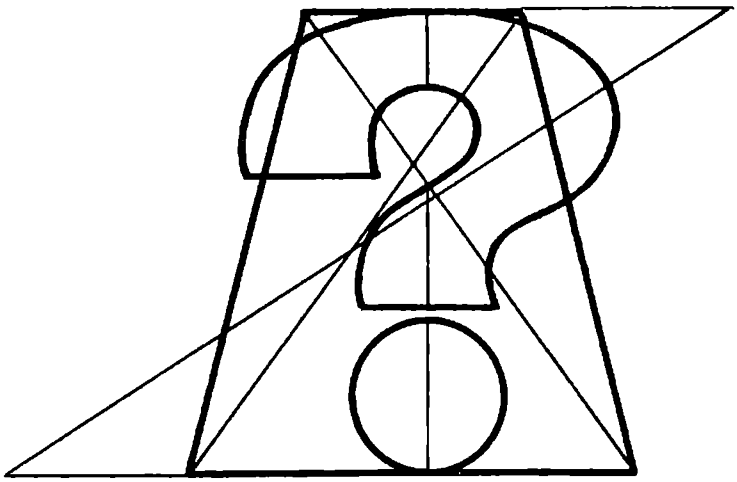
Э. Г. ГОТМАН

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ



ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

Рекомендовано Главным управлением развития общего среднего образования Министерства образования Российской Федерации

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
АО «УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА»
1996

УДК 373.167.1
ББК 22.151.0я72
Г73

Рецензент:

учитель школы № 607 Москвы *Н. В. Гришкова*

Готман Э. Г.

Г73 Задачи по планиметрии и методы их решения: Пособие для учащихся.— М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996.— 240 с.: ил.— ISBN 5-09-005129-1.

В сборнике, содержащем более 600 задач, рассматривается пять основных методов решения планиметрических задач: метод геометрических преобразований, вспомогательных фигур, алгебраический, векторный, координатный. Каждому методу посвящена отдельная глава, в которой дается необходимый теоретический материал, примеры наиболее типичных решений задач и задачи для самостоятельного решения.

Книга предназначена учащимся, желающим углубить свои знания по математике, и может служить пособием для подготовки к математическим олимпиадам и к экзаменам в высшие учебные заведения.

Г $\frac{4306020000-425}{103(03)-96}$ **уточн. план выпуска 1995 г., № 124** **ББК 22.151.0я72**

Учебное издание

ГОТМАН Эдгар Готлибович

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редакторы *М. Г. Циновская, Н. Е. Терехина*
Младший редактор *Л. И. Заседателева*
Художник *Н. П. Лобанев*
Художественный редактор *Е. Р. Дашук*
Технические редакторы *М. М. Широкова, Р. С. Невретдинова*
Корректор *И. Б. Окунева*

15263

Сдано в набор 16.02.94. Изд. лиц. № 010001 от 10.10.91. Подписано к печати 05.03.96. Формат 60 × 90 1/16. Бум. типогр. № 2. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 15. Усл. кр.-отт. 15,63. Уч.-изд. л. 12,93. Тираж 30 000 экз. Заказ № 947.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Комитета Российской Федерации по печати. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

АО «Учебная литература». 117571, Москва, проспект Вернадского, 88. Московский педагогический государственный университет.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Комитета Российской Федерации по печати. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ISBN 5-09-005129-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Решение задач по математике имеет большое общеобразовательное и воспитательное значение. Поиск решения нестандартной задачи развивает инициативу, настойчивость и сообразительность. Если к тому же задачи достаточно разнообразны, то их решение является прекрасным средством развития логического мышления, строгости суждений и математического вкуса.

Предлагаемое пособие содержит геометрические задачи по планиметрии. Задачи по характеру своего содержания и по методам решения разбиты на шесть глав. В начале каждой главы и отдельных параграфов даются необходимые теоретические сведения и указания о методах решения, разбираются конкретные примеры. Знакомство с этим материалом поможет учащимся, занимающимся самостоятельно, овладеть тем или иным методом.

В сборнике немало задач с параметрическими данными, при решении которых желательно отыскивать множества допустимых значений параметров. Особое внимание уделено подбору задач, решаемых методом геометрических преобразований, векторным и координатным методами.

Задачи в каждом параграфе расположены в порядке возрастания трудности, при этом близкие по содержанию задачи объединены в небольшие серии, отделенные друг от друга.

Для решения задач не требуется знаний, выходящих за пределы школьной программы по математике (исключение составляют задачи § 5 и § 8 главы I и § 1 главы V). Задачи, помещенные в начале каждого параграфа, доступны девятиклассникам.

Последняя глава содержит более трудные задачи, при решении которых учащиеся уже сами должны выбрать метод решения. Большинство задач этой главы допускает решения разными способами. Решив задачу одним каким-нибудь способом, не следует считать работу над задачей законченной. Нужно изучить и другие возможные пути, ведущие к решению задачи, и стараться отыскать наиболее простое и красивое решение.

При составлении сборника были использованы задачи из разных книг и журналов, более других — задачи из журнала

«Математика в школе». В пособии также немало задач, составленных автором, многие из них в разные годы публиковались на страницах журналов «Математика в школе» и «Квант».

Ко всем задачам на вычисление даны ответы. Большинство задач снабжено указаниями, а некоторые, наиболее трудные — решениями.

Кроме решений, предлагаемых автором, несомненно, имеются еще и другие, может быть, более интересные решения. Предполагается, что читатель будет настойчиво пытаться отыскать рациональное решение задачи и только после этого обратится к указаниям, помещенным в конце сборника.

В конце пособия предлагается также справочный материал — перечень основных обозначений и формул по геометрии.

Автор

ГЛАВА I

МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Преобразования плоскости — движения и подобия — во многих случаях позволяют экономно и изящно решать геометрические задачи. Однако овладеть методом геометрических преобразований нелегко: не любая задача может быть решена этим методом и нужен определенный опыт, чтобы выбрать подходящий вид преобразования.

При решении различных задач на доказательство, построение и вычисление широко применяются движения: осевая симметрия, параллельный перенос, поворот вокруг точки. Напомним, что ***движение*** — это преобразование плоскости, при котором расстояние между образами двух любых точек равно расстоянию между этими точками.

При движении точки, лежащие на одной прямой, переходят в точки, лежащие на одной прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения. Отсюда следует, что движение переводит прямую в прямую, луч в луч, отрезок в отрезок. Угол при движении переходит в равный ему угол, сонаправленные лучи — в сонаправленные лучи.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями движений:

S_k — осевая симметрия с осью k;

$T_{\vec{a}}$ — параллельный перенос на вектор $\vec{a}$;

R_O^α — поворот вокруг точки O на угол α;

E — тождественное преобразование (при котором все точки плоскости переходят в себя).

§ 1. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

Осевой симметрией называется такое преобразование плоскости, при котором любая точка некоторой прямой k переходит в себя, а точка A, не принадлежащая k, переходит в такую точку A', что отрезок AA' перпендикулярен прямой k и делится ею пополам. Прямая k называется *осью симметрии.*

При осевой симметрии расстояния между любыми двумя точ-

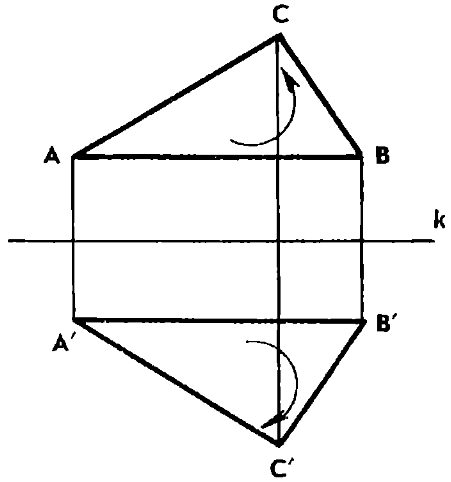


Рис. 1

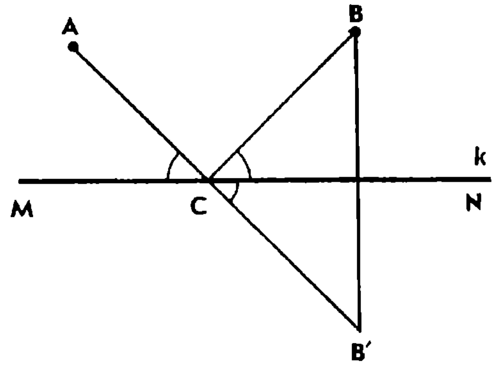


Рис. 2

ками сохраняются, т. е. осевая симметрия есть движение. Отметим ее важнейшие особенности.

Пусть ABC — произвольный треугольник и $A'B'C'$ — симметричный ему треугольник относительно прямой k (рис. 1). На рисунке треугольник ABC *ориентирован положительно* (обход его вершин в порядке A, B, C происходит против часовой стрелки), а треугольник $A'B'C'$ *ориентирован отрицательно* (обход его вершин A', B', C' происходит по часовой стрелке). Треугольники ABC и $A'B'C'$ равны, но ориентированы противоположно. *Осевая симметрия меняет ориентацию любого треугольника на противоположную.*

Если выполнить две симметрии относительно одной оси последовательно, то каждая точка плоскости вернется в исходное положение, т. е. *композиция двух осевых симметрий с одной осью есть тождественное преобразование.*

Рассмотрим применение осевой симметрии к решению задач.

Пример 1. Даны прямая k и две точки A и B по одну сторону от нее. Найти на прямой k точку C, делящую прямую k на два луча CM и CN так, чтобы $\angle ACM = \angle BCN$.

Решение. Построим точку B', симметричную точке B относительно прямой k (рис. 2). В таком случае $\angle BCN = \angle B'CN$ для любой точки C прямой k (эти углы симметричны относительно k). Углы $B'CN$ и ACM равны тогда и только тогда, когда точки A, B' и C лежат на одной прямой (в силу теоремы о вертикальных углах). Значит, искомая точка C есть точка пересечения отрезка AB' и прямой k.

Итак, заменив одну из точек симметричной ей относительно данной прямой, мы упростили ситуацию, что и позволило быстро найти решение задачи.

Осевая симметрия часто помогает решить задачу, когда фигура или часть ее имеет ось симметрии, например, когда в задаче речь идет о биссектрисе угла.

Пример 2. Биссектриса AK треугольника ABC делит противоположную сторону на отрезки: $BK=2$, $CK=1$. Угол AKC равен 60°. Найти AK и углы треугольника ABC.

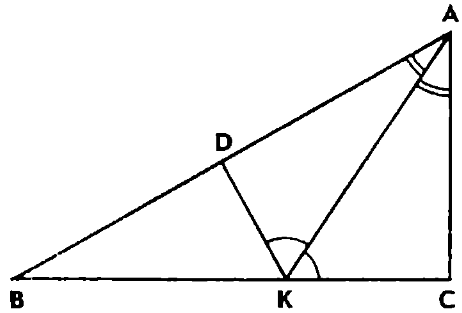


Рис. 3

Решение. Построим точку D, симметричную точке C относительно прямой AK. Так как биссектриса угла является его осью симметрии, то точка D будет лежать на стороне AB (рис. 3). В силу свойств симметрии имеем:

$$DK=CK=1, \quad \angle AKD=\angle AKC=60°.$$

Следовательно, $\angle BKD=60°$, точка D лежит между точками A и B, и мы получили треугольник BKD, в котором известны две стороны и угол между ними. Этот треугольник составляет половину равностороннего треугольника со стороной $BK=2$. Значит, $\angle B=30°$ и $\angle BDK=90°$. Далее легко находим угол C треугольника ABC и биссектрису AK:

$$\angle C=\angle ADK=90°, \quad \angle BAK=30°, \quad AK=BK=2.$$

Таким образом, заменив один отрезок симметричным ему относительно прямой AK, мы обнаружили такую зависимость между элементами фигуры, которая позволила решить задачу геометрически, почти без всяких вычислений.

Заметим, что алгебраическое решение этой задачи сложнее. Непосредственно вычислить элементы одного из треугольников ABK и ACK нельзя, так как известны лишь одна сторона и угол каждого из них. Можно воспользоваться свойством биссектрисы угла треугольника, положить $AC=x$, $AB=2x$, $AK=l$, применить теорему косинусов к треугольникам ABK и ACK и составить уравнения: $4x^2=l^2+2l+4$, $x^2=l^2-l+1$, откуда $l=2$.

Поскольку $AK=BK$ и $\angle AKC=60°$, то $\angle B=\angle BAK=30°$ и $\angle BAC=60°$.

Некоторые из предлагаемых ниже задач также могут быть решены двумя способами.

Задачи

1. Катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы. Докажите, что угол, противолежащий этому катету, равен 30°.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK. Найдите сторону AC, углы B и C, если $\angle C-\angle B=45°$, $CK=1$ и $BK=\sqrt{2}$.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD. Найдите стороны AC и BC, если $BD=1$, $AD=\sqrt{3}$ и $\angle B=120°$.

4. Дан четырехугольник $ABCD$, диагональ AC которого делит угол A пополам. Известно, что $AB=3$, $BC=\sqrt{3}$, $CD=2$ и $AD=4$. Найдите угол A четырехугольника и диагональ AC.

5. Найдите высоту CH треугольника ABC, если $BC=a$, $AC=b$ и разность углов A и B равна $90°$.

6. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка M. Докажите, что $AC+CB<AM+MB$.

▲ ▼ ▲

7. Даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Найдите на прямой l такую точку C, чтобы сумма $AC+CB$ была наименьшей.

8. Внутри острого угла дана точка M. Постройте на сторонах угла точки A и B так, чтобы периметр треугольника AMB был наименьшим.

9. Точки A и B расположены между параллельными прямыми m и n. Постройте на прямой m точку M и на прямой n точку N так, чтобы длина ломаной $AMNB$ была наименьшей.

10. В данный остроугольный треугольник ABC впишите треугольник наименьшего периметра.

11. Дан прямоугольник $ABCD$. На его сторонах AB, BC, CD и DA взяты точки A_1, B_1, C_1 и D_1. Какое наименьшее значение может иметь периметр четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, если диагональ прямоугольника равна d?

§ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Выполним последовательно две симметрии относительно параллельных прямых k и m. Пусть при симметрии с осью k произвольная точка A плоскости переходит в точку A', а при симметрии с осью m точка A' переходит в точку A'' (рис. 4). Точки A, A' и A'' располагаются на одной прямой, перпендикулярной осям. Обозначим через L и M точки пересечения прямой AA'' с прямыми k и m.

В силу свойства осевой симметрии имеем:

$$\overline{AL}=\overline{LA'},\ \overline{A'M}=\overline{MA''}.$$

Следовательно,

$$\overline{AA''}=\overline{AL}+\overline{LA'}+\overline{A'M}+\overline{MA''}=2(\overline{LA'}+\overline{A'M})=2\overline{LM}.$$

Итак, $\overline{AA''}=2\overline{LM}$. В результате мы получили преобразование плоскости, называемое параллельным переносом.

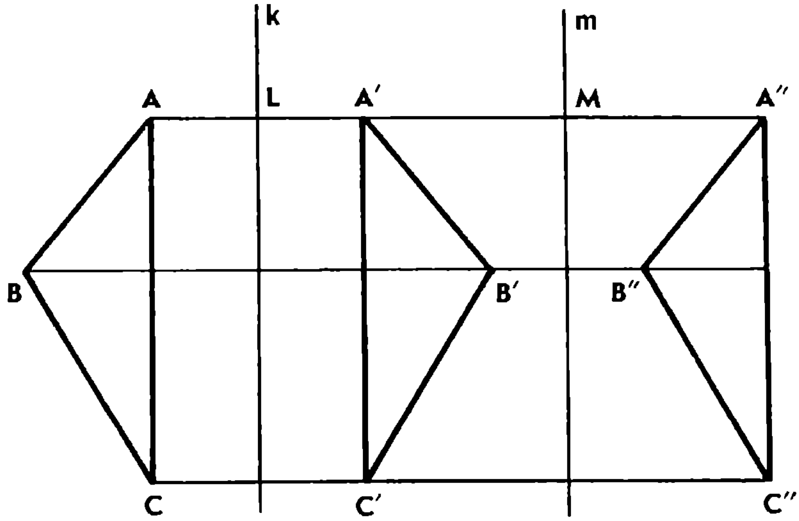


Рис. 4

Параллельный перенос на вектор $\overline{a}$ — это преобразование плоскости, при котором произвольная точка A переходит в такую точку A', что $\overline{AA'}=\overline{a}$.

Таким образом, *композиция двух осевых симметрий с параллельными осями k и m есть параллельный перенос на удвоенный вектор $\overline{LM}$.*

Обратно, всякий параллельный перенос можно представить в виде композиции двух осевых симметрий с параллельными осями, перпендикулярными направлению переноса. Отсюда следует, что *параллельный перенос есть движение, не меняющее ориентацию треугольников.*

Тождественное преобразование можно считать переносом на нулевой вектор. Параллельный перенос на ненулевой вектор не имеет неподвижных точек.

При параллельном переносе каждый луч переходит в сонаправленный с ним луч.

Если при параллельном переносе точки A и B переходят в точки A' и B' и эти четыре точки не лежат на одной прямой, то $ABB'A'$ — параллелограмм. Это свойство используется при решении задач.

Метод параллельного переноса часто применяется для решения задач на построение четырехугольников. При этом обычно переносят один или несколько отрезков так, чтобы получился треугольник, с которого можно начать построение. Аналогично поступают при решении задач на доказательство и вычисление: с помощью параллельного переноса образуют новую фигуру, содержащую достаточное количество известных элементов.

Покажем это на следующем примере.

Пример 3. Основания трапеции равны 4 см и 9 см, а диагонали равны 5 см и 12 см. Найти площадь трапеции и угол между ее диагоналями.

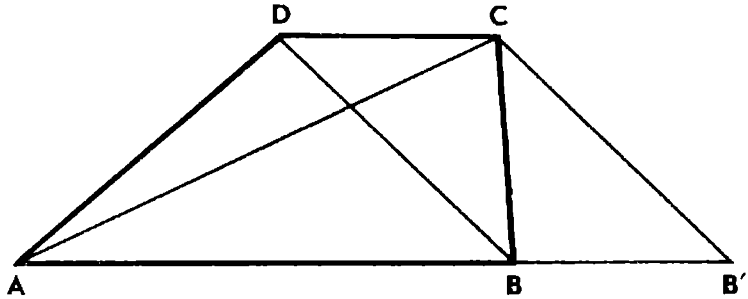


Рис. 5

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $CD=4$ см, $AB=9$ см, $BD=5$ см и $AC=12$ см (рис. 5). Чтобы известные элементы включить в один треугольник, перенесем диагональ BD на вектор $\overline{DC}$ в положение CB'. Рассмотрим треугольник ACB'. Так как $BB'CD$ — параллелограмм, то $B'C=BD=5$ см, $AB'=AB+BB'=AB+CD=13$ см.

Теперь известны все три стороны треугольника $AB'C$, значит, можно найти его высоту, а затем и площадь трапеции.

Если же заметить, что площадь трапеции как раз и равна площади треугольника $AB'C$ (треугольники $BB'C$ и ACD равновелики), то решение задачи можно еще упростить.

Так как $5^2+12^2=13^2$, то треугольник $AB'C$ прямоугольный. Найдем его площадь: $S=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 5=30$ см^2.

Итак, площадь трапеции равна 30 см^2. Угол между диагоналями трапеции равен углу ACB', значит, диагонали перпендикулярны.

Аналогично решается задача на построение трапеции по основаниям и диагоналям: сначала строится вспомогательный треугольник, две стороны которого равны диагоналям, а третья — сумме оснований.

Заметим, что для вычисления площади трапеции и угла между диагоналями условие задачи можно было бы ослабить: вместо оснований трапеции задать только их сумму.

Рассмотрим решение еще одной задачи.

Пример 4. Дан четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны и каждая из них имеет длину d. Какое наименьшее значение может иметь периметр этого четырехугольника?

Решение. Применим параллельный перенос на вектор $\overline{AC}$: построим точки E и F так, чтобы $\overline{DE}=\overline{BF}=\overline{AC}$ (рис. 6). Получим параллелограмм $BDEF$, стороны кото-

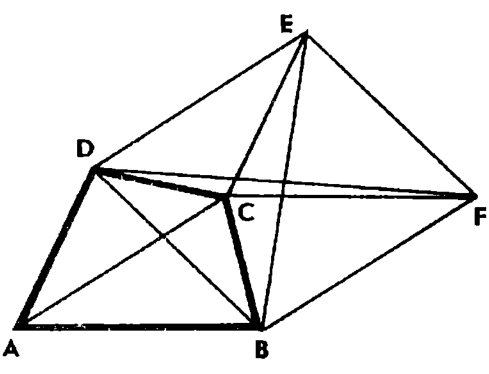


Рис. 6

рого равны диагоналям четырехугольника $ABCD$, а угол DBF равен углу между диагоналями. А так как диагонали AC и BD равны и перпендикулярны, то $BDEF$ — квадрат. Отрезки, соединяющие точку C с вершинами квадрата $BDEF$, равны сторонам четырехугольника $ABCD$ ($CE=AD$, $CF=AB$ согласно свойству параллельного переноса).

Поскольку $CB+CE \geqslant BE$ и $CD+CF \geqslant DF$, а $BE=DF=$ $=d\sqrt{2}$, то сумма расстояний от точки C до вершин квадрата не больше $2d\sqrt{2}$. Наименьшее значение периметра четырехугольника $ABCD$ равно $2d\sqrt{2}$. Оно достигается тогда и только тогда, когда C — точка пересечения диагоналей квадрата $BDEF$, т. е. при условии, что $ABCD$ — квадрат.

Построение вспомогательного параллелограмма $BDEF$ путем параллельного переноса вершин B и D исходного четырехугольника на вектор $\overline{AC}$ применяется при решении и некоторых других задач. Обратим внимание на ряд интересных свойств этого параллелограмма: его стороны и угол равны диагоналям и углу между ними четырехугольника $ABCD$, а отрезки, соединяющие вершину C с вершинами параллелограмма, равны сторонам данного четырехугольника $ABCD$, площадь же вдвое больше.

Задачи

12. Основания трапеции равны 1 и 3. Углы при большем основании равны 30° и 60°. Найдите длины боковых сторон трапеции.

13. Основания трапеции равны 2 и 7, боковые стороны равны 3 и 4. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

14. Диагонали трапеции равны 13 см и 20 см, а сумма длин оснований равна 21 см. Вычислите площадь трапеции.

15. Диагонали трапеции равны 15 см и 20 см, высота равна 12 см. Вычислите площадь трапеции.

16. Диагонали трапеции равны 13 см и 15 см, средняя линия равна 7 см. Найдите высоту трапеции.

17. Диагонали трапеции с основаниями a и b взаимно перпендикулярны. Какие значения может принимать высота h трапеции?

18. Докажите, что если диагонали трапеции равны, то она равнобочная.

▲ ▼ ▲

19. Дан параллелограмм $ABCD$ и внутри его точка M. Докажите, что отрезки MA, MB, MC и MD могут служить сторонами четырехугольника, вписанного в параллелограмм $ABCD$.

20. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана некоторая точка P и через нее проведены прямые параллельно сторонам параллелограмма, одна из которых пересекает противоположные стороны параллелограмма в точках K и M, а другая — в точках L и N. Как следует выбрать точку P, чтобы периметр четырехугольника $KLMN$ был наименьшим?

21. В данный четырехугольник впишите параллелограмм $ABCD$ при условии, что его вершины A и B фиксированы и принадлежат смежным сторонам четырехугольника. Рассмотрите частный случай, когда точки A и B делят смежные стороны в одном и том же отношении, считая от их общей вершины.

§ 3. ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Симметрия с центром О — это преобразование плоскости, при котором точка O неподвижна, а любая другая точка A переходит в такую точку A', что O — середина отрезка AA'.

Преобразование, обратное центральной симметрии, есть та же центральная симметрия.

Центральная симметрия переводит прямую, проходящую через центр, в себя; прямую, не проходящую через центр, в параллельную ей прямую; каждый луч в противоположно направленный с ним луч.

Если при центральной симметрии точки A и B переходят в точки A' и B' и центр O не лежит на прямой AB, то $ABA'B'$ — параллелограмм (рис. 7).

Центральная симметрия, как и параллельный перенос, обычно применяется с целью более удобно расположить данные и искомые элементы фигуры и таким образом найти связь между ними.

Пример 5. Доказать, что медиана треугольника меньше полусуммы заключающих ее сторон.

Решение. Пусть CM — медиана треугольника ABC (рис. 8). Построим точку D, симметричную C относительно точки M. Так как M — середина отрезка AB, то отрезок AD симметричен отрезку BC. Мы получили треугольник ACD, в котором $CD=2CM$, $AD=BC$.

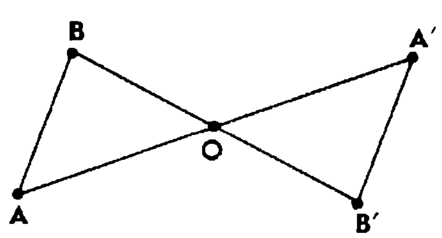


Рис. 7

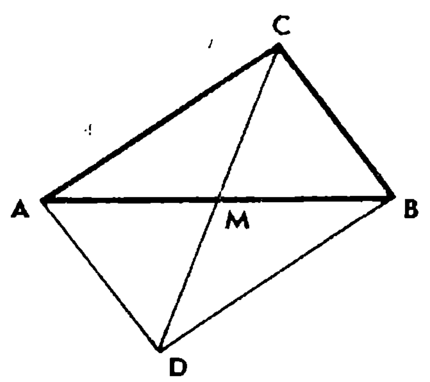


Рис. 8

Следовательно, $2CM < AC + BC$, или $m_c < \frac{a+b}{2}$, где $m_c = CM$, $a = BC$ и $b = AC$.

С помощью такого же приема решается задача на построение треугольника ABC по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне, и некоторые другие задачи, в которых речь идет о медиане треугольника. Заметим, что $ACBD$ — параллелограмм, поэтому указанный прием часто называют достраиванием треугольника до параллелограмма.

Центральная симметрия обычно помогает решить задачу, когда фигура или часть фигуры имеет центр симметрии.

Пример 6. В данный четырехугольник вписать параллелограмм при условии, что две его вершины фиксированы и принадлежат противоположным сторонам четырехугольника.

Решение. Пусть параллелограмм $ABCD$ вписан в данный четырехугольник $KLMN$ (рис. 9). Вершины A и C зафиксированы на сторонах KN и LM. Требуется построить вершины B и D.

Точки B и D симметричны относительно середины O отрезка AC. Точка D лежит на прямой MN, значит, точка B должна лежать на прямой $M'N'$, симметричной MN относительно точки O, и в то же время на стороне KL данного четырехугольника.

Отсюда вытекает следующее построение. Строим точку O — середину отрезка AC и прямую $M'N'$, симметричную MN относительно точки O. Тогда точка пересечения $M'N'$ и стороны KL данного четырехугольника $KLMN$ есть искомая вершина B параллелограмма, а прямая OB пересечет прямую MN в точке D.

Так как $AO = OC$ и $BO = OD$, то $ABCD$ — искомый параллелограмм.

Будем считать, что вершины B и D могут лежать как на сторонах KL и MN четырехугольника, так и на их продолжениях. Тогда задача имеет единственное решение, если прямые KL и MN пересекаются. Легко также убедиться, что если $KLMN$ — трапеция с основаниями KL и MN и середина O отрезка AB одинаково отстоит от оснований, то задача имеет бесконечное множество решений. Если же точка O неодинаково отстоит от прямых KL и MN, то решений нет.

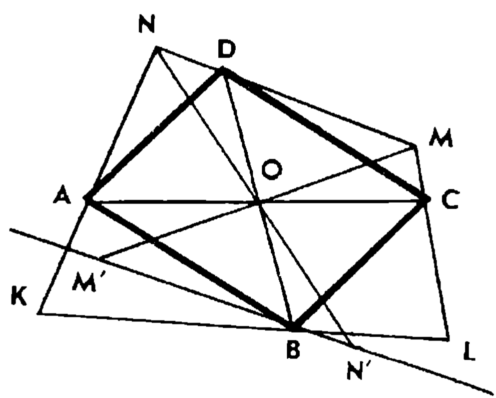


Рис. 9

Задачи

22. Вычислите площадь треугольника ABC, если стороны AC и BC равны соответственно 11 см и 13 см, а медиана CD равна 10 см.

23. Найдите высоту CH треугольника ABC, если $AC = 6$, $BC = 8$ и $CD = 5$, где CD — медиана треугольника ABC.

24. В треугольнике ABC проведена медиана CD. Какой из углов ACD и BCD больше, если $AC < BC$?

25. В треугольнике ABC проведена медиана CD. Найдите стороны AC и BC треугольника, если $\angle ACD = 90°$, $\angle BCD = 30°$ и $CD = \sqrt{3}$.

▲ ▼ ▲

26. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны, а диагональ BD делится другой диагональю пополам. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

27. В параллелограмм вписан другой параллелограмм. Докажите, что их центры совпадают.

28. На двух противоположных сторонах параллелограмма даны точки K и M. Внутри параллелограмма найдите геометрическое место точек L, таких, что площадь параллелограмма делится ломаной KLM пополам.

▲ ▼ ▲

29. Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую так, чтобы окружности высекали на этой прямой равные хорды.

30. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ параллельны и равны. Какую часть площади шестиугольника составляет площадь треугольника ACE?

31. Внутри треугольника ABC дана произвольная точка M. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, симметричные M относительно середин сторон BC, CA и AB, являются вершинами треугольника, симметричного данному.

32. Дан треугольник ABC. Точка M_1 симметрична точке M относительно точки A, точка M_2 симметрична M_1 относительно B, точка M_3 симметрична M_2 относительно C. Докажите, что положение середины D отрезка MM_3 не зависит от выбора точки M.

§ 4. ПОВОРОТ

Поворот вокруг точки O на угол α в заданном направлении — это преобразование плоскости, при котором точка O остается неподвижной, а любая другая точка A переходит в такую точку A', что $OA' = OA$ и угол AOA', отсчитываемый от луча OA в заданном направлении, равен α.

Поворот на 360° возвращает все точки плоскости в исходное положение, поэтому $R_O^{360°+\alpha} = R_O^{\alpha}$ и углы поворота можно задавать с точностью до 360°. В дальнейшем будем считать, что $0° \leqslant \alpha < 360°$ и поворот всегда осуществляется в направлении против часовой стрелки.

*Композиция двух осевых симметрий с осями, пересекающимися в точке **O**, есть поворот вокруг точки **O** на удвоенный угол* *между осями* (рис. 10). Если $S_k(A)=$ $=A'$ и $S_m(A')=A''$, то $OA''=OA'=$ $=OA$ и $\angle AOA''=2\angle LOM$ (точки L и M принадлежат осям k и m).

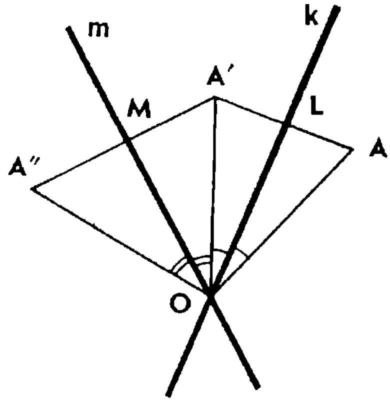


Рис. 10

Обратно, всякий поворот вокруг точки можно представить в виде композиции двух осевых симметрий, оси которых пересекаются в центре поворота. Следовательно, *поворот есть движение, не меняющее ориентацию треугольников.*

Чтобы построить образ прямой при повороте вокруг точки O на угол α $(0°<\alpha<180°)$, можно поступить так: провести к прямой k перпендикуляр OP, повернуть точку P на угол α и через полученную точку P' провести прямую k', перпендикулярную OP' (рис. 11). Легко убедиться, что угол между прямой k и ее образом k' равен α или $180°-\alpha$. Угол же между лучом и его образом всегда равен углу поворота.

Центральная симметрия есть поворот вокруг точки на 180°.

Поворот обычно применяется при решении задач, когда данной или искомой фигурой является правильный многоугольник. Иногда с помощью поворота удается доказать равенство отрезков, найти величину угла между прямыми.

Пример 7. На сторонах AC и BC произвольного треугольника ABC вне его построены квадраты ACA_1A_2 и BCB_1B_2. Доказать, что отрезки AB_1 и A_1B равны и перпендикулярны.

Решение. Применим поворот вокруг точки C на 90° (рис. 12). Треугольники A_1CA и BCB_1 равнобедренные прямоугольные, поэтому при таком повороте точка A_1 перейдет в точку A, точка B — в точку B_1, отрезок A_1B — в отрезок AB_1. Значит, эти отрезки равны и угол между ними равен углу поворота, т. е. 90°.

Примечание. Используя полученный результат, нетрудно доказать, что центры O и P квадратов и середины M и M_1 отрезков AB и A_1B_1 являются вершинами нового квадрата.

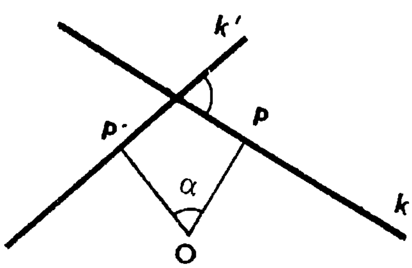


Рис. 11

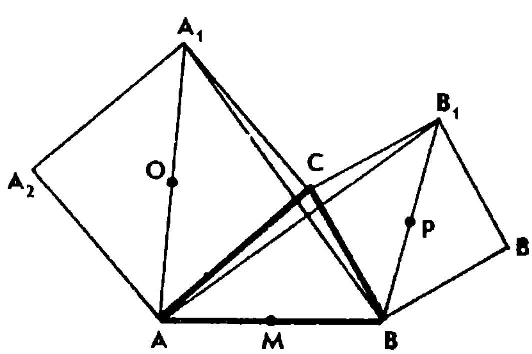


Рис. 12

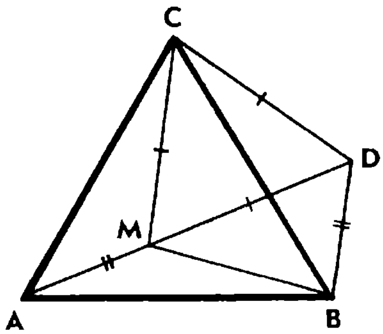


Рис. 13

Пример 8. Внутри равностороннего треугольника ABC дана точка M, такая, что $AM=1$, $BM=\sqrt{3}$ и $CM=2$. Найти AB, $\angle AMB$ и $\angle BMC$.

Решение. Для определенности будем считать, что треугольник ABC ориентирован положительно (рис. 13). Повернем треугольник ACM вокруг точки C на $60°$. Тогда точка A перейдет в точку B, точка M — в некоторую точку D, треугольник ACM — в треугольник BCD. При этом $CD=CM$ и $\angle MCD=60°$, следовательно, треугольник CDM равносторонний.

С помощью поворота получен вспомогательный треугольник BDM. Заметим, что $BD=AM=1$, $BM=\sqrt{3}$, $DM=CM=2$. Значит, треугольник BDM прямоугольный, $\angle DBM=90°$ и $\angle BMD=30°$.

Далее вычислим интересующие нас углы: $\angle BMC=30°+$ $+60°=90°$, $\angle AMC=\angle BDC=60°+60°=120°$, $\angle AMB=150°$.

Применив теорему Пифагора к треугольнику BCM, найдем, что $BC=AB=\sqrt{7}$.

Таким образом, применив поворот, нам удалось по-новому расположить элементы исходной фигуры и найти связь между данными и неизвестными элементами.

Аналогично решаются и некоторые другие задачи о равностороннем треугольнике, а также и более сложные задачи, в которых задан прямоугольный равнобедренный треугольник.

Задачи

33. На прямой взяты последовательно три точки A, B, C и по одну сторону от прямой построены равносторонние треугольники ABD и BCE. Точки M и N — середины отрезков AE и CD. Докажите, что треугольник BMN равносторонний.

34. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ACB_1 и BCA_1. Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 равны. Найдите величину угла между прямыми AA_1 и BB_1.

35. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ с центром O. Точки M и N — середины сторон CD и DE. Прямые AM и BN пересекаются в точке P. Докажите, что: а) треугольник ABP и четырехугольник $DMPN$ имеют равные площади; б) $\angle APO=$ $=\angle OPN=60°$.

36. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точка K — середина диагонали BD, точка M — середина стороны EF. Докажите, что треугольник AKM равносторонний.

▲ ▼ ▲

37. Внутри равностороннего треугольника ABC дана точка M. Известно, что $AM=1$, $BM=\sqrt{2}$ и $\angle AMB=105°$. Найдите CM и $\angle BMC$.

38. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC. На дуге AB взята произвольная точка M. Докажите, что $MA+MB=MC$.

39. Внутри равностороннего треугольника ABC дана произвольная точка M. Докажите, что длина большего из отрезков MA, MB, MC меньше суммы длин двух других.

