А. С. ПАРХОМЕНКО

ЧТО ТАКОЕ ЛИНИЯ

А. С. ПАРХОМЕНКО

ЧТО ТАКОЕ ЛИНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1954

11-5-2

А. С. Пархоменко. Что такое линия.

Редактор *А. Ф. Лапко.*

Техн редактор *Р. А. Негримовская.* Корректор *А. С. Бакулова.*

Сдано в набор 24/IV 1954 г. Подписано к печати 22/VI 1954 г. Бумага 84×108/32.
Физ. печ. л. 4,38. Условн. печ. л. 7,18. Уч.-изд. л. 7,65. Тираж 25 000 экз. Т-04809.
Цена книги 2 руб. 30 коп. Заказ № 1377.

Государственное издательство технико-теоретической литературы
Москва, Б. Калужская, 15

4-я типография им. Евг. Соколовой Союзполиграфпрома Главиздата
Министерства культуры СССР. Ленинград, Измайловский пр., 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В нашей популярной и учебной математической литературе имеется еще мало книг, посвященных основным понятиям математики. Между тем необходимость в такого рода литературе в настоящее время определяется задачей подготовки кадров высоко квалифицированных учителей средней школы. И если учитель не имеет возможности полностью раскрыть школьникам сущность всех основных понятий математики, то сам он должен иметь о них полное и отчетливое представление.

Предлагаемая книга посвящена разъяснению одного из самых основных понятий математики — понятия линии. Кажущееся на первый взгляд очень простым, понятие линии требует для своего общего и полного определения довольно значительных сведений из теории точечных множеств, получившей особенное развитие за последние 50 лет. Именно этим можно объяснить то обстоятельство, что вопрос об определении понятия линии, поставленный еще в древности, нашел свое полное и отчетливое разрешение лишь в 20-х годах текущего столетия. Заслуга решения этого вопроса принадлежит советскому математику П. С. Урысону.

Настоящая книга рассчитана прежде всего на студентов университетов и педагогических институтов, как дополнительный материал к тем общим и специальным курсам, в которых учащихся знакомят с основами теории множеств. Эта книга имеет в виду также учителей средней школы, самостоятельно работающих над повышением уровня своих знаний. Под руководством учителя некоторые разделы книги могут быть использованы в работе школьных математических кружков.

Книга состоит из четырех глав: в первой главе дается краткий очерк развития понятия линии и выясняется вопрос о необходимости теории точечных множеств для общего определения понятия линии.

Вторая глава посвящена изложению необходимых сведений из теории точечных множеств. Наиболее трудными в ней являются теорема 5 § 5 и теоремы 2, 3 § 6. Этот материал при первом чтении можно пропустить и вернуться к нему, когда это станет необходимым для понимания последующего.

В третьей главе рассмотрено определение линии, данное Г. Кантором, до конца исчерпывающее вопрос для случая плоских линий.

Наконец, в четвертой главе дается общее определение линии и выясняются основные свойства линии, вытекающие из определения линии.

Как из общей теории множеств, так и из теории точечных множеств приведены лишь основные определения и факты. Для более полного ознакомления с этими вопросами мы отсылаем читателя к книге П. С. Александрова «Введение в общую теорию множеств и функций», особенно к главам I, VI, VII.

Лицам, которые пожелают глубже познакомиться с понятием линии, мы можем рекомендовать работу самого П. С. Урысона «О канторовых многообразиях», ч. II, Канторовы кривые, помещенную во втором томе собрания сочинений П. С. Урысона, изданного под названием «Труды по топологии и другим областям математики», Москва, 1951 г.

ГЛАВА I

РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ ЛИНИИ

§ 1. Исторический очерк

Линия является одним из основных объектов геометрического исследования. Причина этого лежит прежде всего в том, что понятие линии возникло из практической деятельности человека, связанной с изготовлением чертежей, определением границ земельных участков, изучением траекторий движения тел. Возникнув из практики, понятие линии находит в свою очередь широкое применение для математического описания явлений природы и производственно-технических процессов.

Вот почему с древних времен до наших дней понятие линии привлекало к себе внимание математиков. Ученые стремились точно определить, что такое линия как математическое понятие, т. е. выяснить, что же общего есть у всех тех вещей, которые на практике мы называем линиями?

Эти попытки лишь в недавнее время нашли свое завершение в работах советского математика П. С. Урысона (1898—1924), который в 20-х годах текущего столетия сумел дать наиболее общее определение линии, позволяющее до конца исследовать сущность этого понятия. Но работы П. С. Урысона могли появиться лишь как результат глубокого и критического освоения всего того огромного научного материала, который был накоплен человечеством за весь предшествующий период времени. Поэтому, чтобы понять всю естественность и необходимость современного определения линии, мы должны будем проследить, как развивалось это понятие в связи с общим развитием математики.

Евклид в своих «Началах» определяет линию как *длину без ширины* («Начала», определение 2) или *как границу* *поверхности* (определение 6)[1]). Такие определения, отражая в известной мере свойства линии, не могут, тем не менее, служить для математического изучения понятия линии, так как определяются через другие понятия, которые сами, в свою очередь, нуждаются в определении. Для математического же изучения какого-либо объекта надо, как говорят, задать его аксиоматически, т. е. указать ряд свойств этого объекта, из которых можно было бы логически выводить другие его свойства.

При тогдашнем уровне развития науки и характере требований, предъявляемых к ней практикой, Евклид не мог в сколько-нибудь общей мере справиться с определением понятия линии и, ограничившись вышеприведенными на этот счет общими высказываниями, он в «Началах» останавливает свое внимание на изучении двух простейших и наиболее употребительных линий: прямой и окружности.

Это не значит, конечно, что древние не знали никаких других линий, кроме прямой и окружности. Еще задолго до Евклида была известна такая кривая, как квадратриса Динострата, а сто лет спустя Аполлоний подробно разработал теорию конических сечений: эллипса, гиперболы, параболы (Аполлонию же принадлежат и эти названия линий), — линий, получающихся в сечении плоскостью боковой поверхности конуса с круговым основанием. Механика также приводила к необходимости изучения кривых (спираль Архимеда). Однако все это были лишь отдельные разрозненные факты и не существовало ни сколько-нибудь общего определения линий, ни методов их изучения.

Решительный шаг в этом отношении принадлежит Декарту (1596—1650). Бурный рост торговли и промышленности в эпоху первоначального накопления способствовал быстрому развитию техники, что, в свою очередь, привело к небывалому дотоле развитию естествознания и особенно механики. Это развитие нуждалось в математическом аппарате, который был необходим механике для точного выражения ее законов. Огромная роль в развитии этого математического аппарата принадлежит Декарту.

Идеи Декарта вообще имели огромное влияние на развитие всей математики; его координатный метод, в частности,

---

[1]) «Начала» Евклида, книги I—VI, Гостехиздат, М. — Л. 1948, стр. 11.

впервые позволил определить понятие линии в очень общей для того времени форме. Поэтому мы остановимся на нем несколько подробнее.

Выбрав на плоскости систему координат, мы можем поставить в соответствие каждой точке плоскости пару действительных чисел — координат этой точки. При этом оказывается, что разным точкам соответствуют разные пары чисел, и что каждой паре чисел соответствует вполне определенная точка плоскости, имеющая эти числа своими координатами. Таким образом, устанавливается, как говорят, взаимно однозначное соответствие между множеством точек плоскости, с одной стороны, и множеством пар действительных чисел — с другой. Это соответствие позволяет для каждой линии составить ее уравнение, т. е. найти такую зависимость между координатами ее точек, которая справедлива для всех точек этой линии и не имеет места ни для каких других точек. Так, например, окружность с центром в начале координат и радиусом r имеет уравнение

$$x^2+y^2=r^2;$$

биссектриса угла между осями координат имеет уравнение $x-y=0$, и т. д.

Возможность составить для каждой линии ее уравнение дает нам в руки очень общий и очень сильный метод изучения уже известных линий; но в вопросе об общем определении понятия линии мы не получим ничего нового, пока не «обернем» постановку вопроса следующим образом.

Пусть нам дано одно уравнение с двумя неизвестными, которое, перенеся все его члены в левую часть, мы запишем в виде $F(x, y)=0$, обозначив через $F(x, y)$ выражение (функцию), стоящее в левой части уравнения. Предположим, далее, что это уравнение имеет бесконечное множество действительных решений, т. е. что существует бесконечное множество пар действительных чисел x, y, удовлетворяющих этому уравнению. Будем рассматривать числа x и y как координаты точки относительно некоторой системы координат на плоскости и назовем линией, заданной уравнением $F(x, y)=0$, множество всех тех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Принципиальное значение такой постановки вопроса состоит в том, что теперь мы можем дать общее определение линий, охватывающее все известные до сих пор частные примеры линий, и позволяющее, вообще говоря, построить столько же линий, сколько имеется различных уравнений. Сформулируем еще раз это определение: *линией, заданной уравнением* $F(x, y) = 0$, *называется множество точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.*

Открытие Декарта имело решающее значение для всей математики, потому что, с одной стороны, оно позволило изучать геометрические объекты методами алгебры и анализа, а с другой стороны, — позволило применить терминологию и методы геометрии к алгебре и анализу, что сообщило изучению этих дисциплин большую простоту и наглядность. В этом взаимопроникающем влиянии двух противоположных тенденций в развитии математики — тенденций геометрической и аналитической, сказывается диалектический характер математики. Определение линии, данное Декартом, является для того времени чрезвычайно общим. Оно охватывает все так называемые *алгебраические кривые — линии, уравнения которых являются алгебраическими, т. е. имеют вид* $F(x, y) = 0$, *где* $F(x, y)$ — *многочлен с двумя переменными* x *и* y. Степень многочлена $F(x, y)$ называется *порядком* алгебраической линии. Алгебраические линии первого порядка суть прямые, поскольку всякая прямая на плоскости выражается в декартовых координатах уравнением первой степени вида $Ax + By + C = 0$ и всякое такое уравнение всегда выражает прямую. Алгебраические линии второго порядка — это эллипс, гипербола, парабола (и еще линии, распадающиеся на две прямые), так как всякая такая линия выражается уравнением второй степени и всякое уравнение второй степени, если оно допускает бесконечное множество решений, всегда выражает одну из этих линий [1]). Эти факты составляют содержание аналитической геометрии и в основном были уже известны Декарту. Изучение кривых более высокого порядка составляет предмет алгебраической геометрии.

Однако уже в то время были известны кривые, которые или вовсе нельзя было задать уравнением вида $F(x, y) = 0$,

[1]) Мы ограничиваемся рассмотрением лишь действительных линий и исключаем из рассмотрения случай, когда уравнение не имеет действительных решений.

где функция $F(x, y)$ была бы достаточно простой, т. е. представляла собой комбинацию конечного числа элементарных функций, или же такое задание, хотя и было возможно, но ничего не могло дать для изучения линии. Это прежде всего кривые, являющиеся траекториями движущейся точки. Такова спираль Архимеда — линия, описываемая точкой, равномерно перемещающейся по лучу, который, в свою очередь, вращается с постоянной угловой скоростью около неподвижной точки. Если обозначить через r расстояние движущейся точки от начала координат, а через φ — угол вращающегося луча с положительным направлением оси ox декартовой системы координат, то для спирали Архимеда получим очень простую зависимость r от φ:

$$r = a\varphi,$$

где a — данное число. Если $M(x, y)$ — какая-нибудь точка спирали Архимеда, то

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}.$$

Подставляя эти значения r и φ в равенство $r = a\varphi$, мы получим уравнение спирали Архимеда в декартовых координатах:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - a \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = 0.$$

Однако это уравнение ничего не дает для изучения спирали Архимеда, так как каждому значению x здесь соответствует бесконечное множество значений y и наоборот.

Для изучения линий, являющихся траекториями движущейся точки, наиболее естественным оказывается задание координат точки в зависимости от времени. Это приводит к так называемому параметрическому заданию линий, при котором координаты ее точек выражаются как функции некоторой третьей переменной величины t (обычно времени), называемой параметром:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Так, если точка m движется равномерно со скоростью v по прямой, проходящей через начало координат и образующей с осью ox угол α, то координаты движущейся точки выражаются в зависимости от времени следующими формулами:

$$x = vt\cos\alpha, \quad y = vt\sin\alpha.$$

Эти равенства и являются параметрическими уравнениями прямой.

Если точка m равномерно движется по окружности радиуса r с центром o в начале координат, то координаты движущейся точки выражаются в зависимости от времени функциями

$$x = r\cos\omega t, \quad y = r\sin\omega t,$$

где ω — угловая скорость вращения радиуса om. Это и будут параметрические уравнения окружности.

Параметрические уравнения спирали Архимеда имеют вид:

$$x = vt\cos\omega t, \quad y = vt\sin\omega t,$$

где v — скорость движения точки по вращающемуся лучу, а ω — угловая скорость вращения луча около начала координат.

Задание линии параметрическими уравнениями вполне отвечало всем требованиям, предъявляемым к этому понятию: все известные линии, как алгебраические, так и трансцендентные, могли быть заданы в такой форме; такая форма задания линий наилучшим образом соответствовала основному способу получения линии как траектории движущейся точки.

Определение линии как траектории движущейся точки и параметрический способ задания уже известных линий послужили основой для нового обобщения определения понятия линии: линией стали называть совокупность точек плоскости, координаты которых x и y даны как функции некоторой третьей переменной величины t, которая обычно понималась как время, но могла иметь и другой характер: угол, длина дуги и т. п.

При этом на функции φ и ψ налагались, конечно, некоторые ограничения, которые становились тем более общими, чем более общим делалось само понятие функции. Таким путем, отправляясь от частных примеров, пришли во второй половине XIX века к следующему общему определению линии, сформулированному в наиболее отчетливой форме французским математиком Жорданом: *линией называется* *совокупность точек плоскости, координаты которых суть непрерывные функции*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

параметра t, заданные на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$[1]).

Но вскоре оказалось, что жорданово определение линии является уже черезчур общим: в 1890 г. итальянский математик Пеано показал, что *можно так подобрать функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, заданные на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ и непрерывные на этом отрезке, что совокупность точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$* $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, — *заполняет целый квадрат* (считая внутренние и граничные точки), т. е. какую бы точку $m(x, y)$ на этом квадрате мы ни взяли, всегда найдется такое значение параметра t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, что

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Этот пример целиком ниспровергает определение линии, данное Жорданом, если взять это определение во всей его общности: множество точек, являющееся «линией» в смысле этого определения, заполняет целый кусок плоскости, что никак не согласуется с нашим представлением о линии, сформировавшимся на базе рассмотрения ряда конкретных линий, которые никогда не заполняют целого куска плоскости.

§ 2. «Кривые» Пеано

Чтобы понять, как строится «кривая» Пеано, мы должны показать, *что отрезок T можно непрерывно отобразить на квадрат Q.* Объясним подробнее, что это значит.

---

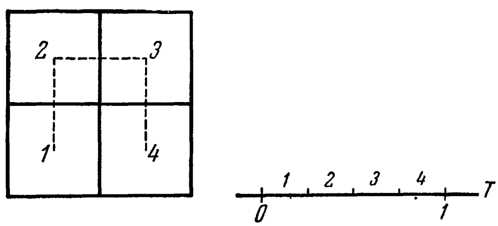
1) Напомним, что функция $f(t)$, заданная на отрезке от 0 до 1, называется непрерывной на этом отрезке, когда она обладает следующим свойством: если достаточно сблизить значения независимого переменного t_1 и t_2, беря их в пределах от 0 до 1, то всегда можно добиться того, что значения функции будут отличаться при этом как угодно мало.

Более точно эту мысль следует выразить так: как бы ни было мало́ наперед заданное положительное число ε, всегда можно найти такое достаточно малое положительное число δ, что если только два значения аргумента t_1 и t_2, взятые на отрезке от 0 до 1, отличаются друг от друга меньше, чем на δ, то соответствующие им значения функции отличаются меньше чем на ε.

Пусть нам дан произвольный отрезок T и произвольный квадрат Q.

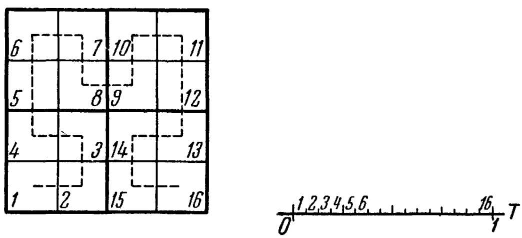
Задача состоит в том, чтобы поставить в соответствие каждой точке отрезка некоторую точку квадрата и притом так, чтобы каждая точка квадрата соответствовала некоторой точке отрезка. Интересующее нас отображение отрезка должно быть, кроме того, и непрерывным, т. е. удовлетворять тому условию, чтобы достаточным сближением точек отрезка можно было добиться того, чтобы соответствующие им точки квадрата были сколь угодно близки.

Вот как строится это отображение. Разобьем отрезок T на четыре равные части и обозначим частичные отрезки в порядке их следования слева направо буквами T_1^1, T_2^1, T_3^1, T_4^1. Точно так же разобьем квадрат Q на четыре равных квадрата и обозначим эти квадраты через Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1, Q_4^1 (черт. 1).



Черт. 1.

Отрезки T_1^1, T_2^1, T_3^1, T_4^1 и соответствующие им квадраты Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1, Q_4^1 будем называть отрезками и квадратами первого ранга. Разобьем, далее, каждый из отрезков T_1^1, T_2^1, T_3^1, T_4^1 снова на четыре равные части и обозначим частичные отрезки, получающиеся разбиением отрезка T_1^1, последовательно через T_1^2, T_2^2, T_3^2, T_4^2; отрезки, на которые разбивается T_2^1, обозначим последовательно через T_5^2, T_6^2, T_7^2, T_8^2; разбиение отрезка T_3^1 обозначим через T_9^2, T_{10}^2, T_{11}^2, T_{12}^2; разбиение отрезка T_4^1 — через T_{13}^2, T_{14}^2, T_{15}^2, T_{16}^2; 16 отрезков T_1^2 — T_{16}^2, получающихся при этом втором разбиении, будем называть отрезками второго ранга. Разобьем, далее, каждый из четырех квадратов Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1, Q_4^1 на четыре равных квадрата. Мы получим 16 квадратов второго ранга. Квадраты, на которые разобьется квадрат Q_1^1, обозначим через Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2, Q_4^2; разбиение квадрата Q_2^1 обозначим через Q_5^2, Q_6^2, Q_7^2, Q_8^2; разбиение Q_3^1 — через Q_9^2, Q_{10}^2, Q_{11}^2, Q_{12}^2 и разбиение Q_4^1 — через Q_{13}^2, Q_{14}^2, Q_{15}^2, Q_{16}^2. При этом мы должны выбирать обозначения так, чтобы квадраты, у которых нижние указатели отличаются на 1, непременно имели по крайней мере одну общую точку. Но так как четыре квадрата, получающиеся разбиением одного квадрата первого ранга, всегда имеют общую точку — центр этого квадрата, то при выборе обозначений надо следить только за тем, чтобы имели общие точки каждые два квадрата Q_4^2 и Q_5^2, Q_8^2 и Q_9^2, Q_{12}^2 и Q_{13}^2, т. е. последний и первый квадраты второго ранга, являющиеся разбиением соседних квадратов первого ранга (черт. 2).

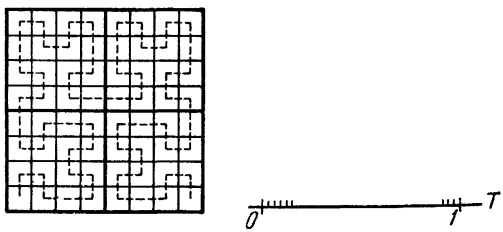


Черт. 2.

Пунктирная линия на чертеже указывает в каком порядке проходятся квадраты, когда отрезки проходятся последовательно слева направо.

Разобьем теперь каждый из отрезков второго ранга на четыре равных отрезка. Мы получим, таким образом, 64 отрезка третьего ранга, которые будем обозначать последовательно (слева направо) через T_1^3, T_2^3, ..., T_{64}^3; точно так же разобьем каждый из 16 квадратов второго ранга на четыре равных квадрата. Мы получим 64 квадрата третьего ранга. Обозначим эти квадраты через Q_1^3, Q_2^3, ..., Q_{64}^3 так, чтобы квадраты Q_1^3, Q_2^3, Q_3^3, Q_4^3 были разбиением квадрата Q_1^2, квадраты Q_5^3, Q_6^3, Q_7^3, Q_8^3 — разбиением квадрата Q_2^2 и т. д.

При обозначении мы должны также следить за тем, чтобы каждые два соседних квадрата третьего ранга (нижние указатели которых отличаются на 1) имели общую точку. Но так как каждые четыре квадрата третьего ранга, являющиеся разбиением одного и того же квадрата второго ранга, всегда имеют общую точку (центр этого квадрата), то надо следить лишь за тем, чтобы каждый квадрат третьего ранга, являющийся последним в разбиении некоторого квадрата второго ранга, имел общую точку с первым квадратом третьего ранга, входящим в разбиение соседнего квадрата второго ранга (черт. 3).



Черт. 3.

Пунктирная линия указывает порядок прохождения квадратов, соответствующий прохождению отрезков слева направо.

Описанный процесс разбиения отрезков и квадратов мы можем продолжать беспредельно; при этом с возрастанием номера ранга разбиения как длины отрезков, так и стороны квадратов будут стремиться к нулю, так как для разбиения ранга n длины отрезков будут равны $\frac{1}{4^n}$, а длины сторон квадрата будут $\frac{1}{2^n}$. Поставим теперь в соответствие каждому отрезку T_k^n ранга n квадрат Q_k^n того же ранга, имеющий тот же номер k, что и данный отрезок. Мы получим тогда для каждого ранга n взаимно однозначное соответствие между отрезками и квадратами разбиения этого ранга. Это соответствие между отрезками и квадратами и позволит построить интересующее нас непрерывное отображение отрезка T на квадрат Q. Пусть t_0 — какая-нибудь точка отрезка. Эта точка принадлежит по крайней мере одному (и не более чем двум) отрезку первого ранга, по крайней мере одному отрезку второго ранга, по крайней мере одному отрезку третьего ранга, и т. д. Возьмем квадраты, соответствующие отрезкам, содержащим точку t_0. Мы получим бесконечную последовательность квадратов. Так как каждый квадрат ранга n содержится в некотором квадрате предыдущего ранга и так как с возрастанием номера ранга n длина стороны стремится к нулю, то все эти квадраты имеют только одну общую точку m_0, которую мы и поставим в соответствие точке t_0. Итак, мы показали, что каждой точке отрезка соответствует одна вполне определенная точка квадрата[1]).

Нам нужно теперь показать, что при таком соответствии каждая точка квадрата соответствует по крайней мере одной точке отрезка. Пусть m_0 — произвольная точка квадрата Q. Она принадлежит по крайней мере одному квадрату Q_i^1 первого ранга, по крайней мере одному квадрату Q_k^2 второго ранга, содержащемуся в квадрате Q_i^1, по крайней мере одному квадрату Q_l^3 третьего ранга, содержащемуся в квадрате Q_k^2, и т. д.

Рассмотрим отрезки, соответствующие этим квадратам. Пусть это будут отрезки T_i^1, T_k^2, T_l^3, и т. д. Каждый из этих отрезков содержится в предыдущем, причем длина отрезка с ростом номера ранга разбиения стремится к нулю. Следовательно, все эти отрезки имеют лишь одну общую точку t_0. Этой точке t_0 отрезка T и соответствует точка m_0 квадрата Q.

Нам остается доказать непрерывность построенного отображения. Но если t_0 — какая-нибудь точка отрезка, то при любом n всякая точка t этого отрезка, достаточно близкая

---

[1]) Однако, одна и та же точка квадрата может соответствовать нескольким различным точкам отрезка, т. е. наше соответствие не является взаимно однозначным. Такими точками квадрата, каждая из которых соответствует нескольким точкам отрезка, являются вершины квадратов разбиений всех рангов: каждая такая вершина соответствует четырем различным точкам отрезка, за исключением центра квадрата Q, который соответствует лишь трем различным точкам отрезка. Тем же свойством — соответствовать нескольким точкам отрезка — обладает каждая точка стороны квадрата разбиения любого ранга, и только те точки, которые являются внутренними для квадратов всех рангов, обладают тем свойством, что каждая из них соответствует лишь одной точке отрезка.

к точке t_0, будет лежать с ней на одном и том же отрезке ранга n или на соседнем отрезке того же ранга. Но тогда и соответствующие точкам t_0 и t отрезка T точки m_0 и m квадрата Q будут принадлежать одному или соседним квадратам того же ранга. Поэтому, если брать точки t достаточно близкими к точке t_0, то соответствующие им точки m можно сделать как угодно близкими к точке m_0, что и доказывает непрерывность отображения.

Полученное нами отображение отрезка на квадрат позволит построить «кривую» Пеано. В самом деле, если за отрезок T взять отрезок числовой оси $0 \leqslant t \leqslant 1$, а за квадрат Q — единичный квадрат плоскости XOY, координаты точек которого определяются неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, то построенное только что отображение отрезка на квадрат порождает две непрерывные функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, которые получаются, если каждому значению t поставить в соответствие координаты той точки m, которая соответствует этому значению t при данном непрерывном отображении.

Непрерывность функций φ и ψ следует из того, что если взять точки t_0 и t отрезка T достаточно близкими, то и соответствующие им точки m_0 и m будут как угодно близки, из чего в свою очередь следует, что как их абсциссы, так и их ординаты будут сколь угодно мало отличаться друг от друга.

Так получается пример «кривой», заданной параметрическими уравнениями, которая «проходит» через все точки квадрата.

Как мы уже говорили в сноске на стр. 15, рассмотренное нами непрерывное отображение отрезка на квадрат не является взаимно однозначным; существует бесконечное множество точек квадрата, каждая из которых соответствует нескольким (двум, трем или четырем) точкам отрезка. Можно было бы показать, что это не зависит от способа, которым осуществляется непрерывное отображение отрезка на квадрат: при всяком таком отображении *всегда найдутся точки квадрата, каждая из которых соответствует нескольким точкам отрезка* [1]).

---

[1]) См., например, Лузин Н. Н., Теория функций действительного переменного, Учпедгиз, Москва, 1940, стр. 205.

§ 3. Простые дуги. Линии, составленные из простых дуг

Назовем простой дугой множество точек плоскости или пространства, на которое можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить прямолинейный отрезок. На плоскости простая дуга всегда может быть задана двумя параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

если за прямолинейный отрезок взять отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$ числовой прямой, а за функции φ и ψ — абсциссу x и ординату y точки m, соответствующей данному значению t. При этом обе функции φ и ψ окажутся непрерывными и будут удовлетворять тому условию, что для двух различных значений t_1 и t_2 имеет место по крайней мере одно из двух неравенств:

$$\text{либо } \varphi(t_1) \neq \varphi(t_2), \text{ либо } \psi(t_1) \neq \psi(t_2)$$

(могут, конечно, выполняться и оба неравенства).

Примером простой дуги может служить дуга любой из известных нам кривых: окружности, эллипса, гиперболы, параболы, синусоиды, спирали Архимеда и т. д.

В пространстве простая дуга задается тремя параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

причем для каждых двух значений t_1 и t_2 параметра имеет место, по крайней мере, одно из трех неравенств:

$$\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2), \quad \psi(t_1) \neq \psi(t_2), \quad \chi(t_1) \neq \chi(t_2).$$

Примером простой дуги в пространстве может служить дуга винтовой линии:

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad z = at,$$

где a и r — постоянные величины, а t — параметр, причем $0 \leqslant t < \infty$.

Приведем еще один пример простой дуги в пространстве, который покажет нам, насколько прихотливо может вести себя эта «простая» линия. С этой целью прибавим к уравнениям

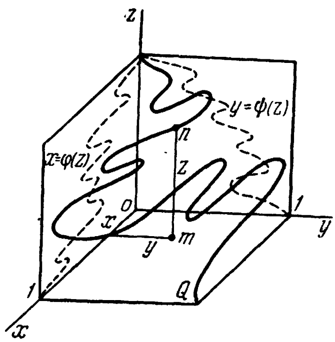
$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

задающим кривую Пеано, третье уравнение

$$z = t.$$

2 Зак. 1377. А. С. Пархоменко

Множество точек пространства, координаты которых удовлетворяют этим уравнениям, есть простая дуга, так как все три координаты точек этого множества непрерывно зависят от t, и разным значениям t всегда соответствуют разные точки множества (они отличаются третьей координатой) (черт. 4).



Черт. 4.

Эта кривая имеет ту особенность, что ее проекция на плоскость xoy есть квадрат. Таким образом, над каждой точкой квадрата находится точка кривой, а над некоторыми точками квадрата даже по нескольку точек (2, 3 и 4). Образно говоря, этот квадратный участок сплошь покрыт крышей, сделанной из проволоки и представляющей собой все же линию, а не поверхность.

Простой замкнутой линией мы будем называть множество точек плоскости или пространства, являющееся взаимно однозначным и непрерывным образом окружности.

На плоскости простая замкнутая линия может быть задана двумя параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$

причем

$$\varphi(0)=\varphi(1),\ \psi(0)=\psi(1),$$

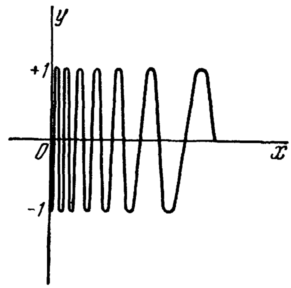
для всяких же двух значений $t_1\neq t_2$, из которых хотя бы одно отлично от 0 и 1, должно иметь место, по крайней мере, одно из двух неравенств

$$\varphi(t_1)\neq\varphi(t_2),\quad \psi(t_1)\neq\psi(t_2).$$

Простая замкнутая линия так же, как и простая дуга, может быть весьма причудливо расположена на плоскости. Она может не иметь касательной ни в одной своей точке; площадь области, ограниченной простой замкнутой линией, может зависеть от того, причислить ли к области ее границу или нет[1]).

Однако простая дуга и простая замкнутая линия являются простейшими среди всех линий, так как они по своим внутренним свойствам устроены так же, как отрезок прямой и окружность; различные же особенности их строения, о которых мы говорили выше, связаны с их расположением на плоскости или в пространстве.

Можно было бы назвать линией любое множество точек, которое можно разбить на конечное число простых дуг, неимеющих попарно никаких других точек, кроме своих концов. Все известные нам линии подходят под это определение. Так, например, окружность можно рассматривать как линию, состоящую из двух простых дуг — ее полуокружностей; лемнискату Бернулли — как линию, состоящую из четырех простых дуг (см. черт. 10). Этим путем получается уже довольно широкий класс линий, содержащий в себе, в частности, все алгебраические кривые. Но существуют линии, которые не могут быть представлены в виде суммы конечного числа простых дуг, не имеющих попарно никаких других точек, кроме своих концов. Такова, например, линия (черт. 5), задаваемая следующим образом: берется график функции



Черт. 5.

$$y = \sin\frac{\pi}{2x}, \quad 0 < x \leqslant 1$$

и к нему присоединяется «предельный отрезок» оси ординат

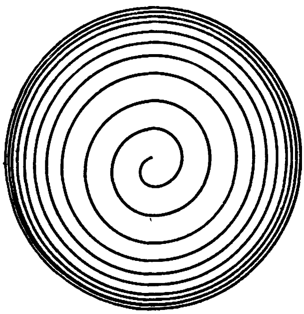
$$x = 0, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1;$$

как мы покажем ниже, эта линия не может быть представлена как соединение конечного числа простых дуг. Мы увидим также, что эта линия не может быть представлена и как непрерывный образ отрезка (т. е. не является линией в смысле Жордана).

