И. И. Баврин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ ДЛЯ СПО

2-е издание, исправленное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебника для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 517(075.32)
ББК 22.161я723
Б13

***Автор*:**

Баврин Иван Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики математического факультета Московского педагогического государственного университета, действительный член Российской академии образования, лауреат премии Правительства Российской Федерации в области образования.

***Рецензенты*:**

Нижников А. И. — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета;

Гаврилов В. И. — доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Баврин, И. И.

Б13 Математический анализ : учебник и практикум для СПО / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 327 с. — (Серия : Профессиональное образование).

ISBN 978-5-9916-6247-5

В книге изложены основы математического анализа. Приведено много разобранных примеров и задач, иллюстрирующих понятия математического анализа, его методы и приложения, а также упражнений для самостоятельной работы.

Для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, в том числе обучающихся по педагогическим специальностям; также может быть использован студентами других специальностей.

УДК 517(075.32)
ББК 22.161я723

ISBN 978-5-9916-6247-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математические методы исследования всегда играли и продолжают играть огромную, все возрастающую роль в естествознании и, прежде всего, в физике. Поэтому подготовка будущих учителей по естественнонаучным специальностям и, в первую очередь, специальности «Физика» тесно связана с получением прочных математических знаний и практических навыков. Основой этих знаний является математический анализ, читаемый в курсе высшей математики студентам этих специальностей.

Настоящая книга является учебником по математическому анализу. Она написана в соответствии с действующими программами и с учетом профессиональной направленности будущих учителей указанных специальностей. В ней особое внимание уделено понятиям и методам, имеющим прикладное значение. Это отражено как в физическом и геометрическом истолковании основных понятий математического анализа, так и в рассмотрении математических моделей из физики и других естественнонаучных дисциплин.

Книга состоит из десяти глав. В них излагаются введение в анализ; дифференциальное и интегральное исчисления функций одного или нескольких переменных, включая теорию поля; ряды, интегралы Фурье и дельта-функция, дифференциальные уравнения, в том числе задачи и уравнения математической физики.

К каждой главе имеются упражнения для самостоятельной работы. Ответы к упражнениям (там, где в этом есть необходимость) приведены сразу после текста — они указаны в квадратных скобках.

В результате изучения материалов, представленных в учебнике, студенты должны:

знать

• основные определения и операции с функциями одной и нескольких переменных;

• основы дифференцирования и интегрирования, правила нахождения определенных, криволинейных, кратных и поверхностных интегралов;

• основные понятия и свойства числовых и функциональных рядов;

уметь

• правильно употреблять и оперировать математическим инструментарием и символикой;

• определять условия приложимости того или иного теоретического аспекта при решении практических задач;

• составлять корректные модели применительно к возникающим конкретным задачам и проводить их соответствующий обсчет;

• анализировать полученные на практике результаты и делать соответствующие выводы;

владеть

• навыками и культурой вычислительной обработки экспериментальных данных;

• основами математического моделирования в соответствующей области знаний.

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

1. Действительные числа. Будем считать, что нам известны основные свойства целых чисел $(0, \pm 1; \pm 2, \ldots)$.

Число x называется *рациональным*, если его можно представить как частное двух целых чисел m и n $(n \neq 0)$: $x = \frac{m}{n}$. Любое рациональное число x представимо в виде *конечной* или *бесконечной периодической десятичной* дроби.

Число x называется *иррациональным*, если оно представимо в виде *бесконечной непериодической десятичной* дроби $x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ (например $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π и т. д.). Каждое иррациональное число можно с любой заданной степенью точности приблизить рациональными числами; для этого достаточно брать в десятичном разложении этого числа конечное множество знаков после запятой. Поэтому на практике при различных измерениях оперируют рациональными числами. Но в общих математических законах и формулах нельзя обойтись без иррациональных чисел (например, формула длины окружности $l = 2\pi R$ включает иррациональное число π).

Множество (совокупность) всех рациональных и иррациональных чисел называют *множеством действительных чисел.* Действительные числа изображаются на числовой оси Ox точками (рис. 1). При этом каждому действительному числу соответствует определенная точка числовой оси и каждой точке оси соответствует определенное действительное число. Поэтому вместо слов «действительное число» можно говорить «точка».

Абсолютной величиной (или *модулем*) действительного числа x называется неотрицательное число $|x|$, определяемое соотношением

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Непосредственно из определения абсолютной величины вытекают свойства 1 и 2.

1. $|-x| = |x|$.
2. $-|x| \leq x \leq |x|$.

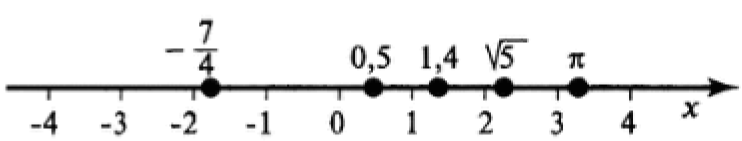


Рис. 1

3. *Неравенства* $|x| \le a$ *и* $-a \le x \le a$ *равносильны.*

Докажем свойство 3. Из $|x| \le a$ и свойства 2 имеем $x \le a$. В то же время $|x| \le a$ равносильно $-a \le -|x|$, откуда с учетом свойства 2 следует $-a \le x$. Таким образом, получаем $-a \le x \le a$. Обратно, из неравенства $-a \le x \le a$ вытекает, что одновременно $-x \le a$ и $x \le a$, т. е. по определению абсолютной величины $|x| \le a$.

4. *Модуль суммы двух действительных чисел меньше или равен сумме модулей этих чисел:*

$$|x+y| \le |x| + |y|.$$

Действительно, если $x + y \ge 0$, то по определению абсолютной величины и свойству 2 $|x+y| = x+y \le |x|+|y|$. Если $x+y<0$, то $|x+y| = -(x+y) = -x+(-y) \le |x|+|y|$.

Примечание 1. Свойство 4 справедливо для любого конечного числа слагаемых.

5. *Модуль разности двух действительных чисел больше или равен разности модулей этих чисел:*

$$|x-y| \ge |x| - |y|.$$

По свойству 4 имеем $|x| = |y+(x-y)| \le |y| + |x-y|$, откуда $|x-y| \ge$ $\ge |x| - |y|$.

6. *Модуль произведения двух действительных чисел равен произведению модулей этих чисел:*

$$|xy| = |x||y|.$$

Примечание 2. Свойство 6 справедливо для любого конечного числа сомножителей.

7. *Модуль частного двух действительных чисел (если делитель отличен от нуля) равен частному модулей этих чисел:*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Свойства 6, 7 непосредственно следуют из определения абсолютной величины числа.

Множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$ ($a < x < b$), называется *сегментом* или *отрезком* (*интервалом*) и обозначается $[a; b]$ ($(a; b)$). *Полусегментом* $[a; b)$ ($(a; b]$) называют множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x < b$ ($a < x \le b$). Множества действительных чисел x, удовлетворяющих условиям $x < a$ ($x \le a$) или $x > b$ ($x \ge b$), обозначают соответственно $(-\infty; a)$ ($(-\infty; a]$) или $(b; +\infty)$ ($[b; +\infty)$). Множество всех действительных чисел x обозначается символом $(-\infty; +\infty)$ или $|x| < \infty$, или $\boldsymbol{R}$. Все указанные множества называют *промежутками*. *Окрестностью* точки x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку, ε-окрестностью ($\varepsilon > 0$) точки x_0 называется интервал $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$, т. е. множество чисел x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \varepsilon$.

2. Погрешности вычисления. Пусть некоторая величина имеет точное значение a. В результате измерения этой величины получено ее приближенное значение x. *Абсолютной погрешностью* Δ_0 приближенного значения x называется модуль разности между числом x и точным значением a: $\Delta_0 = |x - a|$.

Если число a неизвестно (что бывает в большинстве измерений), то абсолютную погрешность вычислить нельзя. В этом случае используется *предельная абсолютная погрешность* — положительное число Δ, такое, что $\Delta_0 \le \Delta$. Очевидно, что

$$x - \Delta \le a \le x + \Delta.$$

Кратко последнее неравенство записывают так: $a = x \pm \Delta$.

Пример 1. Если x_1 и x_2 — приближенные значения точного значения числа a, причем известно, что $x_1 \le a \le x_2$, то в этом случае можно положить $a = x \pm \Delta$, где

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \Delta = \frac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

Точность измерения характеризуется с помощью *относительной погрешности*. Относительной погрешностью δ_0 приближенного значения x называется отношение абсолютной погрешности этого значения к модулю точного значения a:

$$\delta_0 = \frac{\Delta_0}{|a|}.$$

Если точное значение a неизвестно, то используют *предельную относительную погрешность* — положительное число δ, такое, что $\delta_0 \le \delta$.

Для вычисления относительных погрешностей часто используются приближенные формулы:

$$\delta_0 \approx \frac{\Delta_0}{|x|} \quad \text{и} \quad \delta \approx \frac{\Delta}{|x|}.$$

Эти формулы тем точнее, чем значение x ближе к точному значению a, т. е. чем меньше погрешность Δ_0 или Δ.

Пример 2. Каковы предельные абсолютная и относительная погрешности числа 1,41 — приближенного значения числа $\sqrt{2}$? Так как $1{,}410 < \sqrt{2} < 1{,}415$, то $\Delta_0 = \sqrt{2} - 1{,}410 < 0{,}005$. Следовательно, можно положить $\Delta = 0{,}005$. Далее

$$\delta_0 = \frac{\Delta_0}{|x|} < \frac{0{,}005}{1{,}41} < 0{,}0036,$$

откуда $\delta = 0{,}0036$, или $\delta = 0{,}36\%$. Как здесь (например, при делении 0,005 на 1,41), так и в ряде других примеров для облегчения вычислений можно использовать калькулятор.

Говорят, что приближенное значение x (записанное в виде десятичной дроби) имеет *n верных знаков*, если абсолютная погрешность этого числа меньше или равна половине единицы его n-го разряда. Например, если 9,263 имеет три верных знака 9, 2 и 6, то абсолютная погрешность этого числа $\Delta_0 \leq 0{,}005$.

3. Понятие функции. При изучении природных и технических процессов исследователи сталкиваются с величинами, одни из которых сохраняют одно и то же численное значение — они называются *постоянными*, а другие могут принимать различные численные значения и называются *переменными*. Примерами постоянных величин могут служить температура кипения воды при нормальном давлении, скорость тела, движущегося равномерно и прямолинейно. Скорость камня, брошенного вверх, есть переменная величина: сначала она уменьшается, и, когда камень достигает наивысшей точки полета, скорость его становится равной нулю, затем начинается свободное падение под действием силы тяжести, и скорость камня увеличивается.

В практических задачах изменение переменной величины обычно связано с изменением одной или нескольких других переменных величин. Например, путь, пройденный телом с постоянной скоростью, прямо пропорционален времени движения: $s=vt$. Этой формулой выражена зависимость переменной s — пути, пройденного телом, от переменной t — времени движения. Видно, что переменные s и t не могут принимать произвольные значения независимо друг от друга. Придав определенное значение переменной t, мы тем самым единственным образом определим значение переменной s.

Определение. Если каждому значению, которое может принять переменная x, по некоторому правилу или закону ставится в соответствие одно определенное значение переменной y, то говорят, что y есть однозначная *функция* от x, и обозначают $y=f(x)$ (читается «игрек равно эф от икс»).

Используются и другие обозначения функции: $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, $y=y(x)$ и т. п.

Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*.

Совокупность всех значений аргумента x, для которых функция $y=f(x)$ определена, называется *областью определения* этой функции. Совокупность всех значений, принимаемых переменной y, называют *областью значений* функции $y=f(x)$.

Пример. Найти область определения функции $y=\sqrt{4-x^2}$. Эта функция имеет смысл, если $4-x^2 \geq 0$. Отсюда $x^2 \leq 4$ или $|x| \leq 2$. Следовательно, область определения данной функции есть сегмент $[-2, 2]$. Множество значений этой функции есть сегмент $[0, 2]$.

4. Способы задания функции. *Аналитический способ* — это задание функции при помощи формул. Например, $y=2x$, $y=x+1$, $y=\lg x$, $y=\sin x$, $y=x^2$. Если уравнение, с помощью которого задается функция, не разрешено относительно y, то функция называется *неявной*. Когда такое решение возможно, неявная функция может быть приведена к явной форме, т. е. к виду $y=f(x)$. Например, уравнение $2x+3y-5=0$ можно рассматривать как неявно задающее функцию.

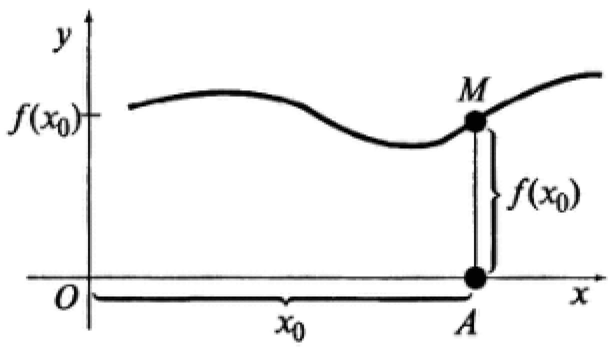


Рис. 2

Решив его относительно y, мы получим ту же функцию, но уже в явном виде: $y = \frac{5-2x}{3}$.

Отметим, что при аналитическом способе задания функции встречаются случаи, когда функция задана не одной, а несколькими формулами, например,

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x \le 0, \\ -x, & \text{если} \quad x > 0. \end{cases}$$

Табличный способ — это способ задания функции при помощи таблицы. Примерами такого задания являются таблицы тригонометрических функций, логарифмов и т. п. Табличный способ задания функции широко используется в различного рода экспериментах и наблюдениях. Таблицы просты в обращении, для нахождения значения функции не надо производить вычисления. Недостатком табличного способа является то, что функция задается не для всех значений аргумента.

Графический способ. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x; y)$ плоскости xOy, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$. Само равенство $y = f(x)$ называется *уравнением этого графика.*

Говорят, что функция задана *графически*, если на плоскости имеется ее график. Заметим, что если начерчен график функции $y = f(x)$, то для нахождения значения $y = f(x_0)$, отвечающего какому-нибудь заданному значению x_0, надо отложить это значение x_0 по оси абсцисс и из полученной точки восставить перпендикуляр до пересечения с графиком. Длина этого перпендикуляра, взятая с соответствующим знаком, и равна $f(x_0)$. Например, на рис. 2 имеем $OA = x_0$, $AM = f(x_0)$.

Преимуществом графического способа задания функции по сравнению с аналитическим и табличным является его наглядность.

Графический способ задания функции используется при работе различных самопишущих приборов. В медицине, например, работа сердца анализируется с помощью кардиографа.

§ 1.2. ОБЗОР ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ГРАФИКОВ

1. Целая рациональная функция. Многочлен вида

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$$

(a_0, a_1, a_2, …, a_m — постоянные числа, называемые *коэффициентами* многочлена; m — натуральное число, называемое *степенью* многочлена) — *целая рациональная функция*. Эта функция определена при всех значениях x.

Пример. $y = kx + b$ — линейная функция. Ее график — прямая линия. При $b = 0$ линейная функция $y = kx$ выражает прямо пропорциональную зависимость y от x. В этом случае ее график проходит через начало координат.

2. Дробно-рациональная функция. Эта функция, называемая еще рациональной дробью, определяется как отношение двух многочленов:

$$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n}.$$

Она определена при всех значениях x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в нуль. Дробно-рациональной функцией является, например, функция $y = \frac{k}{x}$, выражающая обратно пропорциональную зависимость между x и y. Ее график есть равносторонняя гипербола.

3. Степенная функция. Степенная функция — это функция вида $y = x^\alpha$, где α — действительное число. Она определена при всех значениях x, если α — натуральное число; при всех x, не равных нулю, если α — целое отрицательное число, и при всех $x > 0$, если α — произвольное действительное число.

Пример 1. $y = ax^2$. График этой функции — парабола.

Если $\alpha = \frac{1}{q}$, где q — натуральное число, то степенная функция примет вид $y = \sqrt[q]{x}$. (Символ $\sqrt[q]{}$ называют корнем степени q или радикалом.)

Функция $y = \sqrt[q]{x}$ определена при всех неотрицательных x, если q — четное, и при всех x, если q — нечетное.

Пример 2. $y = \sqrt{x}$. График этой функции (рис. 3) — верхняя ветвь параболы $y^2 = x$.

4. Показательная функция. Функция вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называется *показательной*. Она определена при всех x. Ее график изображен на рис. 4.

5. Логарифмическая функция. Функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называется *логарифмической*. Она определена при $x > 0$. Ее график изображен на рис. 5.

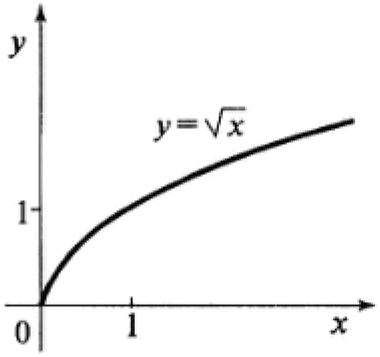


Рис. 3

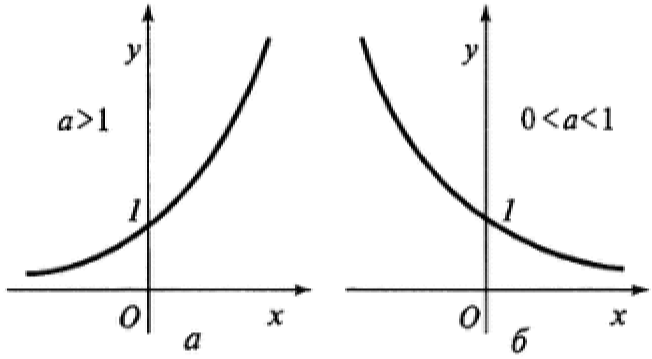


Рис. 4

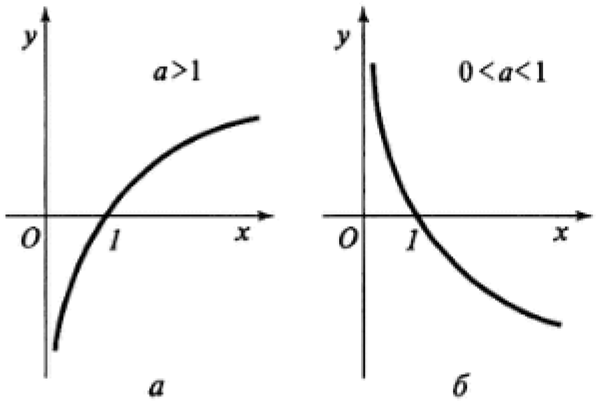


Рис. 5

6. Понятие обратной функции. Между степенной функцией и радикалом, а также между показательной и логарифмической функциями существует связь, выражаемая через понятие обратной функции.

Пусть

$$y=f(x) \tag{1.1}$$

есть функция независимой переменной x. Это означает, что, задавая значения x, мы вполне определяем значения зависимой переменной y. Поступим наоборот, а именно: будем считать независимой переменной y, а зависимой — переменную x. Тогда x будет являться функцией переменной y, которая называется функцией, *обратной* к данной.

Предполагая, что уравнение (1.1) разрешено относительно x, получаем явное выражение обратной функции

$$x=\varphi(y). \tag{1.2}$$

Обратная функция однозначной функции может быть многозначной, т. е. данному значению y может соответствовать несколько значений переменной x. Иногда удается сделать обратную функцию однозначной, вводя дополнительные ограничения на ее значения.

Пример. Двузначная функция $x=\pm\sqrt{y}$ является обратной по отношению к функции $y=x^2$. Если условиться для корня брать лишь его арифметическое значение, то обратная функция будет однозначной.

Очевидно, что если (1.2) есть функция, обратная к (1.1), то и функция (1.1) будет обратной по отношению к функции (1.2), т. е. эти функции являются *взаимно обратными*.

Иногда придерживаются стандартных обозначений: под x понимают независимую переменную, а под y — функцию, т. е. зависимую переменную. В таком случае обратную функцию следует писать в виде $y=\varphi(x)$. Например, можно говорить, что функции $y=2^x$ и $y=\log_2 x$ являются взаимно обратными.

Чтобы из графика данной функции $y=f(x)$ получить график обратной ей функции $y=\varphi(x)$, очевидно, достаточно первый график симметрично отобразить относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов (рис. 6).

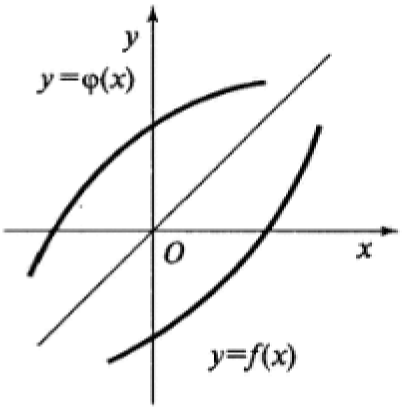


Рис. 6

7. Тригонометрические функции. Функции $y=\sin x$, $y=\cos x$ определены для всех x. Они являются периодическими с периодом 2π, т. е. при изменении аргумента на число, кратное 2π, значение функции остается прежним. Кроме того, функция $\sin x$ нечетная ($\sin(-x)=-\sin x$), $\cos x$ четная ($\cos(-x)=\cos x$). Графики этих функций — синусоида и косинусоида — изображены на рис. 7. Функция $y=\operatorname{tg} x$ не определена только в точках, где $\cos x=0$, т. е. в точках $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$), а функция $y=\operatorname{ctg} x$ не определена только в точках, где $\sin x=0$, т. е. в точках $x=k\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$). При этом $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — нечетные функции. Графики функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$, имеющие период π, изображены на рис. 8.

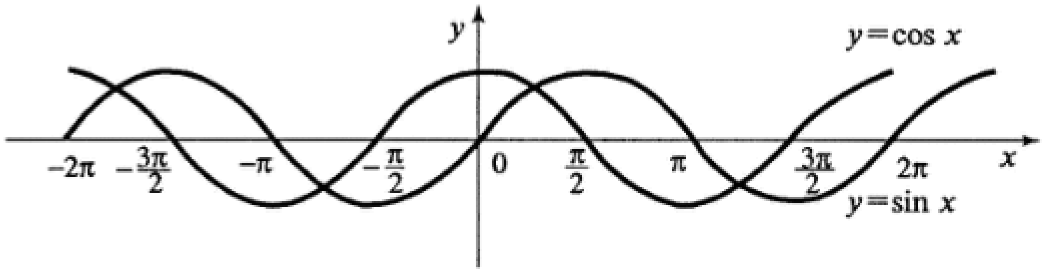


Рис. 7

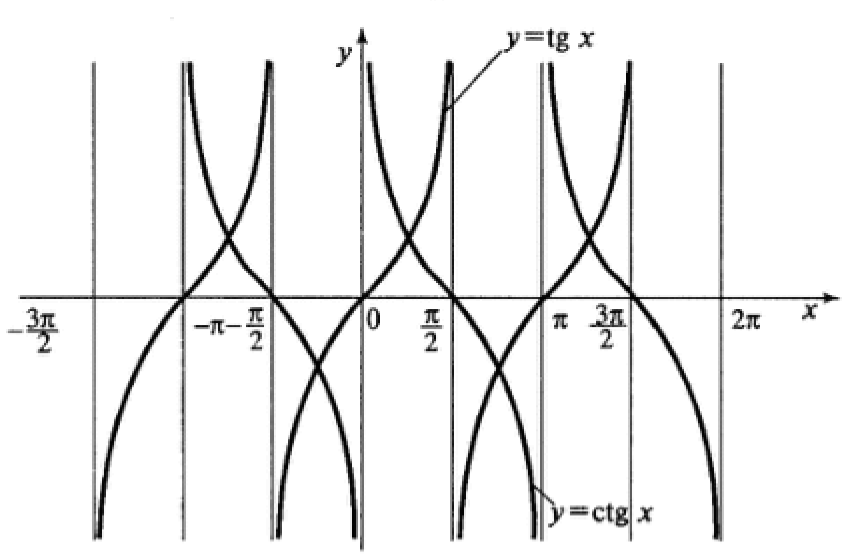


Рис. 8

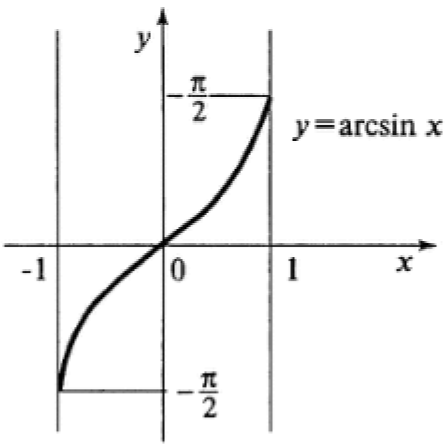


Рис. 9

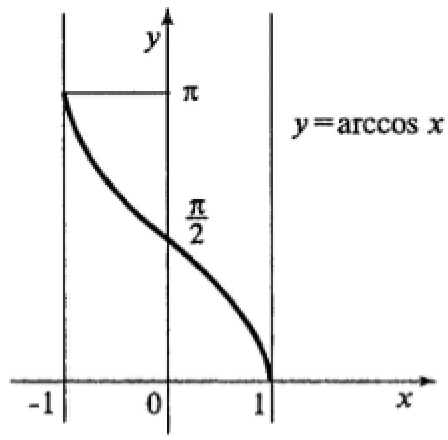


Рис. 10

Отметим, что в тригонометрических функциях переменная x обычно выражается в радианах.

8. Обратные тригонометрические функции. Функция $y = \arcsin x$. Здесь y — переменная из сегмента $|y| \le \frac{\pi}{2}$, синус которой равен x, т. е. $x = \sin y$. Область определения этой функции — сегмент $|x| \le 1$, а ее график изображен на рис. 9.

Функция $y = \arccos x$ означает, что $x = \cos y$, причем $|x| \le 1$ и $0 \le y \le \pi$. График $y = \arccos x$ изображен на рис. 10.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ есть переменная, тангенс которой равен x, т. е. $x = \operatorname{tg} y$, причем x — любое и $|y| < \frac{\pi}{2}$ (рис. 11), а функция $y = \operatorname{arcctg} x$ есть переменная, для которой $x = \operatorname{ctg} y$, где x — любое и $0 < y < \pi$ (рис. 12).

9. Сложная функция. Пусть переменная y зависит от переменной u, которая в свою очередь зависит от переменной x, т. е. $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. Тогда при изменении x будет меняться u, а потому будет меняться и y. Значит, y является функцией x: $y = f(\varphi(x))$. Эта функ-

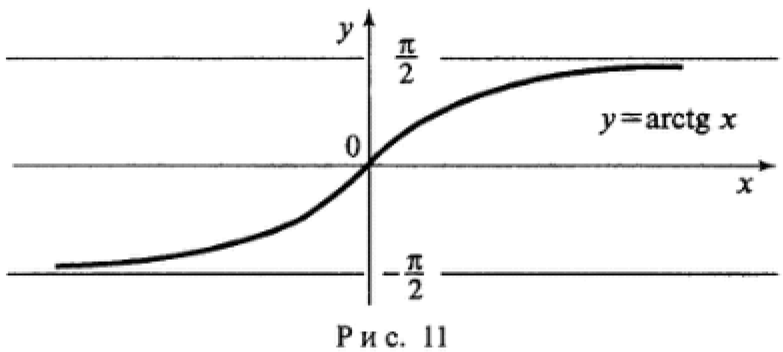


Рис. 11

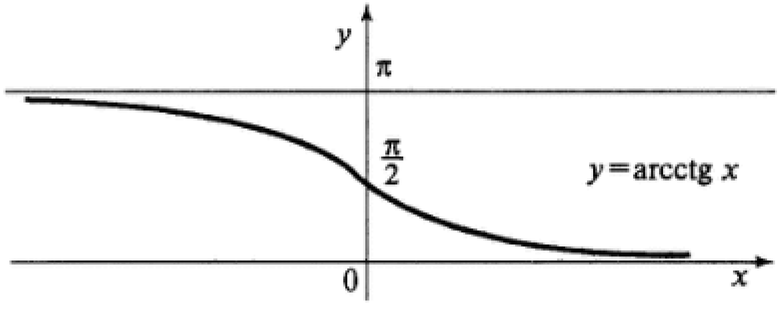


Рис. 12

ция называется *сложной функцией* (или *функцией от функции*); переменная u — *промежуточной*. Указанную сложную функцию называют также *суперпозицией функций* f и φ.

Пример. Если $y = \sin u$, а $u = x^2$, то $y = \sin x^2$ есть сложная функция независимой переменной x.

Функции степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, постоянная (константа) называются *основными элементарными функциями*.

Всякая функция, которая получается из основных элементарных функций путем конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления), называется *элементарной функцией*.

Например, элементарными функциями будут рассмотренные выше целая рациональная и дробно-рациональная функции.

10. Гармонические колебания. В природе и технике часто происходят явления и процессы, повторяющиеся периодически, например колебание маятника, переменный ток, электромагнитные колебания и др.

Рассмотрим простейший вид колебаний, так называемое *гармоническое колебание*

$$y = A \sin \omega t \tag{1.3}$$

(A и ω — положительные постоянные.)

График функции (1.3) изображен на рис. 13.

Коэффициент A, представляющий наибольшую величину, которую может иметь y, *называют амплитудой* колебания, а ω — *частотой* колебания. Функция (1.3) является периодической, с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$: значения y в точках $t + k\frac{2\pi}{\omega}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) одни и те же. Если считать, что t — время, то период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ показывает время, в течение которого совершается одно колебание. Поэтому $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — число

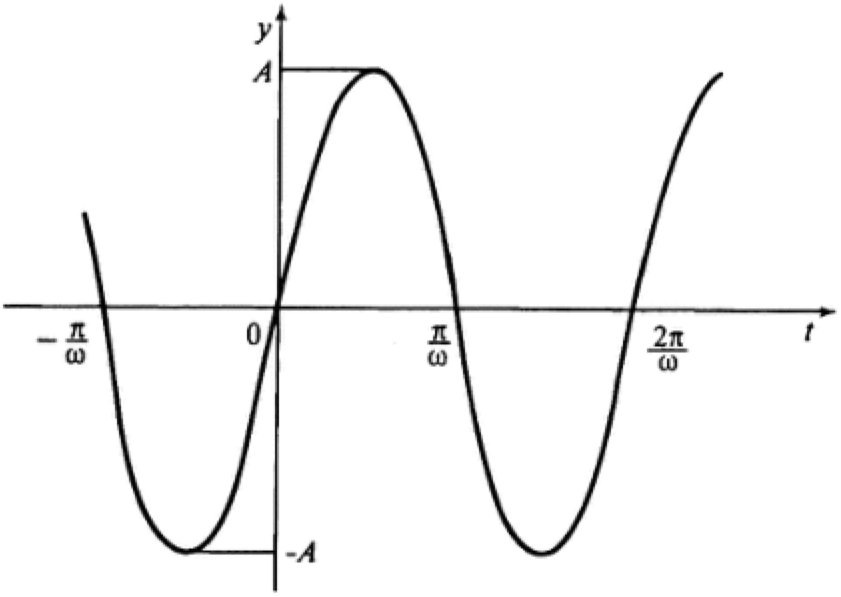


Рис. 13

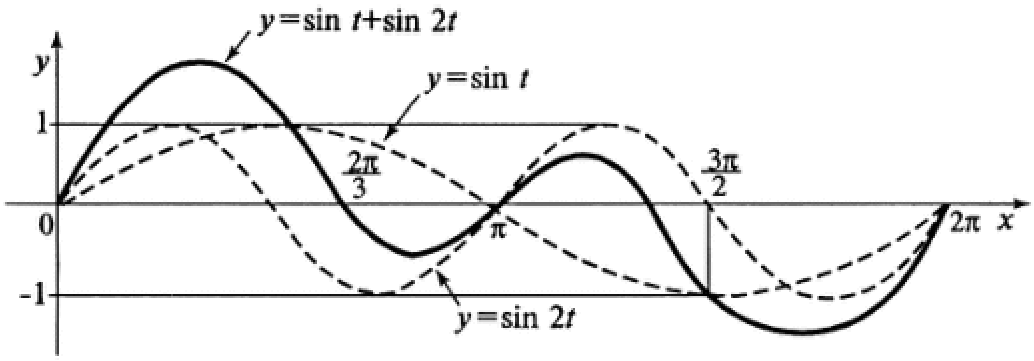


Рис. 14

колебаний за время 2π. График гармонического колебания (см. рис. 13) называется *простой гармоникой.*

Однако далеко не всегда периодическое явление описывается простой гармоникой. Многие из таких явлений есть результат сложения нескольких простых гармоник, который называется *сложным гармоническим колебанием*, а его график — *сложной гармоникой.*

На рис. 14 изображена сложная гармоника $y = \sin t + \sin 2t$ — результат сложения двух простых гармоник $y = \sin t$ и $y = \sin 2t$.

§ 1.3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1. Предел числовой последовательности. *Бесконечной числовой последовательностью* (или просто числовой последовательностью) называется функция $a_n = f(n)$, определенная на множестве всех натуральных чисел 1, 2, ..., n, ... Значения последовательности a_1, a_2, ..., a_n, ... называют ее *членами.*

Последовательность $a_n = f(n)$ иногда обозначают так: $\{a_n\}$. Это означает, что задана последовательность с *общим* членом a_n. По данному общему члену всегда можно найти любой член последовательности a_k, подставив в a_n вместо n число k. Ниже приведены примеры последовательностей, причем сначала приведена форма записи $\{a_n\}$, а затем записаны первые члены:

1) $\{(-1)^n n\}$ $\quad -1, 2, -3, \ldots;$ $\quad$ 2) $\{3n+1\}$; $\quad 4, 7, 10, \ldots;$

3) $\{2-n\}$; $\quad 1, 0, -1, \ldots;$ $\quad$ 4) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$; $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots;$

5) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$; $\quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots;$ $\quad$ 6) $\left\{\frac{n+1}{2n}\right\}$; $\quad 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \ldots;$

7) $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$; $\quad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots .$

Для числовой последовательности, как и для любой функции, можно построить график. Он не является линией, а состоит из отдельных точек, расположенных справа от оси Oy. На рис. 15 и 16 построены графики последовательностей 1) и 5).

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *невозрастающей (неубывающей)*, если для любого номера n справедливо неравенство $a_n \geq a_{n+1}$ $(a_n \leq a_{n+1})$.

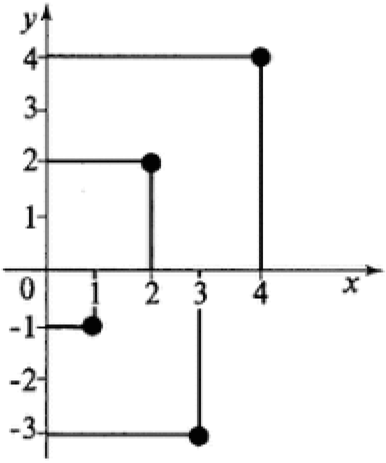


Рис. 15

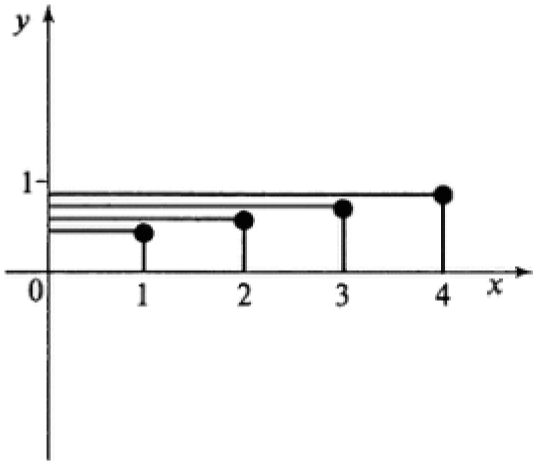


Рис. 16

Если $a_n > a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$), то последовательность $\{a_n\}$ *убывающая (возрастающая)*. Например, последовательность 3) убывающая, последовательность 2) возрастающая.

Невозрастающие и неубывающие последовательности называют *монотонными*.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху (снизу)*, если существует такое число M, что для любого номера n выполняется неравенство $a_n \le M$ ($a_n \ge M$). Последовательность 3) ограничена сверху, например числом 1. Последовательности, одновременно ограниченные сверху и снизу, называются *ограниченными*. Последовательность 4) ограниченная.

На графике последовательности 5) (см. рис. 16) видно, что ординаты точек с увеличением номера n приближаются к единице. Члены последовательности 4) с возрастанием номера становятся близкими к нулю.

Определение. Число a называют *пределом* числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, зависящий от ε, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Это обозначают так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Примеры.

Доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$;   б) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n} = 0$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$;   г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

Ограничимся доказательством первого из этих четырех равенств, так как доказательства трех других проводятся аналогично.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

если $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Из последнего неравенства следует, что в качестве номера N можно взять целую часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Характер стремления последовательности к своему пределу различен. Последовательности 4) и 6) стремятся к своим пределам убывая; последовательность 5) стремится к единице возрастая; последовательность 7) стремится к нулю так, что ее члены становятся поочередно то больше, то меньше нуля.

Сформулируем без доказательства важные свойства пределов последовательностей. (Доказательство можно найти, например, в [7].)

1. *Последовательность может иметь только один предел.*

2. *Любая неубывающая (невозрастающая) и ограниченная сверху (снизу) числовая последовательность имеет предел.* На основании свойства 2 можно показать, например, что последовательность $\{2^{1/n}\}$ имеет предел, так как ее члены убывают, оставаясь больше единицы.

2. Число e. Рассмотрим числовую последовательность

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}. \tag{1.4}$$

Для доказательства существования предела этой последовательности воспользуемся свойством 2 из предыдущего пункта. Для этого покажем сначала, что наша последовательность возрастающая. Разложим общий член последовательности $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ по формуле бинома Ньютона:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\frac{1}{n^n}$$

или

$$a_n=2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{1.5}$$

Из равенства (1.5) видно, что с увеличением номера n каждое слагаемое, кроме первого, увеличивается и возрастает число таких слагаемых. Следовательно, $a_n<a_{n+1}$ для всех n, и поэтому последовательность возрастающая.

Покажем теперь, что последовательность (1.4) ограничена сверху. Заменим во всех членах разложения (1.5) выражения в круглых скобках единицами. Тогда

$$a_n < 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}.$$

Подставляя вместо множителей 3, 4, ... n в знаменателях число 2, еще больше увеличим правую часть:

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Но по формуле суммы членов геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1.$$

Поэтому $a_n < 3$ при любом n.

Из свойства 2 предыдущего пункта следует, что последовательность (1.4) как возрастающая и ограниченная сверху имеет предел. Этот предел принято обозначать буквой e (так называемый *второй замечательный предел*):

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{1.6}$$

Число e является иррациональным и приблизительно равно 2,71828 (e = 2,71828182...).

3. Закон непрерывного (органического) роста.

Число e находит применение при выводе закона, которому подчиняются многие естественные процессы: распад радиоактивного вещества, размножение бактерий, рост народонаселения, рост кристаллов, рост денежных вкладов и др. Разберем типичный в этом отношении пример начисления Сбербанком процентов по вкладу.

Рост денежных вкладов. Сбербанк выплачивает 10 % годовых от суммы вклада. Если 1 января положить в Сбербанк 100 000 руб., то в конце года на них будет начислено 10 000 руб. процентов. Если же 1 июля взять весь вклад обратно, то будет начислено не 10 000 руб., а половина этой суммы, т. е. 5000 руб. Если изъять вклад 1 апреля, то будет начислено 10 000 руб. $\cdot \frac{1}{4}$, т. е. 2500 руб.

Поэтому, вместо того чтобы вложить 1 января 100 000 руб. и истребовать их в конце года, выгоднее 1 июля изъять весь вклад и вложить его снова.

В первом случае в конце года будет получено 110 000 руб., во втором случае 1 июля будет получено 105 000 руб.: на вторую половину года будет вложено 105 000 руб., на которые будет начислено 5 %, т. е. 5250 руб., и в конце года будет получено 110 250 руб.

Еще выгоднее изымать и снова вносить вклад каждый месяц, каждую неделю и т. д. В математической схеме можно представить этот процесс изъятия и внесений вклада бесконечным.

Пусть a — начальная сумма вклада и p % — годовой процент. Если ввести условие присоединения процентов по отдельным частям года, равным $\frac{1}{n}$-й доле его, причем процентная такса p % по-прежнему относится к целому году, то по истечении одной такой части года начальная сумма обратится в

$$a + a\frac{p}{100n} = a\left(1 + \frac{p}{100n}\right) = a_1,$$

по прошествии двух частей —

$$a_1 + a_1\frac{p}{100n} = a_1\left(1 + \frac{p}{100n}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^2,$$

по прошествии трех частей —

$$a_2 + a_2\frac{p}{100n} = a_2\left(1 + \frac{p}{100n}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^3 \text{ и т. д.}$$

По истечении одного года начальная сумма a обратится в $a\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^n$, по истечении двух лет— в $a\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{2n}$, по истечении t лет — в $a\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt}$.

Если ввести дальнейшее условие, что присоединение процентов производится непрерывно, т. е. число частей, на которые делится год, неограниченно возрастает ($n \to \infty$), то величина наращенной суммы A представится в виде предела выражения

$$a\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt} \text{ при } n \to \infty,$$

т. е.

$$a\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt}.$$

Для отыскания этого предела обозначим $\frac{p}{100n} = \frac{1}{m}$; тогда $n = \frac{pm}{100}$ и $nt = \frac{pmt}{100}$. Здесь $m = \frac{100n}{p}$, откуда следует, что при неограниченном возрастании n неограниченно растет и m.

После перехода к переменной m величина наращенной суммы по прошествии t лет определится формулой

$$A = a\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{mpt}{100}}$$

или

$$A = a\left(\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^{\frac{pt}{100}}.$$

Учитывая, что выражение во внешних скобках представляет собой постоянную величину e, находим

$$A = ae^{\frac{pt}{100}}. \qquad (1.7)$$

Приведем величину вклада при данном проценте p через t лет при однократном изъятии в конце срока:

$$A_1 = a\left(1 + \frac{pt}{100}\right).$$

Значение A всегда больше A_1.

Сравним значения A и A_1 при начальном вкладе $a = 1\,000\,000$ руб., времени $t = 10$ лет и процентной ставке $p = 10$. Вычисления дают результат

$$A = 1\,000\,000 e^{0,1 \cdot 10} = 1\,000\,000 e \approx 2\,718\,281\,,$$

$$A_1 = 1\,000\,000\,(1 + 0,1 \cdot 10) = 2\,000\,000\,.$$

Как видим, разница (в рублях) существенная.

Замечание. Формула (1.7) применяется каждый раз, когда речь идет о непрерывном органическом росте или убывании с течением времени.

Заменяя $\frac{p}{100}$ величиной k и вводя обозначение $-k$ для случая убывания, получаем формулы: $A = ae^{kt}$ — для вычисления результатов процесса непрерывного роста и $A = ae^{-kt}$ — для непрерывного убывания.

4. Натуральные логарифмы. Число e принято за основание системы логарифмов, называемых *натуральными логарифмами*. Оказалось, что с помощью натуральных логарифмов некоторые формулы записываются проще. Для обозначения натурального логарифма числа N пользуются символом $\ln N$.

Для отыскания приближенных значений натуральных логарифмов по таблицам десятичных логарифмов найдем связь между натуральными и десятичными логарифмами.

Если $\ln N = a$, то $N = e^a$ и логарифмирование обеих частей последнего равенства по основанию 10 дает $\lg N = a \lg e$ $(\lg e \approx 0{,}4343)$ или $\lg N = \ln N \lg e$, откуда

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e}$$

$$\left(\frac{1}{\lg e} \approx 2{,}3026\right).$$

5. Предел функции. Выше рассмотрено понятие предела для частного вида функций — числовых последовательностей. Обобщим его на произвольные функции.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$, кроме, быть может, самой точки a.

Определение. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при стремлении x к a (или в точке a), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \delta,$$

имеет место неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \to A \ \text{при} \ x \to a.$$

Отсюда, если число A есть предел функции $f(x)$ в точке $x = a$, то для всех x, достаточно близких к числу a и отличных от него, соответствующие им значения функции $f(x)$ оказываются сколь угодно близкими к числу A (естественно в тех точках x, в которых функция $f(x)$ определена).

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$. Пусть ε — произвольное положительное число. Найдем такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - 1| < \delta$, выполняется неравенство $|x - 1| < \varepsilon$. Очевидно, здесь таким δ является ε.

Пример 2. Показать, что $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$. Пусть ε — произвольное положительное число. Найдем такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - 1| < \delta$, выполняется неравенство $|x^2 - 1| < \varepsilon$.

Если $0 < |x - 1| < \delta$, то $|x + 1| = |(x - 1) + 2| \leq |x - 1| + 2 < \delta + 2$. Следовательно, $|x^2 - 1| = |x - 1||x + 1| < \delta(\delta + 2)$. Для выполнения неравенства $|x^2 - 1| < \varepsilon$ достаточно потребовать, чтобы $\delta(\delta + 2) = \varepsilon$, т. е. чтобы $\delta^2 + 2\delta - \varepsilon = 0$. Отсюда $\delta = -1 + \sqrt{1 + \varepsilon}$ (второй корень $\delta = -1 - \sqrt{1 + \varepsilon}$ отбрасываем, так как $\delta > 0$).

Примечание. Если в формуле (1.6) положить $\dfrac{1}{n} = z$, то она примет вид

$$e = \lim_{z \to 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}}. \tag{1.8}$$

Оказывается, что формула (1.8) верна не только когда переменная z пробегает последовательность значений $z_n = \dfrac{1}{n}$, но и при любом другом законе стремления z к нулю.

При изучении свойств функции приходится рассматривать и предел функции при стремлении аргумента x к бесконечности.

Определение. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при стремлении x к бесконечности (или в бесконечности), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число N, что для всех x, удовлетворяющих условие $|x| > N$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Пример 3. Показать, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 1}{x^3} = 1.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Найдем такое число $N > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство

$$\left| \frac{x^3 + 1}{x^3} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Если $|x| > N$, то $|x|^3 > N^3$, и

$$\left|\frac{x^3+1}{x^3}-1\right| = \frac{1}{|x|^3} < \frac{1}{N^3}.$$

Поэтому для выполнения неравенства

$$\left|\frac{x^3+1}{x^3}-1\right| < \varepsilon$$

достаточно найти N из условия $\frac{1}{N^3} = \varepsilon$, т. е. взять $N = \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$. Следовательно, по определению

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^3} = 1.$$

Рассматривают также $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) определяется аналогично $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, только в самой формулировке определения $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ условие $|x| > N$ следует заменить на $x > N$ ($x < -N$).

§ 1.4. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Бесконечно малые и их свойства. При изучении свойств пределов функций особую роль играют функции, предел которых при стремлении аргумента к какой-либо точке равен нулю. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно малой*, если ее предел равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$ являются бесконечно малыми: их пределами является нуль (см. § 1.3, п. 1). Понятие бесконечно малой последовательности можно перенести на произвольные функции.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$, т. е. если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Бесконечно малую функцию $\alpha(x)$ называют также бесконечно малой величиной или просто бесконечно малой.

Пример. Показать, что функция $y = x^2 - 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$. Пусть ε — произвольное положительное число. Найдем такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-1| < \delta$, выполняется неравенство $|x^2-1| < \varepsilon$. Как показано ранее (см. § 1.3, п. 5, пример 2), таким δ является $\delta = -1 + \sqrt{1+\varepsilon}$. Следовательно, функция $y = x^2 - 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$.

В дальнейшем в этом параграфе при рассмотрении бесконечно малых будем иметь в виду, что они являются бесконечно малыми при $x \to a$.

Остановимся на основных свойствах бесконечно малых функций. Эти свойства будут верны также и для бесконечно малых последовательностей.

1. *Если функции* $\alpha_1(x)$ *и* $\alpha_2(x)$ *являются бесконечно малыми, то функция* $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)$ *также есть бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Так как функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ бесконечно малые, то найдутся такие числа δ_1, $\delta_2>0$, что при $0<|x-a|<\delta_1$ и $0<|x-a|<\delta_2$ имеют место соответственно неравенства

$$|\alpha_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |\alpha_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.9}$$

Обозначим через δ наименьшее из двух чисел δ_1 и δ_2. Тогда при $0<|x-a|<\delta$ будут верны неравенства (1) и, следовательно,

$$|\alpha_1(x)+\alpha_2(x)|\le|\alpha_1(x)|+|\alpha_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что при $0<|x-a|<\delta$ выполняется неравенство $|\alpha_1(x)+\alpha_2(x)|<\varepsilon$, а это и означает, что $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)$ есть функция бесконечно малая.

Примечание 1. Свойство 1 распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа бесконечно малых.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной* при $x\to a$, если существуют положительные числа M и δ, такие, что при условии $0<|x-a|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)|\le M$. Например, любая бесконечно малая $\alpha(x)$ является ограниченной функцией при $x\to a$.

Температура воздуха T в данной местности — ограниченная функция времени t. Изменяясь днем и ночью, зимой и летом, она никогда не достигнет +100 °С и −100 °С. Таким образом, $|T(t)|<100$.

2. *Произведение ограниченной при* $x\to a$ *функции на бесконечно малую есть функция бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — ограниченная функция при $x\to a$ и $\alpha(x)$ — бесконечно малая. Тогда существует такое число $M>0$, что $|f(x)|\le M$ для всех x, достаточно близких к a. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Для ε существует такое $\delta>0$, что при условии $0<|x-a|<\delta$ одновременно выполняются неравенства $|f(x)|\le M$ и $|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{M}$. Поэтому

$$|f(x)\,\alpha(x)|=|f(x)|\,|\alpha(x)|\le M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

Непосредственно из свойства 2 следуют свойства 3 и 4.

3. *Произведение постоянной на бесконечно малую есть бесконечно малая.*

4. *Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая.*

Примечание 2. Свойство 4 распространяется на любое конечное число бесконечно малых.

2. Бесконечно большие. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа M

найдется такое натуральное число N, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $|a_n| > M$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Последовательности $\{n\}$, $\{(-1)^n \cdot n\}$ являются бесконечно большими.

Понятие бесконечно большой последовательности можно перенести на произвольные функции.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $|f(x)| > M$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$. Обозначается это так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Если при этом $f(x)$ положительна (отрицательна) в окрестности точки a, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty)$.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$. Действительно, при любом $M > 0$ будем иметь $\dfrac{1}{(1-x)^2} > M$, если только $(1-x)^2 < \dfrac{1}{M}$, $|1-x| < \dfrac{1}{\sqrt{M}} = \delta$. Функция $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ принимает только положительные значения.

Примечания. 1. Бесконечность (∞) не число, а символ, который употребляется, например, для того, чтобы указать, что соответствующая функция есть бесконечно большая.

2. Бесконечно большая функция $f(x)$ при $x \to a$ не имеет предела, так как предел переменной (если он существует) — некоторое число. То же в случае бесконечно большой числовой последовательности.

В дальнейшем всегда под пределом последовательности (функции) будем понимать конечный предел, т. е. число, если не оговорено противное.

Ниже рассматриваются бесконечно большие функции при $x \to a$. Как видно из следующих свойств, которые верны и для последовательностей, бесконечно большие и бесконечно малые функции тесно связаны между собой.

1. *Если функция $f(x)$ бесконечно большая, то $\dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно малая.*

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и обозначим $\frac{1}{\varepsilon} = M$. Так как $f(x)$ бесконечно большая, то числу M соответствует $\delta > 0$, такое, что при $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon}$, откуда $\dfrac{1}{|f(x)|} < \varepsilon$.

2. *Если функция $\alpha(x)$ бесконечно малая и не обращается в нуль, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая.*

Доказательство. Возьмем любое $M > 0$ и обозначим $\frac{1}{M} = \varepsilon$. Так как $\alpha(x)$ бесконечно малая, то числу $\varepsilon > 0$ соответствует $\delta > 0$, такое, что при $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon = \frac{1}{M}$, откуда $\dfrac{1}{|\alpha(x)|} > M$.

Замечание. В данном параграфе были рассмотрены функции аргумента x для случая, когда $x \to a$. Однако все предложения, установленные здесь, остаются в силе и для случая, когда x стремится к бесконечности. При этом все доказательства аналогичны.

§ 1.5. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

1. Основные теоремы о пределах. Прежде сделаем следующее замечание. Ниже рассматриваются функции аргумента x, при этом x стремится к a или x стремится к бесконечности. Все устанавливаемые в этом пункте предложения о пределах имеют место в обоих случаях; они верны также и для последовательностей. Здесь приводится доказательство для одного из этих случаев ($x \to a$), так как для другого доказательство аналогично. Это замечание относится и к п. 4.

Теорема 1. *Для того чтобы число A было пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представима в виде*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая.

Доказательство. 1. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. функция $\alpha(x) = f(x) - A$ есть бесконечно малая и $f(x) = A + \alpha(x)$.

2. Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для x из $0 < |x - a| < \delta$ будет $|\alpha(x)| = |f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. A — предел функции $f(x)$ при $x \to a$.

Следствие 1. *Функция не может в одной точке иметь два различных предела.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$ $(A \neq B)$, то по теореме 1 $f(x) = A + \alpha(x)$ и $f(x) = B + \beta(x)$ ($\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые). Отсюда $A + \alpha(x) = B + \beta(x)$ и $A - B = \beta(x) - \alpha(x)$, где $\beta(x) - \alpha(x)$ — бесконечно малая, а $A - B$ — постоянная. Этой постоянной может быть только нуль. Поэтому $A = B$.

Теорема 2. *Предел постоянной величины равен самой постоянной.*

Это предложение непосредственно вытекает из определения предела.

Теорема 3. *Если функция $f(x) \geq 0$ $(f(x) \leq 0)$ для всех x в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a, и в точке a имеет предел, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$ $(\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq 0)$.*

Доказательство. Пусть, например, $f(x) \geq 0$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Если бы было $A < 0$, то для $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$ было бы невозможно ни при каком $\delta > 0$, так как влекло бы за собой отрицательность $f(x)$.

Примечание 1. Заметим, что при условии, что $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует, из $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$, вообще говоря, не вытекает $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$ $(\lim\limits_{x \to a} f(x) < 0)$, а только $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$ $(\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq 0)$. Так, $|x| > 0$ для всех $x \neq 0$, но $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$.

Т е о р е м а 4. *Если функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *имеют пределы при* $x \to a$, *то при* $x \to a$ *имеют пределы также их сумма* $f_1(x)+f_2(x)$, *произведение* $f_1(x)\,f_2(x)$ *и при условии* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$ *частное* $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, *причем*

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x), \tag{1.10}$$

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)\,f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x)\,\lim_{x\to a} f_2(x), \tag{1.11}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}. \tag{1.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся рассмотрением случая суммы. Все остальные утверждения доказываются аналогично.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A_2$. Тогда, согласно теореме 1,

$$f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x), \quad f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x),$$

где $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ — бесконечно малые. Отсюда

$$f_1(x) + f_2(x) = (A_1 + A_2) + (\alpha_1(x) + \alpha_2(x)).$$

По свойству 1 бесконечно малых (см. § 1.4) сумма $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)$ бесконечно мала. Следовательно, по теореме 1

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)] = A_1 + A_2.$$

П р и м е ч а н и е 2. Формула (1.10) распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых, а формула (1.11) — на случай любого конечного числа сомножителей.

С л е д с т в и е 2. *Если функция* $f(x)$ *имеет предел при* $x \to a$, *то*

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n,$$

где n — натуральное число.

С л е д с т в и е 3. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела:*

$$\lim_{x\to a} c f(x) = c \lim_{x\to a} f(x); \quad c = \text{const}.$$

Т е о р е м а 5. *Если для функций* $f(x)$, $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *в некоторой окрестности точки* a *выполняется неравенство*

$$f_1(x) \le f(x) \le f_2(x) \tag{1.13}$$

и $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения предела вытекает, что в некоторой окрестности точки a (при $x \neq a$) будут одновременно выполняться следующие неравенства:

$$|f_1(x) - A| < \varepsilon, \quad |f_2(x) - A| < \varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число. Запишем эти неравенства, освободившись от знака абсолютной величины:

$$A - \varepsilon < f_1(x) < A + \varepsilon, \tag{1.14}$$

$$A-\varepsilon<f_2(x)<A+\varepsilon. \qquad (1.15)$$

Из неравенств (1.13) и (1.14) имеем

$$A-\varepsilon<f_1(x)\le f(x),$$

откуда

$$A-\varepsilon<f(x). \qquad (1.16)$$

Аналогично из неравенств (1.13) и (1.15) получим

$$f(x)<A+\varepsilon. \qquad (1.17)$$

Из (1.16) и (1.17) следует, что $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$ или $|f(x)-A|<\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

2. Примеры вычисления пределов.

Пример 1. Найти

$$\lim_{x\to 1}(2x^2+1).$$

Используя теоремы 4, 2, следствия 3, 2 и пример 1 из п. 4 § 1.3 последовательно, получаем

$$\lim_{x\to 1}(2x^2+1)=\lim_{x\to 1}2x^2+\lim_{x\to 1}1=2(\lim_{x\to 1}x)^2+1=2+1=3.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+1}{x^3+1}$. Применяя теоремы 4, 2 следствия 2, 3 и пример (1.4), находим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+1}{x^3+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^3+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}5x+\lim\limits_{x\to 1}1}{\lim\limits_{x\to 1}x^3+\lim\limits_{x\to 1}1}=$$

$$=\frac{(\lim\limits_{x\to 1}x)^2-5\lim\limits_{x\to 1}x+1}{(\lim\limits_{x\to 1}x)^3+1}=\frac{1-5+1}{1+1}=-\frac{3}{2}.$$

Как показывают решения приведенных примеров, в простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Однако не всегда можно вычислить предел с помощью формул (1.10), (1.11), (1.12). Так, формулы (1.10) и (1.11) утрачивают смысл, если хотя бы одна из функций $f_1(x)$ или $f_2(x)$ не имеет предела. Формула (1.12) неверна, если знаменатель дроби стремится к нулю. Рассмотрим здесь два случая:

а) предел числителя не равен нулю.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{1-x^2}$. Имеем $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)=0$. Поэтому формулу (1.12) в этом примере использовать нельзя. Так как

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)}{\lim\limits_{x\to 1}x^2}=\frac{0}{1}=0,$$

то функция $\dfrac{1-x^2}{x^2}$ бесконечно малая при $x\to 1$ (см. § 1.4, п. 1). Тогда (см. § 1.4, п. 2) функция $\frac{x^2}{1-x^2}$ бесконечно большая при $x \to 1$, т. е. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2}{1-x^2}=\infty$.

Можно отметить, что когда x приближается к единице слева, т. е. оставаясь все время меньше единицы (что записывают $x \to 1-0$), функция $\frac{x^2}{1-x^2}$ остается все время положительной. В этом случае записывают

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{1-x^2}=+\infty.$$

Если же x приближается к единице справа, т. е. оставаясь все время больше единицы (что записывают $x \to 1+0$), эта функция остается все время отрицательной. В этом случае записывают

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{1-x^2}=-\infty;$$

б) предел числителя равен нулю.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2+x}$. Здесь $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+3x)=0+3\cdot 0=0$, $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x)=0+0=0$. Говорят, что в этом случае имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Однако предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2+x}$ существует, и его можно найти. Для его нахождения, т. е. раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$, надо предварительно преобразовать дробь $\frac{x^2+3x}{x^2+x}$, разделив числитель и знаменатель почленно на x, что возможно, так как до перехода к предельному значению $x \neq 0$. Следовательно, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x+1}.$$

Но $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+3}{x+1}=3$ (здесь формула (1.12) применима, так как $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1\neq 0$). В результате имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2+x}=3.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$. Так как

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}\right)=0,\quad \lim_{x\to 0}x=0,$$

то здесь также имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, преобразуем дробь, стоящую под знаком предела, умножив числитель и знаменатель этой дроби на $\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)$ и сделав после чего необходимые упрощения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}\right)\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}{x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-x-(4+x)}{x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=-2\frac{1}{2+2}=-\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим теперь примеры на вычисление пределов функций при $x\to\infty$.

П р и м е р 6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{3x+2}$. Очевидно, $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)=\infty$. Поэтому (см. § 1.4) функция $\frac{1}{3x+2}$, значит, и функция $\frac{4}{3x+2}$ бесконечно малая при $x\to\infty$, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{3x+2}=0$.

П р и м е р 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x+1}$. Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+5)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}(4x+1)=\infty$. Говорят, что в этом случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия предварительно числитель и знаменатель дроби $\frac{3x+5}{4x+1}$ почленно разделим на x. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{4+\frac{1}{x}}.$$

Но

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0.$$

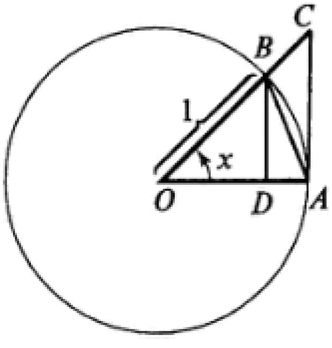
В результате имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x+1}=\frac{3}{4}.$$

Аналогично устанавливается, что при $x\to\infty$ дробно-рациональная функция стремится либо к нулю, либо к бесконечности, либо к конечному числу, отличному от нуля, в зависимости от того, будет ли степень числителя меньше степени знаменателя, больше ее или равна ей.

3. Первый замечательный предел. Справедливо равенство

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1.18}$$



Р и с. 17

Равенство (1.18) называется *первым замечательным пределом*. С его помощью можно вычислять пределы различных функций, содержащих тригонометрические функции и степени x.

Перейдем к доказательству равенства (1.18). Возьмем круг единичного радиуса и предположим, что угол x, выраженный в радианах, заключен в интервале $\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 17). Обозначим площади треугольников OAB и OAC соответственно через S_1 и S_2, а площадь сектора OAB — через S. Из рис. 17 видно, что

$$S_1 < S < S_2. \tag{1.19}$$

Замечая, что $BD = \sin x$, $AC = \operatorname{tg} x$, имеем $S_1 = \frac{1}{2}\sin x$, $S = \frac{1}{2}x$, $S_2 = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Поэтому с учетом (1.19) получаем

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

откуда после деления на $\sin x$ и сокращения на $\frac{1}{2}$ находим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{1.20}$$

Неравенства (1.20) получены для $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Однако $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ — четные функции: $\cos(-x) = \cos x$, $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$. Тем самым неравенства (1.20) справедливы и в интервале $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ (это следует из геометрического определения косинуса), то из (1.20) на основании теоремы 5 заключаем, что действительно имеет место равенство (1.18).

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$. Имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{3x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$. Имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2\sin 2x}{2x}}{\dfrac{5\sin 5x}{5x}} = \frac{2}{5}\,\frac{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x}} = \frac{2}{5}.$$

4. Сравнение бесконечно малых. Рассмотрим отношение двух бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ (для компактности записи будем обозначать их просто α и β). Выделим три случая.

1. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$. В этом случае говорят, что α — бесконечно малая более *высокого* порядка, чем β.

Пример 1. При $x \to 2$ функция $(x-2)^3$ бесконечно малая более высокого порядка, чем $x-2$, так как $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)^3}{x-2} = 0$.

2. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$ (A — число). В этом случае функции α и β называют бесконечно малыми *одного* и того же порядка.

Пример 2. При $x \to 0$ функция $5x^2$ и x^2 являются бесконечно малыми одного порядка, так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2}{x^2} = 5$.

3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$. В этом случае говорят, что α — бесконечно малая более *низкого* порядка, чем β. Можно сказать также, что β — бесконечно малая более высокого порядка, чем α.

Пример 3. При $x \to -1$ функция $x+1$ бесконечно малая более низкого порядка, чем $(x-1)(x+1)^2$, так как

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)^2} = \infty.$$

Определение. Если функции α и β бесконечно малые одного и того же порядка, причем $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$, то они называются *эквивалентными* бесконечно малыми. Символически это записывают так: $\alpha \sim \beta$.

Из определения, в частности, следует, что если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$, т. е. если α и β — бесконечно малые одного порядка, то α и $A\beta$ будут являться эквивалентными бесконечно малыми: $\alpha \sim A\beta$.

Пример 4. Как установлено в пункте 3, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, т. е. $\sin x$ и x при $x \to 0$ являются эквивалентными бесконечно малыми.

Пример 5. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = 1$, то $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$.

Теорема. *Если существует предел отношения двух бесконечно малых α и β, то он равен пределу отношения соответствующих им эквивалентных бесконечно малых.*

Доказательство. Действительно, если $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$ и существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\beta}$, то, перейдя к пределу в равенстве $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha}{\alpha_1}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}\dfrac{\beta_1}{\beta}$, получим

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}\frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{\beta_1}{\beta}\right) = \lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\alpha_1}\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}\lim_{x\to a}\frac{\beta_1}{\beta} = 1\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}1 = \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Доказанная теорема позволяет во многих случаях упрощать отыскание предела.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{5x}{3x} = \dfrac{5}{3}$, так как $\sin 5x \sim 5x$ и $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$ при $x \to 0$.

§ 1.6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1. Понятие непрерывности. Мы видели, что графиками последовательностей являются множества точек; эти точки всегда находятся на некотором расстоянии друг от друга (*дискретное* множество точек). Графиком же, например, степенной функции является кривая, которая похожа на росчерк пера, на «сплошную», «непрерывную» линию. Оказывается, эту разницу характеризует точное математическое понятие непрерывности, к введению которого и перейдем.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором интервале, x_0 и x — два произвольных значения аргумента из этого интервала. Обозначим $x-x_0=\Delta x$, откуда $x=x_0+\Delta x$. Говорят, что для перехода от значения аргумента x_0 к значению x первоначальному значению придано приращение Δx.

Приращением Δy функции $y=f(x)$, соответствующим приращению Δx аргумента x в точке x_0, называется разность

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Например, приращением функции $y=x^3$, которое соответствует приращению Δx аргумента x в точке x_0, будет величина

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=3x_0^2\,\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3.$$

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению Δx аргумента x в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0.$$

Другими словами, функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, т. е. предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Пример 1. Функция $y=x$ непрерывна при любом значении $x=x_0$. В самом деле, $\Delta y=x_0+\Delta x-x_0=\Delta x$ и, значит, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$.

Пример 2. Функция $y=\sin x$ непрерывна при любом значении $x=x_0$. В самом деле,

$$\Delta y=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}=$$

$$=\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\Delta x.$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\Delta x\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=0\cdot 1=0.$$

Аналогично доказывается непрерывность функции $\cos x$.

Функция, непрерывная в каждой точке интервала, называется непрерывной на этом интервале.

Теорема 1. *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, то непрерывны в этой точке также их алгебраическая сумма $f_1(x)\pm f_2(x)$, произведение $f_1(x)f_2(x)$ и при условии $f_2(x_0)\neq 0$ частное $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$.*

Эта теорема вытекает из аналогичной теоремы о пределах.

Примечание. Для алгебраической суммы и произведения теорема 1 распространяется на любое конечное число функций.

Теорема 2. *Если функция* $u=\varphi(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *а функция* $y=f(u)$ *непрерывна в точке* $u_0=\varphi(x_0)$, *то сложная функция* $y=f(\varphi(x))$ *непрерывна в точке* x_0.

Доказательство. Согласно непрерывности функции $u=\varphi(x)$ имеем $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=u_0$, т. е. при $x\to x_0$ также и $u\to u_0$.

Поэтому в силу непрерывности функции $f(u)$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=$ $=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)=f(\varphi(x_0))$, что и доказывает теорему.

Таким образом, сложная функция $y=f(\varphi(x))$, образованная из двух непрерывных функций $f(u)$ и $\varphi(x)$, является непрерывной функцией.

Например, сложная функция $y=\cos(x^2+2x-1)$ непрерывна для всех значений x, так как функции $y=\cos u$ и $u=x^2+2x-1$ всюду непрерывны.

Имеет место и следующая теорема.

Теорема 3. *Если* $f(x)$ — *непрерывная функция, имеющая однозначную обратную функцию, то обратная функция тоже непрерывна.*

Вместо доказательства ограничимся следующим наглядным соображением: если график функции $f(x)$ — непрерывная кривая, то график обратной к ней функции тоже непрерывная кривая.

Теорема 4. *Все основные элементарные функции непрерывны там, где они определены.*

Доказательство. Постоянная функция $y=C$ непрерывна при любом значении $x=x_0$, так как $\Delta y=C-C=0$ и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. Так как функция $y=x$ непрерывна при любом x (см. пример 1 этого пункта), то, согласно теореме 1, степенная функция $y=x^n$, где n — натуральное число, также непрерывна при любом x.

Непрерывность тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ имеет место всюду (см. пример 2 этого пункта); $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ непрерывны всюду, где они определены, как отношение двух непрерывных функций $\sin x$ и $\cos x$.

Можно доказать непрерывность и других основных элементарных функций там, где они определены.

Из теорем 1, 2 и 4 получаем следствие.

Следствие. *Всякая элементарная функция непрерывна во всех точках, принадлежащих ее области определения.*

Имеет место следующее предложение (см. [7]).

Теорема 5. *Функция* $f(x)$, *непрерывная в точке* x_0, *не равная нулю в этой точке, сохраняет знак* $f(x_0)$ *в некоторой окрестности этой точки.*

Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ *разрывна*, а точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

В качестве конкретного примера функции, имеющей точку разрыва, рассмотрим скорость тела, падающего на землю. Эта скорость вообще является непрерывной функцией времени, но для момента удара можно условно считать, что она мгновенно (скачком) падает до нуля, т. е. скорость терпит разрыв.

Пределом функции $f(x)$ в точке x_0 *слева (справа)* называется предел, вычисляемый в предположении, что x стремится к x_0, оставаясь все время меньше (больше) значения x_0. Пределы слева и справа, называемые *односторонними* пределами, соответственно обозначают

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \text{ и } \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 *слева (справа)*, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)\right)$.

2. Свойства функций, непрерывных на сегменте. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на сегменте* $[a;\ b]$, если она непрерывна в интервале $(a,\ b)$ и, кроме того, в точке a непрерывна справа, а в точке b — слева.

Приведем без доказательства следующие свойства функций, непрерывных на отрезке. (Доказательство см. в [7].)

1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$ и на концах его принимает значения разных знаков, то между точками a и b найдется точка c, такая, что $f(c)=0$.*

Это свойство имеет простой геометрический смысл (рис. 18): если непрерывная кривая переходит с одной стороны оси Ox на другую, то она пересекает ось Ox.

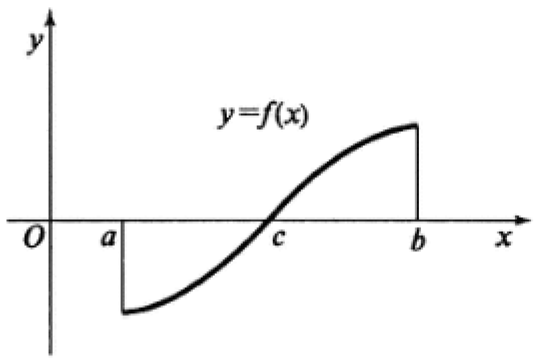


Рис. 18

2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$, то она ограничена на нем, т. е. существует такое положительное число M, что* $|f(x)|\le M$ при $a\le x\le b$.

3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$, то на этом сегменте найдутся точки x_1 и x_2, такие, что значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$ будут соответственно наибольшим и наименьшим из всех значений функции $f(x)$ на сегменте $[a;\ b]$.*

3. Непрерывные и разрывные функции в естествознании. Заметим прежде всего, что слух, зрение, восприятие ультразвука, используемые многими биологическими видами,— все эти явления связаны с колебательными процессами, описание которых достигается с помощью тригонометрических функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$.

Вместе с тем в конкретном эксперименте такие величины, как путь, биомасса популяции, численность популяции (число особей в популяции), температура, время и т. п., не могут принимать значения, равные любому действительному числу. Так, путь может быть в зависимости от ситуации измерен целым числом километров или миллиметров; биомасса измеряется тоннами или десятками миллиграммов; время — годами или сотыми долями секунды. И, формально говоря, область значений и область определения упомянутых функций не являются промежутками, а представляют собой некоторые шкалы, может быть, с очень мелкими, но стандартными делениями. Величина этих делений определяется характером эксперимента и точностью приборов. Так, возраст крупных животных измеряем годами, а время жизни некоторых элементарных частиц — миллиардными долями секунды. Но дело не в величине делений, а в том, что можно сказать: «В этом эксперименте частица прожила 3,1 или 3,2 секунды», но не можем заявить, что она прожила π секунд.

Понятно, что имея дело с такими функциями, невозможно говорить о непрерывности. Чтобы иметь возможность пользоваться аппаратом математического анализа там, где это удобно, функции, заданные на шкале, заменяют их непрерывными аналогами. Разумеется, это не всегда удобно и целесообразно. Например, если область определения функции состоит всего из двух элементов, вряд ли стоит ее заменять промежутком. Однако, если области определения и значений функции состоят хотя и из конечного, но достаточно большого числа элементов, в каком-то смысле «близко расположенных друг к другу» (как мелкие деления на шкале), то мы вправе заменить их сплошным промежутком и функцию, определенную на одном из них со значениями в другом, считать непрерывной. Изучив эту модельную функцию, мы затем сумеем сделать выводы и относительно функции, фигурирующей в эксперименте. Эта идея лежит в основе построения математических моделей с использованием непрерывных функций. Именно такие математические модели и приводятся в этой книге. Поэтому рассматриваемые в них функции будем считать непрерывными, в дальнейшем это специально не оговаривая.

Возвращаясь к примерам непрерывных функций в естествознании, отметим, что при изучении роста численности микроорганизмов при делении клеток встречается функция $f(t) = a\mathrm{e}^{kt}$ (здесь аргументом является время t).

Посредством степенной функции $f(x) = Ax^{\alpha}$ описывается зависимость интенсивности основного обмена от веса животного. Здесь x — вес животного; $f(x)$ — количество кислорода, поглощаемого животным в единицу времени; A и α — параметры, постоянные для данного класса живых существ. Для млекопитающих и птиц, например, $\alpha = 0{,}74$, $A = 70$, для рыб $\alpha = 0{,}8$, $A = 0{,}3$.

Приведем примеры разрывных функций.

Пример 1. Скорость тела, падающего на землю (уже упоминавшаяся в п. 1), вообще является непрерывной функцией времени, но для момента удара можно условно считать, что она мгновенно (скачком) падает до нуля, т. е. терпит разрыв.

Пример 2. Рассмотрим клетку, способную возбуждаться от внешних воздействий, например нервные клетки, клетки мышц и т. п. Если величину возбуждения E измерить в тех или иных единицах, то график возбуждения $E = E(t)$ имеет вид, изображенный на рис. 19.

В момент t_0 клетка получает сигнал. Однако возбуждение происходит в некоторый момент $t_1 > t_0$. Отрезок $[t_0, t_1]$ называется *латентным периодом.*

В момент t_1 клетка мгновенно возбуждается до максимальной величины, а затем возбуждение постепенно уменьшается до тех пор, пока не будет нового сигнала. Если сигнала нет достаточно долго, то возбуждение становится равным нулю.

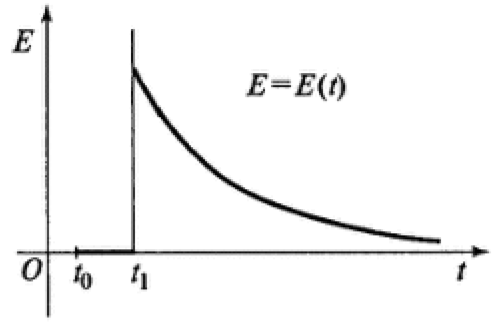


Рис. 19

Пример 3. Зависимость изменения биомассы микроорганизмов, чувствительных к температурным колебаниям,— разрывная функция температуры. При возрастании температуры общая масса m увеличивается. Однако, когда температура очень велика, вся колония погибнет. Величина m, скачкообразно меняясь, становится равной нулю.

§ 1.7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Определение комплексных чисел и основные операции над ними. К комплексным числам обычно приходят, рассматривая уравнение $x^2+1=0$. Очевидно, не существует действительных чисел, удовлетворяющих этому уравнению. Корнями его (как и целого ряда других уравнений) оказываются комплексные числа.

Под *комплексным числом* понимается выражение

$$z=x+iy, \tag{1.21}$$

где x и y — действительные числа, а i — мнимая единица.

Числа $x+i0=x$ отождествляются с действительными числами; в частности, $0+i0=0$. Числа $0+iy=iy$ называются *чисто мнимыми.*

Действительные числа x и y называют соответственно *действительной* и *мнимой частями* числа z и обозначают следующим образом:

$$x=\operatorname{Re} z, \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Под *модулем* комплексного числа z понимается неотрицательное число $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Сопряженным числом $\bar{z}$ к числу (1.21) называют комплексное число $\bar{z}=x-iy$.

Два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ равны тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$.

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел определяются следующим образом:

I. $z_1 \pm z_2=(x_1 \pm x_2)+i(y_1 \pm y_2)$.

II. $z_1 z_2=(x_1 x_2-y_1 y_2)+i(x_1 y_2+x_2 y_1)$.

Отсюда, в частности,

$i^2=(0+i1)(0+i1)=(0-1)+i(0+0)=-1$.

$z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$.

III. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\,\bar{z}_2}{z_2\,\bar{z}_2}=\dfrac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} \quad (z_2 \neq 0)$.

2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Рассмотрим плоскость с прямоугольной системой координат xOy (рис. 20). Так как комплексное число $z=x+iy$ является парой (x, y) действительных чисел, а каждой паре (x, y) действительных чисел соответствует одна точка плоскости и наоборот, то каждую точку (x, y) плоскости можно принять за изображение комплексного числа $z=x+iy$. В этом случае эта плоскость называется *комплексной плоскостью*, а z — *точкой* этой плоскости.

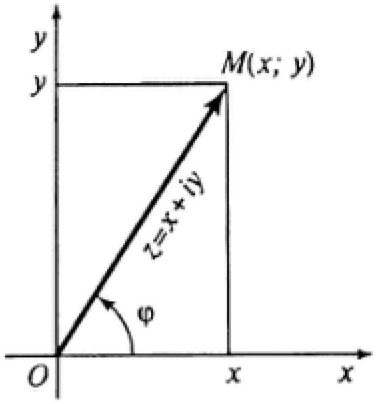


Рис. 20

На оси Ox расположены действительные числа: $z=x+i0=x$; поэтому она называется *действительной осью*. На оси Oy расположены чисто мнимые числа $z=0+iy=iy$, она называется *мнимой осью*.

Заметим, что $r=|z|$ представляет собой расстояние от точки z до начала координат.

Удобной является интерпретация комплексного числа $z=x+iy$ как радиуса-вектора $\overline{OM}$ (см. рис. 20). Очевидно, каждому радиусу-вектору плоскости с концом в точке $M(x; y)$ соответствует комплексное число $z=x+iy$, и наоборот. Нулевому вектору соответствует комплексное число $0+i0$.

Положение точки z на плоскости, кроме ее прямоугольных координат x, y, может быть определено также и полярными координатами r, φ, при этом

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi. \tag{1.22}$$

Число φ будем называть *аргументом* комплексного числа z. Аргумент считается положительным или отрицательным в зависимости от того, ведется ли его отсчет от положительного направления действительной оси против или по часовой стрелке соответственно.

По заданной точке z ее модуль определяется единственным образом, а аргумент — *с точностью до слагаемого* $2k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \dots$. Значение аргумента φ, удовлетворяющее условию $-\pi<\varphi\leq\pi$, называется *главным* и обозначается $\arg z$.

Точка $z=0$ является единственной точкой комплексной плоскости, для которой аргумент не определен.

3. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Из формул (1.22) получается тригонометрическая форма записи комплексного числа:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{1.23}$$

Пользуясь записью (1.23) для комплексных чисел

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1), \quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

имеем

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)), \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos(-\varphi_2)+i\sin(-\varphi_2))}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))\quad (r_2\neq 0).$$

Следовательно, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

4. Возведение в степень и извлечение корня. Следствием формулы (1.24) является формула

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), \tag{1.25}$$

где n — натуральное число.

Пусть

$$\sqrt[n]{z}=\rho(\cos\psi+i\sin\psi),$$

где $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Тогда на основании формулы (1.25) имеем

$$z=(\rho(\cos\psi+i\sin\psi))^n=\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi).$$

Отсюда

$$\rho^n=r,\quad n\psi=\varphi+2k\pi\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

и, следовательно, $\rho=\sqrt[n]{r}$ (под $\sqrt[n]{r}$ понимается арифметическое значение корня), $\psi=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$.

Здесь в качестве k достаточно брать лишь значения $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, так как при прочих значениях k получаются повторения уже найденных значений корня. Таким образом, окончательно

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$
$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 \tag{1.26}$$

Пример. Найти $w=\sqrt{-1}$.

Так как $-1=\cos\pi+i\sin\pi$, то на основании формулы (1.26) имеем

$$\sqrt{-1}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2},\quad k=0,\ 1.$$

Отсюда

$$w_0=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,\quad w_1=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i.$$

5. Формула Муавра. Формула Эйлера, выражения тригонометрических функций через показательную функцию. Формула (1.25) может быть переписана в виде

$$r^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Полагая здесь $r=1$, получаем формулу

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

называемую *формулой Муавра**.

Справедлива и следующая формула:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi},$$

называемая *формулой Эйлера***. Ее справедливость будет установлена позднее (см. § 9.4).

6. Разложение многочленов на множители. Пусть

$$P_n(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_{n-1}x^{n-1} + A_nx^n, \qquad (1.27)$$

т. е. является многочленом степени n ($A_n \neq 0$) с вещественными коэффициентами A_j, $j=0, 1, 2, \ldots, n$. Число a (действительное или комплексное), такое, что $P_n(a)=0$, называется *корнем многочлена* (1.27).

Из курса алгебры известно, что число a тогда и только тогда будет корнем многочлена $P_n(x)$, если $P_n(x)$ делится на $x-a$.

Если $P_n(x)$ делится на $(x-a)^k$ (k — натуральное) и не делится на $(x-a)^{k+1}$, то число k называется *кратностью* корня a.

Известно также, что всякий многочлен (1.27) степени n можно представить, и притом единственным образом, в следующем виде:

$$P_n(x) = A_n(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_m)^{k_m},$$

где a_1, a_2, ..., a_m — различные корни многочлена (1.27), а числа k_1, k_2, ..., k_m — кратности соответственно корней a_1, a_2, ..., a_m, причем $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$.

Заметим, что если многочлен с действительными коэффициентами имеет корнем комплексное число $a=b+ic$ кратности k, то (см. [6]) сопряженное комплексное число $a=b-ic$ также является корнем многочлена той же кратности.

Имеем

$$(x-a)(x-\overline{a}) = (x-(b+ic))(x-(b-ic)) = ((x-b)-ci)((x-b)+ci) =$$
$$= x^2-2bx+b^2+c^2 = x^2+px+q,$$

где $p=-2b$, $q=b^2+c^2$, причем $\frac{p^2}{4}-q<0$.

Следовательно, произведение линейных множителей, соответствующих сопряженным корням, можно заменить квадратным трехчленом с действительными коэффициентами.

Таким образом, многочлен (1.27) можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} P_n(x) = A_n(x-\alpha_1)^{\lambda_1}(x-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(x-\alpha_r)^{\lambda_r}\times \\ \times(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}. \end{aligned} \qquad (1.28)$$

Здесь линейные двучлены соответствуют действительным корням (λ_1, λ_2, ..., λ_r — их кратности), а квадратные трехчлены —комплекс-

---

* Абрахам Муавр (1667—1754) — английский математик.

** Леонард Эйлер (1707—1783) — швейцарский математик (по происхождению), большую часть своей жизни провел в России.

ным корням (l_1, l_2, ..., l_s — их кратности) многочлена. При этом $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_r+2l_1+2l_2+\ldots+2l_s=n$,

$$\frac{p_j^2}{4}-q_j<0, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

Упражнения

1. Дано $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x+3}$. Найдите $f(1)$. $\left[f(1)=\dfrac{1}{4}.\right]$

2. Дано $f(x)=x^2-5x+6$. Покажите, что $f(2)=f(3)=0$.

3. Найдите значения функции $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$ для значений аргумента, равных -1; 0; 1; 2. $\left[f(-1)=-\dfrac{1}{2};\ f(0)=1;\ f(1)=\dfrac{3}{2};\ f(2)=1.\right]$

4. Полагая $f(x)=\cos 2x$, вычислите $f(0)$; $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$; $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$; $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

$\left[f(0)=1;\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1;\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0;\ f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\right]$

5. Найдите области определения функций:

а) $y=3\sqrt{4-x^2}$; б) $y=\dfrac{2}{\sqrt{25-x^2}}$; в) $y=\dfrac{5-\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}$; г) $y=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$;

д) $y=\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[5]{x-3}$; е) $y=x\arcsin x$; ж) $y=2^x$; з) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

[а) $(-2;\ 2)$; б) $(-5;\ 5)$; в) $(2;\ 5)$; г) $(-3;\ 7)$; д) $(-\infty;\ +\infty)$; е) $(-1;\ 1)$; ж) $(-\infty;\ +\infty)$; з) $(x\neq 1)$.]

6. Постройте графики функций:

а) $y=3x+5$; б) $y=\dfrac{1}{2}x^2+1$; в) $y=4-4x^2$;

г) $y=\dfrac{5}{x}$; д) $y=x^3+1$; е) $y=\sin 2x$;

ж) $y=\cos 3x$; з) $y=\sin\dfrac{x}{2}$; и) $y=\cos\dfrac{x}{3}$;

к) $y=2\,\mathrm{tg}\,x$; л) $y=4\sin x$; м) $y=5\cos x$.

7. Изобразите точками на плоскости следующие последовательности, заданные общими членами:

а) $a_n=\dfrac{1}{n+1}$; б) $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$; в) $a_n=\dfrac{1}{n^2}$; г) $a_n=\dfrac{n+1}{2n}$; д) $a_n=\dfrac{3n+1}{n}$.

Вычислите указанные пределы:

8. $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+6x+8)$. [0.]

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+1}$. [3.]

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$. [−1.]

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$. [3.]

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+3x^2-x}{7x}$. $\left[-\dfrac{1}{7}.\right]$

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$. [2.]

14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$. $\left[\dfrac{1}{3}.\right]$

15. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$. $\left[\dfrac{2}{3}.\right]$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$. $\left[\dfrac{3}{2}.\right]$

17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$. [−8.]

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$. $\left[\dfrac{1}{3}.\right]$

20. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+x}$. $\left[\dfrac{1}{3}.\right]$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$. [1.]

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$. [1.]

24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$. $\left[\dfrac{15}{2}.\right]$

26. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

27. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$. [3.]

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$. $\left[\dfrac{5}{2}.\right]$

29. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$. $\left[\dfrac{12}{5}.\right]$

30. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}{(x-5)^2}$. $\left[\dfrac{1}{16}.\right]$

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)^3}{x^3}$. [−1.]

32. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-n+1}{2n^3+n^2}$. $\left[\dfrac{3}{2}.\right]$

33. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+3}{x^3+7x-1}$. [0.]

34. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+n-1}{n^4+2n}$. [0.]

35. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-x+3}{x^3-8x+5}$. [∞.]

36. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^3+5}{3x^4-5x^2+1}$. $\left[\dfrac{2}{3}.\right]$

37. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$. [e.]

38. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$. $\left[\dfrac{1}{e}.\right]$

39. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n}\right)^{n}$. [$e^4$.]

40. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$. $\left[\dfrac{1}{e}.\right]$

41. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. [e.]

42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$. [1.]

43. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$. [$e^2$.]

44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$. [2.]

45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. [2.]

46. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$. [0.]

47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 2x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$. [2.]

49. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{2^n}$. [$x$.]

50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$. $\left[\dfrac{m}{n}.\right]$

51. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$. $\left[\dfrac{2}{\pi}.\right]$

52. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$. [e.]

53. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x}$. [0.]

54. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[4]{1+x^2}-1\right)\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}}{x}$. [0.]

55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\cos\pi x}{x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

56. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x$. [1.]

57. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. [e^3.]

58. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)+\sin(a-x)-2\sin a}{x^2}$. [$-\sin a$.]

59. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$. [$2\cos a$.]

60. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$. $\left[\dfrac{1}{2}(n^2-m^2).\right]$

61. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)+\cos(a-x)-2\cos a}{1-\cos x}$. [$-2\cos a$.]

62. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

63. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$. $\left[-\dfrac{1}{4}.\right]$

64. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos x}$. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\right]$

65. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$. $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}.\right]$

66. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$. $\left[\dfrac{1}{4}.\right]$

67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

68. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos 2x-2\cos x}{2\cos x-2}$. [1.]

70. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$. [$\sqrt{2}$.]

71. Какие нижеследующие бесконечно малые при $x\to 0$ будут бесконечно малыми одного порядка, высшего порядка, низшего порядка по отношению к функции $\beta(x)=x$?

а) $\alpha(x)=3x$, б) $\alpha(x)=2\sin x$, в) $\alpha(x)=x^2$, г) $\alpha(x)=\sin^2 x$, д) $\alpha(x)=\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$.

[Одного порядка: а), б); высшего порядка: в), г); низшего порядка: д).]

Исследуйте на непрерывность следующие функции:

72. $f(x)=x+1$ в точках $x=1$ и $x=-1$ [В обеих точках непрерывна.]

73. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\geq 1,\\ x, & \text{если } x<1,\end{cases}$

в точке $x=1$. [В точке $x=1$ непрерывна.]

74. $f(x)=\begin{cases}x-1, & \text{если } 0\leq x<3,\\ 3-x, & \text{если } 3\leq x\leq 4,\end{cases}$

в точке $x=3$. [В точке $x=3$ разрывна.]

75. Найдите $(3+5i)(4-i)$. $[17+17i.]$

76. Найдите $(6+11i)(7+3i)$. $[9+95i.]$

77. Найдите $\dfrac{3-i}{4+5i}$. $\left[\dfrac{7}{41}-\dfrac{19}{41}i.\right]$

78. Найдите а) $(4-7i)^2$, б) i^{10}. [а) $-33-56i$, б) -1.]

79. Представьте числа i; -2; $-i$; $1+i$; $1-i$ в тригонометрической форме.

$$\left[\begin{gathered}i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2},\\ -2=2(\cos\pi+i\sin\pi),\\ -i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),\\ 1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\\ 1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].\end{gathered}\right]$$

Найдите все значения для указанных радикалов.

80. $\sqrt[3]{1}$. $\left[1;\ -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ -\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\right]$

81. $\sqrt[4]{1}$. $[1;\ i;\ -1;\ -i.]$

82. $\sqrt{-5-12i}$. $[2-3i;\ -2+3i.]$

83. Используя формулу Эйлера, вычислите действительную и мнимую части, а также модуль выражений: а) e^{3i}; б) e^{-i}.

[а) $\operatorname{Re} e^{3i}=\cos 3$, $\operatorname{Im} e^{3i}=\sin 3$, $|e^{3i}|=1$;
б) $\operatorname{Re} e^{-i}=\cos 1$, $\operatorname{Im} e^{-i}=-\sin 1$, $|e^{-i}|=1$.]

ГЛАВА 2. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

§ 2.1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ, ЕЕ МЕХАНИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

1. Задачи, приводящие к понятию производной.

Задача о скорости движущейся точки. Пусть $s=s(t)$ представляет закон прямолинейного движения материальной точки. Это уравнение выражает путь s, пройденный точкой, как функцию времени t. Обозначим через Δs путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt от момента t до $t+\Delta t$, т. е. $\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$. Отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ называется *средней скоростью* точки за время от t до $t+\Delta t$. Чем меньше Δt, т. е. чем короче промежуток времени от t до $t+\Delta t$, тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент времени t. Поэтому естественно ввести понятие скорости v в данный момент t, определив ее как предел средней скорости за промежуток от t до $t+\Delta t$, когда $\Delta t\to 0$:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Величину v называют *мгновенной скоростью* точки в данный момент t.

Задача о силе электрического тока. Пусть $q=q(t)$ — количество электричества (в кулонах), протекающее через поперечное сечение проводника за время t; количество электричества есть функция времени, так как каждому значению времени t соответствует определенное значение количества электричества. Для определения скорости изменения количества электричества с течением времени пользуются понятием силы тока. Обозначим через Δq количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени Δt от момента t до момента $t+\Delta t$. Отношение $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называется *средней силой тока* за время от t до $t+\Delta t$ и обозначается через $I_{ср}$. В случае постоянного тока $I_{ср}$ будет постоянной. Если в цепи переменный ток, то $I_{ср}$ будет различна для различных промежутков времени. Поэтому для цепи переменного тока вводят понятие силы тока I в данный момент t, определив ее как предел средней силы тока за промежуток времени от t до $t+\Delta t$, когда $\Delta t\to 0$:

$$I=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Аналогично задаче о скорости прямолинейного движения рассматривается задача о скорости химической реакции.

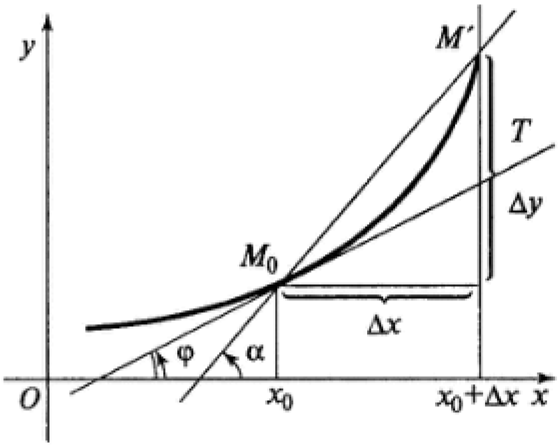


Рис. 21

Задача о скорости химической реакции. Пусть дана функция $m = m(t)$, где m — количество некоторого вещества, вступившего в химическую реакцию к моменту времени t. Приращению времени Δt будет соответствовать приращение Δm величины m. Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ — средняя скорость химической реакции за промежуток времени Δt. Предел этого отношения при стремлении Δt к нулю, т. е. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}$, есть скорость химической реакции в данный момент времени t.

Аналогично этим задачам рассматривается *задача о скорости роста популяции.* Пусть $p = p(t)$ — размер популяции бактерий в момент t. Тогда, рассуждая, как и выше, получаем, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t}$ есть скорость роста популяции бактерий в данный момент t.

Задача о касательной к данной кривой. Пусть на плоскости xOy кривая задана уравнением $y = f(x)$. Требуется провести касательную к данной кривой в данной точке $M_0(x_0; f(x_0))$. Так как точка касания M_0 дана, то для решения задачи потребуется найти угловой коэффициент искомой касательной, т. е. $\operatorname{tg} \varphi$ — тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox (рис. 21).

Через точки $M_0(x_0; f(x_0))$ и $M'(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ проведем секущую M_0M'. Из рис. 21 видно, что угловой коэффициент $\operatorname{tg} \alpha$ секущей M_0M' равен отношению

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Угловой коэффициент касательной M_0T к данной кривой в точке M_0 может быть найден на основании следующего определения: касательной к кривой в точке M_0 называется прямая M_0T, угловой коэффициент которой равен пределу углового коэффициента секущей M_0M', когда $\Delta x \to 0$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2. Определение производной. Математическая операция, требуемая для решения рассмотренных выше трех задач, одна и та же. Выясним аналитическую сущность этой операции, отвлекаясь от вызвавших ее конкретных процессов.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в промежутке $(a;\ b)$. Возьмем какое-нибудь значение x из $(a;\ b)$. Затем возьмем новое значение аргумента $x+\Delta x$ из этого промежутка, придав первоначальному значению x приращение Δx (положительное или отрицательное). Этому новому значению аргумента соответствует и новое значение функции $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$, где

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Теперь составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Оно является функцией от Δx.

Если существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю, то этот предел называется *производной* от функции $y=f(x)$ в данной точке x и обозначается через y' или $f'(x)$ (читается «игрек штрих» или «эф штрих от икс»):

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (2.1)$$

Для обозначения производной принят также и следующий символ $\frac{dy}{dx}$ (читается «дэ игрек по дэ икс»). Эту запись надо рассматривать пока как целый символ, а не как частное.

Если существует предел справа $\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (или предел слева $\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$), то он называется *правой* (или *левой*) производной функции $f(x)$ в точке x.

Действие нахождения производной функции называется ее *дифференцированием*, а функцию, имеющую производную в точке x, называют *дифференцируемой* в этой точке. Функция, дифференцируемая в каждой точке промежутка, называется *дифференцируемой* в этом промежутке. При этом если промежуток от a до b есть отрезок $[a;\ b]$, то в точке a речь идет о правой производной, а в точке b — о левой производной.

Пример 1. Найти производную функции $y=C$, где C — постоянная. Имеем $y+\Delta y=C$, $\Delta y=0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$, т. е. $y'=0$. Следовательно, производная постоянной равна нулю.

Пример 2. Найти производную функции $y=x$. Имеем

$$y+\Delta y=x+\Delta x,\quad \Delta y=\Delta x,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=1,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1,$$

т. е. $y'=1$.

Пример 3. Найти производную функции $y=\sin x$. Имеем

$$y+\Delta y=\sin(x+\Delta x), \quad \Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$$

(здесь используется формула (1.18) и непрерывность функции $\cos x$).

Из рассмотренных выше задач, приводящих к понятию производной, есть следствия.

1. *Скорость v прямолинейного движения есть производная пути s по времени t:* $v=\frac{ds}{dt}$. В этом состоит *механический* смысл производной. Скорость v химической реакции есть производная количества вещества m по времени t: $v=\frac{dm}{dt}$. Скорость роста популяции есть производная размера популяции p по времени t: $\frac{dp}{dt}$.

Сила переменного тока I есть производная количества электричества $q=q(t)$ по времени t, т. е. $I=\frac{dq}{dt}$.

По аналогии с этим производную любой функции часто называют скоростью изменения этой функции.

2. *Угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x есть производная $f'(x)$.* В этом состоит *геометрический* смысл производной.

Задача 1. Точка движется по прямой по закону $s=t$, где s — путь (см), а t — время (с). Найти скорость движения точки в момент $t=3$.

Решение. Имеем $v=s'=1$ (см. пример 2). В частности, при $t=3$ $v=1$ (см/с).

Задача 2*. Размер популяции бактерий в момент t (время выражено в часах) задается формулой $p(t)=3000+100t^2$. Найти скорость роста популяции в момент $t=5$.

Решение. Имеем $p'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{3000+100(t+\Delta t)^2-3000-100t^2}{\Delta t}=$ $=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{100(2t+\Delta t)\Delta t}{\Delta t}=100\lim\limits_{\Delta t\to 0}(2t+\Delta t)=200t$. В частности, при $t=5$ скорость роста составляет 1000 бактерий в час.

Задача 3. Найти уравнение касательной и *нормали*** к кривой $y=x^2+1$ в точке $A(1;\ 2)$.

---

* Много задач из биологии, иллюстрирующих методы высшей математики, содержится в книге [2], часть этих задач используется в настоящем учебнике.

** То есть прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к касательной к данной кривой в точке A.

Решение. Найдем производную функции $y=x^2+1$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((x+\Delta x)^2+1)-(x^2+1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x+\Delta x) = 2x.$$

В точке касания A $x=1$ и, следовательно, угловой коэффициент касательной $k_1=2$, а нормали $k_2=-\frac{1}{2}$. Поэтому искомые уравнения запишутся в виде

$$y-2=2(x-1), \quad y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$$

или $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

Теорема. *Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Согласно формуле (2.1) и теореме 1 (см. § 1.5, п. 1) имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ бесконечно малая. Отсюда $\Delta y = y'\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, т. е. функция $y=f(x)$ непрерывна в данной точке x.

Примечание. Обратное утверждение уже не имеет места, что видно из следующего примера.

Пример 4. Функция $y=|x|$, график которой приведен на рис. 22, непрерывна в точке $x=0$, но ясно, что в этой точке в соответствии с геометрическим смыслом производной функция $y=|x|$ не дифференцируема, так как в ней нет определенной касательной.

Замечание. В дополнение к замечанию, сделанному в § 1.6, п. 3 в отношении непрерывности функций, используемых при построении математических моделей, будем в тех случаях, где нужно, считать эти функции дифференцируемыми, специально не оговаривая это в дальнейшем.

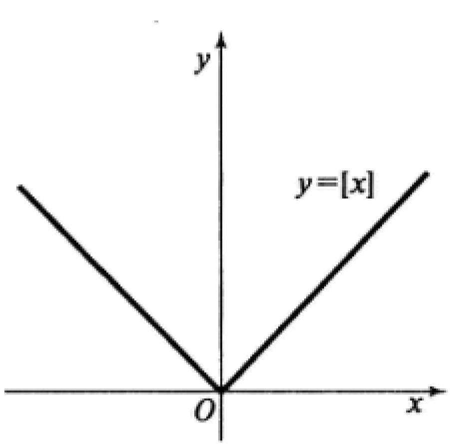


Рис. 22

§ 2.2. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Вывод общих правил дифференцирования.

Пусть u и v — две функции аргумента x, имеющие производные u' и v'.

Производная суммы. Пусть $y=u+v$. Тогда имеем

$$y+\Delta y = (u+\Delta u)+(v+\Delta v),$$

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

т. е.

$$y'=u'+v'$$

или

$$(u+v)'=u'+v'.$$

Пример 1. $(x+\sin x)'=(x)'+(\sin x)'=1+\cos x$.

Примечание 1. Правило дифференцирования суммы двух слагаемых распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых, что доказывается аналогично.

Производная произведения. Пусть $y=uv$. Тогда имеем

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)=uv+v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v,$$

$$\Delta y=v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\Delta v,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v+\frac{\Delta v}{\Delta x}u+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=vu'+uv'+u'\cdot 0^*,$$

т. е.

$$y'=u'v+uv'$$

или

$$(uv)'=u'v+uv'. \tag{2.2}$$

Пример 2. $(x\sin x)'=(x)'\sin x+x(\sin x)'=\sin x+x\cos x$.

Вынесение постоянного множителя за знак производной. Так как $(c)'=0$ (см. § 2.1, п. 2, пример 1), то из формулы (2.2) непосредственно получаем

$$(cu)'=cu'.$$

Производная частного. Пусть $y=\frac{u}{v}$, где $v\neq 0$. Тогда имеем

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v},\quad \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{(u+\Delta u)v-u(v+\Delta v)}{(v+\Delta v)v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{(v+\Delta v)v},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v},\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v)v}=\frac{vu'-uv'}{(v+0)v},$$

т. е.

$$y'=\frac{vu'-uv'}{v^2}$$

---

* Здесь воспользовались тем, что в силу непрерывности функции v (непрерывность следует из ее дифференцируемости) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$.

или

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример 3.

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{(x-1)'(x+1)-(x+1)'(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Производная сложной функции. Пусть $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, причем $f(u)$ имеет производную по u, а $\varphi(x)$ — по x. Тогда y будет сложной функцией от x. Требуется найти производную y по x. Имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$ (предполагается, что Δu при достаточно малых значениях Δx не обращается в нуль), откуда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}. \tag{2.3}$$

Пример 4. Найти производную от функции $y=\sin 3x$. Полагаем $u=3x$, тогда $y=\sin u$ и, следовательно, по формуле (2.3) имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin u}{du}\frac{d(3x)}{dx} = (\cos u)3 = 3\cos 3x.$$

Примечание 2. При достаточном навыке промежуточную переменную u не пишут, вводя ее лишь мысленно.

Производная обратной функции. Пусть $y=f(x)$, где $x=\varphi(y)$ взаимно обратные функции. Тогда если функция $y=f(x)$ имеет не равную нулю производную $f'(x)$, то обратная функция имеет производную $\varphi'(y)$ и

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

или, короче,

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{2.4}$$

Действительно, так как $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ — взаимно обратные функции, то $x=\varphi[f(x)]$. Отсюда, используя формулу (2.3) дифференцирования сложной функции, получаем

$$1 = \varphi'(y)\,f'(x),$$

откуда и следует искомая формула (2.4).

2. Производные элементарных функций. Пусть u, как и выше,— функция аргумента x, имеющая производную u'.

Производные тригонометрических функций. Как установлено ранее (см. § 2.1, п. 2, пример 3)

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Отсюда с учетом формулы (2.3)

$$(\sin u)' = u' \cos u. \tag{2.5}$$

На основании формулы (2.5) имеем

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Отсюда с учетом формулы (2.3) получаем

$$(\cos u)' = -u' \sin u.$$

Далее имеем

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отсюда с учетом формулы (2.3)

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}. \tag{2.6}$$

Используя формулу (2.6), находим

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Отсюда с учетом формулы (2.3)

$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

Производная логарифма. Пусть $y = \ln x$. Тогда имеем

$$y + \Delta y = \ln(x + \Delta x), \quad \Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\frac{x + \Delta x}{x} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Пользуясь известным пределом $e = \lim\limits_{z \to 0}(1 + z)^{\frac{1}{z}}$ (см. § 1.3, примечание), будем иметь

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}, \quad \text{т. е.} \quad y' = \frac{1}{x}$$

или

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{2.7}$$

Пусть теперь $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Тогда $a^y = x$. Отсюда $y \ln a = \ln x$ или $y = \frac{\ln x}{\ln a}$, откуда, согласно (2.7),

$$y' = \frac{1}{x \ln a}$$

или

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \qquad (2.8)$$

Из формул (2.7), (2.8) с учетом формулы (2.3) получаем

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \qquad (2.9)$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}.$$

В частности,

$$(\lg u)' = (\log_{10} u)' = \frac{u'}{u \ln 10}.$$

Пример 1. $y = \ln \cos x$, $y' = \dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$.

Производная степенной функции. Пусть $y = x^\alpha$ (α — действительное число и $x > 0$). Тогда $\ln y = \alpha \ln x$, и, согласно формуле (2.9), $\dfrac{y'}{y} = \alpha \dfrac{1}{x}$. Отсюда $y' = \alpha y \dfrac{1}{x} = \alpha x^\alpha \dfrac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$, т. е.

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \qquad (2.10)$$

Формула (2.10) верна и в случае, когда функция $y = x^\alpha$ определена на всей числовой оси (например, когда α — натуральное число). Из формулы (2.10) с учетом формулы (2.3) получаем

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'. \qquad (2.11)$$

Пример 2. Если $y = \sqrt{\sin x}$, то $y' = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.

Производная показательной функции. Пусть $y = a^u$ ($0 < a \neq 1$). Тогда $\ln y = u \ln a$, и, согласно формулам (2.9), (2.11) $\dfrac{y'}{y} = u' \ln a$. Отсюда $y' = yu' \ln a = a^u u' \ln a$, т. е.

$$(a^u)' = a^u u' \ln a.$$

В частности,

$$(e^u)' = e^u u'.$$

Пример 3. $y = 2^{x^2}$, $y = 2^{x^2} 2x \ln 2 = 2^{x^2+1} x \ln 2$.

Производные обратных тригонометрических функций. Функция $y = \arcsin x$ является обратной по отношению к функции $x = \sin y$. Поэтому по правилу дифференцирования обратной функции получаем

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким же приемом получаем

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{+\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(0 < y < \pi),$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'_y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Отсюда с учетом (2) получаем

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2},$$

$$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Пример 4. $(\operatorname{arctg} x^2)' = \dfrac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} = \dfrac{2x}{1+x^4}.$

Для удобства нахождения производных различных функций сведем все правила и формулы дифференцирования в одну таблицу.

Правила дифференцирования и производные основных элементарных функций

1. $(C)' = 0.$
2. $(u+v)' = u' + v'.$
3. $(uv)' = u'v + uv'.$
4. $(Cu)' = Cu'.$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}.$
6. $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}.$
7. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'.$
8. $(a^u)' = a^u u' \ln a.$
9. $(e^u)' = e^u u'.$
10. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}.$
11. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}.$
12. $(\sin u)' = u' \cos u.$
13. $(\cos u)' = -u' \sin u.$
14. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}.$
15. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}.$
16. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$
17. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$
18. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}.$
19. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}.$

Здесь $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые функции; $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные функции, причем $y = f(x)$ имеет не равную нулю производную.

§ 2.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

1. Понятие дифференциала. Из определения производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

с учетом теоремы 1 (см. § 1.5) получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha, \qquad (2.12)$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Умножим обе части равенства (2.12) на Δx:

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Пусть $y' \neq 0$. Тогда первое слагаемое $y'\Delta x$ линейно по Δx, поскольку y' не зависит от Δx. При $\Delta x \to 0$ это слагаемое бесконечно мало, но порядок его малости ниже порядка малости второго слагаемого, так как для всех значений $y' \neq 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{y'\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{y'} = 0.$$

Поэтому слагаемое $y'\Delta x$ является главной частью приращения функции. Это слагаемое называют *дифференциалом* функции $y = f(x)$ и обозначают символом dy или $df(x)$. Итак, $dy = y'\Delta x$.

2. Геометрический смысл дифференциала. Для выяснения геометрического смысла дифференциала к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$ проведем касательную MT, обозначив через φ ее угол наклона к положительному направлению оси Ox (рис. 23).

Так как $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$, то $dy = \operatorname{tg}\varphi\,\Delta x$. Поэтому из треугольника MLN следует, что дифференциал dy есть приращение ординаты касательной, соответствующее приращению аргумента Δx.

Замечая, что $dx = x'\Delta x = \Delta x$, т. е. что дифференциал независимой переменной равен ее приращению, получаем

$$dy = y'dx. \qquad (2.13)$$

Таким образом, дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал (или приращение) независимой переменной.

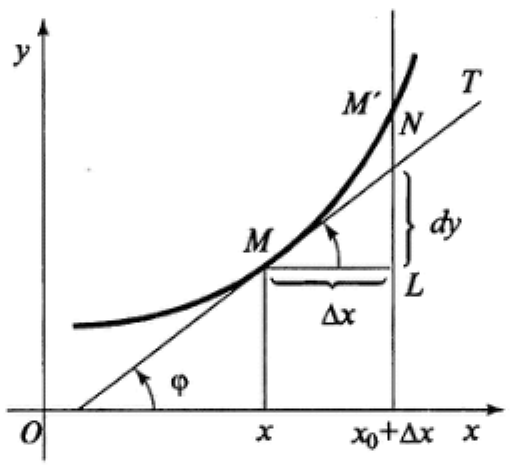


Рис. 23

Из (2.13) имеем

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

т. е. производная функции равна отношению дифференциала этой функции к дифференциалу аргумента.

Это оправдывает введенное ранее обозначение производной $\frac{dy}{dx}$.

Ввиду общности операций нахождения производной и дифференциала обе они носят название дифференцирования.

3. Дифференциал сложной функции. Найдем выражение для дифференциала сложной функции. Пусть $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, причем $f(u)$ имеет производную по u, $\varphi(x)$ — по x. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{dy}{dx} = f'_u(u)\,\varphi'(x).$$

Следовательно,

$$dy = f'_u(u)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Но

$$\varphi'(x)\,dx = du.$$

Поэтому

$$dy = f'_u(u)\,du.$$

Таким образом, дифференциал сложной функции имеет тот же вид, какой он имел бы в том случае, если бы промежуточный аргумент ее был независимой переменной. Иначе говоря, форма записи дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента. Это свойство дифференциала называется *инвариантностью формы дифференциала.*

Пример. Найти du сложной функции

$$y = \sin u, \quad u = \sqrt{x}.$$

Имеем

$$dy = \cos u\; du = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos u\; dx.$$

4. Таблица формул для дифференциалов. Согласно формуле (2.13) для получения дифференциала нужно умножить производную на дифференциал независимой переменной dx. Это позволяет нам из таблицы формул для производных сразу получить соответствующую таблицу формул для дифференциалов. Например, из формулы

$$(u+v)' = u' + v',$$

умножив обе части на dx, получим

$$(u+v)'\,dx = u'\,dx + v'\,dx$$

или

$$d(u+v)=du+dv.$$

Таблица дифференциалов

1. $dC=0$.
2. $d(u+v)=du+dv$.
3. $d(uv)=vdu+udv$.
4. $d(Cu)=Cdu$.
5. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$.
6. $d(u^\alpha)=\alpha u^{\alpha-1}\,du$.
7. $d(a^u)=a^u\ln a\,du$.
8. $d(\mathrm{e}^u)=\mathrm{e}^u\,du$.
9. $d(\log_a u)=\frac{du}{u\ln a}$.
10. $d(\ln u)=\frac{du}{u}$.
11. $d(\sin u)=\cos u\,du$.
12. $d(\cos u)=-\sin u\,du$.
13. $d(\operatorname{tg} u)=\frac{du}{\cos^2 u}$.
14. $d(\operatorname{ctg} u)=-\frac{du}{\sin^2 u}$.
15. $d(\arcsin u)=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.
16. $d(\arccos u)=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.
17. $d(\operatorname{arctg} u)=\frac{du}{1+u^2}$.
18. $d(\operatorname{arcctg} u)=-\frac{du}{1+u^2}$.

Здесь $u=u(x)$ и $v=v(x)$ — дифференцируемые функции.

5. Применение дифференциала для приближенных вычислений. Мы выяснили, что приращение функции Δy отличается от дифференциала dy на бесконечно малую $\alpha\Delta x$ более высокого порядка, чем $y'\Delta x$. Следовательно, для малых $|\Delta x|$

$$\Delta y\approx dy$$

или

$$\Delta y\approx y'\Delta x. \tag{2.14}$$

Равенство (2.14) может быть применено для приближенного подсчета приращения функции, так как согласно этой формуле вычисление приращения функции сводится к вычислению производной функции, что представляет собой обычно более простую задачу.

Задача. Ребро куба длиной 30 см увеличено на 0,1 см. Требуется определить величину изменения объема этого куба.

Решение. Обозначая ребро куба через x, имеем для объема $v=x^3$. Отсюда $dv=3x^2\,\Delta x$. В нашем случае $\Delta x=0{,}1$ и, значит, $dv=3\,900\cdot 0{,}1=270$. Следовательно, $\Delta v\approx 270$ (см^3).

С помощью замены приращения функции ее дифференциалом решается также задача нахождения приближенного значения функции $f(x+\Delta x)$ по ее значению $f(x)$. Действительно,

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,\Delta x.$$

Отсюда

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\,\Delta x. \tag{2.15}$$

Пример 1. Вычислить $\sqrt{16{,}02}$. Взяв функцию $f(x)=\sqrt{x}$, имеем $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Теперь, полагая $x=16$, $\Delta x=0{,}02$, получаем

$$\sqrt{16{,}02}\approx\sqrt{16}+\frac{1}{2\sqrt{16}}0{,}02=4+\frac{1}{8}0{,}02=4+0{,}0025=4{,}0025.$$

Формула (2.15) служит источником многих формул приближенных вычислений.

Пример 2. Если $y=\sqrt[m]{x}$, $m=2, 3, \dots$, то $y'=\dfrac{1}{m}\dfrac{\sqrt[m]{x}}{x}$ и согласно формуле (2.14) при малых значениях $|\Delta x|$ имеем

$$\sqrt[m]{x+\Delta x}\approx\sqrt[m]{x}+\frac{1}{m}\frac{\sqrt[m]{x}}{x}\Delta x.$$

В частности, при $x=1$

$$\sqrt[m]{x+\Delta x}\approx 1+\frac{\Delta x}{m}.$$

Пример 3. Если $y=\sin x$, то, как и в предыдущем примере, при малых значениях $|\Delta x|$ получаем $\sin(x+\Delta x)\approx\sin x+\cos x\,\Delta x$. В частности, при $x=0$ $\sin\Delta x\approx\Delta x$.

Пример 4. Если $y=\ln x$, то, как и выше, при малых значениях $|\Delta x|$ получаем $\ln(x+\Delta x)\approx\ln x+\dfrac{\Delta x}{x}$. В частности, при $x=1$ $\ln(1+\Delta x)\approx\Delta x$.

§ 2.4. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Производные высших порядков. Производная $y'=f'(x)$ данной дифференцируемой функции $y=f(x)$, называемая *производной первого порядка*, представляет собой некоторую новую функцию. Возможно, что эта функция сама имеет производную. Тогда производная от производной первого порядка называется *производной второго порядка* или *второй производной* и обозначается так: $y''=(y')'$ или $f''(x)$. Аналогично, если существует производная от производной второго порядка, она называется *производной третьего порядка* или *третьей производной* и обозначается так: $y'''=(y'')'$ или $f'''(x)$ и т. д.

Вообще производная от производной порядка $n-1$ называется *производной n порядка* и обозначается $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$.

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывно дифференцируемой n раз*, если существуют ее производные до порядка n включительно и эти производные непрерывны.

Производные четвертого, пятого и более высоких порядков обозначают также с помощью римских цифр: y^{IV}, y^{V}, y^{VI} и т. д. В таком случае порядок производной можно писать без скобок.

Примеры.

1) $y=x^k$, $y'=kx^{k-1}$, $y''=k(k-1)x^{k-2}$, ..., $y^{(n)}=k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)x^{k-n}$, если k — натуральное число, то

$$y^{(k)}=k! \quad \text{и} \quad y^{(k+1)}=y^{(k+2)}=\dots=0.$$

2) $y=e^{kx}$, $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$, ..., $y^{(n)}=k^ne^{kx}$.

3) $y=a^x$, $y'=a^x\ln a$, $y''=a^x\ln^2 a$, ..., $y^{(n)}=a^x\ln^n a$.

4) $y=\ln x$, $y'=\dfrac{1}{x}$, $y''=-\dfrac{1}{x^2}$, ..., $y^{(n)}=\dfrac{(-1)(-2)\dots(-n+1)}{x^n}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$.

5) $y=\sin x$, $y'=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$y''=-\sin x=\sin(x+\pi)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right), \dots, y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Совершенно аналогично устанавливается формула

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

На случай производных любого порядка легко обобщаются правила дифференцирования суммы и вынесения постоянного множителя за знак производной (см. § 2.2, п. 1):

$$(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}, \quad (Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}.$$

Выведем теперь формулу, дающую возможность вычислить производную n-го порядка от произведения двух функций uv. Применяя правила дифференцирования произведения и суммы, получаем

$$y'=u'v+uv',$$

$$y''=u''v+u'v'+u'v'+uv''=u''v+2u'v'+uv''.$$

$$y'''=u'''v+u''v'+2u''v'+u'v''+uv'''+2u'v''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$$

Продолжая процесс дифференцирования, придем к следующей формуле:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\dots+$$

$$+\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\dots\cdot k}u^{(n-k)}v^{(k)}+\dots+uv^{(n)},$$

*называемой формулой Лейбница**.

Пример. Если $u=e^x$, $v=x^2$, то по формуле Лейбница получим

$$(e^x x^2)^{(20)}=e^x x^2+20e^x\cdot 2x+190e^x\cdot 2=e^x(x^2+40x+380).$$

2. Физический смысл второй производной. Пусть $s=s(t)$ — уравнение прямолинейного движения материальной точки. Как установлено ранее (см. § 2.1, п. 1, 2), мгновенная скорость v этого движения есть производная пути s по времени t, т. е. $v=\frac{ds}{dt}$. Если теперь эту скорость рассматривать как функцию времени, то так же, как и в п. 1 (см. § 2.1), установим, что $\frac{dv}{dt}$ есть ускорение a в момент t. Таким образом, получаем, что $a=\frac{d^2s}{dt^2}$, т. е. вторая производная пути s по

* Готфрид Лейбниц (1646—1716) — немецкий философ и математик.

времени t есть ускорение a движущейся точки в момент t. В этом и заключается *физический* смысл второй производной.

Задача. Точка движется по прямой по закону $s=t^3$, где s — путь (см), а t — время (с). Найти скорость и ускорение движения точки в момент $t=2$ с.

Решение. Имеем $v=s'=3t^2$, $a=s''=6t$.

В частности, при $t=2$ с, $v=12$ см/с и $a=12$ см/с^2.

3. Дифференциалы высших порядков. Пусть имеем функцию $y=f(x)$, где x — независимая переменная. Ее дифференциал

$$dy=f'(x)dx$$

есть некоторая функция от x, но от x может зависеть только первый сомножитель $f'(x)$, второй же сомножитель является приращением независимой переменной x и от значения этой переменной не зависит. Так как dy есть функция от x, то имеем право говорить о дифференциале этой функции.

Дифференциал от дифференциала функции называется *дифференциалом второго порядка* или *вторым дифференциалом* этой функции и обозначается через d^2y:

$$d(dy)=d^2y.$$

Найдем выражение второго дифференциала. В силу определения дифференциала имеем

$$d^2y=(f'(x)dx)'dx.$$

Так как dx от x не зависит, то dx при дифференцировании выносится за знак производной и мы получаем

$$d^2y=f''(x)(dx)^2.$$

Принято, записывая степень дифференциала, опускать скобки; так, например, вместо $(dx)^2$ принято писать dx^2, подразумевая под этим квадрат выражения dx, вместо $(dx)^3$ пишут dx^3 и т. д.

Дифференциалом третьего порядка или *третьим дифференциалом* функции называется дифференциал от ее второго дифференциала:

$$d^3y=d(d^2y)=(f''(x)\,dx^2)'\,dx=f'''(x)\,dx^3.$$

Вообще *дифференциалом n-го порядка* называется первый дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$$d^ny=d(d^{n-1}y)=(f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1})'\,dx=f^{(n)}(x)\,dx^n. \tag{2.16}$$

Отсюда получается другая запись для n-й производной:

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}. \tag{2.17}$$

Примечание. Равенства (2.16) и (2.17) (при $n>1$) верны лишь для того случая, когда x является независимой переменной. Действительно, пусть имеем сложную функцию

$$f=f(u), \quad u=\varphi(x).$$

Тогда (см. § 2.3, п. 3)

$$dy = f'_u(u)\,du. \tag{2.18}$$

Далее, используя формулу (2.18), получаем

$$d^2y = d(f'_u(u)\,du).$$

Но здесь $du = \varphi'(x)\,dx$, вообще говоря, зависит от x, и потому получаем в силу формулы для дифференциала произведения (см. § 2.3, п. 4)

$$d^2y = d(f'_u(u))\,du + f'_u(u)\,d(du),$$

или

$$d^2y = f''_{u^2}(u)\,(du)^2 + f'_u(u)\,d^2u,$$

где

$$d^2u = u''(x)\,dx^2.$$

Аналогично находятся d^3y и т. д.

Таким образом, второй и последующие дифференциалы не обладают свойством инвариантности формы (см. § 2.3, п. 3).

§ 2.5. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ФУНКЦИИ И ЕЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Будем говорить, что переменная y как функция аргумента x задана *параметрически*, если обе переменные x и y заданы как функции некоторой третьей переменной t: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. При этом указанную переменную t обычно называют *параметром*.

Будем предполагать, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют нужное число производных по параметру t в рассматриваемом промежутке изменения этого параметра. Кроме того, будем считать также, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$, что позволяет рассматривать переменную y как функцию переменной x.

Рассмотрим вопрос о вычислении производных функции $y = y(x)$ по аргументу x. Имеем (в силу инвариантности формы первого дифференциала; см. § 2.3, п. 3)

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad dy = \psi'(t)\,dt, \quad dx = \varphi'(t)\,dt. \tag{2.19}$$

Отсюда следует, что

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{2.20}$$

Для вычисления второй производной $y''(x)$ представим ее (в силу инвариантности формы первого дифференциала) в виде

$$y''(x) = \frac{d(y'(x))}{dx}. \tag{2.21}$$

Теперь, используя в правой части (2.21) формулу (2.20), третью из формул (2.19) и правило дифференцирования частного, получаем

$$y''(x) = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)' dt}{\varphi'(t)\,dt} = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}. \qquad (2.22)$$

По такому же принципу вычисляются производные третьего и последующих порядков.

Пример. Вычислить первую и вторую производные функции $y(x)$, заданной параметрически:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t.$$

Пользуясь формулами (2.20) и (2.22), получаем

$$y'(x) = \frac{R\cos t}{-R\sin t} = -\operatorname{ctg} t,$$

$$y''(x) = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'}{-R\sin t} = -\frac{1}{R\sin^3 t}.$$

Упражнения

Найдите производные функций,
пользуясь непосредственно определением производной:

1. $y = 3x$. $\quad [y' = 3.]$

2. $y = 8 - x^2$. $\quad [y' = -2x.]$

3. $y = (4x+1)^2$. $\quad [y' = 8(4x+1).]$

4. $y = \dfrac{x^3}{3}$. $\quad [y' = x^2.]$

5. $y = \dfrac{1}{x-3}$. $\quad \left[y' = -\dfrac{1}{(x-3)^2}.\right]$

6. $y = \sqrt{1+x^2}$. $\quad \left[y' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\right]$

Найдите производные следующих функций:

7. $y = 1 - 2x^3$. $\quad [y' = -6x^2.]$ **8.** $y = \dfrac{x+2}{x}$. $\quad \left[y' = -\dfrac{2}{x^2}.\right]$

9. $y = \dfrac{3}{x^2-1}$. $\quad \left[y' = -\dfrac{6x}{(x^2-1)^2}.\right]$ **10.** $y = \dfrac{1}{x^2}$. $\quad \left[y' = -\dfrac{2}{x^3}.\right]$

11. $y = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + 5$. $\quad \left[y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}.\right]$

12. $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{x^3}$. $\quad \left[y' = x^2 - \dfrac{9}{x^4}.\right]$ **13.** $y = \dfrac{2x+1}{5}$. $\quad \left[y' = \dfrac{2}{5}.\right]$

14. $y=x^2(2x-1)$. $[y'=6x^2-2x.]$

15. $y=(x^3+3)(4x^2-5)$. $[y'=20x^4-15x^2+24x.]$

16. $y=(x-5)^4(x+3)^5$. $[y'=(x-5)^3(x+3)^4(9x-13).]$

17. $y=(x-1)\sqrt{x}$. $\left[y'=\dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}.\right]$

18. $y=\dfrac{x^3-3}{5-x^2}$. $\left[y'=-\dfrac{x^4-15x^2+6x}{(5-x^2)^2}.\right]$

19. $y=\dfrac{5x}{(5-2x)^3}$. $\left[y'=\dfrac{5(5+4x)}{(5-2x)^4}.\right]$

20. $y=\dfrac{(3x^2+5)^3}{2x-3}$. $\left[y'=\dfrac{(3x^2+5)^2(30x^2-54x-10)}{(2x-3)^2}.\right]$

21. $y=\dfrac{2}{(x^3+5)^5}$. $\left[y'=-\dfrac{30x^2}{(x^3+5)^6}.\right]$

22. $y=\sqrt[3]{6x^2-5}$. $\left[y'=\dfrac{4x}{\sqrt[3]{(6x^2-5)^2}}.\right]$

23. $y=\sqrt[3]{(4+3x)^2}$. $\left[y'=\dfrac{2}{\sqrt[3]{4+3x}}.\right]$

24. $y=\dfrac{5}{\sqrt{x^2+4}}$. $\left[y'=-\dfrac{5x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}.\right]$

25. $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$. $\left[y'=\dfrac{5}{2(x+3)\sqrt{x^2+x-6}}.\right]$

26. $y=\sin^3 x$. $[y'=3\sin^2 x\cos x.]$ **27.** $y=\sin x^2$. $[y'=2x\cos x^2.]$

28. $y=\cos^2\dfrac{x}{2}$. $\left[y'=-\dfrac{\sin x}{2}.\right]$

29. $y=\cos\dfrac{x^3}{2}$. $\left[y'=-\dfrac{3}{2}x^2\sin\dfrac{x^3}{2}.\right]$

30. $y=x^2\cos x$. $[y'=x(2\cos x-x\sin x).]$

31. $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}$. $\left[y'=\dfrac{5\cos x-\cos 5x}{2\cos^2 3x}.\right]$

32. $y=(x^2-2)\sin x+2x\cos x$. $[y'=x^2\cos x.]$

33. $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$. $\left[y'=\dfrac{1}{1-\sin x}.\right]$

34. $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$. $\left[y'=\dfrac{2}{(\sin x+\cos x)^2}.\right]$

35. $y=\operatorname{tg}^4(x^2+1)$. $\left[y'=\dfrac{8x\operatorname{tg}^3(x^2+1)}{\cos^2(x^2+1)}.\right]$

36. $y=(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)^2$. $\left[y'=-\dfrac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}.\right]$

37. $y=x-\operatorname{tg}x$. $[y'=-\operatorname{tg}^2 x.]$

38. $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{x}}$. $\left[y'=-\dfrac{4x-\sin 2x}{4x\sqrt{x}\cos^2 x}.\right]$

39. $y=\sqrt[4]{1+\cos^2 x}$. $\left[y'=-\dfrac{\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}.\right]$

40. $y=\ln^2 x$. $\left[y'=\dfrac{2\ln x}{x}.\right]$

41. $y=\dfrac{1}{x}+2\ln x-\dfrac{\ln x}{x}$. $\left[y'=\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}.\right]$

42. $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. $\left[y'=\dfrac{1}{\sin x}.\right]$

43. $y=\ln x^2$. $\left[y'=\dfrac{2}{x}.\right]$

44. $y=(x-1)e^x$. $[y'=xe^x.]$

45. $y=(x^2-4x+8)e^{\frac{x}{2}}$. $\left[y'=\dfrac{x^2}{2}e^{\frac{x}{2}}.\right]$

46. $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. $\left[y'=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}.\right]$

47. $y=e^{x\ln x}$. $[y'=e^{x\ln x}(1+\ln x).]$

48. $y=x^2 2^x$. $[y'=(2x+x^2\ln 2)2^x.]$

49. $y=e^{\sqrt{x}}$. $\left[y'=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.\right]$

50. $y=\operatorname{tg}^3 2x\cos^2 2x$. $[y'=2\operatorname{tg}^2 2x(3-2\sin^2 2x).]$

51. $y=\ln(e^{-x}+xe^{-x})$. $\left[y'=-\dfrac{x}{1+x}.\right]$

52. $y=\ln\dfrac{x^3-9}{x^3-1}$. $\left[y'=\dfrac{24x^2}{(x^3-9)(x^3-1)}.\right]$

53. $y=x-\operatorname{arctg}x$. $\left[y'=\dfrac{x^2}{1+x^2}.\right]$

54. $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. $\left[y'=\sqrt{1-x^2}.\right]$

55. $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. $\left[y'=\dfrac{1}{1-x^4}.\right]$

56. $y=\ln\sin\frac{2x+4}{x+1}$. $\left[y'=-\frac{2}{(x+1)^2}\operatorname{ctg}\frac{2x+4}{x+1}.\right]$

57. $y=\arcsin(e^{x^2})$. $\left[y'=\frac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}.\right]$ **58.** $y=\ln\frac{e^x}{1+e^x}$. $\left[y'=\frac{1}{1+e^x}.\right]$

59. $y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. $\left[y'=\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}.\right]$

60. $y=\operatorname{arctg}\frac{a}{x}+\ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$. $\left[y'=\frac{2a^3}{x^4-a^4}.\right]$

61. $y=\arcsin\frac{x-2}{3}$. $\left[y'=\frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}.\right]$

62. $y=\frac{(1+x^2)\operatorname{arctg}x-x}{2}$. $[y'=x\operatorname{arctg}x.]$

63. $y=4^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}}$. $\left[y'=4^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}}\ln 4\frac{x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}.\right]$

64. $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$. $\left[y'=-\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}}.\right]$

65. Напишите уравнение касательной к кривой $y=x^2$ в точке $A(2;\ 4)$. [Касательная $y=4x-4$.]

66. Напишите уравнение касательной к синусоиде $y=\sin x$ в точке $(\pi;\ 0)$. [Касательная $y=\pi-x$.]

67. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой $y=5-3x^2$ в точке с абсциссой $x=-2$. [$k=12$.]

68. Напишите уравнение нормали к параболе $y^2=2x$ в точке $A(8;\ 4)$. [Нормаль $4x+y-36=0$.]

69. Напишите уравнение нормали к окружности $x^2+y^2=25$ в точке $A(3;\ -4)$. [Нормаль $4x+3y=0$.]

70. Лифт после включения движется по закону

$$s=1{,}5t^2+2t+12,$$

где s — путь (м), t — время (с).

Найдите скорость лифта в момент времени $t=2$. [8 (м/с).]

71. Закон движения точки по прямой описывается уравнением $s=t^3-3t^2+3t+5$, где s — путь (в метрах); t — время (в секундах). В какие моменты времени t скорость v точки равна нулю? [$v=0$ при $t=1$ с.]

72. Разложение некоторого химического вещества протекает в соответствии с уравнением $m = m_0 e^{-kt}$, где m — количество вещества в момент времени t, k — положительная постоянная. Найдите скорость v разложения вещества и выразите ее как функцию m. [$v = -km$.]

73. Зависимость количества Q вещества, получаемого в химической реакции, от времени t определяется формулой $Q = a(1 + be^{-kt})$. Определите скорость v реакции и выразите ее как функцию Q. [$v = k(a - Q)$.]

74. Атмосферное давление воздуха p на высоте h над уровнем моря можно вычислить по формуле $p = p_0 e^{-\frac{h}{a}}$, где p_0 — давление на уровне моря и a — постоянная. Найдите скорость v изменения давления с высотой и выразите ее как функцию p. $\left[v = -\dfrac{p}{a}.\right]$

75. Размер популяции насекомых в момент t (время выражено в днях) задается величиной $p(t) = 10\,000 - 9000\,(1 + t)^{-1}$. Вычислите скорость роста популяции $p'(t)$ в момент t. $\left[p'(t) = \dfrac{9000}{(1+t)^2}.\right]$

76. Размер популяции бактерий в момент t (время выражено в часах) задается формулой $p(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$. Найдите скорость роста популяции, когда $t = 1$ ч. [8000 бактерий в час.]

Найдите дифференциалы следующих функций:

77. $y = (a^2 - x^2)^2$. [$dy = -4x(a^2 - x^2)\,dx$.]

78. $y = \sqrt{4 + x^2}$. $\left[dy = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{4+x^2}}.\right]$

79. $y = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$. $\left[dy = \dfrac{dx}{1-x^2}.\right]$

80. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$. [$dy = \sec^4 x\,dx$.]

81. $y = \operatorname{arctg}(x^2)$. $\left[dy = \dfrac{2x\,dx}{1+x^4}.\right]$

82. $y = x(2x - 3)(4x + 5)$. [$dy = (24x^2 - 4x - 15)\,dx$.]

83. $y = \dfrac{3x-4}{2x+3}$. $\left[dy = \dfrac{17dx}{(2x+3)^2}.\right]$

84. $y = e^{x^2} + x + 1$. [$dy = (2xe^{x^2} + 1)\,dx$.]

85. $y = 8^x$. [$dy = 8^x \ln 8\,dx$.]

86. $y = \cos^2\dfrac{x}{2}$. $\left[dy = -\dfrac{1}{2}\sin x\,dx.\right]$

87. $y = \sin(2x + 3)$. [$dy = 2\cos(2x + 3)\,dx$.]

Найдите с помощью дифференциала приближенные значения для следующих выражений:

88. $\sqrt[3]{1,1}$. [$\sqrt[3]{1,1} \approx 1,033$.]

89. $\sqrt[5]{1,02}$. [$\sqrt[5]{1,02} \approx 1,004$.]

90. $\sqrt[3]{26,19}$. [$\sqrt[3]{26,19} \approx 2,97$.]

91. $\sin 31°$. [$\sin 31° \approx 0,515$.]

92. $\ln 1,007$. [$\ln 1,007 \approx 0,007$.]

93. $\cos 61°$. [$\cos 61° \approx 0,4849$.]

Найдите производные высших порядков следующих функций:

94. $y = x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 1$; $y'' = ?$ [$y'' = 20x^3 - 36x^2 + 6x - 10$.]

95. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$; $y''' = ?$ [$y''' = 12$.]

96. $y = x^3 + 3x^2 + 4$; $y^V = ?$ [$y^V = 0$.]

97. $y = x \ln x$; $y'' = ?$ $\left[y'' = \dfrac{1}{x}.\right]$ **98.** $y = e^{2x}$; $y''' = ?$ [$y''' = 8e^{2x}$.]

99. $y = e^x + x^2$; $y^{IV} = ?$ [$y^{IV} = e^x$.]

100. $y = e^{\cos x}$; $y'' = ?$ [$y'' = e^{\cos x}(\sin^2 x - \cos x)$.]

101. $y = \sin 2x$; $y'' = ?$ [$y'' = -4 \sin 2x$.]

102. $y = \operatorname{arctg} x$; $y'' = ?$ $\left[y'' = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}.\right]$

ГЛАВА 3. ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 3.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

1. Теорема Ферма*. *Если функция $y=f(x)$, определенная в интервале $(a;\ b)$, достигает в некоторой точке c этого интервала наибольшего (или наименьшего) значения и существует производная $f'(c)$, то $f'(c)=0$.*

Доказательство. Допустим, что в точке c функция $f(x)$ достигает наибольшего значения. Придадим значению c достаточно малое приращение Δx. Тогда $f(c+\Delta x)<f(c)$. Отсюда при $\Delta x<0$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}>0,$

и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(c)\geq 0. \tag{3.1}$$

При $\Delta x>0$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$, и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(c)\leq 0. \tag{3.2}$$

Из неравенств (3.1) и (3.2) следует, что $f'(c)=0$.

Геометрический смысл заключения теоремы состоит в том, что касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой c параллельна оси абсцисс (рис. 24).

2. Теорема Ролля.** *Если функция $y=f(x)$, непрерывная на сегменте $[a,\ b]$ и дифференцируемая в интервале $(a,\ b)$, принимает на концах этого сегмента равные значения $f(a)=f(b)$, то в интервале $(a,\ b)$ существует точка c такая, что $f'(c)=0$.*

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,\ b]$, то, как известно (см. § 1.6, п. 2), она принимает на этом сегменте как свое наибольшее значение M, так и свое наименьшее значение m. Возможны только два случая.

1. $M=m$. Тогда $f(x)$ постоянна на $[a,\ b]$: в самом деле, неравенство $m\leq f(x)\leq M$ в этом случае дает $f(x)=M$ для всех x из $[a;\ b]$. Поэтому в любой точке интервала $(a;\ b)$ $f'(x)=0$.

2. $M>m$. Так как $f(a)=f(b)$, то хоть одно из значений M и m достигается в некоторой точке c $(a<c<b)$. Следовательно, согласно теореме Ферма, $f'(c)=0$. Теорема доказана.

---

* Пьер Ферма (1601—1665) — французский математик.

** Мишель Ролль (1652—1719) — французский математик.

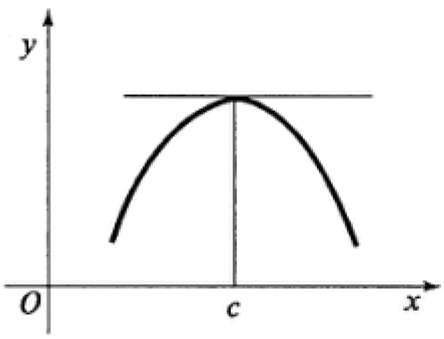


Рис. 24

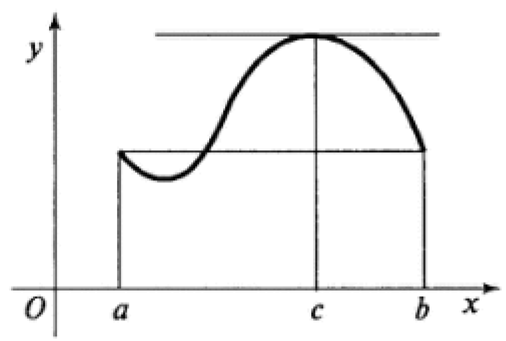


Рис. 25

Геометрически теорема Ролля означает следующее: если крайние ординаты кривой $y=f(x)$ равны, то на кривой найдется точка, где касательная параллельна оси абсцисс (рис. 25).

3. Теорема Лагранжа*. *Если функция* $y=f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a;\ b]$ *и дифференцируема в интервале* $(a;\ b)$, *то в интервале* $(a;\ b)$ *найдется такая точка* c, *что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \tag{3.3}$$

Доказательство. Положим

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lambda \tag{3.4}$$

и рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\lambda(x-a)$. Эта функция удовлетворяет первым двум условиям теоремы Ролля как алгебраическая сумма трех непрерывных и дифференцируемых функций. При этом $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Следовательно, к функции $\varphi(x)$ применима теорема Ролля, т. е. существует точка c, $a<c<b$, такая, что $\varphi'(c)=0$. Но $\varphi'(x)=f'(x)-\lambda$. Поэтому $f'(c)-\lambda=0$, или $\lambda=f'(c)$. Отсюда с учетом формулы (3.4) получаем искомое равенство (3.3).

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл (рис. 26): на графике функции $y=f(x)$ между точками A и B есть внутренняя точка C такая, что касательная к нему в точке C параллельна хорде AB. В самом деле, левая часть равенства (3.3) — угловой коэффициент хорды AB, а правая — угловой коэффициент касательной к графику в точке C.

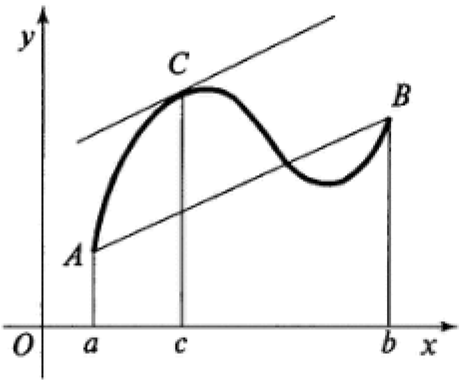


Рис. 26

* Жозеф-Луи Лагранж (1736—1813) — французский математик и механик.

Примечание 3. Теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля, так как если $f(a)=f(b)$, то из равенства (3.3) следует $f'(c)=0$.

Формула (3.3) называется **формулой Лагранжа** или **формулой конечных приращений**. Из нее получаем $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. Наконец, взяв вместо a и b соответственно x_0 и x и обозначив $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-f(x_0)$, формулу Лагранжа запишем

$$\Delta y=f'(c)\,\Delta x.$$

Из теоремы Лагранжа вытекает следствие.

Следствие. Если $f'(x)=0$ в интервале $(a;\ b)$, то в этом интервале функция $f(x)$ постоянна.

Доказательство. Для любых значений x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$ из рассматриваемого интервала выполняется теорема Лагранжа, т. е. $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$, где $x_1<c<x_2$. Но $f'(c)=0$, а потому и $f(x_2)-f(x_1)=0$, т. е. $f(x_1)=f(x_2)$, а это означает, что $f(x)=\text{const}$ в интервале $(a;\ b)$.

4. Правило Лопиталя*. В гл. 1 (см. § 1.5, п. 2) мы познакомились с некоторыми приемами нахождения пределов отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших, т. е. раскрытия неопределенности соответственно вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Здесь будет рассмотрен новый простой прием для раскрытия этих неопределенностей, называемый *правилом Лопиталя*. Рассмотрим отношение

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

где функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, исключая, быть может, саму точку a. Пусть далее эти функции одновременно являются бесконечно малыми или бесконечно большими.

Справедлива (см., например, [7]) следующая теорема.

Теорема. *Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, если последний существует, т. е.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^x-1)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x\ln 2}{\cos x}=\ln 2.$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=1.$

Иногда правило Лопиталя приходится применять несколько раз.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{2}=\dfrac{1}{2}.$

Примечание. Правило Лопиталя верно и в том случае, когда a — символ ∞.

---

* Гильом Лопиталь (1661—1704) — французский математик.

Пример 4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0.$

Случаи других неопределенностей

$$0\cdot\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,\ \infty-\infty$$

с помощью тождественных преобразований сводятся к основным типам неопределенностей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 5. $\lim\limits_{x\to0+0} x\ln x.$

Здесь имеем неопределенность $0\cdot\infty$. Переписывая данное выражение в виде

$$\lim_{x\to0+0} x\ln x=\lim_{x\to0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}},$$

получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Отсюда, применяя правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to0+0} x\ln x=\lim_{x\to0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to0+0} x=0.$$

Пример 6. $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right).$

Данное выражение представляет собой неопределенность вида $\infty-\infty$. Используя, что $\operatorname{ctg}x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$, имеем

$$\lim_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}.$$

Так как получилась неопределенность $\frac{0}{0}$, то применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}\right)=-\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=-\frac{0}{2}=0.$$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to0+0} x^x$. Здесь неопределенность вида 0^0. Положив $y=x^x$, имеем

$$\ln\lim_{x\to0+0} y=\lim_{x\to0+0}\ln y=\lim_{x\to0+0} x\ln x=0.$$

Следовательно, $\ln\lim\limits_{x\to0+0} y=0$, откуда

$$\lim_{x\to0+0} y=e^0=1,\quad \text{т. е.}\quad \lim_{x\to0+0} x^x=1.$$

Использовавшийся в последнем примере прием логарифмирования применяется также и в случае неопределенностей ∞^0, 1^∞.

§ 3.2. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИЙ. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

1. Возрастание и убывание функций. Функция $f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* в интервале $(a;\ b)$, если, каковы бы ни были значения x_1 и x_2 из этого интервала, из неравенства $x_2>x_1$ вытекает неравенство $f(x_2)>f(x_1)$ (соответственно $f(x_2)<f(x_1)$). Если же для таких x_1 и x_2 из неравенства $x_2>x_1$ следует неравенство $f(x_2)\ge f(x_1)$ $(f(x_2)\le f(x_1))$, то функция $f(x)$ называется *неубывающей (невозрастающей)* на $(a;\ b)$.

Функции всех этих типов носят общее название *монотонные*.

Монотонные функции часто встречаются в различных исследованиях. Высота растущего дерева, например, или вес созревающего зерна — это монотонно неубывающие функции времени; освещенность, меняющаяся по мере удаления от источника света,— монотонно убывающая функция расстояния.

Разумеется, существуют и не монотонные функции. Например, температура воздуха в течение года — не монотонная функция времени, хотя на протяжении нескольких часов она может быть и монотонной, повышаясь к полудню или понижаясь к вечеру.

Теорема 1. *Если функция $y=f(x)$, дифференцируемая в интервале $(a;\ b)$, неубывающая (невозрастающая) на нем, то ее производная в этом интервале не отрицательна (не положительна), т. е.*

$$f'(x)\ge 0 \quad (f'(x)\le 0).$$

Доказательство. Пусть x — произвольное значение из интервала $(a;\ b)$. Придадим этому значению x приращение Δx такое, чтобы точка $x+\Delta x$ принадлежала интервалу $(a;\ b)$. Если $f(x)$ неубывающая функция, то $\Delta y\ge 0$ при $\Delta x>0$ и $\Delta y\le 0$ при $\Delta x<0$. В обоих случаях $\frac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$ и, следовательно, $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$. Если же $f(x)$ невозрастающая функция, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}\le 0$ и $f'(x)\le 0$.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$, дифференцируемая в интервале $(a;\ b)$, удовлетворяет в нем условию $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$, то эта функция возрастает (убывает) в интервале $(a;\ b)$.*

Доказательство. Согласно формуле Лагранжа для произвольных x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$ из $(a;\ b)$, имеем $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$, где $x_1<c<x_2$. Следовательно, если $f'(x)>0$ в $(a;\ b)$, то $f(x_2)-f(x_1)>0$ или $f(x_2)>f(x_1)$ и заданная функция возрастает в $(a;\ b)$. Если же $f'(x)<0$ в $(a;\ b)$, то $f(x_2)-f(x_1)<0$ или $f(x_2)<f(x_1)$ и данная функция убывает.

Приведем несколько примеров исследования функции на возрастание и убывание.

Пример 1. Функция $y=e^x$ всюду возрастает, так как $y'=e^x>0$ для всех x.

Пример 2. Функция $y=x^2$ убывает в промежутке $(-\infty,\ 0)$, так как в этом промежутке $y'=2x<0$. Эта же функция в промежутке $(0,\ +\infty)$ возрастает, так как в последнем промежутке $y'=2x>0$.

2. Экстремум функции. Определение. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *максимум (минимум)*, если существует такая окрестность точки x_0 $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, что для всех x из этой окрестности, отличных от x_0, выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

Иначе говоря, функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (минимум), если для достаточно малого приращения Δx (любого знака) выполняется неравенство

$$f(x_0+\Delta x) < f(x_0) \quad (f(x_0+\Delta x) > f(x_0)).$$

Максимум или минимум функции называют *экстремумом* функции.

По определению максимумов и минимумов функции они могут достигаться лишь внутри области определения, концы сегментов области определения не могут служить точками, в которых функция принимает экстремум.

На рис. 27 изображен график функции, которая имеет в точке x_1 максимум, а в точке x_2 минимум.

Если исследуемая на экстремум функция дифференцируема, то изучение свойств ее производной дает возможность находить точки, в которых функция имеет экстремум.

Теорема 1 (необходимое условие существования экстремума). *Если функция $f(x)$, дифференцируемая в интервале $(a;\ b)$, имеет в точке x_0, $a < x_0 < b$, экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю:*

$$f'(x_0) = 0. \tag{3.5}$$

Эта теорема есть непосредственное следствие из теоремы Ферма.

Примечание. Условие (3.5), будучи необходимым условием экстремума, не является достаточным условием экстремума, что показывает следующий пример.

Пример 1. Функция $f(x) = x^3$ не имеет экстремума в точке $x_0 = 0$ (разность $f(x) - f(0)$ меняет знак при изменении знака аргумента x), хотя ее производная $y' = 3x^2$ обращается в этой точке в нуль.

Теорема 2 (достаточное условие существования экстремума). *Если производная функции $f(x)$ обращается в точке x_0 в нуль (такие*

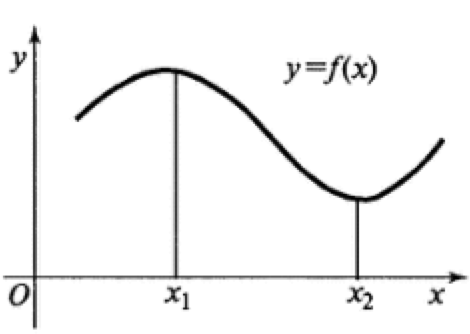


Рис. 27

точки называются стационарными) и при переходе через эту точку в направлении возрастания x меняет знак «плюс» (минус) на «минус» (плюс), то в точке x_0 эта функция имеет максимум (минимум). Если же при переходе через точку x_0 производная функции $f(x)$ не меняет знака, то в этой точке функция $f(x)$ экстремума не имеет.

Доказательство. Допустим, что $f'(x)$ меняет знак «плюс» на «минус». Тогда, согласно теореме 2 п. 1 настоящего параграфа в достаточно малой окрестности точки x_0 слева от x_0 функция $f(x)$ возрастает и $f(x)<f(x_0)$, а справа от нее функция $f(x)$ убывает и снова $f(x)<f(x_0)$. Следовательно, для всех x из достаточно малой окрестности точки x_0 (кроме самой этой точки) будет выполняться неравенство $f(x)<f(x_0)$, т. е. в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум.

Аналогичное доказательство и в случае обратной смены знака.

Предположим теперь, что при переходе через точку x_0 производная функции $f(x)$ не меняет знака. Тогда по теореме 2 п. 1 настоящего параграфа как слева, так и справа от x_0 функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает и, следовательно, не может иметь экстремума в точке x_0.

Отсюда следует такое *правило исследования функции на экстремум* с помощью первой производной. Пусть в интервале $(a; b)$ дана дифференцируемая функция $f(x)$:

1) находим ее производную $f'(x)$;

2) находим корни уравнения $f'(x)=0$;

3) выясняем знак $f'(x)$ слева и справа от каждого из этих корней и, согласно теореме 2, выносим заключение об экстремуме;

4) вычисляем значения функции в точках экстремума.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $f(x)=e^x-x$. Для этого находим: $f'(x)=e^x-1$. Приравнивая ее к нулю, получаем $e^x-1=0$, откуда $x=0$. Так как для $x<0$ $e^x-1<0$, а для $x>0$ $e^x-1>0$, то в точке $x=0$ данная функция имеет минимум, причем $f(0)=1$.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $f(x)=x^3-3x+2$. Для этого вычисляем производную $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$ и находим корни уравнения $f'(x)=0$. Имеем $x_1=-1$, $x_2=1$. Затем согласно полученному правилу, последовательно заполняем строки таблицы:

x	$x<-1$	$x_1=-1$	$-1<x<1$	$x_2=1$	$x>1$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$		Максимум $f(x_1)=4$		Минимум $f(x_2)=0$	

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию $f(x)=x^3+2$. Имеем $f'(x)=3x^2=0$, откуда $x=0$. Так как при $x<0$ и $x>0$ $f'(x)>0$, то функция $f(x)=x^3+2$ в точке $x=0$ экстремума не имеет.

3. Исследование функций на экстремум с помощью второй производной. Следующая теорема является вторым достаточным условием существования экстремума.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и ее окрестности непрерывные первую и вторую производные, причем $f'(x)=0$, $f''(x_0)\neq 0$.*

Тогда функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум (максимум), если $f''(x_0)>0$ ($f''(x_0)<0$).

Доказательство. Пусть $f''(x_0)>0$. Так как $f''(x)$ непрерывна в точке x_0, то (см. § 1.6, п. 1) $f''(x_0)>0$ и в некоторой окрестности точки x_0. В этой окрестности точки x_0 функция $z=f'(x)$ возрастает, так как $z'=f''(x)>0$. Но $f'(x_0)=0$. Следовательно, при переходе через точку x_0 в направлении возрастания $f'(x)$ меняет знак минус на плюс и потому, согласно теореме 2 п. 2 настоящего параграфа, $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум. Доказательство в случае $f''(x_0)<0$ аналогично.

Эта теорема позволяет сформулировать *второе правило* отыскания экстремума функции, в котором меняется лишь пункт 3). Этот пункт заменяется на следующее:

находим вторую производную $f''(x)$, вычисляем ее значения для каждого из найденных корней уравнения $f'(x)=0$ и согласно только что доказанной теореме выносим заключение об экстремуме.

Заметим, что пользоваться вторым правилом обычно проще, чем первым. Но если вторая производная в корне первой производной обращается в нуль, то используют первое правило отыскания экстремума.

Пример. Применим второе правило отыскания экстремума для рассмотренной выше функции $f(x)=e^x-x$. Имеем $f'(0)=0, f''(x)=e^x, f''(0)=1>0$, следовательно, $x=0$ дает минимум, т. е. приходим к тому же результату.

4. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$. Тогда на этом отрезке функция $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значений (см. § 1.6, п. 2). Остановимся для определенности на наибольшем значении. Если эта функция достигает наибольшего значения в интервале $(a;\ b)$, то оно, очевидно, будет максимумом функции $f(x)$. Но функция может достигать своего наибольшего значения также на одном из концов отрезка $[a;\ b]$ (см. рис. 18). Таким образом, чтобы найти наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$, надо найти на интервале $(a;\ b)$ все максимумы этой функции, затем вычислить значения функции $f(x)$ на концах отрезка $[a;\ b]$, т. е. $f(a)$ и $f(b)$. Наибольшее из всех этих чисел и будет наибольшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$. Аналогично для нахождения наименьшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ надо найти все минимумы этой функции на интервале $(a;\ b)$, затем вычислить $f(a)$ и $f(b)$. Наименьшее из всех этих чисел и будет наименьшим значением функции на отрезке $[a;\ b]$.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ на отрезке $\left[\frac{3}{4};\ 3\right]$.

Исследуем эту функцию на экстремум:

$$f'(x)=6x^2-18x+12,$$

$$6x^2-18x+12=0$$

или

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Так как $f''(x) = 12x - 18$, то $f''(1) = -6 < 0$ и $f''(2) = 6 > 0$. Следовательно, при $x = 1$ функция $f(x)$ имеет максимум, причем $f(1) = 2$, а при $x = 2$ эта функция имеет минимум, причем $f(2) = 1$. Находим далее значения функции $f(x)$ на концах отрезка $\left[\frac{3}{4}; 3\right]$:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{57}{32}; \quad f(3) = 6.$$

Таким образом, наибольшее значение рассматриваемой функции на отрезке $\left[\frac{3}{4}; 3\right]$ есть шесть, а наименьшее равно единице.

Замечание. Очевидно, если непрерывная на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемая в интервале $(a; b)$ функция имеет в интервале $(a; b)$ только одну стационарную точку и экстремум в ней, то в этой точке она имеет наибольшее значение в случае максимума и наименьшее в случае минимума.

5. Задачи из естествознания на экстремум. Теория экстремума функции имеет многочисленные приложения в естествознании. Рассмотрим некоторые из них.

Задача 1. Составляется электрическая цепь из двух параллельно соединенных сопротивлений. При каком соотношении между этими сопротивлениями сопротивление всей цепи максимально, если при последовательном соединении этих сопротивлений оно равно R?

Решение. Пусть r — сопротивление электрической цепи, состоящей из двух параллельно соединенных сопротивлений x и y. Тогда

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{r}.$$

Из условия задачи имеем

$$x + y = R.$$

Из последних двух равенств получаем

$$r = \frac{x(R-x)}{R} \equiv r(x).$$

Очевидно, $0 < x < R$. Производная $r' = \frac{R-2x}{R}$ обращается в нуль в единственной точке $x = \frac{R}{2}$. Это значение и доставляет r максимальное значение, так как при любом достаточно малом положительном числе h

$$r'\left(\frac{R}{2} - h\right) = \frac{2h}{R} > 0 \quad \text{и} \quad r'\left(\frac{R}{2} + h\right) = -\frac{2h}{R} < 0^*,$$

* Таким h остается и ниже.

т. е. при переходе через точку $x=\frac{R}{2}$ в направлении возрастания x производная r меняет знак с «плюса» на «минус».

Задача 2. Газовая смесь состоит из окиси азота (NO) и кислорода (O_2). Требуется найти концентрацию O_2, при которой содержащаяся в смеси окись азота окисляется с наибольшей скоростью.

Решение. В условиях практической необратимости скорость реакции

$$2NO + O_2 = 2NO_2$$

выражается формулой $v=kx^2y$, где x — концентрация NO в любой момент времени; y — концентрация O_2; k — константа скорости реакции, не зависящая от концентрации реагирующих компонентов и зависящая только от температуры. Концентрацию газов будем выражать в объемных процентах. В этом случае

$$y=100-x, \quad v=kx^2(100-x)\equiv v(x).$$

Очевидно, $0<x<100$. Производная $v'=k(200x-3x^2)$ между 0 и 100 имеет единственный корень $x=x_1=66{,}67$ и $v(0)=v(100)=0$. Следовательно, скорость реакции наибольшая, когда $x=66{,}67\%$ и $y=33{,}33\%$.

Задача 3. Реакция организма на введенное лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, уменьшении температуры тела, изменении пульса или других физиологических показателей. Степень реакции зависит от назначенного лекарства, его дозы. Предположим, что x обозначает дозу назначенного лекарства, а степень реакции y описывается функцией $y=f(x)=x^2(a-x)$, где a — некоторая положительная постоянная. При каком значении x реакция максимальна?

Решение. Очевидно, $0<x<a$. Имеем $f'(x)=2ax-3x^2$. Так как $x=\frac{2}{3}a$ — корень уравнения $f'(x)=0$ и $f''\left(\frac{2}{3}a\right)=-2a<0$, то $x=\frac{2}{3}a$ — тот уровень дозы, который дает максимальную реакцию.

Зачада 4. В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает по закону

$$p(t)=1000+\frac{1000t}{100+t^2},$$

где t выражается в часах. Найти максимальный размер этой популяции.

Решение. Имеем

$$p'(t)=\frac{1000(100-t^2)}{(100+t^2)^2}.$$

Так как $p'(10)=0$ и $p'(10-h)=\frac{1000(20-h)h}{(100+(10-h)^2)^2}>0$, $p'(10+h)=$ $=-\frac{1000(20+h)h}{(100+(10+h)^2)^2}<0$, то максимальный размер популяции составляет

$$p(10)=1000+\frac{1000\cdot 10}{100+100}=1050$$

и достигается по прошествии 10 ч роста.

§ 3.3. ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ ГРАФИКА ФУНКЦИИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

На рис. 28 построен график дифференцируемой функции $y=f(x)$. В точках A, B и C построим касательные к графику. Видно, что все точки графика, достаточно близкие к точке A и лежащие по обе стороны от нее, расположены ниже касательной. В этом случае график функции $f(x)$ называется *выпуклым в точке* A. Все точки графика, достаточно близкие к точке C и лежащие по обе стороны от нее, расположены выше касательной. В таком случае график функции $f(x)$ называется *вогнутым в точке* C.

График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется *выпуклым (вогнутым)* в интервале $(a;\ b)$, если он является выпуклым (вогнутым) в каждой своей точке с первой координатой из $(a;\ b)$.

На рис. 28 график между точками A и B является выпуклым, а между точками B и C — вогнутым. Касательная, проведенная через точку B, пересекает график. При этом во всех точках графика, близких к точке B и лежащих слева от нее, график является выпуклым, а во всех точках графика, лежащих справа от точки B и близких к ней, график является вогнутым. Точка графика дифференцируемой функции $y=f(x)$, при переходе через которую график меняет выпуклость на вогнутость и наоборот, называется *точкой перегиба*. В частности, точка B — точка перегиба.

Сформулируем без доказательства теоремы, позволяющие находить интервалы выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба.

Теорема 1. *Если вторая производная $f''(x)$ функции $y=f(x)$ положительна (отрицательна) в интервале $(a;\ b)$, то график этой функции является вогнутым (выпуклым) в этом интервале.*

Теорема 2. *Если вторая производная $f''(x)$ функции $y=f(x)$ обращается в точке x_0 в нуль и при переходе через эту точку меняет знак, то точка $(x_0;\ f(x_0))$ графика данной функции является точкой перегиба.*

Из этих теорем вытекает схема исследования на выпуклость и вогнутость дважды дифференцируемой функции $y=f(x)$:

1) находится вторая производная $f''(x)$ и решается уравнение

$$f''(x)=0; \tag{3.6}$$

2) корни этого уравнения делят область определения второй производной $f''(x)$ на интервалы, в каждом из которых $f''(x)$ сохра-

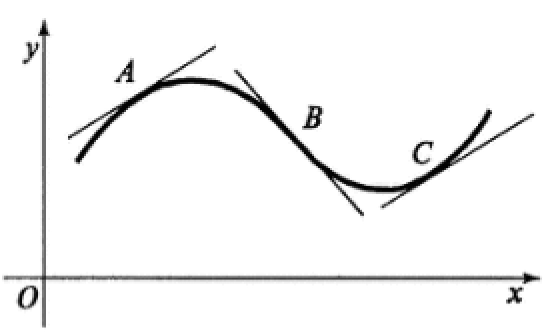


Рис. 28

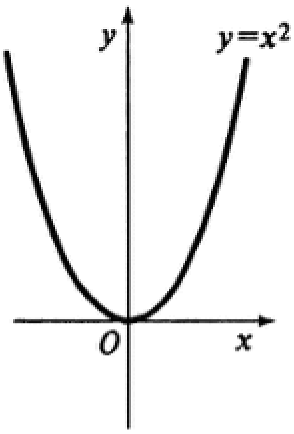


Рис. 29

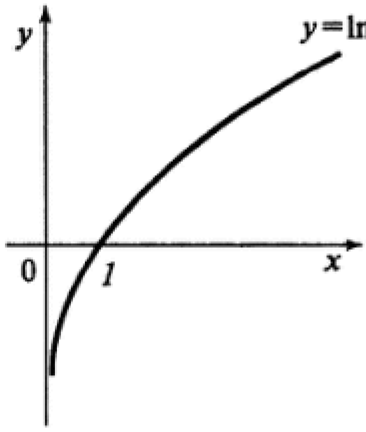


Рис. 30

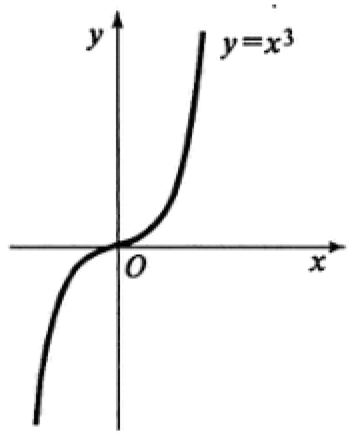


Рис. 31

няет свой знак. В интервалах, где $f''(x)<0$, график функции $y=f(x)$ является выпуклым; в интервалах, где $f''(x)>0$, график этой функции является вогнутым. Корни уравнения (3.6), при переходе через которые $f''(x)$ меняет знак, являются точками перегиба графика.

Пример 1. Кривая $y=x^2$ вогнута на всей числовой оси, так как $y''=2>0$ (рис. 29).

Пример 2. Кривая $y=\ln x$ выпукла в промежутке $(0;\ +\infty)$, так как в этом промежутке $y''=-\dfrac{1}{x^2}<0$ (рис. 30).

Пример 3. Кривая $y=x^3$ выпукла в промежутке $(-\infty;\ 0)$, так как в этом промежутке $y''=6x<0$, и вогнута в промежутке $(0;\ +\infty)$, так как в нем $y''=6x>0$; при $x=0$ $y''=0$, следовательно, точка $(0;\ 0)$ — точка перегиба (рис. 31).

Точки перегиба важны в биохимии, так как они определяют условия, при которых некоторая величина, например скорость процесса, наиболее (или наименее) чувствительна к каким-либо воздействиям. Рассмотрим (см. [4]) способность буфера препятствовать изменению pH ($\mathrm{pH}=-\lg[\mathrm{H}^+]$), которое может быть обусловлено, к примеру, добавлением щелочи. Эта ситуация описывается уравнением

$$\mathrm{pH}=\mathrm{pK}_\alpha+\lg\frac{[\text{Соль}]}{[\text{Кислота}]},$$

где $\mathrm{pK}_\alpha=-\lg \mathrm{K}_\alpha$, K_α — константа диссоциации кислоты. Для буфера, приготовленного добавлением x моль·л$^{-1}$ NaOH к раствору уксусной кислоты $\mathrm{HOA_c}$ (для краткости через $\mathrm{A_c}$ обозначено $\mathrm{CH_3CO}$), начальная концентрация которого равна A, мы имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{pH}&=\mathrm{pK}_\alpha+\lg\frac{[\mathrm{NaOA_c}]}{[\mathrm{HOA_c}]}=\mathrm{pK}_\alpha+0{,}4343\ln\frac{[\mathrm{NaOA_c}]}{[\mathrm{HOA_c}]}=\\&=\mathrm{pK}_\alpha+0{,}4343\ln\frac{x}{A-x},\end{aligned}\tag{3.7}$$

поскольку до тех пор, пока x меньше A, практически все добавляемые ионы $\mathrm{OH^-}$ стехиометрически превращают молекулы $\mathrm{HOA_c}$ в ионы $\mathrm{OA_c^-}$. Дифференцируя по x, получаем

$$\frac{d\,\mathrm{pH}}{dx}=0{,}4343\frac{A-x}{x}\,\frac{A-x+x}{(A-x)^2}=\frac{0{,}4343A}{x(A-x)}.$$

Эта первая производная является мерой чувствительности pH к действию щелочи. Ясно, что буфер наиболее эффективен, когда производная минимальна (или обратная ей величина, известная под названием буферной емкости, максимальна). Для нахождения значения x, при котором $\frac{d\,\mathrm{pH}}{dx}$ минимальная, следует взять вторую производную

$$\frac{d^2\,\mathrm{pH}}{dx^2}=-0{,}4343A\frac{A-2x}{(Ax-x^2)^2}.$$

Отсюда видно, что вторая производная равна нулю в точке $x=\frac{A}{2}$ и при переходе через нее в направлении возрастания x меняет знак «минус» на «плюс». Следовательно, $\frac{d\,\mathrm{pH}}{dx}$ минимальна в точке перегиба функции pH. Подставив это значение x в формулу (3.7), найдем, что

$$\mathrm{pH}=\mathrm{pK}_a+0{,}4343\ln\frac{2A}{2A}=\mathrm{pK}_a,$$

Таким образом, буфер наиболее эффективен при pH, равном pK_a кислоты, которая участвует в нитровании.

§ 3.4. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Многие линии имеют асимптоты, т. е. прямые, к которым неограниченно приближается данная линия, когда ее точка неограниченно удаляется от начала координат.

Различают асимптоты вертикальные (параллельные оси ординат) и наклонные (не параллельные оси ординат).

Прямая $x=a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ является бесконечным, т. е. равно $+\infty$ или $-\infty$.

Пример 1. Прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=\frac{1}{x}$, так как

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty.$$

Предположим, что функция $y=f(x)$ определена при сколь угодно больших (по модулю) значениях аргумента; для определенности будем рассматривать положительные значения аргумента. Прямая

$$y=kx+b \tag{3.8}$$

называется *наклонной асимптотой* графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, если эта функция представима в виде

$$f(x)=kx+b+\alpha(x), \tag{3.9}$$

где

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x)=0. \tag{3.10}$$

Теорема. *График функции $y=f(x)$ имеет при $x\to+\infty$ наклонную асимптоту тогда и только тогда, когда существуют два предела:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=k, \tag{3.11}$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-kx]=b. \tag{3.12}$$

Доказательство. Пусть график функции $y=f(x)$ имеет при $x\to+\infty$ наклонную асимптоту (3.8). Тогда справедливы равенства (3.9) и (3.10). Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{kx+b+\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} \left[k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right]=k;$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty} [b+\alpha(x)]=b.$$

Обратно: пусть существуют предельные значения (3.11) и (3.12). Из формулы (3.12) согласно установленной в § 1.5 (п. 1) теореме 1 имеем

$$f(x)-kx=b+\alpha(x), \text{ или } f(x)=kx+b+\alpha(x), \text{ где } \lim_{x\to+\infty} \alpha(x)=0.$$

Следовательно, прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$.

Примечание 1. Аналогично определяется наклонная асимптота и доказывается только что установленная теорема и для случая $x\to-\infty$.

Примечание 2. Для $k=0$ наклонная асимптота (3.11) при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$) называется *горизонтальной асимптотой* при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$).

Пример 2. График функции $y=\sqrt{x^2+1}$ имеет наклонную асимптоту $y=x$ при $x\to+\infty$. В самом деле,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

Пример 3. Прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=\dfrac{1}{x}$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

§ 3.5. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Наиболее наглядное представление о ходе изменения функции дает ее график. Поэтому построение графика является заключительным этапом исследования функции, в котором используются все результаты ее исследования. Построение графика функции проводится по следующей схеме.

I. Находится область определения функции. Функция исследуется на четность, нечетность и периодичность. Напомним эти свойства.

Функция $f(x)$ называется четной, если выполнено условие $f(-x)=f(x)$; график четной функции симметричен относительно оси ординат. Например, $y=\cos x$ или $y=x\sin x$ — четные функции. Функция $f(x)$ называется нечетной, если выполнено условие $f(-x)=-f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Например, $y=x^3$ или $y=x\cos 2x$ — нечетные функции. Функция $f(x)$ называется периодической, если существует положительное число T (период функции) такое, что $f(x+T)=f(x)$. Например, периодическими являются функции $\sin x$, $\cos x$ (период 2π), $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ (период π) (см. § 1.2).

II. Находятся точки разрыва функции, и в них вычисляются односторонние пределы.

III. Находятся точки пересечения графика функции с осями координат.

IV. Выясняется поведение функции в бесконечности.

V. Находятся промежутки возрастания и убывания функции.

VI. Функция исследуется на экстремум.

VII. Функция исследуется на выпуклость и вогнутость. Находятся точки перегиба.

VIII. Находятся уравнения асимптот, если они существуют.

IX. Строится график функции.

Заметим, что в некоторых случаях достаточно проводить частичные исследования, опуская некоторые пункты схемы.

Пример 1. Построить график функции $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$. Функция $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ определена и непрерывна для всех значений x, кроме $x=1$. Функция не является ни четной, ни нечетной. Ее график не имеет точек пересечения с осью Ox, так как $x^2+1>0$ для всех вещественных x. При $x=0$ $y=-1$.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=+\infty,$$

т. е. прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой. При $x\to+\infty$ $y\to+\infty$, а при $x\to-\infty$ $y\to-\infty$. Производная данной функции $y'=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ обращается в нуль в точках $x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=1+\sqrt{2}$. Эти точки разбивают всю числовую ось на три промежутка $(-\infty;\ 1-\sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2};\ +\infty)$, внутри каждого из которых производная y' сохраняет постоянный знак. Очевидно, что в первом и третьем промежутках $y'>0$, и, следовательно, здесь функция y возрастает, во втором промежутке $y'<0$, и, следовательно, в этом промежутке данная функция убывает. Ее вторая производная $y''=\dfrac{4}{(x-1)^3}$ всюду отлична от нуля (значит, точек перегиба график рассматриваемой функции не имеет), в промежутке $(-\infty;\ 1)$ $y''<0$, и, следовательно, здесь график данной функции является выпуклым и в точке x_1 эта функция имеет максимум, причем $f(x_1)=2-2\sqrt{2}$; в промежутке $(1;\ +\infty)$ $y''>0$, и, следовательно, в последнем промежутке этот график является вогнутым и в точке x_2 данная функция имеет минимум, причем $f(x_2)=2+2\sqrt{2}$. Наконец, поскольку

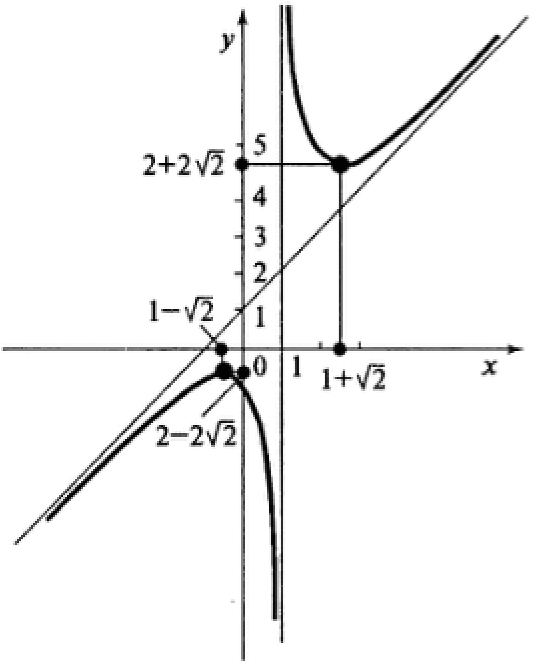


Рис. 32

$$\frac{x^2+1}{x-1}=x+1+\frac{2}{x-1} \text{ и } \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x-1}=0,$$

график данной функции имеет наклонную асимптоту $y=x+1$ и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$. График функции $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ изображен на рис. 32.