40. Дан ромб $ABCD$, угол A которого равен $120°$. Внутри ромба взята точка M, такая, что $AM=1$, $CM=2$ и $BM=3$. Найдите DM и AB.

41. Дан равносторонний треугольник ABC. Внутри угла ACB взята точка M, такая, что $AM=\sqrt{2}$, $BM=2$, $\angle AMC=15°$. Найдите CM и $\angle BMC$.

42. Дан равносторонний треугольник ABC. Внутри угла ACB взята точка M. Найдите $\angle ACM$, если $\angle AMC=20°$ и $\angle BMC=30°$.

▲ ▼ ▲

43. Внутри равнобедренного треугольника ABC с прямым углом C взята точка M, такая, что $AM=2$, $BM=\sqrt{2}$ и $CM=1$. Найдите AC, $\angle BMC$ и $\angle CMA$.

44. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC ($\angle C=90°$). Внутри его взята точка M, такая, что $AM=2$, $\angle AMB=120°$, $\angle AMC=105°$. Найдите BM и CM.

45. Дан равнобедренный треугольник ABC с прямым углом C. Вне его взята точка M, такая, что $BM=CM$ и $\angle AMC=75°$. Докажите, что $AC=CM$ и $\angle BMC=60°$.

46. Внутри квадрата $ABCD$ дана точка M, такая, что $CM=1$, $DM=\sqrt{2}$, $\angle CMD=105°$. Найдите AM, AC и $\angle AMD$.

▲ ▼ ▲

47. Дан квадрат $ABCD$. На его сторонах BC и CD взяты соответственно точки M и N так, что $\angle MAN=45°$, и проведена высота AH треугольника AMN. Докажите, что $AH=AB$.

48. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и N. Найдите угол MAN, если площадь треугольника AMN равна сумме площадей треугольников ABM и ADN.

▲ ▼ ▲

49. На сторонах AC и BC произвольного треугольника ABC вне его построены квадраты ACA_1A_2 и BCB_1B_2. Докажите, что медиана CM треугольника ABC перпендикулярна отрезку A_1B_1 и равна его половине.

50. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены квадраты ACA_1A_2 и BCB_1B_2. Докажите, что прямые A_2B, AB_2 и CH, где CH — высота треугольника ABC, пересекаются в одной точке.

51. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC вне его построены квадраты с центрами соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что: а) отрезки CC_1 и A_1B_1 равны и перпендикулярны; б) прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

52. На сторонах произвольного четырехугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры квадратов, построенных на противоположных сторонах четырехугольника, равны и перпендикулярны.

§ 5. КОМПОЗИЦИЯ ДВИЖЕНИЙ

Композиция двух преобразований есть преобразование, которое получится, если сначала выполнить первое преобразование, а потом второе. Композиция преобразований f и g обозначается так: $g \circ f$, при этом сначала выполняется преобразование f, а затем g. Такой порядок записи оправдывается тем, что согласно определению

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)).$$

Композиция любых преобразований обладает рядом свойств, похожих на свойства умножения чисел. Композиция преобразований ассоциативна: для любых преобразований f, g, h выполняется равенство

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Тождественное преобразование в композиции играет ту же роль, какую единица играет при умножении чисел: для любого преобразования f имеют место равенства

$$f \circ E = E \circ f = f.$$

Отметим, что не всегда $g \circ f = f \circ g$, в чем легко убедиться на конкретном примере (рассмотрите композицию двух центральных симметрий $Z_B \circ Z_A$ относительно различных центров A и B).

Пусть F — движение плоскости, которое три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, переводит соответственно в точки A', B', C'. Тогда ABC и $A'B'C'$ — равные треугольники, но они могут быть ориентированы по-разному. Возможны два случая: 1) треугольник ABC и его образ $A'B'C'$ ориентированы одинаково; 2) эти треугольники ориентированы противоположно.

Движение плоскости, сохраняющее ориентацию треугольников, называют *движением первого рода*. Движение, изменяющее ориентацию треугольников на противоположную, называют *движением второго рода.* Параллельные переносы и повороты — движения первого рода. Примером движения второго рода может служить осевая симметрия.

Известно, что всякое движение плоскости можно представить в виде композиции не более трех осевых симметрий. Композиция двух осевых симметрий не меняет ориентацию треугольников и является движением первого рода. Осевая симметрия и композиция трех осевых симметрий — это движения второго рода.

На основании того, что сказано в предыдущих параграфах о композициях двух осевых симметрий, приходим к следующему выводу.

Теорема 1. **Всякое движение первого рода есть либо поворот, либо параллельный перенос, либо тождественное преобразование.**

Впрочем, тождественное преобразование можно рассматривать как перенос на нулевой вектор или как поворот $R_O^{0°}$.

Движения первого рода можно различать по числу неподвижных точек: при параллельном переносе на ненулевой вектор все точки меняют свое положение, т. е. неподвижных точек нет; при ненулевом повороте имеется только одна неподвижная точка — центр поворота. Тождественное преобразование оставляет все точки плоскости неподвижными.

Композиция движений первого рода сохраняет ориентацию треугольников и, следовательно, также является движением первого рода. Например, композиция двух поворотов R_O^α и R_O^β с общим центром O есть поворот $R_O^{\alpha+\beta}$ (тождественное преобразование, если $\alpha+\beta=360°$).

Рассмотрим композицию двух поворотов с различными центрами.

Теорема 2. **Композиция двух поворотов R_A^α и R_B^β, где $0°<\alpha<360°$ и $0°<\beta<360°$, есть поворот вокруг некоторой точки на угол $\alpha+\beta$, если $\alpha+\beta\neq 360°$, и параллельный перенос на ненулевой вектор, если $\alpha+\beta=360°$.**

Доказательство. Представим каждый поворот в виде композиции двух осевых симметрий:

$$R_A^\alpha=S_m\circ S_l,\quad R_B^\beta=S_n\circ S_m,$$

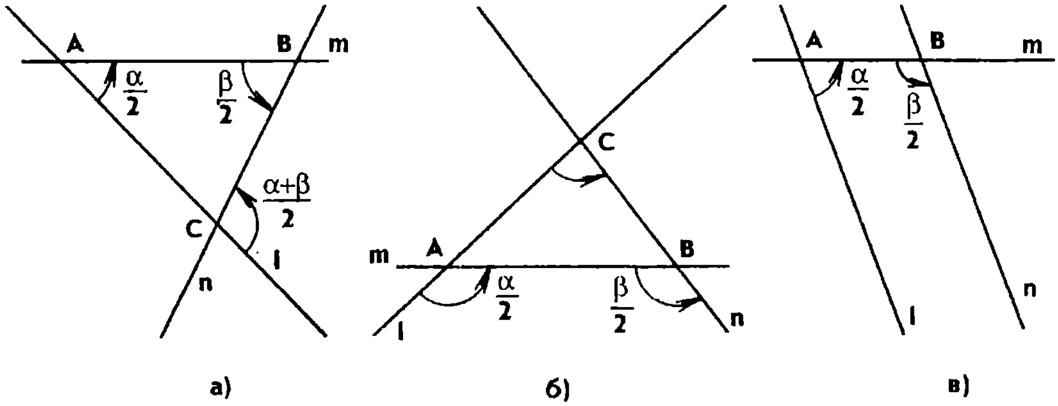
где m — прямая AB, $\angle l, m=\frac{\alpha}{2}$, $\angle m, n=\frac{\beta}{2}$ (рис. 14). Получим:

$$R_B^\beta\circ R_A^\alpha=S_n\circ S_m\circ S_m\circ S_l=S_n\circ E\circ S_l=S_n\circ S_l.$$

Здесь мы воспользовались свойством ассоциативности и тем, что $S_m\circ S_m=E$.

Итак, $R_B^\beta\circ R_A^\alpha=S_n\circ S_l$.

Если $\alpha+\beta<360°$, то прямые l и n пересекаются в некоторой



а) б) в)

Рис. 14

точке C (рис. 14, *а*). Получим отрицательно ориентированный треугольник ABC, в котором $\angle A=\frac{\alpha}{2}$, $\angle B=\frac{\beta}{2}$, и по свойству внешнего угла треугольника $\angle l, n=\frac{\alpha+\beta}{2}$. Следовательно, композиция симметрий $S_n \circ S_l$ есть поворот вокруг точки C на угол $\alpha+\beta$, т. е. $R_B^\beta \circ R_A^\alpha = R_C^{\alpha+\beta}$.

Если $\alpha+\beta>360°$, то прямые l и n тоже пересекаются, но по другую сторону от прямой AB (рис. 14, *б*). Получим положительно ориентированный треугольник ABC, причем $\angle A=180°-\frac{\alpha}{2}$, $\angle B=180°-\frac{\beta}{2}$ и $\angle l, n=\frac{\alpha+\beta}{2}-180°$. Следовательно, и в этом случае $R_B^\beta \circ R_A^\alpha = R_C^{\alpha+\beta-360°}=R_C^{\alpha+\beta}$.

Если же $\alpha+\beta=360°$, то прямые l и n параллельны и композиция симметрий есть параллельный перенос на удвоенное расстояние между осями l и n (рис. 14, *в*).

Из приведенного доказательства вытекает простой способ построения центра результирующего поворота. Кроме того, получаем важное следствие:

Композиция поворотов $R_B^\beta \circ R_A^\alpha$ есть тождественное преобразование тогда и только тогда, когда центры поворотов совпадают и $\alpha+\beta=360°$.

Что касается композиции трех поворотов, то она может быть тождественным преобразованием и в том случае, когда центры поворотов различны. Если $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ — величины внутренних углов отрицательно ориентированного треугольника ABC, то

$$R_C^\gamma \circ R_B^\beta \circ R_A^\alpha = R_C^\gamma \circ R_C^{\alpha+\beta} = R_C^{\alpha+\beta+\gamma} = R_C^{360°} = E.$$

Верно и обратное предложение.

Теорема 3. **Если композиция трех поворотов R_A^α, R_B^β и R_C^γ относительно различных центров есть тождественное преобразование и $\alpha+\beta+\gamma=360°$, то ABC — отрицательно ориентирован-**

ный треугольник, углы которого равны: $\angle A=\frac{\alpha}{2}$, $\angle B=\frac{\beta}{2}$, $\angle C=\frac{\gamma}{2}$.

Доказательство. В силу теоремы о двух поворотах, учитывая, что $\alpha+\beta<360°$, имеем:

$$R_B^\beta \circ R_A^\alpha = R_D^{\alpha+\beta},$$

где D — вершина отрицательно ориентированного треугольника ABD, углы которого равны: $\angle A=\frac{\alpha}{2}$, $\angle B=\frac{\beta}{2}$. Согласно условию теоремы $R_C^\gamma \circ R_D^{\alpha+\beta}=E$ и $\alpha+\beta+\gamma=360°$, что возможно тогда и только тогда, когда центры поворотов C и D совпадают. Значит, ABC — отрицательно ориентированный треугольник, углы которого соответственно равны $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$.

Поскольку значения углов поворота α, β, γ заключены между $0°$ и $360°$, то композиция $R_C^\gamma \circ R_B^\beta \circ R_A^\alpha$ может быть тождественным преобразованием еще при $\alpha+\beta+\gamma=720°$. Но при решении задач этот случай легко сводится к предыдущему: если центры поворотов взять в обратном порядке, то $R_A^{\alpha'} \circ R_B^{\beta'} \circ R_C^{\gamma'}=E$, где $\alpha'=360°-\alpha$, $\beta'=360°-\beta$, $\gamma'=360°-\gamma$, и, следовательно, $\alpha'+\beta'+\gamma'=360°$.

Применим свойства композиции поворотов к решению задач.

Пример 9. На сторонах AC и BC произвольного треугольника ABC вне его построены квадраты с центрами O и P. Точка M — середина стороны AB. Найти углы треугольника MOP.

Решение. Для определенности, как и во всех последующих задачах, будем считать, что исходный треугольник ABC ориентирован положительно (рис. 15). Композиция $F=R_M^{180°} \circ R_P^{90°} \circ R_O^{90°}$ переводит точку A в точку C, точку C в B, затем точку B снова в A, т. е. $F(A)=A$. Сумма углов поворота равна $360°$. Значит, F — параллельный перенос с неподвижной точкой, т. е. тождественное преобразование. Согласно теореме 3 углы треугольника OPM равны соответственно $45°$, $45°$, $90°$.

Эту задачу можно решить также с использованием теорем элементарной геометрии и одного поворота (см. пример 7). Приведенное решение более эффективно, а способ решения применим и к другим подобным задачам.

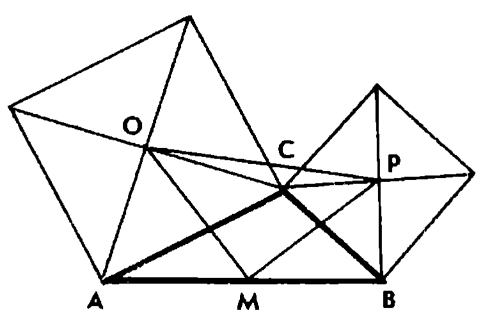


Рис. 15

Пример 10. На сторонах треугольника ABC построены равносторонние треугольники BCK, CAL и ABM, лежащие вне треугольника ABC. Требуется восстановить треугольник ABC, зная лишь положение точек K, L, M.

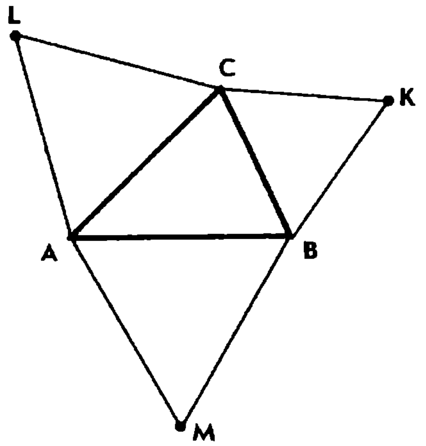


Рис. 16

Решение. Выполним последовательно повороты $R_L^{60°}$, $R_K^{60°}$, $R_M^{60°}$ (рис. 16). Композиция F этих поворотов переводит точку A в точку C, C в B, затем B в A. Значит, A — неподвижная точка композиции F. Согласно теореме 2 композиция F есть поворот на 180°, а точка A — центр этого поворота. Таким образом, $R_M^{60°} \circ R_K^{60°} \circ R_L^{60°} = R_A^{180°}$ и задача свелась к построению центра результирующего поворота.

Пользуясь результатом теоремы 2, построение можно выполнить так. Сначала построить точку D, такую, что $R_K^{60°} \circ R_L^{60°} = R_D^{120°}$, затем точку A — центр поворота $R_M^{60°} \circ R_D^{120°}$. Вершины B и C искомого треугольника легко построить, учитывая, что $R_L^{60°}(A) = C$ и $R_K^{60°}(C) = B$.

Построение точки A можно выполнить и по-другому, не пользуясь теоремой о двух поворотах, и даже немного проще, если построить образ точки L в композиции F.

Имеем $R_L^{60°}(L) = L$. Строим точки N и L', такие, что $R_K^{60°}(L) = N$, $R_M^{60°}(N) = L'$. А так как $F = R_A^{180°}$ и $F(L) = L'$, то A — середина отрезка LL'.

Решенная задача является частным случаем следующей задачи.

На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC как на основаниях построены равнобедренные треугольники, лежащие вне треугольника ABC. Заданы вершины K, L, M этих треугольников и величины α, β, γ углов при этих вершинах, причем $\alpha + \beta + \gamma \neq 360°$. Требуется восстановить треугольник ABC.

Так же как при решении предыдущей задачи, заметим, что композиция поворотов R_L^{β}, R_K^{α} и R_M^{γ} переводит точку A в себя. Поэтому вершина A является центром результирующего поворота.

Если $\alpha + \beta + \gamma = 360°$, то $R_M^{\gamma} \circ R_K^{\alpha} \circ R_L^{\beta}$ — тождественное преобразование и задача имеет бесконечно много решений.

Задачи

53. На сторонах произвольного треугольника вне его построены равносторонние треугольники. Докажите, что центры этих треугольников являются вершинами равностороннего треугольника.

54. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ACP и BCN. Точка O — центр треугольника ACP, точка M — середина стороны AB. Найдите углы треугольника MON.

55. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены квадраты ACA_1A_2 и BCB_1B_2. Точка M — середина отрезка A_2B_2. Докажите, что $AM=BM$ и $\angle AMB=90°$.

56. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены треугольники BCA_1, CAB_1, ABC_1, углы которых при вершинах A_1, B_1 и C_1 равны соответственно 40°, 40° и 100°. Найдите углы треугольника с вершинами в центрах окружностей, описанных около треугольников BCA_1, CAB_1 и ABC_1.

▲ ▼ ▲

57. На сторонах AC и BC произвольного треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ACM и BCN, а на стороне AB — равнобедренный треугольник ABP, такой, что $\angle APB=120°$ и точки C и P лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите углы треугольника MNP.

▲ ▼ ▲

58. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ACM и BCN. Восстановите треугольник ABC, если заданы вершины M и N этих треугольников и середина K стороны AB.

59. Постройте треугольник ABC, если на плоскости заданы лишь центры квадратов, построенных вне треугольника на его сторонах.

60. Докажите, что существует бесконечное множество четырехугольников, середины сторон которых совпадают с вершинами данного параллелограмма.

61. Постройте пятиугольник по заданным серединам его сторон.

§ 6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ. ПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ

Подобие — это преобразование плоскости, при котором для любых двух точек A и B и их образов A' и B' выполняется равенство $A'B'=k\cdot AB$, где k — данное положительное число, называемое *коэффициентом подобия.* Если $k=1$, то подобие является движением.

Преобразование подобия с коэффициентом k обратимо: обратное преобразование есть подобие с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

Фигура Φ' называется подобной фигуре Φ, если существует преобразование подобия, которое переводит фигуру Φ в фигуру Φ'. Для треугольников имеются известные признаки подобия. В случае многоугольников пользуются следующим признаком: два многоугольника с одинаковым числом сторон подобны, если стороны одного пропорциональны сторонам другого, а углы между пропорциональными сторонами равны.

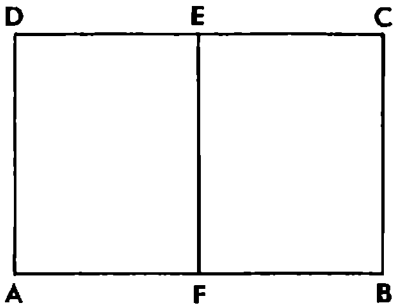


Рис. 17

Пример 11. Прямоугольный лист бумаги сложили пополам. При каком условии лист и его половина имеют одинаковую форму?

Решение. Пусть EF — средняя линия прямоугольника $ABCD$, параллельная меньшей его стороне BC (рис. 17). Нужно выяснить, при каком отношении сторон AB и AD прямоугольники $ABCD$ и $ADEF$ подобны.

Все углы прямоугольника прямые, поэтому достаточно потребовать, чтобы $\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{DE}$, или $\frac{AB}{AD}=\frac{2AD}{AB}$, так как $DE=\frac{1}{2}AB$. Отсюда получаем, что $\frac{AB}{AD}=\sqrt{2}$. (Именно таково отношение длин сторон листов бумаги для пишущих машинок форматом $297\times$ $\times 210$ мм; $\frac{297}{210}\approx\sqrt{2}$.)

Подобные треугольники дают ключ к решению многих геометрических задач. Поэтому важно научиться отыскивать подобные треугольники или образовывать их с помощью дополнительных построений. Например, если AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC и H — точка их пересечения, то треугольники AA_1C, BB_1C, AB_1H и BA_1H подобны: острый угол одного из них равен острому углу другого.

Задачи

62. Докажите, что отрезок, соединяющий основания высот остроугольного треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.

63. В треугольнике ABC угол C равен 60°, $AB=c$. Найдите длину отрезка A_1B_1, соединяющего основания высот AA_1 и BB_1 треугольника ABC.

64. Из вершины A параллелограмма $ABCD$ проведены высоты AM и AN к сторонам BC и CD. Докажите, что треугольники MAN и ABC подобны. Найдите MN, если $AC=d$ и $\angle ABC=\beta$.

65. Из основания H высоты CH треугольника ABC проведены к его сторонам AC и BC перпендикуляры HM и HN. Докажите, что треугольники MNC и ABC подобны.

66. Докажите, что если CC_1 — высота треугольника ABC и H — точка пересечения его высот, то имеет место равенство $CC_1\cdot HC_1=AC_1\cdot BC_1$.

▲ ▼ ▲

67. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Докажите, что $AM\cdot MB=CM\cdot MD$.

68. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены две секущие, которые пересекают окружность в точках A и B, C и D. Докажите, что $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

69. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены к ней секущая, пересекающая окружность в точках A и B, и касательная с точкой касания C. Докажите, что $MC^2 = MA \cdot MB$.

▲ ▼ ▲

70. Дан равносторонний треугольник ABC. Точка O — середина стороны AB. На сторонах BC и AC взяты точки M и N, такие, что $\angle MON = 60°$. Докажите, что треугольники AON, BOM и MON подобны.

71. В равнобедренный треугольник ABC вписана полуокружность, центр O которой принадлежит основанию AB треугольника. Произвольная касательная к полуокружности пересекает стороны BC и AC соответственно в точках M и N. Докажите, что треугольники AON, BOM и MON подобны.

▲ ▼ ▲

72. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка O и через нее проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник ABC на шесть частей, три из которых являются треугольниками. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны r_1, r_2, r_3. Радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен r. Докажите, что $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

73. В треугольник вписана окружность радиуса r. Параллельно сторонам треугольника к окружности проведены касательные и в образовавшиеся малые треугольники вписаны окружности радиусов r_1, r_2, r_3. Докажите, что $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

74. Через некоторую точку внутри треугольника проведены три прямые, соответственно параллельные его сторонам. Эти прямые образуют со сторонами треугольника три треугольника, площади которых равны S_1, S_2, S_3. Найдите площадь данного треугольника.

▲ ▼ ▲

75. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AB. Окружность, проходящая через вершины A, D и C, касается прямой BC. Найдите AC, если $AB = a$ и $CD = b$.

76. Дана трапеция $ABCD$ (AB и CD — основания), в которой $AD = CD = 1$, $AB = 3$, $\angle A = 2 \angle B$. Найдите BC и $\angle ABC$.

▲ ▼ ▲

77. Дан прямоугольник $ABCD$. Постройте на его стороне CD точку M, такую, чтобы треугольники ABM, BCM и ADM были подобны.

78. Данный прямоугольник $ABCD$ разделите прямой, параллельной стороне BC, на два подобных прямоугольника.

79. Данную трапецию разделите прямой, параллельной основаниям, на две подобные трапеции.

▲ ▼ ▲

80. На прямой даны последовательно три точки A, B и C. Найдите множество точек M плоскости, для которых $\angle ABM = \angle AMC$.

§ 7. ГОМОТЕТИЯ И ЦЕНТРАЛЬНО-ПОДОБНЫЙ ПОВОРОТ

Гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости, при котором образом произвольной точки A является такая точка A', что $\overline{OA'} = k \cdot \overline{OA}$.

Гомотетию с центром O и коэффициентом k обозначают H_O^k.

Единственная неподвижная точка гомотетии (при $k \neq 1$) — ее центр. Если $k > 0$, то точки A и A' лежат на прямой OA по одну сторону от центра гомотетии; если $k < 0$, то по разные стороны. При $k = -1$ гомотетия есть центральная симметрия.

Пусть A' и B' — образы точек A и B при гомотетии с центром O и коэффициентом k. Тогда $\overline{OA'} = k\overline{OA}$ и $\overline{OB'} = k\overline{OB}$. Следовательно,

$$\overline{A'B'} = \overline{OB'} - \overline{OA'} = k(\overline{OB} - \overline{OA}) = k\overline{AB}.$$

Итак, $\overline{A'B'} = k\overline{AB}$. Из этого равенства вытекают важнейшие свойства гомотетии. По определению произведения вектора на число имеем $A'B' = |k| \cdot AB$. Следовательно, гомотетия с коэффициентом k есть подобие с коэффициентом $|k|$.

Гомотетия с положительным коэффициентом k переводит каждый луч в сонаправленный с ним луч и, значит, не меняет ориентацию треугольников. Гомотетия с отрицательным коэффициентом $-k$ может быть представлена в виде композиции гомотетии с положительным коэффициентом k и поворота на 180° вокруг центра: $H_O^{-k} = R_O^{180°} \circ H_O^k$. При этом каждый луч переходит в противоположно направленный с ним луч, но ориентация треугольников не меняется.

Рассмотрим композицию гомотетии и поворота с общим центром. Пусть при гомотетии с коэффициентом k точка A переходит в точку A', а при повороте с тем же центром O на угол φ точка A' переходит в точку A'' (рис. 18). Их композиция переводит точку A в точку A''. Нетрудно проверить, что результат не изменится, если сначала выполнить поворот, а потом гомотетию. Композицию гомотетии с положительным коэффициентом и поворота вокруг их общего центра называют центрально-подобным поворотом и обозначают через $\Pi_O^{k,\,\varphi}$.

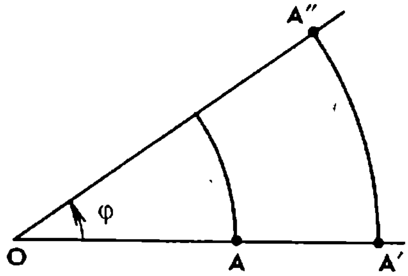


Рис. 18

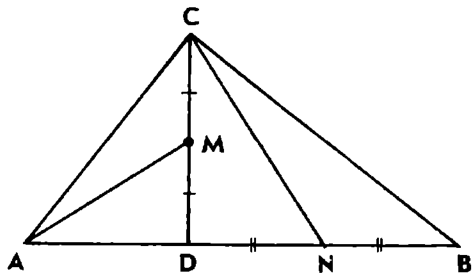


Рис. 19

При центрально-подобном повороте угол между лучом и его образом равен углу поворота. Это следует из того, что при гомотетии с положительным коэффициентом луч переходит в сонаправленный с ним луч, а при повороте угол между лучом и его образом равен углу поворота.

Поворот и гомотетия сохраняют ориентацию треугольников, значит, и центрально-подобный поворот сохраняет ее. Гомотетию, центрально-подобный поворот, а также параллельный перенос называют преобразованиями подобия первого рода.

Пример 12. Дан прямоугольный треугольник ABC. Из вершины C прямого угла проведена высота CD. Точки M и N — середины отрезков CD и BD. Доказать, что отрезки AM и CN перпендикулярны.

Решение. Применим центрально-подобный поворот с центром D, коэффициентом $k=\frac{AC}{CB}$ и углом поворота $90°$ (рис. 19).

Так как $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}=k$, то при этом точка C перейдет в точку A, точка B — в точку C, середина N отрезка BD — в середину M отрезка CD, а отрезок CN — в отрезок AM. Значит, отрезки AM и CN перпендикулярны.

Можно еще заметить, что $\frac{AM}{CN}=\frac{AC}{CB}=\operatorname{tg} B$.

Для доказательства мы использовали свойства центрально-подобного поворота: *угол между любым лучом и его образом равен углу поворота, а отношение соответствующих отрезков AM и CN равно коэффициенту подобия.*

С помощью гомотетии решаются разнообразные задачи на построение, доказательство и вычисление. При этом чаще всего используются следующие свойства гомотетии:

центр гомотетии, точка и ее образ лежат на одной прямой;

прямая, не проходящая через центр гомотетии, и ее образ параллельны;

любые две окружности гомотетичны, причем если они касаются, то точка касания является их центром гомотетии.

Задачи

81. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции принадлежат одной прямой.

82. На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки M и N, такие, что $\frac{CN}{NA}=\frac{CM}{MB}=\frac{1}{2}$. Прямые AM и BN пересекаются в точке K. Докажите, что K — середина медианы CD треугольника ABC.

83. Докажите, что середины сторон треугольника являются вершинами треугольника, гомотетичного данному. Укажите центр и коэффициент гомотетии.

84. Докажите, что во всяком треугольнике центр O описанной окружности, центроид M* и ортоцентр H принадлежат одной прямой, причем $\overline{OH}=3\overline{OM}$ (прямая Эйлера).

▲ ▼ ▲

85. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка M. Найдите периметр треугольника с вершинами в центроидах треугольников ABM, BCM и ACM, если периметр треугольника ABC равен $2p$.

86. Даны четырехугольник и точка. Докажите, что точки, симметричные данной точке относительно середин сторон четырехугольника, являются вершинами параллелограмма.

87. Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что центроиды треугольников BCD, ACD, ABD и ABC являются вершинами четырехугольника, гомотетичного данному. Найдите центр и коэффициент гомотетии.

▲ ▼ ▲

88. В треугольник ABC вписан параллелограмм $CDEF$ так, что вершины D, E, F лежат соответственно на сторонах CA, AB и BC. Через середину M стороны AB проведена прямая CM, пересекающая прямую EF в точке K. Докажите, что $ADFK$ — параллелограмм.

89. В треугольник ABC вписан параллелограмм $CDEF$ так, что вершины D, E, F лежат соответственно на сторонах CA, AB и BC. Отрезки AF и DE пересекаются в точке P, а отрезки BD и EF — в точке Q. Докажите, что отрезки PQ и AB параллельны.

▲ ▼ ▲

90. Проведены два радиуса окружности. Постройте хорду так, чтобы она разделилась этими радиусами на три равные части.

91. С помощью одной линейки проведите прямую, параллельную основаниям данной трапеции, так, чтобы ее отрезок, заключенный в трапеции, делился диагоналями на три равные части.

---

* Центроидом называют точку пересечения медиан треугольника, ортоцентром — точку пересечения его высот.

▲ ▼ ▲

92. Через точку касания двух окружностей проведены две прямые, пересекающие одну окружность в точках A и B, а другую — в точках C и D. Докажите, что прямые AB и CD параллельны.

93. Две окружности пересекаются в точках A и B. Докажите, что одну из них можно перевести в другую центрально-подобным поворотом вокруг точки A, причем прямая, соединяющая соответствующие точки окружностей, проходит через точку B.

94. Даны два одинаково ориентированных квадрата $OABC$ и $OA_1B_1C_1$. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Найдите величину угла между прямыми AA_1 и BB_1.

▲ ▼ ▲

95. Точка B лежит между точками A и C. В полуплоскости с границей AC построены квадраты $ABMN$ и $BCDE$. Докажите, что середины отрезков AE, CM, DN и точка B являются вершинами третьего квадрата.

96. В прямоугольнике $ABCD$ проведен перпендикуляр BK к диагонали AC. Точки M и N соответственно середины отрезков AK и CD. Докажите, что $\angle BMN = 90°$.

97. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. Построены высоты CD и перпендикуляр DE к стороне BC. Точка M — середина отрезка DE. Докажите, что отрезки AE и CM перпендикулярны.

98. На сторонах треугольника ABC построены подобные треугольники BCD, CAE вне его и треугольник ABM во внутреннюю сторону так, что $\angle BCD = \angle CAE = \angle BAM$, $\angle CBD = \angle ACE = \angle ABM$. Докажите, что $CDME$ — параллелограмм.

§ 8. КОМПОЗИЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОДОБИЯ

Выполним два преобразования подобия с коэффициентами k_1 и k_2 одно за другим. При этом расстояние между двумя точками A и B умножается сначала на k_1 и затем на k_2, а в результате на k_1k_2. Значит, композиция двух подобий с коэффициентами k_1 и k_2 есть подобие с коэффициентом $k = k_1k_2$.

Различают два вида подобий: подобия первого рода сохраняют ориентацию треугольников, подобия второго рода меняют ориентацию на противоположную.

Центрально-подобный поворот является подобием первого рода. Примером подобия второго рода может служить композиция осевой симметрии и гомотетии.

В дальнейшем нам понадобятся только подобия первого рода. Их немного. Можно доказать, что всякое преобразование подобия первого рода есть центрально-подобный поворот или параллельный перенос. Гомотетию, поворот вокруг точки и тождественное преобразование можно считать частными случаями центрально-подобного поворота $\Pi_O^{k,\varphi}$: при $\varphi=0$ это гомотетия, при $k=1$ — поворот, при $\varphi=0$ и $k=1$ — тождественное преобразование.

Теорема 1. **Композиция двух центрально-подобных поворотов $\Pi_A^{k_1,\alpha}$ и $\Pi_B^{k_2,\beta}$ при $k_1k_2=1$ есть движение первого рода: поворот, если $\alpha+\beta\neq 360°$, и параллельный перенос, если $\alpha+\beta=$ $=360°$.**

Доказательство. Композиция двух подобий первого рода есть подобие первого рода, а так как $k_1k_2=1$, то $F=\Pi_B^{k_2,\beta}\circ\Pi_A^{k_1,\alpha}$ есть движение первого рода. При этом каждый луч поворачивается сначала на угол α, потом на угол β, а в результате на угол $\alpha+\beta$. Следовательно, если $\alpha+\beta\neq 360°$, то F есть поворот вокруг некоторой точки на угол $\alpha+\beta$; если же $\alpha+$ $+\beta=360°$, то F — параллельный перенос (при этом F — тождественное преобразование только тогда, когда центры поворотов A и B совпадают).

Аналогично доказывается следующая теорема о композиции трех подобий.

Теорема 2. **Композиция трех центрально-подобных поворотов $F=\Pi_C^{k_3,\gamma}\circ\Pi_B^{k_2,\beta}\circ\Pi_A^{k_1,\alpha}$ есть тождественное преобразование, если $k_1k_2k_3=1$, сумма углов поворота равна 360° или 720° и преобразование F имеет неподвижную точку.**

На XVII Международной олимпиаде школьников в 1975 г. предлагалась следующая задача, которую можно легко решить, используя композицию преобразований.

Пример 13. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены треугольники ABM, BCN и CAP так, что $\angle CAP=\angle CBN=45°$, $\angle ACP=\angle BCN=30°$, $\angle ABM=\angle BAM=$ $=15°$. Доказать, что $\angle PMN=90°$ и $PM=MN$.

Решение. Пусть данный треугольник ABC ориентирован положительно (рис. 20, *а*). Рассмотрим композицию

$$F=\Pi_N^{\frac{1}{k},\,105°}\circ\Pi_P^{k,\,105°}\circ R_M^{150°},$$

где $k=\dfrac{\sin 45°}{\sin 30°}=\sqrt{2}$. Имеем $R_M^{150°}(B)=A$, $\Pi_P^{k,\,105°}(A)=C$, $\Pi_N^{\frac{1}{k},\,105°}(C)=B$. Следовательно, $F(B)=B$, т. е. B — неподвижная точка преобразования F. Так как произведение коэффициентов

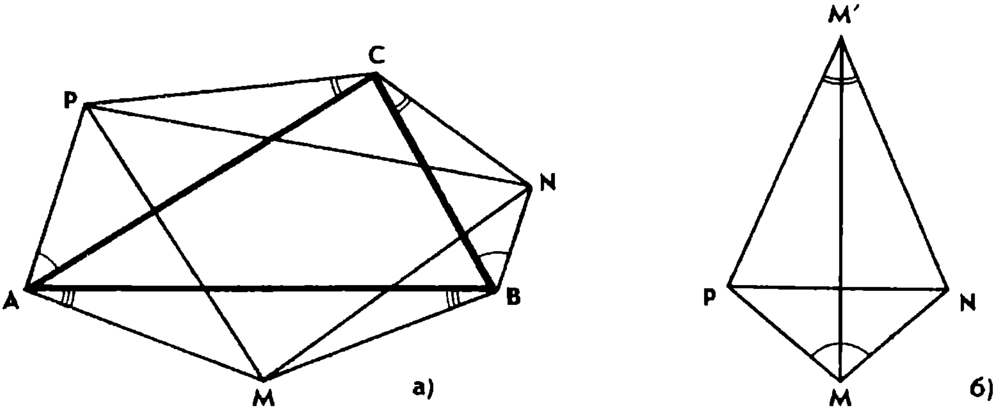


Рис. 20

подобий равно 1 и сумма углов поворота равна 360°, заключаем, что F есть тождественное преобразование.

Углы треугольника MNP можно найти, построив образ точки M при композиции F (рис. 20, *б*). Учитывая, что $F(M)=M$, получим:

$$R_M^{150^\circ}(M)=M,\ \Pi_P^{k,\,105^\circ}(M)=M',\ \Pi_N^{\frac{1}{k},\,105^\circ}(M')=M.$$

Треугольники PMM' и PAC (так же как треугольники NMM' и NBC) подобны и одинаково ориентированы. Треугольники PMM' и NMM' подобны и ориентированы противоположно, $\angle PMM'=\angle NMM'=45^\circ$, MM' — их общая сторона, значит, они равны, отсюда $\angle PMN=90^\circ$ и $PM=MN$.

Способ решения, основанный на применении композиции преобразований подобия, можно использовать для составления и решения аналогичных задач.

