ММ

Σ

И. Г. Петровский

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

МГУ

И. Г. Петровский

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Издание четвертое, исправленное

Под редакцией О. А. Олейник

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов физико-математических специальностей университетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1984

И. Г. Петровский (1901—1973)

УДК 517.94

Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений / Под ред. О. А. Олейник. — 4-е изд., испр. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. — 136 с.

В книге дано простое и доступное изложение теории Фредгольма, теории уравнений Вольтерра и теории Гильберта—Шмидта интегральных уравнений с симметрическим ядром. Это классическая теория линейных интегральных уравнений, которая является необходимым элементом университетского образования математиков и физиков.

Ил. 2.

Иван Георгиевич Петровский

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зав. редакцией С. И. Зеленский. Редактор Р. Д. Солод. Мл. редактор О. Е. Силантьева. Технический редактор Г. Д. Колоскова. Корректоры В. П. Кададинская, Г. В. Зотова
Тематический план 1984 г. № 97 ИБ № 1846
Сдано в набор 02.11.83. Подписано к печати 17.04.84. Л-79775. Формат 84×108/32 Бумага тип. № 3 Гарнитура литературная Высокая печать Усл. печ. л. 7,14 Уч.-изд. л. 6,54 Тираж 13500 экз. Заказ 258
Цена 20 коп Изд. № 2737
Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета 103009, Москва, ул. Герцена, 5/7. Типография ордена «Знак почета» изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы

$$\text{П}\frac{1702050000-048}{077(02)-84}97-84$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Эти лекции я читал в 1946 г. в Московском государственном университете. Мою рукопись просмотрели П. С. Александров, И. М. Гельфанд и А. Д. Мышкис. Они сделали ряд очень ценных замечаний, которые я использовал при окончательном редактировании и за которые их горячо благодарю.

И. Петровский

28 мая 1947 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке этого издания я использовал те замечания к первому изданию, которые были сделаны И. М. Гельфандом, С. Н. Крачковским, С. Г. Михлиным, А. Д. Мышкисом и О. А. Олейник. Особенно большую помощь оказала мне О. А. Олейник. Всех этих товарищей я горячо благодарю.

И. Петровский

14 февраля 1951 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Теория линейных интегральных уравнений возникла в начале XX века в связи с изучением задач математической физики. В настоящее время она представляет собой важный раздел современной математики, имеющий широкие приложения в теории дифференциальных уравнений, классической и современной математической физике, в задачах естествознания и техники. Поэтому владение методами теории интегральных уравнений необходимо не только математику, но и механику, физику, инженеру-исследователю.

Настоящая книга является четвертым изданием учебника «Лекции по теории интегральных уравнений», написанного выдающимся советским математиком И. Г. Петровским в 1947 г. на основе курса лекций, которые он читал в 1946 г. на механико-математическом факультете Московского государственного университета. В соответствии с учебными планами МГУ того времени теория линейных интегральных уравнений входила в курс уравнений математической физики. Такое положение сохранилось до сих пор во многих университетах и вузах нашей страны. Это нашло отражение в ряде учебников по курсу уравнений математической физики (см., например, С. Л. Соболев. Уравнения математической физики. Изд. 4-е. М.: Наука, 1966; В. С. Владимиров. Уравнения математической физики. Изд. 4-е. М.: Наука, 1981; С. Г. Михлин. Курс математической физики. М.: Наука, 1968), где отдельные главы посвящены изложению теории линейных интегральных уравнений. В конце сороковых годов в учебный план механико-математического факультета МГУ по инициативе А. Н. Колмогорова был включен курс «Анализ III», который объединил теорию функций действительного переменного, вариационное исчисление и линейные интегральные уравнения. В этом курсе обычно теория линейных интегральных уравнений излагается с общих позиций операторных уравнений и теории компактных операторов. Такое положение определяется бурным развитием функционального анализа, проникновением его идей и методов в другие области математики и особенно в теорию интегральных уравнений и уравнений с частными производными и соответствует историческому пути развития теории линейных интегральных уравнений. Начало этой теории было положено знаменитыми работами И. Фредгольма «Sur une nouvelle méthode pour la résolution du probléme de Dirichlet» (Kong. Vetenskaps — Akademiens Förh. Stockholm, 1900, S. 39—46) и «Sur une classe d'equations fonctionnelles» (Acta Math., 1903, v. 27, p. 365—390).

В этих работах была построена теория линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода и с помощью этой теории впервые было получено решение краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Эту теорию можно рассматривать как широкое обобщение теории линейных алгебраических систем, так как линейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода обладают свойствами, близкими свойствам таких систем. Фредгольм исходил из идеи аппроксимации интеграла, входящего в интегральное уравнение, конечными интегральными суммами. Им получены решения интегральных уравнений с помощью так называемых определителей Фредгольма, доказаны теоремы об альтернативе Фредгольма. Эта красивая, хотя и несколько громоздкая, теория излагалась позднее в ряде учебных руководств (см., например, Э. Гурса. Курс математического анализа, т. III, ч. II. М.—Л.: ГТТИ, 1934; И. И. Привалов. Интегральные уравнения. М.: ОГИЗ, 1935; У. В. Ловитт. Линейные интегральные уравнения. М.—Л.: ГТТИ, 1933; Ф. Трикоми. Интегральные уравнения. М.: ИЛ, 1960; С. Г. Михлин. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959).

В 1907—1908 гг. Э. Шмидтом был предложен новый подход к построению теории линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Этот подход основан на представлении ядра интегрального оператора в виде суммы вырожденного ядра и ядра, малого по некоторой норме. Он позволяет значительно упростить вывод основных теорем Фредгольма. Идея Э. Шмидта используется в главе 1 настоящей книги при изложении теории Фредгольма.

В 1917 г. Ф. Рисс исследовал класс функциональных уравнений очень общей природы и установил для них теоремы Фредгольма, основываясь лишь на понятии вполне непрерывного оператора (см. Ф. Рисс. О линейных функциональных уравнениях.— Успехи математических наук, 1935, вып. 1, с. 175—199). Эти исследования были продолжены Ю. Шаудером и другими математиками. В настоящее время абстрактная теория функциональных уравнений, построенная Ф. Риссом, получила широкие обобщения, в частности для операторов в банаховых и локально-выпуклых пространствах (см. А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967). Теория Ф. Рисса включает значительную часть фредгольмовской теории интегральных уравнений. Изложение основ теории Рисса можно найти, например, в следующих учебных руководствах: Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979; А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972; С. Мизохата. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977 и других. Теория линейных интегральных уравнений Фредгольма излагается в той или иной мере почти во всех современных учебниках по функциональному анализу как приложение теории компактных операторов на основе идеи Ф. Рисса.

В начале нашего века трудами Д. Гильберта и Э. Шмидта была создана теория линейных интегральных уравнений Фредгольма с симметрическим ядром. Дальнейшее развитие этой теории связано с работами Т. Карлемана, Ф. Рисса, Дж. Неймана и других. Этой теории посвящена глава 3 настоящей книги. Теория интегральных операторов с симметрическим ядром имеет исключительно важные приложения в теоретической физике и других разделах естествознания. Большую роль в ее развитии сыграли монография Д. Гильберта «Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen» (Leipzig, 1912), а также книга Р. Куранта и Д. Гильберта «Методы математической физики», т. 1 (М.—Л.: Гостехиздат, 1951). Эта теория также нашла обобщения для операторных уравнений и составляет одну из основных глав современного функционального анализа — теорию симметрических вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве. Ее изложение содержится в учебниках по функциональному анализу и включает основные результаты теории интегральных операторов Гильберта—Шмидта (см., например, Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979; М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. I. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977; Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977 и другие).

Настоящая книга И. Г. Петровского была одним из первых учебников, где теория линейных интегральных уравнений Фредгольма излагалась на основе идеи Э. Шмидта. Такое изложение придает теории доступность, простоту и изящество. Основная часть книги не использует теорию интеграла Лебега. Она доступна не только математикам, но и широким кругам физиков и инженеров; чтение книги требует лишь знания основ классического математического анализа. В дополнении к основному тексту книги указаны те изменения, которые необходимо учесть, если в интегральных уравнениях заменить интеграл Римана на интеграл Лебега. Большой ясности изложения способствует проведение в книге аналогий с теорией линейных алгебраических систем и геометрией квадратичных форм в эвклидовом пространстве. Изложение теории Гильберта—Шмидта в главе 3 отличается наглядностью и простотой. Книга содержит также главу 2 об интегральных уравнениях Вольтерра. Более подробно с уравнениями Вольтерра можно познакомиться по упоминавшейся выше книге Ф. Трикоми. В настоящей книге не излагается теория сингулярных интегральных уравнений, так как она не включается в учебные программы университетов. Основы этой теории были заложены в работах Д. Гильберта, А. Пуанкаре, Т. Карлемана, Ф. Нётера. Она получила дальнейшее развитие в работах Н. И. Мусхелишвили и грузинской математической школы, а также в работах С. Г. Михлина, А. Кальдерона, А. Зигмунда и других математиков. Эта теория имеет очень важные приложения в физике и технике. Многие приложения интегральных уравнений Фредгольма, а также сингулярных интегральных уравнений можно найти в книге С. Г. Михлина «Интегральные уравнения» (М.: ОГИЗ, 1949). Основные руководства по теории сингулярных интегральных уравнений указаны в настоящей книге в конце главы 1.

Отметим, что теория линейных интегральных уравнений, начиная с момента ее зарождения, играла исключительно важную роль в исследовании краевых задач для уравнений с частными производными и систем. Сведение краевой задачи к решению линейного интегрального уравнения с помощью потенциалов, построенных на основе фундаментальных решений или параметриксов, являлось до последнего времени одним из основных методов исследования краевых задач в теории уравнений с частными производными. Этот метод, ведущий свое начало от работ И. Фредгольма и К. Неймана, сохранил свое значение и в настоящее время, несмотря на широкое и плодотворное применение в современных исследованиях по уравнениям с частными производными новых идей и методов. Важным этапом в развитии теории интегральных уравнений явилось создание в 60-е годы теории псевдодифференциальных операторов, объединившей в себе теорию широких классов интегральных и дифференциальных операторов и способствовавшей решению ряда важных проблем теории уравнений с частными производными. С теорией псевдодифференциальных операторов и их применением, а также более общей теорией интегральных операторов Фурье можно познакомиться по книгам: сб.: Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1967; О. А. Олейник, Е. В. Радкевич. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. М.: ВИНИТИ, Итоги науки, 1971; М. А. Шубин. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978; М. Taylor. Pseudo-differential operators.— Lect. Notes Math., Berlin, 1974, v. 416; Ф. Трев. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. М.: Мир, 1984.

Таким образом, содержание книги И. Г. Петровского «Лекции по теории интегральных уравнений» тесно связано с современными проблемами математики и ее приложений, является необходимым элементом математического образования математика, физика, инженера и составляет основу важных современных методов исследования. Знакомство с ней послужит надежным фундаментом для их дальнейшего изучения.

В новое издание внесены лишь редакционные поправки. Некоторые из них предложены А. Д. Мышкисом.

О. А. Олейник

Июнь 1983 г.

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ. ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА

§ 1. Определения. Примеры

Интегральными уравнениями принято называть такие уравнения, которые содержат искомую функцию под знаком интеграла. В частности, интегральным уравнением относительно функции $\varphi(\xi)$ является следующее уравнение:

$$a(x)\varphi(x)+f(x)=\int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \qquad (1.1)$$

где $a(x)$, $f(x)$, $K(x, \xi)$ — известные функции, а $\varphi(\xi)$ — неизвестная функция; переменная x принимает, так же как и ξ, все значения из интервала (a, b).

Мы в этой книге будем рассматривать только уравнения, в которые неизвестная функция входит линейно, т. е. только уравнения вида (1.1). Они называются *линейными* интегральными уравнениями. Если $a(x)$ не обращается в нуль, то, разделив обе части уравнения (1.1) на $a(x)$, получим уравнение вида

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi+f(x). \qquad (2.1)$$

Такие уравнения называются линейными интегральными уравнениями *2-го рода* или интегральными уравнениями *Фредгольма,* по имени математика, который их впервые исследовал. Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (2.1) называется *однородным.*

Если $a(x)\equiv 0$, то уравнение (1.1) обращается в уравнение

$$\int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi=f(x),$$

которое называется линейным интегральным уравнением *1-го рода.*

Функция $K(x, \xi)$ называется *ядром* интегрального уравнения.

В дальнейшем мы будем главным образом заниматься линейными интегральными уравнениями 2-го рода.

Можно рассматривать интегральные уравнения, где неизвестные функции зависят не от одного аргумента, а от многих. Таким является, например, уравнение

$$\varphi(x, y) = \int\limits_G K(x, y; \xi, \eta)\,\varphi(\xi, \eta)\,d\xi d\eta + f(x, y)$$

относительно неизвестной функции $\varphi(\xi, \eta)$, где интегрирование распространяется по некоторой области G на плоскости (ξ, η). Точка (x, y) также принадлежит этой области. Такое уравнение можно записать в виде

$$\varphi(P) = \int\limits_G K(P, Q)\,\varphi(Q)\,dQ + f(P),$$

где $P \in G$ и $Q \in G$*.

Можно рассматривать системы интегральных уравнений со многими неизвестными функциями.

Замечание. Всюду в дальнейшем, кроме § 20, если даже это не оговорено особо, мы будем предполагать, что рассматриваемые функции точек P или Q определены в конечной d-мерной области G, что они непрерывны в этой области всюду, за исключением, быть может, некоторого конечного числа точек, достаточно гладких линий и поверхностей, до $(d-1)$-го измерения включительно. На этих особых точках, линиях и поверхностях функции могут быть не определены. Границу области G мы будем считать состоящей из конечного числа кусков гладких $(d-1)$-мерных поверхностей или конечного числа гладких дуг, если $d=2$.

Интегрирование всюду в дальнейшем, кроме § 20, мы будем понимать в обычном смысле, если функции непрерывны в $\bar{G}$; если эти функции имеют на некоторых точках, линиях или поверхностях разрывы, то интегра-

---

* Запись $A \in M$ овначает, что точка A принадлежит множеству M.

лы рассматриваются как несобственные; все рассматриваемые функции будем считать абсолютно интегрируемыми.

§ 2. Типичные задачи, сводящиеся к линейным интегральным уравнениям

Рассмотрим упругую нить длины l, которая легко (в пределе, как мы будем предполагать, без всякого сопротивления) изменяет свою форму, но для увеличения длины которой на Δl нужна сила $c\Delta l$, где c — некоторая постоянная (закон Гука). Пусть концы этой нити закреплены в неподвижных точках A и B, находящихся на неотрицательной части оси x. Пусть точка A находится в начальной точке оси. Ось x будем считать горизонтальной. Когда нить находится в покое под действием только горизонтальной растягивающей силы T_0, очень большой в сравнении с другими рассматриваемыми силами, положение нити будет горизонтальным, т. е. совпадающим с осью Ox.

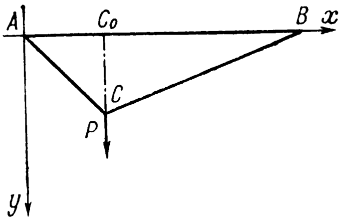

Рис. 1

Допустим, что в точке C, для которой $x=\xi$, приложена к нити вертикальная сила P. Под ее влиянием нить примет форму ломаной ACB (рис. 1). Будем считать $CC_0=\delta$ очень малым по сравнению с AC_0 и C_0B (результат малости P по сравнению с T_0). Пренебрегая величинами порядка δ по сравнению с l, мы можем считать, что натяжение нити осталось равным T_0 и под действием силы P. Проектируя на вертикаль силы натяжения нити в точке C и силу P и пренебрегая членами порядка δ^3, получим:

$$T_0\frac{\delta}{\xi}+T_0\frac{\delta}{l-\xi}=P,$$

откуда

$$\delta=\frac{P(l-\xi)\xi}{T_0 l}.$$

Обозначая через $y(x)$ прогиб нити в точке с абсциссой x, мы получим отсюда

$$y(x) = PG(x, \xi),$$

где

$$\left.\begin{aligned} G(x, \xi) &= \frac{x(l-\xi)}{T_0 l} \text{ для участка } AC\,(0 \leqslant x \leqslant \xi), \\ G(x, \xi) &= \frac{(l-x)\xi}{T_0 l} \text{ для участка } CB\,(\xi \leqslant x \leqslant l). \end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

Пользуясь этими формулами, легко проверить, что

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Предположим, что на нить действует непрерывно распределенная сила с линейной плотностью $p(\xi)$ так, что на участок ее между точками ξ и $\xi+\Delta\xi$ действует сила, приблизительно равная $p(\xi)\Delta\xi$. Так как смещения, обусловленные элементарными силами $p(\xi)\Delta\xi$, суммируются («принцип суперпозиции»), то под действием этой силы нить примет форму

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi)\, p(\xi)\, d\xi.$$

Рассмотрим следующие задачи.

1. Будем искать плотность распределения силы $p(\xi)$, под действием которой нить примет заданную форму $y = y(x)$. Тогда мы придем к интегральному уравнению 1-го рода

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi)\, p(\xi)\, d\xi \qquad (2.2)$$

относительно искомой функции $p(\xi)$.

2. Допустим, что на нить действует меняющаяся со временем t сила с плотностью $p(\xi)\sin\omega t$ $(\omega > 0)$ в точке ξ и нить движется под действием этой силы. Будем при этом предполагать, что при движении нити абсцисса каждой ее точки не меняется и что нить совершает периодические колебания, описываемые уравнением

$$y = y(x)\sin\omega t.$$

Обозначая линейную плотность массы нити в точке ξ через $\rho(\xi)$, мы найдем тогда, пренебрегая членами, малыми по сравнению с $\Delta\xi$, что в момент t на участок нити между точками ξ и $\xi+\Delta\xi$, кроме силы $p(\xi)\sin\omega t\,\Delta\xi$, действует еще сила инерции

$$-\rho(\xi)\,\Delta\xi\frac{d^2y}{dt^2}=\rho(\xi)\,y(\xi)\,\omega^2\sin\omega t\,\Delta\xi.$$

Поэтому равенство (2.2) примет следующий вид:

$$y(x)\sin\omega t=\int_0^l G(x,\xi)\,[p(\xi)\sin\omega t+\omega^2\rho(\xi)\,y(\xi)\sin\omega t]\,d\xi.$$

Сокращая на $\sin\omega t$ и полагая

$$\int_0^l G(x,\xi)\,p(\xi)\,d\xi=f(x),\quad G(x,\xi)\,\rho(\xi)=K(x,\xi),\quad \omega^2=\lambda,$$

мы получим:

$$y(x)=\lambda\int_0^l K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+f(x). \tag{3.2}$$

Считая функцию $p(\xi)$ и, следовательно, $f(x)$ заданной, мы пришли таким образом к интегральному уравнению Фредгольма для определения функции $y(x)$. Заметим, что в силу определения функции $f(x)$ мы имеем:

$$f(0)=f(l)=0.$$

Если плотность $\rho(\xi)$ постоянна и $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, это интегральное уравнение нетрудно решить. В самом деле, подставим в $K(x,\xi)$ вместо $G(x,\xi)$ его выражение (1.2). Получим

$$y(x)=\omega^2\rho\int_0^x\frac{(l-x)\,\xi}{T_0l}\,y(\xi)\,d\xi+\omega^2\rho\int_x^l\frac{x\,(l-\xi)}{T_0l}\,y(\xi)\,d\xi+f(x)$$

или

$$y(x)=\frac{\omega^2c}{l}(l-x)\int_0^x\xi y(\xi)\,d\xi+\frac{\omega^2cx}{l}\int_x^l(l-\xi)\,y(\xi)\,d\xi+f(x),$$

где

$$c=\frac{\rho}{T_0}.$$

Дифференцируя два раза по x обе части этого уравнения, получим:

$$y''(x) = -\omega^2 c y(x) + f''(x). \tag{4.2}$$

С другой стороны, можно показать, что всякое решение дифференциального уравнения (4.2), обращающееся в нуль при $x=0$ и $x=l$, является также решением интегрального уравнения (3.2). Для этого умножим обе части равенства $y''(\xi) = -\omega^2 c y(\xi) + f''(\xi)$ на $-T_0 G(x, \xi)$ и проинтегрируем по ξ от 0 до l. Мы получим при этом равенство (3.2), так как, интегрируя по частям, легко показать, что

$$\int_0^l T_0 G(x, \xi)\, \varphi''(\xi)\, d\xi = -\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — любая дважды непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль при $x=0$ и $x=l$.

Как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, общим решением уравнения (4.2) является

$$y = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x + \frac{1}{\mu} \int_0^x f''(\xi) \sin \mu (x - \xi)\, d\xi,$$

где $\mu = \omega \sqrt{c}$, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Из равенств (1.2) и (3.2) следует, что $y(0) = y(l) = 0$. Определяя из этих условий C_1 и C_2, получим, если $\sin \mu l \neq 0$,

$$y(x) = -\frac{1}{\mu} \frac{\sin \mu x}{\sin \mu l} \int_0^l f''(\xi) \sin \mu (l - \xi)\, d\xi + \\ + \frac{1}{\mu} \int_0^x f''(\xi) \sin \mu (x - \xi)\, d\xi. \tag{5.2}$$

В этом случае интегральное уравнение (3.2) имеет единственное решение при любой функции $f(x)$, если только она дважды непрерывно дифференцируема и $f(0) = f(l) = 0$.

Можно показать, что для существования решения интегрального уравнения (3.2) достаточно, если $\sin\mu l \neq 0$, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной; требование существования и тем более непрерывности второй производной является излишним. Условие же $\sin\mu l \neq 0$ совершенно необходимо для того, чтобы это интегральное уравнение имело решение при всякой непрерывной или даже при всякой сколько угодно раз дифференцируемой функции $f(x)$.

Если $\sin\mu l = 0$, то

$$\mu = \frac{k\pi}{l}, \tag{6.2}$$

$$\omega = \frac{k\pi}{l\sqrt{c}}, \tag{7.2}$$

$$\lambda = \frac{k^2\pi^2}{l^2 c}, \tag{8.2}$$

где k — какое-нибудь целое число — положительное, отрицательное или 0. Значения λ, даваемые формулой (8.2) при $k=1, 2, \ldots$, называются *собственными значениями* параметра λ в интегральном уравнении (3.2), а соответствующие значения ω называются *собственными частотами* колебаний струны.

Из вывода формулы (5.2) следует, что интегральное уравнение (3.2) в том случае, если $\sin\mu l = 0$ и у функции $f(x)$ существует непрерывная вторая производная, может иметь решение, только если

$$\int_0^l f''(\xi)\sin\mu(l-\xi)\,d\xi = 0. \tag{9.2}$$

Интегрируя по частям и пользуясь тем, что $\sin\mu(l-\xi) = 0$ и $f(\xi) = 0$ при $\xi = 0$ и $\xi = l$, это условие можно привести к виду

$$\int_0^l f(\xi)\sin\mu\xi\,d\xi = 0. \tag{10.2}$$

Обратно, легко убедиться в том, что условие (10.2) является также достаточным для существования у уравнения (3.2) решения при данном μ, для которого $\sin\mu l = 0$.

Условие (10.2) удовлетворяется, в частности, если

$$f(x) \equiv 0.$$

Тогда интегральное уравнение (3.2) и дифференциальное уравнение (4.2) становятся однородными. Все решения однородного дифференциального уравнения (4.2), обращающиеся в 0 при $x=0$ и $x=l$, а следовательно, и все решения интегрального уравнения (3.2) даются формулой

$$y(x) = C \sin \mu_k x, \tag{11.2}$$

где C — произвольная постоянная и μ_k равно одному из чисел (6.2). Формула (11.2) дает амплитуды в точке x *собственных колебаний* струны:

$$y = C \sin \mu_k x \sin \omega_k t,$$

происходящих без действия внешней силы. Как видно из предыдущего, такие колебания могут происходить не с произвольной частотой, а только с одной из частот, даваемых формулой (7.2) при $k=1, 2, \ldots$

Как показывает формула (5.2), если условие (9.2) не выполняется, амплитуда $y(x)$ периодических колебаний струны в точке x бесконечно растет, когда ω — частота колебаний внешней силы — приближается к соответствующей собственной частоте колебаний струны. В пределе при совпадении этих частот наступает резонанс. Тогда не существует, вообще говоря, т. е. при произвольных амплитудах внешней силы, периодических колебаний струны. Соответственно этому, вообще говоря, не существует решения неоднородного интегрального уравнения (3.2) при λ, равном одному из собственных значений этого уравнения.

§ 3. Аналогия между линейными интегральными уравнениями и линейными алгебраическими уравнениями. Формулировка теорем Фредгольма

Будем рассматривать линейное интегральное уравнение 2-го рода

$$y(x) = \int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{1.3}$$

где $K(x, \xi)$ и $f(x)$ — известные функции при $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant \xi \leqslant b$. Разобьем интервал (a, b) на n равных между собой интервалов, длина каждого из которых равна:

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x = \Delta \xi.$$

Положим

$$\begin{aligned} K(a+p\Delta x,\ a+q\Delta\xi) &= K_{pq} \quad (p,\ q = 1, \ldots, n), \\ y(a+p\Delta x) &= y_p \quad (p = 1, \ldots, n), \\ f(a+p\Delta x) &= f_p \quad (p = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Заменим интеграл $\int\limits_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi$ при $x = a + p\Delta x$ суммой

$$\sum_{q=1}^{n} K_{pq} y_q \Delta\xi, \quad p = 1, \ldots, n.$$

Тогда вместо интегрального уравнения (1.3) получится система линейных алгебраических уравнений

$$y_p = \sum_{q=1}^{n} K_{pq} y_q \Delta\xi + f_p, \quad p = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Мы будем считать здесь K_{pq}, f_p, $\Delta\xi$ известными величинами, а y_p — неизвестными.

Целью ближайших параграфов является перенести известные теоремы о линейных алгебраических уравнениях на интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода. В обычных формулировках теорем о линейных алгебраических уравнениях участвуют определители, связать которые с интегральными уравнениями было бы хотя и возможно, но громоздко. Поэтому мы сформулируем эти теоремы, не пользуясь определителями. Эти формулировки напечатаны у нас курсивом.

При решении системы (2.3) существенную роль играет составленный из коэффициентов этой системы определитель

$$\begin{vmatrix} 1 - K_{11}\Delta\xi & -K_{12}\Delta\xi & \ldots & -K_{1n}\Delta\xi \\ -K_{21}\Delta\xi & 1 - K_{22}\Delta\xi & \ldots & -K_{2n}\Delta\xi \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -K_{n1}\Delta\xi & -K_{n2}\Delta\xi & \ldots & 1 - K_{nn}\Delta\xi \end{vmatrix}. \tag{3.3}$$

Если этот определитель не равен 0, то, как известно, система (2.3) имеет, и притом всегда единственное, решение при любых значениях $f_1, \ldots, f_n$. В этом случае транспонированная система, т. е. система

$$z_p = \sum_{q=1}^{n} K_{qp} z_q \Delta\xi + f_p^*, \quad p = 1, \ldots, n,$$

также имеет, и притом единственное, решение при произвольных f_p^*.

Если же определитель равен 0, то система (2.3) при произвольных f_p, вообще говоря, не имеет решения. Но тогда соответствующая однородная система, т. е. система, полученная из (2.3) приравниванием 0 всех f_p, всегда имеет нетривиальное решение, т. е. решение, состоящее не из одних только нулей.

Таким образом, имеет место следующая альтернатива: *или данная неоднородная система линейных алгебраических уравнений* (2.3) *имеет, и притом только единственное, решение при всяких* $f_1, \ldots, f_n$, *стоящих в правых частях, или соответствующая однородная система имеет по крайней мере одно нетривиальное решение. Если для данной системы имеет место первый случай альтернативы, то он имеет место и для транспонированной системы.*

Во втором случае однородная система

$$y_p - \sum_{q=1}^{n} K_{pq} y_q \Delta\xi = 0, \quad p = 1, \ldots, n, \tag{4.3}$$

имеет то же число линейно независимых решений, что и транспонированная к ней система

$$z_p - \sum_{q=1}^{n} K_{qp} z_q \Delta\xi = 0, \quad p = 1, \ldots, n. \tag{5.3}$$

Это число равно $n - r$, *где* r — *ранг матрицы, соответствующей определителю* (3.3) *.

* Заметим, что утверждение о существовании ровно $(n-r)$ линейно независимых решений у однородных систем (4.3) и (5.3) верно и в первом случае альтернативы, когда $n=r$. Выражение «нуль линейно независимых решений» означает, что имеется лишь решение, состоящее из одних нулей.

Найдем необходимые и достаточные условия, при которых во втором случае альтернативы неоднородная система (2.3) имеет решения. Прежде всего легко найти необходимые условия для этого. Пусть

$$z_1, \ldots, z_n$$

— какое-нибудь решение системы (5.3). Умножая тогда p-е из уравнений (2.3) на z_p и складывая все уравнения почленно, получим:

$$\sum_p y_p z_p - \sum_{p,q} K_{pq} y_q z_p \Delta\xi = \sum_p f_p z_p.$$

Но левую часть этого равенства можно переписать еще так:

$$\sum_p y_p z_p - \sum_{p,q} K_{qp} y_p z_q \Delta\xi = \sum_p y_p \Bigl(z_p - \sum_q K_{qp} z_q \Delta\xi\Bigr).$$

В силу уравнений (5.3) это выражение равно 0. Следовательно, должно быть

$$\sum_{p=1}^{n} f_p z_p = 0. \tag{6.3}$$

Покажем, что это равенство является также и достаточным условием для существования решения системы (2.3), если оно выполняется для всех решений системы (5.3). Очевидно, это условие соблюдено, если оно выполняется для каких-нибудь $(n-r)$ линейно независимых между собой решений системы (5.3). Для доказательства нашего утверждения вспомним из курса высшей алгебры, что достаточным условием существования решения у системы (2.3) в случае, когда ее определитель равен нулю, является следующее условие: ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} 1-K_{11}\Delta\xi & -K_{12}\Delta\xi & \ldots & -K_{1n}\Delta\xi & f_1 \\ -K_{21}\Delta\xi & 1-K_{22}\Delta\xi & \ldots & -K_{2n}\Delta\xi & f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -K_{n1}\Delta\xi & -K_{n2}\Delta\xi & \ldots & 1-K_{nn}\Delta\xi & f_n \end{matrix} \right\| \tag{7.3}$$

должен совпадать с рангом матрицы, соответствующей определителю (3.3).