Пример 2. Построить график функции $y=e^{-x^2}$.

Эта функция определена, непрерывна, положительна на всей числовой оси и является четной. Поэтому достаточно построить ее график в первом квадранте. При $x=0$ $y=1$, при $x\to+\infty$ $y\to0$. Поэтому прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика данной функции при $x\to+\infty$. Производная $y'=-2xe^{-x^2}$ обращается в нуль только в точке $x_0=0$; при $x>0$ $y'<0$, т. е. при $x>0$ данная функция убывает. Ее вторая производная $y''=2(2x^2-1)e^{-x^2}$ в точке $x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ обращается в нуль, в промежутке $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$ $y''>0$, и, следовательно, здесь график данной функции является вогнутым, а в промежутке $[x_0;x_1)$ $y''<0$, и, следовательно, в нем этот же график является выпуклым и x_1 — абсцисса его точки перегиба (значит, ордината этой точки $e^{-\frac{1}{2}}$), и наконец, в точке x_0 данная функция имеет максимум. График данной функции изображен на рис. 33. Это так называемая кривая Гаусса.

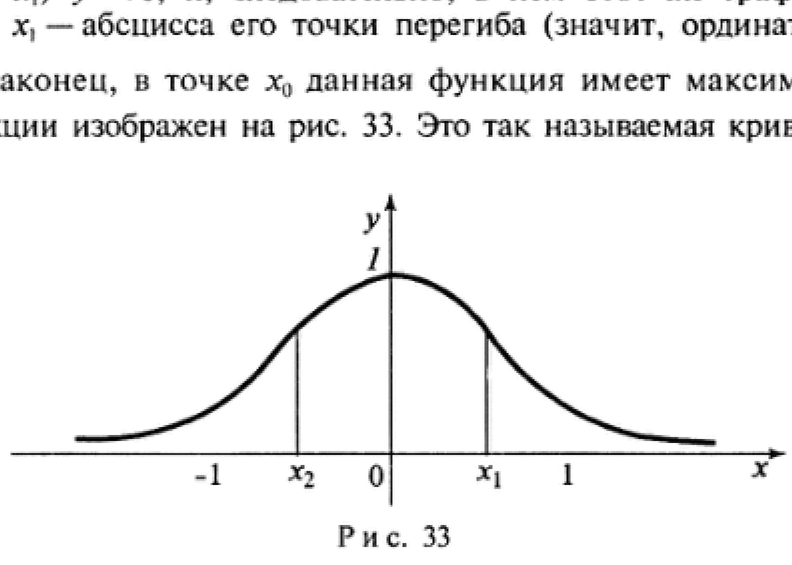


Рис. 33

§ 3.6. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема. *Пусть в интервале* $(\alpha; \beta)$ *функция* $f(x)$ *имеет производные до* $(n+1)$*-го порядка включительно. Тогда для всякого* x *из этого интервала и фиксированного* a *этого интервала имеет место формула*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad (3.13)$$

Здесь c находится между x и a, т. е. $c = a + \theta(x-a)$, где θ — число, заключенное между 0 и 1, т. е. $0 < \theta < 1$.

Формула (3.13) называется *формулой Тейлора**, а последнее слагаемое в правой части этой формулы — *остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа.*

Доказательство формулы Тейлора приводить не будем.

2. Применение формулы Тейлора к элементарным функциям. Приближенные формулы. Частным случаем формулы Тейлора, соответствующим случаю $a = 0$, является формула

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (3.14)$$

где $c = \theta x$. Эту формулу часто называют *формулой Маклорена***. Здесь остаточный член

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Разложим по этой формуле некоторые элементарные функции.

1. Пусть $f(x) = e^x$, тогда $f^{(k)}(x) = e^x$ при любом натуральном k и при любом x. В частности, при $x = 0$ имеем $f(0) = 1$ и $f^{(k)}(0) = 1$. По формуле (3.14) получим разложение функции e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c. \qquad (3.15)$$

Из равенства (3.15) получаем приближенную формулу

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Так как остаточный член здесь

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c,$$

то, например, при $x > 0$ погрешность $r_n(x)$ оценивается так:

$$0 < r_n(x) < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x. \qquad (3.16)$$

В частности, при $x = 1$ получаем приближенное значение числа e:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

---

* Брук Тейлор (1685—1731) — английский математик.

** Колин Маклорен (1698—1746) — шотландский математик.

При этом из формулы (3.16) следует, что $0 < r_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$, так как $e < 3$. Если требуется вычислить значение e с точностью до 0,001, то число n определяется из неравенства $\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}001$ или $(n+1)! > 3000$. Следовательно, если взять $n = 6$, то требуемое неравенство верно.

Таким образом, используя формулу Маклорена, можно вычислить число e с любой точностью, при этом алгоритм вычисления числа e легко реализуется на ЭВМ.

2. Пусть $f(x) = \sin x$. Тогда $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f''' = -\cos x$, $f^{IV} = \sin x$, $f^{V} = \cos x$, ... Следовательно, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{IV}(0) = 0$, $f^{V}(0) = 1$ и далее такое же чередование значений.

По формуле (3.14) (если взять $n = 2m$) имеем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\cos c. \quad (3.17)$$

Из разложения (3.17) получим приближенную формулу

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

с погрешностью $r_n(x)$, оцениваемой неравенством

$$|r_n(x)| \le \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

(так как $|\cos c| \le 1$ при любом c).

В частности, имеем приближенную формулу

$$\sin x \approx x$$

с погрешностью, по модулю не превосходящей $\frac{|x|^3}{3!}$.

3. Аналогично при $f(x) = \cos x$ имеем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1}\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cos c, \quad (3.18)$$

откуда получаем приближенную формулу

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

с погрешностью

$$|r_n(x)| \le \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

4. Пусть $f(x) = (1+x)^n$, где n — натуральное число. Последовательно дифференцируя $f(x)$, получаем

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1},\ f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2},\ \ldots,\ f^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots$$
$$\ldots(n-k+1)(1+x)^{n-k},\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = n!$$

(производные порядка выше n все равны нулю).

Отсюда $f(0)=1$, $f'(0)=n$, $f''(0)=n(n-1)$, ..., $f^{(k)}(0)=n(n-1)\ldots$ $\ldots(n-k+1)$, ..., $f^{(n)}(0)=n!$

По формуле (3.14) имеем равенство

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k+\ldots+x^n, \qquad (3.19)$$

называемое *биномом Ньютона.*

Очевидно, равенства (3.15), (3.17), (3.18), (3.19) верны при всех значениях x.

Упражнения

Используя правило Лопиталя, найдите следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 10x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$. $[-3.]$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$. $[1.]$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$. $[0.]$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$. $[0.]$

7. $\lim\limits_{x\to 0+0}x^n\ln x\ \ (n>0)$. $[0.]$

8. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$. $\left[\dfrac{1}{6}.\right]$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$. $[0.]$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$. $[1.]$

11. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg}5x}$. $\left[-\dfrac{3}{5}.\right]$

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^n-1}$. $\left[\dfrac{1}{n}.\right]$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$. $\left[\dfrac{a^2}{b^2}.\right]$

14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{\sin 4x}$. $\left[-\dfrac{1}{2}.\right]$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$. $[2.]$

16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}3x}$. $\left[\dfrac{3}{5}.\right]$

17. $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\ln(e^x-e^a)}{\ln(x-a)}$. $[1.]$

18. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$. $[1.]$

19. $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}2x$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

20. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$. $\left[\dfrac{2}{\pi}.\right]$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}(a^{\frac{1}{x}}-1)x\ \ (a>0)$. $[\ln a.]$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}n^2(a^{\frac{1}{x}}+a^{-\frac{1}{x}}-2)x\ \ (a>0)$. $[\ln^2 a.]$

23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$. $[-1.]$

24. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^m}{e^{ax}}$; m — натуральное число и $a>0$. [0.]

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$. $\left[\dfrac{1}{10}.\right]$

26. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$. $\left[\dfrac{1}{5}.\right]$

27. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$. $\left[-\dfrac{1}{2}.\right]$

28. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. [1.]

29. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. $\left[e^{-\frac{1}{2}}.\right]$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. $\left[e^{-\frac{1}{6}}.\right]$

31. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^{\cos x}$. [1.]

32. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+1)^{\frac{1}{x}}$. [1.]

33. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$. $\left[\dfrac{1}{e}.\right]$

Найдите интервалы возрастания и убывания следующих функций:

34. $y=3x-x^3$. [Убывает на $(-\infty;\ -1)$ и $(1;\ +\infty)$ и возрастает на $(-1;\ 1)$.]

35. $y=x^2-4x$. [Убывает на $(-\infty;\ 2)$ и возрастает на $(2;\ +\infty)$.]

36. $y=\dfrac{2}{3}x^3-2x+1$.
[Убывает на $(-1;\ 1)$ и возрастает на $(-\infty;\ -1)$ и $(1;\ +\infty)$.]

37. $y=3x+\dfrac{3}{x}+5$.
[Убывает на $(-1;\ 0)$ и $(0;\ 1)$ и возрастает на $(-\infty;\ -1)$ и $(1;\ +\infty)$.]

38. $y=4x-3$. [Возрастает на $(-\infty;\ +\infty)$.]

Исследуйте на экстремум следующие функции:

39. $y=x^2-8$. [Минимум при $x=0$.]

40. $y=2x-x^2$. [Максимум при $x=1$.]

41. $y=x^3-9x^2+15x-3$. [Минимум при $x=5$; максимум при $x=1$.]

42. $y=x\ln x$. $\left[\text{Минимум при } x=\dfrac{1}{e}.\right]$

43. $y=\dfrac{x}{x^2+4}$. [Минимум при $x=-2$; максимум при $x=2$.]

44. $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$.
[Минимум при $x=-1$ и $x=3$; максимум при $x=0$.]

Найдите наименьшее и наибольшее значения следующих функций:

45. $y=x^4-8x^2+3$ на отрезке $[-2;\ 2]$. [-13 и 3.]

46. $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3$ на отрезке $[-1;\ 2]$. $\left[-\frac{7}{3}\text{ и } 3.\right]$

47. $y=\frac{1}{x^2-1}$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$. $\left[-\frac{4}{3}\text{ и } -1.\right]$

48. $y=\operatorname{tg}x-x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$. $\left[\frac{\pi-4}{4}\text{ и } \frac{4-\pi}{4}.\right]$

49. Найдите положительное число x, чтобы разность $x-x^2$ была наибольшей. [0, 5.]

50. Найдите число, которое в сумме со своим квадратом дает наименьшее значение. [-0, 5.]

51. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Каковы должны быть размеры этого окна, чтобы при данном его периметре $2p$ оно пропускало наибольшее количество света?

[Радиус полукруга должен быть равен высоте прямоугольника $R=H=\frac{2p}{4+\pi}$.]

52. Нужно изготовить коническую воронку с образующей l. Какова должна быть высота H воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

$\left[H=\frac{l\sqrt{3}}{3}.\right]$

53. Материальная точка совершает прямолинейное движение по закону $s(t)=18t+9t^2-t^3$, где s — путь (в метрах), t — время (в секундах). В какой момент времени t скорость v движения точки будет наибольшей и какова величина этой наибольшей скорости? [$t=3$ с; $v=45$ м/с.]

54. Скорость роста популяции x задана формулой $y=0{,}001x(100-x)$, когда время выражается в днях. При каком размере популяции эта скорость максимальна? [50.]

55. Реакции организма на два лекарства как функции t (время выражается в часах) составляют $r_1(t)=te^{-t}$ и $r_2(t)=t^2e^{-t}$. У какого из лекарств выше максимальная реакция?

[У второго лекарства максимальная реакция выше.]

Найдите точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости следующих кривых:

56. $y=x^5$.

[Точка перегиба (0; 0); выпукла на $(-\infty;\ 0)$ и вогнута на $(0;\ +\infty)$.]

57. $y=\sqrt[3]{x-1}$.

[Точка перегиба (1; 0); выпукла на $(1;\ +\infty)$ и вогнута на $(-\infty;\ 1)$.]

58. $y=-x^3+15x^2-x-250$.

[Точка перегиба (5; 5); выпукла на $(5;\ +\infty)$ и вогнута на $(-\infty;\ 5)$.]

Найдите асимптоты следующих кривых:

59. $y=1-\frac{4}{x^2}$. [$x=0$ и $y=1$.] **60.** $y=\frac{x^2+1}{x}$. [$x=0$ и $y=x$.]

61. $y=\frac{x^2}{x+1}$. [$x=-1$ и $y=x-1$.]

Исследуйте следующие функции и постройте их графики:

62. $y=2x^3-12x^2+18x$.

[Область определения: $-\infty<x<+\infty$; функция не является ни четной, ни нечетной; график проходит через начало координат и, кроме того, пересекает ось абсцисс еще в точке (3; 0); убывает на (1; 3), возрастает на ($-\infty$; 1) и (3; $+\infty$); при $x=1$ максимум, $y_{\max}=8$, при $x=3$ минимум, $y_{\min}=0$; выпукла на ($-\infty$; 2) и вогнута на (2; $+\infty$); $x=2$ — абсцисса точки перегиба графика; асимптот нет.]

63. $y=\frac{x}{x^2+16}$.

[Область определения: $-\infty<x<+\infty$; функция нечетная; график проходит через начало координат; убывает на ($-\infty$; -4) и (4; $+\infty$), возрастает на (-4; 4), при $x=4$ максимум, $y_{\max}=\frac{1}{8}$; при $x=-4$ минимум, $y_{\min}=-\frac{1}{8}$; выпукла на ($-\infty$; $-4\sqrt{3}$) и (0; $4\sqrt{3}$), вогнута на ($4\sqrt{3}$; $+\infty$) и ($-4\sqrt{3}$; 0); $x=-4\sqrt{3}$, $x=0$ и $x=4\sqrt{3}$ — абсциссы точек перегиба графика; $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$).]

64. $y=e^{-\frac{x^2}{4}}$.

[Область определения: $-\infty<x<+\infty$; функция четная, положительна на всей числовой оси, график не пересекает ось абсцисс и пересекает ось ординат в точке (0; 1); убывает на (0; $+\infty$), возрастает на ($-\infty$; 0); при $x=0$ максимум, $y_{\max}=1$; выпукла на ($-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$) и вогнута на ($-\infty$; $-\sqrt{2}$) и ($\sqrt{2}$; $+\infty$); $x=\sqrt{2}$ и $x=-\sqrt{2}$ — абсциссы точек перегиба графика; $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.]

ГЛАВА 4. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 4.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла. В гл. 2 было введено новое действие — дифференцирование: нахождение по заданной функции ее производной. Оказывается, что для дифференцирования существует обратное действие — интегрирование: отыскание функции по заданной ее производной. К этому приводят многочисленные задачи физики, химии и других областей науки и техники.

Ранее (см. § 2.1, п. 1) было установлено, что если известен закон $s=s(t)$ прямолинейного движения материальной точки, выражающий зависимость пути s от времени движения t, то скорость точки выражается производной пути по времени: $v=s'(t)$. Обратная задача: известна скорость прямолинейного движения точки $v=v(t)$ как функция времени. Надо найти закон движения. Ясно, что искомой функцией $s=s(t)$ будет такая, для которой $s'(t)=v(t)$. Аналогично, если известна скорость $v=v(t)$ протекания химической реакции, показывающая количество вещества, реагирующего в единицу времени, то законом реакции будет функция $m=m(t)$ такая, что $m'(t)=v(t)$.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функцией для данной функции $f(x)$ (или, короче, первообразной данной функции) на данном промежутке, если на этом промежутке $F'(x)=f(x)$.

Пример. Функция $F(x)=x^3$ является первообразной для функции $f(x)=3x^2$ на всей числовой оси, так как при любом x $(x^3)'=3x^2$. Отметим при этом, что вместе с функцией $F(x)=x^3$ первообразной для $f(x)=3x^2$ является любая функция $\Phi(x)=x^3+C$, где C — произвольное постоянное число (это следует из того, что производная постоянной равна нулю). Это свойство имеет место и в общем случае.

Теорема 1. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$ в некотором промежутке, то разность между ними в этом промежутке равна постоянному числу.*

Доказательство. Пусть, например, указанный промежуток — интервал $(a;\ b)$. Из определения первообразной имеем $F_1'(x)=f(x)$ и $F_2'(x)=f(x)$ для любого x из $(a;\ b)$. Пусть $\alpha(x)=F_2(x)-F_1(x)$. Тогда для любого x из $(a;\ b)$

$$\alpha'(x)=F_2'(x)-F_1'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

следовательно (см. следствие из § 3.2, п. 3), $\alpha(x)\equiv C$.

Из теоремы 1 следует, что если известна какая-нибудь первообразная $F(x)$ данной функции $f(x)$, то все множество первообразных для $f(x)$ исчерпывается функциями $F(x)+C$.

Подчеркнем важный факт: если производная для функции одна, т. е. операция дифференцирования однозначна, то нахождение первообразной для функции возможно лишь с точностью до некоторого постоянного слагаемого.

Определение 2. Выражение $F(x)+C$, где $F(x)$ — первообразная функция $f(x)$ и C — произвольная постоянная, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$, причем $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования, знак* $\int$ — *знаком интеграла*. Таким образом, по определению, $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, если $F'(x)=f(x)$.

Возникает вопрос: для всякой ли функции $f(x)$ существует первообразная, а значит, и неопределенный интеграл? В связи с этим вопросом приведем без доказательства следующую теорему (см. [7]).

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте* $[a; b]$, *то на этом сегменте у функции $f(x)$ существует первообразная.*

Ниже мы будем говорить о первообразных лишь для непрерывных функций. Поэтому рассматриваемые нами далее в этом параграфе все интегралы существуют.

2. Свойства неопределенного интеграла. Из определения неопределенного интеграла непосредственно вытекают следующие два свойства.

1. $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$ и, значит, $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

2. $\int F'(x)\,dx = F(x)+C$, что может быть переписано так:

$$\int dF(x) = F(x)+C.$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx. \tag{4.1}$$

Действительно, имеем

$$\left(c\int f(x)\,dx\right)' = c\left(\int f(x)\,dx\right)' = c f(x).$$

Совершенно так же доказывается свойство 4.

4. Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \tag{4.2}$$

Примечание 1. Равенства (4.1) и (4.2) следует понимать с точностью до постоянного слагаемого.

П р и м е ч а н и е 2. Свойство 4 распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа функций.

З а д а ч а. Рассмотрим скорость простой реакции первого порядка (подробно о химических реакциях см. в гл. 10 (§ 10.5)), которую можно представить так:

$$\frac{dx}{dt} = -kx,$$

где x — концентрация реагирующего вещества в момент времени t, k — константа (знак «минус» показывает, что реагирующее вещество исчезает, т. е. концентрация его в ходе реакции уменьшается).

Отсюда $\frac{dx}{xdt} = -k$, или, что то же, $\frac{d(\ln x)}{dt} = -k$.

Значит, $\ln x = -\int kdt$, и потому $\ln x = -kt + C$, откуда $x = e^C e^{-kt}$.

Если примем, что при $t=0$ $x=x_0$, то будем иметь $x_0 = e^C$. Тогда

$$x = x_0 e^{-kt}.$$

Это соотношение позволяет найти концентрацию x для любого момента времени.

3. Таблица основных интегралов. Таблица содержит формулы, легко проверяемые непосредственным дифференцированием. В Приложении 1 приведена дополнительная таблица интегралов.

1. $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1).$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
4. $\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C.$
5. $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$
6. $\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + C.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax + C.$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax + C.$
9. $\int \frac{xdx}{x^2+a} = \frac{1}{2}\ln|x^2+a| + C.$
10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C.$
13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

Проверим, например, формулу 2. Если $x>0$, то $|x| = x$ и $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Если $x<0$, то $|x| = -x$ и $(\ln|x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$. Значит, формула 2 справедлива как при $x>0$, так и при $x<0$.

4. Примеры непосредственного интегрирования. Метод непосредственного интегрирования связан с приведением подынтегрального выражения к табличной форме путем преобразований и применения свойств неопределенного интеграла.

Пример 1. $\int(5x^4-3x^2+1)dx=5\int x^4dx-3\int x^2dx+\int dx=x^5-x^3+x+C.$

Пример 2. $\int\frac{x^6-x^5+1}{x^2}dx=\int(x^4-x^3+x^{-2})dx=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{x}+C.$

Пример 3. $\int(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})^2dx=\int(x-2x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}})dx=\frac{x^2}{2}-\frac{12}{11}x^{\frac{11}{6}}+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C=$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{12}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C.$$

§ 4.2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Замена переменной интегрирования. Этот способ часто бывает полезным в тех случаях, когда интеграл $\int f(x)\,dx$ ($f(x)$ — непрерывна) не может быть непосредственно преобразован к виду табличного. Сделаем подстановку $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $f(x)=f[\varphi(t)]$, $dx=\varphi'(t)\,dt$ и

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt. \tag{4.3}$$

Формула (4.3) называется *формулой замены переменной в неопределенном интеграле.*

Пример 1. Интеграл $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ найдем подстановкой $x=t^2$. Тогда $dx=2t\,dt$ и $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2\int e^t dt=2e^t+C=2e^{\sqrt{x}}+C.$

Иногда вместо подстановки $x=\varphi(t)$ лучше выполнить замену переменной вида $t=\psi(x)$.

Пример 2. $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. Полагая $t=e^x$, получаем $dt=e^x\,dx=tdx$, $dx=\frac{dt}{t}$ и $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{dt}{t(t+t^{-1})}=\int\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg}t+C=\operatorname{arctg}e^x+C.$

Во многих случаях нет необходимости записывать, какое выражение принимаем за новую переменную. Вычисления удобно располагать так, как указано в следующих примерах.

Пример 3.

$$\int\sqrt{x+3}\,dx=\int(x+3)^{\frac{1}{2}}\,d(x+3)=\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3}+C.$$

Пример 4. $\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$

Пример 5. $\int\frac{\ln^3x}{x}dx=\int\ln^3x\,d\ln x=\frac{\ln^4x}{4}+C.$

2. Интегрирование по частям. Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Как известно (см. § 2.3, п. 4),

$d(uv) = vdu + udv$, откуда $udv = d(uv) - vdu$. Интегрируя последнее соотношение, получаем

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{4.4}$$

(произвольная постоянная интегрирования C здесь включена в слагаемое $\int vdu$). Это и есть *формула интегрирования по частям.* Применение способа интегрирования по частям целесообразно в том случае, когда интеграл в правой части (4.4) окажется более простым для вычисления, чем исходный интеграл.

Пример 1. $\int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$

Пример 2. $\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

Пример 3. $\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

Иногда полезно повторное интегрирование по частям.

Пример 4.

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = x^2 \sin x - 2\int \underbrace{x}_{u_1} \underbrace{\sin x\,dx}_{dv_1} = x^2 \sin x + 2x \cos x -$$

$$- 2\int \cos x\,dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

§ 4.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Выделение правильной рациональной дроби. Как известно (см. § 1.2, п. 2), дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) называется отношение двух многочленов.

Рациональная дробь называется *правильной (неправильной)*, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше (больше или равна) степени многочлена, стоящего в знаменателе.

Например, дроби

$$\frac{3x+2}{x^2-4x+12},\ \frac{x+2}{x^2-1},\ \frac{x^5}{x^6-1} \text{ — правильные,}$$

а дроби

$$\frac{x^5}{x^2+1},\ \frac{x^3-1}{x+1},\ \frac{x+1}{3x-1} \text{ — неправильные.}$$

Неправильную рациональную дробь всегда можно свести к правильной, разделив числитель на знаменатель «столбиком» и выделив из дроби целую часть, т. е. многочлен.

Пример. $\dfrac{x^4-x^3+1}{x^2+x-2}=(x^2-2x+4)-\dfrac{8x-9}{x^2+x-2}$.

Поэтому будем рассматривать задачу интегрирования правильной рациональной дроби, так как интегрирование многочлена не представляет труда.

Как будет видно далее (см. п. 3), всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы конечного числа так называемых *простейших* дробей следующих четырех типов:

I. $\dfrac{A}{x-a}$. II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k=2, 3, \ldots)$.

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$. IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}$ $(l=2, 3, \ldots)$,

где A, a, p, q, M, N — постоянные действительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т. е. $\dfrac{p^2}{4}-q<0$.

2. Интегрирование простейших рациональных дробей. Интегрирование простейших дробей типов I и II не представляет труда. В самом деле,

$$\int\frac{A\,dx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C,$$

$$\int\frac{A\,dx}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C.$$

Перейдем к интегрированию простейшей дроби типа III. Подстановка $t=\frac{1}{2}(x^2+px+q)'$, т. е. $t=x+\frac{p}{2}$, и обозначение $q-\frac{p^2}{4}=\alpha^2$ дают $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=t^2+\alpha^2$, $Mx+N=Mt+D$, где $D=N-\frac{1}{2}Mp$. Поэтому

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=\int\frac{Mt+D}{t^2+\alpha^2}\,dt=\frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+\alpha^2}+$$
$$+D\int\frac{dt}{t^2+\alpha^2}=\frac{M}{2}\ln(t^2+\alpha^2)+\frac{D}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha}+C,$$

где $t=x+\frac{p}{2}$.

Рассмотрим, наконец, интегрирование рациональных дробей типа IV. С помощью той же подстановки $t=x+\frac{p}{2}$ при $l>1$ и $\frac{p^2}{4}-q<0$ получаем

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}\,dx=\int\frac{Mt+D}{(t^2+\alpha^2)^l}\,dt=M\int\frac{t\,dt}{(t^2+\alpha^2)^l}+D\int\frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^l}=$$
$$=\frac{M}{2}\int(t^2+\alpha^2)^{-l}d(t^2+\alpha^2)+D\int\frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^l}.$$

Интеграл $\int(t^2+\alpha^2)^{-l}\,d(t^2+\alpha^2)$ табличный.

Для интеграла $I_l = \int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^l}$ получим *рекуррентную* формулу, т. е. формулу, сводящую вычисление I_l к вычислению I_{l-1}. С этой целью рассмотрим интеграл

$$I_{l-1} = \int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^{l-1}}$$

и применим к нему формулу интегрирования по частям, положив

$$u = \frac{1}{(t^2+\alpha^2)^{l-1}}, \quad dv = dt,$$

откуда

$$du = -\frac{(l-1)\,2t\,dt}{(t^2+\alpha^2)^l}, \quad v = t.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_{l-1} &= \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^{l-1}} + 2(l-1)\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+\alpha^2)^l} = \\ &= \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^{l-1}} + 2(l-1)\int \frac{(t^2+\alpha^2)-\alpha^2}{(t^2+\alpha^2)^l}\,dt = \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^{l-1}} + \\ &+ 2(l-1)I_{l-1} - 2(l-1)\alpha^2 I_l. \end{aligned}$$

Отсюда

$$2(l-1)\alpha^2 I_l = \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^{l-1}} + (2l-3)I_{l-1},$$

и, следовательно,

$$I_l = \frac{t}{\alpha^2(2l-2)(t^2+\alpha^2)^{l-1}} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{2l-3}{2l-2}I_{l-1}. \tag{4.5}$$

Формула (4.5) и есть рекуррентная формула. Переходя от l к $l-1$, от $l-1$ к $l-2$ и т. д., дойдем до табличного интеграла

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+\alpha^2}.$$

В результате будет известен и I_l.

3. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Пусть дана правильная рациональная дробь

$$\frac{P(x)}{Q(x)}. \tag{4.6}$$

Без ограничения общности можно считать, что коэффициент у старшего члена многочлена $Q(x)$ равен единице, так как в случае, когда он равен какому-то другому числу (отличному от нуля), можно разделить числитель и знаменатель дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на это число, после чего у получившегося в знаменателе многочлена коэффициент у старшего члена окажется равным единице.

Будем предполагать, что коэффициенты входящих в дробь многочленов — действительные числа. Как установлено в § 1.7 (п. 6), для многочлена с действительными коэффициентами имеет место соответствующее разложение на множители. Пусть для определенности знаменатель $Q(x)$ разлагается на множители следующим образом:

$$Q(x) = (x-a)^k (x^2+px+q)^l, \tag{4.7}$$

где $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Имеет место следующая теорема (см., например, [8], т. I).

Теорема. *Для дроби* (4.6), *знаменатель которой имеет вид* (4.7), *справедливо следующее разложение на сумму простейших дробей:*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \\ + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l},\end{aligned} \tag{4.8}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_l, N_l$ — *постоянные действительные числа.*

Из формулы (4.8) видно, что линейному множителю $x-a$ знаменателя $Q(x)$ соответствуют в разложении (4.8) простейшие дроби типов I и II, а квадратичному множителю x^2+px+q — простейшие дроби типов III и IV. При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю (линейному или квадратичному), равно показателю степени, с которым этот множитель входит в разложение знаменателя дроби на множители. Правило разложения правильной рациональной дроби остается справедливым ([5], т. I) и при любом конечном числе линейных и квадратичных множителей, входящих в разложение знаменателя $Q(x)$.

4. Метод неопределенных коэффициентов. Одним из наиболее простых методов определения коэффициентов в разложении правильной дроби на простейшие является метод неопределенных коэффициентов. Поясним применение этого метода на примере.

Пример. Разложить на простейшие дроби правильную дробь

$$\frac{2x+3}{(x+1)(x^2+x+1)}.$$

Убедившись, что квадратный трехчлен (x^2+x+1) имеет комплексные корни, ищем, согласно теореме из п. 3, разложение в виде

$$\frac{2x+3}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}, \tag{4.9}$$

где коэффициенты A, M, N необходимо определить. Для этого приводим к общему знаменателю дроби, стоящие в правой части соотношения (4.9). Приравниваем числители исходной дроби и той, которая будет получена:

$$2x+3 = A(x^2+x+1) + (Mx+N)(x+1). \tag{4.10}$$

Коэффициенты при одинаковых степенях в правой и левой частях тождества (4.10) должны быть равны. Записывая это условие последовательно для коэффициентов при x^2, x и x^0, получаем

$$\begin{cases} A+M=0, \\ A+M+N=2, \\ A+N=3. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A=1$, $M=-1$, $N=2$. Наконец, подставляя в равенство (4.9) найденные значения A, M, N, окончательно получаем

$$\frac{2x+3}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2+x+1}.$$

5. Интегрирование правильных рациональных дробей. Для вычисления интеграла от правильной рациональной дроби надо эту дробь разложить на простейшие, согласно теореме из п. 3, и найти интеграл от полученной суммы простейших дробей. Следовательно, интеграл от любой правильной рациональной дроби есть функция элементарная, потому что представляет сумму элементарных функций, которые получаются в результате интегрирования простейших дробей.

Пример. Найти

$$\int\frac{5x^2-14x+11}{x^3-3x^2+3x-1}dx.$$

Так как $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$, то, разложив дробь $\dfrac{5x^2-14x+11}{(x-1)^3}$ на простейшие и проинтегрировав их, получим

$$\int\frac{5x^2-14x+11}{x^3-3x^2+3x-1}dx=\int\left(\frac{5}{x-1}-\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}\right)dx=$$

$$=5\ln|x-1|+\frac{4}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C.$$

§ 4.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. Интегралы вида $\int\sin ax\sin bx\,dx$, $\int\cos ax\cos bx\,dx$, $\int\sin ax\cos bx\,dx$. Эти интегралы с помощью известных тригонометрических формул приводятся к интегралам

$$\int\cos\gamma x\,dx=\frac{1}{\gamma}\sin\gamma x+C,$$

$$\int\sin\gamma x\,dx=-\frac{1}{\gamma}\cos\gamma x+C.$$

Пример. Найти $\int\cos 8x\cos 6x\,dx$.

Так как $\cos 8x\cos 6x=\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 14x)$, то

$$\int\cos 8x\cos 6x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x+\cos 14x)dx=\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 14x}{28}+C.$$

2. Интегралы вида $I_{n,m}=\int\sin^n x\cos^m x\,dx$, где n и m — натуральные числа. Если n и m четные, то интегралы $I_{n,m}$ находятся с помощью тригонометрических формул

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\quad \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Если хотя бы одно из чисел n и m нечетное, то от нечетной степени отделяется множитель первой степени и вводится новая переменная.

Пример. Найдите $\int \sin^8 x \cos^5 x\,dx$. Имеем $\int \sin^8 x \cos^5 x\,dx =$
$= \int \sin^8 x(1-\sin^2 x)^2 d \sin x = \dfrac{\sin^9 x}{9} - \dfrac{2\sin^{11} x}{11} + \dfrac{\sin^{13} x}{13} + C.$

3. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где $R(u, v)$ — рациональная функция двух аргументов u и v. Заметим, что рациональная функция двух аргументов — это отношение двух многочленов двух переменных, а многочленом двух переменных u и v называется сумма произведений вида $a_{mn}u^m v^n$ (m, n — целые неотрицательные числа, a_{mn} — постоянные числа). Покажем, что интеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ может быть сведен к интегралу от рациональной функции аргумента t подстановкой $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Действительно,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Из подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ следует, что $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Таким образом,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция t.

Пример. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\,\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

§ 4.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

1. Интегралы с линейной иррациональностью. Если подынтегральное выражение содержит лишь линейную иррациональность $\sqrt[n]{ax+b}$ $(a \neq 0)$, то полезна подстановка

$$t = \sqrt[n]{ax+b}.$$

Пример. Найдите $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$.

Полагаем $t = \sqrt[3]{x+1}$, отсюда

$$x = t^3 - 1,\quad dx = 3t^2\,dt.$$

Имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \int \frac{3t^2dt}{t} = 3\int t\,dt = \frac{3}{2}t^2 + C = \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + C.$$

2. Интегралы с квадратичной иррациональностью.

1. Интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} \tag{4.11}$$

с помощью дополнения квадратного трехчлена Ax^2+Bx+C до полного квадрата приводится в зависимости от знака A к одному из двух табличных интегралов 11, 12 (см. таблицу основных интегралов).

2. Интеграл

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}\,dx$$

приводится к интегралу (1) следующим путем:

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} = \int \frac{\left(Mx+\frac{MB}{2A}\right) - \frac{MB}{2A} + N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2A}\int \frac{(2Ax+B)dx}{\sqrt{A^2+Bx+C}} + \left(N - \frac{MB}{2A}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} =$$

$$= \frac{M}{A}\sqrt{Ax^2+Bx+C} + \left(N - \frac{MB}{2A}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}.$$

3. Найдем интегралы

$$\int \sqrt{x^2+b}\,dx, \tag{4.12}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx. \tag{4.13}$$

Имеем

$$\int \sqrt{x^2+b}\,dx = \int \frac{x^2+b}{\sqrt{x^2+b}}\,dx = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+b}} + b\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}. \tag{4.14}$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+b}}$ применим метод интегрирования по частям, полагая $u=x$, $dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+b}}$, тогда $du=dx$, $v=\sqrt{x^2+b}$. Следовательно,

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+b}} = x\sqrt{x^2+b} - \int \sqrt{x^2+b}\,dx.$$

Подставляя это выражение в равенство (4.14), получаем

$$\int \sqrt{x^2+b}\,dx = x\sqrt{x^2+b} - \int \sqrt{x^2+b}\,dx + b\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}},$$

или

$$2\int \sqrt{x^2+b}\,dx = x\sqrt{x^2+b} + b\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}},$$

откуда

$$\int \sqrt{x^2+b}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+b} + b\ln\left|x+\sqrt{x^2+b}\right|\right) + C.$$

Аналогично можно показать, что

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C.$$

4. Интеграл $\int \sqrt{Ax^2+Bx+C}\,dx$ в зависимости от знака A приводится к одному из интегралов вида (4.12), (4.13).

Примечание. Заканчивая методы интегрирования, заметим, что хотя для всякой непрерывной функции существует первообразная (см. § 4.1, п. 1, теорема 2), но эта первообразная не для всякой непрерывной функции является элементарной функцией. Например, для функции e^{-x^2} первообразная не выражается в элементарных функциях. В этом случае говорят, что интеграл $\int e^{-x^2}dx$ *не берется в элементарных функциях.*

Упражнения

Непосредственным интегрированием или методом замены переменной вычислите следующие интегралы:

1. $\int x^6\,dx.$ $\left[\dfrac{x^7}{7}+C.\right]$

2. $\int \sqrt[3]{x\,dx}.$ $\left[\dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C.\right]$

3. $\int \dfrac{dx}{x^5}.$ $\left[-\dfrac{1}{4x^4}+C.\right]$

4. $\int (x-x^3)\,dx.$ $\left[\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{4}+C.\right]$

5. $\int (x^5-4x^3+x-1)\,dx.$ $\left[\dfrac{x^6}{6}-x^4+\dfrac{x^2}{2}-x+C.\right]$

6. $\int (2x-3\sqrt{x})\,dx.$ $[x^2-2x\sqrt{x}+C.]$

7. $\int \left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{x^3}\right)dx.$ $\left[\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{3}{2x^2}+C.\right]$

8. $\int (2+\sqrt{x})^2\,dx.$ $\left[4x+\dfrac{8}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{x^2}{2}+C.\right]$

9. $\int \frac{(x\sqrt{x}-3)^2}{x^3}\,dx.$ $\left[x+\frac{12}{\sqrt{x}}-\frac{9}{2x^2}+C.\right]$

10. $\int \frac{(2+x)dx}{x}.$ $[2\ln|x|+x+C.]$

11. $\int x^2(1+2x)\,dx.$ $\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{2}+C.\right]$

12. $\int \frac{2x^2+x-1}{x^3}\,dx.$ $\left[2\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C.\right]$

13. $\int e^{-4x}\,dx.$ $\left[-\frac{1}{4}e^{-4x}+C.\right]$

14. $\int (e^x-e^{-x})^2\,dx.$ $\left[\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})-2x+C.\right]$

15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}.$ $\left[\sqrt{x^2+1}+C.\right]$

16. $\int \frac{dx}{x^2+16}.$ $\left[\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+C.\right]$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}.$ $\left[\arcsin\frac{x}{5}+C.\right]$

18. $\int \sin 7x\,dx.$ $\left[-\frac{1}{7}\cos 7x+C.\right]$

19. $\int 3^x\,dx.$ $\left[\frac{3^x}{\ln 3}+C.\right]$

20. $\int (e^x+e^{-2x})\,dx.$ $\left[e^x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C.\right]$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}.$ $\left[\ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right|+C.\right]$

22. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}.$ $\left[\frac{1}{5}\operatorname{tg}5x+C.\right]$

23. $\int \cos 3x\,dx.$ $\left[\frac{1}{3}\sin 3x+C.\right]$

24. $\int \frac{dx}{x^2-16}.$ $\left[\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|+C.\right]$

25. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}.$ $\left[-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}3x+C.\right]$

26. $\int (2+\cos x)\,dx.$ $[2x+\sin x+C.]$

27. $\int (3 + x - \sin x)\, dx.$ $\left[3x + \dfrac{x^2}{2} + \cos x + C.\right]$

28. $\int e^{2x+1}\, dx.$ $\left[\dfrac{1}{2} e^{2x+1} + C.\right]$

29. $\int 3^x \cdot 2^{2x}\, dx.$ $\left[\dfrac{12^x}{\ln 12} + C.\right]$

30. $\int (x + 5)^3\, dx.$ $\left[\dfrac{1}{4}(x + 5)^4 + C.\right]$

31. $\int \sqrt{1 + 2x}\, dx.$ $\left[\dfrac{1}{3}(1 + 2x)\sqrt{1 + 2x} + C.\right]$

32. $\int x(x^2 - 1)^3\, dx.$ $\left[\dfrac{1}{8}(x^2 - 1)^4 + C.\right]$

33. $\int (x^2 + 5)^7\, 2x dx.$ $\left[\dfrac{1}{8}(x^2 + 5)^8 + C.\right]$

34. $\int x\sqrt{1 + x^2}\, dx.$ $\left[\dfrac{1}{3}(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2} + C.\right]$

35. $\int \dfrac{x\, dx}{x^2 + 1}.$ $\left[\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C.\right]$

36. $\int \dfrac{dx}{(x - 1)^4}.$ $\left[-\dfrac{1}{3(x - 1)^3} + C.\right]$

37. $\int e^{x + x^2}(1 + 2x)\, dx.$ $\left[e^{x+x^2} + C.\right]$

38. $\int (\sin x^2)x\, dx.$ $\left[-\dfrac{1}{2}\cos x^2 + C.\right]$

39. $\int \cos^5 4x \sin 4x\, dx.$ $\left[-\dfrac{1}{24}\cos^6 4x + C.\right]$

При нахождении интегралов (№ 40—42) следует предварительно в подынтегральной функции выделить целую часть.

40. $\int \dfrac{x^3\, dx}{x + 1}.$ $\left[x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ln|x + 1| + C.\right]$

41. $\int \dfrac{2x - 1}{2x + 3}\, dx.$ $[x - 2\ln|2x + 3| + C.]$

42. $\int \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}\, dx.$ $\left[\dfrac{x^2}{2} + x + 2\ln|x - 1| + C.\right]$

43. $\int \dfrac{e^{-x}\, dx}{1 + e^{-x}}.$ $[-\ln(1 + e^{-x}) + C.]$

44. $\int e^{x^3+x^2-x+1}(3x^2+2x-1)dx.$ $\quad [e^{x^3+x^2-x+1}+C.]$

45. $\int e^{\operatorname{tg}3x}\sec^2 3x\,dx.$ $\quad \left[\frac{1}{3}e^{\operatorname{tg}3x}+C.\right]$

46. $\int \frac{dx}{4x^2+9}.$ $\quad \left[\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3}+C.\right]$

47. $\int \frac{dx}{9x^2-4}.$ $\quad \left[\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right|+C.\right]$

48. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}.$ $\quad \left[\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+C.\right]$

49. $\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$ $\quad \left[\frac{5}{2}\arcsin x^2+C.\right]$

50. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$ $\quad [\arcsin(\ln x)+C.]$

51. $\int \frac{(4-\ln x)^2}{x}dx.$ $\quad \left[-\frac{1}{3}(4-\ln x)^3+C.\right]$

52. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+4}}.$ $\quad [2\sqrt{e^x+4}+C.]$

53. $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x^2}.$ $\quad [e^{-\frac{1}{x}}+C.]$

54. $\int 2^{x^3}x^2\,dx.$ $\quad \left[\frac{2^{x^3}}{3\ln 2}+C.\right]$

55. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}.$ $\quad \left[-\ln\left|\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right|+C.\right]$

56. $\int \frac{x^2\,dx}{\cos^2 x^3}.$ $\quad \left[\frac{1}{3}\operatorname{tg}x^3+C.\right]$

57. $\int \frac{dx}{x^2-2x+1}.$ $\quad \left[-\frac{1}{x-1}+C.\right]$

58. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}.$ $\quad \left[\arcsin\frac{2x-1}{3}+C.\right]$

59. $\int \frac{dx}{1+x+x^2}.$ $\quad \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.\right]$

60. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}.$ $\quad [\arcsin(2x-3)+C.]$

61. $\int \frac{dx}{4+2x+x^2}.$ $\quad \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.\right]$

62. $\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}$. $[\operatorname{arctg}(2x-1) + C.]$

63. $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 1}$. $\left[\frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right| + C.\right]$

64. $\int (\cos 3x - \sin 2x)dx$. $\left[\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}\cos 2x + C.\right]$

65. $\int (\sin 3x + \cos 5x)dx$. $\left[-\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + C.\right]$

66. $\int \cos(x+3)dx$. $[\sin(x+3) + C.]$

67. $\int \sin^3 x \cos x\, dx$. $\left[\frac{\sin^4 x}{4} + C.\right]$

68. $\int \cos^5 x \sin x\, dx$. $\left[-\frac{\cos^6 x}{6} + C.\right]$

При нахождении интегралов от тригонометрических функций полезно использование тригонометрических формул.

69. $\int (1 - \sin^2 x)\, dx$. $\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.\right]$

70. $\int (1 - \cos^2 x)\, dx$. $\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.\right]$

71. $\int \sin 2x \cos 2x\, dx$. $\left[-\frac{1}{8}\cos 4x + C.\right]$

72. $\int \cos\frac{3}{4}x \sin\frac{1}{4}x\, dx$. $\left[-\frac{1}{2}\cos x + \cos\frac{1}{2}x + C.\right]$

73. $\int \cos 3x \cos\frac{4}{3}x\, dx$. $\left[\frac{3}{26}\sin\frac{13}{3}x + \frac{3}{10}\sin\frac{5}{3}x + C.\right]$

74. $\int \sin^5 x\, dx$. $\left[-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + C.\right]$

75. $\int \cos^5 x\, dx$. $\left[\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + C.\right]$

76. $\int \sin x \sin 5x\, dx$. $\left[\frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x + C.\right]$

77. $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$. $\left[\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C.\right]$

78. $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$. $\left[\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.\right]$

79. $\int \frac{dx}{3x^2+7}$. $\left[\frac{1}{\sqrt{21}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + C.\right]$

80. $\int \frac{dx}{5x^2-2}$. $\left[\frac{1}{2\sqrt{10}} \ln\left|\frac{x\sqrt{5}-\sqrt{2}}{x\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right| + C.\right]$

81. $\int \sqrt[3]{2x-3}\, dx$. $\left[\frac{3}{8}(2x-3)\sqrt[3]{2x-3} + C.\right]$

82. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$. $\left[\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right| + C.\right]$

83. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$. $\left[\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right| + C.\right]$

84. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$. $\left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.\right]$

При нахождении следующих интегралов используйте метод интегрирования по частям:

85. $\int (2x-5)e^{-3x}\, dx$. $\left[\frac{13-6x}{9}e^{-3x} + C.\right]$

86. $\int x\cos 2x\, dx$. $\left[\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.\right]$

87. $\int xe^{-2x}\, dx$. $\left[-\frac{2x+1}{4}e^{-2x} + C.\right]$

88. $\int (2x-3)\sin\frac{x}{2}\, dx$. $\left[(6-4x)\cos\frac{x}{2} + 8\sin\frac{x}{2} + C.\right]$

89. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$. $[2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C.]$

90. $\int \arccos 2x\, dx$. $\left[x\arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C.\right]$

91. $\int \operatorname{arcctg} 3x\, dx$. $\left[x\operatorname{arcctg} 3x + \frac{1}{6}\ln(1+9x^2) + C.\right]$

92. $\int \sqrt{x}\ln x\, dx$. $\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C.\right]$

93. $\int (x^2+1)e^x\, dx$. $[e^x(x^2-2x+3) + C.]$

94. $\int \ln^2 x\, dx$. $[x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C.]$

95. $\int \frac{\ln x\, dx}{(x+1)^2}$. $\left[\frac{x}{x+1}\ln x - \ln(x+1) + C.\right]$

Вычислите интегралы от дробно-рациональных функций:

96. $\int \frac{x}{x+2}\,dx.$ $\left[x - 2\ln|x+2| + C.\right]$

97. $\int \frac{dx}{(x+1)^4}.$ $\left[-\frac{1}{3(x+1)^3} + C.\right]$

98. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$ $\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.\right]$

99. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}.$ $\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C.\right]$

100. $\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+5}.$ $\left[\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.\right]$

101. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}.$ $\left[\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C.\right]$

Вычислите интегралы от следующих тригонометрических функций:

102. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}.$ $\left[\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C.\right]$

103. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}.$ $\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.\right]$

104. $\int \frac{dx}{2+3\cos x}.$ $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{5}}\right| + C.\right]$

105. $\int \frac{(1+\sin x)dx}{(1+\cos x)\sin x}.$ $\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.\right]$

ГЛАВА 5. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 5.1. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

Задача о пройденном пути. Требуется найти путь, пройденный движущейся по прямой точкой за отрезок времени $[t_0, T]$, если известен закон изменения мгновенной скорости $v=v(t)$. Разобьем отрезок времени $[t_0, T]$ моментами времени (точками) $t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=T$ на n частичных отрезков времени и положим $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$, $k=1, 2, \ldots, n$. Наибольшую из этих разностей обозначим через $\lambda=\max\Delta t_k$. Если эти отрезки достаточно малы, то без большой ошибки на каждом из них движение можно считать равномерным, что дает приближенное выражение для пути

$$s\approx v(\tau_1)\Delta t_1+v(\tau_2)\Delta t_2+\ldots+v(\tau_n)\Delta t_n,$$

где τ_k — одна из точек сегмента $[t_{k-1}, t_k]$. Эта сумма (ее кратко будем обозначать через $\sum\limits_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k$) будет тем точнее выражать искомый путь s, чем меньше будет каждый из временных отрезков $[t_{k-1}, t_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$. Поэтому за путь s, пройденный точкой за время $T-t_0$ со скоростью $v=v(t)$, естественно принять

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k. \tag{5.1}$$

Задача о количестве вещества, вступившего в реакцию. Пусть скорость химического превращения некоторого вещества, участвующего в химической реакции, есть функция времени $v=v(t)$. Найти количество m вступившего в реакцию вещества за промежуток времени от t_0 до T. Проделаем последовательно те же операции, что и при решении предыдущей задачи. В результате получим

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k. \tag{5.2}$$

Работа переменной силы. Пусть материальная точка под действием постоянной силы F перемещается по направлению этой силы. Если пройденный путь равен s, то, как известно из курса физики, работа P этой силы F вычисляется по формуле

$$P=Fs.$$

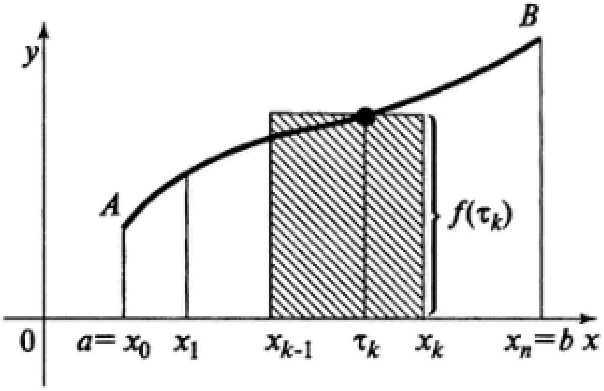


Рис. 34

Пусть теперь материальная точка движется по оси Ox от точки $A(a)$ до точки $B(b)$ $(b>a)$ под действием переменной силы, направленной по Ox и являющейся функцией от x:

$$F=f(x).$$

В этом случае, как и при решении двух предыдущих задач, найдем, что

$$P=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k. \tag{5.3}$$

Задача о площади криволинейной трапеции. Пусть требуется найти площадь плоской фигуры $aABb$ (рис. 34), ограниченной графиком функции $y=f(x)$, непрерывной и неотрицательной на сегменте $[a;\ b]$, и отрезками прямых $y=0$, $x=a$, $x=b$. Эта фигура называется криволинейной трапецией. Разобьем отрезок $[a;\ b]$ точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ на n частичных отрезков и положим $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Наибольшую из этих разностей обозначим через $\lambda=\max\Delta x_k$. На каждом частичном сегменте $[x_{k-1},\ x_k]$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ выберем произвольную точку τ_k, $x_{k-1}\le\tau_k\le x_k$. Произведение $f(\tau_k)\Delta x_k$ даст площадь прямоугольника, имеющего основание Δx_k и высоту $f(\tau_k)$, а сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k$ — приближенно площадь S криволинейной трапеции $aABb$. Отсюда, как и в предыдущих задачах,

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k. \tag{5.4}$$

2. Определение определенного интеграла. Из решения приведенных трех задач видно, что, хотя они имеют различный смысл, математический аппарат для их решения один и тот же. Во всех этих задачах получаем выражение одного и того же вида:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k. \tag{5.5}$$

Если существует предел (5.5), не зависящий от способа разбиения отрезка $[a;\ b]$ и выбора точек τ_k, то этот предел будем называть *определенным* интегралом функции $f(x)$ на сегменте $[a;\ b]$ и обозначать символом

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k.$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой* на отрезке $[a; b]$. При этом $f(x)$ называется *подынтегральной* функцией, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением,* числа a и b — *пределами интегрирования (a — нижний предел, b — верхний предел),* сумма $\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k$ — *интегральной суммой.*

Справедлива следующая теорема (она доказывается в подробных курсах математического анализа — см., например, [7]).

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем.*

В условиях рассмотренных выше задач, приведших к понятию определенного интеграла, выражения вида (1) — (4) (пределы сумм) являются определенными интегралами. Рассмотрим это подробнее.

1. Путь s, пройденный точкой за время $T-t_0$ со скоростью $v=v(t)$ ($v(t)$ непрерывна на $[t_0, T]$), есть $\int_{t_0}^{T} v(t)dt$.

2. Количество вступившего в химическую реакцию вещества за промежуток времени от t_0 до T, скорость химического превращения которого $v=v(t)$ ($v(t)$ непрерывна на $[t_0, T]$), есть $\int_{t_0}^{T} v(t)dt$.

Аналогично, если скорость роста популяции $v=v(t)$ ($v(t)$ непрерывна на $[t_0, T]$), то прирост численности популяции за промежуток времени от t_0 до T есть

$$\int_{t_0}^{T} v(t)dt.$$

3. Если переменная сила $F=f(x)$ действует в направлении оси Ox ($f(x)$ непрерывна на $[a; b]$), то работа этой силы на отрезке $[a; b]$ равна

$$\int_a^b f(x)dx.$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука

$$F=kx,$$

где F — сила (Н); k — коэффициент пропорциональности; x — величина растяжения или сжатия (м), вызванного силой F.

4. Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на сегменте $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$, снизу — осью Ox, с боков — прямыми $x=a$ и $x=b$.

§ 5.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Свойства определенного интеграла. Ниже рассматриваем функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке $[a;\ b]$. По определению полагают, что определенный интеграл от функции с равными верхним и нижним пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

1. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Действительно, по определению определенного интеграла как предела интегральной суммы имеем

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} cf(\tau_k)\Delta x_k = \lim_{\lambda\to 0} c\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k =$$

$$= c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k = c\int_a^b f(x)dx.$$

Аналогично устанавливается свойство 2.

2. *Определенный интеграл от суммы двух функций равен сумме определенных интегралов от этих функций:*

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Примечание. Свойство 2 распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа функций.

3. *При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Действительно, здесь соответствующие интегральные суммы различаются по знаку, ибо в одной из них все $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ положительны, в другой — аналогичные разности все отрицательны.

4. *Интеграл по сегменту равен сумме интегралов по его частям:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

где $a < c < b$.

Это свойство вытекает из определения определенного интеграла.

2. Формула Ньютона — Лейбница *.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$ и $F(x)$ — первообразная функция $f(x)$ на этом отрезке, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{5.6}$$

Формула (5.6) называется *формулой Ньютона — Лейбница*. Она дает удобное правило вычисления определенного интеграла. Кроме того, она устанавливает связь между определенным интегралом и неопределенным интегралом.

Доказательство. Разобьем сегмент $[a;\ b]$ на n частичных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Согласно формуле Лагранжа и формуле $F'(x) = f(x)$, имеем

$$F(x_1) - F(a) = F'(c_1)(x_1 - a) = f(c_1)\,\Delta x_1,\ a < c_1 < x_1,$$

$$F(x_2) - F(x_1) = F'(c_2)(x_2 - x_1) = f(c_2)\,\Delta x_2,\ x_1 < c_2 < x_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F(b) - F(x_{n-1}) = F'(c_n)(b - x_{n-1}) = f(c_n)\,\Delta x_n,\ x_{n-1} < c_n < b.$$

Суммируя эти равенства, получаем

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k. \tag{5.7}$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$, то

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

Поэтому, переходя в формуле (5.7) к пределу при $\lambda \to 0$, получаем искомую формулу (5.6).

Примечание. Для краткости записи употребляются обозначения $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ или $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. Поэтому формула Ньютона — Лейбница принимает вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b \ \left(\text{или } [F(x)]_a^b\right).$$

Заметим, что в формуле (5.6) можно взять любую из первообразных для $f(x)$, так как $[F(x) + C]_a^b = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$.

Пример 1. $\int_0^1 2x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1.$

Пример 2. $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

---

* Исаак Ньютон (1643—1727) — английский математик и физик. Ньютон и Лейбниц — создатели дифференциального и интегрального исчислений.

З а д а ч а 1. Скорость движения тела задана уравнением $v = 12t - 3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом от начала его движения до остановки.

Р е ш е н и е. Скорость тела равна нулю в момент начала его движения и остановки. Найдем момент остановки тела, для этого приравняем скорость к нулю и решим уравнение относительно t:

$$12t - 3t^2 = 0, \quad t(4 - t) = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 4.$$

Теперь искомый путь будет

$$S = \int_0^4 (12t - 3t^2)dt = (6t^2 - t^3)\Big|_0^4 = 32 \ \text{(м)}.$$

З а д а ч а 2. Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

Р е ш е н и е. Из условия следует, что $10 = k \cdot 0{,}01$, откуда $k = 1000$ и, следовательно, $F = 1000x$, т. е. $f(x) = 1000x$. Поэтому искомая работа

$$P = \int_0^{0{,}04} 1000x\,dx = 500x^2\Big|_0^{0{,}04} = 0{,}8 \ \text{(Дж)}.$$

3. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^x f(t)dt,$$

где x — любая точка из $[a; b]$.

Если $F(x)$ — первообразная функция $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$, то, согласно формуле Ньютона — Лейбница, имеем

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Отсюда

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = f(x).$$

Таким образом, *производная определенного интеграла с переменным верхним пределом по этому пределу равна значению подынтегральной функции для этого предела.*

4. Теорема о среднем.

Т е о р е м а. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то в интервале $(a; b)$ найдется такая точка c, что*

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)\,f(c). \tag{5.8}$$

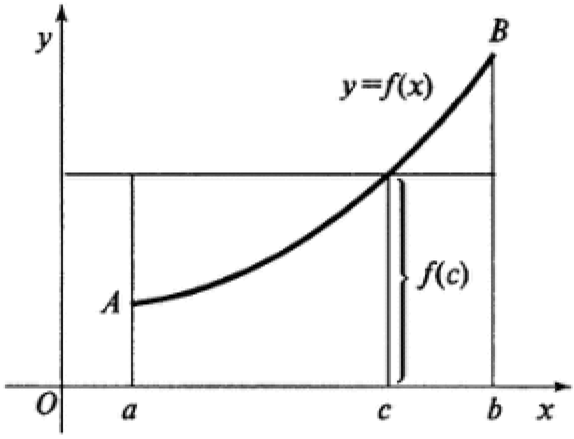


Рис. 35

Доказательство. По формуле Ньютона — Лейбница имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$. Применяя к разности $F(b) - F(a)$ теорему Лагранжа (см. § 2.6), получаем

$$F(b) - F(a) = (b - a)\,F'(c) = (b - a)\,f(c),$$

где $a < c < b$, что и приводит к искомой формуле (5.8).

Формула (5.8) при $f(x) \geq 0$ имеет простое геометрическое толкование. Площадь криволинейной трапеции $ABba$ равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной $f(c)$ (рис. 35).

5. Замена переменной в определенном интеграле. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$, функция $x = \varphi(t)$ имеет на сегменте $[\alpha;\ \beta]$ непрерывную производную, при этом $a \leq \varphi(t) \leq b$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Пусть $F(x)$ — одна из первообразных функций $f(x)$. Тогда $F'(x) = f(x)$ и в силу формулы производной сложной функции (см. § 2.2, п. 1)

$$[F(\varphi(t))]' = F'_x(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Теперь воспользуемся дважды формулой Ньютона — Лейбница:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Тем самым доказана формула замены переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Пример. Подстановка $x = e^t$ дает

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = [\operatorname{arctg} t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

6. Интегрирование по частям. Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые на сегменте $[a;\ b]$ функции. Пользуясь формулой Ньютона — Лейбница, имеем

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b (uv)'dx = \int_a^b d(uv) = \int_a^b [v\,du + u\,dv] = \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv,$$

откуда

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

Пример. $\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = (x\sin x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\,dx = \cos x\Big|_0^{\pi} = -2.$

§ 5.3. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть речь идет о вычислении интеграла

$$\int_a^b f(x)dx\,, \tag{5.9}$$

где $f(x)$ — функция, непрерывная на сегменте $[a;\ b]$. Формула Ньютона — Лейбница не всегда позволяет вычислить интеграл (5.9), так как далеко не всегда мы знаем первообразную для подынтегральной функции. Здесь на помощь приходит приближенное вычисление определенных интегралов. Кстати, на практике часто и не требуется знать точное значение данного интеграла. Рассмотрим два способа приближенного вычисления определенных интегралов: метод прямоугольников и метод трапеции.

Если $f(x) \geq 0$ на сегменте $[a;\ b]$, то, как известно (см. § 5.1.), интеграл (5.9) представляет собой площадь криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу отрезком $[a;\ b]$ оси Ox, с боков отрезками прямых $x = a$, $x = b$. Составим интегральную сумму, соответствующую делению сегмента $[a;\ b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$ и выбору точек $\tau_k = x_{k-1}$ ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$): $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k$. Но $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$. Значит,

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}).$$

Сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k$ есть площадь ступенчатой фигуры, изображенной на рис. 36. Поэтому площадь указанной криволинейной

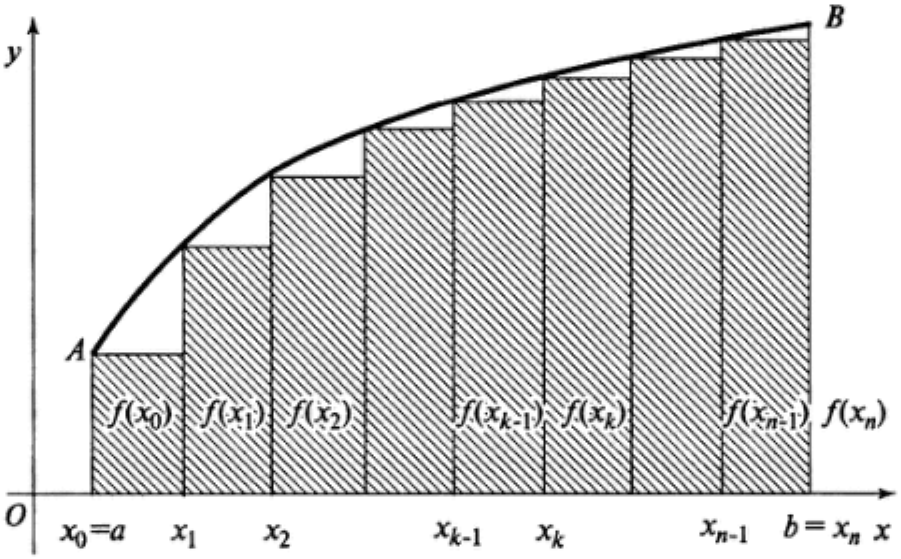


Рис. 36

трапеции приближенно равна площади этой ступенчатой фигуры, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}). \tag{5.10}$$

Если $\tau_k = x_k$ ($k = 1, 2, ..., n$), то аналогично получим приближенную формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k). \tag{5.11}$$

Формулы (5.10) и (5.11) называют *формулами прямоугольников.*

Если функция $f(x)$ возрастает на $[a; b]$, то формула (5.10) дает значение интеграла (5.9) по недостатку, а формула (5.11) — по избытку. Поэтому для повышения точности естественно взять среднее арифметическое этих формул:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right). \tag{5.12}$$

Эту формулу называют *формулой трапеций,* так как ее геометрический смысл связан с заменой площади каждой прямоугольной полоски, на которые разбивается криволинейная трапеция, на площадь прямолинейной трапеции.

Пример. Вычислим значение интеграла

$$\int_0^2 e^{-x^2}dx: \tag{5.13}$$

а) по формулам прямоугольников (5.10) и (5.11) при $n = 10$ и $n = 20$;

б) по формуле трапеций при $n = 10$ и $n = 20$.

При рассмотрении этого примера будем использовать, например, язык программирования FORTRAN.

Вычислим сначала приближенное значение интеграла (5.13) по формуле прямоугольников (5.10) при $n=10$. В этом случае $x_0=0$, $x_1=0{,}2$, $x_2=0{,}4$, $x_3=0{,}6$, $x_4=0{,}8$, $x_5=1{,}0$, $x_6=1{,}2$, $x_7=1{,}4$, $x_8=1{,}6$, $x_9=1{,}8$, и потому

$$\int_0^2 e^{-x^2}dx \approx \frac{2-0}{10}\left(e^{-0^2}+e^{-0{,}2^2}+\ldots+e^{-1{,}8^2}\right).$$

Программа вычисления интеграла имеет вид

```
SUM = 0
DO I = 0,9
   X = I * 0.2
   Fi = EXP (-X**2)
   SUM = SUM + Fi
END DO
EINT = SUM * (2 - 0)/10
WRITE (*,*) `Ответ: `, EINT
STOP
END
```

Ответ: 0,98.

Вычисление по формуле (5.11) при $n=10$ производится по аналогичной программе с той лишь разницей, что начальным значением аргумента является 0,2, а конечным значением — число 2. Получаем ответ: 0,78. Среднее арифметическое этих ответов 0,88 дает приближенное значение интеграла по формуле трапеций.

Аналогично производятся подсчеты при $n=20$. Ответ по формуле трапеций: 0,882.

Заметим, что все три формулы (5.10), (5.11), (5.12) приближают интеграл (5.9) тем лучше, чем больше n.

Наконец, отметим, что каждый из изложенных методов содержит четкий алгоритм их нахождения. Это позволяет широко применять эти методы для вычислений на ЭВМ.

§ 5.4. ВИДЫ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ИХ СХОДИМОСТЬ

При введении понятия определенного интеграла мы исходили из условий ограниченности подынтегральной функции и конечности пределов интегрирования. Такой интеграл называется *собственным* (слово «собственный» обычно опускается). Если хотя бы одно из этих двух условий не выполнено, то интеграл называется *несобственным*.

1. Интегралы с бесконечными пределами. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a \le x < +\infty$, т. е. для $x \ge a$. Тогда по определению полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (5.14)$$

Если последний предел существует, то говорят, что интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (5.15)$$

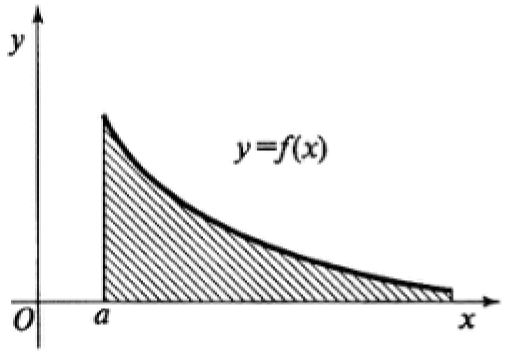


Рис. 37

сходится, а если этот предел не существует, то интеграл (5.15) называют *расходящимся*. Такому интегралу не приписывают никакого значения.

Геометрически для неотрицательной при $x \geq a$ функции $f(x)$ несобственный интеграл (5.15) по аналогии с собственным интегралом (см. § 5.1, п. 2) представляет собой площадь фигуры, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева отрезком прямой $x = a$, снизу осью Ox (рис. 37).

Пример 1. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_0^b e^{-x}dx = \lim\limits_{b \to +\infty} (1 - e^{-b}) = 1.$

Заданный несобственный интеграл сходится.

Пример 2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b \to +\infty} \ln b = +\infty.$

Следовательно, данный интеграл расходится.

Пример 3. $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\, dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_0^b \cos x\, dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \sin b.$

Последний предел не существует, т. е. несобственный интеграл расходится.

Пример 4. Установить, при каких значениях α сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Случай $\alpha = 1$ рассмотрен в примере 2. При $\alpha \neq 1$ имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{при } \alpha < 1, \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{при } \alpha > 1. \end{cases}$$

Значит, данный интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

На несобственные интегралы вида (5.15) непосредственно распространяются многие свойства собственных интегралов.

Пусть $F(x)$ — первообразная функция для подынтегральной функции $f(x)$ сходящегося интеграла (5.15). На основании формулы (5.14) и формулы Ньютона — Лейбница имеем

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} (F(b) - F(a)).$$

Если ввести условное обозначение

$$F(+\infty) = \lim_{b \to +\infty} F(b),$$

то получим для сходящегося несобственного интеграла (5.15) обобщенную формулу Ньютона — Лейбница

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a),$$

которую записывают также в виде

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} \quad \text{или} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = [F(x)]_a^{+\infty}.$$

Заметим еще, что для вычисления сходящихся интегралов вида (5.15) сохраняются методы подстановки и интегрирования по частям.

Самым простым признаком сходимости несобственных интегралов вида (5.15) является признак сравнения.

Рассмотрим его для случая неотрицательной подынтегральной функции.

Теорема сравнения. *Если в промежутке* $[a, +\infty)$ *функции* $f(x)$, $g(x)$ *непрерывны и удовлетворяют неравенствам* $0 \le g(x) \le f(x)$, *то из сходимости интеграла*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{5.16}$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx. \tag{5.17}$$

Этот признак вытекает из геометрического смысла интеграла (5.15).

Из этого признака следует, что при том же условии из расходимости интеграла (5.17) следует расходимость интеграла (5.16).

Пример 5. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^5}}$ сходится, так как при $x \ge 1$ $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}} < \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$ и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}$ сходится (см. пример 4).

Пример 6. $\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x\sqrt{x}}dx$ расходится, так как при $x \ge 1$ $\frac{x+2}{x\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}}$ и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ расходится (см. пример 4).

Пусть теперь в интеграле (5.15) функция $f(x)$ может принимать значения разных знаков.

Теорема. *Из сходимости интеграла*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \tag{5.18}$$

следует сходимость интеграла (5.15).

Интеграл (5.15) называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл (5.18).

Пример 7. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ сходится абсолютно, потому что сходится по теореме сравнения $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx$ (при $x \geq 1$ $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ и $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ сходится; см. пример 4).

Все изложенное непосредственно переносится на интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{5.19}$$

(кстати заметим, что от интеграла (5.19) легко перейти к интегралу вида (5.15) с помощью подстановки $x=-y$). Наконец, по определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где c — какое-нибудь число (выбор его безразличен). Последнее равенство следует понимать так: если каждый из интегралов, стоящих справа, сходится, то сходится и интеграл, стоящий слева. Если же расходится хотя бы один из интегралов, стоящих справа, то расходится и интеграл, стоящий слева.

2. Интегралы от неограниченных функций. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна при $a \leq x < b$. Предположим далее, что эта функция стремится к бесконечности, когда $x \to b$. Так что на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ не ограничена. Положим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Если последний предел существует, то говорят, что интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{5.20}$$

сходится, а если этот предел не существует, то интеграл (5.20) называют *расходящимся.*

Подобным же образом равенством

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

дается определение интеграла функции $f(x)$, стремящейся к бесконечности при $x \to a$.

Пример 1. $\int\limits_a^b \frac{dx}{b-x} = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0}(\ln\varepsilon - \ln(b-a)) = +\infty$, интеграл расходится.

Пример 2. Выяснить, при каких значениях α сходится интеграл

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}.$$

Случай $\alpha = 1$ рассмотрен в примере 1. При $\alpha \neq 1$ имеем

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{\varepsilon^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{при } \alpha > 1, \\ \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{при } \alpha < 1. \end{cases}$$

Значит, данный интеграл сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha > 1$.

Все свойства для интегралов вида (5.15) и (5.19) переносятся и на только что введенные интегралы. В частности, имеет место теорема сравнения, аналогичная приведенной в п. 1.

Наконец, если функция $f(x)$ стремится к бесконечности при приближении к обоим концам промежутка $(a; b)$, то полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx, \quad a < c < b.$$

При этом если сходятся оба интеграла в правой части последнего равенства, сходится и интеграл слева.

3. Гамма-функция. Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx \quad (p = \text{const})$$

сходится при $p > 0$ (см. [5], т. II).

Положим для $p > 0$

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx.$$

Этот несобственный интеграл, зависящий от параметра p, называется *гамма-функцией* *.

Установим следующие два свойства гамма-функции:

1. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

Действительно, применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^p\,dx = -[x^p e^{-x}]_0^{+\infty} + p\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx = p\Gamma(p).$$

2. Если n — натуральное число, то

$$\Gamma(n+1) = n!$$

---

* Эта функция введена Л. Эйлером в 1729 г.

В самом деле, применяя последовательно формулу $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, получаем

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1\cdot \Gamma(1).$$

Но

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1 \quad \text{(см. п. 1, пример 1),}$$

и поэтому

$$\Gamma(n+1) = n!$$

§ 5.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Вычисление площадей плоских фигур. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;\ b]$. Известно (см. § 5.1, п. 2), что если $f(x) \ge 0$ на $[a;\ b]$, то площадь S криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$, равна интегралу

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{5.21}$$

Если же $f(x) \le 0$ на $[a;\ b]$, то $f(x) \ge 0$ — на $[a;\ b]$. Поэтому площадь S соответствующей криволинейной трапеции выразится формулой

$$S = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

или

$$S = \left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|. \tag{5.22}$$

Если, наконец, кривая $y=f(x)$ пересекает ось Ox, то сегмент $[a;\ b]$ надо разбить на части, в пределах которых $f(x)$ не меняет знака, и к каждой такой части применить ту из формул (5.21) или (5.22), которая ей соответствует.

Пример. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sin x$ и осью абсцисс при условии $0 \le x \le 2\pi$ (рис. 38). Разбиваем сегмент $[0;\ 2\pi]$ на два сегмента $[0;\ \pi]$ и $[\pi;\ 2\pi]$. На первом из них $\sin x \ge 0$, на втором — $\sin x \ge 0$. Следовательно, исходя из формул (5.21) и (5.22), имеем, что искомая площадь

$$S = \int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx + \left|\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx\right| = -\cos x\big|_0^{\pi} + \left|-\cos x\big|_{\pi}^{2\pi}\right| = 4.$$

2. Вычисление площади в полярных координатах. Пусть требуется определить площадь сектора OAB (рис. 39), ограниченного лучами

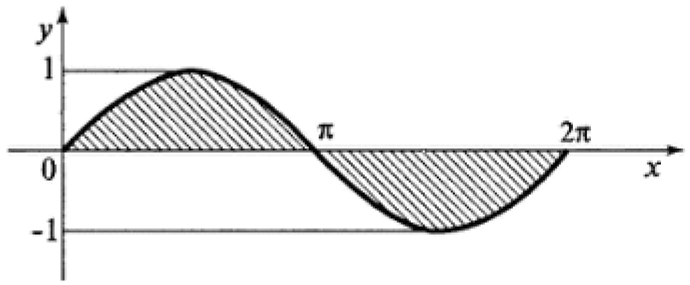


Рис. 38

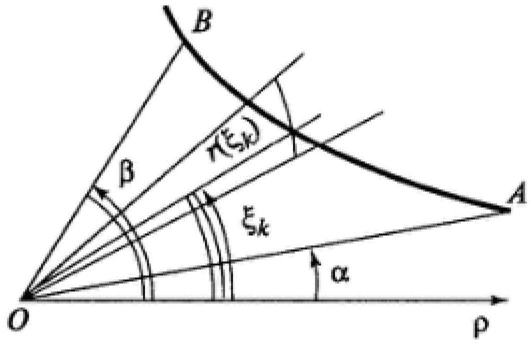


Рис. 39

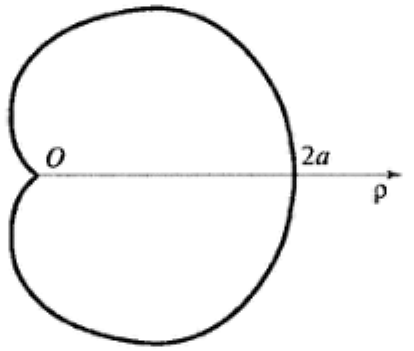


Рис. 40

$\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ и кривой AB, заданной в полярной системе координат уравнением $r=r(\varphi)$, где $r(\varphi)$ — функция, непрерывная на сегменте $[\alpha;\ \beta]$.

Разобьем отрезок $[\alpha;\ \beta]$ на n частей точками $\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\ldots<\varphi_{n-1}<\varphi_n=\beta$ и положим $\Delta\varphi_k=\varphi_k-\varphi_{k-1}$, $k=1, 2, \ldots, n$. Наибольшую из этих разностей обозначим через λ: $\lambda=\max\Delta\varphi_k$. Разобьем данный сектор на n частей лучами $\varphi=\varphi_k$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$. Заменим k-й элементарный сектор круговым сектором радиусом $r(\xi_k)$, где $\xi_k\in[\varphi_{k-1};\ \varphi_k]$. Тогда сумма $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r^2(\xi_k)\Delta\varphi_k$ — приближенно площадь сектора OAB. Отсюда

$$S=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} r^2(\xi_k)\Delta\varphi_k=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{5.23}$$

Пример. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кардиоидой $r=a(1+\cos\varphi)$ (рис. 40). Учитывая симметричность кривой относительно полярной оси, по формуле (5.23) получаем

$$S=a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2d\varphi=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=a^2\varphi\Big|_0^{\pi}+2a^2\sin\varphi\Big|_0^{\pi}+\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+2\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=a^2\pi+\frac{a^2}{2}\varphi\Big|_0^{\pi}+\frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

3. Вычисление длины дуги и площади поверхности вращения. Пусть дуга AB (рис. 41) задана уравнением

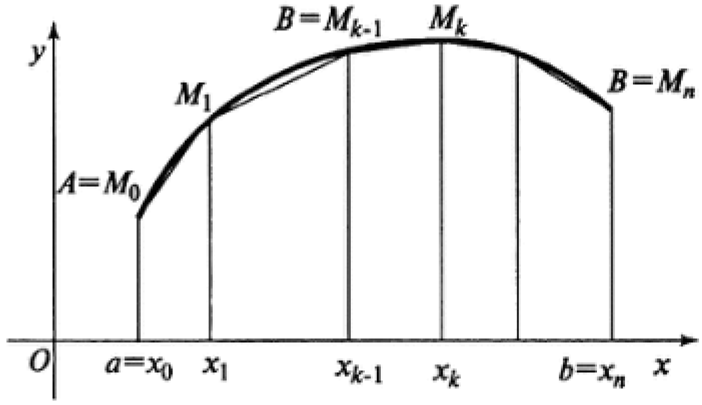


Рис. 41

$$y = f(x) \quad (a \le x \le b), \tag{5.24}$$

где $f(x)$ — функция, имеющая на отрезке $[a; b]$ непрерывную производную.

Длиной дуги AB называется предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда длина наибольшего звена стремится к нулю.

Найдем длину l дуги AB. Впишем в дугу AB ломаную линию $M_0M_1 \ldots M_n$ (см. рис. 41). Пусть абсциссы точек M_0, M_1, M_2, ..., M_n соответственно $a = x_0$, x_1, x_2, ..., $x_n = b$ (ординаты этих точек обозначим соответственно через y_0, y_1, y_2, ..., y_n). Имеем разбиение отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Длина отрезка $[x_{k-1}; x_k]$ равна $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Пусть $\lambda = \max \Delta x_k$. Через Δy_k обозначим приращение функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}; x_k]$. По теореме Пифагора $M_{k-1}M_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$. Но в силу формулы Лагранжа (см. § 3.1, п. 3) $\Delta y_k = f'(\xi_k)\,\Delta x_k$, где ξ_k — некоторая промежуточная точка отрезка $[x_{k-1}; x_k]$. Отсюда $M_{k-1}M_k = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k$, и, следовательно, длина ломаной линии $M_0M_1 \ldots M_n$

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k.$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda \to 0$, получаем

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

или

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \tag{5.25}$$

где l — длина дуги AB.

Отсюда длина дуги AM, где $M(x; y)$ — переменная точка дуги AB,

$$l = l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Поэтому (см. § 5.2, п. 3)

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1+y'^2},$$

откуда получаем формулу дифференциала дуги

$$dl = \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

или

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ \ y = y(t)\ \ (\alpha \le t \le \beta), \tag{5.26}$$

причем функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные $x'(t)$ и $y'(t)$ в $[\alpha;\ \beta]$, то путем замены переменной $x = x(t)$ в (5.25) получим

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt. \tag{5.27}$$

Формула дифференциала дуги будет $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dl$. Если же кривая AB задана в полярных координатах уравнением

$$r = r(\varphi)\ \ (\alpha \le \varphi \le \beta), \tag{5.28}$$

то, учитывая связь между прямоугольными и полярными координатами, параметрические уравнения этой кривой будут

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi\ \ (\alpha \le \varphi \le \beta).$$

Поэтому

$$x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi,\ \ y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi,$$

и по формуле (5.27) получим

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi. \tag{5.29}$$

Формула дифференциала дуги будет

$$dl = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi.$$

Пример 1. Найти длину дуги данной линии:

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\quad 0 \le x \le 1 \text{ (рис. 42).}$$

Имеем $y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ и по формуле (5.25) находим

$$l = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (e^x + e^{-x})dx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

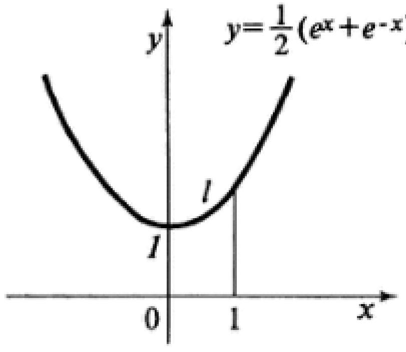


Рис. 42

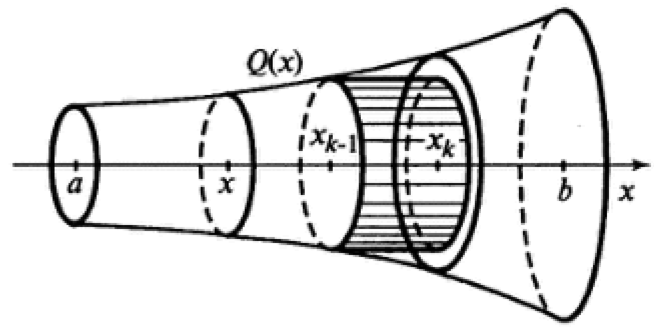


Рис. 43

Пример 2. Вычислить длину окружности радиусом R. Запишем уравнение окружности в полярных координатах: $r=R$ при $0 \le \varphi \le 2\pi$. По формуле (5.29) получим

$$l = \int_0^{2\pi} R\, d\varphi = 2\pi R.$$

Примечание. Если задана пространственная кривая параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

где функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ имеют непрерывные производные, то ее длина (длина дуги для пространственной кривой определяется так же, как и для плоской) вычисляется по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

Площадь поверхности, образованной вращением плоской дуги вокруг оси, лежащей в плоскости дуги, называется пределом площади поверхности, образованной вращением вокруг той же оси вписанной в эту дугу ломаной, когда длина ее наибольшего звена стремится к нулю.

Отметим без доказательства (оно приведено в [3]), что площадь S поверхности вращения дуги AB, заданной уравнением (5.24), вокруг оси Ox выражается формулой

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{5.30}$$

Если данная кривая AB задана параметрическими уравнениями (5.26) или уравнением (5.28) в полярных координатах, то соответственно получим

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta r \sin\varphi \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi.$$

Пример. Найти площадь поверхности шарового пояса, образованного вращением вокруг оси Ox дуги окружности $x^2+y^2=R^2$, соответствующей изменению x от a до b $(-R \le a < 0,\ 0 < b \le R)$. Здесь $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $y' = -\frac{x}{y}$,

$1 + y'^2 = \frac{R^2}{y^2}$ и по формуле (5.30) $S = 2\pi R \int\limits_a^b dx = 2\pi R(b - a)$. В частности, при

$a = -R$, $b = R$ получаем площадь сферы $S = 4\pi R^2$.

4. Вычисление объема. Рассмотрим тело B, содержащееся между плоскостями $x = a$ и $x = b$ (рис. 43). Пусть для каждого x из сегмента $[a;\ b]$ дана площадь сечения этого тела $Q(x)$, перпендикулярного к оси Ox. Найдем объем V данного тела при условии непрерывности $Q(x)$ в $[a;\ b]$. Разделим сегмент $[a;\ b]$ на n частей и через точки деления проведем плоскости, перпендикулярные к оси Ox. Эти плоскости разобьют тело B на слои. Выделим k-й слой, ограниченный плоскостями $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$. Объем этого слоя приближенно равен $Q(x_{k-1})\Delta x$. Образуем сумму $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Q(x_{k-1})\Delta x$.

Объем V тела B определим как $\lim\limits_{\lambda \to 0} V_n$. Этот предел существует в силу непрерывности $Q(x)$ на $[a;\ b]$ и равен $\int\limits_a^b Q(x)dx$. Итак,

$$V = \int\limits_a^b Q(x)dx.$$

В частности, если тело образовано поверхностью вращения линии $y = f(x)$ вокруг оси Ox в пределах изменения x от a до b, то $Q(x) = \pi f^2(x)$ и $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$, или, более кратко,

$$V = \pi \int\limits_a^b y^2\, dx. \qquad (5.31)$$

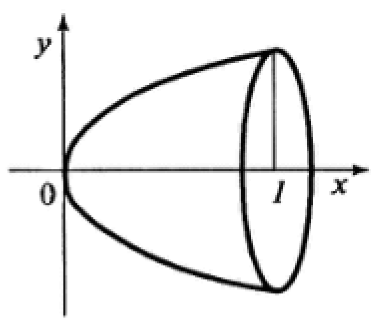


Рис. 44

Пример. Найти объем тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x$ и $x = 1$, вокруг оси Ox. Это тело называется *сегментом параболоида вращения* (рис. 44). Согласно формуле (5.31), имеем

$$V = \pi \int\limits_0^1 x\, dx = \pi \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

§ 5.6. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ

1. Статические моменты и центр тяжести дуги плоской кривой.

Статическим моментом материальной точки, находящейся в плоскости xOy, относительно координатной оси Ox (или Oy) называется произведение массы этой точки на ее ординату (соответственно абсциссу). Статическим моментом системы точек M_1, M_2, ..., M_n относительно координатной оси называется сумма статических моментов всех точек системы относительно этой оси.

Центром тяжести системы материальных точек с массами m_1, m_2, ..., m_n называется точка C, обладающая тем свойством, что, если в ней сосредоточить всю массу системы $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, ее статический момент по отношению к любой оси равен статическому моменту системы точек относительно той же оси. Поэтому, если обозначить через $M_x^{(n)}$ и $M_y^{(n)}$ статические моменты системы точек относительно координатных осей Ox и Oy, координаты x_C и y_C центра тяжести C удовлетворяют соотношениям

$$mx_C = M_y^{(n)} = m_1x_1 + \ldots + m_nx_n, \quad my_C = M_x^{(n)} = m_1y_1 + \ldots + m_ny_n,$$

где x_k, y_k — декартовы координаты точки массой m_k. Следовательно, центр тяжести данной системы материальных точек имеет координаты

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{m}.$$

Статические моменты и координаты центра тяжести дуги плоской линии можно выразить через определенные интегралы. Пусть дуга AB задана уравнением $y = f(x)$, $x \in [a;\ b]$, где $f(x)$ — функция, имеющая на $[a;\ b]$ непрерывную производную, и на этой дуге распределено вещество плотностью $\rho = \rho(x)$. Разделим дугу AB на n частичных дуг $M_{k-1}M_k$ ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$). Сосредоточим массу каждого из элементов $M_{k-1}M_k$ в одной его точке $N_k(x_k,\ y_k)$. Тогда получим приближенные выражения элемента массы $\Delta m_k \approx \rho M_{k-1}M_k$ и элементарных статических моментов относительно координатных осей $(\Delta M_x)_k \approx y_k \Delta m_k$, $(\Delta M_y)_k \approx x_k \Delta m_k$. Суммируя и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получаем выражение массы материальной дуги

$$m = \int_a^b \rho\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

и ее статических моментов относительно координатных осей

$$M_x = \int_a^b \rho y\sqrt{1 + y'^2}\,dx, \quad M_y = \int_a^b \rho x\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Для нахождения центра тяжести $C(x_C;\ y_C)$ материальной дуги AB в соответствии с определением этого понятия составим равенства

$$mx_C = M_y \quad \text{и} \quad my_C = M_x,$$

из которых следует, что

$$x_C = \frac{M_y}{m}, \quad y_C = \frac{M_x}{m}. \tag{5.32}$$

Из формул (5.32) при $\rho(x) = \text{const}$ следует $\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx = y_C l$.

Умножив обе части последнего равенства на 2π, получим

$$2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi y_C l,$$

или

$$S = 2\pi y_C l, \tag{5.33}$$

где S — площадь поверхности, образуемой вращением дуги AB вокруг оси Ox; $2\pi y_C$ — длина окружности, описываемой точкой $C(x_C;\ y_C)$ при вращении вокруг оси Ox.

Это приводит к следующей теореме.

Первая теорема Гульдина*. *Площадь поверхности, образуемой вращением дуги плоской кривой вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в плоскости дуги, равна произведению длины вращающейся дуги на длину окружности, которую при этом вращении описывает центр тяжести дуги.*

Пример 1. Найти центр тяжести массы, распространенной вдоль полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$, при условии $\rho=1$. Из соображений симметрии заключаем, что $x_C=0$. Далее, согласно формуле (5.33), $4\pi R^2=\pi R\cdot 2\pi y_C$, откуда $y_C=\dfrac{2R}{\pi}\approx 0{,}637R$ (здесь можно использовать калькулятор).

2. Статические моменты и центр тяжести плоской фигуры.

Пусть дана криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$ ($f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$), $y=0$, и на ней распределено вещество плотностью $\rho=1$. Разделим отрезок $[a;\ b]$ на n частичных отрезков, а криволинейную трапецию на n соответствующих частей. Заменим каждую частичную трапецию прямоугольником с основанием Δx_k и высотой $y_{k-1}=f(x_{k-1})$. Тогда получим приближенные выражения элемента массы $\Delta m_k\approx y_{k-1}\Delta x_k$ и элементарных статических моментов относительно координатных осей $(\Delta M_x)_k\approx\frac{1}{2}y_{k-1}\Delta m_k$, $(\Delta M_y)_k\approx x_{k-1}\Delta m_k$.

Суммируя и переходя к пределу при $\lambda\to 0$, получаем выражения массы и статических моментов всей фигуры:

$$m=\int_a^b y\,dx,\quad M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx,\quad M_y=\int_a^b xy\,dx. \tag{5.34}$$

Координаты ее центра тяжести x_C и y_C определяются так же, как и для материальной дуги, формулами (5.32), в которых m, M_x, M_y определяются по формулам (5.34).

Из равенства $y_C=\dfrac{M_x}{m}$, согласно формулам (5.34), имеем

$$\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx = y_C\int_a^b y\,dx,$$

* Пауль Гульдин (1577—1643) — швейцарский математик.

откуда

$$\pi \int_a^b y^2 dx = 2\pi y_C \int_a^b y dx.$$

Левая часть последнего равенства есть объем V тела, получаемого от вращения данной плоской фигуры около оси Ox, правая — произведение площади S вращающейся фигуры на $2\pi y_C$ — длину окружности, описываемой при этом вращении центром тяжести фигуры. Итак,

$$V = 2\pi y_C S. \tag{5.35}$$

Это приводит ко второй теореме Гульдина.

Вторая теорема Гульдина. *Объем тела, образованного вращением данной плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в ее плоскости, равен произведению площади вращающейся фигуры на длину окружности, которую при этом вращении описывает центр тяжести этой фигуры.*

Пример 2. Найти центр тяжести полукруга, ограниченного осью Ox и полуокружностью $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (при условии $\rho = 1$). Из соображений симметрии следует, что $x_C = 0$. Далее, согласно формуле (5.35), $\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi y_C \frac{\pi R^2}{2}$, откуда

$$y_C = \frac{4R}{3\pi} \approx 0{,}424R$$

(здесь также для вычислений можно использовать калькулятор).

3. Численность популяции. Число особей в популяции (численность популяции) меняется со временем. Если условия существования популяции благоприятны, то рождаемость превышает смертность и общее число особей в популяции растет со временем. Назовем скоростью роста популяции прирост числа особей в единицу времени. Обозначим эту скорость $v = v(t)$. В «старых», установившихся популяциях, давно обитающих в данной местности, скорость роста $v(t)$ мала и медленно стремится к нулю. Но если популяция молода, ее взаимоотношения с другими местными популяциями еще не установились или существуют внешние причины, изменяющие эти взаимоотношения, например сознательное вмешательство человека, то $v(t)$ может значительно колебаться, уменьшаясь или увеличиваясь.

Если известна скорость роста популяции $v(t)$, то мы можем найти прирост численности популяции за промежуток времени от t_0 до T. В самом деле, из определения $v(t)$ следует, что эта функция является производной от численности популяции $N(t)$ в момент t, и, следовательно, численность популяции $N(t)$ является первообразной для $v(t)$. Поэтому

$$N(T) - N(t_0) = \int_{t_0}^{T} v(t)dt. \tag{5.36}$$

Известно, что в условиях неограниченных ресурсов питания скорость роста многих популяций экспоненциальна, т. е. $v(t)=ae^{kt}$. Популяция в этом случае как бы «не стареет». Такие условия можно создать, например, для микроорганизмов, пересаживая время от времени развивающуюся культуру в новые емкости с питательной средой. Применяя формулу (5.36), в этом случае получаем

$$N(T) = N(t_0) + a\int_{t_0}^{T} e^{kt}dt = N(t_0) + \frac{a}{k}e^{kt}\Big|_{t_0}^{T} = N(t_0) + \frac{a}{k}(e^{kT} - e^{kt_0}). \qquad (5.37)$$

По формуле, подобной (5.37), подсчитывают, в частности, численность культивируемых плесневых грибков, выделяющих пенициллин.

4. Биомасса популяции. Рассмотрим популяцию, в которой масса особи заметно меняется в течение жизни, и подсчитаем общую биомассу популяции.

Пусть τ означает возраст в тех или иных единицах времени, а $N(\tau)$ — число особей популяции, возраст которых равен τ. Пусть, наконец, $P(\tau)$ — средняя масса особи возраста τ, а $M(\tau)$ — биомасса всех особей в возрасте от 0 до τ.

Заметив, что произведение $N(\tau)P(\tau)$ равно биомассе всех особей возраста τ, рассмотрим разность

$$M(\tau+\Delta\tau) - M(\tau),$$

где $\Delta\tau > 0$. Очевидно, что эта разность, равная биомассе всех особей в возрасте от τ до $\tau+\Delta\tau$, удовлетворяет неравенствам

$$N(\bar{\tau})P(\bar{\tau})\Delta\tau \le M(\tau+\Delta\tau) - M(\tau) \le N(\hat{\tau})P(\hat{\tau})\Delta\tau, \qquad (5.38)$$

где $N(\bar{\tau})P(\bar{\tau})$ — наименьшее, а $N(\hat{\tau})P(\hat{\tau})$ — наибольшее значения функции $N(\tau)P(\tau)$ на отрезке $[\tau, \tau+\Delta\tau]$. Учитывая, что $\Delta\tau > 0$, из неравенств (5.38) имеем

$$N(\bar{\tau})P(\bar{\tau}) \le \frac{M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau)}{\Delta\tau} \le N(\hat{\tau})P(\hat{\tau}).$$

Из непрерывности функции $N(\tau)P(\tau)$ (ее непрерывность следует из непрерывности $N(\tau)$ и $P(\tau)$) следует, что

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}[N(\bar{\tau})P(\bar{\tau})] = \lim_{\Delta\tau\to 0}[N(\hat{\tau})P(\hat{\tau})] = N(\tau)P(\tau).$$

Поэтому, согласно теореме 5 (см. § 1.5), будем иметь

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau)}{\Delta\tau} = N(\tau)P(\tau),$$

или

$$\frac{dM(\tau)}{d\tau} = N(\tau)P(\tau).$$

Следовательно, биомасса $M(\tau)$ является первообразной для $N(\tau)P(\tau)$. Отсюда

$$M(T) - M(0) = \int_0^T N(\tau)P(\tau)\,d\tau,$$

где T — максимальный возраст особи в данной популяции. Так как $M(0)$, очевидно, равно нулю, то окончательно получаем

$$M(T)=\int_0^T N(\tau)P(\tau)\,d\tau.$$

5. Средняя длина пробега. В некоторых исследованиях необходимо знать среднюю длину пробега, или среднюю длину пути при прохождении животным некоторого фиксированного участка. Приведем соответствующий расчет для птиц. Пусть участком будет круг радиусом R (рис. 45). Будем считать, что R не слишком велико, так что большинство птиц изучаемого вида пересекает этот круг по прямой.

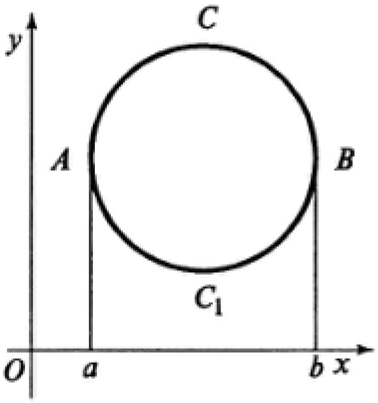


Рис. 45

Птица может под любым углом в любой точке пересечь окружность. В зависимости от этого длина ее пролета над кругом может быть равной любой величине от 0 до $2R$. Нас интересует средняя длина пролета. Обозначим ее через l.

Так как круг симметричен относительно любого своего диаметра, нам достаточно ограничиться лишь теми птицами, которые летят в каком-нибудь одном направлении, параллельном оси Oy (см. рис. 45). Тогда средняя длина пролета — это среднее расстояние между дугами ACB и AC_1B. Иными словами, это среднее значение функции $f_1(x)-f_2(x)$, где $y=f_1(x)$ — уравнение верхней дуги, а $y=f_2(x)$ — уравнение нижней дуги, т. е.

$$l=\frac{\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx}{b-a},$$

или

$$l=\frac{\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx}{b-a}. \qquad (5.39)$$

Так как

$$\int_a^b f_1(x)dx$$

равен площади криволинейной трапеции $aACBb$ (см. § 5.1), а

$$\int_a^b f_2(x)dx$$

равен площади криволинейной трапеции aAC_1Bb, то их разность равна площади круга, т. е. πR^2. Разность $b-a$ равна, очевидно, $2R$.

Подставив это в (5.39), получим

$$l = \frac{\pi R^2}{2R} = \frac{\pi}{2} R.$$

Приведенные примеры далеко не исчерпывают возможных приложений определенного интеграла в естествознании.

§ 5.7. ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

1. Векторная функция скалярного аргумента, ее годограф. До сих пор мы изучали функциональную зависимость между величинами, принимающими только числовые значения. Другими словами, если переменная величина x есть функция переменной величины t, т. е. $x = x(t)$, то как значения независимой переменной t, так и значения самой функции x суть числа. Таким образом, t и x являются в этом случае *скалярными величинами*, или просто *скалярами*, иными словами, имеем *скалярную* функцию *скалярного* аргумента. По аналогии со скалярной функцией можно ввести понятие векторной функции скалярного аргумента.

Определение. Если каждому значению параметра t из некоторого промежутка отвечает определенный вектор $\bar{r}$ (зависящий от t), то вектор $\bar{r}$ называется *векторной функцией* (кратко — *вектор-функция*) *от скалярного* аргумента t, и в этом случае пишут

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \tag{5.40}$$

При изменении аргумента t вектор $\bar{r}(t)$ изменяется, вообще говоря, как по величине, так и по направлению. В дальнейшем предполагается, что t изменяется в промежутке, конечном или бесконечном.

Как и в векторной алгебре здесь рассматриваем свободные векторы, т. е. такие векторы, которые считаются равными, если они равны по величине и одинаково направлены, или, иначе говоря, если они имеют равные проекции на оси координат. Свободные векторы могут быть отложены от какой угодно точки. Будем считать, что вектор $\bar{r}(t)$ исходит из начала координат, т. е. вектор $\bar{r}$ — радиус-вектор некоторой точки M. В этом случае при изменении параметра t конец вектора $\bar{r}(t)$ опишет некоторую линию L, называемую *годографом* векторной функции $\bar{r}(t)$ (рис. 46). При этом начало координат называют *полюсом* годографа. Уравнение (5.40) называют *векторным уравнением* этой кривой.

Если у вектора $\bar{r}(t)$ меняется только *модуль*, то годографом его будет луч, исходящий из полюса. Если модуль вектора $\bar{r}(t)$ постоянен ($|\bar{r}(t)| = \text{const}$) и меняется только его *направление*, то годограф есть линия, лежащая на сфере с центром в полюсе и радиусом, равным модулю вектора $\bar{r}(t)$.

С векторной функцией скалярного аргумента особенно часто приходится встречаться в кинематике при изучении движения точки, когда радиус-вектор $\bar{r}(t)$ движущейся точки является функцией времени t. Годографом такой функции является *траектория* движения точки. При этом уравнение $\bar{r} = \bar{r}(t)$ называют *уравнением движения*.

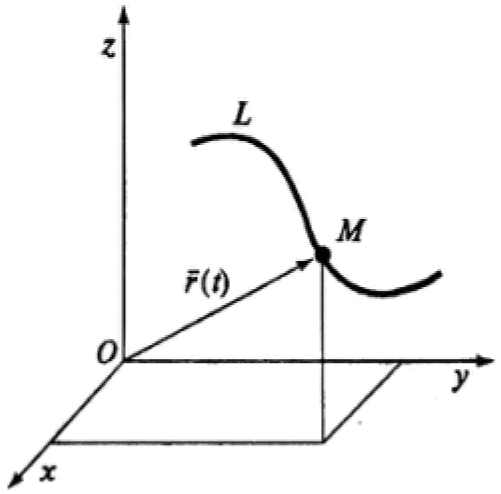


Рис. 46

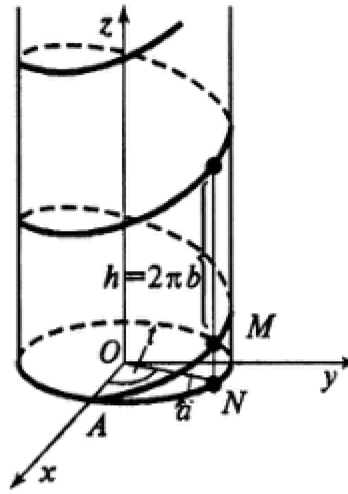


Рис. 47

Если через x, y и z обозначить проекции вектора $\bar{r}(t)$ на оси прямоугольной системы координат в пространстве, то эти величины для каждого значения параметра t в свою очередь принимают определенные числовые значения и потому являются скалярными функциями скалярного аргумента t:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{5.41}$$

В силу известного разложения вектора по ортам прямоугольной системы координат имеем

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}.$$

Таким образом, задание векторной функции скалярного аргумента (т. е. функции (5.40)) равносильно заданию трех скалярных функций того же аргумента (т. е. функций (5.41)).

Так как уравнение (5.40) является уравнением некоторой кривой в пространстве, то ту же кривую задают и уравнения (5.41). Уравнения (5.41) — обычные *параметрические уравнения кривой в пространстве*. С помощью этих уравнений для каждого значения t определяются координаты x, y и z соответствующей точки кривой, а по координатам можно определить и радиус-вектор этой точки.

Рассмотрим кривую, заданную параметрически с помощью уравнений

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt.$$

Эта кривая называется *винтовой линией* (рис. 47). Ее векторное уравнение

$$\bar{r}(t) = a\cos t\,\bar{i} + a\sin t\,\bar{j} + bt\,\bar{k}.$$

При любом значении параметра t

$$x^2 + y^2 = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2.$$

Это означает, что винтовая линия расположена на цилиндре $x^2 + y^2 = a^2$. Отсюда следует, что, когда точка M движется по винтовой линии, ее проекция N на плоскости xOy перемещается по окружности с радиусом a и центром в начале координат, причем t является полярным углом точки N. Когда точка N описывает полную окружность, аппликата z точки M винтовой линии увеличивается на $h = 2\pi b$. Эта величина называется *шагом* винтовой линии.

2. Предел, непрерывность и производная вектор-функции. Пусть функция $\bar{r}(t)$ определена в окрестности точки t_0, кроме, быть может, самой точки t_0.

Вектор $\bar{r}_0$ называется *пределом векторной функции* $\bar{r}(t)$ при стремлении t к t_0 (или, короче, в точке t_0), если

$$\lim_{t \to t_0} |\bar{r}(t) - \bar{r}_0| = 0. \tag{5.42}$$

Если $\bar{r}_0$ есть предел функции $\bar{r}(t)$ при $t \to t_0$, то это записывается так:

$$\lim_{t \to t_0} \bar{r}(t) = \bar{r}_0. \tag{5.43}$$

Итак, когда пишем соотношение (5.43), то подразумеваем под этим соотношение (5.42).

Если запишем векторную функцию $\bar{r}(t)$ и вектор $\bar{r}_0$ в проекциях (см. п. 1)

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k},$$
$$\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k},$$

то получим

$$|\bar{r}(t) - \bar{r}_0| = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}. \tag{5.44}$$

Тогда из условия (5.42) следует, что

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0, \ \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0, \ \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0. \tag{5.45}$$

Обратно: из формул (5.45) с помощью (5.44) сразу вытекает соотношение (5.42). Таким образом, соотношения (5.42) и (5.45) равносильны.

Из определения предела векторной функции с учетом очевидного неравенства $||\bar{r}(t)| - |\bar{r}_0|| \le |\bar{r}(t) - \bar{r}_0|$ непосредственно следует следующее свойство:

1. Если $\lim_{t \to t_0} \bar{r}(t) = \bar{r}_0$, то и $\lim_{t \to t_0} |\bar{r}(t)| = |\bar{r}_0|$.

Отметим еще четыре свойства:

2. $\lim_{t \to t_0} (\bar{r}_1(t) + \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \to t_0} \bar{r}_1(t) + \lim_{t \to t_0} \bar{r}_2(t)$.
3. $\lim_{t \to t_0} (f(t)\bar{r}(t)) = \lim_{t \to t_0} f(t) \lim_{t \to t_0} \bar{r}(t)$

($f(t)$ — скалярная функция).

4. $\lim_{t \to t_0} (\bar{r}_1(t)\bar{r}_2(t)) = \lim_{t \to t_0} \bar{r}_1(t) \lim_{t \to t_0} \bar{r}_2(t)$.
5. $\lim_{t \to t_0} (\bar{r}_1(t) \times \bar{r}_2(t)) = \lim_{t \to t_0} \bar{r}_1(t) \times \lim_{t \to t_0} \bar{r}_2(t)$.

(Предполагается, что пределы в правых частях последних четырех равенств существуют.)

Свойства 2—5 с помощью формул (5.45) легко следуют из соответствующих свойств скалярных функций, если перейти к координатной записи векторов и их скалярных и векторных произведений.

Вектор-функция $\bar{r}(t)$, определенная в некоторой окрестности точки t_0, называется *непрерывной* в точке t_0, если $\lim\limits_{t \to t_0} \bar{r}(t) = \bar{r}(t_0)$.

Из равносильности условий (5.42) и (5.45) следует, что для того чтобы вектор-функция $\bar{r}(t)$ была непрерывной в точке t_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке были непрерывны функции x, y, z.

Из свойств пределов векторных функций следует, что сумма, скалярное и векторное произведения векторных функций, произведение скалярных функций на векторные будут непрерывны в точке t_0, если в этой точке были непрерывны все слагаемые, соответственно сомножители. В дальнейшем мы будем рассматривать только непрерывные функции.

Перейдем теперь к вопросу о производной векторной функции скалярного аргумента

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}, \tag{5.46}$$

предполагая, что начало вектора $\bar{r}(t)$ находится в начале координат. Как уже отмечалось (см. п. 1), последнее уравнение является уравнением некоторой пространственной кривой.

Возьмем какое-нибудь фиксированное значение t, соответствующее какой-нибудь определенной точке M на кривой, заданной уравнением (5.46), и дадим t приращение Δt. Тогда получим вектор

$$\bar{r}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)\bar{i} + y(t + \Delta t)\bar{j} + z(t + \Delta t)\bar{k},$$

который определяет на кривой некоторую точку M' (рис. 48, *а*). Найдем приращение вектора:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{r} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t) = (x(t + \Delta t) - x(t))\bar{i} + (y(t + \Delta t) - y(t))\bar{j} + \\ + (z(t + \Delta t) - z(t))\bar{k}. \end{aligned} \tag{5.47}$$

На рис. 48, *а*, где $\overline{OM} = \bar{r}(t)$, $\overline{OM'} = \bar{r}(t + \Delta t)$, это приращение изображается вектором $\overline{MM'} = \Delta\bar{r}(t)$.

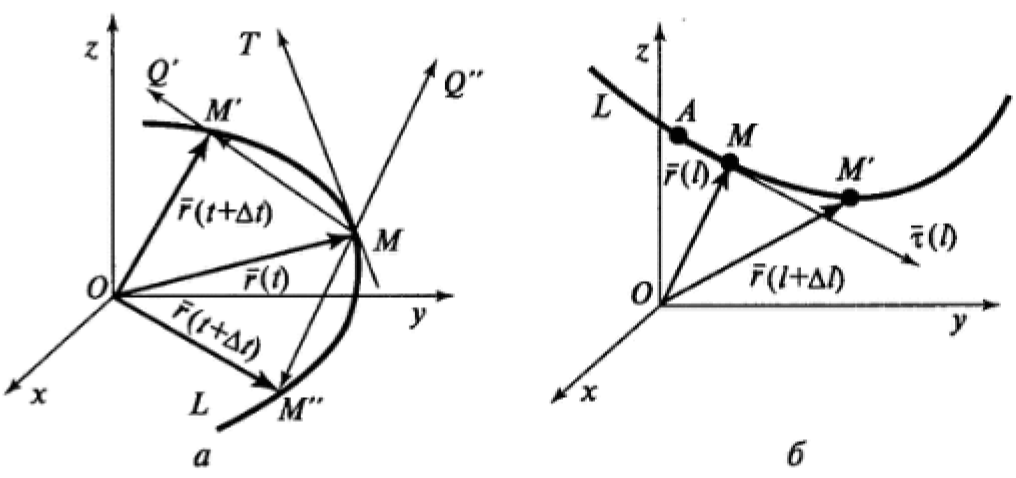


Рис. 48

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t}$ приращения вектор-функции к приращению скалярного аргумента; это есть вектор, коллинеарный с вектором $\Delta\bar{r}(t)$, так как получается из него умножением на скалярный множитель $\frac{1}{\Delta t}$. При этом вектор $\frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t}$ направлен в сторону, соответствующую возрастанию t (направление от M к M' на рис. 48, *а*).

Действительно, если $\Delta t > 0$, то вектор $\frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t} = \overline{MQ'}$ имеет то же направление, что и вектор $\Delta\bar{r}(t) = \overline{MM'}$, т. е. направлен в ту сторону годографа, которая соответствует возрастанию параметра t. Если же $\Delta t < 0$, то вектор $\Delta\bar{r}(t) = \overline{MM''}$ направлен в противоположную сторону и при делении на отрицательное Δt мы получим вектор $\overline{MQ''}$, направленный снова в сторону возрастания t.

Далее с учетом выражения (5.47) вектор $\frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t}$ можно представить в виде

$$\frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\bar{i} + \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\bar{j} + \frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\bar{k}. \qquad (5.48)$$

Если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имеют производные при выбранном значении t, то множители при $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ в равенстве (5.48) в пределе при $\Delta t \to 0$ обратятся в производные $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$. Следовательно, в этом случае существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t} = x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t)\bar{k}.$$

Вектор, определяемый последним равенством, называется *производной от вектора* $\bar{r}(t)$ *по скалярному аргументу* t, которую обозначают символом $\frac{d\bar{r}}{dt}$ или $\bar{r}'$. Итак,

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{r}' = x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t)\bar{k}, \qquad (5.49)$$

или

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}.$$

Выясним направление вектора $\frac{d\bar{r}}{dt}$. Для этого заметим, что при $\Delta t \to 0$ точка $M'(M'')$ стремится к точке M, и поэтому секущая $MM'(MM'')$ стремится к касательной в точке M. Отсюда производная $\bar{r}'(t)$ является вектором $\overline{MT}$, касательным к годографу вектор-функции $\bar{r}(t)$, направленным в сторону, соответствующую возрастанию параметра t.

Из разложения (5.49) следует, что

$$|\bar{r}'(t)| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \qquad (5.50)$$

Но, как известно (см. § 5.5, п. 3, примечание), дифференциал дуги

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt,$$

откуда

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \tag{5.51}$$

Из сопоставления формул (5.50) и (5.51) имеем

$$|\bar{r}'(t)| = \frac{dl}{dt}. \tag{5.52}$$

Таким образом, модуль производной векторной функции $|\bar{r}'(t)|$ равен производной от длины годографа по аргументу t.

Если вектор-функция $\bar{r}(t)$ имеет постоянный модуль, но переменное направление, то ее производная $\frac{d\bar{r}}{dt}$ является вектором, перпендикулярным к вектору $\bar{r}(t)$. В самом деле, в этом случае годограф лежит на сфере, и поэтому производная $\bar{r}'(t)$ как вектор, касательный к годографу, перпендикулярна к вектору $\bar{r}(t)$.

Приведем правила дифференцирования векторов-функций (аргумент для краткости записи опустим):

1. $(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)' = \bar{r}_1' + \bar{r}_2'$. 2. $(f\bar{r})' = f'\bar{r} + f\bar{r}'$ (f — скалярная функция, в частности $(c\bar{r})' = c\bar{r}'$, где c — скалярная постоянная).

3. $(\bar{r}_1\bar{r}_2)' = \bar{r}_1'\bar{r}_2 + \bar{r}_1\bar{r}_2'$. 4. $(\bar{r}_1 \times \bar{r}_2)' = \bar{r}_1' \times \bar{r}_2 + \bar{r}_1 \times \bar{r}_2'$. Все эти формулы доказываются аналогично формулам дифференцирования скалярных функций (см. § 2.2, п. 1), они могут быть получены и иначе — с использованием выражения (5.49).

Последовательным дифференцированием можно найти производные высших порядков от векторных функций. Так,

$$\bar{r}''(t) = x''(t)\bar{i} + y''(t)\bar{j} + z''(t)\bar{k}$$

и т. д.

3. Касательная, нормальная плоскость. Пусть точка $M(x;\ y;\ z)$ описывает некоторую пространственную кривую L (см. рис. 48, *б*). Параметром, определяющим положение точки M на кривой, будем считать длину l дуги AM кривой, отсчитываемую от определенной точки A кривой до точки M. Так как положение точки $M(x;\ y;\ z)$ на кривой определяется значением дуги l, то координаты x, y и z, а также радиус-вектор $\bar{r}$ этой точки можно рассматривать как функции длины дуги l:

$$x = x(l), \quad y = y(l), \quad z = z(l), \quad \bar{r} = \bar{r}(l).$$

Или в проекциях:

$$\bar{r} = x(l)\bar{i} + y(l)\bar{j} + z(l)\bar{k}. \tag{5.53}$$

Продифференцируем вектор $\bar{r}(l)$ по l. Получим новый вектор

$$\bar{\tau} = \bar{r}_l', \tag{5.54}$$

направленный, как мы знаем (см. п. 2), по касательной к кривой в сторону возрастания параметра l (см. рис. 48, *б*). Модуль этого вектора

$$|\bar{\tau}| = |\bar{r}_l'| = \lim_{\Delta l \to 0}\left|\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta l}\right|.$$

(Равенство $|\bar{r}_l'| = \lim_{\Delta l \to 0}\left|\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta l}\right|$ записано на основе свойства 1 пределов (см. п. 2).)

Но, как ранее установлено (см. § 5.5, п. 3), последний предел равен единице (он равен единице и в случае пространственной кривой).

Таким образом, вектор $\bar{\tau}$ есть единичный вектор, направленный по касательной к кривой в точке M в сторону возрастания l. Если вектор $\bar{r}$ задан в проекциях (5.53), то согласно формуле (5.49) имеем

$$\bar{\tau}(l) = \bar{r}_l' = x_l'\bar{i} + y_l'\bar{j} + z_l'\bar{k}.$$

На основе полученных результатов легко написать уравнения касательной к кривой L в точке $M(x;\ y;\ z)$. Так как вектор $\bar{\tau}$ лежит на искомой касательной, то ее уравнения будут

$$\frac{X-x}{x_l'} = \frac{Y-y}{y_l'} = \frac{Z-z}{z_l'}, \tag{5.55}$$

где X, Y, Z — текущие координаты точки касательной, а значения производных x_l', y_l', z_l' вычисляются в точке касания M. Если в уравнениях кривой вместо длины дуги l взять любой другой параметр t, то, рассматривая длину дуги l как функцию параметра t, получаем

$$x_t' = x_l'\, l_t',\ \ y_t' = y_l'\, l_t',\ \ z_t' = z_l'\, l_t'.$$

Следовательно, в уравнениях (5.55) производные x_l', y_l', z_l' можно заменить производными x_t', y_t', z_t', соответственно. Тем самым приходим и к такой форме уравнений касательной

$$\frac{X-x}{x_t'} = \frac{Y-y}{y_t'} = \frac{Z-z}{z_t'}. \tag{5.56}$$

Плоскость, перпендикулярная к касательной (5.56) и проходящая через точку касания, называется *нормальной плоскостью* к кривой L в точке M (рис. 49).

Всякая прямая, лежащая в этой плоскости и пересекающая кривую в точке касания M, называется *нормалью к кривой* L в точке M, и, следовательно, пространственная кривая в каждой точке имеет бесчисленное множество нормалей. Найдем уравнение нор-

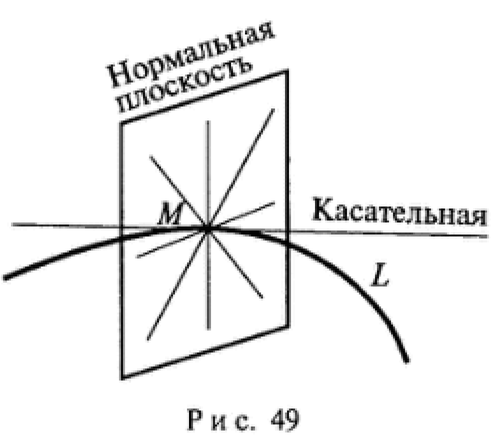


Рис. 49

мальной плоскости к кривой L в точке $M(x;\ y;\ z)$. Так как искомая плоскость перпендикулярна к касательной (5.56), вектор (5.49) является нормальным к этой плоскости и потому ее уравнение имеет вид

$$(X-x)x'_t+(Y-y)y'_t+(Z-z)z'_t=0$$

(значения производных взяты в точке $M(x;\ y;\ z)$).

Пример. Написать уравнения нормальной плоскости и касательной к винтовой линии

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=3t$$

в точке P, для которой $t=\dfrac{\pi}{3}$.

Для любого t

$$x'_t=-\sin t,\quad y'_t=\cos t,\quad z'_t=3,$$

поэтому при $t=\dfrac{\pi}{3}$ имеем

$$x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x=\pi,$$

$$x'_t=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad y'_t=\frac{1}{2},\quad z'_t=3,$$

и, следовательно, для касательной получаем уравнения

$$\frac{X-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{Y-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{Z-\pi}{3},$$

для нормальной плоскости уравнение

$$-\left(X-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}+\left(Y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+(Z-\pi)6=0.$$

4. Приложения к механике. Рассмотренное выше дифференцирование векторной функции скалярного аргумента имеет важное применение в механике при определении скорости и ускорения криволинейного движения.

Пусть годограф векторной функции $\bar{r}=\bar{r}(t)$ является траекторией движения точки, t — время. Тогда *вектор-производная*

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}$$

называется *скоростью движения.*

Таким образом, *скорость движения есть вектор, касательный к траектории в соответствующей точке и направленный в сторону движения* (т. е. в сторону возрастания t).

Согласно формуле (5.52), *модуль скорости* равен

$$|\bar{v}|=\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|=\frac{dl}{dt},$$

т. е. равен *производной от пути по времени.*

Если движение прямолинейное, то скалярная величина $\frac{dl}{dt}$ вполне характеризует скорость движения (ее и называем *скоростью прямолинейного движения*). Вектор

$$\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$$

называется *ускорением движения*.

Упражнения

Применяя формулу Ньютона — Лейбница, вычислите определенные интегралы:

1. $\int_0^1 x^4 dx.$ $\left[\frac{1}{5}.\right]$

2. $\int_{-1}^1 (x^2+1)dx.$ $\left[2\frac{2}{3}.\right]$

3. $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx.$ $\left[4\frac{2}{3}.\right]$

4. $\int_1^2 \frac{dx}{x}.$ $[\ln 2.]$

5. $\int_{-1}^0 e^{-2x}dx.$ $\left[\frac{e^2-1}{2}.\right]$

6. $\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin 4x\, dx.$ $[0.]$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx.$ $[1.]$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$ $[1.]$

9. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ $\left[\frac{\pi}{6}.\right]$

10. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$ $\left[\frac{\pi}{3}.\right]$

Вычислите определенные интегралы методом подстановки:

11. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ $[1.]$

12. $\int_1^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}.$ $\left[\frac{3\sqrt{2}}{3}.\right]$

13. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\, dx.$ $\left[\frac{4-\pi}{2}.\right]$

14. $\int_0^7 \sqrt{49-x^2}\, dx.$ $\left[\frac{49}{4}\pi.\right]$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\, dx.$ $\left[\frac{\pi}{4}.\right]$

16. $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x-1}dx.$ $[\ln(1+e).]$

17. $\int_0^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx.$ $\left[1\frac{1}{3}.\right]$

18. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}.$ $\left[\frac{1}{4}.\right]$

19. $\int_{-12}^{-1} \sqrt{4-5x}\, dx.$ $\left[64\frac{2}{3}.\right]$

20. $\int_{-3}^1 e^{-x}dx.$ $\left[e^3-\frac{1}{e}.\right]$

21. $\int\limits_2^8 \frac{dx}{x^2+6x+8}$. $\left[\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}.\right]$

22. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}$. $\left[\sqrt{3}-1.\right]$

23. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$. $\left[\frac{\pi}{2}.\right]$

24. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$. $\left[\frac{2}{3}.\right]$

25. $\int\limits_{-2}^0 \frac{dx}{(1-2x)^3}$. [0,24.]

26. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{5x\,dx}{(1-x^2)^3}$. $\left[\frac{35}{36}.\right]$

27. $\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$. [3.]

28. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$. [1.]

29. $\int\limits_0^3 \frac{2x\,dx}{\sqrt{16+x^2}}$. [2.]

30. $\int\limits_{-1}^2 \frac{2x\,dx}{(2x^2+1)^2}$. $\left[\frac{1}{9}.\right]$

31. $\int\limits_{2\sqrt{2}}^4 x\sqrt{x^2-7}\,dx$. $\left[8\frac{2}{3}.\right]$

32. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}$. [0,5.]

33. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}$. [0,5.]

34. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{\cos^4 x}$. $\left[2\frac{1}{3}.\right]$

Вычислите определенные интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

35. $\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx$. [$e^{-2}$.]

36. $\int\limits_1^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{3x+1}}$. [8.]

37. $\int\limits_1^e x^2\ln x\,dx$. $\left[\frac{2e^3+1}{9}.\right]$

38. $\int\limits_0^2 (3-2x)e^{-3x}\,dx$. $\left[\frac{5e^{-6}+7}{9}.\right]$

Вычислите несобственные интегралы (или установите их расходимость):

39. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$. $\left[\frac{1}{3}.\right]$

40. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$. $\left[\frac{\pi}{6}.\right]$

41. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-5x}\,dx$. $\left[\frac{1}{5}.\right]$

42. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+5}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$. [Расходится.]

43. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$. $\left[\frac{1}{2}.\right]$

44. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$. $\left[-\frac{\pi^2}{8}.\right]$

45. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3}\,dx$. [Сходится.]

46. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$. [Сходится.]

47. $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. [Расходится.]

48. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = 4$. [24.]

49. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$. [1.]

50. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной полукубической параболой $y^2 = x^3$ и прямой $x = 4$. [25,6.]

51. Переходя к полярным координатам, вычислите площадь круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = 4$. [4π.]

52. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной первым витком спирали Архимеда $r = a\varphi$ и полярной осью. $\left[\frac{4}{3}\pi^3 a^2.\right]$

53. Найдите длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки $A(4;\ 8)$ (рис. 50). $\left[\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).\right]$

54. Найдите длину дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$ (рис. 51). [$6a$.]

55. Найдите длину одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (рис. 52). [$8a$.]

56. Найдите длину кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. [$8a$.]

57. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y^2 = 4x$, $0 \le x \le 3$. $\left[\frac{56}{3}\pi.\right]$

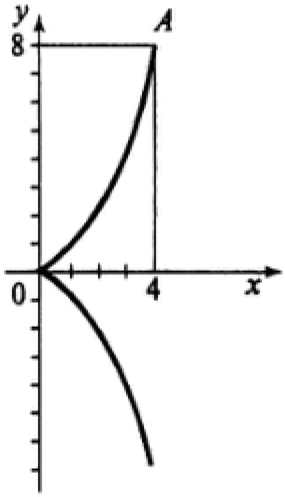


Рис. 50

58. Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$. $\left[\frac{64}{3}\pi a^2.\right]$

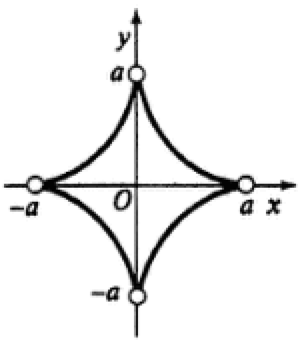


Рис. 51

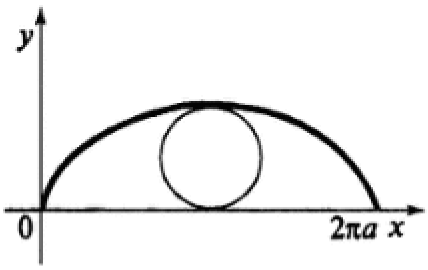


Рис. 52

59. Найдите площадь поверхности сферического сегмента, образованного вращением вокруг оси Ox дуги окружности $x^2+y^2=R^2$, соответствующей изменению x от a до R $(0<a<R)$. $[2\pi R(R-a).]$

60. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

$$\left[\frac{\pi}{8}(e^2-e^{-2})+\frac{\pi}{2}.\right]$$

61. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $y=0$ и расположенной в квадрантах I и II. $\left[\dfrac{4}{3}\pi ab^2.\right]$

62. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной полуволной синусоиды $y=\sin x$ $(0\le x\le\pi)$ и осью Ox.

$$\left[\frac{\pi^2}{2}.\right]$$

63. Найдите координаты центра тяжести той четверти окружности $x^2+y^2=1$ (с плотностью $\rho=1$), которая расположена в первом квадранте.

$$\left[x_C=\frac{2}{\pi},\ y_C=\frac{2}{\pi}.\right]$$

64. Найдите координаты центра тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $x=0$, $y=0$ и расположенной в квадранте I (плотность $\rho=1$). $\left[x_C=\dfrac{4a}{3\pi},\ y_C=\dfrac{4b}{3\pi}.\right]$

65. Найдите координаты центра тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$ $(0\le x\le\pi)$, $y=0$ $(\rho=1)$. $\left[x_C=\dfrac{\pi}{2},\ y_C=\dfrac{\pi}{8}.\right]$

66. Найдите путь, пройденный точкой за четвертую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v=3t^2-2t-3$ (м/с). [27 м.]

67. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v=18t-6t^2$ (м/с). [27 м.]

68. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3 Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05 м?

[0,075 Дж.]

69. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м? [12,5 Дж.]

70. Найдите производную скалярного произведения векторов $\bar{r}_1=3t\bar{i}+2\bar{j}+5\bar{k}$ и $\bar{r}_2=2\bar{i}-3t\bar{j}+\bar{k}$. [0.]

71. Напишите уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $x = \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \sin t$, $y = 1$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \cos t$ в точке A, для которой $t = 0$.

$$\left[\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1};\ \ x + z - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.\right]$$

72. Уравнение движения имеет вид $\bar{r} = t\,\bar{i} + t^2\,\bar{j} + t^3\,\bar{k}$. Определите скорость и ускорение движения в момент $t = 1$.

$$[\bar{v}(1) = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k};\ \ \bar{w}(1) = 2\bar{j} + 6\bar{k}.]$$

73. Найдите производную векторного произведения векторов $\bar{r}_1 = \bar{i}\,t + \bar{j}\,t^2 + \bar{k}\,t^3$, $\bar{r}_2 = \bar{i}\,t^2 + \bar{j}\,t^3 + \bar{k}\,t$.

$$\left[\frac{d(\bar{r}_1 \times \bar{r}_2)}{dt} = \bar{i}\,3t^2(1 - 2t^3) + \bar{j}\,t(5t^3 - 2).\right]$$

ГЛАВА 6. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 6.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Определение функции нескольких переменных.

Понятие функции одной переменной не охватывает все зависимости, существующие в природе. Даже в самых простых задачах встречаются величины, значения которых определяются совокупностью значений нескольких величин.

Пример 1. Площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y, выражается формулой $S=xy$, т. е. значения S определяются совокупностью значений x и y.

Пример 2. Абсолютная температура T, давление p и объем V данной массы газа связаны формулой Менделеева — Клайперона $pV=RT$, где R — некоторая постоянная. Отсюда, например, $V=\frac{RT}{p}$, т. е. значения V определяются совокупностью значений T и p.

Пример 3. Количество тепла Q, выделяемое электрическим током, зависит от напряжения U, силы тока I и времени t, причем $Q=0{,}24UIt$, т. е. значения Q определяются совокупностью значений U, I и t.

Дадим определение функции двух переменных.

Переменная z называется *функцией двух независимых переменных x и y*, если некоторым парам значений x и y по какому-либо правилу или закону ставится в соответствие определенное значение z.

Так, в примере 1 переменная S есть функция двух переменных x и y, а в примере 2 переменная V — функция двух переменных T и p. Аналогично скорость размножения бактерий в заданной популяции есть функция температуры и концентрации пищи.

Множество G пар значений x и y, которые могут принимать переменные x и y, называется *областью определения* или *областью существования функции*, а множество всех значений, принимаемых z в области определения,— *областью значений функции z*. Переменные x и y называют *аргументами функции z*. Символически функция двух переменных обозначается так: $z=f(x, y)$, $z=F(x, y)$, $z=\varphi(x, y)$, $z=z(x, y)$ и т. д.

Как известно, пара чисел x и y определяет положение точки M на плоскости xOy с координатами x и y (и, значит, радиус-вектор $\bar{r}=\overline{OM}$), и наоборот. Поэтому функцию двух переменных $z=f(x, y)$ можно рассматривать либо как функцию точки M и писать $z=f(M)$, либо как скалярную функцию векторного аргумента $\bar{r}$ и писать $z=f(\bar{r})$.

Способы задания функции двух переменных, как и в случае одной переменной, могут быть различными. В этой книге наиболее важным является аналитический способ задания, когда функция задается с помощью формулы. Областью определения функции в этом случае считается множество всех точек плоскости, для которых эта формула имеет смысл.

Пример 4. Областью определения функции $z=1-x-y$ является множество всех пар чисел (x, y), т. е. вся плоскость xOy, а областью значений этой функции — промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Пример 5. Для функции $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ область определения — вся плоскость xOy, а область значений — промежуток $[0; +\infty)$.

Пример 6. Областью определения функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ является множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $1-x^2-y^2\geq 0$ (здесь идет речь лишь о действительных значениях z) или неравенству $x^2+y^2\leq 1$, т. е. круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=1$, включая эту окружность (замкнутый круг). Область значений этой функции — отрезок $[0; 1]$.

Пример 7. Область определения функции $z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ есть круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=1$, исключая эту окружность (открытый круг), а область значений — промежуток $[1; +\infty)$.

Из рассмотренных примеров видно, что областью определения функции двух переменных может быть вся плоскость xOy или ее часть.

Известно, что каждой тройке чисел $(x; y; z)$ в пространстве $Oxyz$ соответствует точка $M(x; y; z)$ (и значит, радиус-вектор $\bar{r}=\overline{OM}$), и наоборот. Совершенно аналогично случаю двух переменных можно дать определение функции трех переменных $u=f(x; y; z)=f(M)=f(\bar{r})$. Областью определения функции трех переменных будет уже все пространство или его часть.

Аналогично можно дать определение функции четырех и более числа переменных.

Приведем пример функции многих переменных.

Пример 8. Тип почвы s зависит от климата c, растительности v, жизнедеятельности организмов o, материнской породы p, осадков r и времени t. Не касаясь того, каким образом каждая из этих переменных влияет на формирование данного типа почвы, можно сокращенно написать

$$s=f(c, v, o, p, r, t).$$

В дальнейшем будем подробно рассматривать функции двух переменных, так как все важнейшие факты теории функций нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных. Распространение определений и полученных результатов на функции трех и более переменных представляет собой, как правило, лишь технические трудности.

2. Геометрическое изображение функции двух переменных. Функции двух переменных допускают графическую иллюстрацию. *Графиком* функции $z=f(x, y)$, определенной в области G, называется множество точек $(x;\ y;\ z)$ пространства, у которых $(x;\ y)$ принадлежит G и $z=f(x,\ y)$. В наиболее простых случаях такой график представляет собой некоторую поверхность. Например, графиком функции из примера 4 (п. 1) является плоскость, проходящая через точки $(1;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 1;\ 0)$ и $(0;\ 0;\ 1)$; графиком функции из примера 5 (п. 1) — эллиптический параболоид.

Однако построение графиков функций двух переменных в большинстве случаев представляет значительные трудности. В связи с этим оказывается удобным геометрически описывать функции двух переменных, не выходя в трехмерное пространство. Средством такого описания являются *линии уровня.* Отметим на плоскости xOy все те точки $(x,\ y)$, в которых функция $f(x,\ y)$ принимает одно и то же значение, например значение, равное c. Иначе говоря, отмечаем те точки $(x,\ y)$, для которых

$$f(x,\ y)=c. \tag{6.1}$$

Множество этих точек и называется линией уровня функции $f(x,\ y)$. Понятно, что уравнение (6.1) есть уравнение этой линии. Придавая c различные значения и каждый раз строя линию с уравнением (6.1), получаем семейство линий уровня. Это семейство наглядно описывает функцию $f(x,\ y)$. Обычно рядом с линией уровня ставят то значение c, которому она соответствует.

Пример. Построить линии уровня функции

$$z=x^2+y^2. \tag{6.2}$$

Пересечем поверхность (6.2) плоскостью $z=c$ $(0\le c<+\infty)$. Задавая c различные значения, получаем семейство линий уровня, представляющих собой концентрические окружности. При $c=0$ окружность вырождается в точку $(0;\ 0)$ (рис. 53). Из того, что линиями уровня оказались окружности с центрами в начале координат, следует, что графиком данной функции должна быть поверхность вращения вокруг оси Oz. Действительно, как известно из аналитической геометрии, уравнение (6.2) определяет параболоид вращения.

Линиями уровня обозначают глубину морей и высоту гор на географических картах. Аналогичные линии описывают распределение

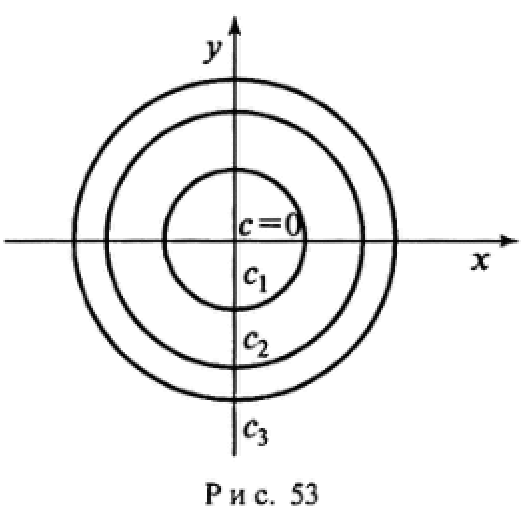


Рис. 53

тех или иных веществ в почве, распределение среднесуточной температуры и т. д.

3. Предел функции двух переменных. Множество точек $M(x;\ y)$, координаты которых x и y удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, или, короче, $MM_0<\delta$, называется *δ-окрестностью* точки $M_0(x_0;\ y_0)$. Другими словами δ-окрестность точки M_0 — это все точки, лежащие внутри круга с центром M_0 радиусом δ.

Определение. Число A называется *пределом функции* $z=f(x,\ y)=f(M)$ при стремлении точки M к точке $M_0(x_0;\ y_0)$, что кратко записывается $M\to M_0$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех точек M из области определения этой функции, удовлетворяющих условию $0<MM_0<\delta$, имеет место неравенство $|f(M)-A|<\varepsilon$. Обозначают это так:

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=A \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=A. \tag{6.3}$$

Функция $z=f(M)$ называется *бесконечно малой* при $M\to M_0$, если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=0$.

Все основные свойства о бесконечно малых и о пределах, установленные в гл. 1 (см. § 1.4 и 1.5) для функций одной переменной, обобщаются и на случай функций двух и большего числа переменных.

4. Непрерывность функции двух переменных. Пусть точка $M_0(x_0;\ y_0)$ принадлежит области определения функции $z=f(x,\ y)=f(M)$.

Определение. Функция $z=f(x,\ y)=f(M)$ называется *непрерывной* в точке M_0, если

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0), \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=f(x_0,\ y_0), \tag{6.4}$$

причем точка M стремится к точке M_0 произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Обозначим $x-x_0=\Delta x$, $y-y_0=\Delta y$. *Полным приращением функции* $z=f(x,\ y)=f(M)$ при переходе от точки M_0 к точке M называется разность значений функции в этих точках, а именно $\Delta z=f(M)-f(M_0)$, т. е. $\Delta z=f(x,\ y)-f(x_0,\ y_0)$.

Условие (6.4) непрерывности функции в точке M_0 равносильно условию

$$\lim_{M\to M_0} \Delta z=0, \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \Delta z=0.$$

Пример. Функция $z=x^2+y^2$ непрерывна в любой точке плоскости xOy, так как при любых значениях x и y величина $\Delta z=2x\Delta x+2y\Delta y+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$ стремится к нулю при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Арифметические операции над непрерывными в точке функциями приводят к непрерывным функциям в той же точке (при условии, что деление производится на функцию, не обращающуюся в этой точке в нуль). Это устанавливается так же, как для функций одной переменной (см. § 1.6, п. 1).

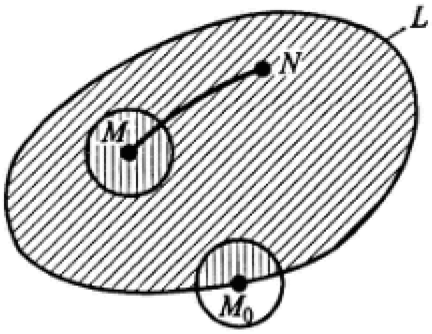


Рис. 54

5. Понятие области. *Областью*, или *открытой областью*, называется множество точек плоскости, обладающее следующими двумя свойствами:

1) каждая точка области принадлежит ей вместе с некоторой окрестностью этой точки (свойство *открытости*);

2) всякие две точки области можно соединить непрерывной линией (непрерывная линия — множество точек $M(x; y)$ плоскости, координаты которых заданы как непрерывные функции $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $a \leq t \leq b$), целиком лежащей в этой области (свойство *связности*).

Часть плоскости, лежащая внутри замкнутого контура L (рис. 54), является областью, так как, во-первых, для любой точки M, лежащей внутри L, существует окрестность, также лежащая внутри L; во-вторых, две любые точки M и N, лежащие внутри L, можно соединить непрерывной линией, также лежащей внутри L.

Точка M_0 называется *граничной* точкой области G, если любая окрестность этой точки содержит как точки области G, так и точки, ей не принадлежащие (см. рис. 54).

Множество всех граничных точек области называется ее *границей*. Любая точка контура L, очевидно, является граничной.

Если к открытой области присоединить ее границу, то полученное множество точек называется *замкнутой областью*. Так, область определения функции в примере 6 (п. 1) является замкнутой.

Если для данной области можно подобрать круг, полностью ее покрывающий, то такая область называется *ограниченной*. Например, области определения функций в примерах 6, 7 (п. 1) являются ограниченными.

Область G (открытая или замкнутая) называется *односвязной*, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит области G. Например, области определения функций в примерах 4—7 (п. 1) являются односвязными. Область же, заключенная между окружностями $x^2+y^2=2$ и $x^2+y^2=4$, не является односвязной, так как окружность $x^2+y^2=3$, лежащая в этой области, содержит внутри себя и точки, не принадлежащие области (например, начало координат).

Примечание. Все введенные в этом пункте понятия почти без изменения переносятся на пространство трех и большего числа измерений.

6. Основные свойства непрерывных функций двух переменных. В § 1.6 (п. 3) были рассмотрены свойства функций, непрерывных на отрезке. Эти свойства распространяются и на случай функций двух и большего числа переменных, непрерывных в ограниченной замкнутой области.

Функция $z=f(x, y)=f(M)$ называется *непрерывной* в открытой или замкнутой области, если она непрерывна в каждой точке этой области. При этом функция $f(M)$ считается непрерывной в граничной точке M_0, если в равенстве $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ точка M стремится к точке M_0 вдоль любого пути, принадлежащего данной области.

Если функция $z=f(M)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она в этой области

1) имеет наибольшее и наименьшее значения;

2) ограничена, $|f(M)| \le K$ (K — положительное число);

3) принимает все промежуточные значения между любыми двумя своими значениями, т. е. если $A < C < B$, где A и B — какие-то значения функции $f(M)$ в данной области, то в этой области существует точка M_0, в которой $f(M_0) = C$.

Из свойства 3, в частности, следует, что если M_1 и M_2 — точки данной области и $f(M_1) < 0$, а $f(M_2) > 0$, то в этой области существует точка M_0, в которой $f(M_0)=0$.

Примечание. Заметим, что на случай функций двух и большего числа переменных распространяется (см. [7]) теорема 5 из п. 1 § 1.6.

§ 6.2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1. Частные производные. *Частной производной* функции нескольких переменных по какой-нибудь переменной в рассматриваемой точке называется обычная производная по этой переменной, считая другие переменные фиксированными (постоянными). Например, для функции двух переменных $z=f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ частные производные определяются так:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\ y_0+\Delta y) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta y},$$

если эти пределы существуют. Величина $\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)$ ($\Delta_y z=f(x_0,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)$) называется *частным приращением* функции z в точке M_0 по аргументу x (y). Используются и другие обозначения частных производных:

$$z'_x,\ \frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,\ y_0),\ f'_x(x_0,\ y_0),$$

$$z'_y,\ \frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,\ y_0),\ f'_y(x_0,\ y_0).$$

Символы $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}$ как дроби трактовать нельзя (в этом отличие от случая одной переменной).

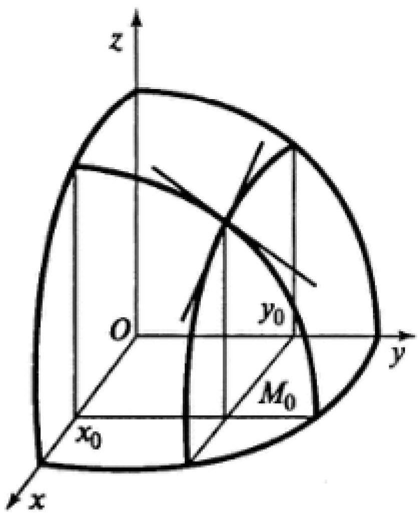


Рис. 55

Из определения следует геометрический смысл частной производной функции двух переменных: частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ ($f'_y(x_0, y_0)$) — *угловой коэффициент касательной к линии пересечения поверхности $z=f(x, y)$ и плоскости $y=y_0$ ($x=x_0$) в соответствующей точке* (рис. 55).

Пользуясь понятием скорости изменения переменной (см. § 2.1, п. 2), можно сказать, что частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ ($f'_y(x_0, y_0)$) есть скорость изменения функции $f(x, y)$ относительно x (y) при постоянном y (x).

Из определения частных производных следует, что правила вычисления их остаются теми же, что и для функций одной переменной (см. § 2.2), и только требуется помнить, по какой переменной ищется производная.

Пример 1. Если $z=x^2+y^2$, то $z'_x=2x$, $z'_y=2y$.

Пример 2. Если $p=\frac{RT}{V}$, то $p'_T=\frac{R}{V}$, $p'_V=-\frac{RT}{V^2}$. Величина p'_V называется *изотермическим коэффициентом упругости* идеального газа.

Аналогично определяются и обозначаются частные производные функции трех и большего числа независимых переменных.

2. Полный дифференциал. Как уже отмечалось (см. § 6.1, п. 4), полным приращением функции $z=f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), соответствующим приращениям Δx и Δy переменных x и y, называется выражение

$$\Delta z=\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0). \tag{6.5}$$

Если приращение (6.5) можно представить в виде

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \tag{6.6}$$

где A и B не зависят от Δx и Δy, а $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ стремятся к нулю при стремлении к нулю Δx и Δy, то функция $z=f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке (x_0, y_0), а линейная часть $A\Delta x+B\Delta y$ приращения функции (т. е. та часть Δz, которая зависит от Δx и Δy линейно) называется *полным дифференциалом* (или просто *дифференциалом*) этой функции в точке (x_0, y_0) и обозначается символом dz:

$$dz=A\Delta x+B\Delta y. \tag{6.7}$$

Из определения дифференцируемости функции следует, что если данная функция дифференцируема в точке (x_0, y_0), то она в этой точке непрерывна.

Действительно, если в точке (x_0, y_0) функция $z=f(x, y)$ дифференцируема, то для этой точки Δz представимо в форме (6.6), откуда следует, что

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0,$$

а это и означает, что в точке $(x_0,\ y_0)$ функция $z=f(x,\ y)$ непрерывна.

Из дифференцируемости функции в данной точке следует существование ее частных производных в этой точке *(необходимое условие дифференцируемости)*.

В самом деле, пусть функция $z=f(x,\ y)$ в точке $(x_0,\ y_0)$ дифференцируема. Тогда имеет место соотношение (6.6). Полагая в нем $\Delta y=0$, имеем

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x,\ \Delta y)\Delta x.$$

Деля на $\Delta x \neq 0$ и переходя к пределу $\Delta x \to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x, 0)) = A.$$

Это означает, что в точке $(x_0,\ y_0)$ существует частная производная функции $z=f(x,\ y)$ по x и

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A. \qquad (6.8)$$

Аналогично доказывается, что в точке $(x_0,\ y_0)$ существует частная производная

$$\frac{\partial z}{\partial y} = B. \qquad (6.9)$$

Используя формулы (6.8) и (6.9), можно переписать выражение (6.7) в виде

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \qquad (6.10)$$

Если в формуле (6.10) положить $z=x$, то $dz=dx=1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y=\Delta x$, т. е. $dx=\Delta x$. Аналогично, полагая $z=y$, получаем $dy=\Delta y$. Значит, дифференциалы независимых переменных совпадают с приращениями этих переменных, и можно записать дифференциал (6.7) в следующем виде: $dz=f'_x(x_0,\ y_0)dx+f'_y(x_0,\ y_0)dy$.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости). *Если функция $z=f(x,\ y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;\ y_0)$ и эти производные непрерывны в самой точке M_0, то эта функция дифференцируема в точке M_0.*

3. Производные и дифференциал сложной функции.

Пусть $z=f(x,\ y)$, где $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Тогда в итоге z будет функцией одной переменной t. Предположим, что z'_x, z'_y непрерывны и $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ существуют. Найдем $\frac{dz}{dt}$. Дадим переменной t приращение Δt. Тогда x, y, а следовательно, и z получат свои приращения Δx, Δy и Δz. В силу достаточного условия дифференцируемости

$$\Delta z = f'_x(x,\ y)\Delta x + f'_y(x,\ y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

откуда

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x, y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Устремим теперь Δt к нулю. Тогда Δx и Δy будут стремиться к нулю, так как функции x и y непрерывны (мы предположили существование производных x'_t и y'_t), а потому α и β также будут стремиться к нулю. В пределе получим

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f'_y(x, y)\frac{dy}{dt},$$

или, короче,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{6.11}$$

Формула (6.11) называется формулой *производной сложной функции*.

Пример 1. Пусть $z=f(x, y)$, $x=t^3+3$, $y=2t^4+1$. По формуле (6.11) имеем

$$\frac{dz}{dt} = 3t^2\frac{\partial z}{\partial x} + 8t^3\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Предположим, в частности, что роль независимой переменной играет x, т. е. рассмотрим функцию $z=f(x, y)$, где $y=\psi(x)$. Согласно формуле (6.11) будем иметь

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \tag{6.12}$$

так как $\frac{dx}{dx}=1$. В формуле (6.12) $\frac{\partial z}{\partial x}$ — частная производная по первому аргументу функции двух переменных $f(x, y)$, а $\frac{dz}{dx}$ — обычная производная сложной функции одной переменной x: $z=f(x, \psi(x))$. Последнюю производную будем называть *полной производной* функции. В случае когда $z=f(x, y)$, где $x=\varphi(y)$, аналогично получаем

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

($\frac{\partial z}{\partial y}$ — частная производная по второму аргументу функции $f(x, y)$, $\frac{dz}{dy}$ — полная производная функции одной переменной y: $z=f(\varphi(y), y)$).

Пусть теперь $x=\varphi(t, \tau)$, $y=\psi(t, \tau)$ (здесь предполагается существование первых производных функций x, y по t и τ). В этом случае z будет функцией двух независимых переменных t и τ. Следовательно, для этого случая формулу (6.11) нужно переписать в виде

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{6.13}$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau}. \tag{6.14}$$

Пример 2. Если $z=xy$, где $x=t\cos 2\tau$, $y=t^2\tau$, то $z'_t=y\cos 2\tau+2xt\tau$, $z'_\tau=-2yt\sin 2\tau+xt^2$.

Из формул (6.13) и (6.14) видно, что символ частной производной, как уже отмечалось выше, нельзя трактовать как дробь.

В самом деле, если бы можно было сократить на ∂x и ∂y, то из формул (6.13) и (6.14) получили бы, что

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2\frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial \tau} = 2\frac{\partial z}{\partial \tau}.$$

Предположим еще, что x'_t, x'_τ, y'_t и y'_τ непрерывны.

Если бы x и y были независимыми переменными, то полный дифференциал функции z был бы равен $dz = z'_x dx + z'_y dy$. В данном случае z зависит через посредство x, y от переменных t и τ, следовательно, $dz = z'_t dt + z'_\tau d\tau$. Но

$$z'_t = z'_x x'_t + z'_y y'_t$$

и

$$z'_\tau = z'_x x'_\tau + z'_y y'_\tau.$$

Поэтому

$$dz = (z'_x x'_t + z'_y y'_t)dt + (z'_x x'_\tau + z'_y y'_\tau)d\tau =$$
$$= z'_x(x'_t dt + x'_\tau d\tau) + z'_y(y'_t dt + y'_\tau d\tau).$$

Нетрудно видеть, что выражения, стоящие в скобках, являются дифференциалами функций x, y, поэтому можно записать

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Мы пришли к той же форме записи дифференциала, что и в случае, когда x и y были независимыми переменными.

4. Неявные функции и их дифференцирование. Как уже отмечалось (см. § 1.1, п. 4), если уравнение, с помощью которого задается функция одной переменной x, не разрешено относительно y, то эта функция называется *неявной*. Разрешая это уравнение относительно y, мы получаем ту же функцию, но уже заданную в явной форме. Однако часто бывает, что разрешить такое уравнение относительно y невозможно (например, $2^y - 2y + x^2 - 1 = 0$) или нецелесообразно; в этом случае уравнение так и оставляют неразрешенным, в общем виде (когда все его члены перенесены в левую часть):

$$F(x, y) = 0. \tag{6.15}$$

В связи с этим встает вопрос о том, как найти производную неявной функции, не разрешая уравнения (6.15) относительно y.

Если в уравнении (6.15), определяющем неявную функцию $y = f(x)$, задавать значения независимой переменной x, то для нахождения соответствующего значения y надо решать уравнение. Теперь, если в это уравнение подставить его решение, то получится тождество. Поэтому можно сказать также, что неявная функция $y = f(x)$, определенная уравнением (6.15),— это такая функция, которая, будучи подставлена в уравнение (6.15), обращает его в тождество. Дифференцируя это тождество по x согласно правилу дифференцирования сложной функции, получаем

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Отсюда при $F'_y(x, y) \neq 0$ вытекает формула для производной неявной функции

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{6.16}$$

Пример 1. Пусть y как функция от x задана соотношением $e^{xy} - x - y = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

Для $F(x, y) = e^{xy} - x - y$ имеем $F'_x(x, y) = ye^{xy} - 1$, $F'_y(x, y) = xe^{xy} - 1$ и, согласно формуле (6.16),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - ye^{xy}}{xe^{xy} - 1}.$$

Пусть уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \tag{6.17}$$

определяет z как неявную функцию $z = \varphi(x, y)$ независимых переменных x и y.

Пользуясь формулой (6.16), из равенства (6.17) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{6.18}$$

Пример 2. Найти частные производные неявной функции z, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Согласно формулам (6.18)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Рассмотрим некоторую поверхность

$$F(x, y, z) = 0 \tag{6.19}$$

и на ней точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Проведем через точку M_0 какую-нибудь линию L, целиком лежащую на поверхности (6.19) (рис. 56). Пусть параметрические уравнения линии L

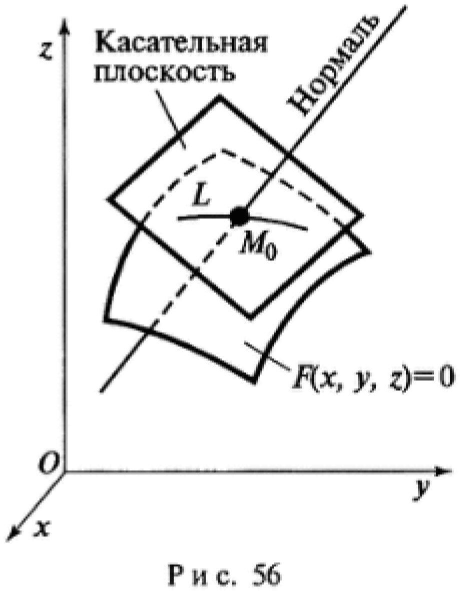


Рис. 56

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\omega(t),$$

причем при $t=t_0$ получаем координаты точки M_0. Так как каждая точка линии L лежит на данной поверхности (6.19), то при любом значении параметра t будет

$$F(\varphi(t),\ \psi(t),\ \omega(t))=0.$$

Но тогда это соотношение есть тождество относительно t. Дифференцируя его, находим

$$F'_x(\varphi(t),\ \psi(t),\ \omega(t))\varphi'_t+F'_y(\ldots)\psi'_t+F'_z(\ldots)\omega'_t=0.$$

Полагая здесь $t=t_0$, получаем

$$F'_x(M_0)\varphi'(t_0)+F'_y(M_0)\psi'(t_0)+F'_z(M_0)\omega'(t_0)=0. \qquad (6.20)$$

Касательная к линии L в точке M_0 определяется уравнениями

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}. \qquad (6.21)$$

Введем в рассмотрение прямую, определив ее уравнениями

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial z}}. \qquad (6.22)$$

Соотношение (6.20) показывает, что прямые (6.21), (6.22) перпендикулярны. Из уравнения (6.22) видно, что прямая (6.22) вполне определяется данной поверхностью (6.19) и выбранной на этой поверхности точкой M_0, но не зависит от кривой L, которую провели на поверхности (6.19) через точку M_0 произвольно. Следовательно, касательные, проведенные в точке M_0 к всевозможным кривым, лежащим на поверхности (6.19) и проходящим через точку M_0, перпендикулярны к одной и той же прямой (6.22) и потому лежат в одной плоскости, которую мы будем называть *касательной плоскостью* к данной поверхности в точке M_0, а прямую (6.22) — *нормалью* к данной поверхности в точке M_0.

Уравнение этой касательной плоскости как уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и перпендикулярной к прямой (6.22), есть

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z-z_0)=0. \qquad (6.23)$$

Если поверхность задана уравнением $z=f(x,\ y)$, то уравнение касательной плоскости будет получено как частный случай уравнения (6.23) при $F(x,\ y,\ z)=z-f(x,\ y)$. Тогда $F'_x=-f'_x$, $F'_y=-f'_y$, $F'_z=1$ и уравнение (6.23) примет вид

$$z-z_0-f'_x(x_0,\ y_0)(x-x_0)-f'_y(x_0,\ y_0)(y-y_0)=0.$$

Обозначив здесь $x-x_0=\Delta x$, $y-y_0=\Delta y$, $z-z_0=\Delta z$, получим

$$\Delta z=f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y,$$

или

$$df(x_0,\ y_0)=\Delta z,$$

т. е. *полный дифференциал функции двух переменных равен приращению аппликаты касательной плоскости.* Таково геометрическое толкование полного дифференциала функции $f(x, y)$.

Пример. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $z=x^2+y^2$ в точке $M_0(1;\ 1;\ 2)$.

Здесь $F=z-x^2-y^2$, $F'_x=-2x$, $F'_y=-2y$, $F'_z=1$. В точке M_0 имеем $F'_x=F'_y=-2$, $F'_z=1$. Поэтому согласно формулам (6.23) и (6.22) получим уравнение касательной плоскости $2x+2y-z-2=0$ и уравнение нормали

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

§ 6.3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Частные производные высших порядков. Частные производные функции нескольких переменных сами являются функциями этих переменных и могут иметь частные производные. Для исходной функции эти последние производные будут частными производными *второго порядка.* Так, для функции $z=f(x, y)$ двух независимых переменных можно определить (предполагается, что все производные существуют) четыре частные производные второго порядка, которые обозначаются символами

$$z''_{x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$z''_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\quad z''_{y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Частные производные z''_{xy} и z''_{yx}, отличающиеся порядком дифференцирования, называют *смешанными частными производными второго порядка.*

Аналогично определяются частные производные третьего, четвертого и старших порядков.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $z=e^{x-2y}$. Имеем

$$z'_x=e^{x-2y},\quad z'_y=-2e^{x-2y},$$

$$z''_{x^2}=e^{x-2y},\quad z''_{xy}=-2e^{x-2y},\quad z''_{yx}=-2e^{x-2y},\quad z''_{y^2}=4e^{x-2y}.$$

Здесь $z''_{xy}=z''_{yx}$. Оказывается, имеет место следующая теорема (см., например, [7]).

Теорема. *Смешанные производные второго порядка равны, если они непрерывны:* $f''_{xy}(x, y)=f''_{yx}(x, y)$.

Следствие. *Смешанные производные высших порядков равны, если они непрерывны и получены в результате дифференцирования по одним и тем же переменным одинаковое число раз, но может быть в разной последовательности.*

Покажем это на примере:

$$z'''_{x^2y} = ((z'_x)'_x)'_y = ((z'_x)'_y)'_x = ((z'_y)'_x)'_x \,,$$

т. е.

$$z'''_{x^2y} = z'''_{xyx} = z'''_{yx^2}.$$

Здесь дважды использовали только что отмеченную теорему: первый раз применительно к функции z'_x (мы изменили порядок ее дифференцирования), второй раз использовали равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$. В общем случае схема рассуждений аналогична.

2. Признак полного дифференциала. Выясним, при каких условиях выражение

$$P(x, \ y)dx + Q(x, \ y)dy, \tag{6.24}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка, является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y)$, или, кратко, полным дифференциалом.

Теорема. *Выражение* (6.24) *есть полный дифференциал тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

3. Дифференциалы высших порядков. Заметим прежде всего, что для функций нескольких переменных справедливы те же общие правила дифференцирования, что и для функций одной переменной (см. § 2.3, п. 4):

I. $d(u+v) = du + dv \quad (u = u(x, y), \ v = v(x, y))$.

II. $d(uv) = vdu + udv$.

III. $d(Cu) = Cdu \quad (C = \text{const})$.

IV. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \quad (v \neq 0)$.

Например, имеем

$$d(u+v) = (u+v)'_x dx + (u+v)'_y dy = u'_x dx + v'_x dx + u'_y dy + v'_y dy =$$
$$= (u'_x dx + u'_y dy) + (v'_x dx + v'_y dy) = du + dv.$$

Пусть имеется функция $z = f(x, y)$ независимых переменных x и y, обладающая непрерывными частными производными второго порядка. Рассмотрим ее полный дифференциал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(dx и dy — произвольные приращения), который назовем *полным дифференциалом первого порядка* (или кратко *первым дифференциалом*).

Так как $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ по предположению имеют непрерывные частные производные первого порядка, то от функции dz, в свою очередь, можно взять полный дифференциал $d(dz)$. Так получим *полный дифференциал второго порядка* (или кратко *второй дифференциал*), который обозначается d^2z.

Аналогично, потребовав существование непрерывных частных производных третьего, четвертого, ..., n-го порядков, можно получить полные дифференциалы соответственно третьего, четвертого, ..., n-го порядков.

Найдем выражение для второго дифференциала через частные производные. Пользуясь правилами I, III (dx и dy не зависят от x и y, т. е. рассматриваются как постоянные) и приведенной в п. 1 теоремой, можно записать

$$dz = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

(здесь $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$).

Последнюю сумму можно записать кратко так:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z.$$

Этот символ расшифровывается следующим образом. Сначала раскрываются скобки, как будто слагаемые в них числа, а число 2 — показатель степени. Затем числители полученных дробей умножаются на z. Формула для d^2z обобщается на случай d^nz:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

Этот символ расшифровывается так же, как и в случае $n=2$.

Подчеркнем, что в случае зависимых переменных x и y эти формулы, вообще говоря, не имеют места, так как в этом случае x и y являются функциями независимых переменных.

Пример 3. Если $z=(x+y)^2$, то $z''_{x^2} = z''_{xy} = z''_{y^2} = 2$ и $d^2z = 2(dx+dy)^2$.

§ 6.4. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Необходимые условия существования экстремума. Понятие максимума и минимума можно распространить и на функции нескольких переменных (здесь для случая двух переменных).

Говорят, что функция $z=f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ максимум (минимум), если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности и отличных от M_0 выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) < f(x, y))$$

или

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) < 0 \quad (\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0).$$

Теорема (необходимые условия существования экстремума). *Если функция* $z=f(x, y)$ *имеет в точке* $M_0(x_0; y_0)$ *экстремум и в этой точке существуют частные производные* z'_x *и* z'_y, *то*

$$f'_x(x_0, y_0)=0, \ f'_y(x_0, y_0)=0.$$

Доказательство. Из определения экстремума следует, что функция $f(x, y_0)$, рассматриваемая как функция одной переменной x, при $x=x_0$ также имеет экстремум. Поэтому (см. § 3.2, п. 2) $f'_x(x_0, y_0)=0$. Аналогично получаем равенство $f'_y(x_0, y_0)=0$.

Примечание. Приведенные условия существования экстремума не являются достаточными, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример. $z=x^3+y^3$, $z'_x=3x^2$, $z'_y=3y^2$. Производные равны нулю в точке (0; 0), но экстремума эта функция в точке (0; 0) не имеет, так как в любой окрестности этой точки она принимает значения разных знаков, а в самой точке (0; 0) $z=0$.

2. Достаточные условия существования экстремума. Достаточные условия существования экстремума для функций нескольких переменных имеют более сложный вид, чем для функций одной переменной. Приведем эти условия для случая двух переменных без доказательства (см. [5]).

Теорема (достаточные условия существования экстремума). *Пусть функция* $f(x, y)$, *непрерывная вместе со своими частными производными первого и второго порядков в некоторой окрестности точки* $M_0(x_0; y_0)$, *удовлетворяет условиям*

$$f'_x(x_0, y_0)=0, \ f'_y(x_0, y_0)=0.$$

Обозначим

$$A = f''_{x^2}(x_0, y_0), \ \ B = f''_{xy}(x_0, y_0),$$
$$C = f''_{y^2}(x_0, y_0), \ \ D = AC - B^2.$$

Тогда

1) *если* $D>0$, *то в точке* M_0 *функция* $f(x, y)$ *имеет экстремум, а именно максимум при* $A<0$ *и минимум при* $A>0$;

2) *если же* $D<0$, *то в точке* M_0 *функция* $f(x, y)$ *экстремума не имеет.*

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3-3xy$. Ее частные производные $z'_x=3x^2-3y$, $z'_y=3y^2-3x$ обращаются в нуль в точках $M_0(0; 0)$ и $M_1(1; 1)$. Ее вторые производные равны $z''_{x^2}=6x$, $z''_{xy}=-3$, $z''_{y^2}=6y$. В точке M_0 имеем $D=-9<0$, следовательно, экстремума в этой точке нет. В точке M_1 имеем $D=27>0$, причем $A=6>0$, следовательно, в точке M_1 — минимум.

Примечание. Отметим, что в случае $D=0$ экстремум может быть, а может и не быть.

Пример 2. $z=x^3+y^3$. В точке (0; 0), где $D=0$, эта функция, как показано выше (см. п. 1), экстремума не имеет.

Пример 3. $z=x^4+y^4$. В точке (0; 0), где $D=0$, эта функция имеет минимум, потому что в любой окрестности этой точки данная функция положительна, а в самой точке (0; 0) $z=0$.

З а д а ч а 1. В химической реакции участвуют три вещества с концентрациями x, y и z. Скорость реакции v в любой момент времени выражается законом

$$v = kx^2yz.$$

Найти концентрации x, y и z, при которых скорость v течения реакции максимальна.

Р е ш е н и е.

Пусть $x + y + z = 100(\%)$.

Тогда

$$z = 100 - x - y$$

и

$$v = kx^2y(100 - x - y). \tag{6.25}$$

Найдем частные производные функции v:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = k(200xy - 3x^2y - 2xy^2),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = k(100x^2 - x^3 - 2x^2y).$$

Приравнивая полученные выражения нулю, приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 200xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0, \\ 100x^2 - x^3 - 2x^2y = 0. \end{cases}$$

Так как значения $x = 0$ и $y = 0$ максимума функции (6.25) не дают, то сводим оба уравнения сокращением к виду

$$\begin{cases} 200 - 3x - 2y = 0, \\ 100 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $x = 50$, $y = 25$. Тогда $z = 25$. Легко проверить, что в точке $M_0(50,\ 25)$ $D > 0$ и $A < 0$.

Следовательно, при концентрациях $x = 50\ \%$, $y = 25\ \%$ и $z = 25\ \%$ скорость v течения реакции максимальна.

З а д а ч а 2. Реакция на инъекцию x единиц лекарственного препарата описывается функцией $y = x^2(a - x)te^{-t}$, где t выражается в часах с момента инъекции. Когда при заданной дозе лекарства реакция достигнет максимума?

Р е ш е н и е. Имеем

$$\frac{\partial y}{\partial t} = x^2(a - x)\frac{\partial}{\partial t}(te^{-t}) = x^2(a - x)e^{-t}(1 - t).$$

При заданной дозе лекарства x реакция y максимальна, когда $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$. Этот максимум наступает при $t = 1$, т. е. спустя 1 ч после инъекции.

3. Метод наименьших квадратов. В естествознании приходится пользоваться эмпирическими формулами, составленными на основе опыта и наблюдений. Один из наилучших методов получения таких формул — это способ *наименьших квадратов*. Изложим идею этого способа, ограничиваясь случаем линейной зависимости двух величин.

Пусть требуется установить зависимость между двумя величинами x и y (например, температурой и удлинением металлического стержня). Производим соответствующие измерения (например, n измерений) и результаты измерений сводим в таблицу:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Будем рассматривать x и y как прямоугольные координаты точек на плоскости. Предположим, что точки $(x_k;\ y_k)$, $k=1, \ldots, n$ группируются вдоль некоторой прямой линии (рис. 57). Естественно в этом случае считать, что между x и y существует приближенная линейная зависимость, т. е.

$$y = ax + b. \tag{6.26}$$

Назовем *уклонением* (или *отклонением*) разность между точным значением функции (6.26) в точке x_k и соответствующим значением y_k из таблицы: $\varepsilon_k = ax_k + b - y_k$. Сумма квадратов уклонений — функция величин a и b:

$$U(a, b) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2.$$

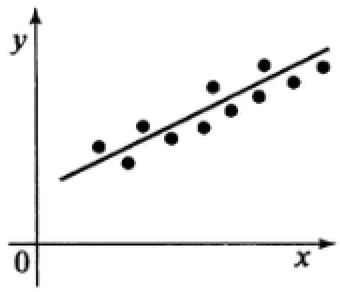


Рис. 57

В методе наименьших квадратов на величины a и b накладывается условие — они должны доставлять минимум сумме квадратов уклонений $U(a, b)$. Требуется найти a и b, удовлетворяющие этому условию. Для этого (см. п. 1) необходимо, чтобы

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 2\sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)x_k = 2a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2b\sum_{k=1}^{n} x_k - 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial b} = 2\sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k) = 2a\sum_{k=1}^{n} x_k + 2bn - 2\sum_{k=1}^{n} y_k = 0.$$

Отсюда

$$\begin{cases} a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k, \\ a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k + bn = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k. \end{cases} \tag{6.27}$$

Это окончательный вид так называемой нормальной системы способа наименьших квадратов. Пусть $a = a_0$, $b = b_0$ — решение системы (6.27). Можно доказать, что a_0 и b_0 доставляют величине $U(a, b)$ минимум. Функция (6.26) при $a = a_0$ и $b = b_0$ дает эмпирическую формулу $y = a_0 x + b_0$.

Пример. Результаты измерения величин x и y даны в таблице:

x	–2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

Предполагая, что между x и y существует линейная зависимость $y=ax+b$, способом наименьших квадратов определить коэффициенты a и b. Здесь $n=5$,

$$\sum_{k=1}^{5} x_k^2 = 25, \quad \sum_{k=1}^{5} x_k = 5, \quad \sum_{k=1}^{5} x_k y_k = 16{,}5, \quad \sum_{k=1}^{5} y_k = 8,$$

и нормальная система (6.27) принимает вид

$$\begin{cases} 25a + 5b = 16{,}5\,, \\ 5a + 5b = 8\,. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $a=0{,}425$, $b=1{,}175$. Поэтому $y=0{,}425x+1{,}175$.

§ 6.5. СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ

1. Понятие скалярного поля. Пусть Ω — область в пространстве. Если каждой точке M из Ω ставится в соответствие по известному закону некоторое число $u=u(M)$, то говорят, что в области Ω задано *скалярное поле* u. Иными словами, задать скалярное поле — означает задать скалярную функцию $u=u(M)$, называемую *функцией поля*. Запись $u(M)$ означает, что величина u является, как говорят (см. § 6.1, п. 1), *функцией точки*. Заметим, что областью Ω может быть и все пространство.

Если величина $u=u(M)$ не зависит от времени, то скалярное поле u называется *стационарным* (или *установившимся*). Мы будем рассматривать только стационарные скалярные поля.

Поле температуры внутри нагретого тела, поле плотности массы, поле распределения потенциала в электрическом поле — примеры скалярных полей.

Запись $u=u(M)$ не предполагает введения в пространстве никакой системы координат. Если же пространство отнесено к некоторой системе координат, например к прямоугольной системе координат $Oxyz$, то задание точки M равносильно заданию ее координат x, y, z в этой системе и функция поля $u(M)$ превращается в обычную функцию трех переменных $u(x, y, z)$. Мы всегда будем предполагать, что эта функция имеет непрерывные частные производные.

Можно ввести в пространстве и другие системы координат, например цилиндрическую или сферическую. В цилиндрической системе координат функция поля $u=u(r, \varphi, z)$, в сферической $u=u(r, \varphi, \theta)$.

2. Поверхности уровня. Скалярные поля часто изображают геометрически с помощью так называемых поверхностей уровня.

Поверхностью уровня скалярного поля $u(M)$ называется множество точек пространства, в которых функция поля u имеет постоянное значение.

Уравнение поверхности уровня в прямоугольной системе координат $Oxyz$ имеет вид $u(x, y, z)=c$, где c — некоторая постоянная.

Заметим, что в курсе физики при рассмотрении поля потенциала поверхности уровня называют обычно *эквипотенциальными поверхностями* (т. е. поверхностями равного потенциала).

Придавая c различные значения, получаем семейство поверхностей уровня.

Указанный способ изображения скалярного поля удобен, если речь идет о *плоском* скалярном поле, т. е. о поле, заданном в плоской области. Функция u этого поля зависит только от двух переменных x и y. Поэтому плоские скалярные поля геометрически изображают с помощью *линий уровня* (см. § 6.1, п. 2).

В случае поля температур на плоскости линии уровня называют *изотермами*, в случае поля давлений — *изобарами* и т. д.

3. Лапласиан скалярного поля. Пусть дано скалярное поле $u=u(x, y, z)$. Дифференциальный оператор второго порядка

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

называют *оператором Лапласа* или *лапласианом*.

Выражение лапласиана в цилиндрических координатах имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

4. Производная поля по направлению.

Определение. *Производной скалярного поля $u(M)$ в точке M по направлению $\bar{n}$* называется предел (если он существует) отношения приращения Δu функции $u(M)$ при смещении точки M в направлении вектора $\bar{n}$ (рис. 58) к величине этого смещения $d=MM_1$, когда последнее стремится к нулю; она обозначается символом $\frac{\partial u}{\partial n}$:

Рис. 58

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \lim_{d\to 0}\frac{\Delta u}{d} = \lim_{d\to 0}\frac{u(M_1)-u(M)}{d}. \qquad (6.28)$$

Выведем для $\frac{\partial u}{\partial n}$ формулу, удобную в вычислительном отношении. Пусть x, y, z — координаты фиксированной точки M, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\bar{n}$. Тогда точка M_1 будет иметь координаты $x+d\cos\alpha$, $y+d\cos\beta$, $z+d\cos\gamma$. Величины $x, y, z, \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ фиксированы, поэтому $u(M_1)$ является функцией только смещения d. Обозначим эту функцию через $\psi(d)$:

$$\psi(d)=u(x+d\cos\alpha,\ \ y+d\cos\beta,\ \ z+d\cos\gamma).$$

Имеем $\psi(0)=u(x, y, z)$. Следовательно, в силу равенства (6.28)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \lim_{d\to 0}\frac{\psi(d)-\psi(0)}{d} = \psi'(0).$$

Формула производной сложной функции (см. § 6.2, п. 3) дает

$$\psi'(d) = u'_x(M_1)\cos\alpha + u'_y(M_1)\cos\beta + u'_z(M_1)\cos\gamma,$$

откуда

$$\psi'(0) = u'_x(M)\cos\alpha + u'_y(M)\cos\beta + u'_z(M)\cos\gamma,$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{6.29}$$

Из формулы (6.29) видно, что если направление $\bar{n}$ совпадает с положительным направлением оси Ox, т. е. $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Аналогично, если направление $\bar{n}$ будет совпадать с направлением оси Oy (Oz), $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial y}\left(= \frac{\partial u}{\partial z}\right)$.

Подобно тому как частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ характеризуют скорость изменения функции u в направлении осей координат (см. § 6.2, п. 1), так и производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial n}$ будет являться *скоростью* изменения функции $u(x, y, z)$ в точке M по направлению $\bar{n}$. *Абсолютная величина производной* $\frac{\partial u}{\partial n}$ по направлению $\bar{n}$ определяет величину скорости, а *знак производной* — характер изменения функции u (возрастание или убывание). В этом состоит *физический* смысл производной по направлению.

Из формулы (6.29) следует, что производная по направлению $\bar{n}'$, *противоположному направлению $\bar{n}$, равна производной по направлению $\bar{n}$, взятой с обратным знаком.* Действительно, при перемене направления углы α, β, γ изменятся на π.

Если поле u плоское, то направление $\bar{n}$ вполне определено углом α его наклона к оси абсцисс. Формулу для производной по направлению в случае такого поля можно получить из общей формулы (6.29), положив $\gamma = \frac{\pi}{2}$ и $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. При этом, если $\alpha = 0$, то $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}$, а если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial y}$.

5. Градиент скалярного поля. Пусть дано скалярное поле $u = u(M) = u(x, y, z)$.

Определение. Вектор $\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$ называется *градиентом скалярного поля $u = u(M)$ в точке M* и обозначается $\operatorname{grad} u$:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}. \tag{6.30}$$

Обозначим через $\bar{n}_0$ $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ единичный вектор направления $\bar{n}$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{n}_0 \operatorname{grad} u = |\operatorname{grad} u|\cos\varphi = \text{пр}_{\bar{n}} \operatorname{grad} u,$$

где φ — угол между векторами $\operatorname{grad} u$ и $\bar{n}$.

Значит, *производная скалярного поля* $u(M)$ *в точке* M *в данном направлении равна проекции градиента поля в точке* M *на это направление*. Отсюда следует, что $\frac{\partial u}{\partial n}$ в точке M имеет *наибольшее значение в направлении градиента* (для этого направления $\varphi = 0$ и $\cos 0 = 1$). В этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial n} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Таким образом, $\operatorname{grad} u$ *есть вектор, указывающий направление наибольшего возрастания скалярного поля в данной точке и имеющий модуль, равный скорости этого возрастания*. В этом состоит *физический* смысл градиента.

В плоском скалярном поле $u = u(M) = u(x, y)$ градиент определяется равенством

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}.$$

Пример. Определить градиент скалярного поля потенциала электростатического поля, образованного точечным зарядом величины q, помещенным в начале координат.

Из электростатики известно, что упомянутый потенциал в точке $M(x;\ y;\ z)$ равен $u = \frac{q}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. По формуле (6.30) находим

$$\operatorname{grad} u = -\frac{q}{r^2}\frac{x}{r}\bar{i} - \frac{q}{r^2}\frac{y}{r}\bar{j} - \frac{q}{r^2}\frac{z}{r}\bar{k} = -\frac{q}{r^2}\frac{\bar{r}}{r} = -\frac{q}{r^2}\bar{r}_0,$$

где $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ — радиус-вектор точки M, а $\bar{r}_0 = \frac{\bar{r}}{r}$ — единичный вектор в направлении радиуса-вектора. Вектор $\bar{E} = \frac{q}{r^2}\bar{r}_0$ называется *вектором напряженности* рассматриваемого электростатического поля в точке M. Таким образом, $\operatorname{grad} u = -\bar{E}$.

6. Оператор набла и исчисление градиентов. Английским математиком Уильямом Гамильтоном (1805—1865) был введен векторный дифференциальный оператор

$$\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

называемый *оператором набла**. В этой формуле величина, к которой прилагается оператор ∇, должна быть поставлена под знаком частных производных (операторов дифференцирования) $\frac{\partial}{\partial x}$ и т. д. При этом существенно отметить, что единичные векторы следует писать до операторов дифференцирования, так как эти операторы действуют на выражения, стоящие справа от них.

Поэтому

$$\nabla u = \bar{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \text{или} \quad \nabla u = \operatorname{grad} u.$$

---

* Набла (от греч.— *арфа*) — музыкальный инструмент, по форме напоминающий перевернутый треугольник.

Из известных (см. § 6.2) правил дифференциального исчисления функций нескольких переменных вытекают следующие простые правила:

1. $\nabla(C_1u + C_2v) = C_1\nabla u + C_2\nabla v$ (C_1, C_2 — постоянные; u, v — функции переменных x, y, z).

2. $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$.

3. $\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$.

4. $\nabla f(u, v) = f'_u\nabla u + f'_v\nabla v$.

Аналогично в случае $f(u, v, w)$.

Упражнения

Найдите область существования следующих функций:

1. $u = 4 - x + 2y$. [Вся плоскость xOy.]

2. $u = \dfrac{3}{x^2 + y^2}$. [Вся плоскость xOy, кроме точки (0; 0).]

3. $u = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$. [Квадранты I и III: $x > 0$, $y > 0$ и $x < 0$, $y < 0$.]

4. $u = \arccos(x + y)$. [Полоса $-1 \le x + y \le 1$.]

5. $u = \ln(x + y) + x - y + 1$. [Полуплоскость $x + y > 0$.]

6. $u = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$. [Круг $x^2 + y^2 < 4$.]

7. $u = \arcsin(x^2 + y^2)$. [Круг $x^2 + y^2 \le 1$.]

8. $u = \dfrac{xy}{x - y}$. [Вся плоскость xOy, кроме прямой $y = x$.]

9. $u = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$. [Вся плоскость xOy, кроме осей Ox и Oy.]

10. $u = \ln x \ \ln y$. [Квадрант I: $x > 0$, $y > 0$.]

11. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}$. [Квадрант I: $x > 0$, $y > 0$.]

Найдите частные производные первого порядка от следующих функций:

12. $u = x^3 + 3x^2y - y^3$. [$u'_x = 3x^2 + 6xy$, $u'_y = 3x^2 - 3y^2$.]

13. $u = x^3 + 3x^2y - y^2$. [$u'_x = 3x^2 + 6xy$, $u'_y = 3x^2 - 2y$.]

14. $u = \sqrt{x + 3y}$. $\left[u'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3y}},\ u'_y = \dfrac{3}{2\sqrt{x+3y}}.\right]$

15. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. $\left[u'_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2},\ u'_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}.\right]$

16. $u = \operatorname{arctg}(2x - y)$. $\left[u'_x = \dfrac{2}{1 + (2x - y)^2},\ u'_y = -\dfrac{1}{1 + (2x - y)^2}.\right]$

17. $u=(1-x)^{y^2}$. $\quad [u'_x=-y^2(1-x)^{y^2-1},\ u'_y=2y(1-x)^{y^2}\ln(1-x).]$

18. $u=(1+xy)^y$. $\quad \left[u'_x=\dfrac{y^2u}{1+xy},\ u'_y=u\left(\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right).\right]$

19. $u=x^3y^2+2x\ln y+x^y$. $\quad \left[u'_x=3x^2y^2+2\ln y+yx^{y-1},\ u'_y=2x^3y+\dfrac{2x}{y}+x^y\ln x.\right]$

20. $u=x^3\sin y+y^4$. $\quad [u'_x=3x^2\sin y,\ u'_y=x^3\cos y+4y^3.]$

21. $u=x^6-y^4$. $\quad [u'_x=6x^5,\ u'_y=-4y^3.]$

В следующих примерах для функции u найдите u'_x и u'_y в указанной точке:

22. $u=\dfrac{x+y}{x-y}$; $A(2;1)$. $\quad$ [В точке $A(2;\ 1)$ $u'_x=-2;\ u'_y=4.$]

23. $u=\dfrac{1-xy}{1+xy}$; $A(0;1)$. $\quad$ [В точке $A(0;\ 1)$ $u'_x=-2;\ u'_y=0.$]

24. $u=x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$; $B(1;1)$. $\quad$ [В точке $B(1;\ 1)$ $u'_x=\dfrac{2}{3};\ u'_y=\dfrac{3}{2}.$]

25. При лечении некоторого заболевания одновременно назначают два препарата. Реакция на инъекцию x ед. первого препарата и y ед. второго препарата выражается функцией $z=x^2y^2(a-x)(b-y)$. Какое количество y второго препарата вызывает максимальную реакцию при фиксированном количестве x первого препарата? $\quad \left[\dfrac{2b}{3}.\right]$

Найдите полные дифференциалы первого порядка от функций:

26. $u=\dfrac{5x+3y}{9x-2y}$. $\quad \left[du=\dfrac{37(-ydx+xdy)}{(9x-2y)^2}.\right]$

27. $u=\ln(3x+2y)$. $\quad \left[du=\dfrac{3dx+2dy}{3x+2y}.\right]$

28. $u=e^{2x}\sin 3y$. $\quad [du=e^{2x}(2\sin 3y\,dx+3\cos 3y\,dy).]$

29. $u=xe^{-xy}$. $\quad [du=e^{-xy}[(1-xy)dx-x^2dy].]$

30. $u=x^2+3xy$. $\quad [du=(2x+3y)dx+3x\,dy.]$

31. $u=x^2-2xy-y^2$. $\quad [du=2[(x-y)dx-(x+y)dy].]$

32. $u=x^y$. $\quad \left[du=x^y\left(\dfrac{y}{x}dx+\ln x\,dy\right).\right]$

33. $u=\dfrac{x}{y}$. $\quad \left[du=\dfrac{1}{y}dx-\dfrac{x}{y^2}dy.\right]$

34. $u=\ln(xy)$. $\quad \left[du=\dfrac{dx}{x}+\dfrac{dy}{y}.\right]$

35. $u=x^2+xy^2+\sin y$. $\quad [du=(2x+y^2)dx+(2xy+\cos y)dy.]$

В следующих упражнениях, считая, что $x = x(t)$, $y = y(t)$, найдите $\frac{du}{dt}$:

36. $u = ye^x + 1$. $\left[\frac{du}{dt} = e^x\left(y\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right).\right]$

37. $u = \cos\frac{x}{y}$. $\left[\frac{du}{dt} = \frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}\right)\sin\frac{x}{y}.\right]$

38. $u = \ln(4 + x^2 + y^2)$. $\left[\frac{du}{dt} = \frac{2}{4 + x^2 + y^2}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right).\right]$

Найдите $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial \tau}$, считая, что $x = x(t, \tau)$, $y = y(t, \tau)$:

39. $u = e^{\frac{y^2}{x}}$. $\left[\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{y}{x}e^{\frac{y^2}{x}}\left(-\frac{y}{x}\frac{\partial x}{\partial t} + 2\frac{\partial y}{\partial t}\right),\right.$

$\left.\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{y}{x}e^{\frac{y^2}{x}}\left(-\frac{y}{x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + 2\frac{\partial y}{\partial \tau}\right).\right]$

40. $u = x\,\mathrm{tg}\,y$. $\left[\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{tg}\,y\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{x}{\cos^2 y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{\cos y}\left(\sin y\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{x}{\cos y}\frac{\partial y}{\partial t}\right),\right.$

$\left.\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\cos y}\left(\sin y\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{x}{\cos y}\frac{\partial y}{\partial \tau}\right).\right]$

41. Найдите $\frac{dy}{dx}$ от функций, заданных неявно:

а) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; $\left[\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.\right]$

б) $xy - \ln y = 0$; $\left[\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy}.\right]$

в) $ye^x + e^y = 0$. $\left[\frac{dy}{dx} = -\frac{ye^x}{e^x + e^y}.\right]$

42. Напишите уравнение касательной плоскости к поверхности $z = x^2 + 2y^2$ в точке (1; 1; 3). $[2x + 4y - z = 3.]$

43. Напишите уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ в точке (1; 1; 1). $[x + y - z = 1.]$

44. Напишите уравнение нормали к поверхности:

а) $z = x^2 + y^2$ в точке (1; 1; 3); $\left[\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}.\right]$

б) $x^2 + y^2 = z^2$ в точке (3; 4; 5). $\left[\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{-5}.\right]$

Найдите частные производные второго порядка от функций

45. а) $u = x^3 - 4x^2y + 5y^2$; $[u''_{x^2} = 6x - 8y;\ u''_{xy} = -8x;\ u''_{y^2} = 10.]$

б) $u = e^x \ln y$. $\left[u''_{x^2} = e^x \ln y;\ u''_{xy} = \frac{e^x}{y};\ u''_{y^2} = -\frac{e^x}{y^2}.\right]$

46. $u = \sin(x+y)$. $[u''_{x^2} = u''_{xy} = u''_{y^2} = -\sin(x+y).]$

47. $u = x \operatorname{arctg} y$. $\left[u''_{x^2} = 0;\ u''_{xy} = \frac{1}{1+y^2};\ u''_{y^2} = -\frac{2xy}{(1+y^2)^2}.\right]$

48. $u = e^{-\frac{y}{x}}$. $\left[u''_{x^2} = \frac{y}{x^3} e^{-\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x} - 2\right);\ u''_{xy} = \frac{y}{x^2} e^{-\frac{y}{x}}\left(1 - \frac{y}{x}\right);\ u''_{y^2} = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{y}{x}}.\right]$

Найдите указанные частные производные третьего порядка от функций:

49. $u = x^5 + 3y^3 + 2x - y;\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = ?\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = ?$ $\left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 60x^2;\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 18.\right]$

50. $u = \cos(x-y);\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = ?$ $\left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -\sin(x-y).\right]$

51. $u = \frac{y}{x} + 10;\ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = ?\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = ?$ $\left[\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0;\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{2}{x^3}.\right]$

52. $u = y \ln x;\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = ?\ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = ?$ $\left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{2y}{x^3};\ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0.\right]$

53. Выясните, какие из данных выражений являются полными дифференциалами:

$(x^2 + y^2)dx + 2xy\,dy;$

$\frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy;$

$2y\,dx - 2x\,dy.$

[Первые два выражения являются полными дифференциалами, третье — нет.]

Напишите дифференциалы второго порядка для следующих функций:

54. $u = x^2 + y^2$. $[2(dx^2 + dy^2).]$

55. $u = x + xy + 1$. $[2dx\,dy.]$

56. $u = x \sin^2 y$. $[2 \sin 2y\,dx\,dy + 2x \cos 2y\,dy^2.]$

57. $u = e^{x+y^2}$. $[e^{x+y^2}(dx^2 + 4y\,dx\,dy + (2+4y^2)dy^2).]$

Исследуйте на экстремум следующие функции:

58. $u = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$.

$\left[u_{\min} = 422{,}25 \text{ в точке } \left(\frac{17}{2}; -\frac{11}{2}\right).\right]$

59. $u = 2x^3 + xy^2 - 216x$.

[В точке (–6; 0) функция имеет максимум ($u_{\max} = 864$), в точке (6; 0) — минимум ($u_{\min} = -864$). В точках $(0;\ 6\sqrt{6})$ и $(0;\ -6\sqrt{6})$ функция не имеет экстремума.]

60. $u = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$. [$u_{min} = -7$ в точке (1; 2).]

61. $u = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y$. [Экстремума нет.]

62. $u = xy(1 - x - y)$.

$$\left[u_{max} = \frac{1}{27} \text{ в точке } \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right); \text{ в точках } (0;\ 0),\ (1;\ 0) \text{ и } (0;\ 1) \text{ экстремума нет.}\right]$$

63. $u = x^3 - y^3 - 3xy$.

[$u_{max} = 1$ в точке (–1; 1), в точке (0; 0) экстремума нет.]

64. $u = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

$$\left[u_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ в точке } \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right).\right]$$

65. $u = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

[В точке (0; 3) функция имеет максимум ($u_{max} = 9$).]

66. $u = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

$$\left[\text{В точке } (-2;\ 0) \text{ функция имеет минимум} \left(u_{min} = -\frac{2}{e}\right).\right]$$

67. Найдите прямоугольный параллелепипед наибольшего объема при данной сумме $12a$ всех его ребер. [Куб.]

68. Найдите размеры открытого прямоугольного бассейна объемом V, на облицовку которого надо затратить минимум материала.

$$\left[x = y = \sqrt[3]{2V},\ H = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}, \text{ где } x \text{ и } y \text{ — размеры дна и } H \text{ — высота.}\right]$$

69. В химической реакции участвуют три вещества с концентрациями x, y и z. Скорость реакции v в любой момент времени выражается законом $v = kxy^2z$.

Найдите концентрации x, y и z, при которых скорость течения реакции максимальная.

[$x = 25$ %, $y = 50$ %, $z = 25$ %.]

70. Приводятся данные о внесении минеральных удобрений и урожае сахарной свеклы с гектара за 5 лет:

Год	Минеральные удобрения, ц	Урожай с 1 га, т
1971	4	20
1972	5	24
1973	6	29
1974	8	35
1975	9	50

Предполагая линейную зависимость урожайности от количества внесенных удобрений $y = ax + b$, найдите по этим данным коэффициенты a и b, применяя способ наименьших квадратов.

[$a \approx 5{,}4$; $b \approx -2{,}9$.]

71. Что представляют собой поверхности уровня следующих скалярных полей: а) $u = x^2 + y^2 + z^2$; б) $u = x^2 + y^2 - z^2$?

72. Найдите оператор Лапласа следующих скалярных полей:

а) $u = x^2 + y^2 - 5x + 2y + 1$;

б) $u = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} + z$;

в) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

$$\left[\text{а) } \Delta u = 2; \text{ б) } \Delta u = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}; \text{ в) } \Delta u = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.\right]$$

73. Найдите производную скалярного поля $u(M) = xy + yz + 1$ в точке M по направлению вектора $\overline{n}(12; -3; -4)$. $\left[\dfrac{8y - 3(x + z)}{13}.\right]$

74. Найдите производную скалярного поля $u = xyz$ по направлению вектора $\overline{n}(1; -2; 2)$ в точке $A(1; 1; 1)$. [1/3.]

75. Найдите производную плоского скалярного поля $u = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ по направлению, идущему из начала координат в точку $P(3; 4)$, в начале координат. [–1/5.]

76. Найдите $\operatorname{grad} r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. $\left[\dfrac{x}{r}\bar{i} + \dfrac{y}{r}\bar{j} + \dfrac{z}{r}\bar{k}.\right]$

77. Найдите градиент плоского скалярного поля $u = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ в точке $A(2; 1)$. $\left[\dfrac{2}{3}\bar{i} + \dfrac{1}{3}\bar{j}.\right]$

78. Найдите направление наибольшего роста функции $u = x^2 + y^2 + 2xy + z^2$ в точке $A(1; 1; 0)$. [Положительное направление оси Ox.]

ГЛАВА 7. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 7.1. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.

Задача о массе неоднородной пластины. Пусть плоская область G заполнена веществом с известной плотностью $\rho(M)=\rho(x, y)$. Найти массу (количество вещества) всей материальной области — «пластины». Под плотностью вещества в точке M понимается предел средней плотности бесконечно малой части G, содержащей точку M. Разобьем область G произвольным образом (рис. 59) на n частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ без общих внутренних точек, площади которых обозначим соответственно через Δw_1, $\Delta w_2, \ldots, \Delta w_n$. Предположим, что в пределах каждой частичной области плотность постоянна и равна $\rho(N_k)$ для Δ_k, где $N_k(\xi_k; \eta_k)$ — произвольная точка частичной области Δ_k. Тогда масса Δ_k приближенно равна

$$\Delta m_k \approx \rho(\xi_k;\ \eta_k)\Delta w_k.$$

Для массы всей пластины получим приближенное выражение

$$m=\sum_{k=1}^{n}\Delta m_k \approx \sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k, \eta_k)\Delta w_k. \tag{7.1}$$

Пусть λ — наибольший из диаметров частичных областей. Заметим, что диаметром области называется наибольшее из расстояний между точками ее границы. Например, диаметр прямоугольника равен его диагонали, диаметр эллипса — его большой оси. Для круга это определение диаметра совпадает с обычным. Сумма (7.1) будет тем точнее выражать искомую массу m, чем меньше будет каждый из диаметров частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Поэтому за массу m естественно принять

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k, \eta_k)\Delta w_k.$$

Примечание. Схема, приведшая к формуле (7.1), может быть использована не только для подсчета массы рассмотренной пластины. Пусть на плоскости в области G распределены некие частицы. Это могут быть радиоактивные частицы, электроны и т. д. Это могут быть и живые частицы — бактерии, простейшие насекомые. Каждый раз, когда надо выразить суммарный эффект от всех частиц, распределенных в области G (суммарную радиоактивность, суммарный заряд, суммарную биомассу), согласно рассмотренной схеме приходим к формуле, аналогичной формуле (7.1), где

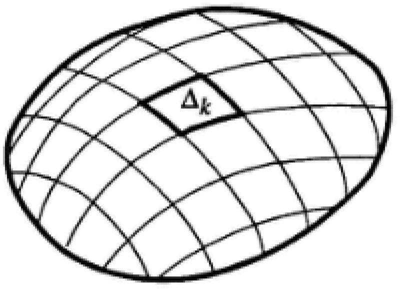


Рис. 59

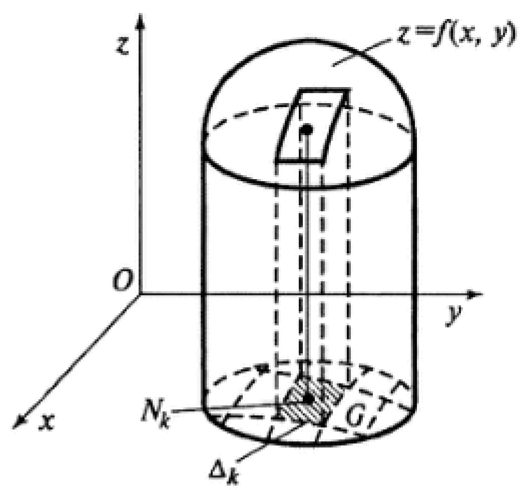


Рис. 60

вместо массы m будет суммарная радиоактивность, суммарный заряд, суммарная биомасса, а вместо плотности вещества соответствующая плотность.

При этом плотность $\rho(M)$ будем полагать непрерывной функцией, определенной в области G. Этот принцип замены функции, определенной на конечном множестве точек, некоторой непрерывной функцией уже применялся ранее (см. § 1.6, п. 3).

Задача об объеме цилиндроида. Пусть дана функция $f(x, y)$, непрерывная и неотрицательная в области G. Найти объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x, y)$, снизу областью G и с боков прямой цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит замкнутый контур, ограничивающий область G (рис. 60). Такое тело для краткости будем называть *цилиндроидом*. В частности, когда верхнее основание цилиндроида есть плоскость, параллельная нижнему основанию, то цилиндроид называется *цилиндром*. Примером цилиндра служит круговой цилиндр.

Для нахождения объема V данного цилиндроида разобьем область G произвольным образом на n частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ без общих внутренних точек, площади которых обозначим соответственно через $\Delta w_1, \Delta w_2, \ldots, \Delta w_n$. В каждой из этих частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ выберем произвольную точку $N_k(\xi_k; \eta_k)$ и построим прямой цилиндрический столбик с основанием Δ_k и высотой $f(\xi_k; \eta_k)$. Объем такого столбика равен $f(\xi_k; \eta_k)\Delta w_k$. Сумма объемов этих цилиндрических столбиков представляет собой объем ступенчатого тела, приближенно заменяющего объем данного цилиндроида. Следовательно,

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta w_k.$$

Эта сумма будет тем точнее выражать искомый объем V, чем меньше будет каждый из диаметров частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Поэтому за объем V естественно принять

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta w_k,$$

где λ — наибольший из диаметров частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

2. Определение двойного интеграла. Из решения приведенных выше задач п. 1 видим, что, хотя эти задачи имеют различный смысл, математический аппарат для их решения один и тот же. Во всех этих задачах получаем выражение одного и того же вида

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta w_k, \tag{7.2}$$

где $f(x, y)$ — функция, заданная в области G.

Определение. Если существует предел (7.2), не зависящий от способа разбиения области G на частичные области Δ_k и выбора точек $N_k(\xi_k; \eta_k)$ в них, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается символом

$$\iint_G f(x, y) dw = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta w_k. \tag{7.3}$$

Функция $f(x, y)$ в этом случае называется *интегрируемой* в области G. При этом $f(x, y)$ называется *подынтегральной функцией*, *dw — элементом площади; G — областью интегрирования; x* и *y — переменными интегрирования;* сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta w_k$ — *интегральной суммой.*

Примечание. Для двойного интеграла используется также обозначение $\iint\limits_G f(x, y) dx\, dy$.

Определение. Кривая называется *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная, и при переходе от точки к точке положение этой касательной меняется непрерывно. Поэтому кривая, заданная уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, будет гладкой, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, не обращающиеся в нуль одновременно (тем самым кривая в каждой точке имеет касательную). Непрерывная кривая, составленная из конечного числа гладких кусков, называется *кусочно-гладкой.*

Справедлива следующая теорема (она следует из более общей теоремы, устанавливаемой в полных курсах математического анализа; см., например, [5], т. 2).

Теорема существования двойного интеграла. *Если область G с кусочно-гладкой границей Γ ограничена и замкнута, а функция $f(x, y)$ непрерывна в области G, то эта функция интегрируема в области G.*

В дальнейшем будем предполагать, что условия этой теоремы выполнены.

Из рассмотренных выше задач (см. п. 1) и определения двойного интеграла следует, что 1) двойной интеграл (7.3) с положительной подынтегральной функцией может быть истолкован физически, например как масса соответствующей пластины, если $f(x, y)$ — ее плотность; биологически — как суммарная биомасса бактерий (или насекомых), находящихся в области G, если $f(x, y)$ — плотность бактерий (насекомых); 2) тот же интеграл с неотрицательной подынтегральной функцией может быть истолкован геометрически как объем соответствующего цилиндроида. В частности, двойной интеграл от единичной функции $[f(x, y) \equiv 1]$ по области G, т. е. интеграл $\iint\limits_G dw$, численно равен площади области интегрирования: $S_G = \iint\limits_G dw$.

3. Свойства двойного интеграла. Эти свойства, как и их доказательства, аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла. Поэтому приведем их без доказательства.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла.

2. Двойной интеграл от суммы двух функций равен сумме двойных интегралов от этих функций.

Примечание. Свойство 2 распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа функций.

3. Пусть область G разбита на две области G_1 и G_2. Тогда

$$\iint\limits_G f(x, y)dw = \iint\limits_{G_1} f(x, y)dw + \iint\limits_{G_2} f(x, y)dw.$$

4. Если функция $f(x, y) > 0$ в области G, то $\iint\limits_G f(x, y)dw > 0$.

5. Двойной интеграл равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования на площадь этой области (теорема о среднем).

4. Вычисление двойных интегралов. Пусть требуется вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G f(x, y)dw$ от непрерывной в области G функции $f(x, y)$.

Случай прямоугольной области. Пусть область G — прямоугольник $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ (кратко $[a, b; c, d]$). Разобьем область G на частичные области прямыми, параллельными координатным осям (рис. 61) и проходящими через точки $x_0 = a$, x_1, ..., x_{m-1}, $x_m = b$ оси Ox и точки $y_0 = c$, y_1, ..., y_{p-1}, $y_p = d$ оси Oy. Тогда область G разобьется на прямоугольники, наибольший из диаметров которых

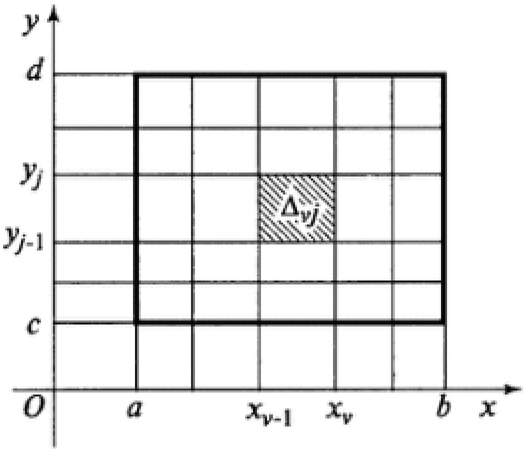


Рис. 61

обозначим через λ. Пусть $\Delta_{\nu j}$ — прямоугольник, являющийся пересечением ν-го столбца и j-й горизонтальной полосы. Площадь его будет $\Delta w_{\nu j} = \Delta x_\nu \Delta y_j$, где $\Delta x_\nu = x_\nu - x_{\nu-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Выберем точку $(\xi_{\nu j}; \eta_{\nu j})$ так, чтобы $\xi_{\nu j} = x_{\nu-1}$, $j = 1, 2, \ldots, p$. Тогда интегральная сумма будет

$$\sigma = \sum_{\nu, j} f(x_{\nu-1}, \eta_{\nu j}) \Delta x_\nu \Delta y_j, \tag{7.4}$$

где сумма распространена по всем прямоугольникам, т. е. по всем значениям ν и j: $\nu = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, p$.

Сумма вида (7.4) с двумя индексами суммирования называется *двойной интегральной суммой*. Для ее вычисления можно сначала произвести суммирование по j при фиксированном ν, т. е. сложить слагаемые, отвечающие одному (любому) столбцу, а затем результаты просуммировать по ν. Тогда получим

$$\sigma = \sum_{\nu=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{p} f(x_{\nu-1}, \eta_{\nu j}) \Delta x_\nu \Delta y_j \right) = \sum_{\nu=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{p} f(x_{\nu-1}, \eta_{\nu j}) \Delta y_j \right) \Delta x_\nu .$$

Разумеется, такой переход от двойной суммы к *повторной* можно было бы осуществить и вторым способом: первое, внутреннее, суммирование произвести по ν, а второе, внешнее,— по j.

Используя одно из свойств определенного интеграла (см. § 5.2, п. 1, свойство 4) и теорему о среднем (см. § 5.2, п. 4), будем иметь

$$\int_c^d f(x_{\nu-1}, y) dy = \sum_{j=1}^{p} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_{\nu-1}, y) dy = \sum_{j=1}^{p} f(x_{\nu-1}, \eta_{\nu j}) \Delta y_j .$$

Следовательно,

$$\sigma = \sum_{\nu=1}^{m} \Phi(x_{\nu-1}) \Delta x_\nu , \tag{7.5}$$

где

$$\Phi(x_{\nu-1}) = \int_c^d f(x_{\nu-1}, y) dy. \tag{7.6}$$

Перейдя в равенстве (7.5) к пределу при $\lambda \to 0$ (при $\lambda \to 0$ $\max \Delta x_\nu \to 0$; как и прежде, λ — наибольший из диаметров частичных областей), будем иметь

$$\iint_G f(x, y) dw = \int_a^b \Phi(x) dx,$$

или с учетом равенства (7.6)

$$\iint_G f(x, y) dw = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx . \tag{7.7}$$

Обычно формулу (7.7) записывают в виде

$$\iint_G f(x,y)dw = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy. \tag{7.8}$$

Выражение, стоящее в правой части последней формулы, называют *повторным интегралом*. Для его вычисления надо последовательно взять два обычных определенных интеграла: сначала *внутренний интеграл*

$$\int_c^d f(x,y)dy,$$

в котором x считается постоянной, а затем полученное выражение (оно зависит от x) проинтегрировать по x от a до b — *внешний интеграл*.

Аналогично при втором способе перехода от двойной интегральной суммы к повторной получили бы

$$\iint_G f(x,y)dw = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx. \tag{7.9}$$

Пример. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_G (x^2 + y^2)dw,$$

где G — квадрат $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. По формуле (7.8) имеем

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2)dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Этот же двойной интеграл можно вычислить и по формуле (7.9).

Случай произвольной области. Пусть теперь G — область на плоскости xOy, изображенная на рис. 62. Тогда вместо формул (7.8) и (7.9) будем иметь соответственно формулы

$$\iint_G f(x,y)dw = \int_b^a dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \tag{7.10}$$

($y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ — уравнения нижней и верхней частей контура, ограничивающего область G, на которые он делится точками A и B) и

$$\iint_G f(x,y)dw = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \tag{7.11}$$

($x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$ — уравнения левой и правой частей контура, ограничивающего область G (см. рис. 62), на которые он делится точками C и D.)

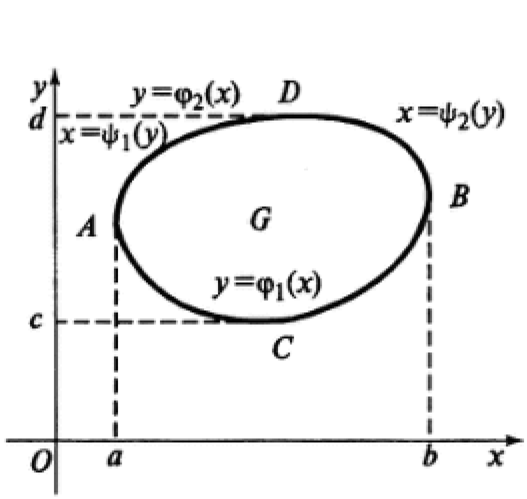


Рис. 62

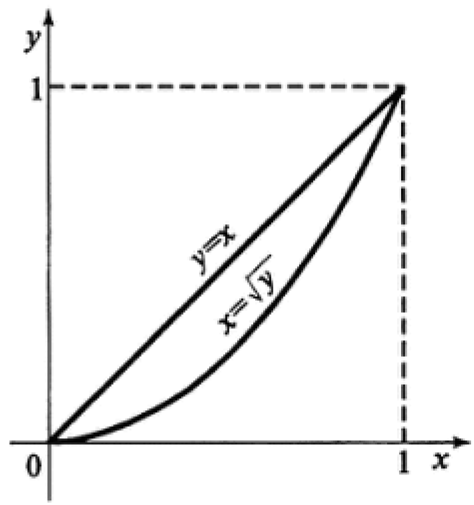


Рис. 63

Формулы (7.10), (7.11) получены при условии, что граница области G пересекается прямыми, параллельными оси Oy (Ox), не более чем в двух точках. Если это условие нарушено, то область G разбивают на части.

Пример. Найти

$$\iint\limits_G (x+y)dx\,dy$$

по области G, ограниченной линиями $y=x$, $y=x^2$ (рис. 63). Интегрируя сначала по y, а потом по x, получаем

$$\iint\limits_G (x+y)dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (x+y)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right)dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20}.$$

Проверить результат можно, изменив порядок интегрирования.

5. Двойной интеграл в полярных координатах. Пусть рассматривается двойной интеграл

$$\iint\limits_G f(x,y)dw,$$

где G — область на плоскости xOy. Как известно, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Разобьем область G на частичные области посредством координатных линий полярной системы, т. е. линий $r=\text{const}$ и $\varphi=\text{const}$ (рис. 64). Выделим частичную область, для которой центральный угол $\Delta\varphi$ и боковая сторона Δr, а радиус, соответствующий нижнему основанию этой области, r (значит, нижнее основание $r\Delta\varphi$). Эту частичную область, представляющую собой криволинейный четырехугольник, можно принять приближенно за прямоугольник со сторонами Δr и $r\Delta\varphi$. Это — замена с точностью до малых высшего порядка, так как площадь криволинейного четырехугольника будет

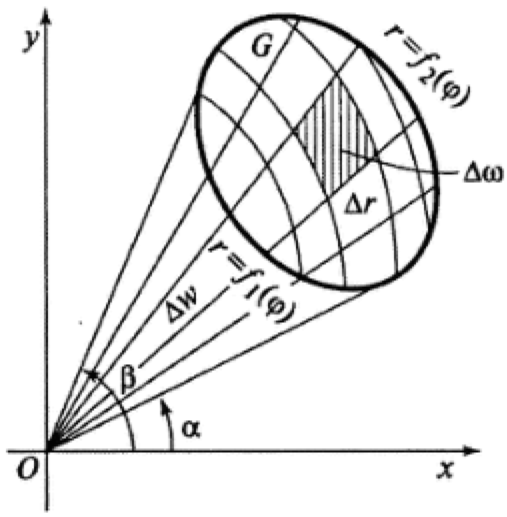


Рис. 64

$$\frac{(r+\Delta r)^2\Delta\varphi}{2}-\frac{r^2\Delta\varphi}{2}=r\Delta r\Delta\varphi+\frac{(\Delta r)^2\Delta\varphi}{2}.$$

Тогда $\Delta w = r\Delta r\Delta\varphi$, и мы будем иметь

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_G f(x_k, y_k)\Delta w_k = \lim_{\lambda\to 0}\sum f(r_k\cos\varphi_k, r_k\sin\varphi_k)r_k\Delta r_k\Delta\varphi_k$$

$\left(\sum\limits_G f(x_k, y_k)\Delta w_k\right.$ — интегральная сумма для $f(x, y)$ по области $\left.G\right)$ или

$$\iint_G f(x, y)dw = \iint_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi. \tag{7.12}$$

Переходя к повторному интегралу, получаем

$$\iint_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi\int_{f_1(\varphi)}^{f_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr, \tag{7.13}$$

где смысл пределов интегрирования показан на рис. 64.

Замечание. Если подынтегральная функция или уравнение границы области интегрирования содержит сумму x^2+y^2, то в большинстве случаев упрощение интеграла достигается преобразованием его к полярным координатам, так как данная сумма в полярных координатах получает весьма простой вид

$$(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=r^2.$$

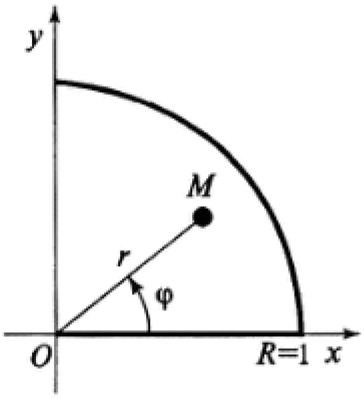
Пример. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$I=\iint_G\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

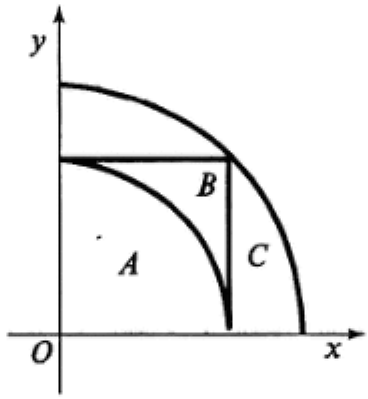
где G — первая четверть круга радиусом $R=1$ с центром в начале координат (рис. 65).

Имеем

$$\sqrt{x^2+y^2}=r.$$



Р и с. 65



Р и с. 66

В области G r меняется в пределах от 0 до 1, а φ — от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, по формулам (7.12) и (7.13) получаем

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 dr = \frac{\pi}{2}.$$

6. Интеграл Эйлера — Пуассона*. Так называется следующий интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \to +\infty} \int_0^R e^{-x^2} dx. \qquad (7.14)$$

Он встречается, например, в теории вероятностей и в статистической физике. Докажем, что он сходится, и найдем его величину.

Пусть A — четверть круга радиусом R, B — квадрат со стороной R, содержащий A, и C — четверть круга радиусом $R\sqrt{2}$, содержащая B (рис. 66). Согласно свойствам двойного интеграла имеем

$$\iint_A e^{-x^2-y^2} dw < \iint_B e^{-x^2-y^2} dw < \iint_C e^{-x^2-y^2} dw. \qquad (7.15)$$

Интегралы по областям A и C вычислим в полярных координатах:

$$\iint_A e^{-x^2-y^2} dw = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}),$$

$$\iint_C e^{-x^2-y^2} dw = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2}).$$

Интеграл по области B сведем к квадрату определенного интеграла

$$\iint_A e^{-x^2-y^2} dw = \int_0^R e^{-x^2} dx \int_0^R e^{-y^2} dy = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)^2.$$

* Симеон Дени Пуассон (1781—1840) — французский математик и физик.

Соотношение (7.15) теперь примет вид

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) < \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2}),$$

откуда

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-R^2}} < \int_0^R e^{-x^2}dx < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2R^2}}.$$

Крайние члены этого неравенства при $R\to\infty$ стремятся к $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Поэтому в силу известной теоремы (см. § 1.5, п. 1, теорема 5) $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Следовательно, интеграл (7.14) сходится, и он равен

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

7. Вычисление площади кривой поверхности. Пусть σ — участок поверхности $z=f(x, y)$, а область G — его проекция на координатную плоскость xOy (рис. 67). Предположим, что функция $f(x, y)$ и ее первые частные производные непрерывны в области G вплоть до границы. Требуется найти площадь S поверхности σ (здесь и в § 8.2 так кратко называем участок поверхности).

Разобьем область G на n частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ без общих внутренних точек, площади которых обозначим соответственно через $\Delta w_1, \Delta w_2, ..., \Delta w_n$. В каждой из этих частичных областей Δ_k выберем произвольную точку $N_k(\xi_k; \eta_k)$. Этой точке будет соответствовать на поверхности σ точка $M_k(\xi_k; \eta_k; \theta_k)$, где $\theta_k=f(\xi_k; \eta_k)$. Построим в точке M_k касательную плоскость к поверхности σ и нормаль к этой поверхности (рис. 68).

На касательной плоскости рассмотрим фигуру Δ'_k (площадь ее обозначим через $\Delta w'_k$), которую вырезает из этой плоскости прямой цилиндр с основанием Δ_k. Таким образом, поверхность σ покроется плоскими пластинками Δ'_k, сумма площадей которых дает приближенное значение площади S поверхности σ, т. е.

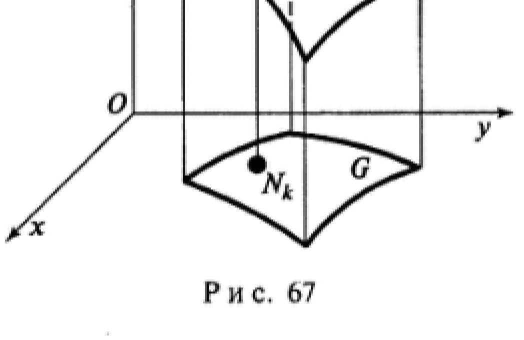


Рис. 67

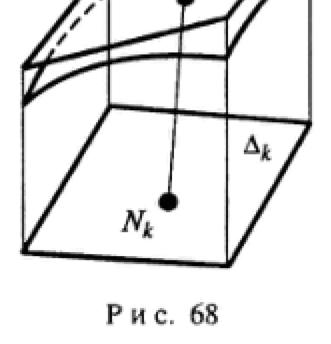


Рис. 68

$$S \approx S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta w'_k .$$

Площадь S поверхности σ определим как $\lim_{\lambda \to 0} S_n$, где λ — наибольший из диаметров частичных областей. Этот предел существует, причем

$$S = \iint_G \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}\, dw$$

(см., например, [1], гл. 12).

Пример. Вычислить площадь поверхности сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Уравнение верхней половины сферы

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

В этом случае

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Имеем

$$\frac{1}{2} S = \iint_G \frac{R\, dx\, dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

где область интегрирования определяется условием $x^2 + y^2 \leq R^2$. Перейдя в этом интеграле к полярным координатам, получим

$$S = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{R\, r\, dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} =$$

$$= -2R\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - r^2}\,\Big|_0^R d\varphi = 2R\int_0^{2\pi} R\, d\varphi = 4\pi R^2.$$

8. Приложения двойного интеграла в механике. Ранее (см. п. 1) уже отмечались приложения двойного интеграла в геометрии и в некоторых разделах физики и биологии. Укажем еще на его приложения в механике.

Статические моменты и центр тяжести пластинки. Начнем с вычисления статических моментов рассматривавшейся выше пластинки (см. п. 1) относительно осей координат. Для этого сосредоточим в точках $N_k(\xi_k;\ \eta_k)$ массы соответствующих частичных областей и найдем статические моменты полученной системы материальных точек (см. § 5.6):

$$M_x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta w_k, \quad M_y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta w_k.$$

Переходя здесь к пределу при обычных условиях, получаем подобно случаю, рассмотренному в § 5.6,

$$M_x = \iint\limits_G y\rho(x, y)dw, \quad M_y = \iint\limits_G x\rho(x, y)dw.$$

Наконец, по определению центра тяжести имеем

$$x_C = \frac{M_y}{m}, \quad y_C = \frac{M_x}{m},$$

где m — масса пластинки.

Отсюда в случае однородной пластинки

$$x_C = \frac{1}{S}\iint\limits_G x\,dw, \quad y_C = \frac{1}{S}\iint\limits_G y\,dw,$$

где S — площадь пластинки.

Пример 1. Найти центр тяжести однородного ($\rho = 1$) полукруга, ограниченного осью Ox и полуокружностью $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Из соображений симметрии заключаем, что $x_C = 0$. Далее имеем

$$S = \frac{\pi R^2}{2},$$

$$M_x = \iint\limits_G y\,dw = \iint\limits_G r^2 \sin\varphi\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{R} r^2 dr =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \frac{r^3}{3}\sin\varphi\Big|_0^R d\varphi = \frac{R^3}{3}\int\limits_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi = -\frac{R^3}{3}\cos\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}R^3.$$

Поэтому

$$y_C = \frac{4R}{3\pi} \approx 0{,}424R.$$

Этот же результат был получен ранее (см. § 5.6, пример 2) с помощью второй теоремы Гульдена.

Моменты инерции пластины. *Моментом инерции* материальной точки P массой m относительно какой-либо оси называется произведение массы m на квадрат расстояния от точки P до этой оси.

Метод составления выражений для моментов инерции пластины относительно осей координат такой же, какой применялся для вычисления статических моментов. Поэтому приведем лишь окончательные результаты:

$$J_x = \iint\limits_G y^2\rho(x, y)dw, \quad J_y = \iint\limits_G x^2\rho(x, y)dw.$$

Отметим еще, что интеграл $\iint\limits_G xy\rho(x, y)dw$ называется *центробежным моментом инерции* и обозначается J_{xy}.

В механике часто рассматривают *полярный момент инерции* точки, равный произведению массы точки на квадрат расстояния от нее до данной точки — полюса. Полярный момент инерции пластины относительно начала координат будет равен

$$J_0 = \iint_G (x^2 + y^2)\rho(x, y)dw = J_x + J_y.$$

Пример 2. Для однородного ($\rho = 1$) полукруга $x^2 + y^2 \le R^2$, $y \ge 0$ имеем

$$J_y = \iint_G x^2 dw = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R (r\cos\varphi)^2 r dr = \frac{1}{8}\pi R^4.$$

§ 7.2. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Тройной интеграл является полным аналогом двойного интеграла. Поэтому изложение этого параграфа будем вести по возможности кратко.

1. Задачи из естествознания, приводящие к понятию тройного интеграла. Задача о массе неоднородного тела. Пусть пространственная (трехмерная) область Ω заполнена веществом с известной плотностью $\rho(M) = \rho(x, y, z)$. Найти массу всей материальной области — «тела». Разобьем область Ω произвольным образом на n частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ без общих внутренних точек, объемы которых обозначим соответственно через $\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots, \Delta v_n$. Предположим, что в пределах каждой частичной области плотность постоянна и равна $\rho(N_k)$ для частичной области Δ_k, где $N_k(\xi_k; \eta_k; \theta_k)$ — произвольная точка этой частичной области. Тогда масса Δ_k приближенно равна $\rho(\xi_k; \eta_k; \theta_k)\,\Delta v_k$. Для массы всего тела получим приближенное выражение

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \theta_k)\Delta v_k.$$

Эта сумма будет тем точнее выражать искомую массу m, чем меньше будет каждый из диаметров частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. (Определение диаметра трехмерной области такое же, как и определение диаметра плоской области (см. § 7.1, п. 1).) За массу m естественно принять

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \theta_k)\Delta v_k,$$

где λ — наибольший из диаметров частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Примечание. Аналогично можно подсчитать общую радиоактивность частиц, распределенных в области Ω, общий электрический заряд тела, общее количество микроорганизмов и т. д.

2. Определение тройного интеграла. Будем рассматривать выражение

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \theta_k)\Delta v_k, \tag{7.16}$$

где $f(x, y, z)$ — функция, заданная в области Ω.

Определение. Если существует предел (7.16), не зависящий от способа разбиения области Ω на частичные области Δ_k и выбора точек $N_k(\xi_k;\ \eta_k;\ \theta_k)$ в них, то он называется *тройным интегралом* от функции $f(x,\ y,\ z)$ по области Ω и обозначается символом

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dv = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \theta_k)\Delta v_k. \tag{7.17}$$

Функция $f(x,\ y,\ z)$ в этом случае называется *интегрируемой* в области Ω.

Терминология для тройных интегралов аналогична соответствующей терминологии для двойных интегралов. Так же формулируется и теорема существования тройного интеграла.

Если $f(x,\ y,\ z)$ —соответствующая плотность, то интеграл (7.17) имеет и соответствующий естественный смысл (например, физический или биологический).

Из определения тройного интеграла следует, что при $f(x,\ y,\ z) \equiv 1$ интеграл (7.17) численно равен объему области интегрирования, т. е.

$$\iiint\limits_{\Omega} dv = V_{\Omega}. \tag{7.18}$$

Свойства двойных интегралов, перечисленные в п. 3 § 7.1, полностью переносятся на тройные интегралы. Заметим лишь, что

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dv = f(\xi, \eta, \theta)V_{\Omega}.$$

где $(\xi,\ \eta,\ \theta)$ — некоторая точка области Ω *(теорема о среднем).*

3. Вычисление тройных интегралов. Вычисление тройного интеграла так же, как и двойного, может быть сведено к ряду однократных интегрирований. Пусть для простоты область Ω есть тело, ограниченное сверху поверхностью $z = z_2(x,\ y)$, снизу поверхностью $z = z_1(x,\ y)$, а с боков цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz (рис. 69). Тогда, подобно формуле (10) (для двойного интеграла) из § 7.1 имеем следующую формулу:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dv = \iint\limits_{G} \left(\int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz \right) dw,$$

где G — проекция области Ω на плоскость xOy. Здесь во внутреннем определенном интеграле x и y считаются постоянными. После того как этот внутренний интеграл будет вычислен, получим выражение, зависящее от x и y. Эту функцию от двух переменных надо затем проинтегрировать по плоской области G. Двойной же интеграл, как установлено в § 7.1 (п. 4), сводится к двум определенным интегралам.

Пример. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_{\Omega} (x + y + z)dv,$$

где Ω — область, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ (рис. 70).

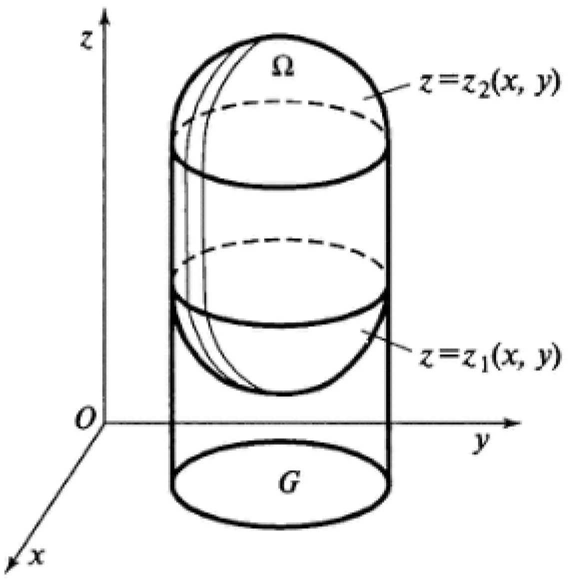


Рис. 69

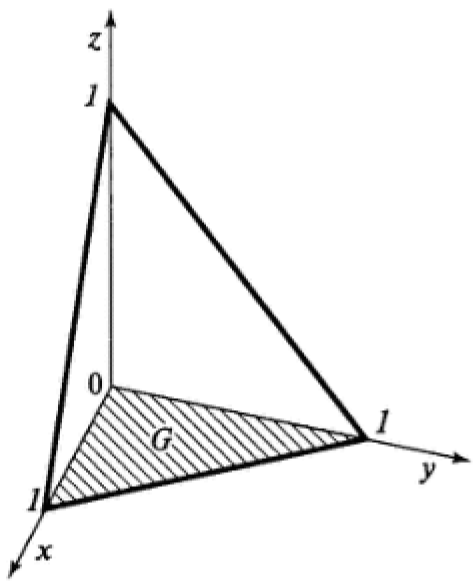


Рис. 70

Интегрирование по z совершается от $z=0$ до $z=1-x-y$. Поэтому, обозначая проекцию области Ω на плоскость xOy через G, получаем

$$I = \iint\limits_G \left(\int\limits_0^{1-x-y} (x+y+z)dz \right) dw = \iint\limits_G \left((x+y)z + \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_0^{1-x-y} dw =$$

$$= \iint\limits_G \left((x+y) - (x+y)^2 + \frac{(1-x-y)^2}{2} \right) dw.$$

Теперь, учитывая, что G — треугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, имеем

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left((x+y) - (x+y)^2 + \frac{(1-x-y)^2}{2} \right) dy = \frac{1}{8}.$$

4. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Вопрос о преобразовании тройного интеграла к цилиндрическим координатам решается таким же путем, как и преобразование двойного интеграла к полярным координатам, при этом

$$\iiint\limits_\Omega f(x, y, z)dv = \iiint\limits_\Omega f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r\,dr\,d\varphi\,dz. \tag{7.19}$$

Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах приводится к трем однократным интегрированиям по z, r и φ на основании тех же принципов, что и в случае прямоугольных координат.

Пример 1. Найти объем кругового цилиндра высотой H с радиусом основания R.

Используя формулы (7.18) и (7.19), получаем $V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r\,dr \int\limits_0^H dz = \pi R^2 H.$

Формула перехода в тройном интеграле от прямоугольных координат к сферическим имеет вид

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi. \tag{7.20}$$

Вычисление последнего интеграла также приводится к трем однократным интегрированиям по r, φ и θ.

Если в формуле (7.20) $f(x, y, z) \equiv 1$, то в силу (7.18) получаем формулу для объема тела Ω в сферических координатах

$$V_\Omega = \iiint\limits_{\Omega} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi, \tag{7.21}$$

при этом выражение $r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$ называется *элементом объема в сферических координатах.*

Пример 2. Найти объем шара радиусом R.

Используя формулу (6), получаем $V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{R} r^2 dr = 2\pi \cdot 2\frac{R^3}{3} =$ $= \frac{4}{3}\pi R^3$.

5. Приложения тройного интеграла в механике. Выше (см. п. 1) уже отмечались применения тройного интеграла в геометрии, физике и биологии. Укажем еще на его приложения в механике. Для вычисления координат центра тяжести тела нужны статические моменты относительно координатных плоскостей xOy, xOz, yOz (обозначим их соответственно через M_{xy}, M_{xz}, M_{yz}). Повторяя рассуждения п. 8 § 7.1, получаем следующие формулы для координат x_C, y_C, z_C центра тяжести тела, занимающего область Ω:

$$x_C = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_C = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_C = \frac{M_{xy}}{m},$$

где

$$M_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} x\rho\, dv, \quad M_{xz} = \iiint\limits_{\Omega} y\rho\, dv, \quad M_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z\rho\, dv,$$

m — масса тела; $\rho = \rho(x, y, z)$ — плотность тела. Отсюда в случае однородного тела

$$x_C = \frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} x\, dv, \quad y_C = \frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} y\, dv, \quad z_C = \frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} z\, dv,$$

где V — объем тела.

Пример 1. Найти центр тяжести однородного ($\rho = 1$) полушара Ω

$$x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, \quad z \ge 0.$$

В силу симметрии заключаем, что $x_C = y_C = 0$. Далее имеем

$$m = \frac{2}{3}\pi R^3, \quad \iiint\limits_{\Omega} z\, dv = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} r^3 dr = \frac{1}{2}\, 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{4}\pi R^4.$$

Поэтому

$$z_C = \frac{3}{8} R.$$

Перейдем к вычислению моментов инерции тела относительно координатных осей. Так как квадраты расстояний от точки $M(x;\ y;\ z)$ до осей Ox, Oy, Oz соответственно равны y^2+z^2, x^2+z^2, x^2+y^2, то получим следующие формулы:

$$J_x = \iiint\limits_{\Omega} (y^2+z^2)\rho dv, \quad J_y = \iiint\limits_{\Omega} (x^2+z^2)\rho dv, \quad J_z = \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\rho dv.$$

Аналогично плоскому случаю интегралы

$$J_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} xy\,\rho dv, \quad J_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} yz\,\rho dv, \quad J_{zx} = \iiint\limits_{\Omega} zx\,\rho dv$$

называют *центробежными моментами инерции.*

Для полярного момента инерции формула имеет вид

$$J_0 = \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\rho dv.$$

Следовательно,

$$2J_0 = J_x + J_y + J_z.$$

Пример 2. Для однородного $(\rho=1)$ шара $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ имеем

$$J_0 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{R} r^2 r^2 dr = \frac{4\pi R^5}{5}.$$

Упражнения

1. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x 3dy.$ [6.]

2. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} (2x-y)dy.$ [0,9.]

3. $\iint\limits_G x\sqrt{y}dx\,dy$, где G — квадрат: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. $\left[\frac{1}{3}.\right]$

4. $\iint\limits_G ydxdy$, где область G ограничена линиями $y^2=x$, $y=x-2$. $\left[\frac{9}{4}.\right]$

5. $\iint\limits_G (x-y)dxdy$, где область G ограничена линиями $x+y=2$, $y=x$, $y=0$. $\left[\frac{2}{3}.\right]$

Поменяйте порядок интегрирования в интегралах

6. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy.$ $\left[\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x,y)dx.\right]$

7. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y)dy.$ $\left[\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^1 f(x, y)dx.\right]$

8. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy.$ $\left[\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-\sqrt{1+y}}^{\sqrt{1+y}} f(x, y)dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dx.\right]$

9. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{y+2} f(x, y)dx.$ $\left[\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x, y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^1 f(x, y)dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_{x-2}^1 f(x, y)dy.\right]$

Переходя к полярным координатам, вычислите двойные интегралы

10. $\iint\limits_G e^{x^2+y^2} dx\,dy$, где G — круг $x^2+y^2 \le 1$. $[\pi(e-1).]$

11. $\iint\limits_G (x^2+y^2)^2 dx\,dy$, где G — круг $x^2+y^2 \le 4$. $\left[\frac{64}{3}\pi.\right]$

12. $\iint\limits_G (x^2+y^2) dx\,dy$, где G — круг $x^2+y^2 \le 2x$. $\left[\frac{3}{2}\pi.\right]$

13. $\iint\limits_G \sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\,dy$, где G — четверть круга $x^2+y^2 \le 1$, лежащая в первом квадранте. $\left[\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1).\right]$

Вычислите тройные интегралы

14. $\iiint\limits_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, где область Ω ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$. $\left[\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}.\right]$

15. $\iiint\limits_\Omega (x+y)\,dx\,dy\,dz$, где область Ω ограничена плоскостями $x=1$, $y=1$, $z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. $[1.]$

Переходя к цилиндрическим координатам, вычислите интегралы

16. $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, где область Ω ограничена поверхностями $2z = x^2+y^2$, $z=2$. $\left[\frac{16}{3}\pi.\right]$

17. $\iiint\limits_\Omega z\,dx\,dy\,dz$, где область Ω ограничена поверхностями $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=a$ $(a>0)$, $\left[\frac{a^2\pi}{2}.\right]$

Переходя к сферическим координатам, вычислите интегралы

18. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dx\,dy\,dz$, где область Ω — шар $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

$\left[\dfrac{4\pi R^5}{5}.\right]$

19. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dx\,dy\,dz$, где область Ω — верхняя половина шара x^2+y^2+ $+z^2 \le R^2$. $\left[\dfrac{4}{15}\pi R^5.\right]$

С помощью двойных интегралов найдите площади плоских фигур, ограниченных заданными линиями:

20. $x+y=2$, $x=0$, $y=0$. [2.]

21. $y=x^2$, $4y=x^2$, $x=2$, $x=-2$. [4.]

22. Окружностью $x^2+y^2=y$. $\left[\dfrac{\pi}{4}.\right]$

23. Полярной осью и первым витком спирали Архимеда $r=a\varphi$, где a — положительное число. $\left[\dfrac{4}{3}a^2\pi^3.\right]$

24. Окружностями $x^2+y^2=4$ и $x^2+y^2=1$. $[3\pi.]$

25. Найдите площадь той части поверхности $z=x^2+y^2$, которая вырезается цилиндром $x^2+y^2=1$. $\left[\dfrac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).\right]$

26. Вычислите площадь той части плоскости $6x+3y+2z=12$, которая заключена в первом октанте. $\left[\dfrac{7}{2}.\right]$

Найдите двумя способами (с помощью двойного и тройного интегралов) объемы тел, ограниченных поверхностями

27. $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. $\left[\dfrac{1}{6}.\right]$

28. $z=1+x+y$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. $\left[\dfrac{5}{6}.\right]$

29. $z=x+y$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. $\left[\dfrac{1}{3}.\right]$

30. $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=1$, $z=0$. $\left[\dfrac{\pi}{2}.\right]$

31. $z=1-x^2-y^2$, $z=0$. $\left[\dfrac{\pi}{2}.\right]$

32. Найдите координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями $ay = x^2$, $x + y = 2a$ $(a > 0)$. $\left[x_C = -\frac{a}{2},\ y_C = \frac{8}{5}a.\right]$

33. Найдите координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной параболами $x^2 = 20y$ и $y^2 = 20x$. $[x_C = 9,\ y_C = 9.]$

34. Найдите координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного плоскостями $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(a > 0)$. $\left[x_C = y_C = z_C = \frac{a}{4}.\right]$

35. Найдите координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 0$. $\left[x_C = 0,\ y_C = 0,\ z_C = \frac{1}{3}.\right]$

36. Найдите момент инерции относительно оси Ox пластинки, ограниченной прямыми $y = 2 + x$, $y = 2 - x$, $y = 0$, если плотность постоянна и равна единице. $\left[\frac{8}{3}.\right]$

37. Определите момент инерции относительно оси Oz тела, ограниченного поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, если плотность постоянна и равна единице. $\left[\frac{8}{15}\pi R^5.\right]$

ГЛАВА 8. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 8.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Задачи, приводящие к криволинейным интегралам.

Задача о массе материальной линии. Пусть вдоль некоторой гладкой кривой AB распределена масса с переменной линейной плотностью $\rho(M)$, где M — любая точка кривой AB ($\rho(M)$ — предел средней плотности распределения вещества на бесконечно малой дуге, содержащей точку M). Требуется определить массу m дуги AB.

Для решения задачи раздробим дугу AB на n произвольных частей и вычислим приближенно массу каждой части, предполагая, что на каждой из них плотность постоянна и равна $\rho(N_k)$ для k-й части, где N_k — одна из точек этой части, безразлично какая.

Тогда масса k-й части приближенно равна $\Delta m_k \approx \rho(N_k)\Delta l_k$ ($k=1, 2, ..., n$), а масса всей дуги приближенно равна $m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\Delta l_k$, где Δl_k — длина k-й части.

В пределе при $\lambda \to 0$ ($\lambda = \max \Delta l_k$) получим точное значение массы всей дуги AB, т. е.

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\Delta l_k.$$

Задача о площади цилиндрической поверхности. Пусть в плоскости xOy дана некоторая гладкая кривая AB и на этой кривой определена непрерывная функция $f(M)=f(x, y) \geq 0$. (Непрерывность $f(M)$ вдоль кривой AB означает, что в любой точке M_0 этой кривой $\lim_{M \to M_0} f(M)=f(M_0)$, где M также точка этой кривой.) Тогда точки пространства $(x, y, f(x, y))$ в совокупности составят некоторую кривую, лежащую на цилиндрической поверхности, для которой кривая AB — направляющая, а образующая перпендикулярна к плоскости xOy. Требуется определить площадь части поверхности, которая ограничена сверху кривой $z=f(x, y)$, снизу кривой AB, а с боков прямыми AA' и BB' (рис. 71).

Произвольным образом разобьем дугу AB на n частей точками $A=M_0, M_1, M_2, ..., M_n=B$.

Из каждой точки дробления M_k ($k=1, 2, ..., n-1$) проведем перпендикуляры к плоскости xOy высотой $f(M_k)$. В результате вся цилиндрическая поверхность разобьется на n полосок.

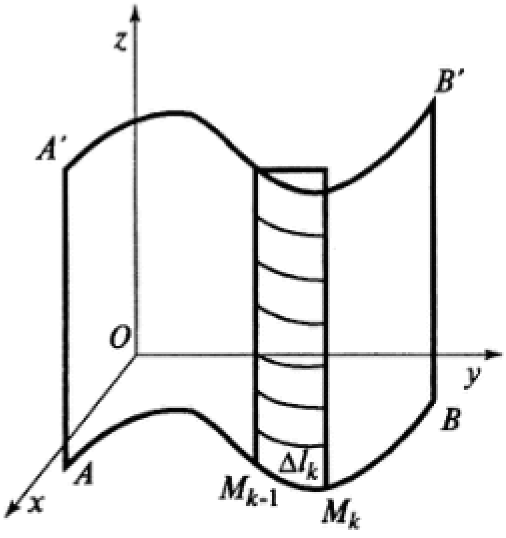


Рис. 71

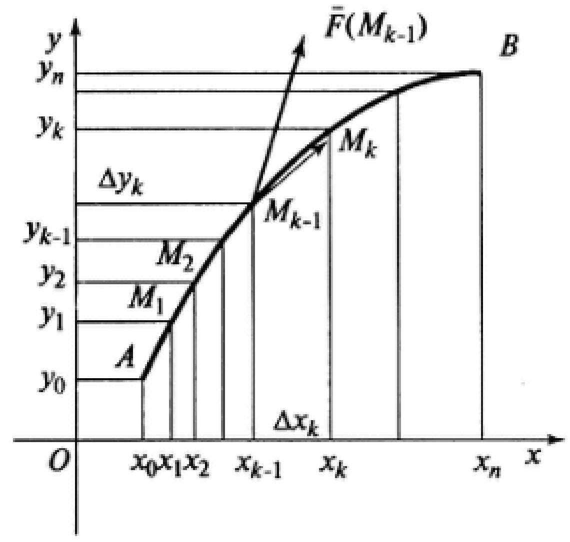


Рис. 72

Каждую такую полоску заменим прямоугольником с основанием Δl_k, где Δl_k — длина дуги $M_{k-1}M_k$ ($k=1, 2, ..., n$), и высотой, равной значению функции $f(N_k)$, где N_k — одна из точек дуги $M_{k-1}M_k$, безразлично какая. На рис. 71 в целях его упрощения в качестве такой точки взята точка M_{k-1}. Тогда площадь k-й полоски будет приближенно равна $S_k \approx f(N_k)\Delta l_k$, а площадь всей поверхности $AA'B'B$

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta l_k.$$

При $\lambda \to 0$ в пределе получим точное значение искомой площади:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta l_k.$$

Задача о работе силы. В § 5.1 была рассмотрена задача о работе переменной силы при движении материальной точки по прямой линии, причем направление силы совпадало с направлением движения. Сейчас мы рассмотрим более общую задачу.

Пусть материальная точка под действием силы $\overline{F}$ перемещается вдоль непрерывной плоской кривой AB в направлении от A к B. Сила $\overline{F}$ предполагается переменной, зависящей от положения точки на кривой AB. Вычислим работу силы $\overline{F}$, затраченную на перемещение точки из A в B. С этой целью разобьем произвольно точками $A=M_0$, M_1, M_2, ..., $M_n=B$ дугу AB на n частичных дуг M_0M_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}M_n$ с длинами Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n (рис. 72). Наибольшую из длин Δl_k ($k=1, 2, ..., n$) обозначим λ. Ввиду малости Δl_k можно приближенно принять, что

а) вектор силы $\overline{F}$ сохраняет на дуге $M_{k-1}M_k$ постоянное значение, равное $\overline{F}(N_k)$, где N_k — одна из точек элемента $M_{k-1}M_k$, безразлично какая (на рис. 72 в целях его упрощения в качестве такой точки взята точка M_{k-1});

б) дуга $M_{k-1}M_k$ может быть заменена хордой $M_{k-1}M_k$, стягивающей концы этого элемента. Вектор $\overline{M_{k-1}M_k}$ равен приращению радиуса-вектора $\bar{r}(M)$: $\Delta\bar{r}_k = \bar{r}(M_k) - \bar{r}(M_{k-1})$ $(\Delta\bar{r}_k = (x_k - x_{k-1};\ y_k - y_{k-1}))$. Тогда на элементе дуги $M_{k-1}M_k$ работа силы $\bar{F}$ приближенно равна

$$\bar{F}(N_k)\Delta\bar{r}_k.$$

Пусть вектор $\bar{F}(M)$ имеет проекции $P(M)$, $Q(M)$ соответственно на оси Ox, Oy. Тогда работа силы $\bar{F}$ вдоль всей дуги AB будет приближенно равна

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}(N_k)\Delta\bar{r}_k,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} (P(N_k)\Delta x_k + Q(N_k)\Delta y_k), \tag{8.1}$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

Перейдя в сумме (8.1) к пределу при $\lambda \to 0$, получим точное выражение работы силы $\bar{F}$ вдоль всей дуги AB:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} (P(N_k)\Delta x_k + Q(N_k)\Delta y_k). \tag{8.2}$$

2. Определение криволинейных интегралов, их свойства. Из решения первых двух задач (см. п. 1) видно, что, хотя они имеют различный смысл, математический аппарат для их решения один и тот же. В этих двух задачах получаем выражение одного и того же вида:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta l_k. \tag{8.3}$$

Определение. Если существует предел (8.3), не зависящий от способа деления дуги AB на частичные дуги и выбора точек N_k в них, то он называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(M)$ по дуге AB и обозначается

$$\int_{AB} f(M)dl \quad \text{или} \quad \int_{AB} f(x, y)dl.$$

Дуга AB называется *путем интегрирования*, точка A — *начальной*, а точка B — *конечной точками интегрирования*, сумма $\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta l_k$ — *интегральной суммой*.

Рассмотренные в п. 1 первые две задачи показывают:

1) криволинейный интеграл первого рода при $f(M) \geq 0$ ($f(M)$ на дуге AB непрерывна) численно равен площади участка цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси Oz; снизу этот участок ограничен дугой AB, а сверху — кривой, изображающей подынтегральную функцию $z = f(M)$; в этом состоит геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода;

2) криволинейный интеграл

$$\int_{AB} \rho(M)dl$$

($\rho(M)$ — линейная плотность) равен массе m материальной дуги AB, в этом состоит его физический смысл; отсюда следует, что $\int\limits_{AB} dl$ численно равен длине дуги AB.

Хотя, как будет показано в п. 3, криволинейный интеграл первого рода непосредственно сводится к определенному, между этими понятиями есть и следующее различие. В выражении (8.3) величины Δl_k обязательно положительны независимо от того, какую точку кривой AB считать начальной, а какую — конечной. Поэтому

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dl = \int\limits_{BA} f(x, y)dl.$$

Как установлено в п. 1, решение задачи о работе силы сводится к вычислению предела вида (8.2). К вычислению подобного рода пределов приводят и другие задачи. Поэтому будем рассматривать выражение

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} (P(N_k)\Delta x_k + Q(N_k)\Delta y_k). \tag{8.4}$$

(Здесь $P(M)$ и $Q(M)$ — проекции вектора-функции $\overline{a}(M)$, определенной на дуге AB, соответственно на оси координат Ox и Oy.)

Определение. Если существует предел (8.4), не зависящий от способа деления дуги AB на частичные дуги и выбора точек N_k в них, то он называется *криволинейным интегралом второго рода от векторной функции* $\overline{a}(M) = P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j}$ *по дуге* AB и обозначается

$$\int\limits_{AB} \overline{a}d\overline{r} \quad \text{или} \quad \int\limits_{AB} Pdx + Qdy.$$

Сумма

$$\sum_{k=1}^{n} (P(N_k)\Delta x_k + Q(N_k)\Delta y_k) \tag{8.5}$$

называется *интегральной суммой*.

Физическое толкование криволинейного интеграла второго рода, например, как следует из рассмотренной задачи в предыдущем пункте,— это работа силы $\overline{a}(M)$ вдоль дуги AB.

Если $Q(x, y) \equiv 0$ ($P(x, y) \equiv 0$), то интеграл второго рода имеет вид

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx \quad \left(\int\limits_{AB} Q(x, y)dy\right) \tag{8.6}$$

и называется *криволинейным интегралом по координате* x (y).

В отличие от криволинейного интеграла первого рода криволинейный интеграл второго рода (как непосредственно следует из его определения) зависит от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) совершается обход по кривой AB (кратко L) и меняет знак при изменении направления обхода кривой.

В случае когда L — замкнутая кривая, т. е. когда точка B совпадает с точкой A, из двух возможных направлений обхода замкнутого контура L условимся называть *положительным* то, при котором область, лежащая внутри этого контура, остается слева по отношению к точке, совершающей обход. Противоположное направление обхода контура L условимся называть ***отрицательным***.

Криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру L, пробегаемому в положительном направлении, часто обозначают символом

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Имеет место (см., например, [1], гл. 12) следующая зависимость между криволинейными интегралами первого и второго рода:

$$\int_{AB} \overline{a}(M)d\overline{r} = \int_{AB} \overline{a}_\tau(M)dl,$$

$\overline{\tau} = \overline{\tau}(M)$ — единичный вектор касательной к дуге AB в точке M и соответствующий направлению дуги от A к B: $a_\tau(M) = |\overline{a}(M)|\cos(\widehat{\overline{a}, \overline{\tau}})$ — проекция вектора $\overline{a}(M)$ на эту касательную.

Так же, как в случае определенных интегралов, из определения криволинейных интегралов двух родов устанавливаются следующие три свойства, общие криволинейным интегралам первого и второго рода.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла.

2. Криволинейный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме криволинейных интегралов от слагаемых.

3. Если путь интегрирования разбит на конечное число частей, то криволинейный интеграл по всему пути равен сумме криволинейных интегралов по всем его частям.

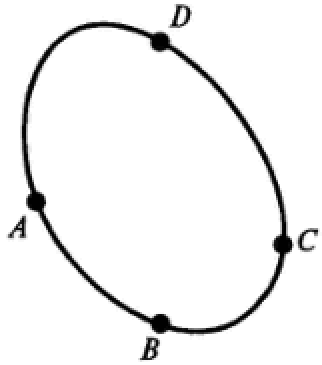


Рис. 73

Заметим, что кривая AB может быть и замкнутой.

Справедливо и еще одно свойство, общее для криволинейных интегралов первого и второго рода:

криволинейный интеграл вдоль замкнутого контура не зависит от выбора начальной точки на этом контуре.

Действительно, если принять за начальную точку A, то в силу свойства 3 (рис. 73) получим

$$\int_{ABCDA} = \int_{ABC} + \int_{CDA} \tag{8.7}$$

(ради краткости здесь и иногда в дальнейшем подынтегральное выражение не пишем).

Если же за начальную точку принять C, то получим

$$\int\limits_{CDABC} = \int\limits_{CDA} + \int\limits_{ABC}. \tag{8.8}$$

Из равенств (8.7) и (8.8) следует, что $\int\limits_{ABCDA} = \int\limits_{CDABC}$.

3. Вычисление криволинейных интегралов первого и второго рода. Пусть гладкая дуга AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(\alpha \le x \le \beta)$ и функции $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ определены и непрерывны на этой дуге.

Для криволинейного интеграла первого рода справедлива формула (см., например, [1], гл. 12)

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt. \tag{8.9}$$

Эта формула одновременно доказывает существование криволинейного интеграла первого рода от непрерывной функции $f(x, y)$ по гладкой дуге AB.

В частности, если дуга AB задана уравнением $y = y(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ (роль параметра t играет величина x), то согласно формуле (8.9)

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{8.10}$$

Для криволинейного интеграла второго рода справедлива формула (см., например, [1], гл. 12)

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))x'(t)dt. \tag{8.11}$$

Эта формула одновременно доказывает существование криволинейного интеграла второго рода (8.6) от непрерывной функции $f(x, y)$ по гладкой дуге AB.

Аналогично выводится формула

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t))y'(t)dt. \tag{8.12}$$

Сложив почленно равенства (8.11) и (8.12), получим

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (Px' + Qy')dt. \tag{8.13}$$

В частности, если дуга AB задана уравнением $y = y(x)$ на отрезке $[a;\ b]$, то аналогично формуле (8.10) из формулы (8.13) имеем

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{a}^{b} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x))dx. \tag{8.14}$$

П р и м е ч а н и е. Если путь интегрирования L — отрезок прямой, параллельной оси абсцисс: $y = y_0$, $x_1 \le x \le x_2$, то криволинейный интеграл второго рода сразу превращается в обыкновенный. Действительно, так как $y = y_0$ и, значит, $dy = 0$, то

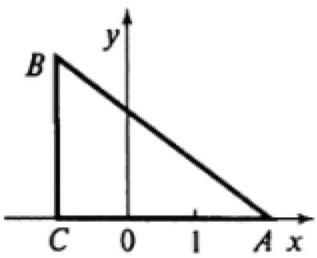
$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_1}^{x_2} P(x\ y_0)dx.$$

Аналогично, если L — отрезок прямой, параллельной оси ординат.

П р и м е р 1. Найти массу четверти окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, если плотность в каждой точке равна ее ординате.

Параметрические уравнения окружности $x^2 + y^2 = R^2$: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$. Следовательно, $x'^2 + y'^2 = R^2$ и в силу формулы (8.9)

$$m = \int_{AB} \rho dl = \int_{AB} y dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin t\, dt = -R^2 \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2.$$



Р и с. 74

П р и м е р 2. Вычислить работу силы $\overline{F} = 2xy\overline{i} + x\overline{j}$ при перемещении точки M из положения $A(2;\ 0)$ в положение $B(-1;\ 3)$ 1) вдоль прямой AB, 2) вдоль ломаной ACB (рис. 74).

Задача сводится к вычислению криволинейного интеграла

$$I = \int_{AB} 2xydx + x\,dy.$$

1) Вдоль прямой AB имеем $y = 2 - x$, $dy = -dx$ и потому

$$I = \int_2^{-1} (2x(2 - x) - x)dx = \frac{3}{2}.$$

2) Вдоль ломаной ACB на участке AC имеем $y = 0$ и $dy = 0$, на участке CB имеем $x = -1$, $dx = 0$. Поэтому

$$I = \int_{AC} + \int_{CB} = 0 - \int_0^3 dy = -3.$$

В заключение заметим, что мы рассмотрели криволинейные интегралы для плоских кривых. Однако все сказанное о них может быть перенесено и на пространственные кривые.

По аналогии со случаем плоской кривой можно определить криволинейный интеграл первого рода

$$\int_{AB} f(x, y, z)dl$$

и криволинейные интегралы второго рода

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx, \quad \int_{AB} Q(x, y, z)dy, \quad \int_{AB} R(x, y, z)dz,$$

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Техника вычисления таких интегралов, по существу, ничем не отличается от техники вычисления соответствующих интегралов по плоской кривой.

4. Формула Римана — Грина*.

Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ (кратко P, Q) непрерывны вместе со своими частными производными P'_y, Q'_x в замкнутой области G, граница L которой пересекается прямыми, параллельными осям координат, не более чем в двух точках (для краткости такие области будем называть *простыми*). Предположим, что контур L гладкий или кусочно-гладкий и может быть задан как уравнениями $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, $(a \le x \le b)$, так и уравнениями $x=x_1(y)$, $x=x_2(y)$, $(c \le y \le d)$ (рис. 75).

Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Представляя его в виде повторного, выполним во внутреннем интеграле по формуле Ньютона — Лейбница (см. § 5.2, п. 2) интегрирование по y. Получим

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int\limits_a^b (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)))dx.$$

С другой стороны, используя свойство 3 для криволинейного интеграла (см. п. 2) и формулу (8.14), имеем

$$\oint\limits_L P(x, y)dx = \int\limits_a^b (P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x)))dx.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint\limits_L P(x, y)dx. \tag{8.15}$$

Аналогично устанавливается формула

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint\limits_L Q(x, y)dy. \tag{8.16}$$

Вычитая равенство (8.15) из равенства (8.16), получаем формулу

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint\limits_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \tag{8.17}$$

называемую формулой *Римана — Грина.*

Эта формула устанавливает связь между двойным и криволинейным интегралами. Она имеет широкое применение в математическом анализе и его приложениях.

---

* Георг Риман (1826—1866) — немецкий математик.

Джордж Грин (1793—1841) — английский математик и физик.

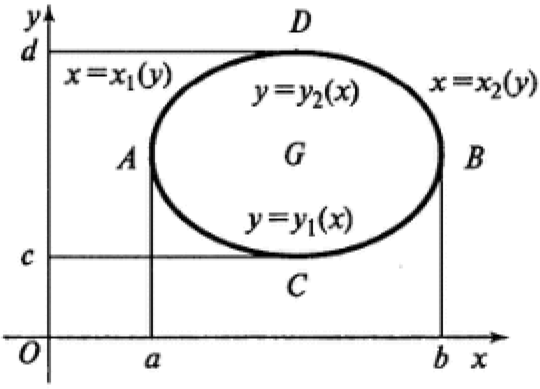


Рис. 75

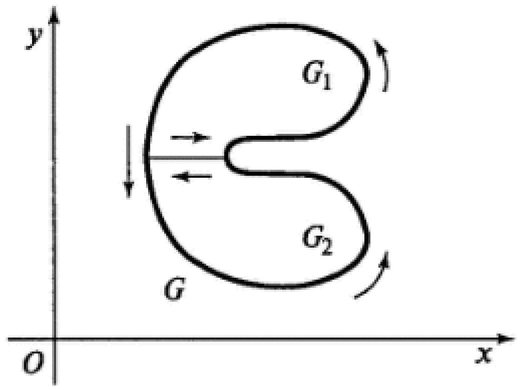


Рис. 76

Примечание. Формула Римана — Грина остается справедливой и для замкнутой области G, которую можно разбить на конечное число простых областей проведением дополнительных линий (рис. 76).

Пример. С помощью формулы Римана — Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_L (x-y)dx+(x+y)dy$, где L — окружность $x^2+y^2=R^2$.

Решение. Функции $P(x, y)=x-y$, $Q(x, y)=x+y$ и $P'_y=-1$, $Q'_x=1$ непрерывны в замкнутом круге $x^2+y^2=R^2$.

Следовательно, формула (8.17) применима к данному интегралу. Имеем

$$\oint\limits_L (x-y)dx+(x+y)dy=\iint\limits_G [1-(-1)]dx\,dy=2\iint\limits_G dx\,dy=2\pi R^2.$$

Заметим, что полученный результат легко проверить непосредственным вычислением данного интеграла.

5. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой односвязной области G (см. § 6.1, п. 5) плоскости xOy.

Рассмотрим в области G две произвольные точки A и B. Эти точки можно соединить различными линиями, лежащими в области G. Если интеграл

$$\oint\limits_{AB} P(x, y)dx+Q(x, y)dy \tag{8.18}$$

по любому из путей, лежащих в области G и соединяющих точки A и B, принимает одно и то же значение, то говорят, что он *не зависит от пути интегрирования.*

В следующих теоремах приводятся условия, при которых криволинейный интеграл (8.18) не зависит от пути интегрирования.

Теорема 1. *Для того чтобы криволинейный интеграл* (8.18) *в области G не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\oint\limits_L P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0, \tag{8.19}$$

где L — любой замкнутый контур, лежащий в этой области.

Доказательство. Пусть выполнено условие (8.19), где L — любой замкнутый контур, лежащий в области G. Соединим две произвольные точки A и B, принадлежащие области G, двумя различными произвольно выбранными кривыми AmB и AnB, лежащими в области G (рис. 77). Дуги AmB и AnB образуют замкнутый контур $AmBnA$. Учитывая свойство 3 криволинейного интеграла (см. п. 2), получаем

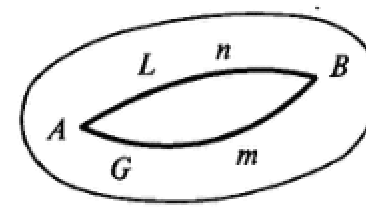


Рис. 77

$$\oint_{AmBnA} = \int_{AmB} + \int_{BnA} = \int_{AmB} - \int_{AnB} .$$

В силу формулы (8.19) $\oint_{AmBnA} = 0$. Следовательно, $\int_{AmB} = \int_{AnB}$, т. е. криволинейный интеграл (8.18) не зависит от пути интегрирования.

Обратно: пусть в области G криволинейный интеграл (8.18) не зависит от пути интегрирования. Рассмотрим произвольный замкнутый контур L, лежащий в области G, и возьмем на нем две произвольные точки A и B (см. рис. 77). Тогда

$$\oint_{AmBnA} = \int_{AmB} + \int_{BnA} = \int_{AmB} - \int_{AnB} = 0,$$

т. е. получаем равенство (8.19).

Теорема 2. *Для того чтобы криволинейный интеграл* (8.18) *не зависел от пути интегрирования в области G, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось условие*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{8.20}$$

В гл. 6 (см. § 6.3, п. 2) было отмечено, что выполнение условия (8.20) равносильно тому, что выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ есть полный дифференциал. Отсюда следует теорема 3.

Теорема 3. *Для того чтобы криволинейный интеграл* (8.18) *в области G не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ было в этой области полным дифференциалом.*

6. Интегрирование полных дифференциалов. Пусть подынтегральное выражение в криволинейном интеграле

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{8.21}$$

является полным дифференциалом. Тогда (см. п. 5, теорема 3) величина этого интеграла зависит лишь от начальной и конечной точек линии интегрирования L. Поэтому интеграл (8.21) записывается обычно в виде

$$\int_{(x_0,\, y_0)}^{(x_1,\, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy .$$

Для вычисления такого интеграла воспользуемся примечанием, отмеченным в п. 3, и будем интегрировать по ломаной $M_0M_2M_1$, звенья которой параллельны осям координат (рис. 78).

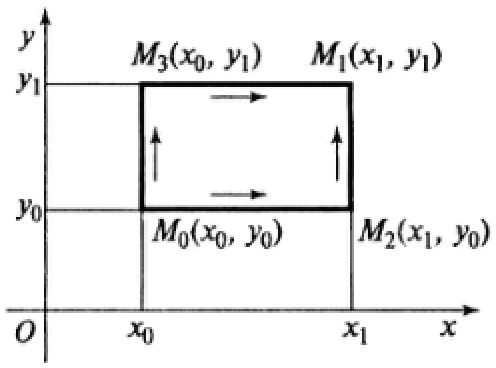


Рис. 78

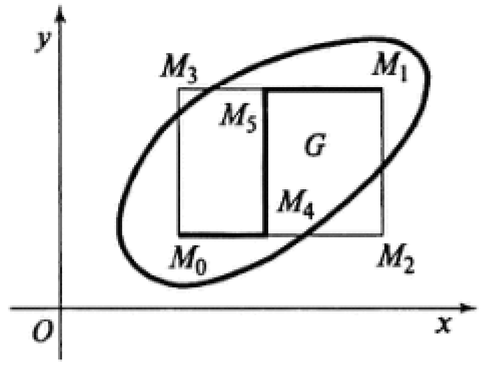


Рис. 79

Тогда

$$\int\limits_{(x_0,\,y_0)}^{(x_1,\,y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{x_0}^{x_1} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y)dy. \qquad (8.22)$$

Если окажется, что ломаные $M_0M_2M_1$ и $M_0M_3M_1$ выходят из области G (рис. 79), то можно производить интегрирование, например, по ломаной $M_0M_4M_5M_1$.

7. Приложения криволинейных интегралов. Ранее (см. п. 2) уже отмечался геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода. Кроме того, криволинейный интеграл первого рода имеет широкое применение в физике. Так (см. п. 2), уже был отмечен физический смысл криволинейного интеграла первого рода. С помощью криволинейного интеграла первого рода можно, как это делалось для двойных интегралов (см. § 6.1, п. 8), найти координаты центра тяжести материальной плоской кривой, найти ее моменты инерции относительно координатных осей.

Криволинейные интегралы второго рода так же, как и первого, имеют широкое применение в геометрии, физике. Ранее (см. п. 1) уже была рассмотрена задача о вычислении работы силы.

§ 8.2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Определение поверхностного интеграла первого рода.

З а д а ч а о м а с с е и з о г н у т о й п л а с т и н ы. Пусть на поверхности σ непрерывно распределено вещество с известной плотностью $\rho(M)$. При этом под плотностью вещества в точке M поверхности σ понимается предел средней плотности на бесконечно малом элементе, содержащем точку M. Требуется определить всю массу материальной поверхности σ.

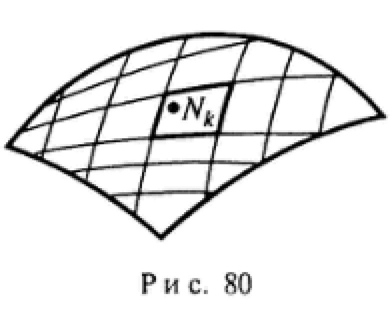


Рис. 80

Разделим поверхность σ (рис. 80) произвольными гладкими линиями на n частей $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ без общих внутренних точек с площадями $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$; наибольшую из этих площадей обозначим через λ. Предположим, что в каждой части σ_k плотность постоянна и равна $\rho(N_k)$, где N_k — одна из точек σ_k, безразлично какая. Тогда масса k-го элемента будет приближенно равна $\Delta m_k \approx \rho(N_k)\Delta s_k$. Для массы всей поверхности получим приближенное выражение

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\Delta s_k.$$

За массу материальной поверхности σ (изогнутой пластины) естественно принять предел полученной суммы при стремлении λ к нулю:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\Delta s_k.$$

Сформулируем определение поверхностного интеграла первого рода в общем случае. Пусть функция $f(M) = f(x, y, z)$ определена на гладкой или кусочно-гладкой поверхности σ. (Поверхность называется *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная плоскость и при переходе от точки к точке положение этой касательной плоскости меняется непрерывно; поверхность, состоящая из конечного числа гладких кусков, которые соединены непрерывно, называется *кусочно-гладкой*.) Разделим, как и выше, σ на n частей. Выберем на каждой частичной поверхности произвольную точку N_k и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta s_k. \tag{8.23}$$

Определение. Предел интегральной суммы (8.23) при стремлении λ к нулю (если он существует и не зависит от способа деления σ на частичные поверхности и от выбора точек N_k) называется ***поверхностным интегралом первого рода*** от функции $f(M)$ по поверхности σ и обозначается символом

$$\iint_{\sigma} f(M)ds \quad \text{или} \quad \iint_{\sigma} f(x, y, z)ds.$$

Его физическое толкование — например масса материальной поверхности с плотностью распределения вещества $f(M)$.

Данное определение, по сути дела, аналогично определению двойного интеграла. Поэтому теорема существования двойного интеграла и его свойства (см. § 7.1, пп. 2 и 3) без особых изменений переносятся на поверхностные интегралы первого рода.

В частности, если на поверхности σ $f(x, y, z) \equiv 1$, то

$$\iint_{\sigma} ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = S_\sigma \quad (S_\sigma \text{ — площадь поверхности } \sigma).$$

2. Вычисление поверхностных интегралов первого рода. Пусть поверхность σ задана уравнением $z = z(x, y)$, где функция $z(x, y)$ вместе с производными $z'_x(x, y)$ и $z'_y(x, y)$ непрерывна в замкнутой области G — проекции σ на плоскость xOy, и пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности σ и, следовательно, интегрируема по поверхности σ.

Справедлива формула (см., например, [1], гл. 12)

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)ds = \iint\limits_{\sigma} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}dx\,dy. \qquad (8.24)$$

Аналогичный вид имеют и формулы, выражающие поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ через двойные по ее проекциям на плоскости yOz и xOz.

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,ds,$$

где σ — часть поверхности параболоида вращения $z = 1 - x^2 - y^2$, отсеченная плоскостью $z = 0$ (рис. 81).

Поверхность σ, заданная уравнением $z = 1 - x^2 - y^2$, проектируется на плоскость xOy в область G, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 1$. Следовательно, областью G является круг $x^2 + y^2 \le 1$. В нем функции

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad z_x'(x, y) = -2x, \quad z_y'(x, y) = -2y$$

непрерывны. По формуле (8.24) получаем

$$I = \iint\limits_{G} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{G} (1 + 4x^2 + 4y^2)dx\,dy.$$

Переходя в последнем интеграле к полярным координатам, находим

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (1 + 4r^2)r\,dr = 3\pi.$$

3. Определение поверхностного интеграла второго рода. Для того чтобы определить поверхностный интеграл второго рода, необходимо сначала ввести понятие стороны поверхности.

Возьмем на гладкой поверхности σ произвольную точку M, проведем через нее нормаль к поверхности (вектор $\overline{n}$), проведем на поверхности σ через точку M какой-нибудь замкнутый контур, не имеющий общих точек с границей поверхности σ, и начнем перемещать точку M по замкнутому контуру так, чтобы вектор $\overline{n}$ все время оставался нормальным к σ и чтобы его направление менялось при этом непрерывно (рис. 82). В прежнее положение точка M вернется либо с тем же направлением нормали, либо с прямо противоположным.

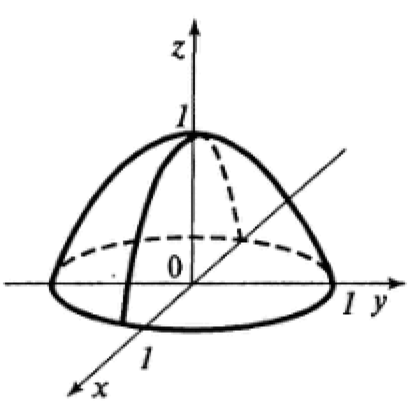


Рис. 81

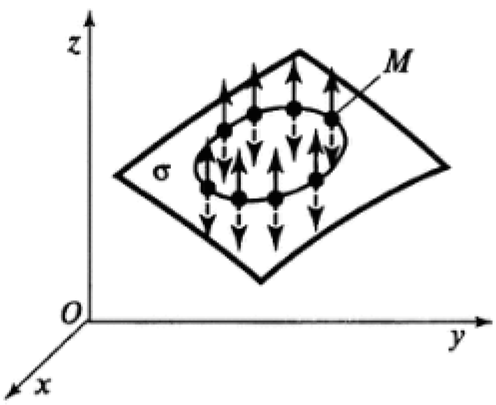


Рис. 82

Если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности σ и не пересекающему ее границы, при возвращении в исходную точку не меняет направления нормали к поверхности, то поверхность называется *двусторонней* (в противном случае — односторонней). Примерами двусторонних поверхностей могут служить плоскость, сфера и т. д.

Здесь будем рассматривать лишь двусторонние поверхности.

Для двусторонней поверхности совокупность всех ее точек с выбранным в них направлением нормали, изменяющимся непрерывно при переходе от точки к точке, называется *стороной поверхности*, а выбор определенной ее стороны — *ориентацией поверхности*. Двустороннюю поверхность называют также *ориентируемой*, а одностороннюю — *неориентируемой*.

С понятием стороны поверхности тесно связано понятие ориентации ее границы.

Пусть σ — ориентированная (сторона уже выбрана) поверхность, ограниченная контуром L, не имеющим точек самопересечения. Будем считать *положительным* направлением обхода контура L (согласованным с ориентацией σ) то направление его обхода, при движении по которому сама поверхность остается слева по отношению к точке, совершающей обход (рис. 83). Противоположное направление будем считать *отрицательным*. Если изменить ориентацию поверхности, то положительное и отрицательное направления обхода контура L поменяются ролями.

Задача о потоке жидкости. Пусть пространство заполнено движущейся жидкостью, скорость которой в каждой точке $M(x;\ y;\ z)$ задана вектором

$$\bar{v}(M) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k},$$

где P, Q, R — проекции скорости на координатные оси. (В § 5.7 рассматривалась векторная функция одного скалярного аргумента.)

Пусть P, Q, R — непрерывные функции координат. Вычислим количество жидкости Π, протекающей за единицу времени через некоторую ориентированную поверхность σ (в потоке жидкости σ надо мыслить как воображаемую поверхность, не препятствующую течению), ограниченную пространственной кривой L, считая плотность жидкости $\rho = 1$.

Пусть $\bar{n} = \bar{n}(M) = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma$ — единичный вектор нормали к поверхности σ в текущей точке M, и пусть его направляющие косинусы являются непрерывными функциями координат x, y, z точек данной поверхности.

Разобьем поверхность σ произвольно на n частей, не имеющих общих внутренних точек, с площадями Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n и в каждой из них выберем произвольную точку $M_k(\xi_k;\ \eta_k;\ \theta_k)$. Подсчитаем количество $\Delta\Pi_k$ жидкости, протекающей за единицу времени через k-ю часть поверхности (рис. 84).

Обозначим через φ_k угол между векторами $\bar{n}_k = \bar{n}(M_k)$ и $\bar{v}_k = \bar{v}(M_k)$. Приближенно можно считать, что при достаточно мелком разбиении поверхности σ скорость $\bar{v}$ во всех точках k-й части постоянна

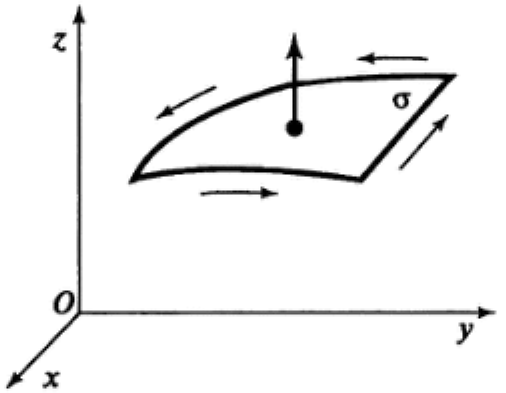


Рис. 83

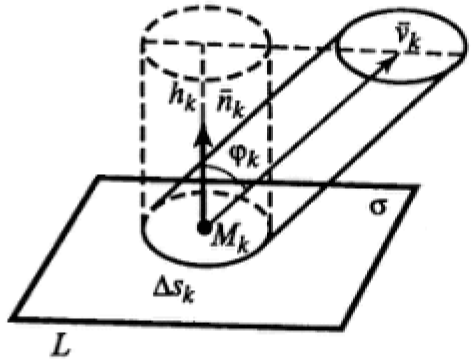


Рис. 84

и равна $\bar{v}(M_k)$, а частичные поверхности плоские. Тогда количество $\Delta\Pi_k$ жидкости, протекающей через k-ю часть за единицу времени в направлении нормали $\bar{n}_k$, приближенно равно объему цилиндра с основанием Δs_k и высотой h_k, равной проекции вектора $\bar{v}_k$ на нормаль $\bar{n}_k$, т. е. $\Delta\Pi_k \approx \Delta s_k h_k$. А так как

$$h_k = |\bar{v}_k|\cos\varphi_k = |\bar{v}_k||\bar{n}_k|\cos\varphi_k = (\bar{v}_k, \bar{n}_k),$$

то

$$\Delta\Pi_k \approx (\bar{v}_k, \ \bar{n}_k)\Delta s_k.$$

Для количества жидкости, протекающей через поверхность σ за единицу времени, получим приближенное выражение

$$\Pi = \sum_{k=1}^{n} \Delta\Pi_k \approx \Pi_n,$$

где

$$\Pi_n = \sum_{k=1}^{n} (\bar{v}_k, \bar{n}_k)\Delta s_k,$$

или

$$\Pi_n = \sum_{k=1}^{n} (P(M_k)\cos\alpha_k + Q(M_k)\cos\beta_k + R(M_k)\cos\gamma_k)\Delta s_k. \tag{8.25}$$

Точное значение этого количества получаем при переходе к пределу в формуле (8.25) при $\lambda \to 0$, где λ — наибольший из диаметров частей поверхности σ:

$$\Pi = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} (P(M_k)\cos\alpha_k + Q(M_k)\cos\beta_k + R(M_k)\cos\gamma_k)\Delta s_k. \tag{8.26}$$

Преобразуем сумму (8.25). Пусть $(\Delta w_k)_{yz}$ — площадь проекции k-й части поверхности на плоскость yOz, взятая со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от того, образует нормаль $\bar{n}_k$ с осью Ox острый или тупой угол. Имеем (см. [1], гл. 12)

$$(\Delta w_k)_{yz} = \Delta s_k \cos\alpha_k. \tag{8.27}$$

Аналогично

$$(\Delta w_k)_{xz} = \Delta s_k \cos \beta_k, \qquad (8.28)$$

$$(\Delta w_k)_{xy} = \Delta s_k \cos \gamma_k. \qquad (8.29)$$

С учетом равенств (8.27), (8.28), (8.29) сумма (8.25) и предел (8.26) принимают соответственно вид

$$\Pi_n = \sum_{k=1}^{n} (P(M_k)(\Delta w_k)_{yz} + Q(M_k)(\Delta w_k)_{xz} + R(M_k)(\Delta w_k)_{xy}), \qquad (8.30)$$

$$\Pi = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} (P(M_k)(\Delta w_k)_{yz} + Q(M_k)(\Delta w_k)_{xz} + R(M_k)(\Delta w_k)_{xy}). \qquad (8.31)$$

Примечание. Отметим, что пределы в правых частях равенств (8.26) и (8.31) равны (предполагается, что эти пределы существуют), так как формулы (8.25) и (8.30) выражают одну и ту же сумму, но записанную в разных формах.

Перейдем теперь к определению поверхностного интеграла второго рода.

Пусть σ — некоторая ориентируемая поверхность, заданная уравнением $z=f(x, y)$, и пусть $R(x, y, z)$ — функция, определенная в точках поверхности σ. Выберем одну из двух сторон поверхности, т. е. выберем одно из двух возможных направлений векторов нормали в точках поверхности (тем самым мы ориентировали поверхность). Если векторы нормалей составляют острые углы с осью Oz, то будем говорить, что выбрана *верхняя сторона* поверхности $z=f(x, y)$, если тупые углы,— *нижняя сторона* поверхности. Разобьем поверхность σ произвольно на n частей, не имеющих общих внутренних точек. Обозначим через Δ_k проекцию k-й части поверхности на плоскость xOy. Выбрав на каждой частичной поверхности произвольную точку $N_k(\xi_k;\ \eta_k;\ \theta_k)$, составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k, \eta_k, \theta_k)\Delta w_k, \qquad (8.32)$$

где Δw_k — площадь Δ_k, взятая со знаком «плюс», если выбрана верхняя сторона поверхности σ, и со знаком «минус», если выбрана нижняя сторона поверхности σ. Обозначим через λ наибольший из диаметров частей поверхности σ и дадим следующее определение.

Определение. Предел интегральной суммы (8.32) при $\lambda \to 0$ (если он существует и не зависит от способа деления σ на частичные поверхности и выбора точек N_k в них) называется *поверхностным интегралом второго рода* от функции $R(x, y, z)$ по выбранной стороне поверхности σ и обозначается одним из символов

$$\iint_\sigma R(M)dx\,dy \quad \text{или} \quad \iint_\sigma R(x, y, z)dx\,dy.$$

Аналогичным образом определяется поверхностный интеграл второго рода:

$$\iint_\sigma P(x, y, z)dy\,dz \quad \left(\iint_\sigma Q(x, y, z)dz\,dx\right).$$

Сумму

$$\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)dy\,dz + \iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z)dz\,dx + \iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)dx\,dy$$

принято называть *общим поверхностным интегралом второго рода* и обозначать символом

$$\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)dy\,dz + Q(x, y, z)dz\,dx + R(x, y, z)dx\,dy. \qquad (8.33)$$

Поверхностный интеграл второго рода обладает всеми свойствами поверхностного интеграла первого рода, за исключением одного: при изменении стороны поверхности (переориентации) интеграл меняет знак.

Из рассмотренной выше задачи о потоке жидкости следует (см. (8.31)), что в этой задаче поверхностный интеграл (8.33) может быть истолкован физически как количество жидкости, протекающее за единицу времени через указанную в этой задаче поверхность σ.

4. Вычисление поверхностных интегралов второго рода. Пусть ориентированная (выберем верхнюю сторону) гладкая поверхность σ задана уравнением $z=f(x, y)$, где $f(x, y)$ — функция, определенная в замкнутой области G — проекции поверхности σ на плоскость xOy, а $R(x, y, z)$ — непрерывная функция на поверхности σ.

Справедлива формула (см., например, [1], гл. 12)

$$\iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)dx\,dy = \iint\limits_{G} R(x, y, f(x, y))dx\,dy. \qquad (8.34)$$

Если выбрать нижнюю сторону поверхности, то перед интегралом в правой части (8.34) появится знак «минус». Аналогично вычисляются интегралы

$$\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)dy\,dz, \quad \iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z)dz\,dx.$$

Для вычисления интеграла общего вида (8.33) используются формулы указанных трех интегралов, если поверхность σ однозначно проектируется на все три координатные плоскости.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{\sigma} (y^2 + z^2)dx\,dy,$$

где σ — верхняя сторона поверхности $z = \sqrt{1 - x^2}$, отсеченная плоскостями $y=0$, $y=1$ (рис. 85).

Проекцией данной поверхности на плоскость xOy является прямоугольник G: $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. По формуле (8.34) находим

$$\iint\limits_{\sigma} (y^2 + z^2)dx\,dy = \iint\limits_{G} \left[y^2 + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} (y^2 + 1 - x^2)dy = 2.$$

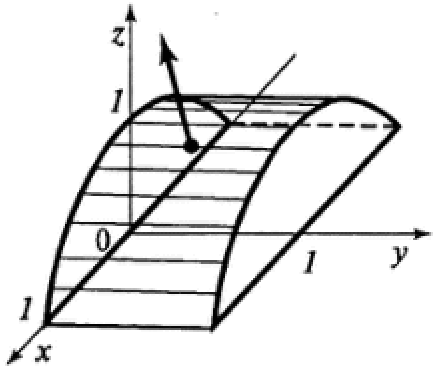


Рис. 85

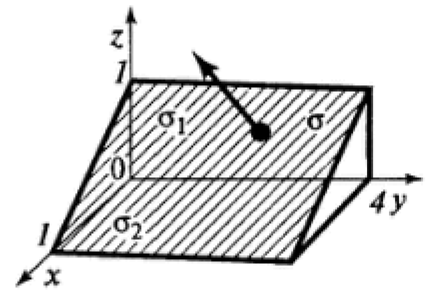


Рис. 86

Пример 2. Вычислить $\iint\limits_{\sigma} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$,

где σ — верхняя сторона части плоскости $x+z-1=0$, отсеченной плоскостями $y=0$, $y=4$ и лежащей в первом октанте (рис. 86). Так как плоскость σ параллельна оси Oy, то

$$\iint\limits_{\sigma} y\,dz\,dx = 0.$$

Поэтому

$$\iint\limits_{\sigma} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma_1} (1-z)dy\,dz + \iint\limits_{\sigma_2} (1-x)dx\,dy =$$

$$= \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^1 (1-z)dz + \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^1 (1-x)dx = 2+2=4.$$

5. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода. Из примечания, отмеченного в п. 3, и определений поверхностных интегралов первого и второго рода следует, что

$$\iint\limits_{\sigma} (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)ds =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dy\,dz + Q(x,y,z)dz\,dx + R(x,y,z)dx\,dy. \tag{8.35}$$

6. Приложения поверхностных интегралов. Ранее (см. пп. 1, 3) уже отмечался физический смысл поверхностных интегралов первого и второго рода, а также была получена (см. п. 1) формула для площади поверхности через поверхностный интеграл первого рода. С помощью поверхностного интеграла первого рода можно, как это делалось для двойных интегралов (см. § 7.1, п. 8), найти координаты центра тяжести материальной поверхности, найти ее моменты инерции относительно координатных осей.

§ 8.3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Векторное поле. Пусть Ω — область в пространстве.

Если каждой точке M из Ω сопоставлен вполне определенный вектор $\overline{a}(M)$, то говорят, что в области Ω задано *векторное поле* $\overline{a}$.

Заметим, что областью Ω может быть и все пространство. Мы будем рассматривать стационарные векторные поля, в которых вектор $\bar{a}(M)$ зависит только от точки M и не зависит от времени.

Поле силы тяжести, поле скорости частиц текущей жидкости, поле электрической и магнитной индукции, поле плотности электрического тока — примеры векторных полей.

В прямоугольной системе координат $Oxyz$ вектор $\bar{a}(M)$ запишется в виде

$$\bar{a}(M) = a_x(x, y, z)\bar{i} + a_y(x, y, z)\bar{j} + a_z(x, y, z)\bar{k},$$

где $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$, $a_z(x, y, z)$ (кратко a_x, a_y, a_z — проекции вектора, заданного в точке $M(x; y; z)$ соответственно на оси координат Ox, Oy, Oz. В § 5.7 рассматривалась векторная функция одного скалярного аргумента. Здесь изучаем векторную функцию *трех* скалярных аргументов.

Дальше всюду предполагается, что функции a_x, a_y, a_z непрерывны вместе со своими частными производными.

Укажем на частные случаи векторных полей.

Векторное поле называется *однородным*, если $\bar{a}(M)$ — постоянный вектор, т. е. a_x, a_y, a_z — постоянные величины. Примером однородного поля может служить, например, поле силы тяжести.

Векторное поле называется *плоским*, если проекции вектора $\bar{a}(M)$ не зависят от одной из трех переменных x, y, z и одна из проекций равна нулю, например,

$$\bar{a}(M) = a_x(x, y)\bar{i} + a_y(x, y)\bar{j}.$$

С плоскими полями очень часто приходится встречаться в гидродинамике при изучении *плоских течений жидкости*, т. е. таких течений, когда все частицы жидкости движутся параллельно некоторой плоскости, причем скорости частиц, расположенных на одной и той же прямой, перпендикулярной к этой плоскости, одинаковы.

Траекторией векторного поля называется линия, в каждой точке которой касательная совпадает с вектором, соответствующим этой точке (рис. 87).

Траектории в конкретных полях имеют ясный физический смысл. Так, если мы рассматриваем поле скоростей текущей жидкости, то траектории суть *линии тока* этой жидкости, т. е. линии, по которым движутся частицы жидкости.

В электрическом поле траектории — это *силовые линии* этого поля. Например, в поле точечного заряда такими линиями будут лучи,

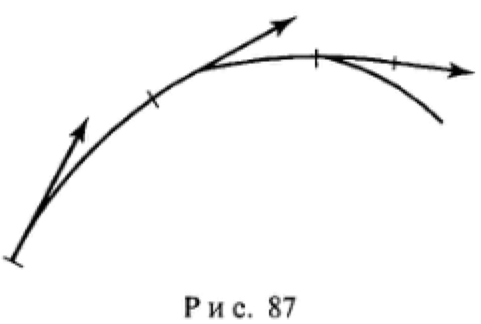


Рис. 87

выходящие из заряда. Для магнитного поля траекториями (силовыми линиями) будут линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном.

2. Поток векторного поля через поверхность. Как уже отмечалось (см. § 8.2, п. 3), количество жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность σ, выражается формулой

$$\Pi = \iint_{\sigma} P(x, y, z)dy\,dz + Q(x, y, z)dz\,dx + R(x, y, z)dx\,dy$$

или (в силу формулы (8.35)) формулой

$$\Pi = \iint_{\sigma} (P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma)ds. \qquad (8.36)$$

Величина Π называется *потоком жидкости* через поверхность σ. Поскольку P, Q, R — координаты вектора-скорости $\bar{v}$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — координаты единичного вектора $\bar{n}_0$ нормали $\bar{n}$ к поверхности σ и $P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma = \bar{v}\bar{n}_0$, то формулу (8.36) можно записать в виде

$$\Pi = \iint_{\sigma} \bar{v}\bar{n}_0\,ds, \text{ или } \Pi = \iint_{\sigma} v_n\,ds,$$

где v_n — проекция вектора v на нормаль $\bar{n}$.

Определение. *Потоком* Π *вектора* $\bar{a}(M)$ *или потоком векторного поля* $\bar{a}(M)$ через поверхность σ называется поверхностный интеграл

$$\Pi = \iint_{\sigma} \bar{a}(M)\bar{n}_0\,ds, \qquad (8.37)$$

где $\bar{n}_0$ — единичный вектор нормали к поверхности σ в ее текущей точке M. Поверхность должна быть ориентированной, это означает, что в каждой ее точке выбрано одно из двух направлений нормали так, чтобы $\bar{n}(M)$ непрерывно менялся по поверхности σ. В случае замкнутой поверхности σ в качестве $\bar{n}(M)$ выбирается вектор внешней нормали.

Пусть

$$\bar{a}(M) = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \quad \bar{n}_0 = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma.$$

Тогда

$$\Pi = \iint_{\sigma} (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)ds.$$

Отсюда согласно формуле (8.35) (п. 5) интеграл (8.37) можно представить в виде

$$\Pi = \iint_{\sigma} a_x dy\,dz + a_y dz\,dx + a_z dx\,dy.$$

Таким образом, вычисление потока вектора сводится к вычислению интегралов по поверхности. Из самого определения следует, что поток вектора П — величина скалярная. Если изменить направление нормали $\bar{n}$ на противоположное, т. е. переменить сторону поверхности σ, то (см. § 8.2, п. 3) поток П изменит знак. Так как скалярное произведение вектора $\bar{a}(M)$ на единичный вектор нормали $\bar{n}$ равно $a_n(M)$ — проекции вектора $\bar{a}(M)$ на направление $\bar{n}$, то поток П можно представить в виде

$$\Pi = \iint_{\sigma} a_n(M)ds. \tag{8.38}$$

Отсюда, в частности, следует, что если на некотором участке поверхности проекция вектора $\bar{a}(M)$ на нормаль постоянна, т. е. $a_n(M) = C = \text{const}$, то поток через такой участок просто равен CQ, где Q — площадь этого участка поверхности.

Пример. Найти поток радиуса-вектора $\bar{r}$ через боковую поверхность σ_1, верхнее основание σ_2 и нижнее основание σ_3 прямого цилиндра радиусом R и высотой H, если начало координат лежит в центре нижнего основания цилиндра, а ось цилиндра совпадает с осью Oz (рис. 88).

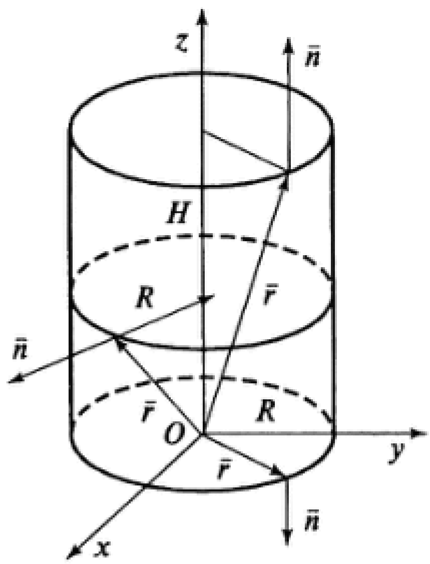


Рис. 88

На всех поверхностях $\bar{n}$ имеет направление внешней нормали. На боковой поверхности σ_1 внешняя нормаль $\bar{n}$ параллельна плоскости xOy и проекция r_n равна R. Поэтому, используя формулу (8.38) и формулу $\iint_{\sigma} ds = S_{\sigma}$ (см. § 8.2, п. 1), получаем

$$\Pi_1 = \iint_{\sigma_1} R\,ds = R \cdot 2\pi RH = 2\pi R^2 H.$$

На верхнем основании σ_2 нормаль $\bar{n}$ направлена параллельно оси Oz и $r_n = H$. Следовательно,

$$\Pi_2 = \iint_{\sigma_2} H\,ds = H\pi R^2 = \pi R^2 H.$$

Наконец, на нижнем основании σ_3 проекция $r_n = 0$ и $\Pi_3 = 0$.

Особый интерес представляет случай, когда σ — замкнутая поверхность. Если берется внешняя нормаль, то мы будем говорить о *потоке изнутри* поверхности σ. Он обозначается

$$\oiint_{\sigma} a_n(M)ds.$$

(В векторном анализе интегралы по замкнутым поверхностям обозначают обычно $\oiint_{\sigma}$; часто также употребляют и символ $\oint_{\sigma}$.) Область, которую ограничивает поверхность σ, будем обозначать Ω.

Когда векторное поле $\bar{a}(M)$ представляет поле скоростей жидкости, величина потока П дает разность между количеством жидкости, вытекающей из области Ω, и количеством жидкости, втекающей в эту область. (Интеграл $\oiint\limits_{\sigma} a_n ds$ берется по внешней стороне поверхности; если вектор скорости $\bar{v}$ в данной точке поверхности σ направлен наружу, то $\bar{v}\bar{n}_0 > 0$; если же вектор $\bar{v}$ направлен внутрь, то $\bar{v}\bar{n}_0 < 0$.)

Если $\Pi = 0$, то в область Ω жидкости втекает столько же, сколько и вытекает. Так, например, будет для любой области, расположенной в потоке воды, текущей в реке.

Если же величина Π отлична от нуля, например положительна, то из области Ω жидкости вытекает больше, чем втекает. Это означает, что в области Ω имеются *источники*, питающие поток жидкости. Наоборот, если величина Π отрицательна, то это указывает на наличие *стоков* — мест, где жидкость удаляется из потока.

Равенство нулю потока Π может означать либо отсутствие источников и стоков, либо, по крайней мере, наличие такого распределения источников и стоков, что их общая мощность равна нулю.

3. Формула Остроградского — Гаусса*. Дивергенция. Эта формула связывает поверхностный интеграл по замкнутой поверхности и тройной интеграл по пространственной области, ограниченной этой поверхностью, и является аналогом формулы Римана — Грина (см. § 8.1, п. 4), связывающей криволинейный интеграл по замкнутой кривой с двойным интегралом по плоской области, ограниченной этой кривой.

Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ (кратко P, Q, R) непрерывны вместе со своими частными производными P'_x, Q'_y, R'_z в замкнутой пространственной области Ω (рис. 89), граница которой пересекается с любой прямой, параллельной осям координат, не более чем в двух точках. Назовем для краткости такие области *простыми*. При этом будем рассматривать внешнюю сторону поверхности σ, ограничивающей эту область. Предполагается, что поверхность σ гладкая или кусочно-гладкая (см. § 8.2, п. 1).

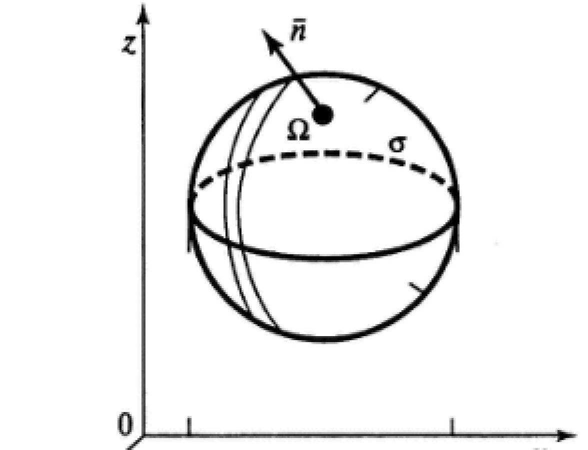


Рис. 89

* Остроградский М.В. (1801—1861) — русский математик.

Справедлива формула

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint\limits_{\sigma}P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy, \qquad (8.39)$$

называемая *формулой Остроградского — Гаусса* (в координатной форме), где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности σ.

Замечание. Формула Остроградского — Гаусса остается верной и для любой замкнутой пространственной области Ω, которую можно разбить на конечное число простых областей.

Укажем теперь на векторную запись формулы Остроградского — Гаусса. Если в формуле (8.39) функции P, Q, R рассматривать как проекции некоторого вектора $\overline{a}(M)$, то правая часть ее равна потоку вектора $\overline{a}(M)$ (см. п. 2) через замкнутую поверхность σ (в направлении внешней нормали к σ), а выражение

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},$$

называемое *дивергенцией* векторного поля $\overline{a}(M)$ (ее обозначение $\operatorname{div}\overline{a}(M)$, т. е. $\operatorname{div}\overline{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$), равно $\operatorname{div}\overline{a}(M)$, и формула Остроградского — Гаусса может быть переписана в виде

$$\oiint\limits_{\sigma}a_n(M)ds=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\overline{a}(M)dv. \qquad (8.40)$$

Она выражает следующий результат: *поток векторного поля через замкнутую поверхность* (в направлении внешней нормали к ней) *равен тройному интегралу от дивергенции этого поля, взятому по области, ограниченной этой поверхностью.*

Предположим, что в некоторой точке M дивергенция скорости $\overline{v}$ положительна: $\operatorname{div}\overline{v}>0$. В силу непрерывности частных производных она является положительной и в точках достаточно малого шара w, ограниченного сферой σ с центром в точке M. Но тогда $\iiint\limits_{w}\operatorname{div}\overline{v}\,dx\,dy\,dz>0$, следовательно, на основании формулы (8.40) $\oiint\limits_{\sigma}v_n ds>0$, т. е. из области w через ее границу σ жидкости вытекает больше, чем втекает. По этой причине точку M называют *источником.* Если же $\operatorname{div}\overline{v}<0$ в точке M, то через достаточно малую сферу с центром в этой точке втекает жидкости больше, чем вытекает. Поэтому точку M в этом случае называют *стоком* (то же и в случае произвольного векторного поля $\overline{a}(M)$).

Векторная форма формулы Остроградского — Гаусса выражает в поле текущей жидкости тот факт, что поток жидкости через поверхность равен суммарной мощности всех источников и стоков, т. е. количеству жидкости, возникающей в рассматриваемой области за единицу времени. (Если мощность стоков больше, чем источников, то жидкость в области исчезает.) Если, в частности, дивергенция во всех точках равна нулю, то равен нулю и поток через любую замкнутую поверхность.

П р и м е р 1. Вычислить дивергенцию поля скоростей жидкости $\bar{v} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$, где a, b, c — постоянные. Это однородное векторное поле. Ясно, что $\operatorname{div} \bar{v} = 0$.

Таким образом, в данном поле нет ни источников, ни стоков. Все частицы жидкости имеют одну и ту же скорость, жидкость движется поступательно, как твердое тело. Поток такой жидкости через любую замкнутую поверхность равен нулю.

П р и м е р 2. Вычислить поток вектора $\bar{a} = \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ через замкнутую поверхность. Так как $\operatorname{div} \bar{r} = 3$, то по формуле (8.40) получаем, что $\Pi = 3\iiint\limits_{\Omega} dv = 3V_{\Omega}$. Таким образом, поток радиуса-вектора $\bar{r}$ через замкнутую поверхность равен утроенному объему области, ограниченной этой поверхностью.

П р и м е ч а н и е 1. Заметим, что

$$\operatorname{div} \bar{a} = (\nabla,\ \bar{a}),$$

если под $(\nabla,\ \bar{a})$ понимать формально образованное скалярное произведение векторов

$$\nabla = \bar{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{и} \quad \bar{a} = \bar{a}(M) = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k},$$

обращаясь с операторами дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ как со скалярными величинами.

П р и м е ч а н и е 2. Рассмотрим некоторые формулы, облегчающие вычисление дивергенции более сложных векторов полей.

1. Если C_1 и C_2 — скалярные постоянные, то согласно известным свойствам скалярного произведения имеем

$$(\nabla,\ C_1\bar{a}_1 + C_2\bar{a}_2) = C_1(\nabla,\ \bar{a}_1) + C_2(\nabla,\ \bar{a}_2),$$

т. е.

$$\operatorname{div}(C_1\bar{a}_1 + C_2\bar{a}_2) = C_1 \operatorname{div} \bar{a}_1 + C_2 \operatorname{div} \bar{a}_2 .$$

2. Если $\bar{a}$ — векторное поле постоянного направления, $\bar{a} = u(M)\bar{c}$, где $\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}$ — постоянный вектор, а $u = u(M)$ — скалярное поле, то

$$(\nabla,\ \bar{a}) = (\nabla,\ u\bar{c}) = c_x\frac{\partial u}{\partial x} + c_y\frac{\partial u}{\partial y} + c_z\frac{\partial u}{\partial z} = (\bar{c},\ \nabla u),$$

т. е.

$$\operatorname{div}(u\bar{c}) = (\operatorname{grad} u,\ \bar{c}).$$

3. Если $\bar{c} = \bar{c}(M)$ — переменный вектор, $u = u(M)$ — скалярное поле, то

$$(\nabla,\ u\bar{c}) = c_x\frac{\partial u}{\partial x} + c_y\frac{\partial u}{\partial y} + c_z\frac{\partial u}{\partial z} + u\left(\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z}\right) = (\bar{c},\ \nabla u) + u(\nabla,\ \bar{c}),$$

т. е.

$$\operatorname{div}(u\bar{c}) = (\operatorname{grad} u,\ \bar{c}) + u \operatorname{div} \bar{c}.$$

4. Циркуляция и ротор векторного поля. Под *циркуляцией* векторного поля $\overline{a}(M)$ по контуру L понимается следующий криволинейный интеграл по замкнутому пути L, снабженному направлением обхода:

$$Ц_L = \oint_L a_\tau dl,$$

где a_τ — проекция вектора поля $\overline{a}(M)$ на касательную к пути L в точке M, причем на этой касательной положительным считается то направление, которое совпадает с направлением обхода контура (рис. 90).

Очевидно, что циркуляция тем больше, чем ближе направление вектора $\overline{a}(M)$ в каждой точке M пути L к направлению указанной касательной. Очевидно, что изменение направления обхода контура L влечет за собой изменение знака циркуляции на обратный.

Определение. *Ротором* (вихрем) векторного поля $\overline{a} = \overline{a}(M) = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ называют вектор

$$\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overline{k}.$$

Его обозначают $\operatorname{rot}\overline{a}$.

Таким образом,

$$\operatorname{rot}\overline{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overline{k},$$

или для удобства запоминания

$$\operatorname{rot}\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{rot}\overline{a} = [\nabla, \overline{a}]$. Точно так же, как для градиента и дивергенции,

$$\operatorname{rot}(C_1\overline{a}_1 + C_2\overline{a}_2) = C_1 \operatorname{rot}\overline{a}_1 + C_2 \operatorname{rot}\overline{a}_2.$$

Для ротора поля постоянного направления $\overline{a} = u\overline{c}$, где $\overline{c} = c_x\overline{i} + c_y\overline{j} + c_z\overline{k}$ — постоянный вектор, а $u = u(M)$ — скалярное поле, имеем

$$\operatorname{rot}(u\overline{c}) = -[\overline{c}, \operatorname{grad} u]. \qquad (8.41)$$

Формула (8.41) является частным случаем более общей формулы. Если $\overline{c} = \overline{c}(M)$ — переменный вектор, то $[\nabla, u\overline{c}] = -[\overline{c}, \nabla u] + u[\nabla, \overline{c}]$.

Пример 1. Если $\overline{c}$ — постоянный вектор, то $\operatorname{rot}\overline{c} = 0$.

Пример 2. Если $\overline{a} = \overline{r}$ — радиус-вектор, то

$$\operatorname{rot}\overline{a} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\overline{k} = 0.$$

5. Формула Стокса*. Для поверхностных интегралов имеет место формула, аналогичная формуле Римана — Грина (см. § 8.1, п. 4),

* Джордж Габриель Стокс (1819—1903) — английский физик и математик.

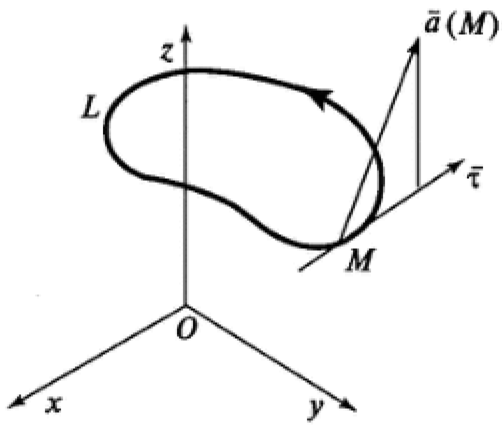


Рис. 90

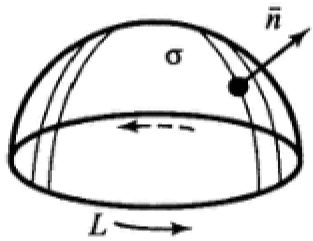


Рис. 91

позволяющая свести вычисление интеграла по поверхности σ к вычислению криволинейного интеграла по замкнутому контуру L, ограничивающему эту поверхность (рис. 91).

Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ (кратко P, Q, R) непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на поверхности σ и замкнутом контуре L (см. рис. 91), ограничивающем поверхность σ (поверхность σ и контур L предполагаем гладкими или кусочно-гладкими).

Справедлива формула

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_\sigma \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta \right) ds, \qquad (8.42)$$

называемая *формулой Стокса*, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали $\bar{n}$ к поверхности σ; направление обхода контура L согласовано с выбором стороны поверхности (см. рис. 91). В случае выбора нижней стороны поверхности σ направление обхода контура L также должно быть согласовано с таким выбором.

Интеграл в левой части формулы (8.42) равен $\oint\limits_L a_\tau dl$ (см. § 8.1) — циркуляции вектора $\bar{a} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ вдоль контура L. Интеграл в правой части представляет поток вектора $\operatorname{rot} \bar{a}$ через поверхность σ, ограниченную контуром L.

Следовательно, формулу Стокса в векторной форме можно записать

$$\oint\limits_L a_\tau dl = \iint\limits_\sigma \operatorname{rot}_n \bar{a}\, ds, \qquad (8.43)$$

где $\operatorname{rot}_n \bar{a} = \text{пр}_{\bar{n}} \operatorname{rot} \bar{a}$.

Таким образом, циркуляция вектора $\bar{a}$ вдоль замкнутого контура L равна потоку вихря этого вектора $\bar{a}$ через поверхность σ, лежащую в поле вектора $\bar{a}$ и ограниченную контуром L. Формулу Стокса с помощью формулы связи криволинейных интегралов (см. § 8.1, п. 2) и формулы связи поверхностных интегралов (см. § 8.2, п. 5) можно переписать в виде

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\, dx. \qquad (8.44)$$

Формулу (8.44) легко запомнить, заметив, что первое слагаемое в правой ее части— это то же выражение, которое стоит под знаком двойного интеграла в формуле Римана — Грина, а второе и третье получаются из него циклической перестановкой координат x, y, z и функций P, Q, R.

В частности, если поверхность σ — область плоскости xOy, ограниченная контуром L, то интегралы по $dzdx$ и $dydz$ обращаются в нуль и формула Стокса переходит в формулу Римана — Грина.

Примечание. Из теоремы Стокса следует, что циркуляция постоянного вектора вдоль любого контура равна нулю, так как $\operatorname{rot} \bar{c} = 0$ (см. п. 10, пример 1), и по формуле (8.43)

$$\oint_L a_\tau dl = 0.$$

Пример. Вычислить с помощью формулы Стокса интеграл $\oint_L x^2y^3dx + ydy + zdz$, где L — окружность, заданная уравнениями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$; поверхностью σ служит верхняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $(z > 0)$, и контур L проходит в положительном направлении.

Так как

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2y^2, \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0.$$

то по формуле Стокса (8.44) получаем

$$\oint_L x^2y^3dx + ydy + zdz = -3\iint_\sigma x^2y^2dx\, dy = -\frac{\pi}{8}.$$

Упражнения

Вычислите криволинейные интегралы:

1. $\int_{OA} (x - y)dl$, если путь от $O(0;\ 0)$ до $A(4;\ 3)$ — отрезок прямой. $\left[\frac{5}{2}.\right]$

2. $\int_L xy\, dl$, где L — контур треугольника с вершинами $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ 0)$ и $C(0;\ 1)$. [0.]

3. $\int_{AB} (x^2 - y^2)dx + xy\, dy$, если путь от $A(1;\ 1)$ до $B(3;\ 4)$ — отрезок прямой. $\left[\frac{67}{6}.\right]$

4. $\int_{OA} x\, dy - y\, dx$, если OA — дуга параболы $y = x^2$, $O(0;\ 0)$, $A(2;\ 4)$. $\left[\frac{8}{3}.\right]$

5. Применяя формулу Римана — Грина, вычислите интеграл $\oint\limits_L y^2dx + (x + y)^2dy$ по контуру треугольника с вершинами $A(1;\ 0)$, $B(1;\ 1)$ и $C(0;\ 1)$. $\left[\dfrac{2}{3}.\right]$

Вычислите поверхностные интегралы:

6. $\iint\limits_\sigma (x^2 + y^2)ds$, где σ — часть конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$. $\left[\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}.\right]$

7. $\iint\limits_\sigma z\,dx\,dy$ по верхней стороне верхней половины сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. $\left[\dfrac{2\pi R^3}{3}.\right]$

8. $\iint\limits_\sigma (x^2 + y^2)dx\,dy$ по верхней стороне части параболоида $z = 1 - x^2 - y^2$, отсеченной плоскостью $z = 0$. $\left[\dfrac{\pi}{2}.\right]$

9. Найдите величину площади той части поверхности $2z = x^2 + y^2$, которую вырезает цилиндр $x^2 + y^2 = 3$. $\left[\dfrac{14}{3}\pi.\right]$

10. Найдите величину площади части боковой поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$. $[\pi\sqrt{2}.]$

11. Найдите поток векторного поля $\bar{a} = x\bar{i} + (y + z)\bar{j} + (z - y)\bar{k}$ через верхнюю часть сферической поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, отсеченную плоскостью $z = 3/2$. $[27\pi.]$

12. Найдите дивергенцию векторного поля $\bar{a} = \alpha(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})$ $(\alpha = \mathrm{const})$. $[3\alpha.]$

13. Найдите дивергенцию векторного поля $\bar{a} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + zx\bar{k}$ в точке $A(1;\ 2;\ 3)$. $[6.]$

14. Найдите $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$, где $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$. $[12.]$

15. С помощью формулы Остроградского — Гаусса найдите поток векторного поля $\bar{a} = xy^2\bar{i} + yz^2\bar{j} + zx^2\bar{k}$ через полную поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. $\left[\dfrac{4}{5}\pi R^5.\right]$

16. С помощью формулы Остроградского — Гаусса найдите поток векторного поля $\bar{a} = y\bar{i} + x\bar{j} + z\bar{k}$ через замкнутую поверхность, состоящую из поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$ и плоскости $z = 1$. $\left[\dfrac{1}{3}\pi.\right]$

17. Найдите $\operatorname{rot}\bar{a}$, где $\bar{a} = y^2\bar{i} - x^2\bar{j} + z^2\bar{k}$. $[-2(x + y)\bar{k}.]$

18. Найдите $\operatorname{rot}\bar{a}$, где $\bar{a} = \bar{r}/|\bar{r}|$. $[0.]$

19. Найдите $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$, где $u = x^2 + y^2 + z^2$. $[0.]$

20. Найдите циркуляцию векторного поля $\overline{a} = y\overline{i}$ по окружности $x = b\cos t$, $y = b + b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$, расположенной в плоскости xOy. [$-\pi b^2$.]

21. Вычислите двумя способами (непосредственно и с помощью формулы Стокса) циркуляцию векторного поля $\overline{a} = x^2y^3\overline{i} + \overline{j} + z\overline{k}$ по окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$. [$-1/8\,\pi R^6$.]

22. Найдите двумя способами циркуляцию векторного поля $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ по эллипсу $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, $z = 0$. [0.]

ГЛАВА 9. **РЯДЫ**

§ 9.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1. Основные понятия. Пусть дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Определение. Символ

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{9.1}$$

называется *числовым рядом*, или просто *рядом*, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами ряда*. Вместо (9.1), пользуясь знаком суммы, кратко пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Суммы конечного числа членов ряда (9.1)

$$S_1 = a_1,\ \ S_2 = a_1 + a_2,\ \ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots\ ,\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,\ \ldots$$

называются *частичными* суммами (или *отрезками*) ряда (9.1). Рассмотрим последовательность

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots\ ,\ S_n,\ \ldots\ . \tag{9.2}$$

Определение. Если существует предел $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$, то ряд (9.1) называют *сходящимся*, а число S — *суммой* этого ряда. В этом случае пишут

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если последовательность (9.2) не имеет предела, то ряд (9.1) называют *расходящимся*. Расходящийся ряд суммы не имеет.

Пример 1. Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии $1,\ q,\ q^2,\ \ldots,\ q^{n-1},\ \ldots$:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots\ . \tag{9.3}$$

Если $q \neq 1$, то, как известно,

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^{n-1}q - 1}{q - 1},$$

или

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

При $|q|<1$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$, т. е. ряд (9.3) при $|q|<1$ сходится и сумма его равна $\dfrac{1}{1-q}$.

При $q=1$ получаем ряд

$$1+1+1+\ldots+1+\ldots .$$

Следовательно, $S_n = n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. ряд (9.3) при $q=1$ расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \tag{9.4}$$

Очевидно,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Следовательно, ряд (9.4) сходится и его сумма равна единице.

2. Основные свойства рядов. Если в ряде (9.1) отбросить конечное число первых членов, например m членов, то получим ряд

$$a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+k}+\ldots , \tag{9.5}$$

который называется m-м *остатком* ряда (9.1).

Теорема 1. *Ряд* (9.5) *сходится (или расходится) одновременно с рядом* (9.1).

Доказательство. Обозначим

$$S'_k = a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+k}.$$

Имеем

$$S'_k = S_{m+k} - S_m. \tag{9.6}$$

Отсюда видно, что существование или отсутствие предела при $k\to\infty$ частичной суммы одного ряда влечет за собой существование или отсутствие предела частичной суммы другого ряда.

Теорема доказана.

Следствие 1. *При исследовании ряда на сходимость можно игнорировать конечное число его первых членов.*

Пусть ряд (9.1) сходится. Тогда согласно теореме 1 сходится и ряд (9.5), значит, существует его сумма. Обозначим ее через r_m. Перейдя к пределу в (9.6) при $k\to\infty$, получим

$$r_m = S - S_m,$$

r_m есть та погрешность, которую мы допускаем, если вместо суммы S сходящегося ряда (9.1) берем сумму m первых его членов. Так как

$$\lim_{m\to\infty} r_m = \lim_{m\to\infty}(S - S_m) = S - S = 0, \tag{9.7}$$

то погрешность уменьшается с ростом m. Следовательно, абсолютная величина остатка

$$|r_m| = |S - S_m|$$

будет как угодно мала, если только число m взято достаточно большим. Таким образом, мы всегда имеем возможность подсчитать приближенно сумму сходящегося ряда, взяв достаточно большое число первых его членов.

Однако большую трудность представляет выяснение величины возникающей ошибки, т. е. оценки $|r_m|$. Задача состоит в том, чтобы по данному $\varepsilon > 0$ найти такое (наименьшее) m, чтобы выполнялось неравенство $|r_m| < \varepsilon$. В дальнейшем (см. п. 4) мы покажем, как иногда можно оценивать величину ошибки и тем самым устанавливать, сколько нужно брать первых членов ряда для получения его суммы с требуемой точностью.

Заметим, что полученное выше соотношение (9.7) отражает следующая теорема.

Теорема 2. *Предел суммы r_m m-го остатка сходящегося ряда* (9.1) *при $m \to \infty$ равен нулю.*

Теорема 3 (необходимый признак сходимости ряда). *Общий член a_n сходящегося ряда* (9.1) *стремится к нулю при неограниченном возрастании n,* т. е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{9.8}$$

Доказательство. Пусть ряд (9.1) сходится. Имеем $a_n = S_n - S_{n-1}$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Следствие 2. *Если общий член a_n ряда* (9.1) *при $n \to \infty$ не стремится к нулю, то этот ряд расходится.*

Пример 1. Для ряда (9.3), у которого $|q| \geq 1$, имеем $|q|^{n-1} \geq 1$ для $n = 1, 2, \ldots$, т. е. q^{n-1} не стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому такой ряд расходится.

Примечание 1. Отметим, что условие (9.8) не является достаточным для сходимости ряда. Действительно, для ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots, \tag{9.9}$$

называемого *гармоническим* рядом,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Однако этот ряд расходится, что можно установить рассуждениями от противного. Предположим, что ряд (9.9) сходится и его сумма равна S.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0,$$

что противоречит неравенству

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, гармонический ряд расходится.

Теорема 4. *Если ряд* (9.1) *сходится и его сумма равна* S, *то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n, \tag{9.10}$$

где c *— произвольное число, также сходится и его сумма равна* cS.

Доказательство. Пусть S_n и σ_n — частичные суммы соответственно рядов (9.1) и (9.10). Тогда

$$\sigma_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = cS_n.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = c\lim_{n\to\infty} S_n = cS.$$

Теорема доказана.

Пример 2. С учетом примера 1 (см. п. 1) на основании теоремы 4 заключаем, что при $|q| < 1$ ряд

$$c + cq + cq^2 + \ldots + cq^{n-1} + \ldots ,$$

где c — произвольное число, сходится.

Аналогично теореме 4 устанавливается теорема 5.

Теорема 5. *Если ряд* (9.1) *и ряд*

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

сходятся и их суммы соответственно равны S *и* σ, *то и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$$

сходится и его сумма равна $S + \sigma$.

Примечание 2. При условии теоремы 5 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$$

также сходится и его сумма равна $S - \sigma$.

Наконец, заметим (см. [7]), что если ряд (9.1) сходится и имеет сумму S, то члены его можно любым образом сгруппировать скобками (однако не переставляя их), например,

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \ldots ,$$

образуя новый ряд, члены которого равны суммам чисел, стоящих в скобках. Новый ряд будет сходящимся и притом к S.

Однако раскрытие скобок в сходящемся ряде не всегда возможно. Так, ряд

$$(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots$$

сходится, а ряд

$$1-1+1-1+\ldots+1-1+\ldots \tag{9.11}$$

расходится (общий член ряда (9.11) не стремится к нулю).

3. Положительные ряды.

Определение. *Положительным рядом* называется ряд, члены которого неотрицательны.

Пусть дан положительный ряд

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots\ , \tag{9.12}$$

т. е. $a_n \geq 0$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. Тогда, очевидно,

$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}\geq S_n \quad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

т. е. последовательность $S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$ является неубывающей.

Это с учетом приведенного в § 1.3 (п. 1) свойства 2 позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы положительный ряд* (9.12) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена сверху.*

Теорема 2 (признак сравнения рядов). *Пусть даны два положительных ряда*

$$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots\ , \tag{9.13}$$

$$c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots\ . \tag{9.14}$$

Если члены ряда (9.13) *не превосходят соответствующих членов ряда* (9.14)

$$b_n \leq c_n \quad (n=1,\ 2,\ \ldots), \tag{9.15}$$

то из сходимости ряда (9.14) *следует сходимость ряда* (9.13), *а из расходимости ряда* (9.13) *следует расходимость ряда* (9.14).

Доказательство. Обозначив через B_n и C_n соответственно частичные суммы рядов (9.13) и (9.14), в силу неравенства (9.15) будем иметь

$$B_n \leq C_n,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ . \tag{9.16}$$

Если ряд (9.14) сходится, то по теореме 1 частичные суммы C_n ограничены сверху:

$$C_n \leq L\ \ (L=\mathrm{const}),\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ . \tag{9.17}$$

Из неравенств (9.16) и (9.17) имеем $B_n \leq L$, $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, и, значит, согласно той же теореме 1 ряд (9.13) сходится.

Пусть теперь ряд (9.13) расходится. Тогда расходится и ряд (9.14). В противном случае согласно только что доказанному сходился бы и ряд (9.13).

Примечание 1. Ввиду следствия 1 (п. 2) теорема 2 остается справедливой, если условие (9.15) выполняется не для всех n, а лишь начиная с некоторого n.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}. \tag{9.18}$$

Сравниваем данный ряд со сходящимся рядом (см. п. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Имеем

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Отсюда согласно теореме 2 получаем, что ряд (9.18) сходится. Попутно отметим, что тогда в силу следствия 1 (п. 2) сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{9.19}$$

Теорема 3 (признак Даламбера*). *Если члены положительного ряда* (9.12) *таковы, что существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho,$$

то при $\rho < 1$ *ряд* (9.12) *сходится, а при* $\rho > 1$ *ряд* (9.12) *расходится.*

Доказательство. В силу определения предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\rho - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \varepsilon. \tag{9.20}$$

Если $\rho < 1$, то выберем ε столь малым, чтобы $\rho + \varepsilon$ было меньше единицы. Полагая $\rho + \varepsilon = q$, на основании правой части неравенства (9.20) имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q, \quad \text{или} \quad a_{n+1} < a_n q,$$

для $n = N+1$, $n = N+2$, ... Давая n эти значения, из последнего неравенства получаем

$$a_{N+2} < a_{N+1} q,$$
$$a_{N+3} < a_{N+2} q < a_{N+1} q^2,$$
$$a_{N+4} < a_{N+3} q < a_{N+1} q^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

т. е. члены ряда

$$a_{N+2} + a_{N+3} + a_{N+4} + \ldots \tag{9.21}$$

меньше соответствующих членов сходящегося ряда

* Жан де Рон Даламбер (1717—1783) — французский математик.

$$a_{N+1}q + a_{N+1}q^2 + a_{N+1}q^3 + \ldots$$

(см. п. 2, пример 2).

Тогда по признаку сравнения ряд (9.21) сходится, и, следовательно, согласно теореме 1 (п. 2) сходится и ряд (9.12).

Пусть теперь $\rho > 1$. Возьмем ε столь малым, чтобы $\rho - \varepsilon > 1$. Тогда при $n > N$ в силу левой части неравенства (9.20) будет выполняться неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, или $a_{n+1} > a_n$. Таким образом, члены ряда (9.12), начиная с номера $n = N + 1$, возрастают с увеличением их номеров, т. е. общий член ряда (9.12) a_n не стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, согласно следствию 2 (п. 2) ряд (9.12) расходится.

Примечание 2. При $\rho = 1$ признак Даламбера на вопрос о том, сходится или расходится ряд, ответа не дает. В самом деле, для гармонического ряда $\rho = 1$, причем этот ряд расходится (см. п. 2, примечание 1). Вместе с тем для ряда (9.19) также $\rho = 1$, но этот ряд сходится (см. пример 1).

Примечание 3. Из доказательства признака Даламбера следует, что при $\rho > 1$ общий член a_n ряда (9.12) не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Примечание 4. Ряд (9.12) будет расходиться и в том случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, так как тогда, начиная с некоторого номера $n = N$, будет $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, и, значит, a_n не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Пример 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1.$$

Пример 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)!\, n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Справедлива (см., например, [1]) и следующая теорема.

Теорема 4 (интегральный признак Коши). *Пусть члены положительного ряда* (9.12) *такие, что*

$$a_1 = f(1), \quad a_2 = f(2), \quad \ldots, \quad a_n = f(n), \quad \ldots ,$$

где функция $f(x)$ при $x \geq 1$ непрерывна, положительна и убывает. Тогда ряд (9.12) *и несобственный интеграл*

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \qquad (9.22)$$

сходятся или расходятся одновременно.

Примечание 5. В интеграле (9.22) в качестве нижнего предела может быть фиксированное по произволу натуральное число $k > 1$. Это равносильно отбрасыванию $k - 1$ первых членов ряда (9.12), что на сходимость этого ряда не влияет (см. п. 2, следствие 1).

Пример 4. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad (\alpha > 0). \tag{9.23}$$

Функция $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, $x \geq 1$ удовлетворяет условиям теоремы 4. Члены ряда (9.23) равны значениям этой функции при $x = 1, 2, 3, \dots$. Как установлено ранее (см. § 5.4, п. 1), несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha \leq 1$ расходится. Следовательно, данный ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leq 1$.

В частности, при $\alpha = 2$ получим сходящийся ряд (9.19), при $\alpha = 1$ — расходящийся гармонический ряд (9.9) (см. п. 2), при $\alpha = \frac{1}{2}$ — расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ и т. д.

4. Знакочередующиеся ряды. *Знакочередующимся рядом* называют ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots , \tag{9.24}$$

где $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Теорема Лейбница. *Если члены ряда* (9.24) *по абсолютной величине монотонно убывают,*

$$a_{n+1} < a_n \, (n = 1, 2, \dots) \tag{9.25}$$

и общий член стремится к нулю

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \tag{9.26}$$

то ряд (9.24) сходится. При этом его сумма — положительное число, меньшее первого члена этого ряда.

Доказательство. Частичную сумму S_{2m} можно представить двояко:

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}), \tag{9.27}$$

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}. \tag{9.28}$$

Здесь в каждой круглой скобке разность положительна в силу условия (9.25). Из (9.27) следует, что $S_{2m} > 0$ и последовательность $\{S_{2m}\}$ монотонно возрастающая. Из (9.28) видно, что $S_{2m} < a_1$, т. е. $\{S_{2m}\}$ ограничена. Следовательно (см. § 1.3, п. 1, свойство 3), эта последовательность имеет предел

$$\lim_{m \to \infty} S_{2m} = S, \tag{9.29}$$

причем

$$0 < S < a_1. \tag{9.30}$$

Далее с учетом (9.29) и (9.26) имеем

$$\lim_{m \to \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \to \infty} S_{2m} + \lim_{m \to \infty} a_{2m+1} = S. \tag{9.31}$$

Из (9.29) и (9.31) следует, что $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, т. е. ряд (9.24) сходится, причем в силу (9.30)

$$0 < S < a_1.$$

Пример 1. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

сходится, так как условия теоремы Лейбница здесь выполнены.

Следствие. *Остаток r_n знакочередующегося ряда* (9.24), *удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине.*

Пример 2. Вычислить с точностью до 0,1 сумму сходящегося ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots \quad (9.32)$$

В качестве приближенного значения S ряда (9.32) мы должны взять ту частичную сумму S_n, для которой $|r_n| < 0{,}1$. Согласно следствию из теоремы Лейбница $|r_n| < \frac{1}{n+1}$. Следовательно, достаточно положить $n+1=10$, т. е. $n=9$. Тогда

$$S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0{,}74.$$

Отсюда $S \approx 0{,}7$ с точностью до 0,1.

5. Абсолютная и условная сходимости. Перейдем теперь к рядам с членами, имеющими любой знак. С каждым таким рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (9.33)$$

связан ряд с неотрицательными членами, составленный из модулей членов данного ряда, т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (9.34)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если сходится ряд* (9.34), *то сходится и ряд* (9.33).

Доказательство. Составим два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \quad (p)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n, \quad (q)$$

где

$$p_n = \begin{cases} a_n, & \text{если } a_n > 0, \\ 0, & \text{если } a_n \le 0, \end{cases} \qquad q_n = \begin{cases} 0, & \text{если } a_n \ge 0, \\ |a_n|, & \text{если } a_n < 0. \end{cases}$$

Так как при $n=1, 2, \ldots$ $p_n \le |a_n|$ и $q_n \le |a_n|$, то по теореме 2 (п. 3) ряды (p) и (q) сходятся. Обозначим их суммы соответственно через P и Q. Частичную сумму S_n данного ряда (9.33) можно с помощью обозначений для p_n и q_n переписать в виде

$$S_n = (p_1 + p_2 + \ldots + p_n) - (q_1 + q_2 + \ldots + q_n).$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} S_n = P - Q. \tag{9.35}$$

Следовательно, ряд (9.33) сходится.

Определение. Ряд (9.33) называют *абсолютно сходящимся*, если ряд (9.34) сходится. Если же ряд (9.33) сходится, а ряд (9.34) расходится, то ряд (9.33) называют *неабсолютно сходящимся* или *условно сходящимся*.

Примечание. Из равенства (9.35) имеем $\left|\lim_{n\to\infty} S_n\right| \le P + Q$. Но

$$P + Q = \sum_{n=1}^{\infty} p_n + \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Следовательно, для абсолютно сходящегося ряда (9.33) имеет место неравенство

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Пример. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \tag{9.36}$$

абсолютно сходится при $\alpha > 1$ и условно сходится при $0 < \alpha \le 1$.

В самом деле, как установлено ранее (см. п. 3, пример 4), если $\alpha > 1$, то ряд (9.23) сходится, если же $0 < \alpha \le 1$, то ряд (9.23) расходится, хотя сам ряд (9.36) сходится по теореме Лейбница.

Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов.

Пусть дан сходящийся ряд

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots\ . \tag{9.37}$$

Произвольным образом переставим в нем местами члены ряда, образовав ряд

$$a_1' + a_2' + \ldots + a_k' + \ldots\ , \tag{9.38}$$

причем члены ряда (9.38) связаны с членами ряда (9.37) следующим образом:

$$a_1' = a_{n1},\ \ a_2' = a_{n2},\ \ a_k' = a_{nk} \ldots\ .$$

Теорема 2. *Если ряд* (9.37) *абсолютно сходится, то ряд* (9.38) *также абсолютно сходится и сумма его равна сумме ряда* (9.37), *т. е.*

абсолютно сходящийся ряд (9.37) *обладает переместительным свойством.*

Доказательство см., например, в [7].

Условно сходящиеся ряды переместительным свойством не обладают.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают еще одним важным свойством: их можно перемножать.

Пусть даны два абсолютно сходящихся ряда

$$\begin{aligned} A &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \ , \\ B &= b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \ . \end{aligned} \tag{9.39}$$

Образуем новый ряд

$$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \ldots \ , \tag{9.40}$$

называемый *произведением двух рядов* (9.39). Оказывается (см. [8], т. I), что ряд (9.40) также сходится абсолютно и имеет своей суммой число $S = AB$.

6. Ряды с комплексными членами. Рассмотрим числовой ряд с комплексными членами, т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{9.41}$$

где $u_n = \alpha_n + i\beta_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Для этого ряда, как и для ряда с действительными членами (см. п. 1), вводится понятие n-й частичной суммы

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n .$$

Ряд с комплексными членами (9.41) называется *сходящимся*, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, при этом число S называется *суммой* ряда (9.41). Здесь пользуемся понятием *предела последовательности комплексных чисел* и понимаем его в следующем смысле: число S называется пределом последовательности $\{S_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, зависящий от ε, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|S_n - S| < \varepsilon, \tag{9.42}$$

или, что то же,

$$\lim_{n\to\infty} |S_n = S| = 0.$$

Так же, как в случае рядов с действительными членами (см. п. 2), устанавливается необходимый признак сходимости ряда (9.41): общий член u_n сходящегося ряда (9.41) стремится к нулю при неограниченном возрастании n, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Пример. Для ряда

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots \tag{9.43}$$

(q — комплексное число, отличное от единицы) частичная сумма

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}, \qquad (9.44)$$

так как $(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}) = 1-q^n$.

Из равенства (9.44) имеем

$$\left|S_n - \frac{1}{1-q}\right| = \frac{|q|^n}{|1-q|}.$$

Отсюда при $|q|<1$

$$\lim_{n\to\infty}\left|S_n - \frac{1}{1-q}\right| = 0.$$

Значит, при $|q|<1$ ряд (9.43) сходится и его сумма S равна $\dfrac{1}{1-q}$.

При $|q|\geq 1$ ряд (9.43) расходится, так как в этом случае его общий член q^{n-1} не стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

Следующая теорема позволяет свести изучение рядов (9.41) с комплексными членами к исследованию таких рядов с действительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n. \qquad (9.45)$$

Теорема 1. *Ряд* (9.41) *сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды* (9.45).

Теорема 3. *Если сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|, \qquad (9.46)$$

то сходится и ряд (9.41).

Как и в случае рядов с действительными членами, ряд (9.41) называется *абсолютно сходящимся*, если ряд (9.46) сходится. Если же ряд (9.41) сходится, а ряд (9.46) расходится, то ряд (9.41) называется *условно сходящимся*.

На абсолютно сходящиеся ряды с комплексными членами распространяются имеющие место для абсолютно сходящихся рядов с действительными членами переместительное свойство и свойство перемножения рядов (см. п. 5).

§ 9.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

1. Область сходимости функционального ряда. Перейдем к рассмотрению рядов, членами которых являются не числа, а функции:

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \ . \qquad (9.47)$$

Такие ряды называют *функциональными*. Например, ряд

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

является функциональным.

Если в ряде (9.47) придать x какое-либо значение x_0 из области определения функций $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, то получим числовой ряд

$$u_1(x_1) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots \quad . \tag{9.48}$$

Этот ряд может сходиться или расходиться. Если он сходится, то точка x_0 называется *точкой сходимости* функционального ряда (9.47). Если ряд (9.48) расходится, то точка x_0 называется *точкой расходимости* функционального ряда (9.47). Для одних точек, взятых из области определения функций $u_n(x)$, ряд (9.47) может сходиться, а для других — расходиться.

Определение. Совокупность всех точек сходимости функционального ряда называют *областью его сходимости*.

Частичная сумма функционального ряда (9.47), т. е. сумма n первых его членов $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$, является функцией переменной x.

Из определения области сходимости функционального ряда следует, что для любой точки x этой области существует предел частичной суммы $S_n(x)$ при $n \to \infty$. В точках, не принадлежащих области сходимости, частичная сумма $S_n(x)$ не имеет предела. Ясно, что сумма $S(x)$ функционального ряда (9.47) является некоторой функцией от x, определенной в области сходимости ряда (9.47). В этом случае пишут

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \quad .$$

Если функциональный ряд (9.47) сходится и имеет сумму $S(x)$, то разность $S(x) - S_n(x)$ называют, как и для числовых рядов, его n-м остатком. Этот остаток будем обозначать через $r_n(x)$: $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$. Ясно, что

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0.$$

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$ сходится в промежутке $-3 < x < 3$, так как в этом промежутке $q = \left|\frac{x}{3}\right| < 1$. При $|x| \geq 3$ данный ряд расходится.

2. Равномерная сходимость функционального ряда.

Определение. Функциональный ряд (9.47) называют *равномерно сходящимся* на отрезке $[a; b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, не зависящее от x, что для $n > N$ неравенство $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ выполняется для всех x из отрезка $[a; b]$.

Теорема 1 (признак Вейерштрасса). *Если члены функционального ряда* (9.47) *удовлетворяют на отрезке* $[a; b]$ *условию*

$$|u_n(x)| \leq a_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{9.49}$$

где a_n — члены сходящегося положительного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{9.50}$$

то ряд (9.47) *сходится равномерно (и абсолютно) на отрезке* $[a; b]$.

Доказательство. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как ряд (9.50) сходится, то для этого ряда (см. § 9,1, п. 2, теорема 2) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ (r_n — сумма n-го остатка ряда (9.50)). Поэтому существует такое натуральное число N, что при $n > N$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon. \tag{9.51}$$

Пользуясь неравенством (9.49), получаем, что при любом натуральном p

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k, \tag{9.52}$$

откуда при $p \to \infty$ с учетом (9.51) следует, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon \quad (n > N) \tag{9.53}$$

(предел $p \to \infty$ у левой части неравенства (9.52) существует в силу теоремы 1 (см. § 9.1, п. 3)). Это доказывает абсолютную сходимость ряда (9.47). Тогда (см. § 9.1, п. 5, примечание) с учетом неравенства (9.53) имеем

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| < \varepsilon$$

для $n > N$ и для всех x из $[a;\ b]$, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на $[a;\ b]$.

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$ сходится равномерно на отрезке $[-1;\ 1]$, так как на этом отрезке $\dfrac{|x^n|}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится (см. § 9.1, п. 3, пример 1).

3. Свойства равномерно сходящихся рядов. Приведем без доказательств (доказательства см., например, в [10], т. I) некоторые теоремы о свойствах равномерно сходящихся рядов.

Теорема 1. *Если члены равномерно сходящегося на отрезке $[a;\ b]$ функционального ряда (9.47) непрерывны на нем, то его сумма также непрерывна на отрезке $[a;\ b]$.*

Теорема 2. *Если члены равномерно сходящегося на отрезке $[a;\ b]$ функционального ряда (9.47) непрерывны на этом отрезке, то ряд (9.47) можно на отрезке $[a;\ b]$ почленно интегрировать.*

Это означает, что если x_1 и x_2 — любые две точки на отрезке $[a;\ b]$, то

$$\int_{x_1}^{x_2} (u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots)dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} u_1(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} u_2(x)dx + \ldots + \int_{x_1}^{x_2} u_n(x)dx + \ldots .$$

Теорема 3. *Пусть функциональный ряд* (9.47) *сходится на отрезке* $[a;\ b]$ *и его члены имеют на нем непрерывные производные* $u_n'(x)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. *Тогда если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *сходится равномерно на отрезке* $[a;\ b]$, *то на этом отрезке*

$$(u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots)'=u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x)+\ldots\ .$$

Теорема 4. *Если все члены равномерно сходящегося на отрезке* $[a;\ b]$ *ряда* (9.47) *умножить на ограниченную на этом отрезке функцию* $\varphi(x)$, *то полученный ряд*

$$\varphi(x)u_1(x)+\varphi(x)u_2(x)+\ldots+\varphi(x)u_n(x)+\ldots$$

также будет равномерно сходящимся на отрезке $[a;\ b]$.

§ 9.3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

1. Степенной ряд и его область сходимости.

Определение. *Степенным рядом* называют функциональный ряд вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots\ , \tag{9.54}$$

где $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\ \ldots$ — постоянные вещественные числа, называемые *коэффициентами* степенного ряда.

Любой степенной ряд (9.54) сходится при $x=0$, так как в этой точке все члены ряда (9.54), кроме первого, нули. Есть степенные ряды вида (9.54), которые сходятся лишь в точке $x=0$; такие ряды относят к рядам *первого класса*.

Например, ряд

$$1+x+2!x^2+\ldots+n!x^n+\ldots \tag{9.55}$$

сходится лишь в точке $x=0$; в любой другой точке $x\neq 0$ этот ряд расходится. Действительно, при каждом $x\neq 0$ из числовой оси имеем числовой ряд. Исследуем его на сходимость. Образуем ряд

$$1+|x|+2!|x|^2+\ldots+n!|x|^n+\ldots\ . \tag{9.56}$$

Применив к последнему ряду признак Даламбера (см. § 9.1, п. 3), получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n}=|x|\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

при всех $x\neq 0$. Следовательно (см. § 9.1, п. 3, примечание 4), общий член ряда (9.56), а значит и ряда (9.55), не стремится к нулю при $n\to\infty$; таким образом, эти ряды расходятся при всех $x\neq 0$.

Есть степенные ряды вида (9.54), которые сходятся на всей числовой оси (такие ряды относят к рядам *второго класса*). Например, ряд

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

сходится (притом абсолютно) на всей числовой оси, так как при каждом x из $(-\infty;\ +\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,|x|^{n+1}}{(n+1)!\,|x|^n}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Ряды вида (9.54), не принадлежащие первому и второму классам, относят к рядам *третьего класса*.

Теорема 1 (теорема Абеля*). *Если степенной ряд* (9.54) *сходится при* $x=x_0\neq 0$, *то он абсолютно сходится для любого* x, *удовлетворяющего условию*

$$|x|<|x_0|;$$

если же при $x=x_0$ *степенной ряд* (9.54) *расходится, то он расходится и при любом* x, *удовлетворяющем условию* $|x|>|x_0|$.

Доказательство. Пусть при $x=x_0\neq 0$ степенной ряд (9.54) сходится, т. е. сходится числовой ряд

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n+\ldots\ . \tag{9.57}$$

Тогда (см. § 9.1, п. 2, теорема 3)

$$\lim_{n\to\infty}a_nx_0^n=0,$$

откуда следует, что члены ряда (9.57) ограничены по модулю:

$$|a_nx_0^n|\leq M,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{9.58}$$

(M — постоянное положительное число).

Возьмем теперь любое x, для которого $|x|<|x_0|$, и рассмотрим ряд

$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\ldots+|a_nx^n|+\ldots\ . \tag{9.59}$$

Имеем тождество $|a_nx^n|=|a_nx_0^n|\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

Отсюда в силу (9.58) $|a_nx^n|\leq M\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$,

или

$$|a_nx^n|\leq Mq^n\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{9.60}$$

где

$$q=\left|\frac{x}{x_0}\right|<1,\ \text{так как}\ |x|<|x_0|.$$

Ряд

$$M+Mq+Mq^2+\ldots+Mq^n+\ldots$$

сходится (см. § 9.1, п. 2, пример 2). Поэтому, имея в виду неравенство (9.60), согласно признаку сравнения рядов (см. § 9.1, п. 3) сходится ряд (9.59) для любого x, для которого $|x|<|x_0|$, а ряд (9.54), значит, для этого x сходится абсолютно.

---

* Нильс Генрих Абель (1802—1829) — норвежский математик.

Пусть теперь ряд (9.54) при $x=x_0$ расходится. Докажем, что он расходится и при любом x, удовлетворяющем неравенству $|x|>|x_0|$. Действительно, если бы при некотором значении $x=x_1$, удовлетворяющем неравенству $|x_1|>|x_0|$, ряд (9.54) был сходящимся, то по доказанному в предыдущем случае он был бы сходящимся и при $x=x_0$, что противоречит условию.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. *Ряд второго класса* (9.54) *сходится абсолютно в интервале* $(-\infty;\ +\infty)$.

С л е д с т в и е 2. *Для каждого степенного ряда* (9.54) *третьего класса существует число* $R>0$, *называемое радиусом сходимости этого ряда и обладающее следующими свойствами: при* $|x|<R$ *ряд* (9.54) *сходится абсолютно, при* $|x|>R$ *ряд* (9.54) *расходится.*

Промежуток $(-R;\ R)$ называют *интервалом сходимости* степенного ряда (9.54).

Согласно следствию 1 для ряда (9.54) второго класса интервал сходимости $(-\infty;\ +\infty)$.

Областью сходимости степенного ряда (9.54) третьего класса является интервал $(-R;\ R)$, к которому в отдельных случаях добавляются один или оба конца этого интервала (это зависит от конкретного исследуемого ряда).

П р и м е ч а н и е 1. Для ряда (9.54) первого класса полагают $R=0$, для ряда (9.54) второго класса $R=\infty$.

Т е о р е м а 2. *Пусть для ряда* (9.54) *существует и отличен от нуля предел*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L.$$

Тогда

$$R=\frac{1}{L}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (9.54):

$$|a_0|+|a_1||x|+|a_2||x^2|+\ldots+|a_n||x^n|+\ldots\ . \tag{9.61}$$

Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|=L|x|.$$

В соответствии с этим признаком ряд (9.61) сходится, если $|x|L<1$, т. е. если $|x|<\frac{1}{L}$, и расходится, если $|x|L>1$, т. е. если $|x|>\frac{1}{L}$ (в последнем случае общий член ряда (9.61), значит и ряда (9.54), не стремится к нулю при $n\to\infty$).

Следовательно, ряд (9.54) сходится абсолютно при $|x|<\frac{1}{L}$ и расходится при $|x|>\frac{1}{L}$. Значит, радиусом сходимости ряда (9.54) является число

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Примечание 2. Если $L = 0$, то при любом x из числовой оси $|x|L = 0 < 1$, т. е. ряд (9.61) сходится на всей числовой оси. Значит, ряд (9.54) абсолютно сходится на этой оси. Следовательно, $R = \infty$. Если $L = \infty$, то при любом $x \neq 0$ из числовой оси $|x|L = \infty$, и, значит, ряд (9.54) при любом $x \neq 0$ (см. § 9.1, п. 3, примечание 4) расходится, т. е. $R = 0$.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{3} \right)^n$ имеет радиус сходимости $R = 3$, так как

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{n 3^n}{(n+1) 3^{n+1}} = \frac{1}{3}.$$

Областью сходимости данного ряда является промежуток $-3 \leq x < 3$.

2. Свойства степенных рядов.

Теорема 1. *Всякий степенной ряд* (9.54) *с радиусом сходимости* $R > 0$ *сходится равномерно на всяком отрезке* $[-\rho;\ \rho]$, *содержащемся в интервале сходимости* $(-R;\ R)$.

Доказательство. По условию $0 < \rho < R$. Поэтому положительный ряд

$$|a_0| + |a_1|\rho + |a_2|\rho^2 + \ldots + |a_n|\rho^n + \ldots$$

сходится, причем на отрезке $[-\rho;\ \rho]$

$$|a_n x^n| \leq |a_n|\rho^n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Следовательно, согласно признаку Вейерштрасса (см. § 9.2, п. 2) степенной ряд (9.54) сходится равномерно на отрезке $[-\rho;\ \rho]$.

Из установленной теоремы следует, что степенные ряды обладают всеми свойствами равномерно сходящихся рядов.

Сформулируем эти свойства (см., например, [10], т. 1).

Теорема 2. *Сумма степенного ряда (9.54) есть функция, непрерывная в каждой точке интервала сходимости ряда. Степенной ряд внутри его интервала сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать сколько угодно раз, причем в результате этих операций получаются степенные ряды, имеющие тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.*

3. Ряды по степеням разности $x - a$. *Степенным рядом* называется также функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \ldots + a_n(x - a)^n + \ldots \ . \qquad (9.62)$$

Интервалом сходимости степенного ряда (9.62) является интервал длиной $2R$ с центром в точке a.

Свойства степенных рядов по степеням x (см. п. 2) сохраняются и для рядов по степеням $x - a$.

4. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора. Если функция $f(x)$ является суммой ряда (9.62), то в этом случае говорят, что *функция $f(x)$ разлагается в ряд по степеням $x - a$.*

Важность такого разложения видна хотя бы из того, что мы получаем возможность *приближенно заменить функцию суммой нескольких первых членов степенного ряда*, т. е. *многочленом*.

Теорема 1. *Если функция* $f(x)$ *на интервале* $(x_0 - R;\ x_0 + R)$ *разлагается в степенной ряд*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \ , \qquad (9.63)$$

то это разложение единственно.

Доказательство. Согласно теореме 2 (см. п. 2) имеем

$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots \ ,$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots \ ,$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x - x_0) + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3} + \ldots \ ,$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)na_n + 2 \cdot 3 \ldots n(n+1)a_{n+1}(x - x_0) + \ldots$$

. . . .

Полагая в этих равенствах и в равенстве (9.63) $x = x_0$, получаем

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots \ . \qquad (9.64)$$

Из (9.64) следует, что все коэффициенты ряда (9.63) определяются единственным образом формулами (9.64), что и доказывает теорему.

Подставляя полученные выражения коэффициентов в равенство (9.63), получаем ряд

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots, \qquad (9.65)$$

который называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$, коэффициенты этого ряда

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots$$

называют *коэффициентами Тейлора функции* $f(x)$ *в точке* x_0.

Таким образом, *если функция* $f(x)$ *разлагается в степенной ряд по степеням* $(x - x_0)$, *то этот ряд обязательно является рядом Тейлора этой функции.*

Если в ряде Тейлора положим $x_0 = 0$, то получим частный случай ряда Тейлора, который называют *рядом Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \ . \qquad (9.66)$$

Отметим, что все рассуждения были сделаны в предположении, что функция $f(x)$ *может быть разложена в степенной ряд.*

Если заранее этого не предполагать, а просто считать функцию $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируемой и составить для нее ряд Тейлора, то ниоткуда не следует, что этот ряд сходится при значениях x, отличных от x_0. Более того, могут быть даже такие случаи, когда ряд Тейлора, составленный для функции $f(x)$, сходится, а сумма его вовсе не равна $f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ в интервале $(x_0-R;\ x_0+R)$ имеет производные любого порядка. Тогда для любого x из этого интервала и любого n будет справедлива формула Тейлора (см. § 3.4, п. 1)

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x), \tag{9.67}$$

где

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{9.68}$$

Перейдем теперь к выяснению условий, при которых можно утверждать, что ряд Тейлора, составленный для функции $f(x)$,

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \tag{9.69}$$

сходится в интервале $(x_0-R;\ x_0+R)$ и что его сумма равна $f(x)$.

Так как разность между $f(x)$ и суммой $(n+1)$ первых членов ряда (9.69) есть как раз $r_n(x)$, что видно из (9.67), то, очевидно, для того чтобы ряд Тейлора (9.69) сходился к функции $f(x)$ (для которой он составлен) в интервале $(x_0-R;\ x_0+R)$, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Тейлора $r_n(x)$ для функции $f(x)$ в каждой точке этого интервала стремился к нулю при $n\to\infty$.

Установим теперь достаточное условие сходимости ряда Тейлора функции $f(x)$ к этой функции.

Теорема 2. *Если в интервале* $(x_0-R;\ x_0+R)$ *функция* $f(x)$ *имеет производные любого порядка и все они по абсолютной величине ограничены одним и тем же числом*

$$|f^{(n)}(x)|\le M\ \ (n=1,\ 2,\ \ldots), \tag{9.70}$$

то в этом интервале имеет место разложение (9.65).

Доказательство. В силу (9.68) и (9.70) в интервале $(x_0-R;\ x_0+R)$ имеем

$$|r_n(x)|=\frac{|f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\le M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{9.71}$$

Так как ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

сходится при любом x по признаку Даламбера (см. § 9.1, п. 3), то при любом x (см. § 9.1, п. 2, теорема 3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

и, значит, с учетом (9.71) $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$ в интервале $(x_0-R;\ x_0+R)$.

Примечание. Если в условии теоремы 2 $x_0=0$, то в интервале $(-R;\ R)$ имеет место разложение (9.66).

5. Разложение в степенные ряды основных элементарных функций.

1. $f(x) = e^x$. Здесь $f^{(n)}(x) = e^x$ и $f^{(n)}(0) = 1$. Условие (9.70) для данной функции выполнено в любом интервале $|x| < r$, так как $|f^{(n)}(x) = e^x| < e^r$. Поэтому согласно теореме 2 (см. п. 4) формула

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (9.72)$$

верна при всех x.

2. $f(x) = \sin x$. Здесь $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$, $f^{(k)}(0) = \sin\frac{k\pi}{2} = 0$ при $k = 2n$, $f^{(k)}(0) = (-1)^n$ при $k = 2n + 1$. При этом $|f^{(n)}(x)| \le 1$ на всей числовой оси. Поэтому согласно теореме 2 (см. п. 4) формула

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

верна при всех x из $(-\infty; +\infty)$. Аналогично формула

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

верна при всех x из $(-\infty; +\infty)$.

3. Рассмотрим функцию $f(x) = (1 + x)^\alpha$, где α — любое вещественное число. Здесь

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}$$

и

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1).$$

Можно доказать (см., например, в [8], т. I), что равенство

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + \ldots \qquad (9.73)$$

верно при $|x| < 1$.

Ряд (9.73) называют *биномиальным*.

Если $\alpha = m$, где m — натуральное число, то равенство (9.73) обращается в формулу бинома Ньютона (см. § 3.4, п. 2):

$$(1 + x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{m}\frac{m(m - 1)\ldots(m - n + 1)}{n!}x^n.$$

Выделим следующие частные случаи биномиального ряда:

1) при $\alpha = -1$

$$\frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n; \qquad (9.74)$$

2) при $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 3)}{2^n \cdot n!}x^n;$$

3) при $\alpha = -\frac{1}{2}$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^n.$$

4. Разложение $f(x) = \ln(1+x)$ получим путем интегрирования ряда (9.74) в промежутке от 0 до x (при $|x| < 1$):

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < x \leq 1). \tag{9.75}$$

5. Разложение $f(x) = \operatorname{arctg} x$ получим путем интегрирования ряда (9.74), если в нем предварительно заменить x на x^2:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1). \tag{9.76}$$

Области сходимости рядов (9.75), (9.76) указаны в скобках.

6. Приложения степенных рядов к приближенным вычислениям. Степенные ряды являются мощным вычислительным средством. С их помощью можно, например, вычислять приближенные значения функций, приближенно вычислять некоторые «неберущиеся» определенные интегралы.

Пример 1. Вычислить значение $e^{0,2}$ с точностью до 0,0001. Согласно формуле (9.72) имеем

$$e^{0,2} = 1 + 0,2 + \frac{0,2^2}{2!} + \frac{0,2^3}{3!} + \frac{0,2^4}{4!} + \ldots .$$

Оценим погрешность, получаемую при отбрасывании всех членов этого ряда, начиная с пятого:

$$r_4 = \frac{0,2^4}{4!} + \frac{0,2^5}{5!} + \frac{0,2^6}{6!} + \ldots = \frac{0,2^4}{4!}\left(1 + \frac{0,2}{5!} + \frac{0,2^2}{5 \cdot 6} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{0,2^4}{4!}\left(1 + \frac{0,2}{5} + \left(\frac{0,2}{5}\right)^2 + \ldots\right) = \frac{0,0016}{24}\,\frac{1}{1 - \frac{0,2}{5}} < 0,0001.$$

Значит, с точностью до 0,0001 имеем

$$e^{0,2} \approx 1 + 0,2 + \frac{0,2^2}{2!} + \frac{0,2^3}{3!} = 1,2 + \frac{0,04}{2} + \frac{0,008}{6} \approx 1,2213$$

(здесь можно использовать калькулятор).

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,0001. Заменяя x на $-x^2$ в формуле (9.72), получаем

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots .$$

Подставим этот ряд под знак данного интеграла и произведем почленное интегрирование. Получаем

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{4}} dx - \int_0^{\frac{1}{4}} x^2dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} x^4dx - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{4}} x^6dx + \ldots =$$
$$= 0{,}25 - \frac{1}{3\cdot 4^3} + \frac{1}{10\cdot 4^5} - \frac{1}{42\cdot 4^7} + \ldots \,. \tag{9.77}$$

Это знакочередующийся ряд, удовлетворяющий теореме Лейбница (см. § 9.1, п. 4). Так как

$$\frac{1}{10\cdot 4^5} = \frac{1}{10\,240} < \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001\,,$$

то для получения нужной точности достаточно взять первые два члена ряда (9.77):

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx \approx 0{,}25 - \frac{1}{3\cdot 4^3} \approx 0{,}25 - 0{,}0052 = 0{,}2448\,.$$

(Здесь также можно использовать калькулятор.)

§ 9.4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

1. Круг сходимости степенного ряда. Пусть $z = x + iy$ — переменная комплексная величина. Так как действие возвышения комплексного числа в целую положительную степень известно (см. § 1.7, п. 4), то можно рассматривать степенные функции комплексной переменной $w = z^n$, где n — натуральное число. Здесь и независимая переменная, и функция принимают комплексные значения. Изучение функций комплексной переменной специально не рассматривается в настоящей книге (такое рассмотрение имеется, например, в книге [9]). Приведем только определения простейших функций, основанные на свойствах степенных рядов.

Определение. Ряд вида

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots \;, \tag{9.78}$$

где a_0, a_1, a_2, ... , a_n, ... — постоянные, вообще говоря, комплексные числа, а z — комплексная переменная, называется степенным рядом с коэффициентами a_0, a_1, a_2, ... , a_n ... .

Теорема Абеля. *Если степенной ряд* (9.78) *сходится при* $z = z_0 \neq 0$, *то он сходится абсолютно при всяком* z, *для которого* $|z| < |z_0|$; *если же при* $z = z_0$ *степенной ряд расходится, то он расходится и при любом значении* z, *удовлетворяющем условию* $|z| > |z_0|$.

Доказательство точно такое же, как и доказательство теоремы Абеля для случая действительной переменной.

Рассмотрим случай, когда ряд (9.78) для одних значений z, отличных от нуля, сходится и для других — расходится (ряд *третьего класса*). Из теоремы Абеля следует, что существует такое положительное число R (оно называется радиусом сходимости ряда (9.78)), что ряд (9.78) сходится абсолютно при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$. Круг $|z| < R$ называют *кругом сходимости* степенного ряда (9.78) ($|z| < R$

есть круг, так как $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$; § 1.7, п. 1). Если ряд (9.78) сходится при всех значениях z (ряд *второго класса*), то принято говорить, что его радиус сходимости $R=+\infty$. При $z=0$ сходятся все степенные ряды рассматриваемого вида (9.78). Если ряд (9.78) сходится только при $z=0$ (ряд *первого класса*), то полагают, что его радиус сходимости $R=0$.

Пример. Ряды

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots, \tag{9.79}$$

$$\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots, \tag{9.80}$$

$$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots \tag{9.81}$$

сходятся абсолютно при любом значении z. Действительно, так как соответствующие степенные ряды (см. § 9.3, п. 5) были сходящимися на всей числовой оси, то в силу теоремы Абеля они будут сходиться абсолютно для любого комплексного z. Следовательно, для рядов (2) — (4) $R=+\infty$.

2. Показательная и тригонометрические функции комплексной переменной. Функция e^z комплексной переменной z определяется как сумма ряда

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots. \tag{9.82}$$

Для любых комплексных чисел z и w имеет место формула

$$e^z e^w=e^{z+w}. \tag{9.83}$$

В самом деле, так как ряд (9.79) абсолютно сходится при всех значениях z, то можно применить свойство об умножении абсолютно сходящихся рядов (см. § 9.1, п. 6). Получаем, что

$$e^z e^w=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots\right)\left(1+w+\frac{w^2}{2!}+\ldots+\frac{w^n}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=1+(z+w)+\frac{(z+w)^2}{2!}+\ldots+\frac{(z+w)^n}{n!}+\ldots=e^{z+w}.$$

Из доказанной формулы (9.83) следует, что $e^z e^{-z}=e^{z-z}=e^0=1$, и потому $e^{-z}=\frac{1}{e^z}$. Значит, функция e^z ни при каком z не обращается в нуль. В самом деле, если бы имело место равенство $e^{z_0}=0$, то мы получили бы, что

$$1=e^{z_0-z_0}=e^{z_0}e^{-z_0}=0\cdot e^{-z_0}=0.$$

Функции $\sin z$ и $\cos z$ комплексной переменной z определяются как суммы степенных рядов

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots, \tag{9.84}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \ . \tag{9.85}$$

Очевидно,

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z. \tag{9.86}$$

На основе формул (9.82), (9.84) и (9.85), учитывая, что в абсолютно сходящемся ряде имеет место переместительное свойство (см. § 9.1, п. 6), имеем

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \frac{i^5 z^5}{5!} + \frac{i^6 z^6}{6!} + \frac{i^7 z^7}{7!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right) = \cos z + i \sin z.$$

Итак,

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{9.87}$$

Отсюда с учетом равенств (9.86)

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{9.88}$$

Складывая равенства (9.87) и (9.88) и деля на 2, получаем, что

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{9.89}$$

Аналогично

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{9.90}$$

Формулы (9.87), (9.89), (9.90) называют *формулами Эйлера*. Пользуясь формулами (9.83) и (9.87), имеем

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z,$$

т. е. *показательная функция* e^z *имеет период* $2\pi i$.

Наконец, пользуясь формулой (9.87), из тригонометрической формы записи комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (см. § 1.7, п. 3) получаем так называемую *показательную форму* записи комплексного числа $z = re^{i\varphi}$.

3. Логарифмическая функция комплексной переменной. Эта функция определяется как функция, обратная показательной: число w называется логарифмом числа $z \neq 0$ (по основанию e), если

$$e^w = z \tag{9.91}$$

(обозначение $w = \ln z$).

Если записать z в показательной форме $z = re^{i\varphi}$, то равенство (9.91) запишется в виде

$$re^{i\varphi} = e^{u+iv} \quad (w = u + iv),$$

или

$$re^{i\varphi} = e^u e^{iv}.$$

Отсюда вытекают два равенства:

$$e^u = r, \quad v = \varphi + 2k\pi \quad (k \text{ — любое целое число}).$$

Из первого равенства находим $u = \ln r$, где $\ln r$ понимается в обычном смысле. Следовательно,

$$w = \ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) = \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i$$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Видно, что $\ln z$ есть многозначная функция от z независимо от того, будет ли z действительным или комплексным.

Например, с точки зрения функций комплексной переменной $\ln 1$ равен одному из чисел $2k\pi i$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. В действительном анализе для выражения $\ln 1$ выбирают среди этих чисел единственное число 0.

§ 9.5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

1. Тригонометрическая система функций, ее ортогональность.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называют *ортогональными* друг другу на отрезке $[a; b]$, если $\int\limits_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = 0.$

Система функций называется *ортогональной* на отрезке $[a; b]$, если каждые две функции из этой системы ортогональны друг другу на этом отрезке.

Пример. Тригонометрическая система функций

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \sin nx,\ \cos nx,\ \ldots \tag{9.92}$$

ортогональна на отрезке $[-\pi; \pi]$.

В самом деле, если $k \neq 0$ и целое, то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \tag{9.93}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \tag{9.94}$$

Это означает, что единица ортогональна ко всем остальным функциям системы (9.92).

Заметим теперь, что при натуральных m, n произведения $\sin nx \sin mx$ $(m \neq n)$, $\cos nx \cos mx$ $(m \neq n)$, $\sin nx \cos mx$ всегда можно представить суммой функций вида $\sin kx$ или $\cos kx$. Поэтому интеграл от $-\pi$ до π от этих произведений также равен нулю.

Укажем еще на одно свойство системы (9.92), заключающееся в том, что при любом натуральном n

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi. \tag{9.95}$$

2. Ряд Фурье. *Тригонометрическим рядом* называют функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + a_n \cos nx + \\ + b_n \sin nx + \ldots ,$$

или более коротко ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{9.96}$$

где a_0, a_n, b_n $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ — постоянные числа, называемые *коэффициентами* тригонометрического ряда.

Свободный член ряда записан в виде $\frac{a_0}{2}$ для единообразия получающихся в дальнейшем формул.

Так как члены ряда (9.96) имеют общий период $T = 2\pi$, то и сумма ряда, если он сходится, также является периодической функцией с периодом 2π.

Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π является суммой ряда (9.96):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{9.97}$$

В таком случае говорят, что *функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд*. Предполагая, что этот ряд сходится равномерно на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, покажем, как определить его коэффициенты.

Так как равномерно сходящийся на отрезке функциональный ряд можно почленно интегрировать на этом отрезке (см. § 9.2, п. 3, теорема 2), то с учетом формул (9.93), (9.94) имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0 \pi .$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx .$$

Умножим теперь ряд (9.97) на $\cos kx$ (k — фиксированное натуральное число). Получим опять равномерно сходящийся на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ ряд (см. § 9.2, п. 3, теорема 4):

$$f(x) \cos kx = \frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx).$$

Интегрируем его почленно на отрезке $[-\pi;\ \pi]$. И мы получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kx\, dx$$

или согласно формуле (9.95)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k\pi,$$

откуда

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx.$$

Аналогично, умножая обе части равенства (9.97) на $\sin kx$ и интегрируя в пределах от $-\pi$ до π, получаем

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Таким образом, если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π является суммой равномерно сходящегося на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ тригонометрического ряда (9.96), то коэффициенты этого ряда определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (9.98)$$

($n = 1, 2, \ldots$) и называются *коэффициентами Фурье** функции $f(x)$, а ряд (9.96) с этими коэффициентами называется *рядом Фурье* функции $f(x)$.

3. Комплексная форма ряда Фурье. По формулам Эйлера (см. формулы (9.89), (9.90))

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2},\quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = -i\,\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}.$$

Подставляя эти выражения в ряд (9.97), получаем

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}\right).$$

Введем обозначения

$$\frac{a_0}{2} = c_0,\quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n,\quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}. \qquad (9.99)$$

Тогда

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}),$$

или более компактно

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

---

* Жан Батист Жозеф Фурье (1768—1830) — французский математик и физик.

Это и есть *комплексная форма ряда Фурье.*

Выразим коэффициенты c_n и c_{-n} через интегралы. Пользуясь формулами (9.98), можем формулы (9.99) переписать так:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-inx}dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{inx}dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

4. Сходимость ряда Фурье. При выводе формул (9.98) заранее предполагалось, что функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд (9.97). Если такого предположения не делать, а допустить только, что для функции $f(x)$ существуют все интегралы, стоящие в правых частях формул (9.98), то по этим формулам можно вычислить коэффициенты a_0, a_n, b_n и составить тригонометрический ряд (9.96), который представляет собой ряд Фурье, соответствующий данной функции.

Является ли построенный таким образом ряд Фурье сходящимся, и если он сходится, то имеем ли мы право утверждать, что он сходится именно к функции $f(x)$, с помощью которой вычислялись коэффициенты ряда?

Оказывается, что сходимость ряда Фурье к заданной функции имеет место для довольно широкого класса функций.

Сформулируем достаточные условия представимости функции рядом Фурье. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ удовлетворяет *условиям Дирихле**. Это означает, что она на этом отрезке непрерывна или кусочно-непрерывна (т. е. имеет конечное число точек разрыва первого рода) и монотонна или кусочно-монотонна (т. е. отрезок можно разделить на конечное число отрезков, внутри каждого из которых функция либо только возрастает, либо только убывает, либо постоянна).

Теорема Дирихле. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке* $[-\pi; \pi]$, *то ряд Фурье этой функции сходится на всем отрезке* $[-\pi; \pi]$ *и сумма этого ряда равна $f(x)$ в точках непрерывности функции,* $\frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0))$ *в точке x_0 разрыва функции,* $\frac{1}{2}(f(\pi - 0) + f(-\pi + 0))$ *на концах отрезка* $[-\pi; \pi]$.

Доказательство см. в книге [10], т. II.

Сделаем некоторые замечания по поводу сформулированной теоремы Дирихле. Члены ряда (9.96) — периодические функции с периодом 2π. Поэтому если ряд (9.96) сходится на отрезке $[-\pi; \pi]$, то он сходится и при всех вещественных значениях x и сумма ряда (9.96) периодически повторяет с периодом 2π те значения, которые она давала на отрезке $[-\pi; \pi]$. Таким образом, если мы пользуемся рядом Фурье вне отрезка $[-\pi; \pi]$, то мы должны считать, что функция $f(x)$ продолжена вовне этого отрезка периодически с периодом 2π (рис. 92).

---

* Петер Дирихле (1805—1859) — немецкий математик.

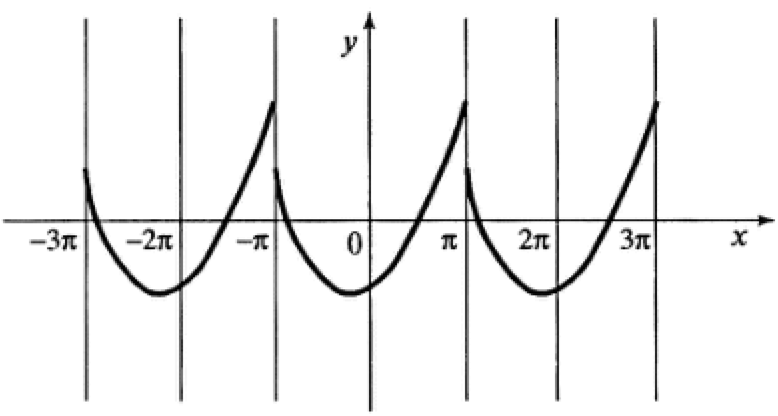


Рис. 92

С этой точки зрения его концы $x=-\pi$, $x=\pi$ явятся для продолженной таким образом функции точками разрыва, если $f(-\pi+0)\neq f(\pi-0)$.

На рис. 92 изображена функция, непрерывная на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, которая при периодическом продолжении дает разрывы в силу несовпадения значений $f(x)$ на концах отрезка $[-\pi;\ \pi]$.

Пример. Функция $f(x)=x$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. По формулам (9.98) имеем

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n}x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx=-\frac{1}{\pi n}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=-\frac{2}{n}(-1)^n=\frac{(-1)^{n+1}2}{n}.$$

Следовательно, согласно теореме Дирихле, при $-\pi<x<\pi$

$$x=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right).$$

В точках $x=-\pi$ и $x=\pi$ сумма ряда Фурье по теореме Дирихле не совпадает со значениями функции $f(x)=x$, а равна

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0.$$

В силу периодичности суммы ряда график этой суммы имеет вид, изображенный на рис. 93.

5. Ряды по косинусам и синусам. Если $f(x)$ — четная функция на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, т. е. если $f(-x)=f(x)$, $x\in[-\pi;\ \pi]$, то ее коэффициенты Фурье b_n равны нулю. В самом деле,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right).$$

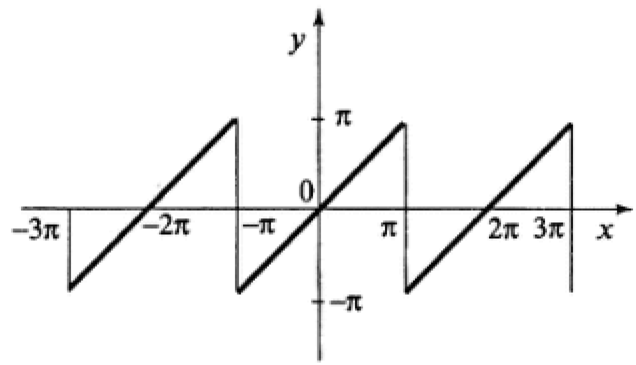


Рис. 93

В первом интеграле сделаем замену переменной $x=-t$. Тогда, пользуясь четностью $f(x)$ и нечетностью синуса, получаем

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx = -\int_{\pi}^{0} f(-t)\sin n(-t)dt = -\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

Отсюда и из предыдущего равенства следует, что $b_n=0$ $(n=1, 2, ...)$. Коэффициенты a_n в этом случае (это тоже легко показать) можно подсчитать по формулам

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Аналогично показывается, что если $f(x)$ — нечетная функция, то $a_n=0$ $(n=0, 1, 2, ...)$ и $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ $(n=1, 2, ...)$. Таким образом, если функция четная, то ее ряд Фурье содержит только косинусы *(неполный ряд по косинусам)*, а если нечетная — только синусы *(неполный ряд по синусам)*.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2$. Эта функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Так как она четная, то

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x^2\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right) = (-1)^n\pi\frac{4}{n^2}.$$

Значит, согласно теореме Дирихле, при $-\pi<x<\pi$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right).$$

Это равенство остается верным и на всем отрезке $[-\pi; \pi]$, так как в точках $x=-\pi$ и $x=\pi$ сумма ряда по теореме Дирихле равна $\frac{1}{2}(f(\pi-0)+f(-\pi+0)) = \frac{1}{2}(\pi^2+\pi^2) = \pi^2$. Благодаря периодичности суммы ряда график ее имеет вид, изображенный на рис. 94.

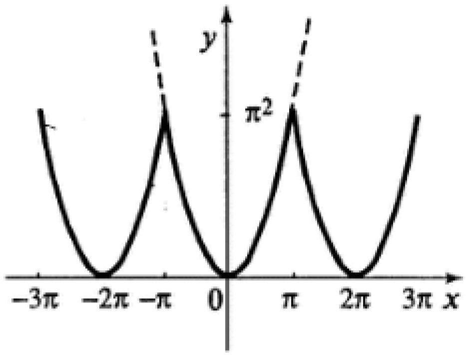


Рис. 94

6. Разложение функции, заданной в промежутке, в ряд Фурье по косинусам или синусам. Часто возникает задача о разложении в ряд по косинусам или в ряд по синусам функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0; \pi]$.

Для разложения $f(x)$ в ряд по косинусам можно рассуждать следующим образом. Дополним определение данной функции $f(x)$ так, чтобы при $-\pi \le x < 0$ было $f(x) = f(-x)$. В результате получится четная функция (в этом случае говорят: *функция $f(x)$ продолжена с отрезка* $[0; \pi]$ *на отрезок* $[-\pi; 0]$ *четным образом*) (рис. 95). Тогда для «продолженной» четной функции справедливы все предыдущие рассуждения (см. п. 5), и, следовательно, коэффициенты Фурье могут быть вычислены по формулам

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В этих формулах фигурируют лишь *заданные* на $[0; \pi]$ значения $f(x)$. Следовательно, при практических вычислениях *фактически* можно и не осуществлять указанное четное продолжение.

Если мы хотим разложить функцию $f(x)$ в ряд по синусам, то продолжаем ее с отрезка $[0; \pi]$ на отрезок $[-\pi; 0]$ нечетным образом (рис. 96).

Если мы дополним определение функции $f(x)$ так: $f(x) = -f(-x)$ при $-\pi \le x < 0$, то получим нечетную функцию (говорят: $f(x)$ *продолжена нечетным образом*). При этом по смыслу нечетности должны принять $f(0) = 0$. К «продолженной» нечетной функции опять приме-

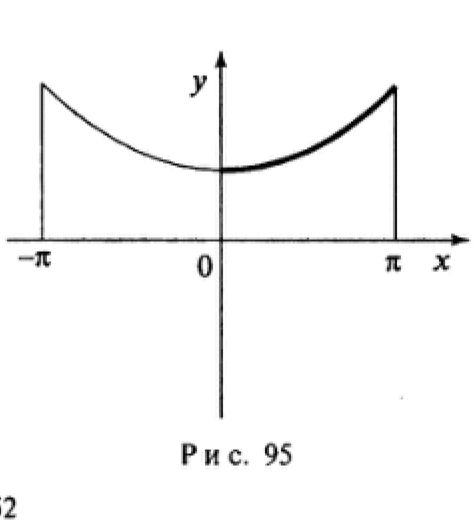


Рис. 95

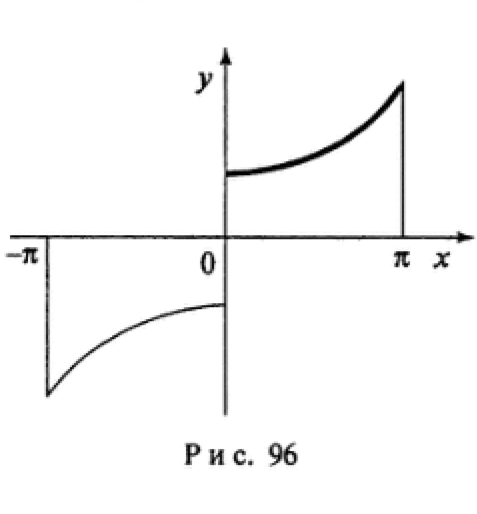


Рис. 96

нимы соображения, приведенные в п. 5, и, следовательно, для коэффициентов Фурье справедливы формулы

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Поскольку здесь участвуют лишь значения $f(x)$ на $[0;\ \pi]$, то, как и в случае ряда по косинусам, *фактически* продолжение функции $f(x)$ с отрезка $[0;\ \pi]$ на отрезок $[-\pi;\ 0]$ можно и не осуществлять.

7. Ряд Фурье с произвольным промежутком. Если надо разложить в тригонометрический ряд функцию $f(x)$ периода $2l$, которая на отрезке $[-l;\ l]$ удовлетворяет условиям Дирихле, то мы полагаем $x = \frac{lt}{\pi}$ и получаем функцию $\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ периода 2π:

$$\varphi(t + 2\pi) = f\left(\frac{l(t+2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{lt}{\pi} + 2l\right) = f(x + 2l) = f(x) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t),$$

которая на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ удовлетворяет условиям Дирихле. Поэтому в интервале $(-\pi;\ \pi)$

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Возвратившись к прежней переменной x, получим, что в интервале $(-l;\ l)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l} + b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right), \tag{9.100}$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{9.101}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{9.102}$$

Коэффициенты a_0, a_n, b_n $(n = 1,\ 2,\ \dots)$ и здесь называют *коэффициентами Фурье для* $f(x)$, а ряд (9.100) — *рядом Фурье для* $f(x)$.

Если x — точка разрыва функции $f(x)$, то вместо $f(x)$ в равенстве (9.100) будет $\dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$.

§ 9.6. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ

1. Интегральная формула Фурье. Интеграл Фурье.

Пусть функция $f(x)$, определенная на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$, удовлетворяет следующим условиям:

1) на любом конечном отрезке $[-l;\ l]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле;

2) существует несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx = Q$ (это свойство функции $f(x)$ называется ее *абсолютной интегрируемостью*).

Учитывая формулы (9.101) и (9.102), при $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ имеем

$$a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l} = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n(t-x)}{l}dt.$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n(x-t)}{l}dt. \qquad (9.103)$$

Исследуем вопрос о том, какой вид примет разложение (9.103) при $l \to +\infty$. Введем следующие обозначения:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{l},\ \lambda_2 = \frac{2\pi}{l},\ \ldots,\ \lambda_k = \frac{k\pi}{l},\ \ldots;\ \Delta\lambda_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\pi}{l}.$$

Подставляя их в равенство (9.103), получаем

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda_n(t-x)dt\right)\Delta\lambda_n. \qquad (9.104)$$

При $l \to +\infty$ первый член в правой части равенства (9.104) стремится к нулю. Действительно, так как

$$\left|\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt\right| \le \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}|f(t)|\,dt < \frac{1}{2l}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt = \frac{Q}{2l}$$

(эти неравенства следуют из геометрических соображений), то

$$\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt \to 0 \ \text{ при } \ l \to +\infty.$$

При любом фиксированном l выражение $\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda_n(t-x)dt$ есть функция от переменной λ_n, которая принимает равноотстоящие значения в промежутке $(0;\ +\infty)$. Без доказательства укажем, что при $l \to +\infty$ формула (9.104) примет вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt. \qquad (9.105)$$

Формулу (9.105) называют *интегральной формулой Фурье*, а интеграл в правой части этой формулы — *интегралом Фурье* для функции $f(x)$. Представление функции $f(x)$ в виде правой части формулы (9.105) обычно называют *разложением этой функции в интеграл Фурье.*

В силу формулы (9.105)

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos\lambda t\cos\lambda x + \sin\lambda t\sin\lambda x)dt,$$

и, следовательно, формуле (9.105) можно придать вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} (a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda,$$

где положено

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt.$$

2. Комплексная форма интегральной формулы Фурье. В интеграле Фурье (формула (9.105)) внутренний интеграл — четная функция от λ. Поэтому формулу (9.105) можно переписать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt. \tag{9.106}$$

Далее, согласно формуле Эйлера (9.89), имеем

$$\cos\lambda(t-x) = \frac{1}{2}(e^{i\lambda(t-x)} + e^{-i\lambda(t-x)}).$$

Подставляя это в формулу (9.106), получаем

$$f(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda(t-x)}dt + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda(t-x)}dt. \tag{9.107}$$

Здесь, как нетрудно убедиться подстановкой $z=-\lambda$, интегралы, стоящие в правой части, равны друг другу.

Поэтому

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda(t-x)}dt. \tag{9.108}$$

Правую часть в формуле (9.108) называют *интегралом Фурье в комплексной форме* для функции $f(x)$.

3. Преобразование Фурье и его обращение. Перепишем формулу (9.108) в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt \tag{9.109}$$

и положим

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt, \tag{9.110}$$

тогда вместо формулы (9.109) получим

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \qquad (9.111)$$

Операция, которая производится над функцией f в формуле (9.110), называется *преобразованием Фурье*. Операция, которая производится над функцией $\tilde{f}$ в формуле (9.111), называется *обратным преобразованием Фурье* (эта формула называется еще *формулой обращения*), при этом функцию f часто называют *прообразом*, а функцию $\tilde{f}$ — *образом*. Последовательное применение этих двух операций, как видно, возвращает нас к исходной функции f.

4. Спектральная функция. Как уже отмечалось, интегралы, стоящие в правой части равенства (9.107), равны друг другу. Поэтому формула (9.107) может быть переписана и в таком виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt. \qquad (9.112)$$

Введем теперь обозначение

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt. \qquad (9.113)$$

Эта функция от λ играет важную роль в электротехнике и носит название *спектральной функции* для $f(x)$.

В силу (9.112) и (9.113)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

5. Свойства преобразования Фурье. Преобразование Фурье обладает рядом полезных свойств, некоторые из которых здесь перечислим.

1. $$\widetilde{f_1 + f_2} = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2, \quad \widetilde{\alpha f} = \alpha \tilde{f} \quad (\alpha = \mathrm{const}). \qquad (9.114)$$

Это свойство вытекает из формулы (9.110).

2. *Если прообраз сдвинуть на постоянную* β, *то его образ умножится на* $e^{-i\beta\lambda}$.

Доказательство. В самом деле, полагая $t - \beta = s$, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\beta) e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\lambda(\beta+s)} ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\lambda s} e^{-i\lambda\beta} ds = e^{-i\lambda\beta} \tilde{f}(\lambda).$$

Аналогично, если образ сдвинуть на β, то прообраз умножится на $e^{i\beta x}$.

3. *Если функция* $f(x)$ *преобразуется* в $\tilde{f}(\lambda)$, то $f(\alpha x)$ $(\alpha = \mathrm{const} > 0)$ *преобразуется в* $\frac{1}{\alpha} \tilde{f}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$.

Действительно, полагая $\alpha t = s$, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t)\mathrm{e}^{-i\lambda t}dt = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\mathrm{e}^{-i\frac{\lambda}{\alpha}s}ds = \frac{1}{\alpha}\tilde{f}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right).$$

4. *Если от функции f взять первую производную, то образ умножится на $i\lambda$ (предполагается, что наряду с абсолютной интегрируемостью f на всей числовой оси на ней абсолютно интегрируема и f', причем f' непрерывна).*

В самом деле,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-i\lambda t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t)\mathrm{e}^{-i\lambda t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\lambda t}dt = i\lambda\tilde{f}.$$

Произведено интегрирование по частям и учтено, что $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$ (см. [5], т. II).

Примечание. Свойство 4 распространяется и на случай производной k-го порядка от функции f. В этом случае образ этой функции умножится на $(i\lambda)^k$. Доказательство проводится методом математической индукции.

5. Пусть функция f зависит не только от x, но и от некоторого параметра t. Тогда $\tilde{f}$ также зависит от этого параметра ($\tilde{f} = \tilde{f}(\lambda, t)$), и в силу формул (9.114) запишем

$$\widetilde{\frac{f(\lambda, t+\Delta t) - f(\lambda, t)}{\Delta t}} = \frac{\tilde{f}(\lambda, t+\Delta t) - \tilde{f}(\lambda, t)}{\Delta t}.$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем, что $\widetilde{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}$ (предполагается, что эти производные существуют).

6. Свертка и преобразование Фурье. Пусть $\tilde{f}_1(\lambda)$ и $\tilde{f}_2(\lambda)$ — преобразования Фурье функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Тогда

$$\tilde{f}_1(\lambda)\tilde{f}_2(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\mathrm{e}^{-i\lambda t}dt\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau)\mathrm{e}^{-i\lambda\tau}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)dt\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau)\mathrm{e}^{-i(t+\tau)\lambda}d\tau.$$

Сделаем замену переменной $t+\tau = x$, так что $\tau = x - t$. Будем иметь

$$\tilde{f}_1(\lambda)\tilde{f}_2(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)dt\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-t)\mathrm{e}^{-ix\lambda}dx,$$

откуда, меняя порядок интегрирования (предполагается, что это возможно), получаем

$$\tilde{f}_1(\lambda)\tilde{f}_2(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix\lambda}dx\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(x-t)dt. \qquad (9.115)$$

Функция

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t) dt$$

называется *сверткой* функций f_1 и f_2.

Формула (9.115) может быть теперь записана так:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ix\lambda} dx = \tilde{f}_1(\lambda) \tilde{f}_2(\lambda),$$

т. е. преобразование Фурье свертки функций f_1 и f_2 равно произведению преобразований Фурье свертываемых функций.

7. Определение дельта-функции*. Эта функция обозначается $\delta(x)$ и широко применяется в математике и ее приложениях. Чтобы приближенно представить себе дельта-функцию, рассмотрим ступенчатую функцию (рис. 97)

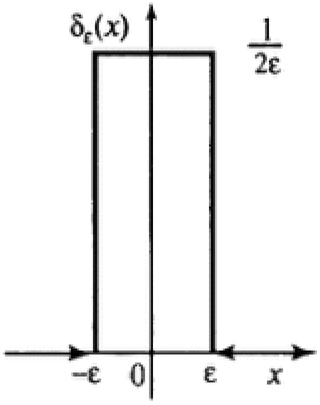


Рис. 97

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| \le \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Дельта-функция получается в пределе при $\varepsilon \to 0$. Формальное определение дельта-функции (которая не является функцией в обычном смысле этого термина) таково:

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0, \tag{9.116}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \tag{9.117}$$

Это так называемая обобщенная функция**.

Дельта-функцию можно рассматривать, например, как плотность единичной массы, сосредоточенной в точке $x=0$ (это лишь одна из известных ее физических интерпретаций). В самом деле, обозначим эту плотность через $\rho(x)$. Тогда $\rho(x)=0$ при $x \neq 0$, т. е. вся масса сосредоточена в точке $x=0$, и $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1$, ибо масса равна единице, так что $\rho(x) = \delta(x)$.

Пусть $f(x)$ — непрерывная на всей числовой оси функция. Из равенств (9.116) и (9.117) следует основное соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0). \tag{9.118}$$

* Введена английским физиком Полем Дираком (1902—1984).

** Построена советским математиком С. Л. Соболевым (1908—1989) и французским математиком Лораном Шварцем (р. в 1915 г.).

Действительно, в силу (9.116)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) f(x) dx, \tag{9.119}$$

где ε — малая положительная величина. В последнем интеграле промежуток интегрирования мал (его длина равна 2ε), поэтому на нем $f(x) \approx f(0)$, следовательно,

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) f(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) f(0) dx = f(0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx. \tag{9.120}$$

Но с учетом равенств (9.116) и (9.117) $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$. Отсюда и из соотношений (9.120) и (9.119) получаем соотношение (9.118).

8. Представление дельта-функции через интеграл Фурье. Воспользуемся формулой (9.110) для преобразования Фурье.

Пусть $f(x) = \delta(x)$. Тогда в силу формулы (9.118) $\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Подставляя это выражение в формулу обращения, получаем

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} d\lambda.$$

9. Единичная функция Хевисайда. При помощи дельта-функции легко записываются некоторые другие функции, имеющие большое значение. Важным примером может служить *единичная функция Хевисайда* *:

$$e(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ x > 0, \\ 0, & \text{если } \ x < 0. \end{cases}$$

График ее изображен на рис. 98. Она получается при внезапном подключении какого-либо постоянного воздействия, например напряжения, в электрическую цепь.

Так как $\delta(x) = 0$ при всех $x \neq 0$, то с учетом равенства (9.117) имеем

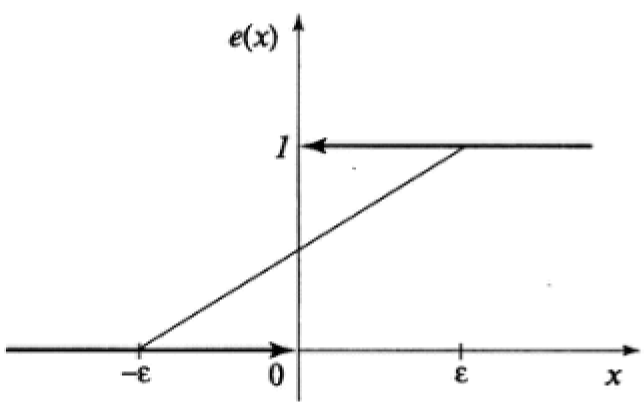


Рис. 98

* Оливер Хевисайд (1850—1925) — английский физик.

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(t)dt = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0, \end{cases}$$

т. е. этот интеграл равняется единичной функции Хевисайда.

Итак,

$$e(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(t)dt. \tag{9.121}$$

Если продифференцировать равенство (9.121), то получится, что

$$e'(x) = \delta(x). \tag{9.122}$$

Это равенство понимается в обобщенном смысле. Например, можно заменить на рис. 98 вертикальный отрезок наклонным, соединяющим точки ($-\varepsilon$; 0) и (ε; 1) (тонкая линия). Тогда разрывная функция заменится на непрерывную, производная которой имеет график, изображенный на рис. 97. Если теперь перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, то получим соотношение (9.122).

Таким образом, дельта-функция получается при дифференцировании разрывной функции $e(x)$.

10. Производная дельта-функции. Дельта-функцию можно не только интегрировать, но и дифференцировать; интегралы с участием $\delta'(x)$ вычисляются с помощью интегрирования по частям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x)dx = f(x)\delta(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta(x)dx = -f'(0). \tag{9.123}$$

Здесь функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной. Формулу (9.123) можно принять за определение производной дельта-функции.

Аналогично можно рассматривать и производные высших порядков.

Упражнения

Найдите сумму ряда:

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$. [2.]

2. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$. $\left[\frac{3}{4}.\right]$

3. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$. $\left[\frac{1}{3}.\right]$

4. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$. $\left[\frac{1}{2}.\right]$

5. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots$. $\left[\frac{11}{18}.\right]$

Исследуйте сходимость ряда:

6. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots$. [Расходится.]

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$. [Расходится.]

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(1+n)^n}$. [Расходится.]

9. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots$. [Расходится.]

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^n}$. [Сходится.]

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$. [Расходится.]

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$. [Расходится.]

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. [Расходится.]

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$. [Сходится.]

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$. [Сходится.]

16. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\alpha}{3^n}$, $0<\alpha<3\pi$. [Сходится.]

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$. [Сходится.]

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$. [Сходится.]

19. $\sum_{n=1}^{\infty}n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+1}}$. [Сходится.]

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$. [Сходится.]

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. [Сходится.]

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$. [Расходится.]

Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд:

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$. [Условно сходится.]

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n}$. [Абсолютно сходится.]

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1}$. [Расходится.]

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{100n+1}$. [Условно сходится.]

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n+1)^2}{n^2+1}$. [Расходится.]

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$. [Абсолютно сходится.]

Исследуйте на равномерную сходимость ряд:

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n nx}{n^2}$. [Сходится равномерно на всей числовой оси.]

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$. [Сходится равномерно на всей числовой оси.]

Найдите область сходимости ряда:

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$. [$|x| < 1$; при $x = 1$ условно сходится.]

32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{n+1}$. [$|x| < 1$.]

33. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{e^n}$. [$|x| < e$.]

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 7^n}$. [$|x| < 7$; при $x = -7$ условно сходится.]

35. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$. [$-\infty < x < +\infty$.]

Разложите в ряд по степеням x следующие функции:

36. e^{-x^2}. $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!},\ |x| < +\infty.\right]$

37. x^2e^{-2x}. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n x^{n+2}}{n!},\ |x|< +\infty.\right]$

38. $\sin x^2$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!},\ |x|< +\infty.\right]$

39. $\cos^2 x$. $\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},\ |x|< +\infty.\right]$

40. $\frac{1}{1-x^2}$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n},\ |x|< 1.\right]$

41. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|< 1.\right]$

42. $\frac{1}{(1-x)^2}$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,\ |x|< 1.\right]$

43. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\ |x|< 1.\right]$

44. $\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)},\ |x|\le 2.\right]$

Пользуясь соответствующими разложениями,
вычислите с точностью до 0,001:

45. $\sqrt{e}$. [1,649.]

46. $\sin 18°$. [0,309.]

47. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$. [0,747.]

48. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$ в промежутке $[-\pi;\ \pi]$.

$$\left[\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\right]$$

49. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x)=\pi+x$ в промежутке $[-\pi;\ \pi]$.

$$\left[\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx.\right].$$

ГЛАВА 10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 10.1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

В различных областях науки и техники весьма часто встречаются задачи, для решения которых требуется решить одно или несколько уравнений, содержащих производные искомых функций. Такие уравнения *называют дифференциальными*. Рассмотрим несколько задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Задача 1. На плоскости xOy найти кривую, проходящую через точку $O(0;\ 0)$, у которой угловой коэффициент касательной, проведенной к любой точке кривой, равен удвоенной абсциссе точки касания.

Решение. Пусть $y=f(x)$ — уравнение искомой кривой. По условию задачи в каждой точке $M(x;\ f(x))$ есть касательная к этой кривой, угловой коэффициент которой, т. е. $f'(x)$, равняется $2x$. Таким образом, имеем

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \qquad (10.1)$$

Это дифференциальное уравнение, так как оно содержит производную искомой функции. Из уравнения (10.1) следует, что функция y есть первообразная функции $2x$. Следовательно,

$$y = \int 2x\,dx$$

или

$$y = x^2 + C, \qquad (10.2)$$

где C — произвольная постоянная.

Из формулы (10.2) следует, что дифференциальное уравнение (10.1) имеет бесконечное множество решений, т. е. уравнению (10.1) удовлетворяет не одна кривая, а бесконечное множество кривых — парабол (рис. 99). Чтобы из этого множества кривых выбрать нужную нам кривую, надо воспользоваться тем, что искомая кривая проходит через точку $O(0;\ 0)$. Следовательно, координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (10.2). Поэтому $0=0+C$, т. е. $C=0$. Значит, искомая кривая будет $y=x^2$.

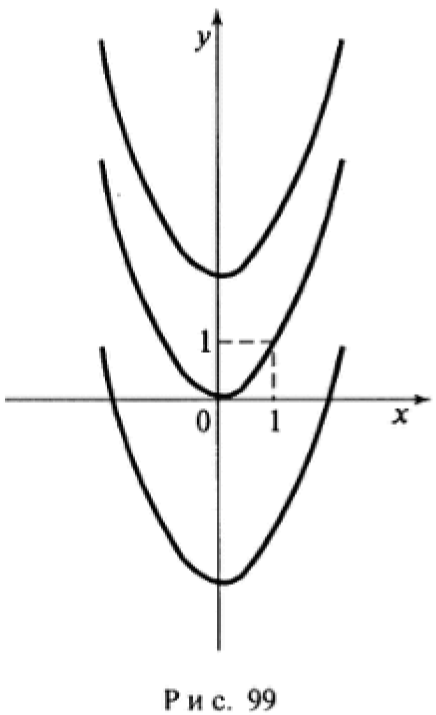


Рис. 99

З а д а ч а 2. Найти закон движения свободно падающего в пустоте тела, если пройденный путь начинает отсчитываться от момента времени $t=0$ и начальная скорость падения равна нулю. Скорость в этом случае выражается, как известно, формулой $v=gt$.

Р е ш е н и е. Как уже отмечалось (см. § 2.1, п. 2), скорость прямолинейного движения есть производная пути по времени. Поэтому

$$v=\frac{ds}{dt}=gt. \tag{10.3}$$

Из этого уравнения следует, что функция s есть первообразная функции gt. Следовательно,

$$s=\int gt\,dt$$

или

$$s=\frac{gt^2}{2}+C. \tag{10.4}$$

Для определения произвольной постоянной C используем то условие, что начало отсчета пути совпадает с началом отсчета времени, т. е. при $t=0$ $s=0$. Подставляя эти значения в равенство (10.4), находим $0=0+C$, т. е. $C=0$, и, следовательно, окончательно получаем

$$s=\frac{gt^2}{2}.$$

В рассмотренных двух задачах мы приходим к дифференциальному уравнению вида $\frac{dy}{dx}=\varphi(x)$. Это уравнение является простейшим дифференциальным уравнением. Однако в большинстве случаев естественные и технические процессы описываются гораздо общими и сложными дифференциальными уравнениями.

Дифференциальным уравнением называют соотношение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y=f(x)$ и ее производные. Если искомая функция есть функция одного независимого переменного, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*. Такие уравнения в гл. 10 (кроме § 10.6) и рассматриваются. Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называют *порядком* данного уравнения. Следовательно, общий вид обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка следующий:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0, \tag{10.5}$$

причем в частных случаях в это уравнение могут и не входить x, y и отдельные производные порядка ниже, чем n. Например, уравнения $y'-\frac{y}{x}=x$, $y''+y'=1$ имеют соответственно первый и второй порядок.

Всякая функция $y=f(x)$, которая будучи подставлена в уравнение (10.5), обращает его в тождество, называется *решением* этого уравнения.

П р и м е р. Функция $y=e^{\frac{x^3}{3}}$ является решением уравнения $y'-x^2y=0$, так как она обращает это уравнение в тождество.

§ 10.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ

1. Дифференциальное уравнение первого порядка, его общее решение и начальные условия. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет общий вид

$$F(x,\ y,\ y')=0,$$

или (если это уравнение можно разрешить относительно y') вид

$$y'=f(x,\ y). \tag{10.6}$$

Будем рассматривать в уравнении (10.6) переменные x и y как декартовы прямоугольные координаты точки на плоскости xOy. Пусть $y=\varphi(x)$ — решение уравнения (10.6); тогда кривая, определяемая уравнением $y=\varphi(x)$, называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения (10.6). Рассмотрим на интегральной кривой произвольную точку $M(x,\ y)$. Согласно геометрическому смыслу производной в этой точке имеем

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha,$$

где α — угол, образуемый касательной к этой кривой в точке M с осью Ox. Из последнего равенства и из (10.6) получаем

$$\operatorname{tg}\alpha=f(x,\ y),$$

где x, y — координаты точки M. Таким образом, угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в каждой ее точке равен значению в этой точке правой части уравнения (10.6). Итак, уравнение (10.6) определяет в каждой точке интегральной кривой направление касательной к этой кривой.

Каждой точке $M(x,\ y)$ той области, где определена функция $f(x,\ y)$ (правая часть уравнения (10.6)), сопоставим отрезок с угловым коэффициентом $k=f(x,\ y)$, где $(x,\ y)$ — координаты точки M. Мы получаем совокупность направлений, или, как говорят, поле направлений данного дифференциального уравнения.

Таким образом, уравнению (10.6) соответствует его поле направлений. В этом состоит геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка (10.6). Проведя указанные выше отрезки для достаточно большого числа точек области, получим наглядное изображение поля направлений. Так как касательная в точке интегральной кривой имеет то же направление, что и отрезок в этой точке, то задачу решения (интегрирования) уравнения (10.6) геометрически можно истолковать следующим образом: найти такую кривую, чтобы ее касательная в каждой точке имела направление, совпадающее с направлением поля в этой точке.

Приведенные рассуждения хорошо иллюстрировать на известном опыте с железными опилками, помещенными в магнитное поле. Сами опилки образуют поле направлений, а интегральной кривой служит одна из магнитных силовых линий.

В задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям, точнее в их решения (см. (10.2) и (10.4)), входит произвольная постоянная C. Такие решения называют общими решениями этих уравнений. Аналогично решение уравнения (10.6), содержащее произвольную постоянную C, т. е. имеющее вид

$$y=\varphi(x,\ C), \tag{10.7}$$

называют *общим решением* этого уравнения. Иногда, впрочем, это решение получается в неявной форме $\Phi(x,\ y,\ C)=0$ или $\psi(x,\ y)=C$. В этом случае соотношение $\Phi(x,\ y,\ C)=0$ или $\psi(x,\ y)=C$ называют *общим интегралом* уравнения (10.6).

Решить или *проинтегрировать* данное дифференциальное уравнение — значит найти его общее решение в той или иной форме.

Решение, которое получается из общего решения при некотором фиксированном значении произвольной постоянной C, называют *частным решением*. Например, функции $y=x^2$, $s=\frac{gt^2}{2}$ — частные решения соответственно уравнений (10.1), (10.3), рассмотренных в § 10.1.

Для уравнения (10.6) справедлива следующая теорема, называемая теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (10.6).

Теорема*. *Если в уравнении* (10.6) *функция* $f(x,\ y)$ *и ее частная производная* $f'_y(x,\ y)$ *непрерывны в некоторой области* D *на плоскости* xOy, *содержащей некоторую точку* $(x_0,\ y_0)$, *то существует единственное решение этого уравнения* $y=\varphi(x)$, *удовлетворяющее условию: при* $x=x_0$ $y=y_0$.

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что существует, и притом единственная, функция $y=\varphi(x)$, график которой проходит через точку $(x_0,\ y_0)$.

Условие, что при $x=x_0$ функция y должна равняться заданному числу y_0, называют *начальным условием*. Начальное условие дает возможность выделить из общего решения (10.7) частное решение. Действительно, из уравнения $y_0=\varphi(x_0,\ C)$ определится конкретное значение $C=C_0$, и тогда искомое частное решение запишется в виде $y=\varphi(x,\ C_0)=\psi(x)$.

2. Уравнения с разделяющимися переменными. Запишем уравнение (10.6) в виде

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \quad \text{или} \quad dy=f(x,y)dx.$$

Такому уравнению можно придать следующую форму:

$$M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy=0. \tag{10.8}$$

Форма (10.8) удобна тем, что здесь переменные x и y равноправны, т. е. каждую из них можно рассматривать как функцию другой. Предположим, что функции $M(x,\ y)$ и $N(x,\ y)$ можно представить произведениями

* Доказательство этой теоремы выходит за рамки данной книги (см. [8]).

$$M(x,\ y) = M_1(x) M_2(y),$$
$$N(x,\ y) = N_1(x) N_2(y),$$

в которых сомножители зависят только от одной переменной. Тогда уравнение (10.8) перепишется в виде

$$M_1(x) M_2(y) dx + N_1(x) N_2(y) dy = 0, \tag{10.9}$$

откуда, деля почленно на произведение $M_2(y)N_1(x)$ (предполагаем, что оно не равно нулю), имеем

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0. \tag{10.10}$$

Заметим, что в уравнении (10.10) множитель перед dx — функция только одной переменной x, а множитель перед dy — функция только одной переменной y.

Уравнение (10.10) называют уравнением с *разделенными* переменными, а уравнение (10.9) — уравнением с *разделяющимися* переменными. Итак, уравнение с разделяющимися переменными (10.9) сводится к уравнению с разделенными переменными путем деления обеих частей уравнения (10.9) на произведение $M_2(y)N_1(x)$. Эта операция называется «разделением» переменных.

Покажем, что соотношение

$$F(x,\ y) = C, \tag{10.11}$$

где

$$F(x, y) = \int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{M_2(x)}{N_2(x)}dy,$$

есть общий интеграл уравнения (10.10) и уравнения (10.9). Действительно, пусть $y = \varphi(x,\ C)$ (или кратко $y = \varphi$) — функция, определяемая уравнением (10.11). Тогда имеем тождество

$$F(x,\ \varphi) \equiv C.$$

Дифференцируя это тождество по x, получаем тождество

$$F'_x(x,\ \varphi) + F'_y(x,\ \varphi)\varphi' \equiv 0,$$

или

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy \equiv 0.$$

Следовательно, функция $y = \varphi(x,\ C)$ оказывается общим (поскольку зависит от C) решением уравнения (10.10), а следовательно, и уравнения (10.9). Значит, соотношение (10.11) или соотношение

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{M_2(x)}{N_2(x)}dy = C$$

есть общий интеграл уравнения (10.10) и уравнения (10.9).

Примечание. В общем случае, деля на произведение $M_2(y)N_1(x)$, рискуем потерять те решения уравнения (10.9), которые обращают это произведение в нуль. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что

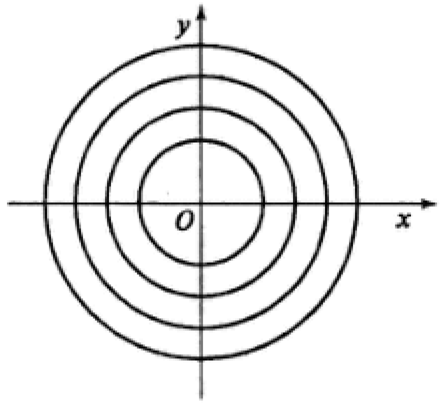


Рис. 100

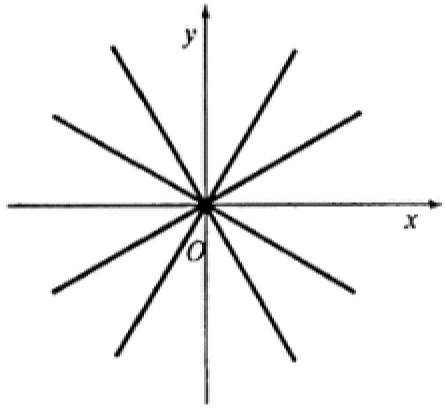


Рис. 101

функция $y=b$, где b — корень уравнения $M_2(y)=0$, есть решение уравнения (10.9). Аналогично, функция $x=a$, где a — корень уравнения $N_1(x)=0$, также является решением уравнения (10.9).

Пример 1. Решить уравнение $x\,dx+y\,dy=0$. Интегрируя, находим $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C_1$. Так как левая часть последнего равенства неотрицательна, то и правая часть тоже неотрицательна. Обозначив $2C_1$ через C^2, будем иметь $x^2+y^2=C^2$. Это — уравнение семейства концентрических окружностей (рис. 100) с центром в начале координат и радиусом C.

Пример 2. Решить уравнение $x\,dy=y\,dx$. Разделяя переменные, получаем $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$. Интегрируя последнее уравнение, будем иметь

$$\ln y=\ln x+\ln C^*. \qquad (10.12)$$

В формуле (10.12) произвольная постоянная взята в логарифмической форме, что законно, так как всякое положительное или отрицательное число C_1 может быть представлено как логарифм другого числа: $C_1=\ln C$, где $C=e^{C_1}$.

Потенцируя равенство (10.12), получаем общее решение данного дифференциального уравнения: $y=xC$ или $y=Cx$. Это — семейство прямых, проходящих через начало координат (рис. 101).

Пример 3. Найти частное решение уравнения $(1+y^2)dx=xy\,dy$, если $y=1$ при $x=2$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{dx}{x}=\frac{y}{1+y^2}dy,$$

$$\ln x=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+\ln C,$$

что после потенцирования дает

$$x^2=C^2(1+y^2).$$

Используя начальное условие, имеем

$$4=2C^2,$$

откуда $C^2=2$.

---

* Строго говоря, необходимо писать $\ln|y|=\ln|x|+\ln C$, где $C>0$. Однако допущенная в (10.12) «вольность» не отразится на окончательном результате, если после потенцирования произвольную постоянную C считать действительным числом. Это следует иметь в виду и для дальнейшего.

Итак, частным решением данного уравнения, соответствующим начальному условию $y=1$ при $x=2$, является функция $y=\sqrt{\frac{x^2}{2}-1}$.

3. Задачи из естествознания. Рассмотрим несколько примеров приложений дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными к задачам естествознания, выделив отдельно химические реакции (см. п. 4) и оставив более содержательные задачи из естествознания для специального рассмотрения (§ 10.5).

Задача 1. *(О радиоактивном распаде.)* Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличной массе. Найти закон распада радия, если известно, что в начальный момент $t=0$ имелось m_0 г радия и период полураспада радия (период времени, по истечении которого распадается половина наличной массы радия) равен 1590 лет.

Решение. Пусть в момент времени t масса радия составляет x г. Тогда скорость распада радия равна $\frac{d(m_0-x)}{dx}=-\frac{dx}{dt}$.

По условию задачи

$$-\frac{dx}{dt}=kx,$$

или

$$\frac{dx}{dt}=-kx, \qquad (10.13)$$

где $k>0$ — коэффициент пропорциональности. Разделяя в уравнении (10.13) переменные и затем интегрируя, получаем

$$\frac{dx}{x}=-k\,dt,$$

$$\ln x=-kt+\ln C,$$

что после потенцирования дает

$$x=Ce^{-kt}.$$

Для определения C используем начальное условие: при $t=0$ $x=m_0$. Имеем $C=m_0$ и, значит,

$$x=m_0e^{-kt}. \qquad (10.14)$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия при $t=1590$ $x=\frac{m_0}{2}$. Имеем

$$\frac{m_0}{2}=m_0e^{-1590k} \quad \text{или} \quad e^{1590k}=2$$

и, следовательно, $e^k=2^{\frac{1}{1590}}$. Поэтому искомая функция

$$x=m_0 2^{-\frac{t}{1590}}.$$

З а д а ч а 2. *(Об охлаждении тела.)* Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Температура воздуха равна 20 °С. Известно, что в течение 20 мин тело охлаждается от 100 до 60 °С. Определить закон изменения температуры Θ тела в зависимости от времени t.

Р е ш е н и е. Согласно условию задачи имеем

$$\frac{d\Theta}{dt} = -k(\Theta - 20),$$

или

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \tag{10.15}$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности и $x = \Theta - 20$.

Уравнение (10.15) есть уравнение вида (10.13) с начальным условием $x = 80$ при $t = 0$. Значит, согласно формуле (10.14) $x = 80e^{-kt}$ или $\Theta - 20 = 80e^{-kt}$, откуда $\Theta = 20 + 80e^{-kt}$. Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: при $t = 20$ $\Theta = 60$. Отсюда

$$60 = 20 + 80e^{-20k} \quad \text{или} \quad e^{-20k} = \frac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Итак, искомая функция

$$\Theta = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

З а д а ч а 3. *(О движении моторной лодки.)* Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $v_0 = 20$ км/ч. На полном ходу ее мотор выключается, и через 40 с после этого скорость лодки уменьшается до $v_1 = 8$ км/ч. Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки. Определить скорость лодки через 2 мин после остановки мотора.

Р е ш е н и е. На движущуюся лодку действует сила сопротивления воды

$$F = -kv,$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. С другой стороны, по второму закону Ньютона

$$F = ma$$

и, значит,

$$ma = -kv$$

или

$$v' = -\frac{k}{m}v.$$

Последнее уравнение есть уравнение вида (10.13) с начальным условием $v_0 = 20$ км/ч при $t = 0$. Поэтому согласно формуле (10.14)

$$v = 20e^{-\frac{kt}{m}}.$$

Теперь, используя дополнительное условие — при $t = 40$ $c = \frac{1}{90}$ ч $v = 8$ км/ч,— получаем

$$8 = 20e^{-\frac{k}{m}\frac{1}{90}} \quad \text{или} \quad e^{\frac{k}{m}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{90}.$$

Следовательно,

$$v = 20\left(\frac{5}{2}\right)^{-90t}.$$

Отсюда искомая скорость

$$v = 20\left(\frac{5}{2}\right)^{-90\frac{1}{30}} = 20\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = 20\frac{8}{125} = \frac{32}{25} \approx 1{,}28 \quad (\text{км/ч}).$$

Задача 4. *(О потере заряда проводником.)* Изолированному проводнику сообщен заряд $Q_0 = 1000$ Кл. Вследствие несовершенства изоляции проводник постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в данный момент пропорциональна наличному заряду проводника. Какой заряд останется на проводнике по истечении времени $t = 10$ мин, если за первую минуту потеряно 100 Кл?

Решение. Пусть в момент времени t заряд проводника равен Q. Тогда скорость потери заряда в этот момент равна $-Q'$. По условию задачи имеем

$$-Q' = kQ \quad \text{или} \quad Q' = -kQ,$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. Последнее уравнение есть уравнение вида (10.13) с начальным условием $Q = Q_0$ при $t = 0$. Значит, согласно формуле (10.14)

$$Q = Q_0 e^{-kt}.$$

Далее, используя дополнительное условие — при $t = 1$ мин $Q = 900$ Кл,— имеем

$$900 = 1000e^{-k}, \quad e^{-k} = 0{,}9.$$

Поэтому

$$Q = 1000\,(0{,}9)^t.$$

Следовательно, через 10 мин на проводнике останется заряд

$$Q = 1000\,(0{,}9)^{10} \approx 348{,}7 \text{ Кл}.$$

Задача 5. *(О концентрации раствора.)* В резервуар, содержащий 10 кг соли на 100 л смеси, каждую минуту поступает 30 л воды и вытекает 20 л смеси (рис. 102). Определить, какое количество соли останется в резервуаре через t мин, предполагая, что смесь мгновенно перемешивается.

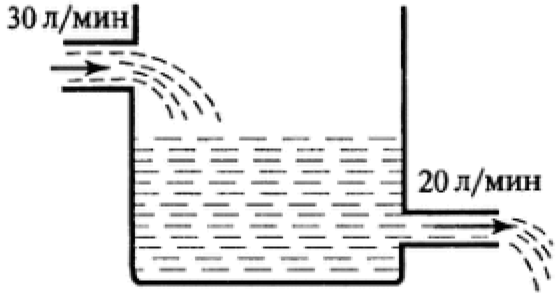


Рис. 102

Решение. Пусть x — количество соли в резервуаре в момент времени t, $-dx$ — количество соли, выходящее из резервуара за время dt (знак «минус» обусловлен тем, что x — убывающая функция времени). Объем смеси в резервуаре в момент времени t, очевидно, равен

$$v = 100 + 30t - 20t = 100 + 10t,$$

поэтому концентрация соли (т. е. количество соли, содержащейся в одном литре смеси) в момент времени t будет равна

$$\frac{x}{100 + 10t}.$$

Следовательно, за короткий промежуток времени dt количество соли уменьшится на

$$\frac{x}{100 + 10t} 20dt.$$

Отсюда имеем дифференциальное уравнение

$$-dx = \frac{20x\,dt}{100 + 10t},$$

или

$$-dx = \frac{2x\,dt}{10 + t}$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2dt}{10+t},$$

$$\ln x = -2\ln(10 + t) + \ln C$$

и, следовательно,

$$x = \frac{C}{(10 + t)^2}.$$

При $t = 0$ $x = 10$. Поэтому $C = 1000$. Итак, закон изменения количества соли (кг), находящейся в резервуаре, в зависимости от прошедшего времени t (мин) дается формулой

$$x = \frac{1000}{(10 + t)^2}. \qquad (10.16)$$

Заметим, что из формулы (10.16), зная количество соли, оставшейся в резервуаре (последнее легко установить, измеряя объем резервуара и концентрацию соли в нем), можно определить, сколько времени прошло от начала процесса. На этой идее основано вычисление возраста морей и океанов.

Задача 6. *(Об увеличении количества фермента.)* В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента пропорциональна наличному его количеству x. Первоначальное количество фермента a в течение 1 ч удвоилось. Во сколько раз оно увеличится через 3 ч?

Решение. По условию задачи дифференциальное уравнение процесса

$$\frac{dx}{dt} = kx \tag{10.17}$$

($k > 0$ — коэффициент пропорциональности) с начальным условием $x = a$ при $t = 0$. Как и при решении уравнения (10.13), получим сначала формулу

$$x = Ce^{kt},$$

откуда, используя начальное условие, найдем

$$x = ae^{kt}. \tag{10.18}$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: при $t = 1$ ч $x = 2a$. Имеем $2a = ae^k$ или $e^k = 2$. Поэтому

$$x = a\,2^t,$$

откуда при $t = 3$ ч $x = 8a$. Следовательно, количество фермента через 3 ч увеличится в восемь раз.

Задача 7. *(О скорости размножения бактерий.)* Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент $t = 0$ имелось 100 бактерий, а в течение 3 ч их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 9 ч?

Решение. Пусть x — количество бактерий, имеющихся в данный момент. Тогда согласно условию задачи получим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

($k > 0$ — коэффициент пропорциональности) с начальным условием: $x = 100$ при $t = 0$. Это уравнение вида (10.17). Значит, согласно формуле (10.18) имеем

$$x = 100e^{kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: при $t = 3$ $x = 200$. Имеем

$$200 = 100e^{3k} \text{ или } 2 = e^{3k}$$

и, следовательно, $e^k = 2^{\frac{1}{3}}$. Поэтому искомая функция

$$x = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}},$$

откуда при $t = 9$ $x = 800$. Следовательно, в течение 9 ч количество бактерий увеличится в восемь раз.

4. Однородные уравнения. Функция $f(x, y)$ называется *однородной степени* m, если имеет место тождество

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Пример 1. Функция $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$ является однородной функцией степени 2, так как

$$(tx)^2 + 2(ty)^2 - (txty) = t^2(x^2 + 2y^2 - xy).$$

С понятием однородной функции связано понятие однородного дифференциального уравнения. Уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{10.19}$$

называется *однородным дифференциальным уравнением первого порядка*, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями одной и той же степени.

Можно показать, что с помощью подстановки $y = ux$, где u — новая искомая функция от x, однородное уравнение (10.19) легко приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Заметим, что

$$dy = u\,dx + x\,du.$$

Иногда целесообразно вместо подстановки $y = ux$ использовать подстановку $x = uy$.

Пример 2. Решить уравнение $(y^2 - 3x^2)dx + 2xy\,dy = 0$, если $y = 0$ при $x = 0$. Применяя подстановку $y = ux$, имеем

$$(u^2x^2 - 3x^2)dx + 2x^2u(u\,dx + x\,du) = 0,$$

откуда

$$3(u^2 - 1)dx + 2xu\,du = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{3dx}{x} + \frac{2u\,du}{u^2 - 1} = 0, \quad 3\ln x + \ln(u^2 - 1) = \ln C,$$

что после потенциирования дает $x^3(u^2 - 1) = C$. Так как $u = \dfrac{y}{x}$, то $x^3\left(\dfrac{y^2}{x^2} - 1\right) = C$ и общий интеграл $x(y^2 - x^2) = C$. Используя начальное условие, имеем $C = 0$. Поэтому искомыми частными решениями являются $y = \pm x$.

5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение

$$y' + py = q, \tag{10.20}$$

где $p = p(x)$ и $q = q(x)$ — заданные непрерывные в интервале $(a; b)$ функции, называется *линейным дифференциальным уравнением пер-*

вого порядка. Для решения уравнения (10.20) применим подстановку $y=uv$, причем функцию $u=u(x)$ будем считать новой неизвестной функцией, а функцию $v=v(x)$ выберем произвольно. Эта подстановка дает $u'v+uv'+puv=q$ или $v\frac{du}{dx}+\left(\frac{dv}{dx}+pv\right)u=q$. Используя произвольный выбор функции v, подчиним ее условию $\frac{dv}{dx}+pv=0$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{dv}{v}=-p\,dx,\ \ \ln v=-\int p\,dx,$$

откуда

$$v=e^{-\int p\,dx}.$$

Поэтому имеем уравнение

$$e^{-\int p\,dx}\frac{du}{dx}=q.$$

Решая его, получаем

$$u=\int q\,e^{\int p\,dx}dx+C.$$

Возвращаясь к переменной y, находим общее решение уравнения (10.20):

$$y=e^{-\int p\,dx}\left[\int q\,e^{\int p\,dx}dx+C\right]. \tag{10.21}$$

Примечание. Если в уравнении (10.20) $q(x)=0$, то оно называется линейным *однородным* уравнением первого порядка, в противном случае — линейным *неоднородным* уравнением первого порядка. Следовательно, линейное однородное уравнение первого порядка имеет вид

$$y'+py=0. \tag{10.22}$$

Из формулы (10.21) следует формула общего решения уравнения (10.22):

$$y=Ce^{-\int p\,dx}. \tag{10.23}$$

Пример. Решить уравнение

$$y'-\frac{y}{x}=x.$$

Согласно формуле (10.21) имеем

$$y=e^{\int\frac{dx}{x}}\left(C+\int xe^{-\int\frac{dx}{x}}dx\right)=e^{\ln x}\left(C+\int xe^{-\ln x}dx\right)=$$

$$=x\left(C+\int dx\right)=Cx+x^2.$$

6. Применение линейных уравнений в естествознании.

Задача 1. Скорость v, путь s и время t связаны уравнением $v\cos t+s\sin t=1$. Найти закон движения, если при $t=0$ $s=2$.

Решение. Так как $v=\frac{ds}{dt}$, то, подставляя это значение v в данное уравнение, получаем дифференциальное уравнение движения

$$\frac{ds}{dt}\cos t + s\sin t = 1,$$

или

$$\frac{ds}{dt} + s\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{\cos t}.$$

Теперь согласно формуле (10.21) имеем

$$s = \mathrm{e}^{-\int \frac{\sin t}{\cos t}dt}\left(C + \int \frac{1}{\cos t}\mathrm{e}^{\int \frac{\sin t}{\cos t}dt}dt\right) =$$

$$= \mathrm{e}^{\int \frac{d\cos t}{\cos t}}\left(C + \int \frac{1}{\cos t}\mathrm{e}^{-\int \frac{d\cos t}{\cos t}}dt\right) = \mathrm{e}^{\ln\cos t}\left(C + \int \frac{1}{\cos t}\mathrm{e}^{-\ln\cos t}dt\right) =$$

$$= \cos t\left(C + \int \frac{dt}{\cos^2 t}\right) = \cos t(C + \operatorname{tg} t) = C\cos t + \sin t.$$

По условию при $t = 0$ $s = 2$ и потому $C = 2$. Таким образом, искомый закон движения $s = \sin t + 2\cos t$.

Задача 2. *(Закон перехода вещества в раствор.)* Рассмотрим процесс перехода вещества в раствор. Известно, что при фиксированной температуре количество вещества, содержащееся в определенном объеме растворителя, не может превзойти некоторого, определенного для каждого вещества, числа P, соответствующего насыщенному раствору. Известно также, что по мере приближения к насыщенному раствору уменьшается количество вещества, переходящего в раствор за единицу времени. Иными словами, чем больше вещества перешло в раствор, тем меньше скорость перехода.

Пусть $x = x(t)$ — количество вещества, перешедшего в раствор к моменту времени t. Тогда $\frac{dx}{dt}$ — скорость перехода, и в соответствии со сказанным можно написать

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ стремится к нулю при $x \to P$ $(x < P)$. Эксперименты показывают, что для многих веществ функция $\Phi(x)$ пропорциональна разности $P - x$, т. е. $\Phi(x) = k(P - x)$, и, следовательно,

$$\frac{dx}{dt} = k(P - x),$$

где k $(k > 0)$ — коэффициент пропорциональности, или

$$\frac{dx}{dt} + kx = kP.$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Согласно формуле (10.21) имеем

$$x = \mathrm{e}^{-\int k\,dt}\left(C + \int kP\mathrm{e}^{\int k\,dt}dt\right) = \mathrm{e}^{-kt}\left(C + kP\int \mathrm{e}^{kt}dt\right) =$$

$$= C\mathrm{e}^{-kt} + \frac{k}{k}P\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{e}^{kt} = C\mathrm{e}^{-kt} + P.$$

Пусть t_0 — момент времени, с которого начался процесс перехода вещества в раствор. Очевидно, $x(t_0)=0$. Поэтому $P+Ce^{-kt_0}=0$, откуда $C=-Pe^{kt_0}$, и, значит,

$$x(t)=P[1-e^{-k(t-t_0)}]. \tag{10.24}$$

Значения k и P определяются характером растворяемого вещества и растворителя. Из (10.24) видно, что при любых $k>0$ и P величина $x(t)$ стремится к P, если $t\to\infty$. Вид функции $x(t)$ хорошо согласуется с экспериментальными данными. Поэтому формулу (10.24) можно рассматривать как закон перехода вещества в раствор.

Задача 3. *(Изолированная колония организмов.)* Рассмотрим колонию микроорганизмов, обитающих в условиях неограниченных ресурсов питания. Предположим, что колония не подавляется никаким другим видом. В силу размножения и смертности число живых организмов в этой колонии будет меняться с течением времени. Найдем закон этого изменения.

Решение. Пусть $x=x(t)$ обозначает число живых организмов в момент t, а $x(t+\Delta t)$ — в момент $t+\Delta t$. Тогда разность

$$x(t+\Delta t)-x(t)=\Delta x$$

дает приращение функции $x(t)$ за промежуток времени от t до $t+\Delta t$.

Из чего складывается это приращение? За время Δt все взрослые особи или часть их произведут потомство; часть особей может погибнуть.

Таким образом,

$$\Delta x=G-H,$$

где G — число родившихся за время от t до $t+\Delta t$; H — число погибших за это время.

Число G зависит от длины промежутка Δt (чем больше Δt, тем больше G) и от количества «родителей» (чем больше взрослых особей, тем больше потомство). Таким образом,

$$G=\Phi(x,\ \Delta t),$$

где функция $\Phi(x,\ \Delta t)$ растет с ростом x или Δt и равна нулю, если равна нулю одна из этих переменных.

Что касается переменной Δt, то самые простые эксперименты показывают, что она должна входить линейно: если промежуточные наблюдения увеличить, например, в два раза, то и прирост потомства микроорганизмов увеличится в два раза. Таким образом,

$$\Phi(x,\ \Delta t)=f(x)\Delta t.$$

Вопрос о характере функции $f(x)$ сложнее. Пока известно только, что она монотонно возрастает с ростом x и равна нулю при $x=0$. Но каков этот рост? Он существенно зависит от биологических особенностей исследуемого вида, и для его описания могут понадобиться те или иные положительные степени x, рациональная функция и т. п. Ограничимся простейшим случаем, когда численность потомства пропорциональна числу «родителей», $f(x)=\alpha x$, $\alpha=\text{const}$.

Этот случай реализуется, например, при делении клеток. Итак,

$$G = \alpha x\, \Delta t.$$

По аналогии

$$H = \beta x\, \Delta t$$

и, следовательно,

$$\Delta x = \alpha x\, \Delta t - \beta x\, \Delta t,$$

или

$$\Delta x = \gamma x\, \Delta t, \tag{10.25}$$

где

$$\gamma = \alpha - \beta.$$

Разделим обе части равенства (10.25) на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Вспомнив, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt},$$

в результате получим

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x \tag{10.26}$$

или

$$\frac{dx}{dt} - \gamma x = 0.$$

Имеем линейное однородное уравнение первого порядка. Согласно формуле (10.23) общее решение

$$x = C\mathrm{e}^{\gamma t}. \tag{10.27}$$

Начальное условие: при $t = t_0$ $x = x(t_0)$, где t_0 — время начала наблюдения за колонией, $x(t_0) = x_0$ — количество живых организмов в колонии в начальный момент. Используя начальное условие, из (10.27) имеем

$$C = x_0\mathrm{e}^{-\gamma t_0}.$$

Подставляя это в (10.27), получаем искомый закон изменения числа организмов с течением времени:

$$x = x_0\mathrm{e}^{\gamma(t - t_0)}. \tag{10.28}$$

Однако найденный закон носит пока предположительный характер. Вопрос о том, насколько эта модель соответствует реальности, решает экспериментальная проверка. Из формулы (10.28) следует, что с ростом t численность поголовья растет неограниченно как экспонента. Однако ни в одной реально существующей популяции такой рост не наблюдается. Это и понятно. Те предположения, на основе которых было выведено уравнение (10.26) (неограниченность ресурсов питания, отсутствие влияния других видов и т. п.), в реальных природных условиях не выполняются. Таким образом, уравнение (10.26) либо имеет смысл в теоретическом аспекте (оно показывает, как развивалась бы популяция, если бы ей не мешали и неограниченно подкармливали), либо описывает динамику искусственно созданной и поддерживаемой популяции (например, популяции грибков, выделяющих пенициллин, о которых говорилось в § 5.6).

Уравнение (10.26) впервые в 1802 г. получил Мальтус. Заблуждение Мальтуса заключалось в том, что это уравнение, справедливое для очень узкого класса популяций, он считал универсальным законом не только для всей природы, но и для человеческого общества.

Задача 4. *(Модель сезонного роста.)* Дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{dx}{dt}=rx(t)\cos t$, где r — положительная постоянная, можно рассматривать как простую модель сезонного роста. Скорость роста $\frac{dx}{dt}$ популяции $x(t)$ становится попеременно то положительной, то отрицательной, и популяция то возрастает, то убывает. Это может вызываться такими сезонными факторами, как доступность пищи. Переписав данное уравнение в виде

$$\frac{dx}{dt}-(r\cos t)x=0,$$

согласно формуле (10.23) имеем

$$x=Ce^{\int r\cos t\,dt}=Ce^{r\sin t}.$$

Полагая $t=0$, получаем $C=x(0)$, т. е. размер популяции в момент t есть $x=x(0)e^{r\sin t}$. Максимальный размер популяции, равный $e^{r}x(0)$, достигается при $t=\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$, когда $\sin t=1$. Минимальный размер, равный $e^{-r}x(0)$, достигается при $t=\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots$, когда $\sin t=-1$.

В этой модели размер популяции колеблется от $e^{r}x(0)$ до $e^{-r}x(0)$ с периодом 2π. Моменты времени $t=0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ можно считать серединами сезонов наибольшей доступности пищи (летних сезонов), а моменты $t=\pi, 3\pi, \ldots$ соответствуют серединам сезонов наибольшей нехватки пищи (зимних сезонов). Продолжительность одного года соответствует 2π ед. времени (рис. 103).

Задача 5. *(Внутривенное питание глюкозой.)* Вливание глюкозы в кровеносную систему является важной лечебной процедурой. Для изучения этого процесса определим $\tau=\tau(t)$ как количество глюкозы в крови пациента в момент времени t. Допустим, что глюкоза вводится в кровь с постоянной скоростью c (г/мин). В то же время глюкоза разлагается и удаляется из кровеносной системы со скоростью, пропорциональной имеющемуся количеству глюкозы.

Пусть c_1 — скорость удаления глюкозы из кровеносной системы и $\tau(0)$ — начальное количество глюкозы в крови пациента. Имеем $\frac{d\tau(t)}{dt}=c-c_1$. Но в силу условия задачи $c_1=k\tau(t)$, где k — положи-

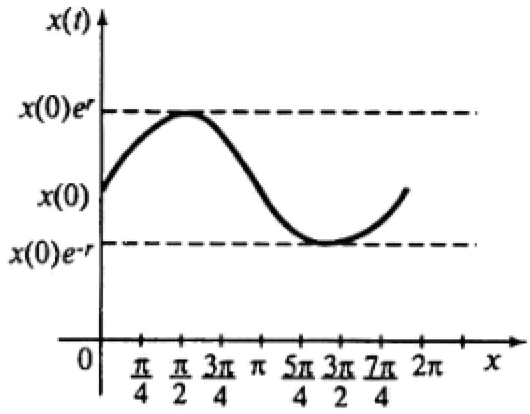


Рис. 103

тельная постоянная. Таким образом, $\frac{d\tau(t)}{dt} = c - k\tau(t)$, или, что то же,

$$\frac{d\tau(t)}{dt} + k\tau(t) = c.$$

Это — неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Согласно формуле (10.21) имеем

$$\tau = \mathrm{e}^{-\int k\,dt} = \left(C + \int c\mathrm{e}^{\int k\,dt}\,dt\right) = \mathrm{e}^{-kt}\left(C + c\int \mathrm{e}^{kt}dt\right) = \mathrm{e}^{-kt}\left(C + \frac{c}{k}\mathrm{e}^{kt}\right) =$$

$$= C\mathrm{e}^{-kt} + \frac{c}{k}.$$

Постоянную C можно выразить через начальное количество глюкозы в крови $\tau(0)$. Имеем $\tau(0) = C + \frac{c}{k}$. Значит, общее решение может быть записано в виде

$$\tau(t) = \frac{c}{k} + \left[\tau(0) - \frac{c}{k}\right]\mathrm{e}^{-kt}.$$

С увеличением времени величина $\tau(t)$ приближается к пределу, равному $\frac{c}{k}$. Это и есть равновесное количество глюкозы в крови.

§ 10.3. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Основные понятия. Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка есть

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots\ ,\ y^{(n)}) = 0. \qquad (10.29)$$

Здесь $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ может не зависеть от некоторых из величин $x, y, y', \ldots$. Однако если (10.29) есть уравнение именно n-го порядка, то от $y^{(n)}$ функция F обязательно зависит. Наиболее простым дифференциальное уравнение (10.29) оказывается тогда, когда оно имеет вид

$$y^{(n)} = f(x), \qquad (10.30)$$

где $f(x)$ — заданная функция.

Примером такого простейшего уравнения служит хотя бы дифференциальное уравнение

$$y'' = -\frac{1}{x^2}. \tag{10.31}$$

Из этого уравнения сразу видно, что

$$y' = -\int \frac{dx}{x^2} + C_1 = \frac{1}{x} + C_1, \tag{10.32}$$

где C_1 — произвольная постоянная. В свою очередь из уравнения (10.32) следует, что

$$y = \int\left(\frac{1}{x} + C_1\right)dx + C_2 = \ln|x| + C_1x + C_2,$$

где C_2 — произвольная постоянная, никак не связанная с постоянной C_1.

Найденное решение зависит от *двух* произвольных постоянных, при этом исходное дифференциальное уравнение (10.31) было уравнением *второго* порядка. Такое решение называется *общим решением* этого уравнения.

Аналогично посредством n последовательных интегрирований решается любое уравнение вида (10.30). В связи с этим вводится определение.

Определение. *Общим решением* дифференциального уравнения n-го порядка (10.29) называется функция

$$y = \varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n),$$

существенно зависящая от n произвольных постоянных и обращающая уравнение (10.29) в тождество при любых значениях этих постоянных. Решения, получаемые из общего при закреплении постоянных C_1, C_2, ..., C_n, называют *частными*.

Замечание. В данном определении употреблено выражение «существенно зависящая». Это означает, что число постоянных нельзя снизить за счет введения новых обозначений. Например, функция

$$y = (C_1^2 + 2C_2 + C_3)x + C_4 + 6C_5$$

существенно зависит лишь от двух постоянных

$$C_1^* = C_1^2 + 2C_2 + C_3 \quad \text{и} \quad C_2^* = C_4 + 6C_5$$

и может быть записана в виде

$$y = C_1^*x + C_2^*.$$

В прикладных вопросах часто приходится искать такое решение дифференциального уравнения n-го порядка, которое удовлетворяет n условиям: при заданном значении $x = x_0$ сама функция y и ее первые $n-1$ производных y', y'', ..., $y^{(n-1)}$ должны принимать заданные значения

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ \ y'\big|_{x=x_0} = y_0',\ \ldots,\ \ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \tag{10.33}$$

Вообще говоря, условия (10.33), называемые *начальными*, выделяют из общего решения

$$y=\varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n) \text{ —}$$

единственное частное решение.

2. Случаи понижения порядка. Рассмотрим три типа дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающих понижение порядка.

I. Уравнение вида (10.30). Общее решение этого уравнения мы получим, произведя последовательно n интегрирований; при каждом таком интегрировании будет появляться новая произвольная постоянная.

II. Уравнение

$$y^{(n)}=f(x,\ y^{(k)},\ \ldots,\ y^{(n-1)})\quad (k\le n-1), \tag{10.34}$$

не содержащее явно y и младших производных до порядка $k-1$ включительно, допускает понижение порядка на k единиц. Для этого введем новую искомую функцию $z=y^{(k)}$. Тогда

$$y^{(k+1)}=z',\ \ldots,\ y^{(n)}=z^{(n-k)}$$

и уравнение относительно z будет порядка $n-k$:

$$z^{(n-k)}=f(x,\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{(n-k-1)}).$$

Если найдено общее решение этого уравнения

$$z=\varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-k}),$$

то для y имеем уравнение

$$y^{(k)}=\varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-k}).$$

Интегрируя его, найдем общее решение уравнения (10.34).

III. Уравнение

$$y^{(n)}=f(y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}),$$

не содержащее явно независимой переменной. Здесь порядок уравнения понижается на единицу путем замены обеих переменных. В качестве новой искомой функции мы выбираем $y'=p$, а за новую независимую переменную принимаем y.

§ 10.4. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Общие сведения о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка. Уравнение

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{10.35}$$

где $p=p(x)$, $q=q(x)$ и $f(x)$ — непрерывные функции в интервале $(a;\ b)$, называется *неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка*, функции p, q — его *коэффициентами*. Если $f(x)\equiv 0$ в этом интервале, то уравнение принимает вид

$$y''+py'+qy=0 \tag{10.36}$$

и называется *однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка*. Если уравнение (10.36) имеет те же коэффициенты, что и (10.35), то оно называется *однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению* (10.35).

Функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$, определенные и непрерывные в интервале $(a;\ b)$, называются *линейно зависимыми* в этом интервале, если существуют постоянные числа α_1 и α_2 (причем, по крайней мере, одно из них не равно нулю), такие, что для всех значений x в рассматриваемом интервале выполняется тождество

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0. \qquad (10.37)$$

Функции y_1 и y_2 называют *линейно независимыми* в интервале $(a;\ b)$, если тождество (10.37) может иметь место только при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Теорема 1. *Если y_1 и y_2 — линейно независимые частные решения линейного однородного уравнения второго порядка* (10.36), *то общее решение этого уравнения имеет вид*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \qquad (10.38)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Доказательство. Так как y_1 и y_2 — решения уравнения (10.36), то имеем тождества $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$, $y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$. Используя их, получаем тождество

$$(C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$
$$= C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) = 0.$$

Следовательно, выражение (10.38) является решением уравнения (10.36), и поскольку это решение содержит две произвольные постоянные, то оно является общим решением однородного уравнения (10.36).

Теорема доказана.

Пусть y_1 и y_2 — два линейно зависимых решения уравнения (10.36). Тогда выполняется тождество (10.37), где либо $\alpha_1 \neq 0$, либо $\alpha_2 \neq 0$. Предположим для определенности, что $\alpha_2 \neq 0$. Тогда из тождества (10.37) имеем $y_2 = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} y_1$, или $y_2 = ay_1$ $\left(a = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)$. Подставляя это выражение в уравнение (10.38), получаем

$$y = C_1 y_1 + C_2 a y_1 = (C_1 + aC_2) y_1 = C y_1,$$

где $C = C_1 + aC_2$. Отсюда видно, что если y_1 и y_2 — линейно зависимые решения однородного уравнения (10.36), то решение (10.38) содержит только одну произвольную постоянную C и, следовательно, не является общим.

Примечание. Отметим, что при условии теоремы I определитель

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

называемый *определителем Вронского**, или *вронскианом*, для функций y_1 и y_2

* Юзеф Вронский (1776—1853) — польский математик.

не равен нулю ни при одном значении x из $(a;\ b)$. (Доказательство этого факта см., например, в [11].)

Для общего решения неоднородного уравнения (10.35) справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Общее решение неоднородного уравнения* (10.35) *равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения* (10.36) *и любого частного решения данного неоднородного уравнения.*

Доказательство. Пусть $Y = C_1y_1 + C_2y_2$ — общее решение уравнения (10.36), соответствующего уравнению (10.35), и z — любое частное решение уравнения (10.35). Имеем тождества $Y'' + pY' + qY = 0$, $z'' + pz' + qz = f(x)$. Складывая почленно эти два тождества, получаем тождество $(Y+z)'' + p(Y+z)' + q(Y+z) = f(x)$. Следовательно, функция $y = Y + z = C_1y_1 + C_2y_2 + z$ — решение уравнения (10.35) и при этом общее, так как в эту функцию входят две произвольные постоянные C_1 и C_2.

2. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Пусть в линейном уравнении

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{10.39}$$

p, q — постоянные действительные числа.

Частное решение уравнения (10.39) будем искать в виде функции

$$y = e^{kx}, \tag{10.40}$$

где k — действительное или комплексное число, подлежащее определению. Дифференцируя по x выражение (10.40), получаем

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2e^{kx}. \tag{10.41}$$

Подставляя выражения (10.40) и (10.41) в уравнение (10.39), будем иметь

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $e^{kx} \neq 0$, имеем

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{10.42}$$

Алгебраическое уравнение (10.42) называют *характеристическим уравнением* однородного уравнения (10.39). Характеристическое уравнение и дает возможность найти k. Уравнение (10.42) есть уравнение второй степени и потому имеет два корня. Обозначим их через k_1 и k_2. Возможны три случая.

1) Корни k_1 и k_2 действительные и разные ($k_1 \neq k_2$). В этом случае по формуле (10.40) получим два частных решения уравнения (10.39) $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = e^{k_2x}$, которые являются линейно независимыми. Действительно, если бы эти решения были линейно зависимы, то в интервале $(a;\ b)$ должно было бы выполняться тождество $\alpha_1e^{k_1x} + \alpha_2e^{k_2x} = 0$, где α_1 и α_2 одновременно не нули, или тождество $\alpha_1e^{k_1x} = -\alpha_2e^{k_2x}$. Отсюда $\alpha_1e^{(k_1-k_2)x} = \alpha_2$, что невозможно, так как справа в последнем тождестве постоянное число, а слева функция от x. По теореме 1 (см. п. 1) следует, что общее решение уравнения (10.39) будет

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}.$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Его характеристическое уравнение $k^2 - 3k + 2 = 0$ имеет два различных действительных корня $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$. Поэтому общее решение есть $C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

2) Корни k_1 и k_2 действительные и равные ($k_1 = k_2$). В этом случае одно частное решение уравнения (10.39) выразится функцией $y_1 = e^{k_1 x}$. Частным решением уравнения (10.39) в этом случае будет также функция $y_2 = xe^{k_1 x}$. Действительно, $y_2'' + py_2' + qy_2 = (2 + k_1 x)k_1 e^{k_1 x} + p(1 + k_1 x)e^{k_1 x} + qxe^{k_1 x} = e^{k_1 x}((k_1^2 + pk_1 + q)x + 2k_1 + p) = e^{k_1 x}(-p + p) = 0$.

Заметим, что решения $e^{k_1 x}$ и $xe^{k_1 x}$ линейно независимы, так как если бы функции $e^{k_1 x}$ и $xe^{k_1 x}$ были линейно зависимы, то в интервале $(a;\ b)$ выполнялось бы тождество $\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 x e^{k_1 x} = 0$ (α_1 и α_2 одновременно не нули) и, значит, тождество $\alpha_1 + \alpha_2 x = 0$, что невозможно. Следовательно, общее решение уравнения (10.39) в данном случае

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

Пример 2. Уравнению $y'' - 6y' + 9y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$, имеющее равные корни $k_1 = k_2 = 3$. Поэтому общее решение будет

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}.$$

3) Корни $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$ комплексные. Можно показать (см. [11]), что общее решение уравнения (10.39) в этом случае есть

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Пример 3. Уравнению $y'' - 2y' + 2y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 2 = 0$, имеющее комплексные корни $k_1 = 1 + i$, $k_2 = 1 - i$. Следовательно, общим решением будет функция $y = e^x\ (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

3. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим теперь решение некоторых типов линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{10.43}$$

где p, q — постоянные действительные числа; $f(x)$ — известная непрерывная функция в интервале $(a;\ b)$.

По теореме 2 (см. п. 1) для нахождения общего решения уравнения (10.43) надо знать общее решение Y соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$ (для этого используются результаты п. 2 настоящего параграфа) и частное решение z уравнения (10.43).

Вид частного решения уравнения (10.43) зависит от вида правой части этого уравнения. Рассмотрим некоторые случаи.

а) $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ $(a_2 \neq 0)$. Если $q \neq 0$, то частное решение уравнения (10.43) ищем также в форме квадратного трехчлена:

$$z = A_2 x^2 + A_1 x + A_0,$$

где A_2, A_1 и A_0 — неопределенные коэффициенты. Отсюда $z' = 2A_2 x + A_1$, $z'' = 2A_2$. Подставляя эти выражения в уравнение (10.43), в котором

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

получаем тождество

$$A_2qx^2+(2A_2p+A_1q)x+2A_2+A_1p+A_0q=a_2x^2+a_1x+a_0,$$

откуда

$$A_2q=a_2,\ \ 2A_2p+A_1q=a_1,\ \ 2A_2+A_1p+A_0q=a_0. \qquad (10.44)$$

Так как $q\neq 0$, то из равенств (10.44) для коэффициентов A_2, A_1 и A_0 получаются определенные числовые значения. Тем самым частное решение z будет вполне определено. Если $q=0$, то частное решение z уравнения (10.43) ищем в виде

$$z=x(A_2x^2+A_1x+A_0),$$

когда 0 — однократный корень характеристического уравнения (10.42), и в виде

$$z=x^2(A_2x^2+A_1x+A_0),$$

когда 0 — двукратный корень характеристического уравнения (10.42). Аналогично обстоит дело, если $f(x)$ — многочлен $P(x)$ произвольной степени.

Пример 1. Решить уравнение $y''+y'=2x+1$. Имеем

$$k^2+k=0,\quad k_1=0,\quad k_2=-1,\quad Y=C_1+C_2e^{-x}.$$

Так как 0 — однократный корень характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $z=x(A_1x+A_0)$. Далее имеем $z'=2A_1x+A_0$, $z''=2A_1$, $2A_1+2A_1x+A_0=2x+1$, $A_1=1$, $A_0=-1$, $z=x^2-x$, $y=C_1+C_2e^{-x}+x^2-x$.

б) $f(x)=ae^{bx}$ $(a\neq 0)$. Частное решение ищем в виде $z=Ae^{bx}$, где A — неопределенный коэффициент. Отсюда $z'=Abe^{bx}$, $z''=Ab^2e^{bx}$. Подставляя эти выражения в уравнение (10.43), в котором $f(x)=ae^{bx}$, после сокращения на e^{bx} будем иметь $A(b^2+pb+q)=a$. Отсюда видно, что если b не является корнем характеристического уравнения, то

$$z=\frac{ae^{bx}}{b^2+pb+q}.$$

Если b — корень характеристического уравнения, то частное решение уравнения (10.43) ищем в виде $z=Axe^{bx}$, когда b — однократный корень, и в виде $z=Ax^2e^{bx}$, когда b — двукратный корень. Аналогично будет, если $f(x)=P(x)e^{bx}$.

Пример 2. Решить уравнение $y''-2y'+y=2e^x$. Имеем $k^2-2k+1=0$, $k_1=k_2=1$, $Y=(C_1+C_2x)e^x$. Так как в данном уравнении $b=1$ — корень кратности 2 характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $z=Ax^2e^x$. Далее имеем

$$z'=Ax(x+2)e^x,\ \ z''=A(x^2+4x+2)e^x,$$

$$Ae^x(x^2+4x+2)-2Axe^x(x+2)+Ax^2e^x=2e^x,\ \ A=1,$$

$$z=x^2e^x,\ \ y=(C_1+C_2x)e^x+x^2e^x.$$

в) $f(x)=a\cos\omega x+b\sin\omega x$ (a и b не нули одновременно). В этом случае частное решение z ищем также в форме тригонометрического двучлена

$$z = A\cos\omega x + B\sin\omega x,$$

где A, B — неопределенные коэффициенты. Отсюда

$$z' = -A\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x,$$

$$z'' = -A\omega^2\cos\omega x - B\omega^2\sin\omega x.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (10.43), в котором

$$f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x,$$

получим

$$(-A\omega^2 + Bp\omega + Aq)\cos\omega x + (-B\omega^2 - Ap\omega + Bq)\sin\omega x = \\ = a\cos\omega x + b\sin\omega x.$$

Так как последнее равенство представляет собой тождество, то коэффициенты при $\cos\omega x$ и $\sin\omega x$ в левой и правой частях этого равенства должны быть соответственно равны друг другу. Поэтому

$$A(q-\omega^2) + Bp\omega = a, \quad -Ap\omega - B(q-\omega^2) = b.$$

Эти уравнения определяют коэффициенты A и B, кроме случая, когда $p=0$, $q=\omega^2$ (т. е. когда $\pm\omega i$ — корни характеристического уравнения). В последнем случае частное решение уравнения (10.43) ищем в виде $z = x(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$.

Пример 3. Решить уравнение $y'' + y = \cos x$. Имеем

$$k^2 + 1 = 0, \quad k_1 = i, \quad k_2 = -i, \quad Y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Так как $\pm i$ — корни характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $z = x(A\cos x + B\sin x)$.

Далее имеем

$$z' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x),$$

$$z'' = -2A\sin x + 2B\cos x - x(A\cos x + B\sin x),$$

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x, \quad A = 0, \quad B = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{x}{2}\sin x,$$

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{2}\sin x.$$

4. Гармонический осциллятор. Резонанс. Пусть на идеально гладком столе лежит шарик массой m, прикрепленный к пружине с коэффициентом жесткости $\lambda > 0$ (рис. 104). Направим ось Ox вдоль пружины, а за начало координат примем ту точку, в которой шарик находится в положении равновесия (пружина не растянута). Отведем теперь шарик от положения равновесия на расстояние x_0 и отпустим его. Тогда со стороны пружины на шарик будет действовать сила F, стремящаяся вернуть его в положение равновесия. Из физики известно, что эта сила равна (для малых x)

$$F(x) = -\lambda x \qquad (10.45)$$

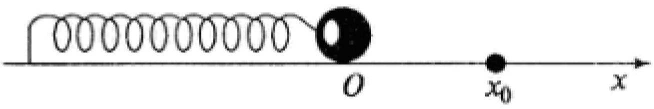


Рис. 104

(знак «минус» поставлен потому, что направление действующей силы обратно по знаку смещению x).

Запишем второй закон Ньютона для шарика

$$F = ma, \tag{10.46}$$

где ускорение $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ (см. § 2.4, п. 2).

Из (10.45), (10.46) имеем

$$ma = -\lambda x$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda x.$$

Отсюда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{10.47}$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}.$$

Для уравнения (10.47) запишем характеристическое уравнение

$$k^2 + \omega^2 = 0.$$

Его корнями будут

$$k_1 = \omega i, \quad k_2 = -\omega i.$$

Поэтому общее решение уравнения (10.47) имеет вид:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \tag{10.48}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Выясним теперь, каковы начальные условия. В момент времени $t=0$ $x=x_0$, а скорость равна нулю; значит,

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ x'(0) = 0. \end{cases} \tag{10.49}$$

Но из (10.48) следует, что

$$\frac{dx}{dt} = -C_1\omega \sin \omega t + C_2\omega \cos \omega t.$$

Поэтому (10.49) перепишется в виде

$$\begin{cases} C_1 + 0 = x_0, \\ 0 + C_2\omega = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = x_0$, $C_2 = 0$ и

$$x = x_0 \cos \omega t. \tag{10.50}$$

Другими словами, шарик будет совершать гармонические колебания с амплитудой $|x_0|$ и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\lambda}}$$

(ω называется частотой колебаний)*.

Как говорят в физике, здесь имеем гармонический осциллятор. В действительности известно, что шарик не может колебаться бесконечно долго, и амплитуда колебаний стремится к нулю. Это происходит потому, что в любом реальном опыте присутствует сила трения, которой пренебрегли при выводе уравнения (10.47).

Однако, если сила трения очень мала, а промежуток времени не слишком большой, то (10.47) и (10.50) описывают процесс с хорошим приближением.

Пусть теперь на шарик действует еще одна сила F_1, направленная вдоль оси Ox и изменяющаяся по закону

$$F_1 = F_0 \sin pt,$$

где F_0, p — положительные постоянные.

Тогда второй закон Ньютона примет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda x + F_0 \sin pt$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \alpha_0 \sin pt, \tag{10.51}$$

где

$$\alpha_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Уравнение (10.51) называют уравнением *вынужденных колебаний*, а уравнение (10.47) — уравнением *свободных колебаний*.

Найдем частное решение неоднородного уравнения (10.51).

1) Пусть $p \neq \omega$, т. е. частота внешней силы не совпадает с частотой свободных колебаний. Частное решение ищем в виде

$$z = A\cos pt + B\sin pt,$$

откуда

$$z' = -pA\sin pt + pB\cos pt,$$

$$z'' = -p^2A\cos pt - p^2B\sin pt.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (10.51), получаем

$$-p^2(A\cos pt + B\sin pt) + \omega^2(A\cos pt + B\sin pt) = \alpha_0 \sin pt,$$

$$A(\omega^2 - p^2)\cos pt + B(\omega^2 - p^2)\sin pt = \alpha_0 \sin pt.$$

---

* Период T находим из формулы $\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$, где 2π — период косинуса.

Отсюда

$$A(\omega^2 - p^2) = 0, \quad B(\omega^2 - p^2) = \alpha_0$$

и, следовательно,

$$A = 0, \quad B = \frac{\alpha_0}{\omega^2 - p^2}.$$

Поэтому

$$z = \frac{\alpha_0}{\omega^2 - p^2} \sin pt$$

и общее решение уравнения (10.51) для случая $p \neq \omega$ будет

$$z = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{\alpha_0}{\omega^2 - p^2} \sin pt.$$

Это решение представляет собой наложение двух гармонических колебаний с частотами ω и p, причем колебания ограничены.

2) $p = \omega$, т. е. частота внешней силы совпадает с частотой свободных колебаний. В этом случае частное решение уравнения (10.51) ищем в виде

$$z = t(A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

Отсюда

$$z' = A \cos \omega t + B \sin \omega t + t\omega(-A \sin \omega t + B \cos \omega t),$$

$$z'' = 2(-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) - t\omega^2(A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (10.51), получаем

$$2(-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) = \alpha_0 \sin \omega t,$$

откуда

$$-2A\omega = \alpha_0, \quad 2B\omega = 0$$

или

$$A = -\frac{\alpha_0}{2\omega}, \quad B = 0.$$

Поэтому

$$z = -\frac{\alpha_0 t}{2\omega} \cos \omega t$$

и общее решение уравнения (10.51) в случае $p = \omega$ будет

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{\alpha_0 t}{2\omega} \cos \omega t.$$

Последняя формула показывает, что размах колебаний x неограниченно растет вместе со временем t (рис. 105). Это явление носит название *резонанса*. При работе многих механизмов резонанс крайне не желателен, так как он приводит к нарушению их правильной работы и даже к разрушению.

5. Метод вариации произвольных постоянных. Лагранжу принадлежит общий метод нахождения частных решений неоднородного

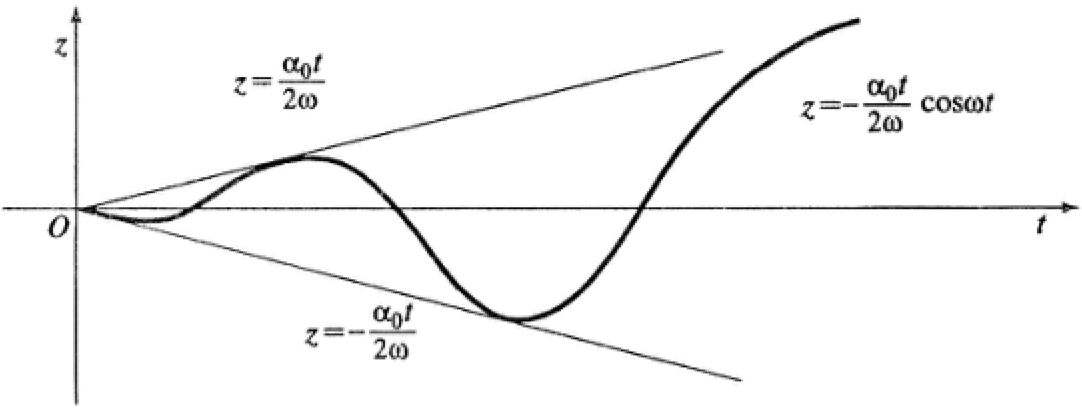


Рис. 105

линейного уравнения. Этот метод применим как к уравнениям с постоянными коэффициентами, так и к уравнениям, в которых коэффициенты являются функциями от x.

Пусть y_1 и y_2 — два линейно независимых частных решения однородного уравнения (10.36), соответствующего неоднородному уравнению (10.35). Тогда общее решение этого однородного уравнения (см. п. 1, теорема 1) есть

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Будем искать решение неоднородного уравнения (10.35) в виде

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2, \tag{10.52}$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ — неизвестные функции, подлежащие определению. Продифференцируем равенство (10.52):

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2.$$

Подберем искомые функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ так, чтобы выполнялось равенство $C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$. Тогда

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'.$$

Дифференцируя последнее выражение, получаем

$$y'' = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2'.$$

Подставляя выражения для y, y' и y'' в уравнение (10.35), получаем

$$C_1(x)(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2(x)(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) + C_1'(x)y_1' + \\ + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

Так как y_1 и y_2 — решения уравнения (10.36), то выражения, стоящие в скобках, тождественно равны нулю. Следовательно,

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

Таким образом, приходим к системе уравнений

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0,$$
$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

Определитель этой системы, как уже отмечалось ранее (см. п. 1, примечание), не обращается в нуль. Следовательно, мы можем найти $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ как определенные функции от x:

$$C_1'(x)=\varphi_1(x),\quad C_2'(x)=\varphi_2(x).$$

Интегрируя, получаем $C_1(x)=\int\varphi_1(x)dx+C_1$, $C_2(x)=\int\varphi_2(x)dx+C_2$.

Подставляя найденные выражения для $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в равенство (10.52), находим решение уравнения (10.35), зависящее от двух произвольных постоянных, т. е. его общее решение. Если положить $C_1=C_2=0$, то получим частное решение уравнения (10.35).

Пример. Решить уравнение $y''+y=\operatorname{tg}x$. Имеем

$$k^2+1=0,\quad k_1=i,\quad k_2=-i,\quad Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Частное решение исходного уравнения методом неопределенных коэффициентов (п. 3) искать нельзя (правая часть этого уравнения иной структуры, чем в п. 3), а потому воспользуемся методом Лангранжа (методом вариации произвольных постоянных): будем искать решение уравнения в виде

$$y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x,$$

где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ надо найти из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0,\\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\operatorname{tg}x. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$C_1'(x)=-\frac{\sin^2 x}{\cos x},\quad C_2'(x)=\sin x,$$

откуда

$$C_1(x)=-\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx=$$

$$=\sin x-\int\frac{dx}{\cos x}=\sin x-\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\sin x-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_1,\ \text{(см. § 4.4, п. 3, пример)},$$

где C_1 — произвольная постоянная;

$$C_2(x)=-\cos x+C_2,$$

где C_2 — произвольная постоянная.

Таким образом, общее решение исходного уравнения

$$y=\left(\sin x-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C_1\right)\cos x+(C_2-\cos x)\sin x,$$

или

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

§ 10.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ

1. Заряд конденсатора. Конденсатор емкостью C включается в цепь напряжением U и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после включения.

Решение. Сила I электрического тока представляет производную от количества электричества q, прошедшего через проводник, по времени t:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

В момент t заряд конденсатора q и сила тока $I = \frac{dq}{dt}$; в цепи действует электродвижущая сила E, равная разности между напряжением цепи U и напряжением конденсатора $\frac{q}{C}$, т. е.

$$E = U - \frac{q}{C}.$$

Согласно закону Ома

$$I = \frac{E}{R}.$$

Поэтому

$$\frac{dq}{dt} = \frac{U - \frac{q}{C}}{R}.$$

Отсюда

$$q' = \frac{1}{CR}(CU - q)$$

или

$$x' = -\frac{1}{CR}x \quad (x = CU - q),$$

т. е. имеем уравнение вида (10.13) (см. § 10.2, п. 3, задача 1) с начальным условием $x = CU$ при $t = 0$. Значит, согласно формуле (10.14) из § 10.2

$$x = CUe^{-\frac{t}{CR}}, \text{ или } CU - q = CUe^{-\frac{t}{CR}},$$

откуда

$$q = CU(1 - e^{-\frac{t}{CR}}).$$

2. Падение с парашютом. При падении тел в безвоздушном пространстве их скорость равномерно увеличивается. Иначе обстоит дело, если падение происходит в воздухе. Будем для простоты считать, что сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости падения. Поэтому, если масса тела равна m, то сила F, действующая на тело, равна $mg - kv$ (знак «минус» перед k поставлен потому, что сила сопротивления воздуха направлена в сторону, противоположную направлению падения). Далее, так как по второму закону Ньютона $F = ma$, где $a = v'$ — ускорение, получаем уравнение

$$ma = mg - kv$$

или

$$v' = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right)$$

с начальным условием $v = 0$ при $t = 0$. Отсюда, вводя обозначение $x = v - \frac{mg}{k}$, получаем

$$x' = -\frac{k}{m}x$$

с начальным условием $x = -\frac{mg}{k}$ при $t = 0$, т. е. имеем уравнение вида (10.13) (из § 10.2) с начальным условием $x = -\frac{mg}{k}$ при $t = 0$. Значит, согласно формуле (10.14) из § 10.2

$$x = -\frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$$

или

$$v - \frac{mg}{k} = -\frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t},$$

откуда

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

По прошествии некоторого времени $e^{-\frac{k}{m}t}$ станет очень малым числом и скорость падения будет почти в точности равна $\frac{mg}{k}$, т. е. падение станет равномерным. Коэффициент k зависит от плотности воздуха, площади падающего тела и т. д. Например, при падении с парашютом этот коэффициент довольно велик и потому скорость приземления парашютиста сравнительно невелика — примерно 5 м/с. Ясно, что скорость падения пушинки будет меньше, чем скорость падения свинцового шарика, имеющего ту же массу,— у пушинки гораздо больше площадь и потому больше значение k. Именно поэтому пушинка так медленно опускается вниз и так легко увлекается восходящим потоком воздуха. Аристотель в своих рассуждениях о падении тел не учел сопротивления воздуха и считал, что тяжелые тела падают во столько раз быстрее легких, во сколько раз они тяжелее их. Галилей экспериментально опроверг это утверждение, бросая шары с наклонной Пизанской башни.

Теперь найдем закон движения парашютиста $s = s(t)$. Для этого перепишем найденное выражение для скорости v в виде

$$s' = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right),$$

откуда

$$ds = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)dt,$$

что после интегрирования дает

$$s = \frac{mg}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right) + C,$$

где C — произвольная постоянная. Для отыскания C заметим, что при $t=0$ пройденный путь равен нулю, т. е. при $t=0$ имеем $s=0$. Подставляя эти значения в последнее равенство, получаем

$$0 = \frac{m^2 g}{k^2} + C, \text{ т. е. } C = -\frac{m^2 g}{k^2}.$$

Итак, закон движения парашютиста имеет вид

$$s = \frac{mg}{k}\left(t - \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right).$$

3. Химические реакции. Порядок химической реакции равен общему числу молекул, входящих в левую часть химического уравнения. Так, RaB $\to$ RaC есть реакция первого порядка. Скорость реакции есть скорость v, с которой система компонентов левой части превращается в систему компонентов правой части уравнения реакции. Действующая масса или концентрация реагирующего вещества A есть количество молей* этого вещества в единице объема. Согласно закону действующих масс скорость реакции пропорциональна действующим массам в данный момент.

Химические реакции первого порядка. Если a — начальная концентрация вещества A, x — количество молей на литр, прореагировавших за время t от начала реакции, то скорость реакции $\frac{dx}{dt}$, а действующая масса к этому моменту $a-x$. Согласно закону действующих масс

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x),$$

или

$$\frac{d\Theta}{dt} = -k\Theta, \tag{10.53}$$

где $k>0$ — коэффициент пропорциональности (константа скорости), зависящий от рода и условий химического процесса, $\Theta = a - x$. Значит, $\Theta = a$ при $t=0$ — начальное условие для уравнения (10.53). Уравнение (10.53) есть уравнение вида (10.13) из § 10.2.

---

* Моль (или грамм-молекула) вещества — число граммов этого вещества, равное его молекулярной массе. Например, 1 моль кислорода равен 16 г, 1 моль воды — 18 г.

Следовательно, согласно формуле (10.14) из § 10.2

$$\Theta = ae^{-kt} \text{ или } a - x = ae^{-kt},$$

откуда

$$x = a(1 - e^{-kt}). \tag{10.54}$$

Задача 1. Радиоактивный элемент RaB распадается наполовину, образуя радиоактивный элемент RaC, в течение 26,7 мин. Найти время распада 0,2 первоначального количества RaB.

Решение. Здесь имеет место реакция первого порядка RaB → RaC. Поэтому имеет место формула (10.54), из которой находим

$$t = \frac{1}{k}\ln\frac{a}{a - x}.$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: при $t = 26{,}7$ мин $x = \frac{a}{2}$. Имеем

$$26{,}7 = \frac{1}{k}\ln\frac{a}{a - \frac{a}{2}} = \frac{1}{k}\ln 2,$$

откуда

$$k = \frac{\ln 2}{26{,}7}.$$

Теперь искомое время

$$t = \frac{26{,}7}{\ln 2}\ln\frac{a}{a - 0{,}2a} = \frac{26{,}7}{\ln 2}\ln\frac{1}{0{,}8} = \frac{26{,}7}{\ln 2}\ln\frac{5}{4} \approx 8{,}6 \text{ (мин)}.$$

Как и прежде, для облегчения вычислений здесь можно использовать калькулятор. То же в задаче 3.

Задача 2. Вещество A превращается в вещество B. Спустя 1 ч после начала реакции осталось 44,8 г вещества A, а после 3 ч — 11,2 г вещества. Определить первоначальное количество a вещества A и время, когда останется половина этого вещества.

Решение. Здесь имеет место реакция первого порядка. Поэтому справедлива формула (10.54).

Используя дополнительные условия (при $t = 1$ $x = a - 44{,}8$, при $t = 3$ $x = a - 11{,}2$), имеем

$$a - 44{,}8 = a(1 - e^{-k}),$$
$$a - 11{,}2 = a(1 - e^{-3k})$$

или

$$\begin{cases} 44{,}8 = ae^{-k} \\ 11{,}2 = ae^{-3k}. \end{cases}$$

Из последней системы находим $e^{-k} = 2^{-1}$, $a = 89{,}6$. Теперь находим искомое время. Имеем

$$\frac{a}{2} = a(1 - 2^{-t}),$$

откуда

$$\frac{1}{2} = 2^{-t} \quad \text{или} \quad 2^{-1} = 2^{-t}$$

и, следовательно, $t = 1$.

Химические реакции второго порядка. Пусть a и b — начальные концентрации веществ A и B; x — число прореагировавших к моменту t молей вещества A, а следовательно, и вещества B, так как каждый моль вещества A соединяется с молем вещества B, и поэтому число прореагировавших молей обоих веществ одинаково.

В момент t скорость реакции будет $\frac{dx}{dt}$. Действующая масса вещества A равна $a - x$; действующая масса вещества B будет $b - x$.

Согласно закону действующих масс

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x),$$

где k — коэффициент пропорциональности. Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\int \frac{dx}{(x - a)(x - b)} = k \int dt + C.$$

Если $a = b$, то имеем $\frac{1}{a - x} = kt + C$. Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C = \frac{1}{a}$ и поэтому

$$x = a - \frac{a}{1 + akt}.$$

Если $a \neq b$, то

$$\frac{1}{b - a} \ln \frac{b - x}{a - x} = kt + C.$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C = \frac{1}{b - a} \ln \frac{b}{a}$ и поэтому

$$\frac{1}{b - a} \ln \frac{b - x}{a - x} = kt + \frac{1}{b - a} \ln \frac{b}{a} \quad \text{или} \quad kt = \frac{1}{b - a} \ln \frac{a(b - x)}{b(a - x)},$$

откуда

$$\frac{b - x}{a - x} = \frac{b}{a} e^{(b - a)kt} \quad \text{и} \quad x = \frac{ab[e^{(b - a)kt} - 1]}{be^{(b - a)kt} - a}.$$

Задача 3. В реакции омыления уксусноэтилового эфира гидроксидом натрия

$$\underset{\substack{\text{Уксусноэтиловый}\\ \text{эфир}}}{CH_3COOC_2H_5} + \underset{\substack{\text{Гидроксид}\\ \text{натрия}}}{NaOH} \longrightarrow \underset{\substack{\text{Ацетат}\\ \text{натрия}}}{CH_3COONa} + \underset{\substack{\text{Этиловый}\\ \text{спирт}}}{C_2H_5OH}$$

первоначальные концентрации уксусноэтилового эфира и гидроксида натрия соответственно $a = 0{,}01$ и $b = 0{,}002$. Спустя 23 мин концентрация уксусноэтилового эфира уменьшилась на 10 %. За какое время она уменьшится на 15 %?

Решение. Здесь имеет место реакция второго порядка. Поэтому, как установлено выше,

$$kt = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a(b-x)}{b(a-x)}.$$

Коэффициент пропорциональности k определим из дополнительного условия: при $t = 23$ мин $x = 0{,}01 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$. Имеем

$$23k = \frac{1}{0{,}002 - 0{,}01} \ln \frac{0{,}01(0{,}002 - 0{,}001)}{0{,}002(0{,}01 - 0{,}001)},$$

откуда

$$k = \frac{125}{23} \ln 1{,}8.$$

Теперь находим искомое время:

$$\frac{125 \ln 1{,}8}{23} t = \frac{1}{0{,}002 - 0{,}01} \ln \frac{0{,}01(0{,}002 - 0{,}0015)}{0{,}002(0{,}01 - 0{,}0015)}$$

или

$$t = 23 \frac{\ln 3{,}4}{\ln 1{,}8} \approx 47{,}9 \text{ (мин)}.$$

Примечание. Аналогично рассматриваются реакции и более высокого порядка.

4. Динамика численности популяции. Динамика численности популяции (т. е. изменение общего числа живых особей в популяции в связи с рождаемостью и смертностью) — один из важнейших вопросов экологии популяций. Изучая дифференциальные уравнения первого порядка, мы рассмотрели (см. § 10.2, п. 6) простейшую задачу из этой области. Было показано, что если считать популяцию изолированной, ресурсы питания неограниченными, а прирост поголовья пропорциональным числу взрослых особей, то динамика численности популяции описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x, \tag{10.55}$$

где $x = x(t)$ — численность популяции в момент времени t.

Решением этого уравнения (см. § 10.2, п. 6) является функция

$$x = x_0 e^{\gamma(t - t_0)},$$

где x_0 — численность популяции в начальный момент t_0.

Как уже отмечалось (см. § 10.2, п. 6), уравнение (10.55) либо имеет смысл в теоретическом аспекте, либо описывает динамику искусственно созданной и поддерживаемой популяции.

Более точное описание развития популяции дает уравнение *Ферхюльста — Перла*, полученное в 1845 г. Оно учитывает так называемый «фактор самоотравления» популяции, или внутривидовую борьбу в популяциях. Этот фактор, снижающий скорость роста популяции, объясняется многими причинами: конкурентной борьбой за место и пищу, распространением инфекций из-за тесноты и т. п. Желая учесть этот эффект, необходимо при подсчете прироста Δx (см. § 10.2, п. 6) от величины $\gamma x \Delta t$ вычесть некоторую величину $h(x, \Delta t)$:

$$\Delta x = \gamma x \Delta t - h(x, \Delta t).$$

Функция $h(x, \Delta t)$ для многих популяций может быть взята в виде произведения

$$h(x, \Delta t) = \delta x^2 \Delta t,$$

где δ —коэффициент самоотравления (или внутренней борьбы в популяции).

Линейная зависимость по Δt объясняется так же, как и в первом слагаемом (см. § 10.2, п. 6). А вид функции x^2 обосновывается следующим образом. Величина $h(x, \Delta t)$ отражает снижение скорости роста популяции из-за внутривидовой конкуренции. Но конкуренция тем выше, чем больше число встреч между особями, а число встреч пропорционально произведению xx, т. е. x^2. Здесь в порядке сравнения следует заметить, что число встреч между особями двух разных видов пропорционально как численности одного, так и численности другого, т. е. пропорционально произведению xy, где x и y — соответствующие численности видов. При встречах особей одного вида место y занимает x, и получаем x^2.

Итак,

$$\Delta x = \gamma x \Delta t - \delta x^2 \Delta t. \tag{10.56}$$

Равенство (10.56) делим почленно на Δt:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \gamma x - \delta x^2$$

и после перехода к пределу при $\Delta t \to 0$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x - \delta x^2. \tag{10.57}$$

Это и есть уравнение Ферхюльста — Перла.

Уравнение (10.57) часто записывают в ином виде. Вынеся за скобки γx в правой части уравнения (10.57), получим

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x\left(1 - \frac{\delta}{\gamma} x\right)$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x \frac{\frac{\gamma}{\delta} - x}{\frac{\gamma}{\delta}}. \tag{10.58}$$

Введя обозначение $\frac{\gamma}{\delta} = \mu$, уравнение (10.58) перепишем в виде

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x \frac{\mu - x}{\mu}. \tag{10.59}$$

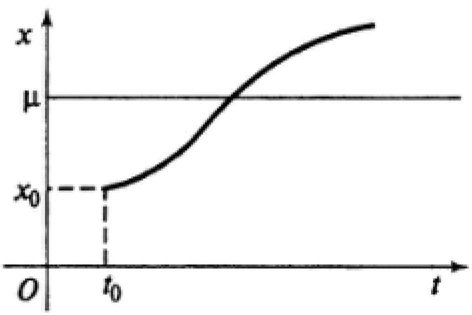


Рис. 106

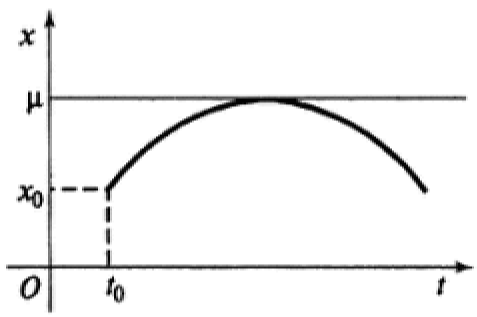


Рис. 107

Величина μ имеет определенный биологический смысл. Выясним его после интегрирования, а сейчас отметим только, что если начальное значение $x_0<\mu$, то для всех моментов времени $t>t_0$ $x(t)<\mu$. В самом деле, $x(t)$ — дифференцируемая функция. Из уравнения (10.59) следует, что пока $x(t)<\mu$, производная $\frac{dx}{dt}$ положительна и, следовательно, $x(t)$ растет (см. § 3.2, п. 1). Отсюда следует, что принимать значение, равное μ, $x(t)$ может либо возрастая и пересекая прямую $x(t)=\mu$ (рис. 106, либо касаясь этой прямой (рис. 107).

В первом случае справа от точки пересечения имеем $x(t)>\mu$ и $x'(t)>0$. Это противоречит уравнению (10.59). Во втором случае справа от точки касания $x(t)<\mu$ и $x'(t)<0$, что тоже противоречит уравнению (10.59). Таким образом $x(t)$ не может достигать значения, равного μ, если $x_0<\mu$. Проинтегрируем теперь уравнение (10.59). Разделяя переменные, получаем

$$\frac{\mu dx}{x(\mu-x)}=\gamma dt$$

или

$$\frac{(\mu-x)+x}{x(\mu-x)}dx=\gamma dt,$$

откуда

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\mu-x}\right)dx=\gamma dt.$$

Считая $x_0<\mu$, после интегрирования будем иметь

$$\ln x-\ln(\mu-x)=\gamma t+\ln C,$$

откуда, потенцируя, получаем

$$\frac{x}{\mu-x}=Ce^{\gamma t}. \qquad (10.60)$$

Пусть для простоты $t_0=0$ и $x(0)=x_0<\mu$. Подставляя в (10.60) эти начальные данные, находим $C=\frac{x_0}{\mu-x_0}$.

Подставив это значение C в (10.58), получим

$$\frac{x}{\mu-x}=\frac{x_0}{\mu-x_0}e^{\gamma t}.$$

Отсюда искомый закон (модель Ферхюльста — Перла)

$$x = \frac{x_0 \mu e^{\gamma t}}{\mu - x_0 + x_0 e^{\gamma t}}. \tag{10.61}$$

Исследуем график этой функции. Воспользовавшись самим уравнением (10.59), заключаем, что поскольку $x < \mu$, то $x'(t)$ всюду положительна. Дифференцированием из (10.59) получаем

$$x''(t) = \left(\gamma \frac{\mu - x}{\mu} - \frac{\gamma x}{\mu}\right) x'(t) = \gamma\left(1 - \frac{2x}{\mu}\right) x'(t).$$

Подставив сюда выражение для x из (10.61), найдем

$$x''(t) = \gamma\left(\frac{\mu - x_0 - x_0 e^{\gamma t}}{\mu - x_0 + x_0 e^{\gamma t}}\right) x'(t).$$

Отсюда видно, что при $\mu - x_0 - x_0 e^{\gamma t} > 0$ производная $x''(t) > 0$ и, следовательно, функция $x(t)$ вогнута; при $\mu - x_0 - x_0 e^{\gamma t} < 0$ производная $x''(t) < 0$ и, следовательно, функция $x(t)$ выпукла. Из первого неравенства находим область вогнутости:

$$\mu - x_0 - x_0 e^{\gamma t} > 0, \text{ т. е. } e^{\gamma t} < \frac{\mu - x_0}{x_0}.$$

Следовательно, область вогнутости определяется неравенством

$$0 < t < \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\mu - x_0}{x_0}.$$

Аналогично область выпуклости определяется неравенством

$$\frac{1}{\gamma} \ln \frac{\mu - x_0}{x_0} < t < +\infty.$$

Так как при $t = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\mu - x_0}{x_0}$ $x''(t) = 0$ и $x = \frac{\mu}{2}$, то точка

$$M\left(\frac{1}{\gamma} \ln \frac{\mu - x_0}{x_0};\ \frac{\mu}{2}\right)$$

является точкой перегиба.

Далее, так как производная $x'(t)$ для всех t больше нуля, искомая кривая нигде не имеет экстремумов. Наконец, из формулы (10.61) с учетом того, что $x < \mu$, видно что $x(t) \to \mu$ снизу при $t \to \infty$, а из начальных данных следует, что при $t = 0$ $x(0) = x_0$. Всего этого достаточно, чтобы представить себе вид кривой (рис. 108). Из рисунка видно, что если в начальный момент популяция была небольшой $\left(x_0 < \frac{\mu}{2}\right)$, развитие популяции идет по вогнутой кривой до точки M. В этой точке кривая перегибается, становясь далее выпуклой, и при $t \to +\infty$ стремится к прямой $x = \mu$, никогда не достигая этой прямой. Поэтому величину μ называют максимальной численностью популяции, возможной (теоретически) в данных условиях.

График $x = x(t)$ напоминает вытянутую букву S. Поэтому его называют S-образной кривой (иногда логистической кривой). Для многих популяций эта кривая хорошо совпадает с экспериментальными данными.

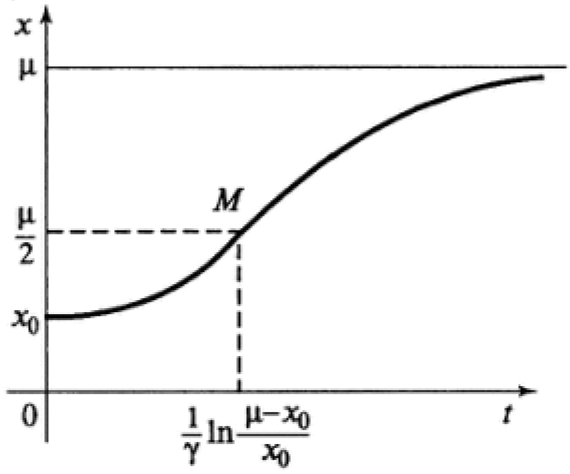


Рис. 108

Совершенно аналогично исследуется случай, когда $x_0 = x(t_0) > \mu$. В этом случае решение $x(t)$ при $t \to +\infty$ стремится к μ, мотононно уменьшаясь.

5. Дифференциальные уравнения в теории эпидемий. Ограничимся лишь рассмотрением эпидемий простейшего вида. Предположим, что изучаемое заболевание носит длительный характер, так что процесс передачи инфекции значительно более быстрый, чем течение самой болезни. Нас будет интересовать именно первый процесс — процесс передачи инфекции. При этом будем предполагать, что зараженные особи не удаляются из колонии и передают при встречах инфекцию незараженным.

Пусть a и n — соответственно число зараженных и незараженных в начальный момент, $x = x(t)$ — число незараженных в момент t, а $y = y(t)$ — число зараженных к моменту t. Для всех моментов времени из некоторого не слишком большого отрезка $0 \le t \le T$* имеет место равенство

$$x + y = n + a. \tag{10.62}$$

Так как инфекция передается при встречах зараженных с незараженными, то число незараженных будет убывать с течением времени пропорционально числу встреч между теми и другими, т. е. пропорционально произведению xy. Поэтому скорость убывания числа незараженных равна

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy, \tag{10.63}$$

где $\beta > 0$ — коэффициент пропорциональности. Подставив в равенство (10.63) выражение x из (10.62), получим

$$y' = \beta y(n + a - y),$$

или

$$y' = \beta(n + a)y\,\frac{(n + a - y)}{n + a},$$

* Точнее, отрезок [0; T] должен быть меньше времени жизни одного поколения. Тогда в наших уравнениях можно не учитывать естественную смертность особей.

т. е. уравнение вида (10.59) с начальным условием $y(0)=a$. Значит, согласно формуле (10.61) имеем

$$y=\frac{a(n+a)}{a+(n+a-a)e^{-\beta(n+a)t}}$$

или

$$y=\frac{a(n+a)}{a+ne^{-\beta(n+a)t}}. \qquad (10.64)$$

Формула (10.64) дает закон возрастания $y(t)$ с течением времени.

6. Рост листьев растения. Скорость увеличения площади молодого листа виктории-регии, имеющего форму круга, пропорциональна длине окружности листа и количеству солнечного света, падающего на него. Последнее пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикально к листу. Найти зависимость между площадью S листа и временем t, если в 6 ч утра эта площадь равнялась 1600 см², а в 18 ч того же дня — 2500 см².

Принять, что угол между направлением луча Солнца и вертикалью в 6 ч утра и в 18 ч (без учета знака) равен 90°, а в полдень — 0°.

Пусть t — время, отсчитываемое от полуночи. Если S — переменная площадь листа, то скорость роста листа

$$\frac{dS}{dt}=k_1 2\pi r Q,$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности; $2\pi r$ — длина окружности листа; Q — количество солнечного света.

Площадь листа $S=\pi r^2$, откуда

$$r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Тогда

$$\frac{dS}{dt}=k_1\frac{2\pi}{\sqrt{\pi}}\sqrt{S}\,Q. \qquad (10.65)$$

По условию

$$Q=k_2 S\cos\alpha, \qquad (10.66)$$

где k_2 — коэффициент пропорциональности; α — угол между направлением лучей и вертикалью. Угол α является линейной возрастающей функцией аргумента t:

$$\alpha=k_3 t+b.$$

Параметры k_3 и b находим из дополнительных условий:

при $t=6$ $\quad \alpha=-\frac{\pi}{2}$,

при $t=12$ $\quad \alpha=0$,

при $t=18$ $\quad \alpha=\frac{\pi}{2}$.

Из двух последних условий имеем

$$\begin{cases} 0 = 12k_3 + b, \\ \frac{\pi}{2} = 18k_3 + b. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$k_3 = \frac{\pi}{12}, \quad b = -\pi.$$

Следовательно,

$$\alpha = \frac{\pi}{12}(t - 12).$$

Значение α подставляем в равенство (10.66), откуда

$$Q = k_2 S \cos\left[\frac{\pi}{12}(t - 12)\right].$$

Подставив это в уравнение (10.65), получим

$$\frac{dS}{dt} = k_1 k_2 \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} S\sqrt{S} \cos\left[\frac{\pi}{12}(t - 12)\right].$$

Введем обозначение $k = k_1 k_2$. Тогда после разделения переменных

$$\frac{dS}{S\sqrt{S}} = k\frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} \cos\left[\frac{\pi}{12}(t - 12)\right] dt.$$

Интегрируя, получаем

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{24k}{\sqrt{\pi}} \sin\left[\frac{\pi}{12}(t - 12)\right] + C. \qquad (10.67)$$

Начальные условия: при $t = 6$ $S = 1600$ и при $t = 18$ $S = 2500$. Отсюда

$$\begin{cases} -\frac{1}{20} = -\frac{24k}{\sqrt{\pi}} + C, \\ -\frac{1}{25} = \frac{24k}{\sqrt{\pi}} + C. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$C = -\frac{9}{200}, \quad k = \frac{\sqrt{\pi}}{24 \cdot 200}.$$

Подставляя эти значения в (10.67), получаем

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{24\sqrt{\pi}}{24 \cdot 200\sqrt{\pi}} \sin\left[\frac{\pi}{12}(t - 12)\right] - \frac{9}{200},$$

откуда

$$S = \frac{160\,000}{\left\{9 - \sin\left[\frac{\pi}{12}(t - 12)\right]\right\}^2}.$$

Примечание. Рассмотрение математической модели о росте дерева см., например, в [2] (гл. VII).

§ 10.6. УРАВНЕНИЯ И ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1. Основные понятия о дифференциальных уравнениях с частными производными второго порядка. *Дифференциальным уравнением с частными производными* называют равенство, связывающее неизвестную функцию от нескольких независимых переменных, эти переменные и частные производные от неизвестной функции по независимым переменным.

Порядком дифференциального уравнения с частными производными называют порядок старшей частной производной, входящей в это уравнение.

Если $u=u(x, y)$, то в общем случае дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка имеет вид

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)=0, \qquad (10.68)$$

где F — известная функция.

Дифференциальное уравнение с частными производными называют *линейным*, если оно линейно относительно неизвестной функции и всех ее частных производных.

Для физических приложений особый интерес представляют линейные дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.

Для случая двух независимых переменных приведем важнейшие типы таких уравнений.

1. Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (10.69)$$

Это уравнение встречается при изучении ряда колебательных процессов (поперечные колебания упругой струны, колебание газа в трубке и др.).

2. Уравнение теплопроводности (уравнение Фурье)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (10.70)$$

описывающее процессы распространения тепла и т. д.

3. Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (10.71)$$

К исследованию этого уравнения приводит рассмотрение задач об электрических и магнитных полях, о стационарном тепловом состоянии, задач гидродинамики, диффузии и т. д. (см. [12]).

Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической функцией*.

Для решения этих уравнений в различных условиях были созданы специальные приемы (так называемые «методы математической физики»).

Решением уравнения (10.68) называется всякая функция $u=\varphi(x, y)$, обращающая уравнение (10.68) в тождество.

Как известно (см. § 10.2, 10.3), общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений содержат произвольные постоянные. Для дифференциальных уравнений с частными производными их общие решения включают произвольные функции.

2. Вывод уравнения колебаний струны. В математической физике под *струной* понимают однородную гибкую, упругую нить (т. е. с постоянной линейной плотностью).

Пусть струна длиной l в начальный момент направлена по отрезку оси Ox от 0 до l. Предположим, что концы струны закреплены в точках $x=0$ и $x=l$. Если струну отклонить от ее первоначального положения, а потом предоставить самой себе, то точки струны будут совершать движения — говорят, что струна начнет колебаться.

Будем рассматривать малые отклонения точек струны от начального положения. В силу этого можно предполагать, что движение точек струны происходит перпендикулярно оси Ox и в одной плоскости. При этом предположении процесс колебания струны описывается одной функцией $u(x, t)$, которая дает величину перемещения точки струны с абсциссой x в момент времени t (рис. 109).

Так как здесь рассматриваем малые отклонения струны в плоскости xOu, будем предполагать, что длина элемента струны $l_{\smile M_1M_2}$ равна ее проекции на ось Ox, т. е. длина дуги M_1M_2 равна x_2-x_1. Также будем считать, что натяжение во всех точках струны одинаковое по величине. Обозначим его через T.

Рассмотрим элемент струны MM' (рис. 110).

На концах этого элемента, по касательным к струне, действуют силы T. Пусть касательные образуют с осью Ox углы φ и $\varphi+\Delta\varphi$. Тогда проекция на ось Ou сил, действующих на элемент MM', будет равна $T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi$. Так как угол φ мал, то можно положить $\operatorname{tg}\varphi\approx\sin\varphi$, и мы будем иметь

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi\approx T\operatorname{tg}(\varphi+\Delta\varphi)-T\operatorname{tg}\varphi=$$

$$=T\left(\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right)=T\frac{\partial^2 u(x+\Theta\Delta x, t)}{\partial x^2}\Delta x\approx T\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\Delta x,$$

$0<\Theta<1$ (здесь применена формула Лагранжа (см. § 3.1, п. 3) к разности, стоящей в скобках).

Чтобы получить уравнение движения, надо внешние силы, приложенные к элементу MM', приравнять силе инерции. Пусть ρ — линейная плотность струны. Тогда масса этого элемента струны будет $\rho\Delta x$, а его ускорение равно $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Следовательно, по второму закону Ньютона

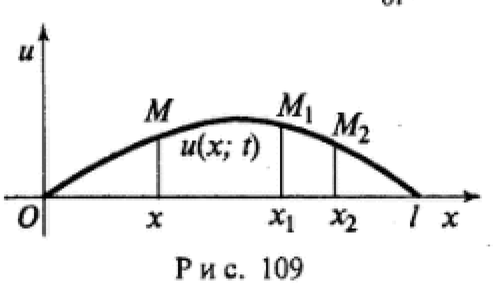


Рис. 109

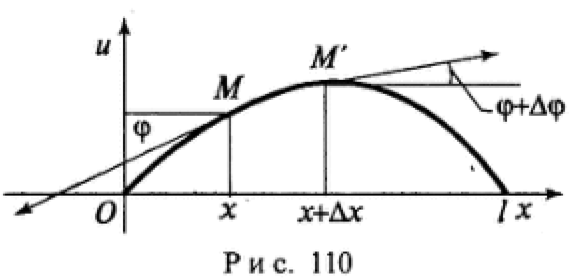


Рис. 110

$$\rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x.$$

Сокращая на Δx и обозначая $\frac{T}{\rho} = a^2$, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Это уравнение называется *уравнением свободных колебаний струны*, или *одномерным однородным волновым уравнением.*

3. Вывод уравнения теплопроводности. Пусть на оси Ox лежит однородный стержень, теплоизолированный от внешней среды (нет обмена с внешней средой) и неравномерно нагретый. При этом в стержне будет проходить теплообмен между более нагретыми частями и частями менее нагретыми. Если, например, в начальный момент времени температура точек стержня с увеличением x уменьшается, то с течением времени будет проходить поток тепла в положительном направлении оси Ox. Обозначим через $u(x, t)$ температуру в сечении стержня с абсциссой x в момент t. При этом частная производная $u'_t(x, t)$ равна скорости повышения температуры в момент времени t в данном сечении стержня, а частная производная $u'_x(x, t)$ — скорости изменения температуры в зависимости от точки x стержня. Эта величина характеризует перепад температур. Если $u'_x(x, t) < 0$, то более правые точки стержня имеют более низкую температуру. По законам физики поток тепла через сечение стержня пропорционален площади S сечения стержня, перепаду температур и промежутку времени. Иными словами, за малый промежуток времени Δt (температурные условия в этом промежутке сохраняются) через сечение стержня с абсциссой x пройдет поток тепла

$$Q(x) = -kS \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta t. \tag{10.72}$$

Знак «минус» оправдан тем, что при движении тепла в положительном направлении оси Ox производная $u'_x(x, t)$, как уже отмечалось, отрицательна, а количество тепла Q, прошедшее через сечение в положительном направлении, положительно. Число k называется *коэффициентом теплопроводности* стержня. Величина k зависит от материала, из которого сделан стержень.

Проследим за изменением количества тепла и температуры в той части стержня, которая заключена между сечениями с абсциссами x и $x + \Delta x$. Количество тепла, входящее через сечение с абсциссой x за время Δt, определяется по формуле (10.72). Согласно этой же формуле количество тепла, выходящее через сечение с абсциссой $x + \Delta x$ за это же время Δt, равно

$$Q(x + \Delta x) = -kS \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} \Delta t.$$

Взяв разность величин входящего и выходящего тепловых потоков, получим количество тепла ΔQ, сообщенное выбранному участку стержня за время Δt:

$$\Delta Q = kS\left(\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right)\Delta t.$$

Отсюда, применяя формулу Лагранжа (см. § 2.6, п. 3), получаем

$$\Delta Q = kS\frac{\partial^2 u(x+\Theta_1\Delta x, t)}{\partial x^2}\Delta t\,\Delta x, \tag{10.73}$$

где $0 < \Theta_1 < 1$.

Будем считать выделенный участок стержня (между сечениями с абсциссами x и $x+\Delta x$) столь малым, что в каждый данный момент температуру всех его сечений можно считать одной и той же. Тогда, с другой стороны, сообщенное количество тепла выбранному участку стержня за время Δt равно

$$\Delta Q = c\rho S(u(x,\ t+\Delta t) - u(x,\ t))\Delta x,$$

где c — удельная теплоемкость вещества стержня; ρ — плотность стержня.

Отсюда, вновь применяя формулу Лагранжа, будем иметь

$$\Delta Q = c\rho S\frac{\partial(x, t+\Theta_2\Delta t)}{\partial t}\Delta x\,\Delta t, \tag{10.74}$$

где $0 < \Theta_2 < 1$.

Из формул (10.73), (10.74) получаем

$$c\rho\frac{\partial u(x, t+\Theta_2\Delta t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u(x+\Theta_1\Delta x, t)}{\partial x^2}.$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{10.75}$$

где положено $a^2 = \frac{k}{c\rho}$.

Уравнение (10.75) называют *уравнением теплопроводности* стержня.

4. Классификация задач математической физики. Как уже отмечалось (см. п. 1), дифференциальные уравнения с частными производными имеют бесчисленное множество решений. Поэтому в том случае, когда физическая задача приводится к уравнению с частными производными, для однозначной характеристики процесса необходимо к уравнению присоединить некоторые дополнительные условия.

Для задач, приводящих к уравнениям (10.69), (10.70) из п. 1, дополнительные условия разделяются на *начальные* и *краевые*.

Начальные условия состоят в задании в один какой-нибудь момент времени, с которого начинается изучение данного физического явления (обычно при $t=0$), значений искомой функции и ее производной (в случае уравнения (10.69)) или только значений самой функции (в случае уравнения (10.70)).

Краевые (или граничные) условия для этих задач заключаются в том, что указываются значения неизвестной функции $u(x,\ t)$ на концах интервала изменения координаты x.

Если процесс протекает в бесконечном интервале изменения координаты x (бесконечная струна, бесконечный стержень — п. 5), то краевые условия отпадают и получается задача только с начальными условиями, или, как ее часто называют, *задача Коши*.

Если ставится задача для конечного промежутка, то должны быть заданы и начальные, и краевые условия. Тогда говорят о *смешанной задаче* (см. п. 6).

Например, рассмотрим простейшую задачу о поперечных колебаниях струны, закрепленной на концах. В этой задаче $u(x, t)$ даст отклонение струны от оси Ox. Если концы струны $0 \le x \le l$ закреплены, то должны выполняться краевые условия

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, \tag{10.76}$$

или, более кратко,

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

Краевые условия (10.76), где правые части — нули, называют *однородными*.

Однако заданием только этих краевых условий закон колебания не определяется однозначно. Он будет зависеть еще и от начальной формы струны, и от начальной скорости струны в каждой точке. Итак, кроме краевых условий, должны быть заданы следующие начальные условия: $u(x, 0) = f(x)$, $u'_t(x, 0) = F(x)$. Здесь $f(x)$ и $F(x)$ — известные, заранее заданные функции: первая из них в качестве графика имеет форму струны в начальный момент, вторая указывает, какова в начальный момент скорость каждой точки струны.

Из физических соображений ясно, что, придав некоторое начальное положение и некоторую начальную скорость каждой точке струны, а затем отпустив струну, мы вызовем вполне определенное движение точек струны. Следовательно, задание краевых и начальных условий однозначно определяет некоторый закон колебания струны. Этот закон будет найден позднее (см. п. 6).

Переходя к уравнению (10.71) из п. 1, заметим, что в это уравнение время t не входит и обе независимые переменные являются координатами точки. Для задач, приводящих к уравнению (10.71), ставятся только краевые условия, т. е. указывается поведение неизвестной функции на контуре области (см. задачу Дирихле — п. 7).

Кроме того, следует иметь в виду, что каждое из выведенных уравнений носит идеализированный характер, т. е. отражает лишь наиболее существенные черты соответствующего физического процесса. Данные, входящие как в уравнение, так и в дополнительные условия в физической задаче, определяются из экспериментальных данных и могут считаться известными лишь приближенно. Поэтому необходимо быть уверенными в том, что решение задачи при приближенных исходных данных будет близко к тем решениям, которые получались бы при точных исходных данных. Таким образом, важно, *чтобы малые изменения данных задачи вызывали лишь малые изменения в ее решении*, т. е., как говорят, чтобы решение было *устойчиво* относительно исходных данных.

Задача математической физики считается поставленной правильно *(корректно)*, если решение задачи, удовлетворяющее всем ее условиям, существует, единственно и устойчиво.

Все задачи, которые будут рассмотрены, принадлежат к типу задач, имеющих единственное решение, устойчивое относительно исходных данных, т. е. задачи поставлены корректно.

5. Задача Коши. Метод Даламбера. Рассмотрим задачу о колебаниях бесконечной струны. Если струна очень длинная, то на колебания, возникающие где-то в ее середине, концы струны будут оказывать малое влияние. Поэтому, рассматривая свободные колебания неограниченной струны, надо решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{10.77}$$

только при начальных условиях

$$u(x,\ 0) = f(x), \tag{10.78}$$

$$u_t'(x,\ 0) = F(x), \tag{10.79}$$

причем ввиду неограниченности струны функции $f(x)$ и $F(x)$ заданы на всей числовой оси.

Такая задача, как уже отмечалось (см. п. 4), называется задачей с начальными условиями, или задачей Коши. Метод решения ее, который сейчас будет изложен, называется *методом Даламбера*, или *методом бегущих волн.*

Прежде всего заметим, что если $\varphi(p)$ и $\psi(q)$ (p и q — произвольные независимые переменные) — любые дважды дифференцируемые функции, то функция

$$u(x,\ t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at) \tag{10.80}$$

является решением уравнения (10.77).

Действительно, последовательно дифференцируя, находим

$$\begin{aligned} &u_x'(x, t) = \varphi'(x - at) + \psi'(x + at),\ \ u_{xx}'' = \varphi''(x - at) + \psi''(x + at),\\ &u_t'(x, t) = -a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at),\\ &u_{tt}'' = a^2\varphi''(x - at) + a^2\psi''(x + at), \end{aligned} \tag{10.81}$$

и, следовательно, $u_{tt}'' = a^2 u_{xx}''$.

Решение (10.80), зависящее от двух произвольных функций, называется *решением Даламбера*. Для определения этих функций воспользуемся начальными условиями (10.78), (10.79). Полагая в формулах (10.80), (10.81) $t = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \psi(x) &= f(x),\\ -a\varphi'(x) + a\psi'(x) &= F(x). \end{aligned} \tag{10.82}$$

Интегрируя последнее равенство на отрезке $[0;\ x]$, получаем

$$-a(\varphi(x) - \varphi(0)) + a(\psi(x) - \psi(0)) = \int_0^x F(y)dy,$$

которое приведем к виду

$$-\varphi(x)+\psi(x)=\frac{1}{a}\int_0^x F(y)dy+C, \qquad (10.83)$$

где $C=-\varphi(0)+\psi(0)$. Из равенств (10.82) и (10.83) находим искомые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x F(y)dy-\frac{C}{2}, \qquad (10.84)$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x F(y)dy+\frac{C}{2}. \qquad (10.85)$$

Заменяя в формулах (10.84) и (10.85) x соответственно на $x-at$ и $x+at$ и подставляя полученные выражения в формулу (10.80), находим решение задачи Коши:

$$u(x, t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(y)dy. \qquad (10.86)$$

Формула (10.86) называется *формулой Даламбера*. В случае бесконечного стержня краевые условия отсутствуют и задача Коши сводится к отысканию решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

определенного для всех x, $-\infty<x<+\infty$ и $t>0$ и удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,\ 0)=f(x).$$

Это решение (см. [12]) имеет вид

$$u(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}ds.^*$$

6. Решение смешанной задачи методом Фурье. Рассмотрим указанную в п. 4 задачу о свободных колебаниях струны, закрепленной на обоих концах. Как отмечалось, эта задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (10.87)$$

при краевых условиях

$$u(0,\ t)=0, \quad u(l,\ t)=0 \qquad (10.88)$$

и начальных условиях

$$u(x,\ 0)=f(x), \quad u'_t(x,\ 0)=F(x). \qquad (10.89)$$

Уравнение (10.87) будем решать *методом Фурье* — разделения переменных. Суть его заключается в том, что мы отыскиваем част-

---

* Формула была получена в 1823 г. Симеоном Пуассоном (1781—1840) — французским математиком и физиком.

ные решения уравнения (10.87), удовлетворяющие пока только краевым условиям (10.88) в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$u(x,\ t) = X(x)T(t). \tag{10.90}$$

При этом ищем нетривиальные решения, т. е. тождественно не равные нулю. Подставляя функцию (10.90) в уравнение (10.87), получаем

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t),$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Получено равенство, в котором левая часть не зависит от x, а правая — от t. Следовательно, обе части равенства не зависят ни от x, ни от t, т. е. являются постоянными. Обозначим эту постоянную символом $-\lambda^2$ (поскольку отношение $\frac{u''_{tt}}{u} = \frac{T''}{T}$ ускорения к отклонению является отрицательным, так как вектор ускорения направлен здесь к положению равновесия):

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Отсюда

$$T''(t) + \lambda^2a^2T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda^2X(x) = 0.$$

Из этих уравнений находим (см. § 10.4, п. 2)

$$T(t) = A\cos\lambda at + B\sin\lambda at,$$

$$X(t) = C\cos\lambda x + D\sin\lambda x.$$

Таким образом,

$$u(x,\ t) = (A\cos\lambda at + B\sin\lambda at)(C\cos\lambda x + D\sin\lambda x).$$

Полагая здесь $x = 0$, получаем

$$u(0,\ t) = (A\cos\lambda at + B\sin\lambda at)C \equiv 0.$$

Значит, $C = 0$.

Далее, поскольку

$$u(l,\ t) = (A\cos\lambda at + B\sin\lambda at)D\sin\lambda l \equiv 0,$$

то λ следует выбрать так, чтобы

$$\sin\lambda l = 0,\ \ \lambda l = k\pi,\ \ \lambda = \frac{k\pi}{l}.$$

Эти значения λ называют *собственными значениями* для данной краевой задачи, а соответствующие им функции

$$X(x) = D\sin\frac{k\pi}{l}x$$

собственными функциями.

Итак, частное решение уравнения (10.87), удовлетворяющее краевым условиям, найдено:

$$u_k(x, t) = \left(a_k \cos\frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin\frac{k\pi a}{l} t\right) \sin\frac{k\pi}{l} x.$$

Здесь числа $a_k = AD$, $b_k = BD$ произвольны.

Заметим теперь, что уравнение (10.87) линейное и однородное и потому сумма его решений также будет решением. Так что функция

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin\frac{k\pi a}{l} t\right) \sin\frac{k\pi}{l} x$$

является решением уравнения (10.87). Ясно, что эта функция удовлетворяет краевым условиям (10.88), так как им удовлетворяет каждая из функций $u_k(x, t)$.

Подберем теперь числа a_k и b_k так, чтобы удовлетворить и начальным условиям (10.89) уравнения (10.87). Имеем

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{l} x.$$

Это разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам. Следовательно (см. § 9.5),

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\frac{k\pi}{l} x \, dx, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{10.91}$$

Далее, так как

$$u'_t(x, 0) = F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin\frac{k\pi}{l} x,$$

то

$$\frac{k\pi a}{l} b_k = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin\frac{k\pi}{l} x \, dx,$$

откуда

$$b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F(x) \sin\frac{k\pi}{l} x \, dx. \tag{10.92}$$

Таким образом, найдено решение уравнения свободного колебания струны, удовлетворяющее указанным краевым и начальным условиям:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin\frac{k\pi a}{l} t\right) \sin\frac{k\pi}{l} x,$$

где a_k и b_k находятся из равенств (10.91) и (10.92).

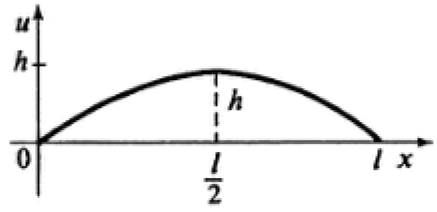


Рис. 111

Пример. Струна, закрепленная на концах $x=0$, $x=l$, имеет в начальный момент форму параболы $u=\frac{4h}{l^2}x(l-x)$. Определить смещение точек струны от оси абсцисс, если начальные скорости отсутствуют (рис. 111).

Здесь $f(x)=\frac{4h}{l^2}x(l-x)$, $\varphi(x)=0$. Находим коэффициенты ряда определяющего решение уравнения колебания струны:

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=$$

$$=\frac{8h}{l^3}\int_0^l \underbrace{(lx-x^2)}_{u_1}\underbrace{\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx}_{dv_1}=-\frac{8h}{l^3}(lx-x^2)\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l+$$

$$+\frac{8h}{k\pi l^2}\int_0^l (l-2x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{8h}{k\pi l^2}\int_0^l (l-2x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx=$$

$$=\frac{8h}{k^2\pi^2 l}(l-2x)\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l+\frac{16h}{k^2\pi^2 l}\int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=-\frac{16h}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l=$$

$$=-\frac{16h}{k^3\pi^3}(\cos k\pi-1)=\frac{16h}{k^3\pi^3}[1-(-1)^k];$$

$b_k=0$.

Но при $k=2n$ $a_k=0$, поэтому

$$u(x,t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

7. Задача Дирихле для круга. Пусть в плоскости xOy имеется круг радиусом R с центром в начале координат и на его окружности задана некоторая функция $f(\varphi)$, где φ — полярный угол. Требуется найти функцию $u(r,\varphi)$, непрерывную в этом круге, включая его границу, удовлетворяющую внутри его уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0 \tag{10.93}$$

и на границе данного круга принимающую заданные значения

$$u\big|_{r=R}=f(\varphi). \tag{10.94}$$

Перепишем уравнение (10.93) в виде

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0. \tag{10.95}$$

Будем искать решение методом разделения переменных, полагая

$$u = \Phi(\varphi) R(r). \tag{10.96}$$

Подставляя это выражение в уравнение (10.95), получаем

$$r^2\Phi(\varphi)R''(r) + r\Phi(\varphi)R'(r) + \Phi''(\varphi)R(r) = 0,$$

или

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)}. \tag{10.97}$$

Так как левая часть равенства (10.97) не зависит от r, а правая — от φ, то они равны постоянному числу. Обозначая эту постоянную через $-k^2$ (ниже объясняется, почему мы не могли приравнять $+k^2$) получаем два уравнения:

$$\Phi''(\varphi) + k^2\Phi(\varphi) = 0, \tag{10.98}$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) - k^2R(r) = 0. \tag{10.99}$$

Общее решение уравнения (10.98) будет

$$\Phi = A\cos k\varphi + B\sin k\varphi. \tag{10.100}$$

Решение уравнения (10.99) будем искать в форме $R(r) = r^m$. Подставляя $R(r) = r^m$ в уравнение (10.99), получаем

$$r^2m(m-1)r^{m-2} + rmr^{m-1} - k^2r^m = 0,$$

или

$$m^2 - k^2 = 0.$$

Итак, имеются два частных линейно независимых решения уравнения (10.99): r^k и r^{-k}. Следовательно (см. § 10.4, п. 1, теорема 1), общее решение уравнения (10.99) будет:

$$R(r) = Cr^k + Dr^{-k}. \tag{10.101}$$

Выражения (10.100) и (10.101) подставляем в равенство (10.96):

$$u_k = (A_k\cos k\varphi + B_k\sin k\varphi)(C_kr^k + D_kr^{-k}). \tag{10.102}$$

Функция (10.102) будет решением уравнения (10.95) при любом значении k, отличном от нуля. Если $k = 0$, то уравнения (10.98) и (10.99) принимают вид

$$\Phi''(\varphi) = 0, \quad rR''(r) + R'(r) = 0.$$

Их общие решения соответственно есть

$$\Phi = A_0 + B_0\varphi,$$

$$R(r) = C_0 + D_0\ln r$$

и, следовательно,

$$u_0 = (A_0 + B_0\varphi)(C_0 + D_0\ln r). \tag{10.103}$$

Это решение уравнения (10.95) должно быть периодической функцией от φ, так как при одном и том же значении r при φ и $\varphi+2\pi$ мы должны иметь одно и то же значение решения, потому что рассматривается одна и та же точка круга. Поэтому в формуле (10.103) $B_0=0$. Далее ищем решение, непрерывное в круге. Следовательно, в равенствах (10.102) и (10.103) должно соответственно быть $D_k=0$ и $D_0=0$.

Таким образом, правая часть равенства (10.103) обращается в произведение A_0C_0, которое обозначим через $\frac{A_0}{2}$, т. е. $u_0=\frac{A_0}{2}$.

Будем составлять решение нашей задачи в виде суммы решений вида (10.102), так как сумма решений есть решение. Сумма должна быть периодической функцией от φ. Это будет так, если каждое слагаемое будет периодической функцией от φ. Для этого k должно принимать целые значения. (Заметим, что если приравнять части равенства (10.97) числу $+k^2$, то не получишь периодического решения, так как тогда в выражение Φ не войдет $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$; $R(r)$ не влияет на периодичность, ибо от φ не зависит.) Можно ограничиться только положительными значениями $k=1, 2, \ldots$, так как в силу произвольности постоянных A, B, C отрицательные значения k новых частных решений не дают. Итак,

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)r^n \tag{10.104}$$

(Постоянная C_n включена в A_n и B_n.) Подберем теперь произвольные постоянные A_n и B_n так, чтобы удовлетворялось краевое условие (10.94). Подставляя в равенство (10.104) $r=R$, получаем

$$f(\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)R^n.$$

Это — разложение функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье. Следовательно (см. § 9.3, п. 2),

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt,\quad A_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt,$$
$$B_0=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt. \tag{10.105}$$

Таким образом, ряд (10.104) с коэффициентами, определенными по формулам (10.105), будет решением нашей задачи. Преобразуем формулу (10.104). Подставляя вместо A_0, A_n и B_n их выражения по формулам (10.105) и производя тригонометрические преобразования, получаем

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\varphi)\right)dt.$$

Но

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\varphi)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left(e^{in(t-\varphi)}+e^{-in(t-\varphi)}\right)=$$

$$= \frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1-2\frac{r}{R}\cos(t-\varphi)+\left(\frac{r}{R}\right)^2} = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}.$$

Поэтому

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}\,dt. \qquad (10.106)$$

Путем анализа этой формулы доказывается, что если функция $f(\varphi)$ непрерывная, то функция $u(r, \varphi)$, определенная интегралом (10.106), удовлетворяет уравнению (10.95) и при $r \to R-0$ будет $u(r, \varphi) \to f(\varphi)$, т. е. $u(r, \varphi)$ является решением поставленной задачи Дирихле для круга.

Интеграл (10.106), дающий решение задачи Дирихле для круга, называется *интегралом Пуассона*, а подынтегральное выражение

$$\Phi(r, t, R, \varphi) = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2} \text{ —}$$

ядром Пуассона.

Отметим следующие свойства ядра Пуассона:

1. $\Phi(r, t, R, \varphi) > 0$.
2. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}\,dt = 1.$

Упражнения

Решите уравнения:

1. $(1+y)dx-(1-x)dy=0$. $[(1+y)(1-x)=C.]$

2. $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$. $[\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=C.]$

3. $(1+e^x)yy'=e^x$. $\left[\frac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)+C.\right]$

4. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$. $\left[\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C.\right]$

5. $e^{-y}(1+y')=1$. $[e^x=C(1-e^{-y}).]$

6. $y'=2^{x+y}$. $[2^x+2^{-y}=C.]$

7. $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$. $[1+e^y=C(1+x^2).]$

8. $2xyy'=x^2+y^2$. $[x^2-y^2-Cx=0.]$

9. $(x+y)dx+x\,dy=0$. $\left[y=-\frac{x}{2}+\frac{C}{x}.\right]$

10. $x(x+2y)dx+(x^2-y^2)dy=0$. $[x^3+3x^2y-y=C.]$

11. $y' = \dfrac{x-y}{x-2y}$. [$x^2 - 2xy + 2y^2 = C$.]

12. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$. [$y = (x^2 + C)e^{-x^2}$.]

13. $y' = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$. [$x = Ce^{\sin y} - 2(1 + \sin y)$.]

14. $y' + 2y = e^{-x}$. [$y = Ce^{-2x} + e^{-x}$.]

15. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$. [$y = (x^2 + C)e^{x^2}$.]

16. $y' + 2xy = e^{-x^2}$. [$y = (C + x)e^{-x^2}$.]

17. $y' x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$. [$y = (C + x^3) \ln x$.]

18. $(2x - y^2)y' = 2y$. $\left[x = Cy - \dfrac{y^2}{2}.\right]$

19. $xy' - 2y = x^3 \cos x$. [$y = Cx^2 + x^2 \sin x$.]

20. $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$. $\left[x = \dfrac{C}{y} + y \ln y.\right]$

21. $(e^{-\frac{y^2}{2}} - xy)dy - dx = 0$. [$x = (C + y)e^{-\frac{y^2}{2}}$.]

22. $y' - ye^x = 2xe^{e^x}$. [$y = (C + x^2)e^{e^x}$.]

23. $y' + xe^x y = e^{(1-x)e^x}$. [$y = (C + x)e^{(1-x)e^x}$.]

Найдите частные решения уравнений:

24. $x^2 + xy' = y$, если $y = 0$ при $x = 1$. [$y = x - x^2$.]

25. $y' + y\cos x = \cos x$, если $y = 1$ при $x = 0$. [$y = 1$.]

26. $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1)$, если $y = 4$ при $x = 2$. [$y = x^2$.]

27. Скорость прямолинейного движения тела задана уравнением

$$v = (2t^2 + t) \text{ см/с}.$$

Найдите путь, пройденный им за 6 с от начала движения. [162 см.]

28. Скорость прямолинейного движения тела

$$v = \left(4t - \frac{6}{t^2}\right) \text{ см/с}.$$

Определите путь его за третью секунду. [9 см.]

29. Скорость тела пропорциональна пройденному пути. За первые 10 с тело проходит 100 м, за 15 с — 200 м. Какой путь пройдет тело за время t? [$s = 25 \cdot 2^{\frac{t}{5}}$.]

30. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Если температура воздуха равна 20 °С и тело в течение 20 мин охлаждается от 100 до 60 °С, то через сколько времени его температура понизится до 30 °С? [Через 60 мин.]

Указание. Воспользуйтесь установленным ранее (см. § 10.2) законом изменения температуры.

31. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак со скоростью 3 л в минуту подается вода и одновременно со скоростью 2 л в минуту раствор выливается из бака, причем концентрация раствора остается все время равномерной благодаря перемешиванию. Сколько соли в баке останется через час? [3,9 кг.]

Решите уравнения:

32. $y'' = x$. $\left[y = \dfrac{x^3}{6} + C_1x + C_2.\right]$

33. $y'' = \sin x + \cos x$. $[y = -\sin x - \cos x + C_1x + C_2.]$

34. $y'' = e^x$. $[y = e^x + C_1x + C_2.]$

35. $y'' - y = 0$. $[y = C_1e^x + C_2e^{-x}.]$

36. Найдите частное решение уравнения $y'' = -6x$, удовлетворяющее начальным условиям $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$. $[y = -x^3.]$

37. Тело движется прямолинейно с ускорением $s''(t) = 4$. Найдите закон движения тела, если в начальный момент движения пройденный путь и скорость равнялись нулю. $[s(t) = 2t^2.]$

38. Ускорение прямолинейного движения пропорционально времени. Найдите зависимость между пройденным расстоянием и временем, если при $t = 0$ $v = 0$ и $s = 0$, а также при $t = 1$ $s = 1/3$. $[s = t^3/3.]$

39. Ускорение прямолинейного движения пропорционально квадрату времени. Найдите зависимость между s и t, если при $t = 0$ $v = 0$, $s = 1$ и при $t = 1$ $s = 2$. $[s = t^4 + 1.]$

Решите уравнения:

40. $y'' - y' - 2y = 0$. $[y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}.]$

41. $y'' + 24y' + 144y = 0$. $[y = e^{-12x}(C_1 + C_2x).]$

42. $y'' - y' - 6y = 0$. $[y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}.]$

43. $y'' - 7y' + 10y = 0$. $[y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x}.]$

44. $y'' - 5y = 0$. $[y = C_1e^{-\sqrt{5}x} + C_2e^{\sqrt{5}x}.]$

45. $y'' - 22y' + 121y = 0$. $[y = e^{11x}(C_1 + C_2x).]$

46. $y'' - 4y' + 20y = 0$. $[y = e^{2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x).]$

47. $y'' + 15y' = 0$. $[y = C_1 + C_2e^{-15x}.]$

48. $y'' + 49y = 0$. $[y = C_1\cos 7x + C_2\sin 7x.]$

49. $y'' + 7y' = 0$. $[y = C_1 + C_2e^{-7x}.]$

50. $y'' - 49y = 0$. $[y = C_1e^{7x} + C_2e^{-7x}.]$

51. $y'' + 20y' + 19y = 0$. $[y = C_1e^{-x} + C_2e^{-19x}.]$

52. $y'' + 2\sqrt{3}y' + 7y = 0.$ $[y = e^{-\sqrt{3}x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).]$

53. $y'' - y' - 12y = 0.$ $[y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x}.]$

54. $y'' + 4y' - 7y = 0.$ $[y = C_1 e^{(-2+\sqrt{11})x} + C_2 e^{-(2+\sqrt{11})x}.]$

55. $y'' - 9y' - 10y = 0.$ $[y = C_1 e^{10x} + C_2 e^{-x}.]$

56. $y'' + 16y = 0.$ $[y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x.]$

57. $y'' + 2y' - 2y = 0.$ $[y = C_1 e^{-(1-\sqrt{3})x} + C_2 e^{-(1+\sqrt{3})x}.]$

58. $y'' - 4y' + 10y = 0.$ $[y = e^{2x}(C_1 \cos\sqrt{6}x + C_2 \sin\sqrt{6}x).]$

59. $y'' + 3y = 0.$ $[y = C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x.]$

60. $y'' + y' = \frac{1}{2}.$ $\left[y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{x}{2}.\right]$

61. $y'' - 9y = 2 - x.$ $\left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{9}x - \frac{2}{9}.\right]$

62. $y'' + y' = e^x.$ $\left[y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}e^x.\right]$

63. $y'' - 4y' = 4e^{4x}.$ $[y = e^{4x}(C_1 + x) + C_2.]$

64. $y'' - y' = 4 + x.$ $\left[y = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{2}x^2 - 5x.\right]$

65. $y'' + y = \sin 5x.$ $\left[y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{24}\sin 5x.\right]$

66. $y'' + y = \cos x.$ $\left[y = C_1 \cos x + \left(C_2 + \frac{x}{2}\right)\sin x.\right]$

67. $y'' + 3y' + 2y = 3e^{2x}.$ $\left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{4}e^{2x}.\right]$

68. $y'' + 7y' + 20y = e^x.$ $\left[y = e^{-\frac{7}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{31}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{31}}{2}x\right) + \frac{1}{28}e^x.\right]$

69. $y'' + 9y = \cos 3x.$ $\left[y = C_1 \cos 3x + \left(C_2 + \frac{x}{6}\right)\sin 3x.\right]$

70. $y'' - 2y' - 3y = x^2.$ $\left[y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{x^2}{3} + \frac{4}{9}x - \frac{14}{27}.\right]$

71. $y'' - 9y = e^{2x}.$ $\left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{5}e^{2x}.\right]$

72. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}.$ $\left[y = e^{3x}\left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2}\right).\right]$

73. $y'' + 100y = \sin 2x$. $\left[y = C_1 \cos 10x + C_2 \sin 10x + \dfrac{1}{96}\sin 2x.\right]$

74. $y'' + 3y' = 1$. $\left[y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \dfrac{x}{3}.\right]$

75. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$. $\left[y = e^{-x}\left(C_1 + C_2 x + \dfrac{x^2}{2}\right).\right]$

76. $y'' + 2y' = 1 - x$. $\left[y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{3}{4}x.\right]$

77. $y'' + 4y' + 29y = 0$; $y = 0$, $y' = 15$ при $x = 0$. $[y = 3e^{-2x}\sin 5x.]$

78. $4y'' + 4y' + y = 0$; $y = 2$, $y' = 0$ при $x = 0$. $[y = e^{-\frac{1}{2}x}(2 + x).]$

79. $y'' - 2y' + 10y = 0$; $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

$\left[y = e^{x}\left(\cos 3x - \dfrac{1}{3}\sin 3x\right).\right]$

80. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y = 6$, $y' = 10$ при $x = 0$. $[y = 4e^{x} + 2e^{3x}.]$

81. $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y = 0$, $y' = 1$ при $x = 0$. $[y = e^{x}\sin x.]$

82. $y'' - 2y' + 3y = 0$; $y = 1$, $y' = 3$ при $x = 0$.

$\left[y = e^{x}\left(\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x\right).\right]$

83. $y'' - 9y = 2 - x$, если $y = 0$, $y' = 1$ при $x = 0$.

$\left[y = \dfrac{7}{27}e^{3x} - \dfrac{1}{27}e^{-3x} + \dfrac{1}{9}x - \dfrac{2}{9}.\right]$

84. $y'' + 4y = 2\cos 2x$, если $y = 0$, $y' = 4$ при $x = 0$.

$\left[y = 2\sin 2x + \dfrac{1}{2}x\sin 2x.\right]$

85. $y'' + 4y' = 12x^2 - 2x + 2$, если $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$.

$[y = -0{,}25 + 0{,}25e^{-4x} + x^3 - x^2 + x.]$

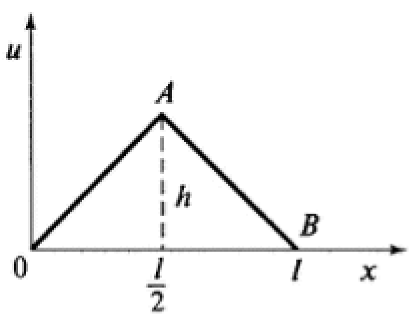


Рис. 112

86. Дана струна, закрепленная на концах $x = 0$, $x = l$. Пусть в начальный момент форма струны имеет вид ломаной линии OAB, изображенной на рис. 112. Найдите форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости отсутствуют.

$$\left[u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi a t}{l}.\right]$$

87. Проверьте, являются ли следующие функции гармоническими:

а) $u = x^2 + 2xy - y^2$;

б) $u = x^2 y$;

в) $u = x^2 - y^2$. [а) Да; б) нет; в) да.]

ПРИЛОЖЕНИЕ

Основные тригонометрические соотношения

1. Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

2. Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

3. Формулы тройного угла:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}.$$

4. Формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

5. Формулы сложения аргументов:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

6. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

7. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)).$$

8. Формулы приведения:

Функция	Аргумент t						
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баврин, И. И.* Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей. — М. : Физматлит, 2003.

2. *Баврин, И. И.* Математика. — М. : Академия, 2013.

3. *Ильин, В. А.* Основы математического анализа / В. А. Ильин, Э. Г. Поздняк. — М. : Физматлит, 2009. — Т. 1.

4. *Корниш-Боуден, Э.* Основы математики для биохимиков : пер. с англ. — М. : Мир, 1983.

5. *Кудрявцев, Л. Д.* Краткий курс математического анализа. — М. : Высшая школа, 2009. — Т. 1 ; 2010 — Т. 2.

6. *Курыш, А. Г.* Курс высшей алгебры. — М. : Наука, 1975.

7. *Никольский, С. М.* Курс математического анализа. — М. : Физматлит, 2011.

8. *Понтрягин, Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М. : Наука, 1984.

9. *Привалов, И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. — М. : Высшая школа, 1999.

10. *Смирнов, В. И.* Курс высшей математики. — М. : Наука, 1974. — Т. 1, 2.

11. *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1977.

ОГЛАВЛЕНИЕ