ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Л. П. СТОЙЛОВА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

*Рекомендовано
Федеральным государственным автономным учреждением «Федеральный институт развития образования» (ФГАУ «ФИРО») в качестве учебного пособия для использования в учебном процессе образовательных учреждений, реализующих программы среднего профессионального образования по специальности «Преподавание в начальных классах»*

Регистрационный номер рецензии 560 от 20 декабря 2013 г. ФГАУ «ФИРО»

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2014

УДК 51(075.32)
ББК 22.12я723
С81

Рецензент —
кандидат педагогических наук, преподаватель ГБОУ СПО
Педагогический колледж № 18 «Митино» *А.И.Болотова*

Стойлова Л.П.

С81 Теоретические основы начального курса математики : учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / Л.П.Стойлова. — М. : Издательский центр «Академия», 2014. — 272 с.

ISBN 978-5-4468-0768-0

Учебное пособие создано в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности «Преподавание в начальных классах», ПМ.01 Преподавание по программам начального общего образования (МДК.01.04).

В пособии раскрыты научные основы материала, изучаемого в начальном курсе математики, с учетом знаний, полученных студентами в школьном курсе математики. Большое внимание уделено совершенствованию логической грамотности и математической культуры студентов — будущих учителей начальной школы. Теоретический материал дополнен вопросами и заданиями, цель которых — способствовать усвоению содержания начального курса математики.

Для студентов учреждений среднего профессионального образования.

УДК 51(075.32)
ББК 22.12я723

ISBN 978-5-4468-0768-0

Уважаемый читатель!

Учебное пособие является частью учебно-методического комплекта по специальности «Преподавание в начальных классах» и может быть использовано при изучении профессионального модуля ПМ. 01 Преподавание по программам начального общего образования (МДК. 01.04).

Учебно-методические комплекты нового поколения включают традиционные и инновационные учебные материалы, позволяющие обеспечить изучение общеобразовательных и общепрофессиональных дисциплин и профессиональных модулей. Каждый комплект содержит в себе учебники и учебные пособия, средства обучения и контроля, необходимые для освоения общих и профессиональных компетенций, в том числе и с учетом требований работодателя.

Учебные издания дополняются электронными образовательными ресурсами. Электронные ресурсы содержат теоретические и практические модули с интерактивными упражнениями и тренажерами, мультимедийные объекты, ссылки на дополнительные материалы и ресурсы в Интернете. В них включен терминологический словарь и электронный журнал, в котором фиксируются основные параметры учебного процесса: время работы, результат выполнения контрольных и практических заданий. Электронные ресурсы легко встраиваются в учебный процесс и могут быть адаптированы к различным учебным программам.

Предисловие

Переход начальной школы на новый Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образования (ФГОС НОО), возможность выбора учителем методической системы обучения и конструирования собственной, задачи всестороннего развития младших школьников средствами предмета требуют от учителя хорошей математической подготовки, глубокого понимания сути математических понятий и фактов. Дело не только в том, что в начальных классах закладываются основы таких важнейших понятий, как «число» и «величина», происходит ознакомление с элементами буквенной символики и геометрии, развиваются логические умения, но и в том, что многие математические понятия младшие школьники используют без строгих определений, а во многих случаях и неявно. Перечисленные моменты предъявляют особые требования к математической подготовке учителя начальной школы.

Учитель должен

владеть:

- понятиями натурального числа и величины;

знать:

- различные подходы к определению арифметических операций над числами, их свойства;
- современные взгляды на понятие задачи и процесс ее решения;
- свойства геометрических фигур на плоскости и в пространстве;
- логические основы математики;

уметь:

- решать текстовые, логические, комбинаторные задачи;
- решать несложные геометрические задачи;

обладать:

- логической культурой.

Данное учебное пособие призвано обеспечить такую подготовку учителя в условиях его обучения в педагогическом колледже.

Назначение учебного пособия — помочь будущим учителям начальных классов овладеть:

- математическим материалом, который необходим им для грамотного обучения математике младших школьников;
- логической культурой, усвоив такие логические формы мышления, как понятие, высказывание, высказывательная форма, умозаключение;
- умением решать текстовые задачи арифметическим методом, преобладающим в начальном обучении математике;
- умением решать несложные комбинаторные задачи;
- умением выполнять логико-математический анализ материала учебников математики для начальных классов.

Композиционно учебное пособие состоит из пяти разделов, которые разделены на главы, главы — на подразделы. Каждый подраздел содержит, как правило, информацию об особенностях изучения материала в начальном курсе математики и заканчивается вопросами и заданиями, предназначенными как для более глубокого усвоения теории, так и для формирования у будущего учителя профессиональных умений.

Для расширения кругозора будущих учителей в пособие включены исторические сведения о возникновении и развитии понятия числа, геометрической фигуры и единиц величин.

Раздел I

ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ

Изучение математики, как правило, связано с усвоением определенной системы понятий, предложений и доказательств. Чтобы овладеть этой системой и затем успешно применять приобретенные знания и умения, обучая младших школьников и решая задачу их развития средствами математики, необходимо сначала усвоить, каковы особенности математических понятий, как устроены их определения, предложения, выражающие свойства понятий, и доказательства. Эти знания нужны учителю начальных классов еще и потому, что он первым вводит детей в мир математических знаний, и от того, как грамотно и успешно он это осуществит, зависит и отношение ребенка к математике в дальнейшем. Такая подготовка может быть получена в процессе освоения материала раздела «Логические основы математики».

Логика (от греч. *logos* — слово, разум, мысль, закономерность) — наука, которая изучает процесс мышления человека с точки зрения структуры мыслей, правильности рассуждений, без учета конкретного содержания мыслей. Предметом логики являются такие формы мышления, как понятия, суждения, умозаключения, операции с ними и законы мышления.

Изучение элементов логики требует знания теоретико-множественного языка, который будет использоваться не только при рассмотрении логической структуры математических понятий, предложений и доказательств, но и при построении всего курса.

Глава 1
МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

В конце XIX в. возникла новая область математики — теория множеств, одним из создателей которой был немецкий математик

Георг Кантор. За небольшой срок теория множеств стала фундаментом всей математики.

В данном курсе мы познакомимся с некоторыми основными понятиями теории множеств. Знания в этой области нужны учителю начальных классов, во-первых, для понимания содержания начального курса математики, независимо от того, явно или неявно в нем используются теоретико-множественные понятия; во-вторых, для освоения таких важных с профессиональной точки зрения понятий, как взаимно-однозначное соответствие, отношение, число, геометрическая фигура.

1.1. ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА И ЭЛЕМЕНТА МНОЖЕСТВА

В математике часто рассматривают те или иные группы объектов как единое целое: натуральные числа, треугольники, квадраты и т. д. Все эти различные совокупности называют ***множествами.***

Понятие множества является одним из основных понятий математики и поэтому не определяется через другие. Его можно пояснить на примерах. Так, можно говорить о множестве гласных букв русского алфавита, множестве натуральных чисел, множестве треугольников.

Математический смысл слова «множество» отличается от того, как оно используется в обыденной речи, где его связывают с большим числом предметов. В математике этого не требуется. Здесь можно рассматривать множество, состоящее из одного объекта, и множество, не содержащее ни одного объекта.

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, ..., Z.

Множество, не содержащее ни одного объекта, называют ***пустым*** и обозначают символом $\varnothing$.

Объекты, из которых образовано множество, называют ***элементами*** множества.

Элементы множества принято обозначать строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, ..., z.

В математике нередко приходится выяснять, принадлежит какой-либо объект рассматриваемому множеству или не принадлежит. Например, мы говорим, что 5 — число натуральное, а 0,75 не является натуральным числом. Другими словами, мы утверждаем, что число 5 принадлежит множеству натуральных чисел, а число 0,75 ему не принадлежит.

Предложение «Объект a принадлежит множеству A» можно записать, используя символы: $a \in A$. Предложение «Объект a не принадлежит множеству A» можно записать так: $a \notin A$.

Например, если A — множество однозначных чисел, то утверждение «Число 3 — однозначное» можно записать так: $3 \in A$. Запись $12 \notin A$ означает, что «Число 12 не является однозначным», или «Число 12 не принадлежит множеству A», или «Множество A не содержит числа 12».

Заметим, что в геометрии, если точка является элементом какого-либо множества, то ее обозначают заглавной буквой. Например, если X — множество точек отрезка AB, то предложение «Точка P лежит на отрезке AB» можно записать: $P \in X$ или $P \in AB$.

Множества бывают ***конечные*** и ***бесконечные***. Эти понятия мы принимаем без определения. Поясним их на примерах. Так, конечными являются множество дней недели, множество месяцев в году, а бесконечными — множество точек на прямой, множество натуральных чисел.

Для ряда числовых множеств в математике приняты стандартные обозначения:

N — множество натуральных чисел;

Z — множество целых чисел;

Q — множество рациональных чисел;

R — множество действительных чисел.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Запишите, используя символы:
   а) число 316 — натуральное;

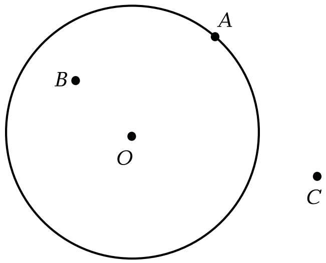


Рис. 1.1

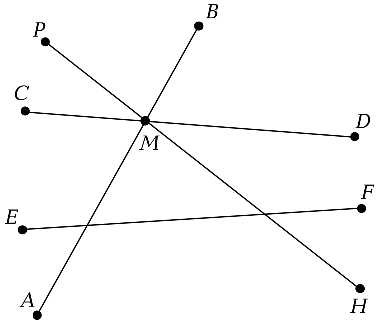


Рис. 1.2

б) число 28 — не является натуральным;
в) число 12,5 — натуральное.

2. Пусть *B* — множество четных однозначных чисел. Прочитайте следующие высказывания и укажите среди них верные:
а) $8 \in B$; б) $12 \in B$; в) $0 \in B$; г) $-6 \in B$.
3. Пусть *M* — множество точек окружности, изображенной на рис. 1.1. Прочитайте следующие предложения и укажите среди них верные:
а) $A \in M$; б) $O \in M$; в) $B \in M$; г) $C \notin M$.
4. Как изменить условие задачи 3, чтобы все утверждения а)—г) были верными?
5. Запишите с помощью символов $\in$ и $\notin$, какие из отрезков *AB*, *CD*, *EF* и *PH* проходят через точку *M*, а какие через нее не проходят (рис. 1.2).

1.2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ

Как уже отмечалось, понятие множества мы используем без определения. Но как узнать, является та или иная совокупность множеством или не является?

Считают, что множество определяется своими элементами, т. е. ***множество задано***, *если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.*

Множество можно задать, ***перечислив все его элементы***. Например, если мы скажем, что множество *A* состоит из чисел 3, 4, 5 и 6, то мы зададим это множество, поскольку все его элементы окажутся перечисленными.

При этом возможна запись, в которой перечисляемые элементы заключаются в фигурные скобки: $A = \{3, 4, 5, 6\}$.

Однако если множество бесконечно, то его элементы перечислить нельзя. Трудно задать таким способом и конечное множество с большим числом элементов. В таких случаях применяют другой способ задания множества — указывают его характеристическое свойство.

Характеристическое свойство *множества — это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит.*

Рассмотрим, например, множество *A* двузначных чисел. Свойство, которым обладает каждый элемент данного множества, — «быть двузначным числом». Это характеристическое свойство дает возможность решать вопрос о том, принадлежит какой-либо объект множеству A или не принадлежит. Так, число 45 содержится в множестве A, поскольку оно двузначное, а число 145 множеству A не принадлежит, так как оно не является двузначным.

Случается, что одно и то же множество можно задать, указав различные характеристические свойства. Например, множество квадратов можно задать как множество прямоугольников с равными смежными сторонами и как множество ромбов с прямым углом.

В тех случаях, когда характеристическое свойство множества можно представить в символической форме, возможна соответствующая запись множества.

Например, множество A натуральных чисел, меньших 7, можно задать так: $A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } x < 7\}$.

При такой записи буквой x обозначается элемент множества A. Для этих целей можно использовать и другие буквы латинского алфавита.

Итак, для того чтобы задать некоторое множество, достаточно либо перечислить все его элементы, либо указать его характеристическое свойство. Второй способ более общий: он позволяет задавать и конечные, и бесконечные множества.

В начальном курсе математики умение переходить от одного способа задания множества к другому формируется уже у младших школьников при выполнении, например, таких упражнений.

Задача 1. Запишите натуральные числа, которые больше, чем 65, и меньше, чем 75.

Решение. Множество чисел задано с помощью характеристического свойства «быть больше 65 и меньше 75». Требуется перечислить элементы этого множества: 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74.

Задача 2. Каким свойством обладают все числа ряда: 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92?

Решение. Перечислены все элементы множества, обладающего характеристическим свойством: «состоять из двузначных чисел, запись которых оканчивается цифрой 2».

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Запишите с помощью знака равенства и фигурных скобок предложения:
   а) X — множество чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5;
   б) Y — множество букв a, b, c.
2. Задайте, используя символы, множество P, если оно состоит из натуральных чисел:
   а) больших 100, но меньших 200;

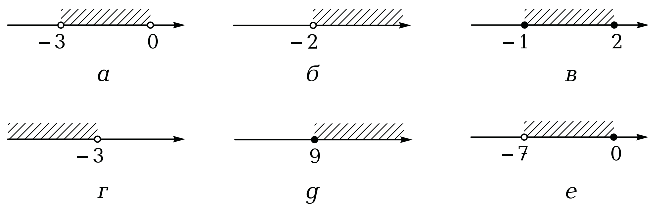


Рис. 1.3

б) меньших 150.

3. Перечислите элементы следующих множеств:
   A — множество нечетных однозначных чисел;
   B — множество натуральных чисел, меньших или равных 20;
   C — множество двузначных чисел, делящихся на 10.
4. Укажите характеристическое свойство элементов множества:
   а) {а, е, ё, и, о, у, э, ю, я, ы}; б) {78, 76, 74, 72, 70};
   в) {111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999}.
5. Задайте с помощью характеристического свойства множества, выделенные штриховкой на координатной прямой (рис. 1.3, *а*—*е*).
6. Пусть *D* — множество двузначных чисел, запись которых оканчивается цифрой 1. Принадлежат ли этому множеству числа 31, 321, 61, 12? Ответ запишите, используя знаки $\in$ и $\notin$.
7. Множество *C* состоит из квадрата, круга и треугольника. Принадлежат ли этому множеству диагональ квадрата и центр круга?
8. Покажите, что, выполняя задание: «Увеличь каждое нечетное однозначное число в два раза», учащиеся встречаются с двумя способами задания множества.

1.3. ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ

В математике изучают не только те или иные множества, но и отношения, взаимосвязи между ними. Например, нам известно, что все натуральные числа являются целыми. Понятие множества позволяет обобщить конкретные случаи взаимосвязи между различными совокупностями, посмотреть на них с единой точки зрения.

Если множества *A* и *B* имеют общие элементы, т. е. элементы, принадлежащие одновременно *A* и *B*, то говорят, что эти множества ***пересекаются***.

Например, если $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, d, k, m\}$, $C = \{x, y, z\}$, то можно утверждать, что множества A и B пересекаются, так как имеют общие элементы b и d, а множества A и C, B и C не пересекаются, поскольку не имеют общих элементов.

Рассмотрим теперь множества $A = \{a, b, c, d, e\}$ и $B = \{c, d, e\}$. Они пересекаются, и, кроме того, каждый элемент множества B является элементом множества A. В этом случае говорят, что множество B включено в множество A или что множество B является подмножеством множества A и пишут $B \subset A$.

> Множество B называют ***подмножеством*** множества A, если каждый элемент множества B является также элементом множества A. Пустое множество считают подмножеством любого множества. Любое множество является подмножеством самого себя.

Из определения следует, что если $B \subset A$, то множество B может быть пустым, и тогда $\varnothing \subset A$, и, кроме того, множество B может совпадать с A, и тогда $A \subset A$. Поэтому среди всех подмножеств заданного множества A должно быть обязательно пустое множество и само множество A.

Образуем, например, все подмножества множества $A = \{2, 3, 4\}$. Среди них будут одноэлементные подмножества: $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, двухэлементные: $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, а также само множество A и пустое множество $\varnothing$. Таким образом, данное трехэлементное множество A имеет 8 подмножеств.

Вообще, если множество A содержит n элементов, то у него 2^n различных подмножеств. Доказательство этого утверждения здесь не приводим.

Рассмотрим множества $A = \{a, b, c, d, e\}$ и $B = \{c, a, d, b, e\}$. Они пересекаются, и каждый элемент множества A является элементом множества B, т. е. $A \subset B$, и наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A, т. е. $B \subset A$. В этом случае говорят, что множества A и B равны и пишут $A = B$.

> Множества A и B называют ***равными***, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Из определения следует, что *равные множества состоят из одних и тех же элементов, при этом порядок записи элементов множества не существен.*

Отношения между множествами наглядно представляют с помощью особых чертежей, называемых ***кругами Эйлера***[1]. Для этого

---

[1] *Леонард Эйлер* (1707—1783) — член Петербургской академии наук. Л. Эйлер родился в Швейцарии. В 1727 г. по приглашению Петербургской академии наук приехал в Россию, где стал крупнейшим математиком. Огромно научное наследие Эйлера, в списке его трудов более 800 названий.

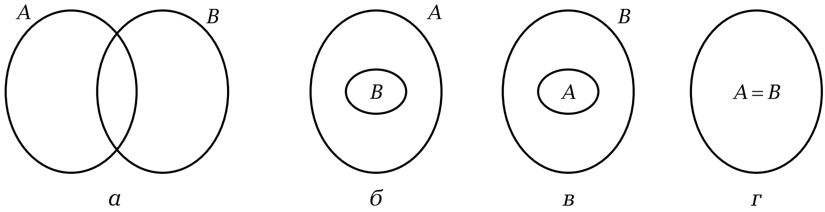


Рис. 1.4

множества представляют в виде кругов (овалов). В том случае, если множества A и B имеют общие элементы, но ни одно из них не является подмножеством другого, их изображают так, как показано на рис. 1.4, *а*. Если множество B является подмножеством A, то круг, изображающий множество B, целиком находится в круге, изображающем множество A (рис. 1.4, *б*). Если $A \subset B$, то множества A и B изображают так, как на рис. 1.4, *в*. Равные множества представляют в виде одного круга (рис. 1.4, *г*).

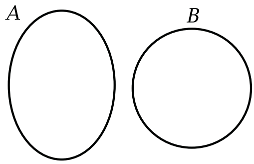


Рис. 1.5

Если множества A и B не пересекаются, то их изображают в виде двух фигур, не имеющих общих точек (рис. 1.5).

В начальном курсе математики с понятием подмножества младшие школьники встречаются, выполняя, например, задания: «Назови среди данных чисел четные», «Среди данных четырехугольников найди прямоугольники». Термины «множество» и «подмножество» при этом, как правило, не используются.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Даны два множества: $X = \{2, 4, 6\}$ и $Y = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Верно ли, что:
   а) множества X и Y пересекаются;
   б) множество X является подмножеством множества Y;
   в) множество $P = \{4, 0, 6, 8, 2\}$ равно множеству Y?
2. Известно, что элемент a содержится в множестве A и в множестве B. Следует ли из этого, что:
   а) $A \subset B$; б) $B \subset A$; в) $A = B$?
3. Из множества $K = \{216, 546, 153, 171, 234\}$ выпишите числа, которые:
   а) делятся на 3; в) не делятся на 4;
   б) делятся на 9; г) не делятся на 5.

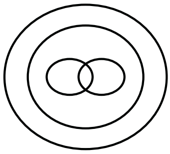


Рис. 1.6

Есть ли среди полученных подмножеств такое, которое равно множеству K?

4. Изобразите с помощью кругов Эйлера отношения между множествами C и D, если:

а) C — множество двузначных чисел, $D = \{3, 43, 34, 56, 103\}$;

б) C — множество двузначных чисел, D — множество четных натуральных чисел;

в) C — множество двузначных чисел, D — множество трехзначных чисел.

5. Отношения между множествами всех выпуклых четырехугольников, параллелограммов, прямоугольников, ромбов и квадратов изображены на рис. 1.6.
   Покажите каждое из множеств.
6. Дано множество $P = \{3, 5, 7, 9\}$. Образуйте всевозможные его подмножества. Сколько их должно быть?
7. О каких теоретико-множественных понятиях идет речь в следующих заданиях, выполняемых учащимися начальных классов:

   а) «Запиши по порядку числа от 10 до 19. Подчеркни и прочитай четные числа»;

   б) «Из ряда чисел от 1 до 20 выпиши по порядку числа, которые делятся на 5»;

   в) «Запиши три числа, которые при делении на 7 дают в остатке 4».

1.4. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Из элементов двух и более множеств можно образовать новые множества. Пусть даны два множества: $A = \{2, 4, 6, 8\}$ и $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Образуем множество C, в которое включим общие элементы множеств A и B, т. е. $C = \{6, 8\}$. Полученное множество C называют пересечением множеств A и B.

> ***Пересечением множеств*** A и B называют множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству A и множеству B.

Пересечение множеств A и B обозначают $A \cap B$. Таким образом, по определению, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Если изобразить множества A и B с помощью кругов Эйлера, то пересечением данных множеств является заштрихованная область (рис. 1.7). В том случае, когда множества A и B не имеют общих элементов, говорят, что их пересечение пусто и пишут: $A \cap B = \varnothing$.

Выясним, как находить пересечение множеств в конкретных случаях.

Если элементы множеств A и B перечислены, то, чтобы найти $A \cap B$, достаточно перечислить элементы, которые одновременно принадлежат множеству A и множеству B, т. е. их общие элементы.

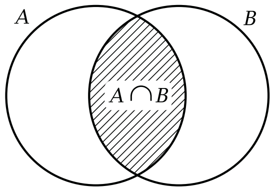


Рис. 1.7

А как быть, если множества заданы характеристическими свойствами?

Из определения пересечения следует, что характеристическое свойство множества $A \cap B$ составляется из характеристических свойств пересекаемых множеств с помощью союза «и».

Найдем, например, пересечение множества A — четных натуральных чисел и множества B — двузначных чисел. Характеристическое свойство множества A — «состоять из четных натуральных чисел», а характеристическое свойство множества B — «состоять из двузначных чисел». Тогда, согласно определению, пересечение данных множеств должно обладать свойством «состоять из четных натуральных и двузначных чисел». Таким образом, множество $A \cap B$ состоит из четных двузначных чисел (союз «и» в данном случае можно опустить). Полученное множество не пусто. Например, $24 \in A \cap B$, поскольку число 24 четное и двузначное.

Рассмотрим теперь случай, когда находят пересечение множества A и его подмножества B. Нетрудно видеть, что тогда $A \cap B = B$ и, следовательно, характеристическое свойство множества $A \cap B$ будет таким, как и свойство множества B.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Найдите пересечение множеств A и B, если:
   а) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{b, e, f, k\}$;
   б) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58\}$;
   в) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58, 5, 39, 81\}$.
2. Сформулируйте условия, при которых истинны следующие утверждения:
   а) $5 \in A \cap B$; б) $7 \notin A \cap B$.
3. Известно, что $x \in A$. Следует ли из этого, что $x \in A \cap B$?
4. Известно, что $x \in A \cap B$. Следует ли из этого, что $x \in A$?
5. Из каких элементов состоит пересечение множества букв в слове «математика» и множества букв в слове «геометрия»?

6. Пусть M — множество однозначных чисел, P — множество нечетных натуральных чисел. Из каких чисел состоит пересечение данных множеств? Содержатся ли в нем числа –7 и 9?

1.5. ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Пусть даны два множества: $A = \{2, 4, 6, 8\}$ и $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Образуем множество D, в которое включим элементы, принадлежащие хотя бы одному из данных множеств, т. е. множеству A или множеству B: $D = \{2, 4, 6, 8, 5, 7, 9\}$. Полученное множество D называют объединением множеств A и B.

Объединением множеств A и B называют множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству A или множеству B.

Объединение множеств A и B обозначают $A \cup B$. Таким образом, по определению, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Если изобразить множества A и B с помощью кругов Эйлера, то объединение данных множеств изобразится заштрихованной областью (рис. 1.8).

Выясним, как находить объединение множеств в конкретных случаях.

Если элементы множеств A и B перечислены, то, чтобы найти $A \cup B$, достаточно перечислить элементы, которые принадлежат множеству A или множеству B.

А как быть, если множества заданы характеристическими свойствами? Из определения объединения следует, что характеристическое свойство множества $A \cup B$ составляется из характеристических свойств множеств A и B с помощью союза «или». Найдем, например, объединение множества A — четных натуральных чисел и множества B — двузначных чисел. Так как свойство множества A — «состоять из четных натуральных чисел», а свойство множества B — «состоять из двузначных чисел», то в объединение данных множеств войдут четные натуральные или двузначные числа.

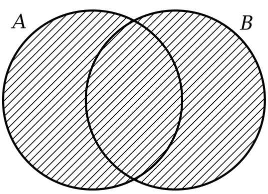


Рис. 1.8

Такие числа образуют бесконечное множество, но сформулированное характеристическое свойство позволяет однозначно определять, содержится тот или иной элемент в объединении множеств A и B или не содержится. Например, в $A \cup B$ есть число 8, поскольку оно четное; есть число 36 — оно четное и двузначное.

Рассмотрим теперь случай, когда находят объединение множества A и его подмножества B. Нетрудно видеть, что тогда $A \cup B = A$ и, следовательно, характеристическое свойство множества $A \cup B$ будет таким, как и свойство множества A.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте условия, при которых истинны следующие утверждения: а) $5 \in A \cup B$; б) $7 \notin A \cup B$.
2. Известно, что $x \in A$. Следует ли из этого, что $x \in A \cup B$?
3. Известно, что $x \in A \cup B$. Следует ли из этого, что $x \in A$?
4. Найдите объединение множеств A и B, если:
   а) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{b, e, f, k\}$;
   б) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58\}$;
   в) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58, 5, 39, 81\}$.
5. Из каких элементов состоит объединение множества букв в слове «математика» и множества букв в слове «геометрия»?
6. Пусть M — множество однозначных чисел, P — множество нечетных натуральных чисел. Из каких чисел состоит объединение данных множеств? Содержатся ли в нем числа -7 и 9?

1.6. СВОЙСТВА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ И ОБЪЕДИНЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Из школьного курса математики известно, что операцию, с помощью которой находят сумму чисел, называют сложением. Над числами выполняют и другие операции, например умножение, вычитание, деление; при этом результат умножения чисел называют произведением, деления — частным, т. е. для операций над числами и результатов этих операций существуют разные термины. Для рассмотренных операций над множествами ситуация иная: операции, с помощью которых находят пересечение и объединение множеств, называют соответственно пересечением и объединением.

Из школьного курса математики нам также известно, что операции над числами обладают рядом свойств. Например, сложение действительных чисел обладает переместительным и сочетательным свойствами: для любых действительных чисел a и b справедливо равенство $a + b = b + a$, а для любых чисел a, b и c — равенство $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Аналогичными свойствами обладает умножение действительных чисел. Кроме того, для сложения и умножения выполняется распределительное свойство: для любых действительных чисел a, b и c справедливо равенство: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Выясним, обладают ли «похожими» свойствами пересечение и объединение множеств.

Если обратиться к определениям пересечения и объединения множеств, то можно увидеть, что в них не фиксируется порядок оперирования множествами. Например, выполняя объединение, можно к элементам одного множества присоединить элементы другого, а можно поступить наоборот: к элементам второго множества присоединить элементы первого. (При этом надо только помнить, что в новом множестве не должно быть повторяющихся элементов.) Аналогичная ситуация и в случае, когда выполняется пересечение множеств. Это означает, что пересечение и объединение множеств обладают ***переместительным***, или, как говорят в математике, ***коммутативным***, ***свойством***: для любых множеств A и B выполняются равенства: $A \cap B = B \cap A$ и $A \cup B = B \cup A$.

Пересечение и объединение множеств обладают также ***сочетательным***, или ***ассоциативным***, ***свойством***: для любых множеств A, B и C выполняются равенства: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ и $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Заметим, что назначение скобок в этих записях то же, что и в записях операций над числами.

Эти свойства можно проиллюстрировать с помощью кругов Эйлера. Рассмотрим, например, ассоциативное свойство пересечения множеств. Изобразим множества A, B и C в виде трех попарно пересекающихся кругов (рис. 1.9).

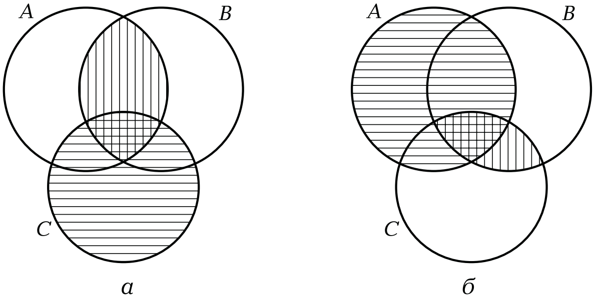


Рис. 1.9

В выражении $(A \cap B) \cap C$ скобки определяют следующий порядок действий: сначала выполняется пересечение множеств A и B (см. рис. 1.9, *а*, вертикальная штриховка), а затем находят пересечение полученного множества и множества C. Если выделить множество C горизонтальной штриховкой, то область, заштрихованная дважды, будет изображать множество $(A \cap B) \cap C$.

Представим теперь наглядно множество $A \cap (B \cap C)$. В соответствии с указанным порядком действий сначала надо найти пересечение множеств B и C (см. рис. 1.9, *б*, вертикальная штриховка), а затем выполнить пересечение множества A с полученным множеством. Если отметить множество A горизонтальной штриховкой, то область, заштрихованная дважды, и будет изображать множество $A \cap (B \cap C)$.

Видим, что области, представляющие на рис. 1.9 множества $(A \cap B) \cap C$ и $A \cap (B \cap C)$, одинаковы, что и подтверждает справедливость свойства ассоциативности для пересечения множеств.

Аналогично можно проиллюстрировать свойство ассоциативности и для объединения множеств.

В чем важность ассоциативного свойства пересечения и объединения множеств? Во-первых, можно находить пересечение и объединение трех множеств, зная, как это делать для двух. Во-вторых, на основании этого свойства в выражениях $A \cap (B \cap C)$, $(A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C)$, $(A \cup B) \cup C$ можно опускать скобки, что облегчает запись: $A \cap B \cap C$ или $A \cup B \cup C$.

Взаимосвязь пересечения и объединения множеств отражается в ***распределительных***, или ***дистрибутивных***, ***свойствах*** этих операций:

1. Пересечение дистрибутивно относительно объединения множеств, т. е. для любых множеств A, B и C выполняется равенство $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

2. Объединение дистрибутивно относительно пересечения множеств, т. е. для любых множеств A, B и C выполняется равенство $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Заметим, что если в выражении есть знаки пересечения и объединения множеств и нет скобок, то сначала выполняют пересечение, так как считают, что пересечение более «сильная» операция, чем объединение. Поэтому запись дистрибутивного свойства пересечения относительно объединения можно упростить, опустив скобки в правой части равенства.

Если провести аналогию с действиями над числами, то можно увидеть, что дистрибутивное свойство пересечения относительно объединения «похоже» на распределительное свойство умножения относительно сложения при условии, что в качестве операции, аналогичной пересечению, рассматривать умножение, а для объединения — сложение. Но для дистрибутивного свойства объединения множеств относительно пересечения аналогичного свойства над числами нет.

Действительно, наличие такого свойства означало бы, что для всех чисел выполняется равенство: $a \cdot b + c = (a + c) \cdot (b + c)$, что невозможно. Подмеченное отличие указывает на то, что наряду с тем, что пересечение и объединение множеств обладают рядом свойств, аналогичных свойствам сложения и умножения чисел, операции над множествами обладают свойствами, которых нет у операций над числами.

Завершая рассмотрение свойств пересечения и объединения множеств, отметим, что понятия пересечения и объединения множеств можно обобщить на любое конечное число множеств:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ и } x \in A_2 \text{ и } \ldots \text{ и } x \in A_n\},$$
$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ или } x \in A_2 \text{ или } \ldots \text{ или } x \in A_n\}.$$

Такое обобщение возможно, поскольку операции пересечения и объединения обладают свойством ассоциативности.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Известно, что $x \in A \cap B$. Следует ли из этого, что:
   а) $x \in B \cap A$; б) $x \in A \cup B$; в) $x \in B \cup A$?
2. Определите порядок выполнения действий в следующих выражениях:
   а) $A \cup B \cup C$; в) $A \cap B \cup C \cap D$;
   б) $A \cap B \cap C$; г) $A \cup B \cap C \cup D$.
3. Постройте три круга, представляющих попарно пересекающиеся множества A, B и C, и отметьте штриховкой области, изображающие множества:
   а) $A \cap B \cap C$; в) $(A \cap B) \cup C$; д) $A \cup B \cap C$;
   б) $A \cup B \cup C$; г) $(A \cup B) \cap C$; е) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.
   Для каждого случая сделайте отдельный рисунок.
4. Среди следующих выражений найдите такие, которые представляют собой равные множества:
   а) $P \cap M \cap K$; в) $P \cap M \cup P \cap K$; д) $P \cup (M \cap K)$;
   б) $P \cap (M \cup K)$; г) $(P \cap M) \cap K$; е) $(M \cup P) \cap (P \cup K)$.
5. Даны множества: X — двузначных чисел; Y — четных натуральных чисел; P — натуральных чисел, кратных 5. Из каких чисел состоит множество $A = X \cap (Y \cap P)$?

1.7. РАЗНОСТЬ МНОЖЕСТВ. ДОПОЛНЕНИЕ ПОДМНОЖЕСТВА

Если заданы два множества, то можно не только найти их пересечение и объединение, но и разность.

> ***Разностью множеств*** A и B называют множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B.

Разность множеств A и B обозначают $A \setminus B$. Тогда, по определению, имеем: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Если представить множества A и B с помощью кругов Эйлера, то разность $A \setminus B$ изобразится заштрихованной областью (рис. 1.10).

Выясним, как находить разность множеств в конкретных случаях.

Если элементы A и B перечислены, то, чтобы найти $A \setminus B$, достаточно перечислить элементы, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B. Например, если $A = \{c, d, e, f, k\}$, $B = \{d, e, m, p\}$, то $A \setminus B = \{c, f, k\}$.

Если множества A и B заданы характеристическими свойствами, то характеристическое свойство множества $A \setminus B$ будет таким: «состоять из таких элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B». Например, если A — множество четных натуральных чисел, а B — множество натуральных чисел, кратных 3, то $A \setminus B$ — множество четных натуральных чисел, не кратных 3.

В школьном курсе математики чаще всего приходится находить разность множеств в случае, когда одно из них является подмножеством другого, при этом разность множеств $A \setminus B$ называют дополнением подмножества B до множества A и обозначают символом B'_A (рис. 1.11).

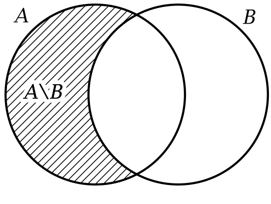


Рис. 1.10

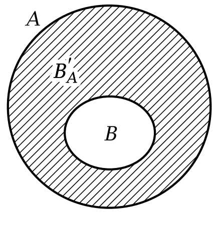


Рис. 1.11

Пусть $B \subset A$. ***Дополнением*** подмножества B до множества A называют множество, содержащее те и только те элементы множества A, которые не принадлежат множеству B.

Как уже было отмечено, в случае когда $B \subset A$, $A \setminus B = B'_A$.

Из определения следует, что $B'_A = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Выясним, как находить дополнение подмножества, на конкретных примерах.

Если элементы множеств A и B перечислены и $B \subset A$, то, чтобы найти дополнение множества B до множества A, достаточно перечислить элементы, принадлежащие множеству A и не принадлежащие множеству B. Так, если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а $B = \{2, 4\}$, то $B'_A = \{1, 3, 5\}$.

В том случае, когда указаны характеристические свойства элементов множеств A и B и известно, что $B \subset A$, то множество B'_A задают также с помощью характеристического свойства, общий вид которого «$x \in A$ и $x \notin B$». Так, если A — множество четных чисел, а B — множество чисел, кратных 4, то B'_A — это множество, содержащее такие четные числа, которые не делятся на 4. Например, $22 \in B'_A$, так как $22 \in A$ (т. е. оно четное) и $22 \notin B$ (т. е. оно не кратно 4).

Нахождение разности — это третья операция над множествами. Нам известно, что пересечение множеств — более «сильная» операция, чем объединение. А как быть с разностью? Например, каков порядок выполнения действий в выражении $A \setminus B \cap C$? Условились считать, что пересечение — более «сильная» операция, чем нахождение разности. Поэтому порядок выполнения действий в выражении $A \setminus B \cap C$ такой: сначала находят пересечение множеств B и C, а затем разность множеств A и $B \cap C$.

Что касается объединения и нахождения разности множеств, то их считают равноправными. Например, в выражении $A \setminus B \cup C$ надо сначала найти разность множеств A и B, а затем полученное множество объединить с множеством C.

Разность множеств обладает рядом свойств. В частности, для любых множеств A, B и C справедливы следующие равенства:

1) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$;

2) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

3) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;

4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

5) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Найдите разность множеств A и B, если:
   а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;
   б) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \varnothing$;
   в) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$;
   г) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{6, 2, 3, 4, 5, 1\}$.
2. В каких случаях, выполняя задание 1, вы находили дополнение подмножества B до множества A?
3. Сформулируйте условия, при которых истинны следующие высказывания:
   а) $5 \in A \setminus B$; б) $7 \notin A \setminus B$.
4. Известно, что $x \in A \setminus B$. Следует ли из этого, что:
   а) $x \in A$; б) $x \in B$?
5. Покажите, выполнив чертеж, дополнение множества Y до множества X, если:
   а) X — множество точек прямой AB, Y — множество точек отрезка AB;
   б) X — множество прямоугольников, Y — множество квадратов.

1.8. ПОНЯТИЕ РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА НА КЛАССЫ

Понятия множества и операций над множествами позволяют уточнить наше представление о ***классификации*** — действии распределения объектов по классам.

Классификацию мы выполняем достаточно часто. Так, натуральные числа представляем как два класса: четные и нечетные. Углы на плоскости разбиваем на три класса: прямые, острые и тупые.

Любая классификация связана с разбиением некоторого множества объектов на подмножества. При этом считают, что множество X разбито на классы X_1, X_2, ..., X_n, ..., если:

- *подмножества X_1, X_2, ..., X_n, ... попарно не пересекаются*;
- *объединение подмножеств X_1, X_2, ..., X_n, ... совпадает с множеством X.*

Если не выполнено хотя бы одно из условий, классификацию считают неправильной. Например, если из множества X треугольников выделить подмножества равнобедренных, равносторонних и разносторонних треугольников, то разбиения не получится, поскольку подмножества равнобедренных и равносторонних треугольников пересекаются (все равносторонние треугольники являются равнобедренными). В данном случае не выполнено первое условие разбиения множества на классы.

Так как разбиение множества на классы связано с выделением его подмножеств, то классификацию можно выполнять с помощью свойств множества.

Рассмотрим, например, множество натуральных чисел **N**. Оно обладает различными свойствами. Положим, что нас интересуют числа, кратные 3. Это свойство позволяет выделить из множества натуральных чисел подмножество, состоящее из чисел, кратных 3. Тогда про остальные натуральные числа можно сказать, что они не кратны 3, т. е. получаем еще одно подмножество множества натуральных чисел (рис. 1.12). Так как выделенные подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством натуральных чисел, то имеем разбиение этого множества на два класса.

Вообще, если на множестве X задано одно свойство, то это множество разбивается на два класса: первый — класс объектов, обладающих этим свойством, а второй — дополнение первого класса до множества X. Во втором классе содержатся такие объекты множества X, которые заданным свойством не обладают. Такую классификацию называют ***дихотомической***.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда для множества заданы два свойства. Например, такие свойства натуральных чисел, как «быть кратным 3» и «быть кратным 5». С помощью этих свойств из множества **N** натуральных чисел можно выделить два подмножества: A — подмножество чисел, кратных 3, и B — подмножество чисел, кратных 5. Эти множества пересекаются, но ни одно из них не является подмножеством другого (рис. 1.13). Проанализируем получившийся рисунок. Конечно, разбиения множества натуральных

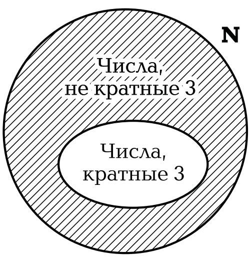


Рис. 1.12

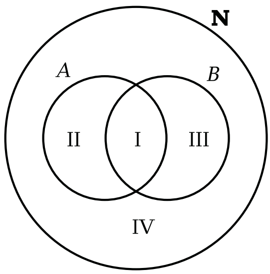


Рис. 1.13

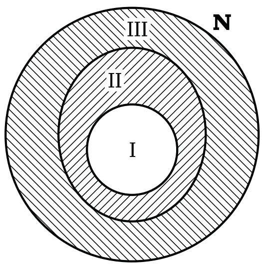


Рис. 1.14

чисел на подмножества A и B не произошло. Но круг, изображающий множество $\mathbf{N}$, можно рассматривать как состоящий из четырех непересекающихся областей — на рисунке они пронумерованы. Каждая область изображает некоторое подмножество множества $\mathbf{N}$. Подмножество I состоит из чисел, кратных 3 и 5; подмножество II — из чисел, кратных 3 и не кратных 5; подмножество III — из чисел, кратных 5 и не кратных 3; подмножество IV — из чисел, не кратных 3 и не кратных 5. Объединение этих четырех подмножеств есть множество $\mathbf{N}$.

Таким образом, выделение двух свойств привело к разбиению множества $\mathbf{N}$ натуральных чисел на четыре класса.

Не следует думать, что задание двух свойств элементов множества всегда приводит к разбиению этого множества на четыре класса. Например, с помощью таких двух свойств: «быть кратным 3» и «быть кратным 6» множество натуральных чисел разбивается на три класса (рис. 1.14): I — класс чисел, кратных 6; II — класс чисел, кратных 3, но не кратных 6; III — класс чисел, не кратных 3.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Из множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ выделили подмножества X_1, X_2 и X_3. В каком из следующих случаев множество X оказалось разбитым на классы:
   а) $X_1 = \{1, 3, 5, 7, 11\}$, $X_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $X_3 = \{9\}$;
   б) $X_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $X_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $X_3 = \{10, 11, 12\}$;
   в) $X_1 = \{3, 6, 9, 12\}$, $X_2 = \{1, 5, 7, 11\}$, $X_3 = \{2, 10\}$?
2. Из множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ выделили подмножества:
   а) A — четных чисел; B — нечетных чисел;
   б) A — чисел, кратных 2; B — чисел, кратных 3; C — чисел, кратных 4;
   в) A — нечетных однозначных чисел; B — четных двузначных чисел.
   В каком случае произошло разбиение множества X на классы?
3. Из множества треугольников выделили подмножества треугольников:
   а) прямоугольные, равнобедренные, равносторонние;
   б) остроугольные, тупоугольные, прямоугольные;
   в) равносторонние, прямоугольные, тупоугольные.
   В каком случае произошло разбиение множества треугольников на классы?

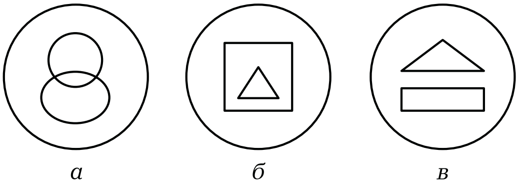


Рис. 1.15

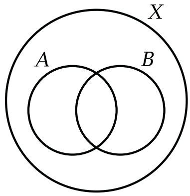


Рис. 1.16

4. Перечертите фигуры, приведенные на рис. 1.15, *а—в*, и на каждой из них выделите (различными видами штриховки) непересекающиеся области.
5. Изобразите с помощью кругов Эйлера множество **N** натуральных чисел и его подмножества: четных чисел и чисел, кратных 7. Можно ли утверждать, что множество **N** разбито:
а) на два класса: четных чисел и чисел, кратных 7;
б) на четыре класса: четных чисел, кратных 7; четных чисел, не кратных 7; нечетных чисел, кратных 7; нечетных чисел, не кратных 7?
6. На рис. 1.16 изображены множества: *X* — студентов группы, *A* — спортсменов этой группы, *B* — отличников этой группы.
а) Укажите классы разбиения множества *X*, полученные с помощью свойств «быть спортсменом» и «быть отличником», и охарактеризуйте каждый из них.
б) Сколько получилось бы классов разбиения, если бы ни один отличник группы не был спортсменом?
Выполните соответствующий рисунок и назовите классы разбиения.

1.9. ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Используя две цифры, например 3 и 5, можно записать четыре двузначных числа: 35, 53, 33 и 55. Несмотря на то что числа 35 и 53 записаны с помощью одних и тех же цифр, эти числа различные. В том случае, когда важен порядок следования элементов, в математике говорят об упорядоченных наборах элементов. В рассмотренном примере мы имели дело с упорядоченными парами.

Упорядоченную пару, образованную из элементов a и b, принято записывать, используя круглые скобки: (a, b). Элемент a называют *первой координатой* (*компонентой*) *пары*, элемент b — *второй координатой* (*компонентой*) *пары*.

Пары (a, b) и (c, d) равны в том и только том случае, когда $a = c$ и $b = d$.

В упорядоченной паре (a, b) может быть, что $a = b$. Так, запись чисел 33 и 55 можно рассматривать как упорядоченные пары (3, 3) и (5, 5).

Упорядоченные пары можно образовать из элементов как одного множества, так и двух множеств. Пусть, например, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 5\}$. Образуем упорядоченные пары так, чтобы первая компонента принадлежала множеству A, а вторая — множеству B.

Если мы перечислим все такие пары, то получим множество: $\{(1, 3), (1, 5), (2, 5), (3, 3), (3, 5)\}$.

Видим, что, имея два множества A и B, мы получили новое множество, элементами которого являются упорядоченные пары чисел. Это множество называют декартовым произведением множеств A и B.

> ***Декартовым произведением*** множеств A и B называют множество всех пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая — множеству B.

Декартово произведение множеств A и B обозначают $A \times B$. Тогда по определению имеем: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ и } y \in B\}$.

Задача 1. Найти декартово произведение множеств A и B, если:

а) $A = \{m, p\}$, $B = \{e, f, k\}$;

б) $A = B = \{3, 5\}$.

Решение. а) Действуем согласно определению — образуем все пары, первая компонента которых выбирается из A, а вторая — из B:

$$A \times B = \{(m, e), (m, f), (m, k), (p, e), (p, f), (p, k)\}.$$

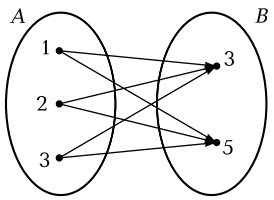
б) Декартово произведение равных множеств находят, образуя всевозможные пары из элементов данного множества:

$$A \times A = \{(3, 3), (3, 5), (5, 3), (5, 5)\}.$$

Выясним, какими свойствами обладает операция нахождения декартова произведения. Так как декартовы произведения $A \times B$ и $B \times A$ состоят из различных элементов, то декартово умножение множеств A и B свойством коммутативности не обладает. Аналогично рассуждая, можно доказать, что для этой операции не выполняется и свойство ассоциативности. Но она *дистрибутивна относительно объединения и разности множеств*, т. е. для любых множеств A, B и C выполняются равенства:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$$

$$(A \setminus B) \times C = (A \times B) \setminus (B \times C).$$



а

	B	
A	3	5
1	(1, 3)	(1, 5)
2	(2, 3)	(2, 5)
3	(3, 3)	(3, 5)

б

Рис. 1.17

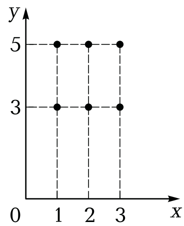


Рис. 1.18

Выясним теперь, как можно наглядно представлять декартово произведение множеств.

Если множества A и B конечны и содержат небольшое число элементов, то можно изобразить декартово произведение этих множеств с помощью графа или таблицы. Например, декартово произведение множеств $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 5\}$ представлено на рис. 1.17, *а* с помощью графа, а на рис. 1.17, *б* с помощью таблицы.

Декартово произведение двух числовых множеств (конечных и бесконечных) можно изображать на координатной плоскости, так как каждая пара чисел может быть единственным образом изображена точкой на этой плоскости. Например, декартово произведение $A \times B$ множеств $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 5\}$ на координатной плоскости показано на рис. 1.18. Заметим, что элементы множества A мы изобразили на оси x, а элементы множества B — на оси y.

Такой способ наглядного представления декартова произведения двух числовых множеств удобно использовать в случае, когда хотя бы одно из них бесконечное.

Задача 2. Изобразить на координатной плоскости декартово произведение $A \times B$, если:

а) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = [3, 5]$; в) $A = \mathbf{R}$, $B = [3, 5]$;
б) $A = [1, 3]$, $B = [3, 5]$; г) $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{R}$.

Решение. а) Так как множество A состоит из трех элементов, а множество B содержит все действительные числа от 3 до 5, включая и сами эти числа, то декартово произведение $A \times B$ будет состоять из бесконечного множества пар, первая компонента которых либо 1, либо 2, либо 3, а вторая — любое действительное число из промежутка [3, 5]. Такое множество пар действительных чисел на координатной плоскости изобразится тремя отрезками (рис. 1.19).

б) В этом случае бесконечны оба множества A и B. Поэтому первой координатой пары, принадлежащей множеству $A \times B$, может быть любое число из промежутка [1, 3], и, следовательно,

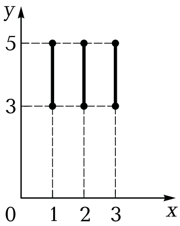


Рис. 1.19

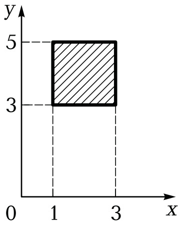


Рис. 1.20

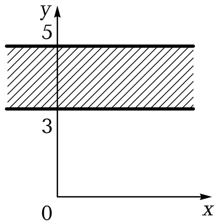


Рис. 1.21

точки, изображающие элементы декартова произведения данных множеств A и B, образуют квадрат (рис. 1.20). Чтобы подчеркнуть, что элементы декартова произведения изображаются и точками, лежащими внутри квадрата, этот квадрат можно заштриховать.

в) Этот случай отличается от предыдущего тем, что множество A состоит из всех действительных чисел, т. е. абсцисса точек, изображающих элементы множества $A \times B$, принимает все действительные значения, в то время как ордината выбирается из промежутка [3, 5]. Множество таких точек образует полосу (рис. 1.21).

г) Декартово произведение $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ состоит из всевозможных действительных чисел. Точки, изображающие эти пары, сплошь заполняют координатную плоскость. Таким образом, декартово произведение $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ содержит столько же элементов, сколько точек находится на координатной плоскости.

В математике и других науках рассматривают не только упорядоченные пары, но и упорядоченные наборы из трех, четырех и более элементов. Например, запись числа 367 — это упорядоченный набор из трех элементов, а запись слова «математика» — это упорядоченный набор из 10 элементов.

Упорядоченные наборы часто называют ***кортежами*** и различают по длине. ***Длина кортежа*** — это число элементов, из которых он состоит. Например, (3, 6, 7) — это кортеж длины 3, (м, а, т, е, м, а, т, и, к, а) — это кортеж длины 10.

Рассматривают в математике и декартово произведение трех, четырех и вообще n множеств.

> ***Декартовым произведением*** множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ называют множество всех кортежей длины n, первая компонента которых принадлежит множеству A_1, вторая — множеству A_2, ..., n-я — множеству A_n.

Декартово произведение множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ обозначают так: $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

Задача 3. Даны множества: $A_1 = \{2, 3\}$, $A_2 = \{3, 4, 5\}$, $A_3 = \{6, 7\}$. Найти $A_1 \times A_2 \times A_3$.

Решение. Элементами множества $A_1 \times A_2 \times A_3$ будут кортежи длины 3 такие, что первая их компонента принадлежит множеству A_1, вторая — множеству A_2, третья — множеству A_3:

$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(2, 3, 6), (2, 3, 7), (2, 4, 6), (2, 4, 7), (2, 5, 6), (2, 5, 7), (3, 3, 6), (3, 3, 7), (3, 4, 6), (3, 4, 7), (3, 5, 6), (3, 5, 7)\}$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дано уравнение $2x - 3y = 3$. Запишите несколько решений данного уравнения. Что представляет собой каждое решение? Является ли пара (4, 5) решением данного уравнения? А пара (5, 4)?
2. Перечислите элементы декартова произведения $A \times B$, если:
   а) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, k, l\}$;
   б) $A = B = \{a, b, c\}$;
   в) $A = \{a, b, c\}$, $B = \varnothing$.
3. Запишите различные двузначные числа, используя цифры 3, 4 и 5. Сколько среди них таких, запись которых начинается с цифры 3? Как связано решение данной задачи с понятием декартова произведения множеств?
4. Даны два множества: $A = \{1, 3, 5\}$ и $B = \{2, 4\}$. Перечислите элементы множеств $A \times B$ и $B \times A$. Верно ли, что:
   а) множества $A \times B$ и $B \times A$ содержат одинаковое число элементов;
   б) множества $A \times B$ и $B \times A$ равны?
5. Сколько букв в слове «барабан»? Сколько различных букв в этом слове?
   Сформулируйте эту задачу, используя понятия множества и кортежа.

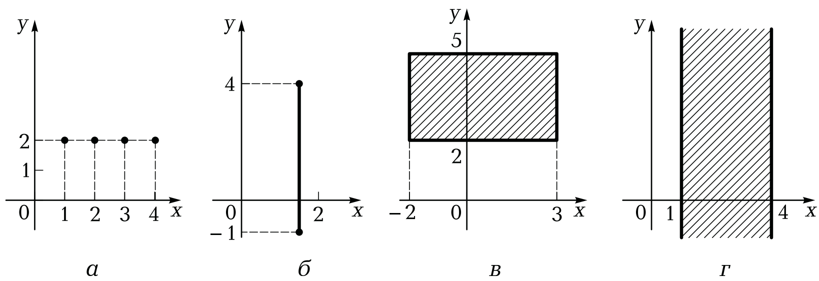


Рис. 1.22

6. Чем отличается множество цифр в записи числа 56 576 от кортежа цифр в его записи?
7. Изобразите в прямоугольной системе координат множество $A \times B$, если:
а) $A = [-2, 2]$, $B = \{2, 3, 4\}$;
б) $A = [-2, 2]$, $B = (2, 4)$;
в) $A = \mathbf{R}$, $B = [2, 4]$.
8. Определите, декартово произведение каких множеств X и Y изображено на рис. 1.22, *а—г*.

1.10. ЧИСЛО ЭЛЕМЕНТОВ В ОБЪЕДИНЕНИИ И РАЗНОСТИ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Нам известно, как находят объединение двух конечных непересекающихся множеств. Например, если $A = \{x, y, z\}$, а $B = \{k, l, m, p\}$, то $A \cup B = \{x, y, z, k, l, m, p\}$. Чтобы ответить на вопрос: «Сколько элементов в полученном множестве?» — достаточно пересчитать их.

А как определять число элементов в объединении конечных множеств, не образуя его и не обращаясь к пересчету элементов?

Условимся предложение «Множество A содержит a элементов» записывать в таком виде: $n(A) = a$. Например, если $A = \{x, y, z\}$, то утверждение «Множество A содержит три элемента» можно записать так: $n(A) = 3$.

Можно доказать, что если в множестве A содержится a элементов, а в множестве B — b элементов и множества A и B не пересекаются, то в объединении множеств A и B содержится $a + b$ элементов, т. е.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = a + b. \qquad (1)$$

Это правило нахождения числа элементов в объединении двух конечных непересекающихся множеств можно обобщить на случай t попарно непересекающихся множеств, т. е. если множества $A_1, A_2, \ldots, A_t$ попарно не пересекаются, то $n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_t) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_t)$.

Нетрудно убедиться в том, что если $B \subset A$, то $n(B'_A) = n(A) - n(B)$, т. е. число элементов дополнения подмножества B до данного конечного множества A равно разности численностей этих множеств.

Пусть, например, $A = \{x, y, z, p, t\}$, а $B = \{x, p, t\}$. Найдем число элементов в дополнении подмножества B до множества A.

Пересчитав элементы множеств A и B, получаем, что $n(A) = 5$, $n(B) = 3$. Тогда $n(B'_A) = n(A) - n(B) = 5 - 3 = 2$. Таким образом, в дополнении множества B до множества A содержится два элемента.

Формула (1) позволяет находить число элементов в объединении конечных непересекающихся множеств. А если множества A и B имеют общие элементы, то как найти число элементов в их объединении?

Пусть, например, $A = \{x, y, z\}$, а $B = \{x, z, p, s, k\}$. Тогда $A \cup B = \{x, y, z, p, s, k\}$, т. е. если $n(A) = 3$, а $n(B) = 5$ и $A \cap B \neq \varnothing$, то $n(A \cup B) = 6$. Нетрудно видеть, что в данном случае $n(A \cap B) = 2$ и, значит, общие элементы множеств A и B в объединении этих множеств записаны только один раз.

В общем виде правило подсчета элементов в объединении двух конечных множеств может быть представлено в виде формулы:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \qquad (2)$$

Полученные формулы для подсчета числа элементов в объединении двух и более множеств можно использовать для решения задач следующего вида.

Задача. Из 40 студентов курса 32 изучают английский язык, 21 — немецкий язык, а 15 — английский и немецкий языки. Сколько студентов курса не изучает ни английский, ни немецкий языки?

Решение. Пусть A — множество студентов курса, изучающих английский язык, B — множество студентов курса, изучающих немецкий язык. По условию задачи: $n(A) = 32$, $n(B) = 21$, $n(A \cap B) = 15$. Требуется найти число студентов курса, не изучающих ни английского, ни немецкого языка.

I способ.

Найдем число элементов в объединении данных множеств A и B. Для этого воспользуемся формулой: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 32 + 21 - 15 = 38$.

Найдем число студентов курса, которые не изучают ни английский, ни немецкий языки: $40 - 38 = 2$.

II способ.

Изобразим данные множества с помощью кругов Эйлера и определим число элементов в каждом из непересекающихся подмножеств (рис. 1.23). Так как в пересечении множеств A и B содержится 15 элементов, то студентов, изучающих *только* английский язык,

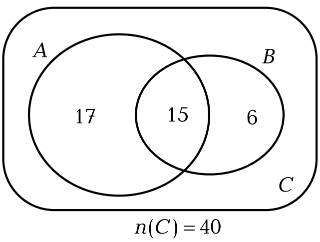


Рис. 1.23

будет 17 (32 – 15 = 17), а студентов, изучающих *только* немецкий будет 6 (21 – 15 = 6). Тогда $n(A \cup B) = 17 + 15 + 6 = 38$, и, следовательно, число студентов курса, которые не изучают ни английский, ни немецкий языки, будет 40 – 38 = 2.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Из 32 школьников 12 занимаются в волейбольной секции, 15 — в баскетбольной, 8 человек занимаются и в той, и в другой секции. Сколько школьников не занимается ни в волейбольной, ни в баскетбольной секции?
2. В третьем классе дети коллекционируют марки и монеты. Марки коллекционируют 8 человек, монеты — 5 человек. Всего коллекционеров 11. Объясните, как это может быть. Сколько человек коллекционируют только марки; только монеты?
3. Из 38 учащихся класса 24 занимаются в хоре и 15 в лыжной секции. Сколько учащихся занимается и в хоре, и в лыжной секции, если в классе нет учащихся, не посещающих занятий хора или лыжной секции?
4. В группе туристов, состоящей из 100 человек, 10 человек не знали ни немецкий, ни французский языки, 75 знали немецкий, 83 знали французский. Сколько туристов знали два языка?
5. Катя положила в коробку 4 зеленых круга, 6 треугольников и 3 красных многоугольника. Всего в коробке оказалось 11 фигурок. Сколько среди них красных треугольников?
6. Правильно ли представлено на рис. 1.24 условие следующей задачи: «Из 100 человек английский язык изучают 28, немецкий — 30, французский — 42, английский и немецкий — 8, английский и французский — 10, немецкий и французский — 5. Все три языка изучают три студента. Сколько студентов

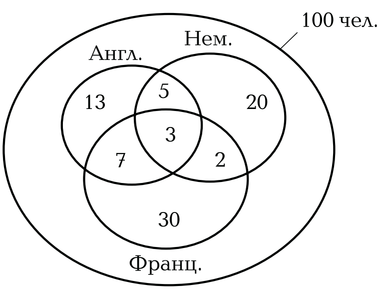


Рис. 1.24

изучает только один язык? Сколько студентов не изучает ни одного языка?».

7. Решите задачу из задания 6.

1.11. ЧИСЛО ЭЛЕМЕНТОВ В ДЕКАРТОВОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Нам известно, как находят декартово произведение конечных множеств. Например, если $A = \{x, y, z\}$, $B = \{m, p\}$, то $A \times B = \{(x, m), (x, p), (y, m), (y, p), (z, m), (z, p)\}$. Чтобы ответить на вопрос: «Сколько элементов в полученном множестве?» — достаточно пересчитать их. А как определить число элементов в декартовом произведении множеств, не образуя его и не обращаясь к пересчету элементов?

Доказано, что если в множестве A содержится a элементов, а в множестве B — b элементов, то в декартовом произведении множеств A и B содержится $a{\cdot}b$ элементов, т. е.

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = a \cdot b.$$

Правило распространяется на случай t множеств, т. е.

$$n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \ldots \cdot n(A_t).$$

Например, если в множестве A содержится 3 элемента, в множестве B — 4 элемента, в множестве C — 5 элементов, то в их декартовом произведении будет содержаться $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ упорядоченных наборов из трех элементов. Полученные формулы можно использовать при решении задач.

Задача 1. У Маши 3 различные юбки и 4 различные кофты. Сколько различных комплектов, состоящих из юбки и кофты, она может составить?

Решение. Пусть A — множество юбок у Маши, B — множество кофт у нее. Тогда, по условию задачи, $n(A) = 3$, $n(B) = 4$. Требуется найти число возможных пар, образованных из элементов множеств A и B, т. е. $n(A \times B)$. Но согласно правилу $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 3 \cdot 4 = 12$. Таким образом, из 3 юбок и 4 кофт Маша может составить 12 различных комплектов.

Задача 2. Сколько двузначных чисел можно записать, используя цифры 5, 4 и 7?

Решение. Запись любого двузначного числа состоит из двух цифр и представляет собой упорядоченную пару. В данном случае эти пары образуются из элементов множества $A = \{5, 4, 7\}$. В задаче

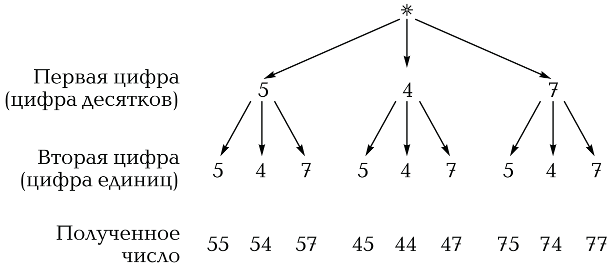


Рис. 1.25

требуется узнать число таких пар, т. е. число элементов в декартовом произведении $A \times A$. Согласно правилу $n(A \times A) = n(A) \cdot n(A) = 3 \cdot 3 = 9$. Значит, двузначных чисел, записанных с помощью цифр 5, 4 и 7, будет 9.

Часто при решении задач, аналогичных рассмотренным выше, требуется не только ответить на вопрос о том, сколько существует возможных вариантов ее решения, но и осуществить перебор этих вариантов. Например, в задаче 2 можно предложить записать все двузначные числа, используя цифры 5, 4 и 7.

Для осуществления такого перебора можно построить граф, который называют деревом возможных вариантов. Так, для задачи 2 он будет иметь вид, представленный на рис. 1.25.

Эта схема действительно похожа на дерево, правда, «растет» оно вниз и у него нет ствола. То, что дерево «растет» как бы «вверх ногами», удобно при построении схем такого вида. Знак «*» изображает корень дерева, ветвями которого являются различные варианты решения задачи. Чтобы получить двузначное число, надо сначала выбрать цифру десятков — для этого имеется три варианта: 5, 4 или 7. Поэтому из «*» проведены три отрезка и на их концах поставлены цифры 5, 4 и 7. Затем надо выбрать цифру единиц, а для этого также имеется три варианта: 5, 4 или 7. Поэтому от цифр 5, 4 и 7 проведено по три отрезка, на концах которых вновь стоят цифры 5, 4 или 7. Чтобы прочитать полученные варианты, надо пройти по всем ветвям построенного дерева сверху вниз.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Множество A содержит 7 элементов. Сколько элементов в множестве B, если декартово произведение $A \times B$ состоит из: а) 42 элементов; б) 7 элементов; в) $A \times B = \varnothing$.

2. Сколько различных наборов можно составить из книги и блокнота, если имеется 20 видов различных книг и 15 видов различных блокнотов?
3. Решите следующие задачи методом перебора всех возможных вариантов, а затем покажите, что решение этих задач связано с определением числа элементов декартова произведения множеств:
а) «В костюмерной танцевального кружка имеются белые и розовые кофты, а также синие, черные и коричневые юбки. Сколько можно из них составить различных костюмов?»;
б) «Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 4 и 7?»;
в) «На вершину горы ведут две дороги. Сколькими способами можно подняться и спуститься с нее?».
4. Решите следующие задачи, построив дерево возможных вариантов:
а) «У продавца имеется три вида мороженого: клубничное, сливочное и ореховое. Наташа и Катя решили купить по одной порции. Сколько существует вариантов такой покупки?»;
б) «В понедельник в первом классе должно быть три урока: математика, чтение и физкультура. Сколько различных вариантов расписания можно составить на этот день?»;
в) «Туристическая фирма планирует посещение туристами в Италии трех городов: Венеции, Рима и Флоренции. Сколько существует вариантов такого маршрута?».

Глава 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ, ПРЕДЛОЖЕНИЯ, ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Понятия, которые изучаются в начальном курсе математики, обычно представляют в виде четырех групп:

- понятия, связанные с числами и операциями над ними: число, цифра, сложение, слагаемое и др.;
- алгебраические понятия: выражение, равенство, уравнение и др.;
- геометрические понятия: прямая, отрезок, треугольник и т. д.;
- понятия, связанные с величинами и их измерением.

Как же изучать такое разнообразие понятий?

Прежде всего, необходимо иметь представление о понятии как логической категории и особенностях математических понятий.

В логике понятие рассматривают как форму мышления, отражающую объекты (предметы или явления) в их существенных и общих свойствах. Языковой формой понятия является слово или группа слов.

Понятия не существуют в объективном мире. Они возникают в сознании человека и заменяют предметы и явления этого мира, являясь их идеальными образами.

Иметь понятие об объекте — значит, уметь выделить его существенные признаки и отличить от всех других объектов. Математические понятия, как и любые другие, существуют лишь в мышлении человека и тех знаках и символах, которые образуют математический язык.

Чтобы овладеть общими подходами к изучению понятий в начальном курсе математики, учителю необходимы знания об объеме и содержании понятия, об отношениях между понятиями и определении понятия.

2.1. ОБЪЕМ И СОДЕРЖАНИЕ ПОНЯТИЯ. ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПОНЯТИЯМИ

Всякий математический объект обладает определенными свойствами. Например, квадрат имеет четыре стороны, четыре прямых угла, равные диагонали. Можно указать и другие его свойства.

Различают существенные и несущественные свойства объекта.

Свойство считают *существенным* для объекта, если оно присуще этому объекту и без него он не может существовать (например, для квадрата существенными являются все вышеперечисленные свойства). Несущественно для квадрата $ABCD$ свойство: «сторона AD горизонтальна». Если квадрат повернуть, то сторона AD окажется расположенной по-другому (рис. 2.1). Поэтому, чтобы понимать, что

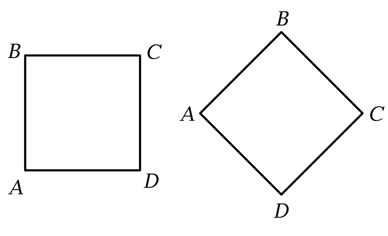


Рис. 2.1

представляет собой данный математический объект, надо знать его существенные свойства.

Когда говорят о математическом понятии, то обычно имеют в виду множество объектов, обозначаемых одним термином (словом или группой слов). Так, говоря о квадрате, имеют в виду все геометрические фигуры, являющиеся квадратами. Считают, что множество всех квадратов составляет объем понятия «квадрат».

Вообще, ***объем понятия*** **—** это множество всех объектов, которые обобщаются в понятии и обозначаются одним термином.

Любое понятие имеет не только объем, но и содержание.

Содержание понятия **—** это множество всех существенных свойств объекта, отраженных в этом понятии.

Рассмотрим, например, понятие «прямоугольник».

Объем данного понятия — это множество различных прямоугольников, а в его содержание входят такие свойства прямоугольника, как «иметь четыре прямых угла», «иметь равные противоположные стороны», «иметь равные диагонали» и т. д.

Между объемом понятия и его содержанием существует взаимосвязь: *если увеличивается объем понятия, то уменьшается его содержание, и наоборот*. Например, объем понятия «квадрат» является частью объема понятия «прямоугольник», а содержание понятия «квадрат» включает в себя больше свойств, чем содержание понятия «прямоугольник» («все стороны равны», «диагонали взаимно перпендикулярны» и др.).

Любое понятие нельзя усвоить, не осознав его взаимосвязи с другими понятиями. Поэтому важно знать, в каких отношениях могут находиться понятия, и уметь устанавливать эти связи.

Отношения между понятиями тесно связаны с отношениями между их объемами, т. е. множествами.

Условимся понятия обозначать строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, ..., z.

Пусть заданы два понятия a и b. Объемы их обозначим соответственно A и B.

Если $A \subset B$ ($A \neq B$), то говорят, что понятие a — ***видовое*** *по отношению к понятию* b, а понятие b — ***родовое*** *по отношению к понятию* a.

Например, если a — «прямоугольник», b — «четырехугольник», то их объемы A и B находятся в отношении включения ($A \subset B$ и $A \neq B$), поскольку всякий прямоугольник является четырехугольником. Поэтому можно утверждать, что понятие «прямоугольник» — видовое по отношению к понятию «четырехугольник», а понятие «четырехугольник» — родовое по отношению к понятию «прямоугольник».

Если $A = B$, то говорят, что *понятия a и b **тождественны***.

Например, тождественны понятия «равносторонний треугольник» и «равноугольный треугольник», так как их объемы совпадают.

Если множества A и B не связаны отношением включения, то говорят, что понятия a и b не находятся в отношении рода и вида и не тождественны. Например, не связаны такими отношениями понятия «треугольник» и «прямоугольник».

Рассмотрим подробнее отношение рода и вида между понятиями. Во-первых, *понятия рода и вида относительны*: одно и то же понятие может быть родовым по отношению к одному понятию и видовым по отношению к другому. Например, понятие «прямоугольник» — родовое по отношению к понятию «квадрат» и видовое по отношению к понятию «четырехугольник».

Во-вторых, для *данного понятия часто можно указать несколько родовых понятий*. Так, для понятия «прямоугольник» родовыми являются понятия «четырехугольник», «параллелограмм», «многоугольник». Среди них можно указать ближайшее. Для понятия «прямоугольник» ближайшим является понятие «параллелограмм».

В-третьих, *видовое понятие обладает всеми свойствами родового понятия*. Например, квадрат, являясь видовым понятием по отношению к понятию «прямоугольник», обладает всеми свойствами, присущими прямоугольнику.

Так как объем понятия — множество, удобно, устанавливая отношения между объемами понятий, изображать их с помощью кругов Эйлера.

Установим, например, отношения между следующими парами понятий a и b, если:

1) a — «прямоугольник», b — «ромб»;
2) a — «многоугольник», b — «параллелограмм»;
3) a — «прямая», b — «отрезок».

В случае 1) объемы понятий пересекаются, но ни одно множество не является подмножеством другого (см. рис. 1.4, *а*). Следовательно, можно утверждать, что данные понятия a и b не находятся в отношении рода и вида.

В случае 2) объемы данных понятий находятся в отношении включения, но не совпадают — всякий параллелограмм является многоугольником, но не наоборот (см. рис. 1.4, *б*). Следовательно, можно утверждать, что понятие «параллелограмм» — видовое по отношению к понятию «многоугольник», а понятие «многоугольник» — родовое по отношению к понятию «параллелограмм».

В случае 3) объемы понятий не пересекаются, так как ни про один отрезок нельзя сказать, что он является прямой, и ни одна прямая не может быть названа отрезком (см. рис. 1.5). Следовательно, данные понятия не находятся в отношении рода и вида.

О понятиях «прямая» и «отрезок» можно сказать, что они находятся *в отношении целого и части*: отрезок — часть прямой, а не ее вид. И если видовое понятие обладает всеми свойствами родового понятия, то часть не обязательно обладает всеми свойствами целого. Например, отрезок не обладает таким свойством прямой, как бесконечность.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Начертите три геометрические фигуры, принадлежащие объему понятия:
   а) параллелограмм; б) трапеция; в) окружность.
2. Назовите пять существенных свойств понятия:
   а) треугольник; б) круг.
3. Каков объем понятия:
   а) однозначное число; б) натуральное число; в) луч?
4. Назовите несколько свойств, общих для прямоугольника и квадрата. Какое из следующих утверждений верное:
   а) «Всякое свойство квадрата присуще прямоугольнику»;
   б) «Всякое свойство прямоугольника присуще квадрату»?
5. Находятся ли в отношении рода и вида следующие пары понятий:
   а) многоугольник и треугольник; б) угол и острый угол;
   в) луч и прямая; г) ромб и квадрат; д) круг и окружность?
6. Изобразите с помощью кругов Эйлера отношения между объемами понятий *a*, *b* и *c*, если:
   а) *a* — «четырехугольник», *b* — «трапеция», *c* — «прямоугольник»;
   б) *a* — «натуральное число, кратное 3»; *b* — «натуральное число, кратное 4»; *c* — «натуральное число»;

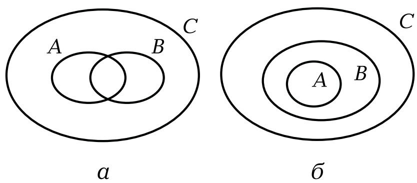


Рис. 2.2

в) a — «треугольник»; b — «равнобедренный треугольник»; c — «равносторонний треугольник».

7. Приведите примеры понятий, отношения между объемами которых изображены на рис. 2.2, *а*, *б*.
8. Среди понятий, изучаемых в начальном курсе математики, есть такие, как «четное число», «треугольник», «многоугольник», «число», «трехзначное число», «прямой угол», «сумма», «слагаемое», «выражение». Есть ли среди них понятия, находящиеся в отношении: а) рода и вида; б) целого и части?

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЙ

Понятиям дают ***определение*** — это логическая операция, с помощью которой раскрывается содержание понятия либо устанавливается значение термина.

По способу выявления содержания понятия различают ***явные*** и ***неявные*** определения.

Среди явных определений в математике чаще всего используются ***определения через род и видовое отличие***. Рассмотрим их подробнее.

В начальном курсе математики понятие «прямоугольник», как правило, определяют так: «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые». В этом определении есть две части — определяемое понятие (прямоугольник) и определяющее понятие (четырехугольник, у которого все углы прямые). Если обозначить через a первое понятие, а через b — второе, то данное определение можно представить в таком виде:

$$a \text{ есть (по определению) } b.$$

Слова «есть (по определению)» можно заменить символом $\underset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow}$, и тогда определение будет выглядеть так:

$$a \underset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} b$$

Читают: «a равносильно b по определению», или «a тогда и только тогда, когда b».

Определения, имеющие такую структуру, называют ***явными***.

Обратимся опять к определению прямоугольника, точнее, к его второй части — определяющему понятию. В нем можно выделить:

1) понятие «четырехугольник», которое является родовым по отношению к понятию «прямоугольник»;

Рис. 2.3

2) свойство «иметь все углы прямые», которое позволяет выделить из всевозможных четырехугольников один вид — прямоугольники; поэтому его называют видовым отличием.

Вообще, ***видовое отличие*** — это свойства (одно или несколько), которые позволяют выделять определяемые объекты из объема родового понятия.

Итоги проведенного анализа можно представить в виде схемы (рис. 2.3).

Заметим, что в наглядном представлении структуры определения через род и видовое отличие мы допустили некоторые неточности. Во-первых, словосочетание «родовое понятие» означает, что речь идет о родовом понятии по отношению к определяемому. Во-вторых, не совсем ясно, что означает знак «+», который, как известно, используется для обозначения сложения чисел. Смысл этого знака станет понятным немного позже, когда мы рассмотрим математический смысл союза «и». А пока познакомимся с еще одной возможностью наглядного представления определения через род и видовое отличие. Если определяемое понятие обозначить буквой a, определяющее — буквой b, родовое понятие (по отношению к определяемому) — буквой c, а видовое отличие — буквой P, то определение через род и видовое отличие можно представить так:

$$a \underset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} \underbrace{c + P}_{b}$$

Объяснение того, что видовое отличие обозначено заглавной буквой, будет дано далее.

Известно, что любое понятие имеет объем. Если понятие a определено через род и видовое отличие, то о его объеме — множестве A — можно сказать, что в нем содержатся такие объекты, которые принадлежат множеству C (объему родового понятия c) и обладают свойством P:

$$A = \{x \mid x \in C \text{ и } P(x)\}.$$

Например, если дано определение: «Острым углом называется угол, который меньше прямого», то объем понятия «острый угол» —

это подмножество множества всех углов плоскости, которые обладают свойством «быть меньше прямого».

Формулируя определения понятий через род и видовое отличие, придерживаются ряда правил. Перечислим основные из них.

1. *Определение должно быть соразмерным.* Это означает, что объемы определяемого и определяющего понятий должны совпадать. Данное правило вытекает из взаимозаменяемости, определяемого и определяющего понятий.

Например, несоразмерно такое определение квадрата: «Квадратом называется четырехугольник, у которого все стороны равны». Действительно, объем определяемого понятия — множество квадратов. Объем определяющего понятия — множество четырехугольников, все стороны которых равны, а это множество ромбов. Но не всякий ромб есть квадрат, т. е. объемы определяемого и определяющего понятия не совпадают, и, следовательно, данное определение несоразмерно.

2. *В определении (или их системе) не должно быть порочного круга.* Это означает, что нельзя определять понятие через само себя (в определяющем не должно содержаться определяемого термина) или через другое, которое, в свою очередь, определяется через него.

Например, содержит порочный круг определение: «Равные треугольники — это треугольники, которые равны».

Так как в математике рассматривают не просто отдельные понятия, а их систему, то данное правило запрещает порочный круг и в системе определений. В соответствии с ним нельзя определять понятие a, выбрав в качестве родового понятия c, а понятие c — через понятие a.

Например, если определить окружность как границу круга, а круг — как часть плоскости, ограниченную окружностью, то будем иметь порочный круг в определениях данных понятий.

3. *Определение должно быть ясным.* Это, на первый взгляд очевидное, правило означает многое. Прежде всего, требуется, чтобы значения терминов, входящих в определяющее понятие, были известны к моменту введения определения нового понятия.

Например, нельзя определять прямоугольник как параллелограмм с прямым углом, если понятие «параллелограмм» еще не рассмотрено.

К условиям ясности определения относят также требования включать в видовое отличие лишь столько свойств, сколько необходимо и достаточно для выделения определяемых объектов из объема родового понятия.

Рассмотрим, например, такое определение прямоугольника: «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые и противоположные стороны равны».

Нетрудно убедиться в том, что это определение соразмерное и в нем нет порочного круга. Но можно доказать, что свойство «в прямоугольнике противоположные стороны равны» вытекает из свойства «в прямоугольнике все углы прямые». В этом случае считают, что в данном определении прямоугольника второе свойство избыточное.

Таким образом, чтобы определение было ясным, желательно, чтобы оно не содержало избыточных свойств в определяющей части, т. е. таких свойств, которые могут быть выведены из других, включенных в это определение. Однако иногда для простоты изложения это правило нарушают.

Для обеспечения ясности определения важно также наличие понятия, родового по отношению к определяемому. Пропуск родового понятия делает определение несоразмерным. Неприемлемо, например, такое определение квадрата: «Квадрат — это когда все стороны равны».

Необходимо отметить также, что, формулируя определение, нужно стремиться в определяющем указывать не просто родовое по отношению к определяемому понятие, а ближайшее. Это часто позволяет сократить количество свойств, включаемых в видовое отличие.

Например, если для определения квадрата в качестве родового выбрать понятие «четырехугольник», то тогда нужно будет включать в видовое отличие два свойства: «иметь все прямые углы» и «иметь все равные стороны». В результате получим определение: «Квадратом называется четырехугольник, у которого все углы прямые и все стороны равны».

Если же в качестве родового выбрать ближайшее для квадрата родовое понятие — прямоугольник, то получим более короткое определение квадрата: «Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны».

4. *Одно и то же понятие определить через род и видовое отличие, соблюдая сформулированные правила, можно по-разному.* Например, квадрат можно определить так:

а) прямоугольник, у которого соседние стороны равны;

б) прямоугольник, у которого диагонали взаимноперпендикулярны;

в) ромб, у которого есть прямой угол;

г) параллелограмм, у которого все стороны равны, а углы прямые.

Различные определения одного и того же понятия возможны потому, что из большого числа свойств, входящих в содержание понятия, в определение включаются только некоторые. И когда из возможных определений выбирают одно, исходят из того, какое из них проще и целесообразнее для дальнейшего построения теории.

Если же одному и тому же понятию даются, например, два разных определения, то необходимо доказывать их равносильность, т. е. убеждаться в том, что из свойств, включенных в одно определение, вытекают свойства, включенные в другое, и наоборот.

Завершая рассмотрение определений понятий через род и видовое отличие, приведем *последовательность действий* при воспроизведении определения знакомого понятия или построении определения нового:

1) назвать определяемое понятие (термин);

2) указать ближайшее родовое (по отношению к определяемому) понятие;

3) перечислить свойства, выделяющие определяемые объекты из объема родового, т. е. сформулировать видовое отличие;

4) проверить, выполнены ли правила определения понятия (соразмерно ли оно, нет ли порочного круга и т. д.).

В начальном курсе математики определения через род и видовое отличие используют редко. Связано это как с особенностями курса, так и с возможностями детей. Но понятий в начальном курсе математики очень много — это было отмечено в начале главы. Как же их определяют?

При изучении математики в начальной школе чаще всего используют ***неявные определения***. В неявных определениях содержание понятий раскрывается косвенным путем. Среди них различают контекстуальные и остенсивные.

В ***контекстуальных определениях*** содержание нового понятия раскрывается либо через отрывок текста, либо через контекст, либо через анализ конкретной ситуации, описывающей смысл вводимого понятия. Посредством контекста устанавливается связь определяемого понятия с другими, известными, и тем самым косвенно раскрывается его содержание. Примером контекстуального определения может быть определение уравнения и его решения, приведенное в учебнике математики для 2 класса[1]. Здесь после записи □ + 6 = 15 и чисел 0, 5, 9, 10 идет текст: «К какому числу надо

[1] *Моро М. И.* Математика. 2 класс / М. И. Моро, М. А. Бантова. — М. : Просвещение, 1987. — С. 196.

прибавить 6, чтобы получилось 15? Обозначим неизвестное число латинской буквой x (икс):

$x + 6 = 15$ — это уравнение.

Решить уравнение — значит найти неизвестное число. В данном уравнении неизвестное число равно 9, так как $9 + 6 = 15$.

Объясни, почему числа 0, 5 и 10 не подходят».

Остенсивные определения — это определения, раскрывающие существенные признаки предметов путем их предъявления, показа. Они используются для введения терминов путем демонстрации объектов, которые этими терминами обозначают. Например, таким способом можно определить в начальной школе понятия равенства и неравенства:

$2 \cdot 7 > 2 \cdot 6$	$9 \cdot 3 = 27$
$78 - 9 < 78$	$6 \cdot 4 = 4 \cdot 6$
$37 + 6 > 37$	$17 - 5 = 8 + 4$
Это неравенства.	*Это равенства.*

Остенсивные определения, как и контекстуальные, характеризуются некоторой незавершенностью. Действительно, определение посредством показа не выделяет числовые равенства (неравенства) из других предложений, в нем не указываются свойства, характерные для данных понятий. Они только связывают термины с определяемыми объектами. Поэтому после контекстуального или остенсивного определения понятия необходимо дальнейшее изучение свойств так определенных объектов.

В начальном обучении математике, кроме контекстуальных и остенсивных определений, часто используют приемы, заменяющие определение. Это, в частности, ***описание***, ***сравнение***. При описании изучаемого объекта ставится цель — выявить как можно больше его свойств, как существенных, так и несущественных. Если используется прием сравнения, то свойства вводимого понятия выявляются в процессе сравнения различных объектов. Такой прием применяется, например, при ознакомлении младших школьников с понятием площади фигуры.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Покажите, что следующие определения имеют форму равносильности, и переформулируйте их, используя слова «тогда и только тогда, когда»:

а) «Четным называется число, которое делится на 2»;
б) «Множество *А* называется подмножеством множества *В*, если каждый элемент множества *А* принадлежит множеству *В*»;

2. В следующих определениях выделите определяемое и определяющее понятия, родовое понятие (по отношению к определяемому) и видовое отличие:
а) «Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны»;
б) «Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется его средней линией».
3. Назовите все свойства, которые содержатся в видовом отличии каждого из следующих определений:
а) «Биссектрисой угла называется луч, выходящий из вершины угла и делящий угол пополам»;
б) «Прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются».
4. Соразмерны ли следующие определения:
а) «Остроугольным треугольником называется треугольник, у которого есть острый угол»;
б) «Прямоугольным треугольником называется треугольник, у которого есть прямой угол».
5. Учащийся определил прямой угол как угол, стороны которого взаимно перпендикулярны, а взаимно перпендикулярные прямые — как прямые, образующие при пересечении прямые углы. Какую ошибку допустил учащийся?
6. Есть ли логические ошибки в следующих определениях? Если можете, исправьте их.
а) «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого противоположные стороны равны»;
б) «Биссектрисой угла называется прямая, делящая угол пополам»;
в) «Сложением называется действие, при котором числа складываются»;
г) «Равносторонним треугольником называется треугольник, у которого равны все стороны и все углы».
7. Дайте определение: тупоугольного треугольника, равнобедренного треугольника, трапеции. Какое понятие вы выбрали в качестве родового в каждом случае? Какие свойства включили в видовое отличие?
8. Сформулируйте определение прямоугольника, используя в качестве родового понятие «четырехугольник». Пользуясь этим определением, объясните, почему фигуры F_1, F_3 и F_4, изображенные на рис. 2.4, можно назвать прямоугольниками, а фигуру F_2 — нет.

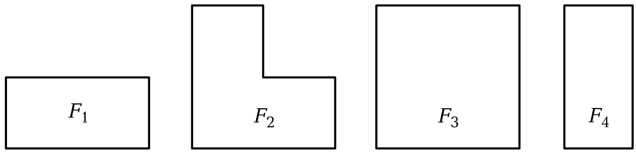


Рис. 2.4

9. Понятие «противоположные стороны прямоугольника» в начальном курсе математики можно определить так: «Красным цветом обозначены две противоположные стороны прямоугольника, а синим цветом — две другие противоположные стороны» (все это показано на рисунке). Какой способ определения понятия использован?
10. Выясните, каким способом определяются в различных учебниках по математике для начальных классов понятия:
    а) выражение; б) сумма; в) слагаемое;
    г) четное число; д) однозначное число; е) умножение.

2.3. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ВЫСКАЗЫВАТЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Изучая реальные процессы, математика описывает их, используя как естественный словесный язык, так и свой символический. Описание строится с помощью предложений. Но чтобы математические знания были достоверными, правильно отражали окружающую нас реальность, эти предложения должны быть истинными.

Как узнать, истинное или ложное знание заключено в том или ином математическом предложении? На этот и другие вопросы, с ним связанные, мы попытаемся ответить. А сейчас только заметим, что каждое математическое предложение характеризуется содержанием и логической формой (структурой), причем содержание неразрывно связано с формой, и нельзя осмыслить первое, не понимая второго.

Относительно понятий и отношений между ними можно высказывать различные суждения. Языковой формой суждений являются повествовательные предложения. Например, в начальном курсе математики можно встретить такие предложения:

1) число 12 — четное;
2) $2 + 5 > 8$;
3) $x + 5 = 8$;

4) в числе 15 один десяток и 5 единиц;

5) от перестановки множителей произведение не изменяется;

6) некоторые числа делятся на 3.

Видим, что предложения, используемые в математике, могут быть записаны как на естественном (русском) языке, так и на математическом, с использованием символов. Далее, о предложениях 1, 4, 5 и 6 можно сказать, что они несут верную информацию, а предложение 2 — ложную. Относительно предложения $x + 5 = 8$ вообще нельзя сказать: истинное оно или ложное.

Взгляд на предложение с позиции — истину или ложь оно нам сообщает — привел к понятию *высказывания*.

> ***Высказыванием*** называют предложение, относительно которого имеет смысл вопрос: истинно оно или ложно.

Например, предложения 1, 2, 4, 5 и 6, приведенные выше, есть высказывания, причем предложения 1, 4, 5 и 6 — истинные, а 2 — ложное.

Высказывания принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, ..., Z. Если высказывание A истинно, то записывают: A — «и», если же высказывание A — ложно, то пишут: A — «л».

«Истина» и «ложь» называются ***значениями истинности высказывания***. Каждое высказывание либо истинно, либо ложно, быть одновременно тем и другим оно не может.

Предложение $x + 5 = 8$ не является высказыванием, так как о нем нельзя сказать: истинно оно или ложно. Однако при подстановке конкретных значений переменной x оно обращается в высказывание: истинное или ложное. Например, если $x = 2$, то $2 + 5 = 8$ — ложное высказывание, а при $x = 3$ оно обращается в истинное высказывание $3 + 5 = 8$. Предложение $x + 5 = 8$ называют ***высказывательной формой***. Оно порождает множество высказываний одной и той же формы.

По числу переменных, входящих в высказывательную форму, различают одноместные, двухместные и так далее высказывательные формы и обозначают: $A(x)$, $A(x, y)$ и т. д. Например, $x + 5 = 8$ — одноместная высказывательная форма, а предложение «Прямая x параллельна прямой y» — двухместная.

Следует иметь в виду, что в высказывательной форме переменные могут содержаться неявно. Например, в предложениях: «число четное», «две прямые пересекаются» переменных нет, но они подразумеваются: «Число x — четное», «Две прямые x и y пересекаются».

Задание высказывательной формы, как правило, предполагает и задание того множества, из которого выбираются значения переменной (переменных), входящей в высказывательную форму. Это множество называют ***областью определения*** высказывательной формы. Например, неравенство $x > 5$ можно рассматривать на множестве натуральных чисел, а можно считать, что значение переменной x выбирается из множества действительных чисел. Тогда в первом случае областью определения неравенства $x > 5$ будет множество натуральных чисел, а во втором — множество действительных чисел.

Дадим определение одноместной высказывательной формы (понятие высказывательной формы, содержащей две и более переменных, определяется аналогично).

> ***Одноместной высказывательной формой***, заданной на множестве X, называют предложение с переменной, которое обращается в высказывание при подстановке в него значений переменной из множества X.

Среди всех возможных значений переменной нас в первую очередь интересуют те, которые обращают высказывательную форму в истинное высказывание. Множество таких значений переменных называют ***множеством истинности*** высказывательной формы. Например, множеством истинности высказывательной формы $x > 5$, заданной на множестве действительных чисел, будет промежуток $(5; \infty)$. Множество истинности высказывательной формы $x + 5 = 8$, заданной на множестве целых неотрицательных чисел, состоит из одного числа 3.

Условимся обозначать множество истинности высказывательной формы буквой T. Тогда, согласно определению, всегда $T \subset X$.

Предложения (высказывания и высказывательные формы), которые мы рассматривали, были простыми, но можно привести примеры суждений, языковой формой которых будут сложные предложения. Например: «Число 12 четное и делится на 3»; «Если треугольник равнобедренный, то углы при основании в нем равны». Естественно возникает вопрос: как определять значение истинности таких высказываний и находить множество истинности таких высказывательных форм?

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо познакомиться с некоторыми логическими понятиями.

В логике считают, что из двух данных предложений можно образовать новые предложения, используя для этого союзы «и», «или», «если..., то...», «тогда и только тогда, когда» и др. С помощью частицы «не» или словосочетания «неверно, что» можно из одного предложения получить новое.

Слова «и», «или», «если..., то...», «тогда и только тогда, когда», а также частицу «не» (слова «неверно, что») называют ***логическими связками***. Предложения, образованные из других предложений с помощью логических связок, называют ***составными***. Предложения, не являющиеся составными, называют ***элементарными***.

Приведем примеры составных предложений:

1) «Число 28 четное и делится на 7».

Это предложение образовано из двух элементарных: «число 28 четное», «число 28 делится на 7» с помощью логической связки «и».

2) «Число x меньше или равно 8».

Это предложение образовано из двух элементарных: «Число x меньше 8», «Число x равно 8» с помощью логической связки «или».

3) «Число 14 не делится на 4».

Это составное высказывание образовано из предложения «Число 14 делится на 4» с помощью частицы «не».

Вы, наверное, обратили внимание на то, что все три предложения, являясь с логической точки зрения составными, по своей грамматической структуре — простые. Не всегда, но так бывает: простое предложение по своей логической структуре может быть составным.

А как определять значение истинности составного высказывания? Например, истинно или ложно высказывание: «Число 28 делится на 7 и на 9»? Элементарное высказывание «Число 28 делится на 7», входящее в составное, истинное — это известно из начального курса математики. Второе элементарное высказывание «Число 28 делится на 9» — ложное (и это нам также известно). А каким будет в этом случае значение истинности составного высказывания, образованного из этих высказываний с помощью союза «и»? Ответить на данный вопрос можно, если знать смысл этого союза. Но так как составные высказывания образуются с помощью и других логических связок, то возникает необходимость в уточнении их смысла.

Кроме того, уточнение смысла используемых в математике связок обусловлено их неоднозначным толкованием в обыденной речи, что может привести к неоднозначному ответу при нахождении значения истинности составных высказываний.

Итак, значение истинности элементарного высказывания определяют, исходя из его содержания с опорой на известные знания. Чтобы определить значение истинности составного высказывания, надо знать смысл логических связок, с помощью которых оно образовано из элементарных, и уметь выявлять логическую структуру высказывания.

Для выявления логической структуры составного предложения нужно установить:

- из каких элементарных предложений образовано данное составное предложение;
- с помощью каких логических связок оно образовано.

Выявим, например, логическую структуру предложения «Если углы вертикальные, то они равны». Оно состоит из двух элементарных предложений: предложения A — «Углы вертикальные» и предложения B — «углы равны». Соединены они в одно составное предложение с помощью логической связки «если..., то...». Говорят, что данное составное предложение имеет логическую структуру (форму): «если A, то B».

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Среди следующих предложений, рассматриваемых в начальном курсе математики, укажите высказывания и определите их значение истинности:
   а) «$(12 - 7) \cdot (6 + 3) = 45$»;
   б) «$(15 + 12) : 3 > 10$»;
   в) «В любом прямоугольнике противоположные стороны равны»;
   г) «$(12 - x) \cdot 4 = 24$»;
   д) «Среди четырехугольников есть такие, у которых все стороны равны»;
   е) «Число z — двузначное»;
   ж) «Произведение чисел 4070 и 8 меньше, чем сумма чисел 18 396 и 14 174»;
   з) «Число 6 является корнем уравнения $(12 - x) \cdot 4 = 24$».
2. Какие предложения из задания 1 являются высказывательными формами? Подставьте в них значение переменной так, чтобы получилось:
   а) истинное высказывание;
   б) ложное высказывание.
3. Можно ли считать высказывательными формами следующие записи:
   а) $x^2 - 2x$; б) $4x + 2y$; в) $7 \cdot 4 + 2 = 30$; г) $7 \cdot 4 + 2 < 30$?
4. В следующих составных предложениях выделите составляющие их элементарные предложения и логические связки:

а) «В равнобедренном треугольнике ABC биссектриса BD является медианой и высотой»;
б) «$x \geq 7$»;
в) «Если запись числа оканчивается цифрой 0, то число делится на 5»;
г) «Треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда все его углы равны»;
д) «Не верно, что число 17 делится на 3»;
е) «Если $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$».

2.4. КОНЪЮНКЦИЯ И ДИЗЪЮНКЦИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ И ВЫСКАЗЫВАТЕЛЬНЫХ ФОРМ

Выясним смысл, который имеет в математике союз «и». Пусть A и B — произвольные высказывания. Образуем из них с помощью союза «и» составное высказывание. Полученное высказывание называют конъюнкцией (от лат. *conjunctio* — соединение) и обозначают $A \wedge B$ (читают: «A и B»).

Конъюнкцией высказываний A и B называют высказывание $A \wedge B$, которое истинно, когда оба высказывания истинны, и ложно, когда хотя бы одно из этих высказываний ложно.

Определение конъюнкции можно записать с помощью таблицы, называемой *таблицей истинности*:

A	B	$A \wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

Используя данное определение, найдем значение истинности высказывания «Число 28 делится на 7 и на 9», которое, как было установлено ранее, состоит из двух элементарных высказываний, соединенных союзом «и», т. е. является конъюнкцией. Так как первое высказывание истинно, а второе ложно, то, согласно определению конъюнкции, высказывание «число 28 делится на 7 и на 9» будет ложным.

Заметим, что в речи конъюнкция может выражаться не только союзом «и», но и другими, например, «а», «но», «однако», «не только..., но и...». Например: «Число 15 делится не только на 3, но и на 5».

Выясним теперь, какой смысл имеет в математике союз «или».

Пусть A и B — произвольные высказывания. Образуем из них с помощью союза «или» составное высказывание. Полученное высказывание называют дизъюнкцией (от лат. *disjunctio* — разделение) и обозначают $A \vee B$ (читают: «A или B»).

Дизъюнкцией высказываний A и B называют высказывание $A \vee B$, которое истинно, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний, и ложно, когда оба высказывания ложны.

Таблица истинности дизъюнкции имеет вид:

A	B	$A \vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

Используя данное определение, найдем значение истинности высказывания «Число 28 делится на 7 или на 9». Так как это предложение является дизъюнкцией двух высказываний, одно из которых истинно, то, согласно определению, оно истинно.

Из определения дизъюнкции следует, что в математике союз «или» используют как неразделительный, т. е. допускается возможность одновременного выполнения обоих условий. Так, высказывание «15 кратно 3 или 5», согласно определению, считают истинным, поскольку оба высказывания «15 кратно 3» и «15 кратно 5» истинны.

Образование составного высказывания с помощью логической связки называют ***логической операцией***. Операцию, соответствующую союзу «и», называют ***конъюнкцией***; операцию, соответствующую союзу «или», — ***дизъюнкцией***. Заметим, что логические операции и их результаты (составные предложения) называют одинаково. Используя данные ранее определения, можно доказать, что операции конъюнкции и дизъюнкции обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и др.

Определения конъюнкции и дизъюнкции можно обобщить на t составляющих их высказываний.

Конъюнкцией t высказываний называют предложение вида $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_t$, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны все составляющие его высказывания.

Дизъюнкцией t высказываний называют предложение вида $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_t$, которое ложно тогда и только тогда, когда ложны все составляющие его высказывания.

В математике рассматривают не только конъюнкцию и дизъюнкцию высказываний, но и выполняют соответствующие операции над высказывательными формами.

Конъюнкцию одноместных высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X, обозначают $A(x) \wedge B(x)$. С появлением этого предложения возникает вопрос: как найти его множество истинности, зная множества истинности высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$? Другими словами, при каких значениях x из области определения X высказывательная форма $A(x) \wedge B(x)$ обращается в истинное высказывание? Очевидно, что это возможно при тех и только тех значениях x, при которых обращаются в истинное высказывание обе высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$. Если обозначить T_A — множество истинности предложения $A(x)$, T_B — множество истинности предложения $B(x)$, а множество истинности их конъюнкции $T_{A \wedge B}$, то $T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$. Примем это утверждение без доказательства.

Приведем пример использования этого правила. Найдем множество истинности конъюнкции двух неравенств $2x > 10$ и $4 + x < 12$, т. е. множество истинности предложения $2x > 10 \wedge 4 + x < 12$. Пусть T_1 — множество решений неравенства $2x > 10$, а T_2 — множество решений неравенства $4 + x < 12$. Тогда $T_1 = (5, \infty)$, $T_2 = (-\infty, 8)$. Для определения значений x, при которых истинны оба неравенства, нужно найти пересечение их множеств решений: $T_1 \cap T_2 = (5, 8)$.

Видим, что выполнение этого задания свелось к решению системы неравенств. Вообще, с точки зрения логики, любая система неравенств есть конъюнкция неравенств, так же как и система уравнений есть конъюнкция уравнений, что позволяет с единой точки зрения рассматривать процесс их решения.

Дизъюнкцию одноместных высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X, обозначают $A(x) \vee B(x)$. Это предложение будет обращаться в истинное высказывание при тех и только тех значениях x из области определения X, при которых обращается в истинное высказывание хотя бы одна из высказывательных форм, т. е. $T_{A \vee B} = T_A \cup T_B$.

Приведем пример использования этого правила. Решим, например, уравнение $(x-2)(x+5)=0$ при условии, что $x \in \mathbf{R}$. Известно, что произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Это означает, что данное уравнение равносильно дизъюнкции: $x - 2 = 0 \vee x + 5 = 0$ и поэтому множество его решений может быть найдено как объединение множеств решений первого и второго уравнений, т. е. $\{2\} \cup \{-5\} = \{-5, 2\}$.

Рассматривая конъюнкцию и дизъюнкцию высказывательных форм, мы установили их тесную связь с пересечением и объединением множеств.

С другой стороны, характеристические свойства пересечения и объединения множеств A и B представляют собой соответственно конъюнкцию и дизъюнкцию характеристических свойств данных множеств:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\},\ A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\},$$

причем каждое свойство представляет собой высказывательную форму.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Известно, что высказывание A — истинно. Можно ли, зная лишь это, определить значение истинности высказывания:
   а) $A \wedge B$; б) $A \vee B$?
2. Известно, что высказывание A — ложно. Можно ли, зная лишь это, определить значение истинности высказывания:
   а) $A \wedge B$; б) $A \vee B$?
3. Определите значение истинности каждого высказывания:
   а) «Число 6 делится на 2 и на 3»;
   б) «Число 123 делится на 3 и на 9»;
   в) «При делении 42 на 5 в остатке получится 2 или 5»;
   г) «Треугольник ABC (рис. 2.5) прямоугольный и равносторонний»;
   д) «Один из углов треугольника ABC (см. рис. 2.5) равен $60°$»;
   е) «$3 \leq 7$»;
   ж) «$3 \geq 7$».
4. Каждое из следующих предложений замените конъюнкцией либо дизъюнкцией, имеющей тот же смысл:
   а) «Число 7 принадлежит хотя бы одному из множеств A и B»;
   б) «Квадратное уравнение имеет не более двух корней»;
   в) «Каждое слагаемое суммы $x + y + z$ делится на 3»;
   г) «По крайней мере одно из натуральных чисел n, $n - 1$, $n + 1$ четно».

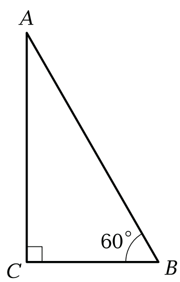


Рис. 2.5

5. Пусть A — множество четных натуральных чисел, B — множество натуральных чисел, меньших 20. Установите, какие из следующих высказываний истинны:
а) $5 \in A$ или $5 \in B$; б) $5 \in A$ и $5 \in B$; в) $8 \in A$ или $8 \in B$;
г) $8 \in A$ и $8 \in B$; д) $44 \in A$ или $44 \in B$; е) $44 \in A$ и $44 \in B$;
ж) $51 \in A$ или $51 \in B$; з) $51 \in A$ и $51 \in B$.
6. Покажите, что, выполняя следующие задания, мы находим множество истинности конъюнкции и дизъюнкции высказывательных форм:
а) «Даны числа: 31, 53, 409, 348, 20, 3094, 233, 33, 271, 143, 3, 333, 14, 30. Выпишите все числа, в записи которых:
1) три цифры и есть цифра 3;
2) три цифры или есть цифра 3»;
б) «Из ряда 25, 12, 17, 5, 15, 36 выпишите числа:
1) двузначные или меньшие 17;
2) двузначные и меньшие 17».

2.5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА РАСПОЗНАВАНИЕ ОБЪЕКТОВ

С введением понятия конъюнкции и дизъюнкции высказывательных форм появились условия для рассмотрения вопросов, связанных с решением определенного вида задач, так называемых задач на распознавание объектов.

В задачах на распознавание требуется ответить на вопрос: *принадлежит тот или иной объект объему данного понятия или не принадлежит*. Примером такой задачи может быть следующая: «Установите, какие из фигур на рис. 2.6 являются квадратами, а какие нет».

Решают такие задачи, используя определение соответствующего понятия. При этом важно понимать, что если понятие a определено через родовое понятие c и видовое отличие P, то его объем A можно

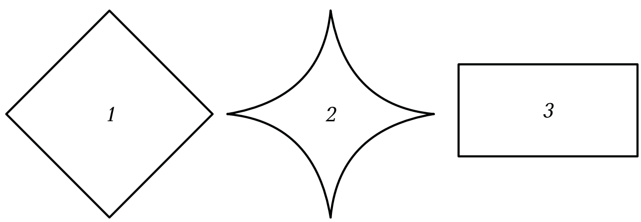


Рис. 2.6

представить в таком виде: $A = \{x \mid x \in C \text{ и } P(x)\}$. Данная запись показывает, что характеристическое свойство объема понятия a представляет собой *конъюнкцию двух свойств*. Это означает, что объект x будет принадлежать объему понятия a тогда и только тогда, когда он (этот объект) содержится в объеме родового понятия и обладает свойством P. Поэтому распознавание проводится по следующему алгоритму:

1) проверяем, принадлежит ли объект x объему родового понятия, т. е. истинно ли высказывание $x \in C$;

2) если окажется, что $x \notin C$, то проверку прекращаем и делаем вывод, что объект x не принадлежит объему понятия a, т. е. $x \notin A$;

3) если $x \in C$, то продолжаем проверку и выясняем, обладает ли объект x свойством P;

4) если объект x обладает свойством P, то делаем вывод о его принадлежности объему понятия a, т. е. утверждаем, что $x \in A$;

5) если окажется, что объект x не обладает свойством P, то делаем вывод, что объект x не принадлежит объему понятия a, т. е. $x \notin A$.

Выясним, например, какие из фигур на рис. 2.6 являются квадратами. Будем пользоваться таким определением: «Квадратом называют прямоугольник, у которого соседние стороны равны». Из него следует: чтобы фигура была квадратом, она должна обладать двумя свойствами: «быть прямоугольником» и «иметь равные соседние стороны».

Фигура *1* является квадратом, так как это прямоугольник, соседние стороны которого равны.

Фигура *2* не является квадратом, так как это не прямоугольник.

Фигура *3* — прямоугольник, но соседние стороны в нем не равны. Следовательно, ее нельзя назвать квадратом.

Мы рассмотрели самый простой случай решения задачи на распознавание, когда видовое отличие в определении понятия состояло только из одного свойства. Но нередки и такие определения, в которых видовое отличие состоит из нескольких свойств, связанных между собой союзами «и», «или».

Если видовое отличие представляет собой конъюнкцию свойств, т. е. $P = P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$, то распознавание проводится по следующему алгоритму:

1) проверяем поочередно наличие у объекта каждого из свойств $P_1, P_2, \ldots, P_n$;

2а) если окажется, что он не обладает каким-либо из этих свойств, то проверку прекращают и делают вывод о том, что объект не обладает свойством P;

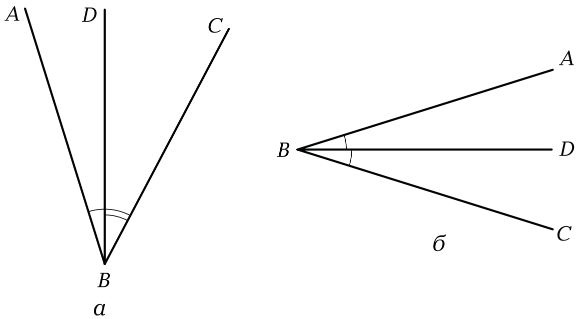


Рис. 2.7

2б) если же окажется, что все свойства P_1, P_2, ..., P_n присущи данному объекту, то заключают, что объект обладает свойством P.

Выясним, например, в каком случае луч BD является биссектрисой угла ABC (рис. 2.7, *а*, *б*). Воспользуемся таким определением биссектрисы угла: «Биссектрисой угла называют луч, выходящий из вершины угла и делящий этот угол пополам». Из него следует: для того чтобы луч был биссектрисой угла, он должен обладать двумя свойствами: выходить из вершины угла и делить этот угол пополам.

Луч BD на рис. 2.7, *а* не является биссектрисой угла ABC, поскольку он не делит данный угол пополам.

Луч BD на рис. 2.7, *б* — биссектриса угла ABC, так как он выходит из вершины этого угла и делит его пополам.

Если видовое отличие представляет собой дизъюнкцию свойств $P = P_1 \vee P_2 \vee ... \vee P_n$, то проверку проводят до тех пор, пока не будет установлено, что хотя бы одно из свойств присуще данному объекту, на основании чего заключают, что он обладает свойством P. Если же окажется, что объект не обладает ни одним из свойств P_1, P_2, ..., P_n, то приходят к выводу, что он не обладает свойством P.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дайте определение квадрата через понятие «прямоугольник». Пользуясь данным определением, укажите условия, при которых фигура:
   а) будет являться квадратом;
   б) не будет являться квадратом.
2. Установите, в каком из случаев (рис. 2.8, *а—в*) отрезок PQ является диаметром круга. Каким определением диаметра удобнее воспользоваться при решении данной задачи:

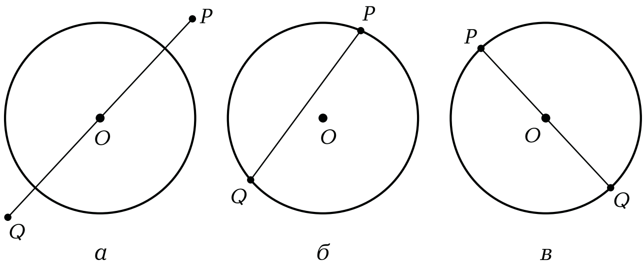


Рис. 2.8

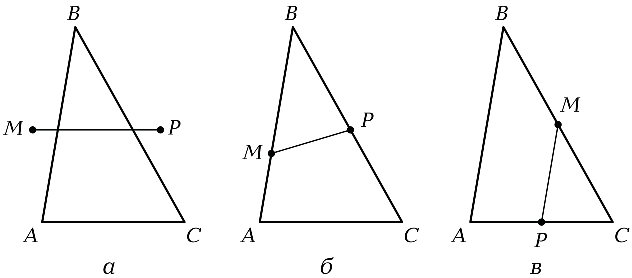


Рис. 2.9

а) «Диаметр круга — это хорда, проходящая через его центр»;

б) «Диаметр круга — это отрезок, соединяющий две точки окружности и проходящий через центр».

3. Установите, в каком из рассматриваемых случаев отрезок *MP* будет средней линией треугольника *ABC* (рис. 2.9, *а—в*).
4. Каким образом вы будете решать следующие задачи, предлагаемые младшим школьникам:

   а) «Найди среди записей уравнения и реши их устно:

$$8 + 7 = 15;\ 17 - x = 9;\ 17 - x;\ x + 12 = 12»;$$

   б) «Назови уравнения, в которых неизвестное число равно 8:

$$x \cdot 2 = 20;\ 6 \cdot x = 48;\ x : 2 = 5;\ 40 : x = 5».$$

2.6. ВЫСКАЗЫВАНИЯ С КВАНТОРАМИ

В данной главе рассматриваются различные виды математических предложений. Мы выяснили, что среди них выделяют высказывания и высказывательные формы, которые могут быть элементарными и составными. Мы узнали также, как устанавливают значение истинности таких высказываний и находят множество истинности высказывательных форм.

Но этим не исчерпано все многообразие формулировок математических предложений и правил обращения с ними. Например, почему одну и ту же теорему о равенстве вертикальных углов можно формулировать по-разному:

- «Вертикальные углы равны»;
- «Если углы вертикальные, то они равны»;
- «Для того чтобы углы были равны, достаточно, чтобы они были вертикальными»;
- «Для того чтобы углы были вертикальными, необходимо, чтобы они были равны».

Возникают и другие вопросы: почему истинность предложения «сумма трех любых последовательных натуральных чисел делится на 3» надо доказывать, а чтобы убедиться в истинности предложения «некоторые натуральные числа делятся на 3», достаточно привести конкретный пример?

Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо более глубокое изучение математических предложений и, прежде всего, высказываний с кванторами.

В формулировках математических предложений часто встречаются слова: «каждый», «все», «некоторые», «хотя бы один». Например, свойство противоположных сторон прямоугольника формулируется так: «В ***любом*** прямоугольнике противоположные стороны равны», а о свойстве натуральных чисел мы говорили, что «***Некоторые*** натуральные числа кратны 5». Выясним, каков смысл этих слов и как он используется в математике.

Если задана высказывательная форма, то, чтобы превратить ее в высказывание, достаточно вместо каждой из переменных, входящих в форму, подставить ее значение. Например, если на множестве **N** натуральных чисел задана высказывательная форма $A(x)$ — «Число x кратно 5», то, подставив в нее вместо x число 20, мы получим истинное высказывание «Число 20 кратно 5». Если же в эту высказывательную форму подставить вместо x число 17, мы получим ложное высказывание «Число 17 кратно 5».

Однако существуют и другие способы получения высказываний из высказывательных форм.

Если перед высказывательной формой «Число x кратно 5» поставить слово «всякое», то получится предложение «Всякое число x кратно 5». Относительно этого предложения можно задать вопрос:

истинно оно или ложно? Значит, предложение «Всякое число x кратно 5» ($x \in \mathbf{N}$) — высказывание, причем ложное.

Выражение «для всякого x» в логике называют ***квантором общности*** по переменной x (переменная может быть обозначена и другой буквой) и обозначают символом $\forall x$.

Запись $(\forall x)$ $[A(x)]$ означает: «для всякого значения x предложение $A(x)$ — истинное высказывание». Иногда эту запись дополняют обозначением множества X, на котором задана высказывательная форма $A(x)$, и тогда предложение $(\forall x \in X)$ $[A(x)]$ можно читать:

а) для всякого x из множества X истинно $A(x)$;

б) всякий элемент из множества X обладает свойством A.

Выражение «существует x такое, что...» в логике называют ***квантором существования*** по переменной x (переменная может быть обозначена и другой буквой) и обозначают символом $\exists x$.

Запись $(\exists x)$ $[A(x)]$ означает: «существует такое значение x, что $A(x)$ — истинное высказывание». Иногда эту запись дополняют обозначением множества X, на котором задана высказывательная форма $A(x)$, и тогда предложение $(\exists x \in X)$ $[A(x)]$ можно читать:

а) существует такое x из множества X, что истинно $A(x)$;

б) хотя бы один элемент x из множества X обладает свойством A.

Заметим, что в математике наряду со словом «всякий» употребляют слова «каждый», «любой», а вместо слова «существует» используют слова «некоторые», «найдется», «есть», «хотя бы один».

Обратим внимание на особенность употребления в математике слова «*некоторый*». В обычной речи, говоря «некоторые», имеют в виду «по меньшей мере один, но не все», в математике же слово «некоторые» означает «по меньшей мере один, но, может быть, и все».

Итак, если задана одноместная высказывательная форма $A(x)$, то, чтобы превратить ее в высказывание, достаточно связать квантором общности или квантором существования содержащуюся в ней переменную. Если же высказывательная форма содержит несколько переменных, то перевести ее в высказывание можно, если связать квантором каждую переменную. Например, если дана высказывательная форма «$x > y$», то для получения высказывания нужно связать квантором обе переменные, например: $(\forall x)(\exists y)[x > y]$ или $(\exists x)(\exists y)$ $[x > y]$.

Однако важно уметь не только переходить от высказывательной формы к высказыванию с помощью кванторов, но и распознавать высказывания, содержащие кванторы, а также выявлять их логическую структуру. Дело в том, что кванторы часто не содержатся в формулировках определений, теорем и других математических предложений. Например, в формулировке теоремы «Вертикальные углы равны» квантора в явном виде нет, но предполагается, что данное утверждение справедливо для всех вертикальных углов.

Задача 1. Выявить логическую структуру следующих высказываний:

а) «Некоторые нечетные числа делятся на 5»;

б) «Произведение двух любых последовательных натуральных чисел кратно 2»;

в) «В прямоугольнике диагонали равны».

Решение. а) В этом предложении имеется квантор существования, он выражен словом «некоторые», и высказывательная форма «нечетные числа делятся на 5», заданная на множестве X нечетных чисел. Обозначим высказывательную форму символом $A(x)$, тогда логическая структура данного предложения такова: $(\exists x \in X)$ $[A(x)]$. Если предложение $A(x)$ записать, используя символы «$x \vdots 5$», то исходное высказывание можно представить в таком виде: $(\exists x \in X)$ $[x \vdots 5]$, где X — множество нечетных чисел.

б) В данном предложении имеется квантор общности, он представлен словом «любой», и высказывательная форма «произведение двух последовательных натуральных чисел кратно 2», заданная на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел. Обозначим ее $A(x)$. Тогда логическая структура данного высказывания такова: $(\forall x \in \mathbf{N})$ $[A(x)]$. И если $A(x)$ представить в виде $x(x + 1) \vdots 2$, то заданное предложение можно записать так: $(\forall x \in \mathbf{N})$ $[x(x + 1) \vdots 2]$.

в) В данном высказывании квантора в явном виде нет, но подразумевается, что свойством «иметь равные диагонали» обладают *любые* прямоугольники, следовательно, этот квантор общности можно включить в заданное высказывание, не изменив его сути: «В любом прямоугольнике диагонали равны». Тогда его структура такова: $(\forall x \in X)$ $[A(x)]$, где X — множество прямоугольников, $A(x)$ — высказывательная форма «в прямоугольнике диагонали равны».

Выясним теперь, как устанавливают значения истинности высказываний, содержащих кванторы.

Рассмотрим сначала высказывание с квантором общности, т. е. высказывание вида $(\forall x \in X)$ $[A(x)]$. В нем утверждается, что для любого x из множества X истинно $A(x)$, поэтому чтобы убедиться в истинности этого высказывания, нужно показать, что множество истинности T_A высказывательной формы $A(x)$ совпадает с множеством X ($T_A = X$). Чтобы убедиться в ложности высказывания $(\forall x \in X)$ $[A(x)]$, достаточно показать, что $T_A \neq X$, т. е. существует такое значение $x \in X$, при котором высказывательная форма $A(x)$ обращается в ложное высказывание.

Задача 2. Установить, истинны или ложны следующие высказывания:

а) «Для каждого x из множества {0, 1, 4} значение выражения $(4 - x) : (2x + 1)$ есть число целое»;

б) «Произведение двух любых последовательных натуральных чисел кратно 2»;

в) «Всякое натуральное число делится на 5».

Решение. а) Если необходимо убедиться в истинности данного высказывания, то нужно показать, что при подстановке каждого числа из множества {0, 1, 4} в выражение $(4 - x) : (2x + 1)$ получается целое число. Имеем:

- если $x = 0$, то $(4 - 0) : (2 \cdot 0 + 1) = 4 : 1 = 4$;
- если $x = 1$, то $(4 - 1) : (2 \cdot 1 + 1) = 3 : 3 = 1$;
- если $x = 4$, то $(4 - 4) : (2 \cdot 4 + 1) = 0 : 9 = 0$.

Действительно, значение выражения $(4 - x) : (2x + 1)$ при всех заданных значениях x есть число целое. Установили мы это путем перебора всех возможных случаев.

б) Воспользуемся результатом задачи 1 (случай *б*) и представим данное высказывание в таком виде: $(\forall x \in \mathbf{N})$ $[x(x + 1) : 2]$.

Неизвестно, истинно оно или ложно, поэтому рассмотрим несколько случаев. Если $x = 1$, то произведение $1 \cdot 2$ кратно 2, так как на 2 делится второй множитель. Если $x = 2$, то произведение $2 \cdot 3$ тоже кратно 2, так как на 2 делится первый множитель. Если $x = 7$, то и в этом случае $7 \cdot 8$ кратно 2, поскольку второй множитель делится на 2. Исходя из рассмотренных случаев можно предположить, что данное высказывание истинное, но убедиться в этом путем перебора (как в первом предложении) нельзя, поскольку невозможно перебрать все натуральные значения x. Будем рассуждать. Из двух последовательных натуральных чисел одно обязательно четное. Но если в произведении один из множителей делится на 2, то, как известно, и все произведение делится на 2. Следовательно, при любом натуральном x произведение $x(x + 1)$ делится на 2.

в) Высказывание «Всякое натуральное число делится на 5» — ложное. Убедиться в этом можно, назвав натуральное число, которое не делится на 5, например число 12.

В математике говорят, что в ложности данного высказывания мы убедились, приведя ***контрпример***.

Итак, истинность высказывания с квантором общности устанавливается путем доказательства. Показать ложность таких высказываний можно, приведя контрпример.

Заметим, что доказательство истинности высказываний, содержащих квантор общности, можно выполнять различными методами. Решая задачу 2, мы использовали перебор всех возможных случаев и рассуждения. Эти и другие методы доказательства будут рассмотрены в п. 2.12.

Выясним, как устанавливается значение истинности высказываний, содержащих квантор существования. В высказывании $(\exists x \in X)\ [A(x)]$ утверждается, что в множестве X есть такой элемент x, которой обладает свойством A. Поэтому оно будет истинно, если множество истинности высказывательной формы $A(x)$ не пусто ($T_A \neq \varnothing$).

Для того чтобы показать это, достаточно найти такое значение переменной x, при котором высказывательная форма $A(x)$ обращается в истинное высказывание, т. е. привести пример.

Высказывание $(\exists x \in X)\ [A(x)]$ ложно в том случае, когда $T_A = \varnothing$. Убедиться в этом можно лишь путем доказательства.

Задача 3. Установить, истинны или ложны следующие высказывания:

а) «Среди треугольников есть прямоугольные»;

б) «Некоторые прямоугольные треугольники являются равносторонними».

Решение. а) Данное высказывание содержит квантор существования, который выражен словом «есть». Чтобы убедиться в истинности такого высказывания, достаточно привести пример. В данном случае прямоугольный треугольник можно начертить.

б) В этом случае квантор существования выражен словом «некоторые». Если считать данное высказывание истинным, то нужно привести пример, т. е. попытаться начертить треугольник, который был бы одновременно прямоугольным и равносторонним. Из того, что это не удается сделать, еще не следует вывод о ложности данного высказывания. В этом надо убедиться путем доказательства.

Действительно, если треугольник прямоугольный, то в нем один угол равен 90°, а в равностороннем все углы 60°. Следовательно, ни один прямоугольный треугольник не может быть равносторонним. Поэтому данное высказывание ложное.

Итак, истинность высказывания с квантором существования устанавливается с помощью конкретного примера. Чтобы убе-

диться в ложности такого высказывания, необходимо провести доказательство.

Заметим, что убедиться в ложности высказывания — значит, *опровергнуть* его.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. В высказывании «Всякий прямоугольник является четырехугольником» выделите квантор и высказывательную форму. Переформулируйте данное высказывание, заменив слово «всякий» его синонимом.
2. В высказывании «Хотя бы одно из чисел первого десятка составное» выделите квантор и высказывательную форму. Переформулируйте данное высказывание, заменив квантор «хотя бы одно» его синонимом.
3. Прочтите следующие записи, заменив символические обозначения кванторов общности и существования их словесными выражениями:
   а) $(\forall x \in \mathbf{R})\ x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$; б) $(\exists x \in \mathbf{R})\ 5 + y = 5$;
   в) $(\forall y \in \mathbf{R})\ y + 3 > 0$; г) $(\exists x \in \mathbf{N})\ x + 3 < 0$.
4. Запишите следующие предложения, используя символические обозначения кванторов:
   а) «Существует такое натуральное число x, что $x + 5 = 9$»;
   б) «Каково бы ни было число x, $x + 0 = x$»;
   в) «Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет хотя бы один корень».
5. Запишите, используя символы, следующие высказывания и определите их значения истинности:
   а) «Всякое число, умноженное на нуль, есть нуль»;
   б) «Произведение любого числа и единицы равно этому числу»;
   в) «При делении нуля на любое другое число получается нуль»;
   г) «Квадрат любого числа неотрицателен».
6. Укажите способы установления значения истинности высказываний, содержащих кванторы, заполнив таблицу:

Значение истинности	Структура высказывания	
	$(\forall x \in X)\ [A(x)]$	$(\exists x \in X)\ [A(x)]$
и		
л		

7. Даны высказывания:
   а) «Во всяком четырехугольнике диагонали равны»;

б) «Существуют числовые выражения, значения которых нельзя найти»;

в) «При делении на 5 некоторых натуральных чисел в остатке получается 7»;

г) «Любое однозначное число является решением неравенства $x + 2 > 1$».

Объясните, истинность каких из высказываний можно установить с помощью: доказательства; примера.

8. Объясните, ложность каких высказываний из задания 7 можно установить с помощью: контрпримера; доказательства.
9. Данные ниже высказывания взяты из учебников математики для начальных классов. Выясните, какие из них содержат (в явном или неявном виде) квантор и как следует устанавливать их значение истинности (указать только способ и обосновать его выбор):

а) «От перестановки слагаемых сумма не изменяется»;

б) «Два соседних слагаемых можно заменять их суммой»;

в) «Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину»;

г) «Существуют четные числа»;

д) «Некоторые числа делятся на 4»;

е) «Среди многоугольников есть треугольники».

2.7. ОТРИЦАНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ И ВЫСКАЗЫВАТЕЛЬНЫХ ФОРМ

Пусть предложение A — высказывание. Если перед сказуемым данного предложения поставить частицу «не» либо перед всем предложением поставить слова «неверно, что», то получится новое предложение, которое называют *отрицанием* данного и обозначают $\overline{A}$ (читают: «не A» или «неверно, что A»).

> ***Отрицанием*** высказывания A называют высказывание $\overline{A}$, которое ложно, если высказывание A истинно, и истинно, если высказывание A — ложно.

Таблица истинности отрицания имеет вид:

A	$\overline{A}$
и	л
л	и

Из данного определения следует, что предложение и его отрицание не могут быть ни одновременно истинны, ни одновременно ложны.

Построим, например, отрицание ложного высказывания «Число 28 делится на 9»:

а) число 28 не делится на 9;

б) неверно, что число 28 делится на 9.

Высказывания, которые мы получили, истинные. Значит, отрицание данного предложения построено правильно.

Рассмотрим теперь правила построения отрицания конъюнкции и дизъюнкции высказываний. Если перед всем составным высказыванием поставить слова «неверно, что», то, безусловно, получим его отрицание. А как быть с частицей «не»? Можно ли ее поставить перед сказуемым составного предложения и получить его отрицание? Возьмем, например, высказывание «Число 28 делится на 9 и на 4». Оно ложное, так как представляет собой конъюнкцию двух высказываний, одно из которых ложно. Поставив перед сказуемым этого высказывания частицу «не», получим конъюнкцию «Число 28 не делится на 9 и на 4», в которой одно из предложений «Число 28 не делится на 4» — ложное и, значит, ложно построенное с помощью частицы «не» предложение. Поэтому оно не является отрицанием высказывания «Число 28 делится на 9 и на 4».

Можно доказать, что отрицанием конъюнкции двух высказываний A и B является дизъюнкция их отрицаний. Для этого необходимо убедиться в том, что значения истинности высказываний вида $\overline{A \wedge B}$ и $\overline{A} \vee \overline{B}$ совпадают при любых значениях истинности высказываний A и B. Сделать это можно с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
и	и	и	л	л	л	л
и	л	л	и	л	и	и
л	и	л	и	и	л	и
л	л	л	и	и	и	и

Про высказывания вида $\overline{A \wedge B}$ и $\overline{A} \vee \overline{B}$ говорят, что они ***равносильны***, и пишут $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$.

Аналогично можно доказать, что имеет место равносильность $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$.

Эти равносильности носят название законов де Моргана[1].

Из них вытекает следующее правило построения отрицания конъюнкции и дизъюнкции: *чтобы построить отрицание конъюнкции* (*дизъюнкции*), *достаточно заменить отрицаниями составляющие ее высказывания*, *а союз «и»* (*«или»*) *заменить союзом «или»* (*«и»*).

Задача 1. Построить отрицание высказывания «Число 28 делится на 9 или на 6».

Решение. I способ. Поставим перед данным высказыванием слова «неверно, что». Получим высказывание «неверно, что число 28 делится на 9 или на 6», которое является отрицанием исходного.

II способ. Воспользуемся законом де Моргана: заменим высказывания «Число 28 делится на 9» и «Число 28 делится на 6» их отрицаниями, а союз «или» поменяем на союз «и». Получим высказывание «Число 28 не делится на 9 и не делится на 6», которое также является отрицанием исходного.

Итак, мы выяснили, как строить отрицание конъюнкции и дизъюнкции высказываний. А как быть с высказываниями, которые содержат кванторы? Достаточно ли для отрицания таких предложений поставить перед сказуемым частицу «не»? Например, будут ли отрицанием высказывания: «Всякий прямоугольный треугольник является равнобедренным»; «Всякий прямоугольный треугольник не является равнобедренным»? Видим, что не будут, так как оба высказывания ложны. Таким образом, строить отрицания высказываний с кванторами с помощью частицы «не» перед сказуемым нельзя!

Остается другой путь — перед всем предложением ставить слова «неверно, что». Тогда отрицанием высказывания «Всякий прямоугольный треугольник является равнобедренным» будет предложение «Неверно, что всякий прямоугольный треугольник является равнобедренным», но это предложение имеет тот же смысл, что и предложение «Некоторые прямоугольные треугольники не являются равнобедренными».

Отрицанием высказывания «Некоторые прямоугольные треугольники являются равносторонними» будет высказывание «Неверно, что некоторые прямоугольные треугольники являются равносторонними», которое имеет тот же смысл, что и предложение «Все прямоугольные треугольники не являются равносторонними».

Вообще, если дано предложение $(\forall x)\ [A(x)]$, то его отрицанием будут предложения $\overline{(\forall x)\ [A(x)]}$ и $(\exists x)\ \overline{[A(x)]}$, имеющие один и тот же смысл (и одно и то же значение истинности).

[1] *А. де Морган* — английский логик XIX в.

Если дано предложение $\overline{(\exists x)\ [A(x)]}$, то его отрицанием будут предложения $\overline{(\exists x)\ [A(x)]}$ и $(\forall x)\ \overline{[A(x)]}$, также имеющие один и тот же смысл (и одно и то же значение истинности).

Получаем две равносильности:

$$\overline{(\forall x)\ [A(x)]} \Leftrightarrow (\exists x)\ \overline{[A(x)]};$$
$$\overline{(\exists x)\ [A(x)]} \Leftrightarrow (\forall x)\ \overline{[A(x)]}.$$

Из них вытекает правило: *для того чтобы построить отрицание высказывания, начинающегося с квантора общности (существования), достаточно заменить его квантором существования (общности) и построить отрицание предложения, стоящего после квантора.*

Задача 2. Построить отрицание высказывания «Некоторые однозначные числа делятся на 10».

Решение. I способ. Поставим перед высказыванием слова «неверно, что». Получим высказывание «Неверно, что некоторые однозначные числа делятся на 10», которое является отрицанием данного.

II способ. Заменим квантор существования (он выражен словом «некоторые») на квантор общности «все» и построим отрицание предложения, стоящего после слова «некоторые», поставив частицу «не» перед сказуемым. Получим высказывание «Все однозначные числа не делятся на 10».

Рассмотрим отрицание высказывательных форм.

Пусть на множестве X задана высказывательная форма $A(x)$. Ее отрицание обозначим $\overline{A(x)}$ (читают: «не $A(x)$» или «неверно, что $A(x)$»). Предложение $\overline{A(x)}$ будет обращаться в истинное высказывание лишь при тех значениях x из множества X, при которых $A(x)$ — ложно. Таким образом, $T_{\overline{A}} = T'_A$, где $T_{\overline{A}}$ — множество истинности предложения $\overline{A(x)}$; T'_A — дополнение множества T_A до множества X.

Пусть, например, на множестве натуральных чисел задана высказывательная форма $A(x)$ — «Число x кратно 5». Тогда ее отрицанием будет предложение «Число x не кратно 5» (или «Неверно, что число x кратно 5»), истинное при всех значениях x, которые не кратны 5.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте отрицания следующих предложений:
   а) «Число 123 делится на 9»;
   б) «При делении числа 32 на 5 в остатке получится 7»;
   в) «$3 + 2 < 4$»;

г) «Треугольник *ABC* — прямоугольный».

2. Сформулируйте, используя законы де Моргана, отрицания следующих высказываний:
   а) «Четырехугольник *ABCD* — прямоугольник или параллелограмм»;
   б) «Число 12 — четное и делится на 3».
3. Какие из нижеприведенных предложений являются отрицанием высказывания «Все натуральные числа кратны 5» (свой выбор обоснуйте):
   а) «Все натуральные числа не кратны 5»;
   б) «Существуют натуральные числа, не кратные 5»;
   в) «Существуют натуральные числа, кратные 5»;
   г) «Неверно, что все натуральные числа кратны 5»;
   д) «Не все натуральные числа кратны 5».
4. Постройте двумя способами отрицание высказывания:
   а) «Всякое свойство квадрата присуще прямоугольнику»;
   б) «Некоторые простые числа являются четными».
5. Определите, являются ли данные предложения отрицаниями друг друга или нет (объясните — почему):
   а) «Число 12 — четное», «Число 12 — нечетное»;
   б) «Все простые числа нечетны», «Все простые числа четны»;
   в) «Все простые числа нечетны», «Существуют четные простые числа»;
   г) «Некоторые углы острые», «Некоторые углы тупые».
6. Переформулируйте данные предложения так, чтобы они не содержали слов «неверно, что», но имели тот же смысл:
   а) «Неверно, что число 9 — четное или простое»;
   б) «Неверно, что треугольник *ABC* — равнобедренный и прямоугольный»;
   в) «Неверно, что каждый четырехугольник является прямоугольником»;
   г) «Неверно, что хотя бы в одном прямоугольнике диагонали взаимно-перпендикулярны».

2.8. ОТНОШЕНИЯ СЛЕДОВАНИЯ И РАВНОСИЛЬНОСТИ МЕЖДУ ПРЕДЛОЖЕНИЯМИ

Рассмотрим две высказывательные формы: «Число x кратно 4» и «Число x кратно 2», заданные на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел.

Как связаны между собой эти два предложения?

Можно сказать так: «Из того, что число x кратно 4, следует, что x кратно 2». Это можно утверждать, потому что известно: при всех значениях x, при которых истинно предложение «Число x кратно 4», будет истинно и предложение «Число x кратно 2». В этом случае говорят, что данные предложения находятся в отношении логического следования.

Высказывательная форма $B(x)$ ***следует*** из высказывательной формы $A(x)$, если $B(x)$ обращается в истинное высказывание при всех тех значениях x, при которых $A(x)$ истинна.

Для обозначения отношения логического следования используют знак «$\Rightarrow$». Соединяя две высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$ таким знаком, получаем высказывание $A(x) \Rightarrow B(x)$, прочитать которое можно по-разному:

- из $A(x)$ следует $B(x)$;
- всякое $A(x)$ есть $B(x)$;
- если $A(x)$, то $B(x)$;
- $B(x)$ есть следствие $A(x)$;
- $A(x)$ есть достаточное условие для $B(x)$;
- $B(x)$ есть необходимое условие для $A(x)$.

Например, утверждение о том, что из предложения «Число x кратно 4», следует предложение «Число x кратно 2», можно сформулировать еще так:

- всякое число, которое кратно 4, кратно и 2;
- если число кратно 4, то оно кратно и 2;
- кратность числа двум есть следствие кратности его четырем;
- кратность числа четырем есть достаточное условие для его кратности двум;
- кратность числа двум есть необходимое условие для его кратности четырем.

Последние два предложения часто формулируют в следующей форме:

- для того чтобы число было кратно 2, достаточно, чтобы оно было кратно 4;
- для того чтобы число было кратно 4, необходимо, чтобы оно было кратно 2.

Так как одно и то же утверждение «из $A(x)$ следует $B(x)$» можно прочитать по-разному, надо уметь переходить от одной его формулировки к другой, не меняя его смысла.

Задача 1. Данные предложения переформулируйте, используя различные способы прочтения утверждений вида $A(x) \Rightarrow B(x)$:

а) «Всякий квадрат является прямоугольником»;

б) «Для того чтобы число делилось на 5, достаточно, чтобы его запись оканчивалась нулем».

Решение. а) В данном высказывании можно выделить два предложения: $A(x)$ — «четырехугольник — квадрат» и $B(x)$ — «четырехугольник — прямоугольник». Они находятся в отношении следования: $A(x) \Rightarrow B(x)$, которое выражено предложением со словом «всякий». Данное высказывание можно переформулировать так:

- «Из того, что четырехугольник — квадрат, следует, что он прямоугольник»;
- «Если четырехугольник — квадрат, то он прямоугольник»;
- «Четырехугольник является прямоугольником — это следствие того, что четырехугольник — квадрат»;
- «Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, достаточно, чтобы он был квадратом»;
- «Для того чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо, чтобы он был прямоугольником».

б) В данном высказывании так же, как и в случае а), можно выделить два предложения: $P(x)$ — «Число делится на 5» и $K(x)$ — «Запись числа оканчивается нулем», причем второе является достаточным условием для первого. Поэтому имеет место следование: $K(x) \Rightarrow P(x)$, которое можно сформулировать так:

- «Из того, что запись числа оканчивается нулем, следует, что число делится на 5»;
- «Всякое число, запись которого оканчивается нулем, делится на 5»;
- «Если запись числа оканчивается нулем, то оно делится на 5»;
- «Делимость числа на 5 — это следствие того, что его запись оканчивается нулем»;
- «Для того чтобы запись числа оканчивалась нулем, необходимо, чтобы оно делилось на 5».

Как и любое высказывание, предложение $A(x) \Rightarrow B(x)$ может быть либо истинным, либо ложным. Но так как оно может быть сформулировано в виде «Всякое $A(x)$ есть $B(x)$», то его истинность устанавливается путем доказательства, а ложность — с помощью контрпримера.

Задача 2. Определить значение истинности высказывания:

а) «Если запись числа оканчивается цифрой 6, то число делится на 2»;

б) «Для того чтобы число делилось на 5, необходимо, чтобы его запись оканчивалась нулем».

Решение. а) По всей видимости, это высказывание истинное. Действительно, всякое число, запись которого оканчивается цифрой 6, — четное, а всякое четное число делится на 2. Следовательно, число, запись которого оканчивается цифрой 6, делится на 2.

Мы убедились в истинности данного высказывания путем доказательства.

б) Если сформулировать данное высказывание в виде «Из того, что число делится на 5, следует, что его запись оканчивается нулем», то сразу можно сказать, что оно ложное. И убедиться в этом можно с помощью контрпримера. Например, число 35 делится на 5, но его запись не оканчивается нулем.

С теоретико-множественной точки зрения высказывание вида $A(x) \Rightarrow B(x)$ означает, что если T_A — множество истинности высказывательной формы $A(x)$, а T_B — множество истинности высказывательной формы $B(x)$, то $T_A \subset T_B$. Справедливо и обратное утверждение.

Этим фактом удобно пользоваться при установлении значения истинности высказывания $A(x) \Rightarrow B(x)$.

Задача 3. Доказать, что из уравнения $3x(x - 2) = 0$ следует уравнение $3x(x - 2)(x + 3) = 0$, если уравнения заданы на множестве **Z** целых чисел.

Решение. Множество решений первого уравнения — $T_1 =$ $= \{0, 2\}$, множество решений второго — $T_2 = \{0, 2, -3\}$. Видим, что $T_1 \subset T_2$. Следовательно, из уравнения $3x(x - 2) = 0$ следует уравнение $3x(x - 2)(x + 3) = 0$.

Рассмотрим две высказывательные формы: $A(x)$ — «Число делится на 3» и $B(x)$ — «Сумма цифр в записи числа делится на 3». Из школьного курса математики известно, что если число делится на 3, то сумма цифр в записи этого числа разделится на 3, и наоборот. В этом случае говорят, что предложения $A(x)$ и $B(x)$ *равносильны*.

> Предложения $A(x)$ и $B(x)$ ***равносильны***, если из предложения $A(x)$ следует предложение $B(x)$, а из предложения $B(x)$ следует предложение $A(x)$.

Для обозначения отношения равносильности используется знак $\Leftrightarrow$. Соединяя две высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$ таким знаком, мы получаем высказывание $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, прочитать которое можно по-разному:

- $A(x)$ равносильно $B(x)$;
- $A(x)$ тогда и только тогда, когда $B(x)$;
- $A(x)$ — необходимое и достаточное условие для $B(x)$;
- $B(x)$ — необходимое и достаточное условие для $A(x)$.

Например, утверждение о том, что предложения «Число делится на 3» и «Сумма цифр в записи числа делится на 3» равносильны, можно сформулировать еще так:

- «Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр в его записи делится на 3»;
- «Для того чтобы число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр в его записи делилась на 3».

С теоретико-множественной точки зрения высказывание вида $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ означает, что если T_A — множество истинности высказывательной формы $A(x)$, а T_B — множество истинности высказывательной формы $B(x)$, то $T_A = T_B$.

Задача 4. Доказать, что уравнения $3x(x-2) = 0$ и $3x(x-2)(x+3) = 0$ равносильны на множестве целых неотрицательных чисел.

Решение. Множество решений первого уравнения — $T_1 = \{0, 2\}$, множество решений второго, заданного на множестве целых неотрицательных чисел, $T_2 = \{0, 2\}$. Число -3 (см. задачу 3) множеству T_2 не принадлежит, потому что оно не является целым неотрицательным. Имеем, что $T_1 = T_2$, следовательно, данные уравнения на множестве целых неотрицательных чисел равносильны.

Заметим, что мы рассматриваем понятия логического следования и равносильности для одноместных высказывательных форм. Для предложений, содержащих две и более переменных, эти понятия определяют аналогично.

Отметим также, что знак «$\Leftrightarrow$» мы использовали раньше, в частности, рассматривая логическую структуру явных определений понятий ($a \underset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} b$). Употребление знака «$\Leftrightarrow$» здесь неслучайно. Дело в том, что определение, как говорят в математике, порождает два равносильных предложения, которые затем используются наряду с другими в доказательствах. Например, определение «Квадратом называется прямоугольник, имеющий равные соседние стороны» порождает равносильные предложения: «Если прямоугольник является квадратом, то в нем соседние стороны равны» и «Если в прямоугольнике соседние стороны равны, то прямоугольник является квадратом». Использовать в доказательствах можно любое из этих двух.

Знак «$\Leftrightarrow$» мы также использовали в записи правил построения отрицания высказываний. Например, $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$. В этом случае речь идет о равносильности высказываний определенной формы. При этом считают, что предложения равносильны, если они либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. Другими словами, если их значения истинности совпадают при одинаковых наборах значений высказываний A и B.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Следует ли предложение $B(x)$ «Число x четное» из предложения $A(x)$, если:
   а) $A(x)$ — «Число x делится на 6»;
   б) $A(x)$ — «Число x делится на 7»;
   в) $A(x)$ — «Число x делится на 2».
   Предложения $A(x)$ и $B(x)$ заданы на множестве натуральных чисел.
2. Установите, находятся ли данные пары предложений в отношении следования:
   а) «Треугольник ABC — равносторонний» и «Треугольник ABC — равнобедренный»;
   б) «Четырехугольник $ABCD$ — квадрат» и «Четырехугольник $ABCD$ — ромб»;
   в) «$x \vdots 3$» и «$x \vdots 6$»;
   г) «$a > 2$» и «$a > 5$».
3. Полученные в задании 2 утверждения о следовании сформулируйте шестью различными способами.
4. Сформулируйте следующие высказывания в виде «если..., то...»:
   а) A — достаточное условие для B;
   б) A — необходимое условие для B;
   в) B — достаточное условие для A;
   г) B — необходимое условие для A.
5. Среди следующих предложений укажите истинные (ответы обоснуйте):
   а) «Число a — натуральное, следовательно, $15a$ — натуральное число»;
   б) «Число $15a$ — натуральное, следовательно, a — натуральное число»;
   в) «Если в четырехугольнике все углы прямые, то этот четырехугольник — прямоугольник»;
   г) «Если в четырехугольнике диагонали равны, то этот четырехугольник — прямоугольник»;

д) «Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, достаточно, чтобы все его углы были равны»;
е) «Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, необходимо, чтобы все его углы были равны».

6. Для ложных высказываний из задания 5 постройте различными способами отрицание.
7. Какие из следующих предложений можно переформулировать, употребив слова «необходимо и достаточно»:
а) «Если в четырехугольнике все углы равны, то четырехугольник является прямоугольником»;
б) «Сумма двух четных чисел есть число четное»;
в) «Всякое число, которое делится на 3 и на 5, делится на 15».
8. В начальном курсе математики синонимом слова «необходимо» является слово «нужно», а синонимом слова «достаточно» — слово «можно». Зная это, вставьте вместо многоточия слова: «нужно» либо «можно» так, чтобы высказывания были истинными (ответы обоснуйте):
а) «Для того чтобы сумма натуральных чисел делилась на число 5, ... чтобы каждое слагаемое делилось на 5»;
б) «Для того чтобы найти неизвестное слагаемое, ... из суммы вычесть другое слагаемое»;
в) «Для того чтобы вычесть число из суммы, ... вычесть его из одного слагаемого и к разности прибавить другое слагаемое»;
г) «Для того чтобы число было четным, ... чтобы оно делилось на 2».

2.9. СТРУКТУРА ТЕОРЕМЫ. ВИДЫ ТЕОРЕМ

Понятие логического следования позволяет уточнить ряд вопросов, связанных с предложениями, которые в математике называют теоремами.

> ***Теорема*** — это высказывание, истинность которого устанавливается посредством рассуждения (доказательства).

С логической точки зрения теорема представляет собой высказывание вида $A \Rightarrow B$, где A и B — высказывательные формы с одной или несколькими переменными. Предложение A называют ***условием*** теоремы, а предложение B — ее ***заключением***.

Например, условием теоремы «Если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны» является предложение

«Четырехугольник — прямоугольник», а заключением — предложение «В четырехугольнике диагонали равны».

В рассмотренном примере теорема была сформулирована с помощью слов «если..., то...». Но, как нам известно, утверждение $A \Rightarrow B$ можно сформулировать и по-другому. Например, рассмотренную теорему можно сформулировать так: «Во всяком прямоугольнике диагонали равны» или «Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, необходимо, чтобы его диагонали были равны». Есть и другие способы, но удобнее теорему формулировать в виде «если..., то...», поскольку сразу видно ее условие (что дано) и заключение (что требуется доказать).

В математике кроме теорем используются предложения, называемые ***правилами*** и ***формулами***. Выясним, чем они отличаются от теоремы.

Рассмотрим, например, такую теорему из школьного курса алгебры: «Если a — любое число и n, k — натуральные числа, то справедливо равенство $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$». Условие данной теоремы — это предложение «a — любое число» и «n, k — натуральные числа». Заключение — это равенство $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$, справедливость которого нужно доказать, исходя из данного условия.

Для того чтобы этой теоремой было удобнее пользоваться на практике, ее формулируют в виде правила: «При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются» или записывают только формулу $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$, опуская все условия, указанные в теореме. Такие упрощения позволяют быстрее запоминать правила и формулы. Эту особенность математического языка используют в начальном курсе математики, но при этом формулируют различные утверждения сразу в виде правил или формул, опуская точные формулировки теорем (и, следовательно, опуская, по сути дела, условие теоремы). Но учитель, конечно, должен уметь разворачивать изучаемые в начальной школе правила (формулы) и формулировать соответствующие им теоремы. Иначе возможны ошибки как содержательного, так и логического характера. Рассмотрим, например, изучаемое в начальном курсе математики правило деления суммы на число: «Для того чтобы разделить сумму на число, можно разделить на это число каждое из слагаемых и полученные результаты сложить». К этой словесной формулировке правила иногда добавляют формулу $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Так как этот материал изучают в начальной школе, необходимо отчетливо понимать, что числа a, b и c могут быть только целыми неотрицательными, причем $c \neq 0$. Кроме того, воспользоваться правой частью этого равенства можно при условии, что a кратно c и b кратно c.

Таким образом, теорема, лежащая в основе правила деления суммы на число, может быть сформулирована следующим образом: «Если a, b и c — целые неотрицательные числа ($c \neq 0$) и a кратно c и b кратно c, то разделить сумму $a + b$ на число c можно, разделив на это число каждое из слагаемых, и полученные результаты сложить».

Для всякой теоремы вида «если A, то B» можно сформулировать предложение «если B, то A», которое называют обратным данному. Однако не всегда это предложение является теоремой. Рассмотрим, например, теорему: «Если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны». Построим предложение, обратное данному: «Если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником». Это высказывание ложное, в чем можно убедиться, приведя контрпример: в равнобедренной трапеции диагонали равны, но трапеция не является прямоугольником.

Рассмотрим теперь теорему: «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны». Обратное ей предложение таково: «Если в треугольнике углы при основании равны, то этот треугольник — равнобедренный». Оно, как известно, истинное и поэтому является теоремой. Ее называют ***теоремой, обратной данной***.

Для всякой теоремы вида «если A, то B» можно сформулировать предложение «если не A, то не B», которое называют противоположным данному. Но не всегда это предложение является теоремой. Например, предложение, противоположное теореме «Если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны», будет ложным: «Если четырехугольник не является прямоугольником, то в нем диагонали не равны».

В том случае, если предложение, противоположное данному, будет истинно, его называют ***теоремой, противоположной данной***.

Таким образом, если для теоремы $A \Rightarrow B$ сформулировать обратное или противоположное предложения, то их надо доказывать (и тогда их можно называть соответственно обратной и противоположной теоремами) или опровергать.

Для всякой теоремы вида «если A, то B» можно сформулировать предложение «если не B, то не A», которое называют обратным противоположному. Например, для теоремы «Если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны» предложение, обратное противоположному, будет таким: «Если в четырехугольнике диагонали не равны, то он (четырехугольник) не является прямоугольником». Это, как известно, предложение истинное и, следовательно, является теоремой, называемой ***теоремой, обратно противоположной данной***.

Вообще, для каких бы теорем мы ни формулировали предложения, обратные противоположным, они всегда будут теоремами, потому что имеется следующая равносильность:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \left(\overline{B} \Rightarrow \overline{A}\right).$$

Эту равносильность называют ***законом контрапозиции***. Принимаем его без доказательства. Согласно этому закону, предложение, обратно противоположное какой-либо теореме, также является теоремой, и значит, вместо данной теоремы можно доказывать теорему, обратно противоположную данной.

Кроме того, из закона контрапозиции следует, что предложение, обратное данному, и предложение, противоположное данному, либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. Поэтому, рассматривая их, достаточно доказать (или опровергнуть) какое-нибудь одно; тем самым будет доказано (опровергнуто) и второе.

Заметим, что если для данной теоремы $A \Rightarrow B$ существует обратная $B \Rightarrow A$, то их можно объединить в одну $A \Leftrightarrow B$, и тогда в формулировке будут использоваться слова «необходимо и достаточно», «тогда и только тогда, когда». Например, объединение теоремы «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны» и «Если в треугольнике углы при основании равны, то треугольник — равнобедренный» в одну, получим теорему: «Треугольник будет равнобедренным тогда и только тогда, когда в нем углы при основании равны».

Можно сформулировать ее иначе: «Для того чтобы треугольник был равнобедренным, необходимо и достаточно, чтобы в нем углы при основании были равны».

С другой стороны, если теорема имеет вид равносильности $A \Leftrightarrow B$, то это значит, что она состоит из двух взаимно-обратных теорем $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, и следовательно, ее доказательство сводится к доказательству двух указанных теорем.

Заметим также, что если условие или заключение данной теоремы представляет собой конъюнкцию или дизъюнкцию, то, чтобы получить предложение, противоположное данному, нужно учитывать правила построения отрицания конъюнкции и дизъюнкции. Например, дана теорема «Если число делится на 3 и 4, то оно делится на 12». Предложение, противоположное данному, можно сформулировать так: «Если число не делится на 3 или не делится на 4, то оно не делится на 12».

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Выделите условие и заключение в каждой из следующих теорем:
   а) «Если углы смежные, то их сумма равна 180°»;
   б) «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны»;
   в) «Равенство треугольников есть достаточное условие равенства их соответственных сторон»;
   г) «Четность суммы есть необходимое условие четности каждого слагаемого».
2. Сформулируйте предложения, обратные следующим теоремам и установите, какие из них являются теоремами:
   а) «Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны»;
   б) «Если каждое слагаемое является четным числом, то и сумма — четное число».
3. Сформулируйте предложения, противоположные теоремам, приведенным в задании 2. Какие из этих предложений — теоремы?
4. Для каждой теоремы из задания 2 сформулируйте теорему, равносильную ей согласно закону контрапозиции.
5. Для каждой из следующих теорем сформулируйте обратное, противоположное и обратно противоположное утверждения и установите, какие из них будут теоремами:
   а) «Если прямоугольник является квадратом, то его диагонали взаимно перпендикулярны и делят углы пополам»;
   б) «Всякий параллелограмм с равными диагоналями есть прямоугольник или квадрат».
6. Приведенные правила взяты из учебников для начальных классов. Установите, какие теоремы сформулированы в виде этих правил:
   а) «Если к разности прибавить вычитаемое, то получится уменьшаемое»;
   б) «Если произведение двух чисел разделить на один из множителей, то получим другой множитель»;
   в) «При делении любого числа на единицу в частном получится то число, которое делили».

2.10. УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ И ИХ ВИДЫ

Бóльшую часть знаний об окружающей нас действительности мы получаем с помощью рассуждений. Знание будет истинным, если оно получено путем правильного рассуждения, а таким считают рассуждение, построенное по правилам логики.

Рассуждения лежат в основе доказательства, без которого трудно представить математику. Но тех представлений, которые возникают в процессе конкретных доказательств, конечно, недостаточно, чтобы обучать доказательству младших школьников. Учителю нужны более глубокие знания о тех правилах, в соответствии с которыми строятся верные рассуждения, о структуре и способах доказательства, о взаимосвязи индукции и дедукции.

В логике вместо термина «рассуждение» чаще используется (как его синоним) слово «умозаключение».

> ***Умозаключение*** — это форма мышления, посредством которой из одного или нескольких высказываний, называемых *посылками*, выводится высказывание, содержащее новое знание, называемое *заключением*.

Рассмотрим примеры умозаключений, которые выполняют младшие школьники, изучая математику.

Пример 1. Ученику предлагается объяснить, почему число 23 можно представить в виде суммы 20 + 3. Он рассуждает: «Число 23 — двузначное. Любое двузначное число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых. Следовательно, 23 = 20 + 3».

Первое и второе предложения в этом умозаключении — посылки, причем одна посылка общего характера — это высказывание «любое двузначное число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых», а другая — частная, она характеризует только число 23 — оно двузначное. Заключение — это предложение, которое стоит после слова «следовательно», — также носит частный характер, так как в нем речь идет о конкретном числе 23.

Пример 2. Один из приемов ознакомления младших школьников с переместительным свойством умножения заключается в следующем. Используя различные средства наглядности, школьники вместе с учителем устанавливают, что $6 \cdot 3 = 3 \cdot 6$, $5 \cdot 2 = 2 \cdot 5$, $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$. А затем, на основе полученных равенств, делают вывод: для всех натуральных чисел a и b верно равенство $a \cdot b = b \cdot a$.

В данном умозаключении посылками являются первые три равенства, в них утверждается, что для конкретных натуральных чисел выполняется такое свойство. Заключением в данном примере является утверждение общего характера — переместительное свойство умножения натуральных чисел.

Пример 3. При обучении делению на однозначное число используется такой прием. Сначала выясняется: чтобы найти значения выражения 12 : 4, следует узнать, на какое число надо умножить делитель 4, чтобы получить делимое, т. е. 12. Известно, что $4 \cdot 3 = 12$. Значит, $12 : 4 = 3$.

Затем учащимся предлагается, рассуждая так же, найти, например, частное 8 : 4. И они сначала находят число, на которое надо умножить 4, чтобы получить 8. Получают число 2 и делают вывод — $8 : 4 = 2$.

Далее, используя тот же способ рассуждений, находят частные 9 : 3, 20 : 5 и др.

Видим, что умозаключения бывают разные. В примере 1 заключение логически следует из посылок, и мы не сомневаемся в его истинности. Такие умозаключения называют в логике дедуктивными.

> ***Дедуктивным умозаключением*** называют умозаключение, в котором посылки и заключение находятся в отношении логического следования.

Если посылки дедуктивного умозаключения обозначить буквами $A_1, A_2, ..., A_n$, а заключение — буквой B, то схематично само умозаключение можно представить так: $A_1, A_2, ..., A_n \Rightarrow B$. Часто используют такую запись: $\dfrac{A_1, A_2, ..., A_n}{B}$. В ней черта заменяет слово «следовательно».

Более подробно такие умозаключения будут рассмотрены далее (см. п. 2.11), а пока заметим, что в дедуктивном умозаключении всегда, когда истинны посылки, истинно и заключение.

Умозаключение, которое рассмотрено в примере 2, отлично от приведенного в примере 1. В нем даны три посылки частного характера, которые показывают, что *некоторые* натуральные числа обладают свойством: от перестановки множителей произведение не изменяется. И на этой основе сделан вывод, что этим свойством обладают *все* натуральные числа. Такие умозаключения называют неполной индукцией.

> ***Неполной индукцией*** называют умозаключение, в котором на основании того, что *некоторые* объекты класса обладают определенным свойством, делается вывод о том, что этим свойством обладают *все* объекты данного класса.

Неполная индукция не является дедуктивным умозаключением, поскольку, рассуждая по такой схеме, можно прийти к ложному выводу.

Рассмотрим, например, такие выражения: $3 + 5$ и $3 \cdot 5$; $2 + 7$ и $2 \cdot 7$; $4 + 8$ и $4 \cdot 8$. Видим, что $3 + 5 < 3 \cdot 5$, $2 + 7 < 2 \cdot 7$, $4 + 8 < 4 \cdot 8$, т. е. для некоторых натуральных чисел можно утверждать, что их сумма меньше их произведения. И на основании того, что *некоторые* числа обладают указанным свойством, можно сделать вывод о том, что этим свойством обладают *все* натуральные числа, т. е. $(\forall a, b \in \mathbf{N})\ [a + b < a \cdot b]$. Но это утверждение ложно, в чем можно убедиться с помощью контрпримера: числа 1 и 2 — натуральные, но сумма $1 + 2$ не меньше, чем произведение $1 \cdot 2$.

Вообще, к выводам, полученным с помощью неполной индукции, надо относиться критически, так как они носят характер предположения (гипотезы) и нуждаются в дальнейшей проверке: их нужно либо доказать, либо опровергнуть. Таким образом, неполная индукция и дедуктивные умозаключения оказываются взаимосвязанными: утверждения (теоремы, правила, определения, аксиомы), используемые в дедуктивных умозаключениях, часто являются результатом индуктивного обобщения некоторой совокупности фактов, а индуктивные умозаключения расширяют наши знания, помогая «открывать» новые закономерности и правила.

Рассуждения в примере 3 — это рассуждения по аналогии.

Слова «аналогия» в переводе с греческого означает «соответствие, сходство».

Аналогией называют умозаключение, в котором на основании сходства двух объектов в некоторых признаках и при наличии дополнительного признака у одного из них делается вывод о наличии такого же признака у другого объекта.

Заметим, что в этом определении термин «объект» используется в широком смысле: им может быть реальный предмет, модель, рисунок, числовое или буквенное выражение, задача и т. д. В качестве признаков могут выступать свойства объектов, отношения между ними, способы деятельности и т. д.

Аналогия помогает открывать новые знания, а также использовать усвоенные способы деятельности в измененных условиях. Вывод по аналогии носит характер предположения (гипотезы) и поэтому нуждается либо в доказательстве, либо в опровержении.

Например, ученик установил, что число делится на 6, если оно делится на 2 и на 3. Затем, действуя по аналогии, сделал вывод: число делится на 8, если оно делится на 2 и на 4. Чтобы убедиться в ложности полученного вывода, достаточно привести контрпример: число 12 делится на 2 и на 4, но не делится на 8.

Широко используется аналогия в обучении математике младших школьников. Это происходит при изучении свойств объектов, отношений между ними и действий с ними. Приведем несколько примеров:

- «открытие» новых свойств изучаемых объектов. Так, если установлено, что в классе единиц три разряда — единицы, десятки, сотни, а в классе тысяч также три разряда — единицы тысяч, десятки тысяч, сотни тысяч, то вывод о числе разрядов в классе миллионов и их названии дети могут сделать самостоятельно, по аналогии;
- установление отношений между данными объектами. Например, учащиеся установили, что $4 \cdot (3 + 7) > 4 \cdot 3 + 4 \cdot 6$, так как $4 \cdot (3 + 7) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 7$, а $4 \cdot 7 > 4 \cdot 6$. Рассматривая затем выражения $3 \cdot (8 + 9)$ и $3 \cdot 8 + 3 \cdot 7$, учащиеся могут по аналогии сделать вывод о том, что $3 \cdot (8 + 9) > 3 \cdot 8 + 3 \cdot 7$. Проверить его правильность можно либо путем рассуждений, аналогичных тем, что проводились при выполнении первого задания, либо с помощью вычислений;
- вывод о способе действия на основе изучения другого способа. Так, после рассмотрения способа умножения двузначного числа на однозначное на примере умножения 27 на 3 ($27 \cdot 3 = (20 + 7) \cdot 3 = 20 \cdot 3 + 7 \cdot 3 = 81$) детям предлагается умножить 721 на 4. Действуя по аналогии, они устанавливают, что $712 \cdot 4 = (700 + 10 + 2) \cdot 4 = 2\,800 + 40 + 8 = 2\,848$. Далее по аналогии устанавливают, как умножить 6 288 на 3. Следующим шагом может быть обобщение, т. е. получение правила умножения многозначного числа на однозначное (использование неполной индукции).

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Объясните, почему приведенные следующие высказывания считают истинными:
   а) $7 > 5$;
   б) $7 + 3 > 7 + 1$;
   в) $(4 + 6) : 2 = 4 : 2 + 6 : 2$;
   г) $(6 \cdot 4) : 2 = (6 : 2) \cdot 4$.
   Сформулируйте правила, которыми вы воспользовались. Содержат ли они квантор общности?
2. Известно, что если в треугольнике углы при основании равны, то он — равнобедренный. Следует ли из этого, что:
   а) треугольник с двумя углами по 40° — равнобедренный;

б) треугольник с двумя сторонами по 4 см — равнобедренный?

3. Даны два утверждения: $A(x)$ — «Число x четное» и $B(x)$ — «Запись числа x оканчивается цифрой 4». Находятся ли они в отношении следования?
4. Известно, что запись числа оканчивается цифрой 8. Следует ли из этого, что данное число делится на:
а) 2; б) 4?
5. В четырехугольнике $ABCD$ все стороны равны. Достаточно ли этого для того, чтобы утверждать, что $ABCD$:
а) квадрат; б) ромб?
6. В четырехугольнике $ABCD$ два угла прямые. Достаточно ли этого для того, чтобы утверждать, что $ABCD$ — прямоугольник?
7. Выскажите предположение, рассмотрев несколько частных случаев:
а) «К однозначному числу приписали такую же цифру. Во сколько раз увеличилось число?»;
б) «Имеются два числа, ни одно из которых не делится на 3. Может ли (и при каком условии) сумма этих чисел разделиться на 3?»;
в) «Верно ли, что квадрат четного числа есть число, кратное 4?».
8. Сравните значение выражений $(a + 6)(7 - a)$ и $a(a - 1)$ при $a = -3, 0, 2$. Верно ли, что при любом целом a значение первого высказывания больше, чем второго?
9. Даны верные равенства: $74 - 47 = 27$; $52 - 25 = 27$; $63 - 36 = 27$. Верно ли, что разность любого двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 27?
10. Выяснив, что $(12 + 4) : 2 = 12 : 2 + 4 : 2$, ученик решил аналогично действовать при нахождении значения выражения $(12 \cdot 4) : 2$, и записал: $(12 \cdot 4) : 2 = (12 : 2)\cdot(12 : 4)$. Прав ли он?
11. Известно, что если число делится на 6, то оно делится на 2 и на 3. Верны ли следующие высказывания, сформулированные по аналогии с данными:
а) «Если число делится на 10, то оно делится на 2 и на 5»;
б) «Если число делится на 12, то оно делится на 2 и на 6»;
в) «Если число делится на 14, то оно делится на 2 и на 7»;
г) «Если число делится на 15, то оно делится на 3 и на 5».
12. Учителю необходимо подвести учащихся к выводу о том, что «при сложении числа с нулем получается то число, которое складывали с нулем». Какой метод рассуждений вы выберете?

2.11. СХЕМЫ ДЕДУКТИВНЫХ УМОЗАКЛЮЧЕНИЙ

Рассмотрим подробнее дедуктивные (правильные) умозаключения. Согласно определению, в дедуктивном умозаключении посылки и заключение находятся в отношении логического следования. Это означает, что в нем всегда из истинных посылок следует истинное заключение. Но как строить такие умозаключения и проверять их правильность?

В логике считают, что правильность умозаключения определяется его формой и не зависит от конкретного содержания входящих в него утверждений. И в логике предлагаются такие правила, соблюдая которые, можно строить дедуктивные умозаключения. Эти правила называют *правилами вывода*, или *схемами дедуктивных* (*правильных*) *умозаключений*. Правил много, но наиболее часто используются следующие:

- $\dfrac{A(x) \Rightarrow B(x), A(a)}{B(a)}$ — правило заключения;
- $\dfrac{A(x) \Rightarrow B(x), \overline{B(a)}}{\overline{A(a)}}$ — правило отрицания;
- $\dfrac{A(x) \Rightarrow B(x), B(x) \Rightarrow C(x)}{A(x) \Rightarrow C(x)}$ — правило силлогизма.

Выясним, что обозначают все знаки, использованные в записи этих правил.

Рассмотрим, например, правило заключения. В нем обозначены две посылки $A(x) \Rightarrow B(x)$ и $A(a)$. Первую называют *общей посылкой*, это может быть теорема, определение и, вообще, предложение вида $A(x) \Rightarrow B(x)$. Вторую посылку $A(a)$ называют *частной*, она получается из условия $A(x)$ при $x = a$. Предложение $B(a)$ — это *заключение*, оно получается из $B(x)$ при $x = a$. Посылки отделены от заключения чертой, которая заменяет слово «следовательно».

Приведем *пример умозаключения, выполненного по правилу заключения*: если запись числа x оканчивается цифрой 5, то число x делится на 5. Запись числа 135 оканчивается цифрой 5. Следовательно, число 135 делится на 5.

В качестве общей посылки в этом умозаключении выступает утверждение вида «если $A(x)$, то $B(x)$», где $A(x)$ — это «запись числа x оканчивается цифрой 5», а $B(x)$ — «число x делится на 5». Частная посылка представляет собой высказывание, которое получилось из условия общей при $x = 135$ (т. е. это $A(135)$). Заключение является высказыванием, полученным из $B(x)$ при $x = 135$ (т. е. это $B(135)$).

Приведем теперь *пример умозаключения, выполненного по правилу отрицания*: если запись числа x оканчивается цифрой 5, то число x делится на 5. Число 177 не делится на 5. Следовательно, оно не оканчивается цифрой 5.

Видим, что в этом умозаключении общая посылка такая же, как и в предыдущем, а частная представляет собой отрицание высказывания «число 177 делится на 5 (т. е. это $\overline{B(177)}$). Заключение — это отрицание предложения «Запись числа 177 не оканчивается цифрой 5» (т. е. $\overline{A(177)}$).

И, наконец, рассмотрим *пример умозаключения, построенного по правилу силлогизма*: если число x кратно 12, то оно кратно 6. Если число x кратно 6, то оно кратно 3. Следовательно, если число x кратно 12, то оно кратно 3.

В этом умозаключении две посылки вида «если $A(x)$, то $B(x)$» и «если $B(x)$, то $C(x)$», где $A(x)$ — это предложение «x кратно 12», $B(x)$ — предложение «x кратно 6» и $C(x)$ — предложение «x кратно 3». Заключение представляет собой высказывание «если $A(x)$, то $C(x)$».

Конечно, возникает вопрос: почему умозаключения, выполненные по правилам заключения, отрицания и силлогизма, будут дедуктивными (правильными)? Дело в том, что, выполняя рассуждения по этим правилам, мы всегда будем получать истинное заключение, что и требуется в дедуктивном умозаключении.

В логике существуют различные способы проверки правильности умозаключений. Рассмотрим тот, который предполагает использование кругов Эйлера. Для этого сначала данное умозаключение записывают на теоретико-множественном языке, а посылки изображают на кругах Эйлера, считая их истинными. После этого выясняют, *всегда* ли при таких посылках истинно заключение. Если оказывается, что всегда, то говорят, что данное умозаключение правильное, дедуктивное. Если же возможен рисунок, из которого видно, что заключение может быть ложным, то говорят, что всякое умозаключение, выполненное по такой схеме, не является дедуктивным, правильным.

Покажем, что умозаключение, выполненное по правилу заключения, является дедуктивным. Сначала запишем это правило на теоретико-множественном языке.

Посылка $A(x) \Rightarrow B(x)$ может быть записана в виде $T_A \subset T_B$, где T_A и T_B — множества истинности высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$.

Частная посылка $A(a)$ означает, что $a \in T_A$, а заключение $B(a)$ показывает, что $a \in T_B$.

Все умозаключение, построенное по правилу заключения, запишется на теоретико-множественном языке так:

$$\frac{T_A \subset T_B, a \in T_A}{a \in T_B}.$$

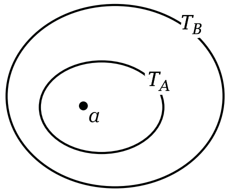


Рис. 2.10

Изобразив на кругах Эйлера множества T_A и T_B и обозначив элемент $a \in T_A$, мы увидим, что $a \in T_B$ (рис. 2.10), т.е. $a \in T_A \Rightarrow a \in T_B$.

Аналогичным образом можно проверить и другие правила дедуктивных умозаключений. Кроме того, такой способ проверки правильности умозаключений можно использовать и в тех случаях, когда умозаключение выполнено по схеме, отличной от рассмотренных.

Задача. Правильно ли следующее умозаключение: «Если запись числа оканчивается цифрой 5, то число делится на 5. Число 125 делится на 5. Следовательно, запись числа 125 оканчивается цифрой 5».

Решение. Это умозаключение выполнено по схеме

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x), B(125)}{A(125)},$$

которую в общем виде можно представить так:

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x), B(a)}{A(a)}.$$

Но такой схемы среди названных ранее нет. Является ли она правилом дедуктивного умозаключения?

Чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся кругами Эйлера. На теоретико-множественном языке полученное правило можно записать так:

$$\frac{T_A \subset T_B, a \in T_B}{a \in T_A}.$$

Изобразим на кругах Эйлера множества T_A и T_B и обозначим элемент a, принадлежащий множеству T_B. Но оказывается, что он может содержаться в множестве T_A, а может и не принадлежать ему (рис. 2.11).

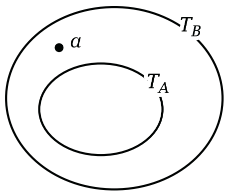


Рис. 2.11

В логике считают, что такая схема не является правилом дедуктивного умозаключения, так как она не гарантирует истинности заключения при истинных посылках. И вообще, при анализе умозаключения нельзя отождествлять правильность умозаключения с истинностью полученного заключения: заключение может быть истинным, а само умозаключение — нет.

Возвращаясь к вопросу данной задачи, отметим, что приведенное в ней умозаключение не является правильным, так как выполнено по схеме, не гарантирующей истинности заключения.

Как же надо действовать, чтобы установить, правильно умозаключение или нет? Для этого есть два пути: 1) показать, что данное умозаключение выполнено по одному из известных правил вывода; 2) сформулировать данное умозаключение на теоретико-множественном языке и воспользоваться кругами Эйлера так, как описано ранее.

Полезно также запомнить и не путать с правилом заключения такую схему:

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x), B(a)}{A(a)},$$

а с правилом отрицания — схему:

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x), \overline{A(a)}}{\overline{B(a)}}.$$

Эти схемы не гарантируют истинности заключения и, следовательно, не являются правилами дедуктивных умозаключений.

Заметим, что полное дедуктивное умозаключение по приведенным трем правилам требует указания двух посылок. Однако в процессе рассуждений эти правила иногда сокращают, опуская одну из посылок. Например, объясняя, почему $6 < 8$, ученик говорит, что «6 при счете называют раньше, чем 8, значит, $6 < 8$». Является ли это умозаключение дедуктивным? Если да, то по какому правилу оно выполнено?

В объяснении ученика пропущена общая посылка: «если число a при счете называют раньше числа b, то a меньше b». Если ее восстановить, то умозаключение ученика примет вид:

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x), A(a)}{B(a)},$$

а это правило заключения, т. е. умозаключение, выполненное учеником, дедуктивное.

Заметим также, что: 1) выполняя умозаключения, можно менять очередность посылок и начинать с заключения, а затем воспроизводить посылки; 2) если общие посылки рассмотренных в правилах дедуктивных умозаключений содержат более одной переменной, то это не нарушает смысла этих правил.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. В каждом из следующих умозаключений выделите посылки и заключение:
   а) «Если число натуральное, то оно целое; если число целое, то оно рациональное, следовательно, если число натуральное, то оно рациональное»;
   б) «Если число натуральное, то оно целое; число 138 — натуральное, следовательно, оно целое»;
   в) «Всякое натуральное число целое; число 138 — целое, следовательно, оно натуральное»;
   г) «Всякое натуральное число целое; число 0,2 не является целым, следовательно, оно не является и натуральным».
2. Проанализируйте схему каждого умозаключения из задания 1. Есть ли среди них умозаключения, не являющиеся дедуктивными?
3. Используя правило заключения, закончите умозаключение так, чтобы оно было дедуктивным:
   а) «Если четырехугольник — прямоугольник, то в нем диагонали равны. В четырехугольнике *ABCD*...»;
   б) «Равные треугольники имеют равные площади. Треугольники *ABC* и *KLM*...»;
   в) «Для того чтобы ромб был квадратом, достаточно, чтобы в нем был прямой угол. В ромбе *ABCD*...».
4. Используя правило отрицания, закончите умозаключения из задания 3 так, чтобы они были дедуктивными.
5. Восстановите общую посылку в умозаключении:
   а) «Число 12 — натуральное, следовательно, оно положительное»;
   б) «Число 15 — нечетное, следовательно, оно не делится на 2».
6. Постройте дедуктивное умозаключение, доказывающее, что:
   а) «130 делится на 10»;
   б) «137 не делится на 10»;
   в) «Четырехугольник *ABCD* — прямоугольник»;
   г) «Четырехугольник *ABCD* не является прямоугольником».

7. Используя круги Эйлера, проверьте, правильны ли следующие умозаключения:
   а) «Всякий квадрат является прямоугольником; четырехугольник *ABCD* не квадрат, следовательно, он не является прямоугольником»;
   б) «Некоторые прямоугольники — квадраты; все квадраты — правильные многоугольники, следовательно, некоторые прямоугольники являются правильными многоугольниками».
8. Сравнивая выражения 36 – 7 и 36 – 4, ученик рассуждал так: «36 – 7 меньше 36 – 4, так как 7 больше 4». Какое правило использовал ученик в качестве общей посылки?

2.12. СПОСОБЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Обычно, когда говорят о доказательстве, имеют в виду просто проверку высказанного утверждения. В математике проверка и доказательство — это разные вещи, хотя и связанные между собой. Пусть, например, требуется доказать, что если в четырехугольнике три угла прямые, то он — прямоугольник.

Если мы возьмем какой-либо четырехугольник, у которого три угла прямые, и, измерив четвертый, убедимся в том, что он действительно прямой, то эта проверка сделает данное утверждение более правдоподобным, но еще не доказанным.

Чтобы доказать данное утверждение, рассмотрим произвольный четырехугольник, в котором три угла прямые. Так как в любом выпуклом четырехугольнике сумма углов равна 360°, то и в данном она составляет 360°. Сумма трех прямых углов равна 270° ($90° \cdot 3 = 270°$), и, значит, четвертый имеет величину 90° ($360° - 270° = 90°$). Если все углы четырехугольника прямые, он — прямоугольник. Следовательно, данный четырехугольник будет прямоугольником. Что и требовалось доказать.

Заметим, что сущность проведенного доказательства состоит в построении такой последовательности истинных утверждений (теорем, аксиом, определений), из которых логически следует утверждение, которое нужно было доказать.

Вообще *доказать какое-либо утверждение — это значит показать, что это утверждение логически следует из системы истинных и связанных с ним утверждений.*

В логике считают, что если рассматриваемое утверждение логически следует из уже доказанных утверждений, то оно обоснованно и также истинно, как и последние.

Таким образом, основным способом математического доказательства является дедуктивный вывод. А само ***доказательство*** — *это логическая операция, в процессе которой обосновывается истинность какого-либо утверждения с помощью других истинных и связанных с ним утверждений. Для этого строится конечная цепочка умозаключений, причем заключение каждого из них (кроме последнего) является посылкой в одном из последующих умозаключений.*

Например, в приведенном ранее доказательстве можно выделить следующие умозаключения:

1) в любом выпуклом четырехугольнике сумма углов равна 360°; данная фигура — выпуклый четырехугольник, следовательно, сумма углов в нем 360°;

2) если известна сумма всех углов четырехугольника и сумма трех из них, то вычитанием можно найти величину четвертого; сумма всех углов данного четырехугольника равна 360°, сумма трех углов составляет 270° ($90° \cdot 3 = 270°$), следовательно величина четвертого угла: $360° - 270° = 90°$;

3) если в четырехугольнике все углы прямые, то этот четырехугольник — прямоугольник; в данном четырехугольнике все углы прямые, следовательно, он прямоугольник.

Приведенные умозаключения выполнены по правилу заключения и, следовательно, являются дедуктивными. Самое простое доказательство состоит из одного умозаключения. Таким, например, является доказательство утверждения о том, что $6 < 8$.

Заметим, что доказательство в виде цепочки умозаключений, выполненных в соответствии с правилами вывода и указанием всех посылок, не предназначено для постоянного использования на практике, где применяются, как правило, свернутые схемы умозаключений. Оно является важным средством анализа выполненного доказательства.

По способу ведения различают прямые и косвенные доказательства.

Прямое доказательство утверждения $A \Rightarrow B$ — это построение цепочки дедуктивных умозаключений, выполняемых последовательно от A к B с соблюдением правил логики и с помощью системы утверждений, истинность которых доказана. Рассмотренное ранее доказательство теоремы о том, что если в четырехугольнике три угла прямые, то он прямоугольник, было прямым — в нем, основываясь на некотором истинном предположении и с учетом условия теоремы, строилась цепочка дедуктивных умозаключений, которая приводила к истинному заключению.

Примером ***косвенного доказательства*** является *доказательство методом от противного*. Сущность его состоит в следующем. Пусть требуется доказать теорему $A \Rightarrow B$. При доказательстве методом от противного допускают, что заключение теоремы (B) ложно, а следовательно, его отрицание истинно. Присоединив предложение $\overline{B}$ к совокупности истинных посылок, используемых в процессе доказательства (среди которых находится и условие A), строят цепочку дедуктивных умозаключений до тех пор, пока не получится утверждение, противоречащее одной из посылок и, в частности, условию A. Как только такое противоречие устанавливают, делают вывод о том, что предположение было ложным, а значит, истинно B, т. е. что и требовалось доказать.

Задача 1. Доказать, что если $a + 3 > 10$, то $a \neq 7$.

Решение. Предположим, что заключение данного утверждения ложно, тогда истинным будет его отрицание, т. е. предложение $a = 7$. Подставим это значение a в неравенство $a + 3 > 10$. Получим предложение $7 + 3 > 10$ $(10 > 10)$, которое ложно. Пришли к противоречию с определением отношения «больше» для чисел. Следовательно, наше предположение неверное, и поэтому, если $a + 3 > 10$, то $a \neq 7$.

Завершая обсуждение вопросов, связанных с математическим доказательством, выясним, как связаны между собой неполная индукция с дедуктивным выводом.

Ранее было отмечено, что выводы, которые мы получаем с помощью неполной индукции (или аналогии), носят характер предположения и поэтому их надо либо доказывать, либо опровергать. Поскольку выводы, о которых идет речь, носят, как правило, характер обобщения, то они формулируются в виде предложений, содержащих квантор общности. Следовательно, чтобы их опровергнуть, надо привести контрпример, а чтобы убедиться в истинности, — доказать. Причем имеется в виду дедуктивный вывод. Таким образом, в процессе познания неполная индукция и математическое доказательство оказываются тесно связанными.

Проиллюстрируем это, решив следующую задачу.

Задача 2. Даны четыре последовательных натуральных числа. Верно ли, что произведение средних чисел этой последовательности больше произведения крайних на 2?

Решение. Попытаемся сначала высказать предположение относительно ответа на вопрос задачи. Для этого рассмотрим несколько конкретных случаев. Пусть 1, 2, 3, 4 составляют данную последовательность. Образуем произведение средних чисел и произведение крайних и сравним их: $2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 2$. Возьмем еще одну последовательность, например, 5, 6, 7, 8, опять образуем произведения средних и крайних чисел и сравним их: $6 \cdot 7 - 5 \cdot 8 = 2$. Рассмотренные случаи позволяют предположить, что утверждение «Произведение средних чисел заданной последовательности всегда больше произведения крайних на 2» истинно. Это предположение является по существу выводом в умозаключении, называемом *неполной индукцией*. Но истинность предложения с квантором общности надо доказывать.

Обозначим четыре последовательных натуральных числа так: n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$. Образуем произведения средних и крайних чисел, получим $(n + 1)(n + 2)$ и $n(n + 3)$. Выполним преобразования этих выражений: $(n + 1)(n + 2) = n^2 + 3n + 2$; $n(n + 3) = n^2 + 3n$.

Видим, что, действительно, первое произведение больше второго на 2. Что и требовалось доказать.

В математике достаточно часто используется способ доказательства, называемый полной индукцией.

> ***Полная индукция*** **—** это такой метод доказательства, при котором истинность утверждения следует из истинности его во всех частных случаях.

Задача 3. Доказать, что каждое составное натуральное число, большее 4, но меньшее 20, представимо в виде суммы двух простых чисел.

Решение. Вспомним определения простого и составного чисел. Простым называется такое натуральное число, которое делится только на 1 и на себя. Например, числа 2, 13, 5, 17 — простые. Числа, которые имеют более двух делителей, называются составными. Число 1 не является ни простым, ни составным.

В данной задаче рассматривается промежуток чисел, которые больше 4, но меньше 20. Составными в нем будут числа: 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18. Каждое из них можно представить в виде суммы двух простых чисел: $6 = 3 + 3$; $8 = 5 + 3$; $9 = 7 + 2$; $10 = 5 + 5$ (или $7 + 3$); $12 = 5 + 7$; $14 = 11 + 3$ (или $7 + 7$); $15 = 13 + 2$; $16 = 13 + 3$ (или $11 + 5$), $18 = 13 + 5$ (или $11 + 7$). Так как данное утверждение истинно во всех частных случаях, то оно доказано.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Докажите, что если к произведению двух последовательных натуральных чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего числа.

2. Докажите, что значением выражения $(x - 4)(2x + 1)$ будет целое число, если x принимает значения -1, 0, 1, 4.
3. Как изменится сумма двух чисел, если каждое слагаемое увеличить в три раза?
4. Каким числом может быть сумма двух нечетных чисел? Рассмотрите несколько частных случаев и выскажите предположение. Каким образом можно доказать его истинность?
5. Даны четыре последовательных нечетных числа. Верно ли, что произведение крайних чисел меньше произведения средних на 8?
6. Покажите, что при обосновании решения следующих задач младшие школьники могут использовать полную индукцию:
   а) «Дан ряд чисел: 3545, 3550, 3555, 3560, 3565. Можно ли утверждать, что каждое число этого ряда делится на 5?»;
   б) «Можно ли утверждать, что значения всех выражений одинаковы:
   326 326 : 326; 236 236 : 236; 626 626 : 626?»;
   в) «Можно ли утверждать, что значения выражений одинаковы:
      1) 56 : 5;
      2) 7 · 8 : (32 : 4);
      3) (65 – 9) : (24 : 3)?».

Раздел II

СООТВЕТСТВИЯ, ОТНОШЕНИЯ, ОПЕРАЦИИ

При изучении окружающего мира средствами математики мы рассматриваем не только его объекты, но и главным образом связи между ними. Эти связи называют зависимостями, соответствиями, отношениями, функциями. Например, при вычислении длин предметов устанавливается соответствие между предметами и числами, которые являются значениями их длин; при решении задач на движение устанавливается зависимость между пройденным расстоянием и временем, если скорость движения постоянна.

Конкретные зависимости, соответствия, отношения между объектами в математике изучались с момента ее возникновения. Но вопрос о том, какова сущность любого соответствия (отношения, операции), был поставлен в конце XIX — начале XX в., и ответ на него найден в рамках теории множеств.

В начальном курсе математики происходит знакомство учащихся с различными зависимостями, но чтобы использовать их для развития мыслительной деятельности детей, учитель должен овладеть общими понятиями современной математики: соответствие, отношение, алгебраическая операция и др. Кроме того, усваивая математический язык, используемый при изучении этого материала, учитель сможет глубже понять сущность математического моделирования реальных явлений и процессов.

Глава 3

СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ МНОЖЕСТВАМИ

В начальном курсе математики изучаются различные взаимосвязи между двумя множествами.

Например, взаимосвязи между числовыми выражениями и их значениями, между геометрическими фигурами и числами, между текстовыми задачами и их моделями. Поэтому учителю важно понимать их суть, чтобы обеспечить единство в методике изучения этих взаимосвязей.

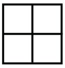
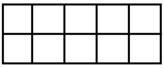
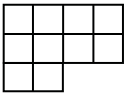
3.1. ПОНЯТИЕ СООТВЕТСТВИЯ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ СООТВЕТСТВИЙ

Рассмотрим три примера соответствий, изучаемых в начальном курсе математики.

I. Найти значение выражения:

$$b_1)\ (17 - 1) : 4; \quad b_2)\ (12 + 18) : (6 - 6); \quad b_3)\ 2 \cdot 7 + 6.$$

II. Найти площадь фигуры:

$F_1)$  $F_2)$  $F_3)$ 

III. Решить уравнение:

$$y_1)\ 2 + x = 6; \quad y_2)\ x - 7 = 4; \quad y_3)\ 2x = 8.$$

В первом случае мы устанавливаем соответствие между заданными выражениями и их числовыми значениями; во втором — выясняем, какое число соответствует каждой из данных фигур, характеризуя ее площадь; в третьем — ищем число, которое является решением уравнения.

Что общего между этими соответствиями?

Видим, что во всех случаях имеются два множества: в первом — это множество из трех числовых выражений и множество **N** натуральных чисел (ему принадлежат значения данных выражений); во втором — множество из трех геометрических фигур и множество **N** натуральных чисел; в третьем — множество из трех уравнений и множество **N** натуральных чисел.

Выполняя предложенные задания, мы устанавливаем связь (соответствие) между элементами этих множеств. Ее можно представить наглядно, с помощью графов (рис. 3.1).

Можно задать эти соответствия, перечислив все пары элементов, находящихся в заданном соответствии:

I. $\{(b_1, 4), (b_3, 20)\}$;

II. $\{(F_1, 4), (F_2, 10), (F_3, 10)\}$;

III. $\{(y_1, 4), (y_2, 11), (y_3, 4)\}$.

Последняя запись показывает, что любое соответствие между двумя множествами X и Y можно рассматривать как *множество*

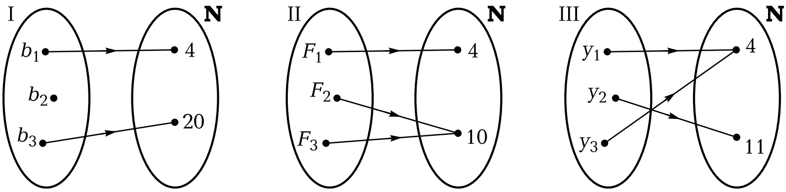


Рис. 3.1

упорядоченных пар, образованных из их элементов. А так как упорядоченные пары — это элементы декартова произведения, то приходим к следующему определению общего понятия соответствия.

> ***Соответствием*** между множествами X и Y называют всякое подмножество декартова произведения этих множеств.

Соответствия принято обозначать буквами P, S, T, R и др. Если S — соответствие между множествами X и Y, то, согласно определению, $S \subset X \times Y$.

Выясним теперь, как задают соответствия между двумя множествами. Поскольку соответствие — это подмножество, то его можно задавать как любое множество, т. е. либо *перечислив все пары элементов, находящихся в заданном соответствии*, либо *указав характеристическое свойство этого подмножества*. Так, соответствие между множествами $X = \{1, 2, 4, 6\}$ и $Y = \{3, 5\}$ можно задать:

1) с помощью предложения с двумя переменными: $a < b$ при условии, что $a \in X$, $b \in Y$;

2) перечислив пары чисел, принадлежащих подмножеству декартова произведения $X \times Y$: $\{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (4, 5)\}$. К этому способу задания относят также задание соответствия с помощью графа (рис. 3.2) и графика (рис. 3.3).

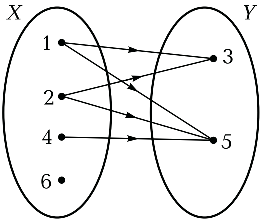


Рис. 3.2

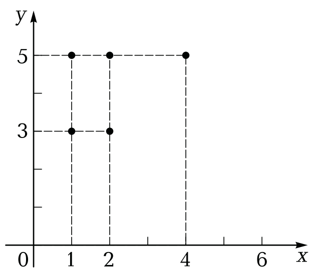


Рис. 3.3

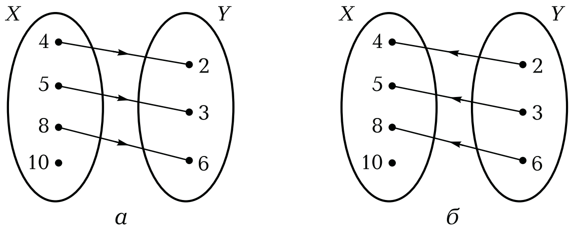


Рис. 3.4

Нередко, изучая соответствие между множествами X и Y, приходится рассматривать и соответствие, ему обратное.

Пусть, например, S — соответствие «больше на 2» между множествами $X = \{4, 5, 8, 10\}$ и $Y = \{2, 3, 6\}$. Тогда $S = \{(4, 2), (5, 3), (8, 6)\}$ и его граф будет таким, как на рис. 3.4, *а*.

Соответствие, обратное данному, — это соответствие «меньше на 2». Оно рассматривается между множествами Y и X, и чтобы его представить наглядно, достаточно на графе отношения S направление стрелок поменять на противоположное (рис. 3.4, *б*). Если соответствие «меньше на 2» обозначить S^{-1}, то $S^{-1} = \{(2, 4), (3, 5), (6, 8)\}$.

Условимся предложение «Элемент x находится в соответствии S с элементом y» записывать кратко так: xSy. Запись xSy можно рассматривать как обобщение записей конкретных соответствий: $x = 2y$; $x > 3y + 1$ и др.

Воспользуемся введенной записью для определения понятия соответствия, обратного данному.

> Пусть S — соответствие между множествами X и Y. Соответствие S^{-1} между множествами Y и X называют ***обратным данному***, если $yS^{-1}x$ тогда и только тогда, когда xSy.

Соответствия S и S^{-1} называют *взаимно-обратными*. Выясним особенности их графиков.

Построим график соответствия $S = \{(4, 2), (5, 3), (8, 6)\}$ (рис. 3.5, *а*). При построении графика соответствия $S^{-1} = \{(2, 4), (3, 5), (6, 8)\}$ мы должны первую компоненту выбирать из множества $Y = \{2, 3, 6\}$, а вторую — из множества $X = \{4, 5, 8, 10\}$. В результате график соответствия S^{-1} совпадет с графиком соответствия S. Чтобы различать графики соответствий S и S^{-1}, условились первую компоненту пары соответствия S^{-1} считать абсциссой, а вторую — ординатой. Например, если $(5, 3) \in S$, то $(3, 5) \in S^{-1}$. Точки с координатами $(5, 3)$ и $(3, 5)$, а в общем случае (x, y) и (y, x), симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов. Следовательно, *графики взаимно-обратных соответствий S и S^{-1} симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов.*

Чтобы построить график соответствия S^{-1}, достаточно изобразить на координатной плоскости точки, симметричные точкам графика S относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 3.5, *б*).

Среди различных соответствий, изучаемых в математике, особое внимание уделяется соответствиям, которые называют функциональными.

> ***Функциональным соответствием*** между множествами X и Y называют такое соответствие, при котором каждому элементу из множества X сопоставляется не более одного элемента из множества Y.

Примером функциональных соответствий могут служить соответствия, графы которых изображены на рис. 3.1.

Соответствие, граф которого представлен на рис. 3.2, функциональным не является, поскольку числам 1 и 2 из множества X сопоставляется более одного элемента из множества Y.

Частным случаем функционального соответствия между множествами X и Y является *соответствие, при котором каждому элементу из множества X сопоставляется точно один элемент из множества Y*. Такое соответствие называют ***отображением множества X во множество Y***.

Так, функциональные соответствия II и III, графы которых изображены на рис. 3.1, можно назвать отображениями одного множества в другое.

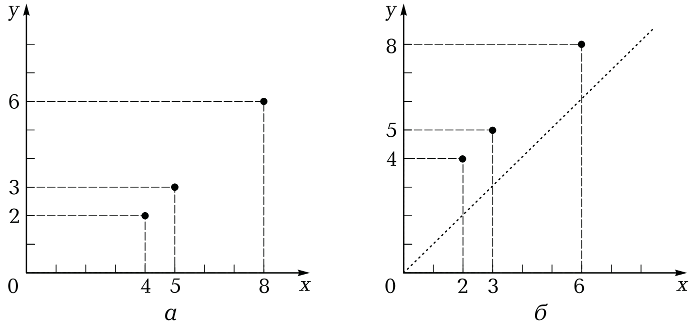


Рис. 3.5

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Вычислив длины заданных отрезков, учащийся записал: $AB = 7$ см, $CD = 12$ см, $KL = 15$ см, $XY = 12$ см. Соответствие между какими множествами он установил? Задайте это соответствие с помощью предложения с двумя переменными и графа.
2. Даны множества: $X = \{2, 5\}$, $Y = \{3, 6\}$. Перечислите элементы декартова произведения данных множеств и образуйте все подмножества полученного множества. Какое из подмножеств задает соответствие: а) «больше»; б) «меньше»; в) «меньше на 1»; г) «меньше в 3 раза»?
3. Соответствие «число x в два раза больше числа y» рассматривается между множествами X и Y. Каким будет его график, если: а) $X = \{2, 4, 6, 8\}$, $Y = \mathbf{N}$; б) $X = [2, 8]$, $Y = \mathbf{R}$; в) $X = Y = \mathbf{R}$.
4. Между множествами $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и $Y = \mathbf{Z}$ задано соответствие «$x - y = 3$», причем $x \in X$, $y \in Y$. Какая фигура на рис. 3.6 является графиком этого соответствия?
5. Графиком соответствия P, заданного между множествами X и Y, являются все точки прямоугольника $ABCD$ (рис. 3.7). Назовите координаты трех точек, принадлежащих этому графику, и задайте множества X и Y.
6. Множества $X = \{1, 3, 4, 6\}$ и $Y = \{0, 1\}$ находятся в соответствии $S = \{(1, 1), (3, 0), (3, 1), (4, 0), (4, 1)\ (6, 1)\}$. Задайте соответствие S^{-1}, обратное соответствию S, и постройте на одном чертеже их графики.
7. Между множеством X — углов треугольника ABC и множеством Y — его сторон задано соответствие T — «угол x лежит

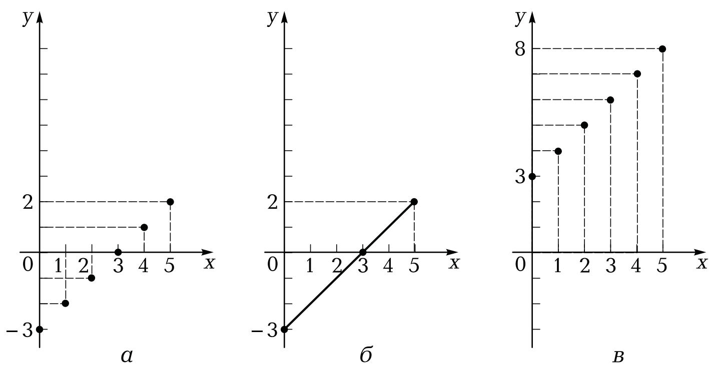


Рис. 3.6

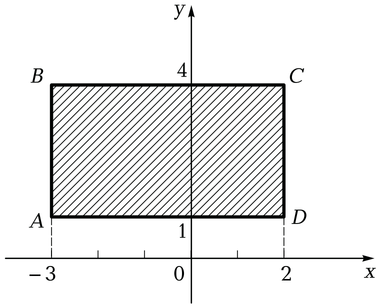
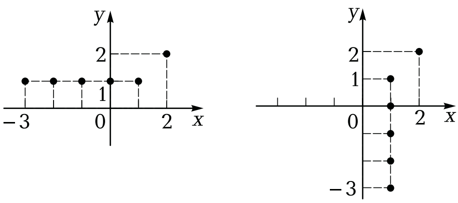
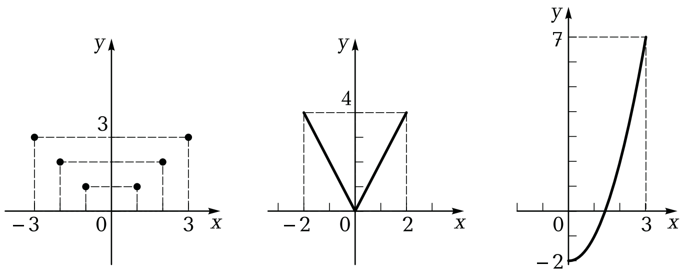


Рис. 3.7



а *б*

Рис. 3.8



а *б* *в*

Рис. 3.9

против стороны *y*». Задайте соответствие T^{-1}, обратное соответствию *T*, с помощью: а) предложения с двумя переменными; б) графа. Является ли соответствие *T* функциональным?

8. Даны графики соответствий *P* и *Q* (рис. 3.8, *а* и *б*). Можно ли утверждать, что соответствия *P* и *Q* взаимно-обратные? Являются ли они функциональными?
9. Постройте графики соответствий, обратных данным (рис. 3.9, *а*—*в*).

3.2. ВЗАИМНО-ОДНОЗНАЧНЫЕ СООТВЕТСТВИЯ

В математике изучают различные виды соответствий. Это неслучайно, поскольку взаимосвязи, существующие в окружающем мире, многообразны. Для учителя, обучающего математике младших школьников, особую значимость имеют взаимно-однозначные соответствия.

> ***Взаимно-однозначным соответствием*** между множествами X и Y называют такое соответствие, при котором каждому элементу множества X сопоставляется единственный элемент множества Y и каждый элемент множества Y соответствует только одному элементу множества X.

Пример 1. Пусть X — множество кружков, Y — множество квадратов и соответствие между ними задано с помощью стрелок (рис. 3.10).

Это соответствие взаимно-однозначное, так как каждому кружку из множества X сопоставляется единственный квадрат из множества Y и каждый квадрат из множества Y соответствует только одному кружку из множества X.

Пример 2. Пусть X — множество действительных чисел, Y — множество точек координатной прямой. Соответствие между ними таково: действительному числу сопоставляется точка координатной прямой. Это соответствие взаимно-однозначное, так как каждому действительному числу сопоставляется единственная точка координатной прямой и каждая точка на прямой соответствует только одному числу.

В математике взаимно-однозначное соответствие между множествами X и Y называют еще ***отображением множества X на множество Y***.

Понятие взаимно-однозначного соответствия позволяет определить отношение равномощности множеств.

> Множества X и Y называют ***равномощными***, если между элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Если множества X и Y равномощны, то пишут $X \sim Y$.

Нетрудно видеть, что множества, которые были рассмотрены в примерах 1 и 2, равномощны.

Равномощными могут быть как конечные, так и бесконечные множества. Равномощные конечные множества называют еще ***равночисленными***. В начальном обучении математике равночислен-

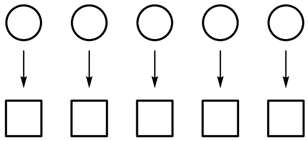


Рис. 3.10

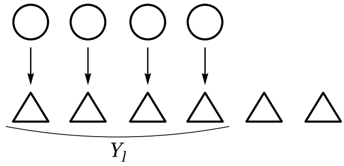


Рис. 3.11

ность выражается словами ***«столько же»*** и может использоваться при ознакомлении учащихся со многими другими понятиями. Например, чтобы ввести равенство чисел, сравнивают два множества, устанавливая между ними взаимно-однозначное соответствие. Например, пишут, что $5 = 5$, так как кружков столько же, сколько квадратов (см. рис. 3.10).

Понятие равночисленности множеств лежит и в основе определения отношений «больше на ...» и «меньше на ...». Например, чтобы утверждать, что 6 больше 4 на 2, сравнивают два множества, устанавливая взаимно-однозначное соответствие между множеством X, в котором 4 элемента, и подмножеством Y_1 другого множества Y, в котором 6 элементов (рис. 3.11), и делают вывод: треугольников столько же, сколько кружков, и еще 2. Другими словами, треугольников на 2 больше, чем кружков.

Как уже было указано, равномощными могут быть и бесконечные множества. Приведем примеры таких множеств.

Пример 3. Пусть X — множество точек отрезка AB, Y — множество точек отрезка CD, причем длины отрезков различны. Так как между данными множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие (рис. 3.12), то множества точек отрезков AB и CD равномощны.

Пример 4. Рассмотрим множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел и множество Y — четных натуральных чисел. Они равномощны, так как между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие:

$$\begin{array}{lcccccc} \mathbf{N}: & 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ Y: & 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & \ldots \end{array}$$

На первый взгляд кажется парадоксальным тот факт, что можно установить взаимно-однозначное соответствие между множеством и его частью:

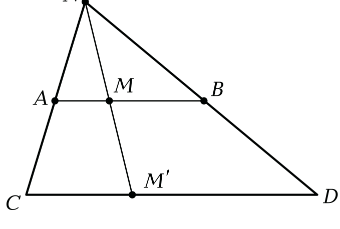


Рис. 3.12

для конечных множеств такая ситуация невозможна. Однако в математике доказано, что для бесконечного множества A всегда найдется такое его подмножество B, что между A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие. Иногда это утверждение считают определением бесконечного множества.

Если бесконечное множество равномощно множеству $\mathbf{N}$ натуральных чисел, то его называют ***счетным***. Любое бесконечное подмножество множества $\mathbf{N}$ счетно: чтобы пронумеровать его элементы, надо расположить элементы подмножества в порядке возрастания и нумеровать один за другим (т. е. так, как это сделано в примере 4). Так, счетно множество всех нечетных натуральных чисел, множество натуральных чисел, кратных 5, и др. Счетными являются также множества всех целых чисел, всех рациональных чисел.

Существуют ли множества, отличные от счетных? Доказано, что бесконечным множеством, не равномощным множеству $\mathbf{N}$ натуральных чисел, является множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Задайте с помощью графа три соответствия между множествами $X = \{a, b, c\}$ и $Y = \{2, 4, 6\}$ так, чтобы одно из них было взаимно-однозначным.
2. Пусть X — множество прямоугольников (рис. 3.13), $Y = \mathbf{N}$. Между ними установлено соответствие P: «Прямоугольник x имеет площадь, равную y». Постройте граф соответствия P. Является ли оно взаимно-однозначным; функциональным?
3. Как можно изменить множества X и Y, данные в задании 2, чтобы соответствие P: «Прямоугольник x имеет площадь, равную y» было взаимно-однозначным?
4. Даны множества: $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 7\}$. Найдите $A \times B$ и $B \times A$. Верно ли, что найденные множества равномощны?

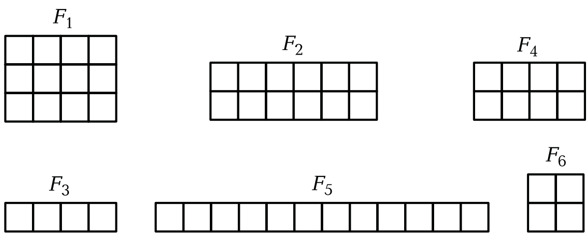


Рис. 3.13

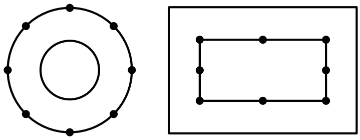


Рис. 3.14

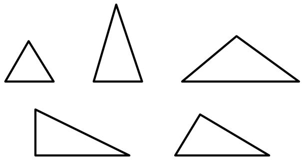


Рис. 3.15

5. Покажите, что выполняя следующие задания, учащиеся начальных классов используют понятие равночисленных множеств:
а) «Нарисуйте на второй фигуре (рис. 3.14) столько же точек, сколько на первой (точки не пересчитывать)»;
б) «Нарисуйте, не считая, столько же квадратов и столько же отрезков, сколько на рис. 3.15 треугольников»;
в) «У Димы было 28 марок, а у Коли на 7 марок больше. Сколько марок было у Коли?»;
г) «У Маши 9 игрушек, а у Риты на 2 меньше. Сколько игрушек у Риты?»;
д) «Для детского сада купили 4 зеленых мяча, а красных в 3 раза больше, чем зеленых. Сколько красных мячей купили детям?»;
е) «Для детского сада купили 15 красных мячей, а зеленых в 3 раза меньше. Сколько зеленых мячей купили детям?».

3.3. ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

Функция — одно из важнейших понятий математики, исходное понятие ведущей ее области — математического анализа. В школьном курсе математики основное внимание уделяется числовым функциям. Причиной этому является тесная связь математики с естественными науками, в частности с физикой, для которой числовые функции служат средством количественного описания различных зависимостей между величинами.

В начальном курсе математики понятие функции и все, что с ним связано, в явном виде не изучаются, но идея функциональной зависимости буквально пронизывает его, а правильное понимание таких свойств реальных явлений, как взаимозависимость и изменяемость, является основой научного мировоззрения. Безусловно, все это требует от учителя начальных классов определенных знаний о функции и ее свойствах, и прежде всего таких, которые помогут ему осуществлять в начальной школе пропедевтику понятия функции.

Рассмотрим процесс выполнения двух заданий для младших школьников:

1) увеличьте каждое нечетное однозначное число в два раза;

2) заполните таблицу:

Уменьшаемое	5	5	5	5	5	5
Вычитаемое	0	1	2	3	4	5
Разность						

Какие математические понятия необходимо использовать, выполняя данные задания?

Прежде всего, в каждом задании есть два числовых множества, между которыми устанавливается соответствие. В первом — это множества {1, 3, 5, 7} и {2, 6, 10, 14}, а во втором — это множество значений вычитаемого {0, 1, 2, 3, 4, 5} и множество значений разности {5, 4, 3, 2, 1, 0}. В чем сходство устанавливаемых между этими множествами соответствий? И в первом, и во втором задании каждому числу из первого множества сопоставляется единственное число из второго. Имеем функциональные соответствия между числовыми множествами. В общем виде понятие числовой функции определяют так:

> ***Числовой функцией*** называют такое соответствие между числовым множеством X и множеством **R** действительных чисел, при котором каждому числу из множества X сопоставляется единственное число из множества **R**.

Множество X называют ***областью определения функции***.

Функции принято обозначать буквами f, g, h и др. Если f — функция, заданная на множестве X, то действительное число y, соответствующее числу x из множества X, часто обозначают $f(x)$ и пишут $y = f(x)$. Переменную x при этом называют ***аргументом*** (или независимой переменной) ***функции*** f. Множество чисел вида $f(x)$ для всех x из множества X называют ***областью значений функции*** f.

В рассмотренном ранее задании 1) функция задана на множестве $X = \{1, 3, 5, 7\}$ — это ее область определения. А область значений этой функции есть множество {2, 6, 10, 14}.

Из определения функции вытекает, что для задания функции необходимо указать, во-первых, числовое множество X, т. е. область определения функции, и во-вторых, правило, по которому каждому числу из множества X соответствует единственное действительное число.

Часто функции задают с помощью формул, указывающих, как по данному значению аргумента найти соответствующее значение функции. Например, формулы $y = 2x - 3$, $y = x^2$, $y = 3x$, где x — действительное число, задают функции, поскольку каждому действительному значению x можно, производя указанные в формуле действия, поставить в соответствие единственное значение y.

Заметим, что с помощью одной и той же формулы можно задать как угодно много функций, которые будут отличаться друг от друга областью определения. Например, функция $y = 2x - 3$, где $x \in \mathbf{R}$, отлична от функции $y = 2x - 3$, где $x \in \mathbf{N}$. Действительно, при $x = -5$ значение первой функции равно -13, а значение второй не определено.

Часто при задании функции с помощью формулы ее область определения не указывается. В таких случаях считают, что областью определения функции $f(x)$ является область определения выражения $f(x)$. Например, если функция задана формулой $y = 2x - 3$, то ее областью определения считают множество $\mathbf{R}$ действительных чисел. Если функция задана формулой $y = \dfrac{6}{x-2}$, то ее область определения есть множество $\mathbf{R}$ действительных чисел, исключая число 2 (при $x = 2$ знаменатель данной дроби обращается в нуль).

Числовые функции можно представлять наглядно на координатной плоскости. Пусть $y = f(x)$ — функция с областью определения X. Тогда ее ***графиком*** является множество таких точек координатной плоскости, которые имеют абсциссу x и ординату $f(x)$ для всех x из множества X.

Так, графиком функции $y = 2x - 3$, заданной на множестве $\mathbf{R}$, является прямая (рис. 3.16), а графиком функции $y = x^2$, заданной также на множестве $\mathbf{R}$, — парабола (рис. 3.17).

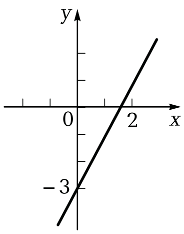


Рис. 3.16

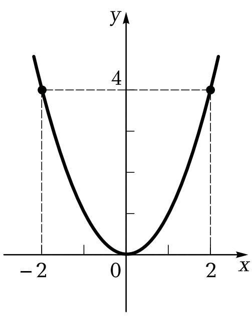


Рис. 3.17

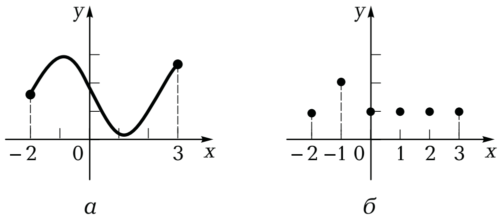


Рис. 3.18

Функции можно задавать с помощью графика. Например, графики, приведенные на рис. 3.18, *а*, *б*, задают функции, одна из которых имеет в качестве области определения промежуток [–2, 3], а вторая — конечное множество {–2, –1, 0, 1, 2, 3}.

Не каждое множество точек на координатной плоскости представляет собой график некоторой функции. Так как при каждом значении аргумента из области определения функция должна иметь лишь одно значение, то любая прямая, параллельная оси ординат, или совсем не пересекает график функции, или пересекает его лишь в одной точке. Если же это условие не выполняется, то множество точек координатной плоскости график функции не задает. Например, кривая на рис. 3.19 не является графиком функции — прямая AB, параллельная оси ординат, пересекает ее в двух точках.

Функции можно задавать с помощью ***таблицы***. Например, следующая таблица описывает зависимость температуры воздуха от времени суток (эта зависимость — функция, так как каждому значению времени t соответствует единственное значение температуры воздуха T):

t, ч	0	3	6	9	12	15	18	21	24
T, °C	–3	–7	–5	0	2	4	2	1	–3

Числовые функции обладают многими свойствами. Рассмотрим одно из них — свойство монотонности, так как понимание этого свойства учителем важно при обучении математике младших школьников.

Функцию f называют ***монотонной*** на некотором промежутке A, если она на этом промежутке возрастает или убывает.

Функцию f называют ***возрастающей*** на некотором промежутке A, если для любых чисел x_1, x_2 из множества A выполняется условие: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

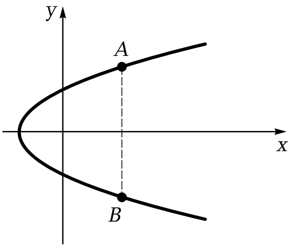


Рис. 3.19

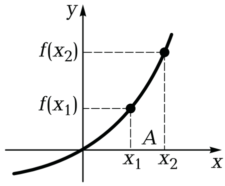


Рис. 3.20

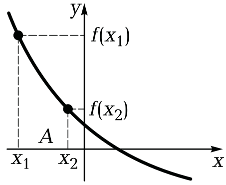


Рис. 3.21

График функции, возрастающей на промежутке A, обладает особенностью: при движении вдоль оси абсцисс слева направо по промежутку A ординаты точек графика увеличиваются (рис. 3.20).

> Функцию f называют ***убывающей*** на некотором промежутке A, если для любых чисел x_1, x_2 из множества A выполняется условие: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

График функции, убывающей на промежутке A, обладает особенностью: при движении вдоль оси абсцисс слева направо по промежутку A ординаты точек графика уменьшаются (рис. 3.21).

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Функции, приведенные в начале п. 3.3 (см. два задания), задайте с помощью формул и укажите для каждой область определения и множество значений.
2. Какие из следующих формул задают на множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел функцию:

   а) $y = 4x$; б) $y = \dfrac{4}{x}$; в) $x^2 + y^2 = 4$?
3. На рис. 3.22, *а—в*, изображены графики функций f, g, h. Укажите область определения и область значений каждой. Установите, возрастают они или убывают на данной области определения. Найдите для каждой функции наибольшее и наименьшее значения на всей области определения.
4. Постройте график функции $y = 5 - x$, если ее область определения X такова:

   а) $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;
   б) $X = [0; 5]$;
   в) $X = \mathbf{R}$.
5. Функция f задана с помощью таблицы:

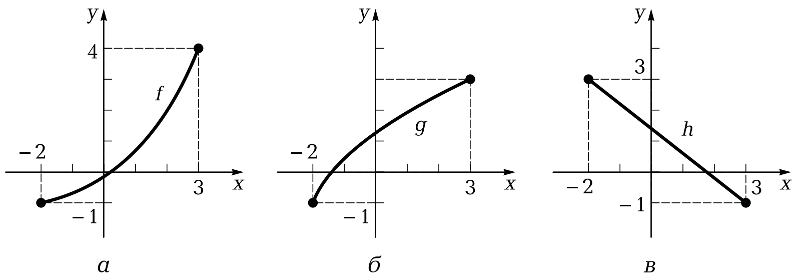


Рис. 3.22

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

а) Укажите ее область определения и область значений.
б) Задайте функцию f с помощью формулы.
в) Постройте график функции f на координатной плоскости.
д) Докажите, что функция f возрастает на всей области определения.

6. Изучая математику в начальных классах, учащиеся выполняют задания:
а) $39 + a$. Вычислите сумму, если a принимает значения 0, 6, 15, 31, 46, 52;
б) $\square - 9$. Вычислите разность, поставив в окошко числа 10, 11, 12;
в) составьте все возможные примеры на сложение однозначных чисел с ответом 12.
Покажите, что в каждом из этих заданий устанавливается соответствие между двумя числовыми множествами и это соответствие — функция. Назовите в каждом случае область ее определения и область значений.
7. У одного ученика было 2 тетради. В течение 6 дней он каждый день покупал по 3 новые тетради. Сколько тетрадей (y) у него будет через x дней?
Выразите y через x и покажите, что установленное соответствие — функция. Укажите ее область определения и область значений. Постройте график функции.

3.4. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

Прямая пропорциональность. Если t — время движения пешехода (ч), s — пройденный путь (км), и он движется равномерно со скоростью 4 км/ч, то зависимость между этими величинами можно выразить формулой $s = 4t$. Так как каждому значению t соответствует единственное значение s, то можно говорить о том, что с помощью формулы $s = 4t$ задана функция. Ее называют прямой пропорциональностью и определяют следующим образом.

Прямой пропорциональностью называют функцию, которая может быть задана с помощью формулы $y = kx$, где k — не равное нулю действительное число, называемое ***коэффициентом пропорциональности***.

Функция $y = kx$ является математической моделью многих реальных ситуаций, анализируемых уже в начальном курсе математики. Одну из них мы уже рассмотрели. Приведем другой пример: если в одном пакете муки 2 кг, а куплено x таких пакетов, то всю массу купленной муки (обозначим ее через y) можно представить в виде формулы $y = 2x$, т. е. зависимость между количеством пакетов и всей массой купленной муки является прямой пропорциональностью с коэффициентом $k = 2$.

Напомним некоторые *свойства прямой пропорциональности*, которые изучаются в школьном курсе математики:

1) областью определения функции $y = kx$ и областью ее значений является множество действительных чисел;

2) графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат. Поэтому для построения графика прямой пропорциональности достаточно найти лишь одну точку, принадлежащую ему и не совпадающую с началом координат, а затем через эту точку и начало координат провести прямую.

Например, чтобы построить график функции $y = 2x$, достаточно иметь точку с координатами (1, 2), а затем через нее и начало координат провести прямую (рис. 3.23);

3) при $k > 0$ функция $y = kx$ возрастает на всей области определения; при $k < 0$ — убывает на всей области определения;

4) если функция f — прямая пропорциональность и (x_1, y_1), (x_2, y_2) — пары соответственных значений переменных x и y, причем $x_2 \neq 0$, то

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

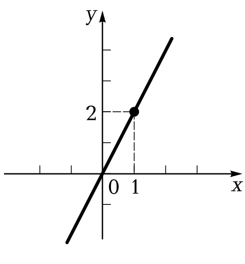


Рис. 3.23

Если значениями переменных x и y служат положительные действительные числа, то это свойство прямой пропорциональности можно сформулировать так: *с увеличением* (*уменьше-*

нием) значения переменной x в несколько раз соответствующее значение переменной y увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Это свойство присуще только прямой пропорциональности, и им можно пользоваться при решении текстовых задач, в которых рассматриваются прямо пропорциональные величины.

Задача 1. За 8 ч токарь изготовил 16 деталей. Сколько часов потребуется токарю на изготовление 48 деталей, если он будет работать с той же производительностью?

Решение. В задаче рассматриваются величины — время работы токаря, количество сделанных им деталей и производительность (т. е. количество деталей, изготовляемых токарем за 1 ч), причем последняя величина постоянна, а две другие принимают различные значения. Кроме того, количество изготовленных деталей и время работы — величины прямо пропорциональные, так как их отношение равно некоторому числу, не равному нулю, а именно — числу деталей, изготовляемых токарем за 1 ч. Решить задачу можно двумя арифметическими способами:

I способ:	*II способ*:
1) $16 : 8 = 2$ (дет.);	1) $48 : 16 = 3$ (раза);
2) $48 : 2 = 24$ (ч).	2) $8 \cdot 3 = 24$ (ч).

Решая задачу первым способом, мы сначала нашли коэффициент пропорциональности k, он равен 2, а затем, зная, что $y = 2x$, нашли значение x при условии, что $y = 48$.

При решении задачи вторым способом было использовано свойство прямой пропорциональности: во сколько раз увеличивается количество деталей, сделанных токарем, во столько же раз увеличивается и количество времени на их изготовление.

Обратная пропорциональность. Если t — время движения пешехода (ч), v — его скорость (км/ч) и он прошел 20 км, то зависимость между этими величинами можно выразить формулой $vt = 20$ или $v = \frac{20}{t}$. Так как каждому значению t ($t \neq 0$) соответствует единственное значение скорости v, то можно говорить о том, что с помощью формулы $v = \frac{20}{t}$ задана функция. Ее называют обратной пропорциональностью и определяют следующим образом.

Обратной пропорциональностью называют функцию, которая может быть задана с помощью формулы $y = \frac{k}{x}$, где k — не равное нулю действительное число, называемое ***коэффициентом пропорциональности***.

Функция $y = \frac{k}{x}$ является математической моделью многих реальных ситуаций, рассматриваемых уже в начальном курсе математики. Одна из них описана перед определением обратной пропорциональности. Другой пример: если купили 12 кг муки и разложили ее в x банок по y кг в каждую, то зависимость между данными величинами можно представить в виде $xy = 12$, т. е. она является обратной пропорциональностью с коэффициентом $k = 12$.

Напомним некоторые *свойства обратной пропорциональности*, известные из школьного курса математики:

1) областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ и областью ее значений x является множество действительных чисел, отличных от нуля;

2) графиком обратной пропорциональности является гипербола;

3) при $k > 0$ ветви гиперболы расположены в I и III четвертях и функция $y = \frac{k}{x}$ является убывающей на всей области определения x (рис. 3.24). При $k < 0$ ветви гиперболы расположены во II и IV четвертях и функция $y = \frac{k}{x}$ является возрастающей на всей области определения x (рис. 3.25);

4) если функция f — обратная пропорциональность и (x_1, y_1), (x_2, y_2) — пары соответственных значений переменных x и y, то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

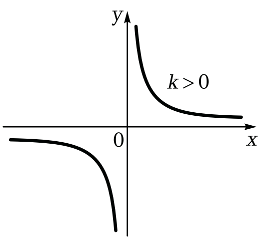


Рис. 3.24

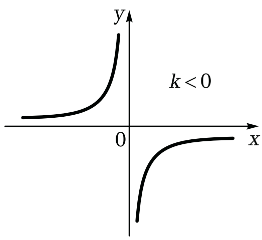


Рис. 3.25

Если значениями переменных x и y служат положительные действительные числа, то это свойство обратной пропорциональности можно сформулировать так: *с увеличением* (*уменьшением*) *значения переменной x в несколько раз соответствующее значение переменной y уменьшается* (*увеличивается*) *во столько же раз.*

Это свойство присуще только обратной пропорциональности, и им можно пользоваться при решении текстовых задач, в которых рассматриваются обратно пропорциональные величины.

Задача 2. Велосипедист, двигаясь со скоростью 10 км/ч, проехал расстояние от A до B за 6 ч. Сколько времени потратит велосипедист на обратный путь, если будет ехать со скоростью 20 км/ч?

Решение. В задаче рассматриваются величины: скорость движения велосипедиста, время движения и расстояние от A до B, причем последняя величина постоянна, а две другие принимают различные значения. Кроме того, скорость и время движения — величины обратно пропорциональные, так как их произведение равно некоторому числу, а именно пройденному расстоянию. Решить задачу можно двумя способами:

I способ:	*II способ*:
1) $10 \cdot 6 = 60$ (км);	1) $20 : 10 = 2$ (раза);
2) $60 : 20 = 3$ (ч).	2) $6 : 2 = 3$ (ч).

Решая задачу первым способом, мы сначала нашли коэффициент пропорциональности k, он равен 60, а затем, зная, что $y = \dfrac{60}{x}$, определили значение y при условии, что $x = 20$.

При решении задачи вторым способом было использовано свойство обратной пропорциональности: во сколько раз увеличивается скорость движения, во столько же раз уменьшается время на прохождение одного и того же расстояния.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Известно, что функция f является прямой пропорциональностью, задана на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и при x, равном 3, значение функции равно 12.
   а) Задайте функцию f с помощью формулы и таблицы; постройте ее график.
   б) Какие свойства функции f можно проиллюстрировать с помощью таблицы и графика?

в) Какие из названных свойств вы будете использовать, решая задачу: «В 3 пакета разложили поровну 12 кг муки. Сколько килограммов муки можно разложить в 6 таких пакетов?».

2. Известно, что функция f является обратной пропорциональностью, задана на множестве $X = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ и при x, равном 5, значение функции f равно 6.
   а) Задайте функцию f с помощью формулы и таблицы; постройте ее график.
   б) Какие свойства функции f можно проиллюстрировать с помощью таблицы и графика?
   в) Какие из названных свойств вы будете использовать, решая задачу: «Муку разложили в 10 пакетов по 3 кг в каждый. Сколько получится пакетов, если в каждый положить по 6 кг муки?».
3. Задайте с помощью формулы соответствие, которое рассматривается в задании.
   а) «Запишите несколько примеров на деление с результатом 10»;
   б) «Составьте все возможные примеры на сложение однозначных чисел с ответом 10».
   Установите, являются ли эти соответствия функциями.
4. Учащимся дано задание заполнить таблицу:

b	1	2	3	4	6	8	12	24
$24 : b$								

   Задает ли эта таблица функцию; какую? Какое свойство этой функции можно проиллюстрировать с помощью данной таблицы?
5. Обоснуйте, используя определения прямой или обратной пропорциональности и их свойства, решение различными арифметическими способами следующих задач:
   а) «С участка собрали 6 мешков картофеля по 40 кг в каждом. Этот картофель разложили в ящики по 20 кг в каждый. Сколько ящиков потребовалось?»;
   б) «Из куска ткани длиной 24 м сшили 8 одинаковых костюмов. Сколько потребуется ткани на 32 таких же костюма?»;
   в) «Два опытных участка имеют одинаковую площадь. Ширина первого участка 30 м, ширина второго — 40 м. Найдите длину первого участка, если известно, что длина второго участка равна 75 м»;
   г) «Площадь участка равна 6 м^2, а длина — 3 м. Во сколько раз увеличится площадь этого участка, если его ширину увеличить в 2 раза?».

Глава 4
БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ

В математике изучают не только связи между двумя множествами, т. е. соответствия, но и связи между элементами одного множества. Их называют *отношениями*.

Отношения многообразны. Между понятиями — это отношения рода и вида, части и целого; между предложениями — отношения следования и равносильности; между числами — «больше», «меньше», «равно», «больше на ...», «меньше на ...» и др.

Если рассматривают отношения между двумя элементами, то их называют ***бинарными***; отношения между тремя элементами — ***тернарными***; отношения между n элементами — ***n*-арными**. Названные выше примеры отношений являются бинарными. Примером тернарного отношения может служить отношение между точками прямой — «точка M лежит между точками N и K».

Изучение отношений между объектами важно для познания как самих объектов, так и реального мира в целом. В данном курсе будем рассматривать в основном бинарные отношения, но чтобы увидеть общность методических подходов к изучению в начальном курсе математики конкретных отношений, понять важнейшие математические идеи, связанные с отношениями, учителю необходимо знать, какова математическая сущность любого отношения, какими свойствами они могут обладать, какие основные виды отношений изучают в математике.

4.1. ПОНЯТИЕ БИНАРНОГО ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ

Чтобы определить общее понятие бинарного отношения на множестве, поступим так же, как и в случае с соответствиями, т. е. рассмотрим сначала конкретный пример. Пусть на множестве $X = \{2, 4, 6, 8\}$ задано отношение «меньше». Это означает, что для любых двух чисел из множества X можно сказать, какое из них меньше: $2 < 4$, $2 < 6$, $2 < 8$, $4 < 6$, $4 < 8$, $6 < 8$. Полученные неравенства можно записать иначе, в виде упорядоченных пар: (2, 4), (2, 6), (2, 8), (4, 6), (4, 8), (6, 8). Но все эти пары есть элементы декартова произведения $X \times X$, поэтому об отношении «меньше», заданном на множестве X, можно сказать, что оно является подмножеством множества $X \times X$.

Бинарным отношением на множестве X называют всякое подмножество декартова произведения $X \times X$.

Так как в дальнейшем мы будем рассматривать только бинарные отношения, слово «бинарные», как правило, будем опускать.

Условимся отношения обозначать буквами R, S, T, P и др.

Если R — отношение на множестве X, то, согласно определению, $R \subset X \times X$. С другой стороны, если задано некоторое подмножество множества $X \times X$, то оно определяет на множестве X некоторое отношение R.

Утверждение о том, что элементы x и y находятся в отношении R, можно записывать так: $(x, y) \in R$ или xRy. Последняя запись читается: «Элемент x находится в отношении R с элементом y».

Отношения задают так же, как соответствия. Отношение можно задать, перечислив пары элементов множества X, находящихся в этом отношении. Формы представления таких пар могут быть различными — они аналогичны формам задания соответствий. Отличия касаются задания отношений с помощью графа.

Построим, например, граф отношения «меньше», заданного на множестве $X = \{2, 4, 6, 8\}$. Для этого элементы множества X изобразим точками (их называют вершинами графа), а отношение «меньше» между ними — стрелками (рис. 4.1).

На том же множестве X можно рассмотреть другое отношение — «кратно». Граф этого отношения будет в каждой вершине иметь петлю (стрелку, начало и конец которой совпадают), так как каждое число кратно самому себе (рис. 4.2).

Отношение можно задать с помощью предложения с двумя переменными. Так, например, заданы рассмотренные отношения «меньше» и «кратно», причем использована краткая форма предложений «число x меньше числа y» и «число x кратно числу y». Некоторые такие предложения можно записывать с помощью символов. Напри-

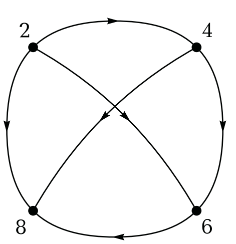


Рис. 4.1

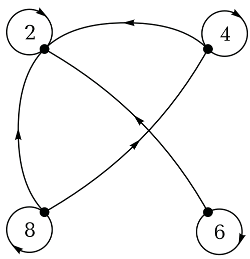


Рис. 4.2

мер, отношения «меньше» и «кратно» можно задать в таком виде: «$x < y$», «$x \vdots y$»; отношение «x больше y на 3» — в виде равенства $x = y + 3$ (или $x - y = 3$).

Для отношения R, заданного на множестве X, всегда можно задать отношение R^{-1}, ему обратное, — оно определяется так же, как соответствие, обратное данному. Например, если R — отношение «x меньше y», то обратным ему будет отношение «y больше x».

Понятием отношения, обратного данному, часто пользуются при начальном обучении математике. Например, чтобы предупредить ошибку в выборе действия, с помощью которого решается задача: «У Пети 7 карандашей, что *на 2 меньше*, чем у Бори. Сколько карандашей у Бори?» — ее переформулируют: «У Пети 7 карандашей, а у Бори *на 2 больше*. Сколько карандашей у Бори?». Видим, что переформулировка свелась к замене отношения «меньше на 2» обратным ему отношением «больше на 2».

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Приведите примеры отношений, существующих между:
   а) натуральными числами;
   б) прямыми на плоскости;
   в) треугольниками;
   г) множествами.
2. На множестве $X = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ задано отношение R. Перечислите пары чисел, связанных этим отношением и постройте его граф, если:
   а) R — «x больше y в 3 раза»;
   б) R — «x больше y на 3».
3. Запишите в виде равенства предложение:
   а) число x меньше y на 2;
   б) число x меньше y в 2 раза.
4. На множестве $X = \{2, 4, 6, 8\}$ рассматриваются отношения «$x = y$», «$x \vdots y$» и «x больше y на 2». Какое из следующих подмножеств множества $X \times X$ задает данные отношения:
   а) $\{(4, 2), (6, 2), (8, 2), (6, 4), (8, 4), (8, 6), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8)\}$;
   б) $\{(4, 2), (6, 4), (8, 6)\}$;
   в) $\{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8)\}$.
5. На множестве отрезков (рис. 4.3) задано отношение P: «Отрезок x длиннее отрезка y». Постройте граф этого отношения и задайте различными способами отношение, обратное данному.

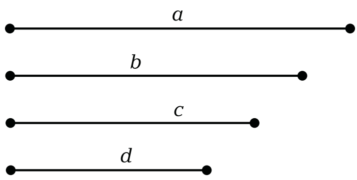


Рис. 4.3

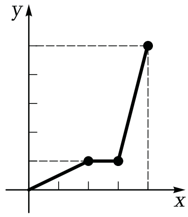


Рис. 4.4

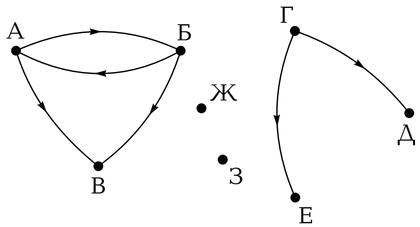


Рис. 4.5

6. Отношение S на множестве действительных чисел задано с помощью графика (рис. 4.4). Постройте график отношения, обратного данному.
7. Семья Волковых состоит из отца Михаила Петровича, матери Веры Ивановны и детей: Толи, Кати, Андрея и Оли. Между членами семьи существуют различные отношения родства: «быть матерью»; «быть дочерью»; «быть братом» и др. Постройте графы указанных отношений и назовите другие, которые существуют между членами семьи Волковых. Есть ли среди них взаимно-обратные?
8. На рис. 4.5 дан граф отношения «быть братом» на множестве детей, живущих в одном доме (дети обозначены точками А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З). Кто из них является девочкой, а кто мальчиком?

4.2. СВОЙСТВА ОТНОШЕНИЙ

Мы установили, что бинарное отношение на множестве X представляет собой множество упорядоченных пар элементов, принадлежащих декартову произведению $X \times X$. Это математическая сущность всякого отношения. Но, как и любые другие понятия, отношения обладают свойствами. Их удалось выделить, изучая различные конкретные отношения. Свойств достаточно много, в данном курсе остановимся лишь на некоторых из них.

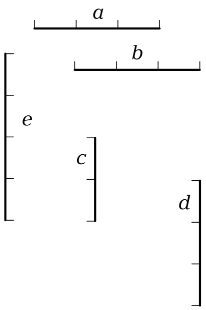


Рис. 4.6

Рассмотрим на множестве отрезков, представленных на рис. 4.6, отношения перпендикулярности, равенства и «длиннее». Построим графы этих отношений (рис. 4.7) и будем их сравнивать. Видим, что граф отношения равенства отличается от двух других наличием петель в каждой его вершине. Эти петли — результат того, что отношение равенства отрезков обладает свойством: любой отрезок равен самому себе. Говорят, что отношение равенства обладает свойством рефлексивности, или просто, что оно рефлексивно.

Отношение R на множестве X называют ***рефлексивным***, если о каждом элементе множества X можно сказать, что он находится в отношении R с самим собой.

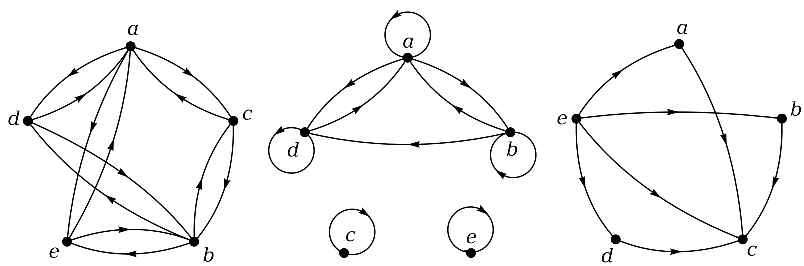
Используя символы, это определение можно записать в таком виде:

$$R \text{ рефлексивно на } X \underset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} xRx \text{ для любого } x \in X$$

Если отношение R рефлексивно на множестве X, то в каждой вершине графа данного отношения имеется петля. Справедливо и обратное утверждение: граф, каждая вершина которого имеет петлю, задает отношение, обладающее свойством рефлексивности.

Примеры рефлексивных отношений:

1) отношение «кратно» на множестве натуральных чисел (каждое натуральное число кратно самому себе);



Граф отношения перпендикулярности — Граф отношения равенства — Граф отношения «длиннее»

Рис. 4.7

2) отношение равенства треугольников (каждый треугольник равен самому себе).

Существуют отношения, которые свойством рефлексивности на обладают. Таким, например, является отношение перпендикулярности на множестве отрезков: нет ни одного отрезка, о котором можно сказать, что он перпендикулярен самому себе. Поэтому на графе отношения перпендикулярности (см. рис. 4.7) нет ни одной петли. Не обладает свойством рефлексивности и отношение «длиннее» для отрезков.

Обратим теперь внимание на графы отношений перпендикулярности и равенства отрезков. Они «похожи» тем, что если есть одна стрелка, соединяющая пару элементов, то обязательно есть и другая, соединяющая те же элементы, но идущая в противоположном направлении. Эта особенность графа отражает те свойства, которыми обладают отношения перпендикулярности и равенства отрезков:

- если один отрезок перпендикулярен другому отрезку, то этот «другой» перпендикулярен первому;
- если один отрезок равен другому отрезку, то этот «другой» равен первому.

Про отношения перпендикулярности и равенства отрезков говорят, что они обладают свойством симметричности, или просто симметричны.

> Отношение R на множестве X называют ***симметричным***, если выполняется условие: из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y, следует, что и элемент y находится в отношении R с элементом x.

Используя символы, это определение можно записать в таком виде:

$$R \text{ симметрично на } X \underset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} (xRy \Rightarrow yRx)$$

Граф симметричного отношения обладает особенностью: вместе с каждой стрелкой, идущей от x к y, граф содержит и стрелку, идущую от y к x. Справедливо и обратное утверждение. Граф, содержащий вместе с каждой стрелкой, идущей от x к y, и стрелку, идущую от y к x, является графом симметричного отношения.

В дополнение к рассмотренным двум примерам симметричных отношений присоединим еще такие:

3) отношение параллельности на множестве прямых (если прямая x параллельна прямой y, то и прямая y параллельна прямой x);

4) отношение равенства треугольников (если треугольник F равен треугольнику P, то треугольник P равен треугольнику F).

Существуют отношения, которые свойством симметричности не обладают. Таким, например, является отношение «длиннее» на множестве отрезков. Действительно, если отрезок x длиннее отрезка y, то отрезок y не может быть длиннее отрезка x. Про отношение «длиннее» говорят, что оно обладает свойством антисимметричности, или просто антисимметрично.

> Отношение R на множестве X называют ***антисимметричным***, если для различных элементов x и y из множества X выполнено условие: из того, что x находится в отношении R с элементом y, следует, что элемент y в отношении R с элементом x не находится.

Используя символы, это определение можно записать в таком виде:

$$R \text{ антисимметрично на } X \underset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} (xRy \text{ и } x \neq y \Rightarrow \overline{yRx})$$

Граф антисимметричного отношения обладает особенностью: если две вершины графа соединены стрелкой, то эта стрелка только одна. Справедливо и обратное утверждение: граф, вершины которого соединены только одной стрелкой, есть граф антисимметричного отношения.

Кроме отношения «длиннее» на множестве отрезков свойством антисимметричности, например, обладают:

- отношение «больше» для чисел (если x больше y, то y не может быть больше x);
- отношение «больше на 2» для чисел (если x больше y на 2, то y не может быть больше на 2 числа x).

Существуют отношения, не обладающие ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности. Рассмотрим, например, отношение «быть сестрой» на множестве детей одной семьи. Пусть в семье трое детей: Катя, Маша и Толя. Тогда граф отношения «быть сестрой» будет таким, как на рис. 4.8. Он показывает, что данное отношение не обладает ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности.

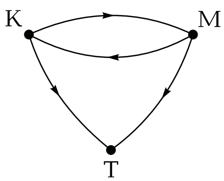


Рис. 4.8

Обратим внимание еще раз на одну особенность графа отношения «длиннее» (см. рис. 4.7). На нем можно заметить: если стрелки проведены от e к a и от a к c, то имеется стрелка от e

к c; если стрелки проведены от e к b и от b к c, то имеется стрелка и от e к c, и т. д. Эта особенность графа отражает важное свойство отношения «длиннее»: если первый отрезок длиннее второго, а второй — длиннее третьего, то первый — длиннее третьего. Говорят, что это отношение обладает свойством транзитивности, или просто транзитивно.

> Отношение R на множестве X называют ***транзитивным***, если выполняется условие: из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y и элемент y находится в отношении R с элементом z, следует, что элемент x находится в отношении R с элементом z.

Используя символы, это определение можно записать в таком виде:

$$R \text{ транзитивно на } X \underset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} (xRy \wedge yRz \Rightarrow \overline{xRz})$$

Граф транзитивного отношения с каждой парой стрелок, идущих от x к y и y к z, содержит стрелку, идущую от x к z. Справедливо и обратное утверждение.

Кроме отношения «длиннее» на множестве отрезков свойством транзитивности обладает отношение равенства: если отрезок x равен отрезку y и отрезок y равен отрезку z, то отрезок x равен отрезку z. Это свойство отражено и на графе отношения равенства (см. рис. 4.7).

Существуют отношения, которые свойством транзитивности не обладают. Таким отношением является, например, отношение перпендикулярности: если отрезок a перпендикулярен отрезку d, а отрезок d перпендикулярен отрезку b, то отрезки a и b не перпендикулярны!

Выделенные свойства позволяют анализировать различные отношения с общих позиций — наличия (или отсутствия) у них тех или иных свойств.

Итак, если суммировать все сказанное об отношении равенства, заданном на множестве отрезков (см. рис. 4.7), то получается, что оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Отношение «длиннее» на том же множестве отрезков антисимметрично и транзитивно, а отношение перпендикулярности — симметрично, но оно не обладает свойствами рефлексивности и транзитивности.

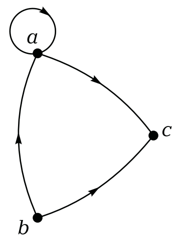


Рис. 4.9

Задача 1. Сформулировать свойства отношения R, заданного с помощью графа (рис. 4.9).

Решение. Отношение R — антисимметрично, так как вершины графа соединяются только одной стрелкой.

Отношение R — транзитивно, так как помимо пары стрелок, идущих от b к a и от a к c, на графе есть стрелка от b к c.

Отношение R свойством рефлексивности не обладает, так как на графе есть вершины, в которых петли нет.

Задача 2. Сформулировать свойства отношения «больше в 2 раза», заданного на множестве натуральных чисел.

Решение. «Больше в 2 раза» — это краткая форма задания отношения «число x больше числа y в 2 раза». Отношение антисимметрично, так как выполняется условие: из того, что число x больше числа y в 2 раза, следует, что число y не больше числа x в 2 раза.

Данное отношение не обладает свойством рефлексивности, потому что ни про одно число нельзя сказать, что оно больше самого себя в 2 раза.

Заданное отношение не транзитивно, так как из того, что число x больше числа y в 2 раза, а число y больше числа z в 2 раза, следует, что число x не может быть больше числа z в 2 раза.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Докажите, что отношение R, заданное с помощью графа (рис. 4.10), рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.
2. Докажите, что отношение T, заданное с помощью графа (рис. 4.11), симметрично и транзитивно.
3. Сформулируйте условия, при которых отношение свойством рефлексивности не обладает, и докажите, что отношение T (см. задание 2) не рефлексивно.
4. Сформулируйте условия, при которых отношение не обладает свойством: а) симметричности; б) антисимметричности; в) транзитивности.
5. Докажите, что отношение P, граф которого изображен на рис. 4.12, не обладает ни свойством симметричности,

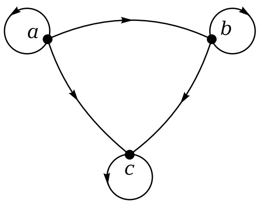


Рис. 4.10

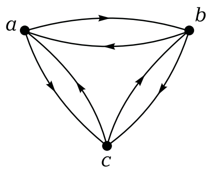


Рис. 4.11

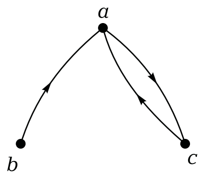


Рис. 4.12

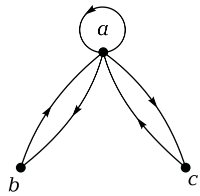


Рис. 4.13

ни свойством антисимметричности, ни свойством транзитивности.

6. Какими свойствами обладает отношение, граф которого изображен на рис. 4.13? Является ли оно рефлексивным; транзитивным?
7. На множестве отрезков задано отношение «короче». Верно ли, что оно антисимметрично и транзитивно; рефлексивно ли оно?
8. Какими свойствами обладают следующие отношения, заданные на множестве натуральных чисел:
   а) «меньше»;
   б) «меньше на 2»;
   в) «меньше в 2 раза»?
9. На множестве $X = \{a, b, c\}$ задано отношение $R = \{(a, b), (a, a), (b, b), (c, c), (b, a), (b, c), (c, b)\}$. Какими свойствами оно обладает?

4.3. ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ПОРЯДКА

Среди различных отношений особую роль в математике играют отношения эквивалентности и порядка.

> Отношение R на множестве X называют ***отношением эквивалентности***, если оно одновременно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Примерами отношений эквивалентности могут служить отношение равенства геометрических фигур, отношение параллельности прямых (при условии, что совпадающие прямые считаются параллельными).

Почему в математике выделили этот вид отношений? Рассмотрим отношение равенства дробей, заданного на множестве $X = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}\right\}$ (рис. 4.14). Видим, что множество разбилось на три

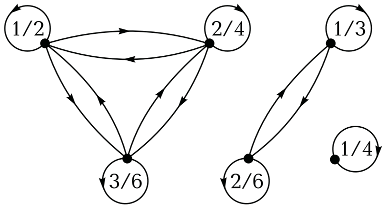


Рис. 4.14

подмножества: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}\right\}$, $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}\right\}$, $\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Эти подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством X, т. е. имеем разбиение множества X на классы. Это не случайно.

Вообще, *если на множестве X задано отношение эквивалентности, то оно порождает разбиение этого множества на попарно непересекающиеся подмножества* (*классы эквивалентности*).

Итак, установлено, что отношению равенства на множестве дробей $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}\right\}$ соответствует разбиение этого множества на классы эквивалентности, каждый из которых состоит из равных между собой дробей.

Верно и обратное утверждение: *если какое-либо отношение, заданное на множестве X, порождает разбиение этого множества на классы, то оно является отношением эквивалентности.*

Рассмотрим, например, на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 3». Оно порождает разбиение множества X на классы: в один попадут все числа, при делении которых на 3 получается в остатке 0 (это числа 3, 6, 9), во второй — числа, при делении которых на 3 в остатке получается 1 (это числа 1, 4, 7, 10), и в третий — все числа, при делении которых на 3 в остатке получается 2 (это числа 2, 5, 8). Действительно, полученные подмножества не пересекаются и их объединение совпадает с множеством X. Следовательно, отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 3», заданное на множестве X, является отношением эквивалентности. Заметим, что утверждение о взаимосвязи отношения эквивалентности и разбиения множества на классы нуждается в доказательстве. Здесь его не приводим. Отметим только, что если отношение эквивалентности имеет название, то соответствующее название дается и классам. Например, если на множестве отрезков задается отношение равенства (а оно является отношением эквивалентности), то множество отрезков разбивается на классы равных отрезков (см. рис. 4.7).

Итак, имея отношение эквивалентности на некотором множестве, можно разбить это множество на классы. Но можно поступить и наоборот: сначала разбить множество на классы, а затем определить отношение эквивалентности, считая, что два элемента эквивалентны тогда и только тогда, когда они принадлежат одному классу рассматриваемого разбиения.

Принцип разбиения множества на классы с помощью некоторого отношения эквивалентности является важным принципом математики. Почему?

Во-первых, эквивалентный — это значит равносильный, взаимозаменяемый. Поэтому элементы одного класса эквивалентности взаимозаменяемы. Так, дроби, оказавшиеся в одном классе эквивалентности $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}\right\}$, неразличимы с точки зрения отношения равенства, и дробь $\frac{3}{6}$ может быть заменена другой, например $\frac{1}{2}$. И эта замена не изменит результата вычислений.

Во-вторых, поскольку в классе эквивалентности оказываются элементы, неразличимые с точки зрения некоторого отношения, то считают, что класс эквивалентности определяется любым своим представителем, т. е. произвольным элементом этого класса. Так, любой класс равных дробей можно задать, указав любую дробь, принадлежащую этому классу. Определение класса эквивалентности по одному представителю позволяет вместо всех элементов множества изучать совокупность отдельных представителей из классов эквивалентности. Например, отношение эквивалентности «иметь одинаковое число вершин», заданное на множестве многоугольников, порождает разбиение этого множества на классы треугольников, четырехугольников, пятиугольников и т. д. Свойства, присущие некоторому классу, рассматриваются на одном его представителе.

В-третьих, разбиение множества на классы с помощью отношения эквивалентности используется для введения новых понятий. Например, понятие числа «три» можно определить как то общее, что имеют различные трехэлементные множества.

Вообще, любое понятие, которым оперирует человек, представляет собой некоторый класс эквивалентности. «Стол», «дом», «книга» — все эти понятия являются обобщенными представлениями о множестве конкретных предметов, имеющих одинаковое назначение.

> Отношение R на множестве X называют ***отношением порядка***, если оно одновременно обладает свойствами антисимметричности и транзитивности.

Примерами отношений порядка могут служить: отношение «меньше» на множестве натуральных чисел; отношение делимости на том же множестве, поскольку они антисимметричны и транзитивны.

Множество X называют ***упорядоченным***, если на нем задано отношение порядка.

Например, множество **N** натуральных чисел можно упорядочить, если задать на нем отношение «меньше» или отношение делимости.

Не следует думать, что все отношения разделяются на отношения эквивалентности и отношения порядка. Существует огромное число отношений, не являющихся ни отношениями эквивалентности, ни отношениями порядка.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. На множестве X прямоугольников (рис. 4.15) задано отношение «иметь равные площади». Постройте граф отношения и докажите, что оно является отношением эквивалентности. Какие классы эквивалентности порождает это отношение на множестве X?
2. Объясните, почему отношение равенства отрезков является отношением эквивалентности, а отношение «короче» не является.
3. Пусть X — множество прямых плоскости. Какое из следующих отношений является отношением эквивалентности на этом множестве: а) «x параллельна y»; б) «x перпендикулярна y»; в) «x пересекает y»?
4. На множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ задано отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 4». Является ли оно отношением эквивалентности?
5. Можно ли разбить множество $X = \{7 - 3; 2^2, 5 \cdot 2; 60 : 6; 1 + 3; 0 : 4; 0 \cdot 10; 4 : (10 - 10)\}$ на классы с помощью отношения «иметь равные значения»?

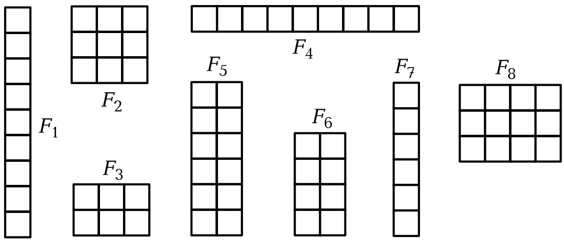


Рис. 4.15

6. Сколько классов эквивалентности порождает на множестве натуральных чисел отношение «оканчиваться одной и той же цифрой»? Назовите по одному представителю каждого класса.
7. Пусть X — множество отрезков. Какие из следующих отношений являются отношениями порядка на этом множестве: а) «x равно y»; б) «x длиннее y»; в) «x длиннее y в 3 раза»?
8. Упорядочивают ли множество натуральных чисел отношения: а) «больше в 2 раза»; б) «больше на 2»; в) «непосредственно следовать за»; г) «x — делитель y»?

Глава 5

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ

В математике изучают не только отношения, но и различные операции.

Например, такие операции, как сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корня — это операции над числами; пересечение, объединение, нахождение разности, декартова произведения — это операции над множествами; конъюнкция, дизъюнкция, импликация, отрицание — это логические операции над высказываниями и высказывательными формами.

Операции над высказываниями и множествами появились в математике в XIX в. Операции над высказываниями ввел английский математик Джордж Буль, а операции над множествами — немецкий математик Георг Кантор.

Оказалось, что операции над высказываниями и множествами обладают некоторыми свойствами, аналогичными свойствам операций над числами.

Необходимо отметить, что в XIX в. в математике возникли разные ветви алгебры: алгебра чисел, алгебра высказываний, алгебра множеств и другие, каждая из которых имела свои правила, но для некоторых видов алгебр эти правила были похожими.

Стремление выяснить, что представляет собой любая операция, способствовало появлению общего понятия алгебраической операции, которое позволяет с единой точки зрения изучать операции с числами, множествами, функциями и другими объектами.

Понятие алгебраической операции вошло в математику в конце XIX в. Оно стало применяться в различных математических дисциплинах. И если первоначально алгебра была учением о решении уравнений, то в XX в. она превратилась в науку об операциях и их свойствах.

Учитель начальных классов первым знакомит детей с различными операциями над числами и их свойствами. Иногда в начальном курсе математики начинается изучение операций над множествами и суждениями. И совершенно естественно, что для того чтобы грамотно обучать детей, видеть перспективу развития алгебраических понятий в дальнейшем обучении школьников математике, учителю необходимо знать, что такое алгебраическая операция, какими свойствами она обладает.

5.1. ПОНЯТИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИИ

Рассмотрим, например, сложение натуральных чисел. При выполнении этой операции по двум числам находят третье — сумму этих чисел. Так, складывая числа 5 и 9, получаем число 14, которое так же, как и данные числа 5 и 9, является натуральным числом.

Выполняя пересечение множеств, по двум данным множествам находят новое, состоящее из общих элементов данных множеств.

Если рассматривать вычитание натуральных чисел, то можно сказать, что при его выполнении по двум заданным натуральным числам находят третье — разность, однако не всегда эта разность является натуральным числом. Но при вычитании целых чисел разность двух целых чисел всегда будет целым числом. И в этом вычитание целых чисел похоже на сложение натуральных чисел и пересечение двух множеств.

Обобщая, можно отметить, что выполняя ту или иную операцию, нужно знать, на каком множестве она рассматривается. Далее, выполняя операцию, по двум элементам x и y из выбранного множества находим третий элемент z того же множества. Он единственный, и при этом ответ, вообще говоря, зависит от порядка этих элементов (как, например, при вычитании чисел). Другими словами, при выполнении операции упорядоченной паре элементов из множества X ставится в соответствие единственный элемент того же множества. Операцию, удовлетворяющую таким условиям, называют бинарной алгебраической. Так как мы будем рассматривать только такие операции, слово «бинарные» в дальнейшем будем опускать.

Алгебраической операцией на множестве X называют соответствие, при котором каждой упорядоченной паре элементов из множества X сопоставляется единственный элемент того же множества.

Из этого определения следует, что бинарная алгебраическая операция на множестве X есть отображение множества $X \times X$ во множество X.

Если на множестве X задана алгебраическая операция, то говорят, что множество X *замкнуто* относительно этой операции. Например, множество натуральных чисел замкнуто относительно сложения и умножения.

Существуют операции, которые не являются алгебраическими. Примером такой операции является вычитание на множестве натуральных чисел: $x - y$ будет натуральным числом лишь при условии, что x больше y, т. е. в этом множестве есть пары чисел, которым нельзя поставить в соответствие натуральное число.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Объясните, почему сложение, умножение и вычитание являются алгебраическими операциями на множестве целых чисел, а деление не является.
2. Назовите операции, которые можно выполнять над множествами. Какие из них являются алгебраическими и почему?

5.2. СВОЙСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

Известно, что сложение и умножение чисел обладают свойствами коммутативности и ассоциативности. Аналогичными свойствами обладают объединение и пересечение множеств, конъюнкция и дизъюнкция высказываний. Определим эти свойства в общем виде.

Алгебраическую операцию «*», заданную на множестве X, называют ***ассоциативной***, если для любых элементов x, y и z из множества X выполняется равенство $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Если операция «*» обладает свойством ассоциативности, то выражения $(x * y) * z$ и $x * (y * z)$ можно записывать без скобок.

Существуют алгебраические операции, не обладающие свойством ассоциативности. Так, не является ассоциативным вычитание целых чисел.

Ассоциативность алгебраической операции «*» позволяет записывать без скобок все выражения, содержащие лишь эту операцию, но переставлять входящие в это выражение элементы, вообще говоря, нельзя. Перестановка элементов возможна лишь в случае, когда операция «*» коммутативна.

Алгебраическую операцию «*» на множестве X называют ***коммутативной***, если для любых двух элементов из множества X выполняется равенство $x * y = y * x$.

Существуют алгебраические операции, не обладающие свойством коммутативности. Так, не является коммутативным вычитание целых чисел.

Часто в множестве при рассмотрении алгебраической операции выделяют особые элементы, называемые в алгебре нейтральным и поглощающим.

Элемент e из множества X называют ***нейтральным*** относительно алгебраической операции «*», если для любого элемента x из множества X выполняются равенства $x * e = e * x = x$.

Элемент p из множества X называют ***поглощающим*** относительно алгебраической операции «*», если для любого элемента x из множества X выполняются равенства $x * p = p * x = p$.

Если нейтральный (поглощающий) элемент относительно алгебраической операции существует, то он единственный. Так, в множестве целых неотрицательных чисел нуль является нейтральным элементом относительно сложения и поглощающим элементом относительно умножения.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Запишите, используя символы, что сложение и умножение натуральных чисел ассоциативно и коммутативно, а вычитание целых чисел этими свойствами не обладает.
2. Какие преобразования выражения $A \cup B \cup C$ можно выполнить, используя свойства ассоциативности и коммутативности объединения множеств?

Глава 6

ВЫРАЖЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ. НЕРАВЕНСТВА

Первое знакомство с такими понятиями, как «выражение», «уравнение», «неравенство», происходит в начальном курсе математики. Вводятся они, как правило, без строгих определений, чаще всего остенсивно, что требует от учителя не только большой аккуратности в употреблении терминов, обозначающих эти понятия, но и знания ряда их свойств.

Изучение данных понятий связано с использованием математического языка, который относится к искусственным языкам, создающимся и развивающимся вместе с той или иной наукой.

Математический язык, как и любой другой, имеет свой алфавит. В данном курсе он будет представлен частично в связи с необходимостью больше внимания уделить взаимосвязи алгебры с арифметикой. В этот алфавит входят:

- цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (с их помощью по специальным правилам записываются числа);
- знаки операций «+», «–», «·», «:»;
- знаки отношений «<», «>», «=»;
- строчные буквы латинского алфавита (их применяют для обозначения чисел);
- скобки (круглые, фигурные и др.), называемые техническими знаками.

Используя этот алфавит, в алгебре образуют слова, называя их выражениями, а из слов получаются предложения — числовые равенства, числовые неравенства, уравнения, неравенства с переменными.

6.1. ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Как известно, записи $3 + 7$, $24 : 8$, $3 \cdot 2 - 4$, $(25 + 3) \cdot 2 - 17$ называют *числовыми выражениями*. Они образуются из чисел, знаков действий и скобок.

Если выполнить все действия, указанные в выражении, то получим число, которое называют *значением числового выражения*. Так, значение числового выражения $3 \cdot 2 - 4$ равно 2.

Существуют числовые выражения, значения которых нельзя найти. Про такие выражения говорят, что они *не имеют смысла*. Например, выражение $8 : (4 - 4)$ смысла не имеет, поскольку его значение найти нельзя: $4 - 4 = 0$, а деление на нуль невозможно. Не имеет смысла и выражение $7 - 9$, если рассматривать его на множестве натуральных чисел, так как на этом множестве значение выражения $7 - 9$ найти нельзя.

Рассмотрим запись $2a + 3$. Она образована из чисел, знаков действий и буквы a. Если вместо a подставлять числа, то будут получаться различные числовые выражения:

- если $a = 7$, то $2 \cdot 7 + 3$;
- если $a = 0$, то $2 \cdot 0 + 3$;
- если $a = -4$, то $2 \cdot (-4) + 3$.

В записи $2a + 3$ такую букву a называют *переменной*, а саму запись $2a + 3$ — *выражением с переменной*.

Переменную в математике, как правило, обозначают любой строчной буквой латинского алфавита. В начальной школе для обозначения переменной кроме букв используются другие знаки, например □. Тогда запись выражения с переменной имеет вид: $2 \cdot \square + 3$.

Каждому выражению с переменной соответствует множество чисел, при подстановке которых получается числовое выражение, имеющее смысл. Это множество называют *областью определения выражения*. Например, область определения выражения $5 : (x - 7)$ состоит из всех действительных чисел, кроме числа 7, так как при $x = 7$ выражение $5 : (7 - 7)$ смысла не имеет.

В математике рассматривают выражения, содержащие одну, две и больше переменных. Например, $2a + 3$ — выражение с одной переменной, а $(3x + 8y) \cdot z$ — выражение с тремя переменными.

Чтобы из выражения с тремя переменными получить числовое выражение, надо вместо каждой переменной подставить числа, принадлежащие области определения выражения.

Итак, мы выяснили, как из алфавита математического языка образуются числовые выражения и выражения с переменными. Если провести аналогию с русским языком, то выражения — это слова математического языка.

Но используя алфавит математического языка, можно образовать и такие, например, записи: $(3 + 2)) - \cdot\ 12$ или $3x - y : +)\ 8$, которые нельзя назвать ни числовым выражением, ни выражением с переменной.

Эти примеры свидетельствуют о том, что описание — из каких знаков алфавита математического языка образуются выражения числовые и с переменными, не является определением этих понятий. Определить понятие числового выражения можно следующим образом.

Если f и g — числовые выражения, то $(f) + (g)$, $(f) - (g)$, $(f) \cdot (g)$, $(f) : (g)$ — ***числовые выражения***. Считают, что каждое число является числовым выражением.

Если точно следовать этому определению, то пришлось бы писать слишком много скобок, например, $(7) + (5)$ или $(6) : (2)$. Для сокращения записи условились опускать скобки, если несколько выражений складываются или вычитаются, причем эти операции выполняются слева направо.

Точно так же не пишут скобки и при умножении или делении несколько чисел, причем эти операции выполняются по порядку слева направо. Например, пишут так: $37 - 12 + 62 - 17 + 13$ или $120 : 15 \cdot 7 : 12$.

Кроме того, условились сначала выполнять действия второй ступени (умножение и деление), а затем действия первой ступени (сложение и вычитание).

Поэтому выражение $(12 \cdot 4 : 3) + (5 \cdot 8 : 2 \cdot 7)$ записывают так: $12 \cdot 4 : 3 + 5 \cdot 8 : 2 \cdot 7$.

Задача. Найти значение выражения $3x(x - 2) + 4(x - 2)$ при $x = 6$.

Решение. I способ. Подставим число 6 вместо переменной в данное выражение: $3 \cdot 6 \cdot (6 - 2) + 4 \cdot (6 - 2)$. Чтобы найти значение полученного числового выражения, выполним все указанные действия: $3 \cdot 6 \cdot (6 - 2) + 4 \cdot (6 - 2) = 18 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 72 + 16 = 88$.

Следовательно, при $x = 6$ значение выражения $3x(x - 2) + 4(x - 2)$ равно 88.

II способ. Прежде чем подставлять число 6 в данное выражение, упростим его: $3x(x - 2) + 4(x - 2) = (x - 2)(3x + 4)$. И затем, подставив в полученное выражение вместо x число 6, выполним действия: $(6 - 2) \cdot (3 \cdot 6 + 4) = 4 \cdot (18 + 4) = 4 \cdot 22 = 88$.

Обратим внимание на следующий факт: как при первом способе решения задачи, так и при втором, одно выражение заменялось другим.

Например, выражение $18 \cdot 4 + 4 \cdot 4$ заменялось выражением $72 + 16$, а выражение $3x(x - 2) + 4(x - 2)$ — выражением $(x - 2)(3x + 4)$, причем эти замены привели к одному и тому же результату. В математике, описывая решение данной задачи, говорят, что выполнялись тождественные преобразования выражений.

Два выражения называют ***тождественно равными***, если при любых значениях переменных из области определения выражений их соответственные значения равны.

Примером тождественно равных выражений могут служить выражения $5(x + 2)$ и $5x + 10$, поскольку при любых действительных значениях x их значения равны.

Если два тождественно равных на некотором множестве выражения соединить знаком равенства, то получим предложение, которое называют ***тождеством*** на этом множестве.

Например $5(x + 2) = 5x + 10$ — тождество на множестве действительных чисел, потому что для всех действительных чисел значения выражений $5(x + 2)$ и $5x + 10$ совпадают. Используя обозначение квантора общности, это тождество можно записать таким образом: $(\forall x \in \mathbf{R})\ [5(x + 2) = 5x + 10]$. Тождествами считают и верные числовые равенства.

> Замену выражения другим, тождественно равным ему на некотором множестве, называют ***тождественным преобразованием данного выражения на этом множестве***.

Так, заменив выражение $5(x + 2)$ на тождественно равное ему выражение $5x + 10$, мы выполнили тождественное преобразование первого выражения. Но как, имея два выражения, узнать, являются ли они тождественно равными? Находить соответствующие значения выражений, подставляя конкретные числа вместо переменных, долго и не всегда возможно. Но тогда каковы те правила, которыми надо руководствоваться, выполняя тождественные преобразования выражений? Этих правил много, среди них — свойства алгебраических операций, определения понятий.

В начальном курсе математики выполняют, как правило, только тождественные преобразования числовых выражений. Теоретической основой таких преобразований являются свойства сложения и умножения, различные правила: прибавления суммы к числу, числа к сумме, вычитания числа из суммы и др. Например, чтобы найти произведение $35 \cdot 4$, можно выполнить преобразования: $35 \cdot 4 = (30 + 5) \cdot 4 = 30 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 120 + 20 = 140$. В основе выполненных преобразований лежат свойство дистрибутивности умножения относительно сложения; принцип записи чисел в десятичной системе счисления $(35 = 30 + 5)$; правила умножения и сложения натуральных чисел.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Среди следующих записей укажите числовые выражения: а) $42 : 5$; б) 27; в) $32 + –) : 14$;

г) $2 \cdot 7 = 7 \cdot 2$; д) $(17 + 13) : 10 - 15$; е) $142 > 71 \cdot 2$.
2. Какие из следующих выражений имеют смысл, если рассматривать их на множестве натуральных чисел:
а) $(135 + 67) \cdot 12$; б) $(135 - 217) : 2$; в) $362 : 4$?
3. Какие из следующих записей являются выражениями с переменными:
а) $8 + 0{,}3b$; б) $21 - (4 + y)$; в) $x + 2y < 7$; г) $32 : y + 3 = 5y$?
4. Установите область определения выражений, если рассматривать их на множестве действительных чисел:
а) $(3 - y) : 64$; б) $64 : (3 - y)$; в) $(5 + x) : (x - 12)$.
5. Вычислите значение выражения:
а) $((36 : 2 - 14) \cdot (42 \cdot 2 - 14) + 20) : 2$;
б) $(72 : 12 - (18 - 15)) : (24 : 3 - 2 \cdot 4)$;

6.2. ЧИСЛОВЫЕ РАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА

Пусть f и g — два числовых выражения. Соединим их знаком равенства. Получим предложение $f = g$, которое называют ***числовым равенством***.

Возьмем, например, числовые выражения $3 + 2$ и $6 - 1$ и соединим их знаком равенства $3 + 2 = 6 - 1$. Оно истинное. Если же соединить знаком равенства числовые выражения $3 + 2$ и $7 - 3$, то получим ложное числовое равенство $3 + 2 = 7 - 3$. Таким образом, *с логической точки зрения* ***числовое равенство*** *— это высказывание, истинное или ложное.*

Числовое равенство истинно, если значения числовых выражений, стоящих в левой и правой частях равенства, совпадают.

Напомним некоторые *свойства истинных числовых равенств*:

1) если к обеим частям истинного числового равенства прибавить одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство;

2) если обе части истинного числового равенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство.

Пусть f и g — два числовых выражения. Соединим их знаком «>» (или «<»). Получим предложение $f > g$ (или $f < g$), которое называют ***числовым неравенством***.

Например, если соединить выражения $6 + 2$ и $13 - 7$ знаком «>», то получим истинное числовое неравенство $6 + 2 > 13 - 7$. Если соединить те же выражения знаком «<», то получим ложное числовое неравенство $6 + 2 < 13 - 7$. Таким образом, *с логической точки зрения* ***числовое неравенство*** *— это высказывание, истинное или ложное.*

Рассмотрим некоторые *свойства истинных числовых неравенств*:

1) если к обеим частям истинного числового неравенства прибавить одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое неравенство;

2) если обе части истинного числового неравенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл и положительное значение, то получим также истинное числовое неравенство;

3) если обе части истинного числового неравенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл и отрицательное значение, а также поменять знак неравенства на противоположный, то получим также истинное числовое неравенство.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Проверьте, истинны ли числовые равенства: $13 \cdot 93 = 31 \cdot 39$, $14 \cdot 82 = 41 \cdot 28$, $23 \cdot 64 = 32 \cdot 46$. Можно ли утверждать, что произведение любых двух натуральных чисел не изменится, если в каждом множителе переставить цифры?
2. Известно, что $a < b$ — истинное неравенство. Поставьте вместо «$*$» знак «>» или «<» так, чтобы получилось истинное неравенство:
   а) $-3{,}7a * -3{,}7b$; б) $0{,}12a * 0{,}12b$;
   в) $-\dfrac{a}{3} * -\dfrac{b}{3}$; г) $-\dfrac{a}{3} * -\dfrac{b}{3}$;
   д) $-2(a+5) * -2(b+5)$; е) $\dfrac{2}{7}(a-1) * \dfrac{2}{7}(b-1)$.
3. Выполните задания, которые предназначаются ученикам начальных классов, и сделайте вывод о том, как трактуются в начальном курсе математики понятия числового равенства и числового неравенства:
   а) «Запишите два верных равенства и два верных неравенства, используя выражения: $9 \cdot 3$, $30 - 6$, $3 \cdot 9$, $30 - 3$»;
   б) «Расставьте скобки так, чтобы равенства были верными: $4 + 2 \cdot 3 = 18$; $31 - 10 - 3 = 24$; $54 - 12 + 8 = 34$»;
   в) «Поставьте вместо «$*$» знаки действий так, чтобы получились верные равенства: $3 * 6 * 2 = 9$; $9 * 3 * 6 = 18$».

6.3. УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Возьмем два выражения с переменной: $4x$ и $5x + 2$. Соединив их знаком равенства, получим предложение $4x = 5x + 2$. Оно содержит переменную и при подстановке значений переменной обращается в высказывание. Например, при $x = -2$ предложение $4x = 5x + 2$ обращается в истинное числовое равенство $4 \cdot (-2) = 5 \cdot (-2) + 2$, а при $x = 1$ — в ложное $4 \cdot 1 = 5 \cdot 1 + 2$. Поэтому предложение $4x = 5x + 2$ есть высказывательная форма. Ее называют уравнением с одной переменной.

> Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — два выражения с переменной x и областью определения X. Тогда высказывательную форму вида $f(x) = g(x)$ называют ***уравнением с одной переменной***.

Значение переменной x из множества X, при котором уравнение обращается в истинное числовое равенство, называется ***корнем уравнения***.

Решить уравнение — это значит найти множество его корней.

Так, корнем уравнения $4x = 5x + 2$, если рассматривать его на множестве **R** действительных чисел, является число -2. Других корней это уравнение не имеет. Значит, множество его корней есть $\{-2\}$.

Пусть на множестве действительных чисел задано уравнение $(x - 1)(x + 2) = 0$. Оно имеет два корня — числа 1 и -2. Следовательно, множество корней данного уравнения таково: $\{-2, -1\}$.

Уравнение $(3x + 1) \cdot 2 = 6x + 2$, заданное на множестве действительных чисел, обращается в истинное числовое равенство при всех действительных значениях переменной x: если раскрыть скобки в левой части, то получим $6x + 2 = 6x + 2$. В этом случае говорят, что его корнем является любое действительное число, а множеством корней — множество всех действительных чисел.

Уравнение $(3x + 1) \cdot 2 = 6x + 1$, заданное на множестве действительных чисел, не обращается в истинное числовое равенство ни при одном действительном значении x: после раскрытия скобок в левой части получаем, что $6x + 2 = 6x + 1$, что невозможно ни при одном значении x. В этом случае говорят, что данное уравнение не имеет корней и что множество его корней пусто.

Чтобы решить какое-либо уравнение, его сначала путем преобразований заменяют другим, более простым; полученное уравнение вновь с помощью преобразований заменяют более простым и т. д. Этот процесс продолжают до тех пор, пока не получат уравнение, корни которого можно найти известным способом. Но чтобы эти корни были корнями заданного уравнения, необходимо, чтобы в процессе преобразований получились уравнения, множества корней которых совпадают. Такие уравнения называют равносильными.

Два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называют ***равносильными***, если множества их корней совпадают.

Например, уравнения $x^2 - 9 = 0$ и $(2x + 6)(x - 3) = 0$ равносильны, так как оба имеют своими корнями числа 3 и –3. Равносильны и уравнения $(3x + 1) \cdot 2 = 6x + 1$ и $x^2 + 1 = 0$, так как оба не имеют корней, т. е. множества их корней совпадают.

Выясним теперь, какие преобразования позволяют получать равносильные уравнения.

1. Пусть уравнение $f(x) = g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ — выражение, определенное на том же множестве. Тогда уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ равносильны.

Это утверждение можно сформулировать иначе: *если к обеим частям уравнения с областью определения X прибавить одно и то же выражение с переменной, определенное на том же множестве, то получим новое уравнение, равносильное данному.*

Из этого утверждения вытекают *следствия*, которые используются при решении уравнений:

1) если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному;

2) если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части уравнения в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

2. Пусть уравнение $f(x) = g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ — выражение, которое определено на том же множестве и не обращается в нуль ни при каких значениях x из множества X. Тогда уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ равносильны.

Это утверждение можно сформулировать иначе: *если обе части уравнения с областью определения X умножить на одно и то же выражение, которое определено на том же множестве и не обращается на нем в нуль, то получим новое уравнение, равносильное данному.*

Из этого утверждения вытекает *следствие*: если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное данному.

Решим уравнение $1 - \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$, $x \in \mathbf{R}$, и обоснуем все преобразования, которые будем выполнять в процессе решения.

Преобразования	Обоснование преобразований
1. Приведем выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения, к общему знаменателю: $\frac{6-2x}{6}=\frac{x}{6}$	Выполнили тождественное преобразование выражения в левой части уравнения
2. Отбросим общий знаменатель: $6 - 2x = x$	Умножили на 6 обе части уравнения (следствие из утверждения 2), получили уравнение, равносильное данному
3. Выражение $-2x$ переносим в правую часть уравнения с противоположным знаком: $6 = x + 2x$	Воспользовались следствием 2 из утверждения 1, получили уравнение, равносильное предыдущему и, значит, данному
4. Приводим подобные члены в правой части уравнения: $6 = 3x$	Выполнили тождественное преобразование выражения
5. Разделим обе части уравнения на 3: $x = 2$	Воспользовались следствием 2 из утверждения 2, получили уравнение, равносильное предыдущему, а значит, и данному

Так как все выполненные преобразования каждый раз приводили к уравнению, равносильному предыдущему, можно утверждать, что 2 — корень этого уравнения.

Если же в процессе решения уравнения не выполняются условия утверждений 1 и 2, то может произойти потеря корней или могут появиться посторонние корни. Поэтому важно, осуществляя преобразования уравнения в целях получения более простого, следить за тем, чтобы они приводили к уравнению, равносильному данному.

В начальном курсе математики теоретической основой решения уравнений является взаимосвязь между компонентами и результатами действий. Например, решение уравнения $(x \cdot 9) : 24 = 3$ можно обосновать следующим образом. Так как неизвестное находится в делимом, то, чтобы найти делимое, нужно делитель умножить на частное: $x \cdot 9 = 24 \cdot 3$, или $x \cdot 9 = 72$.

Чтобы найти неизвестный множитель, произведение нужно разделить на известный множитель, т. е. $x = 72 : 9$, или $x = 8$. Следовательно, корнем данного уравнения является число 8.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Установите, какие из следующих записей являются уравнениями с одной переменной:
   а) $(x - 3) \cdot 5 = 12x$; г) $3 + (12 - 7) \cdot 5 = 16$;
   б) $(x - 3) \cdot 5 = 12$; д) $(x - 3) \cdot y = 12x$;
   в) $(x - 3) \cdot 17 + 12$; е) $x^2 - 2x + 5 = 0$.
2. В уравнении $(x + ...)(2x + 5) - (x - 3)(2x + 1) = 20$ одно число стерто и заменено точками. Найдите стертое число, если известно, что корнем этого уравнения является число 2.
3. Сформулируйте условия, при которых:
   а) число 5 является корнем уравнения $f(x) = g(x)$;
   б) число 7 не является корнем уравнения $f(x) = g(x)$.
4. Установите, какие из следующих пар уравнений равносильны на множестве действительных чисел:
   а) $3 + 7x = -4$ и $2(3 + 7x) = -8$;
   б) $3 + 7x = -4$ и $6 + 7x = -1$;
   в) $3 + 7x = -4$ и $x + 2 = 0$.
5. Решите уравнения (все они заданы на множестве действительных чисел) и обоснуйте все преобразования, выполняемые в процессе их упрощения:
   а) $\frac{7x+4}{2} - x = \frac{3x-5}{2}$;
   б) $x - \frac{3x-2}{5} = 3 - \frac{2x-5}{3}$.
6. Учащийся решил уравнение $5x + 15 = 3x + 9$ следующим образом: вынес за скобки в левой части число 5, а в правой — число 3, получил уравнение $5(x + 3) = 3(x + 3)$, а затем разделил обе части на выражение $x + 3$. Получил равенство $5 = 3$ и сделал вывод — данное уравнение корней не имеет. Прав ли учащийся?
7. Решите уравнения, используя взаимосвязь между компонентами и результатами действий:
   а) $(x + 70) \cdot 4 = 328$;
   б) $560 : (x + 9) = 56$;
   в) $(85x + 765) : 170 = 98$;
   г) $(x - 13\,581) : 709 = 306$.

6.4. НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Предложения вида $2x + 7 > 10 - x$, $x^2 + 7x < 2$, $(x + 2)(2x - 3) > 0$ называют неравенствами с одной переменной.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — два выражения с переменной x и областью определения X. Тогда неравенство вида $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$ называют ***неравенством с одной переменной***. Множество X называют ***областью его определения***.

Значение переменной x из множества X, при котором неравенство обращается в истинное числовое неравенство, называют его *решением*. *Решить неравенство — значит, найти множество его решений.*

Так, решением неравенства $2x + 7 > 10 - x$, $x \in \mathbf{R}$, является число $x = 5$, так как $2 \cdot 5 + 7 > 10 - 5$ — истинное числовое неравенство. А множество его решений — это промежуток $(1, \infty)$, который находят, выполняя следующее преобразование неравенства: $2x + 7 > 10 - x \Rightarrow 3x > 3 \Rightarrow x > 1$.

В основе решения неравенств с одной переменной лежит понятие равносильности.

Два неравенства называют ***равносильными***, если их множества решений равны.

Например, неравенства $2x + 7 > 10$ и $2x > 3$ равносильны, так как их множества решений равны и представляют собой промежуток $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Утверждения о равносильности неравенств и следствия из них аналогичны утверждениям о равносильности уравнений.

1. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ — выражение, определенное на том же множестве. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этого утверждения вытекают *следствия*, которые часто используются при решении неравенств:

1) если к обеим частям неравенства $f(x) > g(x)$ прибавить одно и то же число d, то получим неравенство $f(x) + d > g(x) + d$, равносильное исходному;

2) если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

2. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ — выражение, определенное на том же множестве, и для всех x из множества X выражение $h(x)$ принимает положительные значения. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этого утверждения вытекает *следствие*: если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить (разделить) на одно и то же положительное число d ($d \neq 0$), то получим неравенство равносильное данному.

3. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ — выражение, определенное на том же множестве, и для всех x из множества X выражение $h(x)$ принимает отрицательные значения. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этого утверждения вытекает *следствие*: если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число d ($d \neq 0$) и знак неравенства поменять на противоположный, то получим неравенство равносильное данному.

Решим неравенство $5x - 5 < 2x + 16$, $x \in \mathbf{R}$, и обоснуем все преобразования, которые будем выполнять в процессе решения.

Преобразования	Обоснование преобразований
1. Перенесем выражение $2x$ в левую часть, а число -5 в правую, поменяв их знаки на противоположные: $5x - 2x < 16 + 5$	Воспользовались следствием 2 из утверждения 1, получили неравенство, равносильное исходному
2. Приведем подобные члены в левой и правой частях неравенства: $3x < 21$	Выполнили тождественные преобразования выражений в левой и правой частях неравенства — они не нарушили равносильности неравенств: данного и исходного
3. Разделим обе части неравенства на 3: $x < 7$	Воспользовались следствием из утверждения 3, получили неравенство, равносильное исходному

Решением неравенства $x < 7$ является промежуток $(-\infty, 7)$ и, следовательно, множеством решений неравенства $5x - 5 < 2x + 16$ является промежуток $(-\infty, 7)$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Установите, какие из следующих записей являются неравенствами с одной переменной:
   а) $-12 - 7x < 3x + 8$; б) $15(x + 2) > 4$;
   в) $17 \cdot (13 + 8) < 14 - 9$; г) $12x + 3(x - 2)$;
   д) $17 - 12 \cdot 8$; е) $2x^2 + 3x - 4 > 0$.

2. Является ли число 3 решением неравенства $6(2x+7)<15(x+$ $+2)$, $x \in \mathbf{R}$? Число 4,25?
3. Равносильны ли на множестве действительных чисел следующие пары неравенств:

   а) $-17x<-51$ и $x>3$; б) $\frac{3x-1}{4}>0$ и $3x-1>0$;

   в) $6-5x>-4$ и $x<2$?
4. Какие из следующих высказываний истинны:

   а) $-7x<-28 \Rightarrow x>4$; б) $x<6 \Rightarrow x<5$; в) $x<6 \Rightarrow x<20$?
5. Решите неравенство $3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2$ и обоснуйте все преобразования, которые будете при этом выполнять.
6. Докажите, что решением неравенства $2(x+1)+5>3-(1-2x)$ является любое действительное число.

Раздел III

ЗАДАЧА И ПРОЦЕСС ЕЕ РЕШЕНИЯ

В начальном курсе математики кроме изучения различных понятий и их свойств решают задачи. По определению Л. М. Фридмана[1], задача — это модель проблемной ситуации, представленная с помощью знаков некоторого естественного или искусственного языка. Можно сказать короче: задача — это знаковая модель проблемной ситуации.

По характеру объектов различают задачи практические (реальные) и математические. Например, задача: «На одной полке 30 книг, а на другой на 7 книг меньше. Сколько книг на двух полках?» — практическая. Задача: «Решить уравнение $2x + 4 = 10$, если x — натуральное число» является математической.

В начальном курсе математики большое внимание уделяют задачам, которые называют ***текстовыми***, или ***сюжетными***, поскольку в них часто описывается некоторый жизненный сюжет.

Но чтобы разобраться с такими задачами и процессом их решения, необходимо вспомнить понятие положительной скалярной величины и ее измерения.

Глава 7

ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ИЗМЕРЕНИЕ

Человеку постоянно приходилось иметь дело с измерением различных величин — длины, площади, объема, времени, массы. Без этого невозможны были торговля, строительство зданий, раздел земельных участков и т. п.

Особенно велико значение измерений в технике, а такие науки, как математика, механика, физика, стали называться точными имен-

[1] *Фридман Л. М.* (1915—2005) — доктор педагогических наук, профессор, автор более 250 работ, среди которых «Психолого-педагогические основы обучения математике в школе», «Как научиться решать задачи» и др.

но потому, что благодаря измерениям они получили возможность устанавливать точные количественные отношения, выражающие объективные законы природы.

В начальном курсе математики учащиеся знакомятся с разными величинами: длиной, площадью, вместимостью, массой предметов, временем, количеством. Изучая эти величины, школьники должны понять, что общего имеют данные величины, в чем их различие, что представляет собой процесс измерения величины. Но для этого сам учитель должен уметь ответить на эти вопросы.

7.1. ПОНЯТИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ СКАЛЯРНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Понятие величины всеобъемлющее, сложное. В данном курсе будем рассматривать величину как свойство объектов (процессов, явлений), которое проявляется при их сравнении по этому свойству, причем каждая величина связана с определенным способом сравнения.

Величины, которые выражают одно и то же свойство объектов, называют ***величинами одного рода***, или ***однородными величинами***. Например, длина стола и длина комнаты — величины однородные.

Однородные величины сравнивают, выполняют с ними действия, измеряют. Уточним эти понятия, используя язык математики.

1. Для величин одного рода имеют место отношения «***равно***», «***меньше***» и «***больше***», и для любых величин A и B справедливо одно и только одно из отношений: $A = B$, $A < B$, $A > B$. Эти отношения на множестве однородных величин транзитивны.

Например, мы говорим, что длина карандаша меньше длины стола, масса арбуза больше массы яблока, а длины противоположных сторон прямоугольника равны.

2. Для любых двух величин A и B однозначно определяется величина $C = A + B$, ее называют ***суммой величин*** A и B. Иначе говоря, величины одного рода можно складывать, в результате сложения получается величина того же рода.

Сложение величин коммутативно и ассоциативно.

Например, если A — масса яблока, а B — масса груши, то $C = A + B$ — это масса яблока и груши.

3. ***Разностью величин*** A и B называют такую величину $C = A - B$, что $A = B + C$.

Разность величин A и B существует тогда и только тогда, когда $A > B$.

Иными словами, величины одного рода можно вычитать, получая в результате величину того же рода. Определяют вычитание величин через сложение.

Например, если A — масса купленных овощей (лука и моркови), а B — масса купленной моркови, то $C = A - B$ это масса купленного лука.

4. Для любой величины A и любого положительного числа x существует единственная величина $B = x \cdot A$, которую называют ***произведением величины A и числа x***.

Иными словами, величину можно умножать на положительное действительное число, в результате получают величину того же рода.

Например, если A — время, отводимое на один урок, то умножив A на число 4, получим величину $B = 4 \cdot A$ — время, за которое пройдут 4 урока.

5. ***Частным величин*** A и B одного рода называют такое положительное действительное число $x = A : B$, что $A = x \cdot B$.

Иными словами, величины одного рода можно делить, получая в результате число. Определяют деление однородных величин через умножение величины на число.

Например, если A — масса двух пакетов муки, а B — масса муки в одном пакете, то $A : B = 2$, поскольку $A = 2 \cdot B$.

6. Величины измеряют: если задана величина A и выбрана единица величины E (того же рода), то измерить величину A — это значит найти такое положительное число x, что $A = x \cdot E$.

Число x называют ***численным значением величины*** A при единице величины E, или ***мерой величины*** A при единице величины E.

Например, если A — масса трех пакетов муки, а E — масса муки в одном пакете, то $A = 3 \cdot E$. Число 3 — численное значение массы A при единице величины E, или, другими словами, число 3 — это мера массы A при единице массы E.

В практической деятельности при измерении величин люди пользуются стандартными единицами величин: так, длины измеряют в метрах, сантиметрах и т. д. Результат измерения записывают в таком виде: 7 кг; 13 см и т. д. Исходя из понятия измерения, данного ранее, эти записи можно рассматривать как произведение числа и единицы величины: 7 кг = 7 · кг; 13 см = 13 · см и т. д.

Используя это представление, можно обосновать процесс перехода от одной единицы величины к другой. Пусть, например, требуется выразить 3 ч в минутах. Так как 3 ч = 3 · ч и 1 ч = 60 мин, то 3 · ч = 3 · 60 · мин = (3 · 60) мин = 180 мин.

Измерение величин позволяет переходить от сравнения величин к сравнению чисел, от действий с величинами — к соответствующим действиям с их численными значениями, и наоборот.

Рассмотрим *примеры*:

а) если A = 5 кг, B = 3 кг, то $A > B$, так как $5 > 3$;

б) если A = 5 кг, B = 3 кг, то $A + B$ = 5 кг + 3 кг = (5 + 3) · кг = = 8 кг;

в) если A = 5 кг, а масса B в 2 раза больше массы A, то $B = 2A$ = = 2 · (5 · кг) = (2 · 5) кг = 10 кг. В данной ситуации возможна и такая запись: $B = A \cdot 2$ = (5 · кг) · 2 = (5 · 2) · кг = 10 кг.

Величину, которая определяется только одним численным значением, называют ***скалярной величиной***. Если же при выбранной единице измерения скалярная величина принимает только положительные численные значения, то ее называют ***положительной скалярной величиной***.

Длина, площадь, объем, масса, время, стоимость, количество — положительные скалярные величины.

Рассмотренные понятия — ***объект*** (предмет, явление, процесс), ***его величина***, ***численное значение величины***, ***единица величины*** — надо уметь вычленять в текстах и задачах. Например, математическое содержание предложения: «Купили 2 килограмма груш» можно описать следующим образом: в предложении рассматривается такой объект, как груша, и его величина — масса; для измерения массы использовали единицу массы — килограмм; в результате измерения получили число 2 — это численное значение массы груш при единице массы килограмм.

Один и тот же объект может обладать несколькими свойствами, которые являются величинами. Например, для человека это рост, масса, возраст. Процесс равномерного прямолинейного движения характеризуется тремя величинами: расстоянием, скоростью и временем.

Если величины выражают разные свойства объекта, то их называют ***величинами разного рода***, или ***разнородными величинами***. Например, длина предмета и его масса — это разнородные величины.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. О каких величинах идет речь в следующих предложениях:

а) груши дороже яблок;
б) книга тяжелее тетради;
в) Таня выше Светы.

2. Какие величины могут характеризовать следующие объекты:
а) карандаш; б) человек; в) озеро?
3. Разбейте на классы тремя способами следующие величины (в каждом случае укажите основание классификации):
A — высота дерева; M — площадь доски;
B — 16 кг; H — 13 с;
C — масса доски; K — 26 м;
D — 25 см; L — длина веревки;
E — возраст дерева; P — толщина доски.
4. Сравните величины:
а) 56 мин и $\frac{7}{10}$ ч; б) $\frac{3}{50}$ м и $\frac{4}{5}$ дм;
в) 1,5 см и $\frac{3}{20}$ дм; г) $\frac{5}{4}$ кг и 1250 г.
5. Назовите объект, его величину, численное значение и единицу величины в каждом из следующих предложений:
а) в коробке 8 кг яблок;
б) глубина оврага 2 м;
в) площадь садового участка 6 соток;
г) в сервизе 6 тарелок;
д) рост девочки 1 м 20 см.

7.2. ИЗ ИСТОРИИ ЕДИНИЦ ВЕЛИЧИН

Человек давно осознал необходимость измерять разные величины, причем измерять как можно точнее. Основой точных измерений являются удобные, четко определенные единицы величин и точно воспроизводимые эталоны (образцы) этих единиц. В свою очередь, точность эталонов отражает уровень развития науки и техники.

В истории развития единиц величин можно выделить несколько периодов.

Самым древним является период, когда единицы длины отождествлялись с названием частей человеческого тела. Так, в качестве единицы длины применяли ладонь (ширина четырех пальцев без большого), локоть (длина локтя), фут (длина ступни), дюйм (длина сустава большого пальца) и др. В XIV—XVI вв. появляются в связи с развитием торговли так называемые объективные единицы величин. В Великобритании, например, дюйм (длина трех приставленных друг к другу ячменных зерен), фут (ширина 64 ячменных зерен, положенных бок о бок).

Следующий период в развитии единиц величин — введение единиц, взаимосвязанных друг с другом. В России, например, такими были единицы длины: миля, верста, сажень и аршин; 3 аршина составляли сажень, 500 саженей — версту, 7 верст — милю.

Однако связи между единицами величин были произвольными, свои единицы длины, площади, массы использовали не только отдельные государства, но и отдельные области внутри одного и того же государства. Особенно это было характерно для Франции, где каждый феодал имел право в пределах своих владений устанавливать свои единицы. Такое разнообразие единиц величин тормозило развитие производства, мешало научному прогрессу и развитию торговых связей.

Новая система единиц была создана во Франции в конце XVIII в., в эпоху Великой французской революции. В качестве основной единицы длины в этой системе принимался метр (от греч. *metrón* — мера) — одна сорокамиллионная часть длины земного меридиана, проходящего через Париж.

Кроме метра, были установлены еще такие единицы: ***ар*** — площадь квадрата, длина стороны которого равна 10 м; ***литр*** — объем и вместимость жидкостей и сыпучих тел, равный объему куба с длиной ребра 0,1 м; ***грамм*** — масса чистой воды, занимающая объем куба с длиной ребра 0,01 м.

Были введены также десятичные кратные и дольные единицы, образуемые с помощью приставок: мириа (10^4), кило (10^3), гекто (10^2), дека (10^1), деци (10^{-1}), санти (10^{-2}), милли (10^{-3}).

Единица массы ***килограмм*** была определена как масса 1 дм^3 воды при температуре 4 °C.

Так как все единицы величин оказались тесно связанными с единицей длины — метром, то новая система величин получила название ***метрической системы мер***.

В соответствии с принятыми определениями были изготовлены платиновые эталоны метра и килограмма: метр представляла линейка с нанесенными на ее концах штрихами, а килограмм — цилиндрическая гиря. Эти эталоны передали на хранение Национальному архиву Франции, в связи с чем они получили названия «архивный метр» и «архивный килограмм».

Создание метрической системы мер было большим научным достижением[1] — впервые в истории появились меры, образующие

---

[1] В создании метрической системы мер принимали участие крупнейшие ученые того времени — Ж. Лагранж, П. Лаплас, Т. Монж, Ж. Борда и др.

стройную систему, основанные на образце, взятом из природы, и тесно связанные с десятичной системой счисления.

Не сразу метрическая система мер получила признание. Даже через 100 лет (в 1875 г.) только 17 государств подписали Метрическую конвенцию «для обеспечения международного единства измерений и усовершенствования метрической системы мер».

В России метрическая система мер начала применяться наравне с русскими национальными мерами начиная с 1899 г., когда был принят специальный закон, проект которого был разработан выдающимся русским ученым Д. И. Менделеевым.

Созданная в XVIII в., метрическая система мер отвечала уровню развития науки и измерительной техники того времени и, конечно, не могла быть стабильной. В целях укрепления сотрудничества по усовершенствованию системы единиц величин в 1921 г. было создано Международное бюро мер и весов. Руководит им Международный комитет мер и весов, а законодательным органом является Генеральная конференция по мерам и весам, проводимая один раз в шесть лет.

Бурное развитие науки и производства в XX в. привело к тому, что к 50-м годам возникло множество различных систем единиц, дополняющих и развивающих метрическую систему мер. Со всей остротой встала проблема создания единой универсальной системы единиц величин. Большую работу по ее созданию провел Международный комитет мер и весов, завершившуюся принятием в 1960 г. XI Генеральной конференцией мер и весов решения о введении Международной системы единиц (СИ)[1].

Международная система единиц — это единая универсальная практическая система единиц для всех отраслей науки, техники, народного хозяйства и преподавания. Так как потребность в такой системе единиц, являющейся единой для всего мира, была велика, то за короткое время она получила широкое международное признание и распространение во всем мире.

В этой системе семь *основных единиц*: ***метр*** — единица длины, ***килограмм*** — единица массы; ***секунда*** — единица времени; ***ампер*** — единица силы тока; ***кельвин*** — единица температуры; ***кандела*** — единица силы света и ***моль*** — единица количества вещества.

В начальном курсе математики изучают такие основные величины, как длина, масса, время, используются основные единицы этих величин и их обозначения: для длины — метр (м); для массы —

[1] Сокращенное наименование Международной системы единиц SI. В русской транскрипции СИ, что означает «система интернациональная», т. е. «международная», читается раздельно: «эс-и», а не слитно: «си».

килограмм (кг); для времени — секунда (с).Происходит знакомство с кратными и дольными единицами: для длины — километр (км), сантиметр (см), миллиметр (мм); для массы — грамм (г).

Величины, которые определяются через длину, массу и время, называют ***производными величинами***. Их единицы должны быть согласованы с основными.

Назовем некоторые величины и их единицы.

1. ***Площадь.*** Единицы площади — квадратный метр (м^2), квадратный километр (км^2), квадратный дециметр (дм^2), квадратный сантиметр (см^2), квадратный миллиметр (мм^2).

2. ***Объем (вместимость).*** Единицы объема — кубический метр (м^3), кубический дециметр (дм^3), кубический сантиметр (см^3), кубический миллиметр (мм^3).

В СИ литр рассматривается как особое наименование кубического дециметра, т. е. 1 л = 1 дм^3.

3. ***Скорость.*** Единицы скорости — метр в секунду (м/с), километр в секунду (км/с), сантиметр в секунду (см/с).

Единицы величин, применяемые в нашей стране, их наименования, обозначения и правила применения устанавливаются Государственным стандартом (ГОСТом). В соответствии с ним используется Международная система единиц, а также определена группа внесистемных единиц, которые разрешается применять наряду с единицами SI, в частности, для массы — тонна (т); для времени — минута (мин), час (ч), сутки (сут), неделя, месяц, год, век; для площади — гектар (га); для температуры — градус Цельсия (°С).

Следует обратить внимание и на правильное употребление терминов, связанных с единицами величин. Эти правила также установлены ГОСТом. Так, вместо термина «единица величины» не допускается применять термин «единица измерения величины», поскольку термин «измерение» определяют через понятие величины и включение слова «измерение» в термин «единица величины» приводит к порочному кругу в определениях. Следовательно, надо говорить и писать: «Метр — единица длины», «Грамм — единица массы», «Час — единица времени».

Согласно SI, все наименования пишут без точки, но согласно ГОСТу наименования денежных единиц (рублей и копеек) пишут с точкой: 15 р., 50 к.

Кроме SI в ряде государств используется британская (или американская) система единиц величин. В ней, в частности, для измерения длины применяются такие единицы, как дюйм (≈2,5 см), фут (≈30 см), ярд (≈90 см) и др.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Длина прямоугольника 35 см, а его ширина 0,3 м. Найдите площадь прямоугольника. (Ответ выразите в квадратных дециметрах).
2. Сколько часов провел в школе учащийся, окончивший третий класс, при условии, что в учебном году 210 учебных дней, а в учебном дне 4 урока по 45 минут?
3. Выразите: 1) в квадратных дециметрах 3,2 $м^2$; 2) в кубических сантиметрах 4,1 $м^3$; 3) в километрах в час 8,6 км/с.
4. Какова скорость вертолета, если за 180 с он пролетел 8 730 м? Сколько километров пролетит вертолет за час?
5. Металлический бак представляет собой прямоугольный параллелепипед, внутренний размер которого $2{,}5 \times 1{,}8 \times 1{,}4$ м. Сколько литров воды войдет в этот бак?
6. Автобус прошел 250 км и израсходовал 95 л бензина. Найдите расход бензина на один километр пути. В каких единицах можно измерить этот расход?
7. Какого роста была Дюймовочка и кто был выше: Дюймовочка или Мальчик-с-пальчик?

Глава 8

ТЕКСТОВАЯ ЗАДАЧА И ПРОЦЕСС ЕЕ РЕШЕНИЯ

Как было отмечено ранее, в обучении младших школьников преобладают задачи, которые называют текстовыми, сюжетными. В данном курсе будем применять термин «текстовые задачи», поскольку он чаще других используется в методике обучения математике младших школьников.

Решению текстовых задач в начальном обучении уделяется огромное внимание. Связано это с тем, что такие задачи являются средством формирования у школьников умений строить математические модели реальных явлений, средством развития у них математических способностей, интереса к математике.

Существуют различные методические подходы к обучению младших школьников решению текстовых задач. Но какую бы методику обучения ни выбрал учитель, ему необходимо знать структуру таких задач, а также арифметические способы их решения, которые преобладают в начальном обучении математике.

8.1. ТЕКСТОВАЯ ЗАДАЧА И ЕЕ СТРУКТУРА

> ***Текстовая задача*** — это задача, в которой на естественном языке описывается некоторый процесс (событие, явление) и требуется вычислить значение некоторых величин, характеризующих этот процесс, или установить отношение между ними.

Так как любая текстовая задача представляет собой описание на естественном языке какого-либо процесса (события, явления) и в ней, как правило, описывается не весь процесс, а лишь его количественные и функциональные характеристики, то текстовую задачу рассматривают как ***словесную модель*** этого процесса.

В структуре любой текстовой задачи выделяют ***объекты задачи*** (процесс, явление), ***условия*** и ***требования***. Условия и требования взаимосвязаны.

Проанализируем текстовые задачи с этих позиций.

Задача 1. Ученикам второго класса надо сделать 28 фонариков для украшения школы. Сколько фонариков еще нужно сделать ученикам, если они уже сделали 15 фонариков?

В задаче описывается процесс изготовления фонариков. Он характеризуется тремя однородными величинами: количеством сделанных фонариков, количеством фонариков, которые надо сделать, и количеством фонариков, которые еще нужно сделать (оно неизвестно).

Условия данной задачи:

– сделано 15 фонариков;
– всего надо сделать 28 фонариков.

Требование в данной задаче:

– найти количество фонариков, которые надо еще сделать, чтобы всего их было 28.

Задача 2. Таня хочет купить книгу и альбом для рисования. Книга стоит 80 рублей, она на 25 рублей дороже альбома. Хватит ли Тане 140 рублей на покупку?

В задаче описывается процесс покупки книги и альбома. Он характеризуется однородными величинами: ценой книги (она равна 80 р.), ценой альбома (она неизвестна, но книга на 25 р. дороже альбома), стоимостью всей покупки (она неизвестна).

Условия задачи:

– цена книги 80 р.;
– книга на 25 р. дороже альбома (или альбом дешевле книги на 25 р.).

Требование задачи:

– узнать, хватит ли Тане 140 р. на покупку книги и альбома.

Видим, для того чтобы понять структуру задачи, надо выявить ее объекты, условия и требования, отбросив все лишнее, не влияющие на ее структуру. Для этого текст задачи необходимо развернуть (сделать это можно письменно или устно), так как он, как правило, дается в сокращенном, свернутом виде. Кроме того, вычленение условий и требований задачи можно производить с разной глубиной — она зависит от того, знакомы ли мы с видом задач, к которому принадлежит заданная, и знаем ли способ решения таких задач.

По отношению между условиями и требованиями различают:

- *определенные задачи* — в них заданных условий столько, сколько необходимо и достаточно для выполнения требований;
- *недоопределенные задачи* — в них условий недостаточно для получения ответа;
- *переопределенные задачи* — в них имеются лишние условия.

В начальной школе недоопределенные задачи считают задачами с недостающими данными, а переопределенные — задачами с избыточными данными.

Например, задача: «Возле дома росло 5 яблонь, 2 вишни и 3 березы. Сколько фруктовых деревьев росло возле дома?» является переопределенной, так как содержит лишнее условие; задача: «Из зала вынесли сначала 12 стульев, потом еще 5. Сколько стульев осталось в зале?» является недоопределенной — в ней условий недостаточно, чтобы ответить на поставленный вопрос.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. В каждой из следующих задач выделите объекты (процесс, явление, ситуацию), условия и требования:
   а) «Сколько марок подарил Петя, если Сереже он подарил 8 марок, а Коле — 5 марок?»;
   б) «В походе участвовали 18 мальчиков и 12 девочек. На сколько больше мальчиков приняло участие в походе?»;
   в) «На платье и юбку израсходовали 6 м ткани, а на два платья и юбку — 10 м материи. Сколько ткани расходовали на одно платье и на одну юбку?».
2. Всякий ли текст является задачей?
3. Является ли задачей следующий текст: «Катя пришла в гости к бабушке. У нее она нашла интересную книгу. Сначала она

прочитала 20 страниц, а потом — еще 12. Сколько километров прошла Катя?».

4. Какая из следующих задач является задачей с избыточными данными:
а) «На горке катались 6 мальчиков, что на 2 человека больше, чем девочек. Сколько детей катались на горке?»;
б) «На первой полке лежало 20 книг, на второй — 30, а на третьей — на 5 книг больше, чем на второй. Сколько книг лежало на третьей полке?».
5. Какая из следующих задач является задачей с недостающими данными:
а) «На столе лежали 5 простых карандашей и 7 цветных карандашей. Сколько карандашей лежало на столе?»;
б) «В саду яблонь на 12 меньше, чем груш. Сколько груш растет в саду?».
6. Какие из следующих задач не имеют решения:
а) «В автобусе ехали 27 человек. Сколько человек осталось в автобусе, после того как вышли 30 человек?»;
б) «В книге 40 страниц. Петя сначала прочитал 26 страниц, а потом еще 15. Сколько страниц осталось прочитать Пете?»;
в) «Девочки прыгали со скакалкой. Таня прыгнула 6 раз, Оля на три раза больше. Пришел старший брат Вова. Он прыгнул столько же раз, сколько обе девочки вместе. Сколько раз прыгнул Вова?».

8.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

Ранее было установлено, что текстовая задача представляет собой словесную модель некоторого явления (события, ситуации, процесса).

Чтобы решить такую задачу, необходимо перевести ее на язык математических действий, т. е. построить ее математическую модель.

Напомним, что *математическая модель* — это описание какого-либо реального процесса на математическом языке.

Математической моделью текстовой задачи является ***выражение*** (либо запись по действиям), если задача решается арифметическим методом, и ***уравнение*** (либо система уравнений), если задача решается алгебраическим методом.

В процессе решения задачи четко выделяются три этапа математического моделирования:

- I этап — перевод условий задачи на математический язык; при этом выделяют необходимые для решения данные и искомые и математическими способами описывают связи между ними;
- II этап — внутримодельное решение (т.е. нахождение значения выражения, выполнение действий, решение уравнения);
- III этап — интерпретация, т.е. перевод полученного решения на тот язык, на котором была сформулирована исходная задача.

Проиллюстрируем изложенное на примере решения алгебраическим методом следующей задачи: «В одном вагоне электропоезда было пассажиров в 2 раза больше, чем в другом. Когда из первого вагона вышли 3 человека, а во второй вагон вошли 7 человек, то в обоих вагонах пассажиров стало поровну. Сколько пассажиров было в каждом вагоне первоначально?».

Этап I: обозначим через x первоначальное число пассажиров во втором вагоне. Тогда число пассажиров в первом вагоне — $2x$. Когда из первого вагона вышли 3 человека, в нем осталось $2x - 3$ пассажира. Во второй вагон вошли 7 человек, значит, в нем стало $x + 7$ пассажиров. Так как в обоих вагонах пассажиров стало поровну, то можно записать, что $2x - 3 = x + 7$. Получили уравнение — это математическая модель данной задачи.

Этап II: решение полученного уравнения вне зависимости от того, что в нем обозначает переменная x: переносим в левую часть члены уравнения, содержащие x, а в правую — не содержащие x, причем у переносимых членов знаки меняем на противоположные: $2x - x = 7 + 3$. Приводим подобные члены и получаем, что $x = 10$.

Этап III: используем полученное решение, чтобы ответить на вопрос задачи: во втором вагоне было первоначально 10 чел., а в первом — 20 чел. ($10 \cdot 2 = 20$).

Наибольшую сложность в процессе решения текстовой задачи представляет перевод текста с естественного языка на математический, т.е. выполнение I этапа математического моделирования. Чтобы облегчить эту процедуру, строят вспомогательные модели — схемы, таблицы и др. Тогда процесс решения задачи можно рассматривать как переход от одной модели к другой: от словесной модели реальной ситуации, представленной в задаче, к вспомогательной (схемы, таблицы, рисунки и т.д.); от нее — к математической, на которой и происходит решение задачи.

Прием моделирования заключается в том, что для исследования какого-либо объекта (в данном случае текстовой задачи) выбирают (или строят) другой объект, в каком-то отношении подобный тому, который исследуют. Построенный новый объект изучают, с его

Рис. 8.1

помощью решают исследовательские задачи, а затем результат переносят на первоначальный объект.

Модели бывают разные, и поскольку в литературе нет единообразия в их названиях, уточним терминологию, которую будем использовать в дальнейшем (рис. 8.1).

По видам средств, используемых для их построения, модели подразделяют на *схематизированные* и *знаковые*.

Схематизированные модели, в свою очередь, делятся на *вещественные* и *графические* в зависимости от того, какое действие они обеспечивают. Вещественные (или предметные) модели текстовых задач обеспечивают физическое действие с предметами. Они могут строиться из каких-либо предметов (пуговиц, спичек, бумажных полосок и т. д.), быть представлены разного рода инсценировками сюжета задач. К этому виду моделей причисляют и мысленное воссоздание реальной ситуации, описанной в задаче, в виде представлений.

Графические модели используются, как правило, для обобщенного, схематического воссоздания ситуации задачи. Это может быть рисунок, условный рисунок, чертеж или схематичный чертеж (или просто схема).

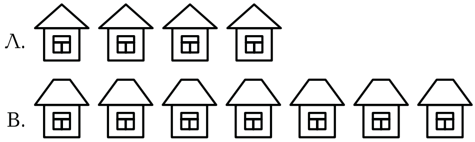


Рис. 8.2

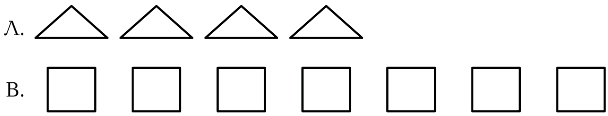


Рис. 8.3

Разъясним суть этих моделей на примере задачи: «Лида нарисовала 4 домика, а Вова на 3 домика больше. Сколько домиков нарисовал Вова?».

Рисунок в качестве графической модели этой задачи имеет вид, представленный на рис. 8.2.

Условный рисунок может быть таким, как на рис. 8.3.

Чертеж как графическая модель выполняется с использованием чертежных инструментов и соблюдением заданных отношений (рис. 8.4).

Схематический чертеж (схема) может выполняться от руки, на нем указываются все данные и искомые (рис. 8.5).

Знаковые модели могут быть выполнены как на естественном, так и математическом языке. К знаковым моделям, выполненным на естественном языке, можно отнести краткую запись задачи

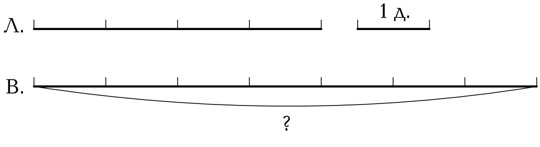


Рис. 8.4

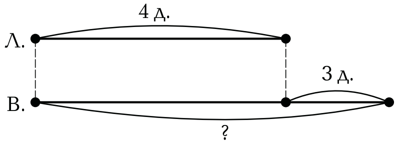


Рис. 8.5

в виде таблицы. Например, краткая запись задачи о домиках Лиды и Вовы может быть такой:

Л. — 4 д. ←

В. — ?, на 3д. больше, чем

Таблица как вид знаковой модели используется главным образом в случае, когда в задаче имеется несколько взаимосвязанных величин, каждая из которых задана одним или несколькими значениями. Такие таблицы используются при решении текстовых задач на движение и другие процессы.

Знаковыми моделями текстовых задач, выполненными на математическом языке, являются: выражение, уравнение, система уравнений, запись решения задачи по действиям. Поскольку на этих моделях происходит решение задачи, их называют *решающими моделями*. Остальные модели, все схематизированные и знаковые, выполненные на естественном языке, — это *вспомогательные модели*, которые обеспечивают переход от текста задачи к математической модели.

Не следует думать, что всякая краткая запись или чертеж, выполненные для данной задачи, являются ее моделями. Так как модель — это своеобразная копия задачи, на ней должны быть представлены *все ее объекты*, *все отношения между ними*, *указаны требования.*

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. О каких моделях идет речь в следующих заданиях для младших школьников:
   а) «Запиши решение задачи в виде числового выражения»;
   б) «Нарисуй схему, она поможет решить задачу»;
   в) «Запиши условие задачи в виде таблицы. Это поможет тебе решить задачу».
2. Выделите в каждой из следующих задач объекты, условия, требования и для каждой постройте вспомогательную модель:
   а) «Мальвине подарили связку шаров двух цветов: голубого и розового. Розовых шаров в 3 раза больше, чем голубых. Сколько всего шаров было в связке, если голубых 4 шара?»;
   б) «У Буратино 15 книг, это на 3 книги больше, чем у Пьеро. Сколько книг у Пьеро?»;
   в) «В одной коробке было 10 кг конфет, во второй — в 2 раза меньше, а в третьей — на 3 кг конфет меньше, чем во второй. Сколько килограммов конфет было в трех коробках?»;

г) «Длина прямоугольника в 3 раза больше его ширины. Найдите площадь прямоугольника, если его ширина на 12 см меньше длины»;

д) «Мама засолила 27 кг огурцов, по 3 кг в каждой банке, и столько же банок помидоров, по 5 кг в каждой. Сколько килограммов помидоров засолила мама?».

3. Запишите математическую модель каждой задачи из задания 2 в виде числового выражения и найдите его значение.
4. Какое числовое выражение является математической моделью задачи: «У Коли было 5 орехов, у Миши — на 3 больше, чем у Коли, а у Саши — в 2 раза меньше, чем у Миши. Сколько всего орехов было у ребят?»:

   а) $(5 + 3) : 2 + 5$; в) $5 + 3 + (5 + 3) : 2$;

   б) $5 + (5 + 3) + (5 + 3) : 2$; г) $5 + (5 + 3) + (3 - 2)$?
5. Докажите, что все приведенные уравнения являются математическими моделями задачи: «Из двух городов, расстояние между которыми 420 км, навстречу друг другу выехали одновременно два автомобиля и встретились через 3 ч. Один автомобиль двигался со скоростью 60 км/ч. Какова скорость другого автомобиля?»:

   а) $x \cdot 3 + 3 \cdot 60 = 420$; б) $(60 + x) \cdot 3 = 420$; в) $420 - 3 \cdot 60 = x \cdot 3$?

8.3. МЕТОДЫ И СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

Основными методами решения текстовых задач являются арифметический и алгебраический.

Решить задачу ***арифметическим методом*** — это значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения арифметических действий над числами.

Одну и ту же задачу можно решить различными ***арифметическими способами***. Они отличаются друг от друга математическими моделями.

Решим, например, различными арифметическими способами такую задачу: «Сшили 3 платья, расходуя на каждое по 4 м ткани. Сколько кофт можно было сшить из этой ткани, если расходовать на одну кофту 2 м?».

I способ. 1) $4 \cdot 3 = 12$ (м) — столько было ткани;

2) $12 : 2 = 6$ (кофт) — столько кофт можно сшить из 12 м ткани.

II способ. 1) $4 : 2 = 2$ (раза) — во столько раз больше идет ткани на платье, чем на кофту;

2) $3 \cdot 2 = 6$ (кофт) — столько кофт можно сшить.

Решить задачу ***алгебраическим методом*** — это значит найти ответ на требование задачи, составив и решив уравнение или систему уравнений.

Если для одной и той же задачи можно составить различные уравнения (системы уравнений), то это означает, что данную задачу можно решить различными ***алгебраическими способами***.

Например, задачу об изготовлении платьев и кофт можно решить двумя алгебраическими способами.

I способ. Обозначим через x (шт.) количество кофт, которые можно сшить из ткани, которая пошла на платья. Так как на каждую кофту можно расходовать 2 м, то ткани требуется $2x$ (м), и это столько, сколько израсходовано на 3 платья по 4 м каждое, т. е. $4 \cdot 3$ (м). Получаем уравнение $2x = 4 \cdot 3$. Решив его, имеем, что $x = 6$, т. е. из 12 м ткани можно сшить 6 кофт, расходуя на каждую 2 м.

II способ. Обозначим через x (шт.) количество кофт, которые можно сшить из ткани, которая пошла на платья. Нетрудно видеть, что зависимость между количеством изделий и тканью, которая на них расходуется, обратно пропорциональная. Поэтому можно записать: $\frac{x}{3} = \frac{4}{2}$. Решив это уравнение, получим $x = 6$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Решите различными арифметическими способами следующие задачи:
   а) «В пекарне ежедневно выпекают одинаковое количество батонов. Сколько батонов выпекут за 6 дней, если за три дня выпекают 1200 батонов?»;
   б) «В вазе 14 больших и 9 маленьких яблок. Из них 13 яблок зеленые, остальные красные. Сколько красных яблок в вазе?».
2. Решите различными алгебраическими способами следующие задачи:
   а) «Из 96 м ткани сшили 18 платьев и костюмы. На каждое платье израсходовали 3 м, а на каждый костюм — 6 м. Сколько сшили костюмов?»;
   б) «У Наташи на 15 открыток больше, чем у Маши. После того как девочкам подарили еще по 6 открыток, у Наташи их стало в 2 раза больше, чем у Маши. Сколько открыток было у каждой девочки первоначально?».

3. Каждую задачу решите арифметическим и алгебраическим методами; арифметическое решение запишите в виде числового выражения и найдите его значение:
а) «У Тани было 110 марок. Она подарила сестре половину всех марок и еще 5 марок. Сколько марок осталось у Тани?»;
б) «Туристы проехали 320 км на теплоходе и на автобусе. Они были в пути 7 ч. С какой скоростью туристы ехали на автобусе, если на теплоходе они плыли 4 ч со скоростью 35 км/ч?».

8.4. ЭТАПЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АРИФМЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ И ПРИЕМЫ ИХ ВЫПОЛНЕНИЯ

Решение любой задачи — процесс сложной умственной деятельности. Чтобы овладеть им, необходимо знать основные этапы решения задачи и некоторые приемы их выполнения.

Деятельность по решению задачи арифметическим методом включает следующие основные этапы: 1) анализ задачи; 2) поиск плана решения задачи; 3) осуществление плана решения задачи; 4) проверка решения задачи.

В реальном процессе решения задачи названные этапы не имеют четких границ и не всегда выполняются одинаково полно. Все зависит от уровня знаний и умений решающего. Например, если после прочтения задачи вы обнаружили, что она известного вам вида и вы знаете, как ее решать, то, конечно, поиск плана не вычленяется в отдельный этап.

Однако полное, логически завершенное решение обязательно содержит все указанные этапы, а знание приемов их выполнения делает процесс решения любой задачи осознанным и целенаправленным, а значит, и более успешным.

1. Анализ задачи. Основное назначение этого этапа — понять в целом ситуацию, описанную в задаче; выделить условия и требования; назвать известные и искомые объекты; определить все отношения (зависимости) между ними.

Производя анализ задачи, вычленяя ее условия, мы должны соотносить этот анализ с требованиями задачи. Другими словами, *анализ задачи всегда направлен на выполнение ее требований.*

Известно несколько приемов, которые можно использовать при анализе задачи.

Разобраться в содержании задачи, вычленить условия и требования можно, если *задать специальные вопросы и ответить на них*:

1. О чем задача, т. е. какой процесс и какие объекты рассматриваются в задаче?

2. Какими величинами он характеризуется?

3. Какие величины в задаче известны, а какие являются искомыми?

4. В какой зависимости находятся величины, рассматриваемые в задаче?

Воспользуемся указанным приемом и ответим на поставленные вопросы для такой задачи: «Из двух поселков, расстояние между которыми 57 км, вышли одновременно навстречу друг другу два лыжника. Какое расстояние будет между лыжниками через 2 ч, если один шел со скоростью 12 км/ч, а другой — 16 км/ч?».

1. Задача о движении двух лыжников навстречу друг другу.

2. Процесс движения характеризуется скоростью, временем и пройденным расстоянием.

3. Известны скорости движения лыжников (12 км/ч и 16 км/ч), время их движения (2 ч), расстояние между поселками (57 км). Искомым является расстояние между лыжниками через 2 ч.

4. Пройденный путь (s), скорость движения (v) и время движения (t) находятся в зависимости $s = v \cdot t$.

Большую помощь в осмыслении задачи оказывает другой прием — *перефразировка текста задачи*. Он заключается в замене данного в задаче описания некоторой ситуации другим, сохраняющим все отношения, связи, качественные характеристики, но более явно их выражающим. Это достигается в результате отбрасывания несущественной, излишней информации, замены описания некоторых понятий соответствующими терминами и, наоборот, замены некоторых терминов описанием содержания соответствующих понятий, т. е. преобразования текста задачи в форму, удобную для поиска плана решения.

Особенно эффективно использование данного приема в сочетании с разбиением текста на смысловые части. Результатом перефразировки должно быть выделение основных ситуаций.

Так, задачу о движении лыжников можно перефразировать, если условия задачи перенести из требования в основной текст.

Перефразированный текст часто бывает полезно записать в виде таблицы или другой вспомогательной модели.

Например, для рассматриваемой задачи можно построить следующую таблицу:

Участник движения	Скорость	Время	Пройденный путь
I лыжник	12 км/ч	2 ч	?
II лыжник	16 км/ч	2 ч	?

Какое расстояние между лыжниками будет через 2 ч, если расстояние между поселками 57 км?

Можно использовать схему, приведенную на рис. 8.6.

И таблица, и схематический чертеж являются *вспомогательными моделями задачи*. Они служат формой фиксации анализа текстовой задачи и основным средством поиска плана ее решения. Вообще, назначение вспомогательной модели текстовой задачи — представить задачу в знаково-символической форме так, чтобы она оказалась для решающего максимально понятой.

После построения вспомогательной модели необходимо проверить:

- все ли объекты задачи показаны на модели;
- все ли отношения между объектами отражены;
- все ли числовые данные приведены;
- есть ли вопрос (требование) и правильно ли он указывает искомое?

2. Поиск и составление плана решения задачи. Назначение этого этапа — установить связь между данными и исходными объектами, наметить последовательность действий.

План решения задачи — это лишь идея решения, его замысел. Может случиться, что найденная идея неверна. Тогда нужно вновь возвращаться к анализу задачи, т. е. к первому этапу решения.

Как искать план решения текстовой задачи? Однозначного ответа на этот вопрос нет. Поиск плана решения задачи является трудным процессом, который точно не определен. Можно только указать некоторые приемы, которые позволят осуществить этот этап. Одним из наиболее известных приемов поиска плана решения

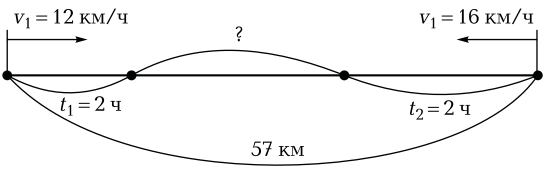


Рис. 8.6

задачи арифметическим способом является *разбор задачи по тексту или ее вспомогательной модели*.

Разбор задачи проводится в виде цепочки рассуждений, которая может начинаться как от данных задачи, так и от ее вопросов.

При разборе задачи от данных к вопросу решающий выделяет в тексте задачи два параметра, данных в условии, и на основе знания связи между ними (такие знания должны быть получены при анализе задачи) определяет, какое неизвестное может быть найдено по этим параметрам и с помощью какого арифметического действия. Затем, считая это неизвестное данным параметром, решающий вновь выделяет два взаимосвязанных параметра данных, определяет неизвестное, которое может быть найдено по ним и с помощью какого действия, и так до тех пор, пока не будет выяснено, какое действие приводит к получению искомого в задаче объекта.

Проведем такой разбор по тексту задачи: «На поезде, который шел со скоростью 56 км/ч, турист проехал 6 ч. После этого ему осталось проехать в 4 раза больше, чем он проехал. Каков весь путь туриста?».

Рассуждения ведем от данных к вопросу: известно, что 6 ч турист проехал на поезде, который шел со скоростью 56 км/ч; по этим данным можно узнать расстояние, которое проехал турист за 6 ч, — для этого достаточно скорость умножить на время. Зная пройденную часть расстояния и то, что оставшееся расстояние в 4 раза больше, можно найти, чему оно равно. Для этого пройденное расстояние нужно умножить на 4 (увеличить в 4 раза). Зная, сколько километров турист проехал и сколько ему осталось, можно найти весь путь, выполнив сложение найденных отрезков пути. Итак, первое действие — определение расстояния, которое турист проехал на поезде; второе действие — определение расстояния, которое ему осталось проехать; третье — определение всего пути.

При разборе задачи от вопроса к данным нужно обратить внимание на вопрос задачи и установить (на основе информации, полученной при анализе задачи), что достаточно узнать для ответа на этот вопрос. Для чего нужно обратиться к условию и выяснить, есть ли для этого необходимые данные. Если таких данных нет или есть только одно данное, то установить, что нужно знать, чтобы найти недостающее данные, и т.д. Потом составляется план решения задачи. Рассуждения при этом проводятся в обратном порядке.

Проведем разбор той же задачи о движении туриста, строя цепочку рассуждений от вопроса к данным: «В задаче требуется узнать весь путь туриста. Мы установили, что путь состоит из двух частей. Значит, для выполнения требования задачи достаточно знать, сколько километров турист проехал и сколько километров ему осталось проехать. И то, и другое неизвестно. Чтобы определить пройденный путь, достаточно знать время и скорость, с которой ехал турист. Это в задаче известно. Умножив скорость на время, узнаем путь, который турист проехал. Оставшийся путь можно найти, увеличив пройденный путь в 4 раза (умножив на 4). Итак, вначале можно узнать пройденный путь, затем оставшийся, после чего сложением найти весь путь».

Поиск плана решения задачи может проводиться по вспомогательной модели, выполненной при анализе задачи. При этом вспомогательная модель заметно облегчает этот процесс. Например, по таблице (или схеме) для задачи о движении лыжников легко определить последовательность действий, ведущих к ответу.

3. Осуществление плана решения задачи. Назначение данного этапа — найти ответ на требование задачи, выполнив все действия в соответствии с планом.

Для текстовых задач, решаемых арифметическим способом, используются следующие приемы:

- запись по действиям (с пояснением, без пояснения, с вопросами);
- запись в виде выражения.

Приведем примеры различных записей плана решения для рассмотренной задачи про туриста.

- Запись решения по действиям с пояснением к каждому выполненному действию:
  1) $56 \cdot 6 = 336$ (км) — турист проехал за 6 ч;
  2) $336 \cdot 4 = 1\,344$ (км) — осталось проехать туристу;
  3) $336 + 1\,344 = 1\,680$ (км) — должен был проехать турист.

  Если пояснения даются в устной форме (или совсем не даются), то запись будет следующей:
  1) $56 \cdot 6 = 336$ (км);
  2) $336 \cdot 4 = 1\,344$ (км);
  3) $336 + 1\,344 = 1\,680$ (км).
- Запись решения по действиям с вопросами:
  1) Сколько километров проехал турист на поезде? $56 \cdot 6 = 336$ (км);
  2) Сколько километров осталось проехать туристу? $336 \cdot 4 = 1\,344$ (км);
  3) Сколько километров турист должен был проехать? $336 + 1\,344 = 1\,680$ (км).
- Запись решения в виде выражения.

Запись решения в этой форме осуществляется поэтапно. Сначала записывают отдельные шаги в соответствии с планом, затем составляют выражение и находят его значение. Так как обычно это значение записывают, поставив после числового выражения знак равенства, то запись становится числовым равенством, в левой части которого — выражение, составленное по условию задачи, а в правой — его значение, оно-то и позволяет сделать вывод о выполнении требований задачи.

Так, для рассматриваемой задачи эта форма записи имеет вид:

1) $56 \cdot 6$ (км) — расстояние, которое проехал турист на поезде за 6 ч;

2) $56 \cdot 6 \cdot 4$ (км) — расстояние, которое осталось проехать туристу;

3) $56 \cdot 6 + 56 \cdot 6 \cdot 4$ (км) — путь, который должен проехать турист: $56 \cdot 6 + 56 \cdot 6 \cdot 4 = 1\,680$ (км).

Пояснения к действиям можно не записывать, а давать их в устной форме.

4. Проверка решения задачи. Назначение данного этапа — установить правильность или ошибочность выполнения решения.

Известно несколько приемов, помогающих установить, верно ли решена задача. Рассмотрим основные.

- *Установление соответствия между результатом и условиями задачи*. Для этого найденный результат вводится в текст задачи и на основе рассуждений устанавливается, не возникает ли при этом противоречия.

Проверим, используя данный прием, правильность решения задачи о движении туриста.

Мы установили, что турист должен был проехать 1 680 км. Пусть теперь этот результат будет одним из данных задачи. Далее, как известно, за 6 ч турист проедет 336 км ($56 \cdot 6 = 336$) и ему останется проехать $1\,680 - 336 = 1\,344$ (км). Согласно условию задачи, это расстояние должно быть в 4 раза больше того, которое турист проехал на поезде за 6 ч. Проверим это, разделив 1 344 на 336. Действительно, $1\,344 : 336 = 4$. Следовательно, если найденный результат подставить в условие задачи, то противоречий с другими данными, а именно отношением «быть больше в 4 раза», не возникает. Значит, задача решена верно.

Заметим, что при использовании данного приема проверяются все отношения, имеющиеся в задаче, и если устанавливается, что противоречия не возникает, то делают вывод о том, что задача решена верно.

- *Решение задачи другим способом.* Пусть при решении задачи каким-то способом получен некоторый результат. Если ее решение другим способом приводит к тому же результату, то можно сделать вывод о том, что задача была решена верно.

Заметим, что если задача решена первоначально арифметическим способом, то правильность ее решения можно проверить, решив задачу алгебраическим методом.

Не следует также думать, что без проверки нет решения текстовой задачи. Правильность решения обеспечивается прежде всего четкими и логичными рассуждениями на всех других этапах работы над задачей.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Используя материал данной главы, заполните следующую таблицу при условии, что решение задачи (РЗ) выполняется арифметическим методом.

Название этапа РЗ	Цель этапа	Приемы выполнения плана
Анализ задачи		
Поиск плана решения		
Осуществление плана решения		
Проверка		

2. Выполните анализ следующих задач, используя различные приемы:
а) «Ученик купил тетрадей в клетку в 3 раза больше, чем тетрадей в линейку, причем их было на 18 больше, чем тетрадей в линейку. Сколько всего тетрадей купил ученик?»;
б) «В трех классах всего 83 учащихся. В первом классе на 4 ученика больше, чем во втором, и на 3 меньше, чем в третьем. Сколько учеников в каждом классе?»;
в) «Мальчики полили 8 яблонь и 4 сливы, принеся 140 ведер воды. Сколько ведер воды вылили под яблони, а сколько — под сливы, если на полив одной яблони уходит воды в 3 раза больше, чем на полив одной сливы?».
3. Выполните поиск плана решения арифметическим методом задачи а) из задания 2 по модели, а поиск плана решения задачи в) по тексту.

4. Запишите решение каждой задачи из задания 2 по действиям с пояснением.
5. Какие из задач задания 2 вы можете решить различными арифметическими способами?
6. Каким образом можно проверить правильность найденного результата для задачи а) из задания 2?
7. Решите арифметическим методом задачи, выделяя этапы решения и приемы их выполнения:
   а) «Ручка в два раза дороже карандаша, а ластик в три раза дешевле карандаша. Стоимость ручки, карандаша и ластика составляет вместе 40 р. Сколько стоит ластик?»;
   б) «Сын на 24 года младше мамы, а папа на 3 года старше мамы. Сколько лет папе, если сыну 10 лет?».

8.5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОНЯТИЯ ЧАСТИ

Имеется класс задач, в которых рассматриваемые величины состоят из частей. В одних задачах части представлены явно, в других — части необходимо выделить, приняв подходящую величину за 1 часть и определив, из скольких таких частей состоят другие величины, о которых идет речь в задаче.

При решении задач с использованием понятия части арифметическим методом часто строят вспомогательные модели.

Задача 1. Для варки варенья из вишни на 2 части ягод берут 3 части сахара. Сколько сахара надо взять на 10 кг ягод?

Решение. В задаче речь идет о массе ягод и массе сахара, необходимых для варки варенья. Известно, что всего ягод 10 кг и что на 2 части ягод надо брать 3 части сахара. Требуется найти массу сахара, чтобы сварить варенье из 10 кг ягод.

Изобразим с помощью отрезков данную массу ягод и необходимую массу сахара (рис. 8.7). Тогда половина первого отрезка представляет собой массу ягод, которая приходится на 1 часть. Сахара, по условию задачи, надо 3 таких части. Запишем решение по действиям с пояснением:

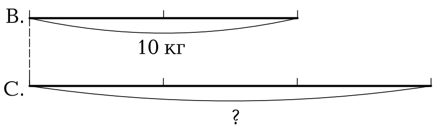


Рис. 8.7

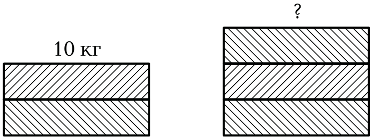


Рис. 8.8

1) 10 : 2 = 5 (кг) — столько килограммов ягод приходится на каждую часть;

2) 5 · 3 = 15 (кг) — столько надо взять сахара.

Вспомогательную модель к данной задаче можно было выполнить с помощью прямоугольников (рис. 8.8).

К задачам «на части» относят и задачи, в которых речь о частях в явном виде не идет, но можно подходящую часть принимать за 1 часть и определять, сколько таких частей приходится на другие величины, рассматриваемые в задаче.

Задача 2. В первой пачке было на 10 тетрадей больше, чем во второй. Всего было 70 тетрадей. Сколько тетрадей в каждой пачке?

Решение. В задаче рассматриваются две пачки тетрадей. Всего тетрадей 70. В одной пачке тетрадей на 10 больше, чем во второй. Требуется узнать, сколько тетрадей в каждой пачке.

Изобразим с помощью отрезка количество тетрадей во второй пачке. Тогда тетради в первой пачке можно представить в виде отрезка, который больше второго (рис. 8.9). По чертежу видно, что если тетради во второй пачке составляют 1 часть всех тетрадей, то тетради в первой составляют также 1 часть и еще 10 тетрадей.

Если эти 10 тетрадей убрать из первой пачки, то в пачках тетрадей станет поровну.

Запишем решение задачи по действиям с пояснением.

1) 70 – 10 = 60 (тетр.) — столько тетрадей приходится на 2 равные части, или столько было бы тетрадей в двух пачках, если бы их было поровну — столько, сколько во второй пачке;

2) 60 : 2 = 30 (тетр.) — столько тетрадей приходится на 1 часть, или столько тетрадей было во второй пачке;

3) 30 + 10 = 40 (тетр.) — столько тетрадей было в первой пачке.

Вспомогательная модель подсказывает и второй способ решения данной задачи. Если за 1 часть принять тетради в первой пачке,

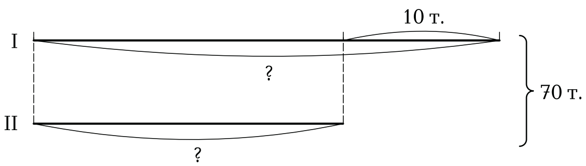


Рис. 8.9

то, чтобы во второй стало столько же, надо к ней добавить 10 тетрадей. И тогда решение будет таким:

1) 70 + 10 = 80 (тетр.);

2) 80 : 2 = 40 (тетр.);

3) 40 – 10 = 30 (тетр.).

Существует и третий арифметический способ решения данной задачи. Разделим 10 тетрадей пополам и одну половину оставим к первой пачке, а другую добавим во вторую. Тогда тетрадей в пачках станет поровну и можно, разделив 70 на 2 равные части, узнать, сколько тетрадей в каждой такой пачке, а затем их первоначальное количество в каждой пачке.

1) 10 : 2 = 5 (тетр.) — столько тетрадей надо переложить из первой пачки во вторую, чтобы в них тетрадей стало поровну;

2) 70 : 2 = 35 (тетр.) — столько тетрадей в каждой пачке, если из первой переложить во вторую 5 тетрадей;

3) 35 + 5 = 40 (тетр.) — столько тетрадей в первой пачке;

4) 35 – 5 = 30 (тетр.) — столько тетрадей во второй пачке.

Задача 3. В двух кусках ткани одинаковое количество материи. После того как от одного куска отрезали 18 м, а от другого 25 м, в первом куске осталось вдвое больше ткани, чем во втором. Сколько метров ткани было в каждом куске первоначально?

Решение. Объекты задачи — два куска ткани одинаковой длины. От первого отрезали 18 м, от второго — 25 м. После этого в первом осталось вдвое больше ткани, чем во втором.

Требование задачи — найти первоначальное количество метров ткани в каждом куске.

Изобразим куски ткани с помощью отрезков одинаковой длины, а затем покажем на них то количество ткани, которое отрезали и которое осталось (рис. 8.10).

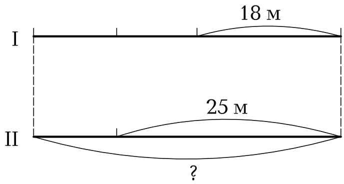


Рис. 8.10

Если количество ткани, которое осталось во втором куске, — это 1 часть, то количество оставшейся ткани в первом куске — это 2 таких части.

По чертежу видно, что на 1 часть приходится количество ткани, которое легко найти.

Запишем решение по действиям:

1) 25 – 18 = 7 (м) — на столько больше ткани отрезали от второго куска, или количество ткани, которое осталось во втором куске;

2) 7 + 25 = 32 (м) — столько ткани было первоначально во втором куске (и, следовательно, в первом) куске.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Изобразите с помощью отрезков следующие ситуации:
   а) «Купили p кг яблок, а груш на t кг больше»;
   б) «Купили p кг яблок, а груш в 2 раза больше»;
   в) «Купили p кг яблок, а груш в 3 раза меньше»;
   г) «Купили p кг яблок, а груш на q кг меньше».
2. Требуется смешать 3 части песка и 2 части цемента. Сколько цемента и песка в отдельности надо взять, чтобы получить 30 кг смеси при условии, что части имеют одинаковую массу?
3. Решите следующие задачи, построив на этапе анализа вспомогательные модели; решение запишите по действиям с пояснением:
   а) «Мама дала трем девочкам 12 конфет и предложила разделить их так, чтобы младшая получила в 3 раза, а средняя в 2 раза больше старшей. Сколько конфет достанется каждой?»;
   б) «На двух тарелках лежало 9 яблок. Когда с одной тарелки взяли одно яблоко, то на этой тарелке осталось яблок в 3 раза больше, чем на другой. Сколько яблок было на каждой тарелке?»;
   в) «У моего брата было в 6 раз больше орехов, чем у меня. После того как он отдал 10 орехов сестре, у нас орехов стало поровну. Сколько орехов было у меня и у брата первоначально?»;
   г) «Полсотни яблок разложили в корзину и два пакета. В корзину положили на 14 яблок больше, чем в каждый пакет. Сколько яблок в корзине и в пакетах?».
4. Постройте вспомогательные модели и с их помощью найдите решения следующих задач:
   а) «На одной полке на 6 книг больше, чем на другой. Сколько книг нужно переложить с одной полки на другую, чтобы книг стало поровну?»;
   б) «Если с одной полки переложить на другую 6 книг, то на обеих полках книг будет поровну. На сколько книг на одной полке больше, чем на другой?»;
   в) «На одной полке на 6 книг больше, чем на другой. На сколько книг будет больше на одной полке, чем на другой, если с первой полки переложили на другую 10 книг?»;
   г) Школьник прочитал 18 страниц за три дня. Если бы он в первый день прочитал на одну страницу больше, а во второй день на 4 страницы меньше, то каждый день он читал бы поровну. По сколько страниц читал школьник каждый день?

8.6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРОЦЕССЫ, ХАРАКТЕРИЗУЕМЫЕ РАЗНОРОДНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Кроме текстовых задач, в которых рассматриваются процессы, характеризуемые однородными величинами, в начальном курсе математики имеются задачи, где описываются процессы, характеризуемые разнородными величинами. Это задачи «на движение», решение которых основано на зависимости между такими величинами, как скорость, время, путь; это задачи «на работу», в основе решения которых лежит зависимость между величинами: производительность труда, время и объем работы; это задачи на «куплю-продажу», при решении которых определяется зависимость между ценой, количеством товара и его стоимостью. Список таких задач можно без труда продолжить.

Процесс решения задач данного вида рассматривается аналогично процессу решения других текстовых задач, т. е. решающий осуществляет те же этапы математического моделирования. Но наиболее трудным является этап анализа задачи, поскольку, во-первых, он связан с опытом человека (как он представляет процесс движения, работы, купли-продажи и др.), а во-вторых, с использованием новых вспомогательных моделей, в частности, таблицы.

Рассмотрим сначала особенности решения задач ***на движение***.

Движение является объектом рассмотрения в самых различных задачах, в том числе и в задачах на части. Но наряду с этим существует и самостоятельный тип задач на движение. Он объединяет такие задачи, которые решаются на основе зависимости $s = v \cdot t$, где s — пройденный путь; v — скорость движения; t — время движения, причем движение равномерное и прямолинейное.

В начальном курсе математики в задачах рассматривается движение двух объектов навстречу, в одном направлении, в противоположных направлениях, движение по реке. Рассмотрим теоретические основы решения таких задач.

Задачи на встречное движение двух объектов. Пусть движение первого объекта характеризуется величинами s_1, v_1, t_1; движение второго — s_2, v_2, t_2. Такое движение можно представить на схематическом чертеже (рис. 8.11).

Если два объекта начинают движение *одновременно* навстречу друг другу, то:

- каждый из них с момента выхода и до встречи затрачивает одинаковое время, т. е. $t_1 = t_2 = t_{встр}$;

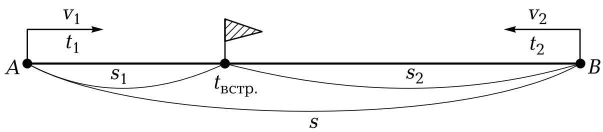


Рис. 8.11

- скорость, с которой сближаются движущиеся объекты за единицу времени, называют *скоростью сближения*, т. е. $v_{сбл} = v_1 + v_2$;
- путь, пройденный движущимися телами при встречном движении, может быть подсчитан по формуле: $s = v_{сбл} \cdot t_{сбл}$.

Задача 1. Два пешехода одновременно вышли навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 18 км. Скорость одного из них 5 км/ч, а другого — 4 км/ч. Через сколько часов они встретились?

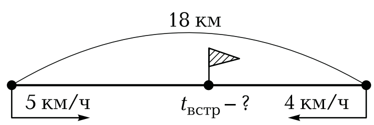
Решение. В задаче рассматривается движение навстречу друг другу двух пешеходов. Один идет со скоростью 5 км/ч, а другой — 4 км/ч. Путь, который они должны пройти, равен 18 км. Требуется найти время, через которое они встретятся, начав движение одновременно. Вспомогательные модели, если они нужны, могут быть разными — схематический чертеж или таблица (рис. 8.12).

Поиск плана решения в данном случае удобно вести, рассуждая от данных к вопросу. Так как скорости пешеходов известны, можно найти их скорость сближения. Зная скорость сближения пешеходов и все расстояние, которое им надо пройти, можно найти время, через которое пешеходы встретятся. Запишем решение задачи по действиям:

1) 5 + 4 = 9 (км/ч);

2) 18 : 9 = 2 (ч).

Таким образом, пешеходы встретятся через 2 ч от начала движения.

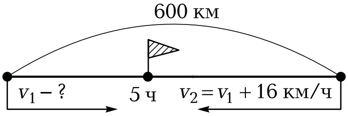


	s, км	v, км/ч	t, ч
I II	? ? } 18	5 4	? ? } одинаковое

Рис. 8.12

Задача 2. Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 600 км, и через 5 ч встретились. Один их них ехал быстрее другого на 16 км/ч. Определите скорости автомобилей.

Решение. В задаче рассматривается движение навстречу друг другу двух автомобилей. Извест-



	s, км	v, км/ч	t, ч
I II	? ? } 600	? ? на 16 км/ч больше	5 5

Рис. 8.13

но, что движение они начали одновременно и встретились через 5 часов. Скорости автомобилей различны — один ехал быстрее другого на 16 км/ч. Путь, который проехали автомобили, — 600 км. Требуется определить скорости движения этих автомобилей.

Вспомогательные модели, если они нужны, могут быть различными: схематический чертеж или таблица (рис. 8.13).

Поиск плана решения задачи можно вести, рассуждая от данных к вопросу. Так как известны все расстояние и время встречи, можно найти скорость сближения автомобилей. Затем, зная, что скорость одного на 16 км/ч больше скорости другого, можно найти скорости автомобилей. При этом можно воспользоваться вспомогательной моделью, приведенной на рис. 8.14.

Запишем решение задачи по действиям с пояснением:

1) 600 : 5 = 120 (км/ч) — это скорость сближения автомобилей;

2) 120 – 16 = 104 (км/ч) — это скорость сближения, если бы скорости автомобилей были одинаковыми и равными скорости первого;

3) 104 : 2 = 52 (км/ч) — скорость первого автомобиля;

4) 52 + 16 = 68 (км/ч) — скорость второго автомобиля.

Есть и другие арифметические способы решения данной задачи, вот два из них.

II способ:

1) 600 : 5 = 120 (км/ч);

2) 120 + 16 = 136 (км/ч);

III способ:

1) 16 · 5 = 80 (км);

2) 600 —– 80 = 520 (км);

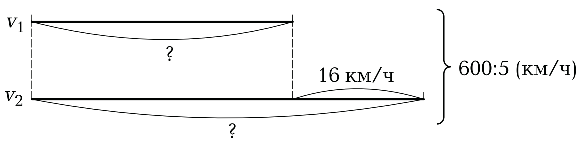


Рис. 8.14

3) 136 : 2 = 68 (км/ч);	3) 520 : 2 = 260 (км);
4) 68 – 16 = 52 (км/ч).	4) 260 : 5 = 52 (км/ч);
	5) 52 + 16 = 68 (км/ч).

Дайте устные пояснения к выполненным действиям и попытайтесь найти другие способы решения данной задачи.

Задачи на движение двух объектов в одном направлении. Среди них следует различать задачи, в которых:

- движение начинается одновременно из разных пунктов;
- движение начинается в разное время из одного пункта.

Рассмотрим случай, когда движение двух объектов начинается одновременно в одном направлении из разных пунктов, лежащих на одной прямой. Пусть движение первого тела характеризуется величинами s_1, v_1, t_1, а движение второго — s_2, v_2, t_2.

Такое движение можно представить на схематическом чертеже (рис. 8.15):

Если при движении в одном направлении первый объект догоняет второй, то $v_1 > v_2$. Кроме того, первый объект приближается к другому со скоростью $v_1 - v_2$. Ее называют *скоростью сближения*: $v_{сближ} = v_1 - v_2$.

Расстояние s, представляющее длину отрезка AB, находят по формулам: $s = s_1 - s_2$ и $s = v_{сближ} \cdot t_{встр}$.

Задача 3. Из двух пунктов, удаленных друг от друга на 30 км, выехали одновременно в одном направлении два мотоциклиста. Скорость одного — 40 км/ч, другого — 50 км/ч. Через сколько часов второй мотоциклист догонит первый?

Решение. В задаче рассматривается движение двух мотоциклистов. Выехали они одновременно из разных пунктов, находящихся на расстоянии 30 км. Скорость одного 40 км/ч, другого — 50 км/ч. Требуется узнать, через сколько часов второй мотоциклист догонит первый.

Вспомогательные модели, если они нужны, могут быть разными: схематический чертеж или таблица (рис. 8.16).

Сравнение скоростей мотоциклистов показывает, что в течение часа первый мотоциклист приближается ко второму на 10 км. Рас-

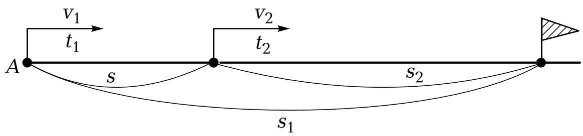
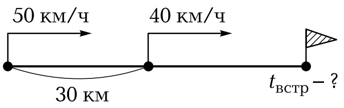


Рис. 8.15



	s, км	v, км/ч	t, ч
I	? на 30 км/ч больше	50	? } одинаковое
II	?	40	?

Рис. 8.16

стояние, которое ему надо пройти до встречи со вторым, на 30 км больше, чем расстояние, которое за такое же время проедет второй мотоциклист. Поэтому первому потребуется столько времени, сколько раз 10 км укладываются в 30 км. Запишем решение задачи по действиям:

1) 50 – 40 = 10 (км/ч) — скорость сближения мотоциклистов;

2) 30 : 10 = 3 (ч) — за это время первый мотоциклист догонит второго.

Наглядно этот процесс представлен на рис. 8.17, где единичный отрезок изображает расстояние, равное 10 км.

Задача 4. В 7 ч из Москвы со скоростью 60 км/ч вышел поезд. В 13 ч следующего дня в том же направлении вылетел самолет со скоростью 780 км/ч. Через какое время самолет догонит поезд?

Решение. В данной задаче рассматривается движение поезда и самолета в одном направлении из одного пункта, но начинается оно в разное время. Известны скорости поезда и самолета, а также время начала их движения. Требуется найти время, через которое самолет догонит поезд.

Из условия задачи следует, что к моменту вылета самолета поезд прошел определенное расстояние. И если его найти, то данная задача становится аналогичной задаче 3, рассмотренной выше.

Чтобы найти расстояние, которое прошел поезд до момента вылета самолета, надо подсчитать, сколько времени находился в пути поезд. Умножив время на скорость поезда, получим расстояние,

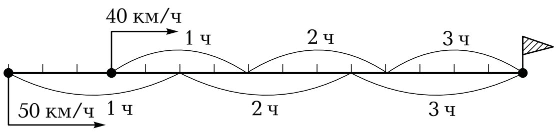


Рис. 8.17

пройденное поездом до момента вылета самолета. А далее аналогично задаче 3:

1) 24 – 7 = 17 (ч) — столько времени был в пути поезд в тот день, когда он вышел из Москвы;

2) 17 + 13 = 30 (ч) — столько времени был в пути поезд до момента вылета самолета;

3) 60 · 30 = 1 800 (км) — путь, пройденный поездом до момента вылета самолета;

4) 780 – 60 = 720 (км/ч) — скорость сближения самолета и поезда;

5) 1 800 : 720 = 2,5 (ч) — время, через которое самолет догонит поезд.

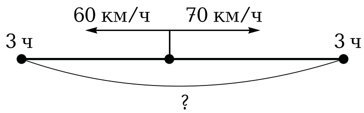
Задачи на движение двух объектов в противоположных направлениях. В таких задачах два объекта могут начинать движение в противоположных направлениях из одной точки: а) одновременно; б) в разное время. А могут начинать свое движение из двух разных точек, находящихся на заданном расстоянии, и в разное время.

Общим теоретическим положением для них будет следующее: $v_{удал} = v_1 + v_2$, где v_1 и v_2 — соответственно скорости первого и второго объектов, а $v_{удал}$ — скорость удаления, т. е. скорость, с которой удаляются друг от друга движущиеся объекты.

Задача 5. Два поезда отошли одновременно от одной станции в противоположных направлениях. Их скорости 60 км/ч и 70 км/ч. На каком расстоянии друг от друга будут эти поезда через 3 часа после выхода?

Решение. В задаче рассматривается движение двух поездов. Они выходят одновременно от одной станции и идут в противоположных направлениях. Известны скорости поездов (60 км/ч и 70 км/ч) и время их движения (3 ч). Требуется найти расстояние, на котором они будут находиться друг от друга через указанное время.

Вспомогательные модели, если они нужны, могут быть такими: схематический чертеж или таблица (рис. 8.18).



	s, км	v, км/ч	t, ч
I II	$\left.\begin{matrix}?\\?\end{matrix}\right\}?$	60 70	3 3

Рис. 8.18

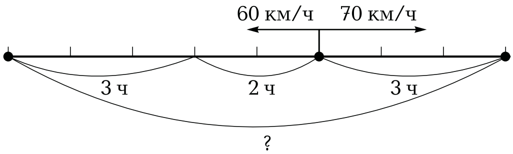


Рис. 8.19

Чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно найти расстояния, пройденные первым и вторым поездом за 3 ч, и полученные результаты сложить:

1) $60 \cdot 3 = 180$ (км);

2) $70 \cdot 3 = 210$ (км);

3) $180 + 210 = 390$ (км).

Можно решить эту задачу другим способом, воспользовавшись понятием скорости удаления:

1) $60 + 70 = 130$ (км/ч) — скорость удаления поездов;

2) $130 \cdot 3 = 390$ (км) — расстояние между поездами через 3 ч.

Задача 6. От станции А отправился поезд со скоростью 60 км/ч. Через 2 ч с этой же станции в противоположном направлении вышел другой поезд со скоростью 70 км/ч. Какое расстояние будет между поездами через 3 ч после выхода второго поезда?

Решение. Эта задача отличается от задачи 5 тем, что движение поездов начинается в разное время. Вспомогательная модель задачи представлена на рис. 8.19. Решить ее можно двумя арифметическими способами.

I способ:

1) $2 + 3 = 5$ (ч) — столько времени в пути был первый поезд;

2) $60 \cdot 5 = 300$ (км) — расстояние, которое за 5 ч прошел этот поезд;

3) $70 \cdot 3 = 210$ (км) — расстояние, которое прошел второй поезд;

4) $300 + 210 = 510$ (км) — расстояние между поездами.

II способ:

1) $60 + 70 = 130$ (км) — скорость удаления поездов;

2) $130 \cdot 3 = 390$ (км) — расстояние, на которое удалились поезда за 3 ч;

3) $60 \cdot 2 = 120$ (км) — расстояние, пройденное первым поездом за 2 ч;

4) $390 + 120 = 510$ (км) — расстояние между поездами.

Задачи на движение по реке. При решении таких задач различают: собственную скорость движущегося объекта, скорость течения реки, скорость движения объекта по течению и скорость движения объекта против течения. Зависимость между ними выражается формулами:

$$v_{\text{по теч}} = v_{\text{соб}} + v_{\text{теч.р}};$$

$$v_{\text{пр.теч}} = v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч.р}};$$

$$v_{\text{соб}} = \frac{v_{\text{по теч}} + v_{\text{пр.теч}}}{2}.$$

Задача 7. Расстояние 360 км катер проходит за 15 ч, если движется против течения реки, и за 12 ч, если движется по течению. Сколько времени потребуется катеру, чтобы проплыть 135 км по озеру?

Решение. В данном случае удобно все данные, неизвестные и искомое, записать в таблицу.

Условия движения	s, км	v, км/ч	t, ч
По течению	360	?	12
Против течения	360	?	15
По озеру	135	?	?

Таблица подсказывает последовательность действий: найти сначала скорость движения катера по течению и против течения, затем, используя формулы, — собственную скорость катера и, наконец, время, за которое он проплывет 135 км по озеру:

1) 360 : 12 = 30 (км/ч) — скорость катера по течению реки;

2) 360 : 15 = 24 (км/ч) — скорость катера против течения реки;

3) 24 + 30 = 54 (км/ч) — удвоенная собственная скорость катера;

4) 54 : 2 = 27 (км/ч) — собственная скорость катера;

5) 135 : 27 = 5 (ч) — время, за которое катер проплывет 135 км.

Задачи «на работу», «куплю-продажу» и другие процессы. В окружающей действительности человек имеет дело с различными процессами: движением, работой, покупкой товара и др. Как правило, они характеризуются тремя величинами. Так, для работы — это производительность труда, время работы и весь объем выполненной работы; для процесса «купли-продажи» — цена, количество товара и его стоимость. Но все эти тройки величин связаны зависимостью, аналогичной зависимости между скоростью, временем и расстоянием при прямолинейном равномерном движении. Поэтому и процесс их решения аналогичен процессу решения задач на движение.

Задача 8. Двум рабочим дано задание изготовить 120 деталей. Один рабочий изготовляет 7 деталей в час, а другой — 5 деталей в час. За сколько часов рабочие выполнят задание, работая вместе?

Решение. В задаче рассматривается процесс выполнения двумя рабочими задания по изготовлению 120 деталей. Известно, что один рабочий изготовляет в час 7 деталей, а другой — 5. Требуется узнать время, за которое рабочие изготовят 120 деталей, работая вместе. Чтобы найти ответ на этот вопрос, надо знать, что процесс, о котором идет речь в задаче, характеризуется тремя величинами:

1) количеством всех произведенных деталей — это результат процесса; обозначим его буквой K;

2) скоростью изготовления деталей за единицу времени — это скорость процесса; обозначим ее буквой k;

3) временем выполнения задания — это время протекания процесса; обозначим его буквой t.

Зависимость между названными величинами выражается формулой: $K = kt$.

Чтобы найти ответ на вопрос задачи, т. е. время t, нужно найти количество деталей, изготовляемых рабочими за 1ч при совместной работе, а затем разделить 120 деталей на полученную производительность.

Рассмотрим теперь задачи «на куплю-продажу», т. е. задачи, содержащие зависимость между величинами, характеризующими процесс купли-продажи.

Если буквой *ц* обозначить цену товара, буквой *к* — количество купленного (или проданного) товара, а буквой *с* — стоимость всего товара, то, как известно, $с = ц \cdot к$. Пользуясь этой формулой, можно находить:

- стоимость товара, если известна его цена и количество;
- цену товара, если известна стоимость товара и его количество ($ц = с : к$);
- количество товара, если известна стоимость товара и его цена ($к = с : ц$).

Задача. Света купила 6 м тесьмы, а Настя такой же тесьмы на 4 м меньше. Сколько денег заплатила каждая девочка, если они вместе потратили на покупку 56 р.?

Решение. В задаче рассматривается процесс покупки тесьмы двумя девочками. Известно количество тесьмы, купленной Светой, и сказано, что Настя купила тесьмы на 4 м меньше, чем Света. Известна также стоимость всей купленной тесьмы. Требуется узнать стоимость тесьмы, купленной каждой девочкой.

Чтобы ответить на вопрос задачи, надо знать количество тесьмы, купленной девочками, затем узнать цену одного метра тесьмы и после этого — стоимость тесьмы, купленной каждой девочкой:

1) $6 - 4 = 2$ (м) — количество тесьмы, купленной Настей;

2) $6 + 2 = 8$ (м) — количество тесьмы, купленной двумя девочками;

3) $56 : 8 = 7$ (р.) — цена 1 м тесьмы;

4) $7 \cdot 6 = 42$ (р.) — стоимость тесьмы, купленной Светой;

5) $7 \cdot 2 = 14$ (р.) — стоимость тесьмы, купленной Настей.

Рассмотрим далее задачи «на работу», т. е. задачи, содержащие зависимость между величинами, характеризующими процесс работы.

Если буквой V обозначить весь объем работы, который надо выполнить, буквой p — производительность труда, а буквой t — время работы, то, как известно, $V = p \cdot t$. Считают, что производительность труда — это объем работы, который выполняется за единицу времени. Пользуясь формулой $V = p \cdot t$, можно находить:

- весь объем выполненной работы, если известны производительность труда и время;
- производительность труда, если известны весь объем работы и время ее выполнения ($p = V : t$);
- время работы, если известны весь объем работы и производительность труда ($t = V : p$).

Задача 9. Два автомата кондитерской фабрики должны изготовить 600 конфет. Первый автомат может это сделать за 10 ч, а второй — за 15 ч. За сколько часов изготовят необходимое количество конфет оба автомата, работая вместе?

Решение. В задаче рассматривается процесс работы двух автоматов. Известен весь объем работы (надо изготовить 600 конфет) и время выполнения этого объема работы каждым автоматом (10 ч и 15 ч). Требуется узнать время выполнения заданного объема работы, если автоматы будут работать вместе.

Можно составить вспомогательную модель задачи — таблицу, которая облегчит составление плана ее решения.

Автомат	Объем работы, конфет	Производительность, конфет/ч	Время работы, ч
I	600	?	10
II	600	?	15
I + II	600	?	?

Видим, что производительность первого и второго автоматов можно найти, разделив объем работы на время, затем найти производительность при совместной работе автоматов и, наконец, определить время их совместной работы.

Запишем решение по действиям с пояснением:

1) 600 : 10 = 60 (конфет) — делает I автомат за 1 ч;

2) 600 : 15 = 40 (конфет) — делает II автомат на 1 ч;

3) 60 + 40 = 100 (конфет) — делают два автомата за 1 ч;

4) 600 : 100 = 6 (ч) — за это время два автомата сделают 600 конфет при совместной работе.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Скорость пешехода *a* км/ч, а скорость велосипедиста — *b* км/ч. Запишите в виде выражения:
   а) скорость сближения пешехода и велосипедиста при движении навстречу;
   б) скорость удаления при движении в противоположных направлениях;
   в) скорость сближения при условии, что велосипедист догоняет пешехода;
   г) скорость удаления при условии, что велосипедист обогнал пешехода.
2. Два мотоциклиста выехали одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми 450 км. Скорость одного из них 80 км/ч, скорость другого 70 км/ч. На каком расстоянии будут они друг от друга через 2 ч при движении:
   а) навстречу друг другу;
   б) в противоположных направлениях;
   в) в одном направлении и при этом один удаляется от другого;
   г) в одном направлении и при этом один догоняет другого?
3. С противоположных концов катка длиной 180 м бегут навстречу друг другу два мальчика. Через сколько секунд они встретятся, если начнут бег одновременно и если один пробегает 9 м в секунду, а другой 6 м в секунду?
   Объясните, используя условия данной задачи, смысл следующих выражений:
   а) 9 + 6; б) 180 : 9; в) 180 : 6; г) 180 : (9 + 6).
   Какое из этих выражений является математической моделью данной задачи?
4. Постройте различные вспомогательные модели задачи и установите, какая из них, на ваш взгляд, наиболее целесо-

образна для ее решения. Решение задачи запишите, составив выражение:

а) «Из пункта М вышел пешеход со скоростью 4 км/ч, а через 2 ч выехал велосипедист со скоростью 12 км/ч. На каком расстоянии от пункта М велосипедист догонит пешехода?»;

б) «Два пассажира метро, начавшие одновременно один спуск, а другой подъем на эскалаторах метро, поравнялись через 30 с. Вычислите длину эскалатора, если скорость его движения 1 м/с».

5. Расстояние между городами А и В 520 км. В 8 ч из А в В выехал автобус со скоростью 56 км/ч, а в 11 ч того же дня из В в А выехал грузовой автомобиль со скоростью 32 км/ч. На каком расстоянии от А встретятся машины? Решение задачи запишите в двух вариантах: по действиям и в виде выражения.
6. Из двух городов, расстояние между которыми 960 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда и встретились через 8 ч после выхода. Найдите скорость каждого поезда, если один проходил в час на 16 км больше другого.
   Дайте пояснения к каждому действию такого решения данной задачи:
   1) 960 : 8 = 120 (км/ч);
   2) 120 – 16 = 104 (км/ч);
   3) 104 : 2 = 52 (км/ч);
   4) 52 +16 = 68 (км/ч).
7. Решите задачи арифметическим методом, установив предварительно, какие величины рассматриваются в них и в каких зависимостях они находятся:
   а) «Длина прямоугольного поля 1 536 м, а ширина 625 м. Один тракторист может вспахать это поле за 16 дней, а другой за 12 дней. Какую площадь вспашут оба тракториста, работая вместе в течение 5 дней?»;
   б) «Сумма площадей двух участков равна 140 га. Урожайность пшеницы на первом участке была 35 ц/га, а на втором 30 ц/га. Найдите площадь каждого участка, если известно, что со второго собрали на 30 ц больше, чем с первого»;
   в) «Два человека чистили картофель. Один очищал в минуту 2 картофелины, а второй — 3 картофелины. Вместе они очистили 400 шт. Сколько времени работал каждый, если второй проработал на 25 мин больше первого?».
8. Решите следующие задачи арифметическим методом (решение запишите по действиям с пояснением):
   а) «На путь по течению реки моторная лодка затратила 6 ч, а на обратный путь — 10 ч. Скорость лодки в стоячей воде 16 км/ч. Какова скорость течения реки?»;

б) «Собственная скорость моторной лодки в 8 раз больше скорости течения реки. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки, если, двигаясь по течению, лодка за 4 ч проплыла 108 км».

9. Решите задачи, предлагаемые младшим школьникам, и объясните, какие приемы можно использовать на каждом из этапов процесса их решения:
   а) «Два мастера переплели 180 книг. Первый из них переплетал по 5 книг в день и переплел 75 книг. Сколько книг в день переплетал второй мастер, если он работал столько же дней, сколько и первый?»;
   б) «Из двух городов, расстояние между которыми 777 км, вышли навстречу друг другу два поезда. Первый поезд вышел на 3 ч раньше и шел со скоростью 75 км/ч. Поезда встретились через 4 ч после выхода второго поезда. С какой скоростью шел второй поезд?».

Глава 9
КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ РЕШЕНИЕ

В повседневной жизни нередко встречаются задачи, которые имеют несколько различных вариантов решения. Чтобы сделать правильный выбор, важно не пропустить ни один из них. Для этого надо уметь осуществлять перебор всех возможных вариантов или подсчитывать их число.

Задачи, требующие такого решения, называются ***комбинаторными.***

Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называется *комбинаторикой.*

Комбинаторика возникла в XVI в., и первоначально в ней рассматривались комбинаторные задачи, связанные в основном с азартными играми.

В процессе изучения таких задач были выработаны некоторые общие подходы к их решению, получены формулы для подсчета числа различных комбинаций.

В настоящее время комбинаторика является одним из важных разделов математической науки. Ее методы широко используются для решения практических и теоретических задач. Установлены связи комбинаторики с другими разделами математики.

В начальном обучении математике роль комбинаторных задач постоянно возрастает, поскольку в них заложены большие возможности не только для развития мышления учащихся, но и для подготовки учащихся к решению проблем, возникающих в повседневной жизни.

Комбинаторные задачи в начальном курсе математики решаются, как правило, методом перебора. Для облегчения этого процесса нередко используются таблицы и графы. В связи с этим учителю начальных классов необходимы определенные умения и навыки решения таких задач.

9.1. ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

В комбинаторике, которая возникла раньше теории множеств, правило нахождения числа элементов объединения двух непересекающихся конечных множеств называют ***правилом сложения*** и формулируют в таком виде:

Если объект a можно выбрать m способами, а объект b – k способами (не такими, как a), то выбор «либо a, либо b» можно осуществить $m + k$ способами.

Задача 1. На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Решение. По условию задачи яблоко можно выбрать пятью способами, апельсин — четырьмя. Так как в задаче речь идет о выборе «либо яблоко, либо апельсин», то его, согласно правилу сложения, можно осуществить $5 + 4 = 9$ способами.

Правило нахождения числа элементов декартова произведения двух множеств называют в комбинаторике ***правилом умножения*** и формулируют в таком виде:

> *Если объект a можно выбрать m способами, а объект b – k способами, то пару (a, b) можно выбрать mk способами.*

Задача 2. На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать пару плодов, состоящую из яблока и апельсина?

Решение. По условию задачи, яблоко можно выбрать пятью способами, апельсин — четырьмя. Так как в задаче речь идет о выборе пары (яблоко, апельсин), то ее, согласно правилу умножения, можно выбрать $5 \cdot 4 = 20$ способами.

Задача 3. Сколько всего двузначных чисел можно составить из цифр 7, 4 и 5 при условии, что они в записи числа не повторяются?

Решение. Чтобы записать двузначное число, надо выбрать цифру десятков и цифру единиц. Согласно условию, на месте десятков в записи числа может быть любая из цифр 7, 4 и 5. Другим словами, выбрать цифру десятков можно тремя способами. После того как цифра десятков определена, для выбора цифры единиц остается две возможности, поскольку цифры в записи числа не должны повторяться. Так как любое двузначное число — это упорядоченная пара, состоящая из цифры десятков и цифры единиц, то ее выбор, согласно правилу умножения, можно осуществить шестью способами ($3 \cdot 2 = 6$).

Правила сложения и умножения, сформулированные для двух объектов, можно обобщить и на случай t объектов.

Задача 4. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 7, 4 и 5?

Решение. В данной задаче рассматриваются трехзначные числа. Так как цифры в записи этих чисел могут повторяться, то цифру сотен, цифру десятков и цифру единиц можно выбрать тремя способами каждую. Поскольку запись трехзначного числа представляет собой упорядоченный набор из трех элементов, то, согласно правилу произведения, его выбор можно осуществить 27 способами, так как $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Задача 5. Сколько всего четырехзначных чисел можно составить из цифр 0 и 3?

Решение. Запись четырехзначного числа представляет собой упорядоченный набор (кортеж) из четырех цифр. Первую цифру — цифру тысяч — можно выбрать только одним способом, так как запись числа не может начинаться с нуля. Цифрой сотен может быть либо ноль, либо три, т.е. имеется два способа выбора. Столько же способов выбора имеется для цифры десятков и цифры единиц.

Итак, цифру тысяч можно выбрать одним способом, цифру сотен — двумя, цифру десятков — двумя, цифру единиц — двумя. Чтобы узнать, сколько всего четырехзначных чисел можно составить из цифр 0 и 3, согласно правилу умножения, способы выбора каждой цифры надо перемножить: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Таким образом, имеем 8 четырехзначных чисел.

Задача 6. Сколько трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 3, 6, 7 и 9, если каждая из них может быть использована в записи только один раз?

Решение. Так как запись числа не может начинаться с нуля, то цифру сотен можно выбрать пятью способами; выбор цифры десятков можно осуществить также пятью способами, поскольку цифры в записи числа не должны повторяться, а одна из шести данных цифр будет уже использована для записи сотен; после выбора двух цифр (для записи сотен и десятков) выбрать цифру единиц из данных шести можно четырьмя способами. Отсюда, по правилу умножения, получаем, что трехзначных чисел (из данных шести цифр) можно образовать $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ способами.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Школьники из Волгограда собрались на каникулы поехать в Москву, посетив по дороге Нижний Новгород. Из Волгограда в Нижний Новгород можно отправиться на теплоходе или поезде, а из Нижнего Новгорода в Москву — на самолете, теплоходе или автобусе. Сколькими различными способами ребята могут осуществить свое путешествие? Назовите все возможные варианты этого путешествия.
2. Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 3, 4, 5 и 6? Сколько различных двузначных чисел можно записать, используя при записи числа каждую из указанных цифр только один раз? Запишите эти числа.
3. Девять школьников, сдавая экзамены по математике, русскому и английскому языку, получили отметки «4» и «5». Можно ли утверждать, что по крайней мере двое из них получили по каждому предмету одинаковые отметки?
4. Сколько трехзначных чисел можно составить из трех различных, не равных нулю цифр? Зависит ли результат от того, какие цифры взяты? Укажите какой-нибудь способ перебора трехзначных чисел, при котором ни одно число не может быть пропущено.
5. Сколько всевозможных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 и 4 так, чтобы цифры в записи числа не повторялись? Изменится ли решение этой задачи, если вместо цифры 4 будет дана цифра 0?
6. Сколько всевозможных четырехзначных чисел можно составить, используя для записи цифры 1, 2, 3 и 4? Какова разность между самым большим и самым малым из них?
7. Сколько пятизначных чисел, первые (слева) три цифры которых 2, 3 и 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5? Изменится ли ответ в этой задаче, если цифры в записи числа не будут повторяться?
8. Сколько натуральных чисел, меньших 1 000, можно записать, используя цифры 7, 4 и 5? Сколько среди них четных; нечетных; кратных 5?

9.2. РАЗМЕЩЕНИЯ И СОЧЕТАНИЯ

Правила сложения и умножения — это общие правила решения комбинаторных задач. Кроме них в комбинаторике пользуются формулами для подсчета числа отдельных видов комбинаций, которые встречаются наиболее часто.

Рассмотрим некоторые из них и прежде всего те, знание которых необходимо учителю начальных классов.

Используя цифры 7, 4 и 5, мы получили различные двузначные числа: 77, 74, 75, 47, 44, 45, 57, 54, 55. В записи этих чисел цифры повторяются.

С теоретико-множественной точки зрения запись любого двузначного числа — это кортеж длины 2. Записывая различные двузначные числа с помощью цифр 7, 4 и 5, мы, по сути дела, получили из данных трех цифр различные кортежи длины 2 с повторяющимися элементами. В комбинаторике такие кортежи называют *размещениями с повторениями* из трех элементов по два элемента.

> ***Размещение с повторениями из k элементов по m элементов*** — это кортеж длины m, составленный из m элементов k-элементного множества.

Из определения следует, что два размещения из k элементов по m элементов отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Например, два двузначных числа из перечисленных выше (а это размещения из трех элементов по два) отличаются друг от друга либо составом элементов (74 и 75), либо порядком их расположения (74 и 47).

Относительно размещений часто возникает вопрос: «Сколько всевозможных размещений по m элементов каждое можно образовать из k элементов данного множества?». Например, сколько всевозможных двузначных чисел можно записать, используя цифры 7, 4 и 5?

Число всевозможных размещений с повторениями из k элементов по m элементов обозначают $\tilde{A}_k^m$ и подсчитывают по формуле $\tilde{A}_k^m = k^m$.

С помощью этой формулы легко подсчитать, сколько двузначных чисел можно записать, используя цифры 7, 4 и 5. Так как речь идет о размещениях с повторениями из трех элементов по два, то $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

Нередко встречаются задачи, в которых требуется подсчитать число кортежей длины m, образованных из k элементов некоторого множества, но при условии, что элементы в кортеже не повторяются. Такие кортежи называются *размещениями без повторений из k элементов по m элементов.*

***Размещение без повторений из k элементов по m элементов* — это кортеж длины m, составленный из неповторяющихся элементов множества, в котором k элементов.**

Число всевозможных размещений без повторений из k элементов по m элементов обозначают A_k^m и подсчитывают по формуле

$$A_k^m = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-m+1).$$

Например, число двузначных чисел, записанных с помощью цифр 7, 4 и 5 так, что цифры в записи числа не повторяются, есть число размещений без повторений из трех элементов по два: $A_3^2 = 3 \cdot (3-1) = 3 \cdot 2 = 6$.

Задача 1. Сколько всевозможных трехзначных чисел можно записать, используя цифры 7, 4 и 5, так, чтобы цифры в записи числа не повторялись?

Решение. В задаче рассматриваются размещения без повторений из трех элементов по три; их число можно подсчитать по формуле

$$A_3^3 = 3 \cdot (3-1) \cdot (3-2) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Эти числа таковы: 745, 754, 475, 457, 547, 574.

Заметим, что в данном случае разные числа получаются в результате перестановки цифр. Поэтому размещения из k элементов по k элементов называют ***перестановками из k элементов без повторений***.

Число перестановок без повторений из k элементов обозначают P_k и подсчитывают по формуле $P_k = k!$, где $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ и $k!$ читают «k факториал». Считают, что $1! = 1$, $0! = 1$. Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5\,040$.

Из элементов множества $X = \{7, 4, 5\}$ можно образовывать не только кортежи различной длины, но и различные подмножества, например двухэлементные. В комбинаторике их называют сочетаниями без повторений из трех элементов по два элемента.

***Сочетание без повторения из k элементов по m элементов* — это m-элементное подмножество множества, содержащего k элементов.**

Два сочетания из k элементов по m элементов отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число всевозможных сочетаний без повторений из k элементов по m элементов обозначают C_k^m. Как находить это число?

Обратимся к примеру. Образуем различные двухэлементные подмножества из элементов множества $X = \{7, 4, 5\}$. Их будет три: $\{7, 4\}$, $\{7, 5\}$, $\{4, 5\}$. Из элементов каждого такого подмножества можно образовать 2! кортежей длины 2:

(7, 4) (7, 5) (4, 5);

(4, 7) (5, 7) (5, 4).

Все полученные кортежи являются размещениями без повторения из трех элементов по два и их число равно $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$. Но, с другой стороны, это число равно произведению $2! \cdot C_3^2$. Значит, $A_3^2 = 2! \cdot C_3^2$, откуда $C_3^2 = \dfrac{A_3^2}{2!}$.

В общем случае число всевозможных сочетаний без повторений из k элементов по m элементов находят по формуле $C_k^m = \dfrac{A_k^m}{m!}$.

Конечно, применение формул облегчает подсчет числа возможных вариантов решений той или иной комбинаторной задачи. Однако чтобы воспользоваться формулой, необходимо определить вид соединений (комбинаций), о которых идет речь в задаче, что бывает сделать не очень просто.

Выясним, например, о каких комбинациях идет речь в следующих задачах:

1. «Сколько всего двузначных чисел?»;

2. «Сколько всего двузначных чисел, в записи которых цифры не повторяются?»;

3. «На прямой взяли десять точек. Сколько всего получилось отрезков, концами которых являются эти точки?».

В первой задаче двузначные числа образуются из 10 цифр, причем цифры в записи числа могут повторяться (в задаче нет условия о том, что цифры в записи числа не повторяются). Используя теоретико-множественную терминологию, можно сказать, что в ней речь идет об упорядоченных наборах (кортежах) из 10 элементов по 2 с повторениями. В комбинаторике такие кортежи называются размещениями с повторениями из 10 элементов по 2. Их число можно найти по формуле $\tilde{A}_{10}^2 = 10^2 = 100$. Но среди этих кортежей есть такие, у которых на первом месте стоит цифра 0 и которые не могут рассматриваться как запись двузначного числа. Таких кортежей 10, их надо вычесть из 100. Таким образом, двузначных чисел всего 90.

Конечно, эту задачу можно было решить проще, применив правило умножения: первую цифру из записи двузначного числа можно выбрать девятью способами, вторую — десятью, а упорядоченную пару — 9 · 10 = 90 способами.

Во второй задаче также рассматриваются кортежи длины 2, образованные из 10 элементов (цифр), но элементы в них не повторяются. Такие кортежи в комбинаторике называются размещениями без повторений из 10 элементов по 2. Их число можно найти по формуле $A_{10}^{2} = 10 \cdot (10 - 1) = 90$, но из этого числа надо вычесть кортежи, у которых на первом месте стоит цифра 0, и они не могут представлять запись двузначного числа. Таких кортежей 9. Поэтому двузначных чисел, в записи которых цифры не повторяются, 90 – 9 = 81.

Другой характер имеют комбинации, о которых идет речь в третьей задаче. Действительно, если для записи чисел в первых двух задачах важен порядок следования цифр (так, 23 и 32 — это различные числа), то в третьей задаче он роли не играет (отрезок AB и отрезок BA — это один и тот же отрезок). Комбинации в этой задаче являются двухэлементными подмножествами, образованными из 10 данных элементов (точек). Такие подмножества в комбинаторике называются сочетаниями без повторений из 10 элементов по 2. Их число можно найти по формуле: $C_{10}^{2} = \frac{A_{10}^{2}}{2!} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Заполните следующую таблицу:

Виды комбинаций		Формула
На «языке» комбинаторики	На теоретико-множественном «языке»	
Размещения с повторениями из k элементов по m элементов	Кортежи длины m с повторяющимися элементами, взятыми из множества, в котором k элементов	$\tilde{A}_k^m = k^m$
Размещения без повторений из k элементов по m элементов		
Перестановки без повторений из k элементов по m элементов		
Сочетания без повторений из k элементов по m элементов		

2. Покажите, что в следующих задачах рассматриваются размещения из k элементов по m; определите значения k и m и найдите число размещений:
а) «Из 20 учащихся класса надо выбрать старосту, его заместителя и редактора газеты. Сколькими способами это можно сделать?»;
б) «В классе изучаются 7 предметов. В среду 4 урока, причем все разные. Сколькими способами можно составить расписание на среду?»;
в) «В соревновании участвуют 10 человек. Сколькими способами могут распределиться между ними места?»;
г) «Сколько всевозможных трехзначных чисел можно записать, используя цифры 3, 4, 5 и 6?».
3. Покажите, что в следующих задачах рассматриваются сочетания из k элементов по m, определите значения k и m и найдите C_k^m для каждой задачи:
а) «Сколькими способами можно выбрать из 6 человек комиссию, состоящую из трех человек?»;
б) «Сколькими способами можно выбрать 4 краски из 10 различных красок?»;
в) «Два человека обменялись своими фотокарточками. Сколько было всего фотокарточек?»;
г) «Два человека пожали друг другу руки. Сколько было рукопожатий? А если 15 человек пожали друг другу руки, то сколько будет рукопожатий?»;
д) «На плоскости отметили 7 точек. Каждые две точки соединили отрезком. Сколько получилось отрезков?».
4. Решите следующие задачи, используя формулы. Ответ проверьте с помощью перебора всех возможных вариантов:
а) «Сколько словарей необходимо переводчику, чтобы он мог переводить текст с любого из четырех языков — русского, английского, немецкого и французского — на любой другой из этих языков?»;
б) «Государственные флаги некоторых стран состоят из трех горизонтальных полос разного цвета. Сколько различных вариантов флагов с белой, синей и красной полосами можно составить?»;
в) «Мальчик выбрал в библиотеке 5 книг. По правилам библиотеки одновременно можно взять только 2 книги. Сколько у мальчика вариантов выбора двух книг из пяти?»;
г) «В классе трое хорошо поют, двое других играют на гитаре, а еще один умеет показывать фокусы. Сколькими способами можно составить концертную бригаду из певца, гитариста и фокусника?».

5. Решите комбинаторные задачи для учащихся начальных классов методом перебора и используя формулы комбинаторики. Выбор формул обоснуйте:
   а) «Аня, Боря, Вера и Гена — лучшие лыжники школы. На соревнования надо выбрать троих из них. Сколькими способами можно это сделать?»;
   б) «Круг разделили на две части и решили раскрасить их карандашами разных цветов. Сколькими способами можно это сделать, если имеются красный, зеленый и синий карандаши?»;
   в) «При изготовлении авторучки корпус и колпачок могут иметь одинаковый или разный цвет. На фабрике имеется пластмасса четырех цветов: белого, красного, синего и зеленого. Какие отличающиеся по цвету ручки можно изготовить?»;
   г) «На прямой взяли 4 точки. Сколько всего получилось отрезков, концами которых являются эти точки?»;
   д) «За свои рисунки ученик получил две положительные оценки. Какими они могут быть?»;
   е) «В соревнованиях участвуют 5 футбольных команд. Каждая команда играет один раз с каждой из остальных команд. Сколько матчей будет сыграно?».

Раздел IV

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И НУЛЬ

Для школьного курса математики натуральное число является тем понятием, с которого, как правило, начинается обучение. И уже в начальных классах учащиеся знакомятся с различными функциями натурального числа. Отвечая на вопрос: «Сколько машин изображено на рисунке?», они имеют дело с числом как количественной характеристикой множества предметов. Производя счет предметов, число используют как характеристику порядка. В задачах, связанных с измерением величин, число выступает как значение величины при выбранной единице, т. е. как мера величины. Большое внимание в начальном курсе математики уделяется и еще одной роли числа — как компоненту вычислений. Таким образом, натуральное число имеет много функций, и многие из них должны быть поняты и усвоены уже младшими школьниками. Поэтому важной задачей учителя является овладение теми теориями, в которых обоснованы различные подходы к определению натурального числа и действий над числами.

Глава 10

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ СМЫСЛ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА И НУЛЯ

10.1. ИЗ ИСТОРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПОНЯТИЯ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

Числа возникли из потребности счета и измерения и прошли длительный путь исторического развития.

Было время, когда люди не умели считать, а для сравнения конечных множеств устанавливали взаимно-однозначное соответствие между данными множествами или между одним из множеств и подмножеством другого множества, т. е. на этом этапе человек воспринимал численность предметов без их пересчета. Например, о численности группы из двух предметов он мог говорить: «Столько же, сколько рук у человека», о множестве из пяти предметов: «Столько же, сколько пальцев на руке». При таком способе сравниваемые множества должны были быть одновременно обозримы.

В результате длительного периода развития человек пришел к следующему этапу создания натуральных чисел — для сравнения множеств стали применять множества-посредники: мелкие камешки, раковины, пальцы. Эти множества-посредники уже представляли собой зачатки понятия натурального числа, хотя и на этом этапе число не отделялось от пересчитываемых предметов: речь шла, например, о пяти камешках, пяти пальцах, а не о числе «пять» вообще. Названия множеств-посредников стали использовать для определения численности множеств, которые с ними сравнивались. Так, у некоторых племен численность множества, состоящего из пяти элементов, обозначалась словом «рука», а численность множества из 20 предметов — словами «весь человек».

Только после того как человек научился оперировать множествами-посредниками, установил то общее, что существует, например, между пятью пальцами и пятью яблоками, т. е. когда произошло отвлечение от природы элементов множеств-посредников, возникло представление о натуральном числе. На этом этапе при счете, например яблок, не говорили уже «одно яблоко», «два яблока» и т. д., а произносили слова «один», «два» и т. д. Это был важнейший этап в развитии понятия числа. Историки считают, что произошло это в Каменном веке, в эпоху первобытно-общинного строя, примерно в 10—5 тысячелетии до н. э.

Со временем люди научились не только называть числа, но и обозначать их, а также выполнять над ними действия. Вообще, натуральный ряд чисел возник не сразу, история его формирования длительная. Запас чисел, которые применяли для счета, увеличивался постепенно. Постепенно сложилось и представление о бесконечности множества натуральных чисел. Так, в работе «Псаммит» — исчисление песчинок — древнегреческий математик Архимед (III в. до н. э.) показал, что ряд чисел может быть продолжен бесконечно, и описал способ образования и словесного обозначения сколь угодно больших чисел.

Возникновение понятия натурального числа было важнейшим моментом в развитии математики. Появилась возможность изучать эти числа независимо от тех конкретных задач, в связи с которыми они возникли. Теоретическая наука, которая стала изучать числа и действия над ними, получила название «арифметика» (от греч. *arithmos* — число). Следовательно, арифметика — это наука о числе.

Арифметика возникла в странах Древнего Востока: Вавилоне, Китае, Индии и Египте. Накопленные в этих странах математические знания были развиты и продолжены учеными Древней Греции. В Средние века большой вклад в развитие арифметики внесли математики Индии, стран арабского мира и Средней Азии, а начиная с XIII в. — европейские ученые.

Термин «натуральное число» впервые употребил в V в. римский ученый А. Боэций, который известен как переводчик работ известных математиков прошлого на латинский язык и как автор книги «О введении в арифметику», которая до XVI в. была образцом для всей европейской математики.

Во второй половине XIX в. натуральные числа оказались фундаментом всей математической науки, от состояния которого зависела прочность всего «здания» математики. В связи с этим появилась необходимость в строгом логическом обосновании понятия натурального числа, в систематизации всего, что с ним связано. Большое влияние на исследование природы натурального числа оказала и созданная в XIX в. теория множеств. В созданных теориях были обобщены и систематизированы известные к тому времени знания о натуральных числах, в частности:

- совокупность натуральных чисел, расположенных в порядке возрастания, есть натуральный ряд: 1, 2, 3, ...;
- для любых натуральных чисел a и b имеет место только одно из отношений: либо $a = b$, либо $a > b$, либо $a < b$;
- над натуральными числами можно выполнять операции (действия) сложения, умножения, вычитания и деления. При этом для любых натуральных чисел a и b всегда существует и однозначно определяется сумма $a + b$ и произведение $a \cdot b$; сложение и умножение натуральных чисел обладают свойствами коммутативности и ассоциативности, а умножение дистрибутивно относительно сложения;
- вычитание и деление натуральных чисел определяются как операции, обратные соответственно сложению и умножению; но для заданных натуральных чисел a и b разность $a - b$ и частное $a : b$ существуют не всегда, а при определенных условиях, и в том случае, когда они существуют, их значения единственны.

10.2. ПОРЯДКОВЫЕ И КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. СЧЕТ

Известно, что натуральными числами называют числа, которые используют при счете предметов.

А что представляет собой процесс счета? Как, например, вести счет элементов множества $A = \{k, l, m, r\}$? Указывая на каждый элемент этого множества, говорят: «первый», «второй», «третий», «четвертый». И на этом процесс заканчивается, так как использованы все элементы множества A. При проведении счета соблюдают ряд правил: первым при счете может быть назван любой элемент множества A, но ни один элемент не должен быть пропущен и сосчитан дважды.

Сосчитав элементы множества A, говорят, что в множестве A четыре элемента, т. е. получают количественную характеристику этого множества. Но чтобы ее получить, были использованы ***порядковые натуральные числа*** «первый», «второй», «третий», «четвертый». Другими словами, было использовано множество {1, 2, 3, 4}, которое называют отрезком натурального ряда. В общем виде это понятие определяют следующим образом.

> ***Отрезком $\mathbf{N}_a$ натурального ряда*** называют множество натуральных чисел, не превосходящих натурального числа a.

Например, отрезок $\mathbf{N}_4$ представляет собой множество натуральных чисел 1, 2, 3, 4.

Из определения следует, что отрезок $\mathbf{N}_a$ натурального ряда состоит из всех таких натуральных чисел x, что $x \leqslant a$. Кроме того, любой отрезок $\mathbf{N}_a$ при $a > 1$ содержит 1.

Если множество A равномощно некоторому отрезку $\mathbf{N}_a$ натурального ряда, то его называют ***конечным***.

Определение отрезка натурального ряда позволяет уточнить понятие счета элементов множества. Но прежде заметим, что в процессе счета элементов множества $A = \{k, l, m, r\}$ каждому элементу этого множества было поставлено в соответствие единственное число из отрезка $\mathbf{N}_4$, т. е. было установлено взаимно-однозначное соответствие между множеством A и отрезком $\mathbf{N}_4$ натурального ряда.

> ***Счетом элементов множества A*** называют процесс установления взаимно-однозначного соответствия между множеством A и отрезком натурального ряда $\mathbf{N}_a$. Число ***a*** называют ***числом элементов*** в множестве A и пишут $a = n(A)$. Это число ***a*** единственное и является ***количественным натуральным числом***.

В процессе счета элементов конечного множества устанавливается взаимосвязь порядкового и количественного смысла натурального числа: элементы множества располагаются в определенном порядке (упорядочиваются аналогично отрезку $\mathbf{N}_a$ — первый, второй, третий и т. п.), а после того как все элементы множества окажутся пронумерованными, получаем ответ на вопрос: «Сколько элементов в множестве?», т. е. количественное число (один, два, три и т. п.).

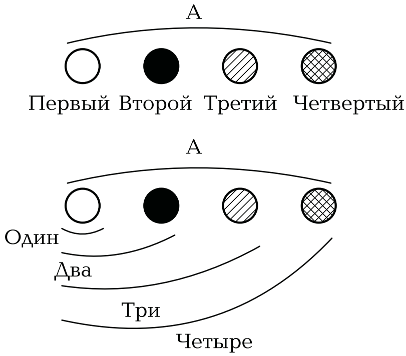


Рис. 10.1

Счет элементов множества ведут, используя либо порядковые, либо количественные числа, причем при порядковом счете называется каждый элемент множества, а при количественном — группы предметов счета (рис. 10.1).

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Запишите все элементы множеств $\mathbf{N}_7$, $\mathbf{N}_{10}$. Как называются эти множества?
2. Можно ли назвать отрезком натурального ряда множества: а) {1, 2, 3, 4, 5}; б) {1, 3, 5, 7, 9}; в) {2, 3, 4, 5, 6}?
3. Прочитайте предложения: $n(A) = 7$, $n(B) = 2$. Какой смысл имеют числа 7 и 2 в этой записи? Приведите примеры множеств, содержащих указанное число элементов.
4. Что значит сосчитать элементы конечного множества? Сформулируйте правила, которые должны соблюдать учащиеся при счете предметов (правила вытекают из определения счета элементов конечного множества).

10.3. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ СМЫСЛ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА И НУЛЯ

В подразд. 10.2 было показано, что счет элементов конечного множества приводит к числу количественному. Можно разъяснить смысл количественного натурального числа, не связывая его со счетом.

Пусть количественное натуральное число a получено в результате счета элементов множества A: $a = n(A)$. Это же число a можно получить и при счете элементов другого множества, например B. Но если $a = n(B)$, то множества A и B равномощны, поскольку содержат поровну элементов.

Так как любому непустому конечному множеству соответствует только одно натуральное число, то все конечные множества разбиваются на классы равномощных множеств (это происходит потому, что отношение равномощности множеств является отношением эквивалентности). В одном классе будут содержаться все одноэлементные множества, в другом — двухэлементные и т. д. Множества одного класса различны по своей природе, но все они содержат одинаковое число элементов. И это число можно рассматривать как общее свойство класса конечных равномощных множеств.

Таким образом, с теоретико-множественной точки зрения, *натуральное число — это общее свойство класса конечных равномощных множеств*.

Так как каждый класс равномощных конечных множеств однозначно определяется выбором какого-нибудь его представителя, то о натуральном числе «три» можно сказать, что это общее свойство класса множеств, равномощных, например, множеству сторон треугольника, а о натуральном числе «четыре», что это общее свойство класса множеств, равномощных, например, множеству вершин квадрата.

Итак, натуральное число a как характеристику количества можно рассматривать с двух позиций:

1) как число элементов в множестве A, получаемое при счете, т. е. $a = n(A)$, причем $A \sim \mathbf{N}_a$;

2) как общее свойство класса конечных множеств, равномощных множеству A.

Число «нуль» с теоретико-множественных позиций рассматривается как число элементов пустого множества: $0 = n(\varnothing)$.

Число нуль не является натуральным числом. Множество, которое получается в результате присоединения нуля к множеству натуральных чисел, называют множеством целых неотрицательных чисел и обозначают буквой $\mathbf{Z}_0$: $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$.

В начальном курсе математики количественное натуральное число, как правило, рассматривается как общее свойство класса конечных равномощных множеств. Поэтому, когда учащиеся изучают число «один», на странице учебника приводятся изображения одного предмета (одно ведро, одна девочка, один стол и т. д.); при изучении числа «три» — изображения различных совокупностей, содержащих три элемента (три кубика, три камешка, три палочки и т. д.). Число предметов в совокупности определяют путем пересчета. Таким образом, количественное и порядковое натуральное число выступают в начальном обучении в тесной взаимосвязи.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Почему на уроке, где изучается число «четыре», можно использовать рисунки с изображением четырех яблок, четырех тетрадей, а можно воспользоваться и другими примерами четырехэлементных множеств?
2. Приведите примеры таких различных множеств A и B, что $n(A) = n(B) = 6$. В каком отношении находятся множества A и B?
3. Каков теоретико-множественный смысл натурального числа «пять»?
4. Рассмотрите иллюстрации и записи, приведенные в любом учебнике по математике для 1-го класса, где учащиеся знакомятся с числом «три». Объясните, какие из них приведены с целью раскрыть количественный смысл числа «три».

Глава 11
ОПЕРАЦИИ НАД ЦЕЛЫМИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

11.1. СЛОЖЕНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА

Рассмотрим задачу, которую решают младшие школьники: «Петя нашел 4 гриба, а Нина — 3. Сколько всего грибов нашли ребята?». Задача решается с помощью сложения: к числу 4 надо прибавить число 3. Но как объяснить, почему использовано сложение, а не другое действие?

Чтобы ответить на вопрос задачи, надо к грибам Пети присоединить грибы Нины, т. е. объединить два множества грибов, а затем определить в этом объединении число элементов, сложив числа 4 и 3.

Видим, что сложение чисел оказывается связанным с объединением множеств.

Рассмотрим еще одну задачу. Найдем число элементов в объединении множеств $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{c, x, y\}$. Нетрудно установить, что $n(A) = 4$, $n(B) = 3$, $A \cup B = \{a, b, c, d, x, y\}$, но $n(A \cup B) \neq 4 + 3$. Почему так? Дело в том, что заданные в задаче множества A и B пересекаются, и, значит, число элементов в их объединении не совпадает с суммой $n(A) + n(B)$.

Вообще, *с теоретико-множественных позиций, сумма натуральных чисел a и b представляет собой число элементов в объединении конечных непересекающихся множеств A и B, таких, что $a = n(A)$, $b = n(B)$*:

$$a + b = n(A) + n(B) = n(A \cup B), \text{ если } A \cap B = \varnothing.$$

Исходя из данной трактовки суммы натуральных чисел, можно доказать, что:

- сумма $a + b$ не зависит от выбора непересекающихся множеств A и B, таких, что $a = n(A)$, $b = n(B)$;
- сумма натуральных чисел всегда существует и единственна: какие бы два натуральных числа a и b мы ни взяли, всегда можно найти их сумму — натуральное число c, оно будет единственным для данных чисел a и b.

Операцию, при помощи которой находят сумму, называют ***сложением***, а числа, которые складывают, — ***слагаемыми***.

Известно, что для любого натурального числа a имеет место равенство: $a + 0 = a$. С теоретико-множественных позиций оно означает, что если $a = n(A)$, $0 = n(\varnothing)$, то $a + 0 = n(A) + n(\varnothing) = n(A \cup \varnothing) = n(A) = a$.

Взаимосвязь сложения целых неотрицательных чисел и объединения множеств позволяет истолковать с теоретико-множественной точки зрения известные свойства сложения: свойство коммутативности (его в начальном курсе математики называют переместительным свойством) и свойство ассоциативности (его в начальном курсе математики называют сочетательным свойством).

Свойство коммутативности сложения формулируется следующим образом: *для любых целых неотрицательных чисел a и b выполняется равенство $a + b = b + a$*. Пусть $a = n(A)$, $b = n(B)$ и $A \cap B = \varnothing$. Тогда $a + b = n(A \cup B)$. Но $A \cup B = B \cup A$ (это свойство коммутативности объединения множеств) и, следовательно, $n(A \cup B) = n(B \cup A)$, откуда $a + b = b + a$ для любых целых неотрицательных чисел a и b.

Свойство ассоциативности сложения формулируется следующим образом: *для любых целых неотрицательных чисел a, b, c выполняется равенство* $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Пусть $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$, причем $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$. Тогда $(a + b) + c = n(A \cup B) + n(C) = n((A \cup B) \cup C) = n(A \cup (B \cup C)) = a + (b + c)$. Нетрудно видеть, что, выполняя преобразования, мы использовали свойство ассоциативности объединения множеств и теоретико-множественную трактовку суммы чисел.

Обратим внимание на назначение свойства ассоциативности сложения — оно объясняет, как можно находить сумму трех слагаемых: для этого достаточно сложить первое слагаемое со вторым и к полученному числу прибавить третье слагаемое или прибавить первое слагаемое к сумме второго и третьего. Но свойство ассоциативности не предполагает перестановки слагаемых.

Свойства коммутативности и ассоциативности сложения могут быть обобщены на любое число слагаемых. При этом коммутативность будет означать, что сумма не изменяется при любой перестановке слагаемых, а ассоциативность — что сумма не изменяется при любой группировке слагаемых (без изменения их порядка).

Взаимосвязь сложения целых неотрицательных чисел и объединения множеств позволяет обосновывать выбор действий при решении текстовых задач определенного вида. Выясним, например, почему следующая задача решается с помощью сложения: «В классе 10 девочек и 12 мальчиков. Сколько всего учеников в классе?».

В задаче рассматривается три множества: множество A девочек в классе, множество B мальчиков в классе и их объединение. Требуется узнать число элементов в этом объединении, а оно находится сложением. Так как $n(A) = 10$, $n(B) = 12$ и $A \cap B = \varnothing$, то $n(A \cup B) = 10 + 12$. Сумма $10 + 12$ — это математическая модель данной задачи. Вычислив значение этого выражения, получим ответ на вопрос задачи: $10 + 12 = 22$. Следовательно, в классе 22 ученика.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Каков теоретико-множественный смысл суммы:
   а) $3 + 5$; б) $0 + 4$; в) $0 + 0$.
2. Учащимся дано задание составить две задачи, решение которых записано в виде выражения $16 + 4$. Можно ли составить три задачи с таким решением; пять задач?
3. Объясните, почему следующие задачи решаются сложением:
   а) «В пакет положили 3 груши и 8 яблок. Сколько фруктов положили в пакет?»;
   б) «Дима сорвал 8 слив, Нина — 4. Сколько всего слив сорвали Дима и Нина вместе?»;

в) «Из коробки взяли 6 красных карандашей и 4 синих. Сколько всего карандашей взяли из коробки?».

4. Каким свойствами сложения надо воспользоваться, чтобы выражение $(4 + 5) + 6$ заменить выражением $5 + (4 + 6)$, а выражение $(7 + 2) + (3 + 8)$ — выражением $(7 + 3) + (2 + 8)$?

11.2. СМЫСЛ ОТНОШЕНИЙ «РАВНО» И «МЕНЬШЕ» ДЛЯ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Выясним, на какой теоретической основе происходит сравнение чисел.

Пусть даны два целых неотрицательных числа a и b. С теоретико-множественной точки зрения они представляют собой число элементов конечных множеств A и B: $a = n(A)$, $b = n(B)$. Если эти множества равномощны, то им соответствует одно и то же число, т. е. $a = b$. Приходим к определению:

> ***Числа a и b равны****, если они определяются равномощными множествами*:
>
> $$a = b \Leftrightarrow A \sim B, \text{ где } n(A) = a,\ n(B) = b.$$

Если множества A и B неравномощны, то числа, определяемые ими, различны.

В том случае, *если множество A равномощно собственному подмножеству множества B и $a = n(A)$, $b = n(B)$, говорят, что число a меньше b, и пишут*: $a < b$:

$$a < b \Leftrightarrow A \sim B_1, \text{ где } B_1 \subset B \text{ и } B_1 \neq B,\ B \neq \varnothing.$$

В этой же ситуации говорят, что b больше a, и пишут: $b > a$.

Из приведенных определений отношений «равно» и «меньше» исходят в начальной школе, когда объясняют, что $2 = 2$, $3 = 3$, $2 < 3$, $3 < 4$ и т. д. Например, при введении записи $3 = 3$ рассматривают два равномощных множества квадратов и кругов (рис. 11.1). При изучении отношения $3 < 4$ проводятся рассуждения: возьмем три розовых кружка и 4 синих и каждый розовый наложим на синий, видим, что синий кружок остался незакрытым, значит, розовых кружков меньше, чем синих, поэтому можно записать: $3 < 4$.

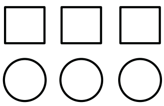


Рис. 11.1

Отметим еще, что если числа a и b определяются соответственно множествами A и B (кружков, квадратов, палочек и т. д.) и $a < b$, то выделение в множестве B собственного подмножества, равномощного множеству A, на практике происходит самыми различными способами: наложением, приложением, путем образования пар и т. д. Это возможно, так как отношение $a < b$ (так же как и отношение $a = b$) не зависит от выбора множеств A и B, таких, что $a = n(A)$, $b = n(B)$, важно только, чтобы A было равномощно собственному подмножеству множества B (а в случае равенства чисел A равномощно B).

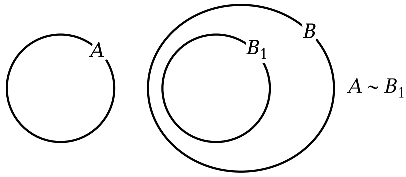


Рис. 11.2

Изложенный подход к определению отношения «меньше» имеет ограниченное применение, он может быть использован для сравнения чисел в пределах 20, поскольку связан с непосредственным сравнением двух групп предметов.

Как можно еще сравнивать целые неотрицательные числа? Пусть $a < b$ в смысле данного определения. Тогда $a = n(A)$, $b = n(B)$ и $A \sim B_1$, где B_1 — собственное подмножество множества B (рис. 11.2). Так как $B_1 \subset B$, то B можно представить в виде объединения множества B_1 и его дополнения $B \setminus B_1$. Обозначим это дополнение B'_1, т. е. $B \setminus B_1 = B'_1$. Тогда $B = B_1 \cup B'_1$ и, следовательно, $n(B) = n(B_1 \cup B'_1)$. Поскольку множества B_1 и B'_1 не пересекаются, то по определению суммы $n(B) = n(B_1) + n(B'_1)$. Но по условию $B_1 \sim A$, значит, $n(B_1) = n(A)$. Если число элементов в множестве B'_1 обозначить через c, то равенство $n(B) = n(B_1) + n(B'_1)$ можно записать в виде $b = a + c$, т. е. из того, что $a < b$, следует, что $b = a + c$. Нетрудно убедиться в справедливости и обратного утверждения.

Итак, пришли к другому определению отношения «меньше».

> ***Число a меньше числа b*** *тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число c, что $a + c = b$.*

Как, пользуясь этим определением, объяснить, что $3 < 7$? Ответ: $3 < 7$, поскольку существует такое целое неотрицательное число 4, что $3 + 4 = 7$.

Этот способ определения отношения «меньше» через сложение также используется в начальном курсе математики.

Рассмотрим еще один способ сравнения чисел.

Пусть $a < b$. Тогда про любое натуральное число x можно сказать, что если $x \le a$, то $x < b$. Это значит, что при $a < b$ отрезок натурального ряда $\mathbf{N}_a$ является собственным подмножеством отрезка $\mathbf{N}_b$. Справедливо и обратное утверждение.

Таким образом, получаем еще одно определение отношения «меньше».

> ***Число a меньше числа b*** *тогда и только тогда, когда отрезок натурального ряда* $\mathbf{N}_a$ *является собственным подмножеством отрезка ряда* $\mathbf{N}_b$:
>
> $$a < b \Leftrightarrow \mathbf{N}_a \subset \mathbf{N}_b \text{ и } \mathbf{N}_a \neq \mathbf{N}_b.$$

Например, справедливость неравенства $3 < 7$ с этих позиций можно объяснить тем, что $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Данная трактовка понятия «меньше» позволяет сравнивать числа, опираясь на знание их места в натуральном ряду.

Этот способ сравнения чисел также используется в начальном обучении математике: число, которое при счете встречается раньше, всегда меньше числа, которое идет позднее.

Исходя из любого определения отношения «меньше» для натуральных чисел, можно доказать, что оно обладает свойствами транзитивности и антисимметричности, т. е.:

- если $a < b$ и $b <$ с, то $a < c$;
- если $a < b$, то неверно, что $b < a$.

Так как отношение «меньше» для натуральных чисел транзитивно и антисимметрично, то оно является отношением порядка, а множество натуральных чисел — ***упорядоченным множеством***, и для любых натуральных чисел a и b может выполняться только одно из отношений: $a < b$, $a = b$, $b > a$.

Располагая натуральные числа так, чтобы из любых двух чисел сначала шло меньшее, получаем ряд натуральных чисел: 1, 2, 3, 4, ... Этот ряд ***бесконечен***.

Пусть a — некоторое натуральное число. Тогда $a + 1$ — это натуральное число, непосредственно следующее за a, и ни для одного числа a нельзя указать такое натуральное число x, что $a < x < a + 1$. Это свойство называют свойством ***дискретности*** множества натуральных чисел, а сами числа a и $a + 1$ называют ***соседними***.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Объясните тремя способами, почему: а) $3 < 6$; б) $0 < 5$.
2. Используя определение отношения «меньше» через сложение, докажите, что для любых натуральных чисел a, b, c справедливо утверждение: «Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$».

3. Первоклассникам предлагается заполнить пропуск в ряду 1, 2, □, 4, 5. Как может объяснить свой ответ учащийся? Какими свойствами натурального ряда он должен воспользоваться?

11.3. ВЫЧИТАНИЕ ЧИСЕЛ

Рассмотрим задачу, которую решают младшие школьники: «Около школы посадили 8 деревьев — берез и рябин. Берез 3. Сколько рябин посадили около школы?»

Чтобы ответить на вопрос задачи, надо из 8 вычесть 3, т. е. получить выражение 8 – 3 и найти его значение. Но как объяснить, почему здесь использовано вычитание чисел, а не другое действие? Построим вспомогательную модель задачи, изобразив каждое дерево, посаженное около школы, кружком. Среди посаженных деревьев 3 березы — на рисунке выделим их штриховкой (рис. 11.3). Тогда незаштрихованные кружки изображают рябины. Их столько, сколько будет, если из 8 вычесть 3.

Видим, что решение данной задачи связанно с выделением из данного множества подмножества и нахождением числа элементов в дополнении этого подмножества, т. е. вычитание чисел оказывается связанным с дополнением подмножества.

Вообще, *с теоретико-множественных позиций* ***разность натуральных чисел*** *a и b — это число элементов в дополнении множества B до множества A при условии, что $a = n(A)$, $b = n(B)$ и $B \subset A$:* $a - b = n(A) - n(B) = n(A \setminus B)$, $B \subset A$, $B \neq A$, $B \neq \varnothing$.

Аналогичное истолкование получает вычитание нуля, а также вычитание a из a. Так как $A \setminus \varnothing = A$, $A \setminus A = \varnothing$, то $a - 0 = a$ и $a - a = 0$.

Исходя из данной трактовки разности целых неотрицательных чисел можно доказать, что:

- разность $a - b$ не зависит от выбора множеств A и B, удовлетворяющих условию: $a = n(\text{A})$, $b = n(\text{B})$ и $B \subset A$;
- разность целых неотрицательных чисел a и b существует тогда и только тогда, когда $b \leq a$;

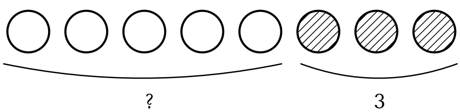


Рис. 11.3

- если разность целых неотрицательных чисел a и b существует, то она единственна.

Действие, с помощью которого находят разность $a - b$, называют ***вычитанием***, число a — ***уменьшаемым***, число b — ***вычитаемым***.

Рассматриваемый подход к сложению и вычитанию целых неотрицательных чисел позволяет истолковать с теоретико-множественных позиций правила вычитания числа из суммы и суммы из числа.

Выясним, например, теоретико-множественный смысл правила вычитания числа из суммы: **чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть это число из одного из слагаемых суммы и к полученному результату прибавить другое слагаемое.**

Используя буквенную символику, это правило можно записать следующим образом:

$$(a + b) - c = (a - c) + b, \text{ если } a > c;$$

$$(a + b) - c = a + (b - c), \text{ если } b > c.$$

Пусть A, B и C — такие множества, что $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$ и $A \cap B = \varnothing$, $C \subset A$ (рис. 11.4). Для данных множеств имеет место равенство $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$. Но $n((A \cup B \setminus C) = n(A \cup B) - n(C) = (a + b) - c$, а $n((A \setminus C) \cup B) = n(A \setminus C) \cup B) = n(A \setminus C) + n(B) = (a - c) + b$. И, следовательно, $(a + b)$ — $c = (a - c) + b$, если $a > c$.

Аналогично проводятся рассуждения и в том случае, когда $b > c$, а также для правила вычитания из числа суммы: ***чтобы вычесть из числа сумму чисел, достаточно вычесть из этого числа последовательно каждое слагаемое одно за другим***, т.е. если a, b, c — натуральные числа, то при а $> b + c$ имеем $a - (b + c) = (a - b) - c$.

Часто, чтобы проверить правильность выполнения действия вычитания, мы обращаемся к сложению. Почему? Очевидно, потому, что существует связь между действиями вычитания и сложения.

Пусть даны целые неотрицательные числа a и b, такие, что $a = n(A)$, $b = n(B)$ и $B \subset A$, и пусть разность этих чисел есть число элементов дополнения множества B до множества A, т.е. $a - b = n(A \setminus B)$.

На кругах Эйлера множества A, B, $A \setminus B$ изображаются так, как на рис. 11.5. Известно, что $A = B \cup (A \setminus B)$, откуда $n(\text{A}) = n(B \cup (A \setminus B))$. Так как $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$, то имеем $n(\text{A}) =$

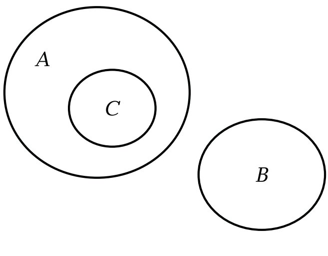


Рис. 11.4

$= n(B \cup (A \setminus B)) = n(B) + n(A \setminus B) = b + (a - b)$, т. е. разность $a - b$ есть такое число, сумма которого и числа b равна числу a.

Установленный факт дает возможность по-другому определить разность.

Разностью *целых неотрицательных чисел a и b называют такое целое неотрицательное число c, сумма которого и числа b равна a: $a - b = c \Leftrightarrow a = b + c$.*

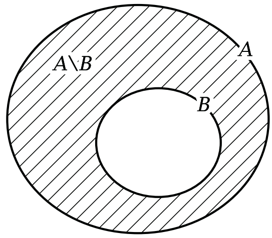


Рис. 11.5

Говорят, что вычитание является операцией, обратной сложению.

Исходя из второго определения разности, можно доказать *основные свойства разности*.

1. Разность целых неотрицательных чисел a и b существует тогда и только тогда, когда $b \leq a$.

Доказательство. Если $a = b$, то $a - b = 0$, и, следовательно, разность $a - b$ существует.

Если $b > a$, то, по определению отношения «меньше», существует такое натуральное число c, что $a = b + c$. Тогда, по определению разности, $c = a - b$, т. е. разность $a - b$ существует.

Если $a - b$ существует, то, по определению разности, найдется такое целое неотрицательное число c, что $a = b + c$. Если $c = 0$, то $a = b$; если $c > 0$, то $b < a$, по определению «меньше». Итак, $b \leq a$.

2. Если разность целых неотрицательных чисел a и b существует, то она единственна.

Доказательство. Предположим, существуют два значения разности $a - b$: $a - b = c_1$ и $a - b = c_2$. Тогда, по определению разности, имеем $a = b + c_1$ и $a = b + c_2$. Отсюда следует $b + c_1 = b + c_2$ и, значит, $c_1 = c_2$.

В начальном курсе математики вычитание целых неотрицательных чисел, как правило, рассматривается на основе практических упражнений, связанных с выделением подмножества данного множества и образованием нового множества — дополнения выделенного подмножества. При этом теоретико-множественная терминология и символика не используются. В дальнейшем вычитание рассматривается как операция, обратная сложению.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Каков теоретико-множественный смысл разности: а) 7 – 5; б) 3 – 3; в) 4 – 0.

2. В учебнике по математике для начальной школы приведено правило: «Для проверки вычитания к разности прибавляют вычитаемое. Если решение правильное, то получится уменьшаемое». Каково теоретическое обоснование этого правила?
3. Приведите примеры двух заданий из учебников по математике для начальных классов, при выполнении которых используется условие существования разности целых неотрицательных чисел.
4. Объясните, почему следующие задачи решаются при помощи вычитания:

   а) «У пруда росло 9 осин. 4 осины спилили. Сколько осин осталось у пруда?»;

   б) «Вова и Лида нарисовали 9 домиков. Лида нарисовала 4 домика. Сколько домиков нарисовал Вова?».
5. Составьте три задачи, решение которых записывается в виде выражения 12 – 8. На основании какого теоретического положения это возможно?
6. Запишите правило вычитания из числа суммы и раскройте его теоретико-множественный смысл.

11.4. ОТНОШЕНИЯ «БОЛЬШЕ НА» И «МЕНЬШЕ НА»

При решении задач и в практической деятельности часто требуется не только установить, что число a меньше (или больше) числа b, но и узнать, на сколько число a меньше (или больше) числа b.

Пусть a и b — целые неотрицательные числа, такие, что $a = n(A)$, $b = n(B)$ и установлено, что $a < b$. Это значит, что в множестве B можно выделить собственное подмножество B_1, равномощное множеству A, и множество $B \setminus B_1$ не пусто. Пусть $n(B \setminus B_1) = c$ $(c \neq 0)$. Тогда в множестве B элементов столько же, сколько в множестве A, да еще c элементов. В этом случае говорят, что *число a меньше числа b на c или что число b больше числа a на c*.

Так как $c = n(B \setminus B_1)$, где $B \subset B_1$, то $c = b - a$. Следовательно, *чтобы узнать, на сколько одно число меньше или больше другого, надо из большего числа вычесть меньшее.*

Рассмотрим, например, задачу: «У школы посадили 4 дуба и 9 лип. На сколько больше посадили лип?».

Согласно сформулированному правилу ответ на вопрос находится при помощи вычитания: 9 – 4 = 5 (лип). Однако возникает недоразумение: можно ли из 9 лип вычитать 4 дуба? Дело в том, что в данном случае из 9 лип вычитают 4 липы. Чтобы убедиться в этом, изобразим дубы кружками, а липы квадратиками (рис. 11.6).

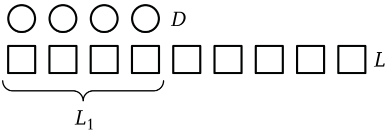


Рис. 11.6

Чтобы ответить на вопрос задачи, выделим в множестве лип подмножество L_1, равномощное множеству дубов (на рисунке это множество показано фигурной скобкой). Тогда остальные липы образуют дополнение множества L_1 до множества L и их число равно разности 9 и 4.

Отношения «больше на» и «меньше на» встречаются и в задачах другого вида.

Рассмотрим, например, такую задачу: «У школы посадили 4 дуба, а лип на 5 больше. Сколько лип посадили?».

В задаче идет речь о двух множествах деревьев: множестве дубов и множестве лип. Обозначим их D и L. Известно, что $n(D) = 4$, а число элементов в множестве L надо найти, зная, что в нем на 5 элементов больше, чем в D. Последнее означает, что $n(L) - n(D) = 5$, откуда $n(L) = 5 + n(D) = 5 + 4 = 9$. Можно дать более подробное пояснение, воспользовавшись рис. 11.6.

Так как в множестве L на 5 элементов больше, чем в множестве D, то это значит, что в множестве L столько же элементов, сколько в D, и еще 5 элементов. Другими словами, множество L можно рассматривать как объединение двух множеств L_1 и L_2, таких, что $L_1 \sim D$ и $n(L_2) = 5$. Поскольку множества L_1 и L_2 не имеют общих элементов, то $n(L) = n(L_1 \cup L_2) = n(L_1) + n(L_2) = 4 + 5 = 9$.

Обратимся теперь к задаче: «У школы посадили 9 лип, а дубов на 3 меньше. Сколько посадили дубов?».

В ней так же, как и в предыдущей, речь идет о двух множествах: множестве лип (L) и множестве дубов (D), но известно, что $n(L) = 9$, а число элементов в множестве D надо найти, зная, что в нем на 3 элемента меньше, чем в L. Последнее означает, что $n(L) - n(D) = 3$, откуда $n(D) = n(L) - 3 = 9 - 3 = 6$.

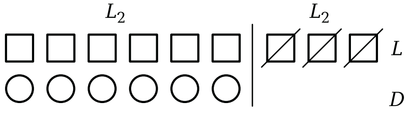


Рис. 11.7

Используя рис. 11.7, решение этой задачи можно выполнить так: поскольку дубов на 3 меньше, чем лип, то лип на 3 больше, чем дубов, поэтому, удалив из множества L подмножество, состоящее из трех элементов, получим множество, равномощное множеству D: $n(D) = 9 - 3 = 6$.

Естественно, что в начальной школе при решении приведенных задач объяснение будет выглядеть иначе, но суть его от этого не изменится.

Заметим, что предложение «5 больше 2 на 3» нельзя записать кратко, используя знак «>», поскольку для записи отношения «больше на» (так же как и для отношения «меньше на») нет специального знака. Знак «>» служит для обозначения отношения «больше», а знак «<» — отношения «меньше».

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Объясните, почему следующие задачи решаются с помощью сложения:
   а) «У Коли 7 марок, а у Саши на 3 марки больше. Сколько марок у Саши?»;
   б) «В парке 8 голубых елок. Их на 2 меньше, чем берез. Сколько берез в парке?».
2. Объясните, почему следующие задачи решаются с помощью вычитания:
   а) «Таня нашла 9 грибов, а Лида на 4 гриба меньше. Сколько грибов нашла Лида?»;
   б) «У школы посадили 4 дуба и 9 лип. На сколько меньше посадили дубов?»;
   в) «У Нины 6 тетрадей, а у Коли 4. На сколько тетрадей больше у Нины, чем у Коли?».
3. Составьте две задачи, в которых рассматривалось бы отношение «меньше на» и решение записывалось в виде выражения 10 – 2.
4. Составьте две задачи, в которых рассматривалось бы отношение «больше на» и которые решались бы с помощью сложения.

11.5. УМНОЖЕНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА

Понятие произведения целых неотрицательных чисел может быть определено по-разному. Рассмотрим сначала подход, в основе которого лежит понятие суммы.

***Произведением** целых неотрицательных чисел a и b называется такое целое неотрицательное число $a \cdot b$, которое удовлетворяет следующим условиям*:

1) $a \cdot b = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ слагаемых}}$, если $b > 1$;
2) $a \cdot b = a$, *если* $b = 1$;
3) $a \cdot b = 0$, *если* $b = 0$.

Случаю 1) этого определения можно дать теоретико-множественную трактовку. Если множества A, A_1, A_2, ..., A_b имеют по a элементов каждое и никакие два из них не пересекаются, то их объединение содержит $a \cdot b$ элементов. Следовательно, произведение $a \cdot b$ — это число элементов в объединении b попарно непересекающихся множеств, каждое из которых содержит по a элементов. Равенства $a \cdot 1 = a$ и $a \cdot 0 = 0$ принимаются по определению.

Действие, с помощью которого находят произведение чисел a и b, называют ***умножением***, а числа, которые умножают, — ***множителями***.

Произведение любых целых неотрицательных чисел существует, и оно единственно.

С данным определением умножения учащиеся знакомятся в начальных классах. Взаимосвязь умножения с объединением равночисленных попарно непересекающихся подмножеств позволяет обосновывать выбор действия умножения при решении текстовых задач.

Рассмотрим, например, такую задачу: «На каждое детское пальто нужно пришить 4 пуговицы. Сколько пуговиц нужно пришить на 6 таких пальто?».

Почему она решается с помощью умножения? Потому, что в ней требуется найти число элементов в объединении, состоящем из 6 множеств, в каждом из которых по 4 элемента. Согласно определению, это число находится умножением: $4 \cdot 6$. Произведение $4 \cdot 6$ является математической моделью данной задачи. Так как $4 \cdot 6 = 24$, то получаем ответ на вопрос задачи: на 6 пальто надо пришить 24 пуговицы.

Имеется и другое определение произведения целых неотрицательных чисел. Оно связано с декартовым произведением множеств.

Пусть даны два множества: $A = \{x, y, z\}$ и $B = \{n, t, r, s\}$. Найдем их декартово произведение, которое запишем в виде прямоугольной таблицы:

$$\begin{array}{llll} (x, n), & (x, t), & (x, r), & (x, s), \\ (y, n), & (y, t), & (y, r), & (y, s), \\ (z, n), & (z, t), & (z, r), & (z, s). \end{array}$$

В каждой строке таблицы все пары имеют одинаковую первую компоненту, а в каждом столбце одинаковая вторая компонента. При этом никакие две строки не имеют хотя бы одной одинаковой пары. Отсюда следует, что число элементов в декартовом произведении $A \times B$ равно $3 + 3 + 3 + 3 = 12$. С другой стороны, $n(A) = 3$, $n(B) = 4$ и $3 \cdot 4 = 12$. Видим, что число элементов в декартовом произведении данных множеств A и B равно произведению $n(A) \cdot n(B)$.

Вообще, если A и B — конечные множества, то $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

Таким образом, *произведение целых неотрицательных чисел a и b можно рассматривать как число элементов декартова произведения множеств A и B*, т. е.

$$a \cdot b = n(A \times B),$$

где $n(A) = a$, $n(B) = b$.

Исходя из определения произведения через декартово произведение множеств можно доказать следующие *свойства умножения.*

1. Свойство коммутативности: для любых целых неотрицательных чисел a и b справедливо равенство $a \cdot b = b \cdot a$.

2. Свойство ассоциативности: для любых целых неотрицательных чисел a, b, с справедливо равенство $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

3. Свойство дистрибутивности умножения относительно сложения: для любых целых неотрицательных чисел a, b, с справедливо равенство $(a \cdot b) \cdot c = ac + bc$.

4. Свойство дистрибутивности умножения относительно вычитания: для любых целых неотрицательных чисел a, b и c и $a \geq b$ справедливо равенство $(a - b) \cdot c = ac - bc$.

Свойства коммутативности и ассоциативности умножения можно распространить на любое число множителей. Как и при сложении, эти свойства часто используются совместно, т. е. произведение нескольких множителей не изменится, если их переставить любым способом или любую их группу заключить в скобки.

Свойства дистрибутивности устанавливают связь умножения со сложением и вычитанием. На основе этих свойств происходит раскрытие скобок в выражениях типа $(a + b) \cdot c$ и $(a - b) \cdot c$, а также вынесение множителя за скобки, если выражение имеет вид $ac - bc$ или $ac + bc$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Вместо «*» поставьте знаки «>», «<» или «=» так, чтобы получились истинные высказывания:

а) $3 \cdot 29 + 7 \cdot 29 * 10 \cdot 29$;
б) $8 \cdot 31 - 3 \cdot 31 * 6 \cdot 31$;
в) $7 \cdot 43 + 9 \cdot 43 * 15 \cdot 43$;
г) $3 \cdot 17 + 9 \cdot 17 * 13 \cdot 17$.

2. Являются ли доказательством переместительного закона умножения целых неотрицательных чисел рассуждения:
   $2 \cdot 3 = 6$ и $3 \cdot 2 = 6$;
   $4 \cdot 9 = 36$ и $9 \cdot 4 = 36$;
   $5 \cdot 17 = 85$ и $17 \cdot 5 = 85$.
   Следовательно, для любых целых неотрицательных чисел a и b справедливо равенство $ab = ba$.
3. Решите задачу различными арифметическими способами:
   а) «Двум мальчикам раздали по 3 зеленых и по 4 красных круга каждому. Сколько всего кругов раздали этим мальчикам?»;
   б) «Работница укладывала в коробки стеклянные бокалы. В каждую коробку она укладывала 3 зеленых бокала и 3 желтых. Она уложила 16 коробок. Сколько всего бокалов она уложила?».

11.6. ДЕЛЕНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА

Рассмотрим задачу, которую решают младшие школьники: «12 карандашей разложили в 3 коробки поровну. Сколько карандашей в каждой коробке?». Чтобы ответить на вопрос задачи, надо 12 разделить на 3, т. е. получить выражение 12 : 3 и найти его значение. Но как объяснить выбор действия деления?

Видим, что в задаче рассматривается множество, в котором 12 элементов. Это множество разбивается на 3 равночисленных подмножества. Требуется узнать число элементов в каждом таком подмножестве. Его мы и находим, выполнив деление — 12 : 3. Вычисляя значение этого выражения, получаем ответ на вопрос задачи — в каждой коробке по 4 карандаша.

Обратимся теперь к другой задаче: «12 карандашей надо разложить в коробки, по 3 карандаша в каждую. Сколько коробок понадобится?». Она также решается делением: 12 : 3 = 4 (коробки). Но число 4 здесь выступает в другом смысле — как число равночисленных подмножеств, на которое разбито множество всех карандашей.

Итак, мы увидели, что с теоретико-множественной точки зрения деление чисел оказывается связанным с разбиением конечного множества на равночисленные попарно непересекающиеся подмножества, и с его помощью решаются две задачи: нахождение числа элементов в каждом подмножестве разбиения (деление на равные части) и нахождение числа таких подмножеств (деление по содержанию).

В общем виде частное целого неотрицательного числа a и натурального числа b имеет следующий теоретико-множественный смысл.

Пусть $a = n(A)$ и множество A разбито на попарно непересекающиеся равночисленные подмножества:
если b — число подмножеств в разбиении множества A, то частное $a : b$ — это число элементов в каждом подмножестве;
если b — число элементов в каждом подмножестве, то частное $a : b$ — это число таких подмножеств.

Действие, с помощью которого находят частное $a : b$, называют ***делением***, число a — ***делимым***, а число b — ***делителем***.

Нередко для проверки правильности выполнения деления, обращаются к умножению. Например, $8\,304 : 346 = 24$, так как $24 \cdot 346 = 8\,304$. Установим взаимосвязь деления с умножением в общем виде.

Пусть $a = n(A)$ и множество A разбито на b попарно непересекающихся равночисленных подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_b$. Тогда $c = a : b$ есть число элементов в каждом таком подмножестве, т. е. $c = a : b = n(A_1) = n(A_2) = \ldots = n(A_b)$.

Так как по условию $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_b$, то $n(A) = n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_b)$. Но подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_b$ попарно не пересекаются, значит, по определению суммы $n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_b) = \underbrace{n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_b)}_{b \text{ слагаемых}} = c + c + \ldots + c$.

Согласно определению произведения, сумма b слагаемых, каждое из которых равно c, есть произведение $c \cdot b$.

Таким образом, установлено, что $a = c \cdot b$, т. е. частным чисел a и b является такое число c, произведение которого и числа b равно a. К такому же выводу мы придем, если частное $c = a : b$ будет числом подмножеств в разбиении множества A.

Получаем второе определение частного.

***Частным** целого неотрицательного числа a и натурального числа b называют такое целое неотрицательное число $c = a : b$, произведение которого и числа b равно a:*

$$a : b = c \Leftrightarrow a = c \cdot b.$$

Итак, во втором случае частное определено через произведение. Поэтому говорят, что деление есть действие, обратное умножению.

Приведем *свойства деления.*

1. Для того чтобы существовало частное двух натуральных чисел a и b, необходимо, чтобы $b \leq a$.

2. Если частное натуральных чисел a и b существует, то оно единственно.

3. Если $a = 0$ и $b \in \mathbf{N}$, то $0 : b = 0$.

4. **Деление на нуль невозможно.**

Пусть даны числа $a \neq 0$ и $b = 0$. Предположим, что частное чисел a и b существует. Тогда по определению частного существует такое целое неотрицательное число c, что $a = c \cdot 0$, отсюда $a = 0$. Пришли к противоречию с условием. Следовательно, *частное чисел $a \neq 0$ и $b = 0$ не существует.*

Если $a = 0$ и $b = 0$, то из предложения, что частное таких чисел a и b существует, следует равенство $0 = c \cdot 0$, истинное при любых значениях c, т. е. частным чисел $a = 0$ и $b = 0$ может быть любое число. Поэтому в математике считают, что *деление нуля на нуль невозможно.*

5. Если частные $a : c$ и $в : c$ существуют, то $(a + в) : c = a : c + в : c$. Это свойство называют правилом деления суммы на число.

В начальном курсе математики первоначальные представления о делении формируются, как правило, на основе практических упражнений, связанных с разбиением множества на попарно непересекающиеся равномощные подмножества, но без введения соответствующих терминологии и символики. В дальнейшем деление рассматривается как операция, обратная умножению.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Каков теоретико-множественный смысл частного: а) 6 : 3; б) 4 : 4; в) 3 : 1?
2. В учебнике по математике для начальной школы приведено правило: «Деление можно проверить умножением. 78 : 3 = = 26. Для проверки умножим полученное частное на делитель: 26 · 3 = 78. Получилось делимое». Каково теоретическое обоснование этого правила?
3. Сформулируйте необходимое условие существования частного натуральных чисел. Является ли оно достаточным?
4. Объясните, почему следующие задачи решаются с помощью деления:
   а) «Мама раздала детям 12 яблок, по 4 яблока каждому. Сколько детей получили яблоки?»;
   б) «Восемь морковок раздали 4 кроликам поровну. Сколько морковок дали каждому кролику?».

5. Найдите ошибку в следующем рассуждении: «16 : 16 = = 25 : 25 — это истинное равенство. После вынесения за скобки общего множителя будем иметь: 16 · (1 : 1) = = 25 · (1 : 1). Зная, что 1 : 1 = 1, получаем, что 16 = 25!».

11.7. ОТНОШЕНИЯ «БОЛЬШЕ В» И «МЕНЬШЕ В»

Часто при решении задач и в практической деятельности возникает вопрос: «Во сколько раз одно число больше или меньше другого?». Первое знакомство с отношениями «больше в» и «меньше в» происходит в начальной школе. Уточним смысл этих отношений.

Пусть дано множество A, в котором 6 элементов, и множество B, содержащее 2 элемента. Выделим в множестве A подмножества, равномощные множеству B (рис. 11.8). Их оказывается 3. В этом случае говорят, что число 6 больше числа 2 в 3 раза, а число 2 меньше числа 6 в 3 раза.

Вообще, *если даны числа a и b, такие что $a = n(A)$, $b = n(B)$, $a > b$, и множество A можно разбить на c подмножеств, равномощных множеству B, то говорят, что число a больше числа b в c раз, а число b меньше числа a в c раз.*

Но что представляет собой это число c? С теоретико-множественной точки зрения — это частное чисел a и b. Отсюда получаем правило: *чтобы узнать, во сколько раз одно число больше или меньше другого, необходимо большее число разделить на меньшее.*

Рассмотрим, например, задачу: «Посадили 3 дуба и 12 берез. Во сколько раз меньше посадили дубов, чем берез?».

Согласно сформулированному правилу, ответ на вопрос находится делением: 12 : 3 = 4 (раза). Смысл произведенной операции наглядно иллюстрирует рис. 11.9.

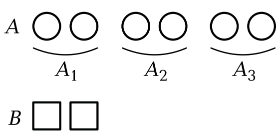


Рис. 11.8

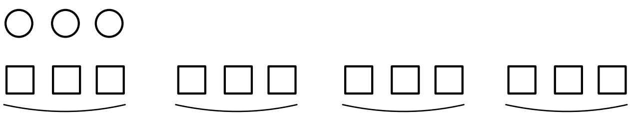


Рис. 11.9

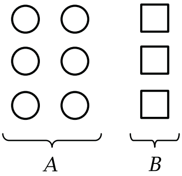


Рис. 11.10

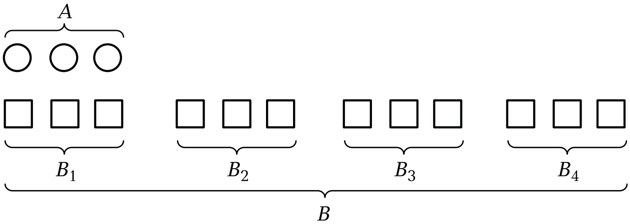


Рис. 11.11

Отношения «больше в» и «меньше в» встречаются и в задачах другого вида.

Задача 1. У Нины 6 тетрадей, а у Коли в 2 раза меньше. Сколько тетрадей у Коли?

Решение. В задаче речь идет о двух множествах: множестве A тетрадей у Нины и множестве B тетрадей у Коли. Известно, что $n(A) = 6$. Требуется найти $n(B)$, зная, что это число в 2 раза меньше числа 6. Исходя из этого условия множество A можно представить состоящим из двух равномощных подмножеств (рис. 11.10), и тогда в множестве B будет столько элементов, сколько в каждом подмножестве множества A, число которых находится делением: $6 : 2 = 3$. Значит, $n(B) = 3$, т. е. у Коли 3 тетради.

Задача 2. У Нины 3 тетради, а у Коли в 4 раза больше. Сколько тетрадей у Коли?

Решение. В этой задаче, так же как и в предыдущей, рассматриваются два множества: множество A тетрадей у Нины и множество B тетрадей у Коли. Известно, что $n(A) = 3$. Требуется найти $n(B)$, зная, что это число элементов в множестве B состоит из четырех непересекающихся подмножеств B_1, B_2, B_3 и B_4, равномощных множеству A (рис. 11.11), и, следовательно, $n(B_1) = n(B_2) = n(B_3) = n(B_4) = n(A)$. Но тогда число элементов в множестве B можно найти сложением: $n(B) = n(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) = n(B_1) + n(B_2) + n(B_3) + n(B_4) = 3 + 3 + 3 + 3$. Заменив сложение умножением, получаем $3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 4 = 12$. Значит, у Коли 12 тетрадей.

Заметим, что предложение «a больше b в c раз» нельзя записывать кратко, используя знак «>», поскольку для записи отношения «больше в» (как и для отношения «меньше в») нет специального знака.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Объясните смысл предложения: 1) «Число 10 больше числа 5 в 2 раза»; 2) «Число 2 меньше числа 8 в 4 раза».

2. Назовите отношения, которые рассматриваются в нижеприведенных задачах, решите эти задачи, выбор действия обоснуйте:
   а) «Для украшения елки ученица вырезала 4 звездочки, а флажков в 2 раза больше, чем звездочек. Сколько флажков вырезала ученица?»;
   б) «На участке растут 4 ели, их в 3 раза меньше, чем берез. Сколько на участке берез?»;
   в) «У Володи было 8 красных кружков, а синих в 2 раза меньше. Сколько синих кружков было у Володи?»;
   г) «Во дворе гуляли 4 утенка и 8 цыплят. Во сколько раз больше было цыплят, чем утят? Во сколько раз меньше было утят, чем цыплят?»;
   д) «В коробке лежало 8 цветных карандашей, их в 2 раза больше, чем простых. Сколько простых карандашей лежало в коробке?».
3. Составьте две задачи, в которых рассматривалось бы отношение «больше в» и решение которых имело бы вид равенства $15 : 3 = 5$.
4. Решите задачи, выбор действий обоснуйте:
   а) «Магазин продал 9 лодок, мотоциклов в 3 раза меньше, чем лодок, а велосипедов в 5 раз больше, чем лодок. Сколько лодок, мотоциклов и велосипедов продал магазин?»;
   б) «В книге 72 станицы. Лена прочитала страниц в 9 раз меньше, чем их содержится в этой книге. Сколько страниц ей осталось прочитать?».

11.8. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

Известно, что число 37 не делится на 8. Но существуют числа 4 и 5, такие, что $37 = 8 \cdot 4 + 5$. Говорят, что деление числа 37 на 8 выполнено с остатком, при этом найдено неполное частное 4 и остаток 5.

Вообще, ***разделить с остатком*** *целое неотрицательное число a на натуральное число b — это значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что $a = bq + r$ и $0 \le r < b$.*

Обратим внимание на особенности остатка, которые вытекают из данного определения. Остаток есть натуральное число, меньшее делителя b, поэтому при делении целых неотрицательных чисел на b может получиться всего b различных остатков: 0, 1, 2, 3, ..., $b - 1$. Например, при делении с остатком целых неотрицательных чисел на 5 возможны остатки: 0, 1, 2, 3, 4.

Если $a < b$, то при делении a на b с остатком неполное частное $q = 0$, а остаток $r =$ а, т. е. $a = 0 \cdot b + a$. Например, при делении числа 7 на 9 имеем: $7 = 0 \cdot 9 + 7$.

Всегда ли можно выполнить деление a на b с остатком? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение, которое примем без доказательства.

Для любого целого неотрицательного числа a и натурального числа b существуют целые неотрицательные числа q и r, такие, что $a = b \cdot q + r$, причем $0 \le r < b$. Пара целых неотрицательных чисел (q, r), обладающая этим свойством, единственная.

Выясним, каков теоретико-множественный смысл деления с остатком.

Пусть $a = n(A)$ и множество A разбито на множества $A_1, A_2, ..., A_q$, X так, что множества $A_1, A_2, ..., A_q$ равномощны и содержат по b элементов, а множество X содержит меньше элементов, чем каждое из множеств $A_1, A_2, ..., A_q$, например, $n(X) = r$. Тогда $a = bq + r$, где $0 \le r < b$. Таким образом, неполное частное q — это число равномощных подмножеств (в каждом из которых b элементов) в разбиении множества A, а остаток r — это число элементов в множестве X.

В начальной школе знакомство с действием деления с остатком происходит на теоретико-множественной основе. Используется такая запись действия деления с остатком: 9 : 2 = 4 (ост. 1). Подчеркивается, что если при делении получается остаток, то он всегда меньше делителя. Рассматривается случай деления с остатком меньшего числа на большее.

Важность деления с остатком в том, что оно лежит в основе алгоритма деления многозначных чисел.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Выполните деление с остатком: а) 42 на 5; б) 82 на 9; в) 9 на 12.
2. Какие остатки могут получиться при делении целых неотрицательных чисел на: а) 3; б) 8; в) 35?
3. Какой вид имеет число a, если при делении на 7 оно дает в остатке: а) 0; б) 3; и) 6?
4. При делении 228 на некоторое число b в частном получили число 8, а в остатке 4. На какое число делили 228?
5. Разбейте множество натуральных чисел от 5 до 23 на классы чисел, дающих одинаковые остатки при делении на 4. Сколько классов получилось?

6. На какие классы разбивается множество целых неотрицательных чисел в зависимости от остатков, получаемых при делении на 6? Назовите по два представителя каждого класса.
7. Приведите примеры заданий из учебников математики для начальных классов, при решении которых учащиеся выполняют деление с остатком.

Глава 12

НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО КАК МЕРА ВЕЛИЧИНЫ

Известно, что числа возникли из потребности счета и измерения, но если для счета достаточно натуральных чисел, то для измерения величин нужны и другие числа. В данной главе в качестве результата измерения величин будем рассматривать только натуральные числа. Определив натуральное число как меру величины, выясним, какой смысл имеют арифметические действия над такими числами. Эти знания нужны учителю начальных классов не только для обоснования выбора действий при решении задач с величинами, но и для понимания еще одного подхода к трактовке натурального числа, существующего в начальном обучении математике.

12.1. СМЫСЛ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА, ПОЛУЧЕННОГО В РЕЗУЛЬТАТЕ ИЗМЕРЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ. СМЫСЛ СУММЫ И РАЗНОСТИ

Выясняя смысл натурального числа как меры величины, все рассуждения будем вести на примере одной величины — длины отрезка.

Уточним сначала понятие «отрезок состоит из отрезков».

> Считают, что ***отрезок x состоит из отрезков*** $x_1, x_2, ..., x_n$, если он является их объединением и никакие два из них не имеют общих внутренних точек, хотя и могут иметь общие концы.

В этом же случае говорят, что отрезок x *разбит на отрезки* x_1, x_2, ..., x_n и пишут $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Пусть задан отрезок x, его длину обозначим X. Выберем из множества отрезков некоторый отрезок e, назовем его единичным отрезком, а длину обозначим буквой E.

Если отрезок x состоит из a отрезков, каждый из которых равен единичному отрезку e, то число a называют ***численным значением длины*** X *данного отрезка* при единице длины E, или ***мерой длины*** X при единице длины E.

Пишут: $X = a \cdot E$ или $a = m_E(X)$. Например, отрезок a (рис. 12.1) состоит из 6 отрезков, равных отрезку e. Если длину единичного отрезка обозначить буквой E, а длину отрезка x — буквой X, то можно написать, что $X = 6E$ или $6 = m_E(X)$.

Из данного определения получаем, что *натуральное число как результат измерения длины отрезка* (*или как мера длины отрезка*) *показывает, из скольких единичных отрезков состоит отрезок, длина которого измеряется.* При выбранной единице длины E это число единственное.

В связи с таким подходом к натуральному числу сделаем два замечания:

1. При переходе к другой единице длины численное значение длины заданного отрезка изменяется, хотя сам отрезок остается неизменным. Так, если в качестве единицы длины выбрать длину отрезка e_1 (см. рис. 12.1), то мера длины отрезка x будет равна числу 3. Записать это можно так: $X = 3 \cdot E_1$, или $m_{E1}(X) = 3$.

2. Если отрезок x состоит из a отрезков, равных e, а отрезок y — из b отрезков, равных e, то $a = b$ тогда и только тогда, когда отрезки x и y равны.

Аналогично можно истолковать смысл натурального числа и в связи с измерением других величин. Так, в записи 3 см^2 число 3 означает, что фигура F состоит из трех единичных квадратов площадью, равной 1 см^2.

Выясним теперь, какой смысл имеют сумма и разность натуральных чисел, полученных в результате измерения величин.

Нетрудно убедиться в том, что если отрезок x состоит из отрезков y и z и длины отрезков y и z выражаются натуральными числами, то мера длины отрезка x равна сумме мер длин его частей.

Из этого факта следует, что ***сумму натуральных чисел a и b*** *можно рассматривать как меру длины отрезка x, состоящего из отрезков y и z, мерами длин которых являются числа a и b*:

$$a + b = m_E(Y) + m_E(Z) = m_E(Y + Z).$$

Аналогичный смысл имеет сумма натуральных чисел, полученных в результате измерения других положительных скалярных величин.

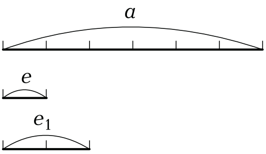


Рис. 12.1

Покажем, как используется данный подход к обоснованию выбора действия сложения при решении задачи: «В саду собрали 7 кг смородины и 3 кг малины. Сколько всего килограммов ягод собрали?».

В задаче две величины — масса смородины и масса малины. Известны их численные значения. Требуется найти численное значение массы, которая получится, если данные массы сложить. Для этого, согласно рассмотренному утверждению, надо сложить численные значения массы смородины и массы малины, т. е. получить выражение 7 + 3. Это математическая модель данной задачи. Вычислив значение выражения 7 + 3, получим ответ на вопрос задачи.

Нетрудно также убедиться в том, что если отрезок x состоит из отрезков y и z и длины отрезков x и y выражаются натуральными числами, то мера длины отрезка z равна разности мер длин отрезков x и y.

Из этого факта следует, что ***разность натуральных чисел a и b*** *можно рассматривать как меру длины такого отрезка* $z = x - y$, *что* $z + y = x$, *если мера длины отрезка* x *равна* a, *мера длины отрезка* y *равна* b:

$$a - b = m_E(X) - m_E(Y) = m_E(X - Y).$$

Аналогичный смысл имеет разность натуральных чисел, полученных в результате измерения других положительных скалярных величин.

Выясним, как используется данный подход к обоснованию выбора действия вычитания при решении текстовых задач, например, такой: «Купили 7 кг картофеля и капусты. Сколько килограммов картофеля купили, если капусты было 3 кг?».

В задаче рассматривается масса овощей, известно ее численное значение. Эта масса складывается из массы картофеля и массы капусты, численное значение которой также известно. Требуется узнать численное значение массы картофеля. Так как массу картофеля можно получить, вычитая из всей массы купленных овощей массу капусты, то численное значение массы картофеля находят действием вычитания: 7 – 3. Вычислив значение этого выражения, получим ответ на вопрос задачи.

С помощью сложения или вычитания решаются также текстовые задачи, в которых величины связаны отношением «больше на» или «меньше на». Например: «Купили 3 кг моркови, а картофеля на 2 кг больше. Сколько килограммов картофеля купили?».

В задаче речь идет о двух величинах — массе моркови и массе картофеля. Численное значение первой массы известно, а численное значение второй надо найти, зная, что картофеля на 2 кг больше, чем моркови.

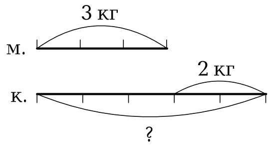


Рис. 12.2

Если построить вспомогательную модель задачи (рис. 12.2), то можно сразу увидеть, что картофеля купили столько же, сколько моркови, и еще 2 кг, т. е. масса картофеля складывается из двух масс (3 кг и 2 кг), и чтобы найти ее численное значение, надо сложить численные значения масс-слагаемых. Получаем выражение 3 + 2, значение которого и будет ответом на вопрос задачи.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Какой смысл имеет натуральное число 7, если оно получено в результате измерения:
   а) длины отрезка;
   б) массы тела?
2. Объясните, почему следующие задачи решаются с помощью сложения:
   а) «Когда из ящика взяли 4 кг яблок, то в нем осталось 6 кг. Сколько килограммов яблок было в ящике первоначально?»;
   б) «На пошив кофты израсходовали 2 м ткани, а на платье на 3 м больше. Сколько метров ткани израсходовали на платье?».
3. Объясните, почему следующие задачи решаются с помощью вычитания:
   а) «От ленты длиной 5 м отрезали 2 м. Сколько метров ленты осталось?»;
   б) «С первого участка собрали 10 мешков картофеля, а со второго на 3 мешка меньше. Сколько мешков картофеля собрали со второго участка?».

12.2. СМЫСЛ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, ПОЛУЧЕННЫХ В РЕЗУЛЬТАТЕ ИЗМЕРЕНИЯ ВЕЛИЧИН

При рассмотрении смысла суммы и разности натуральных чисел — мер величин — было установлено, что сложение таких чисел связано со сложением величин, а вычитание — с вычитанием величин. И естественно возникает вопрос: с каким действием над величинами связано умножение и деление натуральных чисел? Чтобы ответить на него, проанализируем задачу: «Купили 3 пакета муки по 2 кг в каждом. Сколько килограммов муки купили?».

В этой задаче речь идет о массе муки, которая сначала измерена пакетами, и известно численное значение этой массы при указанной единице массы. Требуется найти результат измерения той же массы муки, но уже с помощью другой единицы — килограмм, при условии, что 1 пакет — это 2 кг муки.

Рассуждения, связанные с поиском численного значения массы муки при единице 1 кг, можно представить в таком виде:

$$3 \text{ пак.} = 3 \cdot \text{пак.} = 3 \cdot (2 \text{ кг}) = 3 \cdot 2 \cdot \text{кг} = (3 \cdot 2) \text{ кг}.$$

Видим, что ответ на вопрос задачи находится умножением и что оно оказалось связанным с переходом (в процессе измерения массы) от одной единицы массы к другой, более мелкой.

Вообще, *если натуральное число a — мера величины X при единице величины E, натуральное число b — мера величины E при единице величины E_1, то произведение $a \cdot b$ — это мера величины X при единице длины E_1*:

$$a \cdot b = m_E(X) \cdot m_{E1}(E) = m_{E1}(X).$$

Задача. Обосновать выбор действия при решении задачи: «В одной коробке 6 ручек. Сколько ручек в трех таких коробках?».

Решение. В задаче речь идет о количестве ручек, которое сначала измерено коробками, и известно численное значение этой величины при указанной единице. Требуется найти численное значение этой же величины при новой единице — ручка, причем известно, что коробка — это 6 ручек. Тогда 3 кор. = 3 · кор. = 3 · (6 руч.) = = 3 · (6 · руч.) = (3 · 6) · руч. = 18 · руч. = 18 руч. Таким образом, задача решается при помощи действия умножения, поскольку в ней при измерении осуществляется переход от одной единицы величины (коробка) к другой — ручка.

Чтобы установить смысл частного натуральных чисел, полученных в результате измерения величин, вернемся к рассмотрению задачи про муку, которую надо разложить в пакеты, по 2 кг в каждый.

В задаче рассматривается масса муки, которая сначала измерена с помощью единицы массы — 1 кг, и известно численное значение этой массы при указанной единице массы. Требуется найти результат измерения этой же массы, но уже с помощью другой единицы — пакета, причем известно, что 1 пакет — это 2 кг.

Рассуждения, связанные с поиском численного значения массы муки при новой единице — пакет, можно представить в таком виде:

$$6 \text{ кг} = 6 \cdot \text{кг} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \text{пак}\right) = \left(6 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \text{пак} =$$

$$= (6 : 2) \cdot \text{пак.} = 3 \cdot \text{пак.} = 3 \text{ пак.}$$

Видим, что ответ на вопрос задачи находится делением и что оно связано с переходом (в процессе измерения) от одной единицы массы к другой, более крупной.

Вообще, *если натуральное число a — мера величины X при единице величины E, а натуральное число b — мера новой единицы величины E_1 при единице величины E, то частное a : b — это мера величины X при единице величины E_1*:

$$a : b = m_E(X) : m_E(E_1) = m_{E1}(X).$$

Итак, умножение и деление натуральных чисел — мер величин — оказалось связанным с переходом от одной единицы величины к другой в процессе измерения одной и той же величины.

Выбор действий умножения и деления при решении текстовых задач с величинами можно обосновывать иначе, используя понятие умножения величины на натуральное число.

Рассмотрим, например, задачу: «Купили 3 пакета муки, по 2 кг в каждом. Сколько килограммов муки купили?». Чтобы ответить на вопрос задачи, надо массу 2 кг повторить слагаемым три раза, т. е. массу 2 кг умножить на число 3. Численное значение полученной при этом величины находим, умножив численное значение массы муки в одном пакете на число 3. Произведение 2 · 3 будет математической моделью данной задачи. Вычислив его значение, будем иметь ответ на вопрос задачи.

С этих позиций выбор действия при решении задачи «6 кг муки разложили на пакеты по 2 кг в каждый. Сколько получилось пакетов?» можно обосновать так. В задаче надо узнать, сколько раз масса 2 кг укладывается в 6 кг, т. е. надо массу 6 кг разделить на массу 2 кг. В результате должно получиться число, которое находим, разделив численное значение одной величины на численное значение другой. Таким образом, получаем частное 6 : 2. Его значение и будет ответом на вопрос задачи.

Пользуясь описанным подходом к трактовке умножения и деления натуральных чисел, можно обосновывать выбор действия и при решении текстовых задач с отношениями «больше в» и «меньше в».

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Объясните различными способами, почему следующие задачи решаются с помощью умножения:
   а) «В одной корзине 5 кг яблок. Сколько килограммов яблок в трех таких корзинах?»;
   б) «За один день Саша прочитывает 4 страницы книги. Сколько страниц в книге, если Саша прочитал ее за 6 дней?».
2. Объясните различными способами, почему следующие задачи решаются с помощью деления:
   а) «Восемь килограммов варенья надо разложить в банки по 2 кг в каждую. Сколько получится банок?»;
   б) «На садовом участке посадили 15 кустов смородины по 5 кустов в каждом ряду. Сколько было рядов?».

Глава 13

ЗАПИСЬ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И АЛГОРИТМЫ ДЕЙСТВИЙ НАД НИМИ

Человеку постоянно приходится иметь дело с числами, поэтому нужно уметь правильно называть и записывать любое число, производить действия над числами. Как правило, все успешно справляются с этим. Помогает здесь способ записи чисел, который в настоящее время используется повсеместно и носит название *десятичной системы счисления*.

Изучение этой системы начинается в начальных классах, и, конечно, учителю нужны определенные знания в этой области. Он должен знать различные способы записи чисел, алгоритмы арифметических действий и их обоснование. Предлагаемый материал дает тот минимум, без которого невозможно разобраться с различными методическими подходами к обучению младших школьников способам записи чисел и выполнению над ними действий.

13.1. ИЗ ИСТОРИИ ЗАПИСИ ЧИСЕЛ

Понятие числа возникло в глубокой древности. Тогда же возникла и необходимость в назывании и записи чисел.

Язык для наименования, записи чисел и выполнения действий над ними называют *системой счисления*.

Называть числа и вести счет люди научились еще до появления письменности. В этом им помогали, прежде всего, пальцы рук и ног. Издревле употреблялся еще такой вид инструментального счета, как деревянные палочки с зарубками, шнуры и веревки с узлами. Веревочные счеты с узелками употреблялись в России и во многих странах Европы.

Способ «записи» чисел с помощью зарубок или узлов был не слишком удобным, так как для записи больших чисел приходилось делать много зарубок или узлов, что затрудняло не только запись, но и сравнение чисел друг с другом, трудно было выполнять и действия над ними. Поэтому возникли иные, более экономичные записи чисел: счет стали вести группами, состоящими из одинакового числа элементов. Наряду с группами по 10 элементов встречались группы по 5, 12, 20 элементов. Так, счет двадцатками использовали люди племени майя. «Следы» такого счета сохранились в датском и некоторых других европейских языках. Иногда применялся счет пятка́ми, а также группами по 12 элементов. В Древнем Вавилоне считали группами по 60 единиц. Древневавилонская система используется до сих пор при измерении времени и величины углов в минутах и секундах.

Наибольшее распространение получила десятичная система записи чисел. Эта система, принятая сейчас почти всюду, основана на группировании десятками и берет свое начало от счета на пальцах. Десятичная система счисления возникла в Индии в VI в. Однако вид индийских цифр значительно отличается от современной их записи. В течение многих столетий, переходя от народа к народу, старинные индийские цифры много раз изменялись, пока приняли современную форму.

Первыми заимствовали у индийцев цифры и десятичную систему счисления арабы. Распространению этого способа записи чисел и правил выполнения арифметических действий над числами способствовала книга среднеазиатского ученого аль-Хорезми «Об индийском счете», созданная им в начале IX в.

Европейцы познакомились с достижениями индо-арабской математики в XI в. Расширение торговли повлекло за собой значительное усложнение счета, появилась потребность в совершенствовании методов счета. Поэтому европейские математики обратились к трудам греческих и арабских ученых, перевели их на латинский язык. С десятичной системой счисления европейцы познакомились через перевод книги аль-Хорезми. В 1202 г. выходит «Книга абака» Л. Фибоначчи, где были введены индийские цифры и нуль. С XIII в. начинается внедрение десятичной системы, и к XVI в. она стала повсеместно использоваться в странах Западной Европы.

Распространению десятичной системы в России способствовала книга первого русского выдающегося педагога-математика Л. Ф. Магницкого «Арифметика, сиречь наука числительная», вышедшая в 1703 г. на славянском языке. Она являлась энциклопедией математических знаний того времени. Все вычисления в ней проводятся при помощи цифр индийской нумерации. В «Арифметике» выделено особое действие «нумерация, или счисление»: «Нумерация есть счисление (называние) словами всех чисел, которые изображаемы быть могут десятью такими знаками: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Из них девять значащих; последняя же 0 (которая цифрой или ничем именуется), если стоит одна, то сама по себе значения не имеет. Когда же она присоединяется к какой-нибудь значащей, то увеличивает в десять раз, как будет показано в дальнейшем». Однозначные числа в книге Л. Ф. Магницкого называются «перстами»; числа, составленные из единиц и нулей, — «суставами»; все остальные числа — «сочинениями». Таблица с названиями круглых чисел доведена Магницким до числа с 24 нулями. В «Арифметике» в стихотворной форме подчеркнуто: «Число есть бесконечно...».

Различают ***позиционные*** и ***непозиционные системы счисления***. В позиционных системах один и тот же знак может обозначать различные числа в зависимости от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа. Так, шестидесятеричная вавилонская и десятичная системы счисления являются позиционными.

Непозиционные системы характеризуются тем, что каждый знак (из совокупности знаков, принятых в данной системе для обозначения чисел) всегда обозначает одно и то же число, независимо от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа. Примером такой системы может служить римская система, возникшая в средние века. В этой системе счисления имеются знаки для узловых чисел: единица обозначается — I, пять — V, пятьдесят — L, сто — C, пятьсот — D, тысяча — M. Все остальные числа получаются с помощью двух арифметических операций: сложения и вычитания. Вычитание производится, если знак, соответствующий меньшему узловому числу, стоит перед знаком большего узлового числа. Например, IV — четыре, XC — девяносто. Запишем несколько чисел в римской нумерации:

- 193 — это сто (C) плюс девяносто, т. е. сто без десяти (XC), плюс три (III); следовательно, число 193 записывается как CXCIII;
- 564 — это пятьсот (D) плюс пятьдесят (L) плюс десять (X) плюс четыре, т. е. пять без одного (IV). Следовательно, 564 записывается как DLXIV;
- 2708 — это две тысячи (MM) плюс пятьсот (D) плюс сто (C) плюс сто (C) плюс пять (V) плюс три (III). Следовательно, число 2 708 записывается так: MMDCCVIII.

Если число содержит несколько (немного) тысяч, то для его записи в римской нумерации пользуются повторением знака M. Вообще же числа четырех-, пяти- и шестизначные записывались с помощью буквы m (от лат. слова *mille* — тысяча), слева от которой записывали тысячи, а справа — сотни, десятки, единицы. Так, запись CXXXIIImDCCCXLII является записью числа 133 842.

В России до XVII в. в основном употреблялась славянская нумерация, более стройная и удобная, чем римская, но тоже непозиционная. В ней числа изображались буквами славянского алфавита, над которыми для отличия ставили особый знак — титло.

Естественно, что такие системы записи чисел, как римская или славянская, были удобнее, чем зарубки на бирках, поскольку позволяли записывать большие числа. Однако выполнение действий над ними в таких системах было весьма сложным делом. Поэтому на смену им пришла десятичная система счисления.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Запишите в десятичной системе счисления: XXVII, XXI, XLIV, LXII, LXXVIII, XCV, CDXXIII, MCDVII, MCDXIX, MDCCCLXXI.
2. Запишите в римской системе счисления: 24, 117, 468, 1 941, 1997, 2 000.

13.2. ЗАПИСЬ ЧИСЕЛ В ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ

Как известно, в десятичной системе счисления для записи чисел используется 10 знаков (цифр): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Из них образуются конечные последовательности, которые являются краткими записями чисел. Например, последовательность 3745 является краткой записью числа $3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$.

Десятичной записью натурального числа x *называется его представление в виде*: $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$, *где коэффициенты* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ *принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и* $a_n \neq 0$.

Сумму $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ принято записывать кратко:

$$a_n\, a_{n-1} \ldots\, a_1 a_0.$$

В арифметике доказано, что любое натуральное число x можно представить в виде:

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0, \quad (1)$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, и такая запись единственна.

Если натуральное число x представлено в виде $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$, то числа $1, 10, 10^2, \ldots, 10^n$ называют ***разрядными единицами*** соответственно первого, второго, ..., $(n + 1)$-го разряда, причем 10 единиц одного разряда составляют одну единицу следующего высшего разряда, т. е. отношение соседних разрядов равно 10 — основанию системы счисления.

Три первых разряда в записи числа соединяют в одну группу и называют *первым классом*, или ***классом единиц***. В первый класс входят единицы, десятки и сотни.

Четвертый, пятый и шестой разряды в записи числа образуют *второй класс* — ***класс тысяч***. В него входят единицы тысяч, десятки тысяч и сотни тысяч.

Затем следует *третий класс* — ***класс миллионов***, состоящий так же из трех разрядов: седьмого, восьмого и девятого, т. е. из единиц миллионов, десятков миллионов и сотен миллионов.

Последующие три разряда также образуют новый класс и т. д. Выделение классов единиц, тысяч, миллионов и т. д. создает удобства для записи и прочтения чисел.

В десятичной системе всем числам можно дать название (имя). Это достигается следующим образом: имеются названия первых десяти чисел, затем из них в соответствии с определением десятичной записи и путем прибавления еще немногих слов образуются названия последующих чисел. Так, числа второго десятка (они представляются в виде $1 \cdot 10 + a_0$) образуются из соединения первых десяти названий и несколько измененного слова «десять» («дцать»):

- *одиннадцать* — один на десять,
- *двенадцать* — два на десять и т. д.

Может быть, естественнее было бы говорить «два и десять», но наши предки предпочли говорить «два на десять», что и сохранилось в речи.

Слово «двадцать» обозначает два десятка.

Числа третьего десятка (это числа вида $2 \cdot 10 + a_0$) получают путем прибавления к слову «двадцать» названий чисел первого десятка: двадцать один, двадцать два и т. д.

Продолжая далее счет, получают названия чисел четвертого, пятого, шестого, седьмого, восьмого, девятого и десятого десятков. Названия этих чисел образуются так же, как и в пределах третьего десятка, только в трех случаях появляются новые слова: сорок (для обозначения четырех десятков), девяносто (для обозначения девяти десятков) и сто (для обозначения десяти десятков). Названия чисел второй сотни составляются из слова «сто» и названий чисел первого и последующих десятков. Таким путем образуются наименования: сто один, сто два, ..., сто двадцать и т. д. Отсчитав новую сотню, будем иметь две сотни, которые для краткости называют «двести». Для получения чисел, больших двухсот, снова воспользуемся названиями чисел первого и последующих десятков, присоединяя их к слову «двести». Затем получим особые названия: триста, четыреста, пятьсот и т. д., до тех пор, пока не отсчитаем десять сотен, которые носят название ***тысяча***.

Счет за пределами тысячи ведется так: прибавляя к тысяче по единице (тысяча один, тысяча два и т. д.), получим две тысячи, три тысячи и т. д. Когда же отсчитаем тысячу тысяч, то это число получит особое наименование — ***миллион***. Далее считаем миллионами до тех пор, пока не дойдем до тысячи миллионов. Полученное новое число — тысяча миллионов — носит особое название — ***миллиард***. Миллион миллионов называется ***биллионом***. В вычислениях миллион принято записывать в виде 10^6, миллиард — 10^9, биллион — 10^{12}. По аналогии можно получить записи еще больших чисел: ***триллион*** — 10^{15}, ***квадриллион*** — 10^{18} и т. д.

Таким образом, для того чтобы назвать все натуральные числа в пределах миллиарда, потребовалось только 16 различных слов: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять, сорок, девяносто, сто, тысяча, миллион, миллиард. Остальные названия чисел (в пределах миллиарда) образуются из основных.

Пусть x и y — натуральные числа, запись которых дана в десятичной системе счисления:

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0;$$

$$y = b_m \cdot 10^m + b_{m-1} \cdot 10^{m-1} + ... + b_1 \cdot 10 + b_0.$$

Тогда число x меньше числа y, если выполнено одно из условий:

а) $n < m$;

б) $n = m$, но $a_n < b_n$;

в) $n = m$, $a_n = b_n$, ..., $a_k = b_k$, но $a_{k-1} < b_{k-1}$.

Это утверждение примем без доказательства. Пользуясь им, легко вести сравнение чисел.

Например, если $x = 3\,456$, а $y = 3\,467$, то $x < y$, так как число тысяч и сотен в записи одинаковое, но десятков в числе x меньше, чем десятков в числе y.

Вопросы наименования и записи чисел рассматриваются в начальном курсе математики в разделе «Нумерация». При этом десятичной записью натурального числа считают его представление в виде суммы разрядных слагаемых. Например, 3 000 + 700 + 40 + 5 есть сумма разрядных слагаемых числа 3 745. Представление числа в виде таких сумм удобно для его наименования: три тысячи семьсот сорок пять.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Запишите число в виде суммы разрядных слагаемых: а) 4 725; б) 3 370; в) 10 255.
2. Какие числа представлены следующими суммами:
   а) $6 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10 + 8$;
   б) $7 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10$;
   в) $8 \cdot 10^4 + 10^3 + 3 \cdot 10 + 1$;
   г) $10^5 + 10^2$?
3. Напишите наибольшее трехзначное и десятизначное числа, в которых все цифры различны.
4. Сумма цифр двузначного числа равна 9, причем цифра десятков вдвое больше цифры единиц. Найдите это число.
5. Каждая цифра пятизначного числа на единицу больше предыдущей, а сумма его цифр равна 30. Какое это число?
6. Младшим школьникам предложена задача: «Запиши 5 четырехзначных чисел, используя цифры 2, 5, 0, 6 (одна и та же цифра не должна повторяться в записи числа)». А сколько вообще всевозможных четырехзначных чисел можно записать, используя цифры 2, 5, 0 и 6 так, чтобы одна и та же цифра не повторялась в записи числа?

13.3. АЛГОРИТМ СЛОЖЕНИЯ

Сложение однозначных чисел можно выполнить, основываясь на определении этого действия, но чтобы всякий раз не обращаться к определению, все суммы, которые получаются при сложении однозначных чисел, записывают в особую таблицу, называемую ***таблицей сложения однозначных чисел***, и запоминают.

Естественно, смысл сложения сохраняется и для многозначных чисел, но практическое выполнение сложения происходит по особым правилам. Сумму многозначных чисел обычно находят, выполняя сложение столбиком. Например,

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 341 \\ 7238 \end{array} \\ \hline 7579 \end{array}$$

Выясним, каким образом возникает этот алгоритм, какие теоретические положения лежат в его основе.

Представим слагаемые 341 и 7 238 в виде суммы степеней десяти с коэффициентами:

$$341 + 7\,238 = (3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 1) + (7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 8).$$

Раскроем скобки в полученном выражении, поменяем местами и сгруппируем слагаемые так, чтобы единицы оказались рядом с единицами, десятки — с десятками и т. д. Все эти преобразования можно выполнить на основании соответствующих свойств сложения. Свойство ассоциативности разрешает записать выражение без скобок:

$$3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 1 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 8.$$

На основании свойства коммутативности поменяем местами слагаемые: $7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 1 + 8$. Согласно свойству ассоциативности произведем группировку: $7 \cdot 10^3 + (3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2) + (4 \cdot 10 + 3 \cdot 10) + (1 + 8)$. Вынесем за скобки в первой выделенной группе число 10^2, а во второй — 10. Это можно сделать в соответствии со свойством дистрибутивности умножения относительно сложения:

$$7 \cdot 10^3 + (3 + 2) \cdot 10^2 + (4 + 3) \cdot 10 + (1 + 8).$$

Итак, сложение чисел 341 и 7 238 свелось к сложению однозначных чисел, изображенных цифрами соответствующих разрядов. Эти суммы находим по таблице сложения: $7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 9$. Полученное выражение есть десятичная запись числа 7 579.

Видим, что в основе алгоритма сложения многозначных чисел лежат следующие теоретические факты:

- способ записи чисел в десятичной системе счисления;
- свойства коммутативности и ассоциативности сложения;
- дистрибутивность умножения относительно сложения;
- таблица сложения однозначных чисел.

Нетрудно убедиться в том, что в случае сложения чисел «с переходом через десяток» теоретические основы алгоритма сложения будут теми же.

В общем виде ***алгоритм сложения натуральных чисел***, записанных в десятичной системе счисления, формулируют так:

1) *записывают второе слагаемое под первым так, чтобы соответствующие разряды находилось друг под другом*;

2) *складывают единицы первого разряда*:

2а) *если сумма меньше десяти, записывают ее в разряд единиц ответа и переходят к следующему разряду* (*десятков*);

2б) *если сумма единиц больше или равна десяти, то представляют ее в виде* $a_0 + b_0 = 1 \cdot 10 + c_0$, *где* c_0 — *однозначное число*; *записывают* c_0 *в разряд единиц ответа и прибавляют 1 к десяткам первого слагаемого, после чего переходят к разряду десятков*;

3) *повторяют те же действия с десятками, затем — с сотнями и т. д. Процесс заканчивается, когда оказываются сложенными цифры старших разрядов. При этом если их сумма больше или равна десяти, то приписывают впереди обоих слагаемых нули, увеличивают нуль перед первым слагаемым на 1 и выполняют сложение*: $1 + 0 = 1$.

Заметим, что в этом алгоритме (как и в некоторых других) для краткости употребляется термин «цифра» вместо «однозначное число, изображаемое цифрой».

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. На примере сложения чисел 237 и 526 покажите, какие теоретические факты лежат в основе алгоритма сложения многозначных чисел.
2. При изучении алгоритма сложения трехзначных чисел в начальной школе последовательно рассматриваются такие случаи сложения: 231 + 342; 425 + 135; 237 + 526; 529 + 299. Каковы особенности каждого из этих случаев?
3. Вычислите устно значение выражений; использованный прием обоснуйте:

а) 2 746 + 7 254 + 9 876; б) 7 238 + 8 978 + 2 768;
в) (4 729 + 8 473) + 5 271; г) 4 232 + 7 419 + 5 768 + + 2 591;
д) (357 + 768 + 589) + (332 + 211 + 643).

4. Какие рассуждения школьников вы будете считать правильными при выполнении задания:
а) можно ли утверждать, что значения сумм в каждом столбике одинаковы:

2 459 + 121	53 075 + 2 306
2 458 + 122	53 076 + 2 305
2 457 + 123	53 006 + 2 375
2 456 + 124	53 306 + 2 075;

б) можно ли записать значения этих сумм в порядке возрастания:
4 583 + 321 4 593 + 311 4 573 + 331?

13.4. АЛГОРИТМ ВЫЧИТАНИЯ

Вычитание однозначного числа b из однозначного или двузначного числа a, не превышающего 18, сводится к поиску такого числа c, что $b + c = a$, и происходит с учетом таблицы сложения однозначных чисел.

Если же числа a и b многозначные и $b < a$, то смысл действия вычитания остается тем же, что и для вычитания в пределах 20, но техника нахождения разности становится иной: разность многозначных чисел чаще всего находят, производя вычисления столбиком по определенному алгоритму. Выясним, каким образом возникает этот алгоритм, какие теоретические факты лежат в его основе.

Рассмотрим разность чисел 485 и 231. Воспользуемся правилом записи чисел в десятичной системе счисления и представим данную разность в таком виде: $485 - 231 = (4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5) - (2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1)$. Чтобы вычесть из числа $4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5$ сумму $2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1$, достаточно вычесть из него каждое слагаемое этой суммы одно за другим, и тогда:

$$(4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5) - (2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1) =$$
$$= (4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5) - 2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 - 1.$$

Чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть его из какого-либо одного слагаемого (большего или равного этому числу). Поэтому число $2 \cdot 10^2$ вычтем из слагаемого $4 \cdot 10^2$, число $3 \cdot 10$ — из слагаемого $8 \cdot 10$, а число 1 — из слагаемого 5, тогда:

$$(4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5) - 2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 - 1 =$$
$$= (4 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10^2) + (8 \cdot 10 - 3 \cdot 10) + (5 - 1).$$

Воспользуемся дистрибутивностью умножения относительно вычитания и вынесем за скобки 10^2 и 10. Тогда выражение будет иметь вид:

$$(4 - 2) \cdot 10^2 + (8 - 3) \cdot 10 + (5 - 1).$$

Видим, что вычитание трехзначного числа 231 из трехзначного числа 485 свелось к вычитанию однозначных чисел, изображенных цифрами соответствующих разрядов в записи заданных трехзначных чисел. Разности 4 – 2, 8 – 3 и 5 – 1 находим по таблице сложения и получаем выражение: $2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$, которое является записью числа 254 в десятичной системе счисления. Таким образом, 485 – 231 = 254. Выражение $(4 - 2) \cdot 10^2 + (8 - 3) \cdot 10 + (5 - 1)$ задает правило вычитания, которое обычно выполняется столбиком:

$$\begin{array}{r} _{-}485 \\ 231 \\ \hline 254 \end{array}$$

Видим, что вычитание многозначного числа из многозначного основано:

- на способе записи числа в десятичной системе счисления;
- правилах вычитания числа из суммы и суммы из числа;
- свойстве дистрибутивности умножения относительно вычитания;
- таблице сложения однозначных чисел.

Нетрудно убедиться в том, что если в каком-нибудь разряде уменьшаемого стоит однозначное число, меньшее числа в том же разряде вычитаемого, то в основе вычитания лежат те же теоретические факты и таблица сложения однозначных чисел.

В общем виде ***алгоритм вычитания чисел*** в десятичной системе счисления формулируют так:

1) *записывают вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом*;

2а) *если цифра в разряде единиц вычитаемого не превосходит соответствующей цифры уменьшаемого, то вычитают ее из цифры уменьшаемого, записывают разность в разряд единиц искомого числа, после чего переходят к следующему разряду*;

2б) *если цифра единиц вычитаемого больше единиц уменьшаемого, т. е.* $b_0 > a_0$, *а цифра десятков уменьшаемого отлична от нуля,* *то уменьшают цифру десятков уменьшаемого на 1, одновременно увеличивая цифру единиц уменьшаемого на 10, после чего вычитают из числа $10 + a_0$ число b_0 и записывают разность в разряде единиц искомого числа, далее переходят к следующему разряду;*

2в) *если цифра единиц вычитаемого больше цифры единиц уменьшаемого, а цифры, стоящие в разряде десятков, сотен и т. д. уменьшаемого, равны нулю, то берут первую отличную от нуля цифру в уменьшаемом (после разряда единиц), уменьшают ее на 1, все цифры в младших разрядах до разряда десятков включительно увеличивают на 9, а цифру в разряде единиц — на 10: вычитают b_0 из $10 + a_0$, записывают разность в разряде единиц искомого числа и переходят к следующему разряду;*

3) *в следующем разряде повторяют описанный процесс;*

4) *вычитание заканчивается, когда производится вычитание из старшего разряда уменьшаемого.*

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. На примере нахождения разности чисел 469 и 246, 757 и 208 проиллюстрируйте теоретические основы алгоритма вычитания чисел столбиком.
2. Выполните вычитание, используя запись столбиком и объясняя каждый шаг алгоритма:
   а) 84 072 – 63 894; б) 940 235 – 32 849;
   в) 935 204 – 326 435; г) 653 481 – 233 694.
3. Сколько пятизначных чисел можно записать, используя цифры 1 и 0? Чему равна разность между наибольшим и наименьшим из этих пятизначных чисел?
4. Назовите способы проверки правильности вычитания многозначных чисел и дайте им обоснование.
5. Вычислите (устно) значение выражения, использованные приемы обоснуйте:
   а) 2 362 – (839 + 1 362); б) (1 241 + 576) – 841;
   в) (7 929 + 5 027 + 4 843) – (2 027 + 3 843).

13.5. АЛГОРИТМ УМНОЖЕНИЯ

Умножение однозначных чисел можно выполнить, основываясь на определении этого действия. Но чтобы всякий раз не обращаться к определению, все произведения однозначных чисел записывают в особую таблицу, называемую ***таблицей умножения однозначных чисел***, и запоминают.

Естественно, что смысл умножения сохраняется и для многозначных чисел, но меняется техника вычислений. Произведение многозначных чисел, как правило, находят, выполняя умножение столбиком по определенному алгоритму. Выясним, каким образом возникает этот алгоритм, какие теоретические факты лежат в его основе.

Умножим, например, столбиком 428 на 263:

$$\begin{array}{r} \times\;\; 428 \\ 263 \\ \hline 1284 \\ +\;2568 \\ 856 \\ \hline 112564 \end{array}$$

Видим, что для получения ответа нам пришлось умножить 428 на 3, 6 и 2, т. е. умножить многозначное число на однозначное; но, умножив на 6, результат записали по-особому, поместив единицы числа 2 568 под десятками числа 1 284, так как умножали на 60 и получили число 25 680, но нуль в конце записи опустили. Слагаемое 856 — это результат умножения на две сотни, т. е. число 85 600. Кроме того, нам пришлось найти сумму многозначных чисел.

Итак, чтобы выполнять умножение многозначного числа на многозначное, необходимо уметь:

- умножать многозначное число на однозначное и на степень десяти;
- складывать многозначные числа.

Сначала рассмотрим умножение многозначного числа на однозначное. Умножим, например, 428 на 3. Согласно правилу записи чисел в десятичной системе счисления, 428 можно представить в виде $4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$, и тогда $428 \cdot 3 = (4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8) \cdot 3$. На основании дистрибутивности умножения относительно сложения получим: $(4 \cdot 3) \cdot 10^2 + (2 \cdot 3) \cdot 10 + 8 \cdot 3$, а на основании свойства ассоциативности умножения: $(4 \cdot 10^2) \cdot 3 + (2 \cdot 10) \cdot 3 + 8 \cdot 3$. Произведения в скобках могут быть найдены по таблице умножения однозначных чисел: $12 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 24$. Видим, что умножение многозначного числа на однозначное свелось к умножению однозначных чисел. Но чтобы получить окончательный результат, надо преобразовать выражение $12 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 24$ — коэффициенты перед степенями 10 должны быть меньше 10. Для этого представим число 12 в виде $1 \cdot 10 + 2$, а число 24 в виде $2 \cdot 10 + 4$. Затем в выражении $(1 \cdot 10 + 2) \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + (2 \cdot 10 + 4)$ раскроем скобки: $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 4$. На основании ассоциативности сложения и дистрибутивности умножения относительно сложения сгруппируем слагаемые $6 \cdot 10$ и $2 \cdot 10$ и вынесем 10 за скобки: $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + (6 + 2) \cdot 10 + 4$. Сумма $6 + 2$ есть сумма однозначных чисел и может быть найдена по таблице сложения: $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4$. Полученное выражение есть десятичная запись числа 1 284, т. е. $428 \cdot 3 = 1284$.

Таким образом, умножение многозначного числа на однозначное основано:

- на записи чисел в десятичной системе счисления;
- свойствах сложения и умножения;
- таблицах сложения и умножения однозначных чисел.

В общем виде ***алгоритм умножения многозначного числа*** $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ ***на однозначное число*** y формулируют так:

1) *записывают второе число под первым*;

2) *умножают цифры разряда единиц числа* x *на число* y:

2а) *если произведение меньше 10, то записывают его в разряд единиц ответа и переходят к следующему разряду (десятков)*;

2б) *если произведение больше или равно 10, то представляют его в виде*: $10q_1 + c_0$, *где* c_0 *— однозначное число*; *записывают* c_0 *в разряд единиц ответа и запоминают* q_1 *— перенос в следующий разряд*;

3) *умножают цифры разряда десятков на число* y, *прибавляют к полученному произведению число* q_1 *и повторяют процесс, описанный в п. 2*;

4) *процесс умножения заканчивается, когда окажется умноженной цифра старшего разряда.*

Как известно, умножение числа x на число вида 10^k сводится к приписыванию к десятичной записи данного числа k нулей. Например, $347 \cdot 10^3 = (3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7) \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 0 = 347\,000$.

Заметим еще, что умножение на число $y \cdot 10^k$, где y — однозначное число, сводится к умножению на однозначное число y и на число 10^k. Например, $52 \cdot 300 = 52 \cdot (3 \cdot 10^2) = (52 \cdot 3) \cdot 10^2 = 156 \cdot 10^2 = 15\,600$.

Рассмотрим теперь алгоритм умножения многозначного числа на многозначное. Обратимся сначала к примеру, с которого начинали, т. е. к произведению $428 \cdot 263$. Представим число 263 в виде суммы $2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3$ и запишем произведение $428 \cdot (2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3)$. Оно, согласно дистрибутивности умножения относительно сложения, равно $428 \cdot (2 \cdot 10^2) + 428 \cdot (6 \cdot 10) + 428 \cdot 3$. Отсюда, применив ассоциативное свойство умножения, получим: $(428 \cdot 2) \cdot 10^2 + (428 \cdot 6) \cdot 10 + 428 \cdot 3$. Видим, что умножение многозначного числа 428 на многозначное число 263 свелось к умножению многозначного числа 428 на однозначные числа 2, 6 и 3, а также на степени 10.

В общем виде ***алгоритм умножения числа*** $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ ***на число*** $y = \overline{b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0}$ формулируют так:

1) *записывают множитель x и под ним — второй множитель y*;

2) *умножают число x на младший разряд b_0 числа y и записывают произведение $x \cdot b_0$ под числом y*;

3) *умножают число x на следующий разряд b_1 числа y и записываем произведение $x \cdot b_1$, но со сдвигом на один разряд влево, что соответствует умножению $x \cdot b_1$ на 10*;

4) *продолжают вычисление произведений до вычисления $x \cdot b_k$*;

5) *полученные k + 1 произведения складывают.*

Изучение алгоритма умножения многозначных чисел в начальном курсе математики, как правило, проходит в соответствии с выделенными этапами. Различия имеются только в записи. Например, при обосновании случая умножения многозначного числа на однозначное пишут: $428 \cdot 3 = (400 + 20 + 8) \cdot 3 = 400 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 8 \cdot 3 = 1\,200 + 60 + 24 = 1\,284$. Основой выполненных преобразований являются:

- представление первого множителя в виде суммы разрядных слагаемых (т. е. запись числа в десятичной системе счисления);
- правило умножения суммы на число (или дистрибутивность умножения относительно сложения);
- умножение «круглых» (т. е. оканчивающихся нулями) чисел на однозначное число, что сводится к умножению однозначных чисел.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. На примере умножения числа 357 на 4 проиллюстрируйте теоретические основы алгоритма умножения многозначного числа на однозначное.
2. На примере умножения 452 на 186 проиллюстрируйте теоретические основы алгоритма умножения многозначного числа на многозначное.
3. Объясните, почему следующие задачи решаются с помощью умножения чисел и решите их:
   а) «В школу привезли 56 пачек книг, по 24 книги в каждой пачке. Сколько всего книг привезли в школу?»;

б) «Земля при обращении вокруг Солнца за сутки проходит примерно 2 505 624 км. Какой путь проходит Земля за 365 дней?».

4. Решение задачи запишите в виде числового выражения, а затем найдите его значение:
а) «На элеватор отвезли 472 т овса, ржи на 236 т больше, чем овса, а пшеницы в 4 раза больше, чем овса и ржи вместе. Сколько тонн пшеницы отвезли на элеватор?»;
б) «Столяр изготовляет в день 18 рам, а его помощник — на 4 рамы меньше. Сколько рам они изготовят за 24 дня, если каждый день будут работать вместе?».

13.6. АЛГОРИТМ ДЕЛЕНИЯ

Когда речь идет о технике деления чисел, то этот процесс рассматривают как действие деления с остатком: разделить целое неотрицательное число a на натуральное число b — это значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что $a = bq + r$, причем $0 \le r < b$.

Выясним сначала, как осуществляется деление на однозначное число. Если на однозначное число делят однозначное или двузначное (не превышающее 81), то используется таблица умножения однозначных чисел. Например, частным чисел 54 и 9 будет число 6, так как $9 \cdot 6 = 54$. Если же надо разделить 51 на 9, то находят ближайшее к нему меньшее число, которое делится на 9 — это число 45, и, следовательно, неполным частным при делении 51 на 9 будет число 5. Чтобы найти остаток, надо из 51 вычесть 45 ($51 - 45 = 6$). Таким образом, $51 = 9 \cdot 5 + 6$, т. е. при делении 51 на 9 получается неполное частное 5 и остаток, равный 6. Записать это можно иначе, используя деление уголком:

$$\begin{array}{r|l} -51 & 9 \\ \cline{2-2} \underline{45} & 5 \\ 6 & \end{array}$$

Будем теперь делить трехзначное число на однозначное, например, 378 на 4. Разделить 378 на 4 — это значит найти такое неполное частное q и остаток r, что $378 = 4q + r$, причем остаток r должен удовлетворять условию $0 \le r < b$, а неполное частное q — условию $4q \le 378 < 4(q + 1)$.

Определим, сколько цифр будет содержаться в записи числа q. Однозначным число q быть не может, так как тогда произведение $4q$ может быть максимально равно 36 и, значит, не будут выполняться условия, сформулированные выше для r и q. Если число q двузначное, т. е. если $10 < q < 100$, то $40 < 4q < 400$ и, следовательно, $40 < 378 < 400$, что верно. Значит, частное чисел 378 и 4 — число двузначное.

Чтобы найти цифру десятков частного, умножим последовательно делитель 4 на 20, 30, 40 и т. д. Поскольку $4 \cdot 90 = 360$, а $4 \cdot 100 = 400$ и $360 < 378 < 400$, то неполное частное заключено между числами 90 и 100, т. е. $q = 90 + q_0$. Но тогда должны выполняться неравенства: $4 \cdot (90 + q_0) \leq 378 < 4 \cdot (90 + q_0 + 1)$, откуда $360 + 4q_0 \leq 378 < 360 + 4(q_0 + 1)$ и $4q_0 \leq 18 < 4(q_0 + 1)$. Число q_0 (цифру единиц частного), удовлетворяющее последнему неравенству, можно найти подбором, воспользовавшись таблицей умножения. Получаем, что $q_0 = 4$ и, следовательно, неполное частное $q = 90 + 4 = 94$. Остаток находится вычитанием: $378 = 4 \cdot 94 + 2$.

Итак, при делении числа 378 на 4 получается неполное частное 94 и остаток 2: $378 – 4 \cdot 94 + 2$.

Описанный процесс является основой деления уголком:

$$
\begin{array}{r|l}
-378 & \underline{4} \\
\underline{36\;\,} & 94 \\
-18 & \\
\underline{16} & \\
2 &
\end{array}
$$

Аналогично выполняется деление многозначного числа на многозначное. Разделим, например, 4316 на 52. Выполнить это деление — значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что $4\,316 = 52q + r$, $0 \leq r < 52$, а неполное частное должно удовлетворять неравенству $52q \leq 4\,316 < 52(q + 1)$.

Определим число цифр в частном q. Очевидно, частное заключено между числами 10 и 100 (т. е. q — двузначное число), так как $520 < 4\,316 < 5\,200$. Чтобы найти цифру десятков частного, умножим последовательно делитель 52 на 20, 30, 40, 50 и т. д. Поскольку $52 \cdot 80 = 4\,160$, а $52 \cdot 90 = 4\,680$ и $4\,160 < 4\,316 < 4\,680$, то неполное частное заключено между числами 80 и 90, т. е. $q = 80 + q_0$. Но тогда должны выполняться неравенства: $52 \cdot (80 + q_0) \leq 4\,316 < 52 \cdot (80 + q_0 + 1)$; $4\,160 + 52q_0 \leq 4\,316 < 4\,160 + 52 \cdot (q_0 + 1)$; $52q_0 \leq 156 < 52(q_0 + 1)$.

Число q_0 (цифру единиц частного), удовлетворяющее последнему неравенству, можно найти подбором: $156 = 52 \cdot 3$, т. е. имеем случай, когда остаток равен 0. Следовательно, при делении 4 316 на 52 получается частное 83.

Приведенные рассуждения лежат в основе деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} -\,4316 & 52 \\ \underline{416} & 83 \\ -\,156 & \\ \underline{156} & \\ 0 & \end{array}$$

Обобщением различных случаев деления целого неотрицательного числа a на натуральное число b является следующий ***алгоритм деления уголком***:

1) *если $a = b$, то частное $q = 1$, остаток $r = 0$*;

2) *если $a > b$ и число разрядов в числах a и b одинаково, то частное q находят перебором, последовательно умножая b на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, так как $a < 10b$. Этот перебор можно ускорить, выполнив деление с остатком цифр старших разрядов чисел a и b*;

3) *если $a > b$ и число разрядов в числе a больше, чем в числе b, то записывают делимое a и справа от него делитель b, который отделяют от a уголком и ведут поиск частного и остатка в такой последовательности*:

- *выделяют в числе a столько старших разрядов, сколько разрядов в числе b или, если необходимо, на один разряд больше, но так, чтобы они образовали число d_1, большее или равное b. Перебором находят частное q_1 чисел d_1 и b, последовательно умножая b на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Записывают q_1 под уголком (ниже b)*;
- *умножают b на q_1 и записывают произведение под числом a так, чтобы младший разряд числа bq_1 был написан под младшим разрядом выделенного числа d_1*;
- *проводят черту под bq_1 и находят разность $r_1 = d_1 - bq_1$*;
- *записывают разность r_1 под числом bq_1, приписывают справа к r_1 старший разряд из неиспользованных разрядов делимого a и сравнивают полученное число d_2 с числом b*;
- *если $d_2 \geq$ равно b, то относительно него поступают согласно п. 1 или п. 2. Частное q_2 записывают после q_1*;
- *если $d_2 < b$, то приписывают еще столько следующих разрядов, сколько необходимо, чтобы получить первое число d_3, большее или равное b. В этом случае записывают после q_1 такое же число нулей. Затем относительно d_3 поступают согласно пп. 1, 2. Частное q_2 записывают после нулей. Если при использовании младшего разряда числа a окажется, что $d_3 < b$, то частное чисел d_3 и b равно нулю, и этот нуль записывают последним разрядом к частному, а остаток $r = d_3$.*

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Не выполняя деления, определите число цифр частного чисел:
а) 486 и 7; б) 7 243 и 238;
в) 5 792 и 27; г) 43 126 и 543.
2. На примере деления числа 867 на 3 проиллюстрируйте теоретические основы алгоритма деления трехзначного числа на однозначное.
3. Обоснуйте процесс деления уголком a на b, если:
а) $a = 4\ 066$, $b = 38$; б) $a = 4\ 816$, $b = 112$.
4. Как, не вычисляя, можно установить, что деление выполнено неправильно, если:
а) $51\ 054 : 127 = 42$; б) $405\ 945 : 135 = 307$?
5. Не вычисляя значений выражений, поставьте знаки «>» или «<» так, чтобы получились верные неравенства:
а) 1 834 : 7 … 783 : 9; б) 8 554 : 91 … 7 488 : 72;
в) 137 532 : 146 … 253 242 : 198; г) 7 248 : 6 … 758 547 : 801.
6. Объясните, почему при делении p на k в частном получаются нули, если:
а) $p = 753$, $k = 5$; б) $p = 1\ 560$, $k = 6$; в) $p = 84\ 800$, $k = 4$;
г) $p = 613$, $k = 3$; д) $p = 4\ 086$, $k = 2$; е) $p = 4\ 012$, $k = 4$.
7. Не производя деления, разбейте данные выражения на классы с помощью отношения «иметь в частном одно и то же количество цифр»:
а) 20 700 : 300; б) 5 460 : 60; в) 30 720 : 40;
г) 20 300 : 700; д) 14 640 : 80; е) 1 500 : 300.
8. Найдите значение выражения:
а) $8\ 919 : 9 + 114\ 240 : 21$;
б) $1\ 190 - 35\ 360 : 34 + 271$;
в) $8\ 631 - (99 + 44\ 352 : 63)$;
г) $48\ 600 \cdot (5\ 045 - 2\ 040) : 243 - (86\ 043 : 43 + 504) \cdot 200$;
д) $4\ 880 \cdot (546 + 534) : 122 - 6\ 390 \cdot (8\ 004 - 6\ 924) \cdot 213$.

Глава 14

О РАСШИРЕНИИ МНОЖЕСТВА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Большинство применений математики связано с измерением величин. Однако для этих целей натуральных чисел недостаточно: не всегда единица величины укладывается целое число раз в измеряемой величине. Чтобы в такой ситуации точно выразить результат измерения, необходимо расширить запас чисел за счет введения чисел, отличных от натуральных. Еще в глубокой древности при измерении длин, площадей, масс и других величин начали использовать дробные числа — получили класс *рациональных чисел*, а в V в до н. э. математиками школы Пифагора было установлено, что существуют отрезки, длину которых при выбранной единице длины нельзя выразить рациональным числом. Позднее, в связи с решением этой проблемы, появились *числа иррациональные*. Рациональные и иррациональные числа назвали *действительными*. Строгое определение действительного числа и обоснование его свойств было дано в XIX в. Взаимосвязи между множествами натуральных, рациональных и действительных чисел представлены на рис. 14.1.

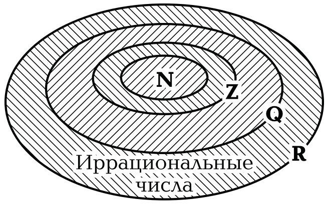


Рис. 14.1

Действительные числа — не последние в ряду различных чисел. Процесс, начавшийся с расширения множества натуральных чисел, продолжается и в настоящее время — этого требует развитие различных наук и самой математики.

Знакомство учащихся с дробными числами происходит, как правило, в начальных классах. Затем понятие дроби уточняется и расширяется в средней школе. В связи с этим учителю необходимо владеть понятием дроби и рационального числа, знать правила выполнения действий над рациональными числами, свойства этих действий. Все это нужно не только для того, чтобы математически грамотно ввести понятие дроби и обучать младших школьников выполнять с ними действия, но и, что не менее важно, видеть взаимосвязи множества рациональных чисел с множеством натуральных чисел. Без их понимания нельзя решить проблему преемственности в обучении математике в начальных и последующих классах школы.

14.1. ПОНЯТИЕ ДРОБИ

Пусть требуется измерить длину отрезка x с помощью единичного отрезка e (рис. 14.2). При измерении оказалось, что отрезок x состоит из трех отрезков, равных e, и отрезка, который короче отрезка e. В этом случае длина отрезка x не может быть выражена

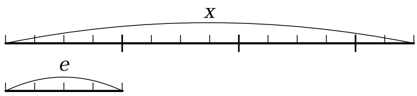


Рис. 14.2

натуральным числом. Однако, если отрезок e разбить на 4 равные части, то отрезок x окажется состоящим из 14 отрезков, равных четвертой части отрезка e. И тогда, говоря о длине отрезка x, мы должны указать два числа: 4 и 14 (четвертая часть отрезка e укладывается в отрезке точно 14 раз). Поэтому условились длину отрезка x записывать в виде $\frac{14}{4} \cdot E$, где E — длина единичного отрезка e, а символ $\frac{14}{4}$ называть дробью.

В общем виде понятие дроби можно определить так.

> Пусть даны отрезок x и единичный отрезок e, длина которого E. Если отрезок x состоит из m отрезков, равных n-й части отрезка e, то длина отрезка x может быть представлена в виде $\frac{m}{n} \cdot E$, где символ $\frac{m}{n}$ называют ***дробью*** (и читают «эм энных»).

В записи дроби $\frac{m}{n}$ числа m и n — натуральные числа, m называют ***числителем***, n — ***знаменателем*** дроби.

Дробь $\frac{m}{n}$ называют *правильной*, если ее числитель меньше знаменателя, и *неправильной*, если ее числитель больше знаменателя или равен ему.

Вернемся к рисунку 14.2, на котором показано, что четвертая часть отрезка e уложилась в отрезке x точно 14 раз. Очевидно, это не единственный вариант выбора такой части отрезка e, которая укладывается в отрезке x целое число раз. Можно взять восьмую часть отрезка e, тогда отрезок x будет состоять из 28 таких частей и его длина будет выражаться дробью $\frac{28}{8}$. Можно взять шестнадцатую часть отрезка e, тогда отрезок x будет состоять из 56 таких частей и его длина будет выражаться дробью $\frac{56}{16}$.

Вообще, длина одного и того же отрезка x при заданном единичном отрезке e может выражаться различными дробями, причем если длина выражена дробью $\frac{m}{n}$, то она может быть выражена и любой дробью вида $\frac{mk}{nk}$, где k — натуральное число.

Две дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ называют ***равными***, если $mq = np$.

Если дроби равны, то пишут $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Из определения равных дробей вытекает ***основное свойство дроби***:

если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.

На этом свойстве основаны сокращение дробей и приведение дробей к общему знаменателю.

Сокращение дробей — это замена данной дроби другой, равной данной, но с меньшим числителем и знаменателем.

Если числитель и знаменатель дроби одновременно делятся только на единицу, то дробь называют несократимой. Например, $\frac{5}{17}$ — несократимая дробь, так как ее числитель и знаменатель делятся одновременно только на единицу.

Приведение дробей к общему знаменателю — это замена данных дробей равными им дробями, имеющими одинаковые знаменатели. Общим знаменателем двух дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ является общее кратное чисел n и q, а наименьшим общим знаменателем — их наименьшее кратное.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Известно, что длина отрезка x при единичном отрезке e выражается дробью $\frac{8}{3}$. Как могла получиться такая дробь при измерении длины отрезка x? Существуют ли другие дроби,

выражающие длину отрезка x при том же единичном отрезке e?

2. Выберите единицу длины и постройте отрезок, длина которого выражается дробью:

   а) $\frac{15}{4}$; б) $\frac{17}{3}$; в) $\frac{4}{7}$.

3. Как установить, равны ли дроби:

   а) $\frac{17}{19}$ и $\frac{23}{27}$; б) $\frac{7}{8}$ и $\frac{72}{108}$?

4. На множестве дробей $\left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{9}{12}, \frac{3}{15}, \frac{5}{25}, \frac{12}{6}\right\}$ задано отношение равенства. Постройте граф этого отношения. Каковы особенности этого графа? С чем они связаны?

14.2. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Отношение равенства является отношением эквивалентности на множестве дробей, поэтому оно порождает на нем классы эквивалентности. В каждом таком классе содержатся равные между собой дроби. Например, множество дробей $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\right\}$ — это один класс, множество дробей $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \ldots\right\}$ — это другой класс и т. д.

Дроби одного класса выражают величину одного и того же объекта. Но она должна представляться единственным числом. Поэтому считают, что равные дроби — это различные записи одного и того же положительного рационального числа.

> ***Положительным рациональным числом*** называют класс равных дробей, а каждая дробь, принадлежащая этому классу, есть запись (представление) этого числа.

Например, о дроби $\frac{9}{10}$ мы должны говорить, что она является записью некоторого рационального числа. Однако часто для краткости говорят: $\frac{9}{10}$ — это рациональное число.

Множество всех положительных рациональных чисел принято обозначать символом $\mathbf{Q}_+$.

Выясним, как определяют арифметические действия с положительными рациональными числами.

> Если положительное рациональное число a представлено дробью $\frac{m}{n}$, а положительное рациональное число b — дробью $\frac{p}{n}$, то их ***суммой*** называют число $a + b$, которое представляется дробью $\frac{m+p}{n}$.

Таким образом, по определению,

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}. \qquad (1)$$

В определении суммы рациональных чисел использовано их представление в виде дробей с одинаковыми знаменателями.

Если числа a и b представлены дробями с разными знаменателями, то сначала надо привести их к одному знаменателю, а затем применять правило (1).

Сложение положительных рациональных чисел коммутативно и ассоциативно.

> Если положительное число a представлено дробью $\frac{m}{n}$, а положительное рациональное число b — дробью $\frac{p}{q}$, то их ***произведением*** называют число ab, которое представляется дробью $\frac{m \cdot p}{n \cdot q}$.

Таким образом, по определению,

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}. \qquad (2)$$

Умножение положительных рациональных чисел коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения.

Определение сложения положительных рациональных чисел дает возможность находить отношение «меньше» на множестве $\mathbf{Q}_+$.

Пусть a и b — положительные рациональные числа. Считают, что число b ***меньше*** числа a, если существует такое положительное рациональное число c, что $a = b + c$.

В этом же случае считают, что число a больше числа b. Пишут $b < a$ ($a > b$).

Отношение «меньше» обладает рядом *свойств*, которые приводим без доказательства:

1) отношение «меньше» на множестве $\mathbf{Q}_+$ антисимметрично и транзитивно, т. е. является отношением порядка, а множество $\mathbf{Q}_+$ — *упорядоченным множеством*;

2) если рациональные числа a и b представлены дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$ (т. е. дробями, имеющими одинаковые знаменатели), то $a < b$ в том и только том случае, когда $m < p$;

3) в множестве положительных рациональных чисел нет наименьшего числа;

4) между любыми двумя различными числами a и b из $\mathbf{Q}_+$ заключено бесконечно много чисел этого же множества (это свойство называют *свойством плотности множества* $\mathbf{Q}_+$);

5) в множестве положительных рациональных чисел нет наибольшего числа.

Вычитание положительных рациональных чисел определяется как операция, обратная сложению, т. е. это такая операция, которая удовлетворяет условию: ***a − b = c тогда и только тогда, когда a = b + c***.

Разность $a - b$ положительных рациональных чисел существует тогда и только тогда, когда $b < a$. Если разность $a - b$ существует, то она единственна.

Используя определение и условие существования разности, можно получить правило вычитания положительных рациональных чисел, представленных дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$, где $m < p$:

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m-p}{n}. \tag{3}$$

Деление положительных рациональных чисел определяется как операция, обратная умножению, т. е. это такая операция, которая удовлетворяет условию: ***a : b = c тогда и только тогда, когда a = bc***.

Из этого определения и правила нахождения произведения положительных рациональных чисел можно получить правило деления положительных рациональных чисел, представленных дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$:

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mq}{np}. \tag{4}$$

Из этого правила следует, что *частное положительных рациональных чисел всегда существует.*

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Рациональное число представлено дробью $\frac{12}{26}$. Может ли оно быть представлено дробью $\frac{84}{182}$; дробью $\frac{42}{78}$?
2. Вычислите значения следующих выражений, записав их в виде несократимых дробей (выполненные преобразования обоснуйте):
   а) $\frac{1}{7}+\frac{2}{21}+\frac{3}{7}$; б) $\frac{7}{10}+\frac{2}{15}+\frac{11}{30}$; в) $\frac{31}{80}+\left(\frac{3}{16}+\frac{39}{80}\right)$.
3. Сравните числа:
   а) $\frac{7}{15}$ и $\frac{11}{15}$; б) $\frac{8}{9}$ и $\frac{8}{11}$; в) $\frac{9}{40}$ и $\frac{7}{30}$; г) $\frac{13}{24}$ и $\frac{17}{36}$.
4. Найдите значения следующих выражений:
   а) $\frac{73}{15}-\left(\frac{11}{15}+\frac{1}{5}\right)$; б) $\frac{22}{3}\cdot\frac{6}{11}-\frac{19}{21}\cdot\frac{7}{38}$; в) $\frac{3}{5}:\left(\frac{9}{10}-\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{9}\right)$.

Раздел V

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ВЕЛИЧИНЫ

При изучении начального курса математики у школьников должны быть сформированы представления о простейших геометрических формах, приобретены начальные навыки изображения геометрических фигур и умения измерять длины и площади. Но чтобы организовать успешную деятельность детей по овладению геометрическим материалом, учителю нужны соответствующие знания и умения: он должен знать историю возникновения и развития геометрии, основные свойства геометрических фигур, изучаемых в начальном курсе математики, уметь их построить.

Глава 15

ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМЫ

15.1. ИЗ ИСТОРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И РАЗВИТИЯ ГЕОМЕТРИИ

Геометрия зародилась в Древнем Египте как набор правил решения практических задач, возникавших в строительстве, при распределении земельных участков, измерении площадей, объемов и т. д. Свидетельством этому служат египетские пирамиды, построенные около 4 800 лет назад с выполнением сложных и точных геометрических расчетов. Но особенно важной была задача распределения земельных наделов. Этим занимались специальные люди — землемеры, которых греки называли гарпедонаптами, т. е. натягивателями веревок, так как при распределении земли использовались веревки. Но чтобы знать, где и как их натягивать, надо было иметь план полей. Так практическая задача распределения земельных участков привела к возникновению науки геометрии.

Обширные сведения о свойствах фигур, накопленные египтянами, были заимствованы греками. Произошло это в VII — V вв. до н. э. А так как особенно важной задачей было землемерие, то греки назвали науку о фигурах геометрией (от греч. *геос* — земля и *метрио* — измеряю).

Многие геометрические понятия возникли в результате многократных наблюдений реальных предметов той или иной формы, т. е. в процессе познания окружающего мира люди знакомились и с простейшими геометрическими формами. Овладению этим знанием способствовали следующие факторы: производство орудий труда, имеющих сравнительно правильную геометрическую форму, строительство жилья, шитье одежды, изготовление посуды, украшений.

Огромное влияние на развитие геометрических представлений оказали систематические астрономические наблюдения, что привело к возникновению понятий шара, окружности, угла, угловой меры.

Развитие землемерия, обобщение накопленного опыта наблюдений привело к созданию практических правил измерения земельных участков, нахождения площадей и объемов простейших фигур, строительных норм и др. Так, формулы для вычисления площадей земельных участков, имеющих форму треугольника, трапеции, встречаются у древних египтян, вавилонян. К XVII—XVI вв. до н. э. были установлены такие факты, как теорема Пифагора, выражение для подсчета объема шара и многие другие. Но выступали они не как логически доказанные утверждения, а как выводы из опыта.

Таким образом, геометрия возникла как прикладная наука, как собрание правил, необходимых для решения практических задач, таких как сравнение фигур, нахождение геометрических величин, а также для простейших геометрических построений.

Практические правила постепенно приводились в систему. Кроме того, одни правила стали выводиться из других и обосновываться посредством рассуждений. Возникло доказательство, правила стали превращаться в теоремы, которые доказывались без прямых ссылок на опыт. Вообще, совершенствование геометрических знаний шло по пути их отделения от опыта — в результате предметом геометрии стали не реальные, а идеальные фигуры, т. е. фигуры, являющиеся образами предметов, в которых абстрагируются от всего, кроме формы. Более того, эти фигуры стали дополняться свойствами, которыми реальные предметы не обладают. Например, понятие прямой, возникшее как отражение такого свойства реальных предметов, как протяженность, было дополнено представлением о ее бесконечности.

Получение новых геометрических утверждений с помощью рассуждений относится к VI в. до н. э. и связано с именем древнегреческого математика Фалеса. Считают, что им доказаны свойства равнобедренного треугольника, равенство вертикальных углов и ряд других фактов.

К III в. до н. э. геометрия становится дедуктивной наукой, одновременно решая многие практические задачи: дает точно обоснованные правила для построения фигур с заданными свойствами, позволяет различными способами сравнивать фигуры, по одним свойствам фигуры делать выводы о других ее свойствах и т. д.

Основные достижения в области математики были систематизированы около 300 лет до н. э. греческим ученым Евклидом и изложены в его знаменитом труде «Начала», состоящем из 13 книг. Это сочинение является первым дошедшим до нас строгим логическим построением геометрии. «Начала» Евклида оставили глубокий след в истории и в течение многих веков служили образцом научного изложения математики.

После III в. до н. э. геометрия развивалась медленно — требовались новые идеи и методы, необходимо было развитие понятия числа и алгебры. Первые шаги в этом направлении были сделаны в Древней Греции, а затем в Индии, где была открыта десятичная система счисления. В геометрии новые идеи и методы появились в XVII в. Принадлежали они французскому философу и математику Рене Декарту. В своем сочинении «Геометрия» он впервые описал метод координат на прямой и на плоскости, установив тем самым взаимосвязь геометрии с алгеброй.

Важным направлением в развитии геометрии был поиск логически безупречного построения геометрии. Эти поиски привели не только к открытию новых свойств геометрических фигур, но и открытию геометрии, отличной от геометрии, описанной Евклидом. Первым, кто построил новую геометрию, был Н. И. Лобачевский, профессор Казанского университета.

В конце XIX в. немецкий математик Д. Гильберт подвел итог исследованиям в области логически строгого построения евклидовой геометрии.

В евклидовой геометрии изучают свойства фигур, связанные с понятиями длины, величины угла, площади и объема. Такие свойства фигур называются ***метрическими***. В современной геометрии изучают и другие свойства фигур. Так, в XX в. началось систематическое изучение ***топологических*** свойств геометрических фигур, т. е. таких свойств, которые сохраняются при любых деформациях (сжатии, расширении, искажении размеров и формы фигуры), производимых без разрывов и склеиваний.

15.2. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМЫ. ПОНЯТИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ

Краткий экскурс в историю возникновения и развития геометрии показал, что геометрия — это раздел математики, изучающий пространственные формы и их отношения.

Важнейшей пространственной формой является ***геометрическое тело***, а одним из видов пространственных отношений — взаимное расположение геометрических тел.

В окружающем нас мире встречаются различные тела: дома, деревья, мосты и т. д. Когда говорят о геометрическом теле, то тем самым подчеркивают, что нас не интересуют физические свойства окружающих тел (масса, цвет, материал и др.), в геометрии рассматривают лишь их форму и размеры. Другими словами, *в геометрии рассматривают ту часть пространства, которую соответствующее тело занимает.*

Геометрическое тело имеет три измерения. Условно их называют длина, ширина и высота (или толщина). Кстати, пространство, в котором мы живем, также имеет три измерения, и его называют трехмерным. Примерами геометрических тел, изучаемых в школьном курсе математики, являются многогранники (призмы, пирамиды), тела вращения (цилиндры, конусы, шары).

Всякое геометрическое тело имеет ***поверхность***. Она представляет собой границу (оболочку) этого тела, и тогда о геометрическом теле можно сказать, что это часть пространства, ограниченная поверхностью.

Поверхность геометрического тела делит все пространство на две части: внутреннюю и внешнюю по отношению к этому телу. Чтобы попасть из любой точки, находящейся внутри тела, во внешнюю область, необходимо пересечь поверхность тела.

Поверхность, ограничивающая шар, называется ***сферой***. У всех других известных из школьного курса геометрических тел поверхности специальных названий не имеют: говорят о поверхности куба, боковой и полной поверхности пирамиды, цилиндра и т. д.

Поверхность имеет только два измерения: длину и ширину. И поэтому понятие поверхности является математической абстракцией, поскольку в реальности нет предметов, не имеющих толщины. И говоря, что лист бумаги или мыльная пленка являются поверхностями, имеют в виду, что их толщина ничтожно мала по сравнению с другими размерами предмета.

Поверхности, которые изучают в геометрии, многообразны: цилиндрические, конические, сферические и др. Но особое внимание уделяют поверхности, которую называют ***плоскостью*** и свойства которой изучают. В геометрии плоскость представляют бесконечной во всех направлениях. Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, поверхности стола, пола, оконного стекла.

При пересечении двух поверхностей получается ***линия***. Она не имеет толщины и ширины, у нее лишь одно измерение — длина. Таким образом, линия — понятие абстрактное.

Различают ***кривые*** и ***прямые*** *линии*. Прямые линии образуются при пересечении двух плоскостей. Кривая линия может получиться при пересечении плоскости и цилиндрической поверхности.

Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы. По прямой распространяется луч света. Прямые проводятся на листе бумаги или доске с помощью линейки. Хотя изображения прямых ограничены, их следует представлять себе неограниченно продолженными в обе стороны.

При пересечении двух линий образуется ***точка***. Она может быть и не одна.

Точка является идеализацией таких объектов, размерами которых в определенной ситуации можно пренебречь. Геометрическая точка размеров не имеет.

Точка может лежать на данной прямой, в этом случае говорят также, что точка принадлежит прямой или что прямая проходит через точку; а может и не лежать на ней, в этом случае говорят, что точка не принадлежит прямой или что прямая не проходит через точку.

Если точка A лежит на прямой a, то это можно записать так: $A \in a$. Если точка B не лежит на прямой a, то это можно записать так: $B \notin a$.

Если две прямые имеют одну общую точку, то говорят, что прямые пересекаются в этой точке.

Итак, дано описание основных форм, которые изучаются в геометрии — это геометрическое тело, поверхность, линия и точка. Смысл этих понятий можно раскрыть иначе, если изменить порядок их рассмотрения и начать с точки.

Можно считать, что ***точка*** — это некое место в пространстве, нечто, не имеющее размеров. При движении точка будет описывать ***линию*** — траекторию движения точки. Например, окружность получается в результате движения точки — острия карандаша, если при ее построении используется циркуль.

Если линию целиком перемещать в пространстве, то область, образуемая при этом, будет ***поверхностью***.

Все точки ***геометрического тела*** можно получить, перемещая в пространстве поверхность.

Таким образом, при данном порядке рассмотрения основных геометрических форм получаем, что:

- ***точка*** — это то, что не имеет частей и размеров;
- ***линия*** получается при движении точки и имеет одно измерение — длину;
- ***поверхность*** образуется при движении линии и имеет два измерения — длину и ширину;
- ***геометрическое тело*** заполняется поверхностями и имеет три измерения: длину, ширину и высоту.

Наряду с основными геометрическими формами в геометрии используется понятие геометрической фигуры.

> ***Геометрическая фигура*** — это часть поверхности, ограниченная линией.

Как часть поверхности геометрическая фигура имеет два измерения. Она может быть плоской, а может и не быть плоской. Примером геометрической фигуры, которая не является плоской, может служить часть поверхности на сфере. Плоскими фигурами являются прямая, отрезок, луч, треугольник, прямоугольник и др.

В геометрии считают, что любое геометрическое тело, поверхность, линия, любая геометрическая фигура состоит из точек, или представляет собой множество точек.

Так как любая геометрическая фигура есть множество точек, то можно говорить о том, что одна фигура включена в другую (или содержится в другой), можно рассматривать объединение, пересечение и разность фигур.

Различают ***выпуклые*** и ***невыпуклые*** фигуры. Фигура называется выпуклой, если она вместе с любыми двумя своими точками содержит также соединяющий их отрезок.

Выпуклыми фигурами являются, например, плоскость, прямая, луч, отрезок.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Проведите прямую и отметьте точки A и B, принадлежащие этой прямой. Отметьте точку, не принадлежащую данной прямой. Сделайте записи, используя символ $\in$.
2. Могут ли две прямые иметь две общие точки?

3. Начертите на листе бумаги луч, отрезок, угол, ломаную, прямоугольник, квадрат, треугольник, окружность. Какими свойствами обладают эти фигуры? Как их определяют в начальном курсе математики?
4. Начертите на листе бумаги прямоугольный параллелепипед и треугольную пирамиду. Как определяют эти геометрические тела?

Глава 16
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Геометрическими величинами являются: длина линии (отрезка, ломаной, дуги кривой), площадь фигуры (поверхности), объем тела, величина угла.

Каждой геометрической величине можно поставить в соответствие положительное действительное число, которое называется ее численным значением, или мерой. Процесс нахождения этого числа называется *измерением величины*.

В геометрии прежде всего изучают то число, которое получается в результате измерения величины, т. е. меру величины при выбранной единице величины. Поэтому часто это число называют длиной, площадью, объемом. Относительно этого числа решают различные теоретические задачи, в частности, каким требованиям оно должно удовлетворять как мера величины, существует ли оно, каким образом его можно определить. Вообще, правила измерения геометрических величин и их обоснование — важнейшая задача геометрии.

Вопросы, связанные с измерением геометрических величин, достаточно трудны, поэтому рассмотрим их в небольшом объеме, особо выделив те, которые непосредственно связаны с изучением величин в начальной школе.

16.1. ДЛИНА ОТРЕЗКА И ВЕЛИЧИНА УГЛА

Понятие длины отрезка и ее измерения были уже использованы неоднократно, в частности, при рассмотрении натурального числа как меры величины. В этом подразделе обобщим представления о длине отрезка как геометрической величине.

Длиной отрезка называют положительную величину, определенную для каждого отрезка и обладающую следующими свойствами:

- равные отрезки имеют равные длины;
- если отрезок состоит из конечного числа отрезков, то его длина равна сумме длин этих отрезков;
- существует отрезок, длина которого равна 1.

Пусть задан отрезок x, его длину обозначим через X. Выберем из множества отрезков некоторый отрезок e, назовем его единичным отрезком, а длину обозначим буквой E.

Измерение длины отрезка x состоит в сравнении его длины с длиной отрезка, принятого за единицу. Результатом измерения длины отрезка x является положительное действительное число a, которое называют численным значением длины X отрезка x при единице E, или просто длиной отрезка. Пишут: $a = m_E(X)$ или $X = a \cdot e$.

Получаемое при измерении длины отрезка число обладает рядом *свойств*:

1) при выбранной единице длины длина любого отрезка выражается положительным действительным числом, т. е. $m_E(X) > 0$, и для каждого положительного действительного числа есть отрезок, длина которого выражается этим числом;

2) если два отрезка равны, то численные значения их длин также равны, и обратно: если численные значения двух отрезков равны, то равны и сами отрезки, т. е. $x = y \Leftrightarrow m_E(X) = m_E(Y)$;

3) если данный отрезок состоит из нескольких отрезков, то численное значение его длины равно сумме численных значений длин слагаемых отрезков, и обратно: если численное значение длины отрезка равно сумме численных значений нескольких отрезков, то сам отрезок состоит из этих отрезков, т. е. $z = x + y \Leftrightarrow m_E(Z) = m_E(X) + m_E(Y)$;

4) если длины отрезков x и y таковы, что $Y = ax$, где a — положительное действительное число и длина измерена с помощью единицы E, то для нахождения численного значения длины отрезка Y при единице E, достаточно число a умножить на численное значение длины отрезка x при единице e, т. е. $Y = a \cdot X \Leftrightarrow m_E(Y) = a \cdot m_E(X)$;

5) при замене единицы длины численное значение длины увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой, т. е. если $m_{E1}(X)$ и $m_{E2}(X)$ — численные значения длины отрезка x при единицах длины E_1 и E_2, то выполняется равенство $m_{E2}(X) = m_{E1}(X) \cdot m_{E2}(E_1)$.

Величиной угла называют положительную величину, определенную для каждого угла и обладающую свойствами:

- равные углы имеют равные величины;

- если угол состоит из конечного числа углов, то его величина равна сумме величин этих углов;
- существует угол, величина которого равна 1.

Измерение величины угла A состоит в сравнении его величины с величиной угла, принятой за единицу. Результатом этого сравнения является положительное действительное число, которое называют *численным значением величины угла A* при выбранной единице величины угла, или *мерой величины угла A*, или просто *величиной угла A*.

Получаемое при измерении величины угла положительное действительное число обладает свойствами, аналогичными свойствам длины отрезка. Необходимо только учесть, что величина угла задана на множестве плоских углов.

На практике за единицу величины угла принимают градус — $\frac{1}{90}$ часть прямого угла. Один градус записывают так: 1°. Величина прямого угла равна 90°, величина развернутого — 180°.

Заметим, что часто вместо «величина угла» говорят «угол». Например, вместо «величина угла равна 45 градусам» говорят, что «угол равен 45 градусам».

На практике величины углов измеряют с помощью транспортира. Для более точных измерений пользуются и другими приборами.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Отметьте на прямой три равных отрезка: AB, BC и CD. Чему будет равна длина каждого из этих отрезков, если за единицу длины будет выбрана длина отрезка:
   а) AB; б) AC; в) AD?
2. Длину стола измеряли сначала в сантиметрах, потом в дециметрах. В первом случае получили число на 108 больше, чем во втором. Чему равна длина стола?
3. Углы α и β — смежные. Чему равен каждый из них, если:
   а) один из них больше другого на 60°; б) один из них больше другого в три раза?

16.2. ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ И ОБЪЕМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТЕЛА

Каждый человек представляет, что такое площадь комнаты, площадь участка земли, площадь поверхности, которую надо покрасить.

Он также понимает, что если земельные участки одинаковы, то площади их равны; что площадь квартиры складывается из площади комнат и площади других ее помещений.

Это обыденное представление о площади используется при ее определении в геометрии, где говорят о площади фигуры. Но геометрические фигуры устроены по-разному, и поэтому, когда говорят о площади, выделяют определенный класс фигур. Например, рассматривают площади многоугольных фигур или площади криволинейных фигур и т. д.

Если говорят, что фигура F *состоит* (составлена) из фигур F_1 и F_2, то имеют в виду, что она является их объединением и у них нет общих внутренних точек. В этой же ситуации говорят, что фигура F разбита на фигуры F_1 и F_2. Например, о фигуре F, изображенной на рис. 16.1, можно сказать, что она составлена из фигур F_1 и F_2 или, что она разбита на фигуры F_1 и F_2.

> ***Площадью фигуры*** называют положительную величину, определенную для каждой фигуры и обладающую свойствами:
>
> - равные фигуры имеют равные площади;
> - если фигура состоит из конечного числа фигур, то ее площадь равна сумме их площадей;
> - существует фигура, площадь которой равна 1.

Измерение площади фигуры F состоит в сравнении ее площади с площадью квадрата со стороной, равной единице длины. Обозначим площадь квадрата буквой E. Результатом этого сравнения является положительное действительное число $S_E(F)$, которое называют *численным значением площади фигуры F* при выбранной единице площади E, или *мерой площади фигуры F*, или просто *площадью фигуры F*.

Получаемое при измерении площади фигуры число обладает свойствами, аналогичными свойствам длины отрезка. Необходимо только учесть, что площадь задана на множестве плоских фигур.

Фигуры, площади которых равны, называют *равновеликими*.

Площадь фигуры F можно найти с помощью *палетки* — квадратной сетки, нанесенной на прозрачный материал. Длина стороны квадрата этой сетки принимается за единицу длины, а площадь квадрата — за единицу площади. Палетку накладывают на данную фигуру F и подсчитывают число квадратов (m), которые лежат внутри фигуры F, и число квадратов (n), через которые проходит контур фигуры (рис. 16.2). Затем второе число делят пополам и при-

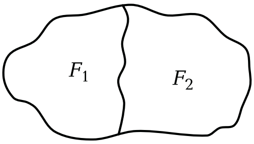


Рис. 16.1

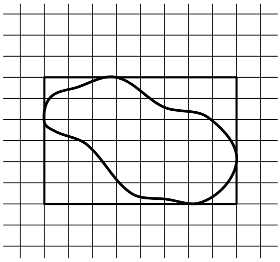


Рис. 16.2

бавляют к первому. Полученную сумму считают площадью фигуры F, т. е. $S(F)=m+\frac{n}{2}$ (ед.^{2}).

Так, в частности, измеряют площади фигур в начальном курсе математики.

Палетка позволяет осуществить прямое измерение площади фигуры F, но нахождение площади фигуры таким способом не всегда удобно.

Другим способом нахождения площади фигуры является использование готовых формул — это так называемый косвенный способ вычисления площади фигуры. Из школьного курса математики известно, что:

- *площадь квадрата* равна квадрату длины его стороны, т. е. $S=a^2$, где a — длина стороны квадрата;
- *площадь прямоугольника* равна произведению длин его смежных сторон, т. е. $S = a \cdot b$, где a и b — длины смежных сторон прямоугольника;
- *площадь параллелограмма* равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне, т. е. $S=a \cdot h_a$, где a — длина стороны; h_a — высота параллелограмма, проведенная к этой стороне;
- *площадь треугольника* равна половине произведения его основания на высоту, т. е. $S=\frac{1}{2}a \cdot h_a$.

Объем геометрического тела — положительная величина, определенная для каждого тела и обладающая следующими свойствами:

- равные тела имеют равные объемы;

- если тело состоит из конечного числа тел, то его объем равен сумме их объемов;
- существует тело, объем которого равен 1.

Измерение объема тела F состоит в сравнении его объема с объемом куба, ребро которого равно единице длины. Обозначим объем единичного куба буквой e. Результатом этого сравнения является положительное действительное число $V_e(F)$, которое называют *численным значением объема тела F* при *единице объема e*, или *мерой объема тела F*, или просто *объемом тела F.*

Это число обладает свойствами, аналогичными свойствам длины отрезка. Необходимо только учесть, что объем задан на множестве геометрических тел (пространственных фигур).

Для вычисления объемов геометрических тел, как правило, пользуются формулами. Приведем некоторые из них:

- *объем прямоугольного параллелепипеда* может быть найден по формуле: $V = abc$, где a, b и c — длины ребер этого параллелепипеда, выходящих из одной вершины;
- *объем произвольной призмы* определяют по формуле: $V = S_{\text{осн}}h$, где $S_{осн}$ — площадь основания призмы; h — ее высота (расстояние между плоскостями оснований);
- *объем пирамиды* вычисляют по формуле: $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн}}h$, где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания пирамиды; h — ее высота;
- *объем цилиндра* находят по формуле: $V = S_{\text{осн}}h$, где $S_{осн}$ — площадь основания цилиндра; h — его высота;
- *объем конуса* определяют по формуле: $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн}}h$, где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания конуса; h — его высота;
- *объем шара* находят по формуле: $V = \dfrac{3}{4}\pi R^3$, где R — радиус шара.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Площадь прямоугольника равна 12 см^2, длины его сторон выражаются натуральными числами. Сколько различных прямоугольников можно построить согласно этим условиям?
2. Прямые a и b параллельны. Точка B движется по прямой b, занимая положения B_1, B_2, B_3, ..., а точки A и C остаются неподвижными. Равновелики ли треугольники AB_1C, AB_2C, AB_3C, ...?

Оглавление

Учебное издание

Стойлова Любовь Петровна

Теоретические основы начального курса математики

Учебное пособие

Редактор *Л. В. Честная.* Технический редактор *Е. Ф. Коржуева*
Компьютерная верстка: *Г. Ю. Никитина.* Корректор *Т. В. Кузьмина*

Изд. № 101116760. Подписано в печать 28.02.2014. Формат 60×90/16. Гарнитура «Балтика».
Бумага офс. № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,0. Тираж 2 000 экз. Заказ №

ООО «Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru
129085, Москва, пр-т Мира, 101В, стр. 1. Тел./факс: (495) 648-0507, 616-00-29.
Санитарно-эпидемиологическое заключение № РОСС RU. АЕ51. Н 16476 от 05.04.2013.

Отпечатано с электронных носителей, предоставленных издательством,
в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат». www.sarpk.ru
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.