Для этого достаточно, чтобы равнялись нулю все определители $(r+1)$-го порядка, составленные из элементов матрицы (7.3) и содержащие элементы последнего столбца этой матрицы. Раскрывая такой определитель D_{r+1} по элементам f_k, мы найдем из условия (6.3), что он действительно равен нулю, так как системе (5.3) удовлетворяет совокупность чисел

$$z_1, \ldots, z_n,$$

составленная следующим образом: если i таково, что f_i входит в определитель D_{r+1}, то z_i равно алгебраическому дополнению f_i в этом определителе, в противном случае $z_i = 0$ *.

Итак, *во втором случае альтернативы решение неоднородной системы существует тогда и только тогда, если для любого решения* $(z_1, \ldots, z_n)$ *транспонированной однородной системы выполняется условие* (6.3).

Заметим, что если во втором случае альтернативы система (2.3) имеет решение, то это решение не единственное. Действительно, прибавляя к этому решению какое-нибудь решение соответствующей однородной системы, мы опять получим решение системы (2.3).

Когда $\Delta\xi$ стремится к 0, естественно ожидать, что $\sum\limits_q K_{pq} y_q \Delta\xi$ переходит в $\int\limits_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi$, и решение системы уравнений (2.3) переходит в решение интегрального уравнения (1.3). Это действительно имеет место при некоторых предположениях относительно ядра $K(x, \xi)$. Но доказательство этого громоздко, и мы не будем его приводить, хотя для приближенного решения интегрального уравнения (1.3) иногда его заменяют системой (2.3) **. Мы докажем только, что теоремы,

* Справедливость этого утверждения можно доказать так. Подставим числа $z_1, \ldots, z_n$ в j-е уравнение системы (5.3). Если j таково, что в определитель D_{r+1} входят элементы j-го столбца матрицы (7.3), то результат подстановки равен 0, так как он равен определителю, в котором совпадают два столбца. Если j таково, что элементы j-го столбца не входят в определитель D_{r+1}, то результат подстановки равен нулю, так как он равен минору $(r+1)$-го порядка матрицы ранга r.

** См.: Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Изд. 5-е М.: Физматгиз, 1962, гл. II, § 1.

сформулированные выше для системы (2.3), переходят в следующие теоремы:

Теорема 1. (Альтернатива). *Или данное неоднородное линейное интегральное уравнение 2-го рода* (1.3) *имеет, и притом единственное, решение при всякой функции* $f(x)$ *(из некоторого достаточно широкого класса), или соответствующее однородное уравнение имеет по крайней мере одно нетривиальное, т. е. не равное нулю тождественно, решение.*

Теорема 2. *Если для данного уравнения* (1.3) *имеет место первый случай альтернативы, то он имеет место и для транспонированного уравнения*

$$z(x)=\int_a^b K(\xi, x)\, z(\xi)\, d\xi + f^*(x).$$

Данное однородное интегральное уравнение и транспонированное к нему имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.

Очевидно, если функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ удовлетворяют однородному уравнению (1.3), то любая их линейная комбинация $C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ с постоянными коэффициентами C_i также удовлетворяет этому уравнению.

Теорема 3. *Во втором случае альтернативы необходимым и достаточным условием существования решения неоднородного уравнения* (1.3) *является условие:*

$$\int_a^b f(x)\, z(x)\, dx = 0,$$

где $z(x)$ — *любое решение транспонированного к уравнению* (1.3) *однородного уравнения.*

Если это условие выполнено, то уравнение (1.3) имеет бесконечное множество решений, потому что, как легко проверить, тогда этому уравнению удовлетворяет также любая функция вида

$$y(x)+\varphi(x),$$

где $y(x)$ — какое-нибудь решение уравнения (1.3), а $\varphi(x)$ — любое решение соответствующего однородного уравнения. С другой стороны, ясно, что если уравнению

(1.3) удовлетворяют функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то их разность удовлетворяет соответствующему однородному уравнению.

Сформулированные только что теоремы 1, 2, 3 называются *теоремами Фредгольма,* который их впервые доказал для уравнения (1.3) при довольно широких предположениях относительно $K(x, \xi)$ и $f(x)$. Ближайшие параграфы посвящены доказательству этих теорем для некоторых классов уравнений. Число независимых переменных здесь несущественно. Поэтому все доказательства будут проведены для любого числа независимых переменных; вместо x мы будем писать P, вместо ξ будем писать Q, подобно тому как мы это делали в конце § 1. Эти доказательства, как и многие другие доказательства существования решений уравнений, дают также методы для приближенного решения интегральных уравнений (1.3).

В приложениях особенно важную роль играет первая из теорем Фредгольма — об альтернативе. Вместо того чтобы доказывать, что данное интегральное уравнение (1.3) имеет решение, часто бывает гораздо проще доказать, что соответствующее однородное уравнение или транспонированное к нему имеет только тривиальное решение. А отсюда, по первой теореме Фредгольма, следует, что данное уравнение (1.3) действительно имеет решение.

§ 4. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами

Существует класс интегральных уравнений, которые легко сводятся к линейным алгебраическим уравнениям. Теоремы Фредгольма для этих уравнений непосредственно получаются из теорем, сформулированных в предыдущем параграфе для линейных алгебраических уравнений. Такими интегральными уравнениями являются интегральные уравнения с так называемыми *вырожденными ядрами.*

Мы докажем сейчас теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденными ядрами и используем этот частный случай в дальнейшем при доказательстве теорем Фредгольма для интегральных уравнений с произвольными непрерывными ядрами.

Ядро называется *вырожденным*, если оно имеет вид

$$K(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} a_i(P) b_i(Q). \tag{1.4}$$

Мы будем предполагать, что $a_i(P)$, $b_i(Q)$, $y(P)$ и $f(P)$ равномерно непрерывны на некоторой конечной области G и что все $a_i(P)$ и все $b_i(Q)$ линейно независимы между собой.

Докажем, что последнее предположение не ограничивает общности. Для этого допустим, что существуют такие постоянные $C_1, \ldots, C_m$, что

$$C_1 a_1(P) + \ldots + C_m a_m(P) \equiv 0,$$

причем хотя бы одно из чисел $C_1, \ldots, C_m$ отлично от 0. Пусть $C_m \neq 0$. Тогда это равенство можно разрешить относительно $a_m(P)$. Получим:

$$a_m(P) = C_1^* a_1(P) + \ldots + C_{m-1}^* a_{m-1}(P).$$

Подставляя это выражение в правую часть (1.4), получим:

$$K(P, Q) \equiv \sum_{i=1}^{m-1} a_i(P) b_i(Q) + \sum_{i=1}^{m-1} C_i^* a_i(P) b_m(Q) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{m-1} a_i(P)\left[b_i(Q) + C_i^* b_m(Q)\right] \equiv \sum_{i=1}^{m-1} a_i(P) b_i^*(Q).$$

Таким образом, ядро $K(P, Q)$ оказалось возможным представить в виде суммы меньшего чем m числа произведений функций от P на функции от Q. Если бы функции $a_i(P)$ или $b_i^*(Q)$, $i=1, \ldots, m-1$, опять оказались линейно зависимыми, мы могли бы еще уменьшить это число и т. д.

Как мы уже отмечали, интегральные уравнения с вырожденными ядрами легко сводятся к линейным алгебраическим уравнениям, и поэтому для них легко доказываются теоремы Фредгольма. Действительно, допустим, что интегральное уравнение

$$y(P) = \int_G K(P, Q)\, y(Q)\, dQ + f(P), \tag{2.4}$$

где $K(P, Q)$ дается формулой (1.4), имеет решение. Тогда должно быть

$$y(P) = \int \sum_{i=1}^{m} a_i(P)\, b_i(Q)\, y(Q)\, dQ + f(P)$$

или

$$y(P) = \sum_{i=1}^{m} a_i(P) \int b_i(Q)\, y(Q)\, dQ + f(P). \tag{3.4}$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, мы опускаем букву G под знаком интеграла. Символ $\int$ будет всюду означать интеграл, взятый по области G.

Положим

$$\int b_i(Q)\, y(Q)\, dQ = C_i. \tag{4.4}$$

Тогда из уравнения (3.4) получается, что

$$y(P) = \sum_{i=1}^{m} C_i a_i(P) + f(P). \tag{5.4}$$

Чтобы определить постоянные C_i, подставим значение y, даваемое этой формулой, в уравнение (4.4). Получим:

$$\int b_i(Q) \left[\sum_{j=1}^{m} C_j a_j(Q) + f(Q) \right] dQ = C_i.$$

Полагая

$$\int b_i(Q)\, a_j(Q)\, dQ = K_{ij}, \quad \int b_i(Q)\, f(Q)\, dQ = f_i, \tag{6.4}$$

из последнего уравнения получим:

$$C_i = \sum_{j=1}^{m} K_{ij} C_j + f_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{7.4}$$

Итак, всякому решению интегрального уравнения (2.4) соответствует решение $(C_1, \ldots, C_m)$ системы (7.4), причем в силу линейной независимости функций $a_i(P)$ только одно. Обратно, если эта система линейных алгебраических уравнений имеет какое-нибудь решение $(C_1, \ldots, C_m)$, то, подставляя его в правую часть (5.4), мы получим решение заданного интегрального уравнения (2.4), так как каждый шаг, сделанный при переходе от (2.4) к (7.4), обратим. Таким образом, задача свелась к исследованию системы (7.4).

Совершенно так же интегральное уравнение

$$z(P) = \int K(Q, P) z(Q)\, dQ + f^*(P), \qquad (8.4)$$

транспонированное к уравнению (2.4), сводится к системе

$$C_i^* = \sum_{j=1}^{m} K_{ji} C_j^* + f_i^*, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad (9.4)$$

транспонированной к системе (7.4).

В силу предположенной линейной независимости функций $a_i(P)$ и $b_i(Q)$ каждым p линейно независимым решениям однородной системы (7.4) или (9.4) отвечают p линейно независимых решений однородного уравнения (2.4) или соответственно уравнения (8.4), и обратно. (Почему?) Кроме того, устанавливается взаимно однозначное соответствие между решениями интегральных уравнений (2.4) и (8.4), с одной стороны, и решениями линейных алгебраических уравнений (7.4) и (9.4), с другой стороны. При этом решениям транспонированных одно по отношению к другому уравнений (2.4) и (8.4) соответствуют решения транспонированных уравнений (7.4) и (9.4).

Отсюда прямо вытекают первые две теоремы Фредгольма для интегрального уравнения (2.4), так как они справедливы для алгебраической линейной системы (7.4). (Проверьте!)

Чтобы доказать третью из этих теорем, заметим следующее. Если имеет место второй случай альтернативы для системы (7.4), то необходимым и достаточным условием существования решения системы (7.4) является условие

$$\sum_{i=1}^{m} f_i C_i^* = 0,$$

где $(C_1^*, \ldots, C_m^*)$ — любое решение транспонированной однородной системы. Пользуясь равенствами (6.4), это условие перепишем так:

$$\sum_{i=1}^{m} C_i^* \int f(Q)\, b_i(Q)\, dQ = 0,$$

или

$$\int f(Q) \Big(\sum_{i=1}^{m} C_i^* b_i(Q) \Big)\, dQ = 0. \tag{10.4}$$

Если $(C_1^*, \ldots, C_m^*)$ есть решение однородной системы (9.4), то $\sum C_i^* b_i(Q)$ есть решение однородного уравнения (8.4), транспонированного к уравнению (2.4). Поэтому условие (10.4) эквивалентно условию, чтобы

$$\int f(Q)\, z(Q)\, dQ = 0$$

для всякого решения $z(Q)$ однородного уравнения (8.4). Отсюда прямо следует третья теорема Фредгольма для уравнения (2.4).

Замечания. 1. Часто бывает, что ядро $K(P, Q)$ и функция $f(P)$ суть комплексные функции от действительных точек P и Q. Тогда и решения $y(P)$ интегрального уравнения (2.4) будут, вообще говоря, комплексными функциями действительной точки P. При этом сохраняются все доказанные в этом параграфе теоремы. Напомним, что если

$$\varphi(P) = \varphi_1(P) + i\varphi_2(P),$$

где $\varphi_1(P)$ и $\varphi_2(P)$ — действительные функции действительной точки P, то по определению

$$\int \varphi(P)\, dP = \int \varphi_1(P)\, dP + i \int \varphi_2(P)\, dP.$$

2. Часто бывает, что $a_i(P)$ и $b_i(Q)$ являются функциями от некоторого комплексного параметра λ. Рассуждения настоящего параграфа показывают, что для уравнения (2.4) имеет место первый или второй случай альтернативы Фредгольма в зависимости от того, равняется ли 0 или не равняется 0 определитель, состав-

ленный из коэффициентов системы (7.4), т. е. определитель

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-K_{11} & -K_{12} \dots & -K_{1m} \\ -K_{21} & 1-K_{22} \dots & -K_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ -K_{m1} & -K_{m2} \dots & 1-K_{mm} \end{vmatrix}, \qquad (11.4)$$

где

$$K_{ij} = \int b_i(Q, \lambda) a_j(Q, \lambda)\, dQ.$$

Пусть $a_j(Q, \lambda)$ и $b_i(Q, \lambda)$ при каждом Q из G суть голоморфные функции от λ в некоторой конечной области Λ комплексной плоскости. Мы будем предполагать, что $a_j(Q, \lambda)$ и $b_i(Q, \lambda)$ равномерно непрерывны по совокупности (Q, λ). Тогда K_{ij} и определитель (11.4) также суть голоморфные функции от λ *. Поэтому те значения λ, при которых определитель (11.4) равен 0 и потому имеет место второй случай альтернативы для (2.4), не могут иметь предельных точек внутри Λ, если только определитель (11.4) отличен от 0 хотя бы при одном $\lambda \in \Lambda$.

3. Пусть K_{ij} и f_i — голоморфные функции $\lambda \in \Lambda$. Так будет, в частности, если $a_j(Q, \lambda)$ и $b_i(Q, \lambda)$ обладают перечисленными в замечании 2 свойствами, а $f(Q)$ — равномерно непрерывная функция Q, что мы и будем предполагать для простоты.

По известным правилам теории определителей коэффициенты C_i находятся из уравнений (7.4) в виде дробей, у которых знаменателем при всех i является один и тот же определитель (11.4), а в числителе стоит определитель D_i, получающийся из определителя (11.4) заменой его i-го столбца столбцом $(f_1, \dots, f_m)$. Раскрывая

---

* Это нетрудно показать, представляя интеграл в виде предела интегральной суммы и пользуясь известной теоремой Вейерштрасса о том, что если последовательность голоморфных функций равномерно сходится в некоторой области, то предельная функция является голоморфной в той же области (Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Изд. 12-е. М.: Наука, 1977, гл. 5, § 1).

D_i по элементам этого столбца, получим:

$$C_i = \frac{\sum_j M_{ij} f_j}{D(\lambda)},$$

где M_{ij} суть многочлены от K_{ij}. Подставляя только что найденные значения C_i в правую часть (5.4) и пользуясь формулами (6.4) для f_i, найдем:

$$y(P) = \frac{\int \sum_{ij} M_{ij} b_j(Q, \lambda)\, a_i(P, \lambda)\, f(Q)\, dQ}{D(\lambda)} + f(P). \quad (12.4)$$

Числитель (при каждом фиксированном P) и знаменатель дроби, стоящей в правой части последнего равенства, суть голоморфные функции λ в области Λ.

Часто бывает полезным писать равенство (12.4) в следующем виде:

$$y(P) = \int \overline{\Gamma}(P, Q, \lambda) f(Q)\, dQ + f(P), \quad (13.4)$$

где

$$\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda) = \frac{\sum_{ij} M_{ij} b_j(Q, \lambda)\, a_i(P, \lambda)}{D(\lambda)}. \quad (14.4)$$

Функция $\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda)$ не зависит от $f(P)$ и, как показывает формула (14.4), представляется в виде частного от двух голоморфных во всей области Λ функций λ. Функция $\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda)$ может не быть голоморфной функцией λ только при тех значениях λ, где $D(\lambda) = 0$, т. е. при которых для интегрального уравнения (2.4) имеет место второй случай альтернативы Фредгольма. В предыдущем пункте было показано, что такие значения λ не имеют предельных точек внутри Λ, если только $D(\lambda)$ не равно 0 тождественно, что мы будем предполагать. Легко показать, что каждое такое значение $\lambda = \lambda_0$, где $D(\lambda_0) = 0$, действительно является особым для $\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda)$ в следующем смысле: $\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda)$ не является равномерно непрерывной функцией (P, Q, λ), когда λ находится в произвольно малой окрестности точки λ_0, а P и Q меняются в G.

В самом деле, допустим противное. Пусть функция $y(P, \lambda)$, определенная формулой (13.4), равномерно непрерывна, если $P \in G$, а λ меняется в некоторой окрестности точки λ_0. Подставим тогда правую часть (13.4) или, что все равно, (12.4) в обе части уравнения (2.4). Результаты подстановок будут при всякой равномерно непрерывной функции $f(Q)$ равномерно непрерывными функциями при той же области изменения P и λ. Мы знаем, что эти результаты совпадают, когда $\lambda \neq \lambda_0$ и $|\lambda - \lambda_0|$ достаточно мал, так как тогда $D(\lambda) \neq 0$. Значит, по непрерывности эти результаты совпадают и при $\lambda = \lambda_0$. Следовательно, при всякой функции $f(P)$ рассматриваемого класса интегральное уравнение (2.4) имеет решение при $\lambda = \lambda_0$: оно дается формулой (13.4) при $\lambda = \lambda_0$, где $\Gamma(P, Q, \lambda)$ определено при $\lambda = \lambda_0$ по непрерывности. Но тогда при этом значении λ для уравнения (2.4) имеет место первый случай альтернативы Фредгольма, а не второй, и потому $D(\lambda_0) \neq 0$ *.

Пример.

$$y(x) = -\lambda \int_0^1 (x^2\xi + x\xi^2)\, y(\xi)\, d\xi + f(x).$$

Отсюда

$$y(x) = -\lambda \left[x^2 \int_0^1 \xi y(\xi)\, d\xi + x \int_0^1 \xi^2 y(\xi)\, d\xi\right] + f(x).$$

Полагая

$$\int_0^1 \xi y(\xi)\, d\xi = C_2 \ \text{ и } \int_0^1 \xi^2 y(\xi)\, d\xi = C_1, \tag{15.4}$$

получим:

$$y(x) = f(x) - C_1\lambda x - C_2\lambda x^2. \tag{16.4}$$

Подставляя это выражение y в равенства (15.4), полу-

* Предыдущие рассуждения легко переносятся на случай, когда $a_i(Q, \lambda)$, $b_i(Q, \lambda)$, $f(Q)$ имеют разрывы по Q в некоторых точках, на достаточно гладких линиях и поверхностях до $(d-1)$-го измерения включительно, независимых от λ, если при подходе точки Q к местам разрыва $|a_i(Q, \lambda)|$, $|b_i(Q, \lambda|$, $|f(Q)|$ не очень быстро растут. Решения будут неопределенными в тех точках P, где $a_i(P, \lambda)$ и $f(P)$ не определены.

чим:

$$\int_0^1 \xi[f(\xi)-C_1\lambda\xi-C_2\lambda\xi^2]d\xi=C_2, \quad \int_0^1 \xi^2[f(\xi)-C_1\lambda\xi-C_2\lambda\xi^2]d\xi=C_1$$

или

$$b_1-\frac{C_1\lambda}{3}-\frac{C_2\lambda}{4}=C_2, \quad b_2-\frac{C_1\lambda}{4}-\frac{C_2\lambda}{5}=C_1, \qquad (17.4)$$

где

$$b_1=\int_0^1 \xi f(\xi)\,d\xi \quad \text{и} \quad b_2=\int_0^1 \xi^2 f(\xi)\,d\xi.$$

Перепишем уравнения (17.4) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} C_1\frac{\lambda}{3}+C_2\left(1+\frac{\lambda}{4}\right)&=b_1,\\ C_1\left(1+\frac{\lambda}{4}\right)+C_2\frac{\lambda}{5}&=b_2.\end{aligned}\right\} \qquad (18.4)$$

Определитель этой системы равен

$$-1-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{240}.$$

Он имеет только два корня

$$\lambda=60\pm16\sqrt{15}.$$

Только при этих двух значениях λ имеет место второй случай альтернативы Фредгольма. В этих случаях все решения однородного интегрального уравнения

$$y(x)+\lambda\int_0^1 (x^2\xi+x\xi^2)\,y(\xi)\,d\xi=0$$

даются формулами

$$y(x)=C\left(x\mp\frac{5}{\sqrt{15}}x^2\right),$$

где C — произвольная постоянная. При других же значениях λ наше интегральное уравнение имеет единственное решение, даваемое формулой (16.4), где C_1 и C_2

определяются единственным образом из системы (18.4). Это решение можно представить в виде (13.4), где

$$\bar{\Gamma}(x, \xi; \lambda) = \lambda \frac{\frac{\xi x}{5}\lambda - \left(1+\frac{\lambda}{4}\right)\xi^2 x - \xi x^2\left(1+\frac{\lambda}{4}\right) + \xi^2 x^2 \frac{\lambda}{3}}{1+\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda^2}{240}}.$$

З а д а ч и. Найти $u(x)$ из уравнений

1. $u(x) = e^x + \lambda \int\limits_0^{10} xt\, u(t)\, dt.$

2. $u(x) = \lambda \int\limits_0^{\pi} \sin x\, u(t)\, dt.$

3. $u(x) = \lambda \int\limits_0^{\pi} \cos x\, u(t)\, dt.$

4. $u(x) = x + \lambda \int\limits_0^{1} (x-t)\, u(t)\, dt.$

5. $u(x) = \lambda \int\limits_0^{2\pi} \sin x \sin t\, u(t)\, dt + f(x).$

§ 5. Интегральные уравнения с достаточно малыми по абсолютной величине непрерывными ядрами

Для таких уравнений всегда имеет место первый случай альтернативы, т. е. такие уравнения всегда имеют единственное решение. Доказывается это методом последовательных приближений, как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений доказываются существование и единственность решения интегрального уравнения, эквивалентного заданному дифференциальному уравнению и начальным условиям. По существу, это применение принципа сжатых отображений, изложенного, например, в моей книге по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Я мог бы здесь только проверить возможность применения этого общего принципа, но я предпочту провести доказательство для данного конкретного случая, так как при этом мы получим некоторые формулы, полезные для дальнейшего.

Введем символические обозначения, которыми мы иногда будем пользоваться в дальнейшем. Пусть $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$ — равномерно непрерывные функции P и Q, когда $P \in G$ и $Q \in G$. Положим

$$(K_2 \circ K_1)(P, Q) = \int K_2(P, S) K_1(S, Q)\, dS. \qquad (1.5)$$

Назовем ядро $K(P, Q) = (K_2 \circ K_1)(P, Q)$ символическим произведением ядра $K_2(P, Q)$ на $K_1(P, Q)$ *. Легко показать, что $(K_2 \circ K_1)(P, Q)$ есть равномерно непрерывная функция P и Q. Действительно,

$$\left| \int K_2(P_1, S) K_1(S, Q_1)\, dS - \int K_2(P_2, S) K_1(S, Q_2)\, dS \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int K_2(P_1, S) [K_1(S, Q_1) - K_1(S, Q_2)]\, dS \right| +$$

$$+ \left| \int K_1(S, Q_2) [K_2(P_1, S) - K_2(P_2, S)]\, dS \right|. \qquad (2.5)$$

Пусть верхняя граница абсолютных значений $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$, когда $P \in G$ и $Q \in G$, не превосходит M, и D — объем области G. В силу равномерной непрерывности $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$ для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что

$$|K_2(P_1, S) - K_2(P_2, S)| < \frac{\varepsilon}{2DM}$$

и

$$|K_1(S, Q_1) - K_1(S, Q_2)| < \frac{\varepsilon}{2DM},$$

* Введенное таким образом символическое умножение ядер аналогично умножению матриц.

Пусть функция $\varphi_1(P)$ преобразуется с помощью ядра $K_1(P, Q)$ в функцию $\varphi_2(P) = \int K_1(P, Q) \varphi_1(Q)\, dQ$, а функция $\varphi_2(P)$ преобразуется с помощью ядра $K_2(P, Q)$ в функцию $\varphi_3(P) = \int K_2(P, Q) \times \varphi_2(Q)\, dQ$. Тогда ядро $(K_2 \circ K_1)(P, Q)$ задает преобразование функции $\varphi_1(P)$ в $\varphi_3(P)$, т. е. $\varphi_3(P) = \int (K_2 \circ K_1)(P, Q) \varphi_1(Q)\, dQ$.

Точно так же последовательное применение в n-мерном пространстве двух линейных преобразований дает линейное преобразование с матрицей, равной произведению матриц этих преобразований.

если расстояние между точками P_1 и P_2 и между точками Q_1 и Q_2 меньше η. Легко видеть, что при этом условии левая часть неравенства (2.5) меньше ε, что и требовалось доказать. Заметим, что, вообще говоря, $K_2 \circ K_1 \neq K_1 \circ K_2$. Если $K_3(P, Q)$ — равномерно непрерывная функция P и Q, то легко проверить, что

$$K_1 \circ (K_2 \circ K_3) = (K_1 \circ K_2) \circ K_3.$$

Переходим теперь к доказательству того, что интегральные уравнения с достаточно малыми по абсолютной величине непрерывными ядрами всегда имеют единственное решение. Этим мы воспользуемся в дальнейшем для доказательства теорем Фредгольма в случае интегрального уравнения с любым непрерывным ядром. Пусть дано интегральное уравнение

$$y(P) = \lambda \int K(P, Q)\, y(Q)\, dQ + f(P). \tag{3.5}$$

Пусть $K(P, Q)$ и $f(P)$ — некоторые равномерно непрерывные функции, когда $P \in G$ и $Q \in G$, где G — некоторая конечная область*. Здесь λ — некоторый параметр. Обычно он входит в уравнение именно так, как указано в (3.5).

Все дальнейшие рассуждения этого параграфа одинаково применимы как в том случае, когда рассматриваемые функции принимают комплексные значения, так и в том случае, если они принимают только действительные значения. Параметр λ тоже может принимать комплексные значения. Но очень существенно, что точки P и Q действительны, т. е. что все координаты этих

* Вместо того чтобы каждый раз подчеркивать равномерную непрерывность рассматриваемых на открытой области G функций, можно было бы рассматривать эти функции на конечной замкнутой области $\overline{G}$ (т. е. на G вместе с ее границей) и требовать только их непрерывность; тогда отсюда прямо следовала бы и равномерная непрерывность этих функций. Если задана какая-нибудь равномерно непрерывная на открытой области G функция φ, то ее можно продолжить по непрерывности и на границу области G. Тогда получится функция, равномерно непрерывная на замкнутой области $\overline{G}$. Для тех простых областей, которые мы будем рассматривать (ср. замечание к § 1), d-мерный объем границы равен 0. Поэтому интеграл от функции φ по области G совпадает с интегралом от ее продолжения по G

точек действительны, иначе возникла бы необходимость определить, что такое интеграл по многим комплексным переменным.

Следуя в точности тому определению ядра, которое было дано прежде, нам следовало бы теперь называть ядром $\lambda K(P, Q)$. Но, пользуясь обычной терминологией, мы будем функцию $K(P, Q)$ также называть ядром интегрального уравнения (3.5). Говоря в заголовке настоящего параграфа о малости ядра, мы имели в виду малость $\lambda K(P, Q)$.

Мы будем искать решение интегрального уравнения (3.5) в виде бесконечного степенного ряда по λ

$$y(P) = y_0(P) + \lambda y_1(P) + \lambda^2 y_2(P) + \ldots \tag{4.5}$$

Подставляя формально этот ряд в (3.5), получим:

$$\begin{aligned} y_0(P) + \lambda y_1(P) + \lambda^2 y_2(P) + \ldots = \\ = \lambda \int K(P, Q)\,[y_0(Q) + \lambda y_1(Q) + \ldots]\,dQ + f(P). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим:

$$\begin{gathered} y_0(P) = f(P), \\ y_{k+1}(P) = \int K(P, Q)\, y_k(Q)\, dQ, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{6.5}$$

или

$$\begin{aligned} & y_0(P) = f(P), \\ & y_1(P) = \int K(P, P_1) f(P_1)\, dP_1, \\ & y_2(P) = \int\int K(P, P_1) K(P_1, P_2) f(P_2)\, dP_1 dP_2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & y_k(P) = \overbrace{\int \ldots \int}^{k \text{ раз}} K(P, P_1) K(P_1, P_2) \ldots \\ & \qquad \ldots K(P_{k-1}, P_k) f(P_k)\, dP_1 \ldots dP_k. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$y_k(P) = \int K^{(k)}(P, Q) f(Q)\, dQ, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{8.5}$$

где

$$K^{(k)}(P, Q) = \overbrace{\int \ldots \int}^{(k-1)\text{ раз}} K(P, P_1) \ldots K(P_{k-1}, Q)\, dP_1 \ldots dP_{k-1}$$

$$\text{при } k = 2, 3, \ldots, \tag{9.5}$$

$$K^{(1)}(P, Q) = K(P, Q).$$

Пользуясь символическими обозначениями, мы можем ядро $K^{(k)}(P, Q)$ представить в виде

$$K^{(k)}(P, Q) = (\underbrace{K \circ K \circ K \circ \ldots \circ K}_{k \text{ раз}})(P, Q). \tag{10.5}$$

По доказанному в начале этого параграфа все ядра $K^{(k)}(P, Q)$ равномерно непрерывны. Функция $K^{(k)}(P, Q)$ называется *k-й итерацией ядра* $K(P, Q)$. Все функции $y_k(P)$, как легко видеть, также равномерно непрерывны.