---

1) См. Лузин Н. Н. Теория функций действительного переменного, стр. 240.

Мы видим, что *класс линий Жордана, являясь слишком широким, если не накладывать на функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ никаких других ограничений, кроме непрерывности, не охватывает тем не менее всех линий, встречающихся при рассмотрении ряда вопросов механики и физики.* Кроме указанной уже линии сюда относятся, например, линии, состоящие из окружности и навивающейся на нее спирали (черт. 6). Такие линии приходится рассматривать в радиофизике при изучении колебательных процессов, а также при рассмотрении режима устойчивости некоторых автоматических устройств.



Черт. 6.

Таким образом, все рассмотренные нами до сих пор способы определения линии всегда оказывались недостаточными, так как каждый раз находились линии, не подходящие под эти определения.

§ 4. Значение теории точечных множеств в вопросе об определении линии

К концу XIX века в математику все глубже и глубже начинает проникать так называемая теоретико-множественная точка зрения, заключающаяся в том, что всякий математический объект рассматривается как множество тех или иных элементов. При этом само понятие «множество» уже никак не определяется и относится к числу элементарных понятий. Слово «множество» равнозначно словам: «совокупность», «система», «собрание». В частности, геометрическая фигура рассматривается как множество точек, обладающих тем или иным свойством. Так, окружность есть множество (геометрическое место) точек плоскости, находящихся от данной точки на данном расстоянии. Заменяя в геометрических теоремах выражение «геометрическое место» словом «множество», мы на первых порах лучше всего освоимся с этим понятием, являющимся основным для всей современной математики.

Наиболее отчетливо сформулировал теоретико-множественную точку зрения Г. Кантор (1845—1918) в ряде своих работ, относящихся к 70-м и началу 80-х гг. XIX века. Ему принадлежат все основные понятия теории множеств. Теоретико-множественная трактовка вопросов математики вообще была большим прогрессом науки. Она, в частности, позволила Кантору продвинуть далеко вперед вопрос об определении понятия линии. С изучения канторова определения линии мы и начнем более подробное исследование понятия линии. Но прежде чем это сделать, нам придется ввести ряд понятий теории точечных множеств, потому что без этого мы не можем даже сформулировать само определение канторовой линии. Эти понятия понадобятся нам и дальше при изучении общего определения линии, данного П. С. Урысоном. Знать их вообще необходимо каждому, какой бы отраслью современной математики он ни занимался, так как основные понятия теории точечных множеств применяются теперь во всех областях современной математики.

Во всем дальнейшем мы будем по преимуществу говорить о таких свойствах точечных множеств, которые не меняются при так называемых топологических или гомеоморфных отображениях.

Говоря описательно, можно сказать, что топологическое отображение — это такое наложение одного множества на другое, при котором никакие две точки одного множества не сливаются в одну точку другого множества и достаточно близким точкам одного множества соответствуют сколь угодно близкие точки другого. Говоря совсем коротко, топологическое отображение переводит одно множество в другое без склеивания и разрывов.

Точный смысл этих высказываний сводится к тому, что топологическое отображение является взаимно однозначным и взаимно непрерывным.

С топологическим отображением нам уже приходилось иметь дело, когда мы говорили о понятии простой дуги. Теперь мы можем сказать, что простая дуга есть топологический образ прямолинейного отрезка. Приведем несколько примеров различных гомеоморфных и негомеоморфных множеств.

Круг, квадрат, треугольник гомеоморфны между собой. Гомеоморфными будут и такие множества, как боковая поверхность цилиндра и круговое кольцо, т. е. множество точек, заключенных между двумя концентрическими окружностями (включая и сами окружности); гомеоморфны будут вся прямая и интервал (отрезок без концов). Гомеоморфны между собой окружность, эллипс, контур квадрата и т. п. Напротив, такие множества, как отрезок и квадрат или отрезок и окружность, между собой негомеоморфны. Негомеоморфными являются также отрезок и вся прямая.

Можно доказать, что некоторые свойства множеств, такие, как связность, компактность, число измерений (определение которых даны в главе II), сохраняются при гомеоморфных отображениях; другие же, как расстояние между двумя точками, принадлежность точек одной прямой или плоскости, при гомеоморфизме не сохраняются (это можно проследить на вышеприведенных примерах).

Математическая дисциплина, изучающая те свойства множеств, которые сохраняются при всяком гомеоморфном отображении, называется топологией. Эта наука особенно бурно развивалась в первой половине текущего столетия и привела к созданию ряда фундаментальных понятий современной математики и, в частности, понятия линии.

Ведущее место в развитии топологии занимает Советский Союз в лице крупнейших представителей этой науки: П. С. Урысона, П. С. Александрова и Л. С. Понтрягина.

ГЛАВА II

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

§ 1. Основные понятия общей теории множеств

Прежде чем переходить к изучению точечных множеств, напомним самые основные понятия общей теории множеств.

Всякое множество состоит из отдельных элементов. Если x является элементом множества A, то мы будем говорить также, что x принадлежит A и писать

$$x \in A.$$

Два множества A и B считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, а каждый элемент множества B принадлежит множеству A. Если множества A и B равны, то мы будем писать $A = B$.

Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, то A называется подмножеством B. Мы будем говорить, что A содержится в B и писать $A \subset B$; в этом случае мы будем говорить также, что B содержит A и писать $B \supset A$. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

Объединением или суммой двух множеств A и B называется множество S, каждый элемент которого принадлежит, по крайней мере, одному из множеств A или B. То обстоятельство, что множество S есть сумма множеств A и B, мы будем записывать так

$$S = A \cup B.$$

Понятие суммы может быть распространено на любую конечную и даже бесконечную совокупность множеств.

Пересечением двух множеств A и B называется множество P, каждый элемент которого принадлежит как множеству A, так и множеству B. Мы будем говорить также, что множество P есть общая часть множеств A и B и писать

$$P = A \cap B.$$

Понятие пересечения множеств также распространяется на любую (конечную или бесконечную) совокупность множеств.

Разностью двух множеств A и B называется множество D, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B. То обстоятельство, что D получается вычитанием из множества A множества B, мы будем записывать так:

$$D = A \setminus B.$$

При этом не предполагается, что множество B целиком содержится в множестве A. Если $B \subset A$, то

$$D = A \setminus B$$

называется также дополнением к множеству B в множестве A. Множества B и D называются в этом случае взаимно дополнительными.

Иногда ради общности рассуждений приходится чисто формально вводить в рассмотрение множество, не содержащее ни одного элемента, так называемое пустое множество. Мы будем его обозначать символом 0. По определению, пустое множество является подмножеством всякого множества.

Пример. Если A — множество точек отрезка $0 \leqslant x \leqslant 2$, а B — множество точек отрезка $1 \leqslant x \leqslant 3$, то $A \cup B$ есть множество точек отрезка $0 \leqslant x \leqslant 3$; $A \cap B$ — множество точек отрезка $1 \leqslant x \leqslant 2$; $A \setminus B$ — множество точек полуинтервала $0 \leqslant x < 1$.

Операции объединения, пересечения и вычитания множеств обладают рядом свойств, присущих операциям сложения, умножения и вычитания чисел. Однако во многом операции над множествами отличаются от операций над числами. Мы здесь не останавливаемся на изучении свойств операций над множествами, поскольку в этой книге мы будем редко ими пользоваться. Подробное освещение этих вопросов можно найти в специальных книгах по теории множеств[1]).

---

[1]) См., например, Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, М. — Л., 1948 г., гл. 1.

Если нам даны два множества A и B, то мы можем устанавливать соответствие между их элементами, указывая, какой элемент множества B соответствует данному элементу множества A.

То обстоятельство, что элементу x множества A ставится в соответствие элемент y множества B, мы будем обычно записывать в виде

$$y = f(x).$$

Символом f мы обозначаем здесь тот закон, по которому элементам множества A приводятся в соответствие элементы множества B. Понятие о соответствии двух множеств является обобщением обычного понятия функции. Только при определении функции как множество A, которому принадлежат значения аргумента x, так и множество B, состоящее из значений функций y, являются множествами действительных чисел. Так, например, функция

$$y = \operatorname{tg} x,$$

заданная в интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, устанавливает соответствие между множеством чисел, принадлежащих этому интервалу, и множеством всех действительных чисел.

Если каждому элементу множества A соответствует некоторый вполне определенный элемент множества B, то мы говорим, что множество A отображается в множество B. При этом не обязательно, чтобы каждый элемент множества B соответствовал какому-нибудь элементу множества A. *Элемент y множества B, соответствующий элементу x множества A, называется образом элемента x, а элемент x — прообразом элемента y.* Если множество A отображается в множество B, и N — подмножество множества B, M — совокупность всех элементов множества A, образы которых суть элементы множества N, то M называется *полным прообразом* N.

Если каждому элементу множества A соответствует некоторый вполне определенный элемент множества B и каждый элемент множества B соответствует некоторому элементу множества A, то мы говорим, что множество A отображается на множество B. При этом не предполагается, что разным элементам множества A соответствуют разные элементы множества B.

Если каждому элементу множества A соответствует некоторый элемент множества B, каждый элемент множества B соответствует некоторому элементу множества A и разным элементам множества A соответствуют разные элементы множества B, то мы говорим, что множество A отображается взаимно однозначно на множество B. В этом случае каждому элементу множества B соответствует вполне определенный элемент множества A; поэтому мы можем говорить также о взаимно однозначном отображении множества B на множество A. Это отображение множества B на множество A называется *обратным* к исходному отображению множества A на множество B. Таким образом, если множество A отображается взаимно однозначно на множество B, то и множество B отображается взаимно однозначно на множество A. В этом случае говорят также, что между множествами A и B установлено *взаимно однозначное соответствие*.

Итак, при взаимно однозначном соответствии между элементами множеств A и B каждому элементу множества A соответствует некоторый элемент множества B; каждому элементу множества B соответствует элемент множества A; разным элементам множества A соответствуют разные элементы множества B; разным элементам множества B соответствуют разные элементы множества A.

Пример. Если $abcd$ — квадрат, то, проектируя его ортогонально на сторону ab, мы получим отображение квадрата в *прямую* ab. Это же самое проектирование будет и отображением квадрата *на отрезок* ab. При этом отрезок cd отображается на отрезок ab взаимно однозначно.

Множества бывают конечные и бесконечные. Если элементы множества A можно привести во взаимно однозначное соответствие с числами натурального ряда, от 1 до некоторого числа n, то множество A называется конечным. Мы говорим в этом случае, что множество A содержит n элементов. Если такое соответствие установить невозможно, то множество называется бесконечным.

Если элементы множества A можно привести во взаимно однозначное соответствие с множеством всех натуральных чисел $1, 2, \ldots, n, \ldots$, то множество A называется счетным. Число n, которое ставится в соответствие элементу x множества A, мы будем иногда называть номером элемента x, а то обстоятельство, что элементу x поставлено в соответствие натуральное число n, будем записывать в виде x_n; мы будем говорить, что элементы множества A перенумерованы с помощью натуральных чисел, а самое соответствие между множеством A и множеством всех натуральных чисел записывать в виде последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Пример. Множество всех рациональных чисел, заключенных между 0 и 1, счетно. Счетным будет и множество всех рациональных чисел[1]).

Если множество A может быть приведено во взаимно однозначное соответствие с множеством всех действительных чисел, то говорят, что оно имеет мощность континуума. Примерами множеств, имеющих мощность континуума, могут служить: множества всех иррациональных чисел; множество точек прямой; множество точек отрезка от 0 до 1; множество всех точек плоскости; множество всех точек пространства и другие[2]).

§ 2. Замкнутые и открытые множества

Возьмем на плоскости или в пространстве произвольное множество R. Это множество R может, в частности, совпадать со всем пространством, но может и составлять лишь часть пространства. Во всех определениях, которые мы сейчас введем, нас будут интересовать только точки множества R. Об остальных точках пространства, если они не вошли в множество R, мы можем забыть.

Из всех свойств, которыми обладают точки множества R, лежащего на прямой, на плоскости или в пространстве, самым важным для нас является то, что для каждых двух точек x, y множества R можно определить расстояние между ними.

Расстояние между двумя точками x и y мы будем обозначать через $\rho(x, y)$. Из многочисленных же свойств расстояния между точками нам понадобятся только следующие:

---

[1]) См. Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, стр. 29, теорема 8.

[2]) Там же, стр. 63—65 и стр. 159, теорема 26.

1°. Если x и y — две различные точки множества R, то расстояние между ними есть положительное число. Если же точки x и y совпадают, то расстояние между ними равно нулю.

2°. Для всяких двух точек x и y множества R

$$\rho(x, y) = \rho(y, x).$$

3°. Каковы бы ни были три точки x, y, z множества R всегда имеет место следующее неравенство:

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Это неравенство мы будем называть неравенством треугольника. Оно является по существу записью той геометрической теоремы, что во всяком треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.

Замечание. Во всех последующих рассмотрениях в качестве множества можно взять не только множество точек прямой, плоскости или пространства, но вообще любое множество элементов, обладающее тем свойством, что каждой паре элементов x и y множества R соответствует число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее условиям 1°, 2°, 3°. Такое множество называют *метрическим пространством*, его элементы — точками, а число $\rho(x, y)$ — расстоянием между точками x и y.

Примером метрического пространства, отличного от множества точек обыкновенного пространства, может служить n-мерное пространство. Точками его являются упорядоченные системы из n чисел, а расстояние между двумя точками x и y определяется следующим образом: если

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) —$$

две точки n-мерного пространства, то

$$\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

Введенное таким образом расстояние обладает всеми свойствами 1°, 2°, 3°. На доказательстве этого утверждения мы останавливаться не будем[1]). Всякое подмножество n-мерного пространства является метрическим пространством.

На протяжении всего последующего изложения под R можно было бы понимать любое метрическое пространство. Однако, читатель, которому такой подход к делу покажется слишком абстрактным, может рассматривать в качестве R подмножество обычного эвклидова пространства. Никакого влияния на понимание существа дела это иметь не будет.

---

[1]) Это доказательство можно найти, например, в книге Александрова П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, стр. 228.

Основным для всей теории точечных множеств является понятие *предельной точки* множества. Пусть M — множество точек, составляющая часть (подмножество) множества R.

Точка x множества R называется *предельной точкой* множества M, если в любой близости от x в множестве M найдется точка y, отличная от точки x. Слова «в любой близости» надо понимать так: как бы мало ни было положительное число ε, в множестве M найдется точка y, удаленная от точки x менее чем на ε. Точка x может принадлежать множеству M, но может и не принадлежать ему.

Пусть R — прямая линия. Тогда для множества, состоящего из точек

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

предельной точкой будет точка нуль. Для множества A рациональных точек прямой предельной будет всякая точка прямой (как рациональная, так и иррациональная), причем рациональные точки принадлежат множеству A, а иррациональные не принадлежат ему.

Множество F называется *замкнутым*, если всякая точка x, которая является предельной для множества F, принадлежит этому множеству.

Если опять R — прямая линия, то отрезок прямой является замкнутым множеством, так же как и вся прямая, тогда как множество рациональных точек уже не будет замкнутым по отношению ко всей прямой, так как иррациональные точки прямой, будучи предельными для множества рациональных точек, не принадлежат этому множеству.

Если F — замкнутое множество и точка x не принадлежит ему, то, по определению, она не будет и предельной точкой этого множества; это значит, что существует такое число ε, что на расстоянии от точки x, меньшем ε, нет ни одной точки, принадлежащей множеству F.

Отметим два основных свойства замкнутых множеств.

Теорема 1. *Сумма двух замкнутых множеств есть множество замкнутое.*

Действительно, если F_1 и F_2 — замкнутые множества и x — точка, не принадлежащая их объединению, то x не принадлежит ни одному из множеств F_1 и F_2. Так как F_1 и F_2 множества замкнутые, то существует такое число ε_1, что на расстоянии от точки x, меньшем ε_1, нет ни одной точки множества F_1, и такое число ε_2, что на расстоянии от точки x, меньшем ε_2, нет ни одной точки множества F_2. Если предположить, что $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то на расстоянии от точки x, меньшем ε_1, не будет ни одной точки ни множества F_1, ни множества F_2, а тем самым и ни одной точки множества $F_1 \cup F_2$. Таким образом, если точка x не принадлежит множеству $F_1 \cup F_2$, то она не будет и предельной точкой этого множества.

Подобным же образом можно было бы показать, *что сумма любого конечного числа замкнутых множеств есть множество замкнутое.*

Теорема 2. *Пересечение любого множества замкнутых множеств также является замкнутым множеством.*

Действительно, пусть нам дана система замкнутых множеств $\{F_\alpha\}$. Обозначим через F их общую часть. Предположим, что точка x не принадлежит множеству F. Это значит, что она не принадлежит по крайней мере одному из множеств системы $\{F_\alpha\}$. Пусть это будет множество F_{α_0}. Так как оно замкнуто, то существует такое число ε, что на расстоянии от точки x, меньшем ε, нет ни одной точки множества F_{α_0}, а значит, и подавно, ни одной точки множества F. Таким образом, F является замкнутым множеством.

Множество $G \subset R$ называется *открытым*, если его *дополнение*

$$F = R \setminus G$$

есть множество замкнутое. Из теорем 1 и 2 вытекают следующие основные свойства открытых множеств.

Теорема 3. *Пересечение двух (и любого конечного числа) открытых множеств есть множество открытое.*

Теорема 4. *Сумма любого множества открытых множеств есть множество открытое.*

Докажем для примера теорему 3. Пусть G_1 и G_2 — открытые множества и G — их пересечение. По определению открытого множества, множества

$$F_1 = R \setminus G_1$$

и

$$F_2 = R \setminus G_2$$

являются замкнутыми. По теореме 1 замкнутым множеством будет и их сумма

$$F = F_1 \cup F_2.$$

Но множество $G = G_1 \cap G_2$ является дополнением к множеству F. В самом деле, если точка x принадлежит множеству G, то она принадлежит как множеству G_1, так и множеству G_2 и поэтому не принадлежит ни множеству F_1, дополнительному к G_1, ни множеству F_2, дополнительному к G_2, следовательно, точка x принадлежит множеству

$$R \setminus (F_1 \cup F_2) = R \setminus F.$$

Обратно, если

$$x \in R \setminus F = R \setminus (F_1 \cup F_2),$$

то x не принадлежит ни множеству F_1, ни множеству F_2, и, следовательно, точка x принадлежит как множеству G_1, так и множеству G_2, а значит, и множеству G.

Мы показали, таким образом, что множество

$$G = G_1 \cap G_2$$

является дополнением к замкнутому множеству

$$F = F_1 \cup F_2,$$

и так как F — множество замкнутое, то G будет открытым множеством. Аналогично доказывается теорема 4.

Введем одно вспомогательное понятие, которым мы неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть x — произвольная точка множества R и ε — произвольное положительное число. Назовем ε-*окрестностью* точки x совокупность всех точек y множества R, расстояние которых от точки x меньше ε. ε-окрестность точки x мы будем называть иногда также сферической окрестностью и обозначать через $S(x, \varepsilon)$.

Если R означает все пространство, то ε-окрестностью точки x будет совокупность всех внутренних точек шара с центром в точке x и радиусом ε. Если R — плоскость, то ε-окрестность точки x есть внутренность круга с центром в точке x и радиусом ε.

Докажем, что ε-*окрестность точки x есть множество открытое* [1]). Для этого нам нужно показать, что множество $F = R \setminus S(x, \varepsilon)$ есть множество замкнутое. В самом деле, пусть y — произвольная точка сферической окрестности $S(x, \varepsilon)$. Точка y не принадлежит множеству F. Чтобы убедиться в замкнутости F, надо найти такое число δ, что для всякой точки z, удаленной от точки y меньше чем на δ, z не принадлежит F. Достаточно положить

$$\delta = \varepsilon - \rho(x, y).$$

Тогда будем иметь

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) < \rho(x, y) + \delta = \\ = \rho(x, y) + [\varepsilon - \rho(x, y)] = \varepsilon.$$

Таким образом, если точка $y \in S(x, \varepsilon)$, то и всякая точка z, достаточно близкая к y, также принадлежит $S(x, \varepsilon)$. Отсюда следует, что $F = R \setminus S(x, \varepsilon)$ есть множество замкнутое, а $S(x, \varepsilon)$ — множество открытое.

Мы видим, что сферическая окрестность точки есть множество открытое. С другой стороны, *всякое открытое множество может быть представлено как сумма сферических окрестностей его точек*, причем множество слагаемых может быть как конечным, так и бесконечным.

В самом деле, пусть x — произвольная точка открытого множества G; так как множество $F = R \setminus G$ замкнуто, то существует число ε такое, что всякая точка y, удаленная от x менее чем на ε, не принадлежит F и, следовательно, входит в G. Но все такие точки образуют ε-окрестность точки x. Таким образом всякая точка x открытого множества G обладает сферической окрестностью (радиус которой, конечно, зависит от данной точки), содержащейся в множестве G. Множество G и представляется в виде суммы таких окрестностей.

Если R — прямая линия, то ε-окрестностью точки x будет интервал (без концов) длины 2ε, середина которого находится в точке x.

---

[1]) В дальнейшем под окрестностью точки x мы будем иногда понимать любое открытое множество, содержащее точку x, а не только ее сферическую окрестность.

Так как по доказанному всякое открытое множество есть сумма ε-окрестностей его точек, то отсюда следует, что всякое открытое множество на прямой есть сумма конечного или бесконечного множества интервалов. Можно высказать и более точные утверждения, — а именно, что *всякое открытое множество на прямой есть сумма конечного или счетного множества интервалов, не имеющих попарно общих точек. Концы этих интервалов принадлежат замкнутому множеству, дополнительному к данному открытому множеству.*

В самом деле, пусть x — произвольная точка открытого множества G. По предыдущему, существует интервал, содержащий точку x и содержащийся в множестве G. Обозначим через G_x сумму всех тех интервалов, которые содержат точку x и сами содержатся в множестве G. Множество G_x будет наибольшим из интервалов, содержащих точку x и содержащихся в множестве G. Если y — точка множества G, не принадлежащая G_x, то ей соответствует интервал G_y, не имеющий ни одной общей точки с интервалом G_x, так как если бы интервалы G_x и G_y имели общую точку z, то их сумма $G_x \cup G_y$ также была бы интервалом, содержащим точку x, содержащемся в множестве G и большем чем G_x.

Мы видим, что множество G распадается на сумму интервалов, не имеющих попарно общих точек. Множество этих интервалов может быть не более чем счетным. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять в каждом из интервалов какую-нибудь рациональную точку. Так как множество всех рациональных точек счетно, то множество тех из них, которые принадлежат рассматриваемым интервалам, будет или конечным или счетным.

Из замкнутых множеств, лежащих на прямой, в дальнейшем при рассмотрении конкретных примеров нам придется встретиться с так называемым *канторовым совершенным множеством.* Это множество строится следующим образом: из отрезка $[0, 1]$ удаляется интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (средняя треть). Из каждого из оставшихся двух отрезков первого ранга $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ снова удаляется его средняя треть, т. е.

интервалы $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ и $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. В каждом из полученных таким образом четырех отрезков $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right]$, $\left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right]$, $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$ второго ранга снова удаляется его средняя треть, т. е. интервалы $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27}, \frac{21}{27}\right)$, $\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$, и так далее для всякого натурального n.

Множество P, оставшееся после выполнения всех этих операций, проделанных для всех натуральных чисел n, называется *канторовым совершенным множеством.*

Отметим некоторые свойства канторова совершенного множества.

1°. *Множество P замкнуто*, как пересечение убывающей последовательности замкнутых множеств: первое множество этой последовательности состоит из двух отрезков первого ранга; второе из четырех отрезков второго ранга, третье — из восьми отрезков третьего ранга и т. д.

2°. *Множество P не содержит в качестве подмножества никакого отрезка.* Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что какова бы ни была точка x множества P и положительное число ε, найдется точка y, принадлежащая одному из выкинутых интервалов и удаленная от точки x менее чем на ε. Возьмем n столь большим, чтобы было

$$\frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

Так как длина каждого из отрезков n-го ранга $< \frac{1}{3^n}$, то найдется точка y, принадлежащая интервалу n-го ранга и удаленная от x менее чем на ε.

3°. *Созокупность точек канторова совершенного множества, лежащих на отрезке n-го ранга, гомеоморфна канторову совершенному множеству.* В этом можно убедиться, подобно преобразуя отрезок $[0, 1]$ в отрезок n-го ранга с коэффициентом подобия $\frac{1}{3^n}$.

4°. *Канторово совершенное множество имеет мощность континуума.*

Мы не будем останавливаться на доказательстве этого утверждения. Читатель найдет его, например, в книге

П. С. Александрова, Введение в общую теорию множеств и функций, стр. 139.

Из 3° и 4° непосредственно вытекает

5°. *Если x_0 — произвольная точка канторова совершенного множества, то в любой ее окрестности содержится несчетное множество точек канторова совершенного множества P.*

Пользуясь понятием сферической окрестности, докажем одну теорему о замкнутых и открытых множествах, которая нам понадобится в дальнейшем (§ 6, теорема 1).

Теорема 5. *Если A и B — два замкнутых множества без общих точек, то существуют два открытых множества G и H, содержащих соответственно множества A и B и неимеющих общих точек.*

Доказательство. Пусть x — произвольная точка множества A. Так как B — замкнутое множество и точка x не принадлежит множеству B, то точка x не является предельной для множества B. Поэтому найдется положительное число ε_x такое, что для всякой точки y множества B

$$\rho(x, y) > \varepsilon_x.$$

Рассмотрим сферическую окрестность

$$S\left(x, \frac{\varepsilon_x}{2}\right)$$

с центром в точке x и радиусом $\frac{\varepsilon_x}{2}$. Построим такую окрестность для каждой точки x множества A и обозначим через G сумму всех этих окрестностей.

Точно так же для каждой точки y множества B можно найти положительное число ε_y такое, что для каждой точки x множества A

$$\rho(x, y) > \varepsilon_y.$$

Построим для каждой точки y множества B сферическую окрестность

$$S\left(y, \frac{\varepsilon_y}{2}\right)$$

с центром в точке y и радиусом $\frac{\varepsilon_y}{2}$ и обозначим через H сумму всех таких окрестностей.

Множества G и H являются открытыми, так как каждое из них есть сумма сферических окрестностей. Докажем, что множества G и H не имеют общих точек.

Предположим противное, и пусть z — общая точка множества G и H. Так как $z \in G$, то в множестве A найдется точка x такая, что

$$z \in S\left(x, \frac{\varepsilon_x}{2}\right),$$

т. е.

$$\rho(x, z) < \frac{\varepsilon_x}{2};$$

а так как $z \in H$, то в множестве B найдется такая точка y, что

$$z \in S\left(y, \frac{\varepsilon_y}{2}\right),$$

т. е.

$$\rho(y, z) < \frac{\varepsilon_y}{2},$$

но

$$\varepsilon_x < \rho(x, y).$$

Точно так же

$$\varepsilon_y < \rho(y, x) = \rho(x, y).$$

Поэтому

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z) < \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\varepsilon_y}{2} < \frac{1}{2}\rho(x, y) + \frac{1}{2}\rho(x, y) = \rho(x, y),$$

откуда

$$\rho(x, y) < \rho(x, y).$$

Полученное противоречие показывает, что не существует точки z, общей множествам G и H.

Замыканием множества M (содержащегося в множестве R) мы будем называть множество $\overline{M}$, состоящее из точек множества M и точек, предельных для множества M. Из определения замыкания непосредственно следует, что $M \subset \overline{M}$.

Примеры. Если M — множество точек

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

то $\overline{M}$ получается присоединением к множеству M точки 0. Если M — множество рациональных точек прямой R, то $\overline{M}=R$. Если множество M есть интервал (a, b), то его замыканием $\overline{M}$ является отрезок $[a, b]$, получающийся присоединением к интервалу (a, b) его концов a и b.

Теорема 6. *Замыкание $\overline{M}$ произвольного множества M есть множество замкнутое.*

Доказательство. Пусть x — предельная точка множества $\overline{M}$. Мы должны доказать, что $x \in \overline{M}$. Так как x — предельная точка множества $\overline{M}$, то любая ее окрестность $S(x, \varepsilon)$ содержит точку y, принадлежащую $\overline{M}$. Точка y либо принадлежит множеству M, либо является предельной для этого множества. В этом последнем случае любая ее δ-окрестность содержит точку z, принадлежащую множеству M. Если мы возьмем δ настолько малым, чтобы $S(y, \delta) \subset S(x, \varepsilon)$, то точка z будет содержаться в $S(x, \varepsilon)$. Таким образом, в любой окрестности точки x всегда содержится некоторая точка множества M, и, следовательно, точка x, предельная для множества $\overline{M}$, оказывается предельной и для множества M, т. е. $x \in \overline{M}$.

Следующее понятие будет для нас основным, когда мы перейдем к исследованию определения линии, данного Урысоном.

Границей открытого множества G называется множество всех точек, являющихся предельными для G и не принадлежащих G. Границу открытого множества G мы будем обозначать через $\text{Гр}(G)$.

Если, например, G — интервал (a, b) прямой R, то $\text{Гр}(G)$ состоит из двух точек a, b — концов этого интервала.

Граница всякого открытого множества есть множество замкнутое.

В самом деле, по определению, граница открытого множества G есть множество тех точек замыкания $\overline{G}$ этого множества, которые не принадлежат множеству G. Следовательно,

$$\text{Гр}(G)=\overline{G} \setminus G.$$

Но $\overline{G} \setminus G=\overline{G} \cap (R \setminus G)$. Так как каждое из множеств $\overline{G}$ и $R \setminus G$ является замкнутым, то замкнутым будет и их пересечение

$$\overline{G} \cap (R \setminus G) = \overline{G} \setminus G = \mathrm{Гр}\,(G).$$

Этим наше утверждение доказано.

Множество M называется *ограниченным*, если расстояние каждых двух его точек друг от друга меньше одного и того же числа.

Если расстояние каждых двух точек множества M меньше одного и того же числа ε, то мы будем говорить, что множество M имеет диаметр меньший ε, и писать

$$\delta(M) < \varepsilon.$$

Примером ограниченного множества может служить отрезок прямой. Ограниченными множествами будут квадрат, круг, треугольник на плоскости; куб, шар, тетраэдр в пространстве и др. Прямая, плоскость и пространство уже не являются ограниченными множествами.

Замечание. Диаметром ограниченного множества называется верхняя грань[1]) расстояний каждых двух его точек. Диаметром отрезка будет его длина; диаметром квадрата — длина его диагонали; диаметром круга — его диаметр в смысле элементарной геометрии. Для последующего надо отчетливо представлять себе, что значит, что множество M имеет диаметр, меньший данного числа. Самое же определение диаметра в дальнейшем изложении использоваться не будет.

§ 3. Связность

Введем следующее понятие, имеющее важное значение во всей теории точечных множеств и играющее основную роль в определении линии. Мы имеем в виду понятие связности множества.

Множество M называется связным, если при любом разбиении его на два подмножества A и B, $M = A \cup B$, по крайней мере в одном из этих подмножеств найдется точка, являющаяся предельной для другого подмножества. Поэтому, если множество M несвязно, то его можно разбить

---

[1]) Множество M действительных чисел называется ограниченным сверху, если все числа, принадлежащие этому множеству, меньше одного и того же числа L. Наименьшее из чисел, обладающих тем свойством, что всякое число множества M не превосходит этого числа, называется верхней гранью множества M.

на два непустых подмножества A и B, которые не только не имеют общих точек, но и обладают тем свойством, что никакая точка одного из них не является предельной для другого, т. е. существует такое разбиение $M = A \cup B$, для которого

$$(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) = 0.$$

Посмотрим, как выглядит понятие связности в том частном случае, когда множество M совпадает с множеством R, в котором мы ведем все рассмотрения. Если мы предположим, что R несвязно и $R = A \cup B$ — разбиение множества R на два непустых подмножества, из которых ни одно не содержит точек, предельных для другого, то отсюда следует, что оба множества A и B замкнуты в R. Но так как A и B являются дополнительными друг к другу множествами, то отсюда следует, что множества A и B также и открыты в R. Таким образом, все множество R будет связно тогда и только тогда, когда его нельзя представить в виде суммы двух непересекающихся непустых подмножеств, из которых каждое является одновременно замкнутым и открытым в R.

Докажем, что *отрезок прямой есть множество связное*. В самом деле, пусть $[a, b]$ — отрезок числовой прямой. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что множество точек отрезка не является связным, и пусть F_1 и F_2 — два непустых замкнутых множества без общих точек, дающие в сумме отрезок $[a, b]$. Предположим, что точка b принадлежит множеству F_2; тогда множество F_1 будет состоять из точек x отрезка, для которых $x < b$. Обозначим через c верхнюю грань [1]) точек множества F_1. Точка c либо принадлежит множеству F_1, либо является предельной для этого множества; а так как множество F_1 замкнуто, то и в этом случае $c \in F_1$. Если точка c отлична от b, то все точки $x > c$ принадлежат множеству F_2. Следовательно, точка c является предельной для этого множества и потому принадлежит ему. Если точка c совпадает с b, то она принадлежит множеству F_2 по предположению. Таким образом, во всех случаях $c \in F_2$. Итак, мы нашли точку c, общую для множеств F_1, F_2, которые предположили непересекающимися. Полученное противоречие доказывает связность отрезка $[a, b]$.

---

[1]) См. сноску на стр. 38.

Примером несвязного множества может служить множество всех рациональных точек прямой. В самом деле, если мы обозначим через A множество всех рациональных чисел $<\sqrt{2}$, а через B — множество рациональных чисел $>\sqrt{2}$, то ни одна точка множества A не будет предельной для множества B и ни одна точка множества B не будет предельной для множества A.

Множество, состоящее из одной точки, так же, как и пустое множество, считается связным.

Докажем ряд теорем о связных множествах, которые нам неоднократно будут нужны в дальнейшем.

Теорема 1. *Если A и B — два замкнутых или открытых множества в R, не имеющих общих точек; и непустое связное множество M содержится в их сумме*

$$M \subset A \cup B,$$

то множество M непременно содержится в одном из слагаемых этой суммы, т. е. либо $M \subset A$, либо $M \subset B$.

Доказательство. Пусть $M \subset A \cup B$. Тогда $M = (M \cap A) \cup (M \cap B)$. Так как множество A и B или оба одновременно замкнуты в R, или оба одновременно открыты в R и не имеют общих точек, то ни одно из множеств $M \cap A$ и $M \cap B$ не будет содержать точек, предельных для другого. А так как M связно, то одно из этих множеств, например $M \cap B$, должно быть пусто, откуда следует, что $M \subset A$.

Мы часто будем опираться на такое следствие из доказанной теоремы.

Теорема 2. *Если связное множество M имеет общие точки как с открытым множеством G, так и с замкнутым множеством*

$$F = R \setminus G,$$

дополнительным к множеству G, то множество M пересекает границу множества G.

В самом деле, так как

$$\text{Гр}(G) = \overline{G} \setminus G,$$

то все множество R можно представить в виде суммы следующих трех множеств, не имеющих попарно общих точек:

множества G, границы множества G и множества дополнительного к замыканию G

$$R = G \cup \mathrm{Гр}(G) \cup (R \setminus \bar{G}).$$

Если мы предположим, что связное множество M не пересекает границы множества G, то отсюда будет следовать, что M содержится в сумме открытых множеств G и $R \setminus \bar{G}$, не имеющих общих точек, а на основании предыдущей теоремы отсюда, в свою очередь, следует, что M целиком содержится либо в G, либо в $R \setminus \bar{G}$, вопреки условию настоящей теоремы.

Теорема 3. *Если всякие две точки x, y множества R принадлежат некоторому связному множеству C_{xy} (зависящему, конечно, от точек x и y), то множество R связно.*

В самом деле, если бы множество R было несвязно, то его можно было бы представить в виде суммы двух непустых замкнутых множеств F_1 и F_2 без общих точек. Взяв точку x в F_1, а точку y в F_2, мы можем соединить эти точки связным множеством C_{xy}. Так как F_1 и F_2 — замкнутые множества без общих точек, то по теореме 1 множество C_{xy} должно целиком содержаться либо в F_1, либо в F_2. Полученное противоречие показывает, что R связно.

Выше мы показали, что отрезок прямой есть множество связное. Так как всякие две точки прямой можно рассматривать как концы отрезка, лежащего на этой прямой, то на основании предыдущей теоремы отсюда следует, что и вся прямая есть множество связное. Вообще на прямой имеются только следующие связные множества: отрезок $[a, b]$, интервал (a, b), полуинтервал $[a, b)$ или $(a, b]$, вся прямая, полупрямая (бесконечный полуинтервал), луч с выключенной исходной точкой. Доказательство этого утверждения основывается на том, что если две точки принадлежат лежащему на прямой связному множеству, то ему принадлежит и отрезок с концами в этих точках.

Так как всякие две точки плоскости или пространства можно соединить отрезком, то отсюда следует, что плоскость и пространство являются связными множествами. Вообще связным будет всякое выпуклое множество, т. е. такое множество, любые две точки которого можно соединить отрезком, целиком принадлежащим этому множеству. Таковы, в частности, треугольник, квадрат, круг на плоскости, тетраэдр, куб, шар в пространстве.

Теорема 4. *Если два связных множества A и B имеют, по крайней мере, одну общую точку x, то их сумма $S = A \cup B$ есть также связное множество.*

В самом деле, если предположить, что множество S несвязно, то его можно представить в виде суммы двух непустых замкнутых множеств F_1 и F_2 без общих точек

$$S = F_1 \cup F_2.$$

Предположим, что точка x, общая множествам A и B, принадлежит множеству F_1; тогда на основании теоремы 1 как множество A, так и множество B содержатся в F_1 и, следовательно, множество F_2 пусто, т. е. $S = A \cup B$ связно.

Как сама теорема, так и ее доказательство почти дословно обобщаются на случай любого множества слагаемых, а именно имеет место

Теорема 4'. *Какова бы ни была система связных множеств, имеющих по крайней мере одну общую точку x, сумма множеств этой системы есть множество связное.*

Так как каждый отрезок является связным множеством, то и всякая ломаная линия, т. е. последовательность отрезков, в которой каждые два соседних отрезка имеют общий конец, также является связным множеством. Вообще, если мы назовем *цепью множеств* такую конечную последовательность связных множеств, в которой каждые два соседних множества имеют общие точки, то *сумма связных множеств, составляющих цепь, есть также связное множество.*

Теорема 5. *Если к связному множеству C, содержащемуся в R, присоединить любое множество его предельных точек, то получим снова связное множество C_0. В частности, если множество C связно, то будет связным и его замыкание $\overline{C}$.*

В самом деле, пусть множество C_0 получается из связного множества C присоединением к нему некоторого множества его предельных точек. Предположим, что множество C_0 представлено в виде суммы двух непустых замкнутых относительно C_0 множеств F_1 и F_2 без общих точек. Так как множество C связно, то по теореме 1 оно должно целиком содержаться в одном из этих множеств. Пусть, например,

$C \subset F_1$. Если x — какая-нибудь точка множества C_0, то она является предельной для множества C, а значит, и подавно, для множества F_1, содержащего C. Но так как F_1 замкнуто в C_0, то точка x принадлежит множеству F_1. Таким образом всякая точка x множества C_0 принадлежит F_1. Следовательно, множество F_2 пусто и потому C_0 связно.

В дальнейшем весьма существенную роль в нашем изложении будет играть понятие локальной связности.

Множество R называется локально связным, если каждая его точка обладает сколь угодно малой связной окрестностью. Это значит, что какова бы ни была точка x множества R и положительное число ε, существует связное открытое множество V, содержащее точку x, диаметр которого меньше ε; или, что то же самое, каково бы ни было открытое множество U, содержащее точку x, существует связное открытое множество V, содержащее точку x и содержащееся в U.

Прямая, плоскость, пространство являются множествами локально связными, так как всякая сферическая окрестность произвольной точки прямой, плоскости или пространства есть множество связное. Примером множества, не являющегося локально связным, может служить множество точек прямой с координатами

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, 0.$$

Это множество не будет локально связно, так как всякое открытое множество, содержащее точку 0, должно содержать и бесконечное множество точек вида $\frac{1}{n}$ и потому не является связным.

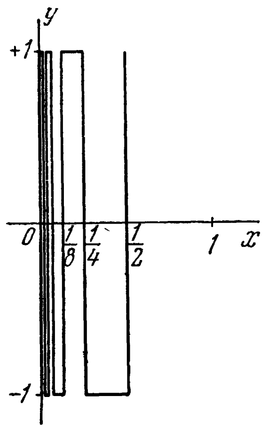
Примером связного множества, не являющегося локально связным, может служить уже упоминавшееся ранее множество, состоящее из точек графика функции

$$y = \sin\frac{1}{x}, \quad 0 < x \leqslant 1,$$

и точек предельного отрезка

$$x = 0, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Вместо этого множества удобнее рассматривать гомеоморфное ему множество (черт. 7), составленное из последовательности чередующихся между собой вертикальных и горизонтальных отрезков:



Черт. 7.

$$A_1: x=\frac{1}{2}, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1;$$
$$B_1: \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \quad y=-1;$$
$$A_2: x=\frac{1}{4}, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1;$$
$$B_2: \frac{1}{8} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}, \quad y=+1;$$
$$A_3: x=\frac{1}{8}, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1;$$
$$B_3: \frac{1}{16} \leqslant x \leqslant \frac{1}{8}, \quad y=-1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n: x=\frac{1}{2^n}, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1;$$
$$B_n: \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad y=-(1)^n;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и предельного отрезка

$$A_0: x=0, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Это множество связно, так как оно представляет собой замыкание связного множества, составленного из отрезков бесконечно-звенной ломаной линии. Однако, оно не будет локально связно ни в одной точке предельного отрезка, так как, если взять достаточно малую окрестность этой точки, то она будет содержать точки бесконечного множества вертикальных отрезков, не имея общих точек со связывающими их горизонтальными отрезками, и, таким образом, эта окрестность не будет связным множеством.

§ 4. Компактность

Очень важным для всей теории точечных множеств является понятие компактности.

Множество R называется компактным, если всякое бесконечное его подмножество M имеет в R предельную точку. Компактное множество мы часто будем называть просто *компактом.*

Докажем, что отрезок прямой является компактным множеством.

В самом деле, пусть M — произвольное бесконечное множество, лежащее на отрезке ab. Разделим отрезок ab пополам точкой c. Тогда по крайней мере один из отрезков ac или cb также будет содержать бесконечное множество точек, принадлежащих множеству M. Деля этот отрезок снова пополам, убеждаемся, что на одном из вновь полученных отрезков будет лежать бесконечное множество точек, принадлежащих множеству M. Рассуждая также и далее, получим убывающую последовательность отрезков

$$T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \ldots \supset T_n \supset \ldots,$$

каждый из которых вдвое короче предыдущего и содержит бесконечное множество точек, принадлежащих множеству M.

По теореме о стягивающихся отрезках [1]) существует единственная точка x_0, принадлежащая всем отрезкам T_n. Точка x_0 является предельной для множества M, так как каков бы ни был интервал, содержащий точку x_0, найдется столь большой номер n, что отрезок T_n, имеющий этот номер, будет целиком содержаться во взятом интервале. Но тогда этот интервал будет содержать бесконечное множество точек, принадлежащих множеству M. Этим доказано, что точка x_0 является предельной для множества M, так как в любой окрестности точки x_0 содержатся отличные от нее точки множества M.

Подобным же образом можно показать, что и *квадрат является компактным множеством.*

В самом деле, пусть Q_0 — квадрат, стороны которого параллельны осям координат, и M — бесконечное множество точек этого квадрата. Разделим квадрат Q_0 на четыре равных квадрата прямыми, параллельными осям координат, и обозначим через Q_1 какой-нибудь из квадратов, содержащих бесконечное множество точек из M. Разобьем, далее, квадрат Q_1 на четыре равных квадрата, обозначим через Q_2 какой-нибудь из квадратов, содержащих бесконечное множество точек, принадлежащих M. Поступая подобным же образом и

---

[1]) Доказательство этой теоремы можно найти в книге П. С. Александрова, Введение в общую теорию множеств и функций, стр. 54.

далее, мы получим убывающую последовательность квадратов

$$Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_n \supset \ldots,$$

каждый из которых содержит бесконечное множество точек, принадлежащих M, причем сторона каждого последующего квадрата вдвое меньше стороны предыдущего.

Если мы спроектируем эти квадраты на оси ox и oy, то на каждой из них получим убывающую последовательность отрезков

$$T_0^x \supset T_1^x \supset T_2^x \supset \ldots \supset T_n^x \supset \ldots$$

и

$$T_0^y \supset T_1^y \supset T_2^y \supset \ldots \supset T_n^y \supset \ldots,$$

длины которых с возрастанием n стремятся к нулю.

Обозначим через x_0 точку, общую всем отрезкам T_n^x, а через y_0 — точку, общую всем отрезкам T_n^y, и рассмотрим на плоскости точку m_0 с координатами x_0 и y_0. Точка m_0 принадлежит всем квадратам Q_n и потому является предельной для множества M, так как, каков бы ни был круг с центром в точке m_0, найдется такой номер n, что квадрат Q_n будет целиком содержаться в этом круге; а так как каждый квадрат Q_n содержит бесконечное множество точек, принадлежащих M, то в круг попадет бесконечное множество точек из M. Этим доказано, что m_0 — предельная точка множества M. Точно так же доказывается, что и куб является компактом. Прямая уже не является компактом, так как если мы возьмем на оси ox множество всех точек $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ с целыми положительными абсциссами, то это бесконечное множество не будет иметь ни одной предельной точки. Не будет компактным и множество рациональных точек отрезка, так как если мы возьмем последовательность рациональных точек, сходящуюся к иррациональному числу, то эта бесконечная последовательность в множестве рациональных чисел предельной точки иметь не будет.

Установим некоторые свойства компактных множеств.

Теорема 1. 1°. *Замкнутое множество F, лежащее в компактном множестве R, само является компактным множеством.*

2°. *Всякое компактное множество F, содержащееся в R, замкнуто в R (при этом само множество R не предполагается компактным).*

Доказательство. 1°. Пусть M — произвольное бесконечное подмножество множества F. Так как $F \subset R$, то и $M \subset R$; а так как R компактно, то лежащее в нем бесконечное множество M имеет предельную точку x, принадлежащую множеству R. Точка x, будучи предельной для множества M, будет и подавно предельной для множества F. Но множество F замкнуто; следовательно, точка x принадлежит F. Таким образом, бесконечное множество M, содержащееся в F, имеет предельную точку x, которая также принадлежит F. Значит, F — компактное множество.

2°. Докажем второе утверждение теоремы. Предположим, что компакт $F \subset R$ не является в R замкнутым множеством, и пусть x — предельная точка множества F, не принадлежащая этому множеству. В множестве F можно найти последовательность точек

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

имеющую точку x своей единственной предельной точкой.

В самом деле, обозначим через x_1 точку множества F, находящуюся от точки x на расстоянии, меньшем 1; через x_2 обозначим ту точку множества F, расстояние которой от точки x меньше каждого из двух чисел

$$\frac{1}{2}, \rho(x, x_1);$$

через x_3 обозначим ту точку множества F, расстояние которой от точки x меньше каждого из чисел

$$\frac{1}{3}, \rho(x, x_2),$$

и т. д.

Точка x будет предельной точкой бесконечной последовательности

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

так как в любой близости от точки x находится бесконечное множество точек нашей последовательности.

Никакая другая точка y не будет предельной для этой последовательности. Действительно, если взять n_0 столь большим, что

$$\frac{1}{n_0} < \frac{1}{2}\rho(x, y),$$

то при любом $n > n_0$ для всех точек нашей последовательности будем иметь

$$\rho(x, x_n) < \frac{1}{n} < \frac{1}{2}\rho(x, y),$$

откуда

$$\rho(y, x_n) \geqslant \frac{1}{2}\rho(x, y)$$

для всех $n > n_0$. Но это означает, что точка y не является предельной точкой последовательности

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

Таким образом, в компакте F мы нашли бесконечое множество $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, не имеющее в этом компакте предельной точки. Полученное противоречие означает, что точка x принадлежит множеству F, т. е., что F замкнуто.

Теорема 2. 1°. *Убывающая последовательность*

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots, \tag{1}$$

замкнутых множеств, лежащих в компакте R, имеет непустое пересечение.

2°. *Если с возрастанием n диаметры множеств F_n стремятся к нулю*[1]), *то пересечение множеств*

$$F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n \cap \ldots$$

состоит из одной точки.

Доказательство. 1°. Без ограничения общности мы можем предположить, что все множества последовательности (1) различны между собой. Отсюда следует, что в множестве F_1 найдется точка x_1, не принадлежащая множеству F_2; в множестве F_2 найдется точка x_2, не принадлежащая F_3; и вообще, в множестве F_n найдется точка x_n, не принадлежащая F_{n+1}. Так как множество R компактно, то бесконечная последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots \tag{2}$$

имеет предельную точку x. Докажем, что точка x принадлежит каждому из множеств последовательности (1). Покажем, например, что $x \in F_n$. Так как

$$F_n \supset F_{n+1} \supset F_{n+2} \supset \ldots,$$

---

[1]) Это значит, что, каково бы ни было положительное число ε, найдется такой номер n_0, что для всех $n > n_0$, $\delta(F_n) < \varepsilon$.

то все точки последовательности (2), начиная с x_n, принадлежат множеству F_n. Так как последовательность

$$x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots \tag{3}$$

отличается от последовательности (2) лишь конечным числом точек, то точка x, будучи предельной для последовательности (2), будет предельной и для последовательности (3). Но все точки этой последней содержатся в F_n, следовательно, точка x является предельной для множества F_n и в силу его замкнутости принадлежит ему. Таким образом, мы нашли точку x, принадлежащую всем множествам последовательности (1). Следовательно, пересечение множеств этой последовательности непусто.

2°. Предположим теперь, что диаметры множеств F_n стремятся к нулю с возрастанием n. Если бы пересечение множеств последовательности (1) содержало две точки x и y, то эти точки принадлежали бы каждому из множеств последовательности (1). Но тогда мы имели бы при всяком n $\delta(F_n) > \rho(x, y)$, т. е. диаметры множеств не стремились бы к нулю с возрастанием n, вопреки условию теоремы. Таким образом, пересечение множеств последовательности (1) состоит из одной точки.

Назовем ε-*сетью* множества R конечное множество точек D, обладающее тем свойством, что для каждой точки x множества R найдется точка d множества D, отстоящая от точки x менее чем на ε.

Докажем, что если R — компакт, то в нем имеется ε-*сеть при любом* ε. Предположим противное, т. е. что существует такое ε, при котором компакт R не имеет ε-сети.

Это значит, что какова бы ни была точка a_1 компакта R, в нем найдется точка a_2, удаленная от точки a_1 на расстояние, большее ε. Так как, по предположению, компакт R не имеет ε-сети, то найдется точка a_3, удаленная как от точки a_1, так и от точки a_2 на расстояние, большее ε. Так как точки a_1, a_2, a_3 не образуют ε-сети компакта R, то в нем найдется точка a_4, удаленная от каждой из точек a_1, a_2, a_3 на расстояние, большее ε. Рассуждая подобным же образом и далее, мы получим бесконечную последовательность точек

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

такую, что расстояние между каждыми двумя точками этой последовательности больше ε. Но такая последовательность не может иметь предельной точки. Таким образом, мы нашли в компакте R бесконечное множество A, не имеющее предельной точки. Это противоречит определению компакта. Следовательно, наше предположение об отсутствии в компакте ε-сети для данного ε оказалось неверным.

Всякое множество R, обладающее (при каком-либо ε) ε-сетью, является ограниченным.

В самом деле, пусть x и y — две произвольные точки множества R. Наличие в R ε-сети означает, что найдутся две точки a и b такие, что

$$\rho(a, x) < \varepsilon, \quad \rho(b, y) < \varepsilon.$$

Обозначим через α наибольшее из расстояний пар точек ε-сети множества R. Тогда

$$\rho(a, b) \leqslant \alpha$$

и, следовательно,

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, a) + \rho(a, b) + \rho(b, y) < \varepsilon + \alpha + \varepsilon = \alpha + 2\varepsilon$$

и, значит, множество R является ограниченным.

Из доказанного утверждения следует, что *компакт есть множество ограниченное.*

Теорема 3. *Для того чтобы множество R, лежащее на прямой, на плоскости или в пространстве*[1]*, было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и ограниченным.*

Необходимость. Так как множество R компактно, то в силу утверждения 2° теоремы 1 R замкнуто во всяком содержащем его множестве, будь то прямая, плоскость или все пространство, а в силу компактности R оно ограничено.

Достаточность. Так как R ограничено, то все его точки принадлежат некоторому отрезку, квадрату или кубу, в зависимости от того, лежит ли множество R на прямой, на плоскости или в пространстве. Множество R, будучи замкнуто относительно прямой, плоскости или пространства, будет тем более замкнуто относительно содержащего его отрезка, квадрата или куба. Но отрезок, квадрат, куб суть компакты.

---

[1]) Или, вообще, в n-мерном евклидовом пространстве.

Следовательно, и множество R, как замкнутое множество компакта само является компактом в силу утверждения 1° теоремы 1.

Множество D называется всюду плотным в множестве R, если всякое открытое в R множество G содержит, по крайней мере, одну точку множества D.

Так как сферическая окрестность точки является открытым множеством, то из этого определения непосредственно следует, что *для того, чтобы множество D было всюду плотно в множестве R, необходимо и достаточно, чтобы каждая точка множества R была предельной для множества D.*

На отрезке плотным будет, например, множество D всех рациональных точек (так же, как и множество всех иррациональных точек).

Теорема 4. *Во всяком компакте R, состоящем из бесконечного множества точек, имеется счетное плотное множество D.*

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим множество

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n \cup \ldots,$$

где D_n есть $\frac{1}{n}$-сеть компакта R.

Каково бы ни было число ε и точка x компакта R, найдется точка $d \in D$, удаленная от точки x менее чем на ε. Достаточно взять точку d, принадлежащую множеству D_n, где $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Таким образом, D плотно в R.

§ 5. Непрерывные отображения

Отображение f множества X в множество Y называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если, каково бы ни было положительное число ε, найдется такое число δ, что, как только

$$\rho(x, x_0) < \delta,$$

то

$$\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Другими словами, отображение f будет непрерывно в точке x_0, если, какова бы ни была ε-окрестность точки

$y_0 = f(x_0)$, найдется δ-окрестность точки x_0, такая, что образ всякой точки, принадлежащей этой δ-окрестности, будет содержаться в ε-окрестности точки y_0.

Если отображение f непрерывно в каждой точке $x \in X$, то оно называется непрерывным отображением множества X в множество Y.

Взаимно однозначное и непрерывное отображение множества X на множество Y называется топологическим отображением, если обратное отображение f^{-1} (множества Y на множество X) непрерывно. Два множества называются гомеоморфными, если одно из них можно топологически отобразить на другое.

Из теорем о непрерывных отображениях отметим следующие.

Теорема 1. *Для того чтобы отображение множества X в множество Y было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы прообраз каждого открытого множества $H \subset Y$ был открытым множеством в X.*

Условие необходимо. Пусть отображение f непрерывно и множество $H \subset Y$ открыто. Возьмем произвольную точку x_0, принадлежащую прообразу множества H. Так как $y_0 = f(x_0)$ содержится в H, то найдется ε-окрестность точки y_0, также целиком содержащаяся в H. В силу непрерывности отображения найдется число δ такое, что образ всякой точки x δ-окрестности точки x_0 будет содержаться в ε-окрестности точки y_0 и, следовательно, принадлежать открытому множеству H. Поэтому δ-окрестность точки x_0 содержится в прообразе множества H и, следовательно, полный прообраз множества H есть сумма сферических окрестностей его точек. Таким образом, полный прообраз множества H есть множество открытое.

Условие достаточно. В самом деле, если условие выполнено, то, в частности, прообраз ε-окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ есть открытое множество G, содержащее точку x_0. Следовательно, найдется такое число δ, что δ-окрестность точки x_0 содержится в множестве G и потому всякая точка δ-окрестности точки x_0 отобразится в точку, принадлежащую ε-окрестности точки y_0, что и доказывает непрерывность отображения f в точке x_0.

Так как прообразы взаимно дополнительных множеств взаимно дополнительны, то из теоремы 1 вытекает

Теорема 1'. *Для того чтобы отображение f множества X в множество Y было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы прообраз каждого замкнутого множества, лежащего* в Y, *был замкнут в* X.

Многие из тех свойств множеств, которые мы рассматривали выше, сохраняются при непрерывных отображениях. Докажем это для наиболее нужных нам свойств связности и компактности.

Теорема 2. *Непрерывный образ Y связного множества X есть множество связное.*

Предположим противное, т. е. что множество Y несвязно. Тогда его можно представить в виде суммы двух замкнутых непустых непересекающихся множеств C и D. В силу теоремы 1' прообразы множеств C и D суть замкнутые в X множества A и B. Множества A и B непусты, так как X отображается *на* Y. Они не пересекаются, так как множества C и D не имеют общих точек. Таким образом, мы получили разбиение связного множества X на два замкнутых непустых множества A и B без общих точек, что невозможно. Отсюда следует невозможность подобного разбиения и для множества Y, т. е. его связность.

Теорема 3. *Непрерывный образ компакта есть компакт.* Пусть дано непрерывное отображение f компакта X на множество Y. Мы должны доказать, что Y есть компакт. Пусть N — бесконечное множество, лежащее в Y. Для каждой точки y множества N возьмем такую точку x, которая является одним из прообразов точки y, и обозначим множество всех таких точек через M. Никакие две точки множества M не отображаются в одну и ту же точку y множества N. Множество M, так же как и множество N, является бесконечным. Так как X — компакт, то существует точка x_0, предельная для множества M. Пусть $y_0 = f(x_0)$; тогда точка y_0 будет предельной для множества N. В самом деле, так как отображение f непрерывно в точке x_0, то каково бы ни было ε, найдется такое δ, что если $\rho(x, x_0) < \delta$, то $\rho(y, y_0) < \varepsilon$. Так как x_0 — предельная точка множества M, то существует бесконечное множество точек x, принадлежащих множеству M и удаленных от x_0 меньше чем на δ. Но тогда их образы y будут принадлежать множеству N и отстоять от y_0 меньше чем на ε. Таким образом, при любом ε можно найти точку, принадлежащую множеству N и удаленную от y_0 менее чем на ε. Но это значит, что y_0 есть предельная точка множества N. Компактность Y, таким образом, доказана.

Следствие. *При непрерывном отображении компакта X на множество Y образ всякого замкнутого (относительно X) множества есть множество замкнутое (относительно Y).*

В самом деле, пусть A — замкнутое множество компакта X и B — образ множества A. По утверждению 1° теоремы 1 § 4 множество A компактно. Следовательно, на основании только что доказанной теоремы будет компактным и множество B. Но в силу утверждения 2° теоремы 1 § 4 множество B будет замкнуто в Y, что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Непрерывный образ локально связного компакта есть также локально связный компакт.*

Доказательство. Пусть X — локально связное компактное множество и Y — непрерывный образ множества X. По теореме 3 множество Y является компактом. Мы должны доказать, что множество Y локально связно.

Пусть y — какая-нибудь точка множества Y и H — произвольное открытое множество, содержащее эту точку. На основании теоремы 1 полный прообраз G открытого относительно Y множества H есть множество, открытое относительно X. Множество G содержит полный прообраз F точки y.

Так как множество X локально связно, то для каждой точки x множества F можно найти такое связное открытое множество $U(x)$, которое содержит x и само содержится в G. Обозначим через S сумму всех таких множеств $U(x)$, а через T — образ множества S.

Обозначим, далее, через A замкнутое множество, дополнительное к множеству S, а через B — образ этого множества. Так как X — компакт, а A — замкнутое множество, то и множество B также является замкнутым (в силу следствия из предыдущей теоремы). Поэтому множество

$$V = Y \setminus B$$

будет открыто в Y.

Докажем, что

$$y \in V \subset T \subset H.$$

Так как F — полный прообраз точки y и

$$F \subset S = X \setminus A,$$

то ни одна точка множества A не имеет своим образом точку y, и потому

$$y \in V = Y \setminus B.$$

Так как образом множества A является множество B, а множество V является дополнительным к B, то никакая точка множества V не является образом ни для какой точки, принадлежащей множеству A. Но множеством, дополнительным к A, является множество S. Следовательно, каждая точка множества V является образом некоторой точки множества S. Таким образом, множество V содержится в множестве T, являющемся образом множества S:

$$V \subset T.$$

Наконец, так как $S \subset G$, то

$$T \subset H.$$

Таким образом, мы показали, что

$$y \in V \subset T \subset H.$$

Покажем теперь, что множество T связно. Множество T можно рассматривать как сумму множеств, каждое из которых есть образ связного открытого множества $U(x)$, где x — точка множества F, образом которого является точка y. Таким образом, все слагаемые, дающие в сумме множество T, суть связные множества, имеющие общую точку y. Поэтому и все множество T является связным.

Обозначим через C_y сумму всех связных множеств, содержащих точку y и содержащихся в открытом множестве H.

Множество C_y будет *наибольшим* связным множеством, содержащим точку y и содержащимся в открытом множестве H. Слово «наибольшее» надо понимать здесь в том смысле, что никакое множество, содержащее C_y и содержащееся в H, уже не является связным.

Докажем, что C_y открыто. В самом деле, мы уже видели, что точка y принадлежит открытому множеству V, содержащемуся в T. Но так как T связно, то

$$T \subset C_y,$$

таким образом,

$$y \in V \subset C_y.$$

Пусть z — произвольная точка множества C_y. Как и выше, для точки z можно было бы найти связное множество T_z и открытое множество W такие, что

$$z \in W \subset T_z.$$

Обозначим через C_z наибольшее связное множество, содержащее точку z и содержащееся в множестве H. Тогда будем иметь

$$z \in W \subset T_z \subset C_z \subset H.$$

Множества C_y и C_z совпадают. В самом деле, если бы, например, множество C_z содержало точки, не принадлежащие C_y, то множество

$$C_y \cup C_z$$

было бы связным множеством, содержащим точку y, содержащимся в множестве H и большим чем C_y. Но это противоречило бы тому, что C_y есть наибольшее связное множество, содержащее точку y и содержащееся в H. Таким образом,

$$C_y = C_z$$

и, следовательно,

$$W \subset C_y.$$

Так как точка z была произвольной точкой множества C_y, то отсюда следует, что всякая точка множества C_y содержится в некотором открытом множестве, которое само, в свою очередь, содержится в C_y. Поэтому C_y можно представить как сумму подобного рода открытых множеств, откуда следует, что C_y есть множество открытое.