Задачи

99. На сторонах BC и AC произвольного треугольника ABC вне его построены прямоугольные треугольники BCN и ACP с прямыми углами при вершинах N и P, такие, что $\angle CAP=\angle CBN=60^\circ$. Найдите углы треугольника MNP, где M — середина стороны AB.

100. На сторонах BC и AC треугольника ABC вне его построены прямоугольные треугольники BCM и ACN, причем $\angle CBM=\angle CAN=90^\circ$ и $\angle BCM=\angle ACN=\gamma$. Найдите углы треугольника ABK, где K — середина отрезка MN.

101. На стороне AB треугольника ABC выбраны точки E и F так, что $\angle ACE=\angle BCF=\gamma$. На лучи CE и CF опущены перпендикуляры AM и BN. Точка K — середина стороны AB. Докажите, что $KM=KN$ и $\angle KMN=\gamma$.

102. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены треугольники ABM, BCN и CAP, такие, что $\angle BAM=\angle CAP=15^\circ$, $\angle ABM=\angle CBN=30^\circ$ и $\angle ACP=\angle BCN=45^\circ$. Найдите углы треугольника MNP.

▲ ▼ ▲

103. На сторонах треугольника ABC вне его построены треугольники ABM, BCN и CAP, такие, что $\angle CAP = \angle CBN = \alpha$, $\angle ACP = \angle ABM = \beta$, $\angle BCN = \angle BAM = \gamma$, причем $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Найдите углы треугольника MNP.

104. На сторонах BC и AC треугольника ABC вне его построены треугольники BCM и ACN, такие, что $\angle BMC = \angle ANC = 90°$, $\frac{CM}{BM} = \frac{1}{3}$, $\frac{CN}{AN} = \frac{1}{2}$. На стороне AB взята точка K так, что $\frac{AK}{KB} = \frac{2}{3}$. Найдите угол MKN.

105. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ вне его построены равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок MN, соединяющий вершины построенных треугольников ABM и CDN, перпендикулярен отрезку PQ, соединяющему центры двух других треугольников, причем $MN = PQ\sqrt{3}$.

106. Дан выпуклый пятиугольник $ABNCM$. Известно, что BCN и ACM — прямоугольные треугольники с гипотенузами BC и AC, причем $\angle BCN = \angle ACM$. Через середину K стороны AB проведены прямые KM и KN, пересекающие продолжения сторон BC и AC соответственно в точках P и Q. Докажите, что точки C, M, N, P и Q лежат на одной окружности.

107. В окружность вписан шестиугольник, у которого три стороны, взятые через одну, равны радиусу окружности. Докажите, что середины трех остальных сторон являются вершинами равностороннего треугольника.

ГЛАВА II

МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФИГУР

Характерным для решения геометрических задач является применение вспомогательных построений. С их помощью решаемую задачу обычно удается свести к элементарным задачам, решения которых известны или легко могут быть получены.

Вспомогательные построения иногда напрашиваются сами собой. Например, если в задаче говорится о прямой, касающейся окружности, то естественно провести радиус в точку касания и воспользоваться тем, что он перпендикулярен касательной. При решении же нестандартных задач найти удачное вспомогательное построение не так-то просто. Требуется большой опыт, изобретательность, геометрическая интуиция, чтобы догадаться, какие дополнительные линии следует провести. Помочь делу может умение применять геометрические преобразования, которые приводят к построению вспомогательных фигур. Так, ключ к решению ряда задач из § 4 дает вспомогательный треугольник, полученный путем поворота элементов заданной фигуры (см. пример 8 главы I).

§ 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ОКРУЖНОСТЬ

При решении планиметрических задач, когда требуется установить равенство некоторых углов, нередко полезно около треугольника или четырехугольника описать окружность. Это позволяет использовать теорему о вписанном угле и ее следствия.

Как известно, *около всякого треугольника можно описать окружность, и притом только одну.* При определенном условии окружность можно описать и около четырехугольника. *Если четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°, а углы ABD и ACD, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны* (рис. 21). Верно и обратное предположение, его нетрудно доказать способом от противного.

Точки A, B, C и D принадлежат одной окружности, если:

1) *$ABCD$ — выпуклый четырехугольник и сумма его противоположных углов равна 180°*

или 2) *точки B и C лежат по одну сторону от прямой AD и $\angle ABD = \angle ACD$* (в этом случае говорят, что отрезок AD виден из точек B и C под равными углами).

Покажем, как использовать вспомогательную окружность при решении задач.

Пример 1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP, BQ и CR. Доказать, что $\angle BAP = \angle BQR$.

Решение. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC (рис. 22). Так как $\angle ARH = \angle AQH = 90°$, то около четырехугольника $ARHQ$ можно описать окружность, приняв отрезок AH за диаметр. Построив ее, замечаем, что $\angle BAP = \angle BQR$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу.

Пример 2. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведены лучи, образующие между собой угол 45°. Один из них пересекает диагональ BD в точке M, другой — сторону BC в точке N. Доказать, что $\angle AMN = 90°$.

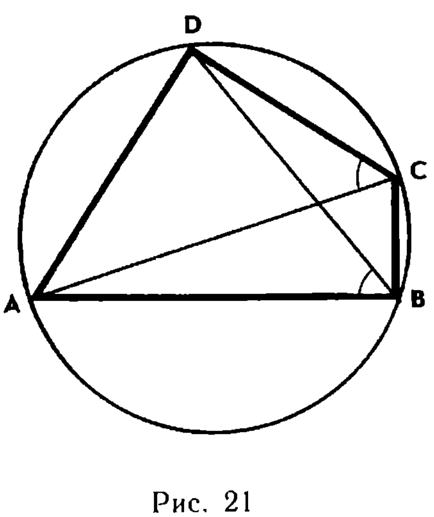


Рис. 21

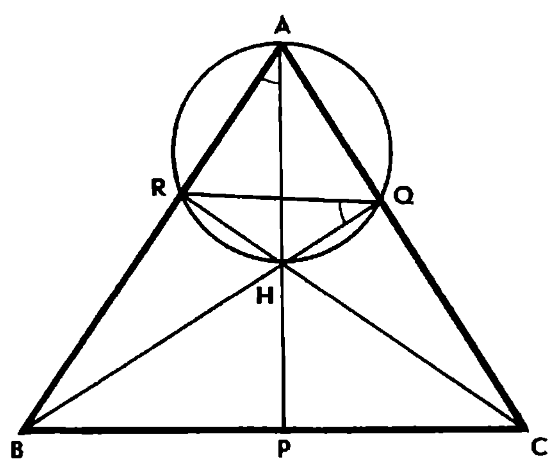


Рис. 22

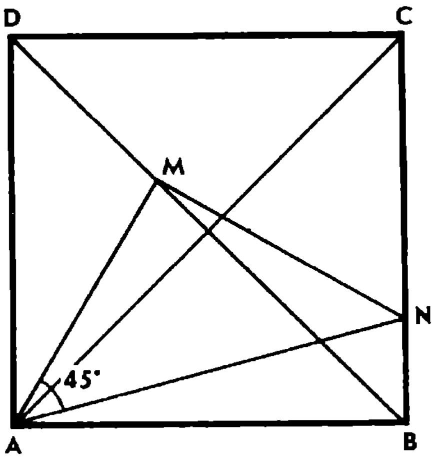


Рис. 23

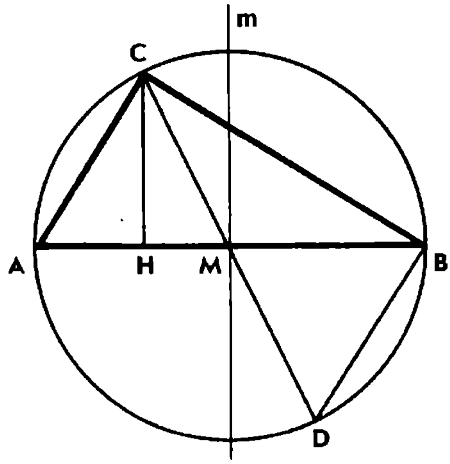


Рис. 24

Решение. Из вершин A и B квадрата отрезок MN виден под равными углами: $\angle MAN = \angle MBN = 45°$ (рис. 23). Следовательно, около четырехугольника $ABNM$ можно описать окружность. Так как сумма противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равна 180° и $\angle ABN = 90°$, то и $\angle AMN = 90°$. Кроме того, замечаем, что отрезки AM и MN равны как хорды, стягивающие равные дуги окружности. Таким образом, устанавливаем, что треугольник AMN не только прямоугольный, но и равнобедренный.

Построение вспомогательной окружности и в более сложных случаях иногда очень быстро приводит к цели.

Пример 3. Медиана и высота треугольника, проведенные из одной вершины внутри его, различны и образуют равные углы со сторонами, выходящими из той же вершины. Доказать, что треугольник прямоугольный.

Решение. Пусть высота CH и медиана CM треугольника ABC образуют со сторонами AC и BC равные углы (рис. 24). Опишем около треугольника ABC окружность. Достаточно доказать, что AB — ее диаметр. Продолжим медиану CM до пересечения с окружностью в точке D и рассмотрим треугольники ACH и BCD. Так как $\angle ACH = \angle BCM$ по условию и $\angle A = \angle D$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, то $\angle AHC = \angle CBD = 90°$. Следовательно, CD — диаметр окружности.

Центр окружности лежит на диаметре CD и на перпендикуляре m к стороне AB в ее середине M. Так как согласно условию медиана CD не является высотой, то прямые m и CD имеют только одну общую точку M, которая и является центром описанной окружности. Следовательно, AB — диаметр окружности и $\angle ACB = 90°$.

Полученный результат позволяет устно решить следующую очень известную задачу: найти углы треугольника, в котором медиана и высота, проведенные из одной вершины, делят угол на три равные части.

Ясно, что угол, из вершины которого проведены высота и медиана, прямой и он делится ими на три угла по 30°. Отсюда следует, что острые углы данного треугольника содержат 30° и 60°.

При решении некоторых задач на вычисление углов можно пользоваться следующими свойствами.

Пусть около треугольника ABC описана окружность с центром O. *Если точки O и C лежат по одну сторону от прямой AB, то согласно свойству вписанного и центрального углов $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$; если же эти точки лежат по разные стороны от AB, то $\angle ACB+\frac{1}{2}\angle AOB=180°$.*

Обратно, если: 1) *точки O и C лежат по одну сторону от AB, $OA=OB$ и $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$* или 2) *точки O и C лежат по разные стороны от AB, $OA=OB$ и $\angle OCB+\frac{1}{2}\angle AOB=180°$, то точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.*

Задачи

108. Докажите, что прямая, соединяющая вершину прямого угла треугольника с центром квадрата, внешне построенного на гипотенузе, делит прямой угол треугольника пополам.

109. Внутри острого угла A взята произвольная точка M и проведены перпендикуляры MB и MC к сторонам угла. Из вершины A проведен перпендикуляр к прямой BC, пересекающий ее в точке K. Докажите, что $\angle BAK=\angle CAM$.

110. Из основания H высоты CH треугольника ABC проведены к сторонам AC и BC перпендикуляры HM и HN. Докажите, что треугольник CMN подобен треугольнику ABC.

111. а) Найдите на гипотенузе данного прямоугольного треугольника точку, для которой расстояние между ее проекциями на катеты наименьшее.

б) Дан треугольник ABC. Из точки P, лежащей на стороне AB или на ее продолжении, проведены перпендикуляры PM и PN к прямым AC и BC. При каком положении точки P на прямой AB отрезок MN имеет наименьшую длину?

112. Дан треугольник ABC, углы A и B которого острые. Из точки P, лежащей на стороне AB, проведены перпендикуляры PM и PN к сторонам AC и BC. При каком условии отрезок MN будет параллелен стороне AB?

113. Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C перемещается по плоскости так, что вершины A и B скользят по сторонам данного прямого угла с вершиной O (точки O и C лежат по разные стороны от прямой AB). Найдите геометрическое место точек C.

▲ ▼ ▲

114. Дан параллелограмм $ABCD$, угол A которого острый. На прямых BC и AB построены соответственно точки M и N так, что $AM=AB$ и $CN=CB$. Докажите, что треугольники ABM, BCN и DMN подобны.

115. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AB и прямым углом B. К стороне AD через ее середину M проведен перпендикуляр, пересекающий прямую BC в точке N. Докажите, что треугольники ADN и BCM подобны.

116. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведены два луча, образующие между собой угол 45°. Один луч пересекает сторону BC в точке M и диагональ BD в точке N, другой — сторону CD в точке P и диагональ BD в точке Q. Докажите, что точки C, M, N, P и Q лежат на одной окружности.

117. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники BCA_1, CAB_1 и ABC_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке и каждая из них образует с другой угол 60°.

118. Докажите, что если два противоположных угла четырехугольника тупые, то диагональ, соединяющая вершины этих углов, короче второй диагонали.

▲ ▼ ▲

119. Дан равносторонний треугольник ABC. Из точки E, лежащей на стороне AB, проведен перпендикуляр EF к стороне AC. Точка K — середина отрезка AE. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно стороне BC, пересекает прямую EF в точке D. Найдите углы треугольника CKD.

120. Биссектрисы AE и BF треугольника ABC, угол C которого равен 60°, пересекаются в точке O. Докажите, что $OE=OF$.

121. Отрезок H_1H_2, соединяющий основания H_1 и H_2 высот AH_1 и BH_2 треугольника ABC, виден из середины M стороны AB под прямым углом. Найдите угол C треугольника ABC.

▲ ▼ ▲

122. а) Через две данные точки A и B проведите окружность так, чтобы она касалась данной прямой.

б) На одной стороне угла с вершиной O даны точки A и B. Найдите на другой стороне точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

123. а) На окружности даны три точки A, B и C. Постройте на окружности точку D так, чтобы хорды AB и CD пересекались в точке, делящей хорду CD пополам.

б) Дан треугольник ABC. На прямой AB постройте точку M так, чтобы отрезок CM был средним пропорциональным отрезков AM и BM. При каком условии задача имеет хотя бы одно решение?

124. Постройте треугольник ABC, зная его биссектрису CD и углы, которые она образует с высотой и медианой треугольника, проведенными из той же вершины C.

▲ ▼ ▲

125. Диагональ AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ образует со сторонами углы: $\angle BAC = \angle BCA = 40°$, $\angle ACD = 30°$, $\angle CAD = 20°$. Найдите $\angle BDC$.

126. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle BAC = \angle BCA = 15°$, $\angle ACD = 30°$, $\angle CAD = 45°$. Докажите, что $AB = BD$.

127. В треугольнике ABC известны углы: $\angle A = 30°$, $\angle B = 80°$. Внутри треугольника взята точка M, такая, что треугольник BCM равносторонний. Найдите $\angle MAC$.

128. Через вершины A и B равнобедренного треугольника ABC, в котором $AC = BC$ и $\angle C = 80°$, проведены две прямые, пересекающиеся в точке O внутри треугольника. Найдите $\angle ACO$, если $\angle OAB = 10°$ и $\angle ABO = 30°$.

▲ ▼ ▲

129. Вычислите угол A треугольника ABC, если $\angle B = 75°$ и высота CD в два раза меньше стороны AB.

130. На стороне AB треугольника ABC взята точка P, такая, что $AP:PB = 1:2$. Найдите $\angle ACP$, если $\angle A = 45°$ и $\angle B = 75°$.

131. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Определите вид треугольника, если $\angle A + \angle MCB = 90°$.

§ 2. СПРЯМЛЕНИЕ

При решении ряда геометрических задач, преимущественно задач на построение, удобно пользоваться специальным приемом, который называют спрямлением. Если в условии указана сумма двух или нескольких отрезков, являющихся звеньями ломаной, то естественно попытаться на чертеже выпрямить эту ломаную, повернув или переложив отрезки так, чтобы они оказались на одной прямой. В результате получается вспомогательная фигура, с помощью которой решаемая задача сводится к более простой или известной задаче.

Пример 4. Построить равнобедренный треугольник, если даны его угол при основании и сумма основания с боковой стороной.

Анализ. Пусть ABC — равнобедренный треугольник, $\angle A = \angle B = \alpha$ и $AB + BC = m$, где m — данный отрезок. Спрямим ломаную ABC, для чего сторону BC повернем вокруг точки B так, чтобы точка C перешла в точку D, лежащую на продолжении стороны AB (рис. 25). Соединив точки C и D отрезком, получим вспомогательный треугольник ACD, в котором $AD = m$,

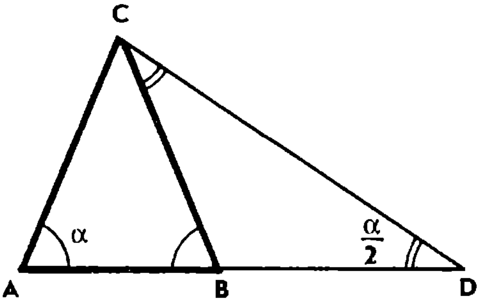


Рис. 25

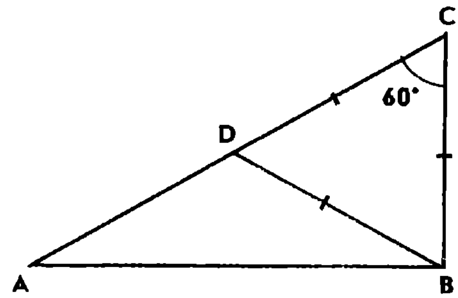


Рис. 26

$\angle A=\alpha$, $\angle D=\angle BCD=\frac{\alpha}{2}$ (так как внешний угол треугольника BCD равен α). Значит, треугольник ACD можно построить, после чего остается найти точку B, в которой надо согнуть отрезок AD, чтобы получить искомый треугольник ABC. Поскольку $BC=BD$, то точка B лежит на серединном перпендикуляре отрезка CD т. е. точка является точкой пересечения отрезка AD и серединного перпендикуляра отрезка CD.

Построение треугольника ABC не представляет трудности. Заметим, что задачу можно решить и методом подобия, но построение треугольника ABC будет более громоздким.

Спрямление отрезков иногда выгодно применять и при решении задач на вычисление. Вспомогательные построения позволяют сократить и упростить вычисления. Рассмотрим задачу, в которой задана разность двух отрезков.

Пример 5. Найти угол B треугольника ABC и радиус описанной около него окружности, если известно, что $AC-BC=2$, $AB=\sqrt{6}$ и $\angle C=60°$.

Решение. Выполним вспомогательное построение: на стороне AC треугольника ABC отложим отрезок CD, равный стороне BC (рис. 26). Тогда $AD=2$. Соединив точки B и D отрезком, получим вспомогательный треугольник ABD. Поскольку треугольник BCD равносторонний, то $\angle ADB=120°$. Применив к треугольнику ABD теорему синусов, получим:

$$\sin\beta=\frac{2\sin 120°}{\sqrt{6}}, \text{ где } \beta=\angle ABD,\ 0°<\beta<90°.$$

Но $\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta=45°$ и

$$\angle ABC=45°+60°=105°.$$

Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, найдем по формуле $c=2R\sin 60°$. Так как $c=\sqrt{6}$, то $R=\sqrt{2}$.

Спрямление отрезков применяется также при решении задач на доказательство, когда требуется доказать, что один из отрезков равен сумме некоторых других отрезков.

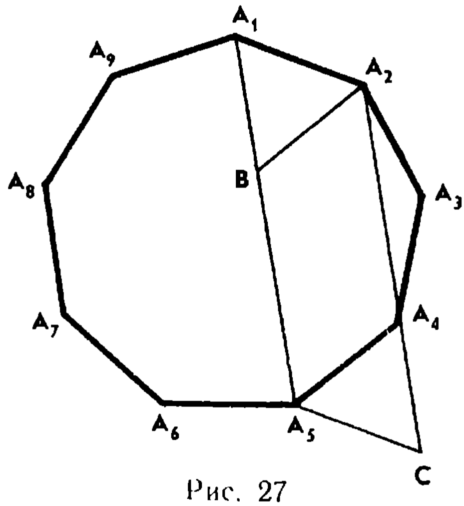


Рис. 27

Пример 6. Доказать, что сторона правильного девятиугольника равна разности между большей и меньшей его диагоналями.

Решение. Пусть $A_1A_2...A_9$ — правильный девятиугольник (рис. 27). Вершины девятиугольника делят описанную около него окружность на девять дуг по 40°. Поэтому хорды A_1A_5 и A_2A_4 параллельны и углы A_1 и A_5 трапеции $A_1A_2A_4A_5$ равны по 60°.

Отложим на большей диагонали A_1A_5 отрезок A_1B, равный стороне A_1A_2 девятиугольника. Тогда A_1A_2B — равносторонний треугольник, $\angle A_1BA_2 = \angle A_1A_5A_4 = 60°$, значит, $A_2B \parallel A_4A_5$ и $A_2A_4A_5B$ — параллелограмм. Поэтому $BA_5 = A_2A_4$.

Итак, $A_1A_5 = A_1A_2 + A_2A_4$, откуда и вытекает доказываемое утверждение.

Вспомогательное построение можно несколько изменить: на продолжении меньшей диагонали A_2A_4 отложить отрезок A_4C, равный стороне A_4A_5. Затем таким же образом доказать, что $A_1A_2CA_5$ — параллелограмм и, следовательно, $A_1A_5 = A_2A_4 + A_4C$.

Задачи

132. а) Постройте равнобедренный треугольник, зная его периметр и высоту.

б) Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$, высота равна h. Докажите, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{p}$, где α — величина угла при основании треугольника.

133. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе c и сумме s катетов. Имеет ли задача решение, если $c = 10$ и $s = 15$?

134. Постройте параллелограмм, если даны его периметр $2p$ и высоты h_1 и h_2, проведенные к смежным сторонам.

▲ ▼ ▲

135. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 2, разность катетов равна $\sqrt{2}$. Найдите углы и площадь треугольника.

136. Дан треугольник ABC, в котором $AB = 3$ и $\angle A = 30°$. Найдите две другие стороны треугольника, если известно, что их сумма равна $2\sqrt{3}$.

▼ ▲ ▼

137. Докажите, что сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон постоянна.

138. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle B = 40°$. Проведена биссектриса AD треугольника. Докажите, что

$$AD + CD = AB.$$

139. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A = 60°$, $\angle B = 40°$, $\angle C = 120°$ и $CD = AD$. Докажите, что

$$BC + CD = AB.$$

140. В окружность радиуса R вписан правильный десятиугольник $A_1A_2...A_{10}$. Докажите, что $A_1A_4 - A_1A_2 = R$.

§ 3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Рассмотрим еще один прием решения геометрических задач определенного вида. Сущность приема легко понять на конкретной задаче.

Приведенная ниже задача может быть решена разными способами. Всегда интересно задачу на построение решить геометрически, придумать подходящее вспомогательное построение. В случае неудачи стоит перейти к вычислениям, выразить через данные элементы некоторые другие элементы треугольника и посмотреть, что подскажут полученные формулы.

П р и м е р 7. Построить треугольник ABC, разность углов A и B которого равна 90°, если даны стороны AC и BC.

Р е ш е н и е. Поскольку известны две стороны искомого треугольника ABC (будем считать, что $BC = a$ и $AC = b$), а противолежащие им углы связаны соотношением $\angle A = 90° + \angle B$, то удобно воспользоваться теоремой синусов:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin(90° + B)}{a}.$$

Учитывая, что $\sin(90° + B) = \cos B$, получим:

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{b}{a}, \text{ т. е. } \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}.$$

Мы получили очень простую формулу, из которой следует, что угол B искомого треугольника ABC равен острому углу прямоугольного треугольника с катетами a и b. Присоединим такой прямоугольный треугольник к треугольнику ABC так, чтобы получился равнобедренный треугольник BCB' (рис. 28). Тем самым мы нашли вспомогательное построение, ведущее к решению задачи.

Из приведенного анализа видно, как построить искомый треугольник. Сначала построим вспомогательный прямоугольный треугольник $AB'C$ по двум катетам: $B'C = a$ и $AC = b$. Затем треугольник $AB'C$ дополним до равнобедренного: радиусом CB' про-

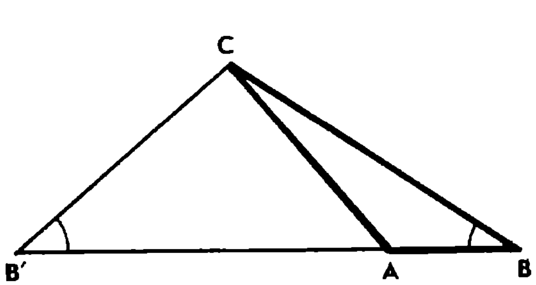


Рис. 28

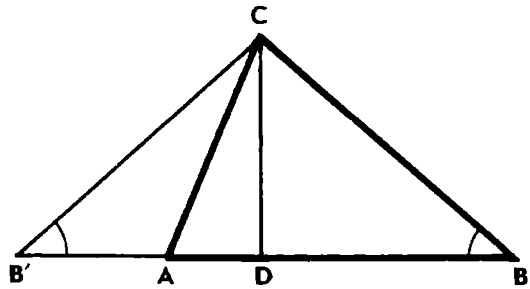


Рис. 29

ведем окружность с центром C, которая вторично пересечет прямую AB' в искомой точке B. По смыслу задачи $a>b$, поэтому точка A будет лежать между точками B' и B.

Полученный треугольник ABC удовлетворяет условию задачи.

Действительно, BCB' — равнобедренный треугольник, $BC=B'C$, $\angle B=\angle B'$. По свойству внешнего угла треугольника $\angle BAC=90°+\angle B'$. Таким образом, $BC=a$, $AC=b$, $\angle A=90°+\angle B$, значит, треугольник ABC искомый.

После того как найдено удачное вспомогательное построение, следует присмотреться к решенной задаче и постараться выяснить, почему те или иные вспомогательные линии приводят к цели. Нельзя ли найденный прием использовать при решении некоторых других задач?

Рассмотрим равнобедренный треугольник BCB', который отрезком AC разбивается на два треугольника ABC и $AB'C$ (рис. 29). Назовем треугольник $AB'C$ дополнительным к треугольнику ABC. Установим некоторые зависимости между элементами этих треугольников.

Пусть a, b, c — стороны треугольника ABC, R — радиус описанной около него окружности. Треугольник $AB'C$ иногда будем обозначать через $A'B'C'$, теми же буквами A', B', C' — его углы, а противолежащие им стороны соответственно через a', b', c'.

Очевидно, $a'=a$, $b'=b$, причем $a>b$, $\angle B'=\angle B$, $\angle A'=180°-\angle A$, $\angle C'=\angle A-\angle B$.

Докажем, что $c\cdot c'=a^2-b^2$.

Пусть CD — высота треугольника BCB'. Тогда $BD=B'D$. По теореме Пифагора находим:

$$CD^2=a^2-BD^2,$$
$$CD^2=b^2-AD^2,$$

откуда $BD^2-AD^2=a^2-b^2$, или

$$(BD+AD)(BD-AD)=a^2-b^2.$$

Один из сомножителей в левой части равенства равен c, а другой — c', следовательно,

$$c\cdot c'=a^2-b^2.$$

Примечание. Из формулы $b^2=a^2-c\cdot c'$ следует, что в равнобедренном треугольнике квадрат отрезка, соединяющего вершину треугольника с какой-либо точкой основания, равен разности между произведением боковых сторон и произведением отрезков основания. В разностороннем треугольнике подобным свойством обладает лишь биссектриса треугольника.

Треугольники ABC и $AB'C$ имеют общую высоту CD. Радиусы окружностей, описанных около них, равны:

$$R'=R=\frac{b}{2\sin B}.$$

Рассмотренные свойства дополнительных треугольников позволяют весьма просто решить некоторые геометрические задачи. Например, задачи на вычисление элементов треугольника, когда легче найти зависимость между элементами дополнительного треугольника, а также задачи на построение, если известны элементы треугольника, дополнительного к искомому.

Пример 8. Дан треугольник ABC, угол A которого в два раза больше угла B. Найти сторону AB, если $BC=a$ и $AC=b$.

Решение. Треугольник $AB'C$, дополнительный к треугольнику ABC, равнобедренный; поскольку $\angle C'=\angle A-\angle B$ и $\angle A=2\angle B$, то $\angle C'=\angle B'$ и $c'=b$ (см. рис. 29).

Применив формулу $c\cdot c'=a^2-b^2$, получим:

$$c=\frac{a^2-b^2}{b}.$$

Пример 9. Построить треугольник ABC, если известны разность углов $\varphi=\angle A-\angle B$, сторона $BC=a$ и радиус R описанной окружности.

Построение. Сначала построим треугольник $AB'C$, дополнительный к искомому. Проведем окружность радиуса R, впишем в нее угол $\varphi=\angle A-\angle B$, тогда хорда, на которую опирается угол φ, есть сторона AB' треугольника. Далее на окружности находим точку C, такую, что $B'C=a$. Полученный треугольник $AB'C$ дополним до равнобедренного треугольника BCB'.

Задачи

141. Постройте треугольник ABC, если даны стороны BC, AC и угол $\varphi=\angle A-\angle B$.

142. Постройте треугольник ABC, если даны радиус R описанной окружности, высота CH и угол $\varphi=\angle A-\angle B$.

143. Постройте треугольник ABC, угол A которого в два раза больше угла B, если даны стороны BC и AC.

144. На прямой даны три точки A, B и H. Постройте треугольник ABC так, чтобы его угол A был вдвое больше угла B, а точка H служила основанием высоты CH треугольника.

145. На прямой даны три точки A, B и H. Постройте треугольник ABC так, чтобы $\angle A - \angle B = 90°$ и точка H служила основанием высоты CH треугольника.

▲ ▼ ▲

146. Докажите, что если разность углов A и B треугольника ABC равна 90°, то имеют место следующие соотношения:

а) $c = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; б) $2R = \frac{a^2 - b^2}{c}$.

147. Дан треугольник ABC, угол A которого в два раза больше угла B. Найдите сторону BC, если $AC = 4$ и $AB = 5$.

148. а) Найдите зависимость между сторонами равнобедренного треугольника ABC, в котором $BC = a$, $AB = AC = b$ и $\angle A = 36°$.

б) Выразите сторону правильного десятиугольника a_{10} через радиус R описанной окружности.

149. Докажите, что если в треугольнике ABC угол A в три раза больше угла B, то его стороны связаны соотношением

$$c^2 = \frac{1}{b}(a - b)(a^2 - b^2).$$

150. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $BC = a$, $AB = AC = b$, $\angle A = 20°$. Докажите, что $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

ГЛАВА III

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД

Одним из основных методов решения геометрических задач является алгебраический метод. Можно выделить две его разновидности: метод поэтапного решения и метод составления уравнений.

В простейших задачах искомую величину непосредственно выражают через данные величины по готовым формулам. При решении более сложных задач обычно последовательно вычисляются промежуточные величины, с помощью которых искомые величины связываются с данными. В этом состоит сущность поэтапного решения задачи.

П р и м е р 1. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CD. Из точки D проведены перпендикуляры DM и DN к катетам AC и BC. Найти гипотенузу треугольника, если $CM = m$ и $CN = n$.

Р е ш е н и е. Из условия задачи следует, что $CMDN$ — прямоугольник (рис. 30). Значит, $CM = DN = m$ и можно последовательно вычислить длины отрезков CD, AD и BD.

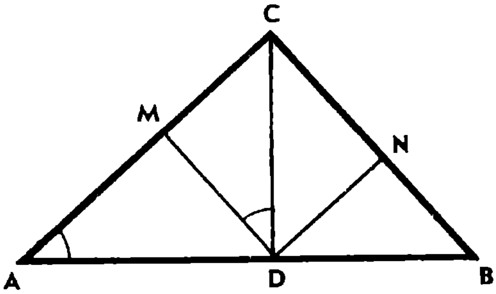


Рис. 30

Из треугольника CDM по теореме Пифагора находим:

$$h = CD = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Треугольники ACD и CDM подобны, поэтому

$$\frac{AD}{h} = \frac{n}{m}, \text{ откуда } AD = \frac{hn}{m}.$$

Аналогично получим $BD = \frac{hm}{n}$.

Следовательно, $AB = AD + BD = \left(\frac{n}{m} + \frac{m}{n}\right) h.$

Подставив сюда значение h, окончательно получим:

$$AB = \frac{(m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}{mn}.$$

В том случае, когда нельзя использовать прямой счет, прибегают к методу составления уравнений, данные и искомые величины связывают уравнением или системой уравнений.

Алгебраический метод применяется не только при решении задач на вычисление, но и при решении многих задач на доказательство и построение. Благодаря применению аппарата алгебры процесс решения становится в известной мере автоматическим.

Иногда при решении геометрических задач пользуются и комбинированным методом: некоторые соотношения между элементами фигуры определяются геометрически, а другие — средствами алгебры.

§ 1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ТОЖДЕСТВА И НЕРАВЕНСТВА

При решении геометрических задач, помещенных в этом параграфе, находят применение формулы, выражающие различные элементы треугольника через его стороны. Как правило, решение задачи сводится к выполнению алгебраических преобразований с использованием тождеств и неравенств, известных из школьного курса алгебры.

Приведем необходимые теоретические сведения.

1. Если известны длины a, b, c сторон треугольника ABC, то его площадь можно вычислить по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

С другой стороны, $S = \frac{1}{2} a h_a$. Следовательно, зная стороны треугольника, его высоту h_a можно найти по формуле

$$h_a = \frac{2S}{a}.$$

Аналогичные формулы имеют место для двух других высот h_b и h_c треугольника.

Выведем формулы для вычисления других линейных элементов треугольника ABC. При этом мы будем придерживаться стандартных обозначений.

II. Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, углы B и C которого не прямые (рис. 31). Из вершины A проведем диаметр AD окружности и высоту AH треугольника. Получим прямоугольные треугольники ABD и AHC. Эти треугольники подобны, так как их углы D и C равны (по свойству вписанных углов).

Следовательно, $\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AH}$, откуда

$$R = \frac{bc}{2h_a}.$$

Это соотношение остается в силе и тогда, когда угол B (или угол C) треугольника ABC прямой.

Учитывая, что $h_a = \frac{2S}{a}$, получим более удобную для запоминания формулу:

$$\boldsymbol{R = \frac{abc}{4S}}.$$

III. В плоскости любого треугольника ABC имеются четыре точки, каждая из которых одинаково удалена от прямых BC, CA и AB. Это точки пересечения биссектрис внутренних или биссектрис внешних углов треугольника (рис. 32). Одна из них, центр O вписанной в треугольник ABC окружности, лежит внутри треугольника. Три другие

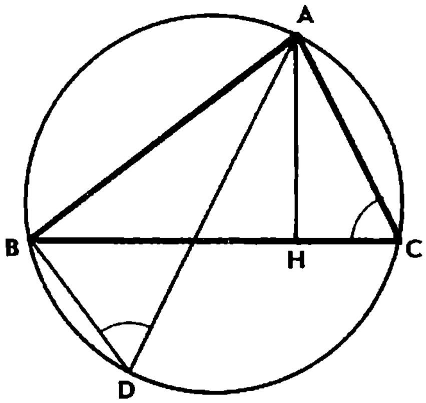


Рис. 31

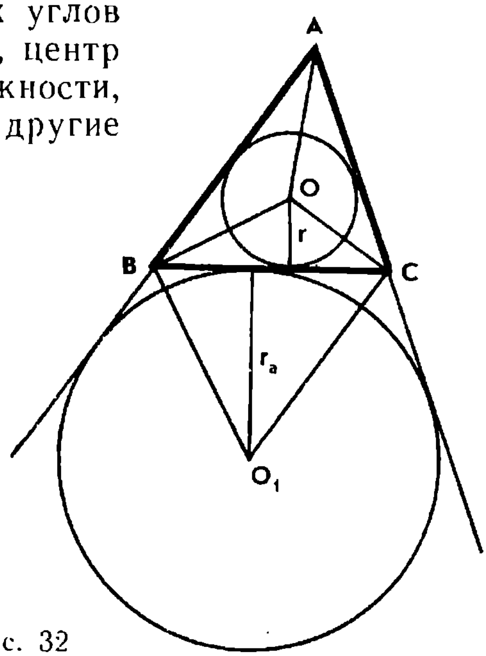


Рис. 32

точки лежат вне треугольника, они являются центрами трех окружностей (их называют вневписанными), каждая из которых касается одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

Выразим радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC, через его стороны. Соединим вершины треугольника ABC с центром вписанной окружности. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников BCO, ACO и ABO. В каждом из этих треугольников радиус вписанной окружности, проведенный в точку касания, является высотой. Следовательно,

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}(a+b+c)r=pr,$$

откуда
$$r=\frac{S}{p}.$$

Аналогично этому выведем формулу для вычисления радиуса r_a вневписанной окружности, касающейся стороны BC.