Оценим ядра $K^{(k)}(P, Q)$. В силу равномерной непрерывности ядро $K(P, Q)$ ограничено. Пусть

$$|K(P, Q)| < M. \tag{11.5}$$

Подставляя эту оценку в правую часть (9.5), получим:

$$|K^{(k)}(P, Q)| \leqslant M^k \cdot D^{k-1}, \tag{12.5}$$

где D означает объем области G. Пользуясь формулой (8.5), мы получим отсюда

$$|y_k(P)| \leqslant M^k D^k F,$$

где F есть верхняя грань $|f(P)|$. Поэтому ряд (4.5) сходится абсолютно и равномерно по P в области G, если

$$|\lambda| < \frac{1}{MD}. \tag{13.5}$$

Сумма этого ряда является непрерывной функцией P, так как каждое слагаемое непрерывно. В силу равномерной сходимости ряда (4.5) интегрирование в ранее формально написанном равенстве (5.5) можно производить почленно. Поэтому благодаря определению $y_k(P)$ по формулам (6.5) равенство (5.5) действительно имеет место, т. е. функция $y(P)$, определенная рядом (4.5), является решением интегрального уравнения (3.5).

Покажем, что это решение единственное в классе ограниченных функций при условии (13.5). Действительно, допустим, что существуют два таких решения уравнения (3.5) $y_1(P)$ и $y_2(P)$. Подставляя их в уравнение (3.5) и вычитая почленно полученные тождества, найдем:

$$y_2(P)-y_1(P)=\lambda\int K(P,Q)\left[y_2(Q)-y_1(Q)\right]dQ. \tag{14.5}$$

Обозначим через Y верхнюю грань $|y_2(P)-y_1(P)|$; тогда из (14.5), пользуясь неравенством (11.5), найдем:

$$Y\leqslant|\lambda|MDY.$$

Отсюда на основании (13.5) получим:

$$Y\leqslant cY, \text{ где } c<1.$$

Это возможно, если только $Y=0$, что и требовалось доказать.

Часто бывает удобно представить решение интегрального уравнения (3.5) в следующем виде:

$$y(P)=\lambda\int\Gamma(P,Q,\lambda)f(Q)\,dQ+f(P), \tag{15.5}$$

где

$$\Gamma(P,Q,\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}K^{(k)}(P,Q). \tag{16.5}$$

Из оценок (12.5) следует что ряд (16.5) сходится равномерно по (P, Q, λ), если $P\in G$, $Q\in G$ и $|\lambda|<\frac{1}{MD}-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$. Отсюда вытекает, что функция $\Gamma(P, Q, \lambda)$ есть равномерно непрерывная функция по совокупности (P, Q) при фиксированном λ и голоморфная функция от λ в круге (13.5), если $P\in G$ и $Q\in G$. Поэтому интеграл (15.5) существует. Что он действительно дает решение интегрального уравнения (3.5), представленное рядом (4.5), легко увидеть, если подставить вместо $\Gamma(P,Q,\lambda)$ ряд (16.5) в правую часть (15.5) и интегрирование по Q выполнить почленно.

Функция $\Gamma(P, Q, \lambda)$ называется *резольвентой* интегрального уравнения (3.5) *. Как видно из предыдущего, она определяется ядром интегрального уравнения и не зависит от $f(P)$. Так как функция $y(P)$, даваемая формулой (15.5), представляет единственное решение уравнения (3.5), то уравнения (3.5) и (15.5) эквивалентны. Поэтому, если в уравнении (15.5) считать $y(P)$ известной функцией, а $f(P)$ неизвестной функцией, то единственное решение $f(P)$ этого уравнения дается формулой (3.5). Функция $K(P, Q)$ в этой формуле играет роль резольвенты для уравнения (15.5) с ядром $\Gamma(P, Q, \lambda)$.

Применяя к уравнению

$$z(P) = \lambda \int K(Q, P) z(Q)\, dQ + f(P), \tag{17.5}$$

транспонированному к уравнению (3.5), те же рассуж-

---

* Сравним (15.5) с (13.4). Покажем, что для интегральных уравнений (3.5) с вырожденными ядрами, для которых $a_i(P)$ и $b_i(P)$ равномерно-непрерывны и достаточно малы по абсолютной величине, т. е. для тех интегральных уравнений, которые принадлежат одновременно к типам, рассмотренным в § 4 и 5, имеем

$$\bar{\Gamma}(P, Q, \lambda) = \lambda \Gamma(P, Q, \lambda).$$

Так как при этом имеет место первый случай альтернативы, то $D(\lambda) \neq 0$.

Допустим, что в некоторой точке (P_0, Q_0, λ_0)

$$\bar{\Gamma}(P_0, Q_0, \lambda_0) \neq \lambda_0 \Gamma(P_0, Q_0, \lambda_0), \quad D(\lambda_0) \neq 0.$$

Так как для уравнений с рассматриваемыми ядрами $\bar{\Gamma}(P_0, Q, \lambda_0)$ и $\Gamma(P_0, Q, \lambda_0)$ непрерывны по Q, то можно найти такую окрестность G_0 точки Q_0, в которой всюду

$$\mathrm{Re}\{\bar{\Gamma}(P_0, Q, \lambda_0)\} \neq \mathrm{Re}\{\lambda_0 \Gamma(P_0, Q, \lambda_0)\}$$

или

$$\mathrm{Im}\{\bar{\Gamma}(P_0, Q, \lambda_0)\} \neq \mathrm{Im}\{\lambda_0 \Gamma(P_0, Q, \lambda_0)\}.$$

С другой стороны, в силу единственности решения интегральных уравнений рассматриваемого типа при любой равномерно непрерывной функции $f(P)$ должно иметь место следующее равенство:

$$\int \bar{\Gamma}(P_0, Q, \lambda_0) f(Q)\, dQ = \lambda_0 \int \Gamma(P_0, Q, \lambda_0) f(Q)\, dQ.$$

В частности, это равенство должно выполняться при функции $f(Q)$, равной нулю всюду вне окрестности G_0 точки Q_0 и положительной внутри этой окрестности, что невозможно. (Почему?)

дения, какие мы только что провели для уравнения (3.5), мы найдем, что в круге (13.5) оно имеет единственное в классе ограниченных функций решение, которое дается рядом

$$z(P) = z_0(P) + \lambda z_1(P) + \lambda^2 z_2(P) + \ldots$$

Здесь

$$z_0(P) = f(P),$$
$$z_k(P) = \int K(Q, P) z_{k-1}(Q) dQ$$

или, обозначая через $K^*(P, Q)$ ядро $K(Q, P)$, получим:

$$z_1(P) = \int K^*(P, P_1) f(P_1) dP_1,$$

$$z_k(P) = \overbrace{\int \ldots \int}^{k \text{ раз}} K^*(P, P_1) \ldots K^*(P_{k-1}, P_k) f(P_k) dP_1 \ldots dP$$

или

$$z_k(P) = \int K^{*(k)}(P, Q) f(Q) dQ, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где

$$K^{*(k)}(P, Q) = \overbrace{\int \ldots \int}^{k-1 \text{ раз}} K^*(P, P_1) \ldots K^*(P_{k-1}, Q) dP_1 \ldots dP_{k-1}.$$

Легко видеть, выписывая соответствующие интегралы, что $K^{*(k)}(P, Q) = K^{(k)}(Q, P)$. Отсюда следует, что решение уравнения (17.5) можно представить в виде

$$z(P) = \lambda \int \Gamma^*(P, Q, \lambda) f(Q) dQ + f(P), \qquad (18.5)$$

где

$$\Gamma^*(P, Q, \lambda) = \Gamma(Q, P, \lambda).$$

Таким образом, мы видим, что *в круге* (13.5) *как уравнение* (3.5), *так и транспонированное к нему уравнение* (17.5) *при всякой равномерно непрерывной функции* $f(P)$ *и при сделанных предположениях о ядре имеют единственное решение*, т. е. мы доказали, что в этом случае всегда имеет место первый случай альтернативы Фредгольма.

Отметим следующие две формулы:

$$\Gamma(P, Q, \lambda) = K(P, Q) + \lambda \int K(P, P_1)\,\Gamma(P_1, Q, \lambda)\,dP_1, \quad (19.5)$$

$$\Gamma(P, Q, \lambda) = K(P, Q) + \lambda \int \Gamma(P, P_1, \lambda)\,K(P_1, Q)\,dP_1. \quad (20.5)$$

Для проверки этих формул достаточно подставить вместо Г ряд (16.5), а затем сравнить коэффициенты при одинаковых степенях λ, воспользовавшись формулой (10.5).

Методом последовательных приближений можно пользоваться для приближенного решения интегральных уравнений при достаточно малом $|\lambda|$ *.

§ 6. Интегральные уравнения с ядрами, близкими к вырожденным

Пусть дано интегральное уравнение

$$y(P) = \lambda \int K(P, Q)\,y(Q)\,dQ + f(P), \quad (1.6)$$

где $f(P)$ — равномерно непрерывная функция, а

$$K(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} a_i(P)\,b_i(Q) + K_1(P, Q) = A(P, Q) + K_1(P, Q).$$

Здесь $a_i(P)$, $b_i(Q)$, $K_1(P, Q)$ — равномерно непрерывные и, следовательно, ограниченные функции, так как их области определения конечны. Нам опять безразлично, принимают ли эти функции комплексные значения или только действительные.

Чтобы последующие довольно громоздкие выкладки не затемняли существа дела, нам будет удобнее записывать интегральные уравнения в символической форме.

Равенство

$$\psi(P) = \int K(P, Q)\,y(Q)\,dQ \quad (2.6)$$

* Ср. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Изд. 5-е. М.: Физматгиз, 1962, гл. II, § 2.

условимся записывать символически в виде

$$\psi = Ky.$$

Таким образом, через K мы будем обозначать оператор, который функцию $y(P)$ переводит в функцию $\psi(P) = \int K(P, Q)\, y(Q)\, dQ$. Этот оператор определяется ядром $K(P, Q)$. Через K^* будем обозначать оператор, который определяется транспонированным ядром $K^*(P, Q) = K(Q, P)$. Символом E будем обозначать оператор, который функцию $y(P)$ переводит в эту же функцию, т. е. $Ey = y$ при всякой функции $y(P)$. Оператор $K_1 \pm K_2$ определяем равенством

$$(K_1 \pm K_2)\, y = K_1 y \pm K_2 y$$

при любой функции $y(P)$. Оператор $K_1 K_2$ определяем при помощи следующего равенства:

$$(K_1 K_2)\, y = K_1 (K_2 y)$$

для любой функции $y(P)$.

Легко видеть, что если K_1 и K_2 — операторы вида (2.6) с ядрами $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$, то оператор $K_1 \pm K_2$ определяется ядром $K_1(P, Q) \pm K_2(P, Q)$, а оператор $K_1 K_2$ определяется ядром $K_1 \circ K_2$.

Таким образом, уравнение (1.6) можно записать в виде

$$(E - \lambda K)\, y = f.$$

Прежде чем переходить к доказательству теорем Фредгольма для уравнения (1.6), сформулируем следующие леммы:

Лемма 1. *Если $A(P, Q)$ — вырожденное ядро и $K(P, Q)$ — произвольное равномерно непрерывное ядро, то $A \circ K$ и $K \circ A$ также суть вырожденные ядра.*

Лемма 2. *Ядро, транспонированное к $K_1 \circ K_2$, равно $K_2^* \circ K_1^*$.*

В справедливости этих утверждений легко убедиться, рассматривая соответствующие интегралы.

Докажем теперь, что для уравнения (1.6) при $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$, где M_1 есть верхняя грань значений

$|K_1(P, Q)|$, а D — объем области G, справедливы три теоремы Фредгольма.

1. Первая теорема Фредгольма. Покажем, что если однородное уравнение (1.6) имеет только тривиальное решение, то неоднородное уравнение (1.6) имеет решение при всякой функции $f(P)$.

Заменив K на $A+K_1$, перепишем уравнение (1.6) в виде

$$(E-\lambda A-\lambda K_1)y=f,$$

где A и K_1 — операторы, соответствующие ядрам $A(P, Q)$ и $K_1(P, Q)$. Тогда

$$(E-\lambda K_1)y=\lambda Ay+f. \tag{3.6}$$

Положим

$$(E-\lambda K_1)y=\eta. \tag{4.6}$$

Так как $|\lambda|<\frac{1}{M_1 D}$, то из доказанной в предыдущем параграфе формулы (15.5) следует, что

$$y=\eta+\lambda\mathbf{\Gamma}\eta=(E+\lambda\mathbf{\Gamma})\eta, \tag{5.6}$$

где $\mathbf{\Gamma}$ — оператор, соответствующий резольвенте $\mathbf{\Gamma}(P, Q, \lambda)$ ядра $K_1(P, Q)$. Подставляя это выражение $y(P)$ в уравнение (3.6), получим:

$$\eta=\lambda A(E+\lambda\mathbf{\Gamma})\eta+f$$

или

$$[E-\lambda A(E+\lambda\mathbf{\Gamma})]\eta=f. \tag{6.6}$$

Ядро $A(P, Q)+A\circ\lambda\mathbf{\Gamma}$ этого интегрального уравнения вырожденное, как это следует из леммы 1. Таким образом, мы показали, что каждому решению $y(P)$ уравнения (1.6) соответствует по формуле (4.6) решение $\eta(P)$ уравнения (6.6) с вырожденным ядром.

Обратно, легко проверить, что каждому решению $\eta(P)$ уравнения (6.6) соответствует решение $y(P)$ уравнения (1.6), определенное по формуле (5.6). Далее, если однородное уравнение (6.6) имеет нетривиальное решение, то однородное уравнение (1.6) также имеет нетривиальное решение, которое определяется формулой (5.6).

Так как, по предположению, однородное уравнение (1.6) имеет только тривиальное решение, то, следовательно, однородное уравнение (6.6) также имеет только тривиальное решение.

Для уравнения (6.6) с вырожденным ядром мы доказали в § 4 первую теорему Фредгольма. Поэтому неоднородное уравнение (6.6) имеет решение $\eta(P)$ при всякой функции $f(P)$. По формуле (5.6) мы получим решение $y(P)$ уравнения (1.6) при любой функции $f(P)$. Это решение, очевидно, единственное.

Тем самым первая теорема Фредгольма доказана, так как если однородное уравнение имеет нетривиальное решение, то неоднородное уравнение либо не имеет решения, либо это решение не единственное.

2. Вторая теорема Фредгольма. Покажем, что уравнение $(E-\lambda A-\lambda K_1)y=0$ и транспонированное к нему уравнение

$$(E-\lambda A^*-\lambda K_1^*)z=0 \tag{7.6}$$

имеют одинаковое число линейно независимых решений, если $|\lambda|<\dfrac{1}{M_1 D}$.

Заметим, что однородные уравнения (1.6) и (6.6) имеют одинаковое число линейно независимых решений, так как каждым p линейно независимым решениям одного уравнения соответствует по формуле (4.6) или (5.6) p линейно независимых решений другого уравнения.

Однородное уравнение, транспонированное к уравнению (6.6), имеет в силу леммы 2 вид

$$[E-\lambda(E+\lambda\Gamma^*)A^*]\zeta=0. \tag{8.6}$$

Так как уравнение (6.6) имеет вырожденное ядро, то по второй теореме Фредгольма, доказанной в § 4 для уравнений с вырожденными ядрами, однородные уравнения (6.6) и (8.6) имеют одинаковое число линейно независимых решений. Покажем теперь, что уравнения (8.6) и (7.6) эквивалентны. Пусть некоторая функция $\zeta(P)$ есть решение уравнения (8.6). Покажем, что она удовлетворяет также уравнению (7.6). Применяя к правой и левой частям равенства (8.6) оператор $E-\lambda K_1^*$, мы получим:

$$(E-\lambda K_1^*)[E-\lambda(E+\lambda\Gamma^*)A^*]\zeta=$$

$$=[E-\lambda K_1^*-\lambda(E-\lambda K_1^*)(E+\lambda\Gamma^*)A^*]\zeta=0. \tag{9.6}$$

Так как из формул (17.5) и (18.5) следует, что

$$(E-\lambda K_1^*)(E+\lambda \Gamma^*)\varphi=\varphi$$

при любой функции $\varphi(P)$, то из равенства (9.6) получаем:

$$(E-\lambda K_1^*-\lambda A^*)\zeta=0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично, применяя оператор $E+\lambda\Gamma^*$ к правой и левой частям равенства (7.6) и пользуясь равенством $(E+\lambda\Gamma^*)(E-\lambda K_1^*)=E$, получим, что всякое решение уравнения (7.6) удовлетворяет уравнению (8.6). Итак, мы доказали, что однородные уравнения (1.6), (6.6), (8.6) и (7.6) имеют одинаковое число линейно независимых решений. Тем самым вторая теорема Фредгольма доказана.

Те значения λ, при которых для уравнения (1.6) имеет место второй случай альтернативы Фредгольма, называются *собственными значениями уравнения* (1.6) (или ядра $K(P, Q)$; ср. § 2), а соответствующие нетривиальные решения однородного уравнения — *собственными функциями, отвечающими этому собственному значению.*

Так как в круге $|\lambda|<\frac{1}{M_1 D}$ функция $\Gamma(Q, P, \lambda)$ есть голоморфная функция от λ, то определитель (11.4), соответствующий вырожденному уравнению (6.6), также есть голоморфная функция от λ в этом круге. При $\lambda=0$ этот определитель обращается в 1. Следовательно, он не равен 0 тождественно. Поэтому его корни не могут иметь точек накопления в этом круге. Следовательно, *собственные значения λ уравнения* (1.6) *не могут иметь предельных точек в круге $|\lambda|<\frac{1}{M_1 D}$.*

3. Третья теорема Фредгольма. Покажем, что решение уравнения (1.6) существует тогда и только тогда, когда

$$\int f(P)z(P)\,dP=0,$$

где $z(P)$ — любое решение однородного транспонированного к (1.6) уравнения (7.6).

При доказательстве первой теоремы Фредгольма для уравнения (1.6) мы установили, что уравнение (1.6) имеет решение тогда и только тогда, когда существует решение уравнения (6.6) с вырожденным ядром. В § 4 мы показали, что уравнение (6.6) с вырожденным ядром имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int f(P)\zeta(P)\,dP = 0,$$

где $\zeta(P)$ — любое решение уравнения (8.6). Но согласно только что доказанному совокупность таких решений $\zeta(P)$ совпадает с совокупностью решений $z(P)$ уравнения (7.6). Этим теорема доказана.

§ 7. Интегральные уравнения с равномерно непрерывными ядрами

Всякое равномерно непрерывное ядро $K(P, Q)$ можно равномерно аппроксимировать с какой угодно точностью вырожденными ядрами. Действительно, пусть $K(P, Q)$ — какая-нибудь равномерно непрерывная функция (P, Q), заданная на конечной области G. По теореме Вейерштрасса, доказываемой в курсе анализа*, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $K_0(P, Q)$ относительно координат точек P и Q, что всюду на G

$$|K(P, Q) - K_0(P, Q)| < \varepsilon.$$

Очевидно, что каждый член многочлена $K_0(P, Q)$ можно представить в виде произведения двух множителей, из которых один зависит только от координат точки P, а другой — только от координат точки Q. Поэтому можно написать

$$K(P, Q) = \sum_{i=1}^{N} a_i(P)\, b_i(Q) + K_1(P, Q),$$

причем

$$|K_1(P, Q)| < \varepsilon.$$

---

* См., например: Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Изд. 3-е. М.: Гостехиздат, 1951, т. I, гл. II, § 4; Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964, с 161.

Отсюда, применяя теорему, доказанную в предыдущем параграфе, мы найдем, что в круге

$$|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon D},$$

где D — объем области G, справедливы все три теоремы Фредгольма и что в этом круге нет точек накопления собственных значений λ. Так как ε можно взять как угодно малым, то отсюда следует справедливость этих теорем для сколь угодно больших кругов с центром в точке $\lambda = 0$, т. е. справедливость их для всей плоскости λ.

Напомним ход рассуждений, которые привели нас к доказательству теорем Фредгольма для уравнений с равномерно непрерывными ядрами. Сначала (§ 4) мы доказали эти теоремы для интегральных уравнений с вырожденными ядрами. В § 6 эти теоремы были доказаны для уравнений с ядрами, близкими к вырожденным. А в настоящем параграфе было показано, что всякое равномерно непрерывное ядро может быть с какой угодно точностью равномерно аппроксимировано вырожденным ядром. Тем самым получилось доказательство теорем Фредгольма для интегральных уравнений с любыми равномерно непрерывными ядрами.

Метод, которым мы доказали здесь теоремы Фредгольма, принадлежит Е. Шмидту. В своем изложении я использовал записки лекций С. Л. Соболева. Заметим, что можно приближенно решать интегральные уравнения с непрерывными ядрами, заменяя эти ядра близкими к ним вырожденными *.

§ 8. Интегральные уравнения с ядрами вида $\frac{\bar{K}(P, Q)}{PQ^{\alpha}}$

1. Здесь P и Q принадлежат некоторой конечной замкнутой области $\bar{G}$ (ср. сноску на с. 37), а $\bar{K}(P, Q)$ — некоторая непрерывная относительно (P, Q) (т. е. по совокупности точек P и Q) функция; PQ — расстояние между точками P и Q. Целью п. 1 настоящего параграфа является доказательство того, что *для*

* Ср. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Изд. 5-е. М.: Физматгиз, 1962, гл. II, § 4.

интегральных уравнений с ядрами такого вида при $\alpha<d$, где d есть число измерений области G, на всей плоскости λ справедливы все три теоремы Фредгольма и что собственные значения λ не могут иметь конечных предельных точек.

Предварительно докажем следующую лемму для ядер $K_1(P,Q)$ и $K_2(P,Q)$, непрерывных по (P,Q), если $P\neq Q$, $P\in\bar{G}$ и $Q\in\bar{G}$.

Если

$$|K_1(P,Q)|<\frac{A_1}{PQ^{\alpha_1}},\ 0\leqslant\alpha_1<d \tag{1.8}$$

и

$$|K_2(P,Q)|<\frac{A_2}{PQ^{\alpha_2}},\ 0\leqslant\alpha_2<d, \tag{2.8}$$

то интеграл

$$K_3(P,Q)=\int K_1(P,P_1)\,K_2(P_1,Q)\,dP_1$$

существует и непрерывен по (P,Q), если P отлично от Q; далее,

$$|K_3(P,Q)|<\frac{A_3}{PQ^{\alpha_1+\alpha_2-d}},\quad \text{если } \alpha_1+\alpha_2>d, \tag{3.8}$$

и

$$|K_3(P,Q)|<A_3|\ln PQ|+A_4,\quad \text{если } \alpha_1+\alpha_2=d, \tag{4.8}$$

где A_3 и A_4 — некоторые постоянные. Если же $\alpha_1+\alpha_2<d$, то этот интеграл существует всегда и есть равномерно непрерывная функция от (P,Q).

Доказательство. Пусть $P\neq Q$. Тогда

$$|K_3(P,Q)|\leqslant\int|K_1(P,P_1)|\cdot|K_2(P_1,Q)|\,dP_1\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{r_1<D}\frac{A_1A_2\,dx_1^{(1)}\ldots dx_d^{(1)}}{\left[\sum\limits_{i=1}^{d}(x_i-x_i^{(1)})^2\right]^{\frac{\alpha_1}{2}}\cdot\left[\sum\limits_{i=1}^{d}(x_i^{(1)}-y_i)^2\right]^{\frac{\alpha_2}{2}}}=I. \tag{5.8}$$

Здесь x_i, $x_i^{(1)}$, y_i, $i=1,\ldots,d$ — соответственно координаты точек P, P_1, Q; D — диаметр области $\bar{G}$, т. е. верхняя грань расстояний между двумя ее точками, $r_1=\sqrt{\sum(x_i^{(1)}-x_i)^2}$.

Для простоты вычислений, не ограничивая общности, положим

$$x_1 = \ldots = x_d = 0;\ y_1 = \rho,\ y_2 = \ldots = y_d = 0,$$

где $\rho = PQ$. Положим далее

$$x_i^{(1)} = \rho\xi_i, \quad |\xi| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \xi_i^2}\ .$$

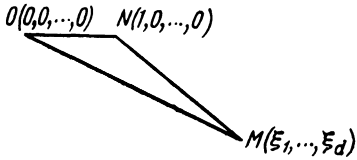

Рис. 2

Тогда интеграл I, стоящий в правой части (5.8), можно переписать так:

$$I = \int\limits_{|\xi| < \frac{D}{\rho}} \frac{A_1 A_2 \rho^d d\xi_1 \ldots d\xi_d}{\left(\sum\limits_{i=1}^{d} \xi_i^2\right)^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdot \left[(\xi_1 - 1)^2 + \sum\limits_{i=2}^{d} \xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_2}{2}} \rho^{\alpha_1 + \alpha_2}}.$$

Заметим, что если $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d} \xi_i^2} \geqslant 2$, то

$$\sqrt{(\xi_1 - 1)^2 + \sum_{i=2}^{d} \xi_i^2} \geqslant \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \xi_i^2}\,. \tag{6.8}$$

Действительно, из рис. 2 видно, что $NM + ON \geqslant OM$. Но $ON = 1$. Следовательно,

$$NM \geqslant OM - 1 = \frac{1}{2}(OM + (OM - 2)).$$

Но по условию $OM \geqslant 2$. Поэтому $NM \geqslant \dfrac{OM}{2}$.

Разобьем интеграл I на два слагаемых и воспользуемся оценкой (6.8). Тогда получим:

$$I \leqslant \frac{A_1 A_2}{\rho^{\alpha_1+\alpha_2-d}} \int\limits_{|\xi|<2} \frac{d\xi_1 \dots d\xi_d}{\left[\sum\limits_{i=1}^{d} \xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdot \left[(\xi_1-1)^2 + \sum\limits_{i=2}^{d} \xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_2}{2}}} +$$

$$+ \frac{A_1 A_2}{\rho^{\alpha_1+\alpha_2-d}} \int\limits_{2<|\xi|<\frac{D}{\rho}} \frac{2^{\alpha_2} d\xi_1 \dots d\xi_d}{\left[\sum\limits_{i=1}^{d} \xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}}.$$

Интеграл в первом слагаемом сходится и дает некоторое постоянное, не зависящее от ρ число C_1. Для вычисления второго интеграла перейдем к полярным координатам. Получим:

$$I \leqslant C_1 \rho^{d-\alpha_1-\alpha_2} + C_2 \rho^{d-\alpha_1-\alpha_2} \int\limits_{2}^{\frac{D}{\rho}} \tau^{d-1-\alpha_1-\alpha_2} d\tau, \tag{7.8}$$

где C_2 — некоторая положительная постоянная.

Если $\alpha_1+\alpha_2>d$, то из последней формулы следует, что

$$I \leqslant C_1 \rho^{d-\alpha_1-\alpha_2} + C_2 \rho^{d-\alpha_1-\alpha_2} \int\limits_{2}^{\infty} \tau^{d-1-\alpha_1-\alpha_2} d\tau = C_3 \rho^{d-\alpha_1-\alpha_2},$$

т. е. оценка (3.8).

Если $\alpha_1+\alpha_2=d$, то из формулы (7.8) следует

$$I \leqslant C_1 + C_2 \ln \frac{D}{2\rho},$$

т. е. оценка (4.8) для $K(P, Q)$ *.

Если же $\alpha_1+\alpha_2<d$, то прежде всего ясно, что $K_3(P, Q)$ существует и при $P=Q$. Далее, из оценки (7.8) следует

$$I \leqslant C_1 \rho^{d-\alpha_1-\alpha_2} + \\ + \frac{C_2 \rho^{d-\alpha_1-\alpha_2}}{d-\alpha_1-\alpha_2} \left[\left(\frac{D}{\rho}\right)^{d-\alpha_1-\alpha_2} - 2^{d-\alpha_1-\alpha_2}\right] \leqslant C_3, \tag{8.8}$$

где C_3 есть некоторая постоянная.

* В дальнейших рассмотрениях случая $\alpha_1+\alpha_2=d$ всегда можно избежать, увеличивая немного α_1 или α_2.

Докажем теперь, что $K_3(P, Q)$ всегда непрерывно зависит от (P, Q), если P не совпадает с Q. Для этого заметим, что

$$|K_3(P,Q) - K_3(P^*,Q^*)| \leqslant$$
$$\leqslant |K_3(P,Q) - K_3(P,Q^*)| + |K_3(P,Q^*) - K_3(P^*,Q^*)| \leqslant$$
$$\leqslant \int |K_1(P,P_1)| \cdot |K_2(P_1,Q) - K_2(P_1,Q^*)|\, dP_1 +$$
$$+ \int |K_2(P_1,Q^*)| \cdot |K_1(P,P_1) - K_1(P^*,P_1)|\, dP_1. \quad (9.8)$$

Мы предположили, что функции $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$ заданы для всех точек P и Q (если $P \neq Q$), принадлежащих $\overline{G}$, и что $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$ непрерывны всюду, где только $P \neq Q$. Поэтому на любом замкнутом множестве точек (P, Q), не содержащем точек, для которых $P = Q$, функции $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$ равномерно по (P, Q) непрерывны. Отсюда каждая из разностей, стоящих под знаком интеграла, равномерно по P_1 мала, если точки Q и Q^*, P и P^* достаточно близки, во всей области $\overline{G}$ точек P_1, за исключением некоторых окрестностей G_1, G_2, G_3, G_4 соответственно точек $P_1 = Q$, $P_1 = Q^*$, $P_1 = P$, $P_1 = P^*$. К G_1, G_2, G_3, G_4 мы относим точки G, отстоящие соответственно от Q, Q^*, P, P^* на расстояние, меньшее, чем некоторое фиксированное число r. Поэтому в силу условий (1.8) и (2.8) интегралы, входящие в (9.8) и взятые по областям $\overline{G} \setminus (G_1 \cup G_2)$ и $\overline{G} \setminus (G_3 \cup G_4)$, становятся как угодно малыми при достаточной близости точек (P, Q) и (P^*, Q^*). Части же интегралов (9.8), взятые по окрестностям G_1, G_2, G_3 и G_4, в силу условий (1.8) и (2.8) становятся как угодно малыми, когда $r \to 0$, если $P \neq Q$.

Если же $\alpha_1 + \alpha_2 < d$, то при достаточной близости точек (P, Q) и (P^*, Q^*) интегралы (9.8) становятся как угодно малыми, если даже точки P и Q (или P^* и Q^*) совпадают между собой, так как в этом случае части этих интегралов по окрестностям G_1, G_2, G_3 и G_4 равномерно по (P, Q) стремятся к 0 при $r \to 0$.

Действительно, первый из интегралов (9.8), взятый по этим окрестностям, не превосходит суммы

$$\int |K_1(P,P_1)|\,|K_2(P_1,Q)|\, dP_1 + \int |K_1(P,P_1)|\,|K_2(P_1,Q^*)|\, dP_1.$$

Каждый из этих интегралов мы оцениваем, пользуясь неравенством (8.8). Аналогично оцениваем второй из интегралов (9.8), взятый по G_1, G_2, G_3, G_4.

Отсюда следует непрерывность функции $K_3(P, Q)$ во всей замкнутой области ее определения и, следовательно, ее равномерная непрерывность.

Переходим теперь к рассмотрению интегральных уравнений

$$y(P) = \lambda \int K(P, Q)\, y(Q)\, dQ + f(P), \tag{10.8}$$

где $K(P, Q)$ имеет вид, обозначенный в заголовке настоящего параграфа при $\alpha < d$. Функцию $f(P)$ мы будем считать непрерывной в замкнутой области $\bar{G}$ и потому ограниченной; мы будем рассматривать только непрерывные решения этого уравнения. Заметим, что совершенно так же, как и выше, легко показать, что при наших предположениях о $K(P, Q)$ *всякое ограниченное решение уравнения* (10.8) *непрерывно, если* $f(P)$ *непрерывна.*

Докажем прежде всего, что при достаточно малом $|\lambda|$ это уравнение, точно так же как и транспонированное к нему, имеет всегда единственное решение в классе ограниченных функций. Так как для транспонированного уравнения все доказательства проводятся так же, как и для данного уравнения (10.8), то мы ограничимся рассмотрением только уравнения (10.8). Доказательство существования и единственности решения уравнения (10.8) проводится совершенно так же, как это делалось в § 5. Мы будем искать решение в виде суммы ряда

$$y(P) = y_0(P) + \lambda y_1(P) + \lambda^2 y_2(P) + \ldots \tag{11.8}$$

Как и в § 5, мы найдем, что

$$y_0(P) = f(P), \quad y_{k+1}(P) = \int K(P, Q)\, y_k(Q)\, dQ,$$

$$k = 0, 1, \ldots,$$

Применяя только что доказанную лемму, мы получим отсюда, что все $y_k(P)$ суть непрерывные функции P. Оценим их модули. Пусть

$$|f(P)| < N,$$

где N — некоторое постоянное число. Пусть M есть верхняя грань значений интеграла

$$\int |K(P, Q)|\, dQ$$

(M, очевидно, существует). Тогда легко видеть, что

$$|y_k(P)| \leqslant NM^k.$$

Отсюда видно, что при

$$|\lambda| < \frac{1}{M} - \varepsilon \ (\varepsilon > 0)$$

ряд (11.8) равномерно по λ сходится и дает функцию, голоморфную по λ и равномерно непрерывную по совокупности (P, λ). Совершенно так же, как в § 5, доказывается, что этот ряд дает решение интегрального уравнения (10.8) и что другого решения этого уравнения в классе ограниченных функций нет.

Совершенно так же, как в § 5, мы найдем, что это решение $y(P)$ можно представить в виде

$$y(P) = \lambda \int \Gamma(P, Q, \lambda) f(Q)\, dQ + f(P),$$

где

$$\Gamma(P, Q, \lambda) = K(P, Q) + \lambda K^{(2)}(P, Q) + \\ + \lambda^2 K^{(3)}(P, Q) + \ldots \tag{12.8}$$

Первый член этого ряда имеет вид

$$K(P, Q) = \frac{\overline{K}(P, Q)}{PQ^{\alpha}}, \quad a < d, \tag{13.8}$$

где $\overline{K}(P, Q)$ есть равномерно непрерывная по (P, Q) функция. В силу ограниченности G отсюда следует ограниченность $\overline{K}(P, Q)$, и по доказанной в начале этого параграфа лемме

$$|K^{(2)}(P, Q)| < \frac{A}{PQ^{2\alpha - d}},$$

вообще

$$|K^{(m)}(P, Q)| < \frac{A_m}{PQ^{m\alpha - (m-1)d}}\text{*},$$

* Ср. сноску на с. 52.

если $m\alpha-(m-1)d>0$. Здесь через A и A_m обозначены некоторые постоянные. Так как $\alpha<d$, то при достаточно большом m

$$m\alpha-(m-1)d<0.$$

Тогда в силу доказанной леммы функция $K^{(m)}(P, Q)$ равномерно непрерывна по $(P. Q)$. Все следующие итерации $K^{(p)}(P, Q)$ также равномерно непрерывны. При этом для $p\geqslant m$ имеем

$$|K^{(p+1)}(P,Q)|\leqslant\left|\int K(P,P_1)K^{(p)}(P_1,Q)\,dP_1\right|\leqslant$$

$$\leqslant M_p\int|K(P,P_1)|\,dP_1\leqslant M_pM,$$

где M_p есть верхняя грань модуля $K^{(p)}(P,Q)$. Отсюда получается доказательство равномерной по P, Q и λ $\left(\text{при } \lambda<\frac{1}{M}-\varepsilon\right)$ сходимости ряда (12.8), так же как это доказывалось для ряда (16.5). Аналогичные рассуждения можно провести для транспонированного уравнения.

Все формулы, которые мы получили в § 5, сохраняют и теперь свою силу.

После этого все рассуждения § 6 делаются применимыми для интегральных уравнений с ядрами

$$K(P,Q)=\sum_{i=1}^{m}a_i(P)\,b_i(Q)+K_1(P,Q),$$

где $a_i(P)$ и $b_i(Q)$ непрерывны в $\bar{G}$, а $K_1(P,Q)$ имеет вид (13.8). Таким образом, получается доказательство теорем Фредгольма в круге

$$|\lambda|<\frac{1}{M_1},$$

где M_1 есть наибольшая из верхних граней интегралов:

$$\int|K_1(P,Q)|\,dQ,\quad \int|K_1(P,Q)|\,dP.$$

Кроме того, получается, что в этом круге не может быть точек сгущения для собственных значений λ.

Перейдем теперь к доказательству теорем Фредгольма для интегральных уравнений с ядрами того типа, какой указан в названии настоящего параграфа. Положим

$$\varphi_C(x) = x, \text{ если } x \leqslant C,$$
$$\varphi_C(x) = C, \text{ если } x > C.$$

Тогда функция

$$K_C(P, Q) = \bar{K}(P, Q)\, \varphi_C\left(\frac{1}{PQ^{\alpha}}\right)$$

является равномерно непрерывной функцией (P, Q) при всяком C. При достаточно большом C интегралы

$$\int |K(P, Q) - K_C(P, Q)|\, dQ, \quad \int |K(P, Q) - K_C(P, Q)|\, dP$$

равномерно по P, соответственно по Q, как угодно малы. Как мы уже говорили в § 6, равномерно непрерывную функцию $K_C(P, Q)$ можно с какой угодно точностью равномерно на области $\bar{G}$ аппроксимировать суммами вида

$$S_m(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} a_i(P)\, b_i(Q).$$

Тогда

$$K(P, Q) = S_m(P, Q) + \tilde{K}(P, Q),$$

причем верхняя грань значений

$$\int |\tilde{K}(P, Q)|\, dQ, \quad \int |\tilde{K}(P, Q)|\, dP$$

может быть сделана меньше любого $\varepsilon > 0$. Отсюда получается доказательство всех трех теорем Фредгольма на всей плоскости λ для интегральных уравнений с ядрами вида (13.8). Кроме того, получается доказательство отсутствия конечных точек накопления у собственных значений.

Только что приведенное доказательство теорем Фредгольма для ядер вида (13.8) в основном воспроизводит доказательство этих теорем для равномерно непрерывных ядер. Доказательство этих последних теорем в сущности основывалось только на том, что некоторые интегралы были малы; требование малости подынтегральных функций было для этого излишним. Этим мы и воспользовались в настоящем параграфе.

Замечание. Пусть ядро $K(P, Q)$ — непрерывная функция (P, Q), когда $P \in G$, $Q \in G$ и $P \neq Q$, и удовлетворяет условию $|K(P, Q)| < \frac{A}{PQ^{\alpha}}$, $0 \leqslant \alpha < d$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\alpha + \varepsilon < d$. Тогда

$$K(P, Q) = \frac{K(P, Q) PQ^{\alpha+\varepsilon}}{PQ^{\alpha+\varepsilon}} = \frac{\bar{K}(P, Q)}{PQ^{\alpha+\varepsilon}},$$

где $\bar{K}(P, Q)$ — непрерывная функция (P, Q). Таким образом, для ядер указанного вида также справедливы все теоремы Фредгольма.

2. Многие задачи математической физики приводят к рассмотрению интегральных уравнений, в которых интегрирование происходит не по области d-мерного евклидова пространства, а по гладким линии, поверхности или многообразию* большей размерности, расположенным в n-мерном евклидовом пространстве.

Для интегральных уравнений такого вида также справедливы теоремы Фредгольма. Ниже мы покажем, как, пользуясь рассуждениями п. 1, можно доказать теоремы Фредгольма в том случае, когда областью интегрирования служит замкнутая гладкая поверхность в трехмерном пространстве. Для других многообразий доказательства аналогичны.

Итак, пусть дано уравнение

$$y(P) = \lambda \int_S K(P, Q)\, y(Q)\, dS_Q + f(P), \tag{14.8}$$

где S — замкнутая гладкая поверхность в трехмерном пространстве (мы предполагаем, что в некоторой достаточно малой окрестности любой точки $A \in S$ какая-либо одна из координат точек S является непрерывно дифференцируемой функцией двух других координат), dS_Q —

* Под d-мерным непрерывно дифференцируемым (гладким) многообразием M, лежащим в n-мерном евклидовом пространстве E_n $(0 < d < n)$, понимают замкнутое связное ограниченное множество точек M, лежащее в E_n и такое, что в некоторой окрестности любой точки $A \in M$ какие-либо $n - d$ координат точек M являются непрерывно дифференцируемыми функциями остальных d координат.

элемент площади поверхности S; $P \in S$, $Q \in S$, $f(P)$ — заданная непрерывная функция на S. Пусть $K(P, Q) = \frac{\bar{K}(P, Q)}{PQ^{\alpha}}$, где $\bar{K}(P, Q)$ — непрерывная функция, когда $P \in S$ и $Q \in S$; $0 \leqslant \alpha < 2$ и PQ — расстояние между точками P и Q в трехмерном пространстве. Для того чтобы доказать с помощью рассуждений п. 1 все теоремы Фредгольма для рассматриваемого уравнения (14.8), достаточно показать, что остается справедливой лемма п. 1 и что всякое непрерывное ядро $K_1(P, Q)$, заданное на S, можно равномерно приблизить вырожденным ядром с любой степенью точности. Все другие рассуждения § 4, 5, 6, 7 и 8 переносятся автоматически на уравнения рассматриваемого вида.

Непрерывное ядро $K_1(P, Q)$ можно рассматривать как непрерывную функцию, заданную на некотором замкнутом множестве S^2 в 6-мерном пространстве $(x_P, y_P, z_P, x_Q, y_Q, z_Q)$. Это множество получается, когда точки $P(x_P, y_P, z_P)$ и $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ независимо друг от друга пробегают множество S. Обозначим через R куб в пространстве $(x_P, y_P, z_P, x_Q, y_Q, z_Q)$, содержащий все точки множества S^2. Непрерывную функцию, заданную на замкнутом множестве S^2, можно продолжить до непрерывной функции, заданной на R*. По теореме Вейерштрасса непрерывную функцию, заданную на R, можно равномерно приблизить многочленом с любой степенью точности. Если теперь рассматривать этот многочлен только на S^2, то он и является вырожденным ядром, приближающим ядро $K_1(P, Q)$ с любой степенью точности.

Убедимся теперь в справедливости леммы п. 1 § 8. Для доказательства непрерывности $K_3(P, Q)$ при $P \neq Q$, подобно доказательству, проведенному в п. 1, достаточно проверить, что интеграл вида

$$\int\limits_{S(Q, r)} \frac{dS_{P_1}}{QP_1^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha < 2,$$

---

* Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций. М.: Гостехиздат, 1948, гл. 6, § 13, с. 284; Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964, с. 105.

взятый по части поверхности S, расположенной в сфере радиуса r с центром в точке Q, как угодно мал равномерно по Q, меняющемуся в малой окрестности некоторой точки Q_0, при достаточно малом r.

Пусть в окрестности точки Q_0 поверхность S задается непрерывно дифференцируемой функцией $z=f(x, y)$ и Q' и P_1' — проекции точек Q и P_1 на плоскость $z=0$. Так как $dS<C\,dx\,dy$, где C есть некоторая постоянная, и кроме того, $Q'P_1' \leqslant QP_1$, то

$$\int\limits_{S(Q,\,r)} \frac{dSP_1}{QP_1^{\alpha}} < \int\limits_{S(Q',r)} \frac{C\,dx\,dy}{Q'P_1'^{\alpha}}.$$

Последний интеграл можно сделать как угодно малым, если r достаточно мало́.

Для доказательства непрерывности $K_3(P, Q)$ при $P=Q$ и $\alpha_1+\alpha_2<d$ достаточно точно так же оценить интеграл вида

$$\int\limits_{S(Q,\,r)\cup S(P,\,r)} \frac{dS_{P_1}}{PP_1^{\alpha_1} QP_1^{\alpha_2}},$$

когда P и Q меняются в малой окрестности точки $P^*=$ $=Q^*$ и r стремится к нулю, и воспользоваться неравенством (8.8).

Чтобы доказать справедливость неравенств (3.8) и (4.8), покажем ограниченность функций

$$K_3(P, Q)\, PQ^{\alpha_1+\alpha_2-d}\,, \text{ если } \alpha_1+\alpha_2>d,$$

и

$$\frac{K_3(P,\,Q)}{|\ln PQ|+1}, \text{ если } \alpha_1+\alpha_2=d$$

при $P \in S$, $Q \in S$, $P \neq Q$.

Для этого допустим, что наше утверждение неверно. Тогда найдутся последовательности точек $P_1 \in S$, $P_2 \in$ $\in S$, ..., $Q_1 \in S$, $Q_2 \in S$, ..., причем $P_i \neq Q_i$ и

$$|K_3(P_i, Q_i)|\, P_iQ_i^{\alpha_1+\alpha_2-d} \to \infty \text{ при } i \to \infty. \qquad (15.8)$$

Мы можем предполагать, что последовательности P_i и Q_i являются сходящимися, т. е.

$$P_i \to P_0 \in S, \quad Q_i \to Q_0 \in S.$$

Из доказанной ранее непрерывности функции $K_3(P, Q)$ при $P \neq Q$ следует, что $P_0 = Q_0$. Положим для определенности, что в некоторой достаточно малой окрестности U точки P_0 координата z точек S является непрерывно дифференцируемой функцией x и y и что в этой окрестности имеет место неравенство $dS \leqslant C\,dx\,dy$ (C — некоторая постоянная). Тогда для всех достаточно больших i

$$|K_3(P_i, Q_i)| \leqslant A_1 A_2 \int\limits_U \frac{dS_{P_1}}{P_i P_1^{\alpha_1} P_1 Q_i^{\alpha_2}} + A_1 A_2 \int\limits_{S \setminus U} \frac{dS_{P_1}}{P_i P_1^{\alpha_1} P_1 Q_i^{\alpha_2}} \leqslant$$

$$\leqslant A_1 A_2 C \int\limits_{U'} \frac{dx\,dy}{P'_i P_1'^{\alpha_1} P'_1 Q_i'^{\alpha_2}} + A_1 A_2 \max_{P_1 \in S \setminus U} \frac{1}{P_i P_1^{\alpha_1} P_1 Q_i^{\alpha_2}} \int\limits_{S \setminus U} dS_{P_1},$$

где штрихами обозначены проекции на плоскость $z = 0$. Так как последнее из полученных слагаемых ограничено, то из (15.8) следует, что

$$P_i Q_i^{\alpha_1 + \alpha_2 - d} \int\limits_{U'} \frac{dx\,dy}{P'_i P_1'^{\alpha_1} P'_1 Q_i'^{\alpha_2}} \to \infty \text{ при } i \to \infty. \qquad (16.8)$$

Однако $P_i Q_i \leqslant C_1 P'_i Q'_i$ для всех достаточно больших i, где $C_1 > 0$ (почему?). Поэтому из (16.8) получаем:

$$P'_i Q_i'^{\alpha_1 + \alpha_2 - d} \int\limits_{U'} \frac{dx\,dy}{P'_i P_1'^{\alpha_1} P'_1 Q_i'^{\alpha_2}} \to \infty \text{ при } i \to \infty.$$

Но точки P'_i, Q'_i находятся уже в области U' на плоскости. Поэтому в силу леммы, доказанной в п. 1, имеем для всех достаточно больших i

$$\int\limits_{U'} \frac{dx\,dy}{P'_i P_1'^{\alpha_1} P'_1 Q_i'^{\alpha_2}} < \frac{A}{P'_i Q_i'^{\alpha_1 + \alpha_2 - d}}$$

(A — некоторая постоянная). Это соотношение противоречит предыдущему. Аналогично доказывается ограниченность функции $\dfrac{K_3(P, Q)}{|\ln PQ| + 1}$.

§ 9. Примеры особых интегральных уравнений

Особыми интегральными уравнениями мы называем такие, для которых или неверны теоремы Фредгольма, или собственные значения имеют конечные предельные точки. У приводимых в этом параграфе особых интегральных уравнений интервал интегрирования бесконечсн. Но, полагая, например,

$$\xi = \operatorname{tg} \eta, \quad x = \operatorname{tg} y,$$

эти интегральные уравнения можно привести к таким уравнениям, у которых интервал интегрирования конечен.

Пример 1. У интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\infty \sin(x\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

при $\lambda = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ имеется бесконечное множество линейно независимых решений, так как при таких λ этому уравнению удовлетворяют функции

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ax} \pm \frac{x}{a^2+x^2}, \; 0 < x < \infty,$$

при любом $a > 0$.

Пример 2. Уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\xi|}\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

имеет решение $e^{i\alpha x}$ при $\lambda = \frac{1+\alpha^2}{2}$. Таким образом, всякое действительное $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ является собственным значением. Мы рассматриваем здесь только действительные значения α, так как в противном случае $e^{i\alpha x}$ становится неограниченным на бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$.

Существуют примеры интегральных уравнений, для которых не имеют места и другие теоремы Фредгольма.

Важную роль в теории дифференциальных уравнений с частными производными и математической физике играют так называемые *сингулярные интегральные уравнения*. Такие уравнения имеют вид (10.8), но ядра таких уравнений имеют сильную особенность ($\alpha=d$) и неинтегрируемы в обычном смысле, а соответствующий интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Построена полная теория сингулярных интегральных уравнений. Эта теория существенно отличается от теории интегральных уравнений Фредгольма. Сингулярным интегральным уравнениям посвящена обширная литература. См., например, Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968; С. Г. Михлин. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962; Ф. Трикоми. Интегральные уравнения. М.: ИЛ, 1960; З. Прёсдорф. Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979.

ГЛАВА 2

УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

§ 10. Уравнения Вольтерра

Так называются интегральные уравнения

$$y(P) = \lambda \int K(P, Q)\, y(Q)\, dQ + f(P),$$

удовлетворяющие следующим условиям:

а) каждая из координат точек P и Q принимает значение от 0 до некоторого $a > 0$;

б) $K(P, Q) = 0$, если хотя бы одна координата точки Q больше соответствующей (т. е. имеющей тот же номер) координаты точки P.

Мы будем рассматривать только одномерный случай. Тогда уравнение Вольтерра имеет вид

$$y(x) = \lambda \int_0^x K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi + f(x). \tag{1.10}$$

Покажем, что для этого уравнения при всяком λ имеет место первый случай альтернативы Фредгольма в предположении, что $K(x, \xi)$ есть непрерывная функция при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant \xi \leqslant x$, а $f(x)$ непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant a$.

Иными словами, мы покажем, что *у уравнения Вольтерра нет собственных значений.*

Доказательство. Уравнение (1.10) принадлежит к тому классу интегральных уравнений, для которого мы доказали теоремы Фредгольма. В самом деле,

$$K(x, \xi) = \frac{K(x, \xi)\, |x-\xi|^{\varepsilon}}{|x-\xi|^{\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Функция $\bar{K}(x, \xi)$, определенная равенствами

$$\bar{K}(x, \xi) = K(x, \xi)\, |x-\xi|^{\varepsilon} \quad \text{при } 0 \leqslant \xi \leqslant x,$$
$$\bar{K}(x, \xi) = 0 \quad \text{при } \xi \geqslant x,$$

непрерывна на квадрате

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant a.$$

Поэтому для интегрального уравнения (1.10) согласно § 8 справедливы все три теоремы Фредгольма. Значит, для доказательства того, что для этого уравнения при всяком λ имеет место первый случай альтернативы Фредгольма, достаточно показать, что соответствующее однородное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^x K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi \tag{2.10}$$

может при всяком λ иметь только тривиальное решение в классе непрерывных функций от x при $0 \leqslant x \leqslant a$. Для доказательства этого последнего утверждения обозначим через B наибольшее значение $|y(x)|$ при $0 \leqslant x \leqslant a$, а через M — наибольшее значение $|K(x, \xi)|$ при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant \xi \leqslant x$. Тогда из уравнения (2.10) получим:

$$|y(x)| \leqslant |\lambda| MBx.$$

Подставляя эту оценку $y(x)$ опять в правую часть (2.10), получим:

$$|y(x)| \leqslant |\lambda|^2 M^2 \frac{Bx^2}{2}.$$

Продолжая этот процесс, получим:

$$|y(x)| \leqslant \frac{|\lambda|^k M^k x^k B}{k!} \leqslant \frac{|\lambda|^k M^k a^k B}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

А это последнее выражение стремится к 0 при $k \to \infty$. Следовательно, $y(x) \equiv 0$ на интервале $(0, a)$, что и требовалось доказать.

Можно искать решение уравнения (1.10) в виде суммы ряда

$$y(x) = y_0(x) + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \ldots \tag{3.10}$$

Согласно § 8 должно быть

$$y_0(x) = f(x), \quad y_{k+1}(x) = \int_0^x K(x, \xi)\, y_k(\xi)\, d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Пусть N есть наибольшее значение $|f(x)|$ на интервале $(0, a)$. Тогда получим:

$$|y_k(x)| \leqslant \frac{M^k x^k N}{k!} \leqslant \frac{M^k a^k N}{k!}.$$

Отсюда видно, что ряд (3.10) равномерно по λ и x сходится, когда λ находится в каком угодно большом круге, а $0 \leqslant x \leqslant a$.

Чтобы наглядно представить себе, почему уравнение Вольтерра не имеет собственных значений, рассмотрим (подобно тому, как это мы делали в § 3) следующую систему линейных алгебраических уравнений, соответствующую уравнению Вольтерра на интервале $0 \leqslant x \leqslant a$:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = y_1 - \lambda K_{11} y_1 \Delta\xi, \\ f_2 = \quad - \lambda K_{21} y_1 \Delta\xi + y_2 - \lambda K_{22} y_2 \Delta\xi, \\ f_3 = \quad - \lambda K_{31} y_1 \Delta\xi \quad - \lambda K_{32} y_2 \Delta\xi + y_3 - \lambda K_{33} y_3 \Delta\xi, \end{array}\right\} \quad (4.10)$$

. . . .

Мы здесь всюду сохранили обозначения, принятые в § 3. Уравнения (4.10) при любом фиксированном λ можно решать последовательно, если только $|\Delta\xi|$ достаточно мало, что мы будем предполагать. В самом деле, из первого уравнения можно найти y_1, так как при достаточно малом $|\Delta\xi|$ коэффициент при y_1 отличен от 0. Подставим значение y_1 во все последующие уравнения. Тогда из второго уравнения можно найти y_2. Подставим его значение во все последующие уравнения. Тогда из третьего уравнения можно найти y_3 и т. д. Очень легко показать, что при $\Delta x \to 0$ решение системы (4.10) приближается к решению интегрального уравнения (1.10).

Определитель системы (4.10) равен

$$\Pi = (1 - \lambda K_{11} \Delta\xi)(1 - \lambda K_{22} \Delta\xi) \ldots (1 - \lambda K_{nn} \Delta\xi),$$

где $\Delta x = \Delta\xi = \frac{a}{n}$. Отсюда видно, что

$$|\Pi| \geqslant (1 - |\lambda| M \Delta\xi)^{\frac{a}{\Delta\xi}}. \quad (5.10)$$

Правая часть этого неравенства при всяком достаточно малом $\Delta\xi$ отлична от 0. При уменьшении $\Delta\xi$ она растет. Например, когда $\Delta\xi$ уменьшается вдвое, то $(1 - |\lambda| M \Delta\xi)$

в (5.10) заменяется выражением

$$\left(1-|\lambda| M \frac{\Delta\xi}{2}\right)^2 = 1-|\lambda| M\Delta\xi + \frac{\lambda^2 M^2 (\Delta\xi)^2}{4}.$$

Когда $\Delta\xi \to 0$, то правая часть (5.10) стремится к

$$e^{-|\lambda| aM}.$$

Именно в том обстоятельстве, что определитель системы (4.10) отличен от 0 и не стремится к 0, когда $\Delta\xi \to 0$, лежит алгебраическая причина отсутствия собственных значений у уравнения Вольтерра.

Замечание 1. Рассуждениями, совершенно аналогичными тем, какими мы показали отсутствие собственных значений у уравнений Вольтерра с равномерно непрерывными ядрами, можно то же самое показать для уравнений Вольтерра с ядрами вида

$$K(x, \xi) = \frac{\bar{K}(x, \xi)}{|x-\xi|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1,$$

где $\bar{K}(x, \xi)$ — равномерно непрерывная функция.

Замечание 2. Рассмотрим следующее интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода относительно неизвестной функции $y(x)$:

$$\int_0^x K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = f(x), \quad f(0) = 0. \tag{6.10}$$

Предположим, что $K(x, \xi)$, $K'_x(x, \xi)$, $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны, когда $0 \leqslant x \leqslant a$ и $0 \leqslant \xi \leqslant x$. Тогда всякое непрерывное при $0 \leqslant x \leqslant a$ решение $y(x)$ уравнения (6.10) удовлетворяет интегральному уравнению

$$K(x, x)\, y(x) + \int_0^x K'_x(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = f'(x), \tag{7.10}$$

которое получается из (6.10) почленным дифференцированием по x. Легко видеть, что и обратно, всякое непрерывное при $0 \leqslant x \leqslant a$ решение уравнения (7.10) удовлетворяет также уравнению (6.10). Если $K(x, x)$ превосходит по абсолютной величине некоторую положительную постоянную, то уравнение (7.10) сводится к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода, рассмотренному в настоящем параграфе. Если $K(x, x) \equiv 0$, иногда бывает полезно еще раз продифференцировать уравнение (7.10) по x и т. д.

ГЛАВА 3

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ СИММЕТРИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ

§ 11. Геометрические аналоги некоторых соотношений между функциями (пространство функций)

Некоторое представление о функции $f(P)$, равномерно непрерывной на заданной конечной области G, например на конечном интервале (a, b), дают значения этой функции на достаточно густом множестве точек $P_1, \ldots, P_n$. В одномерном случае за эти точки можно принять точки

$$x=a+\Delta x,\ a+2\Delta x,\ \ldots,\ a+(n-1)\Delta x,\ a+n\Delta x,$$

где $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ при достаточно большом n. Будем обозначать значения f в этих точках соответственно через

$$f^{(1)},\ \ldots,\ f^{(n)}.$$

Эти последние будем рассматривать как компоненты в n-мерном евклидовом пространстве вектора $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$. Таким образом, функции f соответствует некоторый вектор $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$.

Длина этого вектора, или *норма* его, равна

$$\sqrt{[f^{(1)}]^2+\ldots+[f^{(n)}]^2}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, естественно называть «длиной», или *нормой, функции* $f(P)$ число

$$\sqrt{\int\limits_G f^2(P)\,dP}.$$

В следующей таблице перечислены: слева — основные величины и соотношения, связанные с векторами в n-мерном евклидовом пространстве, а справа — соответствующие величины и соотношения для функций (в «пространстве функций»). В этом параграфе *все рас-*

сматриваемые функции предполагаются действительными, заданными на конечной области G и имеющими интегрируемый квадрат (ср. замечание к § 1). Символ $\int f(P)\,dP$ всегда будет означать интегрирование по области G.

1. Вектор $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$.	1. Функция $f(P)$.
2. Длина вектора $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$: $$\|f\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[f^{(i)}]^2}.$$	2. Норма функции $f(P)$: $$\|f\| = \sqrt{\int f^2(P)\,dP}.$$
3. Расстояние между точками $(f_1^{(1)}, \ldots, f_1^{(n)})$ и $(f_2^{(1)}, \ldots, f_2^{(n)})$: $$\sqrt{\sum_i [f_2^{(i)} - f_1^{(i)}]^2}.$$	3. Норма разности двух функций $f_2(P) - f_1(P)$: $$\sqrt{\int [f_2(P) - f_1(P)]^2\,dP}.$$

Определенная только что норма разности $f_2(P) - f_1(P)$ характеризует *среднее квадратичное уклонение* функции $f_2(P)$ от $f_1(P)$. Характеризовать отличие функции $f_2(P)$ от $f_1(P)$ можно многими разными способами, а не только при помощи определенной только что нормы разности $f_2(P) - f_1(P)$. Это отличие можно, например, характеризовать при помощи числа B, равного верхней грани функции

$$|f_2(P) - f_1(P)|.$$

Если B мало, это значит, что разность $f_2(P) - f_1(P)$ равномерно мала на всей рассматриваемой области G. Так как область G конечна, из малости B следует малость определенной выше нормы разности $f_2(P) - f_1(P)$. Обратное утверждение неверно.

Если имеется бесконечная последовательность функций

$$f_1(P), \ldots, f_k(P), \ldots$$

и функция $f(P)$, для которых

$$\sup_G |f(P) - f_k(P)| \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

то, как известно, говорят, что последовательность функций $f_k(P)$ равномерно сходится к $f(P)$.

Если же

$$\int [f(P) - f_k(P)]^2 \, dP \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

то говорят, что последовательность функций $f_k(P)$ *сходится в среднем к* $f(P)$. Из равномерной сходимости на конечной области следует сходимость в среднем. Обратное неверно, как показывает следующий пример.

Последовательность функций

$$f_k(x) = e^{-kx}$$

на открытом интервале (0, 1) сходится в среднем к $f(x) \equiv 0$, когда $k \to \infty$. Но, очевидно, эта сходимость неравномерная.

Приведем еще пример последовательности, которая сходится в среднем, но нигде не сходится в обычном смысле. Такой является последовательность функций $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, определенных на замкнутом отрезке [0, 1] следующим образом:

$$f_{2^k+p}(x) = 1 \text{ при } \frac{p}{2^k} \leqslant x \leqslant \frac{p+1}{2^k},$$

$$f_{2^k+p}(x) = 0 \text{ при } x < \frac{p}{2^k} \text{ и при } x > \frac{p+1}{2^k};$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$p = 0, 1, \ldots, 2^k - 1.$$

При $i = 2^k + p \to \infty$ эта последовательность в среднем сходится к 0. Но ни в какой точке отрезка [0, 1] эта последовательность не сходится в обычном смысле, так как для каждого значения x из этого отрезка можно указать сколь угодно большие значения i, при которых $f_i(x) = 1$, и сколь угодно большие i, при которых $f_i(x) = 0$.

Задача. Показать, что при соответствующем выборе чисел a_k и b_k функции

$$\sin|(x - b_k)|^{a_k}, \quad \frac{1}{1 + a_k (x - b_k)^2}, \quad e^{a_k (x - b_k)^2}$$

при $k \to \infty$ сходятся к 0 в среднем на отрезке [0, 1] и не сходятся ни в одной точке.

4. Скалярное произведение векторов

$(f_1^{(1)}, \ldots, f_1^{(n)})$ и $(f_2^{(1)}, \ldots, f_2^{(n)})$

дается формулой

$$\sum_{i=1}^{n} f_1^{(i)} f_2^{(i)}.$$

Будем обозначать это скалярное произведение символом (f_1, f_2).

5. Неравенство треугольника (сумма двух сторон треугольника не меньше третьей):

$$\sqrt{\Sigma (a_i - b_i)^2} + \sqrt{\Sigma (b_i - c_i)^2} \geqslant \sqrt{\Sigma (a_i - c_i)^2}.$$

4. *Скалярным произведением функций* $f_1(P)$ и $f_2(P)$ назовем

$$\int f_1(P) f_2(P)\, dP.$$

Будем обозначать это скалярное произведение символом (f_1, f_2). Существование этого интеграла при наших предположениях следует из того, что

$$|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

5. Неравенство треугольника:

$$\sqrt{\int [f_1(P) - f_2(P)]^2\, dP} + \sqrt{\int [f_2(P) - f_3(P)]^2\, dP} \geqslant \sqrt{\int [f_1(P) - f_3(P)]^2\, dP}.$$

Оба эти неравенства доказываются совершенно одинаково. Поэтому приведем доказательство только первого из них. Легко видеть, что, не ограничивая общности, можно считать все b_i равными 0. Возведя тогда в квадрат обе части доказываемого неравенства и делая приведение подобных, мы найдем, что оно эквивалентно неравенству $-\Sigma a_i c_i \leqslant \sqrt{\Sigma a_i^2 \Sigma c_i^2}$. Последнее неравенство непосредственно следует из неравенства

$$(\Sigma a_i c_i)^2 \leqslant \Sigma a_i^2 \Sigma c_i^2, \tag{1.11}$$

которое называется *неравенством Коши*. Для доказательства его заметим, что при всяких действительных a_i, c_i и λ

$$\Sigma (a_i \lambda + c_i)^2 \geqslant 0.$$

Поэтому квадратное уравнение относительно λ

$$\lambda^2 \Sigma a_i^2 + 2\lambda \Sigma a_i c_i + \Sigma c_i^2 = 0$$

не имеет действительных различных корней. А это возможно только при соблюдении неравенства (1.11).

Совершенно так же можно доказать неравенство

$$\left[\int f(P)\,\varphi(P)\,dP\right]^2 \leqslant \int f^2(P)\,dP \cdot \int \varphi^2(P)\,dP. \qquad (2.11)$$

Это неравенство мы будем называть неравенством Буняковского *.

6. Косинус угла между векторами $(f_1^{(1)}, \dots, f_1^{(n)})$ и $(f_2^{(1)}, \dots, f_2^{(n)})$ равен

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_1^{(i)} f_2^{(i)}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} [f_1^{(i)}]^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} [f_2^{(i)}]^2}}.$$

Согласно (1.11) это выражение по абсолютной величине не превосходит 1.

Единичным мы называем вектор, длина которого равна 1.

6. Косинусом угла между функциями $f_1(P)$ и $f_2(P)$ назовем

$$\frac{\int f_1(P)\,f_2(P)\,dP}{\sqrt{\int f_1^2(P)\,dP} \cdot \sqrt{\int f_2^2(P)\,dP}}.$$

Согласно (2.11) это выражение по абсолютной величине не превосходит 1.

Функция $f(P)$ называется *нормированной*, если ее норма равна 1.

---

* Неравенство (1.11) впервые встречается в курсе анализа Коши (1821) (Oeuvres, II[s], т. III, 1897, p. 373). Сам Коши выводил его из тождества

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2,$$

отбрасывая его неотрицательную правую часть. Неравенство (2.11) впервые доказал и систематически использовал Буняковский (Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires... Memoires de l'Acad. de St. Petersbourg (VII), 1859, v. 1, N 9). Но в литературе это неравенство часто называется неравенством Шварца, хотя у Шварца оно впервые встречается только в 1885 г. (Werke, 1890, B. 1, S. 251).

Косинус угла между единичными векторами

$$(f_1^{(1)}, \dots, f_1^{(n)}) \text{ и } (f_2^{(1)}, \dots, f_2^{(n)})$$

равен

$$\sum_{i=1}^{n} f_1^{(i)} f_2^{(i)}.$$

Косинус угла между нормированными функциями $f_1(P)$ и $f_2(P)$ равен

$$\int f_1(P) f_2(P)\, dP.$$

7. Условие ортогональности векторов

$$(f_1^{(1)}, \dots, f_1^{(n)}) \text{ и } (f_2^{(1)}, \dots, f_2^{(n)})$$

$$\sum_{i=1} f_1^{(i)} f_2^{(i)} = 0.$$

7. Условие *«ортогональности»* функций $f_1(P)$ и $f_2(P)$

$$\int f_1(P) f_2(P)\, dP = 0.$$

8. Условие линейной зависимости векторов $f_k = (f_k^{(1)}, \dots, f_k^{(n)})$, $k = 1, \dots, m$, состоит в том, что существуют такие постоянные $C_1, \dots, C_m$, среди которых есть отличные от 0, что

$$\sum_{k=1}^{m} C_k f_k^{(i)} = 0,$$

$i = 1, \dots, n$.

8. Условие линейной зависимости функций $f_1(P), \dots, f_m(P)$ состоит в существовании таких постоянных $C_1, \dots, C_m$, среди которых есть отличные от 0, что

$$\sum_{k=1}^{m} C_k f_k(P) = 0$$

для всех точек P.

9. Пусть дано m единичных взаимно ортогональных векторов

$$\varphi_k = (\varphi_k^{(1)}, \dots, \varphi_k^{(n)}),$$

$$k = 1, \dots, m.$$

Пусть $\varphi_k(f)$ есть проекция векторов $(f^{(1)}, \dots, f^{(n)})$ на направление вектора $(\varphi_k^{(1)}, \dots, \varphi_k^{(n)})$.

9. Пусть дано m взаимно ортогональных нормированных функций $\varphi_1(P), \dots, \varphi_m(P)$. *Коэффициентом Фурье* функции $f(P)$ по отношению к функции $\varphi_k(P)$ называется

$$f_k = \int f(P)\, \varphi_k(P)\, dP.$$

Тогда

$$\varphi_k(f) = \sum_{i=1}^{n} f^{(i)} \varphi_k^{(i)}.$$

Теорема. *Пусть дана интегрируемая вместе со своим квадратом функция $f(P)$. Будем искать постоянные $C_1, \ldots, C_m$ так, чтобы среднее квадратичное уклонение I_m линейной комбинации $C_1\varphi_1(P) + \ldots + C_m\varphi_m(P)$ от $f(P)$ было наименьшим. Мы утверждаем, что искомые значения равны коэффициентам Фурье f_k* *.

Действительно,

$$I_m = \int [f(P) - C_1\varphi_1(P) - \ldots - C_m\varphi_m(P)]^2 \, dP =$$

$$= \int f^2(P)\, dP - 2\sum_{k=1}^{m} C_k \int f(P)\, \varphi_k(P)\, dP +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{m} C_i C_j \int \varphi_i(P)\, \varphi_j(P)\, dP =$$

$$= \int f^2(P)\, dP - 2\sum_{k=1}^{m} C_k f_k + \sum_{k=1}^{m} C_k^2 =$$

$$= \int f^2(P)\, dP + \sum_{i=1}^{m} (f_k - C_k)^2 - \sum_{k=1}^{m} f_k^2.$$

Отсюда видно, что I_m достигает своего минимума

$$\int f^2(P)\, dP - \sum_{k=1}^{m} f_k^2, \text{ если } C_k = f_k,\ k = 1, \ldots, m.$$

10. Для всякого вектора $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} [\varphi_k(f)]^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} [f^{(k)}]^2.$$

В случае равенства это соотношение соответствует теореме Пифагора.

10. Для всякой функции $f(P)$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} f_k^2 \leqslant \int f^2(P)\, dP.$$

(*Неравенство Бесселя.*)

* Дайте этой теореме геометрическое толкование.

Доказательство неравенства Бесселя. Очевидно, $I_m \geqslant 0$ при любых C_i. Если $C_i = f_i$ при $i = 1, \ldots, \ldots, m$, то

$$I_m = \int f^2(P)\,dP - \sum_{k=1}^{m} f_k^2, \text{ т. е. } \int f^2(P)\,dP \geqslant \sum_{i=1}^{m} f_k^2,$$

что и требовалось доказать.

Последовательность попарно ортогональных нормированных функций (короче, *ортонормальная система*)

$$\varphi_1(P), \ldots, \varphi_k(P), \ldots \qquad (3.11)$$

называется *полной*, если для всякой непрерывной (и потому ограниченной) функции $f(P)$, заданной на замкнутой области $\bar{G}$, имеет место следующее равенство (*равенство Парсеваля*):

$$\int f^2(P)\,dP = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2.$$

Замечание. Из утверждения, доказанного в п. 9, следует возможность заменить данное только что определение полноты системы функций следующим эквивалентным ему: *ортонормальная система функций* (3.11) *называется полной, если для любой непрерывной на замкнутой области* $\bar{G}$ *функции* $f(P)$ *можно найти такую линейную комбинацию этих функций*

$$\sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_k(P),$$

что средняя квадратичная ошибка при замене $f(P)$ *этой комбинацией, т. е.*

$$\int \Big[f(P) - \sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_k(P)\Big]^2 dP,$$

как угодно мала. А отсюда следует, что если бы мы назвали полной системой такую ортонормальную систему, у которой равенство Парсеваля выполняется для всякой функции $f(P)$ с интегрируемым квадратом, непрерывной всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек, гладких линий и поверхностей до $(d-1)$-го измерения, то это определение было бы эквивалентно предыдущему (d — число измерений области G, на которой заданы рассматриваемые функции). (Это происходит потому, что всякая функция $f(P)$ этого класса может быть аппроксимирована такой непрерывной на $\bar{G}$ функцией $f^*(P)$, что норма разности $f(P)-f^*(P)$ как угодно мала). Доказательство этого утверждения при помощи неравенства треугольника (см. п. 5) мы предоставляем читателю.

Ортонормальная система (3.11) называется *замкнутой*, если не существует такой функции рассматриваемого класса*, интеграл от квадрата которой существует, положителен и которая была бы ортогональна ко всем функциям (3.11).

Теорема. *Всякая полная система замкнута.*

Доказательство. Допустим, что полная система (3.11) не замкнута, т. е. что существует функция $f(P)$, у которой интеграл от квадрата существует, положителен и которая ортогональна ко всем функциям (3.11). У такой функции все коэффициенты Фурье по отношению к функциям (3.11) равны 0. Следовательно, для функции $f(P)$ не выполняется равенство Парсеваля.

Обратное утверждение неверно в рассматриваемом классе функций, имеющих разрывы только на конечном числе точек, линий, ..., $(d-1)$-мерных поверхностей. Оно становится верным в классе функций, интегрируемых вместе с их квадратами по Лебегу (см. § 20, п. 1).

11. Нормальное уравнение плоскости в n-мерном пространстве $(\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})$:

$$\sum_{i=1}^{n} a^{(i)}\varphi^{(i)} = p,$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} [a^{(i)}]^2 = 1.$$

11. Аналог в пространстве функций:

$$\int a(P)\,\varphi(P)\,dP = p,$$

где

$$\int a^2(P)\,dP = 1.$$

* См. замечание к § 1.

12. Уравнение поверхности 2-го порядка с центром в начале координат

$$\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} = 1, \quad (4.11)$$

где

$$K_{ij}=K_{ji}.$$

13. Основным фактом в теории квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}\varphi_{(i)}\varphi^{(j)}, \quad (6.11)$$

$$K_{ij}=K_{ji}$$

является возможность линейным неособым преобразованием

$$\psi^{(i)} = \sum_{j=1}^{n}\varphi_i^{(j)}\varphi^{(j)}, \quad (7.11)$$

$$i = 1, \ldots, n$$

привести эту форму к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i}, \text{ где } m \leqslant n. \quad (8.11)$$

В дальнейшем нас будут интересовать только квадратичные формы с действительными коэффициентами K_{ij}; в этом случае все $\varphi_i^{\,j}$ можно выбрать

12. Аналог в пространстве функций

$$\iint K(P,Q)\varphi(P)\varphi(Q)dPdQ=1, \quad (5.11)$$

где

$$K(P, Q) \equiv K(Q, P),$$
$$P \in G, \quad Q \in G.$$

13. При широких предположениях относительно не равного нулю тождественно действительного симметрического ядра $K(P, Q)$, т. е. такого, для которого $K(P, Q) \equiv \equiv K(Q, P)$, будет показано, что интегральная квадратичная форма

$$\iint K(P,Q)\,\varphi(P)\,\varphi(Q)\,dPdQ \quad (10.11)$$

может быть представлена в виде конечной или бесконечной суммы вида

$$\sum_{i=1}\frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i}{}^{*},$$

где

$$\psi^{(i)} = \int \varphi(P)\,\varphi_i(P)\,dP,$$

а функции $\varphi_i(P)$, $i = 1, 2, \ldots$, образуют непустое конечное или счетное множество взаимно

---

* Мы не написали верхнего предела значений для i, который может быть конечным или бесконечным.

также действительными. Тогда и все λ_i будут действительными. Существует много линейных преобразований (7.11) с действительными коэффициентами, приводящих квадратичную форму (6.11) к каноническому виду (8.11). Среди них особую роль играют ортогональные преобразования, т. е. такие преобразования (7.11), для которых

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_i^{(j)} \varphi_k^{(j)} = \delta_{ik},$$

где $\delta_{ik}=0$ при $i \neq k$ и $\delta_{jk}=1$ при $i=k$. В алгебре показывается, что коэффициенты такого преобразования удовлетворяют уравнениям

$$\varphi_i^{(k)} = \lambda_i \sum_{j=1}^{n} K_{kj} \varphi_i^{(j)}, \quad (9.11)$$

$i=1, \ldots, m$ (ср. § 19) *.

Геометрически преобразованию квадратичной формы (6.11) ортогональным преобразованием (7.11) к каноническому виду (8.11) соответствует переход к такой координатной системе, когда оси направлены по главным осям поверхности (5.11).

ортогональных и нормированных функций, т. е.

$$\int \varphi_i(P) \varphi_k(P) \, dP = \delta_{ik}.$$

Эти функции $\varphi_i(P)$ соответствуют единичным векторам, направленным по главным осям поверхности (5.11), которым отвечают конечные полуоси. Каждая из функций $\varphi_i(P)$ удовлетворяет однородному интегральному уравнению

$$\varphi_i(P) = \lambda_i \int K(P, Q) \varphi_i(Q) \, dQ. \quad (11.11)$$

Все λ_i — действительны. Таким образом, интегральные уравнения с симметрическим ядром весьма общего вида всегда имеют собственные значения (в противоположность уравнениям Вольтерра), и притом действительные.

* § 19 предназначен для читателя, который хочет возобновить в памяти теорию квадратичных форм. Эта теория изложена там в форме, удобной для наших дальнейших приложений. Мы рекомендуем сейчас же прочитать этот параграф.

да осями координат служат главные оси поверхности (4.11). Векторы

$$(\varphi_i^{(1)}, \ldots, \varphi_i^{(n)}), \quad i = 1, \ldots, m,$$

суть единичные векторы, направленные по главным осям поверхности (4.11), которым соответствуют конечные полуоси. Если $m<n$, то поверхность (4.11) вырождается в цилиндрическую поверхность. Тогда у нее, кроме m конечных полуосей, имеется еще $n-m$ бесконечных полуосей. Те полуоси, которым соответствуют положительные λ_i, называются действительными, а те, которым соответствуют отрицательные λ_i, называются мнимыми.

Задача о нахождении единичного вектора $(\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(n)})$, направленного по главной оси поверхности (4.11), соответствующей λ_1, которое мы будем считать наименьшим по абсолютной величине из всех λ_i, эквивалентна следующей задаче (ср. § 19). Найти максимум, если $\lambda_1>0$, или минимум, если $\lambda_1<0$, формы $\Sigma K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)}$ при условии, что

$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi^{(i)}]^2 = 1.$$

Основная идея доказательства существования у интегрального уравнения (11.11) по крайней мере одного собственного значения состоит в следующем (ср. § 12). Мы докажем существование в классе функций $\varphi(P)$, у которых

$$\int \varphi^2(P)\, dP = 1, \quad (12.11)$$

такой функции, которая дает отличный от 0 максимум или минимум λ_1 интегральной форме (10.11). Эта функция $\varphi_1(P)$ удовлетворяет ин-

Нахождение единичного вектора, направленного по оси, соответствующей λ_2, поверхности (4.11) или, что все равно, нахождение решения системы

$$\varphi^{(i)} = \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(j)},$$
$$i = 1, \ldots, n,$$

ортогонального к решению $(\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(n)})$, легко сводится к нахождению максимума или минимума формы

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(K_{ij} - \frac{\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}}{\lambda_1}\right) \varphi_i\varphi_j$$

в классе единичных векторов $(\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})$. Аналогично находятся единичные векторы, направленные по другим осям (ср. § 19).

14. Подставляя в тождество

$$\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i}$$

вместо $\psi^{(i)}$ его выражение через $\varphi^{(j)}$, даваемое формулами (7.11), получим:

$$\sum_{s,t}^{n} K_{st}\varphi^{(s)}\varphi^{(t)} \equiv \sum_{i,j} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \equiv$$

тегральному уравнению (11.11) при $i=1$. Нахождение нормированной функции, направленной по главной оси, соответствующей λ_2, поверхности (5.11) и нахождение соответствующей собственной функции интегрального уравнения (11.11) легко сводится к нахождению максимума или минимума интегральной формы

$$\iint \left[K(P, Q) - \frac{\varphi_1(P)\,\varphi_1(Q)}{\lambda_1}\right] \times$$
$$\times\, \varphi(P)\,\varphi(Q)\, dPdQ$$

в классе функций, нормированных условием (12.11). Аналогично находятся нормированные функции, направленные по другим главным осям поверхности (5.11) или, что все равно, другие нормированные решения интегрального уравнения (11.11), ортогональные предыдущим решениям (ср. п. 4 § 13).

14. При некоторых предположениях относительно $K(P, Q)$ будет показано (§ 15), что

$$K(P, Q) = \sum_{i} \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(Q)}{\lambda_i}.$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{s,t} \frac{\varphi_i^{(s)}\varphi^{(s)}\varphi_i^{(t)}\varphi^{(t)}}{\lambda_i} \equiv$$

$$\equiv \sum_{s,t} \left(\sum_{i} \frac{\varphi_i^{(s)}\varphi_i^{(t)}}{\lambda_i} \right) \varphi^{(s)}\varphi^{(t)}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых произведениях в крайних членах этой цепи тождеств, получим:

$$K_{st} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^{(s)}\varphi_i^{(t)}}{\lambda_i}.$$

15. Необходимым и достаточным условием возможности разложения заданного вектора $(f^{(1)}, \ldots, \ldots, f^{(n)})$ по направлениям главных осей поверхности (4.11), которым соответствуют конечные полуоси, является условие, чтобы вектор $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ был ортогонален ко всем остальным главным осям поверхности (4.11). Но из равенства (9.11), как легко видеть, следует, что компоненты $(\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(n)})$ векторов, направленных по этим последним осям поверхности (4.11), должны удовлетворять уравнениям

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\chi^{(j)} = 0, \quad i=1, \ldots, n. \tag{13.11}$$

15. В § 14 будет показано, что всякая функция $f(P)$, *истокообразно представимая* при помощи ядра $K(P, Q)$ и некоторой функции $h(Q)$ с интегрируемым квадратом, т. е. функция, представимая в виде

$$f(P) = \int K(P, Q)\, h(Q)\, dQ,$$

может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям $\varphi_i(P)$ ядра $K(P, Q)$ (теорема Гильберта — Шмидта).

Условие же, что вектор $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ должен быть ортогональным ко всем $(\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(n)})$, удовлетворяющим уравнениям (13.11), есть условие того, что система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ji} h^{(j)} = f^{(i)},$$

$$i = 1, \ldots, n,$$

относительно неизвестных $h^{(1)}, \ldots, h^{(n)}$ или, что все равно в силу условия $K_{ij} = K_{ji}$, система

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij} h^{(j)} = f^{(i)},$$

$$i = 1, \ldots, n,$$

должна иметь решение (ср. § 3).

В § 12—18 *мы будем предполагать, что все рассматриваемые функции принадлежат к классу, описанному в замечании к* § 1, *и кроме того, что все они действительны и их квадраты интегрируемы по всей конечной области их определения, если не оговорено противное.*

§ 12. Доказательство существования собственных функций у интегральных уравнений с симметрическими ядрами

1. Предварительные замечания. Если существуют интегралы от квадратов $\varphi(P)$, $\psi(P)$ и $K(P, Q)$ по областям их определения, что мы предполагаем, то интеграл

$$\iint K(P, Q)\,\varphi(P)\,\psi(Q)\,dP\,dQ$$

также существует. Действительно,

$$|K(P, Q)\varphi(P)\psi(Q)| \leqslant \frac{1}{2}K^2(P, Q) + \frac{1}{2}\varphi^2(P)\varphi^2(Q).$$

Поэтому

$$\iint |K(P, Q)\varphi(P)\psi(Q)|\,dPdQ \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\iint K^2(P, Q)\,dPdQ + \frac{1}{2}\int \varphi^2(P)dP\cdot\int \psi^2(Q)\,dQ.$$

Символ $\int\int$ всюду в дальнейшем будет означать интегрирование по всей области определения $K(P, Q)$, т. е. по всей той области, где $P \in G$ и $Q \in G$ (ср. § 4, где аналогично определялся символ $\int$).

В § 12—18 мы будем рассматривать ядра $K(P, Q)$, описанные в п. 2 настоящего параграфа. Для таких $K(P, Q)$ все двойные интегралы, т. е. интегралы по совокупности (P, Q), вида

$$\iint K(P, Q)\varphi(P)\psi(Q)\,dPdQ$$

можно рассматривать как повторные интегралы, взятые сначала по Q, а потом по P*.

Положим

$$B\varphi(P) = \int K(P, Q)\varphi(Q)\,dQ + c\varphi(P),$$

где c — некоторая постоянная, и

$$(\chi, \psi) = \int \chi(P)\psi(P)\,dP.$$

Функция $B\varphi(P)$ интегрируема с квадратом по G, так как в силу неравенства Буняковского

$$\left(\int K(P, Q)\varphi(Q)\,dQ\right)^2 \leqslant \int [K(P, Q)]^2\,dQ\cdot\int \varphi^2(Q)\,dQ$$

и потому

$$\int\left(\int K(P, Q)\varphi(Q)\,dQ\right)^2 dP \leqslant \iint [K(P, Q)]^2\,dPdQ\cdot\int \varphi^2(Q)\,dQ.$$

* Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III. М.: Наука, 1969, гл. XVI, § 5, с. 263—273.

Обобщение неравенства Буняковского. Пусть сумма интегралов

$$\iint K(P, Q)\varphi(P)\varphi(Q)\,dPdQ + c\int \varphi^2(P)\,dP \equiv (B\varphi, \varphi), \quad (1.12)$$

где c — некоторая постоянная, *неотрицательно определенна.* Это значит, что при всякой действительной функции $\varphi(P)$ эта сумма не отрицательна. Как и всюду в дальнейшем, мы будем предполагать, что $K(P, Q) = K(Q, P)$. Тогда для любых функций $\varphi(P)$ и $\psi(P)$

$$(B\varphi, \psi)^2 \leqslant (B\varphi, \varphi)(B\psi, \psi). \quad (2.12)$$

Доказательство неравенства (2.12). В силу предполагаемой неотрицательной определенности суммы (1.12) при всяком действительном μ

$$\iint K(P, Q)[\varphi(P) + \mu\psi(P)][\varphi(Q) + \mu\psi(Q)]\,dPdQ + \\ + c\int [\varphi(P) + \mu\psi(P)]^2\,dP \geqslant 0.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$\iint K(P, Q)\varphi(P)\varphi(Q)\,dPdQ + \\ + \mu\iint K(P, Q)\varphi(P)\psi(Q)\,dPdQ + \\ + \mu\iint K(P, Q)\varphi(Q)\psi(P)\,dPdQ + \\ + \mu^2\iint K(P, Q)\psi(P)\psi(Q)\,dPdQ + \\ + c\int \varphi^2(P)\,dP + 2\mu c\int \varphi(P)\psi(P)\,dP + c\mu^2\int \psi^2(P)\,dP \geqslant 0.$$

Так как в силу симметричности $K(P, Q)$ второй и третий интегралы равны между собой, то это неравенство можно переписать так:

$$(B\varphi, \varphi) + 2\mu(B\varphi, \psi) + \mu^2(B\psi, \psi) \geqslant 0.$$

Это последнее неравенство может выполняться при всяком действительном μ только в том случае, если

$$(B\varphi, \psi)^2 \leqslant (B\varphi, \varphi)(B\psi, \psi),$$

что и требовалось доказать.

Если $K(P, Q) \equiv 0$, а $c=1$, неравенство (2.12) переходит в неравенство Буняковского

$$\left(\int \varphi(P)\psi(P)\,dP\right)^2 \leqslant \int \varphi^2(P)\,dP \cdot \int \psi^2(P)\,dP.$$

2. *В дальнейшем до § 18 включительно мы будем рассматривать интегральные уравнения с действительным симметрическим ядром вида*

$$K(P, Q) = \frac{\overline{K}(P,Q)}{PQ^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < \frac{d}{2}, \tag{3.12}$$

где $\overline{K}(P, Q)$ — *равномерно непрерывная функция по* (P, Q), *когда* $P \in G$ *и* $Q \in G$. *Мы будем считать область* G *конечной.* Поэтому функция $\overline{K}(P, Q)$ ограничена.

Теорема. *Пусть дано семейство функций* $h(P)$, *для которых*

$$\int h^2(P)\,dP \leqslant M^2, \quad M > 0, \tag{4.12}$$

где M — *некоторая постоянная, одна и та же для всех функций* $h(P)$. *Тогда семейство функций* $\psi(P)$, *определяемых равенством*

$$\psi(P) = \int K(P, Q)\,h(Q)\,dQ,$$

равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на G.

Равностепенная непрерывность семейства означает, что для любых двух точек P_1 и P_2, принадлежащих G, $|\psi(P_2) - \psi(P_1)|$ становится меньше произвольного числа $\varepsilon > 0$, если расстояние P_1P_2 меньше некоторого $\eta > 0$, зависящего только от ε, но не зависящего ни от функции $\psi(P)$ рассматриваемого семейства, ни от положения точек P_1 и P_2 в области G.

Доказательство.

$$|\psi(P_2) - \psi(P_1)|^2 = \left|\int [K(P_2, Q) - K(P_1, Q)]\,h(Q)\,dQ\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int [K(P_2, Q) - K(P_1, Q)]^2\,dQ \cdot \int h^2(Q)\,dQ \leqslant$$

$$\leqslant M^2 \int [K(P_2, Q) - K(P_1, Q)]^2\,dQ. \tag{5.12}$$

Делая предпоследний переход, мы воспользовались неравенством Буняковского, а делая последний — неравенством (4.12). Оценим интеграл, стоящий в правой части неравенства (5.12). Разобьем для этого область G на две части G_1 и G_2. К G_1 мы отнесем точки G, отстоящие от одной из точек P_1 или P_2 не больше чем на ρ. В силу равенства (3.12) и ограниченности $\bar{K}(P, Q)$

$$\int_{G_1} [K(P_2, Q) - K(P_1, Q)]^2 \, dQ$$

меньше любого положительного ε, если ρ меньше некоторого числа $\rho(\varepsilon)$, зависящего только от ε и стремящегося к 0 при $\varepsilon \to 0$. При этом $\rho(\varepsilon)$ не зависит от точек P_1 и P_2. С другой стороны, при фиксированном ρ

$$\int_{G_2} [K(P_2, Q) - K(P_1, Q)]^2 \, dQ \tag{6.12}$$

сколь угодно мал, если только точки P_1 и P_2 достаточно близки друг к другу, в силу равномерной непрерывности $\bar{K}(P, Q)$ в области G. При этом гарантируемая степень малости интеграла (6.12) зависит только от расстояния между точками P_1 и P_2, но не от их положения.

Равномерную ограниченность семейства функций $\psi(P)$ легко получить, пользуясь неравенством Буняковского. Действительно,

$$\left| \int K(P, Q) h(Q) \, dQ \right| \leqslant \sqrt{\int K^2(P, Q) \, dQ} \sqrt{\int h^2(Q) \, dQ}.$$

Первый из интегралов, стоящих в правой части этого неравенства, ограничен согласно (3.12), второй не больше M согласно условию (4.12).

3. Теорема. *Интегральное уравнение.*

$$\varphi(P) = \lambda \int K(P, Q) \varphi(Q) \, dQ \tag{7.12}$$

имеет по крайней мере одно собственное значение, если ядро обладает свойствами, описанными в начале предыдущего пункта, и не равно 0 тождественно.

Вообще, во всем дальнейшем (кроме § 20) мы будем рассматривать только ядра, описанные в начале предыдущего пункта, не оговаривая это особо каждый раз.

Идея приводимого ниже доказательства этой теоремы изложена на правой стороне в п. 13 § 11. Впервые почти одновременно доказали таким методом эту теорему независимо один от другого Гильберт и Хольмгрен. Наибольшая из встречающихся при этом трудностей состоит в доказательстве существования в рассматриваемом классе функций $\varphi(P)$, удовлетворяющих условию (12.11), такой функции, которая дает максимум или минимум интегральной форме (10.11) *. Излагаемое нами доказательство существования такой функции принадлежит И. М. Гельфанду.

Доказательство. Рассмотрим множество S функций $\varphi(P)$, для которых

$$\int \varphi^2(P)\,dP = 1. \tag{8.12}$$

Пусть

$$I(\varphi) = \iint K(P, Q)\,\varphi(P)\,\varphi(Q)\,dP dQ.$$

Значения $I(\varphi)$ на множестве S ограничены. Действительно, по неравенству Буняковского

$$|I(\varphi)|^2 \leqslant \iint K^2(P, Q)\,dPdQ \cdot \iint \varphi^2(P)\,\varphi^2(Q)\,dPdQ =$$

$$= \iint K^2(P, Q)\,dPdQ \cdot \int \varphi^2(P)\,dP \cdot \int \varphi^2(Q)\,dQ.$$

Первый из последних трех интегралов конечен по условию (3.12), а последние два интеграла равны 1 согласно (8.12).

Пусть μ_m, соответственно μ_M, есть нижняя, соответственно верхняя, грань значений $I(\varphi)$ на семействе S. Предполагая, что $K(P, Q)$ не равно нулю тождественно, докажем, что по крайней мере одно из чисел μ_M и μ_m отлично от нуля. В самом деле, в противном случае интеграл $I(\varphi)$ равнялся бы 0 для всех функций $\varphi(P)$

---

* Справедливость аналогичного утверждения о существовании минимума и максимума квадратичной формы (6.11) на множестве единичных векторов $(\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})$ прямо вытекает из теоремы Вейерштрасса о существовании максимума и минимума любой непрерывной функции на любом замкнутом ограниченном множестве точек, в частности функции (6.11) на сфере $\Sigma[\varphi^{(i)}]^2 = 1$.

семейства S. В частности, это было бы для всякой функции $\varphi_{P_0}(P)$, равной 0 всюду, кроме некоторой произвольно малой окрестности одной какой-нибудь точки P_0, где $\varphi_{P_0}(P)>0$. Но, с другой стороны, так как $K(P, Q)$ не тождественно равно 0, то непременно найдется точка (P_0, Q_0), где $K(P_0, Q_0)\neq 0$. При этом мы можем считать, что Q_0 не совпадает с P_0, так как если бы $K(P, Q)$ равнялось 0 для всех точек (P, Q), у которых P не совпадает с Q, то оно равнялось бы тождественно 0 в силу предполагаемой равномерной непрерывности по (P, Q) функции $\bar{K}(P, Q)$, написанной в соотношении (3.12). Но

$$I(\varphi_{P_0}+\varphi_{Q_0}) =$$
$$= I(\varphi_{P_0}) + I(\varphi_{Q_0}) + \iint K(P, Q)\,\varphi_{P_0}(P)\,\varphi_{Q_0}(Q)\,dP\,dQ +$$
$$+ \iint K(P, Q)\,\varphi_{P_0}(Q)\,\varphi_{Q_0}(P)\,dP\,dQ.$$

Последние два из написанных здесь интегралов берутся по малым окрестностям точек (P_0, Q_0) и (Q_0, P_0); в силу предполагаемой симметричности $K(P, Q)$ интегралы по этим двум окрестностям совпадают и в силу того, что $K(P_0, Q_0)\neq 0$ и в некоторой окрестности точки (P_0, Q_0) сохраняет знак, они отличаются от 0. Интегралы же $I(\varphi_{P_0})$ и $I(\varphi_{Q_0})$ мы предположили равными 0. Поэтому

$$I(\varphi_{P_0}+\varphi_{Q_0})\neq 0,$$

что невозможно. Итак, при наших предположениях μ_m и μ_M не могут быть одновременно равными 0. Пусть для определенности $\mu_M\neq 0$.

Рассмотрим бесконечную последовательность нормированных функций

$$\varphi_1(P), \ldots, \varphi_k(P), \ldots,$$

для которых

$$I(\varphi_k) \underset{k\to\infty}{\rightarrow} \mu_M. \tag{9.12}$$

Разность

$$-I(\varphi) + \mu_M \int \varphi^2(P)\,dP,$$

как легко проверить, неотрицательно определенна в смысле, описанном в п. 1 настоящего параграфа. Поэтому в неравенстве (2.12) можно считать

$$B\varphi(P) = \int (-K(P, Q))\,\varphi(Q)\,dQ + \mu_M \varphi(P).$$

Положим в этом неравенстве

$$\varphi(P) = \varphi_k(P),$$
$$\psi(P) = B\varphi_k(P).$$

Получим:

$$(B\varphi_k,\ B\varphi_k)^2 \leqslant (B\varphi_k,\ \varphi_k)\cdot(BB\varphi_k,\ B\varphi_k). \qquad (10.12)$$

В силу (9.12)

$$(B\varphi_k,\ \varphi_k) \underset{k\to\infty}{\to} 0. \qquad (11.12)$$

С другой стороны,

$$|B\varphi_k(P)| \leqslant \frac{1}{2}\int K^2(P, Q)\,dQ + \frac{1}{2}\int \varphi_k^2(Q)\,dQ + |\mu_M|\cdot|\varphi_k(P)|.$$

Согласно (3.12) первый из интегралов в правой части ограничен, а второй по условию (8.12) равен 1. Поэтому

$$|B\varphi_k(P)| \leqslant M + |\mu_M|\cdot|\varphi_k(P)|,$$

где M — некоторая не зависящая от φ_k постоянная. Точно так же аналогичную оценку можно получить для $BB\varphi_k$. Применяя неравенство Буняковского, легко показать, что выражение $(BB\varphi_k,\ B\varphi_k)$ также ограничено. Поэтому из соотношений (10.12) и (11.12) следует, что

$$(B\varphi_k,\ B\varphi_k) \underset{k\to\infty}{\to} 0. \qquad (12.12)$$

Согласно п. 2 семейство функций

$$K\varphi_k(P) = \int K(P, Q)\,\varphi_k(Q)\,dQ$$

равностепенно непрерывно и равномерно ограничено. Поэтому по теореме Арцеля (см., например, мои «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений», § 11) из последовательности функций $K\varphi_k(P)$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность

$$K\varphi_{k_1}(P), \ldots, K\varphi_{k_m}(P), \ldots$$

Пусть

$$K\varphi_{k_m}(P) \underset{m\to\infty}{\to} \varphi^*(P).$$

Мы утверждаем тогда, что функция $\varphi^*(P)$ является решением интегрального уравнения (7.12) при $\lambda = \frac{1}{\mu_M}$. Действительно,

$$|BK\varphi_k(P)| = |-KK\varphi_k(P) + \mu_M K\varphi_k(P)| =$$

$$= |K[-K\varphi_k(P) + \mu_M\varphi_k(P)]| = |KB\varphi_k(P)| =$$

$$= \left|\int K(P, Q)\cdot B\varphi_k(Q)\,dQ\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int |K(P, Q)]^2\,dQ\right\}^{1/2}\cdot\left\{\int [B\varphi_k(Q)]^2\,dQ\right\}^{1/2}.$$

Поэтому, пользуясь (12.12), получим:

$$BK\varphi_{k_m}(P) \underset{m\to\infty}{\to} 0.$$

Отсюда в силу равномерной сходимости $K\varphi_{k_m}(P)$

$$B\varphi^*(P) = 0,$$

что и требовалось доказать. При этом $\varphi^*(P)$ не равно 0 тождественно, так как в противном случае в силу соотношения (12.12) последовательность $\mu_M\varphi_{k_m}(P)$ при $m\to\infty$ также стремилась бы в среднем к 0; а это невозможно, так как

$$\int [\mu_M\varphi_{k_m}(P)]^2\,dP = \mu_M^2 > 0.$$

Замечания. 1. Случай $\mu_m \neq 0$ сводится к разобранному случаю $\mu_M \neq 0$ изменением знака у $K(P, Q)$.

2. Мы показали, что нижняя, соответственно верхняя, грань значений интеграла $I(\varphi)$ на множестве нормированных функций $\varphi(P)$ равна обратной величине

некоторого собственного значения λ интегрального уравнения (7.12), если только эта грань не равна 0. С другой стороны, обратная величина каждого собственного значения λ_i уравнения (7.12) есть одно из значений интеграла $I(\varphi)$ при некоторой функции из класса (8.12). Действительно, значение интеграла $I(\varphi)$ при $\varphi(P)=\varphi_i(P)$, где $\varphi_i(P)$ есть нормированная собственная функция, соответствующая собственному значению λ_i, равно:

$$\int \varphi_i(P)\,dP \int K(P, Q)\,\varphi_i(Q)\,dQ = \frac{1}{\lambda_i}\int \varphi_i^2(P)\,dP = \frac{1}{\lambda_i}.$$

Можно также сказать, что верхняя, соответственно нижняя, грань значений интеграла $I(\varphi)$ на множестве функций $\varphi(P)$, удовлетворяющих условию

$$\int \varphi^2(P)\,dP \leqslant 1, \tag{13.12}$$

равна обратной величине наименьшего положительного, соответственно наибольшего отрицательного, собственного значения λ уравнения (7.12), если только эта грань не равна 0. Отсюда следует, что при всех функциях $\varphi(P)$, удовлетворяющих условию (13.12), значения интеграла $I(\varphi)$ по абсолютной величине не превосходят обратной величины наименьшего по абсолютному значению собственного значения λ уравнения (7.12). Кроме того, из предыдущих рассуждений видно, что верхняя, соответственно нижняя, грань $I(\varphi)$ на (13.12) *достигается* при φ, равном какой-нибудь нормированной собственной функции, соответствующей наименьшему по абсолютной величине положительному, соответственно отрицательному, собственному значению λ, если только эта грань не равна 0.

Задача. Доказать, что множество значений $I(\varphi)$ на (8.12) может быть либо точкой, либо замкнутым отрезком, либо полузамкнутым отрезком, к которому не принадлежит точка $I=0$, являющаяся одним из концов этого отрезка. Множество значений $I(\varphi)$ на (13.12) всегда содержит значение $I=0$ и является либо точкой, либо отрезком. Какие случаи возможны, если ядро вырожденное?

§ 13. Некоторые свойства собственных функций и собственных значений интегральных уравнений с симметрическими ядрами

1. В п. 1 и 2 этого параграфа будем предполагать, что собственные функции и λ (но не ядро) могут принимать комплексные значения.

Теорема. *Собственные функции уравнения* (7.12), *соответствующие различным собственным значениям* λ, *ортогональны между собой.*

Доказательство. Пусть

$$\varphi_1(P) = \lambda_1 \int K(P, Q)\varphi_1(Q)\,dQ, \tag{1.13}$$

$$\varphi_2(P) = \lambda_2 \int K(P, Q)\varphi_2(Q)\,dQ, \tag{2.13}$$

причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Умножим (1.13) на $\lambda_2\varphi_2(P)$, а (2.13) — на $\lambda_1\varphi_1(P)$. Вычитая почленно полученные равенства и интегрируя разность по P, получим:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int \varphi_1(P)\varphi_2(P)\,dP =$$

$$= \lambda_1\lambda_2 \iint K(P, Q)\varphi_1(P)\varphi_2(Q)\,dQdP -$$

$$- \lambda_1\lambda_2 \iint K(P, Q)\varphi_2(P)\varphi_1(Q)\,dQdP. \tag{3.13}$$

Меняя обозначения переменных интегрирования во втором члене правой части, получим:

$$\iint K(P, Q)\varphi_2(P)\varphi_1(Q)\,dPdQ = \iint K(Q, P)\varphi_2(Q)\varphi_1(P)\,dQdP.$$

Так как $K(P, Q) = K(Q, P)$, то отсюда следует, что правая часть (3.13) равна 0. А так как, по предположению, $\lambda_2 \neq \lambda_1$, то

$$\int \varphi_1(P)\varphi_2(P)\,dP = 0,$$

что и требовалось доказать.

2. Теорема. *Все собственные значения интегральных уравнений с симметрическими ядрами действительны.*

Докажем сначала лемму. *Все собственные функции уравнений рассматриваемого вида непрерывны.*

Действительно, согласно сказанному в конце § 11 мы считаем все такие функции интегрируемыми с квадратом. Наша лемма сразу следует из п. 2 § 12.

Доказательство теоремы. Допустим, что у интегрального уравнения (7.12) имеется комплексное собственное значение $\lambda = a + bi$, где $b \neq 0$. Пусть ему соответствует собственная функция $\varphi(P)$. Тогда

$$\varphi(P) = (a + bi) \int K(P, Q) \varphi(Q) \, dQ. \tag{4.13}$$

Обозначая через $\overline{\varphi(P)}$ функцию, комплексно сопряженную с $\varphi(P)$, из тождества (4.13) получим:

$$\overline{\varphi(P)} = (a - bi) \int K(P, Q) \overline{\varphi(Q)} \, dQ.$$

Согласно теореме п. 1 должно быть:

$$\int \varphi(P) \overline{\varphi(P)} \, dP = 0.$$

Отсюда и из только что доказанной леммы следует, что

$$\varphi(P) \equiv 0,$$

и потому $a + bi$ при $b \neq 0$ не может быть собственным значением λ.

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что как действительная, так и мнимая части комплексной собственной функции являются также собственными функциями, соответствующими тому же собственному значению.

3. Ортогонализация собственных функций. Подобно тому как у поверхности второго порядка может быть несколько главных полуосей одинаковой длины, точно так же одному и тому же собственному значению λ интегрального уравнения с симметрическим ядром могут соответствовать несколько линейно независимых между собой собственных функций. По второй теореме Фредгольма множество линейно независимых между собой собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению, конечно. Пусть это функции

$$\varphi_1(P), \ldots, \varphi_m(P). \tag{5.13}$$

Согласно теореме п. 1 все эти функции ортогональны собственным функциям того же интегрального уравнения, но соответствующим другим значениям λ. Любая линейная комбинация с постоянными коэффициентами функций (5.13) есть также собственная функция уравнения (7.12). Покажем, что, составляя такие линейные комбинации функций (5.13), мы можем получить m нормированных, взаимно ортогональных и потому линейно независимых между собой собственных функций

$$\psi_1(P), \ldots, \psi_m(P)$$

уравнения (7.12). Положим

$$\psi_1(P) = a\varphi_1(P).$$

Подберем постоянную $a \neq 0$ так, чтобы

$$\int \psi_1^2(P)\,dP = 1.$$

Положим

$$\psi_2(P) = b[\varphi_2(P) + b_1\psi_1(P)],$$

где $b \neq 0$ и b_1 — некоторые постоянные. Выберем постоянную b_1 так, что

$$\int \psi_1\psi_2 dP = b\left[\int \psi_1\varphi_2 dP + b_1\int \psi_1^2 dP\right] = 0.$$

Так как $\int \psi_1^2 dP = 1$, то это неравенство единственным образом определяет b_1. Постоянную b подберем так, чтобы норма ψ_2 равнялась 1. Это возможно сделать, потому что в силу предполагаемой линейной независимости функций (5.13) $\varphi_2(P) + b_1\psi_1(P)$ не равно 0 тождественно. А так как все собственные функции уравнения (7.12) непрерывны, то интеграл от квадрата $\varphi_2 + {}$ $+ b_1\psi$ не может быть равным 0.

Положим далее

$$\psi_3(P) = c[\varphi_3(P) + c_2\psi_2(P) + c_1\psi_1(P)],\ c \neq 0.$$

Подберем постоянную c_1 так, чтобы

$$\int \psi_1\psi_3 dP = c\left[\int \varphi_3\psi_1 dP + c_2\int \psi_2\psi_1 dP + c_1\int \psi_1^2\,dP\right] = 0.$$

Так как

$$\int \psi_1\psi_2 dP = 0 \text{ и } \int \psi_1^2 dP = 1,$$

то это условие однозначно определяет c_1:

$$c_1 = -\int \varphi_3 \psi_1 dP.$$

Совершенно так же постоянные c_2 и $c \neq 0$ можно выбрать так, чтобы

$$\int \psi_2 \psi_3 dP = 0 \text{ и } \int \psi_3^2 dP = 1.$$

Продолжая этот процесс, получим $\psi_4(P)$, ..., $\psi_m(P)$.

Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением лишь таких линейно независимых между собой собственных функций рассматриваемого интегрального уравнения, которые образуют ортонормальную систему. Возьмем одну какую-нибудь ортонормальную систему собственных функций этого уравнения, *максимальную* в том смысле, что всякая собственная функция этого интегрального уравнения выражается линейно через функции этой системы. Для дальнейшего нам удобно занумеровать их так, чтобы их номера возрастали по мере увеличения абсолютных величин соответствующих собственных значений λ (множество которых согласно § 8 не имеет конечных предельных точек). Если одному и тому же λ соответствуют несколько линейно независимых между собой собственных функций, то все эти собственные функции мы поставим рядом. Таким образом, мы получим

$$\varphi_1(P), \ \ldots, \ \varphi_i(P), \ \ldots \tag{6.13}$$

$$\lambda_1, \quad \ldots, \quad \lambda_i, \quad \ldots \tag{7.13}$$

Здесь под каждой собственной функцией подписано соответствующее собственное значение λ. Последовательности (6.13) и (7.13) могут быть конечными или бесконечными. В (7.13) некоторые рядом стоящие λ_i могут быть равными, если уравнение (7.12) при $\lambda = \lambda_i$ имеет несколько линейно независимых между собой собственных функций. Но согласно второй теореме Фредгольма для каждого λ_i имеется только конечное число собственных функций, ортогональных между собой и потому линейно независимых. Из этой же теоремы следует, что если последовательности (6.13) и (7.13) бесконечные, то

$$|\lambda_i| \to \infty \text{ при } i \to \infty.$$

Система (6.13) максимальна в указанном выше смысле, если в (7.13) находятся все собственные значения рассматриваемого интегрального уравнения и если каждому такому собственному значению в (6.13) соответствует максимальное число линейно независимых между собой собственных функций, отвечающих этому собственному значению.

4. Теорема. *Пусть* $\varphi_1(P)$ — *собственная функция интегрального уравнения* (7.12), *соответствующая собственному значению* λ_1. *Тогда для ядра*

$$K_1(P, Q) = K(P, Q) - \frac{\varphi_1(P)\varphi_1(Q)}{\lambda_1}$$

последовательности собственных функций и собственных значений, аналогичные (6.13) *и* (7.13) *для* $K(P, Q)$, *можно получить из последовательностей рядов* (6.13) *и* (7.13), *соответствующих ядру* $K(P, Q)$, *зачеркиванием* $\varphi_1(P)$ *и* λ_1.

Доказательство. Покажем сначала, что всякая собственная функция $\varphi(P)$ ядра $K_1(P, Q)$, соответствующая собственному значению λ, есть собственная функция ядра $K(P, Q)$, соответствующая тому же собственному значению. Действительно, пусть

$$\varphi(P) = \lambda \int K_1(P, Q)\varphi(Q)\,dQ. \tag{8.13}$$

Тогда

$$\int \varphi(P)\varphi_1(P)\,dP = 0, \tag{9.13}$$

потому что

$$\int \varphi(P)\varphi_1(P)\,dP = \lambda \iint K_1(P, Q)\varphi(Q)\varphi_1(P)\,dP\,dQ =$$

$$= \lambda \iint \left[K(P, Q) - \frac{\varphi_1(P)\varphi_1(Q)}{\lambda_1}\right]\varphi_1(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ =$$

$$= \lambda \iint K(P, Q)\varphi_1(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ -$$

$$- \frac{\lambda}{\lambda_1}\int \varphi_1(Q)\varphi(Q)\,dQ \int \varphi_1^2(P)\,dP =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda_1}\int \varphi_1(Q)\varphi(Q)\,dQ - \frac{\lambda}{\lambda_1}\int \varphi_1(Q)\varphi(Q)\,dQ = 0.$$

В силу соотношения (9.13) равенство (8.13) можно переписать в следующем виде:

$$\varphi(P) = \lambda \int \left[K(P, Q) - \frac{\varphi_1(P)\varphi_1(Q)}{\lambda_1} \right] \varphi(Q)\, dQ =$$

$$= \lambda \int K(P, Q) \varphi(Q)\, dQ.$$

Таким образом, доказано, что $\varphi(P)$ есть собственная функция интегрального уравнения (7.12), отвечающая тому же λ.

Покажем теперь обратно, что всякая собственная функция $\varphi_i(P)$ из (6.13), соответствующая собственному значению λ_i из (7.13) при $i > 1$, есть собственная функция, отвечающая тому же собственному значению λ_i для ядра $K_1(P, Q)$. Действительно, пусть

$$\varphi_i(P) = \lambda_i \int K(P, Q) \varphi_i(Q)\, dQ, \quad i > 1. \tag{10.13}$$

Тогда

$$\int \varphi_1(P) \varphi_i(P)\, dP = 0.$$

Поэтому из равенства (10.13) следует:

$$\varphi_i(P) = \lambda_i \int \left[K_1(P, Q) + \frac{\varphi_1(P)\varphi_1(Q)}{\lambda_1} \right] \varphi_i(Q)\, dQ =$$

$$= \lambda_i \int K_1(P, Q) \varphi_i(Q)\, dQ.$$

Функция же $\varphi_1(Q)$ не является собственной функцией уравнения (8.13), так как в противном случае из условия (9.13) следовало бы, что $\int \varphi_1^2(P)\, dP = 0$, что невозможно.

Из доказанных утверждений легко следует наша теорема.

5. Применяя последовательно теорему 4 к ядрам

$$K_1(P, Q) = K(P, Q) - \frac{\varphi_1(P)\varphi_1(Q)}{\lambda_1},$$

$$K_2(P, Q) = K_1(P, Q) - \frac{\varphi_2(P)\varphi_2(Q)}{\lambda_2}, \ \ldots,$$

мы найдем, что все собственные функции $\varphi_i(P)$ из (6.13), соответствующие собственным значениям λ_i из (7.13) для ядра $K(P, Q)$, суть собственные функции, соответствующие тем же собственным значениям, для ядра

$$K_m(P, Q) = K(P, Q) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi_k(P)\varphi_k(Q)}{\lambda_k},$$

если $i > m$. Эти собственные функции $\varphi_i(P)$, $i > m$, образуют для интегрального уравнения с ядром $K_m(P, Q)$ максимальную систему собственных функций в том смысле, что всякая другая собственная функция этого ядра выражается линейно через них.

Таким образом, *последовательности* (6.13) *и* (7.13) *для симметрического ядра* $K(P, Q)$ *можно получить, применяя последовательно вариационный метод к ядрам* $K(P, Q)$, $K_1(P, Q)$, $K_2(P, Q)$, ...

6. Допустим, что ядро $K(P, Q)$ имеет только конечное число линейно независимых собственных функций (этим свойством обладает вырожденное ядро). Тогда при достаточно большом m ядро $K_m(P, Q)$ не имеет ни одного собственного значения. С другой стороны, так как функции $\varphi_k(P)$ согласно лемме п. 2 непрерывны, то ядро $K_m(P, Q)$ точно так же, как и $K(P, Q)$, обладает всеми свойствами, описанными в п. 2 § 12. Поэтому согласно п. 3 § 12 должно быть $K_m(P, Q) \equiv 0$, т. е.

$$K(P, Q) \equiv \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi_k(P)\varphi_k(Q)}{\lambda_k}. \tag{11.13}$$

Из этой формулы следует, что всякое ядро рассматриваемого вида с конечным числом собственных значений (или, что равносильно, с конечным числом линейно независимых собственных функций) есть вырожденное ядро.

Замечание. Пусть $K(P, Q) = \frac{\overline{K}(P, Q)}{PQ^{\alpha}}$, где $0 \leqslant \alpha < d$, $\overline{K}(P, Q)$ — равномерно непрерывная функция P и Q и $\overline{K}(P, Q) = \overline{K}(Q, P)$, $\overline{K}(P, Q) \not\equiv 0$. Легко видеть, что для непрерывных собственных функций интегрального уравнения с ядром $K(P, Q)$ указанного вида справедливы теоремы 1 и 2 настоящего параграфа. Воспользовавшись этим, мы покажем, что интегральное уравнение с ядром указанного вида имеет по крайней мере одно собственное значение.

Из леммы § 8 следует, что существует такое m, что ядро $K^{(m)}(P, Q) = \underbrace{K \circ K \circ \ldots \circ K}_{m \text{ раз}}$ непрерывно. Так как $K^{(m)}(P, Q)$ — непрерывное симметрическое ядро, и, как легко проверить, $K^{(m)}(P, Q) \not\equiv 0$, то по доказанному в § 12 существуют такое действительное число μ_1 и непрерывная функция $\varphi_1(P)$, что

$$\varphi_1 = \mu_1 K^{(m)} \varphi_1, \quad \varphi_1 \not\equiv 0,$$

($K^{(m)}$ означает оператор, соответствующий ядру $K^{(m)}(P, Q)$, см. с. 44). Будем предполагать, что m нечетно, и положим $\mu_1 = \lambda_1^m$, где λ_1 — действительное число. Пусть e — какой-нибудь первообразный корень степени m из единицы. Имеет место равенство

$$(E - \lambda_1 K)(E - \lambda_1 e K)(E - \lambda_1 e^2 K) \ldots (E - \lambda_1 e^{m-1} K) =$$
$$= (E - \lambda_1^m K^{(m)}).$$

Справедливость этого равенства вытекает из алгебраического тождества

$$(a^m - b^m) \equiv (a - b)(a - eb)(a - e^2 b) \ldots (a - e^{m-1} b).$$

Таким образом,

$$(E - \lambda_1^m K^{(m)})\varphi_1 = (E - \lambda_1 K)(E - \lambda_1 e K) \ldots (E - \lambda_1 e^{m-1} K)\varphi_1$$

Положим

$$(E - \lambda_1 e K)(E - \lambda_1 e^2 K) \ldots (E - \lambda_1 e^{m-1} K)\varphi_1 = \psi_1.$$

Тогда

$$(E - \lambda_1 K)\psi_1 = 0 \text{ и } \psi_1 \not\equiv 0,$$

т. е. ψ_1 есть собственная функция интегрального уравнения с ядром $K(P, Q)$. Действительно, так как m нечетно, то для $\lambda_1 e^p$ при $1 \leqslant p \leqslant m-1$ имеет $\mathcal{I}m(\lambda_1 e^p) \neq 0$. Далее, $(E - \lambda_1 e^p K)\varphi \not\equiv 0$ при любой функции $\varphi(P) \not\equiv 0$ и $1 \leqslant p \leqslant m-1$, так как уравнение с симметрическим ядром не имеет комплексных собственных значений в силу теоремы 2 настоящего параграфа. Поэтому $\psi_1 \not\equiv \not\equiv 0$, так как в противном случае мы получили бы, что для некоторого p, $1 \leqslant p \leqslant m-1$, и некоторой функции $\varphi(P)$, нетождественно равной нулю, $(E-\lambda_1 e^p K)\varphi = 0$.

Этим наше утверждение доказано.

Задача 1. Доказать, что для симметрического ядра $K(P, Q)$, рассматриваемого в п. 2 § 12, можно найти вторую собственную функцию из (6.13), применяя описанный в п. 3 § 12 вариационный метод, с той разницей, что теперь допустимые функции удовлетворяют не только условию (8.12), но еще условию (9.13). Использовать этот метод для нахождения остальных собственных функций.

Задача 2. Пусть $K(P, Q) = -K(Q, P)$ и $K(P, Q)$ удовлетворяет условию (3.12). Докажите, что тогда все собственные значения — чисто мнимые, а собственные функции не могут быть действительными. Любая из собственных функций ортогональна сама себе и всем другим собственным функциям, за исключением, быть может, тех, которые отвечают комплексно сопряженному собственному значению.

§ 14. Теорема Гильберта — Шмидта

Всякая функция $f(P)$, истокообразно представимая при помощи функции $h(P)$ с интегрируемым квадратом, т. е. функция вида

$$f(P) = \int K(P, Q)\, h(Q)\, dQ,$$

может быть разложена в ряд по собственным функциям (6.13) *симметрического ядра $K(P, Q)$, который сходится абсолютно и равномерно.*

Замечание. Конечно, о сходимости этого ряда имеет смысл говорить только в том случае, если интегральное уравнение (7.12) имеет бесконечное множество линейно независимых собственных функций. В противном случае этот ряд обращается в сумму конечного числа слагаемых. Чтобы не удлинять запись, мы здесь, как и в других аналогичных случаях, будем писать бесконечные ряды, помня, что в случае конечного числа собственных функций эти ряды заменятся конечными суммами, сходимость которых не надо доказывать.

Доказательство теоремы будет состоять в том, что мы сначала построим некоторый ряд по собственным функциям (6.13) и докажем, что он сходится равномерно, а потом докажем, что он сходится именно к функции $f(P)$.

Допустим, что функция $f(P)$ разлагается в ряд по собственным функциям (6.13), которые мы считаем ортонормированными. Пусть

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i\varphi_i(P) = f(P), \tag{1.14}$$

причем ряд, стоящий в левой части, сходится равномерно. Для определения коэффициента C_m помножим обе части равенства (1.14) на $\varphi_m(P)$ и проинтегрируем почленно по всей области G определения функций $f(P)$ и $\varphi_i(P)$. Получим:

$$C_m = \int f(P)\,\varphi_m(P)\,dP = \iint K(P, Q)\,h(Q)\,\varphi_m(P)\,dP dQ =$$

$$= \int h(Q)\left(\int K(Q, P)\,\varphi_m(P)\,dP\right)dQ =$$

$$= \int \frac{\varphi_m(Q)\,h(Q)\,dQ}{\lambda_m} = \frac{h_m}{\lambda_m}. \tag{2.14}$$

Мы здесь положили

$$h_m = \int h(Q)\,\varphi_m(Q)\,dQ.$$

Покажем теперь, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i\varphi_i(P)}{\lambda_i} \tag{3.14}$$

сходится равномерно и абсолютно. Для этого применим признак Коши. Составим отрезок ряда

$$\sum_{i=m}^{m+p} \frac{h_i\varphi_i(P)}{\lambda_i}.$$

Применяя неравенство Коши, получим:

$$\left[\sum_{i=m}^{m+p}|h_i|\left|\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}\right|\right]^2 \leqslant \sum_{i=m}^{m+p} h_i^2 \sum_{i=m}^{m+p}\left|\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}\right|^2. \qquad (4.14)$$

Коэффициенты h_i суть коэффициенты Фурье функции $h(P)$ по отношению к функциям $\varphi_i(P)$. Поэтому, применяя неравенство Бесселя, мы найдем, что числовой ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2$$

сходится. Следовательно, по признаку Коши величина

$$\sum_{i=m}^{m+p} h_i^2$$

меньше любого положительного ε_1, если только m достаточно велико.

С другой стороны, величины $\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}$ можно рассматривать как коэффициенты Фурье при разложении ядра $K(P, Q)$, рассматриваемого как функция только от Q, в ряд по функциям $\varphi_i(Q)$. Применяя опять к этим коэффициентам неравенство Бесселя, мы найдем:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}\right)^2 \leqslant \int K^2(P, Q)\,dQ.$$

Последний интеграл существует в силу условия (3.12) и ограничен постоянной, не зависящей от P. Поэтому при любых m и p сумма

$$\sum_{i=m}^{m+p}\left|\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}\right|^2$$

ограничена.

Таким образом, из неравенства (4.14) находим, что для любого постоянного $\varepsilon > 0$ можно указать такое m_0, зависящее только от ε, что при любом $m > m_0$ и любом

$p>0$

$$\sum_{i=m}^{m+p}\left|\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P)\right|<\varepsilon.$$

Отсюда по признаку Коши следует, что ряд (3.14) сходится абсолютно и равномерно.

Перейдем теперь к доказательству того, что ряд (3.14) сходится именно к функции $f(P)$.

Заметим прежде всего, что из теоремы, доказанной в п. 2 § 12, следует, что функция $f(P)$ и все собственные функции $\varphi_i(P)$ равномерно непрерывны. Кроме того, мы только что доказали, что ряд (3.14) сходится равномерно. Поэтому для доказательства сходимости этого ряда к $f(P)$ достаточно доказать, что этот ряд сходится к $f(P)$ в среднем, т. е. что

$$\int\left[f(P)-\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P)\right]^2 dP \underset{m\to\infty}{\to} 0. \tag{5.14}$$

Для доказательства же этого последнего утверждения заметим, что

$$(fP)-\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P)=\int\left[K(P,Q)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]h(Q)\,dQ,$$

откуда, полагая для сокращения записи

$$K_m(P,Q)=K(P,Q)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i},$$

$$g_m(P)=f(P)-\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P),$$

получим:

$$\int\left[f(P)-\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P)\right]^2 dP=\iint\Big[K(P,Q)-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\Bigg]\,h(Q)\left[f(P)-\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P)\right]dPdQ=$$

$$=\frac{1}{2}\iint K_m(P,Q)\,[h(Q)+g_m(Q)]\,[h(P)+g_m(P)]\,dPdQ-$$

$$-\frac{1}{2}\iint K_m(P,Q)\,h(Q)\,h(P)\,dPdQ-$$

$$-\frac{1}{2}\iint K_m(P,Q)\,g_m(Q)\,g_m(P)\,dPdQ \qquad (6.14)$$

Мы здесь воспользовались тем, что в силу симметричности ядра $K(P, Q)$

$$\iint K_m(P,Q)\,h(P)\,g_m(Q)\,dPdQ=$$

$$=\iint K_m(P,Q)\,h(Q)\,g_m(P)\,dPdQ.$$

Так как

$$\int g_m^2(P)\,dP=\int f^2(P)\,dP-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{h_i}{\lambda_i}\right)^2\leqslant\int f^2(P)\,dP,$$

то существует такое не зависящее от m число M, что при всяком m

$$\int g_m^2(P)\,dP<M,\quad \int h^2(P)\,dP<M,\ \int [h(P)+g_m(P)]^2\,dP<M.$$

Согласно замечанию 2 к п. 3 § 12 и п. 5 § 13

$$\left|\iint K_m(P,Q)\,\psi(P)\,\psi(Q)\,dPdQ\right|\leqslant\frac{M}{|\lambda_{m+1}|},$$

если

$$\int \psi^2(P)\,dP\leqslant M.$$

Значит, все три интеграла, стоящие в правой части (6.14), стремятся к 0 при $m\to\infty$, и потому справедливо соотношение (5.14).

Следствие. Формула Шмидта для решения интегральных уравнений с симметрическим ядром.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(P) = \lambda \int K(P, Q)\,\varphi(Q)\,dQ + f(P), \qquad (7.14)$$

где $K(P, Q)$ — симметрическое ядро вида, описанного в начале п. 2 § 12, $f(P)$ — известная равномерно непрерывная функция, $\varphi(P)$ — искомая функция, λ — параметр. По первой теореме Фредгольма (§ 8) интегральное уравнение (7.14) имеет равномерно-непрерывное решение $\varphi(P)$, если λ не является собственным значением. Тогда по теореме Гильберта—Шмидта функция $\varphi(P) - f(P)$ разлагается в ряд по собственным функциям ядра $K(P, Q)$, который сходится абсолютно и равномерно. Пусть

$$\varphi(P) - f(P) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i(P).$$

Отсюда

$$\varphi(P) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i(P) + f(P). \qquad (8.14)$$

Подставляя вместо $\varphi(P)$ в уравнение (7.14) правую часть равенства (8.14), получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i(P) + f(P) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} C_i \int K(P, Q)\,\varphi_i(Q)\,dQ +$$

$$+ \lambda \int K(P, Q)\,f(Q)\,dQ + f(P) =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i \varphi_i(P)}{\lambda_i} + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i} + f(P). \qquad (9.14)$$

Воспользовавшись опять теоремой Гильберта—Шмидта, мы заменили здесь

$$\int K(P, Q)\,f(Q)\,dQ$$

абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i}, \text{ где } f_i = \int f(P)\,\varphi_i(P)\,dP.$$

Легко видеть, что и первый из рядов, стоящих в правой части (9.14), равномерно сходится. Сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях $\varphi_i(P)$ в правой и левой частях равенства (9.14), получим:

$$C_i = \frac{\lambda C_i}{\lambda_i} + \frac{\lambda f_i}{\lambda_i}.$$

Отсюда

$$C_i = \frac{\lambda f_i}{\lambda_i - \lambda}$$

и, следовательно,

$$\varphi(P) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda} + f(P), \tag{10.14}$$

где ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно. Эта формула называется формулой Е. Шмидта.

В том случае, когда λ совпадает с одним из собственных значений λ_i, можно аналогичным образом получить решение уравнения (7.14). При этом $f_i = 0$ для всех i, которым соответствуют собственные значения, равные λ, в силу третьей теоремы Фредгольма. Решение $\varphi(P)$ представляется в виде ряда (8.14), в котором $C_i = \frac{\lambda f_i}{\lambda_i - \lambda}$, если $\lambda_i \neq \lambda$, и $C_i = \alpha_i$, где α_i — произвольная постоянная, если $\lambda_i = \lambda$.

Задача. Доказать теорему Гильберта—Шмидта для вырожденных ядер непосредственно, воспользовавшись формулой (11.13).

§ 15. Теорема о разложении ядер

Теорема. *Ядро $K(P, Q)$ рассматриваемого в настоящей главе вида разлагается в ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}, \tag{1.15}$$

который сходится к $K(P, Q)$ в среднем по P, т. е. при *всяком фиксированном Q*

$$\int \left[K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \right]^2 dP \underset{m\to\infty}{\to} 0. \qquad (2.15)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$K_2(P, Q) = \int K(P, S) K(S, Q)\, dS$$

как функцию только P, считая Q фиксированным. Тогда эту функцию можно по теореме Гильберта—Шмидта разложить в ряд по собственным функциям $\varphi_i(P)$, который сходится равномерно и абсолютно по P. Пусть

$$K_2(P, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(P).$$

Согласно формуле (2.14)

$$c_i = \frac{\int K(P, Q)\varphi_i(P)\, dP}{\lambda_i} = \frac{\varphi_i(Q)}{\lambda_i^2}.$$

Следовательно,

$$K_2(P, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i^2}. \qquad (3.15)$$

По теореме Гильберта—Шмидта этот ряд сходится абсолютно и равномерно по P при всяком фиксированном Q. Из соображений симметрии отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость этого ряда также и по Q при всяком фиксированном P. Но нет никаких оснований заключить отсюда о равномерной сходимости этого ряда по совокупности P и Q. Такая сходимость будет доказана в § 17.

Из (3.15) следует, что

$$K_2(Q, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}. \qquad (4.15)$$

причем последний ряд сходится, но мы не можем пока утверждать, что он сходится равномерно по Q.

С другой стороны,

$$\int \Big[\qquad - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \Big]^2 dP =$$

$$= \int K(Q, P)\,K(P, Q)\,dP - 2\sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \int K(Q, P)\,\varphi_i(P)\,dP +$$

$$+ \sum_{=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2} = K_2(Q, Q) - 2\sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2} =$$

$$= K_2(Q, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}. \qquad (5.15)$$

Согласно (4.15) эта последняя разность стремится к 0 при $m \to \infty$. Отсюда следует (2.15), что и требовалось доказать.

§ 16. Классификация ядер

Рассмотрим интегральную форму

$$\iint K(P, Q)\,\chi(P)\,\chi(Q)\,dP\,dQ, \qquad (1.16)$$

где $\chi(P)$ — какая-нибудь функция с интегрируемым квадратом. Воспользовавшись неравенством Буняковского, легко показать, что интеграл (1.16) существует, так как существует интеграл от квадрата $K(P, Q)$ [ср. (3.12)]. По теореме Гильберта — Шмидта функция от P

$$\int K(P, Q)\,\chi(Q)\,dQ$$

разлагается в ряд по собственным функциям $\varphi_i(P)$ ядра $K(P, Q)$, который равномерно по P сходится. Воспользовавшись при этом формулой (2.14), мы получим, таким образом,

$$\int K(P, Q)\,\chi(Q)\,dQ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i}{\lambda_i}\,\varphi_i(P), \qquad (2.16)$$

где

$$\chi_i = \int \chi(P)\,\varphi_i(P)\,dP.$$

Помножив обе части (2.16) на $\chi(P)$ и проинтегрировав по P, получим:

$$\iint K(P, Q)\,\chi(P)\,\chi(Q)\,dP\,dQ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i^2}{\lambda_i}. \qquad (3.16)$$

Интегральная форма и ядро $K(P, Q)$ *называются неотрицательно, соответственно неположительно, определенными (или дефинитными), если для всякой функции* $\chi(P)$ *с интегрируемым квадратом интегральная форма* (1.16) *неотрицательна, соответственно неположительна* (ср. § 12, п. 1).

Из формулы (3.16) видно, что *необходимым и достаточным условием неотрицательной, соответственно неположительной, определенности формы* (1.16) *является условие, чтобы все* λ_i *были положительными, соответственно отрицательными.*

Будем форму (1.16) и ядро $K(P, Q)$ называть *квазиопределенными неотрицательно,* соответственно *неположительно,* если все соответствующие λ_i, кроме, быть может, конечного их числа, положительны, соответственно отрицательны.

§ 17. Теорема Дини и ее приложения

Теорема Дини. *Если монотонная последовательность непрерывных функций*

$$f_1(P), \ldots, f_k(P), \ldots \qquad (1.17)$$

всюду на замкнутом ограниченном множестве F *сходится к непрерывной функции* $f(P)$, *то эта последовательность сходится равномерно.*

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать, что $f(P) \equiv 0$; общий случай сводится к этому вычитанием $f(P)$ из каждой функции $f_k(P)$. Мы можем далее считать, что последовательность

(1.17) монотонно не возрастает в каждой точке P*, так как противоположный случай сводится к этому переменой знака у всех $f_k(P)$.

Итак, пусть имеется монотонно невозрастающая в каждой точке последовательность непрерывных функций $f_k(P)$, сходящаяся к 0 в каждой точке ограниченного замкнутого множества F. Докажем, что эта сходимость равномерная. Для этого заметим следующее. Для каждого $\varepsilon>0$ и каждой точки P множества F можно указать такое m, что

$$0 \leqslant f_m(P) < \varepsilon.$$

В силу непрерывности $f_m(P)$ то же неравенство будет иметь место и в некоторой окрестности O_P точки P. В силу монотонного невозрастания рассматриваемой последовательности функций в окрестности O_P имеем

$$0 \leqslant f_k(P) < \varepsilon \text{ при всех } k \geqslant m. \tag{2.17}$$

Таким образом, при выбранном ε для каждой P множества F можно указать такую ее окрестность O_P, что, начиная с некоторого k, в ней справедливо неравенство (2.17). По лемме Гейне—Бореля из всей совокупности окрестностей O_P можно выбрать такое их конечное множество, которое покрывает все множество F. Пусть M — максимальное из всех чисел m, соответствующих этим окрестностям. Тогда очевидно, что при всех $k \geqslant M$ на всем множестве F имеем

$$f_k(P) < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Приложения теоремы Дини.

1. В § 15 мы доказали, что

$$K_2(Q, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}. \tag{4.15}$$

Оставался нерешенным вопрос о том, равномерно ли по Q сходится ряд в правой части. Теперь, после доказательства теоремы Дини, мы легко сможем решить

* То есть

$$f_k(P) \geqslant f_{k+1}(P), \quad k=1, 2, \ldots$$

этот вопрос. Действительно, согласно лемме, доказанной в § 8, функция $K_2(Q, Q)$ равномерно непрерывна по Q. Следовательно, ее можно считать непрерывной на $\bar{G}$ (ср. сноску на с. 37). Значит, последовательность

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}$$

есть монотонная в каждой точке Q последовательность непрерывных функций, которая сходится при $m \to \infty$ к непрерывной же функции. Следовательно, по теореме Дини эта сходимость *равномерна* на $\bar{G}$.

2. Из того, что ряд стоящий в правой части (4.15), сходится равномерно по Q, следует, что последовательность (2.15) сходится к 0 равномерно по Q [см. (5.15)]. *Поэтому*

$$\iint \left[K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \right]^2 dP\, dQ \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Из равномерной по Q сходимости ряда (4.15) следует *равномерная по* (P, Q) *и абсолютная сходимость ряда* (3.15), так как

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i^2} \right| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}.$$

4. Интегрируя по Q обе части (4.15), найдем:

$$\int K_2(Q, Q)\, dQ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2},$$

так как функции $\varphi_i(Q)$ нормированы. Значит, *ряд составленный из квадратов обратных величин* λ_i, *сходится.*

5. Теорема Мерсера. *Если ядро* $K(P, Q)$ *квазиопределенно и равномерно непрерывно по* (P, Q), *то ряд* (1.15) *сходится к нему не только в среднем, но абсолютно и равномерно по* (P, Q).

Доказательство. Для определенности будем предполагать, что ядро $K(P, Q)$ квазиопределенно неотрицательно.

Заметим далее, что если ядро $K_m(P, Q)$ неотрицательно определенно и непрерывно, то всегда $K_m(P, P) \geqslant 0$. Действительно, если бы в некоторой точке P_0 было $K_m(P_0, P_0) < 0$, то в силу непрерывности оно было бы отрицательным и в некоторой окрестности точки (P_0, P_0) в пространстве (P, Q). Построим тогда непрерывную функцию $\varphi_{P_0}(P)$, которая равняется 0 всюду на области G, кроме некоторой малой окрестности G_0 точки P_0, где эта функция положительна. Тогда, если область G_0 достаточно мала, имеем

$$\iint K_m(P, Q)\, \varphi_{P_0}(P)\, \varphi_{P_0}(Q)\, dP\, dQ < 0,$$

что противоречит предположению о неотрицательной определенности ядра $K_m(P, Q)$.

В силу предполагаемой неотрицательной квазиопределенности ядра $K(P, Q)$ при достаточно большом m ядро

$$K_m(P, Q) = K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}$$

является неотрицательно определенным (ср. § 16). Поэтому согласно только что доказанному утверждению о неотрицательно определенных непрерывных ядрах должно быть при всех достаточно больших m

$$K(P, P) \geqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i}.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i} \tag{3.17}$$

при всех P сходится. Поэтому ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i} \tag{4.17}$$

также сходится при всех Q. Так как $K(P, P)$ ограничено, то все частичные суммы рядов (3.17) и (4.17) при всех P и Q по абсолютной величине ограничены некоторой постоянной

$$M_0>0.$$

Применяя неравенство Коши и считая m настолько большим, что все $\lambda_i>0$ при $i>m$, получим:

$$\left[\sum_{i=m}^{m+p}\left|\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right|\right]^2 \leqslant \sum_{i=m}^{m+p}\frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i}\cdot\sum_{i=m}^{m+p}\frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i}. \qquad (5.17)$$

Применяя необходимый признак сходимости Коши к ряду (4.17), мы найдем, что для каждого постоянного $\varepsilon>0$ при любом фиксированном Q можно указать такое большое m_0, зависящее только от ε и Q, что

$$\sum_{i=m}^{m+p}\frac{\varphi_i^2(Q)}{|\lambda_i|}=\sum_{i=m}^{m+p}\frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i}<\frac{\varepsilon^2}{2M_0}, \text{ если } m>m_0(\varepsilon, Q).$$

Поэтому из неравенства (5.17) получим, что при любом $p>0$ и при $m>m_0$ (ε, Q)

$$\sum_{i=m}^{m+p}\left|\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right|<\varepsilon.$$

Отсюда, применяя достаточный признак сходимости Коши, мы найдем, что ряд (1.15) сходится абсолютно и равномерно по P при каждом фиксированном Q.

В силу доказанного прежде соотношения (2.15) мы получим отсюда, что ряд (1.15) сходится именно к $K(P, Q)$. В частности,

$$K(P, P)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i}. \qquad (6.17)$$

Так как $K(P, P)$, по предположению, непрерывно на замкнутой области $\bar{G}$ и так как все функции $\varphi_i(P)$ также непрерывны на этой области (см. лемму п. 2 § 12), а все λ_i, начиная с некоторого, положительны, то по теореме Дини ряд в правой части (6.17) сходится равномерно по P. Поэтому для каждого постоянного $\varepsilon>0$ можно указать такое m_0, зависящее только от ε, что при любом $p>0$

$$\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i} < \varepsilon, \text{ если } m > m_0(\varepsilon).$$

Из неравенства (5.17) следует, что при любых P и Q, $p>0$ и тех же m и ε имеем

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \right| < \varepsilon,$$

и потому ряд (1.15) сходится абсолютно и равномерно по (P, Q), что и требовалось доказать.

§ 18. Пример

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^l G(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.18}$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина, построенная в § 2. Как там было указано, эта функция симметрична относительно обоих своих аргументов. Поэтому к интегральному уравнению (1.18) применима вся теория, развитая в настоящей главе. Это уравнение имеет, как мы видели в § 2, бесконечное множество собственных функций и собственных значений, которые все были найдены в § 2. Нормируя их и выписывая собственные значения λ под соответствующими собственными функциями, получим последовательности

$$\left.\begin{array}{llll} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x, & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x, \ldots, & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx, & \ldots \\ 1 & 4 \quad , \ldots, & k^2 & , \ldots \end{array}\right\} \tag{2.18}$$

Для упрощения записи мы положили в уравнениях (1.2) $l=\pi$, $c = \frac{\rho}{T_0} = 1$. Здесь каждому собственному значению λ соответствует только одна собственная функция. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, как легко проверить, ортогональны между собой, в соответствии с общей теорией (ср. п. 1 § 13).

Применяя теорему Гильберта—Шмидта, мы найдем, что всякая функция $f(x)$ вида

$$f(x) = \int_0^\pi G(x, \xi) h(\xi) d\xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3.18}$$

где $h(\xi)$ — функция с интегрируемым квадратом, разложима в ряд по собственным функциям (2.18) ядра $G(x, \xi)$. Будем считать, как это мы делали всюду в предыдущем (ср. замечание к § 1), что функция $h(\xi)$ имеет только конечное число точек разрыва. Продифференцируем два раза по x обе части равенства (3.18) так же, как это мы делали в § 2, воспользовавшись при этом формулами (1.2). Получим, что всюду, кроме, быть может, конечного числа точек,

$$f''(x) = -\frac{h(x)}{T_0}.$$

Обратно, пользуясь формулами (1.2), легко проверить, что всякая непрерывная вместе с ее первой производной на замкнутом интервале $[0, \pi]$ функция $f(x)$, обращающаяся в 0 на концах этого интервала и имеющая непрерывную, за исключением конечного числа точек, вторую производную с интегрируемым квадратом, представима в виде (3.18), где $h(x)$ — функция с интегрируемым квадратом; за $h(x)$ надо принять именно $-T_0 f''(x)$. Таким образом, по теореме Гильберта—Шмидта получается, что может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по $\sin kx$ всякая непрерывная вместе с ее первой производной на замкнутом интервале $[0, \pi]$ функция $f(x)$, у которой имеется всюду, за исключением конечного числа точек, непрерывная вторая производная с интегрируемым квадратом и у которой $f(0) = f(\pi) = 0$. Из теории тригонометрических рядов известна возможность такого разложения и при более слабых предположениях относительно $f(x)$. Для этого достаточно, например, чтобы $f(x)$ была непрерывной на замкнутом интервале $[0, \pi]$

вместе с ее первой производной и чтобы было $f(0)=f(\pi)=0$*. Из этого последнего класса функций легко выбрать функцию, которая не удовлетворяет условиям теоремы Гильберта—Шмидта; достаточно, например, взять функцию, нигде не имеющую второй производной. Это показывает, что условия теоремы Гильберта—Шмидта не являются необходимыми для возможности разложения функции $f(x)$ в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям.

Покажем, что система (2.18) полна, т. е. для каждой непрерывной на замкнутом интервале $[0, \pi]$ функции $f(x)$ можно найти такую линейную комбинацию функций $\sin kx$, $k=1, 2, \ldots$, что средняя квадратичная ошибка при замене $f(x)$ этой линейной комбинацией как угодно мала. Для этого заметим, что для каждой непрерывной на замкнутом интервале $[0, \pi]$ функции $f(x)$ можно найти на этом интервале такую функцию $f_1(x)$, непрерывную вместе с ее первыми двумя производными и обращающуюся в 0 на концах этого интервала, что норма разности $f(x)-f_1(x)$ как угодно мала. Функцию же $f_1(x)$ можно разложить в равномерно сходящийся ряд по функциям $\sin kx$, как мы только что видели. Поэтому функцию $f_1(x)$ можно аппроксимировать такой линейной комбинацией функций $\sin kx$ (именно частичной суммой равномерно сходящегося к этой функции ряда по функциям $\sin kx$), что средняя квадратичная ошибка как угодно мала. Отсюда, применяя неравенство треугольника (ср. п. 5 § 11), легко показать, что система (2.18) полна.

Из полноты системы (2.18) следует ее замкнутость по доказанному в п. 10 § 11. Все собственные значения ядра $G(x, \xi)$ положительны. Поэтому к нему применима теорема Мерсера. Получим:

$$\frac{\pi}{2} G(x, \xi) = \frac{\sin x \sin \xi}{1} + \frac{\sin 2x \sin 2\xi}{4} + \ldots,$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно по (x, ξ).

---

* Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III. М.: Наука, 1969, гл. XIX, § 2, с. 435; Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972; Шилов Г. Е. Математический анализ. М.: Физматгиз, 1961.

ДОПОЛНЕНИЕ

§ 19. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием

Мы дадим здесь доказательство возможности такого приведения, соответствующее изложенной в § 12 и 13 теории интегральных форм $I(\varphi)$.

1. Отметим предварительно некоторые свойства взаимно ортогональных единичных векторов. Пусть векторы

$$\varphi_k = (\varphi_k^{(1)}, \ \ldots, \ \varphi_k^{(n)}), \quad k = 1, \ldots, n,$$

единичные и взаимно ортогональны, т. е.

$$\sum_{l=1}^{n} \varphi_k^{(l)} \varphi_p^{(l)} = \delta_{kp}; \quad k, p = 1, \ldots, n,$$

где $\delta_{kp} = 0$, если $k \neq p$, и $\delta_{pp} = 1$.

а) $D = \det(\varphi_p^{(l)}) = \pm 1$. Действительно, вычисляя по известным правилам D^2 как произведение двух одинаковых определителей, мы получим определитель, у которого на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны 0.

б) Обозначим через $\Phi_k^{(l)}$ алгебраическое дополнение элемента $\varphi_k^{(l)}$ в детерминанте D. Тогда

$$\Phi_k^{(l)} = D\varphi_k^{(l)}. \tag{1.19}$$

Действительно, при любом k имеют место следующие равенства:

$$\sum_{l=1}^{n} (\Phi_k^{(l)} - D\varphi_k^{(l)}) \, \varphi_p^{(l)} = 0, \ p = 1, \ldots, n.$$

Рассматривая их как n линейных однородных уравнений с коэффициентами $\varphi_p^{(l)}$, мы найдем соотношения (1.19), так как $D \neq 0$.

в)

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi_k^{(j)} = \delta_{ij}. \tag{2.19}$$

В этом можно убедиться, умножая равенство (1.19) на $\varphi_k^{(j)}$ и суммируя по k.

2. Рассмотрим значения квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)}, \quad K_{ij} = K_{ji}, \tag{3.19}$$

где все K_{ij} и $\varphi^{(i)}$ действительны, на сфере

$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi^{(i)}]^2 = 1. \tag{4.19}$$

По теореме Вейерштрасса на замкнутом ограниченном множестве точек сферы (4.19) имеется по крайней мере одна точка, где непрерывная функция (3.19) принимает наибольшее значение. Пусть это наибольшее значение равно μ_1 и пусть оно достигается в точке $A_1 (\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(n)})$*.

Рассмотрим значения формы (3.19) в точках пересечения S_{n-2} сферы (4.19) и гиперплоскости, перпендикулярной к вектору $(\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(n)})$ и проходящей через центр сферы. По той же теореме Вейерштрасса среди точек множества S_{n-2} должна найтись по крайней мере одна такая точка, где форма (3.19) принимает наибольшее значение по сравнению с другими точками S_{n-2}. Пусть это наибольшее значение равно μ_2 и пусть оно достигается в точке $A_2 (\varphi_2^{(1)}, \ldots \varphi_2^{(n)})$.

---

* Ср. замечание 2 к п. 3 § 12, где было доказано существование такой функции $\varphi(P)$ на «сфере»

$$\int \varphi^2 (P)\, dP = 1,$$

которая дает наибольшее значение интегральной форме

$$\int\int K(P, Q)\, \varphi(P)\, \varphi(Q)\, dP dQ,$$

если только это значение отлично от 0.

Рассмотрим далее значения формы (3.19) в точках множества S_{n-3}, являющегося пересечением S_{n-2} и проходящей через начало координат гиперплоскости, перпендикулярной к вектору $(\varphi_2^{(1)}, \ldots, \varphi_2^{(n)})$. Пусть μ_3 есть верхняя грань значений формы (3.19) на S_{n-3}; по теореме Вейерштрасса она достигается по крайней мере в одной точке S_{n-3}; пусть такой точкой является точка $A_3(\varphi_3^{(1)}, \ldots, \varphi_3^{(n)})$.

Продолжая эти рассуждения, мы найдем n взаимно перпендикулярных единичных векторов $\varphi_k = (\varphi_k^{(1)}, \ldots, \varphi_k^{(n)})$, $k = 1, \ldots, n$. Примем их за направления новых координатных осей $O\psi^{(1)}, \ldots, O\psi^{(n)}$. Тогда

$$\psi^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi^{(i)}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Каждое из множеств S_{n-k} является пересечением $(n-k+1)$-мерной плоскости

$$\psi^{(1)} = \psi^{(2)} = \ldots = \psi^{(k-1)} = 0$$

и сферы

$$\sum_{i=1}^{n} [\psi^{(i)}]^2 = 1. \tag{5.19}$$

В самом деле, сфера (4.19) перейдет в сферу (5.19), и потому для всех точек множества S_{n-k} удовлетворяется равенство (5.19); это следует из того, что

$$\sum_{k=1}^{n} [\psi^{(k)}]^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi^{(i)} \varphi_k^{(j)} \varphi^{(j)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi_k^{(j)} \right) \varphi^{(i)} \varphi^{(j)},$$

а согласно (2.19)

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi_k^{(j)} = \delta_{ij}.$$

Мы утверждаем, что в новых координатах $\psi^{(i)}$ форма (3.19) примет вид

$$F \equiv \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} K^{*}_{ij}\psi^{(i)}\psi^{(j)} \equiv \sum_{i=1}^{n} \mu_i [\psi^{(i)}]^2. \quad (6.19)$$

Равенства

$$K^{*}_{ii} = \mu_i,$$

следуют из того, что форма (3.19) принимает значение μ_i в точке A_i, у которой все координаты ψ равны 0, кроме $\psi^{(i)}$, которое равно 1. Что $K^{*}_{1j} = K^{*}_{j1} = 0$ при $j > 1$, можно доказать так.

Допустим, что $K^{*}_{1j} \neq 0$ при некотором $j > 1$. Положим все $\psi^{(i)}$, кроме $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(j)}$, равными 0. Тогда

$$F = \mu_1 [\psi^{(1)}]^2 + 2K^{*}_{1j}\psi^{(1)}\psi^{(j)} + \mu_j [\psi^{(j)}]^2.$$

Пусть $|\psi^{(j)}|$ мало по сравнению с $\psi^{(1)} > 0$ и

$$[\psi^{(1)}]^2 + [\psi^{(j)}]^2 = 1.$$

Тогда пренебрегая величинами порядка $[\psi^{(j)}]^2$, получим:

$$F \approx \mu_1 + 2K^{*}_{1j}\psi^{(j)}. \quad (7.19)$$

Выберем знак $\psi^{(j)}$ так, что $2K^{*}_{1j}\psi^{(j)} > 0$. Тогда из соотношения (7.19) следует, что на сфере (5.19) или, что все равно, на сфере (4.19) имеются точки, где $F > \mu_1$, что противоречит определению μ_1. Этим заканчивается доказательство того, что все $K^{*}_{1j} = 0$ при $j > 1$. Совершенно так же доказывается, что равны 0 и все другие K^{*}_{ij}, если $i \neq j$.

Из самого нашего построения следует, что

$$\mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n.$$

Может быть, что некоторые из чисел μ_i равны 0, а некоторые отрицательны. Перенумеруем все μ_i и соответствующие ψ_i так, чтобы стало

$\mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_i \geqslant \ldots \geqslant \mu_m; \quad \mu_{m+1} = \ldots = \mu_n = 0 \qquad (\mu_i \neq 0$ при

$i \leqslant m$). Положим

$$\lambda_i = \frac{1}{\mu_i}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Тогда равенство (6.19) примет вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i}.$$

Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ положительны, а $\lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_m$ отрицательны, то $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_\nu}$ называются *действительными* полуосями поверхности

$$\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i} = 1. \tag{8.19}$$

Легко видеть, что эта поверхность отсекает отрезки длины $2\sqrt{\lambda_i}$ на осях $O\psi^{(i)}$ при $i = 1, \ldots, \nu$; $\sqrt{\lambda_1}$ — наименьшая из действительных полуосей. Величины $\sqrt{-\lambda_{\nu+1}}$, $\ldots$, $\sqrt{-\lambda_m}$ называются *мнимыми* полуосями поверхности (8.19). Эта поверхность не пересекает осей $O\psi^{(\nu+1)}, \ldots, O\psi^{(m)}$.

Если $m < n$, то в пространстве $(\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})$ и в пространстве $(\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(n)})$ уравнение (18.9) представляет цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны плоскости

$$\psi^{(1)} = \ldots = \psi^{(m)} = 0.$$

В этом случае естественно говорить, что полуоси, соответствующие осям $O\psi^{(m+1)}, \ldots, O\psi^{(n)}$, бесконечны.

В следующих пунктах мы возвращаемся к прежней нумерации осей.

3. Покажем, что

$$\mu_1\varphi_1^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\varphi_1^{(j)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9.19}$$

Действительно, по нашему построению при всех действительных $\varphi^{(i)}$ должно быть

$$F \equiv \mu_1 \sum_{i=1}^{n} [\varphi^{(i)}]^2 - \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \geqslant 0.$$

Если $\varphi^{(i)}=\varphi_1^{(i)}$ при всех i, то $F=0$, т. е. принимает минимальное значение. Поэтому частные производные по всем переменным, взятые при этих значениях $\varphi^{(i)}$, обращаются в нуль, что и дает нам равенства (9.19).

4. Вместо того чтобы при нахождении оси $O\psi^{(2)}$ рассматривать значение формы (3.19) на множестве S_{n-2}, являющемся пересечением сферы (4.19) и гиперплоскости $\psi^{(1)}=0$, можно, если $\mu_2>0$, рассматривать значения формы

$$\sum_{i,j=1}^{n}[K_{ij}-\mu_1\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}]\,\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \tag{10.19}$$

на всей сфере (4.19). Нетрудно показать, что форма (10.19) принимает наибольшее значение μ^* в некоторой точке $A^*(\varphi^{(1)*},\dots,\varphi^{(n)*})$, принадлежащей S_{n-2}, и $\mu^*=\mu_2$. Действительно,

$$\sum_{i,j=1}^{n}[K_{ij}-\mu_1\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}]\varphi^{(i)}\varphi^{(j)}=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)}-\mu_1[\psi^{(1)}]^2=\sum_{i=2}^{n}\mu_i[\psi^{(i)}]^2. \tag{11.19}$$

Поэтому, чтобы форма (10.19) приняла наибольшее значение в точке A^* на сфере (4.19) или, что все равно, на сфере (5.19), необходимо, если $\mu_2>0$, чтобы у этой точки равнялись 0 все ψ_i, кроме тех, которым соответствуют μ_i, равные μ_2; сумма же квадратов этих последних должна равняться 1. При этом мы сохраняем первоначальную нумерацию μ_i, при которой

$$\mu_2\geqslant\dots\geqslant\mu_n.$$

Следовательно, μ^* должно быть равным μ_2, точка A^* лежит на S_{n-2} и ее можно принять за A_2. Этот способ нахождения второй полуоси неприменим при $\mu_2\leqslant 0$, так как тогда форма (11.19) принимает наибольшее значение 0, например при

$$\psi_1\equiv 1,\ \psi_2\equiv\psi_3\equiv\dots\equiv\psi_n\equiv 0.$$

Совершенно так же, если $\mu_3>0$, можно свести нахождение оси $O\psi_3$ к нахождению максимума формы

$$\sum_{i,j=1}^{n} [K_{ij}-\mu_1\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}-\mu_2\varphi_2^{(i)}\varphi_2^{(j)}]\,\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \qquad (12.19)$$

на сфере (4.19) и т. д.

Применяя к форме (10.19) такие же рассуждения, как в п. 3, можно показать, если $\mu_2>0$, что $\varphi_2^{(i)}$, $i=1, \ldots, n$, должны удовлетворять уравнениям

$$\mu_2\varphi_2^{(i)}=\sum_{j=1}^{n} [K_{ij}-\mu_1\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}]\,\varphi_2^{(j)}$$

или

$$\mu_2\varphi_2^{(i)}=\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\varphi_2^{(j)},\quad i=1, \ldots, n, \qquad (13.19)$$

так как

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_1^{(j)}\varphi_2^{(j)}=0.$$

Пользуясь формой (12.19) и другими аналогично составленными формами, можно доказать, что $\varphi_3^{(i)}$, $\varphi_4^{(i)}$, ..., соответствующие $\mu_3>0$, $\mu_4>0$, ..., также удовлетворяют уравнениям вида (9.19)

Если $\mu_2=0$, то квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} [K_{ij}-\mu_1\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}]\,\varphi^{(i)}\varphi^{(j)}\leqslant 0$$

при любых $\varphi^{(i)}$, $i=1,\ldots,n$, и обращается в нуль, если $\varphi^{(i)}=\varphi_2^{(i)}$ при всех i. Приравняв нулю частные производные этой формы по всем переменным, взятые при значениях $\varphi^{(i)}=\varphi_2^{(i)}$, получим, что $\varphi_2^{(i)}$ удовлетворяют системе уравнений (13.19). Эти же рассуждения применимы к другим векторам φ_k, которым соответствуют $\mu_k=0$.

Если $\mu_2<0$, то числа $\mu_2, \ldots, \mu_n$, которые все в этом случае отрицательны, и соответствующие векторы

$(\varphi_1^{(i)}, \ldots, \varphi_n^{(i)})$, $i=2, \ldots, n$, можно найти посредством рассмотрения минимума формы (11.19) (вместо ее максимума). При этом числа $\mu_2, \ldots, \mu_n$ и соответствующие векторы получаются в обратном порядке. Аналогично можно поступать, если $\mu_3<0$ и т. д. Во всех этих случаях сохраняются уравнение (13.19) и аналогичные ему уравнения для других векторов $(\varphi_1^{(i)}, \ldots, \varphi_n^{(i)})$.

Задача. Опираясь на уравнения (9.19), (13.19),..., разработать невариационный метод приведения квадратичных форм к каноническому виду, использующий решение характеристического уравнения

$$|K_{ij}-\mu\delta_{ij}|=0.$$

§ 20. Теория интегральных уравнений с симметрическими ядрами в классе функций, интегрируемых вместе с их квадратами по Лебегу

Построенная прежде теория интегральных уравнений с симметрическим ядром легко переносится на интегральные уравнения, у которых ядра симметричны и интегрируемы по Лебегу вместе с их квадратами; при этом она становится более стройной.

Построение новой теории во многом сходно с построениями § 11—16 и проводится в точности по тому же плану. Поэтому мы ограничимся изложением только тех мест этой теории, которые существенно отличаются от соответствующих мест прежде изложенной теории.

1. Мы будем предполагать известной теорию интеграла Лебега *. Отметим только некоторые свойства функций, интегрируемых по Лебегу (суммируемых).

а) Теорема Фубини. Допустим, что функция $f(P, Q)$ интегрируема по топологическому произведению измеримых множеств G_1 и G_2, причем $P \in G_1$, а

* См., например: Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Изд. 2-е. М.: Физматгиз, 1957. См. также: Шилов Г. Е. Математический анализ (специальный курс). Изд. 2-е. М.: Физматгиз, 1961; Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

$Q \in G_2$. Запишем этот интеграл в виде

$$I = \int_{G_1} \int_{G_2} f(P, Q)\, dP\, dQ.$$

Тогда почти для всех точек Q, принадлежащих G_2, существует интеграл

$$I(Q) = \int_{G_1} f(P, Q)\, dP,$$

функция $I(Q)$ суммируема и

$$I = \int_{G_2} I(Q)\, dQ. \tag{1.20}$$

Обратно, если почти для всех точек $Q \in G_2$ существует интеграл

$$I^*(Q) = \int_{G_1} |f(P, Q)|\, dP,$$

причем функция $I^*(Q)$ суммируема на G_2, и если $f(P, Q)$ измерима на $G_1 \times G_2$, то существует также интеграл I и справедливо равенство (1.20).

Напомним, что топологическим произведением $G_1 \times G_2$ множеств G_1 и G_2 называется совокупность таких «точек» (P, Q), что $P \in G_1$, $Q \in G_2$. Мы считаем, что множества G_1, G_2, $G_1 \times G_2$ находятся соответственно в евклидовых пространствах $(x_1, \ldots, x_{d_1})$, $(y_1, \ldots, y_{d_2})$, $(x_1, \ldots, x_{d_1}, y_1, \ldots, y_{d_2})$. Если точки P, Q определялись соответственно координатами $(x_1, \ldots, x_{d_1})$, $(y_1, \ldots, y_{d_2})$, то точка (P, Q) определяется координатами $(x_1, \ldots, x_{d_1}, y_1, \ldots, y_{d_2})$. Меры множеств в G_1, G_2, $G_1 \times G_2$ определяются как меры Лебега в евклидовых пространствах соответственно d_1, d_2, $d_1 + d_2$ измерений.

б) Пусть функция $f(S)$ определена на d-мерной области G. Пусть интеграл от $f(S)$ по всякому d-мерному кубу, лежащему внутри G, с ребрами, параллельными координатным осям, равен 0. Тогда $f(S) = 0$ почти всюду на G.

в) Теорема Фишера—Рисса. Пусть дана бесконечная последовательность функций с суммируемыми квадратами на некотором измеримом множестве G:

$$f_1(P),\ f_2(P), \ldots, f_n(P), \ldots$$

Пусть для каждого $\varepsilon>0$ можно указать такое число N, что

$$\int_G (f_n - f_m)^2 \, dP < \varepsilon, \tag{2.20}$$

если $n>N$ и $m>N$. Тогда в G существует такая функция $f(P)$ с суммируемым квадратом, что

$$\int_G (f_n - f)^2 \, dP \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.20}$$

Обратное утверждение, что из (3.20) следует (2.20), очевидно.

Во всем дальнейшем сходимость последовательности функций понимается только в среднем. Множество G предполагается ограниченным. Теорема Фишера—Рисса является аналогом хорошо известного необходимого и достаточного признака сходимости Коши. Пространство функций, в котором выполнение критерия Коши обеспечивает сходимость последовательности функций, называется *полным*. Значит, *пространство функций с суммируемыми квадратами, где сходимость понимается в среднем, полно.*

г) В классе функций с суммируемыми квадратами можно провести все те построения и доказать все те утверждения, какие были проведены в пп. 1—10 § 11 для функций, имеющих только конечное число точек, линий, k-мерных поверхностей разрыва ($k=2, 3, .., d-1$), когда интегрирование понималось в указанном ранее смысле. Кроме того, можно показать, что в этом классе понятия полноты и замкнутости системы ортогональных нормированных функций совпадают. Приведенное в п. 10 § 11 доказательство того, что из полноты системы следует ее замкнутость, полностью переносится и на рассматриваемый нами класс функций с суммируемыми квадратами. Что *в этом классе из замкнутости системы ортогональных нормированных функций следует ее полнота*, доказывается следующим образом.

Допустим, что система ортогональных нормированных функций

$$\varphi_1(P), \ldots, \varphi_k(P), \ldots \tag{4.20}$$

не полна. Тогда существует такая функция $f(P)$ с суммируемым квадратом, что

$$\int f^2(P)\,dP - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 > 0, \tag{5.20}$$

где

$$a_k = \int f(P)\,\varphi_k(P)\,dP.$$

Рассмотрим последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_k a_k \varphi_k(P). \tag{6.20}$$

Для нее выполняется критерий сходимости Коши, так как

$$\int \Big[\sum_{k=m+1}^{m+n} a_k \varphi_k(P) \Big]^2 dP = \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k^2,$$

а бесконечный числовой ряд $\sum a_k^2$ сходится, и потому для него выполняется признак Коши. Поэтому по теореме Фишера—Рисса существует такая функция $\varphi(P)$ с суммируемым квадратом, к которой ряд (6.20) сходится в среднем. Тогда функция

$$f(P) - \varphi(P)$$

ортогональна ко всем функциям $\varphi_k(P)$, а интеграл от ее квадрата, равный левой части (5.20), положителен. Следовательно, система (4.20) не замкнута.

д) Отметим еще одно важное свойство функций, суммируемых с квадратом, которое мы используем в дальнейшем.

Для всякой функции $F(P)$, суммируемой с квадратом на некотором измеримом множестве G, и любого $\varepsilon > 0$ существует такая равномерно непрерывная функция $f(P)$, что

$$\int [F(P) - f(P)]^2\,dP < \varepsilon^*.$$

* Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. V. М.: Физматгиз, 1959, гл. II, § 3, п. 60; Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Изд. 2-е. М.: Физматгиз, 1957, гл. VII, XII.

2. При интегрировании функций по Лебегу на величину этого интеграла не влияют значения подынтегральной функции на множестве меры 0. Можно считать эту функцию даже неопределенной на некотором множестве меры 0. Поэтому все функции, совпадающие на множестве полной меры, т. е. отличающиеся только на множестве меры 0, где некоторые из этих функций могут быть даже неопределенными, естественно считать эквивалентными и не различать друг от друга. Поэтому мы будем называть решением интегрального уравнения

$$\varphi(P) = \lambda \int_G K(P, Q)\,\varphi(Q)\,dQ \tag{7.20}$$

всякую функцию с суммируемым квадратом, которая удовлетворяет этому уравнению почти при всех P.

Доказательство того, что при некотором действительном λ в классе функций с суммируемыми квадратами существует нетривиальное решение интегрального уравнения (7.20) с действительным симметрическим ядром, проводится совершенно по тому же плану, какой был принят в § 12. Поэтому мы изложим только те части этого доказательства, которые существенно отличаются от соответствующих мест § 12. Мы будем предполагать, что $K(P, Q)$ измерима и существует интеграл

$$\iint K^2(P, Q)\,dP\,dQ, \tag{8.20}$$

распространенный по топологическому произведению двух одинаковых измеримых множеств G, которым принадлежат точки P и Q. По теореме Фубини отсюда следует, что почти при всех P существует интеграл

$$\int K^2(P, Q)\,dQ$$

и, следовательно, почти при всех P существует интеграл

$$\int K(P, Q)\,\varphi(Q)\,dQ$$

для всякой функции $\varphi(Q)$ с суммируемым квадратом, так как

$$|K(P, Q)\varphi(Q)| \leqslant \frac{K^2(P, Q)+\varphi^2(Q)}{2}.$$

Здесь, как и во всем дальнейшем, знаки $\iint$ означают интегрирование по топологическому произведению двух одинаковых измеримых множеств G, которым принадлежат точки P и Q; знак $\int$ означает интегрирование по множеству G.

Для всякой функции $\varphi(P)$ с суммируемым квадратом существует интеграл

$$\iint K(P, Q)\varphi(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ,$$

так как

$$|K(P, Q)\varphi(P)\varphi(Q)| \leqslant \frac{1}{2}[K^2(P, Q) + \varphi^2(P)\varphi^2(Q)],$$

$$\iint \varphi^2(P)\varphi^2(Q)\,dP\,dQ = \int \varphi^2(P)\,dP \cdot \int \varphi^2(Q)\,dQ.$$

Во всем дальнейшем мы будем рассматривать только симметрические ядра $K(P, Q)$, для которых существует интеграл (8.20). Вообще, *во всем дальнейшем будут рассматриваться только измеримые функции, квадраты которых интегрируемы по Лебегу на всем ограниченном множестве G их определения.* Мы не будем каждый раз оговаривать это.

3. Пункт 1 § 12 повторяется полностью.

Вместо теоремы, доказанной в п. 2 § 12, докажем следующую теорему.

Пусть дано некоторое семейство H функций $h(P)$, для каждой из которых

$$\int h^2(P)\,dP \leqslant M^2, \tag{9.20}$$

$$M>0,$$

где M — некоторая постоянная, одна и та же для всех функций $h(P)$. Тогда семейство Σ функций $\psi(P)$, определенных равенством

$$\psi(P) = \int K(P, Q)\,h(Q)\,dQ,$$

компактно. Это значит, что из каждого бесконечного множества таких функций можно выбрать последовательность, сходящуюся в среднем.

Доказательство. Если $K(P, Q)$ равномерно непрерывная функция, когда $P \in G$ и $Q \in G$, то по теореме, доказанной в п. 2 § 12, семейство функций $\psi(P)$ равностепенно непрерывно и равномерно ограничено. В силу теоремы Арцеля семейство функций $\psi(P)$ компактно, т. е. из всякой бесконечной последовательности функций $\psi(P)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно и, следовательно, сходящуюся в среднем. Воспользовавшись этим утверждением, мы докажем компактность семейства Σ для произвольного ядра $K(P, Q)$, суммируемого с квадратом.

Согласно замечанию д) из п. 1 настоящего параграфа мы можем построить последовательность равномерно непрерывных функций $K_1(P, Q)$, ..., $K_n(P, Q)$, ... такую, что

$$\iint [K(P,Q) - K_n(P,Q)]^2 \, dP dQ < \frac{1}{2^{2n}}, \tag{10.20}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Пусть задана теперь бесконечная последовательность функций

$$\psi_1(P), \ldots, \psi_n(P), \ldots \tag{11.20}$$

из семейства Σ, полученная с помощью последовательности функций

$$h_1(P), \ldots, h_n(P), \ldots \tag{12.20}$$

из семейства H, так что $\psi_i = Kh_i$ (см. (2.6)).

Так как $K_1(P, Q)$ равномерно непрерывная функция, то из последовательности (12.20) можно выбрать бесконечную подпоследовательность

$$h_1^{(1)}(P), \ \ldots, \ h_n^{(1)}(P), \ \ldots \tag{13.20}$$

такую, что последовательность функций

$$K_1 h_1^{(1)}, \ \ldots, \ K_1 h_n^{(1)}, \ \ldots \tag{14.20}$$

сходится равномерно и, следовательно, сходится в среднем. Далее, из последовательности (13.20) снова выбираем бесконечную подпоследовательность

$$h_1^{(2)}(P), \ldots, h_n^{(2)}(P), \ldots \tag{15.20}$$

такую, что последовательность

$$K_2 h_1^{(2)}, \ldots, K_2 h_n^{(2)}, \ldots$$

сходится в среднем и т. д.

Легко видеть, что последовательность

$$h_1^{(1)}(P), \ldots, h_n^{(n)}(P), \ldots \tag{16.20}$$

такова, что при любом m последовательность

$$K_m h_1^{(1)}, \ldots, K_m h_n^{(n)}, \ldots \tag{17.20}$$

сходится в среднем.

Покажем теперь, что последовательность функций $\psi(P)$ из семейства Σ

$$Kh_1^{(1)}, \ldots, Kh_n^{(n)}, \ldots,$$

являющаяся подпоследовательностью (11.20), также сходится в среднем.

Действительно, по неравенству треугольника (см. с. 71)

$$\begin{aligned}\|Kh_m^{(m)} - Kh_n^{(n)}\| \leqslant \|Kh_m^{(m)} - K_p h_m^{(m)}\| + \\ + \|K_p h_m^{(m)} - K_p h_n^{(n)}\| + \|K_p h_n^{(n)} - Kh_n^{(n)}\|.\end{aligned} \tag{18.20}$$

Из условия (10.20) следует, что p можно выбрать настолько большим, чтобы $\|Kh—K_p h\|$ была меньше любого $\varepsilon>0$ для всех функций из семейства H. В этом легко убедиться, применяя неравенство Буняковского, так как

$$\begin{aligned}\left(\int [K(P,Q) - K_p(P,Q)]\, h(Q)\, dQ\right)^2 \leqslant \\ \leqslant \int [K(P,Q) - K_p(P,Q)]^2\, dQ \int h^2(Q)\, dQ\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\|Kh - K_p h\| \leqslant \\ \leqslant M\left[\iint (K(P,Q) - K_p(P,Q))^2\, dP\, dQ\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant M\frac{1}{2^p}.\end{aligned}$$

Выбрав таким способом p, мы можем указать такое число N, что если n и m больше N, то

$$\| K_p h_m^{(m)} - K_p h_n^{(n)} \| < \varepsilon,$$

так как последовательность (17.20) сходится в среднем. При этом левая часть неравенства (18.20) меньше 3ε. Таким образом, компактность семейства Σ доказана.

4. *Доказательство существования конечных собственных значений* для интегральных уравнений с симметрическим ядром $K(P, Q)$, у которого квадрат суммируем по совокупности (P, Q), если G ограничено, проводится совершенно так же, как в п. 3 § 12. Отличие состоит только в следующем:

а) Функцию $\varphi_{P_0}(P)$ надо определить так, чтобы она равнялась 0 всюду, кроме пересечения множества G с некоторым кубом K_{P_0}, у которого центр находится в точке P_0 и стороны параллельны координатным осям. На этом пересечении функция $\varphi_{P_0}(P)$ должна равняться 1. Тогда предположение, что $\mu_M = \mu_m = 0$, приводят к заключению, что должен равняться 0 интеграл

$$\iint K(P, Q)\, dP\, dQ,$$

взятый по пересечению $G \times G$ с любым $2n$-мерным кубом в пространстве (P, Q), если ребра этого куба параллельны координатным осям. Пользуясь п. 1 б) настоящего параграфа, отсюда легко получить, что $K(P, Q) = 0$ почти всюду на топологическом произведении множества G самого на себя (даже если G не является областью).

б) Сходимость надо понимать всюду как сходимость в среднем, и соответственно этому вместо теоремы, доказанной в п. 2 § 12, применять теорему, доказанную в предыдущем пункте настоящего параграфа.

в) Для каждого собственного значения имеется только конечное число линейно независимых собственных функций и собственные значения не могут иметь конечную точку накопления. Это можно показать так. Построим для данного ядра $K(P, Q)$ последовательности (6.13) и (7.13) так, как это делалось в § 13. При этом мы заранее не исключаем возможности, что все члены последовательности (7.13), начиная с некоторого, совпадают. Тогда при любом m

$$\iint\left[K(P, Q)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]^2 dP\,dQ=$$

$$=\iint K^2(P, Q)\,dP\,dQ-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\lambda_i^2}\geqslant 0.$$

Отсюда следует, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i^2}$$

сходится, и потому $\lambda_i\to\infty$ при $i\to\infty$.

Замечание. Таким образом, интегральное уравнение с ядром, квадрат которого интегрируем, обладает не более чем счетным множеством собственных значений и линейно независимых собственных функций. Этот факт является частным случаем того, что любая ортонормальная система функций S, заданных на конечной области, имеет мощность не более чем счетную. Действительно, из теоремы Вейерштрасса легко следует, что для любой функции $f\in S$ можно подобрать такой многочлен φ_f от координат с рациональными коэффициентами, что норма разности $f-\varphi_f$ меньше любого наперед заданного $\varepsilon>0$, в частности меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Но множество таких многочленов счетно, и если S несчетно, то найдутся $f'\neq f''$ такие, что $\varphi_{f'}=\varphi_{f''}$. Отсюда по неравенству треугольника (см. § 11, п. 5) норма разности $f'-f''$ меньше $\sqrt{2}$. А это невозможно, так как легко проверить, что норма разности между любыми взаимно ортогональными нормированными функциями равна $\sqrt{2}$.

5. Рассуждения § 13—16 полностью сохраняют силу, если множество G ограничено. Надо только всюду вместо равномерной сходимости рассматривать сходимость в среднем. Например, *теорема Гильберта—Шмидта* теперь утверждает сходимость в среднем ряда (3.14) к истокообразно представимой функции $f(P)$.

6. Для интегральных уравнений (7.14) с симметрическими ядрами $K(P, Q)$ рассматриваемого типа, если множество G, по которому берется интеграл, ограничено, нетрудно доказать все *теоремы Фредгольма.*

Для всякой функции $f(P)$ с суммируемым квадратом, стоящей в правой части уравнения (7.14), можно составить коэффициенты Фурье, пользуясь ортонормальной системой собственных функций (6.13) ядра $K(P, Q)$. Согласно неравенству Бесселя, сумма квадратов этих коэффициентов сходится. Пользуясь теоремой Фишера—Рисса, легко проверить, что ряд, стоящий в правой части (10.14), при всякой функции $f(P)$ с суммируемым квадратом сходится в среднем к некоторой функции $\varphi_0(P)$ также с суммируемым квадратом, если λ не равно какому-нибудь собственному значению λ_i. Тогда эта функция $\varphi_0(P)$ почти всюду удовлетворяет уравнению (7.14). Чтобы убедиться в этом, заметим прежде всего, что если бы результаты подстановки $\varphi_0(P)$ в левую и правую части уравнения (7.14) [соответственно $F_1(P)$ и $F_2(P)$] не совпадали почти всюду, то интеграл от квадрата их разности не был бы равен 0. Покажем, что этого не может быть. Для этого в левую и правую части уравнения (7.14) вместо $\varphi(P)$ подставим:

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda} + f(P).$$

Пусть в результате этой подстановки получим функции $F_1^{(n)}(P)$ и $F_2^{(n)}(P)$. Очевидно, при достаточно большом n нормы $\|F_1 - F_1^{(n)}\|$, $\|F_2 - F_2^{(n)}\|$ как угодно малы. Применяя неравенство треугольника, получим отсюда, что не может иметь место соотношение

$$\|F_1^{(n)} - F_2^{(n)}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

если

$$\|F_1 - F_2\| \neq 0.$$

Но, с другой стороны,

$F_2^{(n)}(P) =$

$$= \lambda^2 \int K(P, Q) \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i \varphi_i(Q)}{\lambda_i - \lambda} dQ + \lambda \int K(P, Q) f(Q) dQ + f(P).$$

Пользуясь теоремой Гильберта—Шмидта в ее новой формулировке, а также тем, что функции φ_i суть собственные функции ядра $K(P, Q)$, мы получим отсюда, что почти всюду

$$F_2^{(n)}(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^2}{\lambda_i} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_i} f_i \varphi_i(P) + f(P) =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda} + f(P) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_i} f_i \varphi_i(P).$$

Следовательно, почти всюду

$$F_2^{(n)}(P) - F_1^{(n)}(P) = \lambda \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i}$$

и потому

$$\| F_2^{(n)}(P) - F_1^{(n)}(P) \|^2 = \lambda^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{f_i^2}{\lambda_i^2} \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Таким образом, предположение, что $\varphi_0(P)$ не удовлетворяет почти всюду уравнению (7.14), привело нас к противоречию.

Следовательно, если λ не равно ни одному из собственных значений уравнения (7.14), то это уравнение имеет решение при любой функции $f(P)$. Это решение единственно. Действительно, если бы $\varphi_1(P)$ и $\varphi_2(P)$ были решениями уравнения (7.14), то $\varphi_1(P) - \varphi_2(P)$ была бы решением соответствующего однородного уравнения и λ было бы собственным значением, вопреки предположению. Таким образом, 1-я теорема Фредгольма доказана.

В силу симметричности ядра $K(P, Q)$ 2-я теорема Фредгольма является очевидным следствием замечания в) п. 4.

Когда λ совпадает с одним из λ_i, для существования решения уравнения (7.14) необходимо, чтобы $f(P)$ было ортогонально ко всем собственным функциям $\varphi_1^{(i)}(P), \ldots$ $\ldots, \varphi_m^{(i)}(P)$, соответствующим этому λ_i, так как тогда должно быть:

$$\int \varphi(P)\, \varphi_k^{(i)}(P)\, dP =$$

$$= \lambda_i \iint K(P, Q)\, \varphi(Q)\, \varphi_k^{(i)}(P)\, dP\, dQ + \int f(P)\, \varphi_k^{(i)}(P)\, dP =$$

$$= \int \varphi(Q)\, \varphi_k^{(i)}(Q)\, dQ + \int f(P)\, \varphi_k^{(i)}(P)\, dP,$$

$$k = 1, 2, \ldots, m.$$

Убедимся в достаточности этого условия. Для этого мы образуем ряд (10.14), полагая в тех членах, где $\lambda = \lambda_i$ (и потому $f_i = 0$), отношение $\dfrac{\lambda_i}{\lambda - \lambda_i}$ равным любому фиксированному числу α_i. Тогда аналогично предыдущему убеждаемся в том, что полученный ряд сходится в среднем и сумма его удовлетворяет уравнению (7.14) почти всюду. При изменении α_i мы получаем все решения уравнения (7.14) (которые находятся из одного любого решения добавлением всех решений соответствующего однородного уравнения). Этим доказывается третья теорема Фредгольма.