Таким образом, для произвольной точки y множества Y и произвольного открытого множества H, содержащего точку y, мы нашли связное открытое множество C_y, такое, что

$$y \in C_y \subset H,$$

что и доказывает локальную связность множества Y.

Мы уже видели, что отрезок прямой есть множество локально связное, тогда как множество, состоящее из точек графика функции

$$\sin\frac{1}{x}, \quad 0 < x < 1,$$

и точек предельного отрезка

$$x = 0, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1,$$

не является локально связным. Следовательно, как мы уже говорили об этом в главе I, это последнее множество не является непрерывным образом отрезка.

Теорема 5. *Всякое взаимно однозначное и в одну сторону непрерывное отображение компакта непрерывно и в другую сторону и, следовательно, является топологическим отображением.*

Пусть f есть взаимно однозначное и непрерывное в одну сторону отображение компакта X на множество Y. В силу теоремы 3 множество Y есть компакт. Требуется доказать, что отображение f^{-1} компакта Y на компакт X, обратное отображению f, непрерывно, т. е. требуется доказать, что прообраз при отображении f^{-1} всякого замкнутого в X множества F является замкнутым в Y множеством. Но прообраз множества F при отображении f^{-1} совпадает с образом множества F при отображении f, который в силу следствия из теоремы 3 замкнут в Y. Теорема доказана.

Мы уже видели, что многие из введенных нами свойств множеств сохраняются при непрерывных отображениях. Таковы связность, компактность, локальная связность компактов. Эти свойства тем более сохраняются при топологических отображениях. Но при топологических отображениях сохраняются и многие другие свойства (которые разрушаются общими непрерывными отображениями). Таковы, например, локальная связность произвольных (а не только компактных) множеств; свойства множества быть замкнутым или открытым в содержащем его большем множестве; свойство множества быть границей открытого множества; свойство множества быть плотным в содержащем его множестве и другие.

Это надо понимать в том смысле, что если множество A обладает каким-нибудь из указанных свойств по отношению к содержащему его множеству X и X отображается топологически на множество Y, то образ B множества A обладает тем же свойством по отношению к Y. Так, например, если A замкнуто в X, то B замкнуто в Y; если A плотно в X, то B плотно в Y.

Изучение свойств множеств, которые сохраняются при топологических отображениях, и составляет содержание топологии.

§ 6. Свойства континуумов

Основным объектом нашего дальнейшего исследования будут континуумы. *Континуумом называется множество, являющееся одновременно связным и компактным.*

Выше мы показали, что отрезок, квадрат, куб являются связными компактными множествами. Следовательно, они суть континуумы. Из теорем 2 и 3 предыдущего параграфа непосредственно следует, что *непрерывный образ континуума есть также континуум.* Таким образом, свойство множества быть континуумом сохраняется при непрерывном отображении. Это свойство позволяет доказать, что континуумами являются такие множества, как окружность, эллипс, лемниската и другие, ибо каждое из них можно получить как непрерывный образ некоторой ломаной линии, состоящей из конечного числа отрезков и потому являющейся континуумом. Вообще континуумами будут все простые дуги и простые замкнутые линии. Мы установим в этом параграфе некоторые свойства континуумов, на которых будет основано в дальнейшем изучение линий. Наиболее важное из них выражает следующая

Теорема 1. *Общая часть C последовательности континуумов*

$$C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset \ldots,$$

из которых каждый последующий содержится в предыдущем, есть также континуум.

Так как множества C_1, C_2, ..., C_n, ... являются компактами и содержатся в C_1, то все они замкнуты относительно C_1. Поэтому их пересечение

$$C = C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n \cap \ldots$$

есть также замкнутое множество. Это множество непусто, как пересечение убывающей последовательности компактов. Таким образом, C есть компакт. Остается доказать его связность.

Доказательство связности множества C основано на следующем утверждении:

Если C есть общая часть убывающей последовательности компактов

$$C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset \ldots \tag{1}$$

и W — открытое множество, содержащее множество C, то в последовательности (1) *найдется такой компакт C_n, который также содержится в открытом множестве W.*

Предположим противное, т. е. что никакой компакт C_n не содержится в W. Тогда мы можем образовать последовательность непустых замкнутых множеств

$$C_1 \setminus W \supset C_2 \setminus W \supset \ldots \supset C_n \setminus W \supset \ldots,$$

из которых каждое следующее содержится в предыдущем. Так как все эти множества компактны, то пересечение их непусто. Оно состоит из тех точек множества C, которые не входят в W. Но так как $C \subset W$, то таких точек нет. Из полученного противоречия мы должны заключить, что существует компакт C_n, целиком содержащийся в W.

Выведем из доказанного утверждения связность множества C. Предположим, что компакт C не связен. Тогда его можно представить в виде суммы двух непустых замкнутых множеств A и B без общих точек. В силу теоремы 5 § 2 существуют открытые множества U и V, содержащие соответственно множества A и B и не имеющие общих точек.

Обозначим через W сумму множеств U и V. Так как

$$A \subset U, \quad B \subset V, \quad C = A \cup B, \quad W = U \cup V,$$

то

$$C \subset W.$$

В силу только что доказанного утверждения существует континуум C_n, целиком содержащийся в W. Так как множество C имеет точки как в множестве U, так и в множестве V, то и множество C_n должно содержать как точки, принадлежащие множеству U, так и точки, принадлежащие множеству V. Таким образом, континуум C_n содержится в сумме двух непересекающихся открытых множеств U и V, имея с каждым из них общие точки. Но это невозможно в силу теоремы 1 § 3. Полученное противоречие показывает, что наше предположение, будто множество C может быть несвязным, является неверным. Таким образом, C связно и наша теорема доказана.

Докажем теперь теорему, которой мы будем постоянно пользоваться при исследовании линии. Эта теорема представляет и самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Если G — связное и локально связное открытое множество компакта R, то всякие две точки a и b множества G могут быть соединены простой дугой, целиком лежащей в множестве G.*

Доказательство. Докажем прежде всего, что, каково бы ни было положительное число ε, точки a и b множества G можно соединить конечной цепочкой связных открытых множеств

$$U_1, U_2, \ldots, U_n \tag{2}$$

диаметра $< \varepsilon$, содержащихся в G и таких, что

$$\left.\begin{array}{l} a \in U_1, \quad b \in U_n, \\ U_i \cap U_{i+1} \neq 0, \quad U_i \cap U_k = 0 \quad \text{при} \quad |i-k| > 1. \end{array}\right\} \tag{3}$$

В самом деле, в силу локальной связности множества G каждая его точка x обладает связной окрестностью $U(x)$ диаметра $< \varepsilon$, целиком содержащейся в G. Докажем, что из этих окрестностей можно составить цепочку, соединяющую точки a и b. Предположим, что этого сделать нельзя.

Обозначим тогда через U совокупность тех точек множества G, которые могут быть соединены с точкой a цепочкой, состоящей из окрестностей $U(x)$.

Покажем прежде всего, что множество U открыто и замкнуто одновременно. Множество U открыто, так как, если точка x принадлежит U, то U содержит и окрестность этой точки, ибо всякую точку y этой окрестности можно соединить с точкой a цепочкой, состоящей из окрестностей, соединяющих точку a с точкой x, и окрестности $U(x)$.

Множество U замкнуто, так как, если x — предельная точка для множества U, $U(x)$ — связная окрестность точки x, то $U(x)$ содержит по крайней мере одну точку y множества U. Точку y можно соединить цепочкой с точкой a. Если мы присоединим к этой цепочке окрестность $U(x)$ точки x, то получим цепочку, соединяющую точки a и x.

Так как множество U открыто и замкнуто, то и его дополнение

$$V = G \setminus U$$

также открыто и замкнуто. Кроме того, множество V не пусто, так как оно содержит точку b. Таким образом, связное множество G распадается в сумму двух непустых открытых множеств U и V без общих точек, что невозможно.

Из полученного противоречия мы должны заключить, что существует конечная последовательность связных открытых множеств

$$U'_1,\ U'_2,\ \ldots,\ U'_s, \tag{4}$$

такая, что

$$a \in U'_1, \quad b \in U'_s, \quad U'_i \cap U'_{i+1} \neq 0.$$

Составим из элементов этой последовательности цепочку, удовлетворяющую всем условиям (3). Обозначим через U_1 элемент последовательности (4), содержащий точку a и имеющий наибольший номер. Через U_2 мы обозначим тот элемент последовательности (4), который пересекает U_1 и имеет в этой последовательности наибольший номер. Через U_3 мы обозначим тот элемент последовательности (4), который пересекает U_2 и имеет в последовательности (4) наибольший номер, и т. д., пока не дойдем до первого из элементов, содержащих точку b, который обозначим через U_n, где $n - 1$ — число прежде отобранных элементов. Мы получим, таким образом, цепочку (2), удовлетворяющую всем требованиям (3).

Применим этот результат к доказательству нашей теоремы. Для этого соединим точки a и b цепочкой связных открытых множеств диаметра < 1. Пусть это будут множества

$$U_1, U_2, \ldots, U_n; \tag{5}$$

тогда

$$\delta(U_i) < 1,$$

$$\left.\begin{array}{l} a \in U_1, \quad b \in U_n, \\ U_i \cap U_{i+1} \neq 0, \quad U_i \cap U_k = 0 \quad \text{при} \quad |i-k| > 1. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Обозначим через c_1 какую-нибудь из точек пересечения множеств U_1 и U_2; через c_2 — какую-нибудь из точек пере сечения множеств U_2 и U_3 и т. д.; наконец, через c_{n-1} какую-нибудь из точек пересечения множеств U_{n-1} и U_n.

Соединим теперь точку a с точкой c_1, точку c_1 с точкой c_2 и т. д., точку c_{n-1} с точкой b цепью связных открытых множеств диаметра $< \frac{1}{2}$. При этом мы предположим еще, что множества, составляющие цепь, соединяющую точку a с точкой c_1, содержатся в множестве U_1 вместе со своими замыканиями. Подобным же образом предположим, что множества цепи, соединяющей точки c_1 и c_2, содержатся в множестве U_2 вместе со своими замыканиями и т. д., наконец, множества цепи, соединяющей c_{n-1} с b, содержатся вместе со своими замыканиями в множестве U_n.

Образуем из этих отдельных цепей одну цепь

$$V_1, V_2, \ldots, V_p, \tag{7}$$

соединяющую точки a и b и удовлетворяющую условиям (3) (выкинув, если нужно, лишние элементы). Обозначим теперь через d_1 какую-нибудь точку пересечения множеств V_1 и V_2; через d_2 — какую-нибудь точку пересечения множеств V_2 и V_3 и т. д.; наконец, через d_{p-1} какую-нибудь точку пересечения множеств V_{p-1} и V_p. Соединим точку a с точкой d_1 цепью открытых множеств диаметра $< \frac{1}{3}$, которые вместе со своими замыканиями содержатся в множестве V_1; точки d_1 и d_2 соединим цепью открытых множеств диаметра $< \frac{1}{3}$, которые вместе с замыканиями содержатся в V_2, и т. д.; наконец, точку d_{p-1} соединим с точкой b цепью связных открытых множеств диаметра $<\frac{1}{3}$, которые вместе со своими замыканиями содержатся в V_p. Из этих отдельных цепей мы снова образуем одну цепь, соединяющую точки a и b.

Поступая подобным же образом, мы получим последовательность цепей, соединяющих точки a и b и состоящих из связных открытых множеств, причем диаметры элементов n-й цепи $< \frac{1}{n}$ и звенья каждой последующей цепи содержатся в соответствующих звеньях предыдущей цепи вместе со своими замыканиями.

Обозначим сумму множеств, составляющих первую цепь, через C_1, сумму звеньев второй цепи через C_2 и т. д.

Каждое из множеств

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$$

является открытым связным множеством. Поэтому их замыкания

$$\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n, \ldots$$

являются континуумами.

Так как звенья каждой следующей цепи содержатся в соответствующих звеньях предыдущей цепи вместе со своими замыканиями, то

$$C_{n+1} \subset \bar{C}_{n+1} \subset C_n \subset \bar{C}_n.$$

Таким образом, множества $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n, \ldots$ образуют последовательность континуумов,

$$\bar{C}_1 \supset \bar{C}_2 \supset \ldots \supset \bar{C}_n \supset \ldots,$$

из которых каждый последующий содержится в предыдущем. На основании теоремы 1 пересечение всех этих континуумов есть также континуум, который мы обозначим через C.

Так как каждый континуум $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots$ содержит точки a и b, то их пересечение C также содержит эти точки. Докажем, что континуум C есть простая дуга, соединяющая точки a и b. Для того чтобы в этом убедиться, мы должны показать, что континуум C можно взаимно однозначно и взаимно непрерывно отобразить на отрезок

$$T = [0, 1].$$

Разобьем отрезок T на n равных отрезков

$$T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_n,$$

которые назовем отрезками первого ранга, и поставим в соответствие каждому звену первой цепи отрезок первого ранга. Разобьем, далее, каждый из отрезков первого ранга на столько равных частей, сколько звеньев второй цепи содержится в соответствующем этому отрезку звене первой цепи. Мы получим, таким образом, цепь из p отрезков второго ранга

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_p.$$

Приведем снова в соответствие звенья второй цепи и отрезки второго ранга. Разбивая каждый из отрезков второго ранга на столько равных частей, сколько звеньев третьей цепи содержится в соответствующем этому отрезку звене второй цепи, мы получим цепь из q отрезков третьего ранга

$$R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_q,$$

и так далее.

Мы имеем, таким образом, две последовательности цепей: цепи первой последовательности состоят из связных открытых множеств компакта R; цепи второй последовательности — из отрезков, получающихся подразделением отрезка $[0,\ 1]$. При этом для каждого натурального числа n имеет место взаимно однозначное соответствие между звеньями n-й цепи открытых множеств и соответствующей ей цепи отрезков.

Пусть x — произвольная точка континуума C. Она принадлежит некоторому открытому множеству U_k первой цепи [1]), некоторому открытому множеству V_l второй цепи, некоторому открытому множеству W_m третьей цепи и т. д. При этом каждое следующее множество содержится в предыдущем вместе со своим замыканием, и с возрастанием номера цепи диаметры этих открытых множеств стремятся к нулю.

Но звену U_k, содержащему точку x первой цепи, соответствует вполне определенный отрезок T_k; звену V_l — отрезок S_l, содержащийся в T_k; звену W_m — отрезок R_m, содержащийся в S_l, и т. д. С возрастанием номера цепи длины этих отрезков стремятся к нулю. Следовательно, все они имеют единственную общую точку y, которую мы и поставим в соответствие взятой точке x континуума C.

[1]) Таких множеств может быть и два, но не более.

Разным точкам x_1 и x_2 континуума C соответствуют разные точки y_1 и y_2 отрезка T. В самом деле, так как с возрастанием номера n диаметры звеньев n-й цепи стремятся к нулю, то найдется такой номер N, что, начиная с этого номера, во всех цепях точки x_1 и x_2 будут принадлежать различным звеньям, не имеющим общих точек. Но тогда и соответствующие этим звеньям отрезки также не будут иметь общих точек и, следовательно, точки y_1 и y_2 отрезка T, соответствующие точкам x_1 и x_2 континуума C, будут различны.

Каждая точка y отрезка T соответствует некоторой точке x континуума C. В самом деле, точка y принадлежит некоторому отрезку T_k первого ранга [1]), некоторому, содержащемуся в нем, отрезку S_l второго ранга, некоторому, содержащемуся в отрезке S_l, отрезку R_m третьего ранга и т. д. Но отрезку T_k соответствует вполне определенное открытое множество U_k первой цепи; отрезку S_l соответствует открытое множество V_l второй цепи, содержащееся в U_k вместе со своим замыканием; отрезку R_m соответствует открытое множество W_m, содержащееся вместе со своим замыканием в V_l, и т. д. Таким образом, последовательности отрезков

$$T_k \supset S_l \supset R_m \supset \ldots$$

можно поставить в соответствие убывающую последовательность замкнутых множеств

$$\overline{U}_k \supset \overline{V}_l \supset \overline{W}_m \supset \ldots$$

При этом с возрастанием номера ранга цепи, длины отрезков и диаметры соответствующих им замкнутых множеств стремятся к нулю.

Обозначим через x единственную общую точку, принадлежащую всем замкнутым множествам

$$\overline{U}_k \supset \overline{V}_l \supset \overline{W}_m \supset \ldots;$$

этой точке x континуума C и соответствует рассматриваемая точка y отрезка T.

---

[1]) Она может принадлежать двум смежным отрезкам первого ранга (будучи их общим концом), но не более чем двум.

Мы показали, таким образом, что континуум C взаимно однозначно отображается на отрезок T. Остается доказать непрерывность этого отображения.

Пусть x_0 — произвольная точка континуума C и ε — произвольное положительное число. Обозначим через y_0 точку отрезка T, соответствующую точке x_0 в построенном отображении континуума C на отрезок T. Возьмем n столь большим, чтобы отрезки[1]) n-го ранга, содержащие точку y_0, целиком заключались в интервале $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Тогда совокупность точек, содержащихся в сумме открытых множеств[2]), которым принадлежит точка x_0, отображается в ε-окрестность точки y_0, чем и доказывается непрерывность рассматриваемого отображения континуума C на отрезок T.

Непрерывность обратного отображения отрезка T на континуум C вытекает (в силу теоремы 5 § 5) из того, что непрерывное отображение континуума C на отрезок T является взаимно однозначным. Таким образом, мы доказали, что континуум C топологически отображается на отрезок $[0, 1]$, при этом точке a соответствует 0, а точке b — 1. Следовательно, континуум C есть простая дуга ab.

Следующая теорема имеет вспомогательный характер. Ее применение во многих случаях значительно облегчает изложение теории линий. Чтение этой теоремы можно отложить до того момента, когда на нее будет опираться доказательство других теорем (гл. IV, § 3). Мы приводим ее в этом параграфе потому, что она выражает свойство, общее всем континуумам, а не только линиям.

Мы будем говорить, что точка x *разбивает* континуум C, если множество $C \setminus x$ несвязно. В противном случае, т. е. если множество $C \setminus x$ связно, мы говорим, что точка x *не разбивает* континуум C.

Теорема 3. *В каждом континууме C имеется по крайней мере две точки, которые его не разбивают.*

Доказательство. Пусть a — произвольная точка континуума C (о которой мы пока не делаем никаких предположений относительно того, разбивает ли она континуум или нет). Покажем, что существует точка b, отличная от точки a и не разбивающая континуум C.

---

1) Их может быть один или два.

2) Таких множеств может быть одно или два.

Пусть A — счетное множество, плотное в континууме C и не содержащее точку a.

Если какая-нибудь точка b, принадлежащая множеству A, не разбивает континуум C, то наше утверждение доказано.

Предположим, что всякая точка множества A разбивает континуум C. Перенумеруем все точки множества A. Тогда мы получим последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{8}$$

Точка a_1, по предположению, разбивает континуум C на два множества, каждое из которых является открытым (относительно C), и имеет своей границей единственную точку a_1. Обозначим через A_1 то из двух открытых множеств, которое не содержит точки a.

Пусть, далее, a_{i_2} [1] — первая точка нашей последовательности (8), которая содержится в A_1. Точка a_{i_2} разбивает континуум C на два открытых множества. Обозначим через A_2 то из них, которое не содержит точку a_1. Граница множества A_2 состоит из точки a_{i_2}. Точно так же пусть a_{i_3} — первая точка нашей последовательности (8), которая содержится в A_2. Она разбивает континуум C на два открытых подмножества. То из них, которое не содержит точку a_{i_2}, мы обозначим через A_3.

Поступая подобным же образом, мы получим последовательность открытых множеств

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \tag{9}$$

и последовательность точек

$$a_1 = a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots \tag{10}$$

Граница каждого из множеств A_n состоит из одной точки a_{i_n}.

Если к множеству A_n присоединить его единственную граничную точку a_{i_n}, то полученное множество

$$\overline{A}_n = A_n \cup a_{i_n}$$

будет континуумом.

В самом деле, множество $\overline{A}_n$ замкнуто и как замкнутое множество компакта C оно является компактным. Остается

[1] $a_{i_1} = a_1$.

показать, что множество $\bar{A}_n$ связно. Предположим противное, и пусть P и Q — два непустых замкнутых множества, без общих точек, дающих в сумме множество $\bar{A}_n$. Предположим, что точка a_{i_n} принадлежит множеству Q. Тогда

$$P \subset A_n.$$

Так как каждое из множеств $C \setminus A_n$ и Q замкнуто, то замкнутым множеством будет и их сумма $(C \setminus A_n) \cup Q$. Мы получаем, таким образом, разложение континуума C в сумму двух непустых замкнутых множеств P и $(C \setminus A_n) \cup Q$ без общих точек, что невозможно. Отсюда мы должны заключить, что множество $\bar{A}_n$ связно.

Множество $\bar{A}_n$, будучи компактным и связным, является континуумом. Рассмотрим последовательность континуумов

$$\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n, \ldots$$

и покажем, что каждый следующий континуум содержится в предыдущем:

$$\bar{A}_{n+1} \subset \bar{A}_n.$$

В самом деле, по предположению, точка a_{i_n} разбивает континуум C на два открытых множества A_n и B_n. Так как множество $\bar{A}_{n+1}$ не содержит точки a_{i_n}, то оно содержится в сумме множеств A_n и B_n. Но, будучи связным, $\bar{A}_{n+1}$ может иметь общие точки лишь с одним из множеств A_n или B_n; так как $a_{i_{n+1}} \in A_n$, то $\bar{A}_{n+1} \subset A_n \subset \bar{A}_n$.

Мы имеем, таким образом, последовательность континуумов

$$\bar{A}_1 \supset \bar{A}_2 \supset \ldots \supset \bar{A}_n \supset \ldots,$$

из которых каждый последующий содержится в предыдущем. По теореме 1 общая часть всех этих континуумов есть также континуум, который мы обозначим через K. В силу включения

$$\bar{A}_{n+1} \subset A_n$$

континуум K можно рассматривать как пересечение открытых множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$

Пусть b — произвольная точка континуума K. Так как ни одна из точек a_{i_m} $(m = 1, 2 \ldots, n)$ не принадлежит континууму $\overline{A}_{n+1}$, то отсюда следует, что точка b не совпадает ни с одной из точек a_{i_n}.

Докажем, что точка b не разбивает континуум C. Предположим противное, т. е. что множество $C \setminus b$ есть сумма двух открытых множеств G и H, не имеющих общих точек.

Так как точка b не совпадает ни с одной из точек a_{i_n} последовательности (10), то каждая из точек этой последовательности принадлежит одному из множеств G или H. Предположим, например, что некоторая точка a_{i_m} последовательности (10) принадлежит множеству H, и докажем, что в этом случае множество $\overline{G} = G \cup b$ целиком содержится в множестве A_m последовательности (9), соответствующем точке a_{i_m}. Заметим прежде всего, что множество

$$\overline{G} = G \cup b$$

является континуумом. Это доказывается совершенно так же, как и то, что континуумом является каждое из множеств

$$\overline{A}_n = A_n \cup a_{i_n}$$

последовательности (9).

Множество $\overline{G}$ не содержит точку a_{i_m} и имеет общую точку b с множеством A_m. Следовательно, $\overline{G}$ целиком содержится в множестве A_m, так как, будучи связным, оно не может иметь общих точек с двумя непересекающимися открытыми множествами A_m и B_m.

Докажем теперь, что множество $\overline{G}$ целиком содержится в каждом из множеств A_n последовательности (10). Для этого нужно показать, что если хотя бы одна из точек a_{i_m} последовательности (10) принадлежит множеству H, то этому множеству принадлежат и все точки последовательности (10).

Предположим, вопреки утверждению, что какая-нибудь точка a_{i_p} последовательности (10) принадлежит множеству G. Тогда, как и выше, докажем, что множество

$$\overline{H} = H \cup b$$

целиком содержится в множестве A_p последовательности (9), соответствующем точке a_{i_p}.

Без ограничения общности можно предположить, что $p > m$. Так как, по доказанному,

$$A_p \subset A_m,$$

то из соотношения

$$\overline{H} \subset A_p$$

следует, что

$$\overline{H} \subset A_m.$$

Таким образом, имеем

$$\overline{G} \subset A_m, \quad \overline{H} \subset A_m,$$

откуда, принимая во внимание, что

$$\overline{G} \cup \overline{H} = C,$$

находим

$$C \subset A_m,$$

что нелепо, так как множество A_m не содержит, например, точку a.

Из полученного противоречия мы должны заключить, что если какая-нибудь точка a_{i_m} последовательности (10) принадлежит множеству H, то этому множеству принадлежат и все точки последовательности (10). Но, как мы показали выше, отсюда следует, что множество $\overline{G}$, а значит, тем более и множество G, содержится в каждом из множеств A_n последовательности (9). В таком случае множество G содержится в континууме K, который является пересечением всех множеств A_n последовательности (9).

Из предположения, что открытое множество G непусто, следует, что существует точка a_k последовательности (8), принадлежащая множеству G, так как множество A, из точек которого мы образовали последовательность (8), всюду плотно в C. Возьмем в последовательности (10) такую точку a_{i_n}, номер которой i_n больше номера k точки a_k. Имеем

$$a_k \in G \subset \overline{G} \subset K \subset A_{n-1},$$

т. е.

$$a_k \in A_{n-1}.$$

Но, по предположению, a_{i_n} есть точка последовательности (8), имеющая наименьший номер и содержащаяся в A_{n-1}, а мы нашли точку a_k последовательности (8), номер которой $k < i_n$, принадлежащую множеству A_{n-1}. Из полученного противоречия мы вынуждены сделать тот вывод, что точка b не разбивает континуум C.

Таким образом, в континууме C мы нашли такую точку b, которая его не разбивает. Чтобы доказать, что существует другая точка, не разбивающая континуум C, надо дословно повторить все приведенное рассуждение, только начать его уже отправляясь не от произвольной точки a, а заменить во всем рассуждении точку a точкой b, о которой заведомо известно, что она не разбивает континуум C. Этим теорема 3 будет доказана.

Примером континуума, имеющего ровно две точки, которые его не разбивают, является отрезок. Неразбивающими точками будут концы отрезка; всякая внутренняя точка отрезка разбивает его на два полуинтервала с общим концом в этой точке.

Примером континуума, который не разбивается ни одной своей точкой, может служить окружность.

ГЛАВА III

КАНТОРОВЫ ЛИНИИ

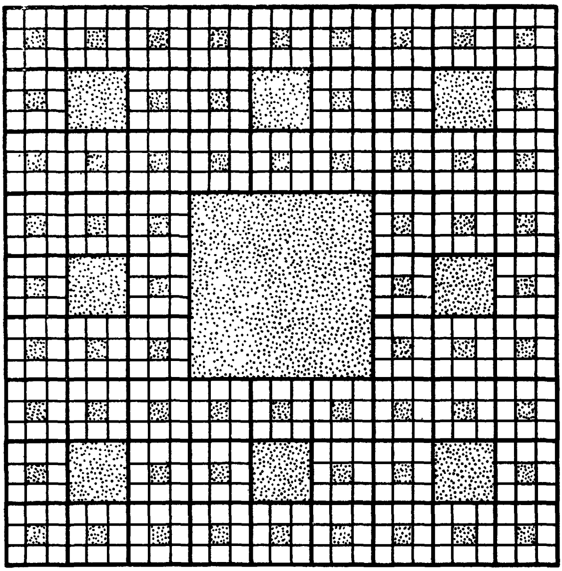
В этой главе мы будем рассматривать множества, лежащие на плоскости, и роль R будет играть у нас плоскость. Поэтому, говоря об открытых и замкнутых множествах, мы будем иметь в виду, что они открыты или замкнуты на плоскости.

Г. Кантор определяет линию (на плоскости) как такой континуум, в любой близости от каждой точки которого есть точки плоскости, не принадлежащие этому континууму. Другими словами, *линией называется континуум C, обладающий следующим свойством: какова бы ни была точка x континуума C и положительное число ε, на плоскости найдется точка y, не принадлежащая континууму C и удаленная от точки x менее чем на ε.* Из этого определения непосредственно следует, что континуум C является канторовой линией тогда и только тогда, когда он не содержит никакого открытого подмножества. Все те плоские линии (прямая, окружность и т. д.), которые мы рассматривали до сих пор, подходят под это определение. Напротив, такие континуумы, как треугольник, круг, квадрат (если иметь в виду их внутренние и граничные точки), уже не являются линиями в смысле определения Кантора, так как каждый из них содержит достаточно малую сферическую окрестность (совокупность внутренних точек круга).

Приведем еще один замечательный пример канторовой линии, построенной известным польским математиком Серпинским и получившей впоследствии название «ковра Серпинского».

Квадрат Q делится на девять равных квадратов и из него удаляются внутренние точки центрального квадрата. Каждый из оставшихся восьми квадратов первого ранга снова делится на девять равных квадратов и в каждом из них удаляются внутренние точки центрального квадрата. Таким образом, мы получаем $8^2 = 64$ квадрата второго ранга. С каждым из них поступаем так же, как и выше, и получаем $8^3 = 512$ квадратов третьего ранга и т. д. для любого натурального числа n (черт. 8).

Оставшееся после выполнения всех этих операций множество S' и есть ковер Серпинского.



Черт. 8.

Это множество является линией в смысле канторова определения. Прежде всего множество S' является континуумом, так как оно представляет собой общую часть последовательности континуумов: первый континуум состоит из восьми квадратов первого ранга, второй из 64 квадратов второго ранга и т. д., причем в этой последовательности каждый следующий континуум содержится в предыдущем [1].

Далее, в любой близости от каждой точки континуума S' найдется точка, не принадлежащая этому континууму.

В самом деле, какова бы ни была точка x континуума S' и положительное число ε, найдется натуральное число n, такое,

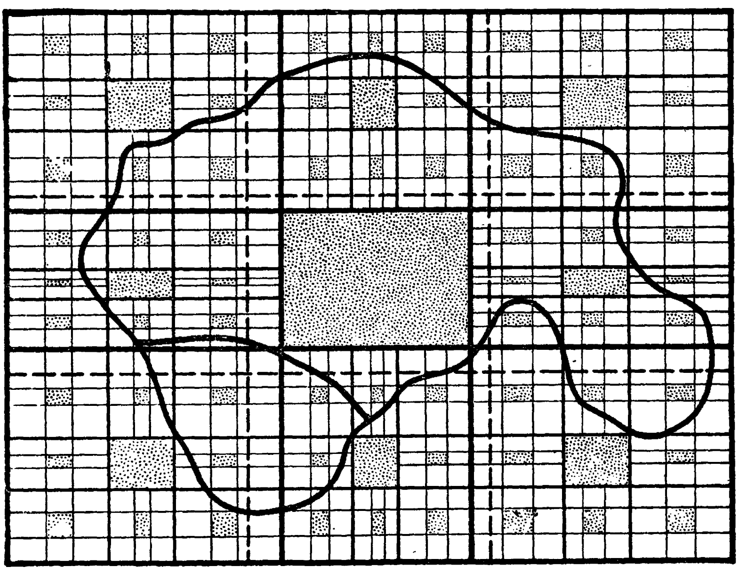
[1] См. гл. II, § 6, теорема 1.

что диагональ квадрата Q^n n-го ранга будет меньше ε. Но тогда в ε-окрестность точки x попадут точки выброшенных квадратов, соседних с Q^n, не принадлежащие континууму S'.

Таким образом, ковер Серпинского — в самом деле канторова линия. Эта линия обладает одним замечательным свойством: содержать в себе любую плоскую линию. А именно, имеет место следующая

Теорема. *Какоза бы ни была канторова линия C, в козре Серпинского всегда найдется подмножество C', гомеоморфное множестзу C.*

Доказательство. Так как множество C — континуум и потому замкнуто и ограничено, то существует прямоугольник R, содержащий континуум C. Разобьем прямоугольник R прямыми, параллельными его сторонам, на девять равных прямоугольников (на черт. 9 эти линии даны пунктиром).



Черт. 9.

Так как C — канторова линия, то она не содержит никакого открытого подмножества и потому не может, в частности, иметь своим подмножеством весь центральный прямоугольник.

Так как C — замкнутое множество, то внутри центрального прямоугольника содержится прямоугольник R_0, стороны которого параллельны сторонам прямоугольника R и который не содержит ни одной точки линии C. Продолжим стороны прямоугольника R_0 до пересечения со сторонами основного прямоугольника R. При этом весь прямоугольник R разобьется на девять прямоугольников. Выбросим из прямоугольника R совокупность всех внутренних точек прямоугольника R_0. Оставшееся множество состоит из восьми прямоугольников, которые мы назовем прямоугольниками первого ранга и обозначим в круговом порядке против часовой стрелки, начиная с левого нижнего прямоугольника, соответственно через R_1^1, R_2^1, R_3^1, ..., R_8^1. Совокупность точек, принадлежащих прямоугольникам первого ранга, обозначим через S^1.

Чтобы получить прямоугольники второго ранга, поступим следующим образом. Разобьем каждый из прямоугольников первого ранга на девять равных прямоугольников. Возьмем прямоугольник R_1^1. Тогда, по предыдущему, внутри центрального прямоугольника, получившегося при разбиении прямоугольника R_1^1, можно найти такой прямоугольник P_{10}^1, внутри которого не содержится ни одной точки линии C. Продолжим его стороны до пересечения со сторонами основного прямоугольника. В центральном прямоугольнике, получившемся при подразделении прямоугольника R_2^1, по тем же соображениям, можно найти такой прямоугольник P_{20}^1, который лежит в полосе, заключенной между продолжениями сторон только что построенного прямоугольника P_{10}^1, и не содержащий ни одной точки линии C. Стороны прямоугольника P_{20}^1 мы снова продолжаем до пересечения со сторонами основного прямоугольника. Точно так же в прямоугольнике R_3^1 мы найдем прямоугольник P_{30}^1, не содержащий ни одной точки линии C и состоящий из точек центрального прямоугольника, образовавшегося при подразделении R_3^1, заключенных в общей части полос, полученных при продолжении сторон прямоугольников P_{10}^1 и P_{20}^1. Подобным же образом получим прямоугольники P_{40}^1, P_{50}^1, P_{60}^1, P_{70}^1, P_{80}^1.

Обозначим через R_{k0}^1 $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ прямоугольник содержащийся в P_{k0}^1 и состоящий из внутренних точек пересечения всех вертикальных и горизонтальных полос, образованных продолжением сторон прямоугольников P и проходящих в R_k^1. Рассмотрим подразделение основного прямоугольника продолжениями сторон прямоугольников R_{k0}^1.

Если из каждого прямоугольника R_k^1 первого ранга выкинуть внутренние точки, принадлежащие прямоугольнику R_{k0}^1, то от каждого прямоугольника первого ранга останется множество, состоящее из восьми прямоугольников, которые мы назовем прямоугольниками второго ранга и обозначим в круговом порядке против часовой стрелки, начиная снова с левого нижнего прямоугольника, через $R_{k1}^2, R_{k2}^2, \ldots, R_{k8}^2$. Совокупность точек, принадлежащих всем 64 прямоугольникам второго ранга, мы обозначим через S_2.

С каждым из прямоугольников R_{kl}^2 ($k, l = 1, 2, \ldots, 8$) второго ранга мы поступим точно так же, как мы перед тем поступили с прямоугольниками первого ранга. Мы получим, таким образом, $8^3 = 512$ прямоугольников R_{klm}^3 ($k, l, m = 1, 2, \ldots, 8$) третьего ранга, совокупность точек которых мы обозначим через S_3.

Поступая подобным же образом и далее, мы получим последовательность континуумов $S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_n \supset \ldots$, каждый из которых содержится в предыдущем. В силу теоремы 1 § 6 главы II пересечение всех этих континуумов есть также континуум, который мы обозначим через S. Линия C целиком содержится в континууме S. Докажем, что континуум S гомеоморфен ковру Серпинского. Пусть x — произвольная точка континуума S. По определению континуума S точка x принадлежит множеству S_1 и, следовательно, некоторому прямоугольнику R_k^1 первого ранга, множеству S_2 и, следовательно, некоторому прямоугольнику R_{kl}^2 второго ранга, содержащемуся в R_k^1, множеству S_3 и, следовательно, некоторому прямоугольнику R_{klm}^3 третьего ранга, содержащемуся в R_{kl}^2. Мы получим, таким образом, убывающую последовательность прямоугольников $R_k^1 \supset R_{kl}^2 \supset R_{klm}^3 \supset \ldots$

Поставим в соответствие прямоугольнику R_k^1 квадрат Q_k^1 первого ранга, участвующий в образовании ковра Серпинского и занимающий по отношению к основному квадрату Q то же положение, какое прямоугольник R_k^1 занимает по отношению к прямоугольнику R (см. черт. 8 и 9). Далее, прямоугольнику R^2_{kl} второго ранга ставим в соответствие квадрат $Q^2_{kl} \subset Q^1_k$ второго ранга, который по отношению к квадрату Q^1_k занимает то же положение, какое прямоугольник R^2_{kl} занимает по отношению к прямоугольнику R^1_k, и т. д.

Таким образом, убывающей последовательности вложенных прямоугольников

$$R^1 \supset R^2 \supset \ldots \supset R^n \supset \ldots$$

ставится в соответствие последовательность вложенных квадратов

$$Q^1 \supset Q^2 \supset \ldots \supset Q^n \supset \ldots$$

Но так как длина стороны квадрата n-го ранга равна $\frac{1}{3^n}$, то (по теореме 2 § 4 гл. II) пересечение квадратов

$$Q^1 \cap Q^2 \cap \ldots \cap Q^n \cap \ldots$$

непусто и состоит из одной точки, которую мы обозначим через x'. Эту точку x' мы и поставим в соответствие точке x континуума S.

Таким образом, мы показали, что каждой точке x континуума S соответствует некоторая точка x' ковра Серпинского S'. Покажем, что разным точкам континуума S соответствуют различные точки континуума S'. Пусть x и y — две точки континуума S. Так как сторона прямоугольника каждого следующего ранга всегда меньше чем $\frac{2}{3}$ соответствующей стороны содержащего его прямоугольника предыдущего ранга, то с возрастанием номера ранга длины сторон прямоугольников, а следовательно, и их диагонали стремятся к нулю. Отсюда следует, что каковы бы ни были две точки x и y континуума S, всегда можно найти настолько большой номер n, что два прямоугольника n-го ранга, содержащие точки x и y, не будут иметь общих точек. Но тогда не будут иметь общих точек и квадраты, соответствующие этим прямоугольникам. Следовательно, точки x' и y', соответствующие точкам x и y, не могут совпадать друг с другом.

Мы показали, что каждой точке континуума S соответствует некоторая точка континуума S' и что разным точкам континуума S соответствуют разные точки континуума S', Совершенно так же можно было бы показать, что каждой точке континуума S' всегда соответствует (и притом только одна) точка континуума S. Таким образом, соответствие, установленное между континуумами S и S', является взаимно однозначным. Остается показать, что это соответствие и взаимно непрерывно.

Пусть x_0 — произвольная точка континуума S, ε — произвольное положительное число, x_0' — образ точки x_0 в построенном выше отображении континуума S на континуум S'. Требуется доказать, что существует такое число δ, что если

$$\rho(x,\ x_0) < \delta,$$

то

$$\rho(x',\ x_0') < \varepsilon,$$

где x' — образ точки x.

Возьмем n столь большим, чтобы квадраты ранга n, содержащие точку x_0', целиком заключались в ε-окрестности этой точки, и примем в качестве δ радиус круга с центром в точке x_0, целиком лежащего в сумме прямоугольников n-го ранга, содержащих точку x_0. Тогда при

$$\rho(x_0,\ x) < \delta,\ \rho(x_0',\ x') < \varepsilon.$$

Аналогично доказывается и непрерывность отображения континуума S' на континуум S. Таким образом, континуумы S и S' гомеоморфны между собой.

Но линия C целиком содержится в континууме S. При гомеоморфном отображении континуума S на ковер Серпинского S' линия C гомеоморфно отображается на некоторое множество C', содержащееся в S'. Наша теорема, таким образом, доказана.

Замечание. Свойство (плоского) множества быть канторовой линией сохраняется при топологическом отображении. Это значит, что *если канторова линия C отображается топологически на плоское множество C', то множество C' также является канторовой линией.* То, что множество C' является континуумом, вытекает из того, что свойства связности и компактности сохраняются не только при топологическом, но даже при непрерывном отображении [1]). Самой трудной частью доказательства является доказательство утверждения, что если плоское множество C не содержит ни-

[1]) См. главу II, § 5, теоремы 2 и 3.

какого открытого подмножества, то и плоское множество C', гомеоморфное множеству C, также не содержит никакого открытого подмножества. Оно вытекает из теоремы о том, что если G — открытое множество на плоскости и H — плоское множество, гомеоморфное множеству G, то множество H также открыто на плоскости. Эту теорему мы здесь доказывать не будем [1]).

Не всякая канторова линия может быть задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Примером такой линии, которую нельзя задать параметрическими уравнениями, является уже неоднократно упоминавшееся множество, состоящее из точек графика функции

$$y = \sin\frac{1}{x}, \quad 0 < x \leqslant 1,$$

и его предельного отрезка

$$x = 0, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Будучи связным и компактным, оно является континуумом. Этот континуум не содержит никакого открытого подмножества и потому есть канторова линия. В предыдущей главе (§ 5) было показано, что эта линия не может быть представлена как непрерывный образ отрезка. Но отсюда следует, что она не может быть задана параметрическими уравнениями. Причина невозможности такого представления заключается в том, что рассматриваемая линия не является локально связным множеством.

Доказано, что *для того, чтобы континуум, в частности канторова линия, был непрерывным образом отрезка, необходимо и достаточно, чтобы он был локально связен.*

Необходимость этого условия непосредственно вытекает из теоремы 4 § 5 предыдущей главы, так как отрезок есть локально связный континуум, а при непрерывном отображении свойство континуума быть локально связным сохраняется.

Мы не будем здесь доказывать достаточности этого условия. Это доказательство можно найти, например, в книге Хаусдорфа «Теория множеств», стр. 186.

[1]) Доказательство ее для случая пространства любого числа измерений можно найти, например, в книге Александрова П. С., Комбинаторная топология, Гостехиздат, М. — Л., 1947, стр. 196.

Свойство локальной связности может быть выражено различными способами. Упомянем без доказательства такую теорему: *для того чтобы континуум C был локально связен, необходимо и достаточно, чтобы при любом* ε *его можно было представить в виде суммы конечного числа континуумов диаметра* $< \varepsilon$ [1]).

Этим свойством, в частности, обладает ковер Серпинского. Мы получим разбиение ковра Серпинского на сколь угодно малые континуумы, если возьмем квадраты достаточно высокого ранга. Часть ковра Серпинского, заключенная в каждом таком квадрате, представляет собой также ковер Серпинского, только построенный для этого квадрата. В виде суммы таких частей (каждая из которых является континуумом) мы и представим ковер Серпинского. Из возможности такого представления вытекает, что ковер Серпинского есть множество локально связное и потому его можно представить как непрерывный образ отрезка и, следовательно, задать параметрическими уравнениями. Таким образом, ковер Серпинского, будучи линией в смысле Кантора, является линией и в смысле Жордана.

Ввиду большой общности определения канторовых линий они могут иметь очень сложное строение. Мы разберем этот вопрос в связи с границами плоских областей.

Как мы знаем еще из элементарной геометрии, окружность делит плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю — и является общей границей этих областей.

Оказывается, что этим свойством *разбивать плоскость на две области обладает не только окружность, но и всякая линия, ей гомеоморфная*. Это утверждение составляет содержание известной теоремы Жордана, которая, несмотря на свою кажущуюся очевидность, доказывается довольно трудно. Лемниската Бернулли разбивает плоскость уже на три области, причем точка s самопересечения этой линии принадлежит границе всех трех областей (черт. 10).

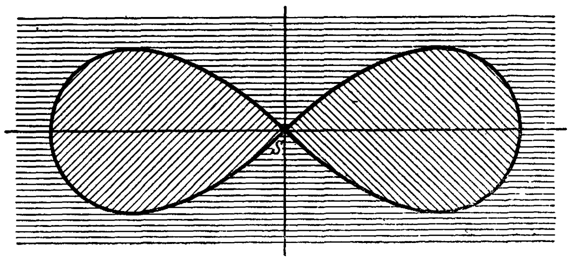
Однако все остальные ее точки являются граничными лишь для двух каких-нибудь областей. На первый взгляд может показаться, что принадлежать границе более чем двух областей могут лишь отдельные точки линии. В самом деле, трудно представить себе, чтобы по какой-нибудь линии на карте

---

[1]) См. Хаусдорф, Теория множеств, ОНТИ, М. — Л., 1937, стр. 184.

граничило сразу три или более государств, и тем не менее существуют такие линии, которые являются границами трех и более областей в том смысле, что в любой близости от каждой точки этой линии есть точки всех областей.

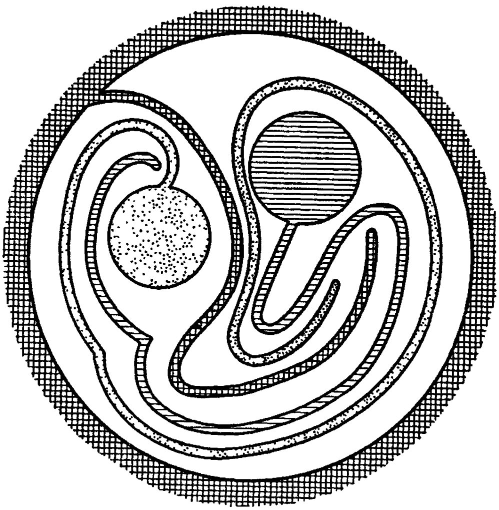
Чтобы понять, как это выполнить, представим себе остров в открытом море и на нем два озера и вообразим себе следующую программу работ. В первый час ведется канал от



Черт. 10.

моря и от каждого из двух озер таким образом, чтобы каждый из этих каналов был «слепым» (т. е. был в действительности заливом соответствующего водоема), чтобы эти каналы нигде не соприкасались между собой и чтобы в результате часовой работы расстояние от каждой точки суши до морской воды, а также до воды каждого из двух озер было меньше 1 *км*. В следующие полчаса каждый из проведенных трех каналов продолжен так, что попрежнему все каналы остаются «слепыми» и не соприкасаются между собой и что расстояние от каждой точки суши до воды каждого из трех водоемов становится меньше чем $^1/_2$ *км*. В следующую затем четверть часа каналы продолжены дальше так, чтобы попрежнему, не сообщаясь между собой, они с такой «плотностью» проникали внутрь острова, чтобы расстояние от каждой точки суши до воды каждого из трех водоемов сделалось меньше $^1/_4$ *км* и т. д. Через два часа такой деятельности от острова останется лишь такой континуум C, в любой близости от каждой точки которого будет находиться вода каждого из трех водоемов, причем все эти водоемы (море и два озера) попрежнему будут оставаться разобщенными: воды никаких двух из них не будут смешиваться. Эти водоемы (продолженные проведенными из них каналами) и являются теми тремя областями, общую границу которых образует континуум C; одна из этих областей («море») не ограничена, остальные две ограничены (черт. 11)[1]).

Мы потому так подробно остановились на канторовых линиях, что если ограничиться только плоскими линиями, то канторово определение с полной общностью выражало бы то, что в нашей математической практике связано с понятием линии. Но мы хотим дать общее определение линии, охватывающее не только плоские, но и пространственные линии[2]).



Черт. 11.

Простое перенесение канторова определения линии на пространство невозможно, так как в пространстве континуумом, не содержащим никакого открытого множества, является, например, квадрат. Значит, мы снова становимся перед необходимостью ответить на вопрос: что такое линия? Мы переходим к определению понятия линии, данному Урысоном.

[1]) Этот пример принадлежит голландскому математику Брауэру. Настоящее изложение заимствовано мною из книги Александрова П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, стр. 266—267.

[2]) И даже линии, лежащие в пространстве более высокого числа измерений.

ГЛАВА IV

ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИИ

§ 1. Определение линии. Основные свойства

Посмотрим, какими общими свойствами обладают те множества, которые мы называем линиями?

Прежде всего эти множества являются связными, т. е., говоря не совсем точно, они как бы состоят из одного куска и не распадаются на отдельные части.

Далее, очень многие из рассматриваемых нами линий являются замкнутыми и ограниченными множествами и, следовательно, суть множества компактные [1]). Таковы отрезок прямой, окружность, эллипс, лемниската Бернулли и др.

В дальнейшем мы в качестве линии будем рассматривать только такие связные множества, которые являются компактами, т. е. континуумы [2]).

Но такие множества, как квадрат, куб, также являются континуумами. Почему же мы их не называем линиями? Потому что они имеют два и три измерения. Линиями же являются лишь такие континуумы, которые имеют «одно измерение». Но что значит выражение: «имеют одно измерение»?

---

[1]) См. главу II, § 4, теорема 3.

[2]) Правда, многие геометрические объекты, которые носят названия линий, не обладают указанными выше свойствами компактности и связности. Такова прежде всего *прямая линия*, не обладающая свойством компактности. Далее, гипербола уже и не компактна и не связна. Однако мы ограничиваемся здесь рассмотрением лишь таких линий, которые являются континуумами, так как этот случай оказывается наиболее важным и к нему по существу приводится рассмотрение даже и таких геометрических объектов, не являющихся континуумами, которые в математической практике получили название линий.

Мы не будем здесь останавливаться на вопросе о том, что называется числом измерений или, как еще говорят, размерностью произвольных множеств, и дадим лишь точное определение континуума, имеющего одно измерение, или, что то же самое, размерность 1.

Мы говорим, что *континуум C имеет в точке x размерность* 1, *если существует сколь угодно малая окрестность точки x, граница которой не содержит никакого континуума, состоящего более чем из одной точки. Другими словами, континуум C имеет в точке x размерность* 1, *если при всяком $\varepsilon > 0$ существует открытое множество, содержащее точку x диаметра $< \varepsilon$, граница которого не содержит никакого континуума, состоящего более чем из одной точки.*

Мы говорим, что *континуум C имеет размерность* 1, *если он будет размерности* 1 *в каждой своей точке.*

Теперь мы можем сказать, что *линией называется континуум размерности* 1, *т. е. такой континуум, что каждая его точка обладает сколь угодно малой окрестностью, граница которой не содержит никакого континуума, состоящего более чем из одной точки.* В этом и состоит определение линии, данное Урысоном.

Простейшим примером одномерного континуума, т. е. линии в смысле Урысона, является отрезок. В самом деле, какова бы ни была ε-окрестность произвольной точки отрезка, она является открытым множеством, граница которого состоит из двух точек, если x — внутренняя точка отрезка, и из одной точки, если x — концевая точка отрезка.

Совершенно так же убедимся, что и окружность имеет в каждой своей точке размерность 1, т. е. является линией в смысле Урысона. Достаточно опять взять ε-окрестность произвольной точки окружности. Это будет дуга (без концов), середина которой есть точка x. Она является открытым множеством, граница которого состоит из двух точек (концов дуги).

Вообще, *всякая линия в смысле Кантора является линией в смысле Урысона.*

Прежде чем переходить к доказательству этого утверждения, отметим два факта, которые будут нам полезны как при доказательстве вышеприведенного утверждения, так и в ряде других случаев.

Теорема 1. *Если континуум K является подмножеством линии C (в смысле Урысона), то он сам является линией.*

В самом деле, пусть x — произвольная точка континуума K и ε — произвольное положительное число. Так как C — линия, то существует открытое (относительно C) множество G диаметра $< \varepsilon$, содержащее точку x, граница которого не содержит никакого континуума. Обозначим через U совокупность тех точек открытого множества G, которые принадлежат континууму K. Множество U открыто относительно K. Оно содержит точку x; диаметр его $< \varepsilon$, а его граница (взятая относительно K) не содержит никакого континуума, так как она является подмножеством границы открытого множества G, следовательно, K есть линия.

Теорема 2. *Топологический образ линии также является линией.*

В самом деле, пусть X — одномерный континуум и f — топологическое отображение множества X на множество Y. Мы должны доказать, что Y есть также одномерный континуум.

То, что Y — континуум, следует из того, что как связность, так и компактность сохраняются при всяком непрерывном отображении и, следовательно, при топологическом отображении. Таким образом, Y является континуумом. Остается доказать, что этот континуум будет одномерным.

Пусть y_0 — произвольная точка континуума Y и ε — произвольное положительное число. Обозначим через x_0 прообраз точки y_0, а через δ — такое положительное число, что если

$$\rho(x_0, x) < \delta \quad \text{и} \quad y = f(x),$$

то

$$\rho(y_0, y) < \varepsilon.$$

Так как X — линия, то можно найти такое открытое множество U, содержащее точку x_0 и содержащееся в δ-окрестности этой точки, что граница множества U не содержит никакого континуума, состоящего более чем из одной точки. Обозначим через V образ множества U. Множество V является открытым (относительно Y), содержит точку y_0 и содержится в ε-окрестности y_0.

Докажем, что граница множества V не содержит никакого континуума, состоящего более чем из одной точки. Так как открытое множество V является образом открытого множества U при топологическом отображении f, то и граница множества V будет образом границы множества U. Если бы граница множества V содержала какой-нибудь континуум K, состоящий более чем из одной точки, то при непрерывном отображении f^{-1}, обратном к отображению f, образом этого континуума был бы континуум C, также состоящий более чем из одной точки и содержащийся в границе открытого множества U, что противоречит определению множества U. Отсюда мы должны заключить, что граница открытого множества V не содержит никакого континуума, состоящего более чем из одной точки.

Мы показали, таким образом, что любая точка y_0 континуума Y обладает сколь угодно малой окрестностью V, граница которой не содержит никакого континуума, состоящего более чем из одной точки. Этим доказано, что континуум Y есть линия.

После этих предварительных рассмотрений перейдем к доказательству высказанного выше утверждения о том, что всякая линия в смысле Кантора является линией в смысле Урысона.

В самом деле, как мы видели в гл. III, всякая канторова линия C гомеоморфна подмножеству C' ковра Серпинского S. Так как C — континуум, то континуумом будет и множество C'. Если мы докажем, что ковер Серпинского S есть линия в смысле Урысона, то отсюда будет следовать на основании теоремы 1, что и континуум C' является линией в смысле Урысона. Но тогда в силу теоремы 2 линией (в смысле Урысона) будет и континуум C. Таким образом, нам нужно доказать, что

ковер Серпинского есть линия (*в смысле Урысона*).

Мы уже видели в предыдущей главе, что ковер Серпинского S является континуумом. Нам нужно доказать, что какова бы ни была точка m_0 континуума S, существует сколь угодно малое открытое множество, содержащее точку m_0, граница которого не содержит никакого континуума, состоящего более чем из одной точки.

Обозначим через x_0 и y_0 прямоугольные координаты точки m_0 в системе координат, оси которой идут по сторонам квадрата Q, из которого получается ковер Серпинского S. Длины сторон квадрата мы предположим равными 1.

Пусть ε — произвольное положительное число и α — такое положительное число, что $\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$, причем ни одно из чисел $x_0 - \alpha$, $x_0 + \alpha$, $y_0 - \alpha$, $y_0 + \alpha$ не разлагается в конечную троичную дробь [1]). Четыре прямые

$$x = x_0 - \alpha, \quad x = x_0 + \alpha,$$
$$y = y_0 - \alpha, \quad y = y_0 + \alpha$$

образуют квадрат, совокупность внутренних точек которого определяется неравенствами

$$x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha, \quad y_0 - \alpha < y < y_0 + \alpha.$$

Так как $\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$, то

$$x_0 - \frac{\varepsilon}{2} < x_0 - \alpha < x_0 < x_0 + \alpha < x_0 + \frac{\varepsilon}{2},$$
$$y_0 - \frac{\varepsilon}{2} < y_0 - \alpha < y_0 < y_0 + \alpha < y_0 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что точка $m_0(x_0, y_0)$ является внутренней точкой квадрата. Весь квадрат лежит внутри круга с центром в точке m_0 и радиусом ε. Каждая из прямых

$$x = x_0 - \alpha, \quad x = x_0 + \alpha,$$
$$y = y_0 - \alpha, \quad y = y_0 + \alpha$$

пересекает ковер Серпинского по канторову совершенному множеству.

Если мы возьмем совокупность тех внутренних точек рассматриваемого квадрата, которые принадлежат ковру Серпинского S, то получим открытое в S множество, содержащее

---

[1]) Мы говорим, что число p, $0 \leqslant p \leqslant 1$, разлагается в конечную троичную дробь, если оно может быть представлено в виде

$$p = \frac{p_1}{3} + \frac{p_2}{3^2} + \ldots + \frac{p_n}{3^n},$$

где числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ могут принимать значения 0, 1, 2. Таково, например, число

$$\frac{7}{27} = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3}.$$

точку m_0 и содержащееся в ε-окрестности этой точки, граница которого не содержит никакого континуума, состоящего более чем из одной точки. Этим доказано, что ковер Серпинского есть линия в смысле Урысона. Вместе с тем установлено, что всякая канторова линия является линией в смысле Урысона.

Верно и обратное утверждение, а именно: *всякая плоская линия в смысле Урысона есть канторова линия.* Доказательство этого утверждения сводится к тому, что никакая плоская линия в смысле Урысона не содержит в себе открытого (относительно плоскости) множества.

Если бы линия C содержала открытое на плоскости множество, то она содержала бы в себе круг, целиком заключающийся в этом открытом множестве. Этот круг, будучи континуумом, являющимся подмножеством линии C, на основании теоремы 1 сам был бы линией в смысле Урысона.

Итак, мы стоим перед задачей доказать, что никакой круг (считая его внутренние и граничные точки) не является линией в смысле Урысона.

Предположим противное, и пусть K — совокупность внутренних точек некоторого круга, x — произвольная внутренняя точка круга, G—открытое множество, содержащее точку x и состоящее вместе со своим замыканием из внутренних точек круга, причем граница этого открытого множества

$$D = \text{Гр}(G) = \overline{G} \setminus G$$

не содержит никакого континуума, состоящего более чем из одной точки.

Но мы видели (глава II), что если G — непустое открытое подмножество некоторого множества R, не совпадающее со всем R, то граница $\text{Гр}(G)$ этого открытого множества разбивает все множество R в том смысле, что если из множества R выбросить границу открытого множества G, то оставшееся множество

$$R \setminus \text{Гр}(G)$$

представляется в виде суммы двух открытых множеств G и $R \setminus \overline{G}$, не имеющих общих точек:

$$R \setminus \text{Гр}(G) = G \cup (R \setminus \overline{G}), \quad G \cap (R \setminus \overline{G}) = 0.$$

Поэтому, чтобы убедиться в том, что круг K не является линией (в смысле Урысона), нам достаточно показать, что *если замкнутое множество D не содержит никакого* *континуума, состоящего более чем из одной точки, то оно не может разбивать круг* и, следовательно, не может быть границей никакого открытого множества G. Мы не будем здесь приводить полного доказательства теоремы о том, что если замкнутое множество D не содержит никакого континуума, то оно не разбивает круг, и наметим лишь план этого доказательства.

1°. Прежде всего доказывается, что если компакт D не содержит никакого континуума, то при любом ε его можно представить в виде суммы конечного числа замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon$, не имеющих попарно общих точек:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n,$$
$$\delta(D_i) < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

2°. Далее доказывается, что если D — замкнутое подмножество круга, не содержащее никакого континуума, и

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$$

— разложение множества D на замкнутые подмножества D_i диаметра $< \varepsilon$, не имеющие попарно общих точек, то каждое из этих подмножеств можно заключить внутрь многоугольника P_i, целиком содержащегося в K так, что диаметр каждого многоугольника P_i будет $< \varepsilon$ и никакие два многоугольника P_i, P_k не будут иметь общих точек.

3°. На основании 2° можно найти конечную систему многоугольников

$$P_1^1, P_2^1, \ldots, P_{n_1}^1$$

диаметра < 1, не имеющих попарно общих точек, в сумме которых содержится множество D. Назовем их многоугольниками первого ранга. Подобным же образом для каждого многоугольника первого ранга можно найти конечную систему многоугольников диаметра $< \frac{1}{2}$, не имеющих попарно общих точек, целиком содержащихся в соответствующем многоугольнике первого ранга. Эти многоугольники выбираются так, чтобы множество D содержалось в сумме всех этих многоугольников. Мы получим, таким образом, конечную систему многоугольников второго ранга

$$P_1^2, P_2^2, \ldots, P_{n_2}^2$$

диаметра $<\frac{1}{2}$, не имеющих попарно общих точек, в сумме которых содержится множество D.

Рассуждая подобным же образом, мы для каждого натурального числа k получим конечную систему многоугольников k-го ранга

$$P_1^k,\ P_2^k,\ \ldots,\ P_{n_k}^k$$

диаметра $<\frac{1}{k}$, не имеющих попарно общих точек, содержащихся в многоугольниках $(k-1)$-го ранга, в сумме которых содержится множество D.

4°. Обозначая через F_k сумму всех многоугольников k-го ранга, мы получим убывающую последовательность замкнутых множеств

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_k \supset \ldots,$$

пересечением которых является множество D.

5°. Вычитая из круга каждое из множеств F_k, мы получим возрастающую последовательность открытых связных множеств G_k

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset \ldots,$$

в сумму S которых входят все точки круга, за исключением точек множества D. Множество S, как сумма связных открытых множеств G_k, имеющих общие точки, есть множество связное.

Таким образом, доказано, что ограниченное замкнутое множество D, не содержащее никакого континуума, не разбивает круг[1]). Из этого следует, что круг не является линией в смысле Урысона, а тем самым и исходное утверждение, что всякая плоская линия в смысле Урысона является линией в смысле Кантора.

§ 2. Индекс ветвления. Примеры

Определение линии, данное Урысоном, не только до конца раскрывает сущность этого понятия во всей его общности,

---

[1]) Совершенно так же можно было бы показать, что ограниченное замкнутое множество D, не содержащее никакого континуума, не разбивает плоскость. Это утверждение составляет содержание так называемой теоремы Фрагмена — Брауэра.

но и указывает путь, которому надо следовать при изучении общих свойств линий. Центральным пунктом определения Урысона является одномерность континуума, называемого в этом случае линией, т. е. то его свойство, что любая точка континуума C обладает сколь угодно малой окрестностью, граница которой не содержит никакого континуума, состоящего более чем из одной точки. Мы будем теперь интересоваться лишь теми из окрестностей точек континуума C, границы которых содержат «минимальное количество точек». При этом выражение «количество точек в данном случае» надо понимать как мощность множества точек границы.

Мы говорим, что линия C имеет в точке x индекс ветвления m, если при всяком ε найдется открытое (относительно C) множество диаметра $<\varepsilon$, граница которого содержит не более[1] m точек, тогда как при достаточно малом ε нельзя найти такого открытого множества диаметра $<\varepsilon$, содержащего точку x, граница которого содержала бы менее чем m точек. Если точка x линии C имеет индекс ветвления m, то мы будем писать

$$\operatorname{ind}_x C = m.$$

Но граница открытого множества всегда есть множество замкнутое, а всякое замкнутое множество, лежащее в компакте, может быть либо конечным, либо счетным, либо иметь мощность континуума[2]). Следовательно, и граница всякого открытого (относительно компакта) множества может или состоять из конечного множества точек, или быть счетным множеством, или иметь мощность континуума. В соответствии с этим мы получаем следующую классификацию точек линии с точки зрения их индекса ветвления.

1°. Мы говорим, что точка x линии C имеет *конечный индекс ветвления* n, где n — натуральное число, если при всяком ε найдется такое открытое множество, граница которого состоит не более чем из n точек, тогда как при достаточно малом ε граница всякого открытого множества, содержащего точку x диаметра $<\varepsilon$, не может состоять из меньшего чем n числа точек.

---

[1]) В смысле мощности.

[2]) См., например, Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, стр, 342.

2°. Мы говорим, что точка x линии C имеет *неограниченный индекс ветвления* ω, если при любом ε найдется открытое множество диаметра $< \varepsilon$, содержащее точку x, граница которого состоит из конечного множества точек, но с убыванием ε минимальное количество точек границы открытого множества диаметра $< \varepsilon$, содержащего точку x, беспредельно возрастает.

3°. Мы говорим, что линия C имеет в точке x *счетный индекс ветвления* $\aleph_0$, если при любом ε найдется открытое множество диаметра $< \varepsilon$, содержащее точку x, граница которого состоит не более чем из счетного множества точек (т. е. является конечным или счетным множеством), тогда как при достаточно малом ε нет ни одного открытого множества диаметра $< \varepsilon$, содержащего точку x, граница которого состояла бы из конечного множества точек.

4°. Мы говорим, что точка x линии C имеет *континуальный индекс ветвления* c, если при достаточно малом ε нет ни одного открытого множества, содержащего точку x диаметра $< \varepsilon$, граница которого состояла бы из конечного или счетного множества точек.

Точка линии C, индекс ветвления которой больше 2, называется *точкой ветвления линии*; точка, индекс ветвления которой равен 1, называется *концевой точкой*.

В предыдущем параграфе мы видели, что если континуум K является подмножеством линии C, то он сам является линией (теорема 1) и что множество, гомеоморфное линии, само является линией (теорема 2). Следующие две теоремы, доказательства которых ввиду их простоты мы предоставляем читателю, несколько уточняют предыдущее утверждение.

Теорема 1. *Если континуум K является подмножеством линии C и x — точка континуума K, то индекс ветвления точки x относительно K не более индекса ветвления точки x относительно C:*

$$\operatorname{ind}_x K \leqslant \operatorname{ind}_x C.$$

Теорема 2. *Если C и C' — гомеоморфные между собой линии, x — произвольная точка линии C, а x' — точка линии C', соответствующая точке x при данном топологическом отображении, то индексы точек x и x' равны между собой:*

$$\operatorname{ind}_x C = \operatorname{ind}_{x'} C'.$$

Чтобы разобраться в многочисленных определениях, связанных с понятием индекса ветвления, рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих это понятие.

Пример 1. Отрезок во всех своих внутренних точках имеет индекс ветвления, равный 2; индекс ветвления концов отрезка равен 1.

В самом деле, с одной стороны, каждую внутреннюю точку отрезка можно окружить интервалом сколь угодно малой длины. Но интервал является открытым множеством (относительно отрезка), граница которого состоит из двух точек — концов интервала. Следовательно, индекс ветвления каждой внутренней точки отрезка $\leqslant 2$.

С другой стороны, пусть G — какое-нибудь открытое множество, содержащее точку x. Если диаметр открытого множества G настолько мал, что концы отрезка не принадлежат множеству G, то множество G, открытое относительно отрезка, будет открытым множеством и на всей прямой.

Но всякое открытое множество на прямой состоит из конечного или бесконечного множества интервалов, не имеющих попарно общих точек, одному из которых принадлежит точка x. Концы интервала, содержащего точку x, входят в границу открытого множества G; следовательно, граница открытого множества G, содержащего точку x, состоит не менее чем из двух точек.

Таким образом, всякая точка отрезка содержится в открытом множестве сколь угодно малого диаметра, граница которого состоит из двух точек, и в то же время при достаточно малом ε (меньшем половины расстояния точки x до концов отрезка) граница всякого открытого множества диаметра $< \varepsilon$, содержащего точку x, содержит по меньшей мере две точки. Следовательно, индекс каждой внутренней точки отрезка равен 2.

Конец a отрезка ab можно заключить в полуинтервал $[a, x)$ сколь угодно малой длины; это будет открытое (на отрезке) множество, граница которого состоит из одной точки x. С другой стороны, каждое открытое множество, содержащее точку a, диаметр которого меньше длины отрезка, всегда содержит полуинтервал $[a, x)$, следовательно, индекс конца отрезка равен 1.

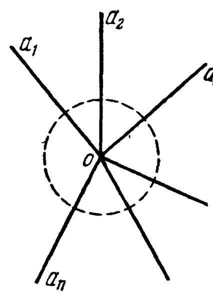
Пример 2. Окружность в каждой своей точке имеет индекс ветвления, равный 2.

В самом деле, с одной стороны, каждую точку x окружности можно заключить в «открытую» дугу (без концов) сколь угодно малой длины. Такая дуга будет открытым множеством на окружности. Граница этого открытого множества состоит из двух точек — концов дуги. Следовательно, индекс ветвления в каждой точке окружности $\leqslant 2$. С другой стороны, каждое открытое множество на окружности состоит из конечного или бесконечного (счетного) множества открытых дуг, не имеющих попарно общих точек, концы которых входят в границу этого открытого множества. Одной из таких дуг принадлежит точка x. Следовательно, индекс ветвления каждой точки x окружности $\geqslant 2$. Сопоставляя оба неравенства, приходим к заключению, что индекс ветвления каждой точки x окружности равен 2.

Замечание. Так как в силу теоремы 2 настоящего параграфа индекс ветвления точки при топологическом отображении не меняется, то на основании только что полученных результатов мы можем заключить, что

1°. *Индекс ветвления простой дуги в каждой ее внутренней точке равен* 2; *индекс ветвления конца дуги равен* 1.

2°. *Индекс ветвления каждой точки простой замкнутой линии равен* 2.



Черт. 12.

Пример 3. Линия L состоит из n прямолинейных отрезков

$$oa_1,\ oa_2,\ \ldots,\ oa_n,$$

выходящих из одной точки o (черт. 12).

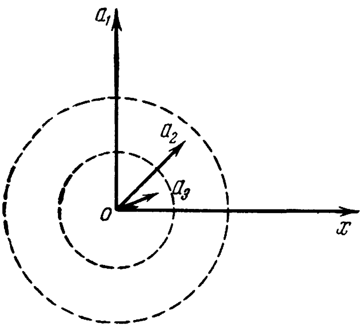
Индекс ветвления линии L в точке o равен n.

В самом деле, пусть ε — произвольное положительное число. Рассмотрим n полуинтервалов

$$oc_1,\ oc_2,\ \ldots,\ oc_n$$

длины $\frac{\varepsilon}{2}$, лежащих на данных отрезках. Совокупность этих полуинтервалов есть открытое множество линии L, содержащее точку o, граница которого состоит из n точек — концов этих полуинтервалов. Следовательно, индекс ветвления линии L в точке $o \leqslant n$. С другой стороны, если число ε меньше длин всех отрезков $oa_1,\ oa_2,\ \ldots,\ oa_n$, то всякое открытое множество, содержащее точку o, содержит n полуинтервалов, выходящих из этой точки. Концы этих полуинтервалов входят в границу рассматриваемого открытого множества. Следовательно, индекс ветвления линии L в точке $o \geqslant n$.

Сопоставляя оба полученных неравенства, приходим к выводу, что индекс ветвления линии L в точке o равен n. Во внутренних точках отрезков $oa_1, oa_2, \ldots, oa_n$ индекс ветвления линии L равен 2, а в концевых точках он равен 1.



Черт. 13.

Пример 4. Линия L состоит из счетного множества отрезков

$$oa_1, oa_2, \ldots, oa_n, \ldots,$$

выходящих из начала координат (черт. 13). Длины этих отрезков

$$oa_1 = \frac{1}{2}, \quad oa_2 = \frac{1}{4}, \ldots$$

$$\ldots, oa_n = \frac{1}{2^n}, \ldots,$$

а углы, образуемые этими отрезками с осью ox, суть соответственно

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \ldots, \frac{\pi}{2^n}, \ldots$$

Таким образом, как длины отрезков, так и углы, образованные этими отрезками с положительным направлением оси ox, с возрастанием n стремятся к нулю.

Точка o линии L имеет неограниченный индекс ветвления ω, т. е. обладает тем свойством, что хотя при любом ε существует открытое множество диаметра $< \varepsilon$, содержащее точку o, граница которого состоит из конечного числа точек, однако при стремлении ε к нулю это число беспредельно возрастает.

В самом деле, $\frac{\varepsilon}{2}$ — окрестность точки o состоит из конечного числа полуинтервалов, выходящих из точки o и лежащих на тех отрезках, длины которых $> \frac{\varepsilon}{2}$, и бесконечного множества отрезков, длины которых $< \frac{\varepsilon}{2}$. Граница этого открытого множества состоит из конечного числа точек — концов полуинтервалов, входящих в состав окрестности. Диаметр его $< \varepsilon$.

С другой стороны, каково бы ни было открытое множество линий L, содержащее точку o диаметра < 1, его компонента[1]), содержащая точку o, есть открытое множество, состоящее из конечного числа полуинтервалов, выходящих из точки o, и бесконечного множества исходящих из точки o отрезков. Граница этой компоненты состоит из концевых точек полуинтервалов и входит в состав границы всего открытого множества. Чем меньше диаметр открытого множества и, следовательно, его компоненты, содержащей точку o, тем больше полуинтервалов входит в эту компоненту и, следовательно, тем больше точек — концов полуинтервалов — входит в границу открытого множества. Когда диаметр открытого множества стремится к нулю, число это беспредельно возрастает.

Во всех внутренних точках отрезков, из которых состоит линия L, индекс ветвления равен 2; индекс ветвления концов этих отрезков равен 1.

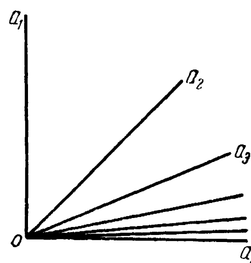
Пример 5. Линия L (черт. 14) состоит из отрезка oa_0 длины 1 и бесконечного множества отрезков

$$oa_1, oa_2, \ldots, oa_n, \ldots$$

длины 1, выходящих из точки o и образующих с отрезком oa_0 углы, соответственно равные

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \ldots, \frac{\pi}{2^n}, \ldots$$

Линия L в каждой точке отрезка oa_0 имеет счетный индекс ветвления.



Черт. 14.

В самом деле, каково бы ни было открытое множество, содержащее точку o, оно состоит из конечного или счетного множества интервалов, лежащих на отрезках oa_0, oa_1, oa_2, ... (этих интервалов может и совсем не быть) и компоненты

---

[1]) Компонентой точки x в множестве R называется наибольшее связное множество K, содержащее точку x и содержащееся в R. «Наибольшее» в том смысле, что никакое множество M, содержащее K в качестве подмножества, уже не является связным.

точки o, состоящей из счетного множества полуинтервалов, выходящих из точки o.

Если m — внутренняя точка отрезка oa_0, то любое, содержащее ее открытое множество состоит из интервалов, лежащих на всех отрезках oa_0, oa_1, oa_2, ... за исключением, быть может, конечного числа отрезков

$$oa_1,\ oa_2,\ \ldots,\ oa_n.$$

Наконец, всякое достаточно малое открытое множество, содержащее точку a_0, состоит из счетного множества полуинтервалов с концами в точках

$$a_0,\ a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots,$$

принадлежащих этому открытому множеству, и конечного или счетного множества интервалов (их может и совсем не быть), лежащих на отрезках

$$oa_0,\ oa_n,\ oa_{n+1},\ \ldots$$

Таким образом, мы видим, что во всех случаях граница открытого множества, содержащего точку отрезка oa_0, всегда состоит из счетного множества точек. Следовательно, все точки отрезка oa_0 имеют счетный индекс ветвления. В прочих точках линии L индекс ветвления равен 2 или 1.

Пример 6. Линия состоит из последовательности отрезков (см. черт. 7)

$$A_1,\ B_1;\ A_2,\ B_2;\ \ldots;\ A_n,\ B_n,\ \ldots,$$

где A_n есть отрезок, состоящий из точек

$$x = \frac{1}{2n},\quad -1 \leqslant y \leqslant 1,$$

а B_n — отрезок, состоящий из точек

$$\frac{1}{2n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n},\quad y = (-1)^n,$$

и предельного отрезка

$$A_0\colon x = 0,\quad -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Это множество, как мы уже упоминали на стр. 44, гомеоморфно множеству, состоящему из точек графика функции

$$y = \sin\frac{1}{x},\quad 0 < x \leqslant 1,$$

и точек предельного отрезка

$$x=0, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Покажем прежде всего, что множество L есть действительно линия в смысле нашего определения. Это множество компактно. В самом деле, пусть M — бесконечное подмножество, содержащееся в L. Если в множестве M имеется бесконечное подмножество N точек, принадлежащих какому-нибудь одному из отрезков

$$A_0, \ A_1, \ B_1, \ A_2, \ B_2, \ \ldots,$$

то в силу компактности отрезка оно будет иметь предельную точку p, принадлежащую этому же отрезку. Точка p, будучи предельной для множества N, будет и подавно предельной и для множества M. Если множество M содержит точки, принадлежащие бесконечному множеству различных отрезков A_1, B_1, A_2, B_2, ..., то на отрезке A_0 непременно найдется точка, которая будет предельной для множества M.

Множество L связно. В самом деле, множество S, состоящее из отрезков

$$A_1, \ B_1, \ A_2, \ B_2, \ \ldots, \ A_n, \ B_n, \ \ldots,$$

связно, так как каждые два соседних отрезка этой последовательности имеют общую точку. Присоединяя к множеству S точки отрезка A_0, являющиеся предельными для множества S, мы получим связное множество L.

Множество L, будучи компактным и связным, является континуумом. Докажем, что континуум L есть линия. Если точка m принадлежит какому-нибудь из отрезков A_n, B_n ($n \neq 0$), то индекс ветвления каждой такой точки равен 2, за исключением точки с координатами $\frac{1}{2}$, 1 (конец отрезка A_1), индекс ветвления которой равен 1.

Пусть m_0 — точка предельного отрезка A_0 и ε — произвольное положительное число, меньшее каждого из расстояний точки m_0 до концов предельного отрезка. Обозначим через U открытое множество, состоящее из интервалов длины ε, лежащих на отрезке A_0 и на тех отрезках

$$A_n, \ A_{n+1}, \ A_{n+2}, \ \ldots,$$

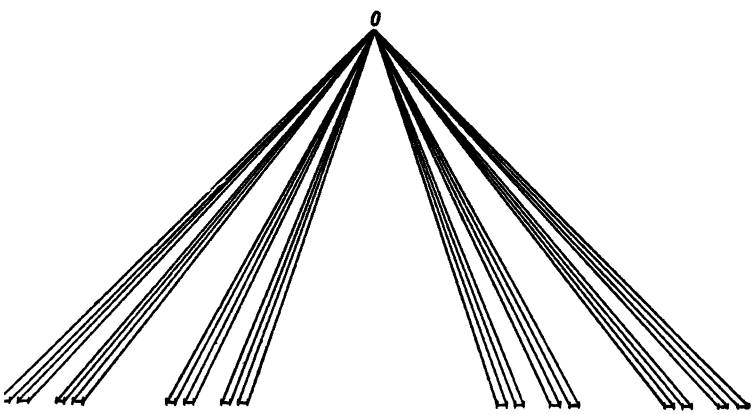
для которых $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, причем середины всех этих интервалов лежат на прямой, проходящей через точку m_0 параллельно оси Ox. Это открытое множество содержит точку m_0, диаметр его $<\varepsilon$, а граница состоит из счетного множества точек — концов интервалов, составляющих данное открытое множество. Следовательно, граница открытого множества U не содержит никакого континуума, состоящего более чем из одной точки.

Таким образом, мы показали, что множество L есть линия. Покажем, что эта линия в каждой точке отрезка A_0 имеет счетный индекс ветвления.

В самом деле, всякое открытое множество, содержащее точку m_0 предельного отрезка A_0, содержит в себе интервалы, лежащие на отрезке A_0 и на всех вертикальных отрезках

$$A_n,\ A_{n+1},\ A_{n+2},\ \ldots,$$

начиная с некоторого номера n, причем концы этих интервалов входят в границу рассматриваемого открытого множества. Следовательно, граница открытого множества, содержащего точку m_0 предельного отрезка A_0, всегда состоит из счетного множества точек и, таким образом, точка m_0 имеет счетный индекс ветвления $\aleph_0$.



Черт. 15.

Пример 7. Линия L состоит из отрезков, соединяющих точку o с точками канторова совершенного множества C (черт. 15).

Установим прежде всего, что это множество есть линия. Доказательство того, что L есть континуум, мы предоставляем читателю.

Докажем, что при любом положительном ε каждая точка континуума L содержится в открытом множестве диаметра $<\varepsilon$, граница которого не содержит никакого континуума, состоящего более чем из одной точки. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять трапецию, содержащую внутри себя данную точку, основания которой параллельны горизонтальному отрезку, а боковые стороны лежат на отрезках, соединяющих точку o с точками смежных интервалов. При этом трапецию надо взять настолько малой, чтобы длины ее сторон и диагоналей были $<\varepsilon$. Совокупность точек континуума L, лежащих внутри этой трапеции, и будет тем открытым множеством, граница которого не содержит никакого континуума, состоящего более чем из одной точки, так как эта граница состоит из двух канторовых совершенных множеств, получающихся в пересечении оснований трапеций с континуумом L. Если точка принадлежит множеству C или совпадает с точкой o, открытое множество строится аналогично. Мы показали, таким образом, что континуум L есть линия.

Докажем, что каждая точка линии L имеет континуальный индекс ветвления. Мы знаем, что граница всякого открытого множества G, содержащегося в R, разбивает множество R в том смысле, что $R \setminus \mathrm{Гр}(G)$ представляется в виде суммы двух открытых множеств G и $R \setminus \overline{G}$, не имеющих общих точек. Поэтому для того, чтобы убедиться в том, что каждая точка линии L имеет континуальный индекс ветвления, надо показать, что ни для какого открытого множества его граница не может состоять из конечного или счетного множества точек, а для этого, в свою очередь, достаточно показать, что если из линии L выбросить конечное или счетное множество A ее точек, то оставшееся после этого множество $L \setminus A$ будет связно.

Пусть A — счетное множество, не содержащее точки o. Множество S точек тех отрезков, которые не содержат точек множества A, связно. Всякая же точка x континуума L содержит в своей окрестности точки, принадлежащие несчетному множеству отрезков, образующих линию L, поэтому всякая точка x множества

$$B = L \setminus A$$

будет предельной точкой связного множества S. Присоединяя же к связному множеству S его предельные точки, мы получаем снова связное множество. Следовательно, множество $B = L \setminus A$ связно, и, таким образом, множество A не может служить границей никакого открытого множества линии L.

Пример 8. Ковер Серпинского S (см. гл. III, стр. 71) имеет в каждой своей точке континуальный индекс ветвления.

Чтобы в этом убедиться, достаточно, как и выше, показать, что если мы из континуума S выбросим счетное замкнутое множество F, то оставшееся множество

$$G = S \setminus F$$

будет связно.

Предположим противное, т. е. что открытое множество $G = S \setminus F$ несвязно. Тогда оно может быть представлено в виде суммы двух открытых непустых, непересекающихся множеств G_1 и G_2

$$G = G_1 \cup G_2.$$

Обозначим через Q тот единичный квадрат, из которого получен ковер Серпинского S, а через C — контур этого квадрата; покажем прежде всего, что контур C квадрата Q целиком принадлежит замыканию одного из множеств G_1 или G_2. Обозначим через P множество, состоящее из отрезков длины 1, содержащихся в S, параллельных сторонам квадрата и не содержащих точек множества F. Каждый такой отрезок как связное множество не может иметь общих точек с двумя непересекающимися открытыми множествами, в сумме которых он содержится. Обозначим через D_1 какой-нибудь из этих отрезков, параллельных горизонтальной стороне квадрата и содержащихся в G_1. Тогда каждый вертикальный отрезок, не содержащий точек множества F, также будет целиком принадлежать множеству G_1, так как он имеет с этим множеством общую точку, а именно, точку его пересечения с горизонтальным отрезком D_1. Но в таком случае и всякий горизонтальный отрезок D, не содержащий точек множества F, пересекая все вертикальные отрезки (лежащие в G_1), сам будет целиком содержаться в G_1. Таким образом, мы показали, что множество P, состоящее из горизонтальных и вертикальных отрезков, не содержащих точек множества F, целиком содержится в G_1. Всякая точка контура C есть предельная точка множества P, и поэтому $C \subset \overline{G_1}$.

Обозначим через Q^n квадрат n-го ранга, а через C^n — контур этого квадрата. Так как часть кривой S, расположенная в Q^n, имеет совершенно такое же строение, как и вся кривая в целом, то так же, как и выше, можно было бы показать, что при любом n контур C^n каждого квадрата Q^n n-го ранга принадлежит одному из множеств $\overline{G}_1$ или $\overline{G}_2$.

Но если квадрат Q^{n+1} ($n+1$-го ранга) содержится в квадрате Q^n ранга n, то его контур C^{n+1} имеет общие точки с контуром C^n квадрата Q^n. И так как множество этих общих точек состоит из одного или двух отрезков — сторон меньшего квадрата и, следовательно, есть множество несчетное, то отсюда следует, что C^{n+1} и C^n имеют общие точки, не принадлежащие F. Поэтому контур C^{n+1} содержится в том же множестве $\overline{G}_1$ или $\overline{G}_2$, в котором содержится контур C^n.

Так как, по предположению, контур C квадрата Q содержится в $\overline{G}_1$, то отсюда следует, что и контуры всех квадратов первого ранга содержатся в $\overline{G}_1$. Точно так же убеждаемся в том, что контуры квадратов второго и всех последующих рангов содержатся в $\overline{G}_1$. Так как, наконец, множество, являющееся суммою контуров всех квадратов всевозможных рангов, плотно в S, то отсюда следует, что и все множество S содержится в $\overline{G}_1$, и потому множество G_2 пусто. Таким образом, доказано, что если F — счетное множество ковра Серпинского S, то множество $S \setminus F$ связно.

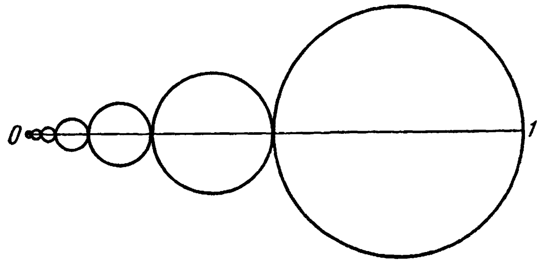
Замечание. Сопоставляя четыре последних примера, мы видим, что точки, имеющие бесконечный индекс ветвления, не встречаются изолированно, и это не случайно. Как показал Урысон, их всегда бывает так много, что в любой ε-окрестности каждой такой точки содержится континуум, сплошь состоящий из точек бесконечного индекса ветвления.

Пример 9. Линия L состоит из счетного множества попарно соприкасающихся окружностей, диаметрами которых служат отрезки

$$\left[1, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right], \ldots, \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right], \ldots,$$

и точки 0 (черт. 16).

В точке 0 линия L имеет индекс ветвления, равный 1, так как, если мы возьмем $\frac{1}{n}$-окрестность точки 0, то граница этой окрестности состоит из одной точки $\frac{1}{n}$. В точках соприкосновения окружностей линия L имеет индекс ветвле-



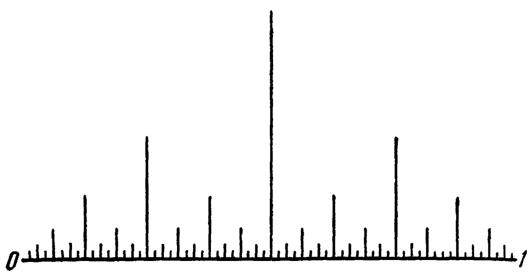
Черт. 16.

ния, равный 4; в прочих точках индекс ветвления линии L равен 2.

Пример 10. Линия L (черт. 17) состоит из горизонтального отрезка оси ox:

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = 0$$

и перпендикулярных к нему вертикальных отрезков, проведенных через его рациональные точки, лежащих в положи-



Черт. 17.

тельной полуплоскости и имеющих длину $\frac{1}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, выражающая абсциссу точки отрезка оси ox:

$$x = \frac{p}{q}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{q}.$$

В концевых точках вертикальных отрезков индекс ветвления линии L равен 1, а во внутренних точках этих отрезков он равен 2, так как при достаточно малом ε в ε-окрестности точки вертикального отрезка не содержится никаких других точек, кроме точек этого отрезка. Индекс 2 имеют также иррациональные точки горизонтального отрезка и его концы. В самом деле, какова бы ни была иррациональная точка x_0 горизонтального отрезка и положительное число ε, всегда можно найти такое рациональное положительное число ε', что все вертикальные отрезки, заключенные в полосе между прямыми

$$x = x_0 - \varepsilon' \text{ и } x = x_0 + \varepsilon',$$

будут иметь длину $< \varepsilon$. Обозначим через ε'' число, большее длин всех вертикальных отрезков, заключенных в полосе между прямыми

$$x = x_0 - \varepsilon' \text{ и } x = x_0 + \varepsilon',$$

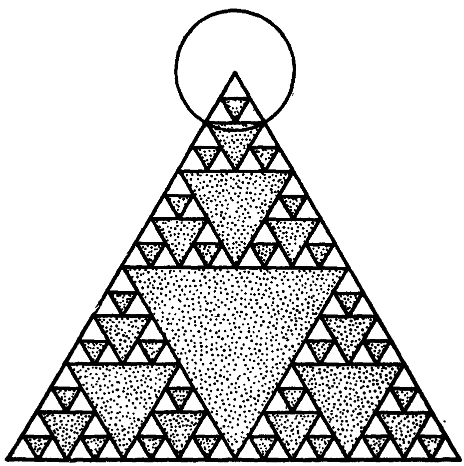
и меньшее ε. Открытое множество, состоящее из точек линии L, для которых

$$x_0 - \varepsilon' < x < x_0 + \varepsilon',$$
$$0 \leqslant y < \varepsilon'',$$

содержит точку x_0 и само содержится в ε-окрестности этой точки; его граница состоит из двух точек горизонтального отрезка, имеющих абсциссы $x_0 - \varepsilon'$ и $x_0 + \varepsilon'$.

Если $x = \frac{p}{q}$ — рациональная точка горизонтального отрезка, то индекс линии L в точке x_0 равен 3. В самом деле, если ε меньше каждого из чисел $\frac{p}{q}$, $1 - \frac{p}{q}$ и $\frac{1}{q}$, то граница всякого открытого множества диаметра $< \varepsilon$, содержащего точку x_0, пересекает три отрезка, выходящих из точки x_0. Следовательно, индекс линии L в точке $x_0 \geqslant 3$. С другой стороны, рассуждая так же, как и выше, всегда можно найти такое открытое множество, содержащее точку x_0 и содержащееся в ε-окрестности этой точки, граница которого состоит из трех точек, лежащих на отрезках, исходящих из точки x_0. Отсюда следует, что индекс линии L в точке $x_0 \leqslant 3$. Сопоставляя оба полученных неравенства, находим, что индекс линии L в точке x_0 равен 3.

Пример 11. Линия C строится следующим образом: в равностороннем треугольнике со стороной, равной 1, проводятся средние линии, и из него выбрасываются внутренние точки треугольника, ограниченного средними линиями. Оставшееся множество состоит из трех треугольников, которые мы назовем треугольниками первого ранга. С каждым из треугольников первого ранга проделывается та же операция: в нем проводятся средние линии и выбрасываются внутренние точки ограниченного ими треугольника. Подобным же образом поступаем с каждым из девяти получившихся треугольников второго ранга и приходим к 27 треугольникам третьего ранга. Поступая так же и далее, мы для каждого натурального числа n получим множество, состоящее из 3^n треугольников n-го ранга (черт. 18).



Черт. 18.

Оставшееся после выполнения всех этих операций множество C есть континуум. В самом деле, его можно представить как общую часть континуумов, из которых первый состоит из трех треугольников первого ранга, второй — из девяти треугольников второго ранга, третий — из 27 треугольников третьего ранга и т. д.; каждый из этих континуумов содержится в предыдущем. Следовательно (по теореме 1 § 6 гл. II), их общая часть также континуум.

Этот континуум C есть линия. Чтобы в этом убедиться, мы установим, что точки континуума C имеют индекс ветвления 2, 3 или 4.

В вершинах основного треугольника континуум C имеет индекс 2. В самом деле, с одной стороны, при всяком n граница $\frac{1}{2n}$-окрестности вершины состоит из двух точек, следовательно, индекс ветвления континуума C в вершине основного треугольника $\leqslant 2$. С другой стороны, граница всякого достаточно малого открытого множества, содержащего вершину основного треугольника, должна непременно пересекать две стороны, выходящие из этой вершины, откуда следует, что индекс ветвления континуума $C \geqslant 2$. Сопоставляя оба полученных неравенства, находим, что индекс ветвления континуума C в рассматриваемых точках равен 2.

В вершинах треугольников всех рангов, получающихся при подразделении основного треугольника, индекс ветвления континуума C равен 4. Пусть x — одна из таких вершин. Тогда, с одной стороны, при всяком n граница $\frac{1}{2n}$-окрестности точки x состоит из четырех точек — вершин тех двух треугольников n-го ранга, общей вершиной которых является точка x. Следовательно, индекс ветвления континуума C в точке $x \leqslant 4$.

С другой стороны, если k — наименьшее число, для которого точка x является вершиной треугольника k-го ранга, то существует еще один треугольник k-го ранга, для которого точка x также является вершиной. Следовательно, из точки x исходят четыре отрезка — стороны треугольников k-го ранга, имеющих x своей общей вершиной. Граница всякого достаточно малого открытого множества, содержащего точку x, должна пересекать эти отрезки, и потому индекс ветвления континуума $C \geqslant 4$. Сопоставляя оба неравенства, приходим к выводу, что индекс ветвления континуума C в вершинах треугольников всех рангов равен 4.

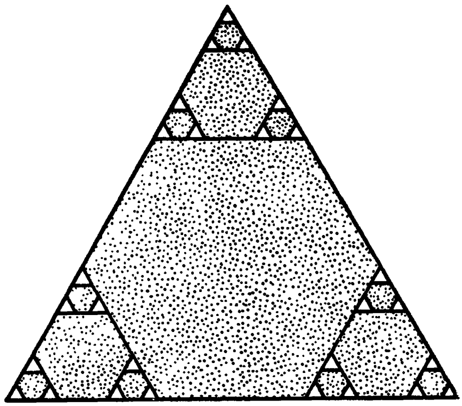
Наконец, если x — произвольная точка континуума C, не являющаяся вершиной ни для основного треугольника, ни для треугольников подразделения, то индекс ветвления континуума C во всякой такой точке равен 3. В самом деле, при всяком n найдется треугольник n-го ранга, внутри или на стороне которого лежит точка x. Граница открытого множества, состоящего из точек континуума C, которые лежат внутри окружности, описанной около указанного треугольника n-го ранга, содержащего точку x, состоит из трех точек — вершин указанного треугольника. Так как диаметр этого открытого множества надлежащим выбором n можно сделать как угодно малым, то отсюда следует, что индекс ветвления континуума C в точке x не более 3.

С другой стороны, для каждой точки x можно указать такую последовательность треугольников, содержащих точку x, в которой каждый последующий треугольник содержится в предыдущем. Точка x является предельной точкой для вершин треугольников этой последовательности. Каждые два соседних треугольника последовательности имеют только одну общую вершину, а две другие вершины последующего треугольника лежат на сторонах предыдущего. Из отрезков сторон треугольников, пересечением которых является точка x, мы можем составить три бесконечно звенные ломаные линии, для которых точка x является предельной точкой. Эти ломаные составляются из отрезков сторон, идущих от вершин предыдущего треугольника к вершинам последующего. Три полученные таким образом ломаные не имеют никаких общих точек, и так как точка x является предельной для каждой из них, то граница любого открытого множества, содержащего точку x, должна пересекать каждую из этих ломаных. Следовательно, континуум C в точке x имеет индекс ветвления $\geqslant 3$. Сопоставляя оба неравенства, приходим к выводу, что в точке x континуум C имеет индекс ветвления, равный 3.

Замечание 1. Если мы рассмотрим множество, состоящее из двух континуумов C_1 и C_2, каждый из которых гомеоморфен континууму C предыдущего примера 11 и которые не имеют никаких других общих точек, кроме точек, соответствующих вершинам основного треугольника континуума C, то получим пример линии, состоящей из точек, имеющих индекс ветвления 3 и 4.

Замечание 2. Небольшим видоизменением предыдущего примера можно добиться того, что линия C будет иметь только точки с индексом ветвления 2 или 3.

Для этого достаточно брать не средние линии треугольника, а например, отрезки, соединяющие точки, отстоящие от вершин треугольников на $^1/_3$ длины их сторон, и выбрасывать внутренние точки получающихся при этом правильных шестиугольников (черт. 19).



Черт. 19.

§ 3. Линии конечного ветвления

Те точки линии, индекс ветвления которых больше 2 (в том числе и точки с неограниченным и бесконечным индексом ветвления), мы назвали (§ 2) точками ветвления данной линии, а те точки, индекс ветвления которых равен 1, — концевыми точками линии.

Предыдущие примеры показывают, насколько разнообразным может быть строение линий в зависимости от наличия у них тех или иных точек ветвления. Не имея возможности остановиться здесь на всем многообразии свойств линий, связанных с их ветвлением, мы ограничимся рассмотрением только таких линий, которые имеют лишь конечное число точек ветвления, в каждой из которых индекс ветвления конечен. Такие линии мы будем называть *линиями конечного ветвления*.

В этом параграфе мы установим ряд фактов, которые показывают, насколько глубоко характеризует линию понятие индекса ветвления.

Оказывается, что если у линии совсем нет точек ветвления, т. е. если в каждой точке линии индекс ветвления равен 1 или 2, то эта линия есть либо простая дуга — топологический образ отрезка, либо простая замкнутая линия — топологический образ окружности. При этом, если индекс ветвления линии во всех точках равен 2, то линия является топологическим образом окружности (простая замкнутая линия); если же у линии есть концевые точки (при этом доказывается, что их непременно должно быть две), то линия будет простой дугой.

Если линия имеет лишь конечное число точек ветвления, причем индекс ветвления каждой из них также конечен, то такая линия может быть разбита на конечное число простых дуг, не имеющих попарно никаких других общих точек, кроме своих концов.

Доказательство всех этих утверждений основано на том, что любые две точки линии конечного ветвления могут быть соединены простой дугой. Это же последнее утверждение (в силу теоремы 3 § 6 гл. II) вытекает из того, что линия конечного ветвления есть локально связный континуум. С доказательства этого предложения мы и начнем выяснение справедливости всех высказанных выше утверждений.

Теорема 1. *Если связное множество имеет конечный индекс ветвления в каждой своей точке, то это множество локально связно.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая простая

Лемма. *Если множество M не может быть представлено в виде суммы n связных множеств* (т. е. если при всяком представлении множества M в виде суммы n слагаемых по крайней мере одно из этих слагаемых не будет связно), *то множество M может быть представлено в виде суммы $n+1$ замкнутых (относительно M) множеств, не имеющих попарно общих точек.*

В самом деле, если множество M не связно, то оно, по определению, представляется в виде суммы двух замкнутых (относительно M) слагаемых, не имеющих общих точек. Таким образом, наша лемма справедлива при $n=1$. Предположим, что лемма уже доказана для всех чисел от 1 до $n-1$, и докажем ее для числа n.

Итак, предположим, что множество M нельзя представить в виде суммы n связных слагаемых. В таком случае его и подавно нельзя представить в виде суммы $n-1$ связных слагаемых. Но тогда в силу индуктивного предположения множество M есть сумма

$$(n-1)+1=n$$

попарно непересекающихся замкнутых множеств

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n.$$

Так как множество M нельзя представить в виде суммы n связных слагаемых, то по крайней мере одно из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несвязно. Пусть это будет, например, множество A_n. Тогда его можно представить в виде суммы двух непустых замкнутых относительно A_n, а следовательно, и относительно M, множеств A_n^* и A_{n+1}, не имеющих общих точек. Таким образом, все множество M представляется в виде суммы $n+1$ замкнутых множеств

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n^*,\ A_{n+1},$$

не имеющих попарно общих точек.

Наша лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Нам нужно доказать, что какова бы ни была точка x множества R и открытое множество U, содержащее точку x, существует связное открытое множество V, содержащее точку x и содержащееся в U.

Так как множество R имеет конечный индекс ветвления в каждой своей точке, то существует открытое множество G, содержащее точку x и содержащееся в множестве U, граница которого состоит из конечного числа точек

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n.$$

Докажем прежде всего, что множество

$$\overline{G}=G\cup a_1\cup a_2\cup\ldots\cup a_n$$

может быть представлено в виде суммы n связных множеств. Предположим, что это не так. Тогда на основании только что доказанной леммы множество $\overline{G}$ может быть представлено в виде суммы $n+1$ непустых попарно непересекающихся замкнутых (относительно $\overline{G}$, а следовательно, и относительно R) множеств

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{n+1}.$$

Ни одно из замкнутых множеств

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{n+1}$$

не может целиком содержаться в открытом множестве G, так как, если бы, например, множество B_i содержалось в G, то все множество R можно было бы представить в виде суммы двух непустых непересекающихся замкнутых множеств

$$B_i$$

и

$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{i-1} \cup B_{i+1} \cup \ldots \cup B_{n+1} \cup (R \setminus G),$$

вопреки связности R. Но раз ни одно из множеств

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{n+1},$$

составляющих в сумме $\overline{G}$, не содержится целиком в G, то каждое из них содержит по крайней мере одну точку границы множества G, т. е. одну из точек

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n.$$

Но это невозможно, так как всех множеств B у нас $n+1$, а точек a только n, причем никакие два множества B общих точек не имеют.

Полученное противоречие вынуждает нас сделать вывод, что множество $\overline{G}$ нельзя представить в виде суммы $n+1$ непустых замкнутых множеств, не имеющих попарно общих точек. В силу предыдущей леммы отсюда, в свою очередь, следует, что множество $\overline{G}$ может быть представлено в виде суммы не более чем n связных слагаемых. Предположим, что число этих слагаемых равно k. Взяв замыкание каждого из этих слагаемых, мы представим замкнутое множество $\overline{G}$ в виде суммы k связных замкнутых множеств

$$F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_k. \tag{1}$$

Обозначим через C_x сумму тех замкнутых множеств системы (1), которые содержат точку x. Точка x принадлежит множеству G. Поэтому, если мы вычтем из G те замкнутые множества системы (1), которые не содержат точки x, то получим открытое множество $H(x)$, содержащее точку x и содержащееся в C_x.

Итак, мы доказали, что какова бы ни была точка x множества R и содержащее ее открытое множество U, всегда можно найти такое связное множество C_x и такое открытое множество $H(x)$, что

$$x \in H(x) \subset C_x \dot{\subset} U.$$

Обозначим через V наибольшее связное множество, содержащее точку x и содержащееся в U [1]). Имеем прежде всего

$$C_x \subset V \subset U.$$

Докажем, что множество V является открытым.

Пусть y — произвольная точка множества V. Тогда по предыдущему для нее можно найти такое связное множество C_y и такое открытое множество $H(y)$, что

$$y \in H(y) \subset C_y \subset U.$$

Так как V и C_y — связные множества, имеющие общую точку y и содержащиеся в U, то и их сумма

$$V \cup C_y$$

есть также связное множество, содержащееся в U. Но V есть наибольшее связное множество, содержащее точку x и содержащееся в U. Следовательно,

$$C_y \subset V.$$

Таким образом, для всякой точки y связного множества V найдется открытое множество $H(y)$ такое, что

$$y \in H(y) \subset V,$$

Следовательно, множество V может быть представлено в виде суммы открытых множеств $H(y)$, целиком содержащихся в V, и потому само множество V также является открытым множеством.

Таким образом, для всякой точки x и содержащего ее открытого множества U мы нашли связное открытое множество V, содержащее точку x и содержащееся в U, чем и доказана локальная связность множества R.

Теорема 2. *Если континуум C в двух точках a и b имеет индекс ветвления* 1, *а во всех остальных точках этого континуума индекс ветвления равен* 2, *то континуум C есть простая дуга ab.*

---

[1]) V есть сумма всех связных множеств, содержащих точку x и содержащихся в множестве U.

Доказательство. Так как континуум C во всех точках имеет конечный индекс ветвления, то он локально связен. Следовательно, каждые две его точки могут быть соединены простой дугой [1]). Пусть ab—простая дуга, соединяющая точки a и b. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что континуум C содержит точку c, не принадлежащую дуге ab. В силу локальной связности континуума C точку c можно соединить с точкой a простой дугой ac.

Обозначим через d последнюю точку дуги ac (считая в направлении от a к c), в которой дуга ac встречает дугу ab.

Если точка d не совпадает ни с одной из точек a или b, то в точке d континуум C имеет индекс ветвления $\geqslant 3$.

В самом деле, возьмем открытое множество G, содержащее точку d и настолько малое, что точки a, b и c не принадлежат ему. Из точки d исходят три дуги, не имеющие попарно общих точек: дуги da и db, вместе составляющие дугу ab, и дуга dc. Так как дуги da, db и dc суть связные множества, соединяющие точку d открытого множества G с точками a, b и c, не принадлежащими этому множеству, то они должны пересекать границу открытого множества G. Следовательно, граница всякого достаточно малого открытого множества, содержащего точку d, содержит по крайней мере три точки, вопреки предположению, что точка d континуума C имеет индекс ветвления, равный 2. Если мы предположим, что точка d совпадает с одной из точек a или b, то увидим, что эта точка будет иметь индекс ветвления, равный 2. Предположим, например, что точка d совпадает с точкой a. Тогда граница открытого множества G, содержащего точку d, и настолько малого, что точки b и c лежат вне его, пересекает как дугу ab, так и дугу ac, и, следовательно, точка d, совпадающая, по предположению, с точкой a, имеет индекс ветвления, равный 2, что противоречит условию теоремы, согласно которому индекс ветвления континуума C в точке a равен 1.

Итак, предполагая, что континуум C содержит точку c, не принадлежащую дуге ab, мы во всех случаях приходим к противоречию с условиями теоремы. Следовательно, континуум C совпадает с дугой ab.

---

[1]) Гл. I, § 6, теорема 3.

Теорема 3. *Если все точки континуума C имеют индекс ветвления, разный 2, то континуум C есть простая замкнутая линия.*

Доказательство. Выше (гл. I, § 6, теорема 4) мы доказали, что всякий континуум C содержит по крайней мере две такие точки a и b, которые его не разбивают. Это значит, что каждое из множеств $C \setminus a$ и $C \setminus b$ является связным. Так как в нашем случае все точки континуума C имеют конечный индекс ветвления, то он локально связен. Следовательно, любые две его точки можно соединить простой дугой. Соединим простой дугой точки a и b, которые не разбивают континуум C.

В континууме C найдется точка c, не принадлежащая дуге ab, так как если бы континуум C совпадал с простой дугой ab, то точки a и b этого континуума имели бы индекс ветвления, равный 1, что противоречит условию теоремы.

Так как точка a не разбивает континуум C, т. е. открытое множество $C \setminus a$ связно, и так как, кроме того, это множество локально связно, поскольку все его точки имеют конечный индекс ветвления, то точки b и c этого множества могут быть соединены простой дугой bc, не содержащей точку a. Точно так же две точки a и c связного и локально связного открытого множества $C \setminus b$ могут быть соединены простой дугой ac, не содержащей точку b.

Докажем прежде всего, что дуги ab, bc и ca не могут иметь попарно других общих точек, кроме своих концов. Покажем, например, что дуги ca и cb не имеют никаких других общих точек, кроме точки c. Предположим, что это не так, и пусть d — последняя точка дуги ca (считая от c к a), принадлежащая дуге cb. Пусть G — произвольное открытое множество, содержащее точку d и настолько малое, чтобы точки a, b и c лежали вне этого открытого множества. Из точки d исходят три дуги: дуги db и dc, на которые точка d делит дугу bc, и дуга da, не имеющие попарно никаких других общих точек, кроме точки d. Граница открытого множества G пересекает каждую из этих дуг. Поэтому точка d континуума C имеет индекс ветвления $\geqslant 3$, вопреки условию теоремы. Полученное противоречие показывает, что дуги ca и cb не имеют никаких других общих точек, кроме точки c.

Мы показали, что дуги ab, bc и ca не имеют никаких других общих точек, кроме своих концов. Следовательно, сумма этих трех дуг есть простая замкнутая линия L. Мы должны показать теперь, что континуум C не содержит никаких других точек, кроме точек линии L. Предположим противное, и пусть d будет точка континуума C, не принадлежащая линии L. Соединим точку d с какой-нибудь точкой линии L, например с точкой a, простой дугой ad и обозначим через e последнюю точку дуги ad (считая от a к d), в которой дуга ad встречает линию L. Пользуясь методом, неоднократно применявшимся выше, докажем, что точка e будет иметь индекс ветвления $\geqslant 3$ вопреки условию теоремы. Следовательно, в континууме C нет ни одной точки d, не принадлежащей линии L, и нам остается допустить, что континуум C совпадает с простой замкнутой линией L.

Теорема 4. *Если линия не содержит точек ветвления, т. е. индекс ветвления всех ее точек* $\leqslant 2$, *то линия является либо простой дугой, либо простой замкнутой линией.*

Доказательство. Если линия L, не содержащая точек ветвления, не имеет концевых точек, т. е. во всех точках линии индекс ветвления равен 2, то на основании теоремы 3 L есть простая замкнутая линия.

Если же линия L, не содержащая точек ветвления, имеет две концевые точки, то по теореме 2 эта линия есть простая дуга. Таким образом, чтобы закончить доказательство теоремы, нам нужно показать, что *если линия L не содержит точек ветвления, то она либо совсем не имеет концевых точек, либо имеет только две концевые точки.*

Чтобы в этом убедиться, мы должны доказать следующие два утверждения:

1°. *Если линия L имеет только одну концевую точку, то она имеет по крайней мере одну точку ветвления.*

2°. *Если число концевых точек линии L больше 2, то на линии непременно имеется по крайней мере одна точка ветвления.*

Докажем утверждение 1°. Предположим, что линия L имеет только одну концевую точку a. Так как L — континуум, то по доказанному [1]) на нем имеется по крайней мере две точки, которые его не разбивают.

[1]) Гл. II, § 6, теорема 3.

Обозначим через b точку линии L, отличную от точки a и не разбивающую линию L. Предположим, вопреки утверждению 1°, что линия L не имеет точек ветвления, т. е. что индекс ветвления линии L во всех ее точках $\leqslant 2$. Тогда линия L будет локально связна и потому всякие две ее точки можно соединить простой дугой.

Соединим простой дугой точки a и b. На линии L имеются точки, не принадлежащие дуге ab, так как если бы линия L совпадала с дугой ab, то у нее было бы две концевые точки a и b, вопреки предположению.

Пусть c — точка линии L, не принадлежащая дуге ab. Так как точка b не разбивает линию L, т. е. множество $L \setminus b$ связно (и локально связно), то точку a можно соединить с точкой c простой дугой, которая целиком лежит в открытом множестве $L \setminus b$ и, следовательно, не содержит точку b. Обозначим через d последнюю точку дуги ac (считая от a к c), в которой эта дуга встречает дугу ab.

Точка d не может совпадать с a, так как в этом случае индекс ветвления точки a был бы равен 2, вопреки предположению, что a — концевая точка. Следовательно, точка d отлична от точки a. В таком случае в точке d линия L имеет индекс ветвления $\geqslant 3$, так как граница любого достаточно малого открытого множества, содержащего точку d, имеет с линией L по крайней мере три общие точки: две из них лежат на дугах da и db, составляющих вместе дугу ab, а третья на дуге dc. Следовательно, d — точка ветвления линии L. Полученное противоречие доказывает наше утверждение 1°.

Для доказательства утверждения 2° нам понадобится следующая

Лемма. *Концевая точка не разбивает линию, т. е. множество, получающееся удалением из линии ее концевой точки, связно.*

Пусть a — концевая точка линии L. Предположим, что открытое (относительно L) множество $L \setminus a$ несвязно. Тогда его можно представить в виде суммы двух непустых открытых множеств G и H без общих точек.

Каждое из замкнутых множеств

$$\bar{G} = G \cup a$$

и

$$\bar{H} = H \cup a$$

связно. В самом деле, если мы предположим, например, что множество $\overline{G} = G \cup a$ несвязно, то его можно представить в виде суммы двух непустых замкнутых множеств P и Q без общих точек. Предположим, что точка a принадлежит множеству Q. Замкнутые множества P и $Q \cup \overline{H}$ не имеют общих точек и в сумме составляют L. Но это противоречит связности L. Следовательно, множество $\overline{G}$ связно. Точно так же доказывается и связность множества $\overline{H}$.

Пусть U — произвольное открытое множество, содержащее точку a и столь малое, что вне его имеются как точки множества $\overline{G}$, так и точки множества $\overline{H}$. Так как множества $\overline{G}$ и $\overline{H}$ связны и не имеют других общих точек, кроме точки a, то граница открытого множества U должна иметь общие точки как с $\overline{G}$, так и с $\overline{H}$. Но эти множества имеют только одну общую точку a, следовательно, граница множества U пересекает множества $\overline{G}$ и $\overline{H}$ в двух различных точках. Мы получили противоречие, так как, по предположению, индекс ветвления линии L в точке a равен 1. Остается допустить, что множество $L \setminus a$ связно. Наша лемма доказана.

Переходим к доказательству утверждения 2°.

Пусть a, b, c — три концевые точки линии L. Ни одна из них не разбивает линии L, т. е. каждое из множеств

$$L \setminus a, \; L \setminus b, \; L \setminus c$$

связно.

Если мы предположим, что линия L не имеет точек ветвления, то она локально связна и потому каждые две из точек a, b и c можно соединить простой дугой, не содержащей третьей точки. Из трех дуг ab, ac и bc каждые две имеют общие точки, отличные от их концов, так как, если бы, например, дуги ab и bc имели только одну общую точку b, то линия L имела бы в этой точке индекс ветвления 2, вопреки предположению, что b — концевая точка. Следовательно, дуги ab и bc имеют общую точку, отличную от b. Пусть d — последняя точка дуги bc, принадлежащая дуге ab. Тогда, как и выше, докажем, что линия L будет иметь в точке d индекс ветвления $\geqslant 3$ и, значит, d будет точкой ветвления. Полученное противоречие доказывает утверждение 2°.

Следующая теорема выясняет геометрический смысл индекса ветвления в том случае, когда этот индекс ветвления конечен.

Теорема 5. *Если линия L имеет конечное число точек ветвления и индекс ветвления каждой такой точки конечен, то из точки ветвления o индекса n выходят n простых дуг, не имеющих попарно других общих точек, кроме точки o, причем всякая окрестность точки o, не содержащая, кроме этой точки, никаких других точек ветвления, состоит из точек этих n дуг.*

Доказательство. Так как линия L в силу теоремы 1 локально связна и имеет в точке o индекс ветвления n, то существует связное открытое множество G, замыкание которого не содержит никаких других точек ветвления, кроме точки o, а граница содержит не менее n точек.

Пусть

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

точки границы множества G.

Присоединяя к множеству G его границу, мы получим локально связный континуум $\overline{G}$ [1]), содержащий точку o, по отношению к которому все множества вида

$$U_i = \overline{G} \setminus (a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_{i-1} \cup a_{i+1} \cup \ldots \cup a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

являются связными открытыми множествами. В силу локальной связности континуума $\overline{G}$ точку o можно соединить с каждой из точек a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ простой дугой oa_i так, чтобы дуга oa_i целиком содержалась в открытом (относительно $\overline{G}$) множестве U_i и, следовательно, не содержала ни одной из точек

$$a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Дуги oa_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ не имеют попарно никаких других общих точек, кроме точки o. В самом деле, если бы, например, дуги oa_1 и oa_2 имели общую точку, отличную от точки o, то это не могла бы быть ни точка a_1, ни точка a_2. Если обозначить через b последнюю точку дуги oa_1 (считая

---

[1]) См. теорему 1.

от o к a_1), которая в то же время принадлежит и дуге oa_2, то эта точка имела бы индекс ветвления, равный 3, так как из нее исходили бы три дуги, не имеющие попарно общих точек: дуги bo и ba_2 вместе составляющие дугу oa_2, и дуга ba_1. Но это невозможно, так как точка b принадлежит множеству $\overline{G}$, а никакая точка множества $\overline{G}$, отличная от точки o, по предположению, не является точкой ветвления.

Таким образом, мы показали, что из точки o исходит по меньшей мере n простых дуг, не имеющих попарно никаких других общих точек, кроме точки o. Покажем теперь, что каждая точка открытого множества G принадлежит одной из этих дуг. Предположим противное, т. е. что имеется точка c, принадлежащая множеству G и не лежащая ни на одной из дуг

$$oa_1,\ oa_2, \ldots,\ oa_n.$$

Тогда точку c можно соединить с точкой o простой дугой oc. Как и выше, можно показать, что дуга oc не имеет никаких других общих точек ни с одной из дуг oa_1, $oa_2, \ldots, oa_n$, кроме точки o.

Возьмем ε-окрестность точки o, выбирая ε так, чтобы это число было меньше каждого из расстояний от точки o до точек a_1, a_2, $\ldots$, a_n, c. Тогда граница каждого открытого множества, содержащего точку o и содержащегося в указанной ε-окрестности этой точки, содержит по крайней мере $n+1$ точку, так как каждая из дуг

$$oa_1,\ oa_2, \ldots,\ oa_n,\ oc,$$

имея одну точку внутри открытого множества G, а другую вне его, пересекает границу этого множества. Но это невозможно, так как линия L имеет в точке o индекс ветвления n. Полученное противоречие показывает, что всякая точка c открытого множества G принадлежит одной из дуг $oa_1, oa_2, \ldots, oa_n$. Наша теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Из доказанной теоремы, в частности, следует, что *если точка o имеет индекс ветвления 2, то из нее исходят две дуги, не имеющие никаких других общих точек, кроме точки o, и достаточно малая окрестность точки o есть открытая дуга (без концов), для которой точка o является внутренней.*

Если o — концевая точка, то из нее исходит единственная простая дуга, имеющая точку o своим концом, и достаточно малая окрестность точки o есть «полуоткрытая» дуга, одним из концов которой является точка o.

Структура всех линий конечного ветвления выясняется следующей теоремой.

Теорема 6. *Для того чтобы линию L можно было представить в виде суммы конечного числа простых дуг, не имеющих попарно никаких других общих точек, кроме своих концов, необходимо и достаточно, чтобы эта линия имела лишь конечное число точек ветвления, причем индекс ветвления каждой такой точки должен быть конечен.*

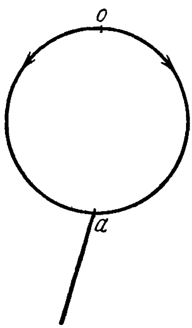
Предоставляя читателю установить необходимость условия, остановимся лишь на доказательстве его достаточности. Оно основано на следующей лемме.

Лемма. *Если линия L имеет лишь конечное число точек ветвления и индекс ветвления каждой такой точки является конечным, то множество концевых точек линии также конечно.*

Предположим противное, т. е. что множество концевых точек бесконечно. Так как линия L локально связна, то любую ее точку o можно соединить с концевой точкой простой дугой. Если бы среди этих дуг было бесконечное множество таких, которые не имеют никаких других общих точек, кроме точки o, то индекс ветвления точки o был бы бесконечным или неограниченным. Если же мы предположим, что имеется бесконечное множество пар дуг, имеющих, кроме точки o, другие общие точки, то отсюда будет следовать, что на каждой из этих дуг имеется по крайней мере одна точка ветвления, но тогда на линии L будет бесконечное множество точек ветвления, вопреки условию леммы.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 6. Покажем прежде всего, что из каждой точки o, индекс ветвления которой равен 2, исходят две дуги, не имеющие никаких других общих точек, кроме точки o, концами которых служат либо концевые точки линии L, либо ее точки ветвления. В последнем случае может оказаться, что концами обеих дуг, выходящих из точки o, будет одна и та же точка ветвления. В этом случае обе дуги вместе составляют простую замкнутую линию (черт. 20).

В силу замечания, сделанного в конце предыдущей теоремы, из точки o, индекс ветвления которой равен 2, выходят две дуги, не имеющие других общих точек, кроме точки o, и не содержащие внутри себя точек ветвления линии L. Пусть oa и ob — максимальные дуги, обладающие этим свойством. Тогда концы этих дуг не могут быть точками индекса 2. В самом деле, если бы, например, точка a имела индекс ветвления, равный 2, то ее можно было бы заключить внутрь открытой дуги cd, которая будет окрестностью точки a, не содержащей ни одной точки ветвления. Один из концов этой дуги, например c, будет принадлежать при этом дуге oa, тогда как другой ее конец d уже не будет принадлежать oa. Дуги oa и ad не имеют никаких других общих точек, кроме точки a. Поэтому od есть также простая дуга, не содержащая внутри себя точек ветвления линии L. Таким образом, дуга oa составляет часть дуги od и, следовательно, дуга oa не является максимальной дугой, не содержащей внутри себя точек ветвления. Из полученного противоречия мы должны заключить, что индекс ветвления линии L в точке a не может быть равен 2, т. е. что a или концевая точка, или точка ветвления.



Черт. 20.

Если мы предположим, что концы a и b обеих максимальных дуг, исходящих из точки o и не содержащих внутри себя точек ветвления, являются концевыми точками линии L, то в этом случае линия L есть простая дуга ab.

В самом деле, если бы множество $L \setminus ab$ было непусто, то оно, как и дуга ab, было бы замкнуто, так как всякая достаточно малая окрестность любой точки дуги ab содержит лишь точки этой дуги. Следовательно, линия L, представляющаяся в этом случае в виде суммы двух замкнутых непустых множеств ab и $L \setminus ab$, без общих точек не была бы связным множеством.

Таким образом, мы показали, что всякая точка o линии L принадлежит простой дуге, имеющей своими концами либо точки ветвления (которые могут и совпадать), либо точку ветвления и одну концевую точку. Но таких дуг может быть лишь конечное число, так как согласно нашему предположению линия L имеет лишь конечное число точек ветвления, а по только что доказанной лемме и конечное число концевых точек. Но в силу теоремы 5 из каждой точки ветвления исходит лишь конечное число дуг, а из концевой точки — всего одна дуга. Следовательно, число всех дуг конечно. Никакие две из этих дуг не могут иметь других общих точек, кроме своих концов, так как индекс ветвления внутренней точки каждой такой дуги равен 2.

Мы видели, что окружность (как и вообще всякая простая замкнутая линия) обладает тем свойством, что во всех ее точках индекс ветвления принимает одно и то же значение (равное 2). Возникает вопрос, существуют ли другие линии, у которых индекс ветвления во всех точках принимал бы одно и то же значение (не равное 2). Оказывается, ни для какого конечного n этого не может быть, так как имеет место следующая

Теорема 7. *Если все точки линии L имеют индекс ветвления $\geqslant n$, то на линии найдется точка, индекс ветвления которой $\geqslant 2n-2$.*

Мы будем доказывать теорему в следующей форме: *Если все точки линии L имеют индекс ветвления $< 2n-2$, то на линии найдется точка, индекс ветвления которой $< n$.*

Доказательство. Пусть A_0 — произвольное открытое множество линии L и его диаметр $< \delta_0$. Так как индекс ветвления в каждой точке линии $< 2n-2$, то существует открытое множество G, содержащееся вместе со своим замыканием в A_0, граница которого состоит менее чем из $2n-2$ точек. Пусть a_0 — одна из точек границы множества G.

Множество G входит в A_0 вместе со своим замыканием. Следовательно, граница множества G и, в частности, точка a_0 принадлежит множеству A_0; так как A_0 — открытое множество, то существует такое положительное число ε, что ε-окрестность точки a_0 целиком содержится в множестве A_0. Мы предположим, кроме того, что число ε меньше $\frac{1}{2}\delta_0$ (где δ_0 — диаметр множества A_0), а также меньше половины каждого из расстояний точки a_0 до остальных точек границы множества G.

Так как линия L во всех своих точках и, в частности, в точке a_0 имеет индекс ветвления $< 2n-2$, то существует открытое множество U, содержащее точку a_0 и содержащееся в $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности этой точки (где ε выбрано согласно указанным выше условиям), граница которого содержит менее чем $2n-2$ точек. Пусть k — число точек границы множества U. Тогда

$$k < 2n-2.$$

Множество U вместе со своим замыканием содержится в A_0. В самом деле, какова бы ни была точка x множества U,

$$\rho(a_0, x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon;$$

следовательно, точка x принадлежит ε-окрестности точки a_0, а значит, и открытому множеству A_0.

Диаметр множества U меньше $\frac{\delta_0}{2}$. В самом деле, если x и y — две точки множества U, то

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(a_0, x) + \rho(a_0, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon < \frac{1}{2}\delta_0,$$

откуда следует, что диаметр множества U

$$\delta(U) \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}\delta_0.$$

Замыкание $\overline{U}$ множества U не содержит, кроме точки a_0,, ни одной из точек границы множества G, так как если x — точка множества $\overline{U}$, то

$$\rho(a_0, x) \leqslant \varepsilon,$$

а ε выбрано так, что оно меньше половины каждого из расстояний точки a_0 до остальных точек границы множества G.

Обозначим через H открытое множество, дополнительное к множеству $\overline{G}$,

$$H = L \setminus \overline{G},$$

и рассмотрим открытые множества

$$U \cap G \quad \text{и} \quad U \cap H.$$

Имеем

$$U = (U \cap G) \cup [U \cap \mathrm{Гр}(G)] \cup (U \cap H).$$

Но

$$U \cap \text{Гр}(G) = a_0,$$

поэтому

$$U = (U \cap G) \cup a_0 \cup (U \cap H).$$

Рассмотрим границу открытого множества $U \cap G$. Она содержится в сумме границ множеств U и G

$$\text{Гр}(U \cap G) \subset \text{Гр}(U) \cup \text{Гр}(G).$$

Но из точек границы множества G в границу множества $U \cap G$ может войти только точка a_0, а из точек границы U — только точки, принадлежащие множеству G. Поэтому

$$\text{Гр}(U \cap G) \subset [\text{Гр}(U) \cap G] \cup a_0.$$

Точно так же найдем, что

$$\text{Гр}(U \cap H) \subset [\text{Гр}(U) \cap H] \cup a_0.$$

Так как граница множества U состоит из k точек и, следовательно, является конечным множеством, то конечными будут и множества

$$G \cap \text{Гр}(U) \quad \text{и} \quad H \cap \text{Гр}(U),$$

а значит, тем более конечными будут и множества

$$\text{Гр}(U \cap G) \quad \text{и} \quad \text{Гр}(U \cap H).$$

Предположим, что граница множества $(U \cap G)$ состоит из p точек, а граница множества $U \cap H$ — из q точек.

Тогда множество $\text{Гр}(U) \cap G$ будет содержать не менее $p-1$ точек, а множество $\text{Гр}(U) \cap H$ не менее чем $q-1$ точек.

Так как каждая точка линии L принадлежит одному из множеств G, H или $\text{Гр}(G)$, а границы множеств U и G общих точек не имеют, то отсюда следует, что каждая точка границы множества U принадлежит либо множеству G, либо множеству H. Число точек, входящих в границу множества U, равно k; число точек границы множества U, входящих в множество G, $\geqslant p-1$; число точек границы множества U, принадлежащих множеству H, $\geqslant q-1$, поэтому

$$(p-1)+(q-1) \leqslant k < 2n-2,$$

откуда

$$p+q<2n.$$

Из этого неравенства следует, что по крайней мере одно из чисел p или q меньше чем n.

Мы видим, таким образом, что граница одного из открытых множеств $U \cap G$ или $U \cap H$ состоит менее чем из n точек. Обозначим через A_1 то из открытых множеств $U \cap G$ или $U \cap H$, граница которого содержит меньше чем n точек. Так как

$$A_1 \subset U \subset \overline{U} \subset A_0,$$

то

$$\overline{A}_1 \subset A_0 .$$

Далее, так как диаметр множества U меньше $\frac{\delta_0}{2}$, то и диаметр δ_1 множества A_1 и подавно меньше $\frac{\delta_0}{2}$,

$$\delta_1 < \frac{1}{2}\delta_0.$$

Наконец, граница множества A_1 состоит менее чем из n точек.

Таким образом, мы доказали, что *если линия в каждой своей точке имеет индекс ветвления $< 2n-2$, то каково бы ни было открытое множество A_0 линии L, всегда найдется открытое множество A_1, содержащееся вместе со своим замыканием в множестве A_0, такое, что его диаметр $< \frac{1}{2}\delta_0$, а его граница содержит менее чем n точек.*

Применяя этот результат к множеству A_1, мы найдем множество A_2, содержащееся вместе со своим замыканием в множестве A_1 и такое, что его диаметр $< \frac{1}{4}\delta_0$, а граница состоит менее чем из n точек. Рассуждая подобным же образом и далее, мы получим убывающую последовательность открытых множеств

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_m \supset \ldots, \tag{2}$$

таких, что каждое следующее множество A_{m+1} вместе со своим замыканием содержится в предыдущем A_m:

$$\overline{A}_{m+1} \subset A_m;$$

диаметр множества A_m меньше $\frac{\delta_0}{2^m}$, граница каждого из множеств A_m состоит менее чем из n точек. Отсюда следует, что с возрастанием m диаметры множеств A_m (а, значит, и $\overline{A}_m$) стремятся к нулю. Поэтому множества

$$\overline{A}_1 \supset \overline{A}_2 \supset \ldots \supset \overline{A}_m \supset \ldots,$$

образующие убывающую последовательность, имеют единственную общую точку x_0.

Докажем, что в точке x_0 линия имеет индекс ветвления $< n$. Каково бы ни было положительное число ε, всегда можно найти натуральное число m, такое, что

$$\frac{\delta_0}{2^m} < \varepsilon.$$

Открытое множество A_m последовательности (2) имеет диаметр $< \frac{\delta_0}{2^m} < \varepsilon$. Граница множества A_m содержит менее чем n точек.

Таким образом, линия L в точке x_0 имеет индекс ветвления $< n$. Теорема 7 полностью доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что никакая линия, кроме окружности, не может иметь во всех точках один и тот же конечный индекс ветвления, так как если во всех точках линии L индекс ветвления равен n, то на ней найдется точка, индекс ветвления которой $\geqslant 2n-2$, а при $n \geqslant 3$

$$2n-2 > n.$$

Как показал П. С. Урысон, при всяком n существуют линии, состоящие только из точек, имеющих индекс ветвления n и $2n-2$. В частности, при $n=3$ имеем $2n-2=4$. Пример линии, состоящей только из точек с индексом ветвления 3 и 4, был указан нами в предыдущем параграфе в замечании 1 к примеру 11.

Урысон показал также, что существуют линии, имеющие во всех точках неограниченный индекс ветвления, счетный индекс ветвления и континуальный индекс ветвления. Примером линии, которая во всех точках имеет континуальный индекс ветвления, может служить ковер Серпинского.

§ 4. Некоторые общие свойства линий

В этом параграфе мы приводим ряд фактов, глубоко вскрывающих сущность понятия линии и связывающих общие определения линии с нашим представлением, выработавшимся при рассмотрении конкретных линий. Мы ограничиваемся здесь лишь формулировками теорем, не останавливаясь на их доказательстве.

Как мы уже говорили, определение линии, данное Урысоном, охватывает не только плоские, но и пространственные линии. Оно дословно может быть перенесено и на пространство n измерений[1]).

Но тут обнаруживается следующий замечательный факт: оказывается, что *в каком бы пространстве мы ни построили линию C, в обыкновенном трехмерном пространстве всегда найдется линия C', гомеоморфная (т. е. с топологической точки зрения тождественная) линии C.* Более того, все эти линии C' следует искать среди подмножеств не всего трехмерного пространства, но среди подмножеств некоторого континуума трехмерного пространства, который сам является линией. Другими словами, *в трехмерном пространстве есть такая «универсальная» линия, которая содержит в себе не только топологический образ всякой линии трехмерного пространства, но и топологический образ всякой линии n-мерного пространства*[2]).

Не имея возможности привести доказательства этого факта ввиду его трудности, мы ограничимся лишь описанием построения универсальной линии, которое было дано австрийским математиком К. Менгером.

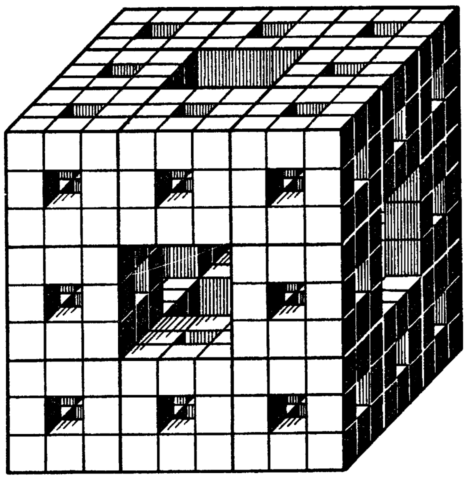
Куб V_0 делится на 27 равных кубиков и из него выбрасывается «центральный кубик» и шесть кубиков, примыкающих к нему по граням. Мы получаем в результате этой операции множество V_1, состоящее из 20 замкнутых кубиков первого ранга. С каждым из оставшихся кубиков первого ранга мы проделываем ту же операцию, т. е. делим каждый такой кубик на 27 равных кубиков и выбрасываем из каждого кубика первого ранга как центральный кубик, так и примыкающие к нему по граням шесть кубиков. Оставшееся

---

[1]) И вообще на любое множество, в котором определено понятие расстояния, т. е. на любое метрическое пространство.

[2]) И даже любого метрического пространства.

множество V_2 состоит из 400 кубиков второго ранга. С каждым из них мы поступаем так же, как и выше, в результате чего получим замкнутое множество V_3, состоящее из $20^3 = 8000$ кубиков третьего ранга. Этот процесс можно продолжать бесконечно для любого натурального числа n (черт. 21).



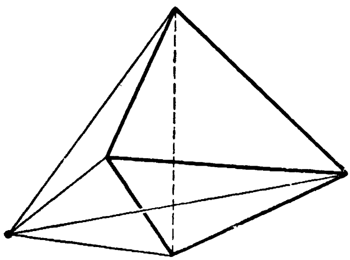
Черт. 21.

Множество точек куба V_0, оставшееся после выполнения всех этих операций, и есть искомая «универсальная» линия. Как общая часть бесконечной последовательности убывающих континуумов, она сама является континуумом.

Значительно труднее установить, что этот континуум будет размерности 1, т. е. действительно является линией.

Как мы видели, для плоских линий роль «универсальной» линии играет ковер Серпинского. Возникает вопрос: почему он не будет универсальной линией и для всех вообще пространственных кривых? Дело в том, что в *пространстве есть линии, которые нельзя отобразить топологически ни на какую плоскую линию*. Простейший пример такой линии мы получим, если рассмотрим линию, состоящую из шести ребер тетраэдра и четырех отрезков, соединяющих какую-нибудь точку пространства с четырьмя вершинами этого тетраэдра (черт. 22).

Но уже всякую линию, например четырехмерного пространства, можно топологически отобразить на некоторую линию трехмерного пространства. Отсюда, конечно, не следует, что эта линия трехмерного пространства обладает всеми вообще свойствами линии, данной в четырехмерном пространстве. Однако все те свойства, которые не разрушаются топологическим отображением, являются общими обеим линиям.

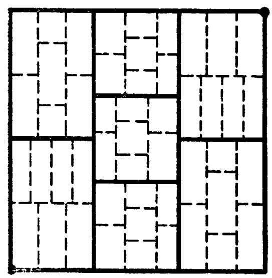


Черт. 22.

Общность, с которой мы определили понятие линии, может вызвать естественный вопрос, не является ли слишком широким тот класс объектов, которые мы определили как линии? Приведем два свойства линий, показывающие насколько близко соответствует тот класс множеств, которые мы назвали линиями, нашему обычному представлению о линиях, связанному, прежде всего, с прямой и окружностью.

Отрезок прямой может быть представлен как сумма конечного числа сколь угодно малых отрезков, причем никакая точка отрезка не принадлежит более чем двум частичным отрезкам. Аналогичным свойством обладает и любая линия и даже характеризуется этим свойством. А именно: *для того чтобы континуум C был линией, необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить при любом сколь угодно малом положительном ε в виде суммы конечного числа замкнутых множеств, каждое из которых имеет диаметр меньше ε, и таких, что никакая точка континуума не принадлежит более чем двум из этих замкнутых множеств.* Эта теорема, доказанная П. С. Урысоном в гораздо более общей форме, утверждает, в частности, что никакой континуум, не являющийся линией, уже этим свойством не обладает. Если взять, например, квадрат и сделать его разбиение на замкнутые множества достаточно мелким, то всегда найдется точка квадрата, принадлежащая по крайней мере трем из этих замкнутых множеств. Однако всегда можно найти сколь угодно мелкое разбиение квадрата на замкнутые множества, обладающие тем свойством, что никакая точка квадрата не принадлежит более чем трем из этих множеств (черт. 23).

Возвращаясь снова к линиям, заметим, что в указанном для них в теореме разбиении замкнутые множества могут и не быть связны. Для того чтобы они были континуумами, необходимо и достаточно, чтобы линия была непрерывным образом отрезка.



Черт. 23.

Другое свойство, сближающее введенное нами понятие линии с обычным представлением об этом предмете, состоит в том, что всякую линию сколь угодно малым сдвигом ее точек можно перевести в ломаную линию. Более точно этот факт, открытый советским математиком П. С. Александровым опять в гораздо более общих предположениях, можно сформулировать так: *для того чтобы компактное множество C было линией, необходимо и достаточно, чтобы при любом сколь угодно малом положительном ε его можно было отобразить на ломаную линию L так, чтобы каждая точка этой ломаной отстояла от соответствующей точки множества C менее чем на ε.*

Для окружности такое отображение осуществляется проще всего тем, что мы вписываем в эту окружность правильный многоугольник с достаточно большим числом сторон и проектируем (ортогонально) каждую дугу окружности на соответствующую сторону многоугольника. Аналогично решается вопрос и в общем случае. На основании предыдущей теоремы линия разбивается на конечное число достаточно малых кусков так, чтобы никакая точка линии не принадлежала более чем двум кускам. В каждом из этих кусков берется по точке. Каждые две такие точки соединяются прямолинейным отрезком в том случае, когда куски, в которых они содержатся, имеют общие точки. Мы получаем, таким образом, ломаную линию. На эту-то ломаную и отображается наша кривая, причем, взяв разбиение кривой достаточно мелким, можно добиться того, что каждая точка кривой будет переводиться в соответствующую точку ломаной линии малым сдвигом.

ПРИБАВЛЕНИЕ

О ПОНЯТИИ РАЗМЕРНОСТИ

Главное, что отличает линию от поверхности, тел и вообще от произвольных континуумов, состоит в том, что линия есть континуум, имеющий одно измерение или, как мы еще будем говорить, размерность 1. Мы разъяснили смысл этого понятия в применении к континуумам.

В настоящем прибавлении мы дадим общее определение размерности для произвольных множеств, принадлежащее П. С. Урысону, и разъясним его на ряде примеров. При этом мы будем предполагать, что множество R лежит на прямой, на плоскости или в пространстве (или даже в произвольном n-мерном пространстве) [1]. Мы не исключаем и того случая, когда множество R совпадает со всем пространством, так что приводимое ниже определение числа измерений пригодно не только для любого множества, лежащего в данном пространстве, но и для всего пространства. Общее определение размерности вводится по индукции.

Чтобы сделать его более понятным, мы разберем сначала отдельно случаи размерности 0 и размерности 1, а затем уже сформулируем и общее определение. Мы говорим, что *множество R имеет в точке x размерность* 0, *если, как бы ни было мало положительное число* ε, *найдется такое открытое множество G, содержащее точку x и имеющее диаметр $< \varepsilon$, граница которого не содержит ни одной точки* (есть пустое множество).

Если множество R имеет размерность 0 *в каждой своей точке, то мы говорим, что множество R имеет размерность* 0.

---

[1]) В формулировках общих определений и теорем мы по существу будем пользоваться тем, что R есть метрическое пространство.

Формулируя кратко вышеприведенное определение, мы будем говорить, что *множество R имеет размерность* 0, *если каждая его точка содержится в сколь угодно малом (по диаметру) открытом множестве, граница которого не содержит ни одной точки.* Вспоминая, что границей открытого множества называется совокупность тех его предельных точек, которые не принадлежат самому множеству, мы можем сказать также, что *множество R имеет размерность* 0, *если каждая его точка содержится в сколь угодно малом открытом множестве, которое в то же время является и замкнутым.*

Приведем несколько примеров. Множество R, состоящее из одной точки или из конечного числа точек, всегда имеет размерность 0, так как в этом случае любая точка является множеством, одновременно замкнутым и открытым (и имеет диаметр 0).

Любое счетное множество точек R имеет размерность 0. В самом деле, пусть x — произвольная точка множества R, а ε — любое положительное число. Обозначим через r положительное число, меньшее $\frac{\varepsilon}{2}$ и отличное от каждого из расстояний точки x до остальных точек множества R. Такое число существует, так как множество R счетно, а множество положительных чисел, заключенных между 0 и $\frac{\varepsilon}{2}$, имеет мощность континуума. Совокупность всех точек множества R, удаленных от точки x менее чем на r, есть открытое множество диаметра $< \varepsilon$, содержащее точку x, граница которого не содержит ни одной точки множества R, так как все точки границы должны были бы находиться от точки x на расстоянии, равном r, а в R таких точек нет.

Отсюда следует, что множество всех точек пространства любого числа измерений, все координаты которых рациональны, будет размерности 0, так как такое множество всегда счетно.

В частности, множество всех рациональных точек прямой имеет размерность 0. Множество всех иррациональных точек прямой также имеет размерность 0, так как, какую бы иррациональную точку x мы ни взяли и каким бы малым ни выбрали положительное число ε, всегда можно найти два таких рациональных числа a и b, чтобы имели место неравенства

$$x - \frac{\varepsilon}{2} < a < x < b < \frac{x + \varepsilon}{2}.$$

Множество G иррациональных точек, заключенных между точками a и b, является открытым по отношению к R. Его граница не содержит ни одной точки, так как никакая иррациональная точка, не входящая в G, не будет для G предельной точкой. Диаметр множества G меньше ε.

Из теорем, относящихся к множествам размерности 0, упомянем следующую теорему, которая нам понадобится в дальнейшем:

Для того чтобы компактное множество имело размерность 0, *необходимо и достаточно, чтобы оно не содержало никакого континуума.*

Чтобы определить понятие множества размерности 1, нам существенно понадобится только что введенное понятие множества размерности 0. В этом сказывается индуктивный характер определения размерности.

Мы говорим, что *множество R в принадлежащей ему точке x имеет размерность* 1, *если выполнены одновременно следующие два условия*:

1°. *Каково бы ни было положительное число ε, найдется открытое множество G с диаметром $< \varepsilon$, содержащее точку x, граница которого есть или пустое множество или множество размерности* 0.

2°. *Существует такое число δ, что в границу всякого открытого множества диаметра $< \delta$, содержащего точку x, входит по крайней мере одна точка.*

Если ограничиться лишь требованием 1°, то ему удовлетворяют как множества размерности 0, так и множества размерности 1; следовательно, оно выражает условие того, чтобы множество R имело в точке x размерность, меньшую или равную 1. Требование 2° означает, что размерность множества R в точке x отлично от 0.

Мы говорим, что *множество R имеет размерность* 1, *если размерность множества R в каждой его точке $\leqslant 1$ и хотя бы в одной точке размерность множества R равна* 1.

Прямая линия имеет размерность 1 в каждой своей точке. В самом деле, если x — произвольная точка прямой и ε — произвольное положительное число, то любой интервал длины ε, содержащий точку x, есть открытое множество, удовлетворяющее требованию 1° определения множества размерности 1, так как его граница, состоящая из двух точек (концов интервала), имеет размерность 0. С другой стороны, всякое открытое множество на прямой состоит из одного или нескольких интервалов[1]). Поэтому его граница содержит по крайней мере две точки, а значит, R не является множеством размерности 0. Следовательно, выполнено и требование 2° определения множеств размерности 1. Таким образом, прямая имеет размерность 1 в каждой своей точке.

Подобным же образом можно показать, что и окружность в каждой своей точке имеет размерность 1.

В самом деле, пусть x — произвольная точка окружности и ε — произвольное положительное число. Дуга окружности, содержащая точку x и стягиваемая хордой длины $< \varepsilon$, есть открытое, по отношению к окружности, множество диаметра $< \varepsilon$, содержащее точку x, граница которого состоит из двух точек — концов дуги и, следовательно, имеет размерность 0. С другой стороны, так как всякое открытое множество на окружности состоит из одной или нескольких дуг (без их концов), то граница любого открытого множества, лежащего на окружности, содержит по крайней мере две точки. Из этих рассуждений следует, что окружность в точке x имеет размерность 1.

На основании упомянутой выше теоремы о том, что компактное множество имеет размерность 0 тогда и только тогда, когда оно не содержит никакого континуума, мы можем сказать теперь, что *линии — это такие континуумы, которые имеют размерность* 1 в смысле только что приведенного определения.

Перейдем к общему определению понятия числа измерений.

Мы уже говорили, что понятие числа измерений вводится по индукции, причем индукцию здесь удобно начать с числа -1. При этом размерность -1 мы вводим лишь для удобства изложения, приписывая ее тем «множествам», которые вообще не содержат ни одной точки.

Предположим, как это всегда делается в случае индуктивных определений, что мы уже знаем, каким множествам

---

1) Множество интервалов, из которых состоит открытое множество на прямой, может быть конечным или бесконечным (счетным).

приписывается размерность 0, 1, 2, ..., $n-1$, и, пользуясь этим, установим, каким множествам следует приписывать размерность n.

Мы говорим, что *множество R имеет в точке x размерность n, если*:

1° *при любом* ε *найдется открытое множество диаметра* $< \varepsilon$, *граница которого есть или множество размерности* 0, *или множество размерности* 1 *и т. д., или, наконец, множество размерности* $n-1$,

2° *существует такое* δ, *что граница всякого открытого множества диаметра* $< \delta$, *содержащего точку* x, *не является ни множеством размерности* 0, *ни множеством размерности* 1 *и т. д., ни множеством размерности* $n-2$ [1]).

Требование 1° означает, что множество R в точке x имеет или размерность 0, или размерность 1 и т. д., или, наконец, размерность $n-1$, следовательно, оно выражает условие того, что множество R в точке x имеет размерность $\leqslant n$. Требование 2° означает, что размерность множества R в точке x не равна ни одному из чисел 0, 1, ..., $n-1$.

Мы говорим, что *множество R имеет размерность n, если в каждой своей точке оно имеет размерность $\leqslant n$ и по крайней мере в одной точке его размерность равна n.*

Разберем это определение применительно к множествам размерности 1. Условие 1° здесь означает, что при любом ε найдется открытое множество диаметра $< \varepsilon$, содержащее точку x, граница которого имеет размерность -1 или 0; условие 2° имеет здесь тот смысл, что если мы возьмем δ достаточно малым, то граница всякого содержащего точку x открытого множества диаметра $< \delta$ не должна иметь размерность -1, т. е. не должна быть пустым множеством.

В случае размерности 2 каждая точка множества должна содержаться при любом ε в открытом множестве диаметра $< \varepsilon$, граница которого имеет размерность -1, 0 или 1; однако существует δ такое, что граница всякого открытого множества диаметра $< \delta$, содержащего точку x, не является ни множеством размерности -1, ни множеством размерности 0.

1) Отсюда еще не следует, что граница любого открытого множества диаметра $< \delta$, содержащего точку x, непременно имеет размерность $n-1$.

Возьмем, например, плоскость. Так как каждая ее точка является центром круга сколь угодно малого диаметра, то можно сказать, что всякая точка плоскости содержится в сколь угодно малом открытом множестве, граница которого имеет размерность 1. Следовательно, плоскость в каждой своей точке имеет размерность $\leqslant 2$.

Чтобы доказать, что размерность плоскости в каждой ее точке в точности равна 2, достаточно показать, что граница каждого открытого ограниченного множества на плоскости не может быть ни множеством размерности -1, ни множеством размерности 0.

Если бы граница открытого множества на плоскости была пустым множеством, то это означало бы, что открытое множество было одновременно и замкнуто, но тогда и его дополнение также было бы одновременно множеством открытым и замкнутым и, следовательно, вся плоскость разбивалась бы на два замкнутых множества без общих точек. Но это невозможно, так как плоскость есть множество связное.

Верно и то, что граница открытого ограниченного множества на плоскости не может быть нульмерным множеством.

В самом деле, граница всякого открытого ограниченного множества на плоскости является замкнутым и ограниченным множеством и потому обладает свойством компактности. Если предположить, что она имеет размерность 0, то на основании упомянутой выше теоремы о нульмерных множествах она не будет содержать никакого континуума.

Но выше (см. сноску на стр. 89) мы говорили, что если компактное множество на плоскости не содержит никакого континуума, то оно не разбивает плоскость, в то время как граница $\text{Гр}(G)$ всякого открытого множества G на плоскости разбивает плоскость R на два открытых множества G и $R \setminus \bar{G}$ без общих точек:

$$R \setminus \text{Гр}(G) = G \cup (R \setminus \bar{G}),$$

$$G \cap (R \setminus \bar{G}) = 0.$$

Следовательно, граница открытого ограниченного множества на плоскости не может быть множеством размерности 0. Дело обстоит значительно сложнее, если мы хотим показать, что пространство в каждой своей точке имеет размерность 3. При этом оказывается, что нет существенной разницы между случаем трехмерного пространства и пространства n измерений. Поэтому мы сразу обратимся к случаю размерности n.

Не имея возможности очертить здесь даже путь, которому надо следовать, чтобы убедиться, что пространство n измерений имеет размерность n в смысле Урысона, мы лишь перечислим те теоремы теории размерности, из которых получается этот основной результат, попутно познакомившись с наиболее существенными фактами этой ветви топологии.

Совсем просто доказываются следующие две теоремы:

Теорема 1. *Если размерность множества R равна n, то размерность всякого подмножества R' множества R может быть или меньше n или равна n.*

Теорема 2. *Всякие два гомеоморфных между собой множества имеют одну и ту же размерность.*

В частности, если множество R имеет в точке x размерность n, то гомеоморфное ему множество S также имеет размерность n в точке y, соответствующей точке x при данном гомеоморфном отображении.

Теоремы 1 и 2 доказываются по индукции. Пользуясь ими и ведя рассуждения по индукции, легко доказать, что имеет место

Теорема 3. *Пространство n измерений имеет размерность $\leqslant n$ (в смысле Урысона) в каждой своей точке.*

Вся трудность заключается в том, чтобы доказать, что размерность пространства n измерений в точности равна n. Существуют различные пути установления этого факта. Наметим один из них.

Прежде всего доказывается такая общая

Теорема 4. *Если компактное множество R имеет размерность $\leqslant n$ в каждой своей точке, то при любом ε его можно покрыть конечной системой замкнутых множеств, каждое из которых имеет диаметр $< \varepsilon$, так что никакая точка множества не принадлежит более чем $n+1$ множествам этой системы.*

Не давая доказательства этой теоремы, приведем лишь несколько примеров для ее иллюстрации.

Возьмем сначала в качестве множества R отрезок прямой. Он имеет размерность 1 в каждой своей точке. Разделим его на столько равных частей, чтобы длина каждой части была меньше чем данное положительное число ε; тогда каждая точка отрезка является либо внутренней точкой каждого из маленьких отрезочков, либо общим концом двух таких отрезков.

Возьмем теперь квадрат. Он, как и вся плоскость, в каждой своей точке имеет размерность 2. При любом ε его можно разбить на прямоугольники, стороны которых параллельны сторонам квадрата, а диагонали имеют длину $< \varepsilon$. При этом никакая точка квадрата не будет принадлежать более чем трем из этих прямоугольников (см. черт. 23).

Наконец, если за множество R возьмем куб, то его можно разбить на прямоугольные параллелепипеды, грани которых параллельны граням куба, а длины диагоналей $< \varepsilon$, так что никакая точка куба не будет принадлежать более чем четырем параллелепипедам.

Имеет место и обратная теореме 4

Теорема 5. *Если компактное множество R при любом ε допускает разбиение на замкнутые множества диаметра $< \varepsilon$ и такие, что никакая точка множества R не принадлежит более чем $n+1$ из этих множеств, то все множество R имеет размерность $\leqslant n$.*

Сопоставляя утверждения прямой и обратной теорем, мы приходим к следующему заключению.

Теорема 6. *Для того, чтобы компактное множество R имело размерность n, необходимо и достаточно, чтобы при любом ε это множество можно было покрыть системой замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon$ так, чтобы никакая точка множества R не принадлежала более чем $n+1$ множеству этой системы; однако существует такое δ, что если все множества системы имеют диаметр $< \delta$, то какие-нибудь $n+1$ из этих множеств непременно имеют общую точку.*

Это свойство имеет очень важное значение для всей теории размерности и потому его часто принимают за определение размерности компактных множеств, говоря, что *компактное множество R имеет размерность n, если при любом ε множество R может быть покрыто системой замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon$, так что никакая точка множества R не принадлежит более чем $n+1$ множествам этой системы*, а если взять ε достаточно малым, то в R всегда найдется точка, принадлежащая $n+1$ множествам системы.

После того как установлено это общее свойство множеств размерности n, доказывается, что им обладает всякий n-мерный симплекс[1]). Совсем легко доказать, что при любом ε симплекс можно разбить на конечное число замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon$ так, чтобы никакая точка симплекса не принадлежала более чем $n+1$ множеству разбиения. Для этого достаточно заключить симплекс в n-мерный куб, разбить этот последний на прямоугольные параллелепипеды, длины диагоналей которых были бы $< \varepsilon$, так чтобы никакие $n+2$ из этих параллелепипедов не имели общей точки, и взять в качестве элементов разбиения симплекса множества, являющиеся общей частью симплекса и каждого из параллелепипедов.

Самой трудной частью является доказательство того факта, что существует такое δ, что если диаметры замкнутых множеств, на которые разбивается симплекс, меньше δ, то среди них найдутся такие $n+1$, которые непременно имеют общую точку.

Так как симплекс является компактным множеством, то из сопоставления общей теоремы 6 с этим свойством симплекса и вытекает, что n-мерный симплекс имеет размерность n (в смысле Урысона) по крайней мере в одной своей точке. Пусть это будет точка x; тогда не только симплекс, но и все пространство имеет в точке x размерность n. В самом деле, мы уже отмечали, что размерность пространства n измерений в каждой его точке $\leqslant n$ (теорема 3).

Меньше чем n она быть не может, так как симплекс в точке x имеет размерность $\geqslant n$. Остается заключить, что размерность пространства в точке x в точности равна n.

Наконец, пространство n измерений однородно в том смысле, что всякую его точку x можно перевести в другую точку y с помощью гомеоморфного отображения. Достаточно хотя бы рассмотреть параллельный перенос, переводящий точку x в точку y. Но в точке x пространство имеет размерность n, следовательно, по теореме 2 оно будет иметь размерность n и в точке y. Так как точку y мы взяли произ-

[1]) Нульмерным симплексом является точка, одномерным — отрезок, двумерным — треугольник, трехмерным — тетраэдр. n-мерный симплекс может быть определен как множество точек n-мерного пространства, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0,$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1.$$

вольно, то отсюда следует, что пространство n измерений имеет размерность n в смысле Урысона в каждой своей точке.

Мы рассмотрели один из путей, по которому проводится доказательство того факта, что пространство n измерений имеет размерность n (в смысле Урысона) в каждой своей точке. Существуют и другие пути доказательства этой теоремы, но все они, как и указанные нами, изобилуют трудными моментами. Спрашивается, стоило ли тогда вводить такое определение размерности, если даже для доказательства того обстоятельства, что пространство имеет размерность 3 (а этот случай никак не проще общего случая пространства n измерений), понадобилось построение целой теории!

Это определение может быть оправдано, во-первых, тем, что с его помощью можно характеризовать с точки зрения их размерности любые множества пространства n измерений (мы видели это на примере линий); во-вторых, и это не менее важно, что, только пользуясь этим определением размерности, мы можем доказать, что два пространства, имеющих разное число измерений, нельзя взаимно однозначно и взаимно непрерывно отобразить друг на друга [1]). Теперь это просто следует из сопоставления того обстоятельства, что пространство n измерений имеет размерность n в смысле Урысона, с тем, что два множества, гомеоморфных друг другу, имеют одну и ту же размерность. Приведенное нами определение необходимо, в частности, для того, чтобы доказать, что каждую точку пространства нужно задавать непременно тремя координатами, если желать, чтобы координаты непрерывно зависели от точки, а точка от координат.

[1]) Это предложение носит название теоремы об инвариантности числа измерений и имеет очень важное значение для всей математики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Цена 2 р. 30 к.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1954