Соединим вершины треугольника ABC с центром O_1 вневписанной окружности. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ABO_1 и ACO_1 без площади треугольника BCO_1. Поэтому

$$S=\frac{1}{2}br_a+\frac{1}{2}cr_a-\frac{1}{2}ar_a=\frac{1}{2}(b+c-a)r_a=(p-a)r_a,$$

откуда

$$r_a=\frac{S}{p-a}.$$

IV. Пусть AM — медиана треугольника ABC (рис. 33). Построим точку D, симметричную A относительно точки M. Тогда $ABDC$ — параллелограмм, и по теореме о сумме квадратов диагоналей параллелограмма получим:

$$4m_a^2+a^2=2(b^2+c^2),$$

следовательно,

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}.$$

V. Выведем формулу для вычисления биссектрисы треугольника по данным его сторонам.

Опишем около треугольника ABC окружность и продолжим биссектрису AL треугольника до пересечения с окружностью в точке K (рис. 34). Имеем $AL=l_a$, $AC=b$, $AB=c$. Пусть $BL=m$, $CL=n$ и $KL=x$.

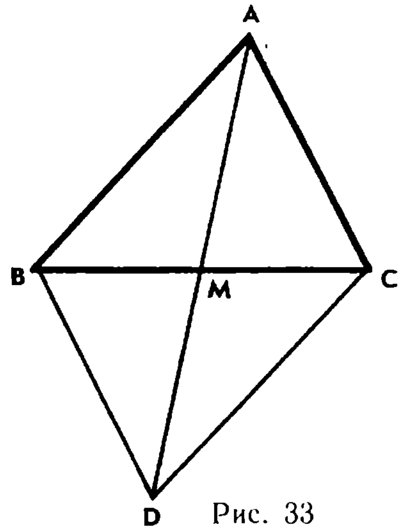


Рис. 33

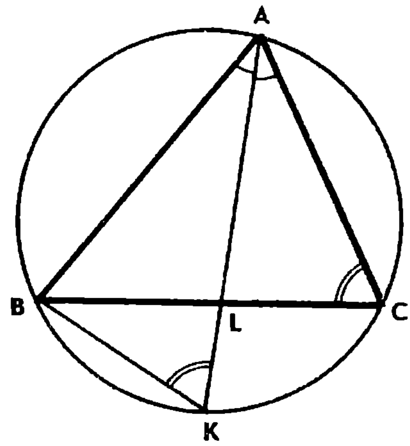


Рис. 34

По условию $\angle BAK = \angle CAK$, кроме того, $\angle AKB = \angle ACB$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, треугольники ABK и ACL подобны и справедливо равенство

$$\frac{l_a + x}{c} = \frac{b}{l_a}, \text{ откуда } l_a^2 = bc - l_a x.$$

Хорды AK и BC пересекаются в точке L, поэтому $l_a x = mn$. Следовательно,

$$l_a^2 = bc - mn. \qquad (*)$$

Далее, используя свойство биссектрисы треугольника, составим уравнения

$$\frac{m}{n} = \frac{c}{b}, \quad m + n = a$$

и найдем $m = \dfrac{ac}{b+c}$, $n = \dfrac{ab}{b+c}$.

Теперь, зная стороны треугольника ABC, можно вычислить m и n, а затем l_a.

Если значения m и n подставить в формулу (*), то после несложных преобразований она приводится к виду

$$l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}.$$

Формулы, выражающие элементы треугольника через его стороны, дают возможность вычислять эти элементы, а также находить различные соотношения между ними.

Пример 2. Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что радиус окружности, вписанной в треугольник, равен $\frac{1}{3}$ высоты, проведенной к средней по величине стороне треугольника.

Решение. Пусть стороны треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию с разностью d. Будем считать, что $a \leqslant b \leqslant c$, тогда $a = b - d$, $c = b + d$, $2p = 3b$.

Воспользуемся формулой $r = \frac{S}{p}$, получим $r = \frac{2S}{3b}$. А так как $h_b = \frac{2S}{b}$, то $r = \frac{1}{3} h_b$.

Для доказательства геометрических неравенств, включенных в данный параграф, также используются приведенные формулы и, кроме того, различные соотношения между элементами треугольника, алгебраические тождества и свойства числовых неравенств.

Пример 3. Доказать, что для всякого прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c имеет место неравенство $a + b \leqslant c\sqrt{2}$.

Решение. Воспользуемся алгебраическим тождеством

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Так как $a^2 + b^2 = c^2$, то отсюда следует, что

$$(a+b)^2 \leqslant 2c^2, \text{ или } a + b \leqslant c\sqrt{2},$$

причем равенство достигается только при $a = b$.

Задачи

151. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметрах построены окружности. Найдите длину их общей хорды, если $BC = 3$ и $AC = 4$.

152. Докажите, что основание высоты прямоугольного треугольника делит его гипотенузу на отрезки, пропорциональные квадратам катетов.

153. Докажите, что для всякого прямоугольного треугольника имеют место следующие соотношения:

1) $ch = ab = 2pr$;
2) $r = p - c$;
3) $r_c = p$;
4) $l_c = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$;
5) $(a+b)^2 = c^2 + 2ch = c^2 + 4S$;
6) $S = p(p-c) = (p-a)(p-b)$

(через a, b, h обозначены соответственно длины катетов BC, AC и высоты CD).

154. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков гипотенузы, на которые ее делит точка касания вписанной в треугольник окружности.

155. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, а его площадь равна S. Найдите радиус вписанной окружности ($c=13$, $S=30$).

▲ ▼ ▲

156. Докажите, что все прямоугольные треугольники, длины сторон которых образуют арифметическую прогрессию, подобны.

157. Определите вид треугольника, если его стороны и полупериметр образуют арифметическую прогрессию.

158. Длины сторон остроугольного треугольника — последовательные целые числа. Докажите, что высота, проведенная к средней по величине стороне, делит ее на отрезки, разность которых равна 4.

159. а) Известны стороны треугольника: $a=13$, $b=14$, $c=15$. Найдите h_b и r_b.

б) При каком соотношении между сторонами треугольника ABC имеет место равенство $h_b=r_b$?

160. Стороны треугольника ABC связаны соотношением $b=\frac{a+c}{2}$. Докажите, что сумма расстояний от любой точки биссектрисы BD треугольника до его сторон равна h_b.

▲ ▼ ▲

161. Докажите, что для треугольника ABC имеют место соотношения между его элементами:

1) $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$;

2) $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$;

3) $m_a^2-m_b^2=\frac{3}{4}(b^2-a^2)$;

4) $r_a+r_b+r_c=r+4R$.

162. Докажите, что если $a+b=c+2r$, то треугольник ABC прямоугольный.

163. Докажите, что если $r_a+r_b=2R$, то треугольник ABC прямоугольный.

164. Определите вид треугольника ABC, если его медианы связаны соотношением $m_a^2+m_b^2=5m_c^2$.

165. Стороны треугольника ABC связаны соотношением $a^2+b^2=5c^2$. Докажите, что медианы, проведенные к сторонам a и b, перпендикулярны.

166. Определите вид треугольника ABC, если $a+h_a=b+h_b$.

▲ ▼ ▲

167. Докажите, что для прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90°$) имеют место неравенства

$$h_c\leqslant(\sqrt{2}+1)\,r\leqslant l_c\leqslant\sqrt{S}\leqslant\frac{a+b}{2\sqrt{2}}\leqslant(\sqrt{2}-1)\,p\leqslant\frac{1}{2}c=R=m_c.$$

В каком случае каждое из этих неравенств обращается в равенство?

168. Можно ли из прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 24 см, вырезать круг радиуса 5 см?

169. Существует ли прямоугольный треугольник, периметр которого равен 20 см, и высота, проведенная из вершины прямого угла, равна 4 см?

▲ ▼ ▲

170. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, расположенной внутри треугольника, до его вершин заключена между его полупериметром и периметром.

171. В плоскости выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до его вершин наименьшая.

172. а) Докажите, что сумма расстояний от любой точки, расположенной внутри равностороннего треугольника, до трех его сторон есть величина постоянная.

б) Докажите, что сумма расстояний от любой точки M, расположенной внутри неравностороннего треугольника ABC, до прямых BC, CA и AB заключена между наименьшей и наибольшей высотами.

▲ ▼ ▲

173. а) Докажите, что площадь треугольника не больше половины произведения двух его сторон.

б) Дан треугольник ABC, в котором $a<b$. Докажите, что $a+h_a\leqslant b+h_b$.

174. Докажите, что большей стороне треугольника соответствует меньшая медиана и обратно.

175. Докажите, что сумма медиан произвольного треугольника ABC меньше периметра треугольника и больше $\frac{3}{4}$ его периметра.

▲ ▼ ▲

176. Одно из оснований трапеции в три раза больше другого. Найдите отношение площадей трапеций, на которые данная трапеция делится средней линией.

177. Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равна произведению ее оснований.

178. Около окружности описана равнобочная трапеция. Докажите, что ее высота равна среднему геометрическому, а боковая сторона — среднему арифметическому оснований.

▲ ▼ ▲

179. Треугольник ABC разделен отрезком CM на два треугольника ACM и BCM. Докажите, что если окружности, вписанные в эти треугольники, касаются между собой, то $AM+BC=$ $=BM+AC$.

180. В каждый из треугольников, на которые четырехугольник $ABCD$ разбивается одной из своих диагоналей, вписаны окружности, касающиеся диагонали в точках M и N. Докажите, что если $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ и $DA=d$, то

$$MN=\frac{1}{2}|a+c-b-d|.$$

При каком условии эти окружности касаются между собой?

▲ ▼ ▲

181. К двум внешне касающимся окружностям радиусов R_1 и R_2 проведена общая внешняя касательная. Окружность радиуса r касается данных окружностей и касательной. Докажите, что $\frac{1}{\sqrt{r}}=\frac{1}{\sqrt{R_1}}+\frac{1}{\sqrt{R_2}}$.

182. Окружности k_1, k_2 и k_3 касаются попарно внешним образом. Общая внешняя касательная окружностей k_1 и k_2 параллельна общей внешней касательной окружностей k_1 и k_3. Докажите, что радиусы r_1, r_2 и r_3 этих окружностей связаны соотношением $r_1^2=4r_2r_3$.

§ 2. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Задачи, помещенные в этом параграфе, решаются методом составления уравнений. Приступая к решению задачи, следует сделать аккуратный чертеж, что иногда позволяет предсказать результат, заметить определенные зависимости между элементами фигуры и выбрать подходящий способ решения. Если возможны различные случаи взаимного расположения элементов фигуры, то каждый случай нужно рассмотреть особо. При этом может оказаться, что задача имеет несколько решений.

Пример 4. Найти углы равнобедренного треугольника, если известно, что прямая, проходящая через вершину угла при основании, делит его на два треугольника, каждый из которых также является равнобедренным.

Решение. Пусть треугольник ABC, в котором $AB=AC$, разделен отрезком BD на два равнобедренных треугольника ABD и BCD (рис. 35). Анализ задачи показывает, что возможны два случая:

а) $AD=BD=BC$; б) $AD=BD$ и $BC=CD$.

Обозначим через x (в градусной мере) величину угла A треугольника ABC. Для составления уравнения воспользуемся свойством углов равнобедренного треугольника и теоремой о внешнем угле треугольника. В случае а) имеем:

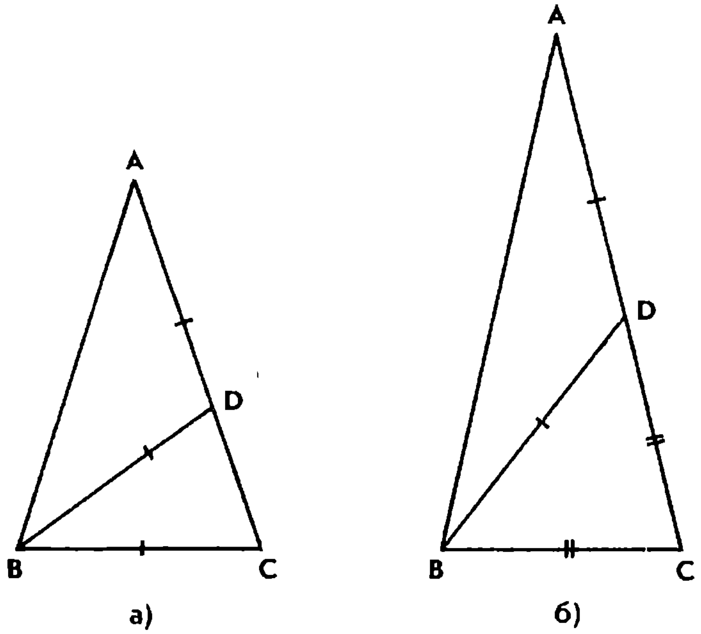


Рис. 35

$$\angle ABD = x, \quad \angle BCD = \angle BDC = 2x \text{ (рис. 35, } a\text{)}.$$

Поскольку $AB = AC$, то $\angle CBD = x$. Выражая через x сумму углов треугольника ABC, приходим к уравнению $5x = 180°$, откуда $x = 36°$.

В случае б), рассуждая аналогично, получим уравнение $7x = 180°$, откуда $x = \frac{180°}{7}$ (рис. 35, *б*).

Легко проверить, что корни обоих уравнений удовлетворяют условию задачи.

Пример 5. Из вершины C прямоугольного треугольника ABC проведена высота CD. Найти гипотенузу AB, если $BC = a$ и $AD = n$ ($a = 2$, $n = 3$).

Решение. В каждом из треугольников ABC, ACD и BCD известно лишь по одной стороне (рис. 36). Поэтому непосредственно вычислить хотя бы еще один элемент нельзя. Применим способ составления уравнений.

Обозначим $AB = x$, тогда $BD = x - n$. А так как катет прямоугольного треугольника ABC есть среднее пропорциональное

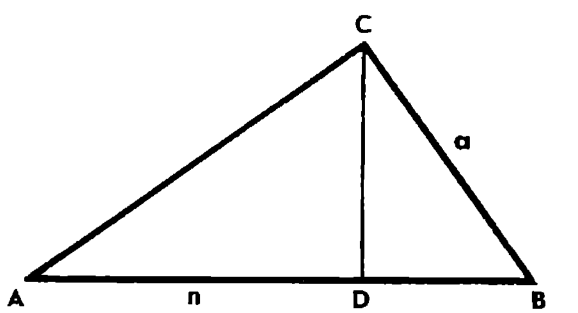


Рис. 36

между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу, то получим уравнение

$$x(x-n)=a^2, \text{ или } x^2-nx-a^2=0.$$

По смыслу задачи $x>a$, поэтому берем только положительный корень уравнения:

$$x=\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+a^2},$$

который при любых значениях a и n удовлетворяет условию задачи.

При $a=2$ и $n=3$ получим $x=4$.

Итак, $AB=4$, $BC=2$. В случае надобности, применяя прямой счет, теперь легко найти и другие элементы треугольника ABC, например его площадь. При этом AB будет выступать в роли вспомогательного элемента.

Рассмотрим теперь соответствующую задачу на построение.

Пример 6. Построить прямоугольный треугольник по катету и проекции другого катета на гипотенузу.

Анализ. Решение задачи алгебраическим методом состоит в следующем. Длину некоторого отрезка выразим через длины данных отрезков и по найденной формуле построим искомый отрезок.

В нашем случае за неизвестный отрезок удобно принять гипотенузу треугольника. Обозначив $AB=x$, так же как при решении задачи на вычисление, составим уравнение и получим формулу

$$x=\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+a^2}.$$

Строим искомый отрезок по найденной формуле, после чего легко построить треугольник ABC по гипотенузе и катету (рис. 37).

Построение гипотенузы треугольника сводится к последовательному построению отрезков по формулам:

1) $CN=\frac{n}{2}$; 2) $BN=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+a^2}$; 3) $BD=BN+CN$ (см. рис. 37).

На луче CN остается построить точку A так, чтобы $AB=BD$. Треугольник ABC искомый, в чем нетрудно убедиться, вычислив проекцию катета AC на гипотенузу AB. Так как $x>a$ при любых значениях a и n, то задача всегда имеет единственное решение.

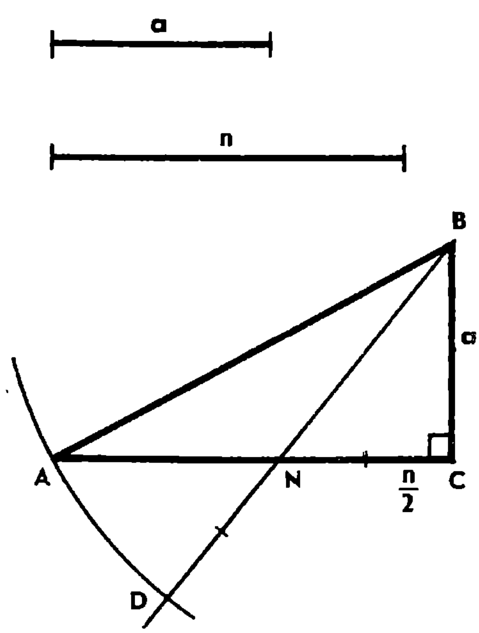


Рис. 37

При решении задачи на вычисление, содержащей буквенные данные (параметры), желательно не только найти формулу для вычисления неизвестного элемента, но и указать множество допустимых значений параметров, т. е. таких значений, при которых заданная в условии задачи фигура существует. Для отыскания множества допустимых значений параметров обычно исследуется возможность построения фигуры по данным в условии элементам или используются неравенства, которым по смыслу задачи должны удовлетворять неизвестные.

Пример 7. Вычислить стороны параллелограмма, если две его высоты, проведенные к смежным сторонам, равны h_1 и h_2, а периметр равен $2p$.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм, DM и DN — его высоты (рис. 38).

Обозначим $AB=x$, тогда $BC=p-x$. Выразив двумя способами площадь параллелограмма, составим уравнение

$$h_1x=h_2(p-x), \quad \text{откуда} \quad x=\frac{ph_2}{h_1+h_2}.$$

Итак, полученное уравнение при любых положительных значениях параметров имеет единственное решение. Однако задача имеет решение лишь при определенных ограничениях, налагаемых на параметры. Корень уравнения по смыслу задачи должен удовлетворять неравенству $x\geqslant h_2$, которое имеет место тогда и только тогда, когда

$$p\geqslant h_1+h_2.$$

Поэтому полный ответ на вопрос задачи должен быть таким:

$$AB=\frac{ph_2}{h_1+h_2}, \quad AD=\frac{ph_1}{h_1+h_2},$$

где $h_1>0$, $h_2>0$ и $h_1+h_2\leqslant p$.

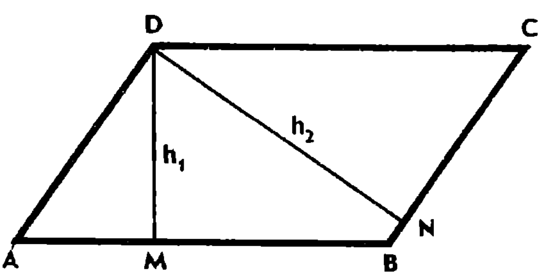


Рис. 38

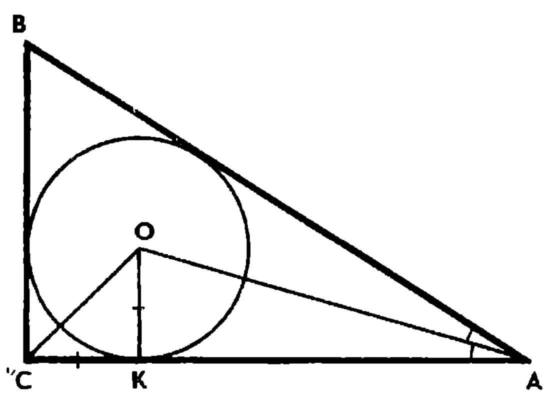


Рис. 39

Пример 8. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle C=90°$) вписана окружность с центром O. Найти радиус этой окружности, если $AC=b$ и $AO=d$ ($b=14$, $d=10$).

Решение. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается катета AC в точке K (рис. 39). Так как $OK \perp AC$ и $\angle OCK=45°$ (CO — биссектриса прямого угла), то треугольник COK прямоугольный равнобедренный.

Обозначим радиус вписанной окружности через x, тогда $OK=CK=x$ и $AK=b-x$. Применив к прямоугольному треугольнику AOK теорему Пифагора, получим уравнение

$$x^2+(b-x)^2=d^2,$$

или

$$2x^2-2bx+b^2-d^2=0.$$

При $b \leqslant d\sqrt{2}$ это уравнение имеет два действительных корня:

$$x_{1,2}=\frac{b \pm \sqrt{2d^2-b^2}}{2}.$$

Пусть $d=10$ и $b=14$. Подставив эти значения в формулу, получим $x_1=6$ и $x_2=8$. Но это не значит, что и задача имеет два решения. Действительно, корень $x=8$ условию задачи не удовлетворяет, поскольку не существует прямоугольного треугольника, катет которого равен 14, а диаметр вписанной в него окружности равен 16.

Проведем исследование: выясним, при каких значениях параметров b и d задача имеет решение.

Так как диаметр окружности, вписанной в треугольник, меньше его катета, то корень уравнения должен удовлетворять неравенству $x<\frac{b}{2}$. Корень $x=\frac{b+\sqrt{2d^2-b^2}}{2}$ этому условию не удовлетворяет и должен быть отброшен.

Второй корень уравнения $x=\frac{b-\sqrt{2d^2-b^2}}{2}$ дает ответ на вопрос задачи лишь при определенных ограничениях, налагаемых на параметры b и d.

Прежде всего заметим, что должно выполняться неравенство $b \leqslant d\sqrt{2}$, иначе x не будет действительным числом.

Примем во внимание геометрическое содержание задачи. Диаметр окружности, вписанной в треугольник, меньше его катета. Значит, должно выполняться соотношение $0<2x<b$. Этого достаточно, чтобы задача имела решение, поскольку указанные значения b и x вполне определяют некоторый треугольник (его можно построить).

Неравенство $x>0$ выполняется тогда и только тогда, когда

$\sqrt{2d^2-b^2}<b$, или $d<b$. Неравенство $x<\frac{b}{2}$ равносильно неравенству $\sqrt{2d^2-b^2}>0$, или $b<d\sqrt{2}$.

Таким образом, радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, может быть вычислен по формуле $x=\frac{b-\sqrt{2d^2-b^2}}{2}$, где $d<b<d\sqrt{2}$.

Допустимые значения параметров b и d можно найти, также исследуя возможность построения треугольника ABC по данным в условии задачи элементам. Треугольник ABC можно построить, если сначала построить треугольник ACO. Согласно условию задачи $AC=b$, $AO=d$, $\angle ACO=45°$ и $\angle CAO<45°$ (половина острого угла).

Нетрудно построить треугольник ACO. На прямой отложим отрезок $AC=b$ и построим угол ACD, равный $45°$. Эти построения всегда возможны и однозначно выполнимы. Затем на луче CD следует построить точку O на расстоянии d от точки A, причем так, чтобы угол CAO был меньше $45°$, поскольку $\angle BAC<90°$. Так как расстояние от точки A до луча CD равно $\frac{b}{\sqrt{2}}$, то на луче CD найдется одна такая точка O при условии, что $d<b<d\sqrt{2}$. Построив треугольник ACO, можно построить вершину B искомого треугольника ABC, учитывая, что AO и CO — биссектрисы его углов A и C.

Таким образом, треугольник ABC, удовлетворяющий условию задачи, существует тогда и только тогда, когда $d<b<d\sqrt{2}$. При тех же значениях параметров b и d разрешима задача на вычисление радиуса вписанной в треугольник окружности.

Задачи

183. Найдите величину острого угла равнобочной трапеции, если диагональ делит ее на два равнобедренных треугольника.

184. Найдите углы треугольника, если известно, что центры окружностей, вписанной в треугольник и описанной около него, симметричны относительно одной из сторон.

185. Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектрисы его углов A и B рассекают сторону CD на три равные части. Вычислите стороны параллелограмма, если его периметр равен 40 см.

186. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке K. Выразите длины отрезков BK и CK через длины a, b, c сторон треугольника. Вычислите BK и CK при $a=7$, $b=6$ и $c=8$.

187. Длины сторон треугольника ABC равны a, b, c. Найдите длины отрезков, на которые точки касания вписанной окружности делят его стороны.

188. Треугольник ABC разделен отрезком CM на два треугольника ACM и BCM так, что окружности, вписанные в эти треугольники, касаются между собой. Выразите длины отрезков AM и BM через длины сторон треугольника.

▲ ▼ ▲

189. Около окружности описана равнобочная трапеция, основания которой равны a и b. Найдите длину отрезка, соединяющего точки касания окружности с боковыми сторонами.

190. Найдите длину отрезка, проведенного через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям и заключенного между боковыми сторонами, если основания трапеции равны a и b.

191. Диагонали трапеции $ABCD$ с основанием AB пересекаются в точке O. Найдите длины отрезков AO и BO, если $AB=a$, $CD=b$, $AC=m$ и $BD=n$. Имеет ли задача решение, если $a=5$, $b=3$, $m=n=4$?

192. В треугольник ABC, стороны которого $AC=b$ и $AB=c$, вписан параллелограмм с периметром, равным $2p$, имеющий с треугольником общий угол A. Найдите стороны параллелограмма, если $b=4$, $c=6$ и p — целое число. Имеет ли задача решение при $b=c$?

▲ ▼ ▲

193. Из концов отрезка AB радиусом AB проведены дуги, пересекающиеся в точке C. Впишите в криволинейный треугольник ABC окружность и вычислите ее радиус, если $AB=a$.

194. В полуокружность, диаметр которой равен 2, вписаны две окружности, касающиеся между собой. Диаметр одной из них равен 1. Найдите диаметр другой окружности.

195. Дан квадрат $ABCD$. Дуги BD и AC окружностей с центрами A и B пересекаются в точке M. Найдите радиус окружности, вписанной в криволинейный треугольник BCM, если $AB=a$.

▲ ▼ ▲

196. В треугольник, периметр которого равен 18 см, вписана окружность, к которой проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной, заключенный внутри треугольника, равен 2 см. Вычислите основание треугольника.

197. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если сумма их равна s, а гипотенуза равна c. При каком условии задача разрешима?

198. Постройте прямоугольный треугольник, зная сумму s его катетов и высоту h, проведенную из вершины прямого угла. Вычислите гипотенузу треугольника, если $s=35$ и $h=12$. Имеет ли задача решение при $s=12$ и $h=5$?

▲ ▼ ▲

199. Около данного квадрата описана окружность и в один из полученных сегментов вписан квадрат. Вычислите сторону вписанного квадрата, если сторона данного квадрата равна a.

200. Даны окружность и прямая. Постройте квадрат так, чтобы две его смежные вершины лежали на прямой, а две другие — на окружности. Вычислите сторону квадрата, если радиус окружности равен 1, а расстояние d от центра окружности до данной прямой — целое число.

201. На окружности радиуса R расположены две смежные вершины квадрата. Расстояние между центрами квадрата и окружности равно d. Вычислите сторону квадрата, если $R=5$ и $d=7$.

▲ ▼ ▲

202. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается его боковых сторон AC и BC в точках M и N. Найдите AB, если $AC=8$ и $MN=3$.

203. Трапеция, боковые стороны которой равны 13 см и 15 см, описана около окружности. Радиус окружности равен 6 см. Найдите основания трапеции.

204. В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник, сумма основания и высоты которого равна s. Найдите высоту треугольника и постройте треугольник, если $R=5$ см и $s=16$ см.

205. Около окружности радиуса r описана равнобочная трапеция, периметр которой равен $2p$. Найдите большее основание трапеции. При каком соотношении между r и p задача разрешима?

206. В окружности радиуса R проведите хорду так, чтобы сумма ее длины и расстояния ее от центра равнялась длине a данного отрезка. При каком условии задача разрешима и сколько она имеет решений? Рассмотрите случаи: 1) $a=2R$; 2) $a=R\sqrt{5}$.

§ 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Тригонометрические функции находят применение при решении многих геометрических задач. Иногда без них вообще нельзя обойтись. Например, задача «По трем сторонам косоугольного треугольника вычислить его углы» не разрешима средствами геометрии, но она разрешима с помощью тригонометрии. Кроме того, применение тригонометрии часто способствует упрощению вычислений.

Для решения треугольников применяются следующие теоремы и формулы:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (теорема косинусов);

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (теорема синусов);

$a = 2R\sin A$, где R — радиус описанной окружности;

$S = \frac{1}{2}ab\sin C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$;

$h_a = b\sin C = 2R\sin B\sin C$;

$p = R(\sin A + \sin B + \sin C) = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

$r = \frac{S}{p} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$,

где r — радиус вписанной в треугольник окружности.

При решении задач на доказательство различных соотношений между элементами многоугольников, вписанных в окружность, используется формула

$$AB = 2R\sin\frac{\alpha}{2},$$

где AB — хорда окружности, R — радиус окружности, α — величина центрального угла AOB.

Пример 9. Около окружности радиуса r описан правильный двенадцатиугольник $A_1A_2 \ldots A_{12}$. Доказать, что

$$A_1A_2 + A_1A_4 = 2r.$$

Решение. Центральный угол A_1OA_2 равен 30°. Значит,

$$A_1A_2 = 2R\sin 15°,\quad A_1A_4 = 2R\sin 45°,\quad 2r = 2R\sin 75°,$$

где R — радиус описанной около двенадцатиугольника окружности.

Таким образом, задача сводится к доказательству тождества

$$\sin 15° + \sin 45° = \sin 75°.$$

Задачу можно решить и геометрическим способом, но для этого нужно найти удачное вспомогательное построение.

Одно из геометрических решений состоит в следующем.

Проведем диагональ A_2A_9 многоугольника и обозначим через B точку пересечения ее с диагональю A_1A_6 (рис. 40). Треугольники A_1A_2B и A_6A_9B будут равносторонними. Следовательно, диагональ A_1A_6 де-

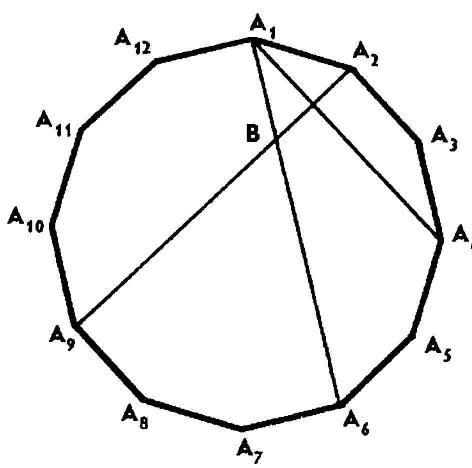


Рис. 40

лится точкой B на два отрезка A_1B и BA_6, соответственно равных отрезкам A_1A_2 и A_1A_4. А так как $A_1A_6=2r$, то доказываемое равенство справедливо.

Пример 10. Вычислить диаметр окружности, вписанной в треугольник ABC, если известны углы треугольника и его высота h_a.

Решение. Пусть $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$. Воспользуемся формулами, выражающими высоту h_a и радиус r вписанной в треугольник окружности через радиус R описанной окружности и углы треугольника ABC. Получим:

$$\frac{r}{h_a}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\beta\sin\gamma}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Учитывая, что $\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, находим:

$$2r=\left(1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)h_a.$$

Из приведенного примера видно, что, когда известны углы треугольника, для доказательства соотношений между его элементами можно использовать следующий прием: по известным формулам выразить линейные элементы треугольника через радиус R описанной окружности и углы треугольника, затем найти отношение этих элементов. При этом R исключается, после чего обычно остается лишь выполнить некоторые тригонометрические преобразования с целью упростить полученное выражение.

Задачи

207. Найдите площадь прямоугольного треугольника, острый угол которого равен α, а высота, проведенная из вершины прямого угла, равна h.

208. Найдите площадь равнобочной трапеции, если диагональ ее равна d, а угол между диагональю и основанием равен α.

209. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке K. Известно, что $AK=2$, $BK=3$ и радиус окружности равен 1. Найдите стороны AC, BC и угол C треугольника.

210. Дан квадрат $ABCD$. На сторонах BC и CD взяты точки M и N, такие, что $BM=\frac{1}{4}AB$ и $DN=\frac{3}{5}AB$. Найдите угол MAN.

211. В окружность вписан квадрат $ABCD$. Хорда AK пересекает сторону CD в точке M, а хорда BK — в точке N. Известно, что $\frac{CM}{MD}=k$. Найдите $\frac{CN}{ND}$.

▲ ▼ ▲

212. Докажите, что для всякого треугольника ABC имеет место соотношение $\operatorname{ctg} A = \frac{\frac{b}{a} - \cos C}{\sin C}$ (формула Тихо де Браге).

213. Найдите угол A треугольника ABC и радиус описанной около него окружности, если $a=2$, $b=1+\sqrt{3}$ и $\angle C = 60^\circ$.

214. Докажите, что для всякого треугольника ABC имеют место следующие соотношения:

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 4S \operatorname{ctg} A$;

2) $a^2 = (b-c)^2 + 4S \operatorname{tg} \frac{A}{2}$;

3) $a^2 = (b+c)^2 - 4S \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$.

Из соотношений 2 и 3 выведите формулу для вычисления площади треугольника по трем его сторонам.

215. Найдите площадь треугольника ABC, зная угол C и отрезки, на которые точка касания вписанной окружности делит сторону AB.

216. Дан равносторонний треугольник ABC. Через точку M, принадлежащую стороне AB, параллельно сторонам AC и BC треугольника проведены прямые, пересекающие эти стороны соответственно в точках K и L. Найдите площадь треугольника KLM, если $AB=a$ и $KL=d$.

217. Докажите, что для всякого треугольника ABC справедливы соотношения:

1) $\frac{r}{p} = \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2}$; 2) $\frac{r_a}{p} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

218. Выразите площадь S треугольника ABC через его углы и периметр $2p$.

▲ ▼ ▲

219. В окружность радиуса R вписан правильный десятиугольник $A_1A_2...A_{10}$. Докажите, что $A_1A_4 - A_1A_2 = R$.

220. В окружность с центром O вписан правильный десятиугольник $A_1A_2...A_{10}$. Докажите, что отрезки OA_1, A_1A_2 и A_1A_3 могут служить сторонами прямоугольного треугольника.

221. В окружность радиуса R вписан правильный четырнадцатиугольник $A_1A_2...A_{14}$. Докажите, что $A_1A_2 - A_1A_4 + A_1A_6 = R$.

222. Докажите, что если A, B, C и D — последовательные вершины правильного семиугольника, то $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

223. Докажите, что для правильного пятнадцатиугольника $A_1A_2...A_{15}$ имеют место соотношения:

1) $A_1A_7 - A_1A_5 = A_1A_2$;

2) $\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_5} + \frac{1}{A_1A_8}$.

▲ ▼ ▲

224. Докажите, что биссектриса l_c треугольника ABC определяется по формуле $l_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$.

225. Докажите, что если для треугольника ABC имеет место равенство $\frac{1}{l_c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, то $\angle C = 120°$.

226. Докажите, что если биссектрисы и стороны треугольника ABC связаны соотношением $al_a = bl_b$, то либо $a = b$, либо $\angle C = 60°$.

▲ ▼ ▲

227. Докажите, что если CD — медиана треугольника ABC и $\angle BDC = \delta$, то $\operatorname{ctg}\delta = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B)$.

228. Стороны a, b, c треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию, c — средняя по величине сторона треугольника. Докажите, что:

1) $\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2})$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2} = 3$.

229. Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник, вершина среднего по величине угла и середины сторон, выходящих из этой вершины, лежат на одной окружности. Верно ли обратное утверждение?

▲ ▼ ▲

230. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ может быть вычислена по формуле

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{B+D}{2}.$$

Отсюда выведите формулы для вычисления площади: 1) четырехугольника, вписанного в окружность; 2) четырехугольника, описанного около окружности.

§ 4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

При решении геометрических задач методом составления уравнений большое значение имеет удачный выбор неизвестных. Если в задаче требуется найти величину некоторого угла, то неизвестными можно считать стороны прямоугольного треугольника, содержащего искомый угол, их отношение определит тригонометрическую функцию угла, а значит, и угол. Однако нередко более простое решение можно получить, если за неизвестное принять величину угла и составить тригонометрическое уравнение или систему уравнений, если неизвестных более одного. Поэтому желательно каждый раз наметить различные подходы к решению задачи и выбрать подходящий способ решения.

Поясним это на конкретном примере.

Пример 11. В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность с центром O. Точка M — середина гипотенузы AB. Найти острые углы треугольника ABC, если $\angle AOM = 90°$.

Решение. *I способ.* Для решения задачи достаточно найти отношение каких-либо двух сторон треугольника AOM (рис. 41).

Введем обозначения: $AB = c$, $AO = x$, $OB = y$, $OM = z$. Так как сумма острых углов треугольника AOB равна 45°, то $\angle AOB = 135°$. По условию задачи $\angle AOM = 90°$, значит, $\angle BOM = 45°$.

Из треугольников AOM и BOM по теореме Пифагора и теореме косинусов находим:

$$x^2 + z^2 = \frac{c^2}{4},$$

$$y^2 + z^2 - \sqrt{2}\,yz = \frac{c^2}{4}.$$

Еще одно уравнение составим, выражая медиану OM треугольника AOB через его стороны:

$$z^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

В итоге мы получили систему трех уравнений, решение которой требует довольно сложных вычислений. Исключив из системы c, приходим к системе двух уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = y^2 - \sqrt{2}\,yz, \\ x^2 = y^2 - 4z^2, \end{cases}$$

откуда находим, что $y = 2\sqrt{2}z$, $x = 2z$ и

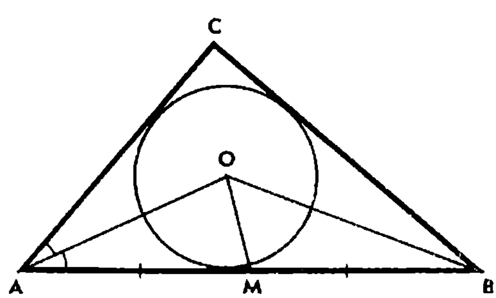


Рис. 41

$$\operatorname{tg} \angle MAO = \frac{z}{x} = \frac{1}{2}.$$

А так как $\angle MAO$ — половина угла A треугольника ABC, то

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{2}.$$

II способ. Положим $\angle MAO = x$, тогда $\angle MBO = 45° - x$. Из прямоугольного треугольника AOM имеем:

$$\frac{OM}{AM} = \sin x.$$

Из треугольника BOM по теореме синусов находим:

$$\frac{OM}{BM} = \frac{\sin(45° - x)}{\sin 45°}.$$

Поскольку $AM = BM$, то мы двумя способами выразили одно и то же отношение и получаем уравнение

$$\sin x = \sqrt{2} \sin(45° - x), \quad 0° < x < 45°.$$

Выполнив несложные преобразования, приведем это уравнение к виду

$$\sin x = \cos x - \sin x,$$

откуда $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$. А так как $\angle A = 2x$, то по формуле удвоенного аргумента находим:

$$\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}.$$

Таким образом, заданный в условии задачи треугольник подобен треугольнику со сторонами 3, 4, 5.

Сравнивая полученные решения, приходим к выводу, что второе решение короче и проще, чем первое.

К составлению тригонометрических уравнений прибегают иногда и в тех случаях, когда угол не является искомым элементом, но искомые и заданные элементы удобно связать с помощью тригонометрических функций вспомогательного угла.

Пример 12. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность с центром O. Найти радиус окружности, если $OA = OB = 7$ и $OC = 3$.

Решение. Из условия задачи следует, что $\angle A = \angle B$ (рис. 42). Радиус r вписанной окружности легко вычислить, если сначала найти угол A треугольника.

Центр O вписанной в треугольник окружности лежит на его высоте CD. Обозначим $\angle A=2x$, тогда $\angle ACD=90°-2x$, $\angle CAO=x$. Из треугольника AOC по теореме синусов находим:

$$\frac{\cos 2x}{\sin x}=\frac{7}{3},\quad 0°<x<45°.$$

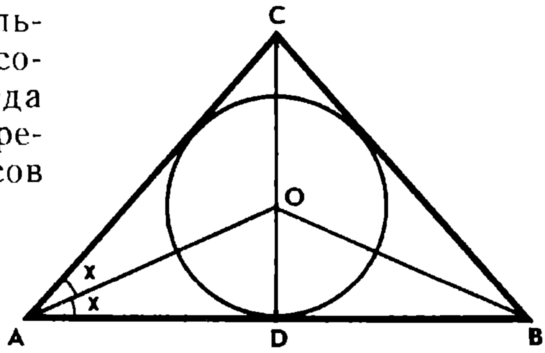


Рис. 42

Используя формулу $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, приходим к уравнению

$$6\sin^2 x+7\sin x-3=0.$$

Положительный корень этого уравнения $\sin x=\frac{1}{3}$ удовлетворяет условию задачи.

Из треугольника AOD найдем радиус r вписанной окружности:

$$r=OA\sin x=7\sin x.$$

Подставляя сюда значение $\sin x$, получаем $r=\frac{7}{3}$.

Задачу можно решить и без применения тригонометрических функций: радиус вписанной окружности обозначить через x и, пользуясь теоремой Пифагора и свойством биссектрисы треугольника, составить квадратное уравнение. Однако такое решение требует более сложных вычислений.

При решении задачи на построение алгебраическим методом иногда также целесообразно за неизвестное принять угол. Для нахождения его составляется тригонометрическое уравнение. Выразив какую-нибудь тригонометрическую функцию искомого угла через данные элементы, можно построить этот угол, а затем и фигуру.

Пример 13. Построить параллелограмм по двум его высотам h_1 и h_2 и периметру $2p$.

Решение. *I способ.* Пусть $ABCD$ — искомый параллелограмм (рис. 43, *а*). Положим $AB=x$, тогда $BC=p-x$. Выразив двумя способами площадь параллелограмма, получим уравнение

$$h_1x=h_2(p-x),\ \text{откуда}\ AB=x=\frac{ph_2}{h_1+h_2}.$$

Отрезок AB можно построить как четвертый пропорциональный к отрезкам p, h_2 и h_1+h_2. Затем, зная стороны и высоту параллелограмма, обычным образом построим параллелограмм.

Задача имеет единственное решение при условии, что $x\geqslant h_2$.

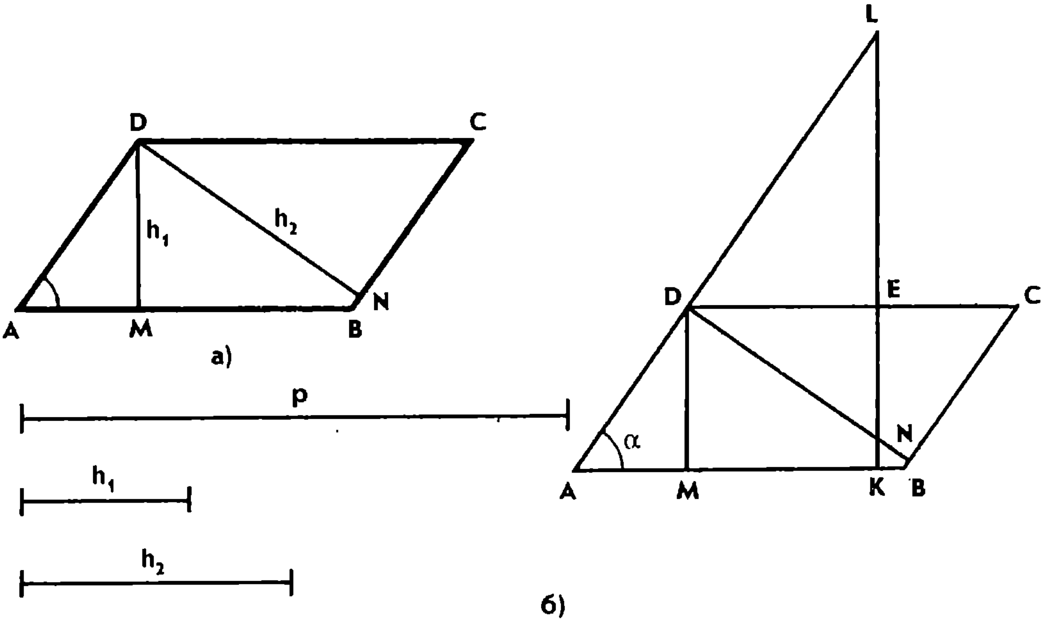


Рис. 43

II способ. Обозначим через α острый угол параллелограмма. Из прямоугольных треугольников ADM и CDN имеем:

$$AD=\frac{h_1}{\sin\alpha},\quad CD=\frac{h_2}{\sin\alpha}.$$

Согласно условию задачи $AD+CD=p$, значит,

$$\sin\alpha=\frac{h_1+h_2}{p}.$$

Чрезвычайно просто исследование задачи. На основании полученного для $\sin\alpha$ выражения и по смыслу задачи приходим к выводу, что задача имеет единственное решение в случае, если $h_1+h_2\leqslant p$ (при $h_1+h_2=p$ получим прямоугольник); если же $h_1+h_2>p$, то задача решений не имеет.

Построение параллелограмма отличается простотой. Из полученной формулы видно, что α — угол прямоугольного треугольника, катет которого равен h_1+h_2, а гипотенуза равна p. Строим треугольник AKL, у которого $AL=p$, $KL=h_1+h_2$, $\angle LAK=\alpha$ (рис. 43, *б*). Через точку E проведем прямую DE, параллельную AK и пересекающую AL в точке D ($KE=h_1$, $EL=h_2$). Полученные отрезки AD и DL — стороны параллелограмма. Дальнейшее ясно.

Доказательство. По построению $ABCD$ — параллелограмм, $AD+CD=p$, $KE=h_1$. Так как $\Delta CDN=\Delta DLE$, то $DN=EL=h_2$.

Внимательный анализ решения задачи показывает, что к такому же построению можно прийти и геометрическим путем, применив метод спрямления.

Задачи

231. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если его высота, проведенная к гипотенузе, равна $\frac{1}{4}$ гипотенузы.

232. Найдите величину острого угла ромба, сторона которого есть среднее пропорциональное между его диагоналями.

233. Окружность, построенная на высоте CD прямоугольного треугольника как на диаметре, пересекает его катеты AC и BC в точках M и N. Площадь треугольника CMN составляет $\frac{1}{8}$ площади треугольника ABC. Найдите острые углы треугольника ABC.

234. В квадрат вписан другой квадрат. Вычислите меньший угол между сторонами квадратов, если их площади относятся как $2:3$.

▲ ▼ ▲

235. Дан треугольник ABC, разность углов A и B которого равна 90°. Сторона AB равна 2, высота CH равна $\sqrt{3}$. Найдите сторону AC и углы треугольника ABC.

236. В треугольнике ABC, угол A которого вдвое больше угла B, проведена высота CH. Найдите длины отрезков AH и BH, если $AB=11$ и $CH=4$.

237. Из вершины C остроугольного треугольника ABC проведена высота CD. Известно, что $AD=m$, $BD=n$ и $\angle ACD=2\angle BCD$. Найдите высоту CD и углы треугольника ABC при $m=1$, $n=\sqrt{2}-1$.

238. Вычислите высоту CH тупоугольного треугольника ABC, если $\angle C=45°$, $AH=6$ и $BH=1$.

▲ ▼ ▲

239. Найдите углы A и B треугольника ABC, если $\angle C=60°$ и высота, проведенная из вершины C, вдвое меньше радиуса описанной окружности.

240. Найдите величину угла при основании равнобедренного треугольника, если отношение радиусов вписанной и описанной окружностей равно $\frac{4}{9}$.

241. Вычислите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если известно, что ортоцентр треугольника лежит на вписанной в треугольник окружности.

242. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, основание AB которой равно диагонали AC. Найдите угол B трапеции и отношение оснований, если $BC^2=AB\cdot AD$.

243. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AB, вершины A, B, C которой лежат на окружности с центром D. Найдите углы A и B трапеции, если $CD^2=AB\cdot BC$.

▲ ▼ ▲

244. Постройте равнобедренный треугольник, если известны длина b боковой стороны и расстояние q от вершины угла при основании до ортоцентра. Вычислите угол при основании, положив $b=1$ и $q=\sqrt{3}$.

245. Постройте равнобедренный треугольник, если даны радиус r вписанной в него окружности и высота h, проведенная к боковой стороне.

246. Постройте равнобедренный треугольник, если даны радиус R описанной около него окружности и высота h, проведенная к боковой стороне ($R=2$, $h=3$).

247. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, медиана которого, проведенная к гипотенузе, есть среднее пропорциональное катетов. Постройте такой треугольник, если дан больший катет треугольника.

248. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе c и биссектрисе l острого угла ($c=6$, $l=1$).

249. Постройте прямоугольный треугольник по катету a и биссектрисе l противолежащего угла ($a=3$, $l=2$).

250. Постройте треугольник ABC, разность углов A и B которого равна 90°, если даны сторона AB и высота CH треугольника.

ГЛАВА IV

ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД

Понятие вектора является одним из фундаментальных понятий современной математики. Большая наглядность и простота векторных операций позволяют использовать элементы векторной алгебры в школе, в курсах физики и математики. С помощью векторов могут быть решены содержательные геометрические задачи, причем их векторные решения часто значительно проще и эффективнее решений средствами элементарной геометрии.

При решении задач настоящей главы находят применение сведения, известные из школьного курса геометрии: действие сложения векторов и его законы, вычитание векторов, действие умножения вектора на число и его законы, понятие коллинеарности векторов, разложение вектора в данном базисе, единственность разложения. Посредством этих действий и их свойств можно решать задачи на параллельность прямых, принадлежность трех точек одной прямой, вычисление отрезков параллельных прямых и некоторые другие. Однако задачи на вычисление расстояний и углов с помощью этих действий не могут быть решены.

Для решения задач, связанных с длинами и углами (их называют метрическими), применяется скалярное умножение векторов и его свойства.

Умение пользоваться векторным методом требует определенных навыков. Прежде всего необходимо хорошее знание теории. Надо научиться переводить геометрические соотношения между фигурами на векторный язык, а также, наоборот, полученные векторные соотношения истолковывать геометрически. Полезно запоминать некоторые, часто встречающиеся при решении задач векторные соотношения и обратить внимание на их большую общность.

Следует иметь в виду, что векторный метод, как и любой другой, не является универсальным, хотя он и позволяет решать широкий круг геометрических задач.

§ 1. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Настоящий параграф содержит задачи, в которых речь идет о принадлежности трех точек одной прямой, параллельности прямых и отношении отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

Приведем основные формулы и соотношения, используемые при решении задач.

1) *Правило сложения векторов:* $\overline{\boldsymbol{AB}}+\overline{\boldsymbol{BC}}=\overline{\boldsymbol{AC}}$.

2) *Правило вычитания векторов:* $\overline{\boldsymbol{AB}}=\overline{\boldsymbol{OB}}-\overline{\boldsymbol{OA}}$, где O — произвольная точка.

3) *Условие принадлежности трех точек A, B и C одной прямой:* а) $\overline{\boldsymbol{BC}}=\boldsymbol{k}\overline{\boldsymbol{BA}}$; б) $\overline{\boldsymbol{OC}}=\boldsymbol{k}\overline{\boldsymbol{OA}}+(1-\boldsymbol{k})\overline{\boldsymbol{OB}}$, где k — некоторое число.

Согласно правилу вычитания векторов из равенства а) следует, что $\overline{OC}-\overline{OB}=k(\overline{OA}-\overline{OB})$, или $\overline{OC}=k\overline{OA}+(1-k)\overline{OB}$, и, наоборот, из равенства б) вытекает равенство а).

4) *Условие параллельности отрезков AB и CD:* $\overline{\boldsymbol{AB}}=\boldsymbol{k}\overline{\boldsymbol{CD}}$.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны и $\overline{b}\neq\overline{0}$, то, как известно, существует единственное число k, удовлетворяющее условию $\overline{a}=k\overline{b}$. Это равенство записывают также в виде $\frac{\overline{a}}{\overline{b}}=k$. Число k называют отношением коллинеарных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Если $\overline{a}=k\overline{b}$ и $k\neq 0$, то $\overline{b}=\frac{1}{k}\overline{a}$. Иногда пишут: $\overline{b}=\frac{\overline{a}}{k}$, считая, что $\frac{\overline{a}}{k}=\frac{1}{k}\overline{a}$.

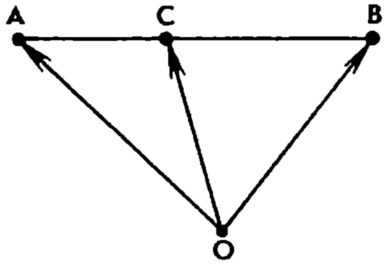


Рис. 44

Пусть A и B — две различные точки прямой, а C — такая точка этой прямой, что $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=k$. Говорят, что точка C делит отрезок AB в данном отношении k (рис. 44).

Прежде всего заметим, что $k \neq -1$. Действительно, если точка C лежит между точками A и B (в этом случае векторы $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$ сонаправлены), то $k>0$. Если точки C и A совпадают, то $k=0$. Если же точка C лежит на прямой AB вне отрезка AB, то векторы $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$ направлены противоположно и число k отрицательное, но длины векторов $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$ различны, поэтому $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \neq -1$.

Пусть $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=k$, или $\overline{AC}=k\overline{CB}$. Выберем произвольную точку O и выразим вектор $\overline{OC}$ через векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. Пользуясь правилом вычитания векторов, получим:

$$\overline{OC}-\overline{OA}=k(\overline{OB}-\overline{OC}), \text{ или } (1+k)\overline{OC}=\overline{OA}+k\overline{OB},$$

откуда $\overline{OC}=\frac{\overline{OA}+k\overline{OB}}{1+k}$.

Если $k=1$, то C — середина отрезка AB и $\overline{OC}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})$.

Итак, получены следующие формулы:

5) *Формула деления отрезка в данном отношении:* если $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=k$, то $\boldsymbol{\overline{OC}=\frac{\overline{OA}+k\overline{OB}}{1+k}}$, где O — произвольная точка.

6) *Формула середины отрезка:* если C — середина отрезка AB, то $\boldsymbol{\overline{OC}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})}$.

При решении задач часто находит применение следующее свойство векторов:

7) *Единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам:* если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны, то из равенства $\boldsymbol{x\bar{a}+y\bar{b}=x_1\bar{a}+y_1\bar{b}}$ следует, что $\boldsymbol{x=x_1}$ и $\boldsymbol{y=y_1}$.

Приведем еще несколько векторных соотношений для четырехугольников.

8) *Если M и N — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, то* $\boldsymbol{\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})}$.

(Докажите самостоятельно, что это векторное равенство выполняется для любых четырех точек A, B, C и D пространства.)

9) *Четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда выполняется одно из соотношений:*

а) $\overline{\mathbf{AB}}=\overline{\mathbf{DC}}$; б) $\overline{\mathbf{OA}}+\overline{\mathbf{OC}}=\overline{\mathbf{OB}}+\overline{\mathbf{OD}}$; в) $\overline{\mathbf{AC}}=\overline{\mathbf{AB}}+\overline{\mathbf{AD}}$.

10) *Если $ABCD$ — трапеция с основанием AB, стороны AD и BC которой при продолжении пересекаются в точке P, а диагонали — в точке O, то* $\overline{\mathbf{PA}}=k\overline{\mathbf{PD}}$, $\overline{\mathbf{PB}}=k\overline{\mathbf{PC}}$ *и* $\overline{\mathbf{OA}}=-k\overline{\mathbf{OC}}$, $\overline{\mathbf{OB}}=-k\overline{\mathbf{OD}}$, где $k=\frac{AB}{CD}$.

Особенностью векторных решений многих задач является то, что все привлекаемые для решения векторы откладываются от одной точки, удачный выбор которой часто позволяет упростить вычисления.

Пример 1. Продолжения сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точки M и N — середины сторон AB и CD. Доказать, что если прямая MN проходит через точку P, то $ABCD$ — трапеция.

Решение. Переведем условие задачи на векторный язык.

Поскольку точки P, A, D, так же как и точки P, B, C, лежат на одной прямой (рис. 45), то

$$\overline{PD}=\alpha\overline{PA},\quad \overline{PC}=\beta\overline{PB}.$$

Точки M и N — середины отрезков AB и CD. Следовательно,

$$\overline{PM}=\frac{1}{2}(\overline{PA}+\overline{PB}),\quad \overline{PN}=\frac{1}{2}(\overline{PD}+\overline{PC}).$$

Учитывая приведенные выше равенства, получаем:

$$\overline{PN}=\frac{1}{2}(\alpha\overline{PA}+\beta\overline{PB}).$$

Согласно условию задачи векторы $\overline{PM}$ и $\overline{PN}$ коллинеарны. Следовательно, найдется такое число λ, что $\overline{PN}=\lambda\overline{PM}$, или

$$\alpha\overline{PA}+\beta\overline{PB}=\lambda(\overline{PA}+\overline{PB}),$$

откуда

$$(\alpha-\lambda)\overline{PA}+(\beta-\lambda)\overline{PB}=\overline{0}.$$

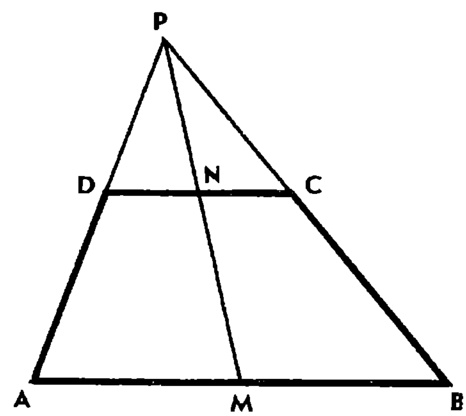


Рис. 45

На основании единственности разложения вектора (в данном случае нулевого) по неколлинеарным векторам $\overline{PA}$ и $\overline{PB}$ заключаем, что $\alpha=\beta=\lambda$.

Таким образом, $\overline{PD}=\alpha\overline{PA}$ и $\overline{PC}=\alpha\overline{PB}$. Вычитая из первого равенства второе, получаем $\overline{CD}=\alpha\overline{BA}$. Значит, стороны CD и AB четырехугольника параллельны, т. е. $ABCD$ — трапеция.

Рассмотрим векторное решение задачи на вычисление отношения отрезков одной прямой.

Пример 2. На сторонах AB и AC треугольника ABC заданы точки M и N, такие, что $\frac{AM}{AB}=m$ и $\frac{AN}{AC}=n$. Отрезки BN и CM пересекаются в точке K. В каком отношении точка K делит каждый из этих отрезков?

Решение. Обозначим $\frac{BK}{KN}=x$ и $\frac{CK}{KM}=y$ (рис. 46, *а*). Для того чтобы вычислить x и y, выразим вектор $\overline{AK}$ двумя способами через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

По формуле деления отрезка в данном отношении имеем:

$$\overline{AK}=\frac{\overline{AB}+x\overline{AN}}{1+x} \text{ и } \overline{AK}=\frac{\overline{AC}+y\overline{AM}}{1+y}.$$

Согласно условию задачи $\overline{AM}=m\overline{AB}$ и $\overline{AN}=n\overline{AC}$, где $m<1$ и $n<1$. Следовательно,

$$\overline{AK}=\frac{\overline{AB}+nx\overline{AC}}{1+x} \text{ и } \overline{AK}=\frac{my\overline{AB}+\overline{AC}}{1+y}.$$

В силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам получим:

$$\frac{1}{1+x}=\frac{my}{1+y}, \quad \frac{nx}{1+x}=\frac{1}{1+y}.$$

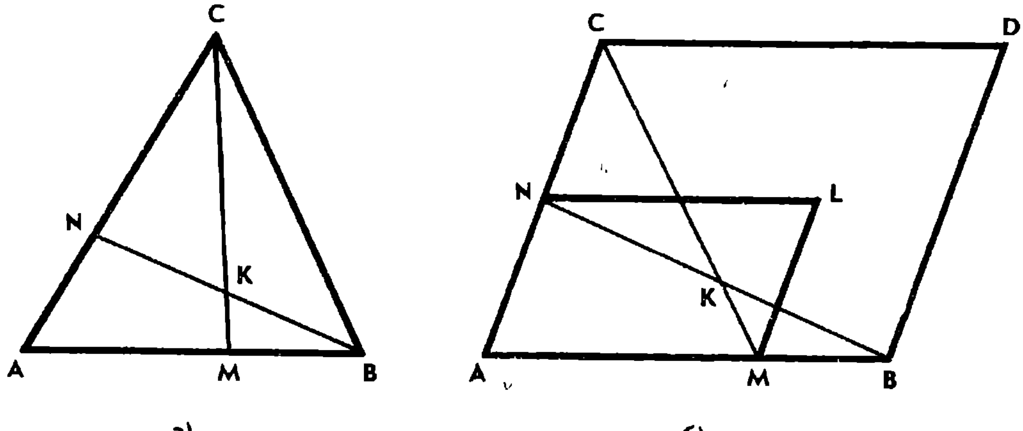


Рис. 46

Решая эту систему уравнений, находим:

$$x=\frac{1-m}{m(1-n)},\quad y=\frac{1-n}{n(1-m)}.$$

Итак, отношения, в которых точка K делит отрезки BN и CM, найдены. Попутно можно найти разложение вектора $\overline{AK}$ по векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AK}=\frac{m(1-n)\overline{AB}+n(1-m)\overline{AC}}{1-mn}.$$

Используем полученный результат для решения следующей задачи, в которой требуется доказать принадлежность трех точек одной прямой.

Пример 3. Даны два параллелограмма $ABDC$ и $AMLN$, причем вершины M и N лежат на сторонах AB и AC параллелограмма $ABDC$. Прямые BN и CM пересекаются в точке K. Доказать, что точки D, L и K лежат на одной прямой. Как следует выбрать точки M и N, чтобы точка L была серединой отрезка DK?

Решение. Для того чтобы доказать, что векторы $\overline{DK}$ и $\overline{DL}$ коллинеарны, выразим векторы $\overline{AD}$, $\overline{AL}$ и $\overline{AK}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (рис. 46, *б*). Согласно правилу сложения векторов имеем:

$$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{AC},\quad \overline{AL}=m\overline{AB}+n\overline{AC},\ \text{где}\ m=\frac{AM}{AB}\ \text{и}\ n=\frac{AN}{AC}.$$

Как было показано в примере 2,

$$\overline{AK}=\frac{m(1-n)}{1-mn}\overline{AB}+\frac{n(1-m)}{1-mn}\overline{AC}.$$

Пользуясь правилом вычитания векторов, находим:

$$\overline{DL}=\overline{AL}-\overline{AD}=(m-1)\overline{AB}+(n-1)\overline{AC},$$

$$\overline{DK}=\overline{AK}-\overline{AD}=\frac{m-1}{1-mn}\overline{AB}+\frac{n-1}{1-mn}\overline{AC}.$$

Таким образом, $\overline{DL}=(1-mn)\overline{DK}$. Значит, точки D, L и K лежат на одной прямой.

Из полученного равенства следует, что точка L тогда и только тогда является серединой отрезка DK, когда $mn=\frac{1}{2}$. Например, если положить $m=\frac{2}{3}$ и $n=\frac{3}{4}$, т. е. точки M и N построить на сторонах AB и AC так, чтобы $AM=\frac{2}{3}AB$ и $AN=\frac{3}{4}AC$.

Из приведенных примеров видно, что для решения подобных задач следует выбрать базис, состоящий из двух неколлинеарных векторов, условие задачи записать в виде векторных равенств и выполнить разложение векторов, входящих в эти равенства, через базисные векторы. Выразив один и тот же вектор через базисные векторы двумя способами, в силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам можно получить систему уравнений для вычисления неизвестных коэффициентов.

Задачи

251. Докажите, что если AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC, то

$$\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=\overline{0}.$$

Выясните геометрический смысл этого равенства.

252. Стороны BC, CA, AB треугольника ABC разделены по его обходу соответственно точками L, M и N в равных отношениях. Докажите, что из отрезков AL, BM и CN, перемещая их параллельно, можно составить треугольник.

253. Параллелограммы $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ имеют общую вершину A. Докажите, что либо из отрезков BB_1, CC_1 и DD_1 можно составить треугольник, либо один из них равен сумме двух других.

254. В плоскости треугольника ABC найдите все точки M, такие, что из отрезков MA, MB и MC, перемещая их параллельно, можно составить треугольник.

▲ ▼ ▲

255. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон и середины диагоналей произвольного четырехугольника, имеют общую середину.

256. а) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

б) Докажите, что точка M является центроидом треугольника ABC тогда и только тогда, когда $\overline{OM}=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$, где O — произвольная точка.

257. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC даны соответственно пары точек A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2, такие, что $\overline{A_1A_2}=$

$=k\overline{BC}$, $\overline{B_1B_2}=k\overline{CA}$, $\overline{C_1C_2}=k\overline{AB}$. Докажите, что центроиды треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ совпадают.

258. Докажите, что вершина D четырехугольника $ABCD$, точка G пересечения его средних линий* и центроид M треугольника ABC лежат на одной прямой, причем $DG=3GM$.

259. Даны треугольник и точка. Докажите, что точки, симметричные данной точке относительно середин сторон треугольника, являются вершинами треугольника, центрально-симметричного данному. Определите положение центра симметрии относительно данной точки и центроида треугольника.

260. Середины отрезков AB и CD, BC и DE пятиугольника $ABCDE$ соединены отрезками. Середины H и K полученных отрезков снова соединены. Докажите, что отрезок HK параллелен стороне AE и $HK=\frac{1}{4}AE$.

▲ ▼ ▲

261. На боковых сторонах AD и BC трапеции $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $BM \parallel DN$. Докажите, что $AN \parallel CM$.

262. Дан четырехугольник $ABCD$. Прямая, проведенная через вершину A параллельно стороне BC, пересекает прямую BD в точке M, а прямая, проведенная через вершину B параллельно стороне AD, пересекает прямую AC в точке N. Докажите, что отрезки MN и CD параллельны.

263. Дан четырехугольник $ABCD$. На его сторонах AB и CD взяты точки M и N так, что $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}$. Прямая MN проходит через точку O пересечения диагоналей четырехугольника. Докажите, что стороны AB и CD параллельны.

264. На сторонах AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$ взяты соответственно точки K, L, M и N так, что

$$\frac{AK}{KB}=\frac{AN}{ND}=\frac{CL}{LB}=\frac{CM}{MD}.$$

Докажите, что четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм, центр которого лежит на отрезке, соединяющем середины диагоналей четырехугольника $ABCD$.

265. Стороны параллелограмма $ABCD$ разделены точками A_1, B_1, C_1, D_1 по обходу его границы в отношении k. Стороны четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ разделены точками A_2, B_2, C_2, D_2 по обходу его границы в отношении $\frac{1}{k}$. Докажите, что $A_2B_2C_2D_2$ — параллелограмм, гомотетичный данному.

---

* Средняя линия четырехугольника — это отрезок, соединяющий середины его противоположных сторон.

▲ ▼ ▲

266. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка M так, что $\frac{AM}{MD}=2$. Точка N — середина стороны CD. Отрезки AN и BM пересекаются в точке K. В каком отношении точка K делит каждый из этих отрезков?

267. Дан треугольник ABC. На сторонах AC и BC взяты соответственно точки M и N так, что $\frac{CM}{CA}=m$ и $\frac{CN}{CB}=n$. Медиана CD треугольника ABC пересекает отрезок MN в точке E. Найдите $\frac{ME}{EN}$ и $\frac{CE}{CD}$.

268. На сторонах AC и BC треугольника ABC даны точки M и N так, что $\frac{AM}{MC}=\frac{CN}{NB}=2$. Отрезки AN и BM пересекаются в точке L. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника ABL?

▲ ▼ ▲

269. а) Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны a и b. На боковых сторонах AD и BC взяты соответственно точки E и F так, что $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}=\frac{m}{n}$. Докажите, что отрезок EF параллелен основаниям трапеции и $EF=\frac{na+mb}{m+n}$.

б) Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, соединяющего боковые стороны трапеции и проходящего через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям.

270. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке P, прямую CD в точке M и прямую BC в точке N. Докажите, что

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{1}{AP}.$$

271. Точки M и N — середины оснований AB и CD трапеции $ABCD$, P — точка пересечения продолжений ее боковых сторон, Q — точка пересечения диагоналей. Докажите, что точки M, N, P и Q принадлежат одной прямой и

$$PQ=\frac{2mn}{m+n}, \text{ где } m=PM,\ n=PN.$$

§ 2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Многие геометрические задачи на вычисление расстояний и углов, на доказательство геометрических тождеств и неравенств могут быть весьма экономно решены при помощи скалярного произведения векторов.

По определению $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos(\widehat{\overline{a},\ \overline{b}})$, следовательно,

$$\overline{a}\cdot\overline{a}=\overline{a}^2=|\overline{a}|^2.$$

Равенство $|\overline{a}|^2=\overline{a}^2$ применяется для нахождения длины вектора.

Угол φ между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ вычисляется так:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}.$$

Кроме формул и соотношений, приведенных в предыдущем параграфе, для решения метрических задач используются также следующие:

1. Для ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{\boldsymbol{a}}\cdot\overline{\boldsymbol{b}}=0\Leftrightarrow\overline{\boldsymbol{a}}\perp\overline{\boldsymbol{b}}$.

2. Для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $|\overline{\boldsymbol{a}}+\overline{\boldsymbol{b}}|\leqslant|\overline{\boldsymbol{a}}|+|\overline{\boldsymbol{b}}|$.

3. Для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $(\overline{\boldsymbol{a}}\cdot\overline{\boldsymbol{b}})^2\leqslant\overline{\boldsymbol{a}}^2\overline{\boldsymbol{b}}^2$.

4. Для любых трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$:

$$(\overline{\boldsymbol{a}}+\overline{\boldsymbol{b}}+\overline{\boldsymbol{c}})^2=\overline{\boldsymbol{a}}^2+\overline{\boldsymbol{b}}^2+\overline{\boldsymbol{c}}^2+2\overline{\boldsymbol{a}}\cdot\overline{\boldsymbol{b}}+2\overline{\boldsymbol{b}}\cdot\overline{\boldsymbol{c}}+2\overline{\boldsymbol{c}}\cdot\overline{\boldsymbol{a}}.$$

5. Для любых трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$:

$$\overline{\boldsymbol{a}}\cdot(\overline{\boldsymbol{b}}-\overline{\boldsymbol{c}})+\overline{\boldsymbol{b}}\cdot(\overline{\boldsymbol{c}}-\overline{\boldsymbol{a}})+\overline{\boldsymbol{c}}\cdot(\overline{\boldsymbol{a}}-\overline{\boldsymbol{b}})=0.$$

Истинность этого тождества легко проверить.

Если A, B, C и D — четыре произвольные точки пространства, причем $\overline{DA}=\overline{a}$, $\overline{DB}=\overline{b}$, $\overline{DC}=\overline{c}$, тождество (5) принимает вид

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC}+\overline{BD}\cdot\overline{CA}+\overline{CD}\cdot\overline{AB}=0.$$

6. Для любых трех точек A, B и C:

$$\overline{\boldsymbol{AB}}\cdot\overline{\boldsymbol{AC}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{AB}^2+\boldsymbol{AC}^2-\boldsymbol{BC}^2).$$

Это равенство равносильно теореме косинусов.

7. Для любых четырех точек A, B, C и D:

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\frac{1}{2}(AD^2+BC^2-AC^2-BD^2).$$

Действительно,

$$AD^2+BC^2-AC^2-BD^2=\overline{AD}^2+(\overline{AC}-\overline{AB})^2-\overline{AC}^2-(\overline{AD}-\overline{AB})^2=$$
$$=2\overline{AB}\cdot\overline{AD}-2\overline{AB}\cdot\overline{AC}=2\overline{AB}\cdot(\overline{AD}-\overline{AC})=2\overline{AB}\cdot\overline{CD}.$$

Пример 4. На стороне AB треугольника ABC взята точка M, такая, что $\frac{AM}{MB}=2$. Найти длину отрезка CM, если $AC=3$, $BC=4$ и $\angle ACB=120°$.

Решение. Выразим вектор $\overline{CM}$ через векторы $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ (рис. 47). По формуле деления отрезка в данном отношении имеем:

$$\overline{CM}=\frac{\overline{CA}+2\overline{CB}}{3}.$$

Вычислив скалярный квадрат вектора $\overline{CM}$, найдем его длину:

$$CM^2=\frac{1}{9}(AC^2+4BC^2+4\overline{CA}\cdot\overline{CB}).$$

Так как $\overline{CA}\cdot\overline{CB}=AC\cdot BC\cos 120°$, то, подставив данные значения, получим:

$$CM=\frac{7}{3}.$$

Задачу нетрудно решить и традиционными средствами. Дважды применив теорему косинусов к треугольнику ABC, найдем сторону AB и косинус угла A. Затем, еще раз используя теорему косинусов, можно вычислить длину отрезка CM.

Нетрудно видеть, что векторное решение проще и короче.

Пример 5. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Найти площадь параллелограмма, если $AB=a$, $BC=b$ и $\angle AOD=\alpha$.

Решение 1. Площадь S параллелограмма вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha.$$

Следовательно, для решения задачи нужно найти произведение длин диагоналей. Будем считать, что $0°<\alpha<90°$, тогда $a>b$ (рис. 48).

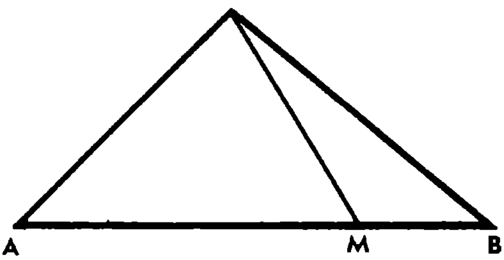


Рис. 47

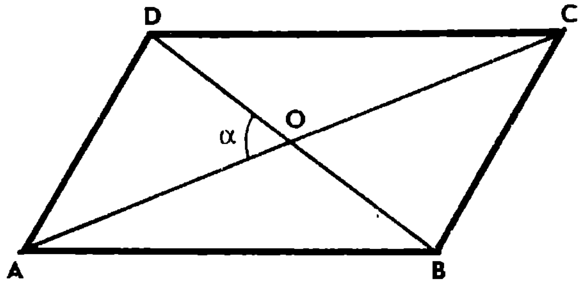


Рис. 48

Обозначим $\overline{AB}=\overline{a}$ и $\overline{AD}=\overline{b}$. Тогда имеем:

$$\overline{AC}=\overline{a}+\overline{b},\quad \overline{DB}=\overline{a}-\overline{b}.$$

Следовательно, $AC \cdot BD \cos\alpha = a^2-b^2$, $AC \cdot BD=\frac{a^2-b^2}{\cos\alpha}$. Подставив найденное значение произведения $AC \cdot BD$ в формулу для вычисления площади параллелограмма, получим:

$$S=\frac{a^2-b^2}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Задачу можно обобщить. Найдем площадь произвольного четырехугольника $ABCD$, зная его стороны и угол AOD между диагоналями.

Решение 2. Площадь любого четырехугольника вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\alpha.$$

Произведение диагоналей найдем, используя доказанное выше тождество (7):

$$2\overline{AC}\cdot\overline{DB}=AB^2+CD^2-AD^2-BC^2.$$

Поскольку $\overline{AC}\cdot\overline{DB}=AC \cdot BD\cos\alpha$, то сразу получаем:

$$S=\frac{1}{4}(AB^2+CD^2-AD^2-BC^2)\operatorname{tg}\alpha,\text{ где } \alpha\neq 90°.$$

Если $AB=CD=a$ и $AD=BC=b$, то получим тот же результат, что и при решении задачи первым способом.

Покажем, как применяя неравенство $\overline{a}^2\geqslant 0$ можно получить геометрические неравенства.

Пример 6. Доказать, что для треугольника ABC и любой точки P выполняется неравенство

$$PA^2+PB^2+PC^2 \geqslant \frac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2).$$

Решение. Имеем $(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC})^2 \geqslant 0$, причем равенство достигается только тогда, когда P — центроид треугольника ABC. Отсюда

$$PA^2+PB^2+PC^2+2\overline{PA}\cdot\overline{PB}+2\overline{PB}\cdot\overline{PC}+2\overline{PC}\cdot\overline{PA} \geqslant 0. \qquad (*)$$

Но $2\overline{PA}\cdot\overline{PB}=PA^2+PB^2-AB^2$, $2\overline{PB}\cdot\overline{PC}=PB^2+PC^2-BC^2$,

$2\overline{PC}\cdot\overline{PA}=PC^2+PA^2-AC^2$ (тождество (6)).

Подставив эти значения скалярных произведений в неравенство (*), получим:

$$PA^2+PB^2+PC^2 \geqslant \frac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2).$$

Задачи

272. Докажите, что параллелограмм тогда и только тогда является прямоугольником, когда его диагонали равны.

273. Докажите, что параллелограмм тогда и только тогда является ромбом, когда его диагонали перпендикулярны.

274. Найдите длину медианы CD треугольника ABC, зная, что $BC=a$, $AC=b$ и $\angle C=\gamma$.

275. Докажите, что медианы AM и BN треугольника ABC перпендикулярны тогда и только тогда, когда его стороны связаны соотношением $a^2+b^2=5c^2$.

276. В треугольнике ABC проведена медиана CD. Докажите, что если угол C треугольника острый, то $CD > \frac{1}{2}AB$; если же угол C тупой, то $CD < \frac{1}{2}AB$.

▲ ▼ ▲

277. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

278. а) Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, точка H — его ортоцентр. Докажите, что $\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$.

б) Известны стороны треугольника ABC и радиус R окружности, описанной около него. Вычислите расстояние от центра O окружности до ортоцентра H треугольника.

279. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру H треугольника ABC относительно середин его сторон, лежат на окружности, описанной около треугольника.

280. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру H треугольника ABC относительно прямых AB, BC и CA, лежат на окружности, описанной около треугольника.

281. Докажите, что во всяком треугольнике ABC центр O описанной окружности, центроид M и ортоцентр H принадлежат одной прямой, причем $\overline{OH}=3\overline{OM}$ (прямая Эйлера).

282. Докажите, что расстояние от центра описанной окружности до стороны треугольника вдвое меньше расстояния от противоположной вершины до ортоцентра.

283. Докажите, что если H — ортоцентр треугольника ABC и R — радиус описанной около него окружности, то

$$AH^2+BC^2=4R^2.$$

284. а) Докажите, что если O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, и D — точка, симметричная O относительно стороны AB, то $CD^2=R^2+a^2+b^2-c^2$.

б) Докажите, что для любого треугольника ABC выполняется неравенство $c^2\leqslant a^2+b^2+R^2$.

285. Докажите, что если CC_1 — высота треугольника ABC, точка H — его ортоцентр, то имеет место равенство $\overline{CC_1}\cdot\overline{HC_1}=\overline{AC_1}\cdot\overline{C_1B}$.

▲ ▼ ▲

286. Докажите, что если I — центр вписанной в треугольник ABC окружности, то имеет место равенство:

1) $\overline{OI}=\dfrac{a\overline{OA}+b\overline{OB}+c\overline{OC}}{a+b+c}$, где O — любая точка;

2) $AI=\sqrt{\dfrac{bc\,(p-a)}{p}}$.

287. Докажите, что расстояние d между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника выражается формулой

$$d^2=R^2-2Rr \text{ (формула Эйлера).}$$

▲ ▼ ▲

288. а) Докажите, что расстояние от центра O окружности, описанной около треугольника ABC, до его центроида M выражается формулой $OM^2=R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$.

б) Докажите, что для любого треугольника ABC имеет место неравенство $a^2+b^2+c^2\leqslant 9R^2$.

289. Докажите, что расстояния от любой точки P плоскости до вершин треугольника ABC и до его центроида M связаны соотношением

$$3PM^2=PA^2+PB^2+PC^2-MA^2-MB^2-MC^2$$

(теорема Лейбница).

290. В плоскости треугольника ABC найдите точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин треугольника наименьшая.

▲ ▼ ▲

291. В четырехугольнике $ABCD$ известны три стороны и два угла, заключенные между данными сторонами: $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$. Докажите, что четвертая сторона AD может быть вычислена по формуле

$$d^2=a^2+b^2+c^2-2ab\cos\beta-2bc\cos\gamma+2ac\cos(\beta+\gamma)$$

(первая теорема косинусов для четырехугольника).

292. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB+BC=CD$, $\angle B=\angle C=120°$. Докажите, что $AD=BD$. Вычислите AD, если $AB=2$ и $BC=3$.

293. Докажите, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов ее боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований.

294. Докажите, что для любого четырехугольника $ABCD$ имеет место неравенство $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2\geqslant AC^2+BD^2$. При каком условии имеет место равенство?

▲ ▼ ▲

295. Найдите длину отрезка MN, соединяющего середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, если $AD=a$, $BC=b$ и угол между продолжениями сторон AD и BC равен φ. Вычислите MN при $a=3$, $b=5$ и $\varphi=60°$.

296. Докажите, что если две противоположные стороны четырехугольника равны, то они одинаково наклонены к прямой, соединяющей середины двух других сторон.

297. Докажите, что расстояние между серединами K и L диагоналей четырехугольника $ABCD$ вычисляется по формуле

$$KL^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2),$$

где a, b, c, d — длины сторон, e и f — длины диагоналей.

▲ ▼ ▲

298. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом C. На сторонах BC, CA и AB взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1, делящие стороны треугольника по обходу в равных отношениях. Докажите, что отрезки CC_1 и A_1B_1 равны и перпендикулярны.

299. В квадрат со стороной a вписана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора точки на окружности. Найдите эту сумму.

300. Около квадрата со стороной a описана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора точки на окружности. Найдите эту сумму.

301. Найдите геометрическое место точек плоскости, сумма квадратов расстояний от которых до вершин правильного треугольника постоянна.

▲ ▼ ▲

302. В плоскости треугольника ABC найдите множество точек M, для которых $MA^2+MB^2=2MC^2$.

303. В плоскости параллелограмма $ABCD$ найдите множество точек M, таких, что $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$.

304. В плоскости параллелограмма $ABCD$ найдите множество точек M, таких, что $MA^2+MB^2=MC^2+MD^2$.

ГЛАВА V

МЕТОД КООРДИНАТ

Координатный метод был разработан французскими математиками Декартом и Ферма в первой половине XVII в. Он является одним из самых универсальных методов решения геометрических задач. Сущность этого метода заключается в следующем.

При помощи двух осей координат на плоскости каждой точке ставится в соответствие пара чисел (называемых координатами точки), при этом линии соответствует уравнение, точке пересечения линий — решение двух уравнений с двумя неизвестными и т. д., т. е. геометрический факт переводится на язык алгебры и для решения задачи используется алгебраический аппарат с его хорошо разработанными приемами тождественных преобразований и решения уравнений.

Чтобы успешно применять координатный метод, надо уметь перевести условие задачи на координатный язык, затем выполнить необходимые алгебраические преобразования, решить систему уравнений и осуществить обратный переход, т. е. геометрически истолковать полученный результат. Решение задачи не требует выполнения вспомогательных построений и естественным образом сводится к применению правил алгебры.

Однако в школьной практике координатный метод применяется довольно редко. Метод имеет и слабые стороны. Решение задачи часто усложняется тем, что простому геометрическому факту не всегда соответствует простая координатная формула, алгебраические преобразования бывают громоздкими и полученные алгебраические зависимости иногда трудно поддаются геометрическому истолкованию. В связи с этим следует отметить, что при решении задачи координатным методом большое значение играет удачный выбор системы координат. Начало и оси координат следует присоединить к данной фигуре наиболее естественным образом. Обычно в качестве осей координат выбираются прямые, заданные в условии задачи, и оси симметрии фигуры, если они имеются.

Прямоугольная система координат хорошо известна из школьного курса математики. Она находит применение при решении метрических задач. Для решения задач, связанных с доказательством параллельности прямых, с вычислением отношения отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, и некоторых других более удобной является другая система координат, называемая общей декартовой или аффинной.

§ 1. АФФИННАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Дадим описание аффинной системы координат и выведем основные формулы, необходимые для решения задач.

Возьмем на плоскости некоторую точку O и отложим от нее два неколлинеарных вектора $\overline{OE_1}=\overline{e_1}$ и $\overline{OE_2}=\overline{e_2}$ (рис. 49).

Пусть $\overline{a}$ — произвольный вектор. Отложив его от точки O, получим точку A, такую, что $\overline{OA}=\overline{a}$. Через точку A проведем прямые параллельно прямым OE_1 и OE_2, пересекающие прямые OE_2 и OE_1 в точках A_2 и A_1. Согласно правилу сложения векторов имеем:

$$\overline{OA}=\overline{OA_1}+\overline{OA_2}.$$

Но вектор $\overline{OA_1}$ коллинеарен вектору $\overline{e_1}$. Поэтому $\overline{OA_1}=x\overline{e_1}$. Аналогично $\overline{OA_2}=y\overline{e_2}$. Таким образом, получаем равенство

$$\overline{a}=x\overline{e_1}+y\overline{e_2}.$$

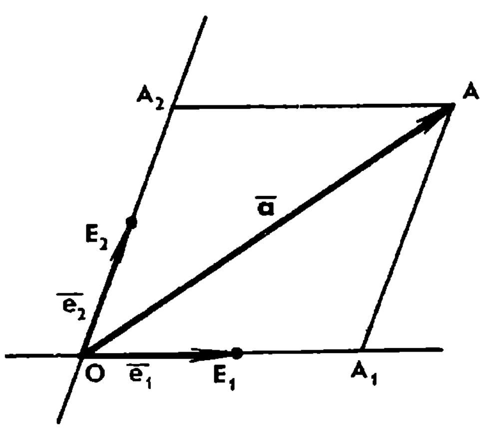


Рис. 49

Из единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам следует, что числа x и y определяются однозначно.

Заданные векторы $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ называются *базисными* или координатными, а числа x и y — *координатами вектора* $\overline{a}$ *в базисе* $(\overline{e_1}; \overline{e_2})$. Краткая запись: $\overline{a}=(x; y)$. Очевидно, $\overline{e_1}=(1; 0)$ и $\overline{e_2}=(0; 1)$.

Действия над векторами, заданными своими координатами, выполняются по следующим правилам:

Если $\overline{a}=(a_1;\ a_2)$ *и* $\overline{b}=(b_1;\ b_2)$, *то*:

1) $\overline{a}+\overline{b}=(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$;

2) $\overline{a}-\overline{b}=(a_1-b_1;\ a_2-b_2)$;

3) $k\overline{a}=(ka_1;\ ka_2)$.

Точка O и базисные векторы $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ задают на плоскости ***аффинную систему координат***.

Пусть A — произвольная точка плоскости. *Координатами точки A в данной аффинной системе координат называют координаты вектора $\overline{OA}$.*

Если $\overline{OA}=x\overline{e}_1+y\overline{e}_2$, то точка A имеет координаты x и y. Записывается это так: $A(x;\ y)$. Обратно, для каждой пары чисел $(x;\ y)$ можно указать точку, имеющую данные координаты. Таким образом, если на плоскости задана аффинная система координат, то устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и парами $(x;\ y)$ действительных чисел.

Точку O называют *началом координат*, направленные прямые OE_1 и OE_2 — *осями координат*. Точки E_1 и E_2 имеют координаты: $E_1(1;\ 0)$, $E_2(0;\ 1)$.

В частном случае, когда координатные векторы $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ взаимно перпендикулярны и $|\overline{e}_1|=|\overline{e}_2|=1$, система координат называется прямоугольной декартовой или просто прямоугольной.

Используя определение координат точки и правила действий над векторами в координатах, можно вывести следующие формулы:

Пусть на плоскости даны две точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$.

1) Координаты вектора $\overline{AB}$ вычисляются так:

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1).$$

2) Если точка C делит отрезок AB в отношении $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=k$, то

$$\overline{OC}=\frac{\overline{OA}+k\overline{OB}}{1+k},$$

а координаты точки C определяются формулами

$$x=\frac{x_1+kx_2}{1+k},\quad y=\frac{y_1+ky_2}{1+k}.$$

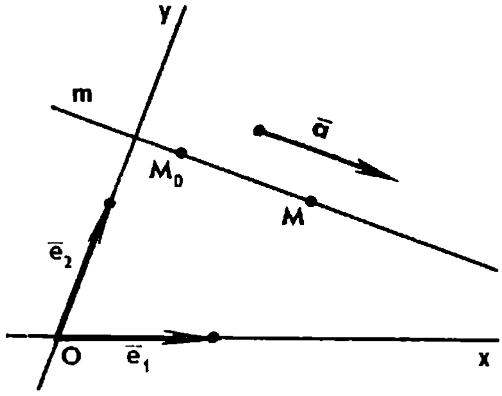


Рис. 50

3) Если точка C делит отрезок AB пополам, то $k=1$. Поэтому координаты середины отрезка AB вычисляются по формулам

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Рассмотрим различные способы задания прямой на плоскости.

Пусть требуется написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ параллельно ненулевому вектору $\bar{a}=(\alpha;\ \beta)$ (рис. 50). Вектор $\bar{a}$ будем называть направляющим вектором прямой m.

Произвольная точка $M(x;\ y)$ принадлежит прямой m тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{a}$ коллинеарны, т. е. когда выполняется равенство

$$\overline{M_0M}=t\bar{a},\ \text{или}\ \overline{OM}=\overline{OM_0}+t\bar{a},$$

где t — некоторое число (параметр).

Это соотношение в координатах принимает вид

$$x=x_0+\alpha t,\quad y=y_0+\beta t. \qquad (*)$$

Полученные уравнения называют *параметрическими уравнениями прямой.*

Если прямая m параллельна оси Oy, то $\alpha=0$ и первое уравнение принимает вид $x=x_0$, а второе уравнение становится лишним.

Уравнение прямой, параллельной оси Ox, имеет вид $y=y_0$.

Исключив из системы $(*)$ параметр t, получим уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором, в виде

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta},\quad \alpha\neq 0,\ \beta\neq 0.$$

При $\alpha\neq 0$ это уравнение можно записать так:

$$y-y_0=k(x-x_0),\ \text{где}\ k=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Число k называют *угловым коэффициентом прямой m.* В случае, когда $x_0=0$ и $y_0=b$, уравнение прямой с угловым коэффициентом k принимает вид $y=kx+b$.

Если прямая m задана двумя точками $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, то вектор $\overline{M_1M_2}$ является направляющим вектором прямой и ее уравнение легко записать. В частности, если прямая проходит через точки $A(a;\ 0)$ и $B(0;\ b)$, отличные от начала координат, то $\overline{AB}=(-a;\ b)$ и уравнение прямой принимает вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Это уравнение называют *уравнением прямой в отрезках.*

Таким образом, всякую прямую на плоскости можно задать уравнением первой степени $Ax+By+C=0$, где хотя бы одно из чисел A и B отлично от нуля.

Верно и обратное утверждение: линия на плоскости, заданная в аффинной системе координат уравнением первой степени

$$Ax+By+C=0, \text{ есть прямая.}$$

Действительно, при $B\neq 0$ уравнение $Ax+By+C=0$ приводится к виду $y=kx+b$, где $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$, и, следовательно, есть уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку с координатами $(0;\ b)$. Если же $B=0$ и $A\neq 0$, то уравнение принимает вид $x=a$, где $a=-\frac{C}{A}$, т. е. является уравнением прямой, параллельной оси Oy.

Приведем пример использования аффинной системы координат для решения несложной задачи, которую можно решить и другими методами, например применив гомотетию (см. задачу 81) или векторы.

П р и м е р 1. Доказать, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

Р е ш е н и е. Пусть $ABCD$ — произвольная трапеция, M и N — середины оснований, P — точка пересечения продолжений боковых сторон, Q — точка пересечения диагоналей (рис. 51).

Середину M большего основания AB трапеции примем за начало аффинной системы координат, направленные прямые MB и MN — за оси координат. Пусть вершины B и C имеют координаты: $B(a;\ 0)$, $C(b;\ c)$. Так как M и N — середины оснований AB и CD трапеции и $CD\parallel AB$, то точки A и D будут иметь координаты: $A(-a;\ 0)$, $D(-b;\ c)$.

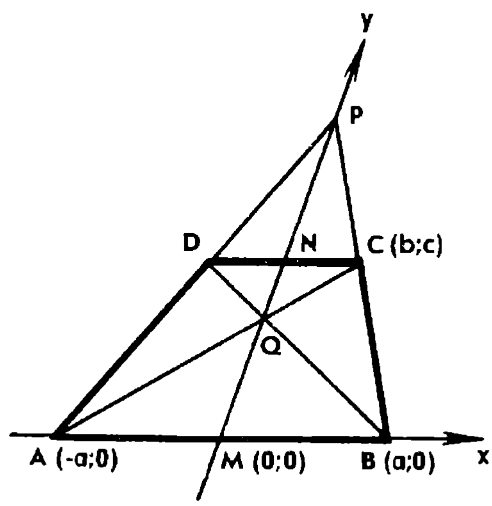


Рис. 51

Найдем координаты вектора $\overline{AC}$: $\overline{AC}=(a+b;\ c)$ — и запишем уравнение прямой AC:

$$\frac{x+a}{a+b}=\frac{y}{c}.$$

Точно так же составим уравнение прямой BD:

$$\frac{x-a}{a+b}=\frac{y}{-c}.$$

Решив систему этих уравнений, найдем координаты точки пересечения прямых AC и BD:

$$Q\left(0;\ \frac{ac}{a+b}\right).$$

Отсюда видно, что точка Q лежит на оси Oy, т. е. на прямой MN.

Совершенно так же докажем, что прямые AD и BC имеют уравнения

$$\frac{x+a}{a-b}=\frac{y}{c},\quad \frac{x-a}{a-b}=\frac{y}{-c},$$

а точка их пересечения P имеет координаты: $P\left(0;\ \frac{ac}{a-b}\right)$. Значит, точка P также лежит на прямой MN.

Заметим, что для решения приведенной задачи систему координат можно выбрать и по-другому. Например, точку P принять за начало координат, а $\overline{PA}$ и $\overline{PB}$ — за координатные векторы. Точки M, N, P и Q будут лежать на прямой, уравнение которой $y=x$. Вычисления также будут достаточно простыми.

Покажем, как с помощью аффинной системы координат вычислить отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

Пример 2. Дана трапеция $ABCD$. Точки M и N — середины оснований AB и CD, P — точка пересечения продолжений боковых сторон и Q — точка пересечения диагоналей. Доказать, что

$$\frac{1}{PQ}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{PM}+\frac{1}{PN}\right).$$

Решение. Воспользуемся обозначениями и результатом только что решенной задачи. Точки M, Q, N, P лежат на оси Oy в указанном здесь порядке, причем ординаты их соответственно равны 0, $\frac{ac}{a+b}$, c, $\frac{ac}{a-b}$, где $0<b<a$.

Значит, $\frac{PQ}{PM}=\frac{\frac{ac}{a-b}-\frac{ac}{a+b}}{\frac{ac}{a-b}}=\frac{2b}{a+b}$, $\frac{PQ}{PN}=\frac{\frac{ac}{a-b}-\frac{ac}{a+b}}{\frac{ac}{a-b}-c}=\frac{2a}{a+b}$.

Отсюда $\frac{PQ}{PM}+\frac{PQ}{PN}=2$, или $\frac{1}{PQ}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{PM}+\frac{1}{PN}\right)$.

Метод координат с успехом может быть использован при решении задач на отыскание множеств точек, удовлетворяющих тем или иным геометрическим условиям.

Пример 3. Дан треугольник ABC. Через точку M, лежащую на стороне AB, проведены прямые, параллельные медианам AA_1 и BB_1 и пересекающие стороны BC и AC соответственно в точках P и Q. Найти множество точек S, для которых $MPSQ$ — параллелограмм.

Решение. Введем на плоскости аффинную систему координат так, чтобы вершины треугольника ABC имели координаты: $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(0;\ 1)$ (рис. 52). Тогда $A_1\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, $B_1\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$. Пусть $M(m;\ 0)$ — точка, лежащая на стороне AB треугольника. Легко видеть, что точка Q будет иметь координаты: $Q\left(0;\ \frac{m}{2}\right)$.

Выразим через m координаты точки P. Учитывая, что $MP \parallel AA_1$ и $\overline{AA_1}=\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, запишем уравнение прямой MP:

$$x-m=y.$$

Уравнение прямой BC имеет вид

$$x+y=1.$$

Решив систему этих уравнений, найдем координаты точки P:

$$x=\frac{1+m}{2},\quad y=\frac{1-m}{2}.$$

Пусть $(X;\ Y)$ — координаты вершины S параллелограмма $MPSQ$. Тогда отрезки MS и PQ имеют общую середину, и по формуле для координат середины отрезка получаем:

$$X=\frac{1-m}{2},\quad Y=\frac{1}{2}.$$

Уравнение $Y=\frac{1}{2}$ есть уравнение пря-

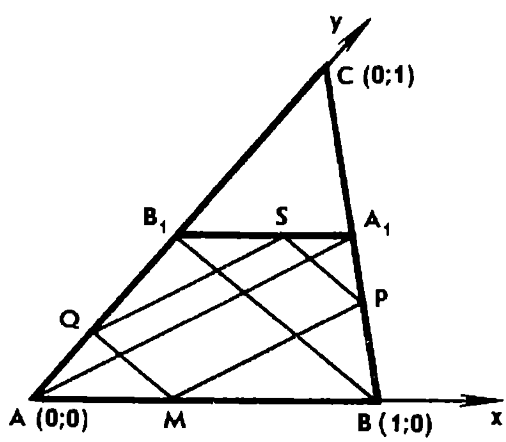


Рис. 52

мой A_1B_1. По смыслу задачи $0<m<1$, поэтому $0<X<\frac{1}{2}$. Значит, полученные соотношения означают, что точка S принадлежит средней линии A_1B_1 треугольника.

Обратно, если S — некоторая точка отрезка A_1B_1, то, полагая $S\left(s;\ \frac{1}{2}\right)$, с помощью таких же вычислений можно показать, что параллелограмм $MPSQ$, удовлетворяющий условию задачи, существует, причем $M(1-2s;\ 0)$.

Итак, множество точек S есть средняя линия A_1B_1 треугольника ABC (без точек A_1 и B_1).

Из приведенных примеров видно, что при решении подобных задач, в которых речь идет о параллельности отрезков и прямых, принадлежности трех точек одной прямой, отношении отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, введение аффинной системы координат вместо прямоугольной имеет большое преимущество. Систему координат удается естественным образом связать с рассматриваемой фигурой, не требуется проведения дополнительных линий, данные точки по возможности располагаются на осях координат, благодаря чему упрощаются вычисления, достигается большая наглядность и облегчается геометрическое истолкование полученного результата.

Задачи

305. На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N, такие, что $\frac{AM}{MD}=\frac{CN}{NB}=2$. Точка P делит отрезок MN в отношении $1:2$, считая от точки M. Прямая AP пересекает сторону CD в точке K. Найдите $\frac{CK}{KD}$.

306. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M — середина стороны BC, точка N — середина отрезка AM. Прямая DN пересекает сторону AB в точке K. Найдите площади треугольников ADK и AKN, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1.

307. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке P, прямую CD в точке M и прямую BC в точке N. Докажите, что $PA^2=PM\cdot PN$.

308. Дан параллелограмм $ABCD$. На его стороне BC взята произвольная точка P, а на продолжении BC за точку C — точка Q, такая, что $BP=CQ$. Прямые AP и AQ пересекают прямую CD соответственно в точках M и N. Докажите, что $DN^2=$ $=CN\cdot MN$.

▲ ▼ ▲

309. а) На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки M и N, такие, что $\frac{AM}{MC}=\frac{1}{4}$ и $\frac{BN}{NC}=\frac{3}{4}$. Докажите, что прямая MN проходит через центроид G треугольника.

б) Через центроид G треугольника ABC проведена прямая, пересекающая стороны AC и BC соответственно в точках M и N. Докажите, что $\frac{AM}{MC}+\frac{BN}{NC}=1$.

310. Продолжения боковых сторон AD и BC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K. Через точку K параллельно основаниям проведена прямая, пересекающая продолжения диагоналей AC и BD соответственно в точках M и N. Найдите длину отрезка MN, если основания трапеции равны a и b.

311. Через точку M стороны AB треугольника ABC проведены прямые параллельно сторонам AC и BC, пересекающие BC и AC соответственно в точках K и L. Отрезок AK пересекает отрезок LM в точке P, а BL пересекает KM в точке Q. Докажите, что отрезки PQ и AB параллельны. Найдите $\frac{PQ}{AB}$, если $\frac{AM}{MB}=2$.

312. Через точку M стороны AB треугольника ABC проведены прямые параллельно двум другим его сторонам, пересекающие стороны BC и AC соответственно в точках K и L. Произвольная секущая, проходящая через вершину C, пересекает отрезок KM в точке P, а продолжение LM в точке Q. Докажите, что прямые AQ и BP параллельны. Найдите отношение отрезков AQ и BP, если M — середина стороны AB и P — середина отрезка KM.

▲ ▼ ▲

313. На боковых сторонах AD и BC трапеции $ABCD$ взяты точки M и N, такие, что $\frac{AM}{MD}=\frac{CN}{NB}$. Прямая MN пересекает диагонали AC и BD соответственно в точках P и Q. Докажите, что $MP=QN$.

314. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, причем $\frac{AO}{OC}=\frac{3}{2}$ и $\frac{BO}{OD}=\frac{4}{3}$. На диагоналях AC и BD взяты точки P и Q так, что $AP=OC$ и $BQ=OD$. Прямая PQ пересекает стороны AD и BC соответственно в точках M и N. Докажите, что $MP=PQ=QN$.

315. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AO=OC$ и $BO=2OD$. Через середину M стороны AB проведена прямая MO, пересекающая сторону CD в точке N. Найдите отношение $\frac{CN}{ND}$.

316. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ параллельно сторонам AD и BC проведены прямые KM и LN, пересекающие сторону AB в точках K и L, а сторону CD в точках M и N. Докажите, что $\frac{KL}{AB}=\frac{MN}{CD}$. Найдите $\frac{KL}{AB}$, если $AO=OC$ и $BO=2OD$.

▲ ▼ ▲

317. Докажите, что в любом четырехугольнике, противоположные стороны которого не параллельны, середины его диагоналей и середина отрезка, соединяющего точки пересечения продолжений противоположных сторон, лежат на одной прямой (теорема Гаусса).

318. Точки M и N лежат соответственно на сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$. Через середины отрезков DN и AB проведена прямая. Через середины отрезков BM и AD — вторая прямая, пересекающая первую в точке S. Докажите, что прямая AS проходит через середину отрезка MN.

319. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ даны соответственно точки M и N. Отрезки AN и DM пересекаются в точке P, отрезки BN и CM — в точке Q. Прямая PQ пересекает стороны AD и BC параллелограмма соответственно в точках E и F. Докажите, что $AE=CF$.

▲ ▼ ▲

320. Дан треугольник ABC. Стороны AC и CB треугольника делятся точками M и N в одном и том же отношении: $\frac{AM}{MC}=\frac{CN}{NB}=k$. Найдите геометрическое место середин отрезков MN для всех значений k.

321. На одной стороне угла с вершиной O заданы точки A и B (точка A лежит между O и B). На другой стороне выбирается произвольная точка Q и строится точка P так, что $OP=2OQ$. Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AP и BQ.

322. Дана трапеция $ABCD$, диагонали которой пересекаются в точке O. Середина M основания AB соединена отрезками с вершинами C и D. Через произвольную точку боковой стороны трапеции и точку O проведена прямая, пересекающая отрезки DM и CM соответственно в точках P и Q. Докажите, что точка S пересечения прямых AP и BQ принадлежит отрезку CD.

§ 2. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Для решения задач, в которых существенную роль играет понятие расстояния между двумя точками, применяют прямоугольную систему координат. Приведем необходимые теоретические сведения.

Пусть даны две точки плоскости $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$. Тогда *расстояние* между ними вычисляется по формуле

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Пользуясь этой формулой, запишем уравнение окружности радиуса r с центром в точке $C(a;\ b)$:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Теория прямой, изложенная в предыдущем параграфе, справедлива и для прямоугольной системы координат. В частности, при решении задач можно пользоваться уравнением прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $A(x_1;\ y_1)$:

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

Отсюда следует, что угловой коэффициент прямой, заданной двумя точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, вычисляется по формуле

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Если прямая проходит через точку $B(0;\ b)$, то ее уравнение принимает вид $y=kx+b$.

Напомним, что угловой коэффициент прямой k в прямоугольной системе координат имеет следующий геометрический смысл: $k=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона прямой l к оси абсцисс.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы своими уравнениями с угловыми коэффициентами $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ (рис. 53).

Если $\alpha_1=\alpha_2$, то $k_1=k_2$, и обратно. Следовательно, условие $k_1=k_2$ выражает *признак параллельности* прямых l_1 и l_2.

Если $l_1\perp l_2$, то $\alpha_1=90°+\alpha_2$ или $\alpha_2=90°+\alpha_1$. Будем считать, что $\alpha_1\neq 0°$ и $\alpha_2\neq 0°$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha_2=-\operatorname{ctg}\alpha_1$, или

$$k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

Верно и обратное утверждение. Следовательно, полученное равенство есть *условие перпендикулярности* двух прямых.

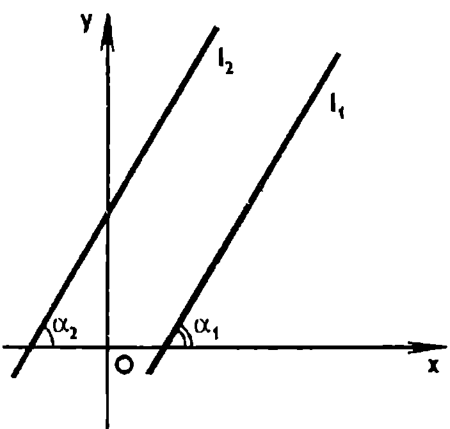


Рис. 53

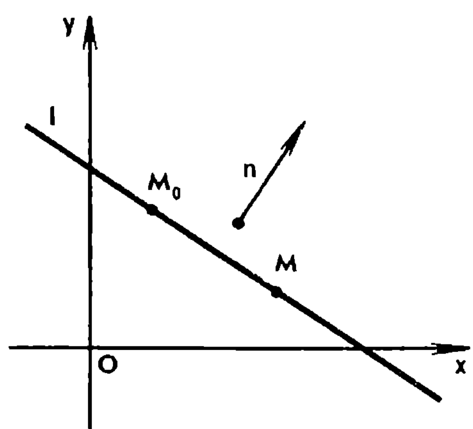


Рис. 54

Кроме тех способов задания прямой, которые были рассмотрены в предыдущем параграфе, при решении метрических задач пользуются еще одним способом: прямая l задается начальной точкой M_0 и **нормальным** вектором $\bar{n}$ (так называют вектор, перпендикулярный к прямой l).

Пусть на плоскости введена прямоугольная система координат и требуется написать уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}=(A;\ B)$ (рис. 54).

Произвольная точка $M(x;\ y)$ плоскости принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\bar{n}$, т. е. $\bar{n}\cdot\overline{M_0M}=0$. Так как вектор $\overline{M_0M}$ имеет координаты $(x-x_0;\ y-y_0)$, то это условие в координатах запишется так:

$$A\ (x-x_0)+B\ (y-y_0)=0.$$

Это и есть *уравнение прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0;\ y_0)$ *и перпендикулярной вектору* $\bar{n}=(A;\ B)$.

Верно и обратное утверждение: линия на плоскости, заданная в прямоугольной системе координат уравнением $Ax+By+$ $+C=0$, есть прямая, а вектор $\bar{n}=(A;\ B)$ является нормальным вектором этой прямой.

Заметим, что вектор $\bar{a}=(-B;\ A)$ есть направляющий вектор прямой l. Так как $\bar{n}\cdot\bar{a}=A\cdot(-B)+B\cdot A=0$, то вектор $\bar{a}$ перпендикулярен вектору $\bar{n}$ и, следовательно, параллелен прямой l.

Без вывода приведем еще **формулу** *для вычисления расстояния d от данной точки* $M_1(x_1;\ y_1)$ *до прямой l, заданной уравнением* $Ax+By+C=0$:

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Метод координат может быть с успехом использован при решении задач, в которых требуется вычислить расстояние или величину угла между двумя прямыми, доказать перпендикулярность прямых, отыскать множество точек, обладающих определенным свойством. Приступая к решению задачи, следует рационально выбрать прямоугольную систему координат. Желательно, чтобы данные точки располагались на осях координат, тогда среди их координат будут нули. Это позволит упростить вычисления.

Пример 4. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором проведены высота CD и перпендикуляр DE к боковой стороне BC. Точка M — середина отрезка DE. Доказать, что отрезки AE и CM перпендикулярны.

Решение. Высота равнобедренного треугольника является его осью симметрии. Поэтому середину D основания AB треугольника ABC удобно принять за начало прямоугольной системы координат, а направленные прямые AB и DC — за оси координат (рис. 55). Тогда вершинам треугольника можно отнести координаты: $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(0;\ c)$.

Вычислим угловые коэффициенты прямых AE и CM. Для этого сначала найдем координаты точек E и M.

Запишем уравнение прямой BC:

$$x+\frac{y}{c}=1, \text{ или } y=-cx+c.$$

Так как $DE\perp BC$, то угловой коэффициент прямой DE равен $\frac{1}{c}$, а ее уравнение есть $y=\frac{1}{c}x$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y=-cx+c, \\ y=\frac{1}{c}x, \end{cases}$$

находим координаты точки E: $x_1=\frac{c^2}{1+c^2}$, $y_1=\frac{c}{1+c^2}$.

Следовательно, $M\left(\frac{x_1}{2};\ \frac{y_1}{2}\right)$.

Угловые коэффициенты прямых AE и CM равны соответственно $k_1=\frac{y_1}{x_1+1}$ и $k_2=\frac{y_1-2c}{x_1}$. Подставив значения x_1 и y_1, получим: $k_1=\frac{c}{2c^2+1}$ и $k_2=-\frac{2c^2+1}{c}$.

Отсюда $k_1\cdot k_2=-1$, поэтому $AE\perp CM$.

Пример 5. На плоскости даны две точки A и B. Найти множество вершин C треугольников ABC, в каждом из которых

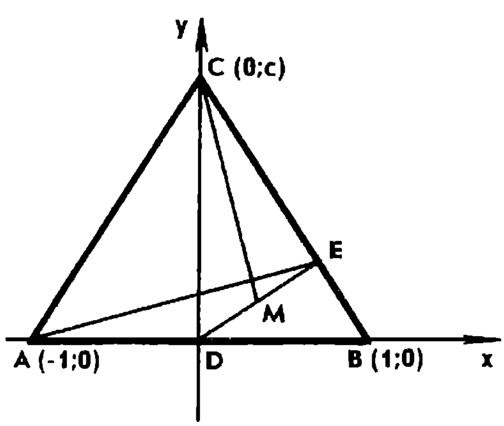


Рис. 55

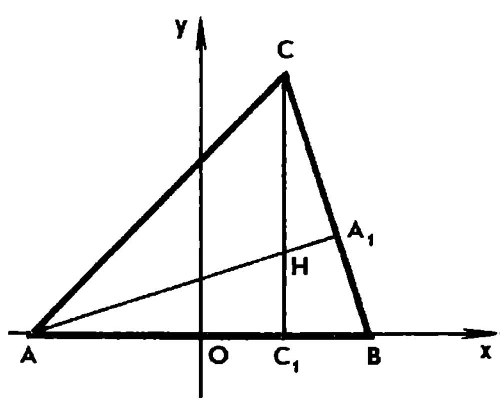


Рис. 56

расстояние от вершины C до ортоцентра H треугольника равно длине стороны AB.

Решение. Введем на плоскости прямоугольную систему координат с началом в середине стороны AB — точке O (рис. 56). Прямую AB примем за ось Ox и положим: $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ 0)$. Координаты произвольной точки C обозначим через X и Y.

Уравнение высоты CC_1 есть $x=X$.

Вектор $\overline{BC}=(X-1;\ Y)$ является нормальным вектором прямой AH. Уравнение прямой AH имеет вид

$$(X-1)(x+1)+Yy=0.$$

По смыслу задачи $Y\neq 0$. Решая систему полученных уравнений, найдем координаты точки H пересечения высот треугольника:

$$H\left(X;\ \frac{1-X^2}{Y}\right).$$

Далее находим $CH=\left|Y-\frac{1-X^2}{Y}\right|=\left|\frac{X^2+Y^2-1}{Y}\right|.$

Согласно условию задачи $CH=AB=2$. Приходим к уравнению $|X^2+Y^2-1|=2|Y|$, равносильному двум уравнениям:

$$X^2+(Y-1)^2=2,\quad X^2+(Y+1)^2=2.$$

Обратно, если координаты точки C удовлетворяют одному из этих уравнений, то $|X^2+Y^2-1|=2|Y|$ и, следовательно, $CH=2$.

Таким образом, искомое множество точек C есть совокупность двух окружностей радиуса $\sqrt{2}$, проходящих через точки A и B и симметричных относительно прямой AB (точки A и B следует исключить).

Метод координат позволяет эффективно решать задачи, в которых, кроме прямых и окружностей, фигурируют такие линии, как эллипс, гипербола и парабола. Эти кривые обладают интересными геометрическими свойствами.

Пример 6. Найти множество точек M плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки F и данной прямой d, не проходящей через точку F.

Решение. Пусть D — проекция точки F на прямую d (рис. 57). Середину O отрезка DF примем за начало прямоугольной системы координат, а прямую OF — за ось ординат. Точке F отнесем координаты $(0;\ 1)$. Прямая d будет иметь уравнение $y=-1$.

Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка плоскости. Тогда

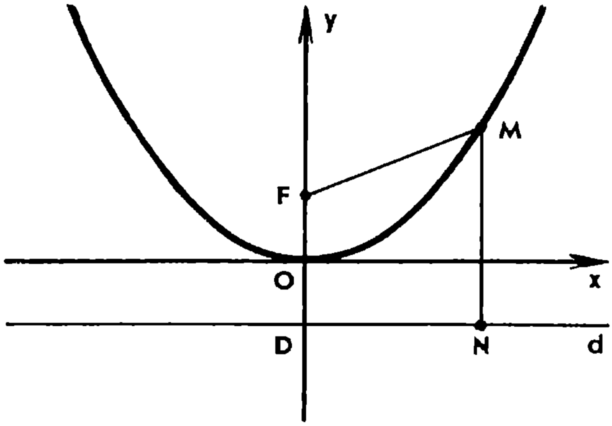


Рис. 57

$$MF=\sqrt{x^2+(y-1)^2} \text{ и } MN=|y+1|,$$

где MN — расстояние от точки M до прямой d.

Если $MF=MN$, то $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=|y+1|$.

Возведя обе части в квадрат, получаем уравнение $y=\frac{1}{4}x^2$.

Обратно, если координаты точки M удовлетворяют этому уравнению, то $x^2=4y$ и, следовательно,

$$MF=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{4y+(y-1)^2}=|y+1|,$$

т. е. $MF=MN$.

Заметим, что если вместо $DF=2$ положить $DF=p$, то получим уравнение $x^2=2py$.

Из школьного курса алгебры известно, что линия, определяемая уравнением $y=ax^2$, называется параболой. Теперь мы можем дать геометрическое определение параболы: это есть *множество точек плоскости, расстояние от каждой из которых до данной точки **F** равно расстоянию до данной прямой **d**, не проходящей через точку **F**.*

Точку F называют фокусом параболы, а прямую d — директрисой.

Задачи

323. Дан прямоугольник $ABCD$, в котором $BC=2AB$. На диагонали BD взята точка M, такая, что $\frac{BM}{MD}=\frac{3}{2}$. Точка N — середина стороны BC. Докажите, что $\angle AMN=90°$ и треугольник AMN подобен треугольнику ABC.

324. Точка M — середина стороны BC прямоугольника $ABCD$, точка H — основание перпендикуляра, проведенного из вершины D к прямой AM. Докажите, что $CH=CD$.

325. В окружность вписан прямоугольник $ABCD$. Из произвольной точки P окружности проведены перпендикуляры PK,

PL, PM, PN соответственно к прямым AB, BC, CD и DA. Докажите, что точка N — ортоцентр треугольника KLM.

326. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки M, принадлежащей диаметру некоторой окружности, до концов любой из параллельных этому диаметру хорд постоянна.

327. В ромб $ABCD$, сторона которого равна 2 и угол A равен $60°$, вписана окружность. Докажите, что для любой точки P окружности $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=11$.

328. На стороне AB равностороннего треугольника ABC вне его построена полуокружность. Две прямые, проведенные из вершины C, делят полуокружность на три равные дуги. Докажите, что эти прямые делят сторону AB на три равных отрезка.

▲ ▼ ▲

329. На плоскости даны две точки A и B. Точка C перемещается в плоскости так, что длина медианы AD треугольника ABC остается неизменной. Найдите множество точек C.

330. На плоскости даны две точки A и B. Найдите множество точек M плоскости, удаленных от A вдвое больше, чем от B.

331. Найдите множество точек плоскости, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек равна постоянной величине c^2.

332. На плоскости даны две точки A и B. Найдите множество точек C плоскости, таких, что в треугольнике ABC медиана AD равна стороне BC.

333. На плоскости даны точки A и B. Найдите множество точек C, таких, что в треугольнике ABC высота CH равна медиане AD.

334. Найдите множество точек плоскости, сумма квадратов расстояний от каждой из которых до вершин данного прямоугольника равна квадрату длины данного отрезка.

335. Найдите множество точек, для каждой из которых сумма квадратов расстояний до двух вершин A и B равностороннего треугольника ABC равна квадрату расстояний до его третьей вершины.

▲ ▼ ▲

336. Докажите, что если точка M лежит на основании AB равнобедренного треугольника ABC или на продолжении основания, то $AM \cdot MB = |AC^2 - CM^2|$.

337. На высоте CC_1 треугольника ABC дана произвольная точка P. Прямые AP и BP пересекают стороны BC и CA соответственно в точках A_1 и B_1. Докажите, что луч C_1P является биссектрисой угла $A_1C_1B_1$.

338. Даны параллельные прямые a и b. Точка O — их центр симметрии. Стороны произвольного прямого угла с вершиной O пересекают a и b соответственно в точках A и B. Докажите, что расстояние от точки O до прямой AB не зависит от выбора прямого угла.

339. В плоскости равностороннего треугольника через его центр проведена произвольная прямая. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин треугольника до этой прямой не зависит от выбора прямой.

340. Дан треугольник ABC. Найдите множество точек M, для каждой из которых площади треугольников ABM и ACM равны между собой.

▲ ▼ ▲

341. К параболе в ее вершине O проведена касательная. Из произвольной точки M касательной проведена прямая, пересекающая параболу в точках A и B. Докажите, что если A_1 и B_1 — проекции точек A и B на касательную, то $MA_1 \cdot MB_1 = MO^2$.

342. Докажите, что середины параллельных хорд параболы лежат на прямой, параллельной оси параболы.

343. Прямая пересекает гиперболу, заданную в прямоугольной системе координат уравнением $xy=1$, в точках A и B, а оси координат в точках A_1 и B_1. Докажите, что $AA_1 = BB_1$.

344. Докажите, что отрезок любой касательной к гиперболе $xy=1$, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.

345. Касательная к гиперболе $xy=1$ пересекает оси координат в точках A и B. Докажите, что площадь треугольника OAB не зависит от выбора касательной (O — начало координат).

346. Докажите, что середины параллельных хорд гиперболы лежат на одной прямой.

▲ ▼ ▲

347. Даны прямая l и точка A. Найдите множество точек плоскости, для каждой из которых разность квадратов расстояний до точки A и до прямой l постоянна и равна d^2.

348. Даны окружность и прямая l, касающаяся окружности в точке A. Найдите множество центров окружностей, касающихся данной окружности и прямой l.

349. Расстояние от точки A до прямой l равно 1. Найдите множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до точки A и до прямой l равна 3.

350. Найдите множество точек, для каждой из которых произведение расстояний до двух взаимно перпендикулярных прямых равно данному положительному числу.

ГЛАВА VI

РАЗНЫЕ МЕТОДЫ

Задачи настоящей главы распределены по параграфам в зависимости от их содержания. Читателю предлагается самому выбрать тот или иной метод решения. Большинство задач данной главы допускает решения разными методами. Первое решение редко бывает лучшим, и естественно стремиться к тому, чтобы найти более простое и красивое решение. Решение одной и той же задачи различными методами дает возможность полнее исследовать свойства геометрической фигуры и выявить наиболее простое решение. При этом мы лучше узнаем специфику того или иного метода, его преимущества и недостатки в зависимости от содержания задачи. Решая задачу подходящим методом, иногда удается подметить свойство фигуры, о котором в задаче ничего не говорится, или получить интересное обобщение задачи. Нередко найденный способ решения может быть в дальнейшем использован для решения более трудных задач, сходных с решенной задачей. Длительная работа над одной и той же задачей часто полезнее, чем решение нескольких задач.

Приступая к решению задачи, следует сделать хороший чертеж и попытаться заметить на чертеже определенные зависимости между элементами фигуры. Следует стремиться к тому, чтобы научиться сразу видеть, что тот или иной способ непригоден для ее решения, а вот какой-то другой способ может быть использован. Если долго не удается подобрать ключ к решению задачи, то следует попытаться начать с вычислений, используя, например, координатный метод или тригонометрические соотношения.

Пример 1. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC. Прямая, проведенная через вершину прямого угла C перпендикулярно медиане BD, пересекает гипотенузу в точке M. Найти отношение $\frac{AM}{MB}$.

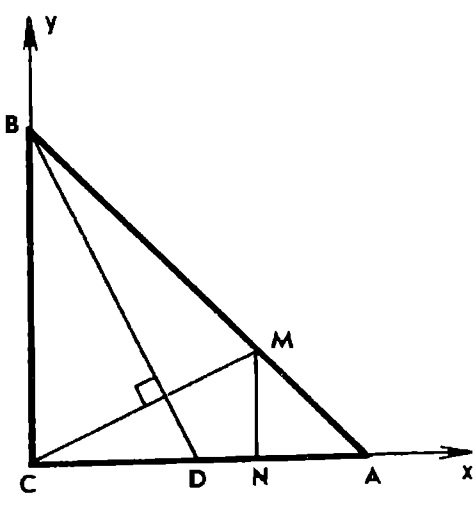


Рис. 58

Решение 1. Введем на плоскости прямоугольную систему координат: $C(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$ (рис. 58). Тогда $D\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$ и угловой коэффициент k прямой BD равен -2.

Угловой коэффициент k_1 прямой CM удовлетворяет соотношению $kk_1=-1$, следовательно, $k_1=\frac{1}{2}$.

Запишем уравнения прямых CM и AB: $y=\frac{1}{2}x$, $x+y=1$. Решив полученную систему уравнений, найдем координаты точки M:

$$x=\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3}.$$

Если N — проекция точки M на прямую AC, то $\frac{AN}{NC}=\frac{1}{2}$. Следовательно, и $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}$.

Теперь видно, что элементарно-геометрическое решение задачи можно получить, построив перпендикуляр MN к прямой AC (см. решение 4).

Решение 2. Обозначим $\frac{AM}{MB}=\lambda$, $\overline{CA}=\overline{a}$, $\overline{CB}=\overline{b}$. По формуле деления отрезка в данном отношении выразим вектор $\overline{CM}$ через $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\overline{CM}=\frac{\overline{a}+\lambda\overline{b}}{1+\lambda}.$$

Согласно правилу вычитания векторов имеем:

$$\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{a}-\overline{b}.$$

Поскольку $CM\perp BD$, то $\overline{CM}\cdot\overline{BD}=0$, или

$$(\overline{a}+\lambda\overline{b})\cdot\left(\frac{1}{2}\overline{a}-\overline{b}\right)=0.$$

Учитывая, что $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$ и $\overline{a}^2=\overline{b}^2=1$, получаем $\lambda=\frac{1}{2}$.

Решение 3. Обозначим $\angle ACM=\alpha$. Применим теорему синусов к треугольникам ACM и BCM. Получим:

$$\frac{AM}{CM}=\frac{\sin\alpha}{\sin 45^\circ},\quad \frac{BM}{CM}=\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\sin 45^\circ}=\frac{\cos\alpha}{\sin 45^\circ}.$$ Отсюда $\frac{AM}{MB}=\operatorname{tg}\alpha$.

Из условия задачи следует, что углы ACM и CBD равны. Тогда из треугольника BCD имеем $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$. Значит, $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}$.

Для решения задачи методом координат, векторным методом и с помощью тригонометрии никаких вспомогательных линий не потребовалось.

Решение 4. Проведем перпендикуляр MN к стороне AC (см. рис. 58). Так как $\angle MCN=\angle CBD$, то прямоугольные треугольники CMN и BCD подобны. Следовательно, $\frac{MN}{CN}=\frac{CD}{BC}=\frac{1}{2}$. Но $MN=AN$, значит, $\frac{AN}{CN}=\frac{1}{2}$. Поскольку $MN \parallel BC$, то и $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}$.

Решение 5. Рассмотрим поворот вокруг точки C на $90°$, при котором точка B переходит в точку A (рисунок предлагаем сделать читателю). Точка D перейдет в точку D_1, лежащую на продолжении стороны BC, треугольник BCD — в треугольник ACD_1. По свойству поворота $AD_1 \perp BD$, а так как $CM \perp BD$, то $AD_1 \parallel CM$. Учитывая, что $CD_1=CD=\frac{1}{2}\ BC$, по теореме о сторонах угла, пересекаемых параллельными прямыми, получаем:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{CD_1}{BC}=\frac{1}{2}.$$

Итак, мы решили одну не очень сложную задачу пятью (!) различными способами. И это не предел: нужно лишь немного фантазии, геометрической интуиции, чтобы найти еще другие решения.

Так, если через вершину A треугольника ABC провести прямую, перпендикулярную стороне AC, и обозначить через K точку пересечения ее с прямой CM, то треугольники ACK и BCD будут равны. После чего нетрудно установить, что

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AK}{BC}=\frac{1}{2}.$$

И еще если доказать, что $\frac{DH}{HB}=\frac{1}{4}$, где H — точка пересечения отрезков BD и CM, а затем провести $DE \parallel CM$,где E — точка гипотенузы AB, то $AE=EM=\frac{1}{4}\ BM$, откуда и следует утверждение задачи.

В отличие от первых трех решений особенностью последующих является использование вспомогательных линий, которые проводятся с целью получить равные или подобные треугольники. Полученные решения геометрически наглядны и красивы, но, чтобы догадаться, какие именно линии следует провести, нужны определенный опыт и сообразительность.

§ 1. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ

Способ решения задачи часто диктуется ее содержанием. В задачах первых двух параграфов этой главы речь идет о параллельных прямых, отношении отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, отношении площадей многоугольников. Такие задачи называются аффинными. При их решении могут быть использованы геометрические преобразования (параллельный перенос, центральная симметрия, гомотетия), теоремы о средней линии треугольника, об отрезках, отсекаемых на сторонах угла параллельными прямыми, и некоторые другие. Отдельные задачи просто и красиво решаются с помощью теоремы Менелая.

Сформулируем эту теорему, используя отношение коллинеарных векторов. Напомним, что запись $\frac{\overline{a}}{\overline{b}}=k$, где $\overline{a}\neq\overline{0}$ и $\overline{b}\neq\overline{0}$, означает, что $\overline{a}=k\overline{b}$ и $k=\pm\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}$, причем знак «плюс» берется, если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены, а знак «минус», если они направлены противоположно.

Т е о р е м а М е н е л а я. **Если прямая пересекает стороны или продолжения сторон *BC*, *CA* и *AB* треугольника *ABC* соответственно в точках A_1, B_1 и C_1, то имеет место равенство**

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=-1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть прямая пересекает стороны BC и CA треугольника в точках A_1 и B_1, а прямую AB в точке C_1 (рис. 59). Через вершину C треугольника ABC проведем прямую, параллельную стороне AB и пересекающую прямую A_1B_1 в точке D.

Треугольники A_1BC_1 и A_1CD, а также треугольники B_1AC_1 и B_1CD гомотетичны. Следовательно, $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}=\frac{\overline{BC_1}}{\overline{DC}}$, $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{AC_1}}$.

Перемножив эти два равенства почленно, получим доказываемое соотношение.

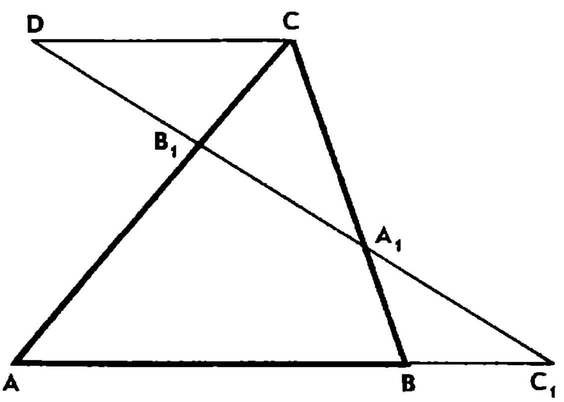


Рис. 59

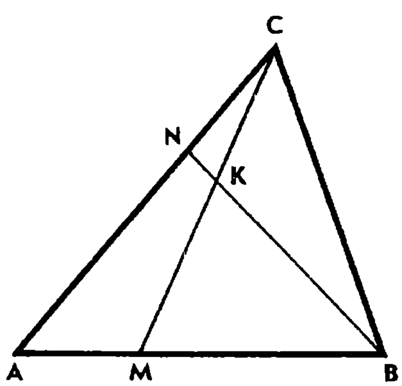


Рис. 60

Верна и обратная теорема:

Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC или на их продолжениях и выполняется равенство $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=-1$, то эти три точки лежат на одной прямой.

Доказательство. Пусть прямая A_1B_1 пересекает прямую AB в точке C'. Тогда согласно прямой теореме Менелая имеем:

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=-1.$$

Сравнивая это соотношение с данным, заключаем, что $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}$, откуда следует, что точка C' совпадает с точкой C_1.

Пример 2. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки M и N, такие, что $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{NA}=\frac{1}{2}$. Отрезки BN и CM пересекаются в точке K. Найти отношения отрезков $\frac{BK}{KN}$ и $\frac{CK}{KM}$ (рис. 60).

Решение. Чтобы найти отношение $\frac{CK}{KM}$, применим теорему Менелая к треугольнику ACM и секущей BK. Для простоты отношение коллинеарных векторов заменим отношением их длин. Получим:

$$\frac{CK}{KM}\cdot\frac{MB}{BA}\cdot\frac{AN}{NC}=1.$$

Так как $\frac{MB}{BA}=\frac{2}{3}$, $\frac{AN}{NC}=2$, то $\frac{CK}{KM}=\frac{3}{4}$.

Аналогично, применив теорему Менелая к треугольнику ABN и секущей CK, находим:

$$\frac{BK}{KN}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=1,\ \text{откуда}\ \frac{BK}{KN}=6.$$

Заметим, что, записывая отношение отрезков, следует двигаться по контуру треугольника от вершины до точки пересечения с прямой и от точки пересечения до следующей вершины.

Таким образом, решение задачи сводится к одним вычислениям, не нужно придумывать никаких вспомогательных построений.

Задачу можно решить и методом координат, а также векторным методом (см. пример 2 главы IV). Преимущество применения теоремы Менелая очевидно.

Задачи § 2 по содержанию примыкают к задачам § 1. Решение их часто сводится к нахождению отношения отрезков одной прямой или параллельных прямых. При вычислении отношения площадей треугольников удобно пользоваться следующими леммами:

1) *Если вершины C и C_1 треугольников ABC и ABC_1 лежат по одну сторону от прямой AB, то эти треугольники равновелики тогда и только тогда, когда $CC_1 \parallel AB$.*

2) *Если точка M лежит на стороне AB треугольника ABC, то*

$$\frac{S_{ACM}}{S_{BCM}}=\frac{AM}{BM}.$$

3) *Если точки B_1 и C_1 принадлежат сторонам AB и AC треугольника ABC или их продолжениям, то*

$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}}=\frac{AB_1\cdot AC_1}{AB\cdot AC}.$$

Пример 3. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки M и N, такие, что $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{NA}=\frac{1}{2}$. Отрезки BN и CM пересекаются в точке K. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника BCK?

Решение. По условию задачи $CN=\frac{1}{3}AC$, значит, площадь треугольника BCN составляет $\frac{1}{3}$ площади треугольника ABC (см. рис. 60).

Поскольку $\frac{BK}{KN}=6$ (см. пример 2), то согласно лемме 2 отношение площадей треугольников BCK и CKN равно 6, т. е. площадь треугольника BCK равна $\frac{6}{7}$ площади треугольника BCN. Таким образом, площадь треугольника BCK составляет $\frac{2}{7}$ площади треугольника ABC.

Задачи

351. Через середину M медианы CD треугольника ABC проведена прямая AM, пересекающая сторону BC в точке K. В каком отношении точка K делит сторону BC?

352. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC даны точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются

в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1 \text{ (теорема Чевы).}$$

353. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC даны точки A_1, B_1, C_1, такие, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке K. Докажите, что $\frac{CK}{KC_1}=\frac{CB_1}{B_1A}+\frac{CA_1}{A_1B}$ (теорема Ван-Обеля).

354. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и каждая из них делится ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

355. На медиане CM треугольника ABC дана точка P. Прямые AP и BP пересекают стороны BC и AC соответственно в точках A_1 и B_1. Докажите, что отрезок A_1B_1 параллелен стороне AB и делится медианой CM пополам.

356. На продолжении диагонали BD четырехугольника $ABCD$ взята произвольная точка P. Точки M и N — середины сторон AB и CD четырехугольника. Докажите, что прямые PM и PN делят две другие стороны четырехугольника соответственно в равных отношениях.

357. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что прямые, проходящие через вершину D и середины сторон AB и BC, делят диагональ AC на три равные части.

358. Точки M и N — середины сторон AB и BC параллелограмма $ABCD$. Отрезки AN и DM пересекаются в точке E, отрезки CM и DN — в точке F. Найдите отношение $\frac{EF}{AC}$.

▲ ▼ ▲

359. а) Дан параллелограмм $ABCD$. Проведите прямую, параллельную стороне AB, так, чтобы отрезок ее, заключенный внутри параллелограмма, делился диагоналями на три равные части.

б) При помощи одной линейки проведите прямую, параллельную основаниям данной трапеции, так, чтобы отрезок ее, заключенный внутри трапеции, делился диагоналями на три равные части*.

360. а) На стороне AB параллелограмма $ABCD$ взята произвольная точка K и через нее проведены прямые параллельно диагоналям, пересекающие стороны AD и BC соответственно в точках P и Q. Докажите, что точка O пересечения диагоналей — середина отрезка PQ.

б) На основании AB трапеции $ABCD$ взята произвольная точ-

---

* Возникает вопрос: нельзя ли провести прямую, не параллельную основаниям трапеции, так, чтобы боковые стороны и диагонали трапеции высекали на ней три равных отрезка? Ответ в задачах 360—362.

ка K и через нее проведены прямые параллельно диагоналям. Эти прямые пересекают стороны AD и BC соответственно в точках M и N. Прямая MN пересекает диагонали AC и BD в точках P и Q. Докажите, что $MP=QN$.

361. Через произвольную точку K стороны AB треугольника ABC параллельно его медианам AA_1 и BB_1 проведены прямые, пересекающие стороны AC и BC соответственно в точках M и N. Докажите, что медианы AA_1 и BB_1 делят отрезок MN на три равные части.

362. Боковые стороны, диагонали и продолжения оснований трапеции пересекают прямую l в шести точках, т. е. высекают на прямой l пять отрезков. а) Докажите, что если крайние (первый и пятый) отрезки равны, то соседние с ними (второй и четвертый) также равны.

б) При каком отношении оснований трапеции можно провести прямую l так, чтобы все пять отрезков были равны?

363. Отрезок, соединяющий середины сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$, делится диагоналями на три равные части. Докажите, что $ABCD$ — трапеция, найдите отношение ее оснований.

§ 2. ПЛОЩАДИ

364. Средние линии четырехугольника разбивают его на четыре четырехугольника. Докажите, что сумма площадей двух неприлежащих четырехугольников равна сумме площадей двух других четырехугольников.

365. Точки M и N — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что площадь четырехугольника $AMCN$ равна половине площади четырехугольника $ABCD$.

366. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Сторона AB точками M и N разделена на три равные части, сторона CD разделена точками K и L также на три равные части. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника $KLMN$ составляет $\frac{1}{3}$ площади данного четырехугольника.

367. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята произвольная точка M. Докажите, что сумма площадей треугольников ABM и CDM равна половине площади параллелограмма.

368. Точка M — середина боковой стороны BC трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника ADM составляет половину площади трапеции.

369. Середины сторон четырехугольника последовательно соединены отрезками. Докажите, что площадь полученного четырехугольника равна половине площади данного четырехугольника.

370. Точки M и N — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Отрезки AN и DM пересекаются в точке P, а отрезки CM и BN — в точке Q. Докажите, что площадь четырехугольника $MQNP$ равна сумме площадей треугольников APD и BCQ.

371. Точки M и N — середины сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$. Прямые DM и BN пересекаются в точке P. Какую часть площади параллелограмма составляет площадь четырехугольника $AMPN$?

372. Прямой, проходящей через данную точку, взятую на стороне треугольника, разделите треугольник на две равновеликие части.

373. Через вершину четырехугольника проведите прямую, делящую четырехугольник на две равновеликие части.

374. Внутри параллелограмма $ABCD$ дана точка P. Постройте на контуре параллелограмма точку Q, такую, чтобы ломаная APQ разделила параллелограмм на две равновеликие части.

▲ ▼ ▲

375. Внутри данного треугольника ABC найдите множество точек M, таких, что сумма площадей треугольников ACM и BCM равна площади треугольника ABM.

376. В плоскости треугольника ABC найдите множество точек M, для которых площади треугольников ACM и BCM равны.

377. В плоскости треугольника ABC найдите множество точек M, для которых площади треугольников MAB, MBC и MCA равны.

378. а) Внутри трапеции $ABCD$ с основанием AB найдите множество точек M, для которых сумма площадей треугольников ABM и CDM равна половине площади трапеции.

б) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Найдите внутри его множество точек M, для которых сумма площадей треугольников ABM и CDM равна сумме площадей треугольников ADM и BCM.

▲ ▼ ▲

379. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки K, L, M, N — середины его сторон AB, BC, CD, DA. Какую часть площади параллелограмма составляет площадь четырехугольника, ограниченного прямыми AL, BM, CN и DK?

380. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1, такие, что $\frac{AC_1}{AB}=\frac{BA_1}{BC}=\frac{CB_1}{CA}=\frac{1}{3}$. Докажите, что площадь треугольника, ограниченного прямыми AA_1, BB_1 и CC_1, равна $\frac{1}{7}$ площади треугольника ABC.

381. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что если $AO > OC$ и $BO > OD$, то сумма площадей треугольников OAB и OCD больше суммы площадей треугольников OBC и OAD.

382. Диагонали трапеции $ABCD$ с основанием AB пересекаются в точке O. Площади треугольников OAB и OCD равны соответственно S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

383. Диагонали трапеции $ABCD$ с основанием AB пересекаются в точке O. Найдите отношение площади треугольника ADO к площади трапеции, если $AB=a$ и $CD=b$. Докажите, что площадь треугольника ADO меньше $\frac{1}{4}$ трапеции $ABCD$.

384. На основании AB трапеции $ABCD$ взята точка M. Через точку O пересечения прямых AD и BC проведена прямая OM, пересекающая сторону CD в точке N. Отрезки AN и DM пересекаются в точке P, а отрезки CM и BN — в точке Q. Докажите, что площадь четырехугольника $MQNP$ не зависит от выбора точки M. Найдите отношение площади четырехугольника $MQNP$ к площади трапеции $ABCD$, если $AB=a$ и $CD=b$.

385. На противоположных сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N. Докажите, что площадь четырехугольника $MQNP$, ограниченного прямыми AN, BN, CM и DM, не больше $\frac{1}{4}$ площади параллелограмма $ABCD$. При каком условии площадь этого четырехугольника равна $\frac{1}{4}$ площади параллелограмма?

386. На основании AB трапеции $ABCD$ дана точка M. Постройте на стороне CD точку N так, чтобы общая часть площадей треугольников ABN и CDM была наибольшей.

387. Через вершины треугольника ABC и точку P, лежащую внутри треугольника, проведены прямые, пересекающие стороны BC, CA, AB соответственно в точках L, M, N. Как следует выбрать точку P, чтобы площадь треугольника LMN оказалась наибольшей?

§ 3. НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ

Бо́льшинство школьных задач на отыскание наибольших и наименьших значений геометрических величин сводится к нахождению экстремальных значений функции от одной переменной. Для решения таких задач существует общий метод, основанный на применении производной. Однако решение с помощью этого метода не всегда является лучшим. В некоторых случаях можно прийти к цели проще и быстрее, используя элементарные методы и приемы.

Пример 4. Из всех четырехугольников, вписанных в окружность, найти четырехугольник наибольшей площади.

Решение. Воспользуемся формулой

$$S=\frac{1}{2}\,d_1d_2\sin\varphi,$$

выражающей площадь четырехугольника через длины d_1 и d_2 его диагоналей и угол φ между диагоналями.

Пусть R — радиус окружности. Так как $d_1 \leqslant 2R$, $d_2 \leqslant 2R$, $\sin\varphi \leqslant 1$, то $S \leqslant 2R^2$, причем наибольшее значение S достигается тогда и только тогда, когда диагонали четырехугольника перпендикулярны и каждая из них является диаметром, т. е. когда искомый четырехугольник — квадрат.

Очевидно, что для решения этой задачи производная вообще не годится.

Геометрические задачи на максимум и минимум часто сводятся к исследованию квадратичной функции. В таком случае можно применить способ выделения полного квадрата или воспользоваться тем, что экстремальное значение функции $y = ax^2 + bx + c$ достигается при $x_0 = -\frac{b}{2a}$, т. е. при $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена.

Рациональные решения ряда задач можно получить с помощью известного из школьного курса неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

причем равенство имеет место только при $a = b$.

Пример 5. Из всех прямоугольников данного периметра $2p$ найти прямоугольник наибольшей площади.

Решение. Обозначим через x и y длины сторон прямоугольника, через S его площадь. Тогда $S = xy$, $x + y = p$. Применив неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получим:

$$S = xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4},$$

причем $S = \frac{p^2}{4}$ только при $x = y$, т. е. когда прямоугольник является квадратом.

Полученный результат позволяет сделать следующий вывод. Произведение двух положительных переменных сомножителей, сумма которых постоянна, имеет наибольшее значение при равенстве сомножителей.

При решении некоторых задач на экстремум независимую переменную можно выбрать несколькими способами и, таким образом, получить различные аналитические выражения исследуемой функции. Удачный выбор независимого переменного позволяет сократить вычисления и упростить решение задачи.

Пример 6. Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг, найти прямоугольник наибольшей площади.

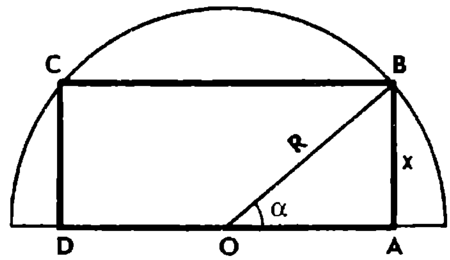


Рис. 61

Решение 1. Пусть в полукруг радиуса R с центром O вписан прямоугольник $ABCD$ (рис. 61). Обозначим $AB=x$, тогда

$$AD=2\sqrt{R^2-x^2}.$$

Выразим площадь S прямоугольника через R и x:

$$S=2x\sqrt{R^2-x^2},\ 0<x<R.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $y=x^2(R^2-x^2)$ в промежутке $(0;\ R)$.

Так как $x^2+(R^2-x^2)=R^2$, то произведение $x^2(R^2-x^2)$ имеет наибольшее значение при $x^2=R^2-x^2$, т. е. при $x=\frac{R}{\sqrt{2}}$.

Итак, площадь прямоугольника $ABCD$ принимает наибольшее значение, когда $AB=\frac{R\sqrt{2}}{2}$ и $AD=R\sqrt{2}$.

Решение 2. Задача решается проще, если независимой переменной считать величину угла AOB. Обозначив $\angle AOB=\alpha$, получим:

$$AB=R\sin\alpha,\ AO=R\cos\alpha,\ S=2R^2\sin\alpha\cos\alpha,\ 0°<\alpha<90°.$$

Воспользуемся формулой синуса двойного аргумента и будем иметь:

$$S=R^2\sin 2\alpha.$$

Значит, при $\alpha=45°$ площадь прямоугольника максимальна и равна R^2.

Никаких вычислений больше не требуется. Полученный ответ дает представление о форме искомого прямоугольника и простой способ его построения.

Интересно также геометрическое решение этой задачи.

Решение 3. Применив симметрию относительно диаметра полукруга, сведем задачу к нахождению прямоугольника наибольшей площади, вписанного в окружность. Легко доказать, что таким прямоугольником является квадрат (см. пример 4). Отсюда следует, что прямоугольник, вписанный в полукруг, имеет форму половины квадрата.

Некоторые задачи на максимум и минимум весьма просто решаются с помощью тригонометрии. Если задача сводится к исследованию выражения, содержащего тригонометрические функции, не следует торопиться применять производную. Иногда тригонометрическое выражение можно преобразовать так, чтобы аргумент x находился лишь под знаком одной тригонометрической функции, и тогда остается только воспользоваться свойством этой функции.

Пример 7. Найти наибольшее значение функции

$$y=a\sin x+b\cos x,\ 0°<x<360°.$$

Решение 1. Пусть сначала $a=b=1$. Тогда имеем:

$$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(45°+x).$$

Следовательно, $y_{\max}=\sqrt{2}$ при $x=45°$.

Аналогичным образом найдем наибольшее значение функции

$$y=a\sin x+b\cos x, \text{ где } a\neq 0 \text{ и } b\neq 0.$$

В силу тождества $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ всегда можно найти такой вспомогательный аргумент φ, чтобы было

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi,\ 0°<\varphi<360°.$$

Тогда имеем:

$$y=\sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi).$$

Значит, $y_{\max}=\sqrt{a^2+b^2}$ при $\sin(x+\varphi)=1$, т. е. когда $x+\varphi=$ $=90°$ или $x+\varphi=450°$. При этом $\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg}\varphi=\frac{a}{b}$.

Решение 2. Легко проверить истинность тождества

$$(a\sin x+b\cos x)^2+(a\cos x-b\sin x)^2=a^2+b^2.$$

Отсюда получаем: $-\sqrt{a^2+b^2}\leqslant a\sin x+b\cos x\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$, причем крайние значения функция принимает только тогда, когда $a\cos x-b\sin x=0$, т. е. при $\operatorname{tg} x=\frac{a}{b}$.

Тот же результат можно получить, пользуясь производной, но для нахождения наибольшего значения функции потребуются еще дополнительные вычисления.

Все помещенные в этом параграфе задачи могут быть решены с помощью элементарных приемов без использования производной. Некоторые из них требуют специального исследования и сравнения результатов для различных положений искомой фигуры.

Приведем решение одной из таких задач.

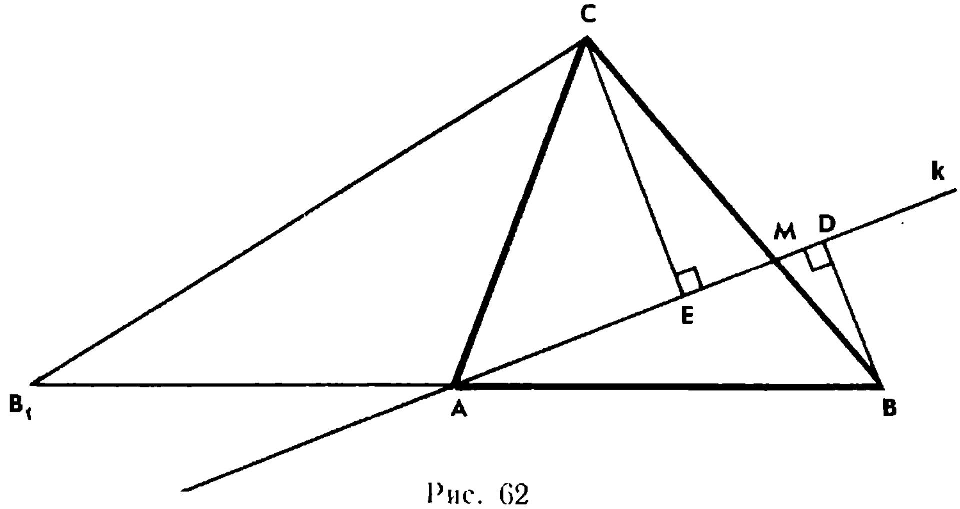


Рис. 62

Пример 8. Через вершину A треугольника ABC провести прямую k так, чтобы произведение расстояний от точек B и C до этой прямой было наибольшим.

Решение. Пусть BD и CE — перпендикуляры к прямой k, проходящей через вершину A треугольника ABC (рис. 62). Если прямая k проходит через вершину B или через вершину C, то произведение расстояний BD и CE равно нулю, так как при этом один из сомножителей обращается в нуль.

Рассмотрим теперь случай, когда прямая k пересекает сторону BC в некоторой точке M. Положим $AC=b$, $AB=c$, $\angle BAC = \alpha$. Переменный угол BAM обозначим через x. Из прямоугольных треугольников ABD и ACE находим:

$$BD=c\sin x,\quad CE=b\sin(\alpha-x).$$

Следовательно, интересующее нас произведение есть функция от x:

$$P=BD\cdot CE=bc\sin x\sin(\alpha-x),\quad 0°<x<\alpha.$$

Заменим произведение синусов по известной формуле. Тогда лишь одна из тригонометрических функций будет содержать в аргументе переменную x, и получим:

$$P=\frac{1}{2}\,bc\,[\cos(2x-\alpha)-\cos\alpha].$$

Отсюда видно, что функция P имеет наибольшее значение, когда $\cos(2x-\alpha)=1$, т. е. при $x=\frac{\alpha}{2}$, причем

$$P_{\max}=\frac{1}{2}\,bc\,(1-\cos\alpha)=bc\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Остается рассмотреть случай, когда прямая k не пересекает сторону BC. Построим точку B_1, симметричную точке B относительно точки A, что позволит использовать результат первого случая. Если k не имеет со стороной BC общих точек, то она пересечет отрезок B_1C. Расстояния от точек B_1 и B до прямой k равны между собой. Следовательно, для функции $\Pi = BD \cdot CE$ согласно доказанному выше получаем:

$$\Pi_{max} = bc \sin^2 \frac{\beta}{2}, \text{ где } \beta = 180° - \alpha.$$

Теперь сравним полученные значения $P_{max} = bc \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ и $\Pi_{max} = bc \sin^2 \frac{\beta}{2}$.

Поскольку значения $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$ заключены между 0° и 90°, то при $\alpha > \beta$ имеем $P_{max} > \Pi_{max}$, а при $\alpha < \beta$, наоборот, $\Pi_{max} > P_{max}$. Если же $\alpha = \beta$, то $P_{max} = \Pi_{max}$.

Итак, искомая прямая k, проходящая через вершину A треугольника, должна делить угол A треугольника пополам, если $\angle A > 90°$, и угол, смежный с $\angle A$, если $\angle A < 90°$. Если же $\angle A = 90°$, то условию задачи удовлетворяют две прямые, делящие угол A треугольника и угол, смежный с ним, пополам.

Задачи

388. Какую наибольшую высоту может иметь треугольник ABC с данным основанием $AB = c$ и отношением сторон $\frac{AC}{BC} = 2$?

389. Дана равнобочная трапеция с острым углом α, периметр которой равен $2p$. Какое наибольшее значение может иметь площадь трапеции?

390. Из всех круговых секторов данного периметра $2p$ найдите тот, который имеет наибольшую площадь.

391. Докажите, что из всех четырехугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

392. В данный треугольник ABC впишите прямоугольник наибольшей площади так, чтобы две его вершины лежали на стороне AB, а две другие — на сторонах AC и BC.

393. На сторонах KN и KL квадрата $KLMN$ даны точки A и B на равных расстояниях от вершины K. Впишите в квадрат трапецию $ABCD$ с основанием AB наибольшей площади.

394. В данный квадрат $KLMN$ впишите трапецию $ABCD$ с основанием AB наибольшей площади при условии, что A — середина стороны KN, а точка B лежит на стороне KL и $\frac{KB}{BL} = \frac{1}{2}$. Какова наибольшая площадь трапеции, если площадь квадрата равна 1?

▲ ▼ ▲

395. Через точку M, лежащую внутри данного угла, проведите прямую так, чтобы длина ломаной, высекаемой этой прямой на сторонах угла, была наименьшей.

396. Через точки A и B, лежащие по разные стороны от данной прямой l, проведите окружность так, чтобы она высекала на прямой l хорду наименьшей длины.

397. Какое наибольшее значение может принимать длина отрезка, отсекаемого боковыми сторонами треугольника на касательной к вписанной окружности, проведенной параллельно основанию, если периметр треугольника равен $2p$?

▲ ▼ ▲

398. В данный полукруг впишите прямоугольник наибольшего периметра.

399. Из точки C данной окружности проведен перпендикуляр CM к диаметру AB. При каком положении точки C на окружности сумма $AM+CM$ имеет наибольшее значение?

400. На стороне AB треугольника ABC с данными сторонами $BC=a$ и $AC=b$ во внешнюю сторону строится равносторонний треугольник ABD. Какую наибольшую площадь может иметь четырехугольник $ACBD$ и при какой величине угла C?

401. На сторонах треугольника ABC вне его построены квадраты $ABEF$, $BCPQ$ и $CAMN$. Какую наибольшую площадь может иметь шестиугольник $EFMNPQ$, если $BC=a$ и $AC=b$?

402. На сторонах BC и CD прямоугольника $ABCD$ даны точки M и N, такие, что $BM=MC$ и $DN=2NC$. При каком отношении сторон AB и AD угол MAN будет иметь наибольшую величину? Какова эта наибольшая величина?

▲ ▼ ▲

403. Данный треугольник разделите на две равновеликие части отрезком наименьшей длины.

404. Даны три точки A, B и C, не принадлежащие одной прямой. Через точку A проведите прямую k так, чтобы сумма расстояний до нее от точек B и C имела наибольшее (наименьшее) значение.

405. а) Даны прямая k и две точки A и B, не принадлежащие ей. Найдите на прямой k точку M, для которой отношение $\frac{AM}{BM}$ принимает наибольшее (наименьшее) значение.

б) Дан треугольник ABC, в котором $AC<BC$. Докажите, что если точка M лежит на биссектрисе угла C треугольника, то отношение $\frac{AM}{BM}$ является наименьшим, когда точка M совпадает с центром O вписанной в треугольник окружности, и наибольшим, когда M совпадает с центром O_1 вневписанной окружности, касающейся стороны AB.

▲ ▼ ▲

406. На одной стороне прямого угла даны точки A и B. Найдите на другой стороне точку M, для которой угол AMB имеет наибольшую возможную величину.

407. Докажите, что из всех треугольников ABC с данным основанием AB и данным углом при вершине C наибольшую биссектрису CD имеет равнобедренный треугольник.

408. а) Докажите, что из всех треугольников ABC с данным основанием AB и данным острым углом при вершине C наибольшую медиану, проведенную к основанию, имеет равнобедренный треугольник.

б) Докажите, что из всех треугольников ABC с данным основанием AB и данным тупым углом при вершине C наименьшую медиану, проведенную к основанию, имеет равнобедренный треугольник.

409. Из всех треугольников ABC с данным основанием AB и постоянной высотой CH найдите треугольник, около которого можно описать окружность наименьшего радиуса. Вычислите значение этого радиуса, если $AB=c$ и $CH=h$.

▲ ▼ ▲

410. Из данной прямоугольной трапеции вырезать прямоугольник наибольшей площади, имеющий с трапецией общий прямой угол. Какова наибольшая площадь прямоугольника, если основания трапеции равны a и b, а высота равна h?

411. Из квадрата $ABCD$ со стороной a вырезали четверть круга радиуса r с центром в точке C. Требуется из оставшейся части вырезать прямоугольник наибольшей площади, имеющий с квадратом общий угол A. Каковы размеры прямоугольника наибольшей площади?

▲ ▼ ▲

412. В данный круговой сектор с острым центральным углом впишите прямоугольник наибольшей площади.

413. Дан треугольник ABC, в котором $AC=b$, $AB=c$, $\angle A=\alpha$, причем $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$. Требуется построить прямоугольник $ALMN$ наибольшей площади так, чтобы вершины B и C лежали соответственно на сторонах LM и MN. Каково наибольшее значение площади прямоугольника?

414. В треугольник ABC вписан четырехугольник $KLMN$ так, что вершины K и L лежат на стороне AB треугольника, а вершины M и N соответственно на сторонах BC и AC, причем $LM \parallel AC$ и $KN \parallel BC$. При каком положении точек K и L на стороне AB площадь четырехугольника $KLMN$ будет наибольшей? Какую наибольшую площадь может иметь четырехугольник, если площадь треугольника ABC равна S?

415. В данный треугольник ABC с прямым углом C впишите прямоугольник с наименьшей диагональю.

416. На стороне AB треугольника ABC выбирается точка P. Через нее проводятся прямые, параллельные BC и AC, до пересечения со сторонами AC и BC соответственно в точках M и N. При каком выборе точки P отрезок MN имеет наименьшую длину?

Решите эту задачу: а) для треугольника с прямым углом C; б) для произвольного треугольника ABC.

▲ ▼ ▲

417. а) Какое наибольшее значение может принимать величина угла A треугольника ABC, в котором медиана, проведенная из вершины B, образует со стороной BC угол 45°?

б) Какое наибольшее значение может принимать величина угла A треугольника ABC, в котором медиана BM в 1,5 раза больше высоты AH?

§ 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении задач, помещенных в настоящем параграфе, находят применение замечательные неравенства, связывающие различные «средние» нескольких положительных чисел:

$A_3=\frac{a+b+c}{3}$ — среднее арифметическое,

$G_3=\sqrt[3]{abc}$ — среднее геометрическое,

$K_3=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ — среднее квадратичное,

$H_3=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ — среднее гармоническое чисел a, b, c

$\left(\frac{1}{H_3}\right.$ есть среднее арифметическое чисел $\left.\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$.

Докажем, что для любых положительных чисел a, b, c имеют место неравенства

$$H_3 \leqslant G_3 \leqslant A_3 \leqslant K_3,$$

где равенство достигается только тогда, когда $a=b=c$. (Аналогичные неравенства справедливы для любых n положительных чисел.)

Неравенство $A_3 \leqslant K_3$ равносильно неравенству

$$(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2),$$

которое вытекает из очевидного неравенства

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0.$$

Точно так же доказывается неравенство

$$(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca).$$

Получаем цепочку неравенств:

$$ab+bc+ca \leqslant \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leqslant a^2+b^2+c^2,$$

которые обращаются в равенства только в случае, если $a=b=c$.

Чтобы убедиться в справедливости неравенства

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3},$$

положим: $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$. Тогда доказываемое неравенство приводится к виду

$$x^3+y^3+z^3-3xyz \geqslant 0.$$

Многочлен, стоящий в левой части неравенства, разложим на множители:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)=$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

Учитывая, что $x+y+z>0$ и $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geqslant 0$, получаем: $x^3+y^3+z^3-3xyz \geqslant 0$.

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $x=$ $=y=z$, что для исходного неравенства равносильно условию $a=b=c$.

Итак, неравенство $G_3 \leqslant A_3$ доказано. Применив его к числам $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, получим неравенство $H_3 \leqslant G_3$, Таким образом,

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leqslant \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Заметим, что отсюда вытекает еще одно неравенство

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9,$$

которое в дальнейшем находит применение. Равенство здесь также имеет место лишь при $a=b=c$.

Для доказательства геометрических неравенств, касающихся треугольника, кроме числовых неравенств, применяются теорема косинусов и формулы, выражающие элементы треугольника через его стороны или через радиус описанной окружности и углы. Пользуясь формулами, приведенными в начале § 3 главы III, любое неравенство между линейными элементами треугольника можно свести к неравенству, связывающему тригонометрические функции углов треугольника. Таким образом, решение задач на доказательство геометрических неравенств требует умения применять разнообразные сведения из различных разделов математики. Рассмотрим некоторые приемы доказательства неравенств на конкретных примерах.

Пример 9. Доказать, что в любом треугольнике диаметр вписанной окружности не более радиуса описанной окружности: $2r \leqslant R$.

Решение 1. Выразим r и R через стороны и площадь треугольника:

$$r=\frac{S}{p}, \quad R=\frac{abc}{4S}.$$

Имеем: $\frac{r}{R}=\frac{4S^2}{abcp}=\frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$.

В силу теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел

$$(p-a)(p-b) \leqslant \left(\frac{2p-a-b}{2}\right)^2=\frac{c^2}{4}.$$

Аналогично $(p-a)(p-c) \leqslant \frac{b^2}{4}$, $(p-b)(p-c) \leqslant \frac{a^2}{4}$.

Следовательно, $(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant \frac{abc}{8}$ и $\frac{r}{R} \leqslant \frac{1}{2}$.

Решение 2. Воспользуемся формулой

$$r=4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}.$$

Задача сводится к доказательству неравенства

$$\sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

По теореме косинусов имеем:

$$a^2=(b-c)^2+2bc(1-\cos A), \text{ или } a^2=(b-c)^2+4bc \sin^2\frac{A}{2}.$$

Отсюда получаем $\sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}}$.

Следовательно, $\sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{ac}} \cdot \frac{c}{2\sqrt{ab}}=\frac{1}{8}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=b=c$.

Решение 3. Известна формула, выражающая расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника: $d=\sqrt{R^2-2Rr}$ (см. задачу 287). Отсюда немедленно вытекает неравенство $R(R-2r)\geqslant 0$, поэтому $R\geqslant 2r$.

Равенство имеет место только тогда, когда центры вписанной и описанной окружностей совпадают, т. е. в случае равностороннего треугольника.

Пример 10. Доказать, что для углов любого треугольника ABC имеют место неравенства:

1) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leqslant\frac{9}{4}$;

2) $\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}$;

3) $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geqslant 2\sqrt{3}$,

причем неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда треугольник ABC равносторонний.

Решение. В силу формулы $a=2R\sin A$ неравенство 1 равносильно неравенству $a^2+b^2+c^2\leqslant 9R^2$ (см. задачу 288).

Приведем тригонометрическое доказательство неравенства 1. Для любого треугольника ABC справедливо тождество

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C.$$

Следовательно, достаточно доказать, что

$$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}.$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\angle A\geqslant\angle B\geqslant\angle C$. Преобразуем произведение двух косинусов в сумму. Учитывая, что $\cos(A+B)=-\cos C$ и $\cos(A-B)\leqslant 1$, получаем:

$$\cos A\cos B\cos C=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos C]\cos C\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(1-\cos C)\cos C\leqslant\frac{1}{8}.$$

Ясно, что равенство достигается только тогда, когда $\angle A=\angle B$ и $1-\cos C=\cos C$, т. е. $\cos C=\frac{1}{2}$ и $\angle C=60^\circ$.

Значит, равенство имеет место только для равностороннего треугольника ABC.

Используя неравенство 1 и неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным трех положительных чисел, получаем:

$$\sin A+\sin B+\sin C \leqslant \sqrt{3(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Наконец, в силу неравенства $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9$ и неравенства 2 получаем:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C} \geqslant \frac{9}{\sin A+\sin B+\sin C} \geqslant 2\sqrt{3}.$$

Задачи

418. Докажите, что для любого треугольника ABC справедливо неравенство $h_a \leqslant \sqrt{p(p-a)}$.

419. Докажите, что для любого треугольника ABC имеют место неравенства:

1) $l_a \leqslant \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2} = \sqrt{p(p-a)}$; 2) $m_a \geqslant \sqrt{p(p-a)}$.

В каком случае эти неравенства обращаются в равенства?

420. Докажите, что для любого треугольника ABC

$$a \geqslant 2h_a \operatorname{tg}\frac{A}{2}, \quad a \geqslant 2l_a \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

421. Докажите, что для любого треугольника ABC имеют место неравенства

$$9r \leqslant h_a+h_b+h_c \leqslant l_a+l_b+l_c \leqslant p\sqrt{3} \leqslant r_a+r_b+r_c = r+4R \leqslant \frac{9}{2}R.$$

В каком случае каждое из этих неравенств обращается в равенство?

422. Докажите, что если $a \geqslant b$, то $m_a \leqslant m_b$, и, обратно, если $m_a \leqslant m_b$, то $a \geqslant b$.

423. Докажите, что для любого треугольника ABC имеют место неравенства $9r \leqslant m_a+m_b+m_c \leqslant \frac{9}{2}R$.

В каких случаях эти неравенства обращаются в равенства?

424. Докажите, что если $a>b$, то $m_a+\frac{a}{2}<m_b+\frac{b}{2}$.

425. Докажите, что для любого треугольника ABC

$$\frac{\sqrt{3}}{9}S \leqslant \frac{1}{27}p^2 \leqslant \frac{1}{4}R^2,$$

причем каждое из этих неравенств обращается в равенство только для равностороннего треугольника.

426. а) Докажите, что из всех треугольников данного периметра наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

б) Докажите, что из всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

427. Докажите, что для любого треугольника ABC

$$ab+bc+ca \geqslant 4S\sqrt{3},$$

где равенство имеет место лишь в том случае, когда $a=b=c$.

▲ ▼ ▲

428. а) Докажите, что если стороны треугольника ABC удовлетворяют равенству $a^2+b^2=2c^2$, то $\angle C \leqslant 60°$.

б) Стороны треугольника ABC связаны соотношением a^2+ $+b^2=nc^2$, где $n>1$. Докажите, что $\cos C \geqslant \frac{n-1}{n}$.

429. Докажите, что если $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{h_c}$, то $\angle C \leqslant 120°$.

430. Докажите, что если $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{m_c}$, то $\angle C \geqslant 120°$.

▲ ▼ ▲

431. Докажите, что для углов любого треугольника ABC имеют место зависимости:

1) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C \leqslant \frac{9}{4}$;

2) $\cos A+\cos B+\cos C-1=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{2}$;

3) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

В каком случае каждое из этих неравенств обращается в равенство?

432. Докажите, что для углов любого треугольника ABC имеют место неравенства

$$\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C \geqslant \frac{1}{3}\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2} \geqslant \operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2} \geqslant \sqrt{3}.$$

В каком случае эти неравенства обращаются в равенства?

433. Докажите, что для углов остроугольного треугольника ABC справедливы неравенства

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C \geqslant 3(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C) \geqslant 3\sqrt{3}.$$

434. Докажите, что для всякого треугольника ABC

$$a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2 \geqslant 4S\sqrt{3},$$

где равенство имеет место, лишь если треугольник ABC равносторонний.

435. Докажите, что для углов треугольника ABC и любых положительных чисел x, y, z справедливо неравенство

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C.$$

При каком условии достигается равенство?

▲ ▼ ▲

436. Докажите, что для любой точки O, лежащей внутри треугольника ABC с периметром $2p$, справедливо неравенство

$$OA\cos\frac{A}{2}+OB\cos\frac{B}{2}+OC\cos\frac{C}{2}\geqslant p.$$

В каком случае это неравенство обращается в равенство?

437. Расстояния от произвольной внутренней точки O треугольника до его вершин A, B и C равны соответственно R_1, R_2, R_3; расстояния до его сторон BC, CA, AB равны r_1, r_2, r_3. Докажите, что $R_1+R_2+R_3\geqslant 2(r_1+r_2+r_3)$, где равенство имеет место только для равностороннего треугольника и его центра (неравенство Эрдеша — Морделла).

§ 5. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ И ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

В предыдущих задачах уже встречались самые известные линии и точки, связанные с треугольником: окружность, описанная около треугольника, и ее центр, точка пересечения медиан (центроид), точка пересечения высот треугольника (ортоцентр) и некоторые другие.

Свойства треугольника были хорошо изучены еще древними греками. Тем не менее и позднее в геометрии треугольника было открыто много любопытных фактов. Знаменитый математик Леонард Эйлер (1707—1783) обнаружил, что три замечательные точки треугольника — центроид M, ортоцентр H и центр O описанной окружности — лежат на одной прямой, причем $OM=2MH$.

Кроме указанных точек, существуют и другие замечательные точки треугольника. Известный итальянский физик и математик Торричелли (1608—1647) в сочинении «О максимумах и минимумах» впервые рассмотрел точку с наименьшей суммой расстояний до вершин треугольника. По его имени она названа точкой Торричелли. В 1873 г. французский математик Э. Лемуан исследовал свойства точки, сумма квадратов расстояний от которой до сторон треугольника является наименьшей. Эту точку теперь называют точкой Лемуана.

В настоящем параграфе содержатся задачи о замечательных линиях и точках, связанных с треугольником. По своему содержанию задачи разбиты на ряд циклов. Так, в задачах 438—448 речь идет о свойствах высот и биссектрис треугольника, а в задачах 449—456 — о свойствах медиан.

Задачи одного цикла лучше всего решать подряд, так как первые задачи, как правило, более легкие и полученные результаты могут быть использованы при решении последующих задач. Применяя различные средства алгебры, геометрии и тригонометрии, следует стремиться отыскать наиболее простое и красивое решение каждой задачи.

Задачи

438. Высоты непрямоугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что каждую из точек A, B, C, H можно рассматривать как ортоцентр треугольника с вершинами в трех других точках, при этом один из треугольников ABC, ABH, BCH и CAH остроугольный, а остальные три — тупоугольные.

439. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Докажите, что ортоцентр H треугольника является центром окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$.

Изменится ли результат, если ABC — тупоугольный треугольник?

440. Точка H — ортоцентр непрямоугольного треугольника ABC. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC, ABH, BCH и CAH, равны между собой.

441. Докажите, что середины трех сторон, основания трех высот треугольника и середины трех отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, лежат на одной окружности (окружность девяти точек).

442. Докажите, что центр окружности девяти точек есть середина отрезка, соединяющего ортоцентр треугольника с центром описанной около него окружности.

443. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC при продолжении пересекают окружность, описанную около треугольника, соответственно в точках A', B', C'. Докажите, что треугольник $A'B'C'$ гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом $k=2$ и ортоцентр H треугольника ABC является центром окружности, вписанной в треугольник $A'B'C'$.

444. Биссектрисы углов A, B, C треугольника ABC пересекают описанную окружность соответственно в точках A', B', C'. Докажите, что точка пересечения биссектрис треугольника ABC является ортоцентром треугольника $A'B'C'$.

445. Постройте треугольник ABC, зная положение трех точек, являющихся основаниями его высот.

446. Постройте треугольник, зная три точки, в которых биссектрисы углов треугольника пересекают описанную около него окружность.

447. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что окружность, описанная около треугольника A_1B_1C, и окружность с диаметром AB пересекаются под прямым углом.

448. Биссектрисы углов A, B, C неравностороннего треугольника ABC пересекают описанную около треугольника окружность в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что периметр и площадь треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно больше периметра и площади треугольника ABC.

▲ ▼ ▲

449. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC перпендикулярны. Найдите зависимость для сторон a, b и c треугольника.

450. Стороны треугольника ABC связаны соотношением $a^2+b^2=5c^2$. Докажите, что:

1) $m_a^2+m_b^2=m_c^2$; 2) $m_c=\frac{3}{2}c$; 3) $\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B=\frac{1}{2}\operatorname{ctg} C$.

451. Постройте треугольник ABC, если даны стороны $BC=a$, $AC=b$ и известно, что медианы, проведенные из вершин A и B, перпендикулярны.

452. Медиана CD образует со стороной AB острый угол ε. Докажите, что $\operatorname{ctg}\varepsilon=\frac{1}{2}|\operatorname{ctg} A-\operatorname{ctg} B|$.

453. Найдите зависимость между сторонами a, b и c треугольника ABC, если треугольник $A_1B_1C_1$, составленный из медиан данного треугольника, подобен ему.

454. Стороны треугольника ABC связаны соотношением $a^2+b^2=2c^2$. Докажите, что:

1) $\frac{m_a}{b}=\frac{m_b}{a}=\frac{m_c}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B=2\operatorname{ctg} C$.

455. Окружность, проведенная через вершину C и середины сторон AC и BC треугольника ABC, проходит через центроид треугольника. Докажите, что между сторонами этого треугольника имеет место зависимость $a^2+b^2=2c^2$.

Сформулируйте и докажите обратную теорему.

456. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что $\angle ABM=\angle BCM$ тогда и только тогда, когда стороны треугольника связаны соотношением $a^2+b^2=2c^2$.

▲ ▼ ▲

457. а) Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, делит биссектрису угла C в отношении $\frac{a+b}{c}$, считая от вершины.

б) Биссектрисы AK и BL треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $\frac{AO}{OK}=2$ и $\frac{BO}{OL}=3$. Найдите отношение длин сторон треугольника.

458. Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник, вершина среднего по величине угла и середины сторон, выходящих из этой вершины, лежат на одной окружности. Верно ли обратное утверждение?

459. Найдите зависимость между сторонами a, b и c треугольника ABC, если прямая, проходящая через центр вписанной окружности и центроид, параллельна стороне AB.

460. Стороны треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что если $c=\frac{a+b}{2}$ то:

1) $r=\frac{1}{3}h_c$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=2\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$; 3) $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=3$.

▲ ▼ ▲

461. а) На стороне AB треугольника ABC найдите точку, для которой сумма расстояний до сторон BC и AC является наименьшей.

б) Внутри или на границе треугольника найдите точку, для которой сумма расстояний от нее до сторон треугольника является наименьшей.

462. Докажите, что сумма расстояний от центра окружности, описанной около нетупоугольного треугольника, до его сторон равна сумме радиусов вписанной и описанной окружностей (теорема Карно).

463. Докажите, что если h_a — наибóльшая высота нетупоугольного треугольника ABC, то $R+r\leqslant h_a$.

464. Докажите, что для нетупоугольного треугольника ABC выполняется неравенство $2(R+r)\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

При каком условии это неравенство обращается в равенство?

▲ ▼ ▲

465. Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведены медиана CM и высота CH. Докажите, что $\angle ACM=\angle BCH$.

466. В треугольнике ABC проведена медиана CM и на стороне AB построена точка N, такая, что $\angle ACM=\angle BCN$. Докажите, что точка N делит сторону AB на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон. Верно ли обратное утверждение?

467. Известны стороны a, b и c треугольника ABC. На стороне AB построена точка N, такая, что $\frac{AN}{NB}=\frac{b^2}{a^2}$. Найдите длины отрезков AN, BN и CN. (Отрезок CN называется *симедианой* треугольника ABC.)

468. Докажите, что симедианы треугольника пересекаются в одной точке, расстояния от которой до сторон треугольника пропорциональны этим сторонам (точка Лемуана).

469. а) Докажите, что точка Лемуана треугольника ABC делит симедиану, проведенную из вершины C, в отношении $\frac{a^2+b^2}{c^2}$, считая от вершины C.

б) Докажите, что в прямоугольном треугольнике точка Лемуана есть середина высоты, проведенной из вершины прямого угла.

470. На стороне AB треугольника ABC найдите точку, для которой сумма квадратов расстояний до сторон BC и AC наименьшая.

471. Внутри треугольника найдите точку, для которой сумма квадратов расстояний от нее до сторон треугольника наименьшая.

▲ ▼ ▲

472. а) На стороне AB треугольника ABC найдите точку, для которой сумма квадратов расстояний до вершин треугольника наименьшая.

б) В плоскости треугольника найдите точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин данного треугольника наименьшая.

▲ ▼ ▲

473. На сторонах треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники BCA_1, CAB_1, ABC_1. Докажите, что окружности, описанные около этих треугольников, пересекаются в одной точке P и прямые AA_1, BB_1, CC_1 проходят через эту же точку P.

474. а) Докажите, что если больший угол треугольника меньше 120°, то наименьшую сумму расстояний до вершин треугольника имеет та точка внутри треугольника, из которой стороны треугольника видны под равными углами (точка Торричелли).

б) Докажите, что если один из углов треугольника равен 120° или больше его, то точка плоскости треугольника, для которой сумма расстояний до вершин наименьшая, совпадает с вершиной этого угла.

475. Выразите сумму расстояний от точки Торричелли треугольника ABC через длины a, b, c сторон треугольника, если все углы треугольника меньше 120°.

476. Докажите, что расстояния k_1, k_2 и k_3 от произвольной точки, взятой в плоскости треугольника ABC, до его вершин удовлетворяют неравенству $k_1+k_2+k_3 \geqslant \sqrt{3bc}$ при условии, что $a \geqslant b$, $a \geqslant c$.

▲ ▼ ▲

477. Дан треугольник ABC, углы которого равны α, β и γ. На сторонах треугольника вне его построены треугольники BCA_1, CAB_1, ABC_1, подобные треугольнику ABC, причем $\angle ABC_1 = \angle CBA_1 = \alpha$, $\angle BCA_1 = \angle ACB_1 = \beta$, $\angle CAB_1 = \angle BAC_1 = \gamma$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников BCA_1, CAB_1, ABC_1, пересекаются в одной точке N, через которую проходят и прямые AA_1, BB_1 и CC_1.

478. Внутри треугольника ABC постройте точку N так, чтобы $\angle NAB = \angle NBC = \angle NCA$ (точка Брокара).

479. а) Докажите, что если N — точка треугольника ABC, для которой $\angle NAB = \angle NBC = \angle NCA = \varphi$, то $\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$.

б) Докажите, что если ABC — треугольник, в котором $\angle C = 90°$, то $\operatorname{tg}\varphi = \frac{h_c}{c}$.

Постройте точку Брокара в прямоугольном треугольнике.

▲ ▼ ▲

480. Ортоцентр H треугольника ABC делит высоту CC_1 пополам. Докажите, что $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B = 2$.

481. Медиана AA_1, биссектриса BB_1 и высота CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке, которая делит высоту CC_1 в отношении 3:1, считая от вершины C. Докажите, что медиана AA_1 и биссектриса BB_1 треугольника перпендикулярны.

482. Найдите зависимость между углами треугольника ABC, если его медиана AA_1, биссектриса BB_1 и высота CC_1 пересекаются в одной точке.

§ 6. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК И ОКРУЖНОСТИ

Основные соотношения между элементами прямоугольного треугольника были рассмотрены в главе III (задачи 152—157, 167—169). В задачах этого параграфа раскрываются интересные свойства комбинации прямоугольного треугольника и связанных с ним окружностей.

Задачи

483. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CD; DE и DF — биссектрисы треугольников ACD и BCD. Докажите, что:

1) треугольники DEF и ABC подобны;

2) $CE = CF$, $EF = CL$, где CL — биссектриса треугольника ABC;

3) площадь треугольника CEF не больше $\frac{1}{4}$ площади треугольника ABC.

484. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, ACD и BCD, равны соответственно r, r_1, r_2 и $CD=h$. Докажите, что:

1) $r_1^2+r_2^2=r^2$;

2) $r+r_1+r_2=h$.

485. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CD. Прямая, проходящая через центры O_1 и O_2 окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, пересекает катеты AC и BC соответственно в точках K и L. Общая внешняя касательная к этим окружностям пересекает катеты AC и BC в точках M и N, а высоту CD в точке H. Докажите, что:

1) треугольники CMN и ABC подобны;

2) треугольник CKL прямоугольный равнобедренный;

3) точки C, M, N, O_1 и O_2 лежат на одной окружности с центром H, радиус которой равен радиусу вписанной окружности треугольника ABC.

486. На полуокружности с диаметром AB взята произвольная точка C и к диаметру проведен перпендикуляр CD. В криволинейные треугольники ACD и BCD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2, касающиеся диаметра AB соответственно в точках E и F. Точка S — середина отрезка O_1O_2. Докажите, что:

1) радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен полусумме радиусов окружностей, вписанных в криволинейные треугольники ABD и BCD;

2) CE и CF — биссектрисы углов ACD и BCD;

3) $SC=SE=SF$;

4) S — центр окружности, вписанной в треугольник ABC;

5) окружности, описанные около треугольников ACE и BCF, проходят через точку S.

487. Окружность касается катетов прямоугольного треугольника и описанной около него окружности. Докажите, что ее радиус вдвое больше радиуса окружности, вписанной в треугольник.

488. В окружность вписан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Касательная к окружности в точке C пересекает прямую AB в точке N. Докажите, что если M — проекция вершины C на прямую AB, то $AM:MB=AN:NB$.

489. Окружность радиуса R_1 проходит через вершины A и B острых углов прямоугольного треугольника ABC и через центр вписанной в него окружности. Докажите, что $R_1=R\sqrt{2}$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

490. В прямоугольный треугольник вписаны две равные окружности так, что они касаются друг друга, причем каждая из них касается гипотенузы и одного из катетов. Докажите, что $r \leqslant \rho\sqrt{2}$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник, ρ — радиус каждой из равных окружностей.

§ 7. ТРЕУГОЛЬНИК, ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК И ОКРУЖНОСТЬ

В предлагаемых задачах речь идет о треугольнике и окружности, расположенных различным образом. Кроме того, данный параграф содержит близкие им по содержанию задачи о комбинации четырехугольника и окружности. Для решения задач используются свойства вписанных и центральных углов, свойства секущей и касательной к окружности и некоторые другие сведения из геометрии.

Задачи

491. Окружность, построенная на стороне AB треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны BC и AC в точках M и N так, что $\frac{BM}{MC}=\frac{1}{2}$ и $\frac{AN}{NC}=\frac{1}{3}$. Вычислите углы треугольника ABC.

492. Окружность, построенная на отрезке AB треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину M стороны BC и пересекает сторону AC в точке N так, что $AN=\frac{1}{3}AC$. Найдите MN, если $AB=\sqrt{3}$.

493. Продолжения высот AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность радиуса R в точках P и Q. Найдите PQ, если $R=5$ и $AB=8$.

▲ ▼ ▲

494. Продолжения медиан AE и BF равнобедренного треугольника ABC с основанием AB пересекают описанную около него окружность в точках A_1 и B_1. Известно, что $A_1B_1=\frac{4}{3}AB$. Найдите углы треугольника.

495. Медианы AE и BF треугольника ABC при продолжении пересекают описанную окружность соответственно в точках A_1 и B_1. Известно, что $AA_1=BB_1$. Докажите, что либо треугольник ABC равнобедренный, либо его стороны a, b, c связаны соотношением $c^4=a^4-a^2b^2+b^4$.

496. В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник. Найдите длины медиан треугольника, если известно, что сумма всех трех медиан равна $4R$.

497. Медиана треугольника ABC, проведенная из вершины C, равна радиусу описанной окружности. Докажите, что либо $\angle C = 90°$, либо углы треугольника связаны зависимостью $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B = -\frac{1}{3}$.

▲ ▼ ▲

498. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AM и BN, пересекающиеся в точке O. Вершина C лежит на окружности, проходящей через точки O, M, N. Найдите OM и ON, если $MN = \sqrt{3}$.

499. Окружность, построенная на высоте CD остроугольного треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину M стороны BC и пересекает сторону AC в точке N так, что $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{3}$. Найдите MN и угол C треугольника ABC, если $AB = 4$.

500. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведены биссектрисы AM, BN и CL. Известно, что вершина C лежит на окружности, описанной около треугольника LMN. Найдите BC, если $AB = 8$.

501. Окружность радиуса R проходит через вершину C равнобедренного треугольника ABC, касается основания AB в точке A и пересекает сторону BC в точке D. Найдите AC и AB, если $\frac{BD}{DC} = 3$.

502. В треугольнике ABC проведена биссектриса AP. Известно, что центр окружности, описанной около треугольника ABP, лежит на отрезке AC. Найдите радиус этой окружности и сторону BC, если $AC = b$ и $AB = c$.

503. Прямая, проходящая через вершину C равнобедренного треугольника ABC, пересекает основание AB в точке D. В треугольниках ACD и BCD проведены биссектрисы CE и CF. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CEF, если $BC = a$ и $CD = b$.

504. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AB вписана окружность. Точка O — центр окружности. Прямая AO пересекает сторону BC в точке M, причем $AO = 11$ и $OM = 9$. Найдите углы треугольника и радиус окружности.

505. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность. Касательная к окружности, параллