y+z)=2, \\ z(x+y+z)=3. \end{cases}$ 69) $\begin{cases} xy+xz=2+x^2, \\ xy+yz=3+y^2, \\ xz+yz=4+z^2. \end{cases}$

70) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=37, \\ x^2+xz+z^2=28, \\ y^2+yz+z^2=19. \end{cases}$

Изобразить на плоскости XOY множество всех точек $(x;y)$, координаты x и y каждой из которых удовлетворяют заданному условию.

71) $2x-3y+1=0$. 72) $3x-5=0$. 73) $1-5y=0$.

74) $y-|x|+1=0$. 75) $|y|-x=2$. 76) $1+2|y|+x=2-3x$.

77) $1-|y|+x=x-2$. 78) $y+|x|-|x+2|=0$. 79) $\sqrt{x^2}=\sqrt{y^2}$.

80) $|x|+|y|=1$. 81) $|x-1|+|y|=2$. 82) $|x+1|+|y-3|=1$.

83) $|x|-|y|=1$. 84) $|y|-|x|=1$. 85) $|x|+x=|y|+y$.

86) $|x+y-1|+|x-y+1|=0$. 87) $|x+y-1|-|x-y+1|=0$.

88) $|y|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(|x|-x)$. 89) $|x|+|y|+|1-x-y|=1$.

90) $|x-y|+|x+y|=4$. 91) $|2y-1|+|2y+1|+\dfrac{4}{\sqrt{3}}|x|=4$.

92) $|x|+|y|+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{|x-y|+|x+y|\}=\sqrt{2}+1$.

93) $\big||x|+\big||y|-3\big|-3\big|=1$. 94) $|y-x|+x+y=2$.

95) $x+y-|y-x|=4$. 96) $x^2+y^2=0$.

97) $(x-1)^2+(y+2)^2=0$. 98) $x^2+y^2=4$.

99) $x^2+2x+y^2-4y-3=0$. 100) $x^2+4xy-5y^2=0$.

101) $x^2+x^2y^2-y^2-1=0$. 102) $|y^2-1|=|x+y|$.

103) $(\sin\pi(|x|+|y|))\cdot\sqrt{16-x^2-y^2}=0$.

104) $1-x^2-y^2=\sqrt{(1-x^2-y^2)^2+(y-x^2)^2}$.

105) $\dfrac{1}{2}-|y|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}-|y|\right)^2+(y-\sin x)^2}$.

106) $$(x^2+y^2-16)\left((x+2)^2+(y-2)^2-\frac{1}{4}\right)\left((x-2)^2+(y-2)^2-\frac{1}{4}\right)\times$$
$$\times\left(x^2+(y+2)^2-\frac{1}{2}\right)\left((x+2)^2+(y-2)^2\right)((x-2)^2+(y-2)^2\times$$
$$\times\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+(y+2)^2\right)\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(y+2)^2\right)=0.$$

107) $\log_x y=2$. 108) $|y-\sin x|=y+\sin x$.

109) $|y-|x||=|x|+1$. 110) $y^2(y-1)(y+1)=x^2(x+1)(x-1)$.

111) $x+2y-3>0$. 112) $x+2y-3\leqslant 0$. 113) $|x|+|y|-1>0$.

114) $|x-y|<2$. 115) $|x-y|\geqslant 2$. 116) $x^2-y^2\geqslant 0$.

117) $x^2+y^2\geqslant 4$. 118) $x^2+(y-1)^2\leqslant 2$. 119) $1\leqslant 4(x^2+y^2)<16$.

120) $1\leqslant|x-1|<2$. 121) $1\leqslant|y+2|\leqslant 3$. 122) $|x|-|y|\geqslant 1$.

123) $|x|+|y|\leqslant 3$. 124) $|x+1|+|y-1|\geqslant 3$.

125) $|x+y|+|x-y|\leqslant 2$. 126) $x^2+y^2-2|x|-2|y|\leqslant 2$.

127) $|x^2+y^2-2|\leqslant 2(x+y)$. 128) $x^2+y^2\leqslant 2(|x|-|y|)$.

129) $4\leqslant x^2+y^2\leqslant 2(|x|+|y|)$. 130) $\log_x(\log_y x)>0$.

131) $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2\leqslant y\leqslant 3.\end{cases}$ 132) $\begin{cases}x+y+1\geqslant 3,\\ x-y+2\leqslant 1.\end{cases}$ 133) $\begin{cases}x^2+y^2\geqslant 1,\\ x>y.\end{cases}$

134) $\begin{cases} |x+2y| = 2, \\ |y| \leqslant 1, \\ 2x - y \geqslant 0. \end{cases}$ 135) $\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ y \leqslant 1. \end{cases}$ 136) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 2x, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$

137) $\begin{cases} y^2 \leqslant 1, \\ x - \sqrt{1-y^2} \geqslant 0, \\ x + |y| - 4 \leqslant 0. \end{cases}$ 138) $\begin{cases} \log_{1/3}(x+y-1) \geqslant \log_{1/3} y, \\ \sqrt{y-x-1} \leqslant \sqrt{2-x}. \end{cases}$

139) $\begin{cases} |x+y| + |x-y| \leqslant 4, \\ |x| \leqslant 1, \\ y \geqslant \sqrt{x^2-2x+1}. \end{cases}$ 140) $\begin{cases} |x| + |y| < 3, \\ \log_2(2y - x^2 + 4) > \log_2(y+1). \end{cases}$

141) $\begin{cases} ||x| - |y|| \geqslant 1, \\ |x| + |y| \leqslant 2. \end{cases}$ 142) $\begin{cases} |x+y| + |x-y| \leqslant 2, \\ |x+y| \leqslant 2\sqrt{2}, \\ |x-y| \leqslant 2\sqrt{2}. \end{cases}$

Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости XOY следующим условием.

143) $|x-2| + |y| \leqslant 2$. 144) $|x| + |2-y| \leqslant 3$.

145) $|3-x| + |y| \leqslant 1$. 146) $|x+1| + |2y-x-1| \leqslant 6$.

147) $|y-2x-1| + 2|x| \leqslant 3$. 148) $|2y+x+1| + |x+1| \leqslant 4$.

149) $\begin{cases} y \leqslant 4 - |x|, \\ y \geqslant 1 + \frac{1}{2}|x|. \end{cases}$ 150) $\begin{cases} y \leqslant 5 + 2|x|, \\ y \geqslant 3 + 4|x|. \end{cases}$ 151) $\begin{cases} y \leqslant 5 - 2|x|, \\ y \geqslant 2 - \frac{1}{2}|x|. \end{cases}$

152) $\begin{cases} ||x-y| - |x-1|| = y - 2x + 1, \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 4. \end{cases}$

153) $\begin{cases} ||x-y| - |y-2|| = x - 2y + 2, \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leqslant 3. \end{cases}$

154) $\begin{cases} ||x-y| - |y+1|| = 2y - x + 1, \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \leqslant 2. \end{cases}$

Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты каждой из которых удовлетворяют заданному условию, и среди точек этого множества найти все точки, у каждой из которых координата y принимает наименьшее значение.

155) $y = 2\left|1 + \frac{1}{x}\right| + \left|\frac{2}{x} - |y+4|\right|$. 156) $\left|y + \frac{1}{x}\right| + \left|\frac{1}{x}\right| = 1 - \frac{2}{x}$.

Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты каждой из которых удовлетворяют заданному условию, и среди точек этого множества найти все точки, у каждой из которых координата y принимает наибольшее значение.

157) $y = 4 - \left|y - \frac{6}{x}\right| - 2\left|\frac{3}{x} - 1\right|$. 158) $2y + \left|y - \frac{3}{x}\right| = 4 - \left|\frac{3}{x} - 1\right|$.

§ 2. НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В этом параграфе описываются некоторые методы решения систем уравнений, содержащих радикалы, логарифмические и показательные функции.

2.1. Метод подстановки. Пусть дана система двух уравнений с двумя неизвестными. Как и в случае алгебраических систем уравнений, если одно из уравнений содержит одну из неизвестных в первой степени, то, выразив из этого уравнения эту неизвестную через другую неизвестную, можно подставить это выражение во второе уравнение. Тем самым задача сведется к решению уравнения с одним неизвестным.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 4^x + 2, \\ 2^{x+2} + 2y + 1 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Решение. Из второго уравнения системы находим, что

$$y = -\frac{1}{2} - 2^{x+1}. \tag{2}$$

Подставляя $-1/2-2^{x+1}$ вместо y в первое уравнение системы (1), получаем уравнение

$$\left(-\frac{1}{2} - 2^{x+1}\right)^2 = 4^x + 2,$$

которое можно переписать в виде

$$3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 2^x - \frac{7}{4} = 0. \tag{3}$$

Поскольку квадратное уравнение

$$3z^2 + 2z - \frac{7}{4} = 0$$

имеет два корня $z_1 = 1/2$ и $z_2 = -7/6$, то уравнение (3) равносильно совокупности уравнений

$$2^x = 2^{-1} \quad \text{и} \quad 2^x = -\frac{7}{6}.$$

Уравнение $2^x = 2^{-1}$ имеет единственный корень $x = -1$. Уравнение $2^x = -7/6$ решений не имеет, так как 2^x положительно для любого действительного числа x. Следовательно, уравнение (3) имеет единственный корень $x = -1$. Подставляя это значение x в (2), находим, что $y = 3/2$. Следовательно, исходная система уравнений имеет единственное решение $x = -1$, $y = 3/2$.

Ответ. $(-1; 3/2)$.

2.2. Введение новых неизвестных. Некоторые системы двух уравнений относительно двух неизвестных путем замены выражений, входящих в уравнение, сводятся к алгебраическим системам.

Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &\log_{1/2} x + 2^{y+1} = 3, \\ &4\log_{1/2} x + 4^y = 32. \end{aligned}$$

Решение. Обозначим $\log_{1/2} x$ через u и 2^y через v. Поскольку $2^{y+1} = 2v$ и $4^y = v^2$, то исходная система запишется в виде

$$\begin{aligned} &u + 2v = 3, \\ &4u + v^2 = 32. \end{aligned} \tag{4}$$

Из первого уравнения системы (4) находим, что $u = 3 - 2v$. Подставляя $3 - 2v$ вместо u во второе уравнение системы (4), получаем уравнение $4(3 - 2v) + v^2 = 32$, которое можно переписать в виде

$$v^2 - 8v - 20 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня $v_1 = 10$ и $v_2 = -2$. Следовательно, система (4) имеет два решения: $u_1 = -17$, $v_1 = 10$ и $u_2 = 7$, $v_2 = -2$, а это означает, что исходная система равносильна совокупности систем

$$\begin{aligned} &\log_{1/2} x = 7, \\ &2^y = -2 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} &\log_{1/2} x = -17, \\ &2^y = 10. \end{aligned} \tag{5}$$

Первая из этих систем решений не имеет, решение второй системы совокупности (5) есть $x = 2^{17}$, $y = \log_2 10$.

Ответ. $(2^{17}; \log_2 10)$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &2\sqrt[5]{x + y} = \log_2 4x^2, \\ &\sqrt[5]{x + y} = \log_2 \frac{16}{x^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Решение. Обозначим $\sqrt[5]{x + y}$ через u и $\log_2 x^2$ через v. Тогда

$$\log_2 4x^2 = 2 + v, \quad \log_2 \frac{16}{x^2} = 4 - v$$

и систему (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &2u = v + 2, \\ &u = 4 - v. \end{aligned}$$

Эта система имеет единственное решение $u = 2$, $v = 2$. Поэтому система (6) равносильна системе уравнений

$$\begin{aligned} &\sqrt[5]{x + y} = 2, \\ &\log_2 x^2 = 2, \end{aligned}$$

имеющей два решения: $x_1 = 2$, $y_1 = 30$ и $x_2 = -2$, $y_2 = 34$.

Ответ. $(2; 30)$, $(-2; 34)$.

П р и м е р 4. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &x^3 - \sqrt{y} = 1,\\ &5x^6 - 8x^3\sqrt{y} + 2y = 2. \end{aligned}$$

Р е ш е н и е. Обозначив x^3 через u и $\sqrt{y}$ через v, данную систему уравнений можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &u - v = 1,\\ &5u^2 - 8uv + 2v^2 = 2. \end{aligned} \tag{7}$$

Из первого уравнения находим $u = v+1$. Подставив $v+1$ вместо u во второе уравнение, получим уравнение $v^2 - 2v - 3 = 0$. Это уравнение имеет два корня: $v_1 = -1$ и $v_2 = 3$. Соответствующие значения u будут $u_1 = 0$ и $u_2 = 4$. Следовательно, система (7) имеет два решения:

$$\begin{aligned} &u_1 = 0,\\ &v_1 = -1 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} &u_2 = 4,\\ &v_2 = 3. \end{aligned}$$

Значит, исходная система равносильна совокупности двух систем уравнений

$$\begin{aligned} &x^3 = 0,\\ &\sqrt{y} = -1 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} &x^3 = 4,\\ &\sqrt{y} = 3. \end{aligned}$$

Первая система этой совокупности не имеет решений, а вторая имеет единственное решение $x = \sqrt[3]{4},\ y = 9$.

О т в е т. $(\sqrt[3]{4}; 9)$.

2.3. Переход к следствию. Пусть имеются две системы уравнений, которые условно будем обозначать I и II. Говорят, что система II является следствием системы уравнений I, если каждое решение системы I будет также решением системы II. Это определение аналогично определению из гл. 1, § 1.

Предположим, что требуется решить некоторую систему уравнений. Будем проводить над этой системой некоторые преобразования, имея целью ее упрощение. При этом получится ряд систем, последняя из которых имеет простейший вид и может быть решена непосредственно. Если в процессе преобразований каждая новая система уравнений является следствием предшествующей, то можно утверждать, что все решения исходной системы содержатся среди решений самой последней из систем (говорят еще, что потери корней не произошло). Подставляя все решения последней системы в исходную, можно отобрать среди них решения исходной системы. И можно утверждать, что иных решений исходная система не имеет. К сожалению, многообразие различных ситуаций не позволяет описать все преобразования, сохраняющие корни систем уравнений. Мы здесь ограничимся лишь некоторыми простейшими примерами.

П р и м е р 5. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &\overline{x + y - 1} = 1,\\ &\overline{x - y + 2} = 2y - 2. \end{aligned}$$

Р е ш е н и е. Возведя обе части каждого из уравнений данной системы в квадрат, получим систему

$$\begin{aligned} &x + y - 1 = 1, \\ &x - y + 2 = 4y^2 - 8y + 4. \end{aligned} \tag{8}$$

Все решения исходной системы являются решениями системы (8), но не обязательно все решения системы (8) будут решениями исходной системы, поэтому после нахождения решений системы (8) из них надо отобрать те, которые будут решениями исходной системы.

Из первого уравнения системы (8) получаем $x = 2 - y$. Подставим $2 - y$ вместо x во второе уравнение. Получим квадратное уравнение

$$2y^2 - 3y = 0,$$

корни которого $y_1 = 0$, $y_2 = 3/2$. Значит, система (8) имеет два решения: $x_1 = 2$, $y_1 = 0$; $x_2 = 1/2$, $y_2 = 3/2$. Непосредственная проверка показывает, что единственным решением исходной системы является пара чисел $(1/2; 3/2)$.

О т в е т. $(1/2; 3/2)$.

П р и м е р 6. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &\log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ &2\log_4 x + \log_2 y = 4. \end{aligned}$$

Р е ш е н и е. Так как для решений данной системы

$$2\log_4 x = \log_2 x \quad \text{и} \quad \log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy,$$

то все решения данной системы содержатся среди решений системы

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 = 32, \\ &xy = 16. \end{aligned} \tag{9}$$

Умножив второе уравнение этой системы на 2 и вычитая результат из первого уравнения, найдем, что $(x - y)^2 = 0$ или $x = y$. Подставив x вместо y во второе уравнение системы (9), получим, что $x^2 = 16$, и теперь легко найдем два решения этой системы: $x_1 = 4$, $y_1 = 4$ и $x_2 = -4$, $y_2 = -4$. Проверкой убеждаемся, что пара чисел $x_1 = 4$, $y_1 = 4$ является решением исходной системы, а пара чисел $x_2 = -4$, $y_2 = -4$ не является ее решением, поскольку область существования функции $y = \log_2 x$ состоит из положительных чисел.

О т в е т. $(4; 4)$.

2.4. Рассуждения с числовыми значениями. Предлагаемый здесь способ решения систем уравнений обычно применяется в тех ситуациях, когда трудно следить за равносильностью преобразований уравнений системы. По существу, это есть иное оформление метода, изложенного в п. 2.3.

Пусть дана система уравнений, для простоты, с двумя неизвестными x и y, содержащая, вообще говоря, любые функции:

$$\begin{aligned} &f_1(x, y) = 0, \\ &f_2(x, y) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Решение этой системы проводится следующим образом. Предполагается, что пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением системы (10). Тогда справедливы числовые равенства

$$\begin{aligned} f_1(x_0, y_0) &= 0, \\ f_2(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned}$$

Из них с помощью различных преобразований могут быть получены новые соотношения между x_0 и y_0 или какие-нибудь ограничения на них. Окончательный набор соотношений удается получить таким, что ему удовлетворяет лишь конечное множество легко вычисляемых пар чисел $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2), \ldots, (x_n; y_n)$. Из них с помощью подстановки в заданную систему уравнений можно отбросить все лишние пары и отобрать все ее решения.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ &x^5 \cdot \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{aligned}$$

Решение. Пусть пара чисел $(x_0; y_0)$ есть решение этой системы. Тогда справедливы числовое неравенство

$$x_0^2 - 4y_0^2 \geqslant 0 \tag{11}$$

и числовые равенства

$$x_0 - y_0 + \sqrt{x_0^2 - 4y_0^2} = 2 \quad \text{и} \quad x_0^5 \cdot \sqrt{x_0^2 - 4y_0^2} = 0.$$

Из второго равенства следует, что либо $x_0 = 0$, либо $x_0 = 2y_0$, либо $x_0 = -2y_0$.

Если $x_0 = 0$, то, учитывая неравенство (11), получаем, что $y_0 = 0$.

Если $x_0 = 2y_0$, то из первого равенства получаем, что $2y_0 - y_0 = 2$, т.е. $y_0 = -2$, но тогда $x_0 = 4$.

Если $x_0 = -2y_0$, то из первого равенства получаем, что $-2y_0 - y_0 = 2$, т.е. $y_0 = -2/3$, но тогда $x_0 = 4/3$.

Итак, если пара чисел $(x_0; y_0)$ есть решение исходной системы, то она содержится среди следующих трех пар чисел: $(0; 0)$, $(4; 2)$, $(4/3; -2/3)$. Подставляя эти пары чисел в уравнения системы, убеждаемся, что первая пара не удовлетворяет первому уравнению системы, а вторая и третья удовлетворяют обоим уравнениям системы, следовательно, являются ее решениями.

Ответ. $(4; 2)$, $(4/3; -2/3)$.

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &x + \log_2 y = y \log_2 3 + \log_2 x, \\ &x \log_2 72 + \log_2 x = 2y + \log_2 y. \end{aligned}$$

Решение. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение данной системы. Тогда справедливы числовые равенства

$$\begin{aligned} x_0 + \log_2 y_0 &= y_0 \log_2 3 + \log_2 x_0, \\ x_0 \log_2 72 + \log_2 x_0 &= 2y_0 + \log_2 y_0. \end{aligned} \tag{12}$$

Складывая почленно эти равенства, получаем после приведения подобных членов, что справедливо равенство

$$x_0(4 + 2\log_2 3) = y_0(2 + \log_2 3)$$

или равенство

$$y_0 = 2x_0.$$

Подставляя $2x_0$ вместо y_0 в равенство (12), получаем, что справедливо равенство

$$x_0 + \log_2(2x_0) = 2x_0 \log_2 3 + \log_2 x_0,$$

откуда находим, что $x_0 = \dfrac{1}{2\log_2 3 - 1}$; но тогда $y_0 = \dfrac{2}{2\log_2 3 - 1}$. Итак, если данная система имеет решение, то это решение есть пара чисел $(x_0; y_0)$, где $x_0 = \dfrac{1}{2\log_2 3 - 1}$, $y_0 = \dfrac{1}{2\log_2 3 - 1}$. Подставляя найденную пару чисел в оба уравнения исходной системы уравнений, убеждаемся, что она действительно является ее решением.

Ответ. $\dfrac{1}{2\log_2 3 - 1}; \dfrac{1}{2\log_2 3 - 1}$.

Указанный прием может использоваться для доказательства того, что полученная в результате преобразований система уравнений является следствием исходной системы.

Пример 9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (1 + 2\log_{|xy|} 2) \cdot \log_{x+y} |xy| = 1, \\ x - y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Решение. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение данной системы уравнений. Тогда справедливы равенства

$$(1 + 2\log_{|x_0y_0|} 2) \cdot \log_{x_0+y_0} |x_0y_0| = 1, \quad x_0 - y_0 = 2\sqrt{3}, \tag{13}$$

откуда вытекает, что x_0 и y_0 удовлетворяют условиям

$$0 < (x_0 + y_0) \neq 1, \quad |x_0y_0| \neq 1, \quad x_0y_0 \neq 0,$$

но тогда

$$\log_{x_0+y_0} |x_0y_0| = \frac{1}{\log_{|x_0y_0|}(x_0 + y_0)},$$

и потому первое из равенств (13) можно переписать так:

$$1 + 2\log_{|x_0y_0|} 2 = \log_{|x_0y_0|}(x_0 + y_0);$$

отсюда $4|x_0y_0| = x_0 + y_0$. Значит, каждое решение исходной системы уравнений является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 4|xy| = x + y, \\ x - y = 2\sqrt{3}, \end{cases} \tag{14}$$

т.е. эта система является следствием исходной системы.

Подставляя $x-2\sqrt{3}$ вместо y в первое уравнение системы (14), получим уравнение

$$4\ x\quad x-2\sqrt{3}\quad = 2x-2\sqrt{3}. \tag{15}$$

Так как левая часть уравнения (15) неотрицательна при любом x, то все решения уравнения (15) удовлетворяют условию $2x-2\sqrt{3}\geqslant 0$, т.е. $x\geqslant\sqrt{3}$. Для освобождения от знака абсолютной величины в уравнении (15) разобьем область $x\geqslant\sqrt{3}$ на два промежутка: $\sqrt{3}\leqslant x<2\sqrt{3}$ и $2\sqrt{3}\leqslant x<+\infty$, и будем решать уравнение отдельно в каждом из этих промежутков.

В области $\sqrt{3}\leqslant x<2\sqrt{3}$ справедливо неравенство $x\quad x-2\sqrt{3}\quad <0$. На этом множестве уравнение (15) можно переписать в виде

$$-2x\quad x-2\sqrt{3}\quad = x-\sqrt{3},$$

или в виде

$$2x^2-\quad 4\sqrt{3}-1\quad x-\sqrt{3}=0.$$

Получившееся квадратное уравнение имеет корни

$$x_1=\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\quad\text{и}\quad x_2=\sqrt{3}-2,$$

из которых в область $\sqrt{3}\leqslant x<2\sqrt{3}$ попадает только $x_1=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$. Значит, в области $\sqrt{3}\leqslant x<2\sqrt{3}$ уравнение (15) имеет единственный корень x_1.

В области $x\geqslant 2\sqrt{3}$ справедливо неравенство $x(x-2\sqrt{3})\geqslant 0$; на этом множестве уравнение (15) можно переписать в виде

$$2x\quad x-2\sqrt{3}\quad = x-\sqrt{3},$$

или в виде

$$2x^2-\quad 4-\sqrt{3}+1\quad x+\sqrt{3}=0.$$

Это квадратное уравнение имеет корни $x_3=\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{2}$ и $x_4=2+\sqrt{3}$. Из них в область $x\geqslant 2\sqrt{3}$ попадает только $x_4=2+\sqrt{3}$. Значит, в области $x\geqslant 2\sqrt{3}$ уравнение (15) имеет единственный корень $x_4=2+\sqrt{3}$.

Итак, уравнение (15) имеет два корня $x_1=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{2}$ и $x_4=2+\sqrt{3}$. Значит, система уравнений (14) имеет два решения: $(x_1;y_1)$ и $(x_4;y_4)$, и потому все решения исходной системы уравнений содержатся среди пар чисел $(x_1;y_1)$ и $(x_4;y_4)$, где $x_1=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$, $y_1=\dfrac{3-2\sqrt{3}}{2}$; $x_4=2+\sqrt{3}$, $y_4=2-\sqrt{3}$. Так как $x_4y_4=1$, то пара чисел $(x_4;y_4)$ не удовлетворяет первому уравнению исходной системы. Подставляя числа x_1 и y_1 в оба уравнения исходной системы, убеждаемся, что пара чисел $(x_1; y_1)$ является ее решением.

Ответ. $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{3-2\sqrt{3}}{2}$.

Пример 10. Решить систему уравнений

$$y^{1-2/5\log_x y} = x^{2/5},$$

$$1 + \log_x \quad 1 - \frac{3y}{x} \quad = \log_x 4.$$

Решение. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение данной системы. Тогда справедливы равенства

$$y_0^{1-2/5\log_{x_0} y_0} = x_0^{2/5},$$

$$1 + \log_{x_0} \quad 1 - \frac{3y_0}{x_0} \quad = \log_{x_0} 4.$$

Из справедливости этих равенств вытекает, что $x_0 > 0$, $x_0 \neq 1$, $y_0 > 0$, $x_0 > 3y_0$. Прологарифмировав первое равенство по основанию x_0 и пропотенцировав второе, получим, что справедливы равенства

$$1 - \frac{2}{5}\log_{x_0} y_0 \quad \log_{x_0} y_0 = \frac{2}{5}, \qquad x_0 - 3y_0 = 4. \tag{16}$$

Обозначив $\log_{x_0} y_0$ через z, из первого равенства (16) получаем уравнение

$$\frac{2}{5}z^2 - z + \frac{2}{5} = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет корни $z_1 = 2$ и $z_2 = 1/2$. Таким образом, каждое решение исходной системы уравнений является решением одной из систем уравнений:

$$\begin{aligned} x - 3y &= 4, \\ \log_x y &= 2, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - 3y &= 4, \\ \log_x y &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Из второго уравнения первой системы (17) находим, что $y = x^2$. Подставляя x^2 вместо y в первое уравнение, получаем уравнение

$$x - 3x^2 = 4.$$

Но это квадратное уравнение корней не имеет. Значит, первая из систем (17) не имеет решений.

Решим вторую систему (17). Из второго уравнения находим, что $x = y^2$. Подставляя y^2 вместо x в первое уравнение, получаем уравнение

$$y^2 - 3y - 4 = 0.$$

Это уравнение имеет корни $y_1 = 4$ и $y_2 = -1$. Тогда соответствующие им по формуле $x = y^2$ числа x_1 и x_2 таковы: $x_1 = 16$ и $x_2 = 1$. Числа

$x_1 = 16$ и $y_1 = 4$ удовлетворяют системе. Числа $x_2 = 1$ и $y_2 = -1$ не удовлетворяют второму уравнению системы. Значит, вторая система (17) имеет единственное решение.

Следовательно, если исходная система уравнений имеет решение, то этим решением может быть только пара чисел $x_1 = 16$, $y_1 = 4$. Подставляя эти числа в уравнения исходной системы, видим, что они действительно являются ее решением.

Ответ. $(16; 4)$.

Рассмотренный выше прием может также использоваться с равносильными преобразованиями.

Пример 11. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &2\log_{1-x}(-xy-2x+y+2)+\log_{2+y}(x^2-2x+1)=6,\\ &\log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1. \end{aligned}$$

Решение. Данная система уравнений может быть переписана так:

$$\begin{aligned} &2\log_{1-x}((1-x)(y+2))+\log_{2+y}(x-1)^2=6,\\ &\log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1. \end{aligned} \tag{18}$$

Если $(x_0; y_0)$ — решение системы (18), то справедливы неравенства

$$1-x_0>0, \quad 1-x_0\neq 1, \quad y_0+2>0, \quad y_0+2\neq 1, \quad y_0+5>0, \quad x_0+4>0,$$

т.е. если $(x_0; y_0)$ — решение системы (18), то число y_0 удовлетворяет условиям $y_0 > 2$, $y_0 \neq -1$, а число x_0 — условиям $-4 < x_0 < 1$, $x_0 \neq 0$. Поэтому будем искать решения системы (18) среди пар чисел $(x; y)$, удовлетворяющих условиям

$$-4<x<1, \quad x\neq 0, \quad y>-2, \quad y\neq -1.$$

Первое уравнение системы равносильно на рассматриваемой области уравнению

$$\log_{1-x}(y+2)+\log_{y+2}(1-x)=2.$$

Обозначив $\log_{1-x}(y+2)$ через z, последнее уравнение можно переписать так:

$$z+\frac{1}{z}=2.$$

Это уравнение имеет единственный корень $z = 1$. Значит, первое уравнение системы равносильно в рассматриваемой области уравнению

$$\log_{1-x}(y+2)=1$$

или уравнению

$$y=-x-1.$$

Следовательно, система (18) равносильна на рассматриваемой области системе

$$\begin{aligned} &y=-x-1,\\ &\log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1. \end{aligned} \tag{19}$$

Подставляя $(-x-1)$ вместо y во второе уравнение системы (19), получим уравнение

$$\log_{1-x}(4-x) - \log_{1-x}(x+4) = 1.$$

Это уравнение равносильно на рассматриваемой области уравнению

$$\log_{1-x}(4-x) = \log_{1-x}(1-x)(x+4)$$

или уравнению

$$4 - x = (1-x)(x+4),$$

которое имеет два корня: $x_1 = -2$ и $x_2 = 0$. Из первого уравнения системы (19) находим $y_1 = 1$ и $y_2 = -1$. Из найденных пар чисел в рассматриваемую область входит только пара $x_1 = -2$, $y_1 = 1$. Она и является единственным решением исходной системы.

Ответ. $(-2; 1)$.

Упражнения

Решить систему уравнений.

1) $\begin{aligned} &3 \cdot 2^x - \log_2 y = 2,\\ &2^x \cdot \log_2 y = 1. \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} &3y + 2\operatorname{tg} x = 4,\\ &2y + 3\operatorname{tg} x = 1. \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} &4y + \sqrt{3}\cos x = -1/2,\\ &28y + 4\sqrt{3}\cos x = 1. \end{aligned}$ 4) $\begin{aligned} &x\log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 x,\\ &x\log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 y. \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} &\sqrt{x} - y^5 = 2,\\ &2y^{10} - 3y^5\sqrt{x} + 3x = 20. \end{aligned}$ 6) $\begin{aligned} &3^x - 2^{y^2} = 77,\\ &3^{x/2} - 2^{y^2/2} = 7. \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} &\lg 3 \cdot \lg(3x) = \lg 2 \lg(2y),\\ &\lg x \cdot \lg 2 = \lg y \cdot \lg 3. \end{aligned}$ 8) $\begin{aligned} &(\lg x)^2 - (\lg y)^2 = 6,\\ &\lg(xy) = 2. \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} &6\lg\sqrt{x} + 3 \cdot 2^y = 5,\\ &10\lg x + 3 \cdot 4^y = 17. \end{aligned}$ 10) $\begin{aligned} &\lg^2 x + \lg^2 y = 100,\\ &\lg x - \lg y = 2. \end{aligned}$

11) $\begin{aligned} &\sqrt{y} + \lg x^2 = 2,\\ &y + 4\lg x = 28. \end{aligned}$ 12) $\begin{aligned} &x + 3^{y-1} = 2,\\ &3x + 9^y = 18. \end{aligned}$ 13) $\begin{aligned} &x + 3\sqrt{y} = 18,\\ &y + 3\sqrt{x} = 18. \end{aligned}$

14) $\begin{aligned} &x + y + \sqrt{xy} = 21,\\ &\overline{x^3y} + \overline{xy^3} = 90. \end{aligned}$ 15) $\begin{aligned} &\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3,\\ &xy = 8. \end{aligned}$

16) $\begin{aligned} &x + y\sqrt{x} + y^2 \quad \overline{x + y^2} = 65,\\ &x - y\sqrt{x} + y^2 \quad \overline{x + y^2} = 185. \end{aligned}$ 17) $\begin{aligned} &2^x + 2^y = 3,\\ &x + y = 1. \end{aligned}$

18) $\begin{aligned} &3^x \cdot 2^y = 576,\\ &\log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4. \end{aligned}$ 19) $\begin{aligned} &\frac{2^y}{5^x} = 200,\\ &x + y = 1. \end{aligned}$

20) $\begin{cases} 2x + y = x^2 + y^2 = 12, \\ 2^{x-2y} = 256. \end{cases}$ 21) $\begin{cases} 3x + y = y^2 - x^2 + 26, \\ 2^{x-2y} = 64. \end{cases}$

22) $\begin{cases} \log_x 8 = y + 1, \\ x^y = 6 - x. \end{cases}$ 23) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$

24) $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} + 2^{\frac{y-x}{2}} = 2{,}5, \\ \lg(2x - y) + 1 = \lg(y + 2x) + \lg 6. \end{cases}$ 25) $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{y+x}{6}} = 6, \\ x^2 + 5y^2 = 6xy. \end{cases}$

26) $\begin{cases} 8^{\log_7(x-4y)} = 1, \\ 4^{x-2y} - 7 \cdot 2^{x-2y} = 8. \end{cases}$ 27) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \dfrac{65}{8}, \\ x + y = 34. \end{cases}$

28) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+3y}{y+5}} + 2 = 3\sqrt{\dfrac{y+5}{x+3y}}, \\ xy + 2x = 13 - 4y. \end{cases}$ 29) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2} + 1. \end{cases}$

30) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0, \\ x + y = 2. \end{cases}$ 31) $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 32, \\ \lg(x - y)^2 - 2\lg 2 = 0. \end{cases}$

32) $\begin{cases} \sqrt{(x + y)^2} = 3, \\ (x - y)^2 = 1. \end{cases}$ 33) $\begin{cases} 2^{\frac{1}{3}(x+y)} + 2^{\frac{1}{6}(x+y)} = 6, \\ x^2 + 5y^2 = 6xy. \end{cases}$

34) $\begin{cases} 2x - y = 7, \\ \log_2(x + y) - 2\log_2(y + 1) = -1. \end{cases}$ 35) $\begin{cases} x + y = 100, \\ \lg x - \lg y = \lg 4. \end{cases}$

36) $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(x + y)^2 - \lg x = 2\lg 3. \end{cases}$ 37) $\begin{cases} \log_{xy}(x - y) = 1, \\ \log_{xy}(x + y) = 0. \end{cases}$

38) $\begin{cases} \log_x(3x + 2y) = 2, \\ \log_y(2x + 3y) = 2. \end{cases}$ 39) $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ x + y = 20. \end{cases}$

40) $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y. \end{cases}$

41) $\begin{cases} \log_{0,5}(y - x) + \log_{0,5} \dfrac{1}{y} = -1, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

42) $\begin{cases} \log_3(2x - y + 2) = 2, \\ \log_2(x + y) - \log_{\sqrt{2}}(y + 1) = -1. \end{cases}$

43) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7, \\ \log_4(x + y) = 2. \end{cases}$

44) $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x - y) + \lg(x + y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$

45) $\begin{cases} 3^y \cdot 64^{1/x} = 36, \\ 5^y \cdot 512^{1/x} = 200. \end{cases}$ 46) $\begin{cases} 4^{x+y} = 2^{y-x}, \\ 4^{\log_{\sqrt{2}} x} = y^4 - 5. \end{cases}$

47) $\begin{cases} 8 \cdot (\sqrt{2})^{x-y} = (0{,}5)^{y-3}, \\ \log_3(x-2y) + \log_3(3x+2y) = 3. \end{cases}$

48) $\begin{cases} \log_9(x^9+1) - \log_3(y-2) = 0, \\ \log_2(x^2 - 2y^2 + 10y + 7) = 2. \end{cases}$

49) $\begin{cases} \dfrac{1+x^2+xy}{x+y} = 2 - y, \\ \log_{2^{1-y}} 2^{x^2} = 1 + y. \end{cases}$ 50) $\begin{cases} 3\log_{27} x + 2\log_9 y = 3\log_3 2, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

51) $\begin{cases} 4^{\log_2(x^2+y^2)} = 36, \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_4 5. \end{cases}$ 52) $\begin{cases} \log_2(y-x) = \log_8(3y-5x), \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

53) $\begin{cases} \log_9(x^2+2) + \log_{81}(y^2+9) = 2, \\ 2\log_4(x+y) - \log_2(x-y) = 0. \end{cases}$

54) $\begin{cases} 2(2\log_{y^2} x + \log_{1/x} y) = 3, \\ xy = 27. \end{cases}$ 55) $\begin{cases} \log_2(x(xy+1)^2) = 4, \\ \log_{4x} 2 = \log_4 \overline{xy+1}. \end{cases}$

56) $\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_x(x-3y) = 12, \\ x \cdot y^{\log_x y} = y^{5/2}. \end{cases}$

57) $\begin{cases} x \cdot 9^{y-x} + 2y \cdot 3^{-x-y} = 8 \cdot 3^{-2x+y}, \\ 3x \cdot 3^{2y+x} + 2y \cdot 3^{2x-y+1} = 72 \cdot 9^{x-y}. \end{cases}$

58) $\begin{cases} x \cdot 2^{x-y+1} + 3 \cdot y \cdot 2^{2x+y} = 2, \\ 2x \cdot 2^{2x+y} + 3 \cdot y \cdot 8^{x+y} = 1. \end{cases}$

59) $\begin{cases} \log_{1+x}(y^2 - 2y + 1) + \log_{1-y}(x^2 + 2x + 1) = 4, \\ \log_{1+x}(2y+1) + \log_{1-y}(2x+1) = 2. \end{cases}$

60) $\begin{cases} \log_{3+x}(xy + x + 3y + 3) + 0{,}5\log_{1+y}(x^2 + 6x + 9) = 3, \\ \log_{3+x}(0{,}5 - y) + \log_{1+y}(3x+8) = 1. \end{cases}$

61) $\begin{cases} yx^{\log_y x} = x^{5/2}, \\ \log_4 y \cdot \log_y(y - 3x) = 1. \end{cases}$ 62) $\begin{cases} 2(2\log_{y^2} x + \log_{1/x} y) = 3, \\ xy = 27. \end{cases}$

63) $\begin{cases} 2\log_{x^2} y + 3\log_{1/y} x = 2, \\ xy = 81. \end{cases}$ 64) $\begin{cases} \log_{|xy|}(x-y) = 1, \\ 2\log_5 |xy| \cdot \log_{|xy|}(x+y) = 1. \end{cases}$

65) $\begin{cases} \log_{x-y} \dfrac{xy}{2} = 2, \\ x + y = xy + 1. \end{cases}$ 66) $\begin{cases} \log_{|x+y|} \quad 4xy + (1+\sqrt{2})^2 \quad = 2, \\ x - y = 2xy. \end{cases}$

67) $\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{x-y}} = 2\sqrt{3}, \\ (x+y) \cdot 2^{y-x} = 3. \end{cases}$ 68) $\begin{cases} (2x-y)^{y/x} = 2, \\ (2x-y) \cdot 5^{x/y} = 1000. \end{cases}$

69) $\begin{cases} y^{x^2-5x+6}, \\ x+y=5. \end{cases}$ 70) $\begin{cases} y^{x^2+7x+12}=1, \\ x+y=6. \end{cases}$ 71) $\begin{cases} x^{y+4x}=y^{5(y-x/3)}, \\ x^3=y^{-1}. \end{cases}$

72) $\begin{cases} y^{1/2}=x^{-1}, \\ (xy)^x=y^{\frac{28-7y}{2}}. \end{cases}$ 73) $\begin{cases} x^{\frac{x+3y}{2}}=y^{62x-4y}, \\ y^3=\dfrac{1}{xy}. \end{cases}$

74) $\begin{cases} (xy)^y\cdot x^{6x}=y^x, \\ x^2y=1. \end{cases}$ 75) $\begin{cases} \sqrt{x+3y+1}=2, \\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6. \end{cases}$

76) $\begin{cases} \sqrt{y-x+1}=1, \\ \sqrt{x-2y+3}=3y-2x-1. \end{cases}$ 77) $\begin{cases} \sqrt{10x^2-xy-2y^2}=2(y-1), \\ 2x+y=2. \end{cases}$

78) $\begin{cases} x+y-\sqrt{4y^2-x^2}=4, \\ y^9\sqrt{4y^2-x^2}=0. \end{cases}$ 79) $\begin{cases} x-y+\sqrt{4x^2-y^2}=1, \\ x^7\cdot\sqrt{4x^2-y^2}=0. \end{cases}$

80) $\begin{cases} x^2-y\sqrt{xy}=36, \\ y^2-x\sqrt{xy}=72. \end{cases}$ 81) $\begin{cases} (2^x+1)2^{y+1}=9, \\ \sqrt{x+y^2}=x+y. \end{cases}$

82) $\begin{cases} \sqrt[4]{x}+\sqrt{y}\ \ \lg x=\dfrac{8}{3}\lg y, \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{y}\ \ \lg y=\dfrac{2}{3}\lg x. \end{cases}$ 83) $\begin{cases} 2\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y}=3\sqrt[6]{xy}, \\ x-y=63. \end{cases}$

84) $\begin{cases} \sqrt{x^3y}-\sqrt{y^3x}=-24, \\ \sqrt{xy}+5=y-x. \end{cases}$ 85) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}-1=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}, \\ \sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3}=5\sqrt{6}. \end{cases}$

86) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+3}=5. \end{cases}$ 87) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4. \end{cases}$

88) $\begin{cases} (13x^4y^2-6x^2-6y)x\sqrt{y}=356, \\ (5x^4y^2-6x^2-6y)x\sqrt{y}=100. \end{cases}$

89) $\begin{cases} \sqrt{3+\log_x(1-y)}=\lg_x(1-y), \\ xy=-6. \end{cases}$

90) $\begin{cases} 4\left(\dfrac{1}{4}\right)^{y-x}=\dfrac{1}{2^{x+2}}, \\ \sqrt{2x+1}+\sqrt{4x+2y+5}=\sqrt{2x+2y+4}. \end{cases}$

91) $\begin{cases} \log_2(10-3x)+\log_{1/2}(2x-5y)=0, \\ \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{11-3x}=\sqrt{4x+2y-12}. \end{cases}$

§ 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Системы уравнений, содержащие тригонометрические функции, решаются приемами, изложенными в § 2. Особенность состоит в том, что, как правило, такие системы имеют бесконечное множество решений, записываемое в виде серий решений, зависящих от целочисленных параметров.

Рассмотрим некоторые примеры.

3.1. Метод подстановки. Распространенным способом решения систем, содержащих тригонометрические функции, является метод подстановки.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 5 - 2\sqrt{6}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения $y = \pi/4 - x$. Подставляя $\pi/4 - x$ вместо y в первое уравнение, получаем уравнение

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 5 - 2\sqrt{6}. \tag{1}$$

Так как

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sin x \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}{\cos x \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \cos\dfrac{\pi}{4}}{\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\dfrac{\pi}{4}},$$

то уравнение (1) перепишется в виде

$$\frac{\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 5 - 2\sqrt{6}. \tag{2}$$

Уравнение

$$\frac{z - \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{z + \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 5 - 2\sqrt{6}$$

имеет единственный корень $z = \sqrt{3}/2$, следовательно, уравнение (1) равносильно уравнению

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Это уравнение имеет две серии решений:

$$x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{12} + \pi n, \quad n \in Z; \quad x_2 = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{12} + \pi m, \quad m \in Z.$$

Тогда находим соответствующие значения y:

$$y_1 = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{12} - \pi n, \quad n \in Z; \quad y_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{12} + \pi m, \quad m \in Z.$$

О т в е т. $x_1 = \dfrac{5\pi}{24} + \pi n$, $y_1 = \dfrac{\pi}{24} - \pi n$, $n \in Z$; $x_2 = \dfrac{\pi}{24} + \pi m$, $y_2 = \dfrac{5\pi}{24} - \pi m$, $m \in Z$.

3.2. Введение новых неизвестных. Иногда используется прием введения новых неизвестных.

П р и м е р 2. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y, \\ &\cos 2x = 0. \end{aligned}$$

Р е ш е н и е. Обозначим $\cos x$ через u и $\sin y$ через v. Тогда $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2u^2 - 1$, $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - v^2$ и данную систему можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &4v^2 + 4v - 6\sqrt{2}u - 9 = 0, \\ &2u^2 - 1 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Из второго уравнения системы (3) находим $u_1 = 1/\sqrt{2}$, $u_2 = -1/\sqrt{2}$. Подставляя $u_1 = 1/\sqrt{2}$ в первое уравнение системы (3), получаем

$$4v^2 + 4v - 15 = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) имеет корни $v_1 = 3/2$, $v_2 = -5/2$. Это значит, что пары чисел $(1/\sqrt{2}; 3/2)$, $(1/\sqrt{2}; -5/2)$ будут решениями системы (3). Подставляя $u_2 = -1/\sqrt{2}$ в первое уравнение системы (3), получаем

$$4v^2 + 4v - 3 = 0,$$

откуда $v_3 = 1/2$, $v_4 = -3/2$. Значит, система (3) имеет еще два решения: $(-1/\sqrt{2}; 1/2)$, $(-1/\sqrt{2}; -3/2)$.

Итак, множество решений исходной системы уравнений является объединением множество решений следующих четырех систем уравнений:

$$\begin{aligned} &\cos x = 1/\sqrt{2}, && \cos x = 1/\sqrt{2}, \\ &\sin y = 3/2, && \sin y = -5/2, \\ &\cos x = -1/\sqrt{2}, && \cos x = -1/2, \\ &\sin y = 1/2, && \sin y = -3/2. \end{aligned} \tag{5}$$

Так как числа $3/2$, $-5/2$, $-3/2$ не принадлежат области значений функции $z = \sin x$, то первая, вторая и четвертая системы уравнений из (5) не имеют решений. Следовательно, множество решений исходной системы уравнений совпадает с множеством решений системы

$$\begin{aligned}&\cos x = -1/\sqrt{2},\\ &\sin y = 1/2,\end{aligned}$$

откуда следует, что исходная система имеет решения

$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z; \quad y = (-1)^m\frac{\pi}{6} + \pi m, \quad m \in Z.$$

Ответ. $x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z; \quad y = (-1)^m\dfrac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in Z.$

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned}&\sin^2(-2x) - \;\; 3 - \sqrt{2} \;\; \operatorname{tg} 5y = \frac{3\sqrt{2}-1}{2},\\ &\operatorname{tg}^2 5y + \;\; 3 - \sqrt{2} \;\; \sin(-2x) = \frac{3\sqrt{2}-1}{2}.\end{aligned}$$

Решение. Введем обозначения $\sin(-2x) = u$, $\operatorname{tg} 5y = v$. Тогда систему можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&u^2 - \;\; 3 - \sqrt{2} \;\; v = \frac{3\sqrt{2}-1}{2},\\ &v^2 + \;\; 3 - \sqrt{2} \;\; u = \frac{3\sqrt{2}-1}{2}.\end{aligned} \tag{6}$$

Вычитая из первого уравнения этой системы второе, получаем систему

$$\begin{aligned}&u^2 - \;\; 3 - \sqrt{2} \;\; v = \frac{3\sqrt{2}-1}{2},\\ &u^2 - v^2 - \;\; 3 - \sqrt{2} \;\; (v + u) = 0,\end{aligned} \tag{7}$$

равносильную системе (6). Перепишем систему (7) в виде

$$\begin{aligned}&u^2 - \;\; 3 - \sqrt{2} \;\; v = \frac{3\sqrt{2}-1}{2},\\ &(u + v) \;\; u - v - 3 + \sqrt{2} \;\; = 0.\end{aligned}$$

Последняя система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{aligned}&u^2 - \;\; 3 - \sqrt{2} \;\; v = \frac{3\sqrt{2}-1}{2},\\ &v = -u,\\ &u^2 - \;\; 3 - \sqrt{2} \;\; v = \frac{3\sqrt{2}-1}{2},\\ &v = u - 3 + \sqrt{2}.\end{aligned} \tag{8}$$

Решим первую систему. Подставляя $(-u)$ вместо v в первое уравнение, получаем уравнение

$$u^2 - \left(3 - \sqrt{2}\right)(-u) - \frac{3\sqrt{2} - 1}{2} = 0,$$

которое имеет корни $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $u_2 = \frac{-6 + \sqrt{2}}{2}$. Таким образом, первая система совокупности (8) имеет решения

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}, &\qquad u_2 &= \frac{-6+\sqrt{2}}{2}, \\ v_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, &\qquad v_2 &= \frac{6-\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Решим вторую систему из (8). Подставляя $u - 3 + \sqrt{2}$ вместо v в первое уравнение, получаем уравнение

$$u^2 - \left(3 - \sqrt{2}\right)\left(u - 3 + \sqrt{2}\right) - \frac{3\sqrt{2} - 1}{2} = 0$$

или

$$u^2 - \left(3 - \sqrt{2}\right)u + \frac{23 - 15\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Последнее уравнение не имеет корней, так как его дискриминант D отрицателен:

$$D = \left(3 - \sqrt{2}\right)^2 - 2\left(23 - 15\sqrt{2}\right) = 24\sqrt{2} - 35 < 0.$$

Следовательно, вторая система совокупности (8) не имеет решений, и потому все решения системы (6) исчерпываются решениями первой системы. Итак, система, данная в условии, равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{aligned} \sin(-2x) &= \frac{\sqrt{2}}{2}, &\qquad \sin(-2x) &= \frac{-6+\sqrt{2}}{2}, \\ \operatorname{tg} 5y &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, &\qquad \operatorname{tg} 5y &= \frac{6-\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Вторая система этой совокупности решений не имеет, так как $\frac{-6+\sqrt{2}}{2} < -1$. Решая первую систему, получаем:

$$-2x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z,$$

или

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z;$$

$$5y = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, \quad k \in Z,$$

или

$$y = -\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi k}{5}, \quad k \in Z.$$

О т в е т. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; $y = -\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$.

3.3. Рассуждения с числовыми значениями. При решении тригонометрических систем применяют рассуждения с числовыми значениями.

П р и м е р 4. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &\sqrt{\sin x}\cdot\cos y = 0,\\ &2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{aligned}$$

Р е ш е н и е. Пусть $(x_0; y_0)$ есть решение исходной системы; тогда выполняются равенства

$$\begin{aligned} &\overline{\sin x_0}\cdot\cos y_0 = 0,\\ &2\sin^2 x_0 - \cos 2y_0 - 2 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Из первого равенства следует, что либо $\sin x_0 = 0$, либо $\cos y_0 = 0$. Если $\sin x_0 = 0$, то из второго равенства заключаем, что $\cos 2y_0 = -2$, чего не может быть. Следовательно, $\cos y_0 = 0$, т.е. $y_0 = \pi/2 + \pi m$, $m \in Z$, но тогда, так как $\cos 2y_0 = -1$ и должно выполняться неравенство $\sin x_0 \geqslant 0$, из второго равенства (9) следует, что $\sin x_0 = 1/\sqrt{2}$, т.е. $x_0 = (-1)^k\pi/4 + \pi k$, $k \in Z$.

Итак, если пара чисел $(x_0; y_0)$ — решение системы, то

$$x_0 = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z; \quad y_0 = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in Z.$$

Легко проверить, что все пары чисел $(x; y)$, где

$$x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z; \quad y = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in Z,$$

действительно являются решениями исходной системы уравнений.

О т в е т. $x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$, $y = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$.

П р и м е р 5. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &\sin x\cdot\sin y = \frac{1}{4},\\ &3\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y. \end{aligned}$$

Р е ш е н и е. Пусть пара чисел $(x_0; y_0)$ есть решение данной системы уравнений. Тогда справедливы равенства

$$\sin x_0\cdot\sin y_0 = \frac{1}{4}, \quad \frac{3\sin x_0}{\cos x_0} = \frac{\cos y_0}{\sin y_0},$$

из которых следует, что

$$\sin x_0\cdot\sin y_0 = \frac{1}{4}, \quad \cos x_0\cdot\cos y_0 = \frac{3}{4}.$$

Складывая и вычитая эти равенства, найдем, что

$$\cos(x_0 - y_0) = 1, \quad \cos(x_0 + y_0) = \frac{1}{2}.$$

Значит, числа x_0 и y_0 таковы, что для некоторых k и m ($k \in Z$, $m \in Z$) справедливы равенства

$$x_0 - y_0 = 2\pi k, \quad x_0 + y_0 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m.$$

Отсюда

$$x_0 = \frac{\pi}{6} + \pi(k+m) \quad \text{и} \quad y_0 = \frac{\pi}{6} + \pi(m-k) \tag{10}$$

или

$$x_0 = -\frac{\pi}{6} + \pi(k+m) \quad \text{и} \quad y_0 = -\frac{\pi}{6} + \pi(m-k). \tag{11}$$

Итак, каждая пара чисел (x_0, y_0), удовлетворяющая исходной системе уравнений, имеет вид (10) или (11) с некоторыми целыми k и m. Легко видеть, что любая такая пара чисел есть решение исходной системы уравнений и, значит, все решения имеют вид (10) или (11), где $k \in Z$, $m \in Z$.

О т в е т. $\begin{array}{ll} x_1 = \pi\ \ 6 + \pi(k+m), & x_2 = -\pi\ \ 6 + \pi(k+m), \\ y_1 = \pi\ \ 6 + \pi(m-k), & y_2 = -\pi\ \ 6 + \pi(m-k), \end{array}$

$k \in Z$, $m \in Z$.

Упражнения

Решить систему уравнений.

1) $\begin{cases} \cos 4x + \sin 2y = -2, \\ x - y = 2\pi. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3\sin 3x + \cos y = -4, \\ x + y = 3\pi/2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \dfrac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}, \\ x - y = \pi/2. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3\cos 4x + \sin 3y = 4, \\ 2x + 3y = 3\pi/2. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 3/4, \\ x + y = 2\pi/3. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \cos^2 x + \sin^4 y = 3/4, \\ x + y = \pi/2. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ x + y = \pi/4. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{3}{2}, \\ x + y = \pi/2. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y, \\ x + y = \pi/6. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ x^2 + y^2 = 2, \end{cases}$

11) $\begin{cases} \cos x \cdot \cos y - 1 = 2\sin\dfrac{x}{2} \cdot \sin y \cdot \cos\dfrac{x}{2}, \\ y - 2x = \pi. \end{cases}$

12) $\begin{cases} \sin\dfrac{\pi x^2}{2} = 1, \\ |x| + |y| = 3. \end{cases}$ 13) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 3, \\ |x - y| = \pi/3. \end{cases}$

14) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x + y), \\ |x| + |y| = 1. \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x + \sin(x + y) = 3/2, \\ 3x - \sin(x + y) = 5/2. \end{cases}$

16) $\begin{cases} \cos(2x + 6\sin^2 y) = 1, \\ 3x - 3\sin^2 y = -10. \end{cases}$ 17) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1/2. \end{cases}$

18) $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 1/4, \\ \sin y \cdot \cos x = 3/4. \end{cases}$ 19) $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -1/2, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} y = 1. \end{cases}$

20) $\begin{cases} \cos y \cdot \cos x = -1/4, \\ \operatorname{tg} y = \operatorname{ctg} x. \end{cases}$

21) $\begin{cases} \sin y \cdot \cos x + \sin x = 0, \\ 2\cos^2 y + \sin y \cdot \sin x = \cos 2y \cdot \cos x. \end{cases}$

22) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x + \sin 2y = \sin 2x, \\ 2\sin y \cdot \sin(x + y) = \cos x. \end{cases}$ 23) $\begin{cases} 4\operatorname{tg} x = 3\operatorname{tg} 2y, \\ 2\sin x \cdot \cos(x - y) = \sin y. \end{cases}$

24) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x + \sin 2y = \sin 2x, \\ 2\sin y \cdot \sin(x + y) = \cos x. \end{cases}$

25) $\begin{cases} 1 + 2\cos 2x = 0, \\ \sqrt{6}\cos y + 4\sin x = 2\sqrt{3}(1 + \sin^2 y). \end{cases}$

26) $\begin{cases} 2\sqrt{3}\cos x + 6\sin y = 3 + 12\sin^2 x, \\ 4\sqrt{3}\cos x + 2\sin y = 7. \end{cases}$

27) $\begin{cases} \sin x \cdot \cos 2y + \sin y \cdot \cos 2x + \sin y = 1, \\ 2\cos 2x + 8\cos x \cdot \cos y + 7 = 4\sin y. \end{cases}$

28) $\begin{cases} \cos x \cdot \cos 2y + \sin y \cdot \cos 2x + 2\cos x = 1, \\ \cos 2x + 3\cos 2y + 8\sin y = 8 + 4\sin x \cdot \cos y. \end{cases}$

29) $\begin{cases} 2\sqrt{3}\cos x + 6\sin y = 3 + 12\sin^2 x, \\ 4\sqrt{3}\cos x + 2\sin y = 7. \end{cases}$

30) $\begin{cases} 2(5 + 2\sqrt{6})\sin x + 2\cos y = 2\sqrt{2}\cos 2x - 5\sqrt{2} - 3\sqrt{3}, \\ 2(3 + \sqrt{6})\sin x + 2\cos y + 3\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0. \end{cases}$

31) $\begin{cases} \sin^2 3x + (4 - \sqrt{3})\operatorname{ctg}(-7y) = 2\sqrt{3} - 3/4, \\ \operatorname{ctg}^2(-7y) + (4 - \sqrt{3})\sin 3x = 2\sqrt{3} - 3/4. \end{cases}$

32) $\begin{cases} \cos^2 4x + \dfrac{\sqrt{26} - 2}{2}\operatorname{tg}(-2y) = \dfrac{\sqrt{26} - 1}{4}, \\ \operatorname{tg}^2(-2y) - \dfrac{\sqrt{26} - 2}{2}\cos 4x = \dfrac{\sqrt{26} - 1}{4}. \end{cases}$

33) $$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\cos(\pi/4 - x)}}(\sin^2 x + \operatorname{ctg} y - 1) = 0, \\ \cos^2 x + \dfrac{1}{4}\operatorname{tg} y - 1 = 0. \end{cases}$$

34) $$\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \cos y = 0, \\ 2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

35) $$\begin{cases} \lg \operatorname{ctg} x + \lg \operatorname{ctg} y = 0, \\ \operatorname{ctg} y = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sin x}. \end{cases}$$

36) $$\begin{cases} \lg \operatorname{tg} x + \lg \operatorname{tg} y = 0, \\ 2\operatorname{tg} x = \dfrac{3}{\cos y}. \end{cases}$$

37) $$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} - \operatorname{ctg}\dfrac{z}{2} = 0, \\ \cos(x - y - z) = 1/2, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

38) $$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z = 3, \\ \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = 6, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

39) $$\begin{cases} 1 + \dfrac{\log_2 21 - 1}{\log_2 \dfrac{x-y}{21}} = \log_{\frac{x-y}{21}} 2 \cdot \log_2(x+y), \\ \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi(x-2)}{2} = \cos\dfrac{\pi y}{2} - \sin\dfrac{\pi y}{2}. \end{cases}$$

40) $$\begin{cases} \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}\dfrac{y-5}{2}, \\ 2x + 3\log_{4x/\pi} \sqrt[3]{\dfrac{\pi^2 x}{16}} = \dfrac{3}{4}\log_{\sqrt[4]{4x/\pi}} \dfrac{4x^2}{\pi} - 4^{3\log_8 \sqrt{y}}. \end{cases}$$

§ 4. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, РЕШАЕМЫЕ НЕСТАНДАРТНЫМИ МЕТОДАМИ

К нестандартным мы относим задачи, в решении которых используется какая-либо специфическая идея, т.е. идея, связанная с данной конкретной задачей. Трудно дать рецепты решения подобных задач. Каждая из них требует определенной фантазии, выдумки, «озарения». Все это, конечно, возможно лишь на базе прочно усвоенных методов решения типичных задач. Поэтому мы приводим здесь лишь отдельные примеры, показавшиеся нам наиболее характерными.

4.1. Системы уравнений, в которых неизвестных больше, чем уравнений. Как правило, количество неизвестных в системе уравнений и количество уравнений совпадают. Но иногда бывают задачи, где число уравнений меньше числа неизвестных. В таких случаях обычно структура уравнений скрывает какие-либо дополнительные ограничения на неизвестные. В следующей задаче по одному уравнению от двух неизвестных удается построить равносильную ей систему двух уравнений и найти все ее решения.

П р и м е р 1. Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$8\cos x \cdot \cos y \cdot \cos(x-y) + 1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Так как

$$2\cos x \cdot \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y),$$

то справедливо тождество

$$8\cos x \cdot \cos y \cdot \cos(x-y) + 1 = 4\cos^2(x-y) + \\ + 4\cos(x+y)\cdot\cos(x-y) + 1 = [2\cos(x-y) + \cos(x+y)]^2 + \\ + 1 - \cos^2(x+y) = [2\cos(x-y) + \cos(x+y)]^2 + \sin^2(x+y),$$

из которого следует, что заданное уравнение выполнено тогда и только тогда, когда пара чисел $(x; y)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} 2\cos(x-y) + \cos(x+y) = 0, \\ \sin(x+y) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Из второго уравнения этой системы следует, что $x + y = \pi n$, $n \in Z$, т.е. $y = -x + \pi n$, $n \in Z$. Подставляя выражение $-x + \pi n$ вместо y в левую часть первого уравнения системы (1), находим, что она равна

$$2\cos(2x - \pi n) + \cos \pi n = (-1)^n(2\cos 2x + 1),$$

т.е. первое уравнение системы (1) превращается в уравнение

$$2\cos 2x + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет решения $x = \pm\pi/3 + \pi k$, $k \in Z$. Следовательно, все решения исходного уравнения содержатся среди пар чисел

$$x_1 = \pi/3 + \pi k,\ k \in Z, \quad y_1 = -\pi/3 + \pi m,\ m \in Z;$$
$$x_2 = -\pi/3 + \pi k,\ k \in Z, \quad y_2 = \pi/3 + \pi m,\ m \in Z.$$

Проверкой убеждаемся, что все эти пары чисел удовлетворяют исходному уравнению.

О т в е т. $\left(\frac{\pi}{3} + \pi k; -\frac{\pi}{3} + \pi m\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi m\right)$, $k, m \in Z$.

В следующей задаче от одного уравнения с двумя неизвестными удается перейти к его следствию: системе двух уравнений с двумя неизвестными, что затем приводит к решению задачи.

П р и м е р 2. Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{3 + 2\cos(x-y)}{2} = \sqrt{3 + 2x - x^2}\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right) + \frac{\sin^2(x-y)}{2}. \qquad (2)$$

Р е ш е н и е. Пусть пара чисел $(x_0; y_0)$ удовлетворяет условию задачи, т.е. пусть для нее выполнено равенство

$$\frac{3 + 2\cos(x_0-y_0)}{2} = \sqrt{3 + 2x_0 - x_0^2}\cos^2\left(\frac{x_0-y_0}{2}\right) + \frac{\sin^2(x_0-y_0)}{2}.$$

Используя формулы $\cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1$ и $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, это равенство можно записать в виде

$$\frac{3}{2} + 2\cos^2\left(\frac{x_0 - y_0}{2}\right) - 1 =$$
$$= \sqrt{3 + 2x_0 - x_0^2}\cdot\cos^2\left(\frac{x_0 - y_0}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2(x_0 - y_0)$$

или в виде

$$\cos^2\left(\frac{x_0 - y_0}{2}\right)\left(\sqrt{4 - (x_0 - 1)^2} - 2\right) = \frac{1}{2}\cos^2(x_0 - y_0). \qquad (3)$$

Если $\cos\dfrac{x_0 - y_0}{2} = 0$, то $\cos(x_0 - y_0) = 2\cos^2\left(\dfrac{x_0 - y_0}{2}\right) - 1 = -1$, что противоречит равенству (3). Значит, $\cos\dfrac{x_0 - y_0}{2} \neq 0$ и $\cos^2\dfrac{x_0 - y_0}{2} > 0$. Если $x_0 \neq 1$, то $4 - (x_0 - 1)^2 < 4$ и $\sqrt{4 - (x_0 - 1)^2} - 2 < 0$. Но тогда левая часть равенства (3) отрицательна, а правая неотрицательна, что невозможно. Следовательно, $x_0 = 1$. Теперь из (3) следует, что $\cos(x_0 - y_0) = 0$, т.е. все решения уравнения (2) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x = 1, \\ \cos(x - y) = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим, что

$$y - 1 = \pi/2 + \pi n, \quad n \in Z,$$

или

$$y = 1 + \pi/2 + \pi n, \quad n \in Z.$$

Проверкой убеждаемся, что любая пара чисел $x = 1$, $y = 1 + \pi/2 + \pi n$ при любом целом n удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $\left(1; 1 + \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

В случае когда количество неизвестных в системе больше числа уравнений, система может иметь бесконечное множество решений. Встречаются задачи, где не требуется найти это бесконечное множество, а лишь определить в нем решения с некоторыми специальными свойствами.

Пример 3. Среди всех четверок чисел $(x; y; z; v)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ z^2 + v^2 = 25, \\ xv + yz = 5\sqrt{3}, \end{cases}$$

найти такие, при которых выражение $x+z$ принимает наибольшее значение.

Решение. Из тождества

$$(x^2 + y^2)(z^2 + v^2) = (xv + yz)^2 + (xz - yv)^2$$

следует, что для любого решения $(x; y; z; v)$ заданной системы уравнений должно выполняться равенство

$$(xz - yv)^2 = 3 \cdot 25 - (5\sqrt{3})^2 = 0,$$

или

$$xz - yv = 0.$$

А так как

$$(x+z)^2 + (y-v)^2 = (x^2+y^2) + (z^2+v^2) + 2(xz - yv) = 28, \qquad (4)$$

то для любого решения справедливо неравенство

$$(x+z)^2 \leqslant 28, \quad \text{или} \quad x + z \leqslant \sqrt{28}.$$

Найдем теперь решения, при которых

$$x + z = \sqrt{28}. \qquad (5)$$

Из (4) следует, что для этих решений должно выполняться равенство $v = y$. Пользуясь равенством (5), из последнего уравнения заданной системы находим

$$v = y = \frac{5\sqrt{3}}{x+z} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{28}}.$$

Но тогда $x^2 = 3 - y^2 = \frac{9}{28}$, $z^2 = 25 - v^2 = \frac{625}{28}$ и с учетом (5) получаем $x = \frac{3}{\sqrt{28}}$, $z = \frac{25}{\sqrt{28}}$.

Ответ. $x = \frac{3}{\sqrt{28}}$, $y = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{28}}$, $v = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{28}}$, $z = \frac{25}{\sqrt{28}}$.

Какое-либо дополнительное ограничение в условии задачи, например целочисленность неизвестных, также способствует решению в случае, если переменных больше, чем уравнений.

Пример 4. Найти все тройки целых чисел $(u; v; w)$, удовлетворяющих уравнению

$$3(u-3)^2 + 6v^2 + 2w^3 + 3v^2w^2 = 33.$$

Решение. Пусть $(u_0; v_0; w_0)$ — тройка чисел, удовлетворяющая условию задачи, тогда

$$3(u_0-3)^2 + 6v_0^2 + 2w_0^3 + 3v_0^2w_0^2 = 33, \qquad (6)$$

откуда следует, в частности, что $3(u_0 - 3)^2 \leqslant 33$, т.е. $(u_0 - 3)^2 \leqslant 11$. Поскольку $(u_0 - 3)^2$ является квадратом целого числа $u_0 - 3$, то $(u_0 - 3)^2$ равно либо 0, либо 1, либо 4, либо 9. Перепишем равенство (6) в виде

$$3(u_0-3)^2 + (w_0^2+2)(3v_0^2+2) = 37.$$

Если $(u_0 - 3)^2 = 0$, то $(w_0^2 + 2)(3v_0^2 + 2) = 37$. Так как $w_0^2 + 2$ и $3v_0^2 + 2$ — целые числа, большие 1, а 37 — простое число, то последнее равенство выполняться не может. Значит, $(u_0 - 3)^2 \neq 0$.

Если $(u_0-3)^2=1$, то $(w_0^2+2)(3v_0^2+2)=34$. Поскольку $w_0^2+2\geqslant 2$, $3v_0^2+2\geqslant 2$ и w_0^2+2, $3v_0^2+2$ — целые числа, то либо

$$\begin{aligned} w_0^2+2&=2,\\ 3v_0^2+2&=17, \end{aligned} \tag{7}$$

либо

$$\begin{aligned} w_0^2+2&=17,\\ 3v_0^2+2&=2. \end{aligned} \tag{8}$$

Из второго равенства (7) находим, что $v_0^2=5$, что невозможно, поскольку v_0 — целое число. Из первого равенства (8) находим, что $w_0^2=15$, что также невозможно, поскольку w_0 — целое число. Значит, $(u_0-3)^2\neq 1$.

Если $(u_0-3)^2=4$, то $(w_0^2+2)(3v_0^2+2)=25$ и так как $w_0^2+2\geqslant 2$, $3v_0^2+2\geqslant 2$, то отсюда следует, что

$$\begin{aligned} w_0^2+2&=5,\\ 3v_0^2+2&=5. \end{aligned} \tag{9}$$

Из первого равенства (9) находим, что $w_0^2=3$, что невозможно. Значит, $(u_0-3)^2\neq 4$.

Если $(u_0-3)^2=9$, т.е. если $u_0=6$ или $u_0=0$, то

$$(w_0^2+2)(3v_0^2+2)=10.$$

Так как $w_0^2+2\geqslant 2$ и $3v_0^2+2\geqslant 2$, то отсюда следует, что либо

$$\begin{aligned} w_0^2+2&=5,\\ 3v_0^2+2&=2 \end{aligned} \tag{10}$$

либо

$$\begin{aligned} w_0^2+2&=2,\\ 3v_0^2+2&=5. \end{aligned} \tag{11}$$

Из первого равенства (10) следует, что $w_0^2=3$, что невозможно. Из равенств (11) получаем, что либо $w_0=0$, $v_0=1$, либо $w_0=0$, $v_0=-1$. Итак, тройка чисел u_0, v_0, w_0, удовлетворяющая условию задачи, может быть лишь среди чисел четырех троек: $(6;1;0)$, $(6;-1;0)$, $(0;1;0)$, $(0;-1;0)$. Легко видеть, что все эти тройки чисел удовлетворяют условию задачи.

Следовательно, исходному соотношению удовлетворяют четыре тройки чисел: $(6;1;0)$, $(6;-1;0)$, $(0;1;0)$, $(0;-1;0)$.

Ответ. $(6;1;0)$, $(6;-1;0)$, $(0;1;0)$, $(0;-1;0)$.

4.2. Использование неравенств при решении систем уравнений. Часто уравнения системы приводят к ограничениям на неизвестные в виде неравенств. Выделение этих дополнительных условий, возникающих в ходе решения задачи, и использование их совместно с заданными уравнениями иногда позволяет легко найти все решения системы.

П р и м е р 5. Решить систему уравнений

$$\begin{gathered} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0. \end{gathered}$$

Р е ш е н и е. Пусть (x_0, y_0) — решение данной системы. Тогда справедливы числовые равенства

$$\begin{gathered} x_0^2y_0^2 - 2x_0 + y_0^2 = 0, \\ 2x_0^2 - 4x_0 + 3 + y_0^3 = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Запишем первое равенство в виде

$$y_0^2 = \frac{2x_0}{1 + x_0^2}. \tag{13}$$

Из неравенства $(1 - x_0)^2 \geqslant 0$ следует неравенство

$$\frac{2x_0}{1 + x_0^2} \leqslant 1.$$

Учитывая это неравенство, из равенства (13) заключаем, что $y_0^2 \leqslant 1$, т.е. что $|y_0| \leqslant 1$.

Второе из равенств (12) запишем в виде

$$2(x_0 - 1)^2 + 1 + y_0^3 = 0. \tag{14}$$

Так как $|y_0| \leqslant 1$, то $1 + y_0^3 \geqslant 1 - |y_0|^3 \geqslant 0$. Следовательно, равенство (14) может выполняться только в случае $(x_0 - 1)^2 = 0$ и $1 + y_0^3 = 0$, т.е. для $x_0 = 1$ и $y_0 = -1$.

Итак, показано, что только пара чисел $(1; -1)$ может быть решением исходной системы. Легко видеть, что действительно эта пара чисел $x_0 = 1$ и $y_0 = -1$ удовлетворяет исходной системе уравнений. Следовательно, исходная система уравнений имеет единственное решение: $x_0 = 1$, $y_0 = -1$.

О т в е т. $(1; -1)$.

П р и м е р 6. Решить систему уравнений

$$\begin{gathered} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{gathered}$$

Если ввести обозначение $f(t) = t^2 - 3t + 3$, то систему можно переписать в виде

$$\begin{gathered} y^3 = 9f(x), \\ z^3 = 9f(y), \\ x^3 = 9f(z). \end{gathered}$$

П е р в о е р е ш е н и е. Из равенства

$$t^2 - 3t + 3 = (t - 3/2)^2 + 3/4$$

следует, что функция $y = f(t)$ принимает наименьшее значение, равное $3/4$, в точке $t = 3/2$. Поэтому если (x_0, y_0, z_0) решение данной системы, то

$$y_0^3 \geqslant \frac{27}{4}, \quad z_0^3 \geqslant \frac{27}{4}, \quad x_0^3 \geqslant \frac{27}{4}.$$

Поскольку $27/4 > (3/2)^3$, то $x_0 > 3/2$, $y_0 > 3/2$, $z_0 > 3/2$. В области $t > 3/2$ функция $f(t)$ монотонно возрастает. Таким образом, если (x_0, y_0, z_0) — решение данной системы, то все три числа x_0, y_0, z_0 лежат в области монотонного возрастания функции $f(t)$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x_0 \geqslant y_0$. Так как $x_0 > 3/2$ и $y_0 > 3/2$, то $f(x_0) \geqslant f(y_0)$. Из первых двух уравнений системы получаем, что $y_0^3 \geqslant z_0^3$, т.е. $y_0 \geqslant z_0$. Так как $y_0 > 3/2$ и $z_0 > 3/2$, то отсюда следует, что $f(y_0) \geqslant f(z_0)$ или $z_0^3 \geqslant x_0^3$, т.е. $z_0 \geqslant x_0$. Итак, получили цепочку неравенств $x_0 \geqslant y_0 \geqslant z_0 \geqslant x_0$, которая означает, что $x_0 = y_0 = z_0$.

2) Пусть $x_0 \leqslant y_0$. Так как $x_0 > 3/2$ и $y_0 > 3/2$, то $f(x_0) \leqslant f(y_0)$. Подобно первому случаю, находим, что $y_0^3 \leqslant z_0^3$ или $y_0 \leqslant z_0$. Отсюда следует, что $f(y_0) \leqslant f(z_0)$ или $z_0^3 \leqslant x_0^3$, $z_0 \leqslant x_0$. Опять получаем, что $x_0 = y_0 = z_0$.

Итак, показано, что любое решение системы $(x_0; y_0; z_0)$ таково, что $x_0 = y_0 = z_0$. Поскольку любое решение системы $(x_0; y_0; z_0)$ должно превращать все уравнения системы в верные числовые равенства, то, полагая $x_0 = y_0 = z_0 = t_0$, получаем, что все уравнения системы превратились в одно и то же равенство $(t_0 - 3)^3 = 0$, которое справедливо только при одном значении t_0, а именно при $t_0 = 3$. Значит, система имеет единственное решение $(3; 3; 3)$.

В т о р о е р е ш е н и е. Так как квадратный трехчлен $t^2 - 3t + 3$ положителен при всех t, то для любого решения $(x_0; y_0; z_0)$ данной системы получаем, что $y_0^3 > 0, z_0^3 > 0, x_0^3 > 0$ или $x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0$. Складывая все три равенства: $y_0^3 = 9f(x_0)$, $z_0^3 = 9f(y_0)$, $x_0^3 = 9f(z_0)$, находим, что

$$(x_0 - 3)^3 + (y_0 - 3)^3 + (z_0 - 3)^3 = 0. \tag{15}$$

Возможны два случая: $x_0 \geqslant 3$ и $0 < x_0 < 3$.

1) Если $x_0 \geqslant 3$, то из последнего уравнения системы находим, что $9z_0^2 - 27z_0 \geqslant 0$. Так как $z_0 > 0$, то отсюда получаем, что $z_0 \geqslant 3$. Из второго уравнения получаем теперь, что $9y_0^2 - 27y_0 \geqslant 0$, откуда $y_0 \geqslant 3$. Итак, $x_0 \geqslant 3$, $y_0 \geqslant 3$, $z_0 \geqslant 3$. Сумма неотрицательных чисел равняется нулю тогда, когда каждое из этих чисел равно нулю, поэтому из (15) следует, что $x_0 = y_0 = z_0 = 3$. Итак, если (x_0, y_0, z_0) — решение системы, то $x_0 = y_0 = z_0 = 3$. Проверкой убеждаемся, что действительно тройка чисел $(3; 3; 3)$ есть решение системы.

2) Если $x_0 < 3$, то, подобно первому случаю, находим, что $z_0 < 3$. Затем из второго уравнения получаем, что $y_0 < 3$. Итак, в этом случае одновременно $x_0 < 3$, $y_0 < 3$, $z_0 < 3$, что противоречит равенству (15). Значит, доказано, что данная система имеет единственное решение $x_0 = y_0 = z_0 = 3$.

О т в е т. $(3; 3; 3)$.

4.3. Системы уравнений с дополнительными условиями. Встречаются системы, включающие помимо уравнений какие-либо и иные ограничения на неизвестные. Например, это могут быть условия положительности неизвестных, какие-либо неравенства между ними, условия целочисленности решений и т.д.

Пример 7. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y+2=(3-x)^3, \\ (2z-y)(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \geqslant 0$.

Решение. Пусть (x_0, y_0, z_0) — решение системы, удовлетворяющее условию $z_0 \geqslant 0$. Тогда справедливы числовые равенства

$$\begin{cases} y_0+2=(3-x_0)^3, \\ (2z_0-y_0)(y_0+2)=9+4y_0, \\ x_0^2+z_0^2=4x_0. \end{cases} \tag{16}$$

Выделив во втором равенстве полный квадрат относительно y_0, а в третьем — относительно x_0, перепишем эти равенства в виде

$$\begin{cases} (3-x_0)^3=y_0+2, \\ (y_0+3-z_0)^2=z_0^2-2z_0, \\ (x_0-2)^2=4-z_0^2. \end{cases}$$

Отсюда ясно, что должны быть справедливы неравенства $z_0^2-2z_0 \geqslant 0$ и $4-z_0^2 \geqslant 0$. Кроме того, $z_0 \geqslant 0$. Итак, если (x_0, y_0, z_0) — решение исходной системы, удовлетворяющее условию $z_0 \geqslant 0$, то должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} z_0(z_0-2) \geqslant 0, \\ -2 \leqslant z_0 \leqslant 2, \\ z_0 \geqslant 0. \end{cases}$$

Этим неравенствам удовлетворяют только два числа: $z_0=0$ и $z_0=2$, но тогда из равенств (16) получаем, что либо $x_0=4$, $y_0=-3$, $z_0=0$, либо $x_0=2$, $y_0=-1$, $z_0=2$. Легко видеть, что тройка чисел $x_0=4$, $y_0=-3$, $z_0=0$ и тройка чисел $x_0=2$, $y_0=-1$, $z_0=2$ удовлетворяют исходной системе уравнений и условию $z_0 \geqslant 0$. Значит, исходная система имеет два решения, удовлетворяющих условию $z \geqslant 0$, а именно: $(4; -3; 0)$ и $(2; -1; 2)$.

Ответ. $(4; -3; 0)$, $(2; -1; 2)$.

Пример 8. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \left| y+\dfrac{1}{x} \right| + \left| \dfrac{13}{6}+x-y \right| = \dfrac{13}{6}+x+\dfrac{1}{x}, \\ x^2+y^2=\dfrac{97}{36}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $x<0$ и $y>0$.

Р е ш е н и е. Пусть пара чисел (x_0, y_0) удовлетворяет условиям задачи; тогда для нее справедливы следующие равенства и неравенства:

$$y_0 + \frac{1}{x_0} \;\; + \;\; \frac{13}{6} + x_0 - y_0 \;\; = \frac{13}{6} + x_0 + \frac{1}{x_0},$$

$$y_0^2 + x_0^2 = \frac{97}{36}, \quad x_0 < 0,\; y_0 > 0.$$

Обозначим $a = y_0 + 1/x_0$, $b = 13/6 + x_0 - y_0$; тогда первое из этих равенств можно записать в виде

$$|a| + |b| = a + b.$$

Из свойств абсолютных величин вытекает, что это равенство выполняется тогда и только тогда, когда $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, а это означает, что справедливы неравенства

$$y_0 + \frac{1}{x_0} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{13}{6} + x_0 - y_0 \geqslant 0.$$

Перепишем их в виде $y_0 > -1/x_0$, $y_0 \leqslant 13/6 + x_0$, откуда следует, что справедливо неравенство

$$-\frac{1}{x_0} \leqslant \frac{13}{6} + x_0.$$

Поскольку $x_0 < 0$, то это неравенство можно переписать в виде

$$x_0^2 + \frac{13}{6}x_0 + 1 \leqslant 0. \tag{17}$$

Далее, так как $0 < y_0 \leqslant 13/6 + x_0$, то $y_0^2 \leqslant (13/6 + x_0)^2$ и, следовательно,

$$x_0^2 + y_0^2 \leqslant x_0^2 + \quad \frac{13}{6} + x_0 \quad ^2 .$$

Поскольку $x_0^2 + y_0^2 = \dfrac{97}{36}$, то справедливо неравенство

$$\frac{97}{36} \leqslant x_0^2 + \quad \frac{13}{6} + x_0 \quad ^2$$

или неравенство

$$x_0^2 + \frac{13}{6}x_0 + 1 \geqslant 0. \tag{18}$$

Сравнивая неравенства (17) и (18), приходим к выводу, что $x_0^2 + \dfrac{13}{6}x_0 + 1 = 0$, т.е. что x_0 есть одно из чисел $x_0^{(1)} = -3/2$ и $x_0^{(2)} = -2/3$. Но тогда из условий $x_0^2 + y_0^2 = \dfrac{97}{36}$ и $y_0 > 0$ получаем, что $y_0^{(1)} = 2/3$ и $y_0^{(2)} = 3/2$.

Итак, каждая пара чисел $(x_0; y_0)$, удовлетворяющая условиям задачи, находится среди следующих двух пар чисел: $(-3/2; 2/3)$ и $(-2/3; 3/2)$. Проверкой убеждаемся, что обе эти пары удовлетворяют всем условиям задачи.

О т в е т. $(-3/2; 2/3)$, $(-2/3; 3/2)$.

4.4. Системы уравнений с параметрами. Системы уравнений с параметрами мы относим к нестандартным задачам, так как в них приходится решать, как правило, бесконечное множество систем уравнений, соответствующих бесконечному множеству значений параметров данной задачи.

Пример 9. Для каждого значения параметра a решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &ax + 2y = a + 2,\\ &2ax + (a+1)y = 2a + 4. \end{aligned}$$

Решение. При любом фиксированном a из первого уравнения системы находим $y = \dfrac{a+2-ax}{2}$. Подставляя это выражение во второе уравнение системы, находим, что исходная система при любом фиксированном a равносильна системе уравнений

$$\begin{aligned} &y = \frac{a+2-ax}{2},\\ &a(a-3)x = (a+2)(a-3). \end{aligned} \tag{19}$$

Если $a = 0$, то система (19) несовместна. Если $a = 3$, то система (19) имеет бесконечно много решений вида $x = d$, $y = \dfrac{5-3d}{2}$, где d — любое число. Если $a \neq 0$ и $a \neq 3$, то система (19) имеет единственное решение $x = \dfrac{a+2}{a}$, $y = 0$.

Ответ. Если $a \neq 0$ и $a \neq 3$, то $x = \dfrac{a+2}{a}$, $y = 0$; если $a = 3$, то $x = d$, $y = \dfrac{5-3d}{2}$, где $d \in R$; если $a = 0$, то решений нет.

Пример 10. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 = 1,\\ &x + y = a \end{aligned}$$

имеет единственное решение.

Решение. Пусть a — некоторое число, удовлетворяющее условию задачи, и $(x_0; y_0)$ — единственное решение данной системы уравнений. Очевидно, что пара чисел $(y_0; x_0)$ также будет решением системы. Следовательно, $x_0 = y_0$ и из первого уравнения системы получаем, что либо $x_0 = y_0 = 1/\sqrt{2}$ и тогда $a = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$, либо $x_0 = y_0 = -1/\sqrt{2}$ и тогда $a = -\sqrt{2}$. Решая систему уравнений при $a = \sqrt{2}$ и $a = -\sqrt{2}$, убеждаемся, что и в том и в другом случаях она не имеет решений, отличных от уже указанных.

В т о р о е   р е ш е н и е. Исходная система уравнений равносильна при любом фиксированном a системе уравнений

$$\begin{aligned} &y = a - x, \\ &x^2 + (a - x)^2 = 1. \end{aligned}$$

Эта система будет иметь единственное решение только тогда, когда второе ее уравнение будет иметь единственный корень. Перепишем второе уравнение в виде

$$2x^2 - 2ax + (a^2 - 1) = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет единственный корень тогда, когда равен нулю его дискриминант $D = 4a^2 - 8(a^2 - 1)$, т.е. когда $a = \sqrt{2}$ или $a = -\sqrt{2}$. Таким образом, исходная система имеет единственное решение в случае, когда $a = \pm\sqrt{2}$. При остальных значениях параметра a она либо имеет два решения, либо не имеет решений.

О т в е т. $a_1 = \sqrt{2},\ a_2 = -\sqrt{2}$.

П р и м е р 11. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}} - 5\right| - \left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}} - 7\right| + 24\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}} + 13 = 11 - \sqrt{\sin\frac{\pi(x - 2y - 1)}{2}},$$

$$2(x^2 + (y - a)^2) - 1 = 2\sqrt{x^2 + (y - a)^2 - \frac{3}{4}}.$$

Р е ш е н и е. Пусть a_0 — такое значение параметра a, при котором система имеет хотя бы одно решение. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение исходной системы при $a = a_0$. Это означает, что справедливы равенства

$$\left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y_0}{2}} - 5\right| - \left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y_0}{2}} - 7\right| + 24\sqrt{\cos\frac{\pi y_0}{2}} + 13 = 11 - \sqrt{\sin\frac{\pi(x_0 - 2y_0 - 1)}{3}}, \quad (20)$$

$$2(x_0^2 + (y_0 - a_0)^2) - 1 = 2\sqrt{x_0^2 + (y_0 - a_0)^2 - \frac{3}{4}}. \quad (21)$$

Перепишем эти равенства в более удобном виде. Для этого сначала освободимся от знака абсолютной величины в первом равенстве. Предварительно заметим, что правая часть равенства (20) не превышает 11. Если $\sqrt{\cos\frac{\pi y_0}{2}} \leqslant \frac{5}{12}$, то левую часть равенства (20) можно переписать в виде $24\sqrt{\cos\frac{\pi y_0}{2}} + 11$, откуда видно, что она не меньше, чем 11. Следовательно, в этом случае равенство (20) справедливо тогда и только тогда, когда одновременно $\cos\frac{\pi y_0}{2} = 0$ и $\sin\frac{\pi(x_0 - 2y_0 - 1)}{3} = 0$. Если $\frac{5}{12} < \sqrt{\cos\frac{\pi y_0}{2}} \leqslant \frac{7}{12}$, то левую часть равенства (20) можно переписать в виде $48\sqrt{\cos\frac{\pi y_0}{2}} + 1$, откуда видно, что в этом случае левая часть больше, чем 21. Следовательно, в этом случае равенство (20) не справедливо. Если $\frac{7}{12} < \sqrt{\cos\frac{\pi y_0}{2}}$, то левую часть равенства (20) можно переписать в виде $24\sqrt{\cos\frac{\pi y_0}{2}} + 15$, откуда видно, что в этом случае левая часть больше, чем 29. Следовательно, в этом случае равенство (20) не справедливо.

Итак, равенство (20) справедливо тогда и только тогда, когда одновременно справедливы равенства

$$\cos\frac{\pi y_0}{2} = 0, \tag{22}$$

$$\sin\frac{\pi(x_0 - 2y_0 - 1)}{3} = 0. \tag{23}$$

Перепишем равенство (21) в виде

$$\left(x_0^2 + (y_0 - a_0)^2 - \frac{3}{4}\right) - \sqrt{x_0^2 + (y_0 - a_0)^2 - \frac{3}{4}} + \frac{1}{4} = 0$$

или в виде

$$\left(\sqrt{x_0^2 + (y_0 - a_0)^2 - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0,$$

откуда видно, что равенство (21) справедливо тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$x_0^2 + (y_0 - a_0)^2 = 1. \tag{24}$$

Равенство (22) означает, что

$$y_0 = 2k + 1, \quad k \in Z. \tag{25}$$

Но тогда из равенства (23) получаем, что

$$x_0 = 3 + 4k + 3m, \quad k \in Z,\ m \in Z. \tag{26}$$

Равенство (26) означает, что x_0 — целое число, но тогда из (24) получаем, что x_0 есть либо 0, либо 1, либо -1.

Если $x_0 = 0$, то из (26) имеем $k = \frac{-3m - 3}{4}$. Так как $k \in Z$, $m \in Z$, то $m = -4l - 1$, но тогда $k = 3l$; $l \in Z$ и из равенства (25) получаем, что $y_0 = 6l + 1$, а из равенства (24), что либо $a_0 = 6l$, либо $a_0 = 6l + 2$, $l \in Z$.

Если $x_0 = 1$, то из (26) имеем $k = \dfrac{-3m-2}{4}$. Так как $k \in Z$, $m \in Z$, то $m = -4l - 2$, но тогда $k = 3l + 1$ и из равенства (25) получаем, что $y_0 = 6l + 3$, а из равенства (24), что $a_0 = 6l + 3$, где $l \in Z$.

Если $x_0 = -1$, то из (26) имеем $k = \dfrac{-3m-4}{4}$. Так как $k \in Z$, $m \in Z$, то $m = -4l$, но тогда $k = 3l - 1$ и из равенства (25) получаем, что $y_0 = 6l - 1$, а из равенства (24), что $a_0 = 6l - 1$, где $l \in Z$.

Итак, если a_0 — значение параметра a, при котором исходная система имеет хотя бы одно решение, то либо $a_0 = 6l$, либо $a_0 = 6l + 2$, либо $a_0 = 6l + 3$, либо $a_0 = 6l - 1$, где $l \in Z$. Подставляя эти значения a_0 и соответствующие им найденные выше значения x_0 и y_0 в исходную систему, получим верные равенства.

Следовательно, все эти значения $a = a_0$ удовлетворяют условию задачи, и из предыдущего рассуждения следует, что нет других значений a, удовлетворяющих условию задачи.

О т в е т. $a = 6l - 1,\ a = 6l,\ a = 6l + 2,\ a = 6l + 3,\ l \in Z$.

Упражнения

Найти все пары натуральных чисел m и n, удовлетворяющие уравнению.
1) $n^2 - 3mn + 2m^2 = 3$. 2) $n(m^2 + 1) = 34$. 3) $m + n = mn$.
4) $\dfrac{3^{n-1}}{n^2} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + m \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$. 5) $\dfrac{9}{2}\cos \pi m = \dfrac{3^n}{n!}$.

Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению.
6) $x + y = xy$. 7) $x^2 - 4xy = 4y^2$. 8) $x^2 + 23 = y^2$.
9) $x^2 - 3yx + 2y^2 = 3$. 10) $x(y^2 + 1) = 48$.
11) $x^3 + x^2 y + y^3 = 0$. 12) $|x - 1| + |y - 2| = 1$.

Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению.
13) $x^2 + y^2 = 2y - 1$. 14) $x^2 + 4y^2 - 4x - 12y + 13 = 0$.
15) $2x^2 + 5y^2 - 6xy + 6y - 2x + 5 = 0$.
16) $5x^2 + 10y^2 + 2xy + 6x + 4y + 2 = 0$.
17) $\sin^2 x + \cos^2 y - 2\sin x + \cos y + 5/4 = 0$.
18) $x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 2$. 19) $x^4 - 2x^3 + x^2 + y^2 - 4y + 4 = 0$.
20) $\sqrt{xy - 1} + \sqrt{1 - xy} = 2xy - x^2 - y^2$.
21) $\dfrac{|\operatorname{ctg} xy|}{\cos^2 xy} = \log_{1/3}(9y^2 - 18y + 10) + 2$.
22) $\sqrt{1 + y^2} + \sqrt{1 + x^2} = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$.
23) $2^{1+2x-x^2}(1 - x^2 y^2) = x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 5$.
24) $|1 + \operatorname{tg}^2 y| + |1 + \sin^2 x| = 2$.
25) $\sqrt[4]{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 + (x^2 + 2y^2 + \sin^2 xy)} + (x - y)^2$.

26) $\log_2(2+y^2)=\sin^2(x+2)$. 27) $(x^2-4x+6)(y^2+8y+19)=6$.
28) $(x^4-2x^2+3)(y^4-3y^2+4)=3{,}5$. 29) $2x\cos y=1+x^2$.
30) $\sin^2 5x+(x-y+1)^2=0$. 31) $\sin x\cdot\cos 3y=1$.
32) $\cos y=2+\sin 2x$. 33) $\arcsin(x(x+y))+\arcsin(y(x+y))=\pi$.
34) $x^2-2x\sin xy+1=0$. 35) $x^2+4x\cos(xy)=0$.

36) $\left(\sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^2=12+\dfrac{1}{2}\sin y$.

37) $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^4 y+2\operatorname{ctg}^2 x\cdot\operatorname{ctg}^2 y=3+\sin^2(x+y)$.
38) $\cos x+\cos y-\cos(x+y)=3/2$. 39) $\sin x+\cos(x+y)=2$.
40) $\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x(\sin y+\cos y)+2=0$. 41) $\cos x-y^2-\sqrt{y-x^2-1}=0$.
42) $y-|\sec x|-\sqrt{1-y-x^2}=0$. 43) $2^y-2\cos x+\sqrt{y-x^2-1}=0$.

44) $\dfrac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=y^2-4y+5$. 45) $\dfrac{2\operatorname{ctg}(x/2)}{1+\operatorname{ctg}^2(x/2)}=-y^2+2y-2$.

46) $\dfrac{1-\operatorname{ctg}(x/2)}{1+\operatorname{ctg}^2(x/2)}=y^2-4y+5$.

47) $\log_2\left(\cos^2 xy+\dfrac{1}{\cos^2 xy}\right)=\dfrac{1}{y^2-2y+2}$.

48) $\operatorname{tg}^2\pi(x+y)+\operatorname{ctg}^2\pi(x+y)=\sqrt{\dfrac{2x}{x^2+1}}+1$.

49) $4\left(3\sqrt{4x-x^2}\sin^2\left(\dfrac{x+y}{2}\right)+2\cos(x+y)\right)=13+4\cos^2(x+y)$.

50) $12\sqrt{6x-x^2-5}\cos^2\left(\dfrac{x-2y}{2}\right)=17+8\cos(x-2y)-4\sin^2(x-2y)$.

51) $\sqrt{3-2x-x^2}\sin^2(2x-y)+\cos(4x-2y)=1+\dfrac{\cos^2(4x-2y)}{2}$.

52) $\sqrt{2-|y|}\left(5\sin^2 x-6\sin x\cdot\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}\right)=$
$=(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\dfrac{5}{4}\pi^2$.

53) $\sqrt{x^2-4}\left(3\sin^2 x+10\sin x\cdot\cos x+11\cos^2 x-2\sqrt[3]{301}\right)=$
$=5\pi^2-4\arcsin^2 y-4\arccos^2 y$.

54) $\sqrt{x^2-9}\left(7\sin^2 x+4\sin x\cdot\cos x-3\cos^2 x-3\sqrt[3]{15}\right)=$
$=\dfrac{7}{8}\pi^3-\arcsin^3 y-\arccos^3 y$.

55) $\sqrt{3-|y|}\cdot\left(-2\sin^2 y-10\sin y\cdot\cos y+6\cos^2 y+2\sqrt[3]{11}\right)=$
$=8\arcsin^3 x+8\arccos^3 x-7\pi^3$.

Найти все тройки целых чисел $(x;y;z)$, удовлетворяющие уравнению.
56) $(x-1)(y-2)z=2$. 57) $x^2+(y-1)^2(z^2+1)=0$.
58) $2x^2+y^2+7z^2+2x^2y^2-42z+33=0$.
59) $5x^2+y^2+3z^2-2yz=30$.

60) $4x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 24y - 1 = 0$.

Найти все тройки чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющие уравнению.

61) $(x - y + 1)^2 + y^2 + (x + 2y - 3z)^2 = 0$.

62) $(x - y)^2 + (x + y + 1)^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = 0$.

63) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$.

64) $12x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 8yz + 12x - 4z - 8y + 5 = 0$.

65) $5x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz - 4yz + 2y - 2z + 1 = 0$.

66) $2x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 6xy - 2xz + 5yz = 0$.

67) $1 + (x^2 + y^2 + 1)^2 = (x^2 + y^2 + 1)(1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2z)$.

Решить систему уравнений.

68) $\begin{cases} 2x^2 + 1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1. \end{cases}$ 69) $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

70) $\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2, \\ x^2 + y^2 = \sin^2 x. \end{cases}$ 71) $\begin{cases} 2x = \dfrac{y}{1 + y^2}, \\ 2y = \dfrac{x}{1 + x^2}. \end{cases}$

72) $\begin{cases} x + \sqrt{1 - y^2} = 1, \\ y + \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}. \end{cases}$ 73) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin^3 x + \cos^3 y + 1, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \sin^4 x + \sin^4 y. \end{cases}$

74) $\begin{cases} 2y^3 + 2x^2 + 3x + 3 = 0, \\ 2z^3 + 2y^2 + 3y + 3 = 0, \\ 2x^3 + 2z^2 + 3z + 3 = 0. \end{cases}$ 75) $\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0, \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0, \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0. \end{cases}$

76) $\begin{cases} y^3 + 2x^2 + 6x + 12 = 0, \\ z^3 + 2y^2 + 6y + 12 = 0, \\ x^3 + 2z^2 + 6z + 12 = 0. \end{cases}$

77) $\begin{cases} |2x + y| + \log_3^2(|y| - 2x + 5) - 20 = 0, \\ (2x + y)^2 - 7(2x + y)\log_3(|y| - 2x + 5) - 8\log_3^2(|y| - 2x + 5) = 0. \end{cases}$

78) $\begin{cases} |x - y| - \log_2^2(|x| + y + 1) + 6 = 0, \\ (x - y)^2 - 6(x - y)\log_2(|x| + y + 1) + 5\log_2^2(|x| + y + 1) = 0. \end{cases}$

79) $\begin{cases} x^2 - xy^2 + 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2y. \end{cases}$ 80) $\begin{cases} x^2 + 4x^2y^2 + 4y = 0, \\ 4x^3 - 4y^2 - 4y - 5 = 0. \end{cases}$

81) $\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0, \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1. \end{cases}$ 82) $\begin{cases} \dfrac{x}{y^2 + 1} = z, \\ \dfrac{y}{z^2 + 1} = x, \\ \dfrac{z}{x^2 + 1} = y. \end{cases}$

83) $\begin{cases} |xy-2| = 6 - x^2, \\ 2 + 3y^2 = 2xy. \end{cases}$ 84) $\begin{cases} y^2 - |xy| + 2 = 0, \\ 8 - x^2 = (x+2y)^2. \end{cases}$

85) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 2, \\ x^2y^2 + 1 = 2y^2. \end{cases}$ 86) $\begin{cases} x^8 + \dfrac{1}{y^8} = y^8 + \dfrac{1}{x^8}, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 16. \end{cases}$

87) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^5 + y^5 = 1. \end{cases}$ 88) $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1. \end{cases}$ 89) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2xy - z^2 = 4. \end{cases}$

90) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$ 91) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$

92) $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$ 93) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1. \end{cases}$

94) $\begin{cases} x^2 + 2x\sin y + 3\cos y = 0, \\ \arcsin\left(\dfrac{x}{2} + \sin y\right) = y - \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$ 95) $\begin{cases} x^2 \operatorname{tg}^2 y(\operatorname{tg}^2 y - 2) = 1 - 2x, \\ \operatorname{arctg}(x \operatorname{tg} y) = 2y. \end{cases}$

96) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{\frac{1}{2}(x-y)^2 - (x-y)^4} = y^2 - 2x^2$$

и условию

$$y \geqslant 4x^4 + 4yx^2 + \frac{1}{2}.$$

97) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$4y^2 - 2x^2 = \sqrt{2(x+2y)^2 - (x+2y)^4}$$

и условию $x^4 + 2 \leqslant 4y(x^2 - 1)$.

98) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2}$$

и условию $4xy^3 + y^3 + \dfrac{1}{2} \geqslant 2x^2 + \sqrt{1 + (2x-y)^2}$.

99) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x^2y^2 - x^4y^4} = y^5 + x^2(1-x)$$

и условию $\sqrt{1 + (x+y)^2} + x(2y^3 + x^2) \leqslant 0$.

100) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2^{|x^2-2x-3| - \log_2 3}} = \sqrt{3^{-y-4}}$$

и условию $4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leqslant 8$.

101) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$5^{|x^2-5x+4| - \log_5 2} = 2^{y-3}$$

и условию $3|y| - |y+1| + (y-2)^2 \leqslant 3$.

102) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$4^{|x^2+8x+12|-\log_4 7} = 7^{2y-1}$$

и условию $|y-3| - 3|y| - 2(y+1)^2 \geqslant 1$.

103) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \sin\left(\left(x-\sqrt{\pi}\right)^2 + y^2\right) = 0, \\ \log_{\sqrt{2\pi}} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2\log_{2\pi} \sqrt{x^2+y^2}} = 2 \end{cases}$$

и условию $x > 0$.

104) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin(1-y+x^2)\cos 2x = \cos(y-1-x^2)\sin x\cos x, \\ \log_2 x 2^{y+2x-1-x^2} = 2 - x \end{cases}$$

и условию $y - 1 - x^2 + 2x \geqslant 0$.

105) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_y 2 + 1 = 0, \\ \sin x \cdot \cos y = 1 - \cos x \cdot \sin y \end{cases}$$

и условию $x + y < 8$.

106) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 5^{\sin x + \operatorname{tg} y} = 1, \\ 7^{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 y} = 7 \end{cases}$$

и условиям $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$.

107) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2(x-y) - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}(x-y) + 1 = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

и условиям $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $-\pi \leqslant y \leqslant 0$.

108) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \dfrac{1}{\cos y} = 2\sqrt[3]{14}, \\ \sin x \cdot \dfrac{1}{\cos y} = \sqrt[3]{196} - 2 \end{cases}$$

и условиям $0 < x < \pi$, $-\pi/2 < y < \pi/2$.

109) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} &y - \frac{1}{x} \;+\; \frac{5}{2} - x - y \;= \frac{5}{2} - x - \frac{1}{x}, \\ &x^2 + y^2 = \frac{17}{4} \end{aligned}$$

и условиям $x > 0,\quad y > 0$.

110) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} &x + \frac{1}{y} \;+\; \frac{10}{3} - x + y \;= \frac{10}{3} + y + \frac{1}{y}, \\ &x^2 + y^2 = \frac{82}{9} \end{aligned}$$

и условиям $x > 0,\ y < 0$.

111) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{3}{y} - x \;+\; \frac{13}{2} + x + y \;= \frac{13}{2} + y + \frac{3}{y}, \\ &x^2 + y^2 = \frac{145}{4} \end{aligned}$$

и условиям $x < 0,\ y < 0$.

112) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} &\sqrt{3} + 1 \quad (1 + \cos(xy) \cdot \sin(xy)) = \quad \sqrt{3} + 1 \quad \sin^2 xy + \cos 2xy, \\ &x^2y^2 - y^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

и условию $\dfrac{1}{x^2} + y^2 \leqslant 6$.

113) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} &(3\cos(xy) - \sin(xy)) \cdot \sin(xy) = 2\cos(2xy + x) \cdot \cos x + 2\sin^2(xy + x), \\ &y^3 - xy + 1 = 0 \end{aligned}$$

и условию $4y^6 - 3xy + 2 \leqslant 0$.

114) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} &x^2 - 3xy + 6x - 1 = 0, \\ &y^2 - xy - 2 = 0 \end{aligned}$$

и условию $xy > 0$.

115) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} &y^2 - 4xy + 4y - 1 = 0, \\ &3x^2 - 2xy - 1 = 0 \end{aligned}$$

и условию $xy > 0$.

116) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} &y\sin x = \log_2 \frac{y\sin x}{1+3y}, \\ &(6y^2+2y)(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}) = 25y^2+6y+1 \end{aligned}$$

и условию $|y| \leqslant 1$.

117) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} &(3-y^2)\cos^2 x = \log_3 \frac{8+y}{y(1-\sin^3 x)}, \\ &(y^2+8y)(3^{2+2\sin^4 x} + 3^{2\cos^4 x+\sin^2 2x-4}) = 2y^2+16y+64 \end{aligned}$$

и условию $1 \leqslant y \leqslant 10$.

118) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} &2y\cos x = \log_3 \frac{y+1}{y\cos x}, \\ &(y^2+y)(3^{2-\cos 2x} + 3^{-2\sin^2 x}) = 4y^2+2y+1 \end{aligned}$$

и условию $|y| \leqslant 1/2$.

119) Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} &(2-x)(3x-2z) = 3-z, \\ &y^3+3y^2 = x^2-3x+2, \\ &z^2+y^2 = 6z \end{aligned}$$

и условию $z \leqslant 3$.

120) Найти все тройки чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} &(x+3)^3 = 3-2y, \\ &z^2+4y^2 = 8y, \\ &(2z-x)(x+3) = 5x+16 \end{aligned}$$

и условию $z \geqslant 0$.

121) Найти все тройки чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} &2(y-2)(y-z) = z-2, \\ &4x^2+z^2 = 4z, \\ &8x^3+z = 3xy \end{aligned}$$

и условию $z \leqslant 2$.

Для каждого значения параметра a определить число решений системы уравнений.

122) $\begin{aligned} &2x-ay=5, \\ &3y-6x=-15. \end{aligned}$ 123) $\begin{aligned} &ax+y=1, \\ &x+ay=a^2. \end{aligned}$ 124) $\begin{aligned} &ax+y=a^3, \\ &x+ay=1. \end{aligned}$

125) $\begin{aligned} &|x|+|y|=a, \\ &x^2+y^2=1. \end{aligned}$ 126) $\begin{aligned} &|x|+|y|=1, \\ &x^2+y^2=a^2. \end{aligned}$

127) $\begin{cases} |x+y| = a, \\ x^2+y^2 = 1. \end{cases}$ 128) $\begin{cases} \overline{x^2+y^2} = 1, \\ x+y = a. \end{cases}$

129) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 5/2, \\ x+y = a^2+a. \end{cases}$ 130) $\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2, \\ (x^2+y^2)^2 = 4a^2xy. \end{cases}$

Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет хотя бы одно решение.

131) $\begin{cases} x+ay = 1, \\ ax+3ay = 2a-3. \end{cases}$ 132) $\begin{cases} ax-y = a, \\ a^2x+ay = a+1. \end{cases}$

133) $\begin{cases} ax-4y = a+1, \\ 2x+(a+6)y = a+3. \end{cases}$ 134) $\begin{cases} ax+y = 0, \\ x+ay = 0. \end{cases}$

135) $\begin{cases} x^2+ay = 1, \\ 3x+2y = 3. \end{cases}$ 136) $\begin{cases} |x+y| = 1, \\ x^2+y^2 = a^2. \end{cases}$

137) $\begin{cases} \log_a \quad 1+\dfrac{x}{y} \quad = 2-\log_a y, \\ \log_a x + \log_a y = 4. \end{cases}$ 138) $\begin{cases} x^2+y^2 = 1, \\ x^2+xy+y^2 = a. \end{cases}$

139) $\begin{cases} (\log_a x) \quad \dfrac{1}{\log_x 3} + \log_3 y \quad = \log_3 x, \\ \log_3 x \cdot \log_2 (x+y) = 2\log_2 x. \end{cases}$

140) $\begin{cases} \overline{x^2+2xy+y^2} + \quad \overline{x^2-2xy-y^2} = 4, \\ \overline{x^2+y^2} = a. \end{cases}$

Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений не имеет решений.

141) $\begin{cases} x+ay = -2, \\ 3x+9y = 6. \end{cases}$ 142) $\begin{cases} ax-4y = a+1, \\ 2x+(a+6)y = a+3. \end{cases}$

143) $\begin{cases} 2x+(9a^2-2)y = 6a-2, \\ x+y = 1. \end{cases}$

144) $\begin{cases} -4x+ay = 1+a, \\ (6+a)x+2y = 3+a. \end{cases}$ 145) $\begin{cases} |x+y| = 1, \\ x^2+y^2 = a^2. \end{cases}$

Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение.

146) $\begin{cases} 2ax+y = a+1, \\ x+3ay = a+4. \end{cases}$ 147) $\begin{cases} ax+a^2y = a^3, \\ a^2x-ay = a^3. \end{cases}$

148) $\begin{cases} a^2x+y+z = 1, \\ x+a^2y+z = 1, \\ x+y+a^2z = 1. \end{cases}$ 149) $\begin{cases} x^2+y^2 = 5, \\ x+y = a. \end{cases}$ 150) $\begin{cases} x^2+y^2 = a, \\ x+2y = 1. \end{cases}$

151) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x - y = a. \end{cases}$ 152) $\begin{cases} \sqrt{y} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \\ y = ax + 1. \end{cases}$ 153) $\begin{cases} x^2 + ay = 1, \\ 3x + 2y = 3. \end{cases}$

154) $\begin{cases} ax^2 + y = 2, \\ x + y = 1. \end{cases}$ 155) $\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = -2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$

156) $\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = a. \end{cases}$ 157) $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ |x - a| + |y| = 2. \end{cases}$

158) $\begin{cases} 2x + 2(a-1)y = a - 4, \\ 2|x+1| + ay = 2. \end{cases}$ 159) $\begin{cases} ax + (a-1)y = 2 + 4a, \\ 3|x| + 2y = a - 5. \end{cases}$

160) $\begin{cases} x - y = a(1 + xy), \\ 2 + x + y + xy = 0. \end{cases}$ 161) $\begin{cases} x - y = 1 + xy, \\ (y - a)x + (2a - 3)y = a. \end{cases}$

162) $\begin{cases} a(x + y) - xy + 1 = 0, \\ xy - x + y = 2. \end{cases}$ 163) $\begin{cases} x + y + xy + 1 = 0, \\ (a+1)x + (2a - 1 - x)y = a + 1. \end{cases}$

164) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x - \sin^2 y = 3. \end{cases}$ 165) $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

166) $\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = y, \\ x^2 - 2(2a-1)x + 3a(a-2) = 0. \end{cases}$

167) $\begin{cases} |x^2 + 5x + 4| - 9x^2 + 5x + 4 - 10x|x| = y, \\ y^2 - 2(2a+1)y + 3a(a+2) = 0. \end{cases}$

168) $\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x|, \\ \operatorname{tg}^2 x + y^2 = 1. \end{cases}$

169) $\begin{cases} x^y = a, \\ \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{4} + y. \end{cases}$ 170) $\begin{cases} (|x| + 1)a = y + \cos x, \\ \sin^4 x + y^2 = 1. \end{cases}$

Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет два решения.

171) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a), \\ (x + y)^2 = 14. \end{cases}$ 172) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ xy = a - \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

173) $\begin{cases} (x - y)^2 = 6a - 14, \\ x^2 + y^2 = 3(2 + a). \end{cases}$

174) $\begin{cases} |x^2 + 7x + 6| + x^2 - 5x + 6 - 12|x| = 0, \\ x^2 - 2(a+2)x + a(a+4) = 0. \end{cases}$ 175) $\begin{cases} |4y| = |x| - x, \\ |x - a| + |y| = 1. \end{cases}$

176) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \cos(y-6) - 2\cos x = 0, \\ \log_2(ay - y^2) = 2\log_4(-x) - \log_{1/2}(3y) \end{cases}$$

имеет нечетное число решений.

Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет хотя бы одно решение. При каждом таком значении a найти все решения системы уравнений.

177) $$\begin{cases} 2\cos x + a\sin y = 1, \\ \log_z \sin y = (\log_z a)\cdot\log_a(2 - 3\cos x), \\ \log_a z + \log_a \quad \dfrac{1}{2a} - 1 \quad = 0. \end{cases}$$

178) $$\begin{cases} (a-2)\sin x + \cos y = 1, \\ \log_a(2\cos y) = (\log_a z)\log_z(1 + 7\sin x), \\ \log_z \quad \dfrac{a}{5-a} \quad = 1. \end{cases}$$

179) $$\begin{cases} a\cos y + \sin x + 1 = 0, \\ \log_z(-1 - 4\sin x) = (\log_z a)\log_a(1 + 2\cos y), \\ \log_a z + \log_a \quad \dfrac{4-a}{a} \quad = 0. \end{cases}$$

180) $$\begin{cases} a\sin x + (1-2a)\cos y = 2, \\ \log_a(1 - 2\sin x) = (\log_a z)\log_z \cos y, \\ \log_z \quad \dfrac{a}{10-a} \quad = 1. \end{cases}$$

Найти все целые значения параметра n, при каждом из которых система уравнений имеет решения. При каждом таком значении n найти все решения.

181) $$\begin{cases} 6x^2 + 24y(x+y) + 2(3n-2)x + 4(3n-2)y + 3 = 0, \\ 4(x^2+y^2) + (4n+2)y + 2n^2 = 8xy + (4n+2)x + 5/2. \end{cases}$$

182) $$\begin{cases} x(x+2y-4) + 4n^2 = 8 + 4y - y^2, \\ y^2 - 2y + 2 = 4x(y - x - 1) + 2(n^2 + n). \end{cases}$$

183) $$\begin{cases} 4x(x - y - n - 1) + y(y + 2n + 2) + 2n^2 = 0, \\ y(2x - y - 4) + 12n^2 = x^2 - 4x + 12n + 8. \end{cases}$$

184) $$\begin{cases} x^2 - 4(2x - 2 - 2n - n^2) = y(8 - 2x - y), \\ x^2 - 12x + 40 + y(y - 2x + 12) = 4n(n+1). \end{cases}$$

Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет бесконечно много решений.

185) $$\begin{cases} ax + y = 1, \\ 4x - 2y = a. \end{cases}$$ 186) $$\begin{cases} 3x + ay = 3, \\ ax + 3y = 3. \end{cases}$$

187) $$\begin{aligned}&(a-2)x+27y=9/2,\\&2x+(a+1)y=-1.\end{aligned}$$ 188) $$\begin{aligned}&x+ay=2,\\&3x-2y=6.\end{aligned}$$

189) $$\begin{aligned}&x+y-1=0,\\&y-2-|x-a|=0.\end{aligned}$$ 190) $$\begin{aligned}&(x-a)(x+y)=0,\\&x+y-|y-x|=2.\end{aligned}$$

191) $$\begin{aligned}&x^2+xy-6y^2=0,\\&y-|ax|=0.\end{aligned}$$ 192) $$\begin{aligned}&x^2=(x-a)y,\\&y^2-xy=9ax.\end{aligned}$$

193) $$\begin{aligned}&|x|+|y|=1,\\&|x+y|=a.\end{aligned}$$ 194) $$\begin{aligned}&|x-y|=1,\\&|x-a|+|y|=1.\end{aligned}$$

Для каждого значения параметра a решить систему уравнений.

195) $$\begin{aligned}&x+ay=1,\\&ax+y=2a.\end{aligned}$$ 196) $$\begin{aligned}&ax+y=a,\\&x+ay=a^2.\end{aligned}$$ 197) $$\begin{aligned}&x+3ay=1,\\&ax-3ay=2a+1.\end{aligned}$$

198) $$\begin{aligned}&2x+3y=5,\\&x-y=2,\\&x+4y=a.\end{aligned}$$ 199) $$\begin{aligned}&ax+y+z=1,\\&x+ay+z=1,\\&x+y+az=1.\end{aligned}$$

200) $$\begin{aligned}&x^2=(x-a)y,\\&y^2-xy=9ax.\end{aligned}$$ 201) $$\begin{aligned}&\log_y x+\log_x y=5/2,\\&x+y=a^2+a.\end{aligned}$$

202) $$\begin{aligned}&xy=4,\\&(\log_a x)^2+(\log_a y)^2=\frac{5}{2}(\log_a 4)^2.\end{aligned}$$ 203) $$\begin{aligned}&x+y=2,\\&y-|x-a|=1.\end{aligned}$$

204) $$\begin{aligned}&|x+y|=x-y+a,\\&|x-y|=x+y+a.\end{aligned}$$ 205) $$\begin{aligned}&ax+ay+(a+1)z=a,\\&ax+ay+(a-1)z=a,\\&x+(a+2)z=1-a.\end{aligned}$$

206) $$\begin{aligned}&x+y=a,\\&x^5+y^5=a^5.\end{aligned}$$ 207) $$\begin{aligned}&x^2-y^2=a^2,\\&(x^2+y^2)^2=4a^2xy.\end{aligned}$$

208) $$\begin{aligned}&2\sqrt{x^2+y^2}-4|a|x+1=0,\\&|a|-4|a|y=0.\end{aligned}$$ 209) $$\begin{aligned}&x\sqrt{x^2+y^2}+ax=0,\\&y\sqrt{x^2+y^2}+ay+1=0.\end{aligned}$$

210) $$\begin{aligned}&(2^x+1)\cdot 2^{y+1}=a,\\&\sqrt{x^2+y^2}=x+y.\end{aligned}$$ 211) $$\begin{aligned}&y\sqrt{x^2+y^2}-2ay-3=0,\\&x\sqrt{x^2+y^2}=2ax.\end{aligned}$$

212) $$\begin{aligned}&\sin x+\sin y=\sin a,\\&\sin 2x+\sin 2y=\sin 2a.\end{aligned}$$ 213) $$\begin{aligned}&\sin x+\cos y=2a^2,\\&\sin x\cdot\cos y=a^2(a^2-4).\end{aligned}$$

214) $$\begin{aligned}&\sin x\cdot\cos y=a^2,\\&\sin y\cdot\cos x=a.\end{aligned}$$ 215) $$\begin{aligned}&\sin x\cdot\cos 2y=a^2+1,\\&\cos x\cdot\sin 2y=a.\end{aligned}$$

216) $$\begin{aligned}&\operatorname{tg} x=a\operatorname{ctg} x,\\&\operatorname{tg} 2x=a\cos y.\end{aligned}$$ 217) $$\begin{aligned}&(\operatorname{arctg} x)^2+(\arccos y)^2=\pi^2 a,\\&\operatorname{arctg} x+\arccos y=\pi/2,\ a \text{ — целое число.}\end{aligned}$$

Найти все значения параметра a, для каждого из которых все решения системы уравнений удовлетворяют заданному условию.

218) $\begin{cases} x+y=a, \\ 2x-y=3, \ x>y. \end{cases}$ 219) $\begin{cases} 2x+y=a+2, \\ x-y=a, \ x-y<0. \end{cases}$

220) $\begin{cases} x+7y=a, \\ 2x-y=5, \ x>y-2. \end{cases}$ 221) $\begin{cases} ax-y=5, \\ 2x+3ya=7, \ x>0, \ y<0. \end{cases}$

222) $\begin{cases} x-2y=a, \\ 3x+y=0, \ x>\dfrac{1}{a}, \ y>0. \end{cases}$

223) $\begin{cases} \sin\left(\left(x-\sqrt{\pi}\right)^2+y^2\right)=0, \\ \log_{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\sqrt{2\log_{2\pi}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}=2, \ x>0. \end{cases}$

224) $\begin{cases} x^3-ay^3=\dfrac{1}{2}(a+1)^2, \\ x^3+ax^2y+xy^2=1, \ x+y=0. \end{cases}$

225) $\begin{cases} |\sin x|=a\sin y, \\ \operatorname{tg} x=2\operatorname{tg} y, \ 0<x<2\pi, \ 0<y<2\pi \ (a>0). \end{cases}$

§ 5. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

На вступительных экзаменах довольно часто предлагаются так называемые текстовые задачи. Главное при решении таких задач — записать словесные условия при помощи уравнений или неравенств.

Для этого необходимо внимательно (и, возможно, не один раз) прочитать условие задачи с тем, чтобы стало понятным ее содержание, затем, при очередном прочтении условия задачи, нужно постепенно вводить неизвестные и сразу записывать связи между известными и неизвестными величинами в виде уравнений или неравенств. Ниже на ряде примеров будет показано, как это делается. Для удобства мы выделяем некоторые наиболее типичные ситуации, встречающиеся в текстовых задачах («на движение», «на работу», «на проценты», «на смеси» и т.д.).

Отметим, что иногда из полученной системы уравнений или неравенств требуется найти лишь одну неизвестную или некоторую комбинацию неизвестных. При этом не обязательно находить значения всех неизвестных, что может быть сделано далеко не всегда.

5.1. Задачи «на движение». При решении задач «на движение» обычно вводятся в рассмотрение s — путь, v — скорость, t — время, необходимое для прохождения этого пути, после чего составляются уравнение или система уравнений.

Пример 1. Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль. Через 1 ч из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой и легковой автомобили одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 ч 12 мин после выезда.

Сколько времени провел в пути от A до B грузовой автомобиль?

Решение. Обозначим через x км/ч скорость грузового автомобиля, а через S км расстояние между пунктами A и B. Расстояние от A до B грузовой автомобиль проехал за S/x ч, а легковой автомобиль — за $(S/x-1)$ ч. Следовательно, скорость легкового автомобиля равна $\dfrac{S}{S/x-1}$ км/ч. Если бы автомобили одновременно выезжали из пунктов A и B навстречу друг другу, то из условия, что они встретятся через $1\frac{1}{5}$ ч, получаем уравнение

$$1\frac{1}{5}\cdot\quad x+\frac{S}{S/x-1}\quad=S.$$

Поскольку $x>0$, то, разделив это уравнение на x, получим равносильное ему уравнение

$$\frac{6}{5}\cdot\quad 1+\frac{S/x}{S/x-1}\quad=\frac{S}{x}.$$

Обозначая S/x через t, приходим к уравнению

$$5t^2-17t+6=0,$$

которое имеет корни $t_1=3$ и $t_2=2/5$. Из условия задачи следует, что грузовик провел в пути от A до B больше одного часа, следовательно, условию задачи удовлетворяет только $t_1=3$.

Ответ. 3 ч.

Пример 2. Из пункта A в пункт B доставлена почта. Сначала ее вез мотоциклист; проехав 2/3 расстояния от пункта A до пункта B, он передал почту ожидавшему его велосипедисту, который и доставил ее в пункт B (время, потребовавшееся на передачу почты, считается равным нулю). При этом почта была доставлена из пункта A в пункт B за промежуток времени, необходимый, чтобы проехать от пункта A до пункта B со скоростью 40 км/ч.

Известно, что если бы мотоциклист и велосипедист выехали из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу, то они встретились бы через промежуток времени, необходимый для проезда от пункта A до пункта B со скоростью 100 км/ч. Найти скорость мотоциклиста, считая, что она больше скорости велосипедиста.

Решение. Обозначим через S км расстояние между пунктами A и B; пусть x км/ч — скорость мотоциклиста, а y км/ч — скорость велосипедиста.

Путь $\frac{2}{3}S$ км мотоциклист проехал за $\frac{2}{3}\cdot\frac{S}{x}$ ч, а путь $\frac{1}{3}S$ км велосипедист проехал за $\frac{1}{3}\cdot\frac{S}{y}$ ч. Почта из A в B была доставлена за $\quad\frac{2}{3}\cdot\frac{S}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{S}{y}\quad$ ч,

и это время по условию задачи должно равняться $\frac{S}{40}$ ч. Поэтому имеем первое уравнение
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{S}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{y} = \frac{S}{40}.$$
Если бы мотоциклист и велосипедист выехали навстречу друг другу, то они встретились бы через $\frac{S}{x+y}$ ч, и это время по условию задачи должно равняться $\frac{S}{100}$ ч. Поэтому имеем второе уравнение
$$\frac{S}{x+y} = \frac{S}{100}.$$
Для нахождения x и y получим, после деления правой и левой частей каждого из уравнений на S ($S \neq 0$), систему
$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{40}, \\ &\frac{1}{x+y} = \frac{1}{100}. \end{aligned}$$
Из второго уравнения имеем $y = 100 - x$. Подставляя $100 - x$ вместо y в первое уравнение системы, получим уравнение
$$\frac{2}{3x} + \frac{1}{3(100-x)} = \frac{1}{40},$$
которое имеет корни $x_1 = 80$ и $x_2 = \frac{100}{3}$. Но тогда $y_1 = 20$ и $y_2 = \frac{200}{3}$. Легко видеть, что найденные пары чисел $x_1 = 80$, $y_1 = 20$ и $x_2 = \frac{100}{3}$, $y_2 = \frac{200}{3}$ являются решениями системы уравнений. Так как по условию задачи скорость мотоциклиста больше скорости велосипедиста, то условию задачи удовлетворяет только одно решение системы, а именно $x_1 = 80$, $y_1 = 20$. Следовательно, скорость мотоциклиста равна 80 км/ч.

Ответ. 80 км/ч.

5.2. Задачи «на работу». При решении задач «на работу» обычно приходится рассматривать части всей работы, выполняемые в тот или иной срок. Рассмотрение частей всей работы позволяет просто составить систему уравнений.

Пример 3. Для разгрузки парохода выделено две бригады грузчиков. Если ко времени, за которое может самостоятельно разгрузить пароход первая бригада, прибавить время, за которое может самостоятельно разгрузить пароход вторая бригада, то получится 12 часов. Определить эти времена, если их разность составляет 45 % времени, за которое обе бригады могут разгрузить пароход совместно?

Решение. Пусть первая бригада может самостоятельно разгрузить пароход за x часов, а вторая — за y часов. Тогда

$$x + y = 12. \tag{1}$$

Первая бригада делает за час $1/x$ часть всей работы, а вторая — $1/y$ часть всей работы. Поэтому, работая вместе, они за час делают $(1/x + 1/y)$ часть всей работы. Значит, работая вместе, они затратят на всю работу $\dfrac{1}{(1/x+1/y)}$ ч. Пусть для определенности первая бригада работает медленнее, т.е. пусть $x > y$. Тогда $x - y$ ч составляют 45 % от $\dfrac{1}{1/x+1/y}$ ч, или

$$x - y = \frac{45}{100} \cdot \frac{xy}{x+y}. \tag{2}$$

Получили систему двух уравнений (1) и (2) с двумя неизвестными x и y. Решим ее.

Из уравнения (1) находим, что $y = 12 - x$. Подставляя $12 - x$ вместо y во второе уравнение (2), получаем уравнение относительно x:

$$x - 12 + x = \frac{9}{20} \cdot \frac{x(12-x)}{12},$$

которое можно переписать так:

$$3x^2 + 124x - 960 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня: $x_1 = -48$ и $x_2 = \dfrac{20}{3}$. По условию задачи $x > 0$. Значит, $x = \dfrac{20}{3}$, а тогда $y = \dfrac{16}{3}$. Итак, первая бригада может разгрузить пароход за $6\dfrac{2}{3}$ ч, а вторая — за $5\dfrac{1}{3}$ ч.

Ответ. $6\dfrac{2}{3}$ ч, $5\dfrac{1}{3}$ ч.

Пример 4. Три автоматические линии выпускают одинаковую продукцию, но имеют разную производительность. Производительность всех трех одновременно действующих линий в 1,5 раза выше производительности первой и второй линий, работающих одновременно. Сменное задание для первой линии вторая и третья линии, работая одновременно, могут выполнить на 4 ч 48 мин быстрее, чем его выполняет первая линия; это же задание вторая линия выполняет на 2 ч быстрее по сравнению с первой линией. Найти время выполнения первой линией своего сменного задания.

Решение. Обозначим через x ч, y ч, z ч время, за которое соответственно первая, вторая и третья линии могут выполнить сменное задание первой линии. Тогда за 1 ч они могут выполнить соответственно $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{1}{z}$ часть сменного задания для первой линии. Производительность всех трех одновременно действующих линий в 1,5 раза больше производительности первой и второй линий, работающих одновременно, поэтому

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1{,}5\cdot\quad\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\quad. \tag{3}$$

За один час вторая и третья линии, работая одновременно, выполнят $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ часть сменного задания для первой линии. Значит, для того чтобы выполнить все сменное задание для первой линии, им потребуется $\frac{1}{1/y+1/z}$ ч, причем по условию задачи

$$\frac{1}{1/y+1/z}=x-\frac{24}{5}. \tag{4}$$

Из условия задачи также следует, что

$$y=x-2. \tag{5}$$

Получили систему трех уравнений (3), (4) и (5) с тремя неизвестными, из которой надо найти только одну неизвестную x. Из второго уравнения (4) системы находим $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x-24/5}$. Подставляя $\frac{5}{5x-24}$ вместо $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ в левую часть уравнения (3), а также $x-2$ вместо y в правую часть уравнения (3), получаем уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{5}{5x-24}=\frac{3}{2}\quad\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}\quad. \tag{6}$$

После преобразований уравнение (6) можно переписать в виде

$$\frac{5x^2-43x+24}{x(x-2)(5x-24)}=0,$$

откуда получаем, что уравнение (6) имеет два корня $x_1=8$ и $x_2=3/5$. Из условия задачи следует, что $x>2$. Значит, условию задачи удовлетворяет лишь $x_1=8$.

Ответ. 8 ч.

Пример 5. Две бригады рабочих начали работу в 8 ч. Сделав вместе 72 детали, они стали работать раздельно. В 15 ч выяснилось, что за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая. На другой день первая бригада делала в час на одну деталь больше, а вторая бригада в час на одну деталь меньше. Работу бригады начали вместе в 8 ч и, сделав 72 детали, снова стали работать раздельно. Теперь за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая, уже к 13 ч. Сколько деталей в час делала каждая бригада?

Решение. Пусть первая бригада делала в час x деталей, а вторая бригада — y деталей; тогда за час они вместе делали $x+y$ деталей и

72 детали сделали за $\dfrac{72}{x+y}$ ч. Следовательно, раздельно в первый день они работали $7-\dfrac{72}{x+y}$ ч. За это время первая бригада сделала $\quad 7-\dfrac{72}{x+y} \quad x$ деталей, а вторая бригада сделала $\quad 7-\dfrac{72}{x+y} \quad y$ деталей, и из условия задачи вытекает, что

$$7-\frac{72}{x+y} \quad x- \quad 7-\frac{72}{x+y} \quad y=8.$$

Во второй день первая бригада делала в час $x+1$ деталей, а вторая бригада делала в час $y-1$ деталей. Так как обе бригады в час делали опять $x+y$ деталей, то 72 детали они сделали за $\dfrac{72}{x+y}$ ч и раздельно работали $5-\dfrac{72}{x+y}$ ч. За это время первая бригада сделала $\quad 5-\dfrac{72}{x+y} \quad (x+1)$ деталей, а вторая бригада сделала $\quad 5-\dfrac{72}{x+y} \quad (y+1)$ деталей, и из условия задачи вытекает, что

$$5-\frac{72}{x+y} \quad (x+1)- \quad 5-\frac{72}{x+y} \quad (y-1)=8.$$

Итак, для нахождения x и y получили систему уравнений

$$\begin{aligned} 7-\frac{72}{x+y} \quad (x-y)&=8,\\ 5-\frac{72}{x+y} \quad (x-y+2)&=8. \end{aligned} \tag{7}$$

Обозначим $\dfrac{72}{x+y}=z, \quad x-y=u$; тогда система (7) запишется в виде

$$\begin{aligned} &(7-z)u=8,\\ &(5-z)(u+2)=8. \end{aligned} \tag{8}$$

Перепишем эту систему так:

$$\begin{aligned} &7u=8+zu,\\ &5u+10-2z=8+uz. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что эта система равносильна системе

$$\begin{aligned} &7u=8+uz,\\ &5u+10-2z=7u. \end{aligned}$$

Из второго уравнения $z=5-u$. Подставляя $5-u$ вместо z в первое уравнение, получаем уравнение $7u=8+u(5-u)$, которое имеет два корня: $u_1 = 2$ и $u_2 = -4$. Тогда $z_1 = 3$ и $z_2 = 9$. По условию задачи $x > y$, т.е. $u = x - y > 0$. Следовательно, для нахождения x и y имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} &x - y = 2, \\ &\frac{72}{x+y} = 3. \end{aligned}$$

Решение этой системы $x_1 = 13$, $y_1 = 11$. Легко видеть, что эти x и y удовлетворяют условию задачи. Следовательно, первая бригада делала за час 13 деталей, а вторая — 11 деталей.

Ответ. Первая бригада делала за час 13 деталей, а вторая — 11 деталей.

5.3. Задачи «на проценты». Экономические задачи, т.е. задачи, в которых речь вдет о вкладах в банк под тем или иным процентом, вызывают большие трудности. На самом деле, в понятии процента нет ничего трудного. Надо только помнить, что один процент есть одна сотая часть числа.

Пример 6. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 5/6 некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 670 денежным единицам, к концу следующего года — 749 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально 5/6 исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть — в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 710 денежным единицам. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определить величину вклада по истечении двух лет.

Решение. Обозначим через x денежных единиц первоначальную сумму денег, через α — процент, на который возрастает сумма за год в первом банке, а через β — процент, на который возрастает сумма за год во втором банке. К концу первого года сумма вклада в первом банке стала равной $\frac{5}{6}x\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)$, во втором банке $\frac{1}{6}x\left(1+\frac{\beta}{100}\right)$, а к концу второго года соответственно $\frac{5}{6}x\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)^2$ и $\frac{1}{6}x\left(1+\frac{\beta}{100}\right)^2$. Из условия задачи имеем, что сумма вкладов к концу первого года составляет 670 денежных единиц, а к концу второго года — 749 денежных единиц, поэтому имеем

$$\frac{5}{6}x\left(1+\frac{\alpha}{100}\right) + \frac{1}{6}x\left(1+\frac{\beta}{100}\right) = 670, \tag{9}$$

$$\frac{5}{6}x\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)^2 + \frac{1}{6}x\left(1+\frac{\beta}{100}\right)^2 = 749. \tag{10}$$

Если во второй банк положить $\frac{5}{6}x$ денежных единиц, а в первый банк $\frac{1}{6}x$

денежных единиц, то сумма вкладов к концу года составила бы $\frac{5}{6}x\left(1+\frac{\beta}{100}\right)+$ $+\frac{1}{6}x\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)$, что равнялось бы 710 денежным единицам. Поэтому

$$\frac{5}{6}x\left(1+\frac{\beta}{100}\right)+\frac{1}{6}x\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)=710. \tag{11}$$

Для нахождения ответа в задаче надо из системы трех уравнений (9), (10) и (11) найти две неизвестные x и α. Для этого поступим следующим образом. Уравнения (9) и (11) перепишем так:

$$5\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)+\left(1+\frac{\beta}{100}\right)=\frac{6\cdot 670}{x},$$
$$\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)+5\left(1+\frac{\beta}{100}\right)=\frac{6\cdot 710}{x}.$$

Из получившейся системы уравнений найдем, что

$$1+\frac{\alpha}{100}=\frac{660}{x},\quad 1+\frac{\beta}{100}=\frac{720}{x}.$$

Подставляя $\frac{660}{x}$ вместо $1+\frac{\alpha}{100}$ и $\frac{720}{x}$ вместо $1+\frac{\beta}{100}$ в уравнение (10), приходим к уравнению

$$\frac{5}{6}x\left(\frac{660}{x}\right)^2+\frac{1}{6}x\left(\frac{720}{x}\right)^2=749,$$

имеющему единственный корень $x=660$, и тогда $1+\frac{\alpha}{100}=\frac{660}{100}=1{,}1.$

Если исходное количество денег положить на два года в первый банк, то к концу второго года величина вклада составит

$$x\cdot\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)^2=660\cdot 1{,}1^2=726$$

денежных единиц.

Ответ. 726 денежных единиц.

5.4. Задачи «на смеси» и «на сплавы». Задачи на смеси и на сплавы вызывают психологические трудности, связанные с нечетким пониманием химических процессов, возможно происходящих при смешении. Надо иметь в виду, что в задачах такого рода, предлагаемых на вступительных экзаменах, никаких химических процессов, влияющих на количественные соотношения задачи, не происходит.

Пример 7. Имеется два раствора серной кислоты в воде: первый — сорокапроцентный, второй — шестидесятипроцентный. Эти два раствора смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили двадцатипроцентный раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг восьмидесятипроцентного раствора, то получился бы семидесятипроцентный раствор. Сколько было сорокапроцентного и шестидесятипроцентного растворов?

Решение. Обозначим через x кг количество сорокапроцентного и через y кг — количество шестидесятипроцентного растворов. Если сольем x кг сорокапроцентного раствора, y кг шестидесятипроцентного раствора и 5 кг чистой воды, то получим раствор весом в $(x+y+5)$ кг, который по условию содержит 20 % кислоты. Поскольку в x кг сорокапроцентного раствора находится $0{,}4$ кг кислоты, а в y кг шестидесятипроцентного раствора находится $0{,}6$ кг кислоты, то в $(x+y+5)$ кг находится $(0{,}4x+0{,}6y)$ кг кислоты, что составляет 20 % от $(x+y+5)$ кг, т.е. имеем уравнение

$$0{,}4x+0{,}6y=0{,}2\cdot(x+y+5).$$

Если вместо 5 кг воды добавить 5 кг восьмидесятипроцентного раствора, то получим раствор весом $(x+y+5)$ кг, в котором будет $(0{,}4x+0{,}6y+4)$ кг кислоты, что составляет 70 % от $(x+y+5)$ кг, т.е. имеем уравнение

$$0{,}4x+0{,}6y+4=0{,}7\cdot(x+y+5).$$

Итак, для нахождения x и y получили систему уравнений

$$\begin{aligned}&0{,}4x+0{,}6y=0{,}2\cdot(x+y+5),\\&0{,}4x+0{,}6y+4=0{,}7\cdot(x+y+5),\end{aligned}$$

которую можно записать в виде

$$\begin{aligned}&x+2y=5,\\&3x+y=5.\end{aligned}$$

Решением этой системы является пара чисел $x=1$ и $y=2$. Следовательно, было 1 кг сорокапроцентного и 2 кг шестидесятипроцентного растворов серной кислоты.

Ответ. 1кг сорокапроцентного и 2 кг шестидесятипроцентного растворов.

Пример 8. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40 % олова, а второй — 26 % меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Определить, сколько килограммов олова содержится в получившемся новом сплаве.

Решение. Обозначим через x кг количество олова, содержащегося в получившемся новом сплаве, а через y кг — количество цинка, содержащегося в первом сплаве. Так как получившийся новый сплав весит 400 кг и в нем 30 % цинка, то он содержит цинка $\dfrac{400}{100}\cdot 30=120$ кг, а тогда во втором сплаве цинка $(120-y)$ кг. По условию задачи процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково, поэтому имеем

$$\frac{y}{150}\cdot 100=\frac{120-y}{250}\cdot 100.$$

Из этого уравнения находим, что $y=45$. Поскольку первый сплав содержит 40 % олова, то в 150 кг первого сплава олова будет $\dfrac{40}{100}\cdot 150=60$ кг, а во втором сплаве олова будет $(x-60)$ кг. Поскольку второй сплав содержит 26 % меди, то во втором сплаве меди будет $\frac{250}{100}\cdot 26 = 65$ кг. Во втором сплаве олова содержится $(x-60)$ кг, цинка $120-45=75$ кг, меди 65 кг и, так как все это весит 250 кг, то имеем $x-60+75+65=250$, откуда $x=170$ кг.

Ответ. 170 кг.

5.5. Задачи с целыми неизвестными. На вступительных экзаменах часто предлагаются задачи, в которых речь идет о количествах деталей, карандашей и т.п., т.е. в этих задачах неизвестные, обозначающие эти количества, являются натуральными числами. Поэтому при решении таких задач могут возникнуть системы уравнений или неравенств, которые из-за целочисленности неизвестных имеют, тем не менее, единственное решение.

Пример 9. После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.

Решение. Обозначим через x и y соответственно число десятков и число единиц искомого двузначного числа. Тогда для нахождения x и y из условия задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &10x+y=7(x+y)+6,\\ &10x+y=3xy+11. \end{aligned} \tag{12}$$

Из первого уравнения этой системы находим, что $x=2y+2$. Подставив $2y+2$ вместо x во второе уравнение системы (12), получим уравнение

$$2y^2-5y-3=0,$$

которое имеет корни $y_1=3$ и $y_2=-1/2$. Итак, система (12) имеет два решения: $x_1=8, y_1=3$ и $x_2=1, y_2=-1/2$. Так как y есть значение числа единиц двузначного числа, то остается единственная возможность $x=8$, $y=3$. Проверкой убеждаемся, что двузначное число 83 удовлетворяет условию задачи.

Ответ. 83.

Пример 10. Производительность первого автомобильного завода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго завода первоначально составляла 95 % от производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки на 23 % от числа машин, выпускаемых в сутки на первом заводе, и стал их выпускать более 1000 штук в сутки. Сколько автомобилей за сутки выпускал каждый завод до реконструкции второго завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое число машин.

Решение. Обозначим через x количество машин, производимых в сутки первым заводом. Тогда второй завод до реконструкции производил в сутки $\frac{95x}{100}$ машин, а после ввода дополнительной линии стал выпускать

$\frac{95x}{100}+\frac{23x}{100}$ машин. Из условий задачи следует система неравенств

$$\begin{aligned} &x \leqslant 950, \\ &\frac{95x}{100}+\frac{23x}{100} > 1000. \end{aligned} \qquad (13)$$

Множество решений этой системы есть промежуток $854\frac{82}{118} < x \leqslant 950$. Так как числа $\frac{23x}{100}$ и $\frac{95x}{100}$ должны быть целыми, то x должно делиться на 100 и быть из указанного промежутка, поэтому $x = 900$. Следовательно, первый завод выпускает в сутки 900 автомобилей, а второй завод до реконструкции выпускал $\frac{95}{100}\cdot 900 = 855$ автомобилей.

Ответ. 900 и 885.

Пример 11. В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике менее чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

Решение. Обозначим через x число деталей в первом ящике, а через y число деталей во втором ящике. Тогда согласно условию имеет место система неравенств

$$\begin{aligned} &x+y > 29, \\ &x-2 > 3y, \\ &3x-2y < 60. \end{aligned}$$

Перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} &x > 29-y, \\ &x > 3y+2, \\ &20+\frac{2}{3}y > x. \end{aligned} \qquad (14)$$

Отсюда следует, что справедливы неравенства

$$20+\frac{2}{3}y > 29-y, \qquad (15)$$

$$20+\frac{2}{3}y > 3y+2. \qquad (16)$$

Неравенство (15) можно переписать в виде $y > \frac{27}{5}$, а неравенство (16) в виде $y < \frac{54}{7}$. Так как $\frac{54}{7} = 7\frac{5}{7}$, $\frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$ и y — натуральное число, то y может быть равен либо 6, либо 7. Если y равен 6, то система неравенств

(14) перепишется в виде

$$\begin{aligned} &x > 23,\\ &x > 20,\\ &x < 24. \end{aligned}$$

Ясно, что нет натуральных чисел x, удовлетворяющих ей. Пусть $y = 7$. Тогда система (14) перепишется в виде

$$\begin{aligned} &x > 22,\\ &x > 23,\\ &x < 24\frac{3}{2}, \end{aligned}$$

откуда следует, что существует единственное натуральное число $x = 24$, ей удовлетворяющее. Следовательно, в первом ящике 24 детали, а во втором ящике 7 деталей.

Ответ. В первом ящике 24 детали, а во втором ящике 7 деталей.

Пример 12. В магазине продаются красные и синие карандаши. Красный карандаш стоит 17 копеек, синий карандаш — 13 копеек. На покупку карандашей можно затратить не более 4 р. 95 к. При закупке число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей более чем на пять. Необходимо закупить максимально возможное суммарное количество красных и синих карандашей, при этом красных карандашей нужно закупить как можно меньше. Сколько красных и синих карандашей можно закупить при указанных условиях?

Решение. Обозначим через m число красных карандашей, которых можно закупить при указанных условиях, а через n число синих. Так как красный карандаш стоит 17 к., а синий стоит 13 к. и так как на покупку всех карандашей можно затратить не более 4 р. 95 к., то

$$17m + 13n \leqslant 495. \tag{17}$$

Так как число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей более чем на пять, то

$$|m - n| \leqslant 5. \tag{18}$$

Так как m и n — число закупленных карандашей, то

$$m \geqslant 0 \quad \text{и} \quad n \geqslant 0. \tag{19}$$

Теперь выясним, какое наибольшее значение может принимать при условиях (17), (18) и (19) число

$$p = m + n \tag{20}$$

— суммарное количество купленных карандашей. Из (20) имеем $n = p - m$; подставляя это значение n в (17), (18) и (19), получим систему неравенств

$$\begin{aligned} &4m + 13p \leqslant 495,\\ &-5 \leqslant 2m - p \leqslant 5,\\ &0 \leqslant m \leqslant p. \end{aligned}$$

Перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} & m \leqslant \frac{495 - 13p}{4}, \\ & \frac{p-5}{2} \leqslant m \leqslant \frac{p+5}{2}, \\ & 0 \leqslant m \leqslant p. \end{aligned} \tag{21}$$

Теперь ясно, что система (21) имеет решения, если справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & \frac{p-5}{2} \leqslant \frac{495 - 13p}{4}, \\ & 0 \leqslant \frac{495 - 13p}{4}, \\ & 0 \leqslant \frac{p+5}{2}, \\ & 0 \leqslant p. \end{aligned} \tag{22}$$

Перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} & p \leqslant \frac{505}{15}, \\ & p \leqslant \frac{495}{13}, \\ & -5 \leqslant p, \\ & 0 \leqslant p, \end{aligned}$$

откуда видно, что множество решений системы (22) составляет промежуток $0 \leqslant p \leqslant 33\frac{2}{3}$. Следовательно, в условиях задачи наибольшее возможное суммарное количество красных и синих карандашей, которое можно купить, есть 33. При $p = 33$ система неравенств (21) перепишется в виде

$$\begin{aligned} & m \leqslant 33/2, \\ & 14 \leqslant m \leqslant 19, \\ & 0 \leqslant m \leqslant 33, \end{aligned}$$

откуда видно, что при $p = 33$, наименьшее m равно 14, а тогда $n = 19$.

Ответ. 14 красных карандашей и 19 синих.

Упражнения

1) Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а через четверть часа вслед за ним выехал автомобиль. На половине пути от A до B автомобиль догнал велосипедиста. Когда автомобиль прибыл в пункт B, велосипедисту оставалось проехать еще треть пути. За какое время велосипедист проехал путь от A до B, если известно, что скорости велосипедиста и автомобиля постоянны на всем пути от пункта A до пункта B?

2) Два бегуна стартовали один за другим с интервалов в две минуты. Второй бегун догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта, а пробежав от точки старта 5 км, он повернул обратно, и встретился с первым бегуном. Эта встреча произошла через 20 минут после старта первого бегуна. Найти скорость второго бегуна.

3) Расстояние между двумя городами скорый поезд проходит на 4 часа быстрее товарного поезда и на 1 час быстрее пассажирского. Известно, что скорость товарного поезда составляет 5/8 скорости пассажирского и на 50 км/ч меньше скорости скорого. Найти скорости товарного и скорого поездов.

4) От пристани A вниз по течению реки одновременно отплыли пароход и плот. Пароход, доплыв до пристани B, расположенной в 324 км от пристани A, простоял там 18 часов и отправился назад в A. В тот момент, когда он находился в 180 км от A, второй пароход, отплывший из A на 40 часов позднее первого, нагнал плот, успевший к этому моменту проплыть 144 км. Считая, что скорость течения реки постоянная, скорость плота равна скорости течения реки, а скорости пароходов в стоячей воде постоянны и равны между собой, определить скорости пароходов и скорость течения реки.

5) Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

6) В гору ехал автомобиль. В первую секунду после достижения пункта A он проехал 30 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 сек после того, как автомобиль достиг пункта A, навстречу ему выехал автобус из пункта B, находящегося на расстоянии 258 м от пункта A. В первую секунду автобус проехал 2 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?

7) Города A, B, C, D, расположенные так, что четырехугольник $ABCD$ — выпуклый, соединены прямолинейными дорогами AB, BC, CD, AD и AC. Их длины соответственно равны 6, 14, 5, 15 и 15 км. Из одного из этих городов одновременно вышли три туриста, идущие без остановок с постоянными скоростями. Маршруты всех туристов различны, причем каждый из них состоит из трех дорог и проходит через все города. Первый и второй туристы перед прохождением третьих дорог своих маршрутов встретились в одном городе, а третий закончил маршрут на 1 час раньше туриста, закончившего маршрут последним. Найти скорости туристов, если скорость третьего больше скорости второго и на $\frac{1}{2}$ км/ч меньше скорости первого, причем скорости всех туристов заключены в интервале от 5 км/ч до 8 км/ч.

8) Три бригады работают с одинаковой производительностью, прокладывая рельсовые пути. Первая и третья бригады, работая совместно, прокладывают 15 км путей в месяц. Три бригады вместе укладывают в месяц путей в два раза больше, чем вторая и первая бригады при их совместной работе. Найти, сколько км путей

укладывает в месяц третья бригада, если известно, что вторая бригада совместно с третьей уложили некоторый участок пути в четыре раза быстрее, чем его уложила бы одна вторая бригада.

9) Экскаваторщик получил задание выкопать две траншеи одинаковой глубины на различных участках строительной площадки. Экскаватор сначала вырыл первую траншею длиной 5 м, потом доехал до второго участка и вырыл вторую траншею длиной 3 м. Время, затраченное на прокладку первой траншеи, на 1 час 12 минут меньше, чем время, затраченное на переезд экскаватора и рытье второй траншеи. Если бы производительность экскаватора была в 4 раза меньше, то время, затраченное на прокладку первой траншеи, равнялось бы времени переезда экскаватора с одного места работы на другое. Определить длину траншеи, выкапываемой экскаватором за один час.

10) Три сенокосилки участвовали в покосе травы с поля площадью 25 га. За один час первая сенокосилка скашивает 3 га, вторая — на b га меньше первой, а третья — на $2b$ га больше первой. Сначала работали одновременно первая и вторая сенокосилки и скосили 11 га, а затем оставшуюся часть площади скосили, работая одновременно, первая и третья сенокосилки. Определить значение b ($0 < b < 1$), при котором все поле скошено за 4 часа, если работа велась без перерыва.

11) Двум бригадам общей численностью 18 человек, было поручено организовать в течение трех суток непрерывное круглосуточное дежурство по одному человеку. Первые двое суток дежурили члены первой бригады, распределив между собой это время поровну. Известно, что во второй бригаде три девушки, а остальные юноши, причем девушки дежурили по одному часу, а все юноши распределили между собой остаток дежурства поровну. При подсчете оказалось, что сумма продолжительностей дежурств каждого юноши второй бригады и любого члена первой бригады меньше девяти часов. Сколько человек в каждой бригаде?

12) Имеется три сплава. Первый сплав содержит 30 % никеля и 70 % меди, второй — 10 % меди и 90 % марганца, третий — 15 % никеля, 25 % меди и 60 % марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40 % марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

13) Имеется два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем процентное содержание золота во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40 % золота. Найти, во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержится 35 % золота.

14) Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 литра глицерина, а к оставшемуся глицерину добавили 2 литра воды. После перемешивания снова отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. Наконец, опять перемешали, отлили 2 литра смеси, и долили 2 литра воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 литра больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

15) Для составления смеси из двух жидкостей A и B были взяты два сосуда: первый емкостью 10 литров, второй — 20 литров. Сначала в оба сосуда было налито

всего 15 литров жидкости A. Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью B и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того, как в первый сосуд было добавлено жидкости A столько, сколько было в него ее налито сначала, отношения количества жидкости A ко всему объему имеющейся жидкости в сосуде для первого и второго сосудов стали равными. Сколько литров жидкости A было налито первоначально в первый сосуд?

16) В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в первый сосуд налито 5 кг, а во второй — 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором сосуде — в q раз. О числах p и q известно только, что $pq = 9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов?

17) Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали бы в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

18) Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 тонн, но один вагон оказался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн, однако понадобилось на восемь вагонов больше и при этом все равно один вагон остался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн, однако понадобилось еще на пять вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

19) Магазин радиотоваров продал в первый рабочий день месяца 105 телевизоров. Каждый следующий рабочий день дневная продажа возрастала на 10 телевизоров, и месячный план продажи 4000 телевизоров был выполнен досрочно, причем в целое число рабочих дней. После этого ежедневно продавалось на 13 телевизоров меньше, чем в день выполнения месячного плана. На сколько процентов был перевыполнен месячный план продажи телевизоров, если в месяце 26 рабочих дней.

20) В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших успеваемость во втором полугодии, заключен в пределах от 2,9 % до 3,1 %. Определить минимальное число учеников в таком классе.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

ГЛАВА I

§ 1

1) $x \in R$; x_0 и x_1 — корни. 2) $x \in R$, $x \neq 0$, $x \neq -1$; x_0 и x_2 — корни. 3) $x \in R$, $x \neq -1$, $x \neq -2$; x_2 — корень. 4) $x \in R$, $x \neq -1$; x_1 и x_2 — корни. 5) $x \in R$, $x \neq 0$; x_2 — корень. 6) $x \in R$, x_0 и x_2 — корни.

7) $-\infty < x \leqslant -1$, $0 \leqslant x < +\infty$; x_0 и x_2 — корни. 8) $x \geqslant 0$; x_2— корень. 9) $x \geqslant 1$, x_2 — корень. 10) $x = 1$; x_2 — корень. 11) $x \geqslant 2$; x_2— корень. 12) $x \geqslant 5$; x_2 — корень. 13) $x \geqslant -5$; x_2 — корень. 14) $x \in R$; x_1 — корень. 15) $x \in R$; x_0 и x_1 — корни.

16) На ОДЗ уравнения левая его часть положительная и потому не может равняться (-1).

17) ОДЗ уравнения есть пустое множество.

18) Для любых x из ОДЗ уравнения: $\sqrt{x+2} < \sqrt{x+3}$, т.е. на ОДЗ разность $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3}$ отрицательна и потому не может равняться двум.

19) Абсолютная величина любого числа не может быть отрицательным числом.

20) ОДЗ уравнения содержит единственное число $x = 1$, которое не является корнем этого уравнения.

21) $3^z > 0$ для любого действительного числа z.

22) ОДЗ уравнения есть пустое множество.

23) Так как $|x-2| \geqslant 0$ и $|x-3| \geqslant 0$, то $|x-2| + |x-3| = 0$ тогда и только тогда, когда одновременно $x-2=0$ и $x-3=0$, что невозможно.

24) Так как $|x^2+1| \geqslant 1$ и $|x^2+4x-5| \geqslant 0$, то $|x^2+1| + |x^2+4x-5| = 1$ тогда и только тогда, когда одновременно $x^2+1=1$ и $x^2+4x-5=0$, что невозможно.

25) Воспользоваться неравенствами $\sin x \leqslant 1$ и $x^2+2x+4 = (x+1)^2+3 \geqslant 3$.

26) Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда одновременно выполняются равенства $2x+5=0$ и $x+2=0$, что невозможно.

27) ОДЗ уравнения есть пустое множество.

28) На ОДЗ уравнения $\sqrt[3]{x-4} < -2$, $\sqrt{-1-x} \geqslant 0$.

29) Воспользоваться неравенствами $2^{x^2+1} \geqslant 2$, $1 - x^2 \leqslant 1$.

30) На ОДЗ уравнения $\sqrt{x+5} \geqslant \sqrt{5}$, $\sqrt[100]{x} \geqslant 0$.

31) Для x из ОДЗ уравнения $x + \dfrac{1}{x} \leqslant -2$, $\sqrt[3]{x + \dfrac{1}{x}} \leqslant -\sqrt[3]{2} < -1$.

32) На ОДЗ уравнения $\sqrt{10 + 3\sqrt{x^2-1}} > 3$, $x^4 \cdot \sqrt{5-x} \geqslant 0$.

33) Воспользоваться неравенствами $x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geqslant \dfrac{3}{4}$,

$x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geqslant 2$, $(x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 3) \geqslant \dfrac{6}{4} > 1$.

34) ОДЗ уравнения есть пустое множество.

35) На ОДЗ уравнения $\log_3(4 + x^2) > 1$, $\log_2(1 - (x+3)^2) < 0$.

36) На ОДЗ уравнения

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1} \geqslant 2, \qquad 2 - \sqrt{x+3} \leqslant 2,$$
$$\log_4 \quad x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1} \quad \geqslant \frac{1}{2}, \qquad \log_4 \;\; 2 - \sqrt{x+3} \;\; \leqslant \frac{1}{2}.$$

Значит, равенство имеет место тогда и только тогда, когда одновременно $x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2+1} = 2$ и $2 - \sqrt{x+3} = 2$, что невозможно.

37) ОДЗ уравнения есть пустое множество.

38) Так как на ОДЗ уравнения $2 + \sqrt{x} \geqslant 2$ и $1 + x^2 \geqslant 1$, то $\log_2 \;\; 2 + \sqrt{x} \;\; + \log_2(1 + x^2) \geqslant 1 + 0 = 1 > 0$.

39) На ОДЗ уравнения справедливо неравенство $x - 3 < x + 6$, а следовательно, и неравенство $\log_{1/3}(x-3) > \log_{1/3}(x+6)$. Таким образом, левая часть исходного уравнения положительна, а правая отрицательна.

40) На ОДЗ уравнения $4 + x^2 > x^8 + 2$ и потому $\log_2(4 + x^2) > \log_2(x^8 + 2)$. Таким образом, левая часть исходного уравнения отрицательна, а правая положительна.

41) На ОДЗ уравнения $\sqrt{5-x} + \sqrt{x-2} > 0$, а $(x-1)^2(x-6) < 0$.

42) На ОДЗ уравнения его левая часть отрицательна.

43) $x = 5$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

44) $x = -1$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

45) $x = -1$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

46) $x = -3$ — корень первого, но не корень второго уравнения.

47) $x = 0$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

48) $x = \dfrac{\pi}{2}$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

49) $x = 0$ — корень первого, но не корень второго уравнения.

50) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ — корни второго, но не корни первого уравнения.

51) $x = -5$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

52) $x = -3$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

53) $x = -7$ — корень первого, но не корень второго уравнения.

54) $x = -3$ — корень первого, но не корень второго уравнения.

55) $x = -2$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

56) $x = 0$ — корень первого, но не корень второго уравнения.

57) $x = 1$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

58) $x = -2$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

59) $x = 2/3$ — корень первого, но не корень второго уравнения.

60) $x = -5/2$ — корень первого, но не корень второго уравнения.

61) $x = -2/3$ — корень первого, но не корень второго уравнения.

62) $x = -4$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

63) $x = 1$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

64) $x = \pi n$, $n \in Z$, $n \neq 0$, — корни первого, но не корни второго уравнения.

65) $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$, $n \neq 0$, — корни первого, но не корни второго уравнения.

66) $x = -4$ — корень первого, но не корень второго уравнения.

67) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, — корни первого, но не корни второго уравнения.

68) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, — корни второго, но не корни первого уравнения.

69) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, — корни первого, но не корни второго уравнения.

70) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, — корни первого, но не корни второго уравнения.

71) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, — корни второго, но не корни первого уравнения.

72) $x = 0$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

73) $x = -1$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

74) $x = -3$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

75) $x = -5$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

76) $x = -4$ — корень первого, но не корень второго уравнения.

77) $x = -3\sqrt{3}$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

78) $x = 4$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

79) $x = 0$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

80) $x = 0$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

81) $x = 0$ — корень первого, но не корень второго уравнения.

82) $x = 0$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

83) $x = -1$ — корень первого, но не корень второго уравнения.

84) $x = 0$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

85) $x = 1$ — корень второго, но не корень первого уравнения.

86) $x = 0$ — корень первого, но не корень второго уравнения.

87) $x = 1$ — корень первого, но не корень второго уравнения.

88)–104). В задачах 88–104, как это легко проверить, множества решений первого и второго уравнений совпадают.

105) Второе. 106) Первое. 107) Второе. 108) Уравнения равносильны. 109) Второе. 110) Первое. 111) Уравнения равносильны. 112) Второе. 113) Уравнения равносильны. 114) Первое. 115) Второе. 116) Второе.

117) Никакое из уравнений не является следствием другого.

118) Второе. 119) Первое. 120) Второе. 121) Второе. 122) Второе. 123) Первое. 124) Второе. 125) Да. 126) Нет. 127) Нет. 128) Да. 129) Нет. 130) Да. 131) Да. 132) Да. 133) Нет. 134) Да. 135) Да. 136) Нет. 137) $x \in R$.

138) $-\infty < x \leqslant -2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2} \leqslant x < +\infty$. 139) $x \geqslant 3$. 140) $1 < x < 3$, $x > 3$. 141) $-1 < x < 0$, $0 < x < +\infty$. 142) $x = 1$, $x \geqslant 2$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ 143) $x = 1$, $x \geqslant 3$. 144) $0 < x < 1$, $x \neq \frac{2\pi}{15}$, $x \neq \frac{4\pi}{15}$. 145) $-\infty < x \leqslant -4$, $-2 < x < 0$, $0 < x < +\infty$. 146) $x \neq \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$.

147) $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. 148) $1 < x < +\infty$. 149) $2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

150) Пустое множество. 151) Да. 152) Да. 153) Да. 154) Да. 155) Нет. 156) Нет. 157) Да. 158) Да. 159) Да. 160) Да. 161) Нет. 162) Да. 163) Нет. 164) Да. 165) Да.

§ 2

1) $0; 2$. 2) 1. 3) $-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}$. 4) -1. 5) $\frac{1}{2}$. 6) 3. 7) -6. 8) $\frac{10}{9}$. 9) $\frac{1}{4}; 4$. 10) $1; 3$. 11) $-1; \frac{5}{3}$. 12) $0; 2$. 13) $-3; -\sqrt{\frac{13}{3}}; \sqrt{\frac{13}{3}}; 3$. 14) $-5; -3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}; 5$. 15) $2; 4$. 16) $-\sqrt{14}; \sqrt{14}$. 17) $-\frac{26}{51}$. 18) $\frac{11}{6}$. 19) 2. 20) 2. 21) 2. 22) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. 23) 1. 24) 2. 25) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. 26) $\log_3 \frac{3}{5}$. 27) 3. 28) $-2; 0$. 29) $-1; 1$. 30) $-\sqrt{15}; \sqrt{15}$. 31) $-1; 5$. 32) -3. 33) Нет решений. 34) $-\sqrt{6}; -1; 1; \sqrt{6}$. 35) $-1; 1$. 36) $-3; 2$.

37) $-1; 1$. Указание. Представив левую часть уравнения в виде $(x+1)\times$ $\times(x+4)(x+2)(x+3) = (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$, ввести новую неизвестную $z = x^2 + x + 4$.

38) $\frac{-5-\sqrt{28}}{2}; \frac{-5+\sqrt{28}}{2}$. 39) $4; 9$. 40) $-6; 6$. 41) $-4; 4$. 42) $-7; 7$. 43) $3; 81$. 44) $16; 512$. 45) 81. 46) $\log_3 4$. 47) 2. 48) $\log_{0,3} 3$. 49) $\log_{0,4} 4$. 50) $2 - \log_2 3$. 51) $2 + \log_5 3$. 52) $2 - \log_6 2$. 53) $\frac{1}{5\sqrt{5}}; 5$. 54) $\frac{1}{\sqrt{3}}; 81$.

55) $\frac{1}{16}; 8$. 56) 2. 57) 1. 58) 1. 59) $9; 81$. 60) $1; 2$. 61) $\frac{1}{4}; 4$. 62) $1; 9$. 63) 1. 64) 0. 65) 0. 66) $-2; -1; 1$. 67) $0; 2$. 68) $-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}; -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$; 0; $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$; $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.

В примерах 69–72 сначала подобрать целые корни.

69) $-3; \frac{1}{2}; 1$. 70) $-\frac{3}{2}; 1; 2; 3$. 71) $-2; -1; -\frac{1}{2}; 1$. 72) $1; 2; 3$. 73) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{1+\sqrt{2}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

74) $-2; -\sqrt{3}; -1; 1; \sqrt{2}; \sqrt{3}$. Обозначив $x^2 = y$, переписать левую часть уравнения в виде $y^3 - 8y^2 + 19y - 12 = (y-1)(y-2)(y-3)$.

75) $\frac{3+\sqrt{29}}{2}; \frac{3-\sqrt{29}}{2}; \frac{3+\sqrt{25+4\sqrt{30}}}{2}; \frac{3-\sqrt{25+4\sqrt{30}}}{2}; \frac{3+\sqrt{25-4\sqrt{30}}}{2}$;

$\dfrac{3-\sqrt{25-4\sqrt{30}}}{2}$. Преобразовав произведение

$$(x^2+3x+2)(x^2-9x+20)=(x+1)(x+2)(x-4)(x-5)=$$
$$=(x+1)(x-4)\cdot(x+2)(x-5)=(x^2-3x-4)(x^2-3x-10),$$

получим, что данное уравнение можно переписать в виде

$$(x^2-3x+1)(x^2-3x-4)(x^2-3x-10)=-30.$$

Обозначив x^2-3x-4 через z, получим уравнение $(z+5)z(z-6)=-30$, которое можно переписать в виде $(z-1)(z^2-30)=0$.

§ 3

1) -3; 3. 2) 3. 3) Нет решений. 4) Нет решений. 5) 3. 6) 18/11. 7) -4; 0. 8) Нет решений. 9) -2. 10) 0; 3. 11) 2. 12) 0; 1.

13) 19. Р е ш е н и е. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x+6\geqslant 0$, т.е. $x\geqslant -6$. Разобьем ОДЗ на два множества $-6\leqslant x<-1$ и $x\geqslant -1$. В области $-6\leqslant x<-1$ левая часть исходного уравнения неотрицательна, а правая отрицательна. Значит, в этой области уравнение решений не имеет. Во второй области обе части исходного уравнения положительны и, значит, оно равносильно уравнению $4\left(\sqrt{x+6}\right)^2=$ $=(x+1)^2$, т.е. уравнению $x^2-14x-95=0$. Корнями этого уравнения являются $x_1=19$ и $x_2=-5$. Из них в область $x\geqslant -1$ входит только корень $x=19$, который и является единственным решением исходного уравнения.

14) 2. 15) 1. 16) 3. 17) 3. 18) -2.

19) -3; 2. Р е ш е н и е. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x^2+x-2\geqslant 0$, т.е. ОДЗ состоит из двух промежутков $-\infty<x\leqslant -2$ и $1\leqslant x<+\infty$. Перепишем уравнение в виде $(x+1)\left(\sqrt{x^2+x-2}-2\right)=0$. На ОДЗ это уравнение равносильно совокупности уравнений $x+1=0$ и $\sqrt{x^2+x-2}=2$. Решение первого из уравнений этой совокупности есть $x=-1$. Легко видеть, что это значение не входит в ОДЗ исходного уравнения и поэтому не является его решением. Уравнение $\sqrt{x^2+x-2}=2$ на ОДЗ равносильно уравнению $x^2+x-2=4$. Это уравнение имеет корни $x=2$ и $x=-3$. Оба этих корня входят в ОДЗ исходного уравнения и, следовательно, являются его решениями.

20) -6; 7. 21) $-3/4$; 2. 22) 4.

23) 1. Р е ш е н и е. ОДЗ данного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x\geqslant 1$. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}=\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-2}.$$

Так как на ОДЗ обе части полученного уравнения неотрицательны, то оно равносильно уравнению

$$2x-1+2\sqrt{x(2x-1)}+x=x+3+2x-2+2\sqrt{(x+3)(2x-2)}$$

или уравнению

$$\sqrt{x(2x-1)}=1+\sqrt{(x+3)(2x-2)}.$$

Так как обе части этого уравнения на ОДЗ неотрицательны, то возводя обе его части в квадрат, получим уравнение

$$x(2x-1) = 1 + 2\sqrt{(x+3)(2x-2)} + (x+3)(2x-2),$$

равносильное исходному уравнению на его ОДЗ. Перепишем последнее уравнение в виде

$$2\sqrt{(x+3)(2x-2)} = 5 - 5x. \tag{1}$$

Так как на ОДЗ $5 - 5x \leqslant 0$ и $2\sqrt{(x+3)(2x-2)} \geqslant 0$, то единственное возможное решение уравнения (1), а значит, и исходного есть $x = 1$.

24) 0. Р е ш е н и е. Область допустимых значений этого уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих неравенству $1 - x^2 \geqslant 0$, т.е. ОДЗ есть множество $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Перенося радикал $\sqrt{1-x^2}$ из левой части уравнения направо и приводя получившиеся там выражения к общему знаменателю, получим на ОДЗ следующее тождество:

$$\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} = \frac{x^2 + \sqrt{1-x^2} + (1-x^2)}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно на множестве $-1 \leqslant x \leqslant 1$ уравнению $(x+1)^2 = 1$ или уравнению $x^2 + 2x = 0$. Последнее уравнение имеет два корня $x_1 = -2$ и $x_2 = 0$. Из них в ОДЗ исходного уравнения лежит только $x_2 = 0$, которое и является единственным решением исходного уравнения.

25) -4; 3. 26) -3; 2. 27) -2; 0.

28) 4. 29) -3. 30) 10. 31) 3. 32) 2. 33) 1.

34) 2. Р е ш е н и е. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x^2 - 3 > 0$ и $6x - 10 > 0$, т.е. ОДЗ есть промежуток $\sqrt{3} < x < +\infty$ (поскольку $5/3 < \sqrt{3}$). На этой области исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_2(x^2-3) = \log_2\left(\frac{1}{2}(6x-10)\right).$$

Потенцируя его, получаем уравнение $(x^2 - 3) = 3x - 5$, равносильное исходному уравнению на промежутке $x > \sqrt{3}$. Последнее уравнение имеет два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$. Из них в промежуток $x > \sqrt{3}$ (т.е. в ОДЗ исходного уравнения) входит только $x_1 = 2$. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = 2$.

35) -2. Р е ш е н и е. ОДЗ уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих одновременно условиям $\dfrac{x}{1-x^2} > 0$ и $\dfrac{x^3}{1-x^2} > 0$, т.е. ОДЗ состоит из двух промежутков $0 < x < 1$ и $x < -1$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению $\log_2 \dfrac{1}{x^2} = -2$ или уравнению $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{4}$. Решениями этого уравнения являются $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Значение $x = 2$ не входит в ОДЗ исходного уравнения и, значит, исходное уравнение имеет единственное решение $x = -2$.

36) $10^{\sqrt{2}}$; $\dfrac{1}{10}$. Р е ш е н и е. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x > 0$. На этой области это уравнение равносильно уравнению

$$2\lg^2 x + 2(1-\sqrt{2})\lg x - 2\sqrt{2} = 0.$$

Поскольку квадратное уравнение

$$2y^2 + 2(1-\sqrt{2})y - 2\sqrt{2} = 0$$

имеет корни $y_1 = \sqrt{2}$ и $y_2 = -1$, то исходное уравнение равносильно на своей ОДЗ совокупности уравнений $\lg x = \sqrt{2}$ и $\lg x = -1$. Первое из этих уравнений имеет решение $x = 10^{\sqrt{2}}$. Второе уравнение имеет решение $x = 1/10$. Оба эти числа удовлетворяют условию $x > 0$ и поэтому являются решениями исходного уравнения.

37) $3^{-\sqrt{5}}$; 9. 38) $5^{\sqrt{2}}$; 25.

39) 5. Р е ш е н и е. Область допустимых значений данного уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $x-2>0$, $2x-1>0$, т.е. ОДЗ имеет вид $x>2$. Так как на ОДЗ

$$3\log_8(x-2) = \log_2(x-2) = \frac{1}{2}\log_2(x-2)^2$$

и

$$\log_2\sqrt{2x-1} = \frac{1}{2}\log_2(2x-1),$$

то на множестве $x>2$ исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_2(x-2)^2 = \log_2(2x-1).$$

Последнее уравнение на области $x>2$ равносильно уравнению

$$(x-2)^2 = 2x-1.$$

Переписав это уравнение в виде $x^2-6x+5=0$, найдем его корни $x_1=1$ и $x_2=5$. Из этих чисел в область $x>2$ входит только $x_2=5$. Следовательно, $x_2=5$ является единственным корнем исходного уравнения.

40) -1. 41) 0.

42) $\frac{3}{2}$. Р е ш е н и е. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x+\frac{1}{2}>0$, $x-1>0$, $x+\frac{5}{2}>0$, т.е. ОДЗ есть промежуток $1<x<+\infty$. На этой области исходное уравнение равносильно уравнению

$$\lg\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right) = \lg\left(2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)\right).$$

Потенцируя его, получаем уравнение $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = 2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)$, равносильное исходному на области $1<x<+\infty$. Последнее уравнение имеет два корня $x_1=3/2$ и $x_2=-7/2$. Из них в область $1<x<+\infty$ входит только $x_1=3/2$. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень $x=3/2$.

43) 1. 44) 2. 45) -9. 46) 8. 47) $\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$. 48) 1; $\frac{27}{\sqrt{2}}$. 49) 1; 2; $\frac{16}{9}$.

50) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$; $\frac{11-\sqrt{29}}{2}$. Р е ш е н и е. Для освобождения от знака абсолютной величины разобьем числовую ось на две области: первую, в которой $x-3 \geqslant 0$, и

вторую, в которой $x-3<0$ и будем искать решения исходного уравнения в каждой из этих областей отдельно.

В первой области $|x-3|=x-3$ и исходное уравнение перепишется так:

$$x^2+4(x-3)-7x+11=0,$$

или

$$x^2-3x-1=0.$$

Решениями этого уравнения являются $x_1=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ и $x_2=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$. Из этих значений только значение $x_1=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ удовлетворяет условию $x-3\geqslant 0$ и поэтому является решением исходного уравнения.

Во второй области $|x-3|=-(x-3)$ и исходное уравнение перепишется так:

$$x^2-11x+23=0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет два корня $x_1=\dfrac{11+\sqrt{29}}{2}$ и $x_2=\dfrac{11-\sqrt{29}}{2}$, из которых условию $x-3<0$ удовлетворяет лишь значение $x_2=\dfrac{11-\sqrt{29}}{2}$, и поэтому оно является решением исходного уравнения. Следовательно, решениями исходного уравнения являются $x_1=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ и $x_2=\dfrac{11-\sqrt{29}}{2}$.

51) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{-9-\sqrt{53}}{2}$. 52) $\dfrac{5+\sqrt{53}}{2}$; $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$.

53) $-\infty<x\leqslant\dfrac{2}{5}$. 54) $-\infty<x\leqslant\dfrac{11}{7}$. 55) $-6; 2$. 56) 1.

§ 4

1) 2. 2) $-2; 2$. 3) 1. 4) 1. 5) $-1; 1$. 6) $-2; 2$. 7) 1. 8) 4. 9) 3. 10) Нет решений. 11) -3. 12) 1. 13) Нет решений. 14) -5; 0. 15) 4. 16) -1. 17) $-2; -1; 2$. 18) 4. 19) $\sqrt{3}-1$. 20) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. 21) -5. 22) 1. 23) 5. 24) 2. 25) 2.

26) -3. Решение. Заменим данное уравнение уравнением

$$1+\lg(1+x^2-2x)-\lg(1+x^2)=\lg(1-2x+x^2),$$

являющимся следствием исходного уравнения. Следствием этого уравнения является уравнение

$$\lg(1+x^2)=1,$$

решениями которого являются два числа $x_1=-3$ и $x_2=3$. Поскольку в процессе решения применялась формула $2\lg(1-x)=\lg(1-x)^2$ и уничтожение противоположных членов, то необходима проверка. Проверка показывает, что $x_2=-3$ является единственным решением исходного уравнения.

27) 2. 28) $\sqrt{2}$. 29) 3.

30) 2. Решение. Потенцируя данное уравнение, получаем уравнение

$$3^x-8=3^{2-x}. \tag{1}$$

Умножая это уравнение на 3^x и учитывая, что $3^x \neq 0$ для любого x, получим, что уравнение

$$3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$$

равносильно уравнению (1). Поскольку корнями уравнения $t^2 - 8t - 9 = 0$ являются числа $t_1 = -1$ и $t_2 = 9$, то уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$3^x = -1 \quad \text{и} \quad 3^x = 9.$$

Первое уравнение этой совокупности корней не имеет, так как (-1) не принадлежит множеству значений показательной функции. Второе уравнение имеет единственный корень $x_1 = 2$. Итак, уравнение (1) имеет единственный корень $x_1 = 2$. Все корни исходного уравнения содержатся среди корней уравнения (1), ибо при потенцировании уравнения нельзя было потерять корни, но можно было приобрести посторонние. Поэтому ни одно число, отличное от 2, не является корнем исходного уравнения. Подставляя $x = 2$ в исходное уравнение, находим, что левая и правая его части обращаются в нуль, т.е. $x = 2$ является его корнем.

31) 0. 32) 3. 33) 4. 34) Нет решений. 35) Нет решений. 36) -1. 37) Нет решений. 38) 2. 39) 6. 40) 3. 41) 5. 42) 4.

43) -1. Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\overline{2x^2 + 8x + 7} = 2 + x.$$

Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим уравнение

$$2x^2 + 8x + 7 = x^2 + 4x + 4. \tag{2}$$

Все корни исходного уравнения являются корнями уравнения (2), но не обязательно все корни уравнения (2) будут корнями исходного уравнения. Поэтому после нахождения корней уравнения (2) из них надо отобрать те, которые будут корнями исходного уравнения. Квадратное уравнение (2) имеет корни $x_1 = -1$ и $x_2 = -3$. Подставляя эти корни в исходное уравнение, получаем, что $x_1 = -1$ является его корнем, а $x_2 = -3$ не является его корнем. Следовательно, исходное уравнение имеет один корень $x_1 = -1$.

44) 1. 45) -1. 46) 1.

47) -1; 4. Решение. Область допустимых значений состоит из всех x, удовлетворяющих условию $16x + 17 \geqslant 0$, т.е. ОДЗ есть промежуток $-\dfrac{17}{16} \leqslant x <$ $< +\infty$. Перепишем исходное уравнение в виде

$$(x + 1) \quad \sqrt{16x - 17} - 8x + 23 \quad = 0. \tag{3}$$

Это уравнение равносильно на ОДЗ совокупности уравнений

$$x + 1 = 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{16x + 17} = 8x - 23.$$

Решение первого уравнения этой совокупности есть $x_1 = -1$ Это число входит в ОДЗ исходного уравнения и, следовательно, является его решением. Возведя второе уравнение в квадрат, получим уравнение

$$16x + 17 = (8x - 23)^2. \tag{4}$$

Корни второго уравнения совокупности (3) содержатся среди корней уравнения (4), но не обязательно все корни уравнения (4) будут корнями второго уравнения совокупности (3). Поэтому после нахождения корней уравнения (4) надо отобрать те из них, которые будут корнями второго уравнения из (3). Уравнение (4) можно переписать в виде $x^2 - 6x + 8 = 0$. Корнями этого уравнения являются $x_2 = 4$ и $x_3 = 2$. Проверка показывает, что только $x_2 = 4$ является решением второго уравнения совокупности (3). Так как x_2 входит в ОДЗ исходного уравнения, то x_2 является корнем исходного уравнения. Итак, исходное уравнение имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$.

48) $-2; 3$.

49) 1. Р е ш е н и е. Возведя данное уравнение в квадрат, получим уравнение

$$3x + 2 - 2\sqrt{x+3}\sqrt{2x-1} = 3x - 2,$$

которое можно переписать в виде

$$\sqrt{x+3}\sqrt{2x-1} = 2. \tag{5}$$

Все корни исходного уравнения являются корнями уравнения (5), но не обязательно все корни уравнения (5) будут корнями исходного уравнения. Возведя уравнение (5) в квадрат, получим уравнение

$$(x+3)(2x-1) = 4,$$

которое можно переписать в виде

$$2x^2 + 5x - 7 = 0. \tag{6}$$

Все корни уравнения (5) являются корнями уравнения (6), но не обязательно все корни уравнения (6) будут корнями уравнения (5). Квадратное уравнение (6) имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = -7/2$. Следовательно, все корни исходного уравнения содержатся среди этих чисел. Проверкой убеждаемся, что значение $x_1 = 1$ является решением исходного уравнения, а значение $x_2 = -7/2$ не является. Следовательно, исходное уравнение имеет один корень $x_1 = 1$.

50) -1. 51) 6. 52) 2. 53) 0; $\sqrt{2}$. 54) 5. 55) 2. 56) Нет решений. 57) 3. 58) $-3; 0$. 59) $-1; 1$. 60) $-3; -1$. 61) 1. 62) Потерян корень $x = -1$. 63) Потерян корень $x = 3$. 64) Потерян корень $x = -4$. 65) Потерян корень $x = \dfrac{-5}{2}$. 66) Потерян корень $x = 1$. 67) Потерян корень $x = 1$. 68) Потерян корень $x = -1$. 69) Потерян корень $x = -3$. 70) Потерян корень $x = 0$. 71) Потерян корень $x = 0$. 72) Потерян корень $x = -2$. 73) Потерян корень $x = -3$. 74) Потерян корень $x = 0$.

§ 5

1) $(-1)^n \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z$. 2) $\pm \dfrac{\pi}{15} - \dfrac{2\pi}{15} + \dfrac{4\pi n}{5}, n \in Z$.

3) $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$. Р е ш е н и е. Используя формулу $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, данное уравнение можно переписать в виде $\dfrac{1-\cos 2x}{2} = \dfrac{3}{4}$ или $\cos 2x = -\dfrac{1}{2}$. Решая последнее уравнение, находим $2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ или $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

4) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$. 5) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$. 6) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$. 7) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+$ $+\,\pi n,\ n\in Z$. 8) $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. 9) $\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z;\ \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3},\ k\in Z$. 10) $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$. 11) $(-1)^n\dfrac{\pi}{48}+\dfrac{\pi n}{8}, n\in Z$. 12) $(-1)^n\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 13) $x\in R$. 14) $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$. 15) $\dfrac{\pi n}{3}, n\in Z$. 16) $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$. 17) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$. 18) $\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$.

19) $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3}, n\in Z;\ \pm\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2\pi m}{3}, m\in Z$. Р е ш е н и е. Перепишем исходное уравнение в виде

$$\cos 3x\cdot(2\cos 3x-1)=0,$$

откуда следует, что оно равносильно совокупности уравнений

$$\cos 3x=0 \quad \text{и} \quad \cos 3x=\frac{1}{2}.$$

Решениями первого уравнения этой совокупности являются $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3},\ k\in Z$. Решениями второго уравнения являются $x=\pm\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2\pi n}{3}, n\in Z$.

20) $\dfrac{\pi n}{5}, n\in Z; (-1)^m\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{\pi m}{5}, m\in Z$.

21) $\pi n, n\in Z;\ \pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi m, m\in Z$. Р е ш е н и е. Используя формулу синуса двойного угла, исходное уравнение можно записать в виде

$$\sin x\cdot\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0.$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin x=0 \quad \text{и} \quad \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

первое из которых имеет решение $x=\pi n, n\in Z$, а второе — решение $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+$ $+\,2\pi m, m\in Z$.

22) $\pi n,\ n\in Z;\ \pm\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)+2\pi k,\ k\in Z$. 23) $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; $(-1)^m\arcsin\left(-\dfrac{3}{4}\right)+\pi m, m\in Z$.

При решении примеров 24–26 применить формулы

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2};\quad 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

24) $4\pi n,\ n\in Z;\ (-1)^m\cdot\dfrac{2\pi}{3}+4\pi m,\ m\in Z.$

25) $12\pi n,\ n\in Z;\ -3\pi+6\pi m,\ m\in Z.$ 26) $6\pi n,\ n\in Z;\ 3\pi+12\pi m,\ m\in Z.$
При решении примеров 27–37 применить формулы

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

27) $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\ \dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi m}{8},\ m\in Z.$ 28) $\dfrac{\pi n}{4},\ n\in Z;\ \dfrac{\pi}{14}+\dfrac{\pi m}{7},\ m\in Z.$

29) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z;\ \pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z.$ Р е ш е н и е. Используя формулу суммы косинусов двух углов, исходное уравнение можно переписать в виде

$$2\cos 2x\cdot\cos x+\cos 2x=0$$

или в виде

$$\cos 2x(2\cos x+1)=0.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos 2x=0\quad\text{и}\quad\cos x=-\frac{1}{2}.$$

Первое уравнение имеет решения $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in Z.$

Второе уравнение имеет решения $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{2\pi m}{3},\ m\in Z.$

30) $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3}\ n\in Z;\ \pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi m}{2},\ m\in Z.$

31) $\pi n,\ n\in Z;\ (-1)^m\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi m}{4},\ m\in Z.$

32) $\dfrac{\pi}{4}n,\ n\in Z;\ \pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z.$

33) $\dfrac{2\pi n}{3},\ n\in Z;\ \pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi m,\ m\in Z.$

34) $\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ n\in Z.$ Р е ш е н и е. Применяя к левой части уравнения формулу разности синусов, получим уравнение

$$2\sin\quad-\frac{5\pi}{12}\quad\cos\quad x+\frac{\pi}{4}\quad=\cos\quad x+\frac{\pi}{4}\quad,$$

или уравнение

$$1+2\sin\frac{5\pi}{12}\quad\cos\quad x+\frac{\pi}{4}\quad=0.$$

Так как $\sin\dfrac{5\pi}{12} > 0$, то $1 + 2\sin\dfrac{5\pi}{12} \neq 0$ и, значит, исходное уравнение равносильно такому:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Отсюда находим, что $x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, т.е. $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

35) $\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$. 36) $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

37) $\dfrac{\pi n}{2}, n \in Z;\ \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z$. Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде

$$5(\sin x + \sin 3x) + 6\sin 2x + \sin 4x = 0.$$

Применив формулу суммы синусов к первому слагаемому и формулу синуса двойного угла к третьему слагаемому, перепишем исходное уравнение так:

$$10\sin 2x\cos x + 6\sin 2x + 2\sin 2x\cos 2x = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin 2x = 0 \quad \text{и} \quad 5\cos x + 3 + \cos 2x = 0.$$

Первое уравнение имеет серию решений $x = \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. Применив формулу косинуса двойного угла, второе уравнение перепишем так:

$$5\cos x + 3 + 2\cos^2 x - 1 = 0.$$

Это квадратное относительно $\cos x$ уравнение. Оно равносильно совокупности уравнений

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \cos x = -2.$$

Уравнение $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ имеет решения $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. Уравнение $\cos x = -2$ решений не имеет. Следовательно, решения исходного уравнения составляют две серии:

$$x = \frac{\pi n}{2},\ n \in Z, \quad \text{и} \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

При решении примеров 38–41 применить формулы

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2},$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{2},$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

38) $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}, n \in Z$. 39) $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

40) $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}$, $n\in Z$. 41) $\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{36}+\pi n$, $n\in Z$.

При решении примеров 42–44 применить формулы

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta.$$

42) $2\pi n$, $n\in Z$. 43) $2\pi n$, $n\in Z$. 44) $2\pi n$, $n\in Z$.

При решении примеров 45–49 применить метод введения дополнительного угла.

45) $\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; $\dfrac{5\pi}{12}+\pi m$, $m\in Z$. Р е ш е н и е. Умножив обе части данного уравнения на $\dfrac{1}{2}$, его можно переписать следующим образом:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

или, пользуясь формулой для синуса разности двух углов, в виде

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

откуда $2x-\dfrac{\pi}{6}=(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$, или $x=\dfrac{\pi}{12}+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. Следовательно, исходное уравнение имеет две серии решений: $x=\dfrac{5\pi}{12}+\pi m$, $m\in Z$, и $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

46) $\dfrac{\pi}{18}\pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$. 47) $\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{2\pi n}{5}$, $n\in Z$. 48) $\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

49) $(-1)^{n+1}\dfrac{\arcsin\left(\dfrac{10}{\sqrt{123}}\right)}{6}+\dfrac{\arcsin\left(\dfrac{7}{\sqrt{113}}\right)}{6}+\dfrac{\pi n}{6}$, $n\in Z$.

50) $(-1)^{n+1}\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi n$, $n\in Z$. 51) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; $\pi+2\pi m$, $m\in Z$.

52) πn, $n\in Z$; $(-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi m}{2}$, $m\in Z$.

53) $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}$, $n\in Z$; $\dfrac{\pi m}{3}$, $m\in Z$; πk, $k\in Z$.

При решении примеров 54–61 применить формулы

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1,$$
$$\cos 2x=1-2\sin^2 x.$$

54) $\pm\arccos\left(\dfrac{-1+\sqrt{37}}{6}\right)+2\pi n$, $n\in Z$. Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулой $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, исходное уравнение перепишем в виде

$$3\cos^2 x+\cos x-3=0.$$

Так как квадратное уравнение $3y^2 + y - 3 = 0$ имеет корни $y_1 = (-1 + \sqrt{37})/6$ и $y_2 = (-1 - \sqrt{37})/6$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\cos x = (-1 + \sqrt{37})/6 \quad \text{и} \quad \cos x = (-1 - \sqrt{37})/6.$$

Решениями первого уравнения этой совокупности являются

$$x = \pm \arccos \frac{-1 + \sqrt{37}}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Второе уравнение решений не имеет, так как $|\cos\alpha| \leqslant 1$ для любого действительного α, а $(-1 - \sqrt{37})/6 < -1$. Следовательно, решениями исходного уравнения являются

$$x = \pm \arccos \frac{-1 + \sqrt{37}}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

55) $(-1)^n \arcsin \dfrac{1 - \sqrt{17}}{4} + \pi n, n \in Z.$

56) $\pm 2 \arccos \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2} + 4\pi n, n \in Z.$ 57) $\pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

58) $(-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z.$ 59) $\dfrac{2}{3} \cdot (-1)^n \arcsin \dfrac{5 - \sqrt{17}}{4} + \dfrac{2}{3}\pi n, n \in Z.$

60) $\pm 8 \arccos \dfrac{\sqrt{2} - 2}{2} + 16\pi n, n \in Z.$

61) $\pm \dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$ 62) $\dfrac{\pi n}{2}, n \in Z;\ \pm \dfrac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z.$

63) $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, n \in Z;\ (-1)^m \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi m}{3}, m \in Z.$

64) $\dfrac{\pi n}{2}, n \in Z;\ \pm \dfrac{\pi}{12} + \pi m, m \in Z.$

65) $\pi + 2\pi n, n \in Z.$ 66) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

67) $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{8}{3}\pi n,\ n \in Z;\ -\dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{8}{3}\pi m,\ m \in Z;\ -\dfrac{7\pi}{6} + 4\pi k,\ k \in Z.$

68) $\pi + \dfrac{3\pi n}{2},\ n \in Z;\ (-1)^{k+1} \cdot \dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{6\pi k}{5},\ k \in Z.$

69) $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z;\ \dfrac{(-1)^m}{2} \arcsin \dfrac{3}{4} + \dfrac{\pi m}{2},\ m \in Z.$

70) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\ -\dfrac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in Z.$

71) $\pm \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$ 72) $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;\ -\dfrac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in Z.$

73) $\pi n,\ n \in Z;\ -\dfrac{\pi}{3} + (-1)^m \dfrac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in Z.$

74) $\pi n,\ n \in Z;\ \dfrac{\pi}{4} + (-1)^{m+1} \dfrac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in Z.$

75) $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$ 76) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

77) $\pi n \pm \arccos \sqrt{\frac{3+\sqrt{21}}{8}},\ n \in Z.$

78) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in Z;\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z;\ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi l,\ l \in Z.$

79) $\pi n, n \in Z;\ \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z.$

80) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$ Р е ш е н и е. Воспользовавшись тем, что $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и $\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \sin x$, перепишем исходное уравнение в виде

$$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0.$$

Так как квадратное уравнение $2y^2 + 5y - 3 = 0$ имеет корни $y_1 = \frac{1}{2}$ и $y_2 = -3$, то исходное уравнение равнозначно совокупности уравнений

$$\sin x = -3 \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$ для любого действительного α. Решениями второго уравнения являются $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$. Следовательно,эти и только эти x являются решениями исходного уравнения.

81) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$ 82) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

83) $\frac{\pi}{4}n, n \in Z.$ Р е ш е н и е. Поскольку $\cos^2 3x = 1 - \sin^2 3x$, то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin^2 x - \sin^2 3x = 0$$

или уравнению

$$(\sin x - \sin 3x)(\sin x + \sin 3x) = 0.$$

Применяя формулы разности и суммы синусов, перепишем последнее уравнение в виде

$$4\sin x\cos 2x \cdot \sin 2x\cos x = 0.$$

Применяя формулу синуса двойного угла, перепишем это уравнение в виде

$$(\sin 2x)^2 \cdot \cos 2x = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin 2x = 0 \quad \text{и} \quad \cos 2x = 0.$$

Значит, множество решений исходного уравнения есть объединение множеств решений уравнений $\sin 2x = 0$ и $\cos 2x = 0$. Решениями первого уравнения являются $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. Решениями второго уравнения являются $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m, m \in Z.$

Следовательно, решениями исходного уравнения являются две серии $x = \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$ и $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}$, $m \in Z$. Их можно записать в виде одной серии решений: $x = \dfrac{\pi n}{4}, n \in Z$.

84) $\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi n}{8}, n \in Z$; $\dfrac{\pi}{4} - 2 + \pi m, m \in Z$; $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{\pi k}{3}, k \in Z$.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулами синуса и косинуса половинного угла

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

перепишем исходное уравнение в виде

$$\frac{1-\cos(4+6x)}{2} + \frac{1+\cos(\pi/2+4x)}{2} = \frac{1+\cos(4-10x)}{2} + \frac{1-\cos(\pi/2-12x)}{2}$$

или, после простых преобразований, в виде

$$\sin 12x - \sin 4x = \cos(4-10x) + \cos(4+6x).$$

Применим к обеим частям получившегося уравнения формулы суммы косинусов и разности синусов. Тогда оно перепишется в виде

$$2\sin 4x \cos 8x = 2\cos(4-2x)\cos 8x,$$

откуда видно, что оно равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos 8x = 0 \quad \text{и} \quad \sin 4x = \cos(4-2x). \qquad (1)$$

Первое уравнение этой совокупности имеет решения $x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi k}{8}$, $k \in Z$. Второе уравнение можно переписать в виде

$$\cos \quad 4x - \frac{\pi}{2} \quad - \cos(4-2x) = 0$$

или в виде

$$-2\sin \quad x + 2 - \frac{\pi}{4} \quad \sin \quad 3x - \frac{\pi}{4} - 2 \quad = 0.$$

Отсюда следует, что оно равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin \quad x + 2 - \frac{\pi}{4} \quad = 0 \quad \text{и} \quad \sin \quad 3x - \frac{\pi}{4} - 2 \quad = 0.$$

Решениями первого из уравнений этой совокупности являются $x = \dfrac{\pi}{4} - 2 + \pi n$, $n \in Z$, решениями второго являются $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{\pi m}{3}$, $m \in Z$. Множество решений исходного уравнения является объединением множеств решений уравнений совокупности (1), т.е. исходное уравнение имеет решения: $x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi k}{8}$, $k \in Z$; $x = \dfrac{\pi}{4} - 2 + \pi n, n \in Z$; $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{\pi m}{3}, m \in Z$.

85) $\dfrac{5\pi}{4}+5\pi n,\ \ n\in Z;\ \ \dfrac{-5\pi}{12}+5\pi m,\ \ m\in Z;\ \ -\dfrac{5\pi}{3}+5\pi k,\ k\in Z.$

Р е ш е н и е. Умножив обе части исходного уравнения на $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, перепишем его в виде

$$\frac{1}{2}\cos\quad\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\quad-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\quad\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\quad=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\sin\quad\frac{x}{5}+\frac{2\pi}{3}\quad-\sin\quad\frac{3x}{5}+\frac{\pi}{6}\qquad.$$

Поскольку $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то, применив к левой части этого уравнения формулу для косинуса суммы двух углов, а к правой части — формулу для разности синусов двух углов, перепишем это уравнение в виде

$$\cos\quad\frac{\pi}{3}+\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\quad=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin\quad\frac{\pi}{4}-\frac{x}{5}\quad\cos\quad\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}$$

или, поскольку $\sin\quad\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{5}\quad=\cos\quad\dfrac{x}{5}+\dfrac{\pi}{4}\quad$, в виде

$$\cos\quad\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\quad=\frac{2}{\sqrt{2}}\cos\quad\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\quad\cos\quad\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\quad.$$

Последнее уравнение можно преобразовать так:

$$\cos\quad\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\qquad1-\frac{2}{\sqrt{2}}\cos\quad\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\qquad=0;$$

отсюда следует, что оно равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos\quad\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\quad=0\quad\text{и}\quad\cos\quad\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\quad=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Первое из этих уравнений имеет серию решений $x=\dfrac{5\pi}{4}+5\pi k$, $k\in Z$. Решая второе уравнение, находим, что $\dfrac{2x}{5}+\dfrac{5\pi}{12}=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$. Отсюда следует, что второе уравнение имеет две серии решений:

$$x=-\frac{5\pi}{12}+5\pi n,\ n\in Z;\quad x=-\frac{5\pi}{3}+5\pi m,\ m\in Z.$$

Значит, исходное уравнение имеет три серии решений:

$$x=\frac{5\pi}{4}+5\pi k,\ k\in Z;\quad x=-\frac{5\pi}{12}+5\pi n,\ n\in Z;\quad x=-\frac{5\pi}{3}+5\pi m,\ m\in Z.$$

86) $\dfrac{\pi n}{4}, n\in Z;\ \dfrac{\pi}{32}+\dfrac{\pi m}{8}, m\in Z.$

87) $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{6}, n\in Z;\ \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi m}{2}, m\in Z.$

88) $\dfrac{\pi n}{5}, n\in Z;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z.$ 89) $\pi n, n\in Z;\ \dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\pi m}{9}, m\in Z.$

90) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z;\ -\frac{1}{4} + \frac{\pi m}{12}, m \in Z; \frac{\pi}{24} - \frac{1}{4} + \frac{\pi k}{6}, k \in Z.$

91) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;\ \pm\frac{1}{2}\arccos\quad -\frac{3}{4}\quad + \pi m, m \in Z.$

92) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z;\ \pm\frac{1}{2}\arccos\quad -\frac{3}{5}\quad + \pi m, m \in Z.$

93) $\frac{\pi}{12}(6k \pm 1), k \in Z.$ 94) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$ 95) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

96) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$ Р е ш е н и е. Выражение $\cos^6 x + \sin^6 x$ запишем в виде

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) =$$
$$= (\cos^2 x + \sin^2 x)[(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x].$$

Тогда, так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то данное уравнение равносильно уравнению

$$1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = \frac{15}{8}\cos 2x - \frac{1}{2}.$$

Используя формулы $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, перепишем это уравнение в виде

$$\cos^4 x - \frac{9}{4}\cos^2 x + \frac{9}{8} = 0. \tag{2}$$

Поскольку квадратное уравнение $y^2 - \frac{9}{4}y + \frac{9}{8} = 0$ имеет корни $y_1 = \frac{3}{4}$ и $y_2 = \frac{3}{2}$, то уравнение (2) равносильно совокупности уравнений

$$\cos^2 x = \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad \cos^2 x = \frac{3}{2}.$$

Уравнение $\cos^2 x = \frac{3}{2}$ решений не имеет, так как $|\cos x| \leqslant 1$. Воспользовавшись формулой косинуса половинного угла $\cos^2\alpha = \frac{(1+\cos 2\alpha)}{2}$, уравнение $\cos^2 x = \frac{3}{4}$ можно переписать в виде $\cos 2x = \frac{1}{2}$. Отсюда $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$, или $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

97) $\frac{\pi}{4}(2n+1), n \in Z.$ 98) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$ 99) Нет решений. 100) $-\pi + 2\pi n, n \in Z.$ 101) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$ 102) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$ 103) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z.$ 104) $2\pi n, n \in Z; 2\pi m + \frac{2\pi}{3}, m \in Z; \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$ 105) Нет решений. 106) $\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in Z; \operatorname{arctg} 3 + \pi m, m \in Z.$ 107) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi m$, $m \in Z.$

108) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$. Решение. Область допустимых значений исходного уравнения есть множество всех x, кроме $x=\pi k$, $k\in Z$. На этой области функция $y(x)=\sin x$ отлична от нуля. Поэтому, умножив данное уравнение на $\sin x$, получим уравнение

$$\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x=0,$$

равносильное исходному на его ОДЗ. Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\sqrt{2}\cos^2 x-\cos x-\sqrt{2}=0.$$

Квадратное уравнение $\sqrt{2}t^2-t-\sqrt{2}=0$ имеет корни $t_1=\sqrt{2}$ и $t_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому исходное уравнение равносильно на своей ОДЗ совокупности двух уравнений

$$\cos x=\sqrt{2} \quad \text{и} \quad \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Первое уравнение этой совокупности решений не имеет, так как $\sqrt{2}$ не входит в область значений функции $y(x)=\cos x$. Второе уравнение имеет решения $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. Все они входят в ОДЗ исходного уравнения. Значит, все эти числа являются решениями исходного уравнения.

109) $(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.

110) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}m,\ m\in Z$. Решение. Область допустимых значений данного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих неравенствам $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. Функция $y(x)=\cos^2 x$ отлична от нуля на этом множестве. Умножая данное уравнение на $\cos^2 x$ и используя формулу $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, получим уравнение

$$8\cos^4 x+2\cos^2 x-3=0, \tag{3}$$

равносильное исходному на его ОДЗ. Биквадратное уравнение $8t^4+2t^2-3=0$ имеет два корня $t_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому уравнение (3) равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Первое уравнение этой совокупности имеет две серии решений

$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z; \quad x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Второе уравнение также имеет две серии решений

$$x=\frac{3\pi}{4}+2\pi p,\ p\in Z; \quad x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi q,\ q\in Z.$$

Все найденные корни принадлежат ОДЗ исходного уравнения. Поэтому все они образуют множество решений исходного уравнения. Очевидно, что это множество можно записать в виде одной серии решений

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in Z.$$

111) $\pm \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

112) $\pm \dfrac{1}{2} \arccos \dfrac{1}{3} + \pi n, n \in Z; \quad \dfrac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z.$

113) $\pm \dfrac{1}{2} \arccos \dfrac{1}{3} + \pi n, n \in Z.$

114) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$ $2\pi m, m \in Z.$ Р е ш е н и е. Область допустимых значений данного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих неравенству $\sin x \neq 1$. На этой области уравнение равносильно уравнению

$$\cos x = 1 - \sin^2 x,$$

или

$$\cos^2 x - \cos x = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos x = 0 \quad \text{и} \quad \cos x = 1. \tag{4}$$

Первое уравнение этой совокупности имеет решения $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. Запишем эти решения в виде двух серий, когда n — четное и когда n — нечетное; соответственно имеем

$$x_k' = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z, \quad \text{и} \quad x_k'' = \frac{\pi}{2} + \pi(2k+1),\ k \in Z.$$

Для первой серии x_k' имеем $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1$, т.е. эти значения не входят в ОДЗ исходного уравнения. Для второй серии x_k'' имеем $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi(2k+1)\right) = -1$, т.е. эти значения входят в ОДЗ исходного уравнения и, значит, являются его решениями. Второе уравнение совокупности (4) имеет решения $x = 2\pi m$, $m \in Z$. Все они входят в ОДЗ исходного уравнения и, значит, являются также его решениями.

115) $\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

116) $\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi l}{5}, l \neq 5n+1, l, n \in Z.$ Р е ш е н и е. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условию $\cos 6x \neq 0$. Поскольку

$$\begin{aligned}\cos 6x = \cos(4x + 2x) = \cos 4x \cdot \cos 2x - \sin 4x \cdot \sin 2x =\\ = (1 - 2\sin^2 2x)\cos 2x - 2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \sin 2x =\\ = \cos 2x(1 - 4\sin^2 2x),\end{aligned}$$

то на ОДЗ $\cos 2x \neq 0$, $|\sin 2x| \neq \dfrac{1}{2}$ и $|\sin 2x| \neq 1$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin 4x = \cos 6x$$

или уравнению

$$2\sin 2x \cdot \cos 2x - \cos 2x(1 - 4\sin^2 2x) = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$\cos 2x(2\sin 2x + 4\sin^2 2x - 1) = 0. \tag{5}$$

Так как на ОДЗ $\cos 2x \neq 0$, то уравнение (5) равносильно на ОДЗ уравнению

$$4\sin^2 2x + 2\sin 2x - 1 = 0. \tag{6}$$

Поскольку квадратное уравнение $4z^2 + 2z - 1 = 0$ имеет корни $z_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ и $z_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$, то уравнение (6) равносильно совокупности уравнений

$$\sin 2x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \quad \text{и} \quad \sin 2x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}. \tag{7}$$

Так как $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4} \neq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} \neq 1$ и $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4} \neq 1$, то любое решение совокупности уравнений (7) будет входить в ОДЗ исходного уравнения и поэтому будет являться его решением. Решение первого уравнения совокупности (7) есть серия

$$x_1 = \frac{(-1)^n \arcsin \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}}{2} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z. \tag{8}$$

Решение второго уравнения совокупности (7) есть серия

$$x_2 = \frac{(-1)^m \arcsin \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}{2} + \frac{\pi m}{2}, \quad m \in Z. \tag{9}$$

Можно доказать, что

$$\arcsin \frac{-1-\sqrt{5}}{4} = -\frac{3\pi}{10}, \quad \arcsin \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = -\frac{\pi}{10}$$

и тогда решения, найденные по формулам (8) и (9), можно записать соответственно в виде $x_1^{(1)} = \dfrac{13\pi}{20} + \pi n$, $n \in Z$; $x_1^{(2)} = \dfrac{17\pi}{20} + \pi d$, $d \in Z$ и $x_2^{(1)} = \dfrac{\pi}{20} + \pi l$, $l \in Z$; $x_2^{(2)} = \dfrac{9\pi}{20} + \pi k$, $k \in Z$. Эти четыре серии решений, как легко видеть, можно записать в виде одной серии $x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi l}{5}$, $l \neq 5n+1$, $l, n \in Z$.

117) πn, $n \in Z$. Р е ш е н и е. Используя формулу $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, перепишем исходное уравнение в виде

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{\sin 5x}{\cos 5x}. \tag{10}$$

Освободившись в уравнении (10) от знаменателей, получим уравнение

$$\sin 3x \cdot \cos 5x = \sin 5x \cdot \cos 3x \tag{11}$$

Все корни уравнения (10) являются корнями уравнения (11), но не обязательно все корни уравнения (11) будут корнями уравнения (10). Поэтому найдя корни уравнения (11) надо будет проверить, какие из них будут корнями уравнения (10). Перенеся все члены уравнения (11) в одну сторону и воспользовавшись формулой синуса суммы двух углов, получим, что уравнение (11) равносильно уравнению

$$\sin 2x = 0$$

или уравнению

$$2 \sin x \cos x = 0. \tag{12}$$

Уравнение (12) равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = 0 \tag{13}$$

и

$$\cos x = 0. \tag{14}$$

Решение уравнения (13) задается серией $x_1 = \pi k$, $k \in Z$. Решение уравнения (14) задается серией $x_2 = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$. Следовательно, уравнение (11) имеет две серии решений $x_1 = \pi k$, $k \in Z$ и $x_2 = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$. Поскольку $\cos 3x_1 = \cos 3\pi k = (-1)^k \neq 0$, $\cos 5x_1 = (-1)^k \neq 0$, то первая серия является решением уравнения (10). Поскольку $\cos 3x_2 = \cos \left(\dfrac{3\pi}{2} + n\pi\right) = 0$, то ни одно решение из второй серии не является решением уравнения (10). Следовательно, исходное уравнение имеет одну серию решений $x_1 = \pi n$, $n \in Z$.

118) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ \ n \in Z$. 119) $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in Z; \ \ \pi n, \ n \in Z$.

120) $\dfrac{\pi}{12}(2k+1), \ k \in Z; \ \ \dfrac{\pi n}{3}, \ n \neq 3(2m+1), \ \ n \in Z, m \in Z$.

§ 6

1) $\infty < x \leqslant 3/2$. Р е ш е н и е. Ни одно из значений x, для которых $3 - 2x < 0$, т.е. ни одно из $x > 3/2$ не является решением исходного уравнения, так как при таких значениях x левая часть исходного уравнения положительна, а правая отрицательна. Рассмотрим x такие, что $3 - 2x \geqslant 0$. При таких x, т.е. для x из промежутка $x \leqslant 3/2$ обе части исходного уравнения неотрицательны и поэтому оно равносильно уравнению

$$(2x-3)^2 = (3-2x)^2,$$

которое является тождеством. Следовательно, решениями исходного уравнения являются все x из промежутка $-\infty < x \leqslant 3/2$.

2) $-\infty < x \leqslant 4/5$. 3) $-\infty < x \leqslant 1/5$. 4) $-\infty < x \leqslant 5/9$.

5) 2; 3. Р е ш е н и е. Для освобождения от знака абсолютной величины разобьем числовую прямую на две области: первую, в которой $x - 3 \geqslant 0$, и вторую, в которой

$x-3<0$, и будем искать решения исходного уравнения в каждой из этих областей отдельно. В первой области $|x-3| = x-3$ и исходное уравнение перепишется так:

$$x^2 - 4x + (x-3) + 3 = 0$$

или так

$$x^2 - 3x = 0.$$

Решениями этого уравнения являются $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$. Из них только $x_2 = 3$ принадлежит первой области и, следовательно, является единственным решением исходного уравнения на этой области.

Во второй области $|x-3| = -(x-3) = -x+3$ и исходное уравнение перепишется так:

$$x^2 - 4x - x + 3 + 3 = 0$$

или так

$$x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Решениями этого уравнения являются $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$. Из них только $x_2 = 2$ принадлежит второй области, и, следовательно, является единственным решением исходного уравнения в этой области. Итак, исходное уравнение имеет два решения: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

6) -6, -2. 7) $\dfrac{7+\sqrt{26}}{2}$.

8) $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$; $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$. Р е ш е н и е. Поскольку $(x^2-x)^2 = |x^2-x|^2$, то исходное уравнение можно переписать в виде

$$(|x^2 - x|)^2 - |x^2 - x| - 6 = 0.$$

Обозначив $|x^2 - x|$ через z, получим квадратное уравнение

$$z^2 - z - 6 = 0.$$

Его решениями являются $z_1 = -2$ и $z_2 = 3$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$|x^2 - x| = -2 \quad \text{и} \quad |x^2 - x| = 3.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, поскольку для любого x функция $y = |x^2 - x|$ неотрицательна. Уравнение $|x^2 - x| = 3$ равносильно совокупности уравнений

$$x^2 - x = 3 \quad \text{и} \quad x^2 - x = -3.$$

Решениями первого из этих уравнений являются $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$, а второе уравнение решений не имеет. Итак, исходное уравнение имеет решения $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$.

9) $-3 \leqslant x \leqslant -1$, $1 \leqslant x \leqslant 3$. Р е ш е н и е. Обозначим x^2 через z, тогда данное уравнение перепишется в виде

$$|z-3| + |z-1| = 2 \tag{1}$$

и задача формулируется теперь так: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее неравенству $z \geqslant 0$.

Разобьем полуось $z \geqslant 0$ на промежутки $0 \leqslant z < 1$, $1 \leqslant z < 3$ и $z \geqslant 3$. Решим уравнение (1) на каждом из этих промежутков.

1) Если z принадлежит промежутку $0 \leqslant z < 1$, то $z - 3 < 0$, $z - 1 < 0$ и уравнение (1) на этом промежутке равносильно уравнению

$$-(z-3) - (z-1) = 2,$$

откуда $z = 1$. Так как $z = 1$ не принадлежит рассматриваемому промежутку, то на этом промежутке уравнение (1) решений не имеет.

2) Если z принадлежит промежутку $1 \leqslant z < 3$, то $z - 3 < 0$, $z - 1 \geqslant 0$ и уравнение (1) на этом промежутке равносильно уравнению

$$-(z-3) + z - 1 = 2,$$

которое является тождеством. Следовательно, решениями уравнения (1) на промежутке $1 \leqslant z < 3$ являются все x из этого промежутка.

3) Если z принадлежит промежутку $z \geqslant 3$, то $z-3 \geqslant 0$, $z-1 > 0$ и уравнение (1) на этом промежутке равносильно уравнению

$$z - 3 + z - 1 = 2,$$

решение которого $z = 3$ принадлежит рассматриваемому промежутку и, значит, является корнем уравнения (1) на промежутке $z \geqslant 3$. Итак, решение уравнения (1) есть промежуток $1 \leqslant z \leqslant 3$. Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению $1 \leqslant x^2 \leqslant 3$, т.е. уравнению $1 \leqslant |x| \leqslant 3$. Решения этого уравнения, а, значит, и исходного уравнения принадлежат двум промежуткам: $-3 \leqslant x \leqslant -1$ и $1 \leqslant x \leqslant 3$.

10) -5; 5.

11) $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{21}}{2}$. Р е ш е н и е. Обозначив $\overline{x^2 - x - 1}$ через z, перепишем данное уравнение в виде

$$z^2 - 2 + z = 4.$$

Решениями этого уравнения являются $z_1 = -3$ и $z_2 = 2$. Следовательно, данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\overline{x^2 - x - 1} = 2 \quad \text{и} \quad \overline{x^2 - x - 1} = -3.$$

Уравнение $\overline{x^2 - x - 1} = -3$ решений не имеет, так как при любом допустимом значении x выражение $\overline{x^2 - x - 1}$ неотрицательно. Решениями уравнения $\overline{x^2 - x - 1} = 2$, а значит, и исходного являются $x_1 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ и $x_2 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$.

12) -3; 3. 13) 0; 3. 14) 1. 15) $5 \leqslant x \leqslant 10$. Обозначить $\sqrt{x-1} = z$. 16) -1; 7. 17) 1; $\frac{3}{2}$; 2. 18) Нет решений. Ввести новую переменную $z = {}^{3}\overline{\frac{x+27}{x+8}}$.

19) 3; 81. Р е ш е н и е. Так как $\log_3 3x = \log_3 x + 1$, то исходное уравнение можно записать в виде

$$\log_3 x - 3\,\overline{\log_3 x} + 2 = 0. \qquad (2)$$

Поскольку квадратное уравнение $t^2 - 3t + 2 = 0$ имеет корни $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$, то уравнение (2) равносильно совокупности уравнений

$$\overline{\log_3 x} = 1 \quad \text{и} \quad \overline{\log_3 x} = 2.$$

Первое уравнение этой совокупности имеет единственный корень $x_1 = 3$, второе уравнение также имеет единственный корень $x_2 = 81$. Следовательно, исходное уравнение имеет два корня: $x_1 = 3$ и $x_2 = 81$.

20) $2^4; 2^9$. 21) $2; 2^{\sqrt{3}}$. 22) 1.

23) -3. Решение. Область допустимых значений данного уравнения есть промежуток $-\infty < x < 1$. В этой области уравнение равносильно уравнению

$$1 + 2\lg(1 - x) - \lg(1 + x^2) = 2\lg(1 - x)$$

или уравнению $1 + x^2 = 10$. Последнее уравнение имеет два корня: $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$, из которых в ОДЗ данного уравнения входит только $x_1 = -3$. Следовательно, только значение $x_1 = -3$ и является корнем исходного уравнения.

24) 1/2. 25) Нет решений.

26) $-1/2; 5/2$. Решение. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условию

$$|x - 1| - 1 > 0. \tag{3}$$

На этой области исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{1}{|x-1| - 1} = 2$$

или уравнению $|x-1| = 3/2$. Это уравнение имеет два корня $x_1 = 5/2$ и $x_2 = -1/2$. Оба эти числа удовлетворяют условию (3) и, следовательно, являются решениями исходного уравнения.

27) $-7; 3$. 28) $\frac{4}{5}; 5\frac{1}{5}$.

29) $\frac{3}{2}; \frac{36}{25}$. Решение. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x > 0$, $5x - 6 > 0$, т.е. ОДЗ есть промежуток $6/5 < x < +\infty$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$12\log_3^2(5x - 6) - 3\log_3(5x - 6)\cdot 6\log_3 x + 6\log_3^2 x = 0$$

или уравнению

$$2\log_3^2(5x - 6) - 3\log_3(5x - 6)\cdot \log_3 x + \log_3^2 x = 0. \tag{4}$$

Так как на ОДЗ $\log_3 x > 0$, то умножив уравнение (4) на $\frac{1}{\log_3^2 x}$, получим уравнение

$$2\frac{\log_3^2(5x-6)}{\log_3^2 x} - 3\frac{\log_3(5x-6)}{\log_3 x} + 1 = 0,$$

равносильное исходному уравнению.

Поскольку квадратное уравнение $2y^2 - 3y + 1 = 0$ имеет два корня $y_1 = 1$ и $y_2 = 1/2$, то исходное уравнение на своей ОДЗ равносильно совокупности двух уравнений

$$\log_3(5x - 6) = \log_3 x \quad \text{и} \quad \log_3(5x - 6) = \frac{1}{2}\log_3 x.$$

Первое уравнение этой совокупности равносильно на промежутке $6/5 < x < +\infty$ уравнению $5x - 6 = x$, корень которого $x = 3/2$ принадлежит ОДЗ исходного уравнения и, следовательно, является его решением. Второе уравнение равносильно на промежутке $6/5 < x < +\infty$ уравнению

$$(5x-6)^2 = x \quad \text{или} \quad 25x^2 - 61x + 36 = 0.$$

Решениями последнего уравнения являются $x_1 = 36/25$ и $x_2 = 1$. Так как x_1 входит в ОДЗ исходного уравнения, то он является его корнем; так как x_2 не входит в ОДЗ исходного уравнения, то он не является его корнем.

30) $\frac{5}{3}$; $\frac{25}{16}$.

31) $\frac{5}{3}$. Решение. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x^2 - 5x + 6 \neq 0$, $x - 3 \neq 0$ и $x - 1 > 0$, т.е. ОДЗ исходного уравнения состоит из трех промежутков $1 < x < 2$, $2 < x < 3$ и $3 < x$. Перейдем в логарифмах к основанию 3, тогда исходное уравнение на своей ОДЗ равносильно уравнению

$$\log_3|x-2| + \log_3|x-3| = \log_3\frac{x-1}{2} + \log_3|x-3|,$$

или уравнению

$$\log_3|x-2| = \log_3\frac{x-1}{2}.$$

На ОДЗ исходного уравнения последнее уравнение равносильно уравнению

$$|x-2| = \frac{x-1}{2}. \tag{5}$$

Найдем решение этого уравнения, содержащееся в промежутках: а) $x \leqslant 2$; б) $x > 2$.

а) Пусть $x \leqslant 2$, тогда $|x-2| = -(x-2)$ и уравнение (5) запишется так: $-x + 2 = \frac{x-1}{2}$. Его корень $x_1 = 5/3$. Поскольку $x_1 = 5/3$ принадлежит промежутку $x \leqslant 2$, и содержится в ОДЗ исходного уравнения, то $x_1 = 5/3$ является решением исходного уравнения. б) Пусть $x > 2$, тогда $|x-2| = x-2$ и уравнение (5) запишется так: $x - 2 = \frac{x-1}{2}$. Его корень $x_2 = 3$ не принадлежит ОДЗ исходного уравнения.

Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = \frac{5}{3}$.

32) $\frac{9}{\sqrt{5}}$. 33) $\frac{1}{100}$. 34) 2. 35) $-\frac{13}{5}$; -2; 3. 36) 1; 2.

37) 2. Решение. Обозначим $2^{\sqrt{x}}$ через t. Тогда данное уравнение можно переписать так: $t - 2t^{-1} = 1$. Это уравнение равносильно уравнению $\frac{t^2-t-2}{t} = 0$, которое имеет два корня $t_1 = 2$ и $t_2 = -1$. Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $2^{\sqrt{x}} = 2$ и $2^{\sqrt{x}} = -1$. Первое уравнение этой совокупности равносильно уравнению $\sqrt{x} = 1$ и имеет единственный корень $x_1 = 1$. Второе уравнение решений не имеет, так как -1 не входит в область изменения показательной функции. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = 1$.

38) $\frac{7}{5}$. Решение. Область допустимых значений уравнения есть множество всех действительных чисел. Поскольку на ОДЗ обе части данного уравнения положительны, то данное уравнение равносильно такому: $5^{|4x-6|} = 5^{6x-8}$ или такому:

$$|4x-6| = 6x-8. \tag{6}$$

Для решения уравнения (6) разобьем числовую прямую на два множества $x \geqslant 3/2$ и $x < 3/2$. На множестве $x < 3/2$ имеем $|4x-6| = 6-4x$, поэтому уравнение (6) можно переписать в виде $6-4x = 6x-8$. Последнее уравнение имеет единственный корень $x_1 = 7/5$, принадлежащий множеству $x < 3/2$. Значит, на множестве $x < 3/2$ уравнение (6) имеет единственный корень $x_1 = 7/5$. На множестве $x \geqslant 3/2$ имеем $|4x-6| = 4x-6$, поэтому уравнение (6) можно переписать в виде $4x-6 = 6x-8$. Последнее уравнение имеет единственный корень $x_2 = 1$, который не принадлежит множеству $x \geqslant 3/2$. Значит, на множестве $x \geqslant 3/2$ уравнение (6) не имеет решений. Объединяя решения, найденные на множествах $x \geqslant 3/2$ и $x < 3/2$, получаем, что уравнение (6), а значит, и равносильное ему исходное уравнение, имеет единственный корень $x = \frac{7}{5}$.

39) $\frac{3}{5}$. 40) $\frac{2}{7}$. 41) $\frac{3}{2}$. 42) $-\frac{3}{2}$.

43) 9; 81. Решение. Поскольку $\log_3 27 = 3$, то исходное уравнение можно записать в виде

$$\left(2^{\log_9 x}\right)^2 - 6 \cdot 2^{\log_9 x} + 8 = 0.$$

Так как квадратное уравнение $y^2 - 6y + 8 = 0$ имеет два корня $y_1 = 2$ и $y_2 = 4$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$2^{\log_9 x} = 2 \quad \text{и} \quad 2^{\log_9 x} = 4.$$

Первое уравнение этой совокупности равносильно уравнению $\log_9 x = 1$, которое имеет корень $x_1 = 9$. Второе уравнение совокупности равносильно уравнению $\log_9 x = 2$, которое имеет корень $x_2 = 81$. Значит, исходное уравнение имеет два корня $x_1 = 9$ и $x_2 = 81$.

44) $\frac{1}{2}$. Решение. ОДЗ исходного уравнения состоит из всех $x \neq 0$. Для каждого x из ОДЗ $4^{1/x} > 0$, поэтому разделив исходное уравнение на $4^{1/x}$, получим уравнение

$$9 + 5 \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^{1/x} = 4\left(\frac{9}{4}\right)^{1/x}, \tag{7}$$

равносильное исходному уравнению на ОДЗ. Уравнение (7) можно переписать в виде

$$9 + 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{1/x} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{2/x}. \tag{8}$$

Поскольку квадратное уравнение $4z^2 - 5z - 9 = 0$ имеет корни $z_1 = -1$ и

$z_2 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$, то уравнение (7) равносильно совокупности уравнений

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1/x} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{1/x} = -1.$$

Первое уравнение этой совокупности имеет единственный корень $x = 1/2$, входящий в ОДЗ исходного уравнения. Второе уравнение корней не имеет. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x = 1/2$.

45) -1. 46) 0. 47) $1; 4$. 48) $-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 3$. 49) $\log_3 10; \log_3 28 - 3$. 50) $0; 1$.

51) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$. 52) $\pi n, n \in Z; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z$. 53) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

54) $\frac{\pi}{4} n, n \in Z; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z$. Р е ш е н и е. Применив формулу для суммы синусов, исходное уравнение перепишем так:

$$2 \cos x \sin 4x = \sin 4x,$$

или так:

$$\sin 4x (2 \cos x - 1) = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) равносильно совокупности уравнений

$$\sin 4x = 0 \quad \text{и} \quad \cos x = 1/2.$$

Решениями первого уравнения этой совокупности являются $\frac{\pi k}{4}, k \in Z$. Решениями второго уравнения являются $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in Z$. Их объединение и дает множество решений уравнения (8), а значит, и исходного уравнения.

55) $\frac{\pi n}{2} \pm \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}, n \in Z$. 56) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z; \pi m, m \in Z$.

57) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \pm \frac{\pi}{18} + \frac{\pi m}{3}, m \in Z$.

58) $\frac{\pi n}{2}, n \in Z; (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z$.

59) $\frac{3}{4}\pi + \pi n, n \in Z$. 60) $\pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in Z$.

61) $-\frac{\pi}{12} + (-1)^{n+1} \frac{4\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z; -\frac{5\pi}{4} + 12\pi m, m \in Z$.

62) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. 63) $\pi n, n \in Z; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in Z$.

64) $\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} + \frac{\pi n}{6}, n \in Z; \frac{3}{8} + \frac{\pi m}{4}, m \in Z; \frac{\pi}{8} + \frac{3}{8} + \pi k, k \in Z$.

65) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$. 66) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}, n \in Z; \frac{3}{7} - \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi m}{7}, m \in Z;$

$3 - \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$ 67) $\pm \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

68) $\pm \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$ Р е ш е н и е. Применив формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, перепишем исходное уравнение в виде

$$8\sin^4 x - 26\sin^2 x + 6 = 0.$$

Поскольку квадратное уравнение $4y^2 - 13y + 3 = 0$ имеет корни $y_1 = 3$ и $y_2 = \dfrac{1}{4}$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin^2 x = 3 \quad \text{и} \quad \sin^2 x = 1/4.$$

Уравнение $\sin^2 x = 3$ решений не имеет, так как числа $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$ не входят в область значений функции $y(x) = \sin x$. Уравнение $\sin^2 x = 1/4$ в свою очередь равносильно совокупности уравнений $\sin x = 1/2$ и $\sin x = -1/2$. Значит, множество решений исходного уравнения есть объединение множеств решений уравнений $\sin x = 1/2$ и $\sin x = -1/2$. Решениями первого уравнения являются $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$ Решениями второго уравнения являются $x = (-1)^{m+1} \dfrac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in Z.$ Эти решения можно объединить, записав их так: $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$ Итак, решения исходного уравнения $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

69) $\dfrac{\pi}{18}(6k \pm 1),\ k \in Z.$ 70) $\pi n,\ n \in Z.$

71) $(2n+1)\dfrac{\pi}{4},\ n \in Z;\ (2m+1)\dfrac{\pi}{2},\ m \in Z.$

72) $(2n+1)\dfrac{\pi}{4},\ n \in Z;\ \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in Z.$

73) $2\pi n,\ n \in Z;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z.$ Р е ш е н и е. Используя формулу приведения, перепишем уравнение в виде

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Поскольку

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x) =$$
$$= (\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right),$$

то исходное уравнение равносильно уравнению

$$(\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x,$$

которое в свою очередь равносильно совокупности уравнений

$$1 - \frac{1}{2}\sin 2x = 0 \quad \text{и} \quad \sin x + \cos x = 1.$$

Первое уравнение этой совокупности можно переписать в виде

$$\sin 2x = 2$$

и, следовательно, это уравнение решений не имеет, так как $|\sin 2\alpha| \leqslant 1$ при любом действительном α. Уравнение $\sin x + \cos x = 1$ можно переписать в виде

$$\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

или, используя формулу для синуса суммы двух углов, в виде

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда следует, что $x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. Следовательно, решениями исходного уравнения являются $x = (-1)^n\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

74) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in Z$. Р е ш е н и е. ОДЗ уравнения состоит из всех x таких, что $\cos 2x \neq 0$. На ОДЗ уравнение равносильно уравнению

$$\sin 2x - 4\sin x\cos x\cos 2x + \cos 2x = 4\sin^2 x\cos 2x.$$

Применяя формулы $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ и $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, перепишем это уравнение в виде

$$\sin 2x - 2\sin 2x\cos 2x + \cos 2x = 4\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\cos 2x$$

или в виде

$$\sin 2x - 2\sin 2x\cos 2x + \cos 2x = 2\cos 2x - 2\cos^2 2x.$$

Перенося все члены последнего уравнения в левую часть и производя группировку слагаемых, получаем уравнение

$$(\sin 2x - \cos 2x)(1 - 2\cos 2x) = 0.$$

Следовательно, на ОДЗ исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sin 2x - \cos 2x = 0 \quad \text{и} \quad 1 - 2\cos 2x = 0.$$

Поскольку для решения первого уравнения $\cos 2x \neq 0$, то первое уравнение этой совокупности равносильно уравнению

$$\operatorname{tg} 2x = 1.$$

Решениями этого уравнения являются $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. Решениями уравнения $\cos 2x = \frac{1}{2}$ являются $\pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in Z$. Следовательно, решениями исходного уравнения являются

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z, \quad \text{и} \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in Z.$$

75) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;\ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{2},\ m \in Z.$

76) $\frac{\pi n}{2}, n \in Z; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3}, m \in Z.$ Р е ш е н и е. Область допустимых значений данного уравнения состоит из точек, удовлетворяющих неравенству $\cos 2x \neq 0$, или неравенству $x \neq \frac{\pi}{4}(2m+1)$, $m \in Z$. В этой области $1 + \operatorname{tg}^2 2x = \frac{1}{\cos^2 2x}$, причем функция $y = 1 + \operatorname{tg}^2 2x$, очевидно, нигде не обращается в нуль. Отсюда следует, что данное уравнение равносильно на своей ОДЗ уравнению

$$\sin\frac{21}{4}x\cos\frac{7}{4}x + \sin\frac{5}{4}x\cos\frac{1}{4}x = \sin\frac{x}{4}\cos\frac{5x}{4} - \sin\frac{7}{4}x\cos\frac{21}{4}x$$

или уравнению

$$\sin\frac{21}{4}x\cos\frac{7}{4}x + \cos\frac{21}{4}x\sin\frac{7}{4}x = \sin\frac{x}{4}\cos\frac{5x}{4} - \cos\frac{x}{4}\sin\frac{5x}{4}.$$

Пользуясь формулами для синуса суммы и разности двух углов, последнее уравнение можно переписать в виде

$$\sin(7x) = \sin(-x). \tag{9}$$

Перенесем правую часть уравнения (9) налево, воспользуемся тем, что $\sin(-x) = -\sin x$, а также формулой для суммы синусов двух углов. Тогда уравнение (9) примет вид

$$2\sin 4x \cos 3x = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin 4x = 0 \quad \text{и} \quad \cos 3x = 0$$

и потому имеет следующие серии решений: $x = \frac{\pi}{4}n$, $n \in Z$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$. Итак, множество решений уравнения (9) имеет вид

$$x = \frac{\pi}{4}n,\ n \in Z; \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z.$$

Отберем теперь из найденных чисел те, которые содержатся в ОДЗ исходного уравнения, т.е. удовлетворяют неравенствам $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$. Из первой серии решений уравнения (9) в ОДЗ исходного уравнения лежат только точки $x = \frac{\pi n}{4}$ с четными значениями n ($n = 2l$), т.е. точки $x = \frac{\pi l}{2}$, $l \in Z$. Все точки второй серии решений уравнения (9) содержатся в ОДЗ данного уравнения.

77) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;\ \ \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z.$

78) $\frac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z;\ \ \frac{2\pi}{3}(1+3m),\ m \in Z;\ \ \frac{2\pi}{3}(2+3k),\ k \in Z.$

79) $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z$. Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$3^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x}=3^{\frac{3}{2}-\operatorname{tg}2x}$$

или уравнению

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x=\frac{3}{2}-\operatorname{tg}2x.$$

Последнее уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg}2x=1$. Решениями этого уравнения, а следовательно, и исходного уравнения являются $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$.

80) $\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$. 81) $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$.

82) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$. 83) $\dfrac{\pi}{12}+2\pi n, n\in Z$.

84) $\dfrac{\pi}{12}+2\pi n, n\in Z$. 85) $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$.

86) $\dfrac{\pi}{4}+\pi(2n+1), n\in Z$. 87) $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

88) $-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z; \dfrac{5\pi}{4}+2\pi m, m\in Z$. 89) $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.

90) $\pm\dfrac{4\pi}{3}+4\pi+8\pi n, n\in Z$. 91) $\pi n, n\in Z$. 92) $\pi+4\pi n, n\in Z$.

93) $\operatorname{arcctg}\dfrac{3}{4}+\pi n, n\in Z$. Решение. Обозначим $\operatorname{ctg}x$ через z, тогда данное уравнение можно переписать так:

$$\sqrt{37-48z}=8z-5. \tag{10}$$

Возводя обе части уравнения (10) в квадрат, получим уравнение

$$16z^2-8z-3=0,$$

которое имеет два корня $z_1=3/4$ и $z_2=-1/4$. Поскольку при возведении в квадрат могли появиться лишние корни, то необходимо проверить, будут ли корни z_1 и z_2 корнями уравнения (10). Проверка показывает, что уравнение (10) имеет единственный корень $z_1=3/4$. Отсюда следует, что исходное уравнение равносильно уравнению $\operatorname{ctg}x=3/4$, а потому имеет решения $x=\operatorname{arcctg}\dfrac{3}{4}+\pi n, n\in Z$.

94) $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}+\pi n, n\in Z$. 95) $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.

96) $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

97) $\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$. Решение. Обозначим $\cos x$ через t. Тогда данное

уравнение можно переписать так:

$$\sqrt{3+4\sqrt{6}-(16\sqrt{3}-8\sqrt{2})t} = 4t-\sqrt{3}. \tag{11}$$

Очевидно, все решения уравнения (11) должны удовлетворять неравенству $4t - \sqrt{3} \geqslant 0$, т.е. лежать в области $t \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Каждый корень уравнения (11) будет также корнем уравнения

$$3+4\sqrt{6}-(16\sqrt{3}-8\sqrt{2})t = 16t^2-8\sqrt{3}t+3, \tag{12}$$

полученного возведением в квадрат обеих частей уравнения (11). Уравнение (12) можно переписать так:

$$4t^2+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})t-\sqrt{6}=0. \tag{13}$$

Уравнение (13) имеет корни $t_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $t_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Корень t_2 не лежит в области $t \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ и, значит, не удовлетворяет уравнению (11). Подставим $t_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ в уравнение (11). Левая часть уравнения равна

$$\sqrt{3+4\sqrt{6}-8\sqrt{6}+8} = \sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}-\sqrt{3},$$

правая часть также равна $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Значит, число $t_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ является единственным корнем уравнения (11), и потому исходное уравнение равносильно уравнению

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Это уравнение, а значит, и исходное уравнение имеет решения $x = \pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in Z$.

98) $(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in Z$. 99) $\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n \in Z$.

100) $(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in Z$.

101) $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in Z$. Решение. Область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условию $\sin x \geqslant 0$. Поскольку квадратное уравнение

$$2z^2-\sqrt[4]{3}-(\sqrt{2}-\sqrt[4]{12})z=0$$

имеет корни $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $z_2 = -\dfrac{\sqrt[4]{12}}{2}$, то исходное уравнение на ОДЗ равносильно совокупности уравнений

$$\sqrt{\sin x} = -\frac{\sqrt[4]{12}}{2} \quad \text{и} \quad \sqrt{\sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, так как $\sqrt{\sin x} \geqslant 0$ для любого x из ОДЗ. Уравнение $\sqrt{\sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ равносильно на ОДЗ уравнению $\sin x = \frac{1}{2}$, решения которого $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$, как легко видеть, входят в ОДЗ исходного уравнения, а значит, и являются его решениями.

102) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$ 103) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$ 104) $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$

105) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$ Р е ш е н и е. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение

$$2 - 3\cos 2x = \sin x. \tag{14}$$

Все корни исходного уравнения являются корнями уравнения (14), но не обязательно все корни уравнения (14) будут корнями исходного уравнения. Поэтому после нахождения корней уравнения (14) из них надо отобрать те, которые будут корнями исходного уравнения.

Применяя формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, перепишем уравнение (14) в равносильном виде

$$6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0. \tag{15}$$

Так как квадратное уравнение $6t^2 - t - 1 = 0$ имеет корни $t_1 = 1/2$ и $t_2 = -1/3$, то уравнение (15) равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = 1/2 \quad \text{и} \quad \sin x = -1/3.$$

Те значения x, для которых $\sin x = -1/3$, как легко видеть, не являются решениями исходного уравнения. Для значений x, удовлетворяющих равенству $\sin x = \frac{1}{2}$, имеем, что

$$2 - 3\cos 2x = 2 - 3(1 - 2\sin^2 x) = 2 - 3 \cdot \quad 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} \quad > 0.$$

Поэтому все значения x, удовлетворяющие равенству $\sin x = \frac{1}{2}$, т.е. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + {}$ $+ \pi n$, $n \in Z$, являются решениями исходного уравнения.

106) $\pi + 2\pi n, n \in Z.$ 107) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

108) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

109) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in Z.$ Р е ш е н и е. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{5\sin x + \cos 2x} = -2\cos x. \tag{16}$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение

$$5\sin x + \cos 2x = 4\cos^2 x. \tag{17}$$

Все корни исходного уравнения являются корнями уравнения (16), но не обязательно все корни уравнения (16) будут корнями исходного уравнения. Поэтому после нахождения корней уравнения (17) из них надо отобрать те, которые будут корнями исходного уравнения. Поскольку $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ и $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то уравнение (17) перепишется в виде

$$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0. \tag{18}$$

Так как квадратное уравнение $2t^2 + 5t - 3 = 0$ имеет два корня $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = -3$, то уравнение (18) равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sin x = -3.$$

Второе уравнение $\sin x = -3$ решений не имеет, так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$ для любого действительного α. Первое уравнение имеет две серии решений $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$ и $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in Z$. Теперь надо среди этих найденных решений отобрать те, которые являются решениями исходного уравнения.

Рассмотрим серию решений $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. Подставляя эти значения в исходное уравнение, получаем верное равенство $\overline{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}} + 2 \cdot \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad = 0$. Следовательно, все эти x являются решениями исходного уравнения.

Рассмотрим серию решений $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. Подставляя эти значения в левую часть исходного уравнения, получаем $\overline{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt{3} \neq 0$. Значит, эти значения x решениями исходного уравнения не являются. Итак, решениями исходного уравнения являются $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in Z$.

110) $\pi n,\ n \in Z;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z.$ 111) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

112) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z.$ 113) $\frac{\pi}{6} + 4\pi n,\ n \in Z.$

114) $\frac{7\pi}{6} + 4\pi m,\ m \in Z;\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$ 115) $\frac{5\pi}{6} + 4\pi n,\ n \in Z.$

116) $\pm\arccos \quad -\frac{5}{9} \quad + 2\pi l,\ l \in Z;\quad \pm\arcsin\frac{7}{9} + 2\pi n,\ n \in Z;$

$$\pm\arcsin \quad -\frac{1}{9} \quad + 2\pi k,\ k \in Z.$$

117) $(-1)^n \arcsin\frac{12}{13} + \pi n,\ \ n \in Z;\ \ (-1)^{l+1}\arcsin\frac{3}{13} + \pi l,\ \ l \in Z;$

$$(-1)^{m+1}\arcsin\frac{6}{13} + \pi m,\ \ m \in Z.$$

118) $(-1)^{m+1}\arcsin\dfrac{6}{13}+\pi m,\ \ m\in Z;\quad \pm\arccos\quad -\dfrac{10}{11}\quad +2\pi m,\ m\in Z;$

$\pm\arccos\dfrac{2}{11}+2\pi n,\ n\in Z;\quad \pm\arccos\dfrac{6}{11}+2\pi p,\ p\in Z.$

119) $\dfrac{\sqrt{113}-5}{4}$. 120) $1-\sqrt{5}$. 121) $-2-\sqrt{2}$.

122) $-\dfrac{\pi}{24}$; 0. Р е ш е н и е. Поскольку

$$\sin 3z=\sin(2z+z)=\sin 2z\cos z+\cos 2z\sin z=3\sin z-4\sin^3 z,$$
$$\cos 2z=1-2\sin^2 z,$$

то

$$\sin 12x=3\sin 4x-4\sin^3 4x,$$
$$\cos 8x=1-2\sin^2 4x.$$

Используя эти формулы, данное уравнение можно записать в виде

$$3\sin 4x-4\sin^3 4x+4\sin^2 4x=0$$

или в виде

$$\sin 4x\cdot(4\sin^2 4x-4\sin 4x-3)=0. \tag{19}$$

Поскольку квадратное уравнение $4t^2-4t-3=0$ имеет корни $t_1=-\dfrac{1}{2}$ и $t_2=\dfrac{3}{2}$, то уравнение (19) равносильно совокупности уравнений

$$\sin 4x=0,\quad \sin 4x=-\frac{1}{2}\quad \text{и}\quad \sin 4x=\frac{3}{2}.$$

Третье уравнение этой совокупности решений не имеет, поскольку $|\sin 4x|\leqslant 1$ для любого действительного x. Решениями уравнения $\sin 4x=0$ являются $x=\dfrac{\pi k}{4}$, $k\in Z$. Решениями уравнения $\sin 4x=-\dfrac{1}{2}$ являются $x=-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{2\pi n}{4}$, $n\in Z$ и $x=-\dfrac{5\pi}{24}+\dfrac{2\pi m}{4}$, $m\in Z$. Среди чисел $\dfrac{\pi k}{4}$, $k\in Z$ интервалу $\quad -\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\quad$ принадлежит лишь число $x=0$, среди чисел $-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{2\pi n}{4}$, $n\in Z$ интервалу $\quad -\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\quad$ принадлежит лишь число $-\dfrac{\pi}{24}$, среди чисел $-\dfrac{5\pi}{24}+\dfrac{\pi m}{2}$, $m\in Z$ интервалу $\quad -\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\quad$ не принадлежит ни одно число.

123) $-\dfrac{2\pi}{9},\ -\dfrac{\pi}{6}$. 124) $\dfrac{\pi}{4}$. 125) $-\dfrac{\pi}{2}$.

126) $\dfrac{\pi}{24}$; $\dfrac{17\pi}{24}$; $-\dfrac{31\pi}{24}$. Р е ш е н и е. Применяя формулу синуса суммы двух углов, перепишем уравнение в виде

$$\sin\quad x+\frac{\pi}{8}\quad=\frac{1}{2},$$

откуда либо $x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$, либо $x + \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in Z$. Значит, исходное уравнение имеет две серии решений

$$x = \frac{\pi}{24} + 2\pi n, n \in Z \quad \text{и} \quad x = \frac{17}{24}\pi + 2\pi m, m \in Z.$$

Из первой серии в промежуток $\quad -\frac{3\pi}{2}, \pi \quad$ входит лишь $x_1 = \frac{\pi}{24}$, а из второй $x_2 = \frac{17\pi}{24}$ и $x_3 = \frac{17\pi}{24} - 2\pi$.

127) $\frac{\pi}{30}$; $\frac{11\pi}{30}$; $\frac{61\pi}{30}$. 128) $-\frac{29\pi}{42}$; $-\frac{\pi}{42}$; $\frac{55\pi}{42}$.

129) $-\frac{35\pi}{24}$; $-\frac{19\pi}{24}$; $\frac{13\pi}{24}$. 130) $-\frac{4\pi}{21}$; $\frac{10\pi}{21}$; $\frac{38\pi}{21}$.

131) $\frac{35\pi}{84}$; $\frac{53\pi}{84}$; $\frac{59\pi}{84}$. Р е ш е н и е. Уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

или, учитывая, что $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$, и используя формулу синуса разности двух углов, в виде

$$\sin \quad \frac{\pi}{6} - 7x \quad = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{\pi}{6} - 7x = -\frac{\pi}{4} - 2\pi k, \quad k \in Z,$$

либо

$$\frac{\pi}{6} - 7x = -\frac{3\pi}{4} - 2\pi m, \quad m \in Z.$$

Следовательно, получаем две серии решений исходного уравнения

$$x = \frac{5\pi}{84} + \frac{2\pi k}{7}, \ k \in Z; \ \ x = \frac{11\pi}{84} + \frac{2\pi m}{7}, \ m \in Z.$$

Теперь выберем из этих серий те решения, которые удовлетворяют условию $0{,}4\pi < x < \frac{6\pi}{7}$.

Для первой серии имеем

$$\frac{4}{10}\pi < \frac{5\pi}{84} + \frac{2\pi k}{7} < \frac{6\pi}{7} \quad \text{или} \quad \frac{7}{5} - \frac{5}{24} < k < 3 - \frac{5}{24},$$

откуда $k = 2$, т.е. искомое решение есть $x_1 = \frac{5\pi}{84} + \frac{4\pi}{7}$.

Для искомого x из второй серии имеем

$$\frac{4}{10}\pi < \frac{11\pi}{84} + \frac{2\pi m}{7} < \frac{6\pi}{7} \text{ или } \frac{7}{5} - \frac{11}{24} < m < 3 - \frac{11}{24},$$

откуда $m = 1$ или $m = 2$. Итак, есть два решения из второй серии, удовлетворяющие условию $0{,}4\pi < x < \frac{6\pi}{7}$ — это $x_2 = \frac{11\pi}{84} + \frac{2\pi}{7}$ и $x_3 = \frac{11\pi}{84} + \frac{4\pi}{7}$.

132) $\frac{43\pi}{96}$; $\frac{59\pi}{96}$; $\frac{65\pi}{96}$. 133) $\frac{65\pi}{84}$; $\frac{83\pi}{84}$; $\frac{89\pi}{84}$. 134) $\frac{59\pi}{96}$; $\frac{79\pi}{96}$; $\frac{83\pi}{96}$. 135) $-\frac{\pi-6}{6} + \pi n$; $\frac{\pi-2}{2} + \pi n$, $n = -1$, $n = 0$, $n = 1$. 136) $\frac{-3\pi+6}{2}$; $\frac{\pi+6}{2}$; $\frac{\pm 7\pi+6}{2}$; $\frac{\pm 5\pi+6}{6}$; $\frac{3\pi+2}{2}$; $\frac{-\pi+2}{2}$. 137) $\frac{\pi-2}{2} + \pi k$; $\frac{3\pi-2}{6} + \pi k$, $k = -1; 0; 1$. 138) $\frac{3\pi}{4}$. 139) $\frac{5\pi}{4}$.

140) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$. Решение. Данное уравнение равносильно такому:

$$1 - 5\sin x + 2(1 - \sin^2 x) = 0$$

или

$$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0.$$

Квадратное уравнение $2t^2 + 5t - 3 = 0$ имеет корни $t_1 = -3$ и $t_2 = 1/2$. Значит, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin x = -3 \quad \text{и} \quad \sin x = 1/2.$$

Первое уравнение этой совокупности не имеет решений, так как при любом x справедливо неравенство $\sin x \geqslant -1$. Второе уравнение имеет две серии решений

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z;\quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z.$$

Теперь отберем из этих решений те, которые удовлетворяют неравенству $\cos x \geqslant 0$. Для любого корня из первой серии имеем $\cos x_1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, для любого корня из второй серии имеем $\cos x_2 = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$. Значит, для любого корня из второй серии неравенство $\cos x \geqslant 0$ не выполнено, а для любого корня из первой серии — выполнено. Итак, условию задачи удовлетворяют только корни первой серии.

141) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$. 142) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

143) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

144) $\frac{5\pi}{48} + \pi m,\ m \in Z$; $\frac{17\pi}{48} + \pi n,\ n \in Z$; $\frac{7\pi}{24} + \pi k,\ k \in Z$.

145) $\frac{3\pi}{4} + \frac{4\pi n}{3},\ n \in Z$; $\frac{13\pi}{12} + \frac{4\pi m}{3},\ m \in Z$; $\frac{7\pi}{18} + \frac{4\pi k}{3},\ k \in Z$.

146) $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in Z$; $\frac{4\pi}{3} + 4\pi m,\ m \in Z$; $\frac{11\pi}{3} + 4\pi l,\ l \in Z$.

147) $\pi + 4\pi l, l \in Z;\ \frac{\pi}{2} + 4\pi m,\ m \in Z;\ \frac{3\pi}{2} + 4\pi k,\ k \in Z.$

148) $5; \pi k,\ k \in Z.$ 149) $1;\ \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$

150) $-\frac{3}{2}; \pi k,\ k \in Z.$ 151) $\pm 3;\ \pm\frac{5}{2};\ \pm\frac{3}{2};\ \pm\frac{1}{2}.$

152) $\pm\frac{5}{2}; \pm 2; \pm 1; 0.$ 153) $\pm\frac{7}{2}; \pm 3; \pm 1.$

154) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z; (-1)^{m+1}\frac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in Z.$

155) $2\pi n,\ n \in Z;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z.$

156) $\pi + 2\pi n, n \in Z;\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z.$

157) $3\pi + 4\pi n,\ n \in Z.$

158) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi l,\ l \in Z.$ Р е ш е н и е. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x, таких, что $2\sin x \cdot \cos x - 1 \neq 0$. Так как $2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$, то ОДЗ состоит из всех x таких, что $\sin 2x \neq 1$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x = \sin 2x - 1$$

или такому

$$2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0. \tag{20}$$

Поскольку квадратное уравнение $2z^2 - 3\sqrt{2}z + 2 = 0$ имеет корни $z_1 = \sqrt{2}$ и $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то уравнение (20) равносильно совокупности уравнений

$$\sin x = \sqrt{2} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, так как $|\sin\alpha| \leqslant 1$ для любого действительного α. Второе уравнение имеет решения $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$ и $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi l,\ l \in Z$. Проверим, какие из найденных решений входят в ОДЗ исходного уравнения.

Если $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$, то $\sin 2x = \sin\ \ \frac{\pi}{2} + 4\pi k\ \ = 1$. Следовательно, значения $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$ не являются решениями исходного уравнения.

Если $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi l, l \in Z$, то $\sin 2x = \sin\ \ \frac{3\pi}{2} + 4\pi l\ \ = -1$ и, следовательно, эти x являются решениями исходного уравнения.

159) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$ 160) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$

161) $\frac{\pi}{4}+2\pi m,\ m\in Z.$ 162) $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5},\ k\neq 2+5n,\ k,n\in Z.$

163) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5},\ k\neq 5m+2,\ k,m\in Z.$

164) $\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5},\ n\neq 5l+3,\ n,l\in Z.$

165) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\neq 0,\ n\in Z.$ Решение. Все решения данного уравнения содержатся в множестве решений уравнения

$$2-3\sin x-\cos 2x=0.$$

Решим это уравнение. Воспользовавшись формулой косинуса двойного угла $\cos 2\alpha = 1-\sin^2\alpha$, перепишем это уравнение в виде

$$2\sin^2 x-3\sin x+1=0. \tag{21}$$

Поскольку квадратное уравнение $2t^2-3t+1=0$ имеет корни $t_1=\frac{1}{2}$ и $t_2=1$, то уравнение (21) равносильно совокупности уравнений

$$\sin x=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sin x=1.$$

Решениями этих уравнений соответственно являются

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z \quad \text{и} \quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$$

Для того, чтобы выделить из этих чисел решения исходного уравнения, необходимо исключить из них числа, удовлетворяющие равенству $6x^2-\pi x-\pi^2=0$, т.е. числа, совпадающие либо с $x_1=-\frac{\pi}{3}$ либо с $x_2=\frac{\pi}{2}$. В первой серии нет чисел совпадающих с этими. Во второй серии имеется единственное число, получающееся при $n=0$.

166) Нет решений.

167) $\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z;\ -\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\neq 0,\ n\in Z.$

168) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\neq 0,\ m\in Z.$

169) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2};\ -2\pm\sqrt{3}$. Поделив уравнение на $x^2\neq 0$, сделать замену переменных $u=x+\frac{1}{x}$. 170) $-1;\ \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. 171) 3. 172) $\sqrt{3}$. 173) $-2;\ 1\pm\sqrt{3}$.

174) $-6;\ -2;\ -4\pm\sqrt{6}$. Данное уравнение равносильно уравнению $(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+15=0$ или такому $(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=0$. В этом уравнении сделать замену $x^2+8x+7=z$.

175) $-\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}$; 3.

176) $\frac{-\sqrt{13}-1\pm\sqrt{2\sqrt{13}-2}}{4}$. Разделить уравнение на x^2 и сделать замену $x+\frac{1}{x}=u$. 177) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

178) $\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$; $\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$. Разделить уравнение на x^2 и сделать замену $2x+\frac{1}{x}=u$.

179) 1. 180) $\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$; $\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$.

181) $\frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$; $\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$. Разложить выражение $x^4-2\sqrt{2}x^2-x+2-\sqrt{2}$ на множители $x^2+x+1-\sqrt{2}$ и $x^2-x-\sqrt{2}$. 182) $\pm\frac{1}{2}$; $\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}}$. Поделив уравнение на $x^4\neq 0$, сделать замену $x^2-\frac{1}{4x^2}=y$. 183) $-\frac{1}{12}$; $\frac{1}{2}$. Сделать замену переменной $y=\frac{1}{4}\left(\left(x-\frac{1}{12}\right)+\left(x-\frac{1}{6}\right)+\left(x-\frac{1}{4}\right)+\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)=x-\frac{5}{24}$.

184) $1+\sqrt{3}\pm\sqrt{3+2\sqrt{3}}$. Раскрыть скобки, разделить уравнение на x^2, сделать замену $x+\frac{1}{x}=y$. 185) 2; 3. Обозначить $\frac{3-x}{2-x}=y$ для $x\neq 2$. 186) -3; 4. Сделать замену $x^2-x=z$. 187) $\frac{5}{2}$.

188) $\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$. Сделать замену $\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)^2=z$.

189) 2; $-1\pm\sqrt{3}$. Записать уравнение в виде $x^4-2x^2(x-1)-8(x-1)^2=0$ и сделать замену $\frac{x^2}{x-1}=z$, либо раскрыв скобки сначала подобрать целые корни. 190) 2; 1.

191) -1; 9; $\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$. Сделать замену $\frac{x^2-6x-9}{x}=y$. 192) -1; 2; $\frac{1}{2}$.

193) 0; $-\frac{5}{2}$. Заметить, что $\frac{x^2+2x+2}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}$; $\frac{x^2+8x+20}{x+4}=x+4+\frac{4}{x+4}$ и т.д.

194) 2; $\frac{4}{3}$. Сделать замену $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=z$. 195) 14; 7. Сделать замену $x+\frac{15}{x}=z$. 196) 3.

197) Нет решений. Умножить левую и правую части уравнения на $\sqrt{x+1}-1$.
198) $-3; 0$. 199) 4. Рассмотреть случаи $x > 4$; $x = 4$ и $x < 4$.

200) $2; \frac{1}{4}$. Р е ш е н и е. ОДЗ этого уравнения есть $x > 0$. Перепишем уравнение в виде

$$\left(\log_2 x + \frac{x-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-5}{2}\right)^2 = 0,$$

откуда очевидно, что оно равносильно на ОДЗ совокупности уравнений

$$\log_2 x + \frac{x-1}{2} - \frac{x-5}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \log_2 x + \frac{x-1}{2} + \frac{x-5}{2} = 0,$$

т.е. совокупности уравнений

$$\log_2 x = -2 \quad \text{и} \quad \log_2 x = -x + 3.$$

Первое уравнение имеет единственное решение $x = \frac{1}{4}$. Для решения второго уравнения рассмотрим три случая $x = 2$, $x < 2$ и $x > 2$. Используя свойства функций $y = \log_2 x$ и $y = 3 - x$, получим, что это уравнение имеет единственное решение $x = 2$.

201) 3.

202) Нет решений. Записать правую часть уравнения в виде $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ и рассмотреть случаи $x \leqslant -\pi$, $-\pi < x \leqslant 0$, $0 < x \leqslant \pi$ и $x > \pi$.

203) Нет решений.

204) $x = 0$. Учесть, что для любых x справедливы неравенства $2\cos^2 \frac{x^2+x}{6} \leqslant 2$, $2^x + 2^{-x} \geqslant 2$.

205) Нет решений.

206) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. Заметить, что $\sin^8 x \leqslant \sin^2 x$, $\cos^8 x \leqslant \cos^2 x$.

207) $2\pi n$, $n \in Z$; $\frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$. 208) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. 209) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; πm, $m \in Z$. 210) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; $\frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$. 211) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. 212) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. 213) $4\pi m$, $m \in Z$. 214) 2.

215) 2. Рассмотреть случаи $0 < x < 2$, $x = 2$ и $x > 2$.

216) 3. 217) -1. 218) 0. 219) Нет решений. 220) 2. 221) 2. 222) 0. 223) 0. 224) π. 225) $\frac{3\pi}{2}$. 226) -5. 227) $6\pi n - \frac{3\pi}{2}$, $n \in Z$. 228) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$. 229) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$. 230) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

231) $-1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$. 232) $-2 \pm \sqrt{14 + 4\sqrt{3}}$. 233) $2 \pm \sqrt{14 + 4\sqrt{3}}$.

234) $1+\sqrt{3}$. Р е ш е н и е. Область допустимых значений уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x-1>0$, $x-1\neq 1$, т.е. ОДЗ состоит из двух промежутков $1<x<2$ и $2<x<+\infty$. На этой области исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{3}=x-1,$$

которое имеет единственный корень $x=1+\sqrt{3}$.

235) $\sqrt{3}-2$. 236) 4. 237) 4. 238) $\frac{1}{2}$. 239) 5; $\sqrt{6}-1$. 240) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.

241) $(-1)^n\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n\in Z$; $(-1)^m\frac{3\pi}{8}+\pi m$, $m\in Z$. 242) 1. 243) 1; 3. 244) $\frac{-3\pm\sqrt{45}}{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{53}}{2}$. 245) $\frac{1}{4}$. 246) $\frac{7}{10}$. 247) $\pm\frac{1}{2}$. 248) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. 249) $\pm\frac{1}{2}$.

250) $-\frac{1}{4}$. Р е ш е н и е. Поскольку $9+12x+4x^2=(2x+3)^2$, а $6x^2+23x+21=(3x+7)(2x+3)$, то область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям

$$2x+3>0,\quad 2x+3\neq 1,\quad 3x+7>0,\quad 3x+7\neq 1,$$

т.е. ОДЗ состоит из двух промежутков $-\frac{3}{2}<x<-1$ и $-1<x<+\infty$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$2\log_{3x+7}(2x+3)+\log_{2x+3}(3x+7)+1=4. \tag{22}$$

Обозначим $\log_{3x+7}(2x+3)$ через z, тогда уравнение (22) можно переписать в виде

$$2z+\frac{1}{z}=3. \tag{23}$$

Уравнение (23) равносильно уравнению

$$2z^2-3z+1=0$$

и потому имеет корни $z_1=1/2$ и $z_2=1$.

Следовательно, исходное уравнение на своей ОДЗ равносильно совокупности уравнений

$$\log_{3x+7}(2x+3)=1/2, \tag{24}$$

$$\log_{3x+7}(2x+3)=1. \tag{25}$$

Уравнение (24) равносильно на ОДЗ уравнению

$$(2x+3)^2=3x+7.$$

Это уравнение имеет два корня $x_1=-1/4$ и $x_2=-2$, из которых только $x_1=-1/4$ лежит в ОДЗ исходного уравнения. Уравнение (25) равносильно на ОДЗ уравнению

$$2x+3=3x+7,$$

которое имеет единственный корень $x_3 = -4$, не лежащий в ОДЗ исходного уравнения. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x_1 = -1/4$.

251) $\frac{1}{4}$. 252) 6; $\frac{4}{3}$. 253) 511; $-\frac{1}{2}$. 254) $\frac{\sqrt{11}}{4}$. 255) $\frac{\sqrt{33}}{3}$. 256) $\frac{\sqrt{7}}{2}$. 257) $\frac{1}{49}$. 258) $\frac{1}{25}$. 259) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 2. 260) $\log_2 3$. 261) $3^{-\frac{4}{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 262) 4; $\frac{1}{4}$; 16. 263) $\frac{5}{2}$; $0 < x \leqslant 2$, $x \neq 1$. 264) $\frac{5}{2}$. 265) $2^{\sqrt{2}}$; $2^{-\sqrt{2}}$. 266) Нет решений. 267) $\frac{1}{3^{2(\log_2 3-1)}}$. 268) ${\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}$; ${\frac{1}{2}}^{1-\frac{\sqrt{5}}{2}}$. 269) $2\frac{1}{3}$; 5. 270) $\frac{3}{2}$; 3; 4. 271) $2\frac{1}{3}$; 5; 7. 272) 1; $\frac{7+\sqrt{41}}{4}$. 273) 1; $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$. 274) 1; $\frac{9+\sqrt{69}}{2}$. 275) -2; 0; 2. 276) 1; 4; 5. 277) 3; 12; $9 \pm \sqrt{26}$. 278) Нет решений. 279) 1; 10; 10^{-3}. 280) 1; 8. 281) -1; 1; 2. 282) 0; $\frac{1}{2}$. 283) 2; 10^{-1}; 10^{-3}. 284) 0; 3. 285) πn, $n \in Z$; $(-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in Z$. 286) 0. 287) $\frac{\pi}{6}$. 288) 1; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. 289) 1; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. 290) 1; $2\pi n$, $n \in N$, $n > 0$; $-\pi + 2\pi m$, $m \in N$, $m > 0$. 291) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, $n \geqslant 0$. 292) -1; 5. 293) $\log_2 3$. 294) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; $\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi + 2\pi m$, $m \in Z$. 295) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; $2\pi m$, $m \in Z$; $-\frac{5}{12}$. 296) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. 297) $\frac{2\pi}{3}$; 2; -5; $\pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in Z$; $\pm \arccos \frac{2\sqrt{3}-3}{2} + 4\pi m$, $m \neq 0$, $m \in Z$. 298) $4 \pm \sqrt{10}$; $\frac{3}{2}\pi$; $\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$; $2\pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. 299) 1; 10; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $2\pi - 2\arcsin \frac{1}{5}$. 300) 0; 1. 301) $x = a - 4$ при любом a. 302) Если $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$; если $a = 0$, то решений нет. 303) Если $a \neq 1$, то $x = \frac{2}{a-1}$; если $a = 1$, то решений нет. 304) Если $a \neq 1$, то $x = 1$; если $a = 1$, то x — любое число. 305) Если $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{1}{a-1}$; если $a = -1$, то x — любое число; если $a = 1$, то решений нет. 306) Если $a > 0$, то $x_1 = \frac{\sqrt{a}+1}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{a}}{2}$; если $a = 0$, то $x = \frac{1}{2}$; если $a < 0$, то решений нет. 307) Если

$0 < a \leqslant 1$, то $x_1 = \sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$; если $a \leqslant 0$ или $a > 1$, то решений нет. 308) Если $a = 0$, то $x = 3$; если $a = \dfrac{1}{12}$, то $x = 6$; если $-\infty < a < 0$ или $0 < a < \dfrac{1}{12}$, то $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{1-12a}}{a}$, $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{1-12a}}{a}$; если $a > \dfrac{1}{12}$, то решений нет. 309) Если $a > 0$, то $x_1 = a+2$, $x_2 = 2-a$; если $a = 0$, то $x = 2$, если $a < 0$, то решений нет. 310) Если $a > 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = 2a$; если $a = 0$, то $x = 0$; если $a < 0$, то решений нет. 311) Если $a > 2$, то $x = \dfrac{a+2}{2}$; если $a = 2$, то $x \geqslant 2$; если $a < 2$, то решений нет. 312) $x \geqslant a$ при любом a. 313) Если $a > 0$, то $x \geqslant \dfrac{1}{a}$; если $a < 0$, то $x \leqslant \dfrac{1}{a}$; если $a = 0$, то решений нет. 314) Если $a < -1$, то $x = \dfrac{-1}{1+a}$; если $-1 \leqslant a \leqslant 1$, то решений нет; если $a = 1$, то $x \geqslant 0$; если $a > 1$, то $x = \dfrac{1-a}{1+a^2}$. 315) Если $a = 1$, то $x = 1$; если $a \neq 1$, то решений нет. 316) Если $a \geqslant -\dfrac{3}{2}$, то $x = 4a^2 + 12a + 7$, если $a < -\dfrac{3}{2}$, то решений нет. 317) $x = 4 - a$ при любом a. 318) Если $a \geqslant 0$, то $x = a^2 - a$; если $a < 0$, то решений нет. 319) $x = 2^{2-a}$ при любом a. 320) Если $a \neq 0$, то $x = \dfrac{9}{a}$; если $a = 0$, то решений нет. 321) Если $a > -\dfrac{3}{2}$, то $x = \dfrac{1+\log_2(2a+3)}{2}$; если $a \leqslant -\dfrac{3}{2}$, то решений нет. 322) Если $1 \leqslant a \leqslant \dfrac{5}{2}$, то $x = (-1)^n \arcsin \dfrac{4a-7}{3} + \pi n$, $n \in Z$; если $a < 1$ или $a > \dfrac{5}{2}$, то решений нет. 323) Если $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \leqslant a \leqslant 1$ или $2 \leqslant a \leqslant \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$, то $x = -\dfrac{\pi}{3} \pm \arccos \dfrac{a^2-3a}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; если $a < \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$, $1 < a < 2$ или $a > \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$, то решений нет. 324) Если $4 \leqslant a \leqslant 5$, то $x = \pm(-1)^n \arcsin \sqrt{a-4} + \pi n$, $n \in Z$; если $a < 4$ или $a > 5$, то решений нет. 325) $x = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(1 - 3a - a^2) + \pi n$, $n \in Z$. 326) Если $a \neq 0$, то $x = 7 + \mathrm{arcctg}\,\dfrac{2+a}{a} + \pi n$, $n \in Z$; если $a = 0$, то решений нет. 327) Если $a \neq 1$, то $x = \mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{a+1} + \pi n$, $n \in Z$; если $a = 1$, то x — любое число, отличное от $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$. 328) Если $a \neq 0$, то $x = \dfrac{a}{3}$; если $a = 0$, то решений нет. 329) Если $a \neq -2$, то $x = -a$, если $a = -2$, то x — любое число, отличное от -2. 330) Если $a \neq 0$, то x — любое число, отличное от 0; если $a = 0$, то $x = -a$. 331) Если $a \neq 0$ и $a \neq 3$, то $x_1 = 4a$, $x_2 = -2a - 3$; если $a = 0$, то $x = -2a - 3$; если $a = 3$, то $x = 12$. 332) Если $a < 5 - 4\sqrt{2}$ или $a > 5 + 4\sqrt{2}$, то $x_1 = \dfrac{a - 1 + \sqrt{a^2 - 10a - 7}}{2}$, $x_2 = \dfrac{a - 1 - \sqrt{a^2 - 10a - 7}}{2}$; если $5 - 4\sqrt{2} < a < 5 + 4\sqrt{2}$, то решений нет; если $a = 5 - 4\sqrt{2}$, то $x = 1 - \sqrt{2}$; если $a = 5 + 4\sqrt{2}$, то $x = 1 + \sqrt{2}$. 333) Если $a < 1$ и $a \neq 0$, то $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{1 - a}}{a}$, $x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{1 - a}}{a}$; если $a = 0$, то $x = -\dfrac{1}{2}$; если $a = 1$, то $x = -1$; если $a > 1$, то решений нет. 334) Если $a > -1$, то $x_1 = \dfrac{-a - 1 + \sqrt{3a + 3}}{a + 1}$, $x_2 = \dfrac{-a - 1 - \sqrt{3a + 3}}{a + 1}$; если $a \leqslant -1$, то решений нет. 335) Если $a \neq -1$, то $x_1 = \dfrac{2a - 1}{1 + a}$, $x_2 = \dfrac{-1}{1 + a}$; если $a = -1$, то решений нет. 336) Если $a > 0$, то $x_1 = \dfrac{1}{2}\ \ -1 + \sqrt{1 + 4a}\ $, $x_2 = \dfrac{1}{2}\ \ -1 - \sqrt{1 + 4a}\ $; если $a = 0$, то $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$; если $-\dfrac{1}{4} \leqslant a < 0$, то $x_1 = \dfrac{1}{2}\ \ -1 + \sqrt{1 + 4a}\ $, $x_2 = \dfrac{1}{2}\ \ -1 - \sqrt{1 + 4a}\ $, $x_3 = -\dfrac{1}{2}\ \ 1 + \sqrt{1 - 4a}\ $; если $a < -\dfrac{1}{4}$, то $x = \dfrac{1}{2}\ \ -1 - \sqrt{1 - 4a}\ $. 337) Если $a < \dfrac{2}{5}$, то $x_1 = -\dfrac{1}{3}(a + 2)$, $x_2 = 3a - 2$; если $a = \dfrac{2}{5}$, то $x = -\dfrac{4}{5}$; если $\dfrac{2}{5} < a < 2$, то решений нет; если $a = 2$, то $x = 0$; если $a > 2$, то $x_1 = a - 2$, $x_2 = \dfrac{a - 2}{3}$. 338) Если $a < -2$, то решений нет; если $a = -2$ или $a = 1$, то $x \in [-2; 1]$; если $-2 < a < 1$, то $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$; если $a > 1$, то решений нет. 339) Если $a < -1$, то решений нет, если $a = 1$, то $x = -1$, если $-1 < a < 1$, то $x = \dfrac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}$; если $a = 1$, то $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; если $1 < a < \sqrt{2}$, то $x_1 = \dfrac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2}$, $x_2 = \dfrac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2}$; если $a = \sqrt{2}$, то $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; если $a > \sqrt{2}$, то решений нет. 340) Если $-1 \leqslant a < 0$ или $a \geqslant 1$, то $x = \dfrac{1}{2}\ \ a + \dfrac{1}{a}\ $; если $a < -1$ или $0 \leqslant a < 1$, то решений нет.

341) Если $|a| \geqslant 2\sqrt{2}$, то

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4 - 4\sqrt{1 + a^2}}}{2}, \quad x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4 - 4\sqrt{1 + a^2}}}{2};$$

если $|a| < 2\sqrt{2}$, то решений нет.

342) Если $a = 0$, то $x = 0$; если $a \neq 0$, то $x_1 = -\sqrt[3]{a}$, $x_2 = \dfrac{1}{a}$.

343) Если $a = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, если $a > 0$ или $-\dfrac{1}{4} < a < 0$, то

$$x_1 = \frac{-3a - 1 + (a+1)\sqrt{4a+1}}{2a^3}, \; x_2 = \frac{-3a - 1 - (a+1)\sqrt{4a+1}}{2a^3}.$$

344) Если $a = 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = -1$; если $a \neq 0$, то $x_1 = -\sqrt{2}|a|$, $x_2 = \sqrt{2}|a|$, $x_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2+1}$, $x_4 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2+1}$. Рассмотреть левую часть уравнения, как квадратный трехчлен относительно a^2 и разложить его на множители $a^2 - \dfrac{x^2}{2}$ и $a^2 - (x^2 + x)$.

345) Если $a = 0$, то $x = -\dfrac{1}{4}$; если $a = 2$, то $x = -\dfrac{1}{2}$; если $0 < a < 2$, то

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{4 - 2a}}{2a}, \; x_2 = \frac{-2 + \sqrt{4 - 2a}}{2a};$$

если $a > 2$, то решений нет.

346) Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то $x = \dfrac{1}{a^2}$.

347) Если $a < -\sqrt{2}$ или $a \geqslant \sqrt{2}$, то

$$x = (-1)^k \arcsin 10^{a - \sqrt{2(a^2-1)}} + \pi k, \; k \in Z;$$

если $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant -1$, то

$$x = (-1)^m \arcsin 10^{a \pm \sqrt{2(a^2-1)}} + \pi m, \; m \in Z;$$

если $-1 < a < \sqrt{2}$, то решений нет.

348) Если $0 < a < 1$, то

$$x = (-1)^k \arcsin a^{\frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2}} + \pi k, \; k \in Z,$$

если $a > 1$, то

$$x = (-1)^m \arcsin a^{\frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2}} + \pi m, \; m \in Z.$$

349) Если $a = \dfrac{1}{3}$, то $x = 1$, если $a \neq \dfrac{1}{3}$, то нет решений. Р е ш е н и е. При любом значении параметра a все искомые значения x лежат в области, определяемой неравенствами

$$2x - x^2 > 0,$$
$$1 - x^2 \;\; 2 > 0,$$

т.е. в области $0 < x < \sqrt{2}$. Для любого x из этой области выполнены неравенства

$$2x - x^2 = 1 - (1 - x)^2 \leqslant 1, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant 1,$$

и, значит,

$$\log_3(2x-x^2)\leqslant 0,\quad \log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\leqslant 0.$$

Если $a\neq -2$ и $a\neq \frac{1}{3}$, то

$$(1+(a+2)^2)\log_3(2x-x^2)\leqslant \log_3(2x-x^2),$$

$$(1+(3a-1)^2)\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\leqslant \log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right),$$

и данное в условии задачи уравнение может выполняться только для тех значений x, для которых

$$\log_3(2x-x^2)=0,$$
$$\log_{11}\left(1-x^2/2\right)=0,$$

или

$$2x-x^2=1,$$
$$1-x^2/2=1.$$

Легко видеть, что полученная система уравнений не имеет решений. Следовательно, если $a\neq -2$ и $a\neq 1/3$, то нет x, удовлетворяющих данному в условии задачи уравнению. При $a=-2$ исходное уравнение может быть переписано так:

$$\log_3(2x-x^2)+50\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=\log_3(2x-x^2)+\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right).$$

Получившееся уравнение равносильно на множестве $0<x<\sqrt{2}$ уравнению

$$\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=0,$$

не имеющему на этом множестве решений. При $a=1/3$ исходное уравнение принимает вид

$$\frac{50}{9}\log_3(2x-x^2)+\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=\log_3(2x-x^2)+\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right).$$

Это уравнение равносильно на множестве $0<x<\sqrt{2}$ уравнению

$$\log_3(2x-x^2)=0,$$

которое в свою очередь равносильно уравнению

$$2x-x^2=1,$$

имеющему единственный корень $x=1$. Этот корень лежит в множестве $0<x<\sqrt{2}$, и значит, удовлетворяет исходному уравнению.

350) Если $a=-3/4$, то $x=1/2$; если $a\neq -3/4$, то решений нет. 351) Если $a=0$, то один корень; если $a>0$, то два корня; если $a<0$, то решений нет.

352) Если $a < -1$, то одно решение, если $a > -1$, то решений нет. 353) Если $a > 1$ или $a = 0$ или $a < -1$, то одно решение; если $0 < a < 1$, то два решения; если $a \geqslant -1$, то решений нет. 354) Если $a > 4$ или $a \leqslant 0$, то один корень; если $a = 4$, то два корня; если $0 < a < 4$, то три корня. 355) Если $a < 0$ или $a = 1/4$, то один корень; если $0 \leqslant a < 1/4$, то два решения; если $a > 1/4$, то решений нет. 356) При любом $a \in R$ два корня. 357) Если $a = 0$ или $a = 1/2$, то одно решение; если $0 < a < 1/2$, то два решения; если $a < 0$ или $a > 1/2$, то решений нет. 358) Если $a < 0$, то решений нет; если $a = 0$ или $a > 1$, то два решения; если $a = 1$, то три решения; если $0 < a < 1$, то четыре решения. 359) Если $a < 0$, то решений нет; если $a > 4$ или $a = 0$, то два решения; если $a = 4$, то три решения; если $0 < a < 4$, то четыре решения. 360) Если $a \leqslant 3$, то одно решение; если $a > 3$, то решений нет. 361) Если $a < -3$, то решений нет; если $a = -3$, то одно решение; если $-3 < a < 3$, то два решения; если $a = 3$, то три решения; если $3 < a < 6$, то четыре решения; если $a = 6$, то три решения; если $a > 6$, то два решения. 362) Если $0 \leqslant |a| < 1/\sqrt{2}$, то решений нет; если $|a| = 1/\sqrt{2}$, то одно решение; если $|a| > 1/\sqrt{2}$, то два решения. 363) Если $a \leqslant 0$ или $a = 4$, то одно решение; если $0 < a < 4$, то решений нет; если $a > 4$, то два решения. 364) Если $a < -1$ или $5/4 < a < +\infty$, то решений нет; если $a = -1$, то одно решение; если $|a| < 1$ или $a = 5/4$, то два решения; если $a = 1$, то три решения. 365) Если $a < 0$, то решений нет; если $0 \leqslant a < 1/2$ или $1/2 < a \leqslant 1$, то два решения; если $a = 1/2$ или $a > 1$, то одно решение. 366) Если $a \neq 0$, то два решения; если $a = 0$, то одно решение. 367) Если $0 < a < 1 \ \sqrt{2}$ или $1 \ \sqrt{2} < a < 1$ или $1 < a < +\infty$, то два решения; если $a \leqslant 0$ или $a = 1 \ \sqrt{2}$ или $a = 1$, то решений нет. 368) Если $a < 3$, то решений нет; если $a = 3$ или $4 < a < 8$, то два решения, если $a = 4$ или $a = 8$, то три решения; если $3 < a < 4$ или $8 < a < +\infty$, то четыре решения. 369) Если $a < -57/32$, то решений нет; если $a = -57/32$, то одно решение; если $-57/32 < a$, то два решения. 370) Если $0 < a < 1$, то два решения, если $a = 1$, то одно решение, если $a \leqslant 0$ или $a > 1$, то решений нет. 371) $a \leqslant 0$, $a > 1$. 372) $-2 \leqslant a \leqslant 2$. 373) $|a| \leqslant 97$. 374) $2 \leqslant a \leqslant 2\sqrt{2}$. 375) $a \geqslant -1$. 376) $0 < a < 1$. 377) $a \leqslant 1$. 378) $a > -1$. 379) $a \geqslant 10^{1-\sqrt{3}}$. 380) $a = -1$. 381) $-2 < a < 3$. 382) $a < -2$, $a > 7$. 383) $a > -1/3$. 384) $a > -3$.

385) Если $a = -1$, то $x = 2\pi n$, $n \in Z$ и $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$, если $a = 0$, то $x = \pm\dfrac{2}{3}\pi + 2\pi l$, $l \in Z$, если $a = 1$, то $x = \pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{7}}{2} + 2\pi p$, $p \in Z$. Р е ш е н и е. Применяя формулы $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$, исходное уравнение запишем в виде

$$5 - 4(1 - \cos^2 x) = 8 \quad \frac{1+\cos x}{2} \quad = 3a,$$

или в виде

$$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 - 3a = 0. \tag{26}$$

Рассмотрим квадратное уравнение

$$4z^2 - 4z - 3 - 3a = 0. \tag{27}$$

Его дискриминант равен $D = 16(4 + 3a)$. Если $D < 0$, то уравнение (27) не имеет действительных корней. Следовательно при целых значениях a, при которых $4 + 3a < 0$, т.е. при целых $a < -1$, уравнение (27), а значит, и уравнение (26) решений не имеет.

Отметим, что не существует целых значений a, при которых $D = 0$. Следовательно, при целых $a \geqslant -1$ уравнение (27) имеет два корня

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{4 + 3a}}{2} \quad \text{и} \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{4 + 3a}}{2}.$$

Это означает, что уравнение (26) равносильно совокупности уравнений

$$\cos x = z_1 \quad \text{и} \quad \cos x = z_2. \tag{28}$$

Очевидно, что при любом целом $a \geqslant 2$ справедливы неравенства $z_1 > 1$ и $z_2 < -1$, и поэтому ни одно из уравнений совокупности (28) не имеет решений. Следовательно, ни при каком целом $a \geqslant 2$ исходное уравнение решений не имеет. Остается рассмотреть случаи $a = -1$, $a = 0$ и $a = 1$.

Если $a = -1$, то $z_1 = 1$ и $z_2 = 0$, и уравнения совокупности (28) имеют решения $x = 2\pi n$, $n \in Z$, $x = \pi/2 + \pi m$, $m \in Z$. Следовательно, $a = -1$ удовлетворяет условию задачи.

Если $a = 0$, то $z_1 = 3/2$ и $z_2 = -1/2$, и совокупность уравнений (5) перепишется в виде

$$\cos x = \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, а второе уравнение имеет решения $x = \pm 2\pi/3 + 2\pi l$, $l \in Z$. Следовательно, $a = 0$ также удовлетворяет условию задачи.

Если $a = 1$, то $z_1 = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{2}$ и $z_2 = \dfrac{1 - \sqrt{7}}{2}$, и уравнение (26) равносильно совокупности уравнений

$$\cos x = \frac{1 + \sqrt{7}}{2} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1 - \sqrt{7}}{2}.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет поскольку $\dfrac{1 + \sqrt{7}}{2} > 1$, а второе уравнение имеет решения $x = \pm \arccos \dfrac{1 - \sqrt{7}}{2} + 2\pi p$, $p \in Z$, поскольку $\left|\dfrac{1 - \sqrt{7}}{2}\right| < 1$. Следовательно, $a = 1$ также удовлетворяет условию задачи. Итак, исходное уравнение имеет решения при целых значениях a тогда и только тогда, когда a равно -1, 0 или 1.

386) Если $a = 0$, то $x = \pi n$, $n \in Z$ и $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in Z$; если $a = 1$, то $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; если $a = 2$, то $x = (-1)^{n+1} \arcsin \dfrac{\sqrt{7} - 1}{2} + \pi l$, $l \in Z$.

387) Если $a = 0$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; если $a = 1$, то $x = \pi \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$; если $a = 2$, то $x = \pi + \arccos \dfrac{\sqrt{41} - 3}{4} + 2\pi l$, $l \in Z$.

388) Если $a = 0$, то $x = \pi n$, $n \in Z$ и $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in Z$; если $a = 2$, то $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi p$, $p \in Z$; если $a = 1$, то $x = (-1)^{l+1} \arcsin \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi l$, $l \in Z$.

389) $\dfrac{9\pi}{13}$; $\dfrac{15\pi}{13}$. Р е ш е н и е. Зафиксируем некоторое число a из промежутка $2 < a < 5$. Тогда для каждого x выполнены неравенства

$$\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 1 \tag{29}$$

и

$$|\sin ax| \leqslant 1.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\log_2(3 - |\sin ax|) \geqslant 1. \tag{30}$$

Сравнивая неравенства (29) и (30), заключаем, что данное в условии задачи уравнение выполняется тогда и только тогда, когда одновременно выполняются уравнения

$$\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) = 1, \tag{31}$$

$$|\sin ax| = 1. \tag{32}$$

Уравнение (31) имеет решения $x = \dfrac{1}{6} + 2n$, $n \in Z$, из которых отрезку $2 \leqslant x \leqslant 3$ принадлежит лишь $x_1 = 2 \cdot 1 + \dfrac{1}{6} = \dfrac{13}{6}$. Таким образом при фиксированном a данное в уравнении задачи уравнение имеет решение на отрезке $2 \leqslant x \leqslant 3$ в том и только в том случае, когда выполнено условие

$$\sin\left(\frac{13}{6}a\right) = 1. \tag{33}$$

Следовательно, нам надо найти все решения уравнения (33), принадлежащие промежутку $2 < a < 5$.

Уравнение (33) равносильно уравнению

$$\sin^2 \frac{13}{6}a = 1.$$

Используя тождество $\sin^2 \dfrac{13}{6}a = \dfrac{1 - \cos \frac{13}{3}a}{2}$, это уравнение можно переписать так:

$$\cos \frac{13}{3}a = -1. \tag{34}$$

Решения уравнения (34) имеют вид

$$a = \frac{3}{13}\pi(2n+1), \ n \in Z. \tag{35}$$

Найдем теперь все целые числа n, удовлетворяющие неравенствам

$$2 < \frac{3}{13}\pi(2n+1) < 5.$$

Это двойное неравенство можно переписать так

$$\frac{26}{3\pi} < 2n+1 < \frac{65}{3\pi}. \tag{36}$$

Легко проверить, что $2 < \frac{26}{3\pi} < 3$ и $6 < \frac{65}{3\pi} < 7$. Поэтому неравенству (36) удовлетворяют целые числа n_1 и n_2, для которых $2n_1+1=3$, $2n_2+1=5$, т.е. $n_1=1$, $n_2=2$. С помощью формулы (35) находим теперь a, удовлетворяющие условию задачи $a_1 = \frac{3}{13}\cdot\pi\cdot 3 = \frac{9\pi}{13}$, $a_2 = \frac{3}{13}\pi\cdot 5 = \frac{15\pi}{13}$.

390) $\frac{9\pi}{5}$; $\frac{17\pi}{5}$; 5π. 391) $\frac{6\pi}{7}$; $\frac{12\pi}{7}$. 392) $a>1$; $a=0$; $a\leqslant -1$. 393) $a=2$. 394) $a\leqslant 0$; $a=8$. 395) $-\infty<a<-4$; $a=\pm 2$; $4<a<+\infty$. 396) $a<-1$. 397) $a=\pm 1$. 398) $0<a\leqslant 1$. 399) $a=-\frac{5}{4}$. 400) $a=1$. 401) $a\neq -\frac{1}{2}$.

402) $a = \frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; $a=\frac{\pi}{18}+2\pi m$, $m\in Z$; $a=\frac{13}{18}\pi+2\pi k$, $k\in Z$. Решение. Прежде всего отметим, что коэффициенты данного уравнения определены лишь для тех значений параметра a, которые удовлетворяют условиям $\cos a\neq 0$ и $\sin a>0$. Для любого a, удовлетворяющего этим условиям, данное квадратное уравнение имеет единственное решение только в том случае, когда его дискриминант

$$D = \frac{36}{\sin a} - \frac{36\sqrt{3}}{\cos a} - 4\cdot 36$$

равен нулю.

Значит, искомые значения параметра a — это те и только те значения a, которые удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sin a} - \frac{\sqrt{3}}{\cos a} - 4 = 0,\\ &\sin a > 0,\\ &\cos a \neq 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Равенство в (37) в области, определяемой неравенствами $\sin a>0$, $\cos a\neq 0$ равносильно уравнению

$$\cos a - \sqrt{3}\sin a - 4\sin a\cdot\cos a = 0$$

или уравнению

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-a\right) - \sin 2a = 0.$$

Последнее уравнение можно переписать так:

$$2\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{3a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{a}{2}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что оно имеет две серии решений

$$a = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in Z;\ \ a = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Теперь из этих чисел надо отобрать те, которые удовлетворяют условиям $\cos a \neq 0$ и $\sin a > 0$. Легко видеть, что все найденные числа удовлетворяют условию $\cos a \neq 0$. Далее, так как для любого $n \in Z$ имеем $\sin\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) > 0$, то все числа $a = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$, удовлетворяют условиям (37). Теперь разобьем первую серию решений на три серии, полагая $k = 3m$, $k = 3m + 1$, $k = 3m + 2$. Получим $a = \frac{\pi}{18} + 2\pi m$, $a = \frac{13\pi}{18} + 2\pi m$, $a = \frac{25\pi}{18} + 2\pi m$, $m \in Z$. Поскольку для любого $m \in Z$ имеем

$$\sin\left(\frac{\pi}{18} + 2\pi m\right) = \sin\frac{\pi}{18} > 0,$$

$$\sin\left(\frac{13\pi}{18} + 2\pi m\right) = \sin\frac{13\pi}{18} > 0,$$

$$\sin\left(\frac{25\pi}{18} + 2\pi m\right) = \sin\left(\pi + \frac{7\pi}{18}\right) < 0,$$

то все числа $a = \frac{\pi}{18} + 2\pi m$ и $a = \frac{13\pi}{18} + 2\pi m$, $m \in Z$ удовлетворяют условиям (37), а никакое из чисел $a = \frac{25\pi}{18} + 2\pi m$, $m \in Z$, не удовлетворяет условиям (37). Подводя итог, получаем, что условию задачи удовлетворяют только числа $a = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; $a = \frac{\pi}{18} + 2\pi m$, $m \in Z$; $a = \frac{13}{18}\pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

403) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z;\ \ \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$ 404) $\frac{7\pi}{12} + 2\pi k,\ k \in Z.$

405) $\frac{\pi}{9} + 2\pi k,\ k \in Z;\ \ \frac{7\pi}{9} + 2\pi m,\ m \in Z;\ \ \frac{2\pi}{3} + 2\pi l,\ l \in Z.$

406) $a < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, $a > 1$. Р е ш е н и е. Найдем сначала при каждом значении a все решения, а затем отберем из них те, которые дают ответ этой задачи. Для каждого фиксированного a будем искать решения данного уравнения сначала в области $x < -2a$, а потом в области $x \geqslant -2a$.

1. Пусть $x < -2a$. На этом множестве $|x + 2a| = -(x + 2a)$ и потому данное уравнение можно переписать в виде

$$x^2 + 2ax + a - 1 = 0. \tag{38}$$

Найдем дискриминант D_1 получившегося квадратного уравнения (38):

$$D_1 = 4a^2 - 4a + 4 = 4\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + 3 > 0.$$

Следовательно, квадратное уравнение (38) при каждом фиксированном значении a имеет два корня

$$x_1 = -a + \sqrt{a^2 - a + 1} \quad \text{и} \quad x_2 = -a - \sqrt{a^2 - a + 1}.$$

Выясним, лежат ли они в области $x < -2a$. Корень x_1 лежит в этой области тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$-a + \sqrt{a^2 - a + 1} < -2a$$

или равносильное ему неравенство

$$\sqrt{a^2 - a + 1} < -a. \tag{39}$$

Неравенство (39) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} -a > 0, \\ a^2 - a + 1 < a^2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a < 0, \\ a > 1. \end{cases}$$

Последняя система неравенств решений не имеет; значит, ни при каком значении параметра a число x_1 не лежит в области $x < -2a$. Корень x_2 лежит в рассматриваемой области тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$-a - \sqrt{a^2 - a + 1} < -2a$$

или равносильное ему неравенство

$$a < \sqrt{a^2 - a + 1}. \tag{40}$$

Найдем теперь все значения параметра a, при котором выполнено неравенство (40). Ясно, что неравенству (40) удовлетворяют все a из области $a < 0$. В области же $a \geqslant 0$ неравенство (40) равносильно неравенству $a^2 < a^2 - a + 1$ и, значит, имеет решения $0 \leqslant a < 1$. Итак, множество решений неравенства (40) есть промежуток $a < 1$. Таким образом, в области $x < -2a$ исходное уравнение при $a \geqslant 1$ не имеет решений, при $a < 1$ имеет единственное решение

$$x_2 = -a - \sqrt{a^2 - a + 1}.$$

2. Пусть $x \geqslant -2a$. На этом множестве $|x + 2a| = x + 2a$, и поэтому исходное уравнение можно переписать в виде

$$x^2 + 2ax + 1 - a = 0. \tag{41}$$

Найдем дискриминант D_2 получившегося квадратного уравнения

$$D_2 = 4a^2 + 4a - 4 = 4(a^2 + a - 1).$$

Ясно, что уравнение (41) не имеет решений, если $D_2 < 0$, т.е. если $a^2 + a - 1 < 0$. Значит, уравнение (41) не имеет решений для a из промежутка

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < a < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Если a не принадлежит этому интервалу, то квадратное уравнение (41) имеет корни

$$x_3 = -a + \sqrt{a^2 + a - 1}, \quad x_4 = -a - \sqrt{a^2 + a - 1},$$

причем $x_3 = x_4$ при $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ и $a = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. Выясним теперь, при каких значениях параметра a найденные корни лежат в области $x \geqslant -2a$. Для этого нужно решить неравенство $x_3 \geqslant -2a$ и $x_4 \geqslant -2a$. Неравенство

$$-a + \sqrt{a^2 + a - 1} \geqslant -2a \tag{42}$$

равносильно неравенству

$$\sqrt{a^2 + a - 1} \geqslant -a$$

или совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} a^2 + a - 1 \geqslant 0, \\ -a < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -a \geqslant 0, \\ a^2 + a - 1 \geqslant a^2. \end{cases}$$

Множество решений первой системы имеет вид $a \geqslant \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, а вторая система решений не имеет. Значит, множество решений неравенства (42) есть промежуток $a \geqslant \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, и только при этих значениях параметра a корень x_3 лежит в области $x \geqslant -2a$.

Неравенство

$$-a - \sqrt{a^2 + a - 1} \geqslant -2a$$

равносильно неравенству

$$\sqrt{a^2 + a - 1} \leqslant a$$

или системе неравенств

$$\begin{cases} a^2 + a - 1 \geqslant 0, \\ a \geqslant 0, \\ a^2 + a - 1 \leqslant a^2. \end{cases}$$

Множество решений полученной системы неравенств есть промежуток $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \leqslant a \leqslant 1$. Только при этих значениях параметра a корень x_4 принадлежит области $x \geqslant -2a$. Таким образом, при $a < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ данное уравнение в области $x \geqslant -2a$ решений не имеет. Если $a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, то уравнение в рассматриваемой области имеет единственное решение $x_3 = x_4 = \frac{-\sqrt{5} + 1}{2}$. При значениях a, лежащих в области $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < a \leqslant 1$, исходное уравнение в рассматриваемой области имеет два различных корня x_3 и x_4. Если же $a > 1$, то исходное уравнение имеет единственный корень x_3. Полученные результаты удобно собрать в следующей таблице 4:

Таблица 4

Значения параметра a	Решения данного уравнения
$a < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$	x_2
$a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$	$x_2,\ x_3 = x_4\ (x_2 < x_3)$
$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < a < 1$	$x_2,\ x_3,\ x_4\ (x_3 \neq x_4)$
$a = 1$	$x_3 = 0,\ x_4 = -2$
$a > 1$	x_3

Таким образом, искомые значения a образуют два промежутка $a < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $a > 1$.

407) $a > 3$, $a < -3$. 408) $a = 0$, $a = 1$. 409) $a = \pm 1$. 410) $a < 0$, $a = 4$.

411) Если $a < -2$, то $x_1 = 1 - \sqrt{(a-1)^2+4}$, $x_2 = 1 + \sqrt{(a+2)^2+4}$; если $-2 \leqslant a < -\dfrac{1}{2}$, то $x_1 = 1 - \sqrt{(a-1)^2+4}$, $x_2 = 1 - \sqrt{(a+2)^2+4}$; если $a = -\dfrac{1}{2}$, то $x_1 = -\dfrac{3}{2}$; если $-\dfrac{1}{2} < a \leqslant 1$, то $x_1 = 1 - \sqrt{(a+2)^2+4}$, $x_2 = 1 - \sqrt{(a+2)^2+4}$; если $a > 1$, то $x_1 = 1 + \sqrt{(a-1)^2+4}$, $x_2 = 1 - \sqrt{(a+2)^2+4}$; при $a = -1/2$ уравнение имеет только один корень $x = -3/2$. Решение. Область допустимых значений исходного уравнения определяется условием $\dfrac{x+1}{x-3} \geqslant 0$, т.е. ОДЗ состоит из двух областей $x > 3$ и $x \leqslant -1$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$(x-3)\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}\right)^2 + 3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} - (a-1)(a+2) = 0. \tag{43}$$

Обозначим $t = (x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}$. Тогда уравнение (43) можно переписать в виде

$$t^2 + 3t - (a-1)(a+2) = 0.$$

Получившееся квадратное уравнение относительно t имеет два корня $t_1 = a - 1$ и $t_2 = -a - 2$. Следовательно, исходное уравнение равносильно на ОДЗ совокупности двух уравнений

$$(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = a - 1 \quad \text{и} \quad (x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -a - 2. \tag{44}$$

Рассмотрим на ОДЗ исходного уравнения уравнение

$$(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = b, \tag{45}$$

где b — некоторый параметр. При $b = 0$ уравнение (45) имеет единственное решение $x = -1$. При $b > 0$ все решения уравнения (45) лежат в области $x > 3$. При $b > 0$ на множестве $x > 3$ уравнение (45) равносильно уравнению

$$(x-3)(x+1) = b^2. \tag{46}$$

Квадратное уравнение (46) имеет два корня

$$x_1 = 1 + \sqrt{4+b^2}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{4+b^2}.$$

Так как $x_1 > 3$, а $x_2 < -1$, то при $b > 0$ уравнение (46) имеет единственный корень $x_1 = 1 + \sqrt{4+b^2}$. При $b < 0$ все решения уравнения (45) лежат в области $x < 3$, а с учетом ОДЗ исходного уравнения, — в области $x \leqslant -1$. На множестве $x \leqslant -1$ при $b < 0$ уравнение (45) равносильно уравнению (46), и так как $x_1 > 3$, а $x_2 < -1$, то при $b < 0$ уравнение (45) имеет единственный корень $x_2 = 1 - \sqrt{4+b^2}$.

Итак, при $b > 0$ уравнение (45) имеет единственный корень $x_1 = 1 + \sqrt{4+b^2}$, а при $b \leqslant 0$ — единственный корень $x_2 = 1 - \sqrt{4+b^2}$. Поэтому первое из уравнений (44) при $a > 1$ имеет единственный корень $x_1 = 1 + \sqrt{4+(a-1)^2}$, а при $a \leqslant 1$ — единственный корень $x_1 - \sqrt{4+(a-1)^2}$. Второе из уравнений (44) при $a < -2$ имеет единственный корень $x_1 = 1 + \sqrt{4+(a+2)^2}$, а при $a \geqslant -2$ — единственный корень $x_1 = 1 - \sqrt{4+(a+2)^2}$. Так как множество решений исходного уравнения есть объединение множеств решений (44), то исходное уравнение при $a < -2$ имеет два корня $x_1 = 1 + \sqrt{(2+a)^2+4}$ и $x_2 = 1 - \sqrt{(a-1)^2+4}$, при $a = -2$ два корня $x_1 = 1 - \sqrt{13}$ и $x_2 = 1$, при $-2 < a < 1$ имеет два корня $x_1 = 1 - \sqrt{(a-1)^2+4}$ и $x_2 = 1 - \sqrt{(2+a)^2+4}$, при $a = 1$ имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = 1 - \sqrt{13}$, при $a > 1$ имеет два корня $x_1 = 1 + \sqrt{(a-1)^2+4}$ и $x_2 = 1 - \sqrt{(2+a)^2+4}$. Легко видеть, что при $a \leqslant -2$ и при $a \geqslant 1$ равенство $x_1 = x_2$ невозможно ни при каких a. Выясним, при каких значениях a из промежутка $-2 < a < 1$ выполняется равенство $x_1 = x_2$. Для этого надо решить уравнение

$$1 - \sqrt{(a-1)^2+4} = 1 - \sqrt{(a+2)^2+4},$$

которое равносильно уравнению

$$\sqrt{(a-1)^2+4} = \sqrt{(a+2)^2+4}$$

или уравнению

$$(a-1)^2 = (a+2)^2,$$

имеющему единственный корень $a = -1/2$.

Итак, при любом a, кроме $a = -1/2$, исходное уравнение имеет два корня, а при $a = -1/2$ оно имеет один корень $-3/2$.

412) Если $a < -3$, то $x_1 = 3 - \sqrt{(a+3)^2+1}$, $x_2 = 3 + \sqrt{(a-2)^2+1}$; если $-3 \leqslant a < -1/2$, то $x_1 = 3 + \sqrt{(a+3)^2+1}$ и $x_2 = 3 - \sqrt{(a+3)^2+1}$; если $a = -1/2$, то $x = 3 + \sqrt{29}/2$; если $-1/2 < a \leqslant 2$, то $x_1 = 3 + \sqrt{(a+3)^2+1}$

и $x_2 = 3 + \sqrt{(a-2)^2+1}$; если $a > 2$, то $x_1 = 3 + \sqrt{(a+3)^2+1}$ и $x_2 = 3 - \sqrt{(a-2)^2+1}$. При $a = -1/2$ уравнение имеет только один корень.

413) Если $a < -1$, то $x_1 = 3 - \sqrt{(a-2)^2+4}$ и $x_2 = 3 + \sqrt{(a+1)^2+4}$; если $-1 \leqslant a < 1/2$, то $x_1 = 3 - \sqrt{(a-2)^2+4}$ и $x_2 = 3 - \sqrt{(a+1)^2+4}$; если $1/2 < a \leqslant 2$, то $x_1 = 3 - \sqrt{(a-2)^2+4}$ и $x_2 = 3 - \sqrt{(a+1)^2+4}$; если $a > 2$, то $x_1 = 3 + \sqrt{(a-2)^2+4}$ и $x_2 = 3 - \sqrt{(a+1)^2+4}$; если $a = 1/2$, то $x = 1/2$. При $a = 1/2$ уравнение имеет только один корень.

414) Если $a < -2$, то $x_1 = -3 + \sqrt{(a+2)^2+1}$ и $x_2 = -3 - \sqrt{(a-3)^2+1}$; если $-2 \leqslant a < \frac{1}{2}$, то $x_1 = -3 - \sqrt{(a+2)^2+1}$ и $x_2 = -3 - \sqrt{(a-3)^2+1}$; если $1/2 < a \leqslant 3$, то $x_1 = -3 - \sqrt{(a+2)^2+1}$ и $x_2 = -3 - \sqrt{(a-3)^2+1}$; если $a > 3$, то $x_1 = -3 - \sqrt{(a+2)^2+1}$ и $x_2 = -3 + \sqrt{(a-3)^2+1}$; если $a = 1/2$, то $x = -3 - \frac{\sqrt{29}}{2}$. При $a = 1/2$ уравнение имеет только один корень.

415) $0 < a < 1$. 416) $|a| < 1$, $a > 2$. 417) $a > 0$. 418) $a < 2$.

419) $\frac{9-\sqrt{17}}{16} < a < 1/3$, $\frac{1}{3} < a < \frac{9+\sqrt{17}}{6}$. Р е ш е н и е. При $a = 1/3$ уравнение имеет единственный корень $x = 3/2$. При любом $a \neq 1/3$ данное уравнение является квадратным уравнением. Квадратное уравнение имеет два различных действительных корня в том и только том случае, когда дискриминант его положителен. Дискриминант данного уравнения равен

$$D = (2a)^2 - 4(3a-1)(3a-2) = -4(8a^2 - 9a + 2).$$

Искомые значения параметра a удовлетворяют условиям

$$a \neq \frac{1}{3} \text{ и } 8a^2 - 9a + 2 < 0.$$

Поэтому множество значений параметра a, удовлетворяющего условию задачи состоит из двух промежутков $\frac{9-\sqrt{17}}{16} < a < \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3} < a < \frac{9+\sqrt{17}}{16}$.

420) $\frac{6-2\sqrt{23}}{7} < a < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < a < \frac{6+2\sqrt{23}}{7}$. 421) $a = \pm 3$. 422) $a = 3$; $a = \frac{13}{4}$. 423) $a > 4$. 424) $a = 0$; $a = -1$; $a = -4$. 425) $1 \leqslant a \leqslant \sqrt[4]{8}$. 426) $a < -7/3$, $a > -2$. 427) $-1/4 < a < 0$. 428) $0 < a < 1/\sqrt[3]{4}$. 429) $-1/8 < a < 0$.

В ответах к примерам № 430–443 значения параметра, при которых соответствующие уравнения имеют ровно два решения, явно не выделены.

430) Если $a > 0$, то $x_{1,2} = \pm\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$; если $a \leqslant 0$, то решений нет. 431) Если $a < 0$, то $x = -\sqrt{1-a}$; если $a = 0$, то $x = \pm 1$; если $0 < a < 1$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{1-a}$ и $x_3 = \sqrt{1+a}$; если $a = 1$, то $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$. 432) Если $a > 0$, то $x = 1 + \sqrt{1+a}$; если $a = -1$, то $x = -1$, если $-1 < a \leqslant 0$, то $x_1 = 1 - \sqrt{1+a}$ и $x_2 = 1 + \sqrt{1+a}$; если $a < -1$, то решений нет. 433) Если $a \geqslant 1$, то

$x_1 = \sqrt{3a} - 1$ и $x_2 = -\sqrt{3a} - 1$; если $a < 1$, то решений нет. 434) Если $a = 0$, то $x > 0$; если $a > 0$, то $x = 0$; если $a < 0$, то решений нет. 435) Если $|a| = 2$, то $x = 1$; если $|a| > 2$, то $x_1 = \dfrac{|a| + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{|a| - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$; если $|a| < 2$, то решений нет. 436) Если $0 < a < 1$ или $a > 1$, то $x = 1 + \sqrt{1 + a}$; если $a \leqslant 0$ или $a = 1$, то решений нет. 437) Если $a > 0$, то $x = \log_2 a$ и $x = \log_2(a + 1)$, если $-1 < a \leqslant 0$, то $x = \log_2(a + 1)$; если $a \leqslant -1$, то решений нет. 438) Если $1 < a < \sqrt{2}$ или $a > \sqrt{2}$, то $x = \pm 1$; если $a = \sqrt{2}$ или $0 < a \leqslant 1$, то решений нет. 439) Если $0 < a < 1$, то $x_1 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a} - a\right)^2$ и $x_2 = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a} - a\right)^2$; если $a = 1$, то $x = 0$, если $a \leqslant 0$ или $a > 1$, то решений нет.

440) Если $a = 1$, то решением является любое значение x из промежутка $1 < x < +\infty$; если $a = -1$, то решением является любое значение x из промежутка $-3 \leqslant x \leqslant 1$; если $|a| < 1$, то $x_1 = \dfrac{7 + a}{a - 1}$ и $x_2 = 1$; если $|a| > 1$, то уравнение имеет единственный корень $x_1 = 1$. Р е ш е н и е. Разобьем числовую ось на три промежутка: $-\infty < x < -3$; $-3 \leqslant x \leqslant 1$; $1 < x < +\infty$. Решим исходное уравнение на каждом из этих промежутков.

1. Рассмотрим промежуток $-\infty < x < -3$. При значении x из этого промежутка исходное уравнение перепишется в виде

$$-(x + 3) + a(x - 1) = 4$$

или в виде

$$(a - 1)x = 7 + a, \tag{47}$$

откуда видно, что при $a = 1$ уравнение (4) не имеет решений. Если $a \neq 1$, то уравнение (47) имеет один корень

$$x_1 = \frac{7 + a}{a - 1}. \tag{48}$$

Теперь надо выяснить, при каких значениях a этот корень принадлежит рассматриваемому промежутку $-\infty < x < -3$. Для этого надо решить неравенство

$$\frac{7 + a}{a - 1} < -3.$$

Перепишем это неравенство в виде

$$4 \cdot \frac{a + 1}{a - 1} < 0.$$

Применяя метод интервалов, получим, что решения этого неравенства составляют промежуток $-1 < a < 1$. Следовательно, на множестве $-\infty < x < -3$ исходное уравнение имеет один корень (48) при любом значении a из промежутка $-1 < a < 1$ и не имеет корней при любом значении a, не принадлежащем этому промежутку.

2. Рассмотрим промежуток $-3 \leqslant x \leqslant 1$. При значениях x из этого промежутка исходное уравнение перепишется в виде

$$x + 3 + a(x - 1) = 4,$$

или в виде

$$(a + 1)x = a + 1, \tag{49}$$

откуда видно, что при $a = -1$ решением уравнения (49) является любое действительное число. Если $a \neq -1$, то уравнение (49) имеет один корень $x = 1$. Следовательно, в рассматриваемом промежутке исходное уравнение имеет единственный корень $x = 1$ при любом $a \neq -1$, а при $a = -1$ его решением будет любое число из промежутка $-3 \leqslant x \leqslant 1$.

3. Рассмотрим промежуток $1 < x < +\infty$. При значениях x из этого промежутка исходное уравнение перепишется в виде

$$x + 3 - a(x - 1) = 4$$

или в виде

$$(1 - a)x = 1 - a, \tag{50}$$

откуда видно, что при $a = 1$ решением уравнения (50) является любое действительное число. Если $a \neq 1$, то уравнение (50) имеет единственный корень $x = 1$, не лежащий в рассматриваемом промежутке. Следовательно, в рассматриваемом промежутке исходное уравнение не имеет корней при любом $a \neq 1$, а при $a = 1$ его решением будут любые числа из промежутка $1 < x < +\infty$. 441) Если $a = -1$, то $-\infty < x \leqslant 3$; если $a = 1$, то $-3 \leqslant x \leqslant 2$; если $|a| > 1$, то $x = -3$; если $|a| < 1$, то $x_1 = -3$ и $x_2 = \dfrac{7 - 3a}{a + 1}$. 442) Если $a = 2$, то $-4 \leqslant x \leqslant -3$; если $a = -2$, то $x \geqslant -3$; если $|a| > 2$, то $x = -3$; если $|a| < 2$, то $x_1 = -3$ и $x_2 = -\dfrac{3a + 10}{2 + a}$. 443) Если $a = \dfrac{3}{2}$, то $x \leqslant -\dfrac{3}{2}$; если $a = -\dfrac{3}{2}$, то $-\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2$; если $|a| > \dfrac{3}{2}$, то $x = -\dfrac{3}{2}$; если $|a| < \dfrac{3}{2}$, то $x_1 = -\dfrac{3}{2}$ и $x_2 = \dfrac{6a + 33}{6 - 4a}$.

444) $a = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. 445) $a = 2$; $x_1 = -2$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$, $x_3 = 6$; $a = 4$, $x_1 = -\dfrac{8}{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$. 446) $a = \dfrac{1}{2}$; $x_1 = 2 - \sqrt{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2 + \sqrt{2}$; $a = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$; $a = \dfrac{3}{2}$, $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = 2$.

447) $a = -2$, $x_1 = -2$, $x_2 = 6/5$, $x_3 = 10/3$; $a = -1/2$, $x_1 = -1/5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1/3$. Р е ш е н и е. При $a = 0$ данное уравнение имеет вид

$$x = 4|x|.$$

Поскольку у этого уравнения есть только один корень $x = 0$, то значение $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = 2|2|x| - a^2| - x + a,$$

где a — некоторое фиксированное отличное от 0 число. Если x принадлежит множеству $x \leqslant -\dfrac{a^2}{2}$, то

$$2|x| - a^2 = -2x - a^2 \geqslant 0$$

и

$$f(x) = 2(-2x - a^2) - x + a = -5x - 2a^2 + a;$$

если x принадлежит множеству $-\dfrac{a^2}{2} \leqslant x \leqslant 0$, то

$$2|x| - a^2 = -2x - a^2 \leqslant 0 \quad \text{и} \quad f(x) = 2(2x + a^2) - x + a = 3x + 2a^2 + a;$$

если x принадлежит множеству $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{a^2}{2}$, то

$$2|x| - a^2 = 2x - a^2 \leqslant 0 \quad \text{и} \quad f(x) = 2(-2x + a^2) - x + a = -5x + 2a^2 + a;$$

если x принадлежит множеству $x \geqslant \dfrac{a^2}{2}$, то

$$2|x| - a^2 = 2x - a^2 \geqslant 0 \quad \text{и} \quad f(x) = 2(2x - a^2) - x + a = 3x - 2a^2 + a.$$

Рассматривая найденные выражения для $f(x)$, видим, что на промежутке $-\infty < x \leqslant \dfrac{a^2}{2}$ функция $f(x)$ монотонно убывает, на промежутке $-\dfrac{a^2}{2} \leqslant x \leqslant 0$ — монотонно возрастает, на промежутке $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{a^2}{2}$ — монотонно убывает и на промежутке $\dfrac{a^2}{2} \leqslant x < +\infty$ — монотонно возрастает. В частности, это означает, что на каждом из промежутков $-\infty < x \leqslant -\dfrac{a^2}{2}$, $-\dfrac{a^2}{2} \leqslant x \leqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{a^2}{2}$, $\dfrac{a^2}{2} \leqslant x < +\infty$ данное в условии уравнение имеет не более одного корня и что наименьшее значение функции $f(x)$ на множестве $x \geqslant 0$ равно $f\left(\dfrac{a^2}{2}\right) = -\dfrac{a^2}{2} + a$, а на множестве $x \leqslant 0$ наименьшее значение $f(x)$ равно $f\left(-\dfrac{a^2}{2}\right) = \dfrac{a^2}{2} + a$.

Если значение a таково, что $f(0) < 0$ (рис. 30), то на промежутках $-\dfrac{a^2}{2} \leqslant x \leqslant 0$ и $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{a^2}{2}$ функция $f(x)$ отрицательна и, значит, данное уравнение на этих промежутках не имеет корней. Отсюда по доказанному выше следует, что данное уравнение имеет не более двух корней. Следовательно, искомые значения параметра a удовлетворяют неравенству $f(0) \geqslant 0$.

Если $f(0) = 2a^2 + a = 0$, то ввиду предположения, что $a \neq 0$, имеем $a = -\dfrac{1}{2}$. При $a = -\dfrac{1}{2}$ находим

$$f\left(-\frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} < 0, \qquad f\left(\frac{a^2}{2}\right) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} < 0.$$

Отсюда следует, что при $a = -\dfrac{1}{2}$ на каждом из промежутков $-\infty < x \leqslant -\dfrac{a^2}{2}$ и

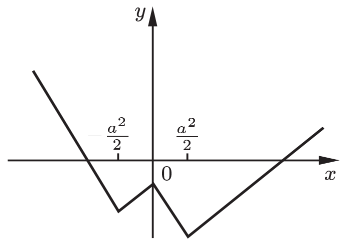


Рис. 30

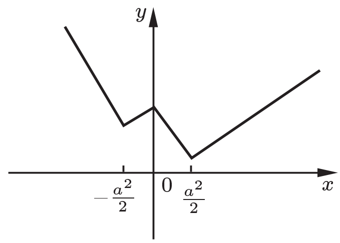


Рис. 31

$\frac{a^2}{2} \leqslant x < +\infty$ исходное уравнение имеет по одному корню

$$x_1 = \frac{-2a^2 + a}{5} = \frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{2a^2 - a}{3} = \frac{1}{3}.$$

Третий корень $x_3 = 0$ принадлежит как промежутку $-\frac{a^2}{2} \leqslant x \leqslant 0$, так и промежутку $0 \leqslant x \leqslant \frac{a^2}{2}$. Таким образом, значение $a = -\frac{1}{2}$ удовлетворяет условию задачи. Далее будем считать, что фиксированное число a ($a \neq 0$) удовлетворяет неравенству $f(0) > 0$. Отметим еще, что при $a \neq 0$

$$f\left(\frac{a^2}{2}\right) = -\frac{a^2}{2} + a < \frac{a^2}{2} + a = f\left(-\frac{a^2}{2}\right).$$

Если $f\left(\frac{a^2}{2}\right) > 0$, то $f\left(-\frac{a^2}{2}\right) > 0$ и поэтому функция $f(x)$ положительна для всех x (рис. 31). Но это означает, что исходное уравнение не имеет корней.

Если $f\left(\frac{a^2}{2}\right) = 0$, то $f\left(-\frac{a^2}{2}\right) > 0$, и поэтому функция $f(x)$ обращается в нуль лишь в точке $x = \frac{a^2}{2}$ (рис. 32). Это означает, что исходное уравнение имеет один корень.

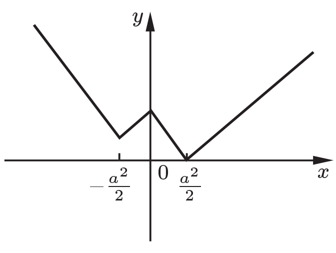


Рис. 32

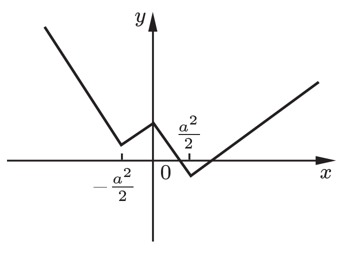


Рис. 33

Если $f\left(\frac{a^2}{2}\right) < 0$, но $f\left(-\frac{a^2}{2}\right) > 0$, то функция $f(x)$ обращается в нуль лишь в одной точке каждого из интервалов $0 < x < \frac{a^2}{2}$ и $\frac{a^2}{2} < x < +\infty$. А это означает, что исходное уравнение имеет два корня (рис. 33).

Если $f\left(\frac{a^2}{2}\right) < 0$ и $f\left(-\frac{a^2}{2}\right) = 0$, то функция $f(x)$ обращается в нуль в точке $-\frac{a^2}{2}$ и еще в двух точках: одной в интервале $0 < x < \frac{a^2}{2}$ и другой в интервале $\frac{a^2}{2} < x < +\infty$ (рис. 34). Следовательно, исходное уравнение имеет три корня.

Наконец, если $f\left(\frac{a^2}{2}\right) < 0$ и $f\left(-\frac{a^2}{2}\right) < 0$, то исходное уравнение имеет четыре корня (рис. 35).

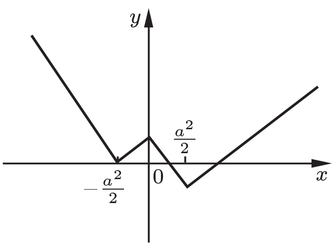


Рис. 34

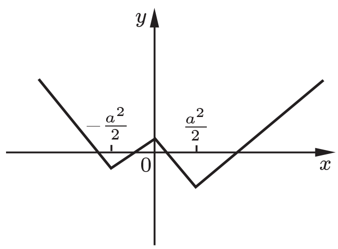


Рис. 35

Итак, исходное уравнение имеет три корня в двух случаях: когда $a = -\frac{1}{2}$ и когда a удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &f(0) > 0,\\ &f\left(a^2/2\right) < 0,\\ &f\left(-a^2/2\right) = 0, \end{aligned}$$

т.е. условиям

$$\begin{aligned} &a^2/2 + a = 0,\\ &2a^2 + a > 0,\\ &-a^2/2 + a < 0. \end{aligned}$$

Легко проверить, что этим условиям удовлетворяет лишь $a = -2$.

448) $a = -1;\ \ x_1 = -1/2,\ \ x_2 = 3/10,\ \ x_3 = 5/6.$

$a = -1/4;\ \ x_1 = -1/20,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 1/12.$

449) $a = -3;\ \ x_1 = -1,\ \ x_2 = 41/40,\ \ x_3 = 40/41.$

$a = -1/27;\ \ x_1 = -1/3321,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 1/3240.$

450) $a = -2;\ \ x_1 = -1,\ \ x_2 = 15/17,\ \ x_3 = 17/15.$

$a = -1/8;\ \ x_1 = -1/36,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 1/120.$

451) $a \geqslant 1$. Р е ш е н и е. Если $a = 0$, то данное уравнение запишется в виде $x^2 = 1$. Это уравнение имеет корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$, следовательно, в этом случае число положительных и число отрицательных корней одинаково и такое значение a условию задачи не удовлетворяет.

Пусть $a \neq 0$. Обозначим $z = (x - a)^2$, тогда исходное уравнение перепишется в виде

$$az^2 - (a+1)z + 1 = 0. \tag{51}$$

Корнями уравнения (51) являются $z_1 = 1$ и $z_2 = 1/a$.

1. Если $a < 0$, то исходное уравнение имеет два корня $x_1 = a + 1$ и $x_2 = a - 1$. Легко видеть, что при $-1 < a < 0$ имеем $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$, при $a < -1$ имеем $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, а при $a = -1$ имеем $x_1 = 0$ и $x_2 = -2$. Следовательно, ни при каком $a < 0$ исходное уравнение не имеет положительных корней больше, чем отрицательных, т.е. никакие значения $a < 0$ условию задачи не удовлетворяют.

2. Если $a > 0$, то исходное уравнение имеет четыре корня $x_1 = a+1$, $x_2 = a-1$, $x_3 = a + \dfrac{1}{\sqrt{a}}$, $x_4 = a - \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

а) Пусть $0 < a < 1$. Тогда $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_3 > 0$, $x_4 < 0$, т.е. при любом a таком, что $0 < a < 1$ исходное уравнение имеет два положительных и два отрицательных корня. Следовательно, никакие значения a из промежутка $0 < a < 1$ условию задачи не удовлетворяют.

б) Пусть $a = 1$. Тогда $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ и $x_4 = 0$, т.е. исходное уравнение имеет два положительных и ни одного отрицательного корня. Следовательно, это значение a удовлетворяет условию задачи.

в) Пусть $a > 1$. Тогда $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, $x_4 > 0$, т.е. исходное уравнение имеет четыре положительных и ни одного отрицательного корня, т.е. все такие значения a удовлетворяют условию задачи.

Следовательно, условию задачи удовлетворяет любое значение $a \geqslant 1$.

452) $a \geqslant 0$. 453) $-\infty < a < -1$. 454) $0 < a < +\infty$. 455) $2 \leqslant a \leqslant 4$.

456) $a \leqslant -4$; $a = 1$, $8/3 \leqslant a < 4$, $a > 4$. Р е ш е н и е. Точка $x = 0$ будет в приводимом ниже решении играть особую роль. Поэтому отдельно исследуем те значения параметра a, при каждом из которых уравнение будет иметь корень $x = 0$. Подставляя $x = 0$ в уравнение, видим, что имеется только одно такое значение параметра, именно, $a = 1$. Уравнение при $a = 1$ имеет вид

$$1 - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4} \quad \sqrt{8 - x} = 0. \tag{52}$$

Поскольку множитель $\sqrt{8-x}$ не обращается в нуль на отрезке $[-2; 3]$, то уравнение (52) на этом отрезке равносильно такому:

$$x^2 + \cos\frac{11\pi x}{4} = 1. \tag{53}$$

Функция, стоящая в левой части этого уравнения, четная. Значит, уравнение (53) на отрезке $[-2, 2]$ будет иметь нечетное число корней (если $x_0 \neq 0$ — корень уравнения (53), то $(-x_0)$ также его корень, кроме того, имеется корень $x = 0$). На множестве $[2, 3]$ уравнение (53) корней не имеет, так как на этом множестве

$$x^2 + \cos\frac{11\pi x}{4} \geqslant 4 - 1 = 3.$$

Итак, при $a = 1$ исходное уравнение имеет нечетное число корней на отрезке $[-2, 3]$. Значит, $a = 1$ удовлетворяет условию задачи.

Отметим теперь еще раз, что при $a \neq 1$ все корни исходного уравнения отличны от нуля.

Исследуем еще значение параметра $a = 0$. При $a = 0$ исходное уравнение имеет вид

$$x^2 + \cos\frac{11\pi x}{4} = 0. \qquad (54)$$

Уравнение (54) на отрезке $[-2, 2]$ имеет четное число корней. Это следует из четности функции, стоящей в левой части уравнения (54), поскольку вместе с корнем x_0 уравнение будет иметь и корень $(-x_0)$. На множестве $(2, 3]$ уравнение (54) корней не имеет, так как на этом множестве $x^2 + \cos\frac{11\pi x}{4} \geqslant 4 - 1 = 3 > 0$. Итак, при $a = 0$ исходное уравнение имеет четное число корней на отрезке $[-2, 3]$. Значит, $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

Теперь исследуем значения параметра a такие, что $a \neq 0$ и $a \neq 1$. При любом таком a исходное уравнение имеет корень $x_1 = 8/a$. Выясним, при каких значениях a этот корень попадает в отрезок $[-2, 3]$. Очевидно, что это будет при тех a, которые удовлетворяют двойному неравенству $-2 \leqslant 8/a \leqslant 3$. Ясно, что среди положительных a это будут те, которые удовлетворяют условию $a \geqslant 8/3$, а среди отрицательных a — те, которые удовлетворяют условию $a \leqslant -4$. Теперь очевидно, что надо рассмотреть три области изменения параметра:

1. $a \leqslant -4$; 2. $-4 < a < 8/3$, $a \neq 1, a \neq 0$; 3. $a \geqslant 8/3$.

1. Пусть $a \leqslant -4$. Тогда исходное уравнение имеет на отрезке $[-2, 3]$ корень $x_1 = 8/a$. Рассмотрим теперь уравнение

$$x^2 + \cos\frac{11\pi x}{4} = a. \qquad (55)$$

При $a \leqslant -4$ уравнение (55) корней не имеет, так как $x^2 + \cos\frac{11\pi x}{4} \geqslant \cos\frac{11\pi x}{4} \geqslant -1$. Итак, исходное уравнение при любом $a \leqslant -4$ имеет только один корень $x_1 = 8/a$. Значит, все $a \leqslant -4$ удовлетворяют условию задачи.

2. Пусть $-4 < a < 8/3$, $a \neq 1$, $a \neq 0$. В этом случае множитель $\sqrt{8 - ax}$ не обращается в нуль на отрезке $[-2, 3]$. Значит, на отрезке $[-2, 3]$ исходное уравнение равносильно уравнению (55).

Уравнение (55) на отрезке $[-2, 2]$ имеет четное число корней (или не имеет их вовсе). Это следует из четности функции, стоящей в левой части уравнения (55), так как вместе с корнем x_0 уравнение будет иметь корень $(-x_0)$. На множестве $(2, 3]$ уравнение (55) корней не имеет, поскольку на этом множестве имеем $x^2 + {}$ $+ \cos\frac{11\pi x}{4} \geqslant x^2 - 1 \geqslant 4 - 1 = 3 > 8/3$. Итак, при указанных значениях параметра a исходное уравнение либо не имеет корней на отрезке $[-2, 3]$, либо имеет их четное число. Следовательно, все эти значения a не удовлетворяют условию задачи.

3. Пусть $a \geqslant 8/3$. Тогда исходное уравнение имеет на отрезке $[-2, 3]$ корень $x_1 = 8/a$. Отметим, что из корней уравнения (55) корнями исходного уравнения будут только те, которые удовлетворяют условию $8 - ax \geqslant 0$, т.е. те, которые удовлетворяют условию $x \leqslant 8/a$. Теперь задача может быть переформулирована

так: в области $a \geqslant 8/3$ найти все значения a, при каждом из которых уравнение (55) имеет на промежутке $[-2, 8/a)$ четное число различных корней.

Рассмотрим несколько случаев.

а) Пусть $a = 4$, тогда уравнение (55) имеет вид

$$x^2 + \cos\frac{11\pi x}{4} = 4. \tag{56}$$

В этом случае множество, на котором исследуется уравнение (56), таково: $[-2, 2)$. На множестве $(-2, 2)$ уравнение (56) имеет четное число корней. Но точка $x = -2$ также удовлетворяет уравнению (56). Это легко установить подстановкой. Следовательно, при $a = 4$ на промежутке $[-2, 8/a)$ уравнение (56) имеет нечетное число корней. Значит, $a = 4$ не удовлетворяет условию задачи.

б) Пусть $a > 4$. В этом случае $8/a < 2$ и, так как на отрезке $[-2, 2]$ уравнение (55) имеет четное число корней условию задачи будут удовлетворять те a, при каждом из которых уравнение (55) имеет четное число корней (или не имеет их вовсе) на множестве $[8/a, 2]$. Докажем, что на множестве $[8/a, 2]$ уравнение (55) не имеет корней. Отсюда будет следовать, что все $a > 4$ удовлетворяют условию задачи. Поскольку $x = 2$ не является корнем уравнения (55) ($a \neq 4$) и $a - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4} \geqslant \frac{8}{x} - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4}$, то достаточно доказать, что на множестве $(0, 2)$ справедливо неравенство $\frac{8}{x} - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4} > 0$. Если $\frac{18}{11} < x < 2$, то $\frac{9\pi}{2} < \frac{11\pi x}{4} < \frac{11\pi}{2}$ и $\cos\frac{11\pi x}{4} < 0$.

Значит, на этом множестве имеет место неравенство

$$\frac{8}{x} - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4} > \frac{8}{x} - x^2 > 0$$

(последнее неравенство выполнено, поскольку $x < 2$). Если $0 < x \leqslant 18/11$, то пользуясь монотонным убыванием функции $y = \frac{8}{x} - x^2$ на множестве $x > 0$ находим, что $\frac{8}{x} - x^2 \geqslant \frac{8 \cdot 11}{18} - {\frac{18}{11}}^{2} > \frac{44}{9} - 3 > 1$ и, значит, $\frac{8}{x} - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4} > 1 - \cos\frac{11\pi x}{4} \geqslant 0$. Итак, все $a > 4$ удовлетворяют условию задачи.

в) Пусть $8/3 \leqslant a < 4$. В этом случае $8/a > 2$ и подобно пункту б) достаточно найти все a, при которых уравнение (55) на множестве $(2, 8/a)$ имеет четное число различных корней (или не имеет их вовсе). Как и в пункте б), докажем, что при всех a, удовлетворяющих неравенствам $8/3 \leqslant a < 4$, уравнение (55) на множестве $(2, 8/a)$ не имеет корней. Поскольку на множестве $(2, 8/a)$ выполнено неравенство $a < 8/x$ и, следовательно, $a - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4} < \frac{8}{x} - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4}$, то достаточно доказать, что на множестве $(2, 3)$ выполнено неравенство $\frac{8}{x} - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4} < 0$. Если $2 < x < \frac{26}{11}$, то $\frac{11\pi}{2} < \frac{11\pi x}{4} < \frac{13\pi}{2}$ и $\cos\frac{11\pi x}{4} > 0$. Значит, на этом множестве $\frac{8}{x} - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4} < \frac{8}{x} - x^2 < 0$ (последнее неравенство выполнено, поскольку $x > 2$). Если $\frac{26}{11} \leqslant x < 3$, то, пользуясь монотонным убыванием функции $y = \frac{8}{x} - x^2$ на множестве $x > 0$ находим, что $\frac{8}{x} - x^2 \leqslant$ $\leqslant \frac{8\cdot 11}{26} - \left(\frac{26}{11}\right)^2 < \frac{44}{13} - 5 < -1$ и значит, $\frac{8}{x} - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4} < -1 - \cos\frac{11\pi x}{4} \leqslant$ $\leqslant 0$. Итак, все a из области $8/3 \leqslant a < 4$ удовлетворяют условию задачи. Собирая вместе все a, удовлетворяющие условию задачи, получаем ответ.

457) $a \leqslant -3$, $a = -1$, $3/5 \leqslant a < 3$. 458) $a \leqslant -4$, $a = -1$, $8/5 \leqslant a < 4$, $a > 4$. 459) $a \leqslant -5$, $a = 1$, $5/13 \leqslant a < 5$, $a > 5$.

ГЛАВА II

§ 1

1) $x \in R$. 2) $x \in R$. 3) $-\infty < x < 0$; $0 < x < 1$; $1 < x < +\infty$. 4) $-\infty < x < 0$; $0 < x < +\infty$. 5) $-2 \leqslant x < +\infty$. 6) $3 \leqslant x \leqslant 7$. 7) Решений нет. 8) $x = 0$; $1 \leqslant x < +\infty$. 9) $1 \leqslant x < +\infty$. 10) $-1 \leqslant x < 0$; $0 < x \leqslant 1$. 11) $3/2 < x < +\infty$. 12) $3 < x < +\infty$. 13) $0 < x < +\infty$. 14) $-1 < x < 0$. 15) $0 < x < 1$, $1 < x < +\infty$. 16) $1 \leqslant x < 2$; $2 < x < +\infty$. 17) $1 < x < 2$; $2 < x < +\infty$. 18) Решений нет. 19) $-1 \leqslant x < +\infty$. 20) $-\infty < x < -1$; $-1 < x < 0$; $0 < x < +\infty$. 21) $0 < x < +\infty$. 22) $x = 3$. 23) $x = 0$; $x = 1$. 24) $-\infty < x < 2$. 25) $0 < x < 1/2$; $1/2 < x \leqslant 1$.

26) На ОДЗ неравенства его левая часть неотрицательна, и поэтому не может быть меньшей или равной (-1).

27) ОДЗ неравенства есть пустое множество.

28) Для любых x из ОДЗ неравенства разность $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+4}$ отрицательна и поэтому не может быть большей или равной двум.

29) ОДЗ неравенства есть единственное число $x = 1$, которое не является решением этого неравенства.

30) Абсолютная величина любого числа не может быть отрицательным числом.

31) Левая часть неравенства положительна для любого действительного числа x и поэтому не может быть меньше, чем $-\frac{1}{2}$.

32) Так как $|x-1| \geqslant 0$ и $|2x+3| \geqslant 0$, то неравенство $|x-1| + |2x+3| \leqslant 0$ справедливо тогда и только тогда, когда одновременно $|x-1| = 0$ и $|2x+3| = 0$, что невозможно.

33) ОДЗ неравенства пустое множество.

34) Так как $|x^2+1| = x^2+1 \geqslant 1$ и $|x^2-4x+7| = |(x-2)^2+3| = (x-2)^2+3 \geqslant 3$, то $|x^2+1| + |x^2-4x+7| \geqslant 4$.

35) Так как $2x^2 - 4x + 3 = 1 + 2(x-1)^2 \geqslant 1$ и $5 - 4x + x^2 = 1 + (x-2)^2 \geqslant 1$, то $\sqrt{2x^2-4x+3} + \sqrt{5-4x+x^2} \geqslant 2$.

36) Воспользовавшись неравенством $a+\dfrac{1}{a} \geqslant 2$, справедливым для любого $a>0$, получим, что на ОДЗ неравенства его левая часть не меньше двух.

37) На ОДЗ неравенства обе части неравенства положительны, после возведения в квадрат получим равносильное неравенство, которое очевидно не имеет решений.

38) Поскольку $x^2-2x+3=(x-1)^2+2 \geqslant 2$, то $\dfrac{1}{x^2-2x+3} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Поэтому для любого x из ОДЗ неравенства его правая часть больше или равна 1, а левая меньше или равна $1/2$.

39) Воспользоваться неравенствами $2^{x^2-4x+9} \geqslant 2^5$, $\dfrac{1}{1+|x-3|} \leqslant 1$.

40) Так как на ОДЗ неравенства $\sqrt[4]{x} \geqslant 0$ и $\sqrt{x+5} \geqslant \sqrt{5} > 2{,}2$, то на ОДЗ правая часть неравенства больше, чем 2,2.

41) Воспользоваться неравенствами $x^2+x+4>1$, $x^2+2x+3>1$.

42) ОДЗ неравенства есть $x<0$. Для $x<0$ имеем $x+\dfrac{1}{x} \leqslant -2$ и поэтому $\sqrt[3]{x+\dfrac{1}{x}} \leqslant -\sqrt[3]{2} < -1$, а $\sqrt{-2x}-1 \geqslant -1$.

43) На ОДЗ неравенства $x^8 \cdot \sqrt{5-x} \geqslant 0$, а $\sqrt{10+3\sqrt{x^2-1}} > 3$.

44) ОДЗ неравенства — пустое множество.

45) На ОДЗ неравенства его левая часть положительна, а правая неположительна.

46) Поскольку $\log_2\left(x^2+1+\dfrac{1}{x^2+1}\right) \geqslant 1$ и $\log_2\left(2-\sqrt{x+5}\right) \leqslant 1$, то неравенство, данное в условии, возможно, если одновременно справедливы равенства $\log_2\left(x^2+1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)=1$ и $\log_2\left(2-\sqrt{x+5}\right)=1$, что невозможно.

47) Так как $2+\sqrt{x} \geqslant 2$ и $1+x^2 \geqslant 1$, то $\log_4\left(2+\sqrt{x}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$ и $\log_2(1+x^2) \geqslant 0$. Следовательно, $\log_4\left(2+\sqrt{x}\right)+\log_2(1+x^2) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

48) Поскольку на ОДЗ неравенства $\sqrt{x} \geqslant 0$, то $2^{\sqrt{x}} \geqslant 1$, $3^{\sqrt{x}} \geqslant 1$ и $4^{\sqrt{x}+1} \geqslant 4$, поэтому $2^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{x}}+4^{\sqrt{x}+1} \geqslant 6$.

49) На ОДЗ неравенства его левая часть положительна, а правая отрицательна.

50) ОДЗ неравенства есть промежуток $-3 \leqslant x \leqslant 4$. Для x, удовлетворяющих условию $-3 \leqslant x < 0$, имеем $\sqrt{x+3} \geqslant 0$, $\sqrt[4]{9-x} > \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$, поэтому $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$. Для x, удовлетворяющих условию $0<x \leqslant 9$, имеем $\sqrt[4]{9-x} \geqslant 0$ и $\sqrt{x+3} > \sqrt{3}$, поэтому $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$. Для $x=0$ левая часть неравенства равна $\sqrt{3}+\sqrt[4]{9}=2\sqrt{3}$. Следовательно, при любом x из ОДЗ неравенства его левая часть больше $\sqrt{3}$.

51) Разбить ОДЗ на две области $-4 \leqslant x < 0$ и $0 \leqslant x \leqslant 16$ и рассмотреть неравенство на каждой из этих областей.

52) ОДЗ неравенства есть $x = 0$, которое не является его решением.

53) ОДЗ неравенства есть промежуток $-1 < x < 1$, на котором справедливы неравенства $\sqrt{2}|x| - 1 \leqslant 1$, $\log_2(2-2x^2) \leqslant 1$. Следовательно, на ОДЗ левая часть неравенства меньше или равна 1.

54) Воспользоваться тем, что на ОДЗ неравенства: $3^{-|x-2|} \leqslant 1$, $\log_2(4x - x^2 - 2) \leqslant 1$.

55) Применить неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом к выражениям $\sqrt{x^2+1}$ и $\sqrt{x^4-x^2+1}$.

56) Да. 57) Да. 58) Да.

59) Нет, так как $x = 1$ является решением второго неравенства, но не является решением первого.

60) Нет, так как все $-\infty < x < -1$ являются решениями первого, но не являются решениями второго неравенства.

61) Нет, так как все $-\infty < x < 0$ являются решениями второго неравенства, но не являются решениями первого.

62) Да.

63) Нет, так как, например, $x = 0$ есть решение второго неравенства и не есть решение первого.

64) Да. 65) Да. 66) Да.

67) Нет, так как, например, $x = 1$ есть решение второго неравенства, но не является решением первого.

68) Нет, так как, например, $x = -5$ есть решение второго неравенства, но не является решением первого.

69) Да. 70) Да.

71) Нет, так как, например, $x = 5$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

72) Нет, так как, например, $x = -2$ есть решение первого неравенства, но не есть решение второго.

73) Да. 74) Да.

75) Нет, так как все $-\infty < x < 0$ являются решениями первого неравенства, но не являются решениями второго.

76) Нет, так как все $-\infty < x < -1$ являются решениями первого неравенства, но не являются решениями второго.

77) Нет, так как $x = 4$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

78) Да. 79) Да. 80) Да. 81) Да.

82) Нет, так как $x = 3$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

83) Да. 84) Да.

85) Нет, так как $x = 0$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

86) Нет, так как, например, $x = 2/3$ есть решение первого неравенства, но не есть решение второго.

87) Нет, так как, например, $x = 0$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

88) Да. 89) Да.

90) Нет, так как, например, $x = 4$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

91) Нет, так как $x = 0$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

92) Нет, так как, например, $x = -1$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

93) Нет, так как, например, $x = 0$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

94) Да. 95) Нет, так как, например, $x = -2$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

96) Нет, так как $x = 0$ есть решение первого неравенства, но не есть решение второго.

97) Нет, так как все $-\infty < x < 0$ являются решениями второго неравенства, но не являются решениями первого.

98) Нет, так как все $-\infty < x \leqslant 0$ являются решениями второго неравенства, но не являются решениями первого.

99) Нет, так как, например, $x = -1$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

100) Нет, так как, например, $x = -4$ есть решение первого неравенства, но не есть решение второго.

101) Да.

102) Нет, так как, например, $x = -5$ есть решение первого неравенства, но не есть решение второго.

103) Нет, так как, например, $x = 0$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

104) Нет, так как, например, $x = -2$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

105) Нет, так как, например, $x = -2$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

106) Нет, так как $x = -4$ есть решение первого неравенства, но не есть решение второго.

107) Да. 108) Нет, так как, например, $x = -1/2$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

109) Нет, так как, например, $x = 0$ есть решение первого неравенства, но не есть решение второго.

110) Нет, так как, например, $x = 0$ есть решение первого неравенства, но не есть решение второго.

111) Да. 112) Да. 113) Да.

114) Нет, так как, например, $x = -2/3$ есть решение первого неравенства и не есть решение второго.

115) Да. 116) Да. 117) Да. 118) Да. 119) Да. 120) Да. 121) Да. 122) Да.

123) Нет, так как $x = 0$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

124) Да. 125) Да.

126) Нет, так как $x = 0$ является решением первого неравенства, но не является решением второго.

127) Нет, так как $x = -2$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

128) Нет, так как, например, $x = 1$ есть решение второго неравенства, но не есть решение первого.

129) Да. 130) Нет, так как $x = 0$ есть решение первого неравенства, но не есть решение второго.

131) Нет, так как, например, $x = -3/2$ есть решение неравенства, но не есть решение системы неравенств.

133) Да. 134) Да. 135) Да. 136) Да. 137) Да. 138) Да. 139) Да.

140) Нет, так как, например, $x = -3$ есть решение неравенства, но не есть решение системы неравенств.

141) Да. 142) Нет, так как $x = 0$ есть решение неравенства, но не есть решение системы неравенств.

143) Да. 144) Да.

145) Нет, так как $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$ являются решениями неравенства, но не являются решениями системы неравенств.

146) Да. 147) Нет, так как $x = -3$ не есть решение совокупности, а есть решение неравенства.

148) Да. 149) Нет, так как $x = 0$ есть решение неравенства, но не есть решение совокупности.

150) Да. 151) Да. 152) Да. 153) Да. 154) Да. 155) Да. 156) Да.

§ 2

1) $3{,}5 < x < +\infty$. 2) $-\infty < x < 1/9$. 3) $-1 < x < +\infty$. 4) $-\infty < x < 36/7$. 5) $51/41 < x < +\infty$. 6) $5{,}5 < x < +\infty$. 7) $-\infty < x < 0{,}35$. 8) $1 < x < +\infty$. 9) $x \in R$. 10) $-\infty < x < -2; 2 < x < +\infty$. 11) $-\sqrt{3}/2 < x < \sqrt{3}/2$. 12) $x \in R$. 13) Нет решений. 14) $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$. 15) $-\infty < x < -3, 1 < x < +\infty$. 16) $-\infty < x < 2, 2 < x < +\infty$. 17) $x = 3$. 18) $-\infty < x < \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}, \dfrac{2+\sqrt{7}}{3} < x < +\infty$. 19) $-\infty < x < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < x < +\infty$. 20) Нет решений. 21) $-\infty < x \leqslant 1/2, 1 \leqslant x < +\infty$. 22) $-1 < x < 3$. 23) $-\infty < x \leqslant \dfrac{1-\sqrt{21}}{4}, \dfrac{1+\sqrt{21}}{4} \leqslant x < +\infty$. 24) Нет решений. 25) $-\infty < x < \sqrt[3]{1/3}$. 26) $-\infty < x < -\sqrt[4]{8/5}$; $\sqrt[4]{8/5} < x < +\infty$. 27) $\sqrt[3]{2/3} < x < +\infty$. 28) $-\sqrt[4]{5/2} < x < \sqrt[4]{5/2}$. 29) $-\infty < x < -3, 2 < x < +\infty$. 30) $-1/2 \leqslant x \leqslant 2$. 31) $-\infty < x < -1, 5 < x < +\infty$. 32) $-\infty < x < -3; 1 < x < +\infty$. 33) $-4 \leqslant x \leqslant -3/2; 1/3 \leqslant x < +\infty$. 34) $-3 < x < 1/2, 4 < x < +\infty$. 35) $-\infty < x < -1/3, 1/2 < x < -4$. 36) $-\infty < x \leqslant -1/3; 1/2 \leqslant x \leqslant -4$. 37) $-3 \leqslant x \leqslant 1/2, 4 \leqslant x < +\infty$. 38) $-\pi < x < -3, 3 < x < \pi$. 39) $-\infty < x \leqslant 1/2; 2 \leqslant x < +\infty$. 40) $-2/3 < x < 2$. 41) $2 < x < +\infty$. 42) $-\infty < x < -1$. 43) $-\infty < x < 0, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. 44) $1 \leqslant x < +\infty$. 45) $-2 < x < +\infty$. 46) $-\infty < x \leqslant -2; -1/2 \leqslant x \leqslant 1$. 47) $-\infty < x < 0; 0 < x < 2$. 48) $-2 \leqslant x \leqslant -1$. 49) $-\infty < x \leqslant -2; x = 0; x = 1; 2 \leqslant x < +\infty$. 50) $-\infty < x < -1, -1 < x < 1, 1 < x < +\infty$. 51) $0 \leqslant x < +\infty$. 52) $-3 \leqslant x \leqslant 2/3; 7 \leqslant x < +\infty$. 53) $-2 \leqslant x \leqslant 1, x = 2; 3 \leqslant x < +\infty$. 54) $x = -2, x = 1; x = 4$. 55) $-\infty < x < -2; -1 < x < -1/2$. 56) $-2 < x < 1$. 57) $-\infty < x \leqslant -2; 4 < x < +\infty$.

58) $-\infty < x < -3$; $-1 < x < 2$. 59) $-3 \leqslant x < -1$; $-1 < x \leqslant 2$. 60) $-\infty < < x < -2$; $x = 0$; $1 \leqslant x < +\infty$. 61) $-\infty < x \leqslant -2/3$; $0 < x < 2/3$; $2/3 < < x < 1$; $1 < x < +\infty$. 62) $-\infty < x < -7$; $x = 0$; $x = 1$; $10 < x < +\infty$. 63) $x = -3$; $x = -3/2$; $1 < x < +\infty$. 64) $-\infty < x < 1$. 65) $-\infty < x < -1/2$; $0 < x < 1/2$. 66) $-\infty < x < \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$; $1 < x < \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$. 67) $-\infty < < x < -5/3$; $1 < x < +\infty$. 68) $-2 < x < 0$; $6 < x < +\infty$. 69) $1 < x < 3$; $-1/2 < x < +\infty$. 70) $-3 < x < +\infty$; $-2 < x < 0$. 71) $1 < x \leqslant 2$. 72) $-\infty < x < -2$; $-1 < x < 3$; $4 < x < +\infty$. 73) $-4 \leqslant x < -3$; $-3/2 \leqslant x < < 0$; $1 \leqslant x < +\infty$. 74) $-\infty < x < -3$. 75) $5 < x < +\infty$. 76) Нет решений; $x \in R$. 78) $x \in R$. 79) $1 < x < +\infty$. 80) $5/6 < x < +\infty$. 81) $-\infty < < x < \log_4 3/2$. 82) $\log_{1/6} \frac{4}{36} < x < +\infty$. 83) $\log_9(\sqrt{2} - 1{,}41) < x < +\infty$. 84) $\frac{1}{2}\log_4 \frac{2}{123} < x < +\infty$. 85) $0 < x < 2^{-2/3}$. 86) $0 < x \leqslant \left(\frac{1}{7}\right)^{3/2}$. 87) $0 < x < 10^{1/7}$. 88) $2^{-5} \leqslant x < +\infty$. 89) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-10/3} < x < +\infty$. 90) $-\infty < x \leqslant -\sqrt{3}$; $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$; $\sqrt{3} \leqslant x < +\infty$. 91) $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$. 92) $3^{\frac{-1-\sqrt{13}}{3}} < x < 3^{\frac{-1+\sqrt{13}}{3}}$. 93) $0 < x < +\infty$. 94) $-\infty < < x < < \frac{1}{1000}$; $\frac{1}{100} < x < 100$; $1000 < x < +\infty$. 95) $0 < x \leqslant 1/16$; $2 \leqslant x < +\infty$. 96) $\log_2(\sqrt{7} - 1) < x < +\infty$. 97) $-\infty < x < -3/2$; $1 < x < +\infty$. 98) $-\infty < < x < 0$; $\log_4 3 < x < +\infty$. 99) $-\infty < x < \log_5 3$. 100) $-\sqrt{\log_3 4} \leqslant x \leqslant \sqrt{\log_3 4}$. 101) $-4 \leqslant x \leqslant -3$; $3 \leqslant x \leqslant 4$. 102) $-7 < x < 7/3$. 103) $4/7 < < x < +\infty$. 104) Нет решений. 105) $-1/2 \leqslant \leqslant x < 1/7$. 106) $-6 \leqslant x < -5$; $5 < x \leqslant 6$. 107) Нет решений. 108) $4/3 \leqslant x < 5/2$. 109) $-1 < x < 1/2$. 110) $1/3 < x < (3 + \sqrt{5})/6$. 111) $1 \leqslant x \leqslant 6$. 112) $-\sqrt{2} \leqslant x < 0$; $1 < < x \leqslant \sqrt{2}$; $3 < x < +\infty$. 113) $-\infty < x < -2 - 2\sqrt{2}$. 114) $x = -1$. 115) $x = 3$. 116) $1/2 < x < 2$. 117) $4/3 \leqslant x < 2$. 118) $-\infty < x \leqslant \leqslant -\sqrt{3}$; $1/4 < x \leqslant 1$; $4 \leqslant x < +\infty$. 119) $2 < x < +\infty$. 120) $1/4 \leqslant x < 2$.

§ 3

1) $-1 < x < 0$; $1 < x < +\infty$. 2) $-2 \leqslant x < -1$; $0 < x < 1$. 3) $2 \leqslant x < 5/2$; $5/2 < x \leqslant 3$. 4) $-3 < x < +\infty$. 5) $-\infty < x < 0$; $0 < x \leqslant 3/2$. 6) $x = -2$; $x = 1$; $3 \leqslant x < +\infty$. 7) $x = -2$; $1 \leqslant x \leqslant 3$. 8) $-1 < x < -1/2$; $0 < x < 5/2$. 9) $-1 < x < 2$; $3 < x < +\infty$. 10) $x = 4$; $5 < x < +\infty$. 11) $x = 2$; $4 < x < < +\infty$. 12) $-3 \leqslant x \leqslant 6$; $8 \leqslant x < +\infty$. 13) $-3 \leqslant x \leqslant 6$. 14) $-2 \leqslant x \leqslant 4$. 15) $-2 \leqslant x \leqslant 4$; $5 \leqslant x < +\infty$. 16) $x = 5$; $4 + \sqrt{3} < x < +\infty$. 17) $1 \leqslant x \leqslant 2$. 18) $3 < x < 4$. 19) $-\infty < x < -2$, $\sqrt{2} < x < -1$; $1 < x < \sqrt{2}$; $2 < x < +\infty$. 20) $-\infty < x < 0, 0 < x < +\infty$. 21) $-\infty < x < 3^{3/4}$, $3 < x < +\infty$. 22) $0 < < x < +\infty$. 23) $0 < x < \log_2 4/3$; $1 < x < +\infty$. 24) $0 < x < 2$; $2 < x < +\infty$.

25) $-\infty < x < \dfrac{2+\log_7 5}{2\log_7 5 - 1}$. 26) $3 < x < +\infty$. 27) $\dfrac{\lg 14}{\lg 5 - \lg\sqrt{7}} < x < +\infty$. 28) $\log_5\sqrt{6} < x < \log_6 5$. 29) $\log_{3/2}\dfrac{1}{9} < x < 1$. 30) $0 \leqslant x < \log_3^2 2$, $3/2 < x < +\infty$. 31) $0 < x < 1$. 32) $x = 0$; $5 \leqslant x < +\infty$. 33) $0 < x < 2-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3} < x < +\infty$. 34) $-4 \leqslant x \leqslant 1$, $x = 2$. 35) $-2 \leqslant x \leqslant 4$, $x = -3$. 36) $-2 \leqslant x \leqslant 2$. 37) $2 \leqslant x < +\infty$. 38) $-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < x < +\infty$. 39) $-1 \leqslant x \leqslant 7$. 40) $-\infty < x \leqslant 1 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $4 < x < +\infty$. 41) $4 \leqslant x < 4\dfrac{1}{11}$, $8 < x < +\infty$. 42) $2 < x < 8$. 43) $3/4 < x < 2$. 44) $-1 \leqslant x \leqslant 3$. 45) $1 < x < 5/4$. 46) $x = 5$. 47) $19/3 \leqslant x < 9$. 48) $\dfrac{14+\sqrt{7}}{2} \leqslant x \leqslant 9$. 49) $-\infty < x < 22/9$. 50) $-1/4 < x < 1/3$. 51) $-3/4 < x < 1/4$. 52) $x \in R$. 53) $-\infty < x < -1/2$; $5/8 < x < +\infty$. 54) $-\infty < x < 0$, $1 < x < 6$. 55) $-\infty < x < 0$. 56) $0 \leqslant x < 1$; $3 < x < +\infty$. 57) $-\infty < x < -1$; $0 < x < 1$; $1 < x < +\infty$. 58) $4 \leqslant x < +\infty$. 59) $2/\sqrt{5} < x < 1$; $-1 < x < -2\sqrt{5}$. 60) $0 < x < 1/2$; $32 < x < +\infty$. 61) $4 < x < 6$. 62) $-1 < x < 1$; $3 < x < 5$. 63) $-10/9 < x < -4/5$. 64) $-\infty < x < -\sqrt{3} - 2$. 65) $81 < x < +\infty$. 66) $\log_2\dfrac{\sqrt{33}-5}{2} < x < +\infty$. 67) $\log_2\dfrac{\sqrt{7}-1}{2} < x < 0$. 68) $-\infty < x < -5$. 69) $-1 < x < 0$, $2 < x < 3$. 70) $0 < x < 1$. 71) $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. 72) $0 < x < 1$. 73) $2 < x < 4$. 74) $1 < x < 3$. 75) $8 < x < +\infty$. 76) $\sqrt{5} - 1 < x < +\infty$. 77) $3 < x < 10$. 78) $-2 < x < 5/3$. 79) $6 < x \leqslant 14$. 80) $4 < x < +\infty$. 81) $-7 < x < 1$. 82) $-3 < x < -2$; $2 < x < 3$. 83) $-\infty < x < -3 - \sqrt{14}$; $-3 + \sqrt{14} < x < 1$; $5 < x < +\infty$. 84) $\dfrac{-3-\sqrt{65}}{2} < x < 3$. 85) $-1+\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$. 86) $-\infty < x \leqslant -2/3$; $1/2 \leqslant x < +\infty$. 87) $-3 < x < -2$; $-2 < x < -5/3$. 88) $-\infty < x < 1$. 89) $1/4 < x < 5/2$; $x \neq 1$. 90) $-\infty < x \leqslant -9/2$, $-7/6 \leqslant x < +\infty$. 91) $-\infty < x \leqslant -1/2$; $5 \leqslant x < +\infty$. 92) $-5 < x < -2$; $2 < x < 3$; $3 < x < 5$. 93) $-\infty < x < 2$. 94) $3 < x < +\infty$.

§ 4

1) $-4/3 < x < 21/16$. 2) $-3/2 < x < -23/16$. 3) $-\infty < x \leqslant 1$; $2 \leqslant x < +\infty$. 4) $-6/5 \leqslant x < -1$; $-1/5 < x \leqslant 0$. 5) $-\infty < x < 1/3$; $8/3 < x < +\infty$. 6) $3/4 < x \leqslant 1$. 7) $\dfrac{6-\sqrt{2}}{2} \leqslant x < 5/2$; $7/2 < x \leqslant \dfrac{6+\sqrt{2}}{2}$. 8) $-2 < x < 3$. 9) $-1{,}1 < x < 4$; $5 < x < +\infty$. 10) $\sqrt{6} < x \leqslant 3$; $-3 \leqslant x < -\sqrt{6}$. 11) $-2 < x < 2$. 12) $13 \leqslant x < +\infty$. 13) $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. 14) $7 < x < +\infty$. 15) $2 < x < 5$. 16) $2 < x \leqslant 3$. 17) $-1 < x < 1$. 18) $-2 < x < 3$. 19) $50 <$

$< x < +\infty$. 20) $\frac{-3-\sqrt{29}}{2} < x < \frac{-3-3\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-3+3\sqrt{3}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{29}}{2}$. 21) $2 \leqslant x < 1-\sqrt{5}$; $1+\sqrt{5} \leqslant x < 4$. 22) $1 \leqslant x < +\infty$. 23) $0 < x < 5^{-6}$. 24) $1 < x < 5$. 25) $-\infty < x < -1/2$; $1/3 < x < +\infty$. 26) $-\infty < x < 2$. 27) $-\infty < x < 2$. 28) $-\infty < x < 2$. 29) $3/2 < x < +\infty$. 30) $100 < x < +\infty$. 31) $-\infty < x < 1$. 32) $-\infty < x < 0$. 33) $\frac{3-\sqrt{69}}{2} < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{69}}{2}$. 34) $3 < x < +\infty$. 35) $0 < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < 3$. 36) $-4 < x < 3$; $1 < x < +\infty$. 37) $4/3 \leqslant x < 3$. 38) $-\infty < x < -2$; $5/8 < x < +\infty$. 39) $-\infty < x < -9$; $3 < x < +\infty$. 40) $-10/9 < x < -4/5$. 41) $0 < x < 2$; $3 < x < +\infty$. 42) $2-\sqrt{3} \leqslant x < 1$; $3 < x \leqslant 2+\sqrt{3}$. 43) $-3 < x < -2$; $2 < x < 3{,}4$. 44) $0 < x < 10$. 45) $1 < x < 10$. 46) $0 < x < 1/10$; $100 < x < 1000$; $10^5 < x < +\infty$. 47) $1/4 < x < 1/2$; $1/2 < x < +\infty$. 48) $2 \leqslant x < +\infty$. 49) $\log_5 2 < x < +\infty$; $\log_5 2/5 < x \leqslant \log_5 4/5$. 50) $-\infty < x \leqslant \log_{13} 1/2$; $\log_{13} 2/3 < x < \log_{13} 3/2$. 51) $-\infty < x < \log_2 5/2$; $\log_2 7/8 \leqslant x < +\infty$. 52) $-\infty < x < -1$. 53) $-\infty < x < 0$. 54) $-2 \leqslant x < -1$; $1 \leqslant x < +\infty$. 55) $-1 < x \leqslant 2$; $3 \leqslant x < +\infty$. 56) $1 < x < +\infty$; $-\infty < x < -2-2\log_3 2$. 57) $-1 < x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2$. 58) $3 < x < 9/2$. 59) $0 < x \leqslant 1/2$. 60) $3 < x \leqslant \frac{13+3\sqrt{141}}{10}$. 61) $1 \leqslant x < +\infty$. 62) $2 < x \leqslant 6$. 63) $-\infty < x < 2$. 64) $0 < x \leqslant 1/3$; $9 \leqslant x < +\infty$. 65) $\frac{1+\lg 2}{7} \leqslant x \leqslant \frac{1+\lg 3}{7}$. 66) $-\log_2 9 < x < +\infty$. 67) $-\infty < x \leqslant -119$, $1 \leqslant x < 6$. 68) $\log_{\operatorname{tg}\pi/9} \frac{3+\sqrt{13}}{2} < x < +\infty$. 69) $\frac{1}{\sqrt[9]{2}} < x \leqslant 1$. 70) $10 < x < 10^4$. 71) $10^{-\sqrt{3}} < x < 10^{-\sqrt{2}}$, $10^{\sqrt{2}} < x < 10^{\sqrt{3}}$. 72) $8 < x < 16$; $1/16 < x < 1/8$. 73) $0 \leqslant x \leqslant 1$. 74) $\log_4 \frac{\sqrt[4]{3}}{4} \leqslant x < +\infty$. 75) $\log_5 2 \leqslant x < +\infty$; $\log_5 3 \leqslant x < 1$. 76) $-\infty < x \leqslant 0$; $\log_3 8 \leqslant x < 2$. 77) $2-\log_2^2 3 < x \leqslant 2$. 78) $-\sqrt{7} < x \leqslant -\sqrt{3}$; $\sqrt{3} \leqslant x < \sqrt{7}$. 79) $-3 \leqslant x < -2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2} < x \leqslant 3$. 80) $0 \leqslant x \leqslant 4$. 81) $0 < x \leqslant 1/4$, $2 \leqslant x < +\infty$. 82) $-\infty < x < 0$; $3 < x < \log_2 9$. 83) $2 < x < +\infty$. 84) $\log_2 \frac{5}{4} < x < \log_2 3$. 85) $\log_3 \frac{28}{27} < x < \log_3 4$. 86) $-5 < x < -2$; $-1 < x < 1$; $1 < x < 2$; $2 < x < +\infty$. 87) $8 < x < +\infty$. 88) $-\infty < x < 1$; $2 < x < 3$. 89) $3 < x < 7/2$; $4 < x < +\infty$. 90) $-3 < x < -2$; $2 < x < 5/2$; $3 < x < +\infty$. 91) $-1 < x < 0$. 92) $-\infty < x < -3$; $-2 \leqslant x \leqslant 0$. 93) $-2 \leqslant x \leqslant 0$. 94) $x = \pm 2$; $-9/8 \leqslant x < 0$. 95) Нет решений. 96) $x = 3/2$; $2 < x < +\infty$. 97) $-2 < x < -3/2$; $-1 < x < 0$. 98) $-1 < x < \sqrt[3]{4}$. 99) $2 \leqslant x < +\infty$. 100) $-3 < x < -2$, $-1 < x < 0$. 101) $-\infty < x < 0$; $1 < x < 2$; $2 < x < 3$; $4 < x < +\infty$. 102) $1/3 < x < +\infty$; $-\infty < x < -1/3$. 103) $2 \leqslant x \leqslant 3$. 104) $2 \leqslant x < 3$. 105) $4/3 \leqslant x < 2$.

106) $2 \leqslant x \leqslant 3$; $x = -4$. 107) $1/2 < x < +\infty$; $0 < x \leqslant 1/4$. 108) $-2 < x \leqslant -3/2$; $1 < x < +\infty$. 109) $-\infty < x \leqslant -2$; $1 + \sqrt{8} < x < 4$; $4 < x < +\infty$. 110) $-\infty < x < -1$; $-1 < x < 2 - \sqrt{8}$; $5 \leqslant x < +\infty$. 111) $-\infty < x < -1$; $\frac{7-\sqrt{5}}{2} < x < 3$; $4 < x < \frac{7+\sqrt{5}}{2}$; $8 < x < +\infty$. 112) $-\infty < x \leqslant 1/2$. 113) $-\infty < x < 2$. 114) $-\infty < x \leqslant -1/2$; $-5/2 \leqslant x \leqslant -2$. 115) $-\infty < x \leqslant -2 - \sqrt{2}$; $1 + \sqrt{3} \leqslant x < +\infty$. 116) $0 \leqslant x \leqslant 2$. 117) $-\infty < x < 1$; $1 < x < 4$. 118) $-2 - \sqrt{7} \leqslant x < -2$; $4 < x \leqslant 5$. 119) $8 < x \leqslant 5 + \sqrt{18}$; $-1 \leqslant x \leqslant 2$. 120) $-\infty < x \leqslant -3, 3 \leqslant x < +\infty$. 121) $-\infty < x \leqslant 4$; $-1 < x < 2$; $5 \leqslant x < +\infty$. 122) $2/3 \leqslant x \leqslant 1$; $2 < x < +\infty$. 123) $-\infty < x \leqslant -2/3$; $1/2 \leqslant x \leqslant 2$. 124) $-\sqrt{3} < x < -1$; $1 < x < \sqrt{3}$. 125) $-3 < x < -\sqrt{5}$; $\sqrt{5} < x < 3$. 126) $1 < x < 100$. 127) $3 < x < 27$. 128) $-\infty < x \leqslant -2$; $2 < x < +\infty$. 129) $-1 \leqslant x < 1 - \sqrt{31}/8$. 130) $-1 < x < 0$; $2 < x < 3$. 131) $-3 \leqslant x < 1$. 132) $-1 < x \leqslant 2$. 133) $0 < x < 81$. 134) $-4 \leqslant x < -2$, $0 < x < +\infty$. 135) $\frac{\sqrt{5}-3}{2} \leqslant x < 1$. 136) $-\infty < x \leqslant -\sqrt{2}$. 137) $3/2 < x < +\infty$. 138) $-19 < x \leqslant 6$. 139) $-9 \leqslant x < 16$. 140) $\frac{\sqrt{13}-5}{2} < x \leqslant 1$. 141) $-\infty < x \leqslant -2$, $0 < x < +\infty$. 142) $5 \leqslant x \leqslant 10$. 143) $-\infty < x < 0$. 144) $0 \leqslant x \leqslant 5$, $-5 \leqslant x \leqslant -1$. 145) $-\infty < x \leqslant -2$; $-1 \leqslant x < \frac{\sqrt{13}-1}{6}$. 146) $-\infty < x < -8$; $8 < x < +8$. 147) $1 \leqslant x \leqslant 2$. 148) Нет решений. 149) $-\sqrt{2} < x < 3$. 150) $-\infty < x < -2$; $0 < x < +\infty$. 151) $1 \leqslant x < +\infty$; $-\infty < x \leqslant -3$. 152) $1 < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$. 153) $-\infty < x < -4+2\sqrt{5}$. 154) $0 < x < 45/8$. 155) $1 \leqslant x \leqslant \sqrt[4]{2}$. 156) $-\infty < x < 0$; $1 \leqslant x \leqslant 2$. 157) $5 < x < +\infty$. 158) $-2 < x < 13$. 159) $\log_{13} 5 \leqslant x \leqslant 1$. 160) $\log_{15} 9 \leqslant x \leqslant 1$. 161) $-5 \leqslant x < -1$; $1 < x < +\infty$. 162) $-1 < x < 15$. 163) $-\sqrt{13} < x \leqslant 1$, $2 \leqslant x < \sqrt{13}$. 164) $-3/2 \leqslant x \leqslant -1$; $1 < x \leqslant 2$. 165) $-6 \leqslant x < 0$; $3 < x \leqslant 4$. 166) $-\frac{1}{2\sqrt{2}} \leqslant x < 0$; $0 < x < 1/3$. 167) $2^{-1/\sqrt{8}} \leqslant x < 1$; $1 < x < 2^{1/3}$. 168) $2^{-15} < x \leqslant 2^{-9}$; $2^9 \leqslant x < +\infty$. 169) $-1 \leqslant x < 3$. 170) $-1 < x \leqslant 1/2$; $1 \leqslant x < 5/2$. 171) $0 < x < 1$. 172) $-2 \leqslant x \leqslant -1$; $x = 1$. 173) $0 \leqslant x < 2$. 174) $-\infty < x < 0$; $\log_2 3 < x < \log_2 5$. 175) $\log_3 \frac{83}{19} \leqslant x < +\infty$. 176) $1 - \log_{3/2} 5 < x < \log_{3/2} 3$, $0 < x < +\infty$. 177) $-\log_2 7 + 1 < x < -\log_2 5 + 1$, $1 < x < +\infty$. 178) $\log_2 \frac{14}{3} < x < +\infty$. 179) $-1/2 \leqslant x < 1$; $1 < x < 2$. 180) $1 - \sqrt{17} < x \leqslant -2/3$; $1/2 \leqslant x < \sqrt{5} - 1$. 181) $x = 1$. 182) $x = 8$. 183) $x = 4$. 184) $x = 2$. 185) $x_1 = 5$; $x_2 = 5$. 186) $-\infty < x < 2$; $5 < x < +\infty$. 187) $x = 0$; $2 \leqslant x < +\infty$. 188) $x = 0$; $x = 1$; $3 \leqslant x < +\infty$. 189) $2 < x < 3$. 190) $-\infty < x \leqslant 3$; $4 \leqslant x < +\infty$. 191) $1 \leqslant x \leqslant 5$.

192) $0 < x < 2$. 193) $0 < x < 1$. 194) $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant x < 0$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant x < +\infty$.
195) $-\infty < x < -1; 1/2 < x < 1; 1 < x < +\infty$. 196) $0 < x < 1/4; 2^{-\sqrt{2}} < x < 1/2; 1 < x < 2^{\sqrt{2}}$. 197) $0 < x < 1/4\sqrt[3]{2}$, $8 < x < +\infty$. 198) $2 \leqslant x < +\infty$. 199) $2 \leqslant x < 4$. 200) $1 < x < +\infty$. 201) $1/3 < x < 1/2$.

202) $2 - 4/\sqrt{3} < x < 1$; $3 < x < 2 + 4/\sqrt{3}$. Записать неравенство в виде $3(x(x-4))^2 < 32 - 5(x^2 - 4x + 4)$ и сделать замену $x^2 - 4x = y$.

203) $-\infty < x \leqslant -4 - \sqrt{\sqrt{10} - 3}$; $-4 + \sqrt{\sqrt{10} + 3} \leqslant x < +\infty$. Сделать замену $x + 4 = u$ и свести к квадратному неравенству от u^2.

204) $x \in R$. Представить левую часть неравенства в виде $(x^2 - 2)^2 + (x+3)^2$.

205) $\frac{-1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Сделать замену $x^2 + x = u$.

206) $-\infty < x < -1 - \sqrt{3}$; $\frac{3-\sqrt{17}}{2} < x < -1 + \sqrt{3}$; $\frac{3+\sqrt{17}}{2} < x < +\infty$. Разложить левую часть неравенства на множители $x^2 + 2x - 2$ и $x^2 - 3x - 2$.

207) $\frac{-1-\sqrt{29}}{2} < x < \frac{5-\sqrt{17}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{29}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{17}}{2}$. Разложить левую часть неравенства на множители $x^2 - 5x + 2$ и $x^2 + x - 7$.

208) $2 < x < +\infty, -\infty < x < -3$. Сделать замену $x^2 + x = u$.

209) $x \in R$. Разделить неравенство на x^2 и сделать замену $\frac{x^2 + x + 5}{x} = y$.

210) $-1 < x < 2$. Записать неравенство в виде $x^2 - 4x \cdot \frac{x}{x+2} + 4\left(\frac{x}{x+2}\right)^2 + \frac{4x^2}{x+2} < 5$ и сделать замену $\frac{x^2}{x+2} = u$.

211) $-4/5 < x < -3/4$; $-2/3 < x < -1/2$; $0 < x < +\infty$. Перенести выражение $\frac{3}{3+4x}$ направо и в получившемся неравенстве привести к общим знаменателям левую и правую его части.

212) $-7 < x < -6$; $-5 < x < -4$; $-7/2 < x < -3$; $-2 < x < -1$. Сгруппировать первый с восьмым, второй с седьмым и т.д. члены левой части неравенства.

213) $0 < x \leqslant 1$. 214) $x \in R$. Так как $2x^2 + 3 \geqslant 3$ и $x^4 + x^2 + 1 \geqslant 1$, то левая часть неравенства для любых x не больше $\frac{1}{8} + \frac{1}{2} < 1$.

215) $x = 0$. Воспользоваться неравенствами $4^x + 4^{-x} \geqslant 2$ и $2\cos^4 \frac{x^2 + x}{6} \leqslant 2$.

216) $2 \leqslant x < +\infty$. Рассмотреть случаи $x < 2$ и $x \geqslant 2$.

217) $1 < x < +\infty$. Левая часть неравенства есть возрастающая функция, равная 1 при $x = 1$.

218) $x = 3$. 219) $x = 4$. 220) $x = 2$.

В задачах 221 – 223 рассмотреть неравенство отдельно на трех промежутках, составляющих его ОДЗ.

221) $1 < x < 3/2$. 222) $0 < x < 1/2$. 223) $1/2 < x < 1$.

224) $x = 3$. Воспользоваться неравенствами $2^{-|x-3|} \leqslant 1$, $6x - x^2 - 6 = 3 - (x-3)^2 \leqslant 3$.

225) $x = -1$. Для решений неравенства должно выполняться условие $\log_2(-2x^2 - 4x) > 0$, откуда $|x+1| < \sqrt{2}/2$, а тогда $\sqrt{2}|x+1| - 1 \leqslant 1$, $\log_2(-2x^2 - 4x) = \log_2[-2(x+1)^2 + 2] \leqslant 1$, поэтому $|x+1| = 0$.

226) $-1 \leqslant x \leqslant 0$. 227) $-1 < x \leqslant 1$. 228) $-2 \leqslant x \leqslant -1$; $1 \leqslant x \leqslant 2$. 229) $0 \leqslant x \leqslant 1/2$. 230) $3 \leqslant x < \log_3 75$. 231) $1 - \sqrt{1 - \cos 5} < x \leqslant - \leqslant 1/3$. 232) $1/4 \leqslant x < 3 + \sqrt{9 + \operatorname{tg}(5/2)}$. 233) $1 - \sqrt{1 - \sin(7/2)} \leqslant x < 2$. 234) $-\infty < x < -1$; $1 < x < +\infty$. 235) $1 < x < +\infty$. 236) $1 - 2\sqrt{3} < x < 1 - \sqrt{11}$; $1 + \sqrt{11} < x < 1 + 2\sqrt{3}$; $-\infty < x \leqslant 1 - \sqrt{15}$; $1 + \sqrt{15} \leqslant x < +\infty$. 237) $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} < x \leqslant \dfrac{-1-\sqrt{11}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{11}-1}{2} \leqslant x < \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$. 238) $1 - \sqrt{6} < x \leqslant 2 - \sqrt{10}$; $1 + \sqrt{6} < x \leqslant 2 + \sqrt{10}$. 239) $1 < x < +\infty$. 240) $1 < x < +\infty$. 241) $-2 \leqslant x < 6$; $20/3 \leqslant x < 7$. 242) $-4 < x < -3$, $-1 < x < +\infty$. 243) $-1/15 < x < 0$. 244) $0 < x < 1/3$; $1/2 < x < 5/6$. 245) $0 < x < 1/4$; $1/4 < x < 1$; $1 < x < +\infty$. 246) $0 < x < 2$; $2 < x < 4$. 247) $0 < x < 2$; $4 < x < +\infty$. 248) $2^{-\sqrt{2}} < x < 1/2$; $1 < x < 2^{\sqrt{2}}$. 249) Нет решений. 250) $0 < x < 2/7$. 251) $9/2 < x < +\infty$. 252) $1/3 < x < 1$; $1 < x < 2$. 253) $-\dfrac{\sqrt{41}+3}{4} < x < -1/2$; $\dfrac{\sqrt{41}+3}{4} < x < +\infty$. 254) $-1 \leqslant x < 1/2$; $1 \leqslant x < 2$; $2 < x < 7/2$. 255) $0 < x < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. 256) $-3/2 < x < 3/2$; $3/2 < x < 8/3$; $-5/2 < x < -2$. 257) $3 < x < +\infty$; $1 < x < 3/2$; $2 < x < 5/2$. 258) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} < x \leqslant \sqrt{3}$. 259) $-1/2 < x < 1/2$; $\sqrt{2} < x < 3/2$. 260) $3/8 < x < 1/2$; $1 < x < 3/2$. 261) $1 < x < 2$. 262) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1/2$; $1 < x < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. 263) $3/4 < x < 1$, $-1 < x < +\infty$. 264) $0 < x < 1$. 265) $\dfrac{\sqrt{21}-3}{2} < x < 1$; $1 < x < +\infty$. 266) $0 < x < 1/3$; $2 \leqslant x < 1 + \sqrt{7}$; $-1/3 < x < 0$, $1 - \sqrt{7} < x \leqslant 1$. 267) $4 < x \leqslant 9/2$. 268) $1 \leqslant x < +\infty$; $3 \leqslant x < 5$, $7 < x < +\infty$. 269) $\sqrt{3}/4 < x < 1/2$; $\sqrt{3}/2 < x < 1$. 270) $-1/\sqrt{2} < x < 0$; $0 < x < 1/\sqrt{2}$. 271) $\sqrt{6} - 1 < x < 2$; $2 < x < 5$. 272) $2 < x < 5$. 273) $1 < x < \dfrac{\sqrt{113}-7}{2}$. 274) $-3 < x < 1$; $3 < x < 4$. 275) $-\infty < x < -7$; $-5 < x \leqslant -2$; $4 \leqslant x < +\infty$. 276) $0 < x < \dfrac{4-\sqrt{13}}{2}$; $\dfrac{4+\sqrt{13}}{3} < x < 4$. 277) $0 < x \leqslant \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \leqslant x < +\infty$. 278) $-2\sqrt{2} \leqslant x < -1$; $\dfrac{2}{5}\ \sqrt{11} - 1 \leqslant x < 1$. 279) $\log_2 \sqrt{7} < x \leqslant \log_2 3$.

280) $-1 < x < 0$; $3 < x < +\infty$. 281) $1/2 < x < 1/\sqrt{2}$; $1 < x < +\infty$. 282) $-4 < x < -3$; $1 \leqslant x < +\infty$. 283) $0 < x < 1$; $\sqrt{6} - 1 < x < 5/2$. 284) $0 < x < 1/\sqrt{5}$; $1 < x < 3$. 285) $0 < x \leqslant 1/\sqrt[3]{2}$; $2 \leqslant x < +\infty$. 286) $0 < x < 1$; $4 \leqslant x \leqslant 2^{1+\sqrt{3}}$. 287) $1 < x < 2$. 288) $0 < x < 1/2$; $1 < x < 3$. 289) $-\infty < x < -1$. 290) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} < x < 2$. 291) $-\infty < x < -2$; $0 < x < 1$; $2 < x < +\infty$. 292) $-2 < x < -1$; $0 < x < 2$. 293) $1 < x < 2$; $3 < x < +\infty$. 294) $0 < x < 1/8$; $1 < x < 2$. 295) $0 < x < 1$; $2 < x < 4$; $5 < x < +\infty$. 296) $0 < x < 3$; $4 < x < 6$; $6 < x < 12$; $14 < x < +\infty$. 297) $0 < x < \dfrac{1}{10^{\sqrt{\lg 5}}}$, $\dfrac{1}{10^{\sqrt{\lg 5}}} < x < +\infty$. 298) $1/4 < x < 1, 1 < x < 4$. 299) $1000 < x < +\infty$. 300) $0 < x < 1/10$; $100 < x < +\infty$. 301) $0 < x < +\infty$. 302) $0 < x < 1, 1 < x < \sqrt[10]{10}$. 303) $0 < x < 1/4$; $4 < x < +\infty$. 304) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} < x < 1$; $9 < x < +\infty$. 305) $0 < x < 1/5$: $1 < x \leqslant \sqrt[4]{5}$. 306) $0 < x < 3$. 307) $-3 < x < 0$. 308) $4 < x < +\infty$.

309) Если $a > 0$, то $1/a < x < +\infty$; если $a < 0$, то $-\infty < x < 1/a$; если $a = 0$, то решений нет. 310) Если $a > -3$, то $-\infty < x < \dfrac{8}{3+a}$; если $a < -3$, то $\dfrac{8}{3a} < x < +\infty$; если $a = -3$, то $x \in R$. 311) Если $a > -1$, то $-\infty < x < a - 1$; если $a < -1$, то $a - 1 < x < +\infty$; если $a = -1$, то решений нет. 312) Если $a > 0$, то $-\sqrt{\dfrac{2}{a}} < x < \sqrt{\dfrac{2}{a}}$; если $a \leqslant 0$, то $x \in R$. 313) Если $a \geqslant 0$, то $x \in R$; если $a < 0$, то $-\sqrt{\dfrac{-1}{a}} \leqslant x \leqslant \sqrt{\dfrac{-1}{a}}$. 314) Если $a > -1$, то $-\infty < x \leqslant -\sqrt{\dfrac{2}{a+1}}$ и $\sqrt{\dfrac{2}{a+1}} \leqslant x < +\infty$; если $a \leqslant -1$, то решений нет. 315) Если $-\infty < a < 0$ или $2/3 < a < +\infty$, то $-\infty < x < 2$; если $0 < a < 2/3$, то решений нет. 316) Если $-\infty < a < 0$, то $-\infty < x < -1$ и $-1-a < x < +\infty$; если $a = 0$, то $-\infty < x < -1$ и $-1 < x < +\infty$; если $a > 0$, то $-\infty < x < -1 - a$ и $-1 < x < +\infty$. 317) Если $a \leqslant 0$, то $-\infty < x < 0$; если $a > 0$, то $-1/\sqrt{a} < x < 0$ и $1/\sqrt{a} < x < +\infty$. 318) Если $a = 0$, то $x \in R$, $x \neq 0$, если $a > 0$, то $-\infty < x < -2a$ и $a < x < +\infty$; если $a < 0$, то $-\infty < x < a$ и $-2a < x < +\infty$. 319) Если $a = 0$, то $-\infty < x < 0$; если $a > 0$, то $-\infty < x < -3a$ и $-2a < x < a$; если $a < 0$, то $-\infty < x < a$ и $-2a < x < -3a$. 320) Если $a < 0$ или $a > 1$, то $-\infty < x < 0$; если $0 < a < 1$, то $0 < x < +\infty$; если $a = 0$ или $a = 1$, то решений нет. 321) Если $a < 0$, то $\dfrac{1+a}{1-a} < x < 1$; если $0 < a < 1$, то $1 < x < \dfrac{1+a}{1-a}$; если $a = 1$, то $1 < x < +\infty$; если $a > 1$, то $-\infty < x < \dfrac{1+a}{1-a}$ и $1 < x < +\infty$; если $a > 0$, то решений нет. 322) Если $a < 0$, то $-\infty < x < \dfrac{1}{a}$; если $a = 0$, то $x \in R$; если $0 < a < 1$,

то $-\infty < x \leqslant 1$ и $1/a < x < +\infty$; если $a > 1$, то $\dfrac{1}{a} < x \leqslant 1$; если $a = 1$, то решений нет. 323) Если $-1/2 < a < 0$ или $a > 1$, то $1 - a < x < \dfrac{a^2-1}{a}$; если $-\infty < a < -1/2$ или $0 < a < 1$, то $\dfrac{a^2-1}{a} < x < 1 - a$; если $a = 0$ или $a = 1$ или $a = -1/2$, то решений нет. 324) Если $a > 1/4$, то $x \in R$, если $a = 1/4$, то $-\infty < x < -2$ и $-2 < x < +\infty$; если $0 < a < 1/4$, то $\dfrac{1}{2a}\ \ -1+\sqrt{1-4a}\ \ < x < +\infty$ и $-\infty < x < \dfrac{1}{2a}\ \ -1-\sqrt{1-4a}\ $, если $a = 0$, то $-1 < x < +\infty$; если $a < 0$, то $\dfrac{1}{2a}\ \ -1+\sqrt{1-4a}\ \ < x < \dfrac{1}{2a}\ \ -1-\sqrt{1-4a}\ $. 325) Если $|a| > 2$, то $-\infty < x < \dfrac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2-4})$ и $\dfrac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2-4}) < x < +\infty$; если $|a| < 2$, то $x \in R$. 326) Если $a \leqslant 1/4$, то $-\infty < x < \dfrac{1}{2}\ \ -1-\sqrt{1-4a}\ $ и $\dfrac{1}{2}\ \ -1+\sqrt{1-4a}\ \ < x < +\infty$; если $a > 1/4$, то $x \in R$. 327) Если $a > 1$, то $-\infty < x < -1$ и $-1/a < x < +\infty$; если $a = 1$, то $x \in R$ и $x \neq -1$; если $0 < a < 1$, то $-1 < x < +\infty$ и $-\infty < x < 1/a$; если $a = 0$, то $-1 < x < +\infty$; если $a < 0$, то $-1 < x < 1/a$. 328) Если $a > 2$, то $a - \sqrt{a^2-2a} < x < a + \sqrt{a^2-2a}$; если $-\infty < a < 0$, то $a + \sqrt{a^2-2a} < x < 1$; если $0 \leqslant a \leqslant 2$, то $0 < x < 1$. 329) $-1 - a < x < 1 - a$ при любом a. 330) $-\infty < x \leqslant \dfrac{3a-2}{2}$ и $\dfrac{2+3a}{2} \leqslant x < +\infty$ при любом a. 331) Если $a < 0$, то $-\infty < x \leqslant a/2$; если $a = 0$, то $0 \leqslant x < +\infty$; если $a > 0$, то $x \in R$. 332) Если $a > 2$, то $\dfrac{-a-2}{2} < x < +\infty$; если $a \leqslant 2$, то решений нет. 333) Если $a \leqslant -1$, то $x \in R$; если $a > -1$, то $-\infty < x \leqslant \dfrac{a-1}{2}$. 334) $-\infty < x < -a$ при любом a. 335) Если $a < -3$, то решений нет; если $a \geqslant -3$, то $\dfrac{a-3}{2} \leqslant x < +\infty$. 336) Если $a < -1$, то $x \in R$; если $a = -1$, то $1 \leqslant x < +\infty$; если $-1 < a < 1$, то $-\infty < x \leqslant \dfrac{1-a}{2}$; если $a = 1$, то $-1 \leqslant x \leqslant 0$; если $a > 1$, то $-\infty < x \leqslant \dfrac{-1-a}{2}$. 337) Если $a < 0$, то $x \in R$; если $a = 0$, то $-\infty < x < -1$, $-1 < x < 1$ и $1 < x < +\infty$; если $0 < a < 1$, то $-\sqrt{1-a} < x < \sqrt{1-a}$, $-\infty < x < -\sqrt{1+a}$ и $\sqrt{1+a} < x < +\infty$; если $1 \leqslant a < +\infty$, то $-\infty < x < -\sqrt{1+a}$ и $\sqrt{1+a} < x < +\infty$. 338) Если $-1 \leqslant a \leqslant 1$, то $x \in R$, если $-\infty < a < -1$ или $1 < a < +\infty$, то $\dfrac{-1}{|a|-1} < x < \dfrac{1}{|a|-1}$. 339) Если

$a < -2$, то $x \in R$, если $a = -2$, то $x \in R$, $x \neq 2$; если $-2 < a < 2$, то $-\infty < x < \dfrac{4-a}{3}$ и $a + 4 < x < +\infty$. 340) Если $a > 4$, то $\dfrac{a+2}{3} \leqslant x \leqslant a - 2$; если $a = 4$, то $x = 2$; если $a < 4$, то $a - 2 \leqslant x \leqslant \dfrac{a+2}{3}$. 341) Если $a < -1$, то $\dfrac{1}{a+1} \leqslant x < +\infty$; если $-1 \leqslant a \leqslant 0$, то $-\infty < x < +\infty$; если $0 < a < 1$, то $-\infty < x \leqslant \dfrac{1}{a+1}$ и $\dfrac{1}{1-a} \leqslant x < +\infty$; если $a > 1$, то $-\infty < x \leqslant \dfrac{1}{1+a}$. 342) Если $a > 1$, то $\dfrac{3}{a-1} < x < +\infty$; если $0 \leqslant a \leqslant 1$, то решений нет; если $-1 < a < 0$, то $\dfrac{-3}{a+1} < x < \dfrac{3}{a-1}$; если $a \leqslant -1$, то $-\infty < x < \dfrac{3}{a-1}$. 343) Если $a \geqslant 0$, то $x \in R$; если $a < 0$, то $-\infty < x \leqslant \dfrac{3a}{2}$. 344) Если $a = 0$, то $0 \leqslant x < +\infty$; если $a > 0$, то решений нет; если $a < 0$, то $\dfrac{a}{2} \leqslant x < +\infty$. 345) Если $a = 0$, то $x = 1$; если $0 < |a| \leqslant 1$, то $-\infty < x < \dfrac{-1}{1+|a|}$, если $|a| > 1$, то $-\infty < x < \dfrac{-1}{1+|a|}$ и $\dfrac{1}{|a|-1} < x < +\infty$. 346) Если $a < 0$, то $\dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$; если $a = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; если $a > 0$, то $\dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$. 347) Если $a \leqslant 0$, то решений нет; если $0 < a < 1$, то $-\sqrt{1+a} < x < -\sqrt{1-a}$ и $\sqrt{1-a} < x < \sqrt{1+a}$; если $a = 1$, то $-\sqrt{1+a} < x < 0$ и $0 < x < \sqrt{1+a}$; если $a > 1$, то $-\sqrt{1+a} < x < \sqrt{1+a}$. 348) Если $-\infty < a < -1/4$, то $-\infty < x \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$ и $\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2} \leqslant x < +\infty$; если $a = -1/4$, то $x = 1/2$; если $1/4 < a < +\infty$, то $x \in R$. 349) Если $|a| > \sqrt{2}$, то $a + 1 - \overline{a^2 - 1} < x < a + 1 + \overline{a^2 - 1}$; если $|a| \leqslant \sqrt{2}$, то решений нет. 350) Если $a \leqslant 0$, то $-\infty < x < a/2$ и $-a/2 < x < +\infty$; если $a > 0$, то $-\infty < x < -7/12a$ и $a/2 < x < +\infty$. 351) Если $a \leqslant -1$, то решений нет; если $-1 < a \leqslant 1$, то $-\infty < x < \dfrac{a-1}{2}$; если $a > 1$, то $\dfrac{a+1}{2} < x < +\infty$. 352) Если $a < 0$, то $-\infty < x \leqslant \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$; если $a = 0$, то $-\infty < x \leqslant 0$ и $x = 1$; если $0 < a < 1/4$, то $-\infty < x < \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$ и $\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$; если $a \leqslant 1/4$, то $-\infty < x \leqslant \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. 353) Если $a < 0$, то $-\infty < x < a$; если $a \geqslant 0$, то решений нет. 354) Если $a < 0$, то $-a < x < +\infty$; если $a \geqslant 0$, то решений нет. 355) Если $a < 0$, то $-\infty < x < 2a$, если $a = 0$, то решений нет; если $a > 0$ то $0 < x < +\infty$. 356) Если $a \leqslant -1$, то $6a \leqslant x < 2a$ и $2a < x \leqslant -2a$; если $-1 < a \leqslant 1$, то $-\infty < x < \dfrac{a-1}{2}$; если $a > 1$, то $\dfrac{a+1}{2} < x < +\infty$. 357) Если $a < 0$, то $2\sqrt{3}a < x < 2a$ и $2a < x < -2\sqrt{3}a$; если $a = 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $-2\sqrt{3}a < x < 2a$ и $2a < x < 2\sqrt{3}a$. 358) Если $a < 0$, то $\dfrac{1}{2}\ \ -1+\sqrt{1-4a}\ \ < x < +\infty$ и $-\infty < x < -\dfrac{1}{2}\ \ -1+\sqrt{1-4a}\ \ $; если $a = 0$, то $x \in R$, $x \neq 0$; если $a > 0$, то $x \in R$. 359) Если $a \leqslant -1$, то $-\infty < x \leqslant a-1$; если $-1 < a < 0$, то $-\infty < x \leqslant a-1$ и $-1-a < x < 0$; если $a = 0$, то $-\infty < x < -1$ и $-1 < x < 0$; если $0 < a \leqslant 1$, то $-\infty < x < 0$; если $a > 1$, то $-\infty < x < 0$ и $0 < x < a-1$. 360) Если $a > 1$, то $x \in R$; если $1 \leqslant a < +\infty$, то $-\sqrt{\dfrac{1+3a}{2}} < x < \sqrt{\dfrac{1+3a}{2}}$. 361) Если $a < -1$, то $-2 \leqslant x < +\infty$; если $a = -1$, то $-2 < x < +\infty$; если $a > -1$, то $(a+1)^2 - 2 < x < +\infty$. 362) Если $a \geqslant 4$, то решений нет; если $a < 4$, то $3/2 \leqslant x < \dfrac{(4-a)^2+2}{2}$. 363) Если $a < 2/3$, то $-\infty < x \leqslant 1$; если $a = 2/3$, то $-\infty < x < 1$; если $a > 2/3$, то $-\infty < x < 1 - (3a-2)^2$. 364) Если $-2 \leqslant a < +\infty$, то $-2 \leqslant x < +\infty$; если $-\infty < a < -2$, то решений нет. 365) Если $a \geqslant 1$, то $-1/2 \leqslant x < +\infty$; если $-\infty < a < 1$, то $-\dfrac{1}{2} \leqslant x < -\dfrac{1}{2}\ \ 1 - \dfrac{1}{(1-a)^2}\ \ $. 366) Если $a > 1$, то $\dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2} < x < +\infty$ и $-a \leqslant x < \dfrac{3-\sqrt{5+4a}}{2}$. 367) Если $a < 3/4$, то решений нет; если $a = 3/4$, то $x = 1/4$; если $a \geqslant 1$, то $\ \ \dfrac{1-\sqrt{4a-3}}{2}\ \ ^2 \leqslant x \leqslant \ \ \dfrac{1+\sqrt{4a-3}}{2}\ \ ^2$; если $a > 1$, то $0 \leqslant x \leqslant \ \ \dfrac{1+\sqrt{4a-3}}{2}\ \ ^2$. 368) Если $a = 0$, то $x \in R$; если $0 < a < 4$, то $0 \leqslant x < +\infty$; если $a = 4$, то $0 \leqslant x < +\infty$, $x \neq 1$; если $a > 4$, то $0 \leqslant x < \dfrac{-(2-a)-\sqrt{(2-a)^2-4}}{2}$ и $\dfrac{-(2-a)+\sqrt{(a-2)^2-4}}{2} \leqslant x < +\infty$; если $-4 < a < 0$, то $-\infty < x \leqslant 0$; если $a = -4$, то $x \neq -1$, $-\infty < x \leqslant 0$; если $a < -4$, то $\dfrac{2+a}{2} + \dfrac{\sqrt{(2+a)^2-4}}{2} \leqslant x \leqslant 0$ и $-\infty < x \leqslant \dfrac{2+a}{2} - \dfrac{\sqrt{(2+a)^2-4}}{2}$.

369) Если $a = 0$, то $-1 < x < 1$; если $0 < a < +\infty$, то $-1 \leqslant x < \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$; если $-\infty < a < 0$, то $\dfrac{-1}{\sqrt{a^2+1}} < x \leqslant 1$. 370) Если $a > -7/4$, то решений нет; если $a = -7/4$, то $x = -3/2$; если $-2 < a < -7/4$, то $\dfrac{-3-\sqrt{-7-4a}}{2} \leqslant x \leqslant$

$\leqslant \dfrac{-3+\sqrt{-7-4a}}{2}$; если $a \leqslant -2$, то $-2 \leqslant x \leqslant \dfrac{-3+\sqrt{-7-4a}}{2}$. 371) Если $a < -1/2$, то $-\infty < x \leqslant a$; если $a \geqslant -1/2$, то $-\infty < x < \dfrac{-5+\sqrt{9+16a}}{8}$. 372) Если $|a| < 1$, то $-|a| < x < |a|$; если $|a| = 1$, то $-1 \leqslant x < 0$ и $0 < x \leqslant 1$, если $|a| > 1$, то $-|a| \leqslant x < \dfrac{1-\sqrt{2a^2-1}}{2}$ и $\dfrac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2} < x \leqslant |a|$. 373) Если $a = 0$, то $x = 0$; если $a > 0$, то $0 \leqslant x \leqslant a$; если $a < 0$, то решений нет. 374) Если $|a| > 1$, то решений нет; если $a = 1$, то $x = 1$ и $x = -1$; если $a = 0$, то $-1/2 \leqslant x \leqslant$ $\leqslant 1/2$; если $0 < |a| < 1$, то $\dfrac{-1-a^2}{2} < x \leqslant -|a|$ и $|a| \leqslant x < \dfrac{1+a^2}{2}$. 375) Если $a = 0$, то $-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty$; если $|a| \geqslant 1$, то решений нет; если $0 < |a| < 1$, то $\dfrac{|a|}{\sqrt{1-a^2}} < x < +\infty$ и $-\infty < x < \dfrac{-|a|}{\sqrt{1-a^2}}$. 376) Если $a = 0$, то $x = -1$; если $0 < a \leqslant 4$, то решений нет; если $a > 4$, то $\dfrac{-(2-a)-\sqrt{a^2-4a}}{2} <$ $< x < \dfrac{-(2-a)+\sqrt{a^2-4a}}{2}$; если $a < 0$, то $-\infty < x < \dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2}$. 377) Если $a \leqslant 0$, то решений нет; если $0 < a \leqslant 1$, то $-1-2\sqrt{a} < x < 1+2\sqrt{a}$; если $a > 1$, то $-a \leqslant x < 1+2\sqrt{a}$. 378) Если $a \leqslant 0$, то решений нет; если $0 < a < 1/2$, то $\dfrac{a^2}{2a-1} < x \leqslant 0$; если $1/2 \leqslant a \leqslant 1$, то $-\infty < x \leqslant 0$; если $a > 1$, то $-\infty < x \leqslant 0$ и $1 \leqslant x < \dfrac{a^2}{2a-1}$. 379) Если $0 \leqslant a \leqslant \sqrt{3}/2$, то решений нет, если $\sqrt{2}/2 < a \leqslant 1$, то $\dfrac{-1-\sqrt{2a^2-1}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}$; если $a > 1$, то $-a \leqslant x < \dfrac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}$. 380) Если $a \leqslant 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $\dfrac{1}{a^2} - 1 < x < +\infty$. 381) Если $a \leqslant -2$, то решений нет; если $-2 < a \leqslant 2$, то $-2 \leqslant x < \dfrac{a-\sqrt{8-a^2}}{2}$ и $-2 \leqslant x < \dfrac{a-\sqrt{8-a^2}}{2}$; если $2 < a \leqslant 2\sqrt{2}$, то $\dfrac{a+\sqrt{8+a^2}}{2} < x \leqslant 2$; если $a > 2\sqrt{2}$, то $-2 \leqslant x \leqslant 2$. 382) Если $a < -1$, то решений нет; если $-1 < a \leqslant 1$, то $\dfrac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2} < x \leqslant 1$; если $1 < a \leqslant \sqrt{2}$, то $-1 \leqslant x < \dfrac{-a-\sqrt{2-a^2}}{2}$ и $\dfrac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2} < x \leqslant 1$; если $a > \sqrt{2}$, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$. 383) Если $a < 0$, то $x \in R$; если $a \geqslant 0$, то $x < 0$. 384) Если $0 < a < 2$, то $-a \leqslant x \leqslant a$; если $2 \leqslant a \leqslant 4$, то $-\dfrac{a}{2}\ \overline{4a-a^2} < x < \dfrac{a}{2}\ \overline{4a-a^2}$; если $a \leqslant 0$ или $a > 4$, то решений нет. 385) Если $a < 0$ или $a > 1$, то решений нет; если

$a = 0$, то $x = 0$; если $0 \leqslant a \leqslant 1/\sqrt{2}$, то $0 < x \leqslant a^2$; если $\frac{1}{2} < a < 1$, то $2a - 1 \leqslant$ $\leqslant x \leqslant a^2$; если $a = 1$, то $x = 1$. 386) Если $a > 0$, то $a \quad 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \leqslant x \leqslant 2a$. 387) Если $1 < a < 1 + \sqrt{3}$, то $\frac{a(a^2 - 2a + 2)}{a^2 - 2a - 2} < x \leqslant -\frac{a}{3}$; если $a = 1 + \sqrt{3}$, то $-\infty < x \leqslant \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$; если $a > 1 + \sqrt{3}$, то $-\infty < x \leqslant -\frac{a}{3}$ и $\frac{a(a^2 - 2a + 2)}{a^2 - 2a - 2} < x <$ $< +\infty$; если $a \leqslant 1$, то решений нет. 388) Если $a \leqslant 1$, то $x \in R$; если $a > 1$, то $\log_2(a - 1) < < x < +\infty$. 389) Если $a \geqslant 1/2$, то решений нет; если $a < 1/2$, то $-\infty < x < \log_3(1 - 2a)$. 390) Если $a \leqslant 0$, то $x \in R$; если $a > 0$, то $-\infty < x <$ $< \log_{1/2} a$. 391) Если $a = 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $-\infty < x < \log_3 a$; если $a < 0$, то $-\infty < x < \log_3(-a)$. 392) $0 < x < 2^{a+2}$, при любом a. 393) Если $a = -1$, то $0 < x < 2$ и $2 < x < +\infty$; если $a < -1$, то $0 < x < 2$ и $2^{-a} < x < +\infty$; если $a > -1$, то $-\infty < x < 2^{-a}$ и $2 < x < +\infty$. 394) Если $a =$ $= 2$, то решений нет; если $a < 2$, то $1/9 < x < 3^{-a}$; если $a > 2$, то $3^{-a} < x < 1/9$. 395) Если $a = 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $-\infty < x < \log_3 2a$; если $a < 0$, то $-\infty < x < \log_3(-2a)$. 396) Если $a > 0$, то $-\infty < x < \log_2(-a) - 2$; если $a < 0$, то $-\infty < x < \log_2(-a) - 1$; если $a = 0$, то решений нет. 397) Если $a \leqslant 0$, то $x \in R$; если $a > 0$, то $-\infty < x < \log_4 \frac{1}{16a}$ и $\log_4 \frac{1}{a} < x < +\infty$. 398) Если $a \leqslant 0$, то $x \in R$; если $a > 0$, то $-\infty < x < -2 - \log_2 a$ и $3 - \log_2 a < x < < +\infty$. 399) Если $a \neq 0$, то $-\infty < x < -|a|$ и $|a| < x < +\infty$; если $a = 0$, то $x \in R$ и $x \neq 0$, $x \neq 1$. 400) Если $a > 1$, то $1 < x < \log_a(1 + \sqrt{2})$; если $0 < a < 1$, то $\log_a(1 + \sqrt{2}) < x < 1$. 401) Если $0 < a < 1$, то $\frac{3 - a}{2 - a} < x \leqslant 2$; если $1 < a < 2$, то $2 \leqslant x < \frac{3 - a}{2 - a}$; если $a = 2$, то $2 \leqslant x < +\infty$; если $a > 2$, то $-\infty < x < \frac{3 - a}{2 - a}$ и $2 \leqslant x < +\infty$. 402) Если $a > 1$, то $-\infty < x < a^{\frac{2 - \sqrt{13}}{2}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{a}} < x < a$, $a^{\frac{2 + \sqrt{13}}{2}} < x < +\infty$; если $0 < a < 1$, то $-\infty < x < a^{\frac{2 - \sqrt{13}}{2}}$, $a < x < \frac{1}{\sqrt[3]{a}} <$ $< x < a$ и $-\infty < x < a^{\frac{2 + \sqrt{13}}{2}}$. 403) Если $a > 1$, то $-\infty < x < a^{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$, $\sqrt{a} < x < a$ и $a^{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}} < x < +\infty$; если $0 < a < 1$, то $a^{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} < x < +\infty$, $a < x < \sqrt{a}$ и $-\infty < x < a^{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$. 404) $0 < x < 1$ 405) Если $a > 1$, то $1 < x < a$; если $0 < a < 1$, то $a < x < 1$. 406) Если $a = 0$, то $-1/4 \leqslant x < +\infty$; если $0 < a < 2$, то $-\infty < x \leqslant \frac{-2 - \sqrt{4 - 2a}}{2a}$, $\frac{-2 + \sqrt{4 - 2a}}{2a} \leqslant x < +\infty$; если $a \geqslant 2$, то $-\infty < x < +\infty$. Разложить левую часть неравенства на множители: $(2ax^2 + 4x + 1)(2a^2x^2 + 4ax + a + 8)$. 407) Если $a = 0$, то $-\infty < x \leqslant -1/4$;

если $0 < a < 1$, то $-\infty < x \leqslant \dfrac{-1-\sqrt{1-a}}{2a}$ и $\dfrac{\sqrt{1-a}-1}{2a} \leqslant x < +\infty$; если $a \geqslant 1$, то $x \in R$. Разложить левую часть неравенства на множители: $(4ax^2+4x+1)\times\times(4a^2x^2-4ax+a+4)$. 408) Если $a = 0$, то $-\infty < x \leqslant 1/2$; если $0 < a < 1$, то $-\infty < x \leqslant \dfrac{1-\sqrt{1-a}}{a}$ и $\dfrac{1+\sqrt{1-a}}{a} \leqslant x < +\infty$; если $a \geqslant 1$, то $x \in R$. Разложить левую часть неравенства на множители: $(ax^2-2x+1)(a^2x^2+2ax++a+4)$. 409) $\dfrac{1}{a} < x < \dfrac{1}{\sqrt{a}}$; $\dfrac{1}{a^2} < x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{a^4}}$, $1 < x < +\infty$. 410) Если $0 < a < 1/4$, то $0 < x < \dfrac{1}{2} - a - \sqrt{\dfrac{1}{4} - a}$, $\dfrac{1}{2} - a + \sqrt{\dfrac{1}{4} - a} < x < 1 - a$ и $1 < x < +\infty$. 411) Если $a > 1$, то $0 < x < a^{-\sqrt{2}}$ и $a^{\sqrt{2}} < x < +\infty$; если $0 < a < 1$, то $a^{\sqrt{2}} < x < a^{-\sqrt{2}}$. 412) Если $a < 0$, то $1/a \leqslant x < 0$; если $a > 0$, то $1/a \leqslant x < +\infty$; если $a = 0$, то решений нет. 413) Если $a > 1$, то $\log_a 1/2 < x < \log_a(3/2+\sqrt{3})$; если $0 < a < 1$, то $-\infty < x < \log_a 1/2$, $\log_a(3/2+\sqrt{3}) < x < +\infty$. 414) Если $a > 1$, то $a^2 < x < a^{\frac{3+\sqrt{11}}{2}}$ и $1/\sqrt{a} < < x < a^{\frac{3-\sqrt{11}}{2}}$; если $0 < a < 1$, то $a^{\frac{3+\sqrt{11}}{2}} < x < a^2$ и $a^{\frac{3-\sqrt{11}}{2}} < x < 1/\sqrt{a}$. 415) $1 < x < 1/a$, $a^2 < x < a$. 416) $1/a < x < +\infty$, $a^3 < x < a^2$; $a^5 < x < < +\infty$. 417) Если $0 < a < 1$, то $-2\sqrt{6} < x \leqslant \dfrac{2-\sqrt{46}}{2}$ и $\dfrac{\sqrt{46}-2}{2} \leqslant x < 2\sqrt{6}$; если $a > 1$, то $\dfrac{2-\sqrt{46}}{2} \leqslant x < \dfrac{\sqrt{46}-2}{2}$. 418) $0 < x < a^2$, $1 < x < 1/a^3$. 419) $2 < x < 3$. 420) Если $a > 1$, то $\dfrac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2} < x < +\infty$; если $0 < a < 1$, то $1 < x < \dfrac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$. 421) Если $a > 1$, то $1/a < x < a^4$; если $0 < a < 1$, то $a^4 < x < 1/a$. 422) Если $a > 1$, то $\log_a(4+\sqrt{16+a^2}) \leqslant x < +\infty$; если $0 < a < 1$, то $\log_a(4+\sqrt{16+a^2}) \leqslant x \leqslant \log_a 2$.

423) $-13/14 < a < 3$. Р е ш е н и е. Пусть a — некоторое фиксированное число. Данное неравенство можно переписать в виде $|x-a| < 3+x^2$. Отсюда следует, что оно равносильно двойному неравенству $-(3-x^2) < x-a < 3-x^2$, или равносильно системе неравенств

$$\begin{aligned} &x - a < 3 - x^2,\\ &-(3-x^2) < x - a. \end{aligned}$$

Следовательно, задача может быть переформулирована так: определить те a, при каждом из которых множество решений системы неравенств

$$\begin{aligned} &x^2 + x - 3 - a < 0,\\ &x^2 - x - 3 + a < 0,\\ &x < 0 \end{aligned} \tag{1}$$

содержит хотя бы одно число. Дискриминанты квадратных трехчленов $x^2+x-3-a$ и $x^2-x-3+a$ равны соответственно $13+4a$ и $13-4a$. Поэтому для того, чтобы первое и второе неравенства системы (1) имели решения, надо, чтобы были выполнены неравенства $13+4a>0$ и $13-4a>0$, т.е. $-13/4<a<13/4$. В дальнейшем будем считать, что a удовлетворяет этим неравенствам.

Обозначим через x_1, x_2 и x_3, x_4 корни квадратных трехчленов $x^2+x-3-a$ и $x^2-x-3+a$, соответственно. При этом будем считать, что $x_1<x_2$, $x_3<x_4$. Так как множества решений первого и второго неравенств системы (1) имеют вид $x_1<x<x_2$ и $x_3<x<x_4$, то система (1) будет иметь решение тогда и только тогда, когда $x_1<0$ и $x_3<0$ или когда $\frac{-1-\sqrt{13+4a}}{2}<0$ и $\frac{1-\sqrt{13-4a}}{2}<0$. Первое неравенство выполнено для всех a из множества $-13/4<a<13/4$. Второе неравенство равносильно на этом множестве неравенству $1<\sqrt{13-4a}$ или неравенству $1<13-4a$; множество решений последнего неравенства есть промежуток $-\infty<a<3$. Итак, система (1) имеет хотя бы одно решение, если параметр a принадлежит множеству $-13/4<a<3$ и только в этом случае. 424) $-4<a<17/4$. 425) $-\frac{9}{4}<a<2$. 426) $-1<a<5/4$. 427) Если $a>1/2$, то $a-1<x<3a-2$; если $a\geqslant 1/2$, то решений нет. 428) Если $a=0$, то $0<x<1$ и $-1<x<0$; если $0<|a|<1/\sqrt{2}$, то $-\sqrt{1-a^2}<x<-|a|$ и $|a|<x<\sqrt{1-a^2}$; если $|a|\geqslant 1/\sqrt{2}$, то решений нет. 429) Если $a<-1/4$ или $a>2$, то решений нет; если $-1/4\leqslant a\leqslant 2$, то $\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{2-a}$. 430) Если $\frac{-5+\sqrt{13}}{2}<a<1$, то $-2-\sqrt{1-a}<x<-2+\sqrt{1-a}$; если $-\infty<a\leqslant\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$, то $\frac{-a-6}{2}<x<-2+\sqrt{1-a}$; если $a\geqslant 1$, то решений нет. 431) Если $a=0$, то $x=0$; если $a\neq 0$, то решений нет. 432) Если $a=0$, то $8\leqslant x<+\infty$; если $a\neq 0$, то решений нет. 433) Если $0<a<1$, то $\frac{4}{40-5a}<x<+\infty$; если $a>8$, то $-\infty<x<\frac{4}{40-5a}$; если $-\infty<a\leqslant 0$ или $1\leqslant a\leqslant 8$, то решений нет. 434) Если $-\infty<a<-4$, то $\frac{a+4}{2}<x<0$; если $2<a<6$, то $\frac{6-a}{8}<x<\frac{a+4}{2}$; если $6\leqslant a<+\infty$, то $0<x<\frac{a+4}{2}$; если $-4\leqslant a\leqslant 2$, то решений нет. 435) Если $a<1$, то $9/8<x\leqslant\frac{2a-3}{a-1}$; если $1\leqslant a\leqslant 15/7$, то $9/8<x<+\infty$; если $a>15/7$, то $\frac{2a-3}{a-1}\leqslant x<+\infty$. 436) Если $-\infty<a<-10$ или $2<a<+\infty$, то $-\infty<x<\frac{5(a-2)}{2(a+10)}$; если $a=-10$, то $x\in R$; если $a=2$, то решений нет; если $-10<a<2$, то $\frac{5(a-2)}{2(a+10)}<x<+\infty$. 437) Если $a>1$, то $0<x<1/a^4$;

если $0 < a < 1$, то $0 < x < a^8$. 438) $-2 < a < 0$. 439) $-1/2 < a < 1$. 440) $-1 < a < \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$, $1 < a < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. 440) $a = 0$; $a = -1$. 442) $a = 0$; $a = 1$. 443) $a = 1$; $a = 7/4$. 444) $a = 1/4$; $a = 1$. 445) $-2 < a \leqslant 0$. 446) $-\infty < a < -1-\sqrt{5}$. 447) $a = 0$, $-\infty < a \leqslant -1/2$. 448) $1 \leqslant a \leqslant 3$.

ГЛАВА III

§ 1

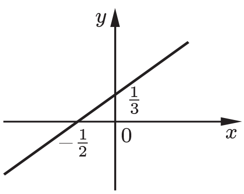
1) $(1; -3)$. 2) $(1{,}2; 1{,}4)$. 3) $t; \dfrac{2t-3}{4}$, где $y \in R$. 4) Нет решений. 5) $(1; 2; 3)$. 6) $(-1; -1; 2)$. 7) $\dfrac{2-t}{2}; \dfrac{5t}{2}; t$, где $t \in R$. 8) $(2; 4; 7)$. 9) $(-1; 1)$, $\dfrac{23}{15}; -\dfrac{4}{15}$. 10) $(6; -1); (-1; 6)$. 11) $(5; 2), (-2; -5)$. 12) $(1; 1)$; $(-1; -1)$. Вычесть из первого уравнения второе. 13) $(2; 1)$. Заменить одно из уравнений суммой уравнений. 14) $(2; 3)$; $(-2; -3)$. 15) $x = 2$. 16) $(1; 0)$, $(-3; -4/3)$. 17) $(1; 2)$. Сделать замену переменных $\dfrac{1}{3x-y} = u$, $\dfrac{1}{x-3y} = v$. 18) $(-2; -2)$, $(1; 1)$. Заменить одно из уравнений разностью уравнений. 19) $(3; 2)$, $(-3; -2)$. 20) $(-3; \quad 2)$. 21) $(1; 2)$. 22) $(1; 2)$. 23) $(-1; -1)$, $(1; 1)$. 24) $(2; 3)$. Умножить первое уравнение на x, так как $x \neq 0$ и вычесть затем его из второго. 25) $(1; 3)$; $-4; \dfrac{21}{2}$. 26) $(2; -2)$, $(-2; 2)$, $(1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{3})$, $(1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3})$. 27) $(0; 0)$, $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$. 28) $(5; 2)$, $(-5; 2)$. 29) $(\sqrt{5}; -\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$, $(1; 3)$, $(3; 1)$, $(-1; -3)$; $(-3; -1)$. 30) $(4; 1)$, $(1; 4)$. 31) $(2; 2)$, $(-2; -2)$; $(0; 2\sqrt{2})$, $(0; -2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2}; 0)$, $(2\sqrt{2}; 0)$. 32) $(0; 0)$. Воспользоваться равенством $(x + 2y)(x + y + 2) = x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y$. 33) $(73/12; -71/12)$. 34) $(1 - \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2}; -1+\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{3}; \sqrt{3}-1)$, $(1-\sqrt{3}; -\sqrt{3}-1)$. 35) $(1+\sqrt{3}; 1-\sqrt{3})$, $(1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3})$. Сделать замену переменных $x + y = u$, $xy = v$. 36) $(10; 7)$, $(-7; -10)$. Сделать замену переменных $x - y = u$, $xy = v$. 37) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$. 38) $(1; 2)$, $(2; 1)$; $(1; -2)$, $(-2; 1)$, $(-3; 0)$, $(0; 3)$. Воспользоваться тождеством $(x^2+1)(y^2+1) = (x+y)^2 + (xy-1)^2$ и сделать замену переменных $x + y = u$, $xy - 1 = v$. 39) $(-2; 3)$, $(3; -2)$. 40) $(3; 5)$, $(5; 3)$. 41) $(2; 1)$, $(1; 2)$. 42) $(-2; 3)$, $(-3; 2)$. 43) $(2; 2-\sqrt{3})$. 44) $(-1+\sqrt{2}; -2)$. 45) $(-1; 3)$, $(t; 2)$, где $t \in R$. 47) $(-1; 2)$, $(7/9; 10/9)$. 48) $(1; 1/2)$, $(-3; 5/2)$. 49) $(-12; -9)$, $(9; 12)$. 50) $(6; 3)$, $(-6; -3)$, $(3; -6)$, $(-3; 6)$. Обозначив $x/y = z$, $y/x = 1/z$, решить первое уравнение относительно z. 51) $(1/3; 1/2)$, $(1/2; 1/3)$. 52) $(\sqrt{31}; \sqrt{31})$, $(-\sqrt{31}; -\sqrt{31})$,

$(4;1)$, $(-4;-1)$. 53) $(6;3)$, $(-6;-3)$. 54) $(0;2)$, $(0;-2)$, $(1;-3)$, $(-1;3)$. 55) $(2;3)$.

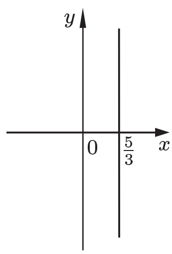
56) $(1;t)$, где $t \in R$, $(-1/9;-2/9)$. Данная система равносильна системе

$$(1-x)(x+y+3)(2x-y)=0,$$
$$(x-1)(3x+3y+1)=0.$$

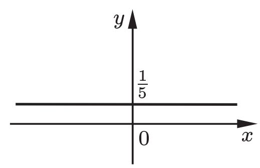
57) $(1;3;5)$, $(-1;-3;-5)$. 58) $(0;-1;3)$, $(0;3;-1)$, $(-1;0;3)$, $(-1;3;0)$, $(3;0;1)$, $(3;-1;0)$. 59) $(1;2;-2)$, $(1;-2;2)$, $(2;1;-2)$, $(2;-2;1)$, $(-2;1;2)$. 60) $(0;0;0)$, $(1;1;1)$, $(-1;1;-1)$, $(-1;1;-1)$, $(1;-1;-1)$, $(-1;-1;1)$, $(1;-1;-1)$, $(-1;1;-1)$. Перемножить уравнения. 61) $(3;4;5)$, $(-3;-4;\ -5)$. Ввести новые переменные$xy=u$, $xz=v$, $yz=w$. 62) $(1/3;2/5;1/6)$. Преобразовав уравнения: $\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{1}{1/x+1/y}$, $\dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{1}{1/z+1/y}$, $\dfrac{zx}{x+z}=\dfrac{1}{1/x+1/z}$, ввести новые переменные $1/x=u$, $1/y=v$ $1/z=w$. 63) $(3;6;2)$, $(1/3;-2;-2/3)$. 64) $(3;6;10)$, $(6;3;10)$. 65) $(1;3;9)$, $(9;3;1)$. 66) $(0;0;4)$; $(0;4;0)$, $(4;0;0)$. 67) $(1;3;1/3)$, $(1;1/3;3)$, $(3;1;\ 1/3)$, $(3;1/3;1)$, $(1/3;3;1)$, $(1/3;1;3)$. 68) $(1/\sqrt{6};2/\sqrt{6};3/\sqrt{6})$; $(-1/\sqrt{6};\ -2/\sqrt{6};-3/\sqrt{6})$. 69) $(10/\sqrt{15};9/\sqrt{15};4/\sqrt{15})$, $(-10/\sqrt{15};-9/\sqrt{15};-4/\sqrt{15})$. 70) $(10/\sqrt{3};1/\sqrt{3};-8/\sqrt{3})$, $(-10/\sqrt{3};-1/\sqrt{3};8/\sqrt{3})$, $(4;3;2)$, $(-4;-3;-2)$.



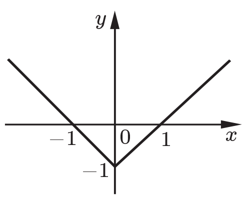
71) Рис. 36



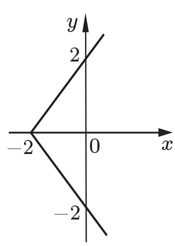
72) Рис. 37



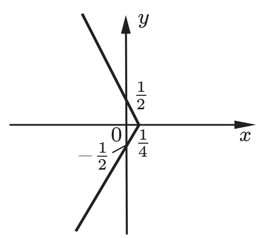
73) Рис. 38



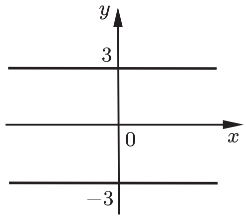
74) Рис. 39



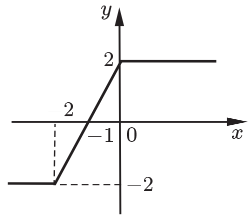
75) Рис. 40



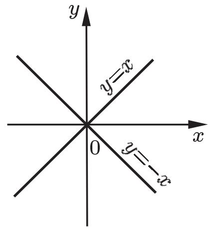
76) Рис. 41



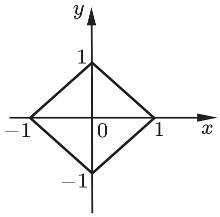
77) Рис. 42



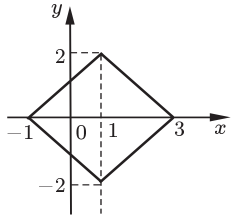
78) Рис. 43



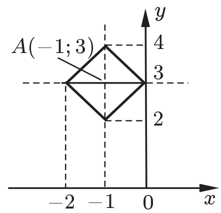
79) Рис. 44



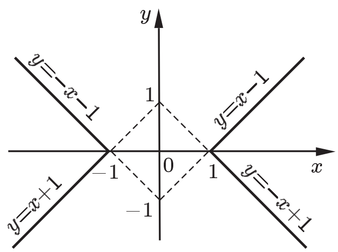
80) Рис. 45



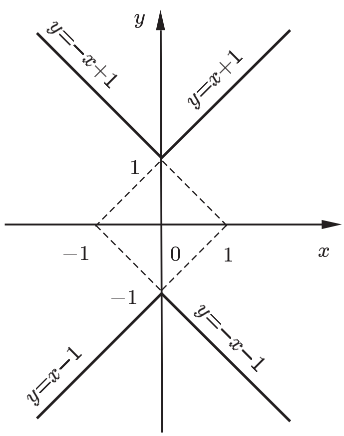
81) Рис. 46



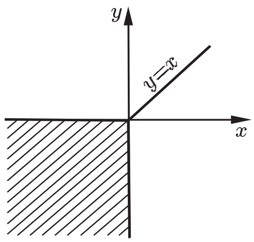
82) Рис. 47



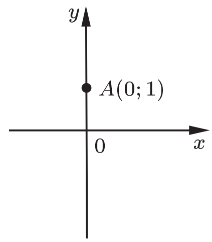
83) Рис. 48



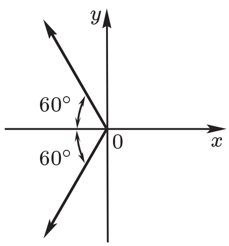
84) Рис. 49



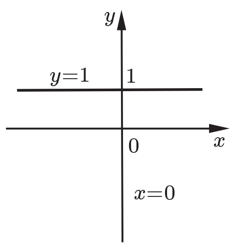
85) Рис. 50



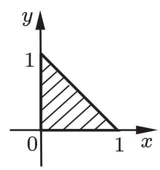
86) Рис. 51



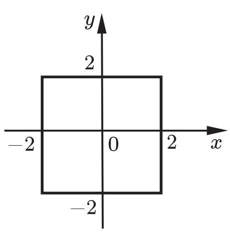
87) Рис. 52



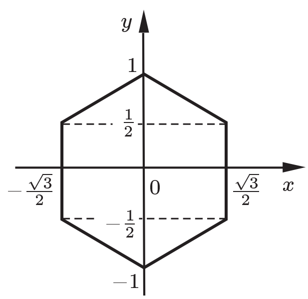
88) Рис. 53



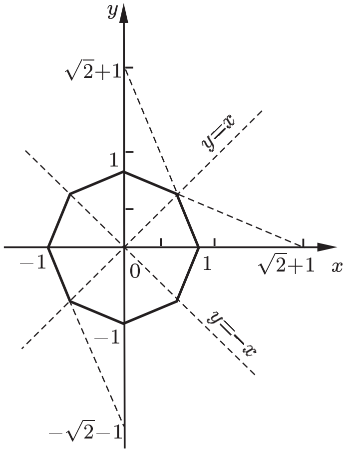
89) Рис. 54



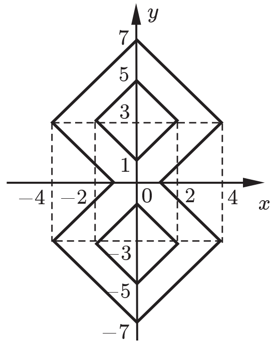
90) Рис. 55



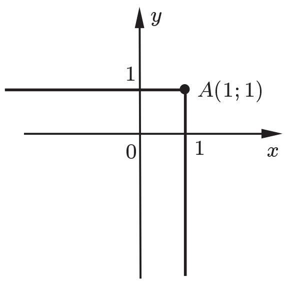
91) Рис. 56



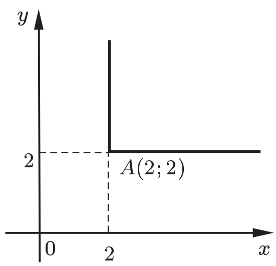
92) Рис. 57



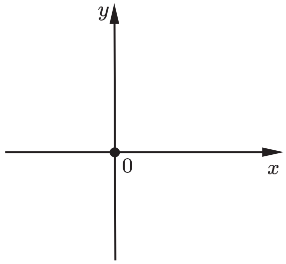
93) Рис. 58



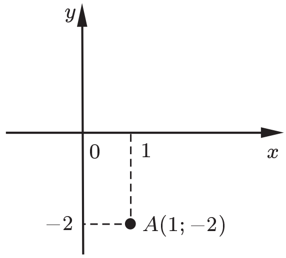
94) Рис. 59



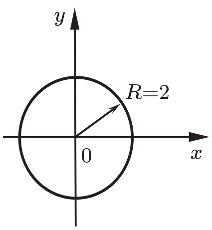
95) Рис. 60



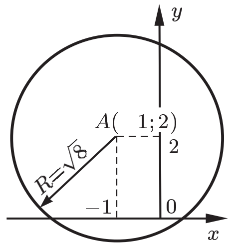
96) Рис. 61



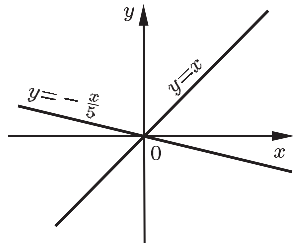
97) Рис. 62



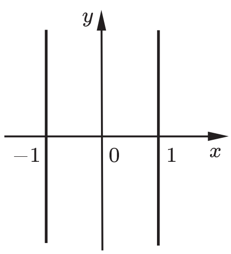
98) Рис. 63



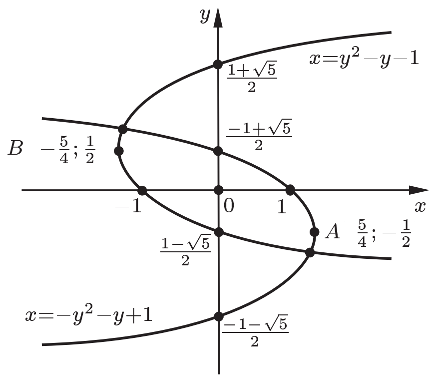
99) Рис. 64



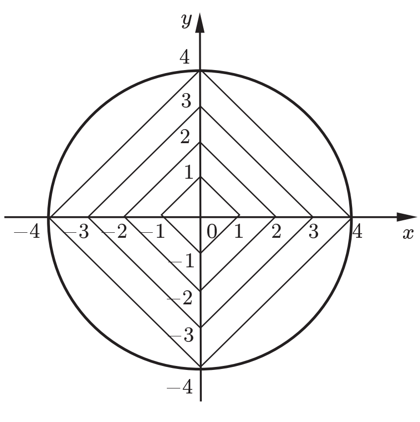
100) Рис. 65



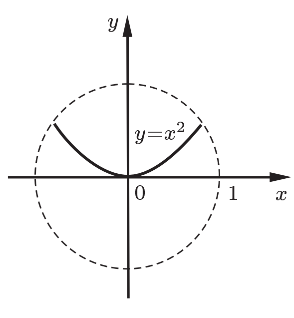
101) Рис. 66



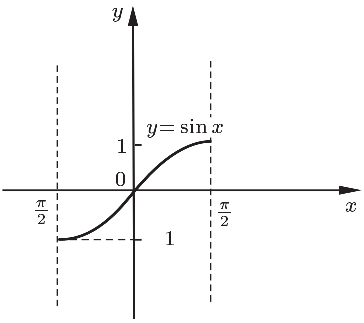
102) Рис. 67



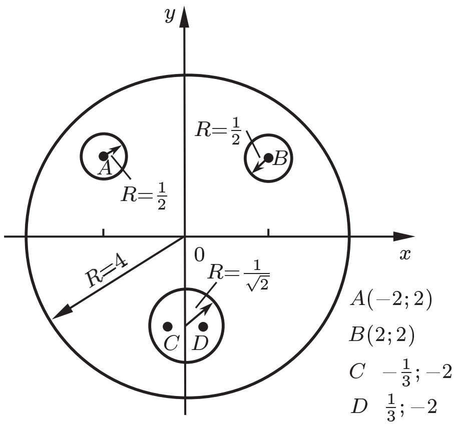
103) Рис. 68



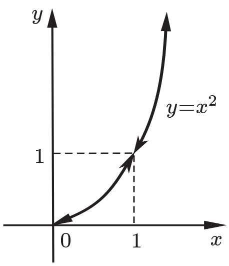
104) Рис. 69



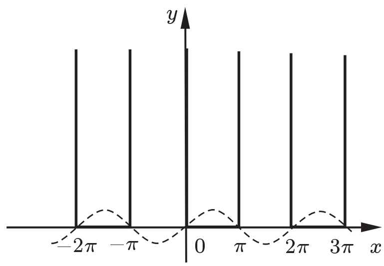
105) Рис. 70



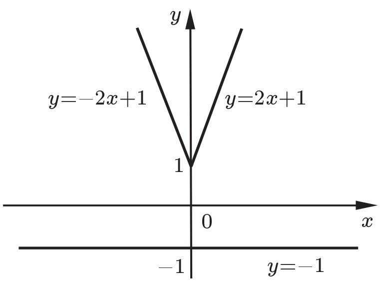
106) Рис. 71



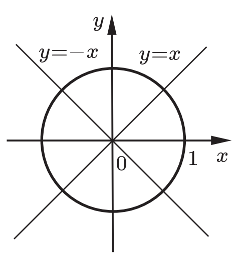
107) Рис. 72



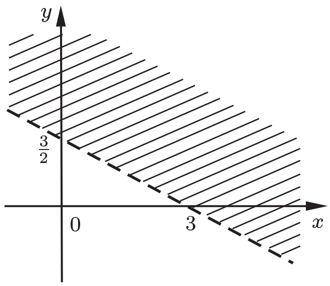
108) Рис. 73



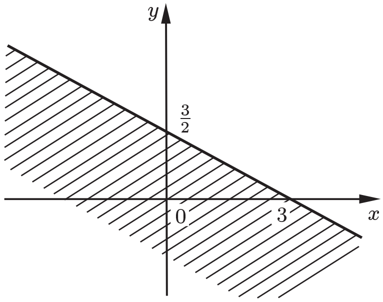
109) Рис. 74



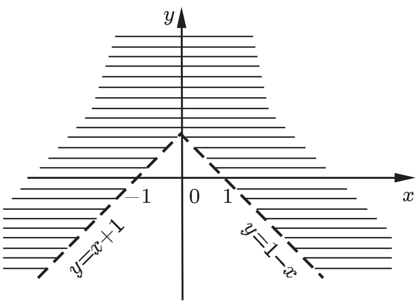
110) Рис. 75



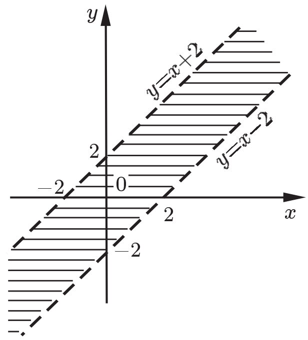
111) Рис. 76



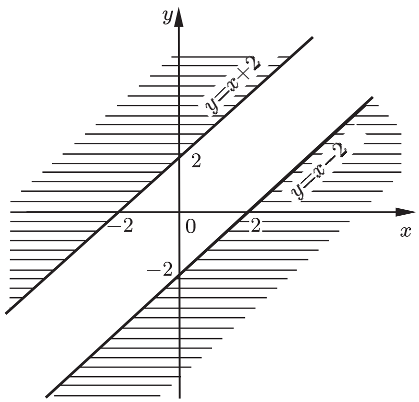
112) Рис. 77



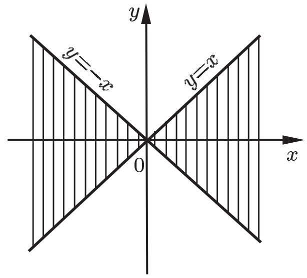
113) Рис. 78



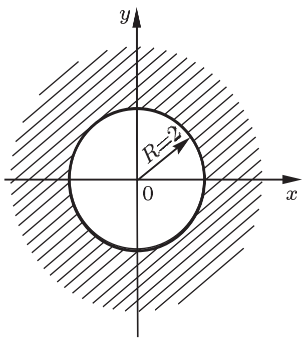
114) Рис. 79



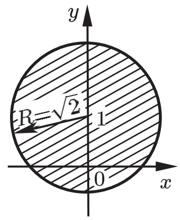
115) Рис. 80



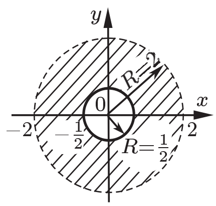
116) Рис. 81



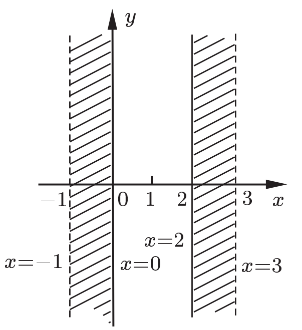
117) Рис. 82



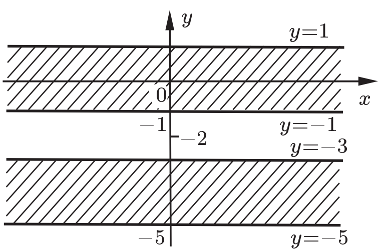
118) Рис. 83



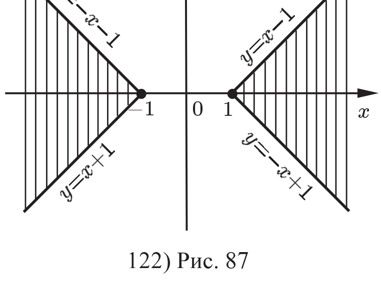
119) Рис. 84



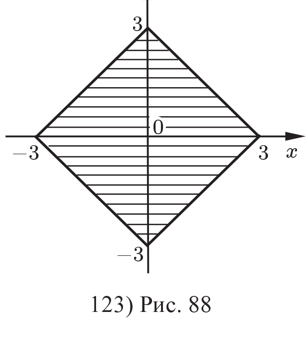
120) Рис. 85



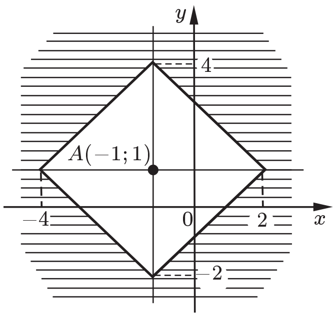
121) Рис. 86



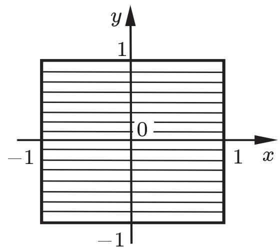
122) Рис. 87



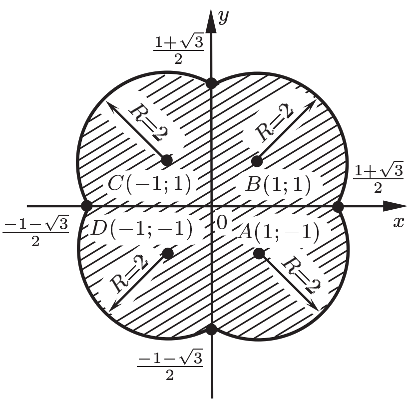
123) Рис. 88



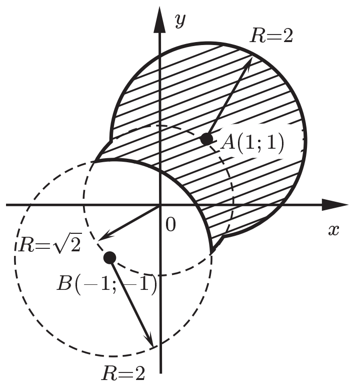
124) Рис. 89



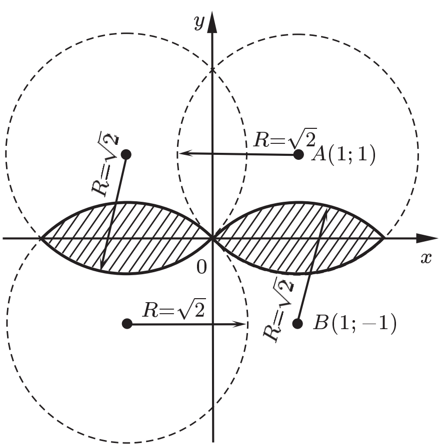
125) Рис. 90



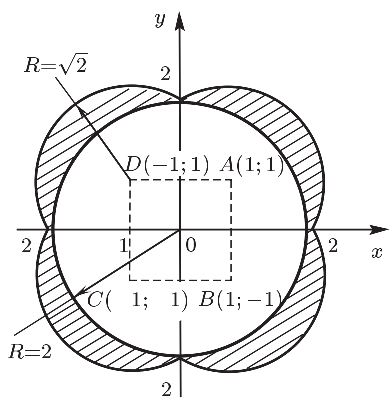
126) Рис. 91



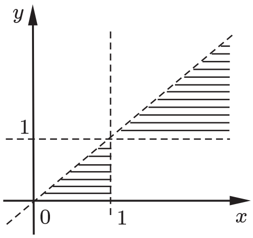
127) Рис. 92



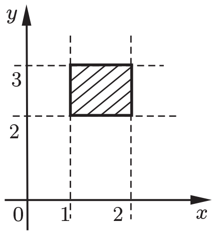
128) Рис. 93



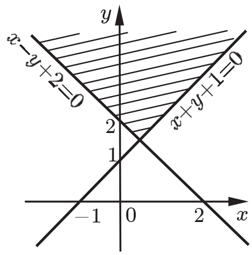
129) Рис. 94



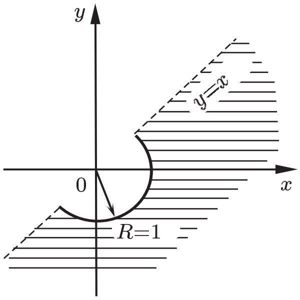
130) Рис. 95



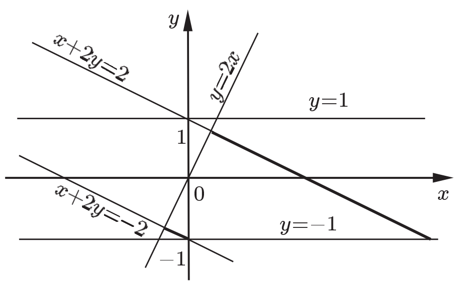
131) Рис. 96



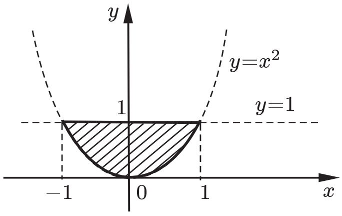
132) Рис. 97



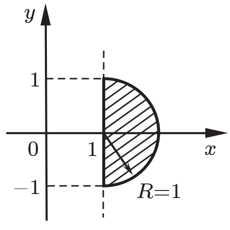
133) Рис. 98



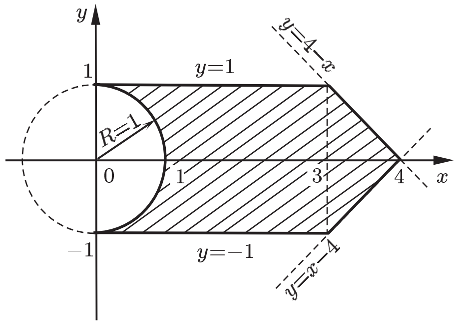
134) Рис. 99



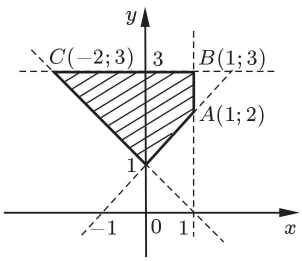
135) Рис. 100



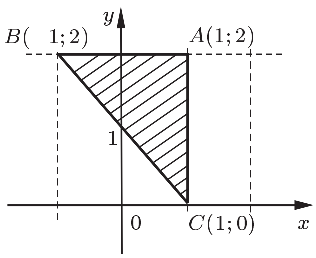
136) Рис. 101



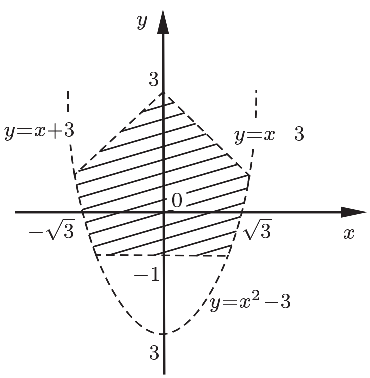
137) Рис. 102



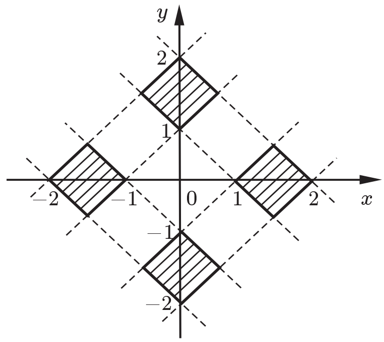
138) Рис. 103



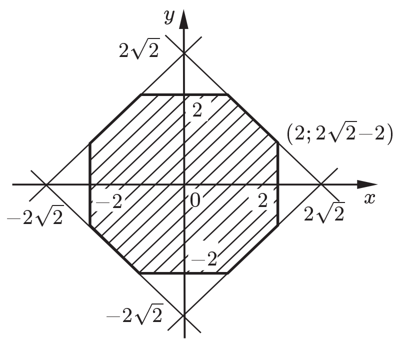
139) Рис. 104



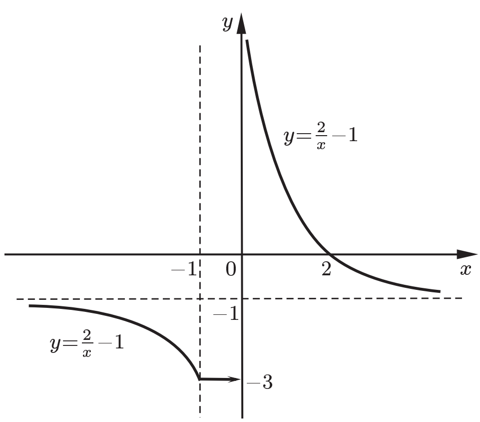
140) Рис. 105



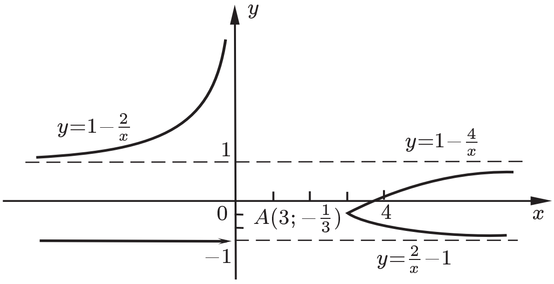
141) Рис. 106



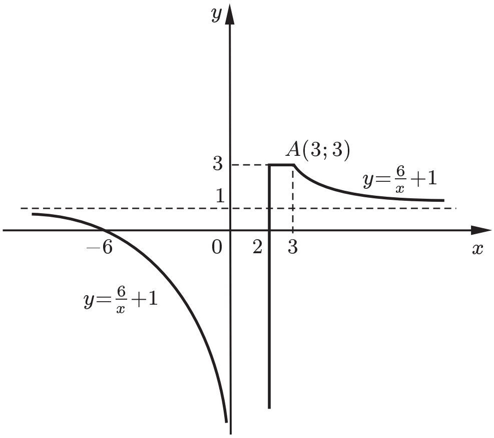
142) Рис. 107



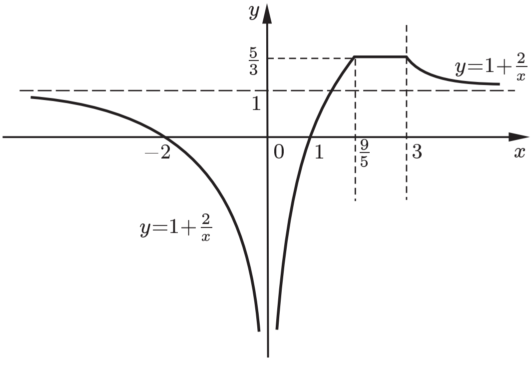
143) Рис. 108



144) Рис. 109



145) Рис. 110



146) Рис. 111

143) 8. 144) 18. 145) 2. 146) 36. 147) 12. 148) 16. 149) 6. 150) 2.
151) 6. 152) $\pi/2$. 153) $3\pi/8$. 154) $\pi/4$.
155) Рис. 108; $y_{\min} = -3$ при $-1 < x < 0$.
156) Рис. 109; $y_{\min} = -1$ при $x < 0$.
157) Рис. 110; $y_{\max} = 3$ при $2 \leqslant x \leqslant 3$.
158) Рис. 111; $y_{\max} = 5/3$ при $9/5 \leqslant x \leqslant 3$.

§ 2

1) $(0; 2)$. Обозначить $2^x = u$, $\log_2 y = v$.

2) $\quad -\dfrac{\pi}{4} + \pi n; 2 \quad, n \in Z$. 3) $\quad \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{1}{4} \quad; n \in Z$.

4) $\quad \dfrac{1}{2 - \log_2 3}; \dfrac{1}{2 - \log_2 3} \quad$.

5) $(9; 1)$. Обозначить $\sqrt{x} = u$, $y^5 = v$.

6) $(4; \sqrt{2})$, $(4; -\sqrt{2})$. Обозначить $3^{x/2} = u$, $2^{y^2/2} = v$.

7) $(1/3; 1/2)$. 8) $(\sqrt{10^5}; 1/\sqrt{10})$. 9) $\quad 10^{-\sqrt{26}/3}; \log_2 \dfrac{5 + \sqrt{26}}{3} \quad$.

10) $(10^{-6}; 10^{-8})$, $(10^8; 10^6)$.
11) $(1/100; 36)$. Обозначить $\sqrt{y} = u$, $\lg x = v$.
12) $(2/3; \log_3 4)$.
13) $(9; 9)$. Вычесть из первого уравнения второе.
14) $(12; 3)$; $(3; 12)$. Обозначить $\sqrt{xy} = u$, $x + y = v$.
15) $(1; 8)$, $(8; 1)$. Обозначить $\sqrt[3]{x} = u$, $\sqrt[3]{y} = v$.
16) $(9; -4)$; $(16; -3)$. Обозначить $y\sqrt{x} = v$, $\quad \overline{x + y^2} = u$.
17) $(1; 0)$, $(0; 1)$. 18) $(2; 6)$. 19) $(-2; 3)$.

20) $(2; -3)$, $(3{,}2; -2{,}4)$. Из второго уравнения $x = 2y+8$; подставить выражение $2y + 8$ вместо x в первое уравнение системы.

21) $(4; -1)$, $(-38/3; -28/3)$.

22) $(2; 2)$, $(4; 1/2)$. Для решения системы $(x_0; y_0)$ из первого уравнения следует равенство $x_0^{y_0+1} = 8$.

23) $(5; 5)$. Для решения системы $(x_0; y_0)$ следует равенство $\log_{x_0} y_0 = \dfrac{1}{\log_{y_0} x_0}$. Обозначить $z_0 = \log_{x_0} y_0$.

24) $(4; 2)$. Обозначить $z = 2^{\overline{\frac{x-y}{2}}}$.

25) $(3; 3)$, $(5; 1)$. Обозначить $2^{\overline{\frac{x+y}{6}}} = z$.

26) $(5; 1)$. Обозначить $2^{x-2y} = z$ и первое уравнение системы записать в виде $x - 4y = 1$.

27) $(25; 9)$, $(9; 25)$. Обозначить $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = z$.

28) $(2; 3/2)$, $(3; 1)$. Обозначить $\overline{\dfrac{x + 3y}{y + 5}} = z$.

29) $(2; 1)$, $(1; 2)$. Обозначить $\overline{x/y} = z$. 30) $(1; 1)$.

31) $(3;1)$, $(1/3;7/3)$.

32) $(2;1)$, $(1;2)$, $(-2;-1)$, $(-1;-2)$. Данная система равносильна системе
$$\begin{aligned}|x+y|&=3,\\ |x-y|&=1\end{aligned}$$
или совокупности систем
$$\begin{aligned}x+y&=3,\\ x-y&=1,\end{aligned}\qquad \begin{aligned}x+y&=3,\\ x-y&=-1,\end{aligned}\qquad \begin{aligned}x+y&=-3,\\ x-y&=1,\end{aligned}\qquad \begin{aligned}x+y&=-3,\\ x-y&=1.\end{aligned}$$

33) $(3;3)$, $(5;1)$. 34) $(5;3)$. 35) $(80;20)$. 36) $(1;2)$, $(16;-28)$.

37) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. 38) $(5;5)$. 39) $(2;18)$, $(18;2)$. 40) $(6;8)$, $(8;6)$. 41) $(-2;2)$. 42) $(5;3)$. 43) $(7;9)$, $(9;7)$. 44) $(9/2;1/2)$.

45) $(3;2)$. Перейти к следствию, прологарифмировав оба уравнения по основанию 2.

46) $(1/2;-3/2)$. 47) $(3;-3)$. 48) $(\sqrt{3};4)$, $(-\sqrt{3};4)$. 49) $(1;0)$.

50) $(2;4)$. 51) $(1;\sqrt{5})$, $(\sqrt{5};1)$. 52) $(1;2)$, $(-\sqrt{5};0)$, $(1/\sqrt{2};3/\sqrt{2})$.

53) $(5;0)$. 54) $(9;3)$, $(1/27;729)$. 55) $(4;1/4)$. 56) $(16;4)$. 57) $(2;1)$.

58) $(1;-1)$. 59) $(-2/5;2/5)$. 60) $(-5/2;-1/2)$. 61) $(4;16)$. 62) $(9;3)$, $(1/27,729)$. 63) $(3;27)$.

64) $\frac{5+\sqrt{5}}{2}; \frac{5-\sqrt{5}}{2}$. 65) $(1;1/2)$, $(1/2;1)$.

66) $\frac{1}{2}\ 1+\sqrt{2}+\sqrt{5+4\sqrt{2}}\ ; \frac{1}{2}\ -1-\sqrt{2}+\sqrt{5+4\sqrt{2}}$,
$\frac{1}{2}\ 1+\sqrt{2}-\sqrt{5+4\sqrt{2}}\ ; \frac{1}{2}\ -1-\sqrt{2}-\sqrt{5+4\sqrt{2}}$.

67) $(7;5)$. 68) $\frac{24}{5}; \frac{8}{5}$. 69) $(4;1)$, $(2;3)$, $(6;-1)$, $(3;2)$.

70) $(-4;10)$, $(-3;9)$. $(5;1)$. 71) $(1;1)$, $(2;1/8)$. 72) $(2/3;9/4)$. 73) $(1;1)$. 74) $(1;1)$, $(1/2;4)$. 75) $(0;1)$. 76) $(2;2)$. 77) $(1/2;1)$.

78) $(8;-4)$, $(8/3;4/3)$. 79) $(-1;-2)$, $(1/3;-2/3)$. 80) $(-2;-8)$.

81) $(0;9/4)$, $(-3;2)$, $(3;-1)$. 82) $(1;1)$, $(16/81;4/9)$.

83) $(64;1)$, $(-1;-64)$. 84) $(1;9)$. 85) $(4;9)$, $(9;4)$.

86) $(4;1)$, $(121/64;169/64)$. 87) $(4;4)$.

88) $(2;1)$, $(1;4)$. Заметить, что $13x^4y^2-6x^2-6y=(5x^4y^2-6x^2-6y)+8x^4y^2$.

89) $(3;-2)$. 90) $(-1/2;3)$. 91) $(3;1)$.

§ 3

1) $-\frac{3\pi}{4}+\pi k, -\frac{11\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, \pi-2\pi k$, $k\in Z$.

3) $\frac{7\pi}{24}+\pi n, -\frac{\pi}{24}+\pi n$, $n\in Z$, $\frac{\pi}{24}+\pi k, -\frac{7\pi}{24}+\pi k$, $k\in Z$.

4) $\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{6}-\frac{2}{3}\pi k$, $k\in Z$.

5) $\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{6}-\pi k \quad , \quad \frac{\pi}{6}+\pi n, \frac{\pi}{2}-\pi n \quad , k \in Z, n \in Z.$

6) $\frac{\pi}{4}+\pi k, \frac{\pi}{4}-\pi k \quad , k \in Z.$

7) $\pi k, \frac{\pi}{4}-\pi k \quad , \quad \frac{\pi}{4}+\pi n, -\pi n \quad , k \in Z, n \in Z.$

8) $\frac{\pi}{4}+\pi k+\operatorname{arcctg} 5, \frac{\pi}{4}-\pi k-\operatorname{arcctg} 5 \quad , k \in Z.$

9) $\frac{5\pi}{24}-\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{24}-\frac{\pi k}{2} \quad , k \in Z.$ 10) $(-1; 1), (1; -1).$

11) $\frac{\pi}{3}(2k-1), \frac{\pi}{3}(4k+1) \quad , k \in Z.$

12) $(1; 2), (-1; -2), (-1; 2), (1; -2), (3; 0), (-3; 0).$

13) $-\frac{\pi}{6}+\frac{(-1)^n}{2} \arcsin \frac{2-3\sqrt{3}}{6}+\frac{\pi n}{2},$

$$\frac{\pi}{6}+\frac{(-1)^n}{2} \arcsin \frac{2-3\sqrt{3}}{6}+\;+\frac{\pi n}{2} \quad , \; n \in Z.$$

14) $(0; 1), (1; 0), (0; -1), (-1; 0), (1/2; -1/2), (-1/2; 1/2).$

15) $1; (-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n-1 \quad , n \in Z.$

16) $-\frac{5}{2}; \pm\arcsin \sqrt{\frac{5}{6}}+\pi n \quad , \quad -\frac{5}{2}-\frac{\pi}{4}; \pm\arcsin \sqrt{\frac{5}{6}-\frac{\pi}{4}}+\pi n \quad , \; n \in Z.$

17) $(-1)^k \frac{\pi}{6}+\pi k; \pm\frac{2}{3}\pi+2\pi l \quad , \quad (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6}+\pi n; \pm\pi/3+2\pi m \quad ,$

$$n \in Z, \; k \in Z, \; l \in Z, \; m \in Z.$$

18) $\frac{\pi}{6}+\pi(k-l); \frac{\pi}{3}+\pi(k+l) \quad , \quad -\frac{\pi}{6}+\pi(k-l); \frac{2\pi}{3}+\pi(k+l) \quad ,$

$$k \in Z, \; l \in Z.$$

19) $-\frac{\pi}{4}+\pi k+\frac{\pi m}{2}; -\frac{\pi}{4}+\pi k-\frac{\pi m}{2} \quad , \; k \in Z, \; m \in Z.$

20) $-\frac{\pi}{12}-\pi l-\frac{\pi k}{2}; \frac{7\pi}{12}+\pi l+\frac{\pi k}{2} \quad , \; k \in Z, \; l \in Z,$

$$\frac{7\pi}{12}-\pi p+\frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{12}+\pi p+\frac{\pi n}{2} \quad , \; p \in Z, \; n \in Z.$$

21) $-\frac{\pi}{4}+\pi m; \frac{\pi}{2}+2\pi k \quad , \quad \frac{\pi}{4}+\pi n; -\frac{\pi}{2}+2\pi l \quad ,$

$$m \in Z, \; k \in Z, \; n \in Z, \; l \in Z.$$

22) $\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi n}{2} \quad , \quad \frac{\pi}{2} \pm \frac{2\pi}{3}+\pi k; \mp\frac{\pi}{3}+\pi n \quad , k \in Z, n \in Z.$

23) $(\pi n, \pi k), n \in Z, k \in Z.$

24) $\frac{\pi}{2}+\pi l; \frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2}\pm\frac{2\pi}{3}+\pi l; \pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z, l\in Z$.

25) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n, \pm\frac{\pi}{4}+2\pi m$, $n\in Z, m\in Z$.

26) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $n\in Z, k\in Z$.

27) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+(2k+1-n)\pi$, $n\in Z, k\in Z$.

28) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, \pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $k\in Z, n\in Z$.

29) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $n\in Z, k\in Z$.

30) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n, \pm\frac{\pi}{6}+\pi m$, $n\in Z, m\in Z$.

31) $(-1)^k\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}, -\frac{1}{7}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi n}{7}$, $k\in Z, n\in Z$.

32) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}, -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi n}{2}$, $k\in Z, n\in Z$.

33) $\frac{\pi}{4}+2\pi l, \operatorname{arctg}2+\pi k$, $k\in Z, l\in Z$.

34) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi l$, $k\in Z, l\in Z$.

35) $\frac{\pi}{4}+2\pi k, \frac{\pi}{4}+\pi n$, $k\in Z, n\in Z$.

36) $\frac{\pi}{3}+\pi k, \frac{\pi}{6}+2\pi n$, $k\in Z, n\in Z$.

37) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, (2n-k)\pi+\frac{\pi}{3}, -2\pi n+\pi$,

$$\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, 2\pi m, \pi\mp\frac{\pi}{3}-(2m+k)\pi \quad , \; k\in Z,\; n\in Z,\; m\in Z.$$

38) $\frac{\pi}{4}+\pi k, \operatorname{arctg}2+\pi m, \frac{3\pi}{4}-\operatorname{arctg}2-(k+m)\pi$,

$$-\frac{\pi}{4}+\pi k, -\operatorname{arctg}2+\pi m, \frac{5\pi}{4}+\operatorname{arctg}2-(k+m)\pi \quad , \; k\in Z,\; m\in Z.$$

39) $3 \quad n-\frac{1}{8} \quad , -n+\frac{1}{8}$, $n\in N$,

$$3 \quad 2n-\frac{3}{4} \quad , -2n+\frac{3}{4} \quad , \; n\in N,\; n\neq 3.$$

40) $\frac{3\pi}{4}, 5-\frac{3\pi}{2}$.

§ 4

1) $n = 5$, $m = 2$. Воспользоваться равенствами $n^2 + 2m^2 - 3mn = (n - 2m)\times$ $\times(n - m)$, $3 = 1 \cdot 3 = (-1)(-3)$. 2) $n = 2$, $m = 4$; $n = 17$, $m = 1$. Воспользоваться равенствами $34 = 2 \cdot 17 = 17 \cdot 2$. 3) $m = n = 2$. Воспользоваться равенством $mn - m - n = (m-1)(n-1) - 1$. 4) $n = 1, m = 2k, k \in N; n = 3,$ $m = 2k, k \in N$.

5) $n = 2$, $m = 2k$, $k \in N$; $n = 3$, $m = 2k$, $k \in N$. Р е ш е н и е. Так как $\dfrac{3^n}{n!} > 0$ для любого n и $\dfrac{9}{2}\cos \pi m = (-1)^m \cdot \dfrac{9}{2}$, то условию задачи удовлетворяют четные m, т.е. $m = 2k$, $k \in N$. Пусть $m = 2k$, $k \in N$, тогда исходное уравнение запишется в виде $\dfrac{3^n}{n!} = \dfrac{9}{2}$. Рассмотрим последовательность $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$. Так как $a_1 =$ $= 3$, $a_2 = a_3 = 9/2$ и $a_{n+1} < a_n$ для $n \geqslant 3$, то $a_n < 9/2$ для $n \geqslant 4$, т.е. условию задачи удовлетворяют $m = 2k$, $k \in N$ и $n = 2$, $n = 3$.

6) $(0; 0)$, $(2; 2)$.

7) $(0, 0)$. Записать уравнение в виде $(x - 2y)^2 = 8y^2$, откуда $|x - 2y| =$ $= 2\sqrt{2}|y|$, что возможно для целых x и y только при $x = y = 0$, поскольку при $x \neq 0$ и $y \neq 0$ число $|x - 2y|$ целое, а число $2\sqrt{2}|y|$ иррациональное.

8) $(-11; 12)$, $(11; -12)$, $(-11; -12)$, $(11, 12)$. Воспользовавшись равенствами $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ и $-23 = (-1) \cdot 23 = 1 \cdot (-23)$, целочисленностью x и y, найти решения совокупности систем уравнений

$$\begin{array}{llll} x - y = 1, & x - y = -23, & x - y = -1, & x - y = 23, \\ x + y = 23, & x + y = 1, & x + y = 23, & x + y = -1. \end{array}$$

9) $(5; 2)$; $(-5; -2)$; $(-1; -2)$, $(1; 2)$. 10) $(0; 2)$, $(1; 1)$, $(1; 3)$, $(2; 2)$. 11) $(0; 0)$.
12) $(24; 1)$, $(24; -1)$. 13) $(0; 1)$.
14) $(2; 3/2)$. Записать уравнение в виде $(x - 2)^2 + (2y - 3)^2 = 0$.
15) $(-4; -3)$. Записать уравнение в виде $(x - y + 1)^2 + (2y - x + 2)^2 = 0$.
16) $(-4/7; -1/7)$. 17) $\pi/2 + 2\pi k; \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $k \in Z, m \in Z$.
18) $(1; 1)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$, $(-1; -1)$.
19) $(0; 2)$, $(1; 2)$. Записать уравнение в виде $[x(x - 1)]^2 + (y - 2)^2 = 0$.
20) $(1; 1)$, $(-1; -1)$. 21) $\dfrac{\pi}{4}(2k + 1); 1$, $k \in Z$.

22) $(0, 0)$. 23) $(1; 0)$. Воспользоваться тождествами $1 + 2x - x^2 =$ $= -(x - 1)^2 + 2$, $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 5 = (x + y)^2 - 2(x + y) + 5 =$ $= (x + y - 1)^2 + 4$.

24) $\pi k; \dfrac{\pi}{4} + \pi l$; $\pi m; \dfrac{3\pi}{4} + \pi p$, $k \in Z, l \in Z, m \in Z, p \in Z$.

25) $(0; 0)$. Воспользоваться тем, что левая часть уравнения не больше 1, а правая часть не меньше 1.

26) $(\pi k - 2; 0)$, $k \in Z$. Воспользоваться неравенствами $\log_2(2 + y^2) \geqslant 1$, $\sin^2(x + 2) \leqslant 1$.

27) $(2; -4)$. Записать левую часть уравнения в виде $(x^2 - 4x + 6)(y^2 + 8y +$ $+ 19) = ((x - 2)^2 + 2)((y - 4)^2 + 3)$.

28) $1; \dfrac{\sqrt{6}}{2}$; $1; \dfrac{-\sqrt{6}}{2}$; $-1; \dfrac{\sqrt{6}}{2}$; $-1; \dfrac{-\sqrt{6}}{2}$. Записать левую часть уравнения в виде $(x^4-2x^2+3)(y^4-3y^2+4) = ((x^2-1)^2+2) \quad y^2 - \dfrac{3}{2} \quad ^2 + \dfrac{7}{4}$.

29) $(1; 2\pi n), (-1; 2\pi m), n \in Z, m \in Z$. Переписать уравнение в виде $2\cos y = \\ = \dfrac{1}{x} + x$.

30) $\dfrac{\pi k}{5}, \dfrac{\pi k}{5} - 1$, $k \in Z$.

31) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{2\pi k}{3}$, $\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n; -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi k}{3}$, $n \in Z,\ k \in Z$.

32) $\dfrac{3\pi}{4} + \pi k, 2\pi n$, $k \in Z, n \in Z$.

33) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Так как $|\arcsin t| \leqslant \pi/2$, то все решения уравнения есть решения системы уравнений
$$\begin{array}{l} x(x+y) = 1, \\ y(x+y) = 1. \end{array}$$

34) $1; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$; $-1; -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi l$, $k \in Z, l \in Z$. Записать уравнение в виде $(x - \sin xy)^2 + \cos^2 xy = 0$.

35) $(-2; \pi k), k \in Z,\quad 2; \dfrac{\pi}{2} + \pi p$, $p \in Z$.

36) $\dfrac{\pi}{4} + \pi(2k+1); \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $k \in Z,\ n \in Z$. Записать уравнение в виде $(2 - \sin^2 2x) \quad 1 + \dfrac{16}{\sin^4 2x} \quad = 16 + \sin y$, все решения которого являются решениями системы
$$\begin{array}{l} \sin^2 2x = 1, \\ \sin y = 1. \end{array}$$

37) $\dfrac{\pi}{4}(2k+1); \dfrac{\pi}{4}(4m - 2k + 1)$, $k \in Z, m \in Z$. Записать уравнение в виде $(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y)^2 + 2(\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y - \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y)^2 = \sin^2(x+y) - 1$.

38) $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \dfrac{\pi}{3} + 2(n-k)\pi$, $k \in Z,\ n \in Z$;

$$-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi p, -\dfrac{\pi}{3} + 2(p-l)\pi \ , \ p \in Z,\ l \in Z.$$

Записать уравнение в виде $2\cos\dfrac{x+y}{2} - \cos\dfrac{x-y}{2} \quad ^2 + \sin^2\dfrac{x-y}{2} = 0$.

39) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, 2\pi n - \dfrac{\pi}{2} - 2\pi k$, $n \in Z, k \in Z$.

40) $\quad \operatorname{arctg} \quad -\sqrt{2} \quad + \pi k, \dfrac{\pi}{4} + \pi k \quad, \ k \in Z,$

$$\operatorname{arctg}\sqrt{2} + \pi n, \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \quad, \ n \in Z.$$

41) $(0;1)$. Воспользоваться на ОДЗ неравенствами

$$y - x^2 - 1 \geqslant 0, \quad \cos x \geqslant y^2 \geqslant (1+x^2)^2.$$

42) $(0;1)$. 43) $(0;1)$.

44) $\quad \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, 2 \quad, \ n \in Z$. Воспользоваться на ОДЗ неравенствами

$$\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} \leqslant 1, \quad y^2 - 4y + 5 \geqslant 1.$$

45) $\quad -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 1 \quad, \ n \in Z.$ 46) $(\pi + 2\pi n;\ 2),\ n \in Z.$ 47) $(\pi k;\ 1),\ k \in Z.$

48) $\quad 1;\ \dfrac{2k-3}{4} \quad, \ k \in Z.$ 49) $\quad 2;\ \pm\dfrac{2\pi}{3} - 2 + 2\pi k \quad, \ k \in Z.$

50) $\quad 3;\ \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{3}{2} + \pi k \quad, \ k \in Z.$ 51) $\quad 1;\ \pm\dfrac{\pi}{4} - 2 + \pi k \quad, \ k \in Z.$

52) $(-1;2)$; $(-1;-2)$. Р е ш е н и е. Из определения функций $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ следует, что $|x| \leqslant 1$. Так как $|\arcsin x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ и $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$ для любых значений $|x| \leqslant 1$, то $0 \leqslant (\arcsin x)^2 \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}$ и $0 \leqslant (\arccos x)^2 \leqslant \pi^2$. Следовательно, для любого действительного числа x, такого, что $|x| \leqslant 1$ имеем $g(x) = (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 - \dfrac{5}{4}\pi^2 \leqslant 0$, причем $g(x)$ обращается в нуль только тогда, когда одновременно $|\arcsin x| = \dfrac{\pi}{2}$ и $\arccos x = \pi$, что возможно только при $x = -1$, рассмотрим

$$f(x) = 5\sin^2 x - 6\sin x \cdot \cos x - 9\cos^2 + 3 \cdot \sqrt[3]{33}.$$

Используя формулы $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ и $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ и $2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$, это выражение можно переписать в виде

$$f(x) = -2 - (7\cos 2x + 3\sin 2x) + 3 \cdot \sqrt[3]{33}.$$

Вводя дополнительный угол φ, получим

$$7\cos 2x + 3\sin 2x = \sqrt{58} \quad \frac{7}{\sqrt{58}}\cos 2x + \frac{3}{\sqrt{58}}\sin 2x \quad = \sqrt{58}\sin(\varphi + 2x),$$

где $\varphi = \arcsin \dfrac{7}{\sqrt{58}}$. Поэтому

$$f(x) = -2 - \sqrt{58}\sin(\varphi + 2x) + 3\sqrt[3]{33}.$$

Поскольку $|\sin\alpha| \leqslant 1$ для любого действительного α, то

$$f(x) = -2 - \sqrt{58}\sin(\varphi + 2x) + 3\sqrt[3]{33} \geqslant -2 - \sqrt{58} + 3\sqrt[3]{33}.$$

Сравним числа $2 + \sqrt{58}$ и $3\sqrt[3]{33}$. Возводя каждое из этих чисел в третью степень, получаем, что

$$(2 + \sqrt{58})^3 = 70\sqrt{58} + 356,\ (3\sqrt[3]{33})^3 = 891.$$

Для сравнения чисел $70\sqrt{58} + 356$ и 891 достаточно сравнить числа $70\sqrt{58}$ и $535 = 891 - 356$ или числа $14\sqrt{58}$ и 107. Возводя каждое из этих чисел в квадрат, получаем числа 11368 и 11449. Так как $11449 > 11368$, то $14\sqrt{58} < 107$, следовательно, $70\sqrt{58} < 535$, откуда $70\sqrt{58} + 356 < 891$ и, наконец, $2 + \sqrt{58} < 3\sqrt[3]{33}$. Итак, $-2 - \sqrt{58} + 3\sqrt[3]{33} > 0$. Таким образом, доказано, что $f(x) > 0$ для любого значения x. Тогда для любого значения y такого, что $|y| \leqslant 2$ и любого значения x имеем $f(x)\cdot\sqrt{2 - |y|} \geqslant 0$. Так как правая часть исходного равенства имеет смысл лишь для $|x| \leqslant 1$, то, подводя итог, получаем, что

$$f(x)\sqrt{2 - |y|} \geqslant 0,\ g(x) \leqslant 0,\ f(x) > 0$$

для любых x и y таких, что $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 2$. Отсюда следует, что исходное равенство справедливо тогда и только тогда, когда одновременно $g(x) = 0$ и $\sqrt{2 - |y|} = 0$, т.е. тогда и только тогда, когда $x = -1$ и $|y| = 2$. Следовательно, исходное уравнение удовлетворяется для двух пар чисел $x_1 = -1$, $y_1 = 2$, $x_2 = -1$, $y_2 = -2$.

53) $(2; -1), (-2; -1)$. 54) $(3; -1), (-3; -1)$. 55) $(-1; 3), (-1; -3)$.

56) $(2; 3; 2), (2; 4; 1), (3; 3; 1), (0; 1; 2), (0; 3; -2), (2; 1; -2), (0; 4; -1), (0; 0; 1), (2; 0; -1), (-1; 1; 1), (-1; 3; -1), (3; 1; -1)$.

57) $(0; 1; t)$, где $t \in R$. 58) $(1; 0; 1), (-1, 0, 1), (1; 0; 5), (-1, 0, 5)$.

59) $(1; 5, 0), (1; -5; 0), (-1; 5; 0), (-1; -5; 0)$.

60) $(1; 4; 3), (1; 4; -3), (-1; 4; 3;), (-1; 4; -3)$. 61) $(-1; 0; -1/3)$.

62) $(1/2; 1/2; 0)$. Воспользоваться равенством

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = (x - y + z)^2.$$

63) $(t; t; t)$, где $t \in R$. Воспользоваться равенством

$$2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2.$$

64) $(-1/2; 1/2; 0)$. Записать уравнение в виде

$$(x - z + 1/2)^2 + (x + y + z)^2 + (x - y + 1)^2 = 0.$$

65) $(-1; 2; 3)$. Записать уравнение в виде

$$(x - y + z)^2 + (2x + y)^2 + (y - z + 1)^2 = 0.$$

66) $(0; 0; 0)$. Записать уравнение в виде

$$(2x - 3y - z)^2 + (y + 2z)^2 + z^2 = 0.$$

67) $(0; 0; 1)$. Записать уравнение в виде

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + 1} + x^2 + y^2 + 1 = [2 - x^2 - y^2 - (z - 1)^2].$$

68) $(0; 1)$. Так как $2x^2 + 1 \geqslant 1$, то $y - |\sin x| \geqslant 1$, откуда $y \geqslant 1$, из второго уравнения $y^2 \leqslant 1$, следовательно $y = 1$. Но тогда x должен удовлетворять равенствам $2x^2 = -\sin x$, $\operatorname{tg}^2 x = 0$, откуда $x = 0$.

69) $(0; 1)$. 70) $(0; 0)$. 71) $(0, 0)$. 72) $(1/2; \sqrt{3}/2)$.

73) $(k\pi; (2l + 1)\pi)$, $\left(k\pi; \frac{\pi}{2} + 2l\pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; (2l + 1)\pi\right)$, $k \in Z$, $l \in Z$. Воспользоваться неравенствами $\sin^2 x \geqslant \sin^4 x$, $\sin^2 y \geqslant \sin^4 y$.

74) $(-1;-1;-1)$. 75) $(2;2;2)$. 76) $(-2;-2;-2)$. 77) $(3;10)$, $(-20;36)$. 78) $(5;2)$, $(93/2;33/2)$. 79) $(-2;1)$. 80) $(1;-1/2)$. 81) $(-2;1)$.

82) $(0;0;0)$. Перемножить уравнения. 83) $(\sqrt{6};\sqrt{6}/3)$, $(-\sqrt{6};-\sqrt{6}/3)$.

84) $(2\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2};\sqrt{2})$. Умножить первое уравнение на 4 и вычесть из него второе.

85) $(1;1)$, $(-1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;-1)$. Умножить второе уравнение на 2 и сложить с первым уравнением.

86) $(2;2)$, $(-2;-2)$, $(2\sqrt{2};-2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2};2\sqrt{2})$.

87) $(1;0)$, $(0;1)$. Из первого уравнения имеем $x^2 \leqslant 1$ и $y^2 \leqslant 1$, но тогда $x^5 \leqslant x^2$ и $y^5 \leqslant y^2$, откуда $x^5+y^5 \leqslant 1$. Следовательно, $x^2=x^5$, $y^2=y^5$.

88) $(1;1;0)$. 89) $(2;2;-2)$. Выразив $x+y$ из первого уравнения, возвести затем его в квадрат и вычесть из него второе уравнение, умноженное на 2.

90) $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$.

91) $(1/\sqrt[3]{3};1/\sqrt[3]{3};1/\sqrt[3]{3})$. Первое уравнение записать в виде $(x-y)^2+$ $+(y-z)^2+(z-x)^2=0$, откуда $x=y=z$.

92) $\frac{\pi}{4}(2k+1), \frac{\pi}{2}+l\pi, \frac{\pi}{2}+\pi m$, $k,l,m \in Z$. Воспользоваться неравенствами $2\sin^2 y \leqslant 2$, $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x \geqslant 2$, откуда $\operatorname{tg}^2 x = 1$, $\sin^2 y = 1$.

93) $(8;2)$, $(1/2;1/8)$. Воспользоваться тем, что $x>0$, $y>0$, а тогда $x=8^{\log_8 x}$, $y=8^{\log_8 y}$.

94) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ $1+\sqrt{5}$, $\arccos\frac{1}{4}$.

95) $(1/2;0)$, $(3;\pi/6)$, $(3;-\pi/6)$. 96) $(0;1/2)$, $(-1;-3/2)$.

97) $(-2;3/2)$, $(0;-1/2)$. 98) $(-1/2;-1)$. 99) $(1;-1)$.

100) $(-1;-3)$, $(3;-3)$. Р е ш е н и е. Выясним, какие числа удовлетворяют условию

$$4|y|-|y-1|+(y+3)^2 \leqslant 8, \tag{1}$$

т.е. решим неравенство (1).

Для освобождения от знаков абсолютной величины разделим числовую ось на три промежутка $y \leqslant 0$, $0<y<1$ и $1 \leqslant y < +\infty$. В области $y \leqslant 0$ имеем $|y|=-y$, $|y-1|=-(y-1)$, поэтому неравенство (1) переписывается так:

$$-4y+(y-1)+(y+3)^2 \leqslant 8 \text{ или } y^2+3y \leqslant 0.$$

Решение этого неравенства есть промежуток $-3 \leqslant y \leqslant 0$. Любое значение y из этого промежутка лежит в области $y \leqslant 0$, следовательно, все y из промежутка $-3 \leqslant$ $\leqslant y \leqslant 0$ являются решением неравенства (1). В области $0<y<1$ имеем $|y|=y$, $|y-1|=-(y-1)$, поэтому неравенство (1) перепишется так:

$$4y+y-1+(y+3)^2 \leqslant 8 \text{ или } y^2+11y \leqslant 0.$$

Решение этого неравенства есть промежуток $-11 \leqslant y \leqslant 0$. Ни одно значение y из этого промежутка не лежит в области $0<y<1$ и, следовательно, в этой области нет решений неравенства (1).

В области $y \geqslant 1$ имеем $|y|=y$, $|y-1|=y-1$, поэтому неравенство (1) перепишется так:

$$4y-(y-1)+(y+3)^2 \leqslant 8 \quad \text{или} \quad y^2+9y+2 \leqslant 0.$$

Решение этого неравенства есть промежуток $\dfrac{-9-\sqrt{73}}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{-9+\sqrt{73}}{2}$. Ни одно значение y из этого промежутка не лежит в области $y \geqslant 1$. Следовательно, в этой области неравенство (1) решений не имеет. Итак, решением неравенства (1) являются все значения y из промежутка $-3 \leqslant y \leqslant 0$. Значит, второму условию задачи могут удовлетворять только такие пары чисел $(x; y)$, у которых y из промежутка $-3 \leqslant y \leqslant 0$. Поскольку

$$2^{|x^2-2x-3|-\log_2 3} = 2^{|x^2-2x-3|} \cdot \frac{1}{3},$$

то данное в условии уравнение можно записать в виде

$$2^{|x^2-2x-3|} = 3^{-y-3}. \tag{2}$$

Для любого x выполняется неравенство $2^{|x^2-2x-3|} \geqslant 1$, а для y из промежутка $-3 \leqslant y \leqslant 0$ выполняется неравенство $3^{-y-3} \leqslant 1$. Поэтому равенство (2) возможно лишь для таких пар чисел $(x; y)$, для которых одновременно выполняются условия

$$|x^2 - 2x - 3| = 0, \quad -y - 3 = 0,$$

т.е. для $y = -3$ и $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Так как $y = -3$ лежит в промежутке $-3 \leqslant y \leqslant 0$, то пары чисел $(-1 : -3)$ и $(3; -3)$ удовлетворяют условиям задачи.

101) $(1; 2)$, $(4; 2)$. 102) $(2; 0)$, $(6; 0)$.

103) $\sqrt{\pi}; \sqrt{\pi}$, $\sqrt{\pi}; -\sqrt{\pi}$, $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}; \dfrac{\sqrt{7\pi}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}; \dfrac{-\sqrt{7\pi}}{2}$. 104) $(2; 1)$.

105) $\dfrac{4}{5\pi+\sqrt{25\pi^2-16}}; \dfrac{5\pi+\sqrt{25\pi^2-16}}{4}$,
$\dfrac{4}{5\pi-\sqrt{25\pi^2-16}}; \dfrac{5\pi-\sqrt{25\pi^2-16}}{4}$.

106) $\dfrac{\pi}{4}; \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{3\pi}{4}; \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.

107) $\dfrac{\pi}{6}; -\pi$, $\dfrac{\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{6}; 0$.

108) $\arcsin \sqrt[3]{14} - \sqrt{2}$, $\arccos \dfrac{1}{\sqrt[3]{14}+\sqrt{2}}$,
$\arcsin \sqrt[3]{14} - \sqrt{2}$, $-\arccos \dfrac{1}{\sqrt[3]{14}+\sqrt{2}}$,
$\pi - \arcsin \sqrt[3]{14} - \sqrt{2}$, $\arccos \dfrac{1}{\sqrt[3]{14}+\sqrt{2}}$,
$\pi - \arcsin \sqrt[3]{14} - \sqrt{2}$, $-\arccos \dfrac{1}{\sqrt[3]{14}+\sqrt{2}}$.

109) $2; \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}; 2$. 110) $\dfrac{1}{3}; -3$, $3; -\dfrac{1}{3}$.

111) $-6; -\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}; -6$.

112) $x_1 = \dfrac{-\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}$, $y_1 = \dfrac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}$; $x_2 = \dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}$, $y_2 = \dfrac{-\sqrt{\pi^2+16}}{4}$;

$$x_3 = -\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}},\ y_3 = \frac{\sqrt{\pi^2+9}}{3};\ x_4 = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}},\ y_4 = \frac{-\sqrt{\pi^2+9}}{3}.$$

Р е ш е н и е. Обозначим произведение xy через t. Тогда первое уравнение системы можно переписать в виде

$$(\sqrt{3}+1)(1+\cos t\cdot\sin t) = (\sqrt{3}+1)\sin^2 t + \cos 2t \tag{3}$$

или, что равносильно, в виде

$$(\sqrt{3}+1)\left(\sin^2 t + \cos^2 t + \cos t\cdot\sin t\right) = (\sqrt{3}+1)\sin^2 t + \cos^2 t - \sin^2 t.$$

Поскольку очевидно, что решения уравнения удовлетворяют условию $\cos t \neq 0$, то разделив обе части последнего уравнения на $\cos^2 t$, получим уравнение

$$(\sqrt{3}+1)(\operatorname{tg} t + 1) = 1 - \operatorname{tg}^2 t, \tag{4}$$

также равносильное уравнению (3). Уравнение (4) равносильно совокупности уравнений

$$\operatorname{tg} t = -1, \quad \operatorname{tg} t = -\sqrt{3},$$

откуда

$$t = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n\in Z;\quad t = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z. \tag{5}$$

Пусть теперь t_0 — одно из найденных чисел. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} &xy = t_0,\\ &x^2y^2 - y^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Подставляя t_0 вместо xy во второе уравнение, находим, что $y = \pm\sqrt{1+t_0^2}$; далее из первого уравнения находим, что

$$x = \pm\frac{t_0}{\sqrt{1+t_0^2}}.$$

Итак, все числа x, y, удовлетворяющие двум уравнениям данной в условии задачи системы, имеют вид

$$\begin{aligned} x &= \pm\frac{t_0}{\sqrt{1+t_0^2}},\\ y &= \pm\sqrt{1+t_0^2}, \end{aligned} \tag{6}$$

где t_0 — одно из чисел (5), причем в этих формулах нужно одновременно брать знак плюс $(+)$ или знак минус $(-)$. Непосредственной проверкой легко установить, что все числа, найденные по формулам (6), где t_0 — любое из чисел (5), удовлетворяют двум уравнениям системы.

Следовательно, осталось выбрать из чисел (5) те числа t_0, для которых x и y, найденные по формулам (6), удовлетворяют условию $\dfrac{1}{x^2} + y^2 \leqslant 6$, или, что то же самое, найти в множестве чисел (5) числа, являющиеся решениями неравенства

$$\frac{1+t^2}{t^2} + 1 + t^2 \leqslant 6. \tag{7}$$

Это неравенство равносильно неравенству
$$\frac{t^4-4t^2+1}{t^2} \leqslant 0.$$
Поскольку корни квадратного трехчлена z^2-4z+1 равны $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$, то последнее неравенство равносильно двойному неравенству
$$2-\sqrt{3} \leqslant t^2 \leqslant 2+\sqrt{3}$$
или неравенству
$$\sqrt{2-\sqrt{3}} \leqslant |t| \leqslant \sqrt{2+\sqrt{3}}. \qquad (8)$$
Легко проверить, что числа $t_1=-\pi/4$ и $t_2=-\pi/3$ (см (5)) удовлетворяют неравенству (8). Если же $n\neq 0$ или $k\neq 0$, то справедливы неравенства
$$-\frac{\pi}{4}+\pi n \geqslant \pi|n|-\frac{\pi}{4} \geqslant \pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}>\frac{2\pi}{3}>2>\sqrt{2+\sqrt{3}},$$
$$-\frac{\pi}{3}+\pi k \geqslant \pi|k|-\frac{\pi}{3} \geqslant \pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}>2>\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Итак, из всех чисел (5) только два числа $t_1=-\dfrac{\pi}{4}$ и $t_2=-\dfrac{\pi}{3}$ удовлетворяют неравенству (8), а значит, и неравенству (5). Соответствующие значения x, y легко находятся теперь по формулам (6), они и дают ответ задачи.

113) $x_1=\dfrac{-\pi}{2\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4-\pi}}$, $y_1=-\dfrac{\sqrt[3]{4-\pi}}{\sqrt[3]{4}}$;

$x_2=\dfrac{-\operatorname{arctg}2}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}2-1}}$, $y_2=\sqrt[3]{\operatorname{arctg}2-1}$.

114) $(1;2)$. 115) $(1;1)$.

116) $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;-1\right)$, $n\in Z$. Р е ш е н и е. Из второго уравнения системы выразим y через x. Для краткости обозначим $4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}$ через a. Тогда второе уравнение системы можно переписать в виде
$$(25-6a)y^2+(6-2a)y+1=0. \qquad (9)$$
Докажем, что для любого решения системы не может выполняться равенство $25-6a=0$.

Если это равенство имеет место, т.е. если $a=25/6$, то из уравнения (9) находим, что $y=3/7$. Но тогда, используя первое уравнение системы, получаем, что
$$-\frac{3}{7} \leqslant y\sin x=\log_2\left(\frac{y\sin x}{1+3y}\right)=\log_2\left(\frac{3\sin x}{16}\right) \leqslant \log_2\frac{3}{16} \leqslant -2.$$
Очевидно, что получилось противоречие, которое и означает, что для любого решения системы равенство $25-6a=0$ выполняться не может.

Решая теперь уравнение (9) как квадратное относительно y, находим его корни:
$$y_1=\frac{-(3-a)+\sqrt{a^2-16}}{25-6a},\ y_2=\frac{-(3-a)-\sqrt{a^2-16}}{25-6a}.$$

Поскольку

$$a^2 - 16 = (4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x})^2 - 16 = (4^{\sin^2 x} - 4^{\cos^2 x})^2,$$

то

$$y_1 = \frac{2 \cdot 4^{\sin^2 x} - 3}{25 - 6(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x})}, \ y_2 = \frac{2 \cdot 4^{\cos^2 x} - 3}{25 - 6(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x})}.$$

Приведенные рассуждения показывают, что исходная система равносильна совокупности двух систем, которые назовем соответственно I и II:

$$\begin{aligned} & y\sin x = \log_2 \frac{y\sin x}{1+3y}, \\ & y = \frac{2 \cdot 4^{\sin^2 x} - 3}{25 - 6(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x})}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & y\sin x = \log_2 \frac{y\sin x}{1+3y}, \\ & y = \frac{2 \cdot 4^{\cos^2 x} - 3}{25 - 6(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x})}. \end{aligned}$$

Решим сначала систему I. Пользуясь вторым ее уравнением, находим

$$\frac{1+3y}{y} = 3 + \frac{1}{y} = 3 + \frac{25 - 6(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x})}{2 \cdot 4^{\sin^2 x} - 3} = \frac{16 - 6 \cdot 4^{\cos^2 x}}{2 \cdot 4^{\sin^2 x} - 3} =$$

$$= \frac{2 \cdot 4^{\cos^2 x} \cdot (2 \cdot 4^{\sin^2 x} - 3)}{2 \cdot 4^{\sin^2 x} - 3} = 2 \cdot 4^{\cos^2 x}.$$

Здесь использован тот факт, что для решений системы выполнено условие $y \neq 0$, ибо иначе в первом уравнении не будет иметь смысла выражение $\log_2 \dfrac{y\sin x}{1+3y}$.

Подставляя теперь $2 \cdot 4^{\cos^2 x}$ вместо $\dfrac{1+3y}{y}$ в правую часть первого уравнения системы, находим, что

$$\log_2 \frac{y\sin x}{1+3y} = \log_2 |\sin x| - \log_2 \frac{1+3y}{y} = \log_2 |\sin x| - \log_2 (2 \cdot 4^{\cos^2 x}) =$$

$$= \log_2 |\sin x| - 1 - 2\cos^2 x.$$

Пользуясь условием задачи $|y| \leqslant 1$, первым уравнением системы, а также очевидными неравенствами

$$\log_2 |\sin x| \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \cos^2 x \geqslant 0, \tag{10}$$

получаем, что

$$-1 \leqslant y\sin x = \log_2 |\sin x| - 1 - 2\cos^2 x \leqslant -1. \tag{11}$$

Теперь ясно, что все неравенства (10) и (11) в действительности являются равенствами, и должны выполняться следующие условия

$$\begin{aligned} & y\sin x = -1, \\ & \log_2 |\sin x| = 0, \\ & \cos x = 0, \end{aligned}$$

или, что все равно, условия

$$\begin{aligned} & y\sin x = -1, \\ & |\sin x| = 1. \end{aligned}$$

Если $\sin x = -1$, т.е. если $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$, то $y = 1$. Подставляя найденные значения x и y во второе уравнение системы I, получаем неверное равенство $1 = -1$. Если $\sin x = 1$, т.е. если $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, то $y = -1$. Подставляя найденные значения x и y в оба уравнения системы I, убеждаемся, что они им удовлетворяют. Итак, система I имеет бесконечное множество решений

$$\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z, \\ &y = -1. \end{aligned}$$

Решим теперь систему II. Пользуясь вторым уравнением системы, подобно предыдущему находим, что

$$\frac{1+3y}{y} = 2 \cdot 4^{\sin^2 x}.$$

Подставляя теперь $2 \cdot 4^{\sin^2 x}$ вместо $\dfrac{1+3y}{y}$ в правую часть первого уравнения, так же как и раньше, находим, что

$$y \sin x = \log_2 |\sin x| - 1 - 2\sin^2 x.$$

Воспользуемся теперь условием $|y| \leqslant 1$, а также неравенствами

$$\log_2 |\sin x| \leqslant 0, \quad \sin^2 x \geqslant 0.$$

Как и ранее, получим, что

$$-1 \leqslant y \sin x = \log_2 |\sin x| - 1 - 2\sin^2 x \leqslant -1,$$

откуда следует, что для решений системы II должны выполняться следующие условия

$$\begin{aligned} &y \sin x = -1, \\ &\log_2 |\sin x| = 0, \\ &\sin x = 0. \end{aligned}$$

Но последние два из этих равенств не могут выполняться одновременно. Таким образом, система II решений не имеет.

117) $(\pi n; 1)$, $n \in Z$. 118) $(2\pi n; 1/2)$, $n \in Z$. 119) $(2; -3; 3)$, $(1; 0; 0)$.

120) $(-2; 1; 2)$, $(-4; 2; 0)$. 121) $(-1; 2; 2)$, $(0; 1; 0)$.

122) Если $a \neq 4$, то одно решение; если $a = 4$, то решений нет.

123) Если $a \neq \pm 1$, то одно решение; если $a = 1$, то бесконечное множество решений; если $a = -1$, то решений нет.

124) Если $a \neq \pm 1$, то одно решение; если $a = \pm 1$, то бесконечное множество решений.

125) Если $1 < a < \sqrt{2}$, то восемь решений; если $a = \sqrt{2}$ или $a = 1$, то четыре решения; если $a < 1$ или $a > \sqrt{2}$, то решений нет.

126) Если $\sqrt{2}/2 < |a| < 1$, то восемь решений; если $|a| = \sqrt{2}/2$, или $|a| = 1$, то четыре решения; если $|a| > 1$ или $|a| < \sqrt{2}/2$, то решений нет.

127) Если $a = 0$ или $a = 2$, то два решения; если $0 < a < 2$, то четыре решения; если $a < 0$ или $a > 2$, то решений нет.

128) Если $|a| < \sqrt{2}$, то два решения; если $|a| = \sqrt{2}$, то одно решение; если $|a| > \sqrt{2}$, то решений нет.

129) Если $a < -1$ и $a \neq -2$, то два решения; если $a > 0$ и $a \neq 1$, то два решения; если $-1 \leqslant a \leqslant 0$, то решений нет.

130) Если $a \neq 0$, то два решения; если $a = 0$, то одно решение.

131) $a \neq 0$. 132) $a \neq 0$. 133) $a \neq -4$. 134) При любом a есть нулевое решение. 135) $a \in R$. 136) $|a| \geqslant 1/\sqrt{2}$. 137) Таких a нет. 138) $1/2 \leqslant a \leqslant 3/2$. 139) $0 < a < 1$, $1 < a < 81/4$. 140) $2 \leqslant a \leqslant 2\sqrt{2}$. 141) $a = 3$. 142) $a = -4$. 143) $a = -2/3$. 144) $a = -4$. 145) $|a| < 1/\sqrt{2}$. 146) $a \neq \pm 1/\sqrt{6}$. 147) $a \neq 0$. 148) $a^2 \neq 1$. 149) $a = 2\sqrt{5}$. 150) $a = -1/3$. 151) $a = 0$, $a = 2$. 152) $a = -1/4$, $a \geqslant 0$. 153) $a = 4/3$. 154) $a = 0$, $a = -1/4$. 155) $a = -2$. 156) $a = -1/2$. 157) $a = 3$, $a = -3$. 158) $2/3 \leqslant a \leqslant 3 - \sqrt{5}$, $3 - \sqrt{5} < a < 2$. 159) $a = 7 \pm 4\sqrt{3}$. 160) $a = \pm 1$, $a = \pm 2/\sqrt{5}$. 161) $a = 1$, $a = 2$, $a = \pm 2/\sqrt{3}$. 162) $a = \pm 1$, $a = \pm\sqrt{5}/2$. 163) $a = -2$, $a = -1/2$, $a = 0$. 164) $a = 9$. 165) $a = 0$. 166) $a = 1$. 167) $a = 1$. 168) $a = 2$. 169) $a = 1$. 170) $a = 2$.

171) $a = \dfrac{5}{2}$. Р е ш е н и е. Пусть a — искомое значение параметра и $(x_0; y_0)$ — решение системы. Легко видеть, что пары чисел $(-x_0; -y_0)$, $(y_0; x_0)$, $(-y_0; -x_0)$ также будут решениями системы. Решения $(x_0; y_0)$ и $(-x_0; -y_0)$ различны, так как в противном случае $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, и тогда пара чисел $(x_0; y_0)$ не удовлетворяет второму уравнению системы. Решения $(-y_0; -x_0)$ и $(x_0; y_0)$ также различны. В противном случае $x_0 + y_0 = 0$ и опять не удовлетворяется второе уравнение системы. По условию система имеет в точности два решения, значит, решения $(-x_0; -y_0)$ и $(-y_0; -x_0)$ должны совпадать, т.е. должно выполняться равенство $y_0 = x_0$. Подставляя x_0 вместо y_0 во второе уравнение системы, получаем уравнение $4x_0^2 = 14$, которое имеет два корня $x_0' = \sqrt{7/2}$ и $x_0'' = -\sqrt{7/2}$. Значит, если при данном a пара чисел $(x_0; y_0)$ решение исходной системы, то либо $x_0 = y_0 = \sqrt{7/2}$, либо $x_0 = y_0 = -\sqrt{7/2}$. В обоих случаях подставляя $(x_0; y_0)$ в первое уравнение системы, получим, что $2(1 + a) = 7/2 + 7/2$, т.е. получим, что $a = 5/2$. Значит, если a искомое значение параметра, то оно может принимать только значение $5/2$. Покажем, что при $a = 5/2$ исходная система действительно имеет два решения.

При $a = 5/2$ исходная система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 = 7, \\ &(x + y)^2 = 14. \end{aligned} \tag{12}$$

Умножим первое уравнение этой системы на 2 и вычтем результат из второго уравнения. Получим систему

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 = 7, \\ &-(x - y)^2 = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

равносильную системе (12). Система (13) равносильна системе

$$\begin{aligned} &y = x, \\ &2x^2 = 7, \end{aligned}$$

которая имеет в точности два решения $(\sqrt{7/2};\ \sqrt{7/2})$, $(-\sqrt{7/2};-\sqrt{7/2})$. Значит, действительно, $a=5/2$ и только оно удовлетворяет условию задачи.

172) $a=1/4$. 173) $a=7/3$. 174) $a=-1$; $a=-2$. 175) $a\geqslant 1$, $a=-2$. 176) $\dfrac{3\pi}{2}(4n-3)<a\leqslant\dfrac{3\pi}{2}(4n-1)$, $n\in N$.

177) $0<a<1/4$, $1/4<a\leqslant 1/3$. $x=\pm\arccos\dfrac{1-2a}{2-3a}+2\pi k$, $k\in Z$, $y=(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{2-3a}+\pi n$, $n\in Z$, $z=\dfrac{2a}{1-2a}$. Р е ш е н и е. Пусть a_0 — такое значение параметра, что при $a=a_0$ данная в условии задачи система имеет хотя бы одно решение. Пусть при $a=a_0$ она имеет решение (x_0,y_0,z_0). Это означает, что справедливы равенства

$$2\cos x_0+a_0\sin y_0=1, \tag{14}$$

$$\log_{z_0}\sin y_0=(\log_{z_0}a_0)\log_{a_0}(2-3\cos x_0), \tag{15}$$

$$\log_{a_0}z_0+\log_{a_0}\left(\frac{1}{2a_0}-1\right)=0, \tag{16}$$

при этом естественно подразумевается, что имеют смысл все числовые выражения, входящие в эти разности. То, что входящие в равенства (14)–(16) логарифмы имеют смысл, означает, что справедливы неравенства

$$a_0>0,\ a_0\neq 1,\ \frac{1}{2a_0}-1>0, \tag{17}$$

$$z_0>0,\ z_0\neq 1, \tag{18}$$

$$\sin y_0>0, \tag{19}$$

$$2-3\cos x_0>0. \tag{20}$$

Переписав равенство (16) в виде

$$\log_{a_0}z_0=\log_{a_0}\frac{2a_0}{1-2a_0},$$

получим, что

$$z_0=\frac{2a_0}{1-2a_0}. \tag{21}$$

Так как z_0 удовлетворяет неравенствам (18), то справедливы неравенства

$$\frac{2a_0}{1-2a_0}>0,\ \frac{2a_0}{1-2a_0}\neq 1. \tag{22}$$

Применяя формулу $\log_{a_0}M=\dfrac{\log_{z_0}M}{\log_{z_0}a_0}$, равенство (15) можно переписать в виде

$$\log_{z_0}\sin y_0=\log_{z_0}(2-3\cos x_0)$$

или в виде

$$\sin y_0=2-3\cos x_0.$$

Подставляя $2-3\cos x_0$ вместо $\sin y_0$ в равенство (14) найдем, что

$$\cos x_0=\frac{1-2a_0}{2-3a_0}, \tag{24}$$

но тогда из (23) получим, что

$$\sin y_0 = \frac{1}{2-3a_0}. \tag{25}$$

Так как $\sin y_0$ удовлетворяет неравенству (19) и так как $\sin y_0 \leqslant 1$, то справедливо неравенство

$$0 < \frac{1}{2-3a_0} \leqslant 1. \tag{26}$$

Так как $\cos x_0$ удовлетворяет неравенству (20) и так как $\cos x_0 \geqslant -1$, то справедливо неравенство

$$-1 \leqslant \frac{1-2a_0}{2-3a_0} < \frac{2}{3}. \tag{27}$$

Итак, если значение параметра a_0 удовлетворяет условию задачи, то для него справедливы неравенства (17), (22), (26) и (27). Неравенства (17) означают, что $0 < a_0 < 1/2$. Для a_0 из промежутка $(0, 1/2)$ первое неравенство (22) справедливо, а второе означает, что $a_0 \neq 1/4$. Если $0 < a_0 < 1/2$ и $a_0 \neq 1/4$, то левое неравенство (26) справедливо, а правое означает, что $a_0 \leqslant 1/3$. Итак, неравенствам (17), (22) и (26) удовлетворяют все a_0 из двух промежутков $0 < a_0 < 1/4$ и $1/4 < a_0 \leqslant 1/3$. Легко проверяется, что для любого такого a_0 справедливо неравенство (27). Следовательно, если a_0 — значение параметра a — удовлетворяет условию задачи, то a_0 есть число либо из промежутка $0 < a_0 < 1/4$ либо из промежутка $1/4 < a_0 \leqslant 1/3$.

Как следует из проведенных выше рассуждений, для любого числа a_0 либо из промежутка $0 < a_0 < 1/4$ либо из промежутка $1/4 < a_0 \leqslant 1/3$ исходная система имеет решение (x_0, y_0, z_0) такое, что оно удовлетворяет равенствам (21), (24) и (25).

Следовательно, условию задачи удовлетворяют все значения a из двух промежутков $0 < a < 1/4$ и $1/4 < a \leqslant 1/3$: при каждом таком значении a исходная система имеет решения, полученные из (24), (25), (21).

178) $2 \leqslant a < 5/2$, $5/2 < a < 5$;

$$(-1)^k \arcsin\frac{1}{3+2a} + \pi k; \pm\arccos\frac{5+a}{3+2a} + 2\pi n; \frac{a}{5-a}\quad, \ k \in Z, \ n \in Z.$$

179) $3/2 < a < 2$, $2 < a < 4$;

$$(-1)^k \arcsin\frac{1-a}{2a-1} + 2\pi k; \pm\arccos\frac{1}{1-2a} + 2\pi n; \frac{a}{4-a}\quad, \ k \in Z, \ n \in Z.$$

180) $4 < a < 5$, $5 < a < 10$;

$$(-1)^k \arcsin\frac{1+2a}{5a-2} + \pi k; \pm\arccos\frac{4-a}{2-5a} + 2\pi n, \frac{a}{10-a}\quad, \ k \in Z, \ n \in Z.$$

181)
$$\frac{1}{9} + \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{13}{36} + \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{12}\quad;$$
$$\frac{1}{9} - \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{13}{36} - \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{2}\quad;$$
$$\frac{1}{9} + \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{13}{36} + \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{12}\quad;$$
$$\frac{1}{9} - \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{13}{36} - \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{12}\quad.$$

Р е ш е н и е. Перепишем исходную систему в виде

$$\begin{aligned} &6(x+2y)^2 + 2(x+2y)(3n-2) + 3 = 0, \\ &4(x-y)^2 - 2(x-y)(2n+1) + 2n^2 - \frac{5}{2} = 0, \end{aligned}$$

затем в виде

$$\begin{aligned} &6\left[(x+2y)^2 + 2(x+2y)\cdot\frac{3n-2}{6} + \left(\frac{3n-2}{6}\right)^2 - \left(\frac{3n-2}{6}\right)^2\right] + 3 = 0, \\ &4\left[(x-y)^2 - 2(x-y)\frac{2n+1}{4} + \left(\frac{2n+1}{4}\right)^2 - \left(\frac{2n+1}{4}\right)^2\right] + 2n^2 - \frac{5}{2} = 0 \end{aligned}$$

и, наконец, в виде

$$\begin{aligned} &6\left(x+2y+\frac{3n-2}{6}\right)^2 = \frac{9n^2-12n-14}{6}, \\ &4\left(x-y-\frac{2n+1}{4}\right)^2 = \frac{-4n^2+4n+11}{4}. \end{aligned} \tag{28}$$

Теперь очевидно, что если $9n^2 - 12n - 14 < 0$, то первое уравнение системы (28) решений не имеет; аналогично при $-4n^2 + 4n + 11 < 0$ не имеет решений второе уравнение системы (28). Следовательно, исходная система может иметь решения только тогда, когда n одновременно удовлетворяет условиям $9n^2 - 12n - 14 \geqslant 0$ и $-4n^2 + 4n + 11 \geqslant 0$, т.е. в том случае, когда n есть решение системы неравенств

$$\begin{aligned} &9n^2 - 12n - 14 \geqslant 0, \\ &4n^2 - 4n - 11 \leqslant 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Второе из этих неравенств верно только для n из промежутка $\frac{1}{2} - \sqrt{3} \leqslant n \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{3}$. Так как n — целое число, то второе неравенство справедливо лишь для $n = -1$, $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$. Легко видеть, что из этих n первому неравенству (29) удовлетворяет лишь $n = -1$. Итак, только при $n = -1$ исходная система может иметь решения. Выясним, имеет ли система (28) решения при $n = -1$. При $n = -1$ система (28) запишется в виде

$$\begin{aligned} &(6x + 12y - 5)^2 = 7, \\ &(4x - 4y + 1)^2 = 3. \end{aligned} \tag{30}$$

Первое уравнение системы (30) равносильно совокупности двух уравнений

$$6x + 12y - 5 = \sqrt{7} \quad \text{и} \quad 6x + 12y - 5 = -\sqrt{7}.$$

Второе уравнение системы (30) равносильно совокупности двух уравнений

$$4x - 4y + 1 = \sqrt{3} \quad \text{и} \quad 4x - 4y + 1 = -\sqrt{3}.$$

Следовательно, исходная система уравнений при $n = -1$ равносильна совокупности четырех систем уравнений

$$\begin{aligned} &6x + 12y - 5 = \sqrt{7}, \qquad && 6x + 12y - 5 = \sqrt{7}, \\ &4x - 4y + 1 = \sqrt{3}, && 4x - 4y + 1 = -\sqrt{3}, \end{aligned}$$

$$6x + 12y - 5 = -\sqrt{7}, \qquad 6x + 12y - 5 = -\sqrt{7},$$
$$4x - 4y + 1 = \sqrt{3}, \qquad 4x - 4y + 1 = -\sqrt{3}.$$

Каждая из этих систем уравнений имеет единственное решение, следовательно, исходная система при $n = -1$ имеет четыре решения.

182) $\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$;
$\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$;
$\frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$;
$\frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

183) $(2 - 2\sqrt{5}; -4\sqrt{5})$, $(2 + 2\sqrt{5}; 4\sqrt{5})$, $(-2\sqrt{5}; -2 - 4\sqrt{5})$, $(2\sqrt{5}; -2 + 4\sqrt{5})$.
184) $(6 + \sqrt{2}; \sqrt{2} - 2)$, $(6 - \sqrt{2}; -2 - \sqrt{2})$, $(4 + \sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(4 - \sqrt{2}; -\sqrt{2})$.
185) $a = -2$. 186) $a = 3$. 187) $a = -7$. 188) $a = -2/3$. 189) $a = -1$.
190) $a = 1$. 191 $a = \pm 1/2$, $a = \pm 1/3$. 192) $a = 0$. 193) $a = 1$.
194) $a = 0$, $a = -2$, $a = 2$.

195) Если $a \neq \pm 1$, то $\frac{1 - 2a^2}{1 - a^2}; \frac{a}{1 - a^2}$; если $a = \pm 1$, то решений нет.

196) Если $a \neq \pm 1$, то $(0; a)$; если $a = 1$, то $(c; 1 - c)$, где $c \in R$; если $a = -1$, то $(c + 1; c)$, где $c \in R$.

197) Если $a \neq 0$ и $a \neq -1$, то $2; -\frac{1}{3a}$; если $a = -1$, то $(3c + 1; c)$, где $c \in R$; если $a = 0$, то решений нет.

199) Если $a \neq -2$ и $a \neq 1$, то $\frac{1}{a+2}; \frac{1}{a+2}; \frac{1}{a+2}$; если $a = 1$, то $(p; q; 1 - p - q)$, где $p \in R$, $q \in R$; если $a = -2$, то решений нет.

200) Если $a = 0$, то $(c; c)$, где $c \in R$; если $a \neq 0$, то $(3a/2; 9a/2)$, $(3a/2; -9a/2)$.

201) Если $a < -1$ и $a \neq -2$, то $(-a - 1; (a + 1)^2)$, $((a + 1)^2; -a - 1)$; если $-1 \leqslant a \leqslant 0$ или $a = -3$, то решений нет; если $a > 0$ и $a \neq 1$, то $(a; a^2)$, $(a^2; a)$.

202) Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то $(8; 1/2)$; $(1/2; 8)$.

203) Если $a = 1$, то $(c; 2 - c)$, где $c \leqslant 1$, $c \in R$; если $a > 1$, то решений нет; если $a < 1$, то $x = \frac{1 + a}{2}$, $y = \frac{3 - a}{2}$.

204) Если $a > 0$, то $(-a/2; c)$, где $|c| \leqslant a/2$; если $a = 0$, то $(c; 0)$, где $c \geqslant 0$; если $a < 0$, то решений нет.

205) Если $a \neq 0$, то $(1 - a; a; 0)$; если $a = 0$, то $(1; c; 0)$, где $c \in R$.

206) Если $a \neq 0$, то $(0; a)$, $(a; 0)$; если $a = 0$, то $(c; -c)$, где $c \in R$.

207) Если $a \neq 0$, то $a\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}; a\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, $-a\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}; -a\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$; если $a = 0$, то $(0; 0)$.

208) Если $|a| > 1/2$, то $\frac{4|a| + \sqrt{4a^2 + 3}}{4(4a^2 - 1)}; \frac{1}{4}$; если $0 \leqslant |a| \leqslant 1/2$, то решений нет.

209) Если $a > -2$, то $\quad 0; \dfrac{a - \sqrt{a^2+4}}{2} \quad;$

если $a = -2$, то $(0; 1)$, $\quad 0; \dfrac{a - \sqrt{a^2+4}}{2} \quad;$

если $a < -2$, то $\quad 0; \dfrac{a - \sqrt{a^2+4}}{2} \quad, \quad 0; \dfrac{-a + \sqrt{a^2-4}}{2} \quad, \quad 0; \dfrac{-a - \sqrt{a^2-4}}{2} \quad.$

210) Если $a > 4$, то $(0; \log_2 a - 2)$, $\quad \log_2 \dfrac{a-2}{2}; 0 \quad.$

211) Если $-\infty < a < \sqrt{3}$, то $(0; a + \sqrt{a^2+3})$; если $\sqrt{3} \leqslant a < +\infty$, то $(0; a + \sqrt{a^2+3})$, $(0; -a - \sqrt{a^2+3})$, $(0; \sqrt{a^2+3} - a)$.

212) При любом a решения: $(\pi n; (-1)^k a + \pi k)$, $((-1)^n a + \pi n, \pi k)$, $k \in Z$, $n \in Z$.

213) Если $1 - \sqrt{2} \leqslant a \leqslant -1 + \sqrt{2}$, то

$$(\pi n + (-1)^n \arcsin(a^2 + 2a), \quad 2\pi k \pm \arccos(a^2 - 2a)),$$
$$(\pi n + (-1)^n \arcsin(a^2 - 2a), \quad 2\pi k \pm \arccos(a^2 + 2a)), \quad n \in Z,\ k \in Z.$$

Если $a > -1 + \sqrt{2}$ или $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, то

$$\frac{(-1)^n \arcsin(a^2+a)}{2} + \frac{(-1)^k \arcsin(a^2-a) + (n+k)\pi}{2};$$
$$\frac{(-1)^n \arcsin(a^2+a)}{2} - \frac{(-1)^k \arcsin(a^2-a) + (n-k)\pi}{2} \quad; n \in Z, k \in Z.$$

215) Если $a = 0$, то $\quad \dfrac{\pi}{2} + (n+m)\pi; (n-m)\dfrac{\pi}{2} \quad$, $n \in Z$, $m \in Z$; если $a \neq 0$, то решений нет, так как тогда $a^2 + 1 \geqslant 1$, но $|\sin x \cdot \cos 2y| \leqslant 1$.

216) Если $a > 0$, $a \neq 1$, $2\sqrt{a} \leqslant |a(1-a)|$, то

$$\operatorname{arctg}\sqrt{a} + \pi k, \pm \arccos \frac{2\sqrt{a}}{a(1-a)} + 2\pi n \quad,$$
$$-\operatorname{arctg}\sqrt{a} + \pi k, \pm \arccos \frac{2\sqrt{a}}{a(a-1)} + 2\pi n \quad, \quad k \in Z, \quad n \in Z.$$

217) $a = 1$; если $a = 1$, то $\quad \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}(1 - \sqrt{7}), \cos\dfrac{\pi}{4}(1 + \sqrt{7}) \quad.$

218) $a < 6$. $\quad$ 219) $a < 0$. $\quad$ 220) $a < 70$. $\quad$ 221) $-7/15 < a < 10/7$.

222) $-8 - \sqrt{71} < a < 0$, $\sqrt{71} + 8 < a < 8/3$.

223) $(\sqrt{\pi}; \pm\sqrt{\pi})$, $(\sqrt{\pi}/2; \pm\sqrt{7\pi}/2)$. $\quad$ 224) $a = \pm 1$.

225) $(\pi; \pi)$ при любом $a > 0$; если $1 \leqslant a \leqslant 2$, то решениями являются также

$$\arcsin \sqrt{\frac{4-a^2}{3}}; \arcsin \sqrt{\frac{4-a^2}{3a^2}} \quad;$$
$$\pi - \arcsin \sqrt{\frac{4-a^2}{3}}; \pi - \arcsin \sqrt{\frac{4-a^2}{3a^2}} \quad,$$

$$\pi + \arcsin\sqrt{\frac{4-a^2}{3}};\ \arcsin\sqrt{\frac{4-a^2}{3a^2}},$$
$$2\pi - \arcsin\sqrt{\frac{4-a^2}{3}};\ \pi - \arcsin\sqrt{\frac{4-a^2}{3a^2}}.$$

§ 5

1) 45 мин. 2) 20 км/ч. 3) 50 км/ч, 100 км/ч.

4) Скорости пароходов равны 15 км/ч, скорость реки 3 км/ч.

5) 2 км.

6) 20 м. Р е ш е н и е. Найдем путь, пройденный автомобилем за 9 с. Поскольку в первую секунду после достижения пункта A автомобиль проехал 30 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую, то расстояние, пройденное им в каждую секунду, составляет арифметическую прогрессию, первый член a_1 которой равен 30, а разность d равна (-2). Так как путь, пройденный автомобилем за 9-ю секунду, равен $a_9 = a_1 + d(9-1) = 30 + (-2)\cdot 8 = 14$ (м), то путь, пройденный автомобилем за 9 с, равен $\frac{a_1+a_9}{2}\cdot 9 = \frac{30+14}{2}\cdot 9 = 198$ (м). Следовательно, в тот момент, когда автобус выехал из пункта B расстояние между ним и автомобилем было равно $258 - 198 = 60$ (м). За первую секунду после выезда автобуса автомобиль проедет 12 м, а автобус 2 м. Значит, они сблизятся на 14 м, т.е. им останется проехать $60 - 14 = 46$ (м). За вторую секунду они проедут $(12-2)+(2+1) = 13$ (м) и им останется проехать $46 - 13 = 33$ (м). За четвертую секунду они проедут $(8-2)+(4+1) = 11$ (м) и им останется проехать 10 м. За пятую секунду автомобиль проедет $6 - 2 = 4$ (м), а автобус проедет $5+1 = 6$ (м). Следовательно, автобус и автомобиль встретятся через 5 с после выезда автобуса из пункта B. За это время автобус проедет путь, равный $2+3+4+5+6 = 20$ (м).

7) $v_1 = 7$ км/ч, $v_2 = 6\frac{1}{3}$ км/ч, $v_3 = 6\frac{1}{2}$ км/ч. Р е ш е н и е. Обозначим скорости туристов соответственно через v_1 км/ч, v_2 км/ч, и v_3 км/ч. Тогда

$$v_3 > v_2, \quad v_1 - v_3 = \frac{1}{2}, \quad 5 < v_j < 8, \quad j = 1, 2, 3.$$

а) Заметим сначала, что если у каких-либо туристов совпадают первые два отрезка пути, то должны полностью совпадать и их маршруты. Ведь по условию каждый маршрут состоит из трех отрезков и проходит через все четыре города (рис. 112). По условию все маршруты различны. Значит, можно сделать вывод, что у любых двух туристов пути отличаются уже после прохождения первых двух дорог.

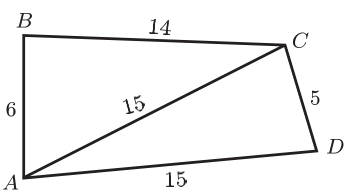


Рис. 112

б) Если туристы вышли из города A, то (см. а)) кто-нибудь из них должен идти по диагонали AC, но тогда он не сможет пройти через все четыре города (его маршрут состоит только из трех отрезков), следовательно, туристы не могли выйти из города A. По аналогичным причинам не могли они выйти из города C. Итак, туристы вышли либо из города B, либо из города D.

в) По условию первый и второй туристы встретились перед прохождением третьих дорог, поэтому (см. а)) первый и второй туристы вышли по разным дорогам и встретились в противоположной вершине четырехугольника. Так как $v_1 > v_2$, то длина пути первого туриста до встречи со вторым равна $|AB| + |AD| = 21$, а длина пути второго до той же встречи равна $|BC| + |CD| = 19$. Получаем уравнение

$$\frac{21}{v_1} = \frac{19}{v_2}.$$

г) Второй отрезок пути третьего туриста совпадает с AC (см. а)), а длина всего пути равна или

$$|BC| + |CA| + |AD| = 44,$$

или

$$|AB| + |AC| + |CD| = 26.$$

В первом случае путь третьего туриста самый длинный. Поскольку $v_1 > v_3$, то первый турист пришел раньше третьего. Длина пути второго туриста не превосходит 34 км, значит, время его пути не больше $\frac{34}{v_2}$, а время в пути третьего туриста равно $\frac{44}{v_3}$. Имеем

$$\frac{44}{v_3} = \frac{44}{v_1 - \frac{1}{2}} > \frac{44}{v_1} = \frac{44 \cdot 19}{21 \cdot v_2} > \frac{34}{v_2}.$$

Итак, в первом случае третий турист должен прийти в конечный пункт последним, но это противоречит условию задачи. Следовательно, длина пути третьего туриста равна не 44 км, а 26 км.

д) Предположим, что туристы вышли из города B. Тогда путь первого — $BADC$, путь второго — $BCDA$, путь третьего — $BACD$. Длины путей равны соответственно 26 км, 34 км, 26 км, а времена, затраченные на всю дорогу, равны $\frac{26}{v_1}$ ч; $\frac{34}{v_2}$ ч; $\frac{26}{v_3}$ ч. Из в) следует, что первый турист закончил маршрут раньше второго $\frac{26}{v_1} < \frac{34}{v_2}$. Пользуясь условием, находим $\frac{34}{v_2} = 1 + \frac{26}{v_3}$: так как $v_3 \leqslant 8$, то $\frac{34}{v_2} \leqslant \frac{8 + 26}{v_3}$ или $v_3 \leqslant v_2$, что противоречит условию.

Итак, туристы вышли из города D, путь первого — $DABC$, второго — $DCBA$, третьего $DCAB$. Длины путей равны соответственно 35 км, 25 км, 26 км, а времена на всю дорогу равны $\frac{35}{v_1}$ ч, $\frac{25}{v_2}$ ч, $\frac{26}{v_3}$ ч. Из в) следует, что последним пришел первый турист $\frac{35}{v_1} > \frac{25}{v_2}$. Получаем систему уравнений

$$\frac{35}{v_1} = 1 + \frac{26}{v_3},$$
$$v_1 - v_3 = 1/2,$$

откуда $\frac{35}{v_1} = 1 + \frac{26}{v_1 - 1/2}$ или $v_1^2 - \frac{19}{2} v_1 + \frac{35}{2} = 0$. Корни этого уравнения равны 7 и 5/2. По условию скорости расположены в промежутке от 5 до 8 км, значит, второй корень не подходит. Следовательно, $v_1 = 7$, $v_3 = v_1 - \frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{19}{21}v_1 = \frac{19}{3}$. Легко проверить, что найденные значения скоростей удовлетворяют всем условиям задачи. 8) 9 км. 9) 15 м. 10) $b = 1/2$.

11) В бригадах было по 9 человек. Р е ш е н и е. Обозначим через x число членов в первой бригаде; тогда во второй бригаде было $(18 - x)$ человек, причем из них $(15 - x)$ юношей. Продолжительность дежурства любого члена первой бригады равна $\frac{48}{x}$ ч, а продолжительность дежурства каждого юноши второй бригады равна $\frac{24-3}{15-x}$ ч. По условию задачи

$$\frac{21}{15-x} + \frac{48}{x} < 9.$$

Проделав очевидные преобразования, перепишем это неравенство так:

$$\frac{(x-8)(x-10)}{x(15-x)} < 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, получим, что оно удовлетворяется для x из промежутков $-\infty < x < 0$, $8 < x < 10$ и $15 < x < +\infty$. Так как x (число членов бригады) — целое положительное число и так как из условия следует, что $x < 15$, то условию задачи удовлетворяет только одно число $x = 9$.

12) 40 %, $43\frac{1}{3}$ %.

13) 2 раза.

14) Глицерина 0,5 л, воды 3,5 л.

15) 3 л.

16) $18\frac{1}{3}$ кг. Р е ш е н и е. Обозначим через u кг и v кг соответственно количество соли в первом и во втором сосудах, а через x кг и y кг количество испарившейся воды. Тогда из условия задачи имеем

$$\frac{\frac{u}{5-x}}{\frac{u}{5}} = p \quad \text{и} \quad \frac{\frac{v}{20-y}}{\frac{v}{20}} = q,$$

или

$$\frac{5}{5-x} = p, \quad \frac{20}{20-y} = q.$$

Из первого равенства находим $x = 5 - \frac{5}{p}$, а из второго $y = 20 - \frac{20}{q}$. Поэтому количество испарившейся воды равно

$$x + y = 25 - \frac{5}{q} - \frac{20}{q},$$

или, в силу равенства $pq = 9$,

$$x + y = 25 - \quad \frac{5}{q} + \frac{20}{9}p \quad .$$

Пользуясь неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел, находим, что

$$\frac{5}{p} + \frac{20}{9}p \geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{5}{p} \cdot \frac{20}{9}p} = \frac{20}{3}$$

и, значит, $x + y \leqslant 25 - \frac{20}{3} = 18\frac{1}{3}$. Итак, в условиях задачи не может испариться более $18\frac{1}{3}$ кг воды.

Если $\frac{5}{p} = \frac{20p}{9}$, т.е. $p = \frac{3}{2}$, то неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим обращается в равенство. При этом из первого сосуда испарится $x = 5 - \frac{5}{p} = \frac{5}{3}$ кг из второго сосуда $y = 20 - \frac{20}{9}p = \frac{50}{3}$ кг воды, а общее количество испарившейся воды будет равно $\frac{5}{3} + \frac{50}{3} = 18\frac{1}{3}$.

17) 144 человека. Решение. Обозначим через x число рядов в роте при прибытии роты на парад. Численность роты равна $24x$ солдат. После перестройки роты число рядов стало $x - 2$, а число солдат в новом ряду стало $26 + (x - 2)$. Для парада осталось $(x - 2)(24 + x)$ солдат. Число солдат, не участвовавших в параде,

$$24x - (x - 2)(24 + x) = -x^2 + 2x + 48.$$

Корнями квадратного трехчлена $-x^2 + 2x + 48$ являются $x_1 = -6$ и $x_2 = 8$, значит, он положителен при $-6 < x < 8$. Так как x — число рядов, то x — число положительное, и потому $1 \leqslant x \leqslant 7$. Нам надо из промежутка $1 \leqslant x \leqslant 7$ выбрать такие натуральные x, чтобы выражение $A = 24x$ являлось полным квадратом. Имеем соответственно: $A = 24$ при $x = 1$, $A = 48$ при $x = 2$, $A = 72$ при $x = 3$, $A = 96$ при $x = 4$, $A = 120$ при $x = 5$, $A = 144$ при $x = 6$, $A = 168$ при $x = 7$. Среди этих чисел A только 144 является полным квадратом. Следовательно, $x = 6$, и численность роты равна $26 \cdot 6 = 144$ человека.

18) 1750 т. Решение. Обозначим через n количество вагонов вместимостью 50 тонн, в которые был загружен весь груз. Тогда вес груза равен $50n$ тонн. Вагонов вместимостью 60 тонн было использовано $n - 5$. Так как в них был помещен весь груз и один вагон оказался не полностью загруженным, то $60(n - 5) > 50n$ и $60(n - 6) < 50n$. Из этих неравенств следует, что $300 < 10n < 360$ или $30 < n < 36$. Поскольку n — целое число, то $31 \leqslant n \leqslant 35$. Вагонов вместимостью 80 тонн при погрузке было использовано $n - 13$. Подобно предыдущему получаем, что $80(n - 13) > 50n$ и $80(n - 14) < 50n$ или $\frac{104}{3} < n < \frac{112}{3}$. Так как $\frac{104}{3} = 34\frac{2}{3}$, $\frac{112}{3} = 37\frac{1}{3}$, а n — целое число, то $35 \leqslant n \leqslant 37$. Из неравенств $31 \leqslant n \leqslant 35$ и $35 \leqslant n \leqslant 37$ следует, что $n = 35$. Значит, вес груза равен $50 \cdot 35 = 1750$ тонн.

19) 42,3%.

20) 33. Решение. Пусть n — число учеников в том классе, о котором сообщалось в газете, m — число учеников этого класса, повысивших успеваемость.

Тогда процент учеников, повысивших успеваемость, равен $\frac{m}{n} \cdot 100$. По условию задачи

$$2{,}9 \leqslant \frac{m}{n} \cdot 100 \leqslant 3{,}1. \tag{31}$$

Из неравенства (31) следует, что $m \neq 0$ (т.е. $m \geqslant 1$) и $n \geqslant \frac{1000}{31}m$. Поскольку очевидно, что $\frac{1000}{31}m \geqslant \frac{1000}{31} > 32$, то $n \geqslant 33$. Итак, в классе, о котором сообщается в газете, учеников не меньше, чем 33. Теперь надо выяснить, какое минимальное число учеников все-таки может быть в классе. Легко видеть, что если в классе будет 33 ученика и один из них повысит успеваемость, т.е. если $n = 33$ и $m = 1$, то такая пара чисел удовлетворяет неравенству (31). Значит, в классе, о котором сообщается в газете, минимально возможное число учеников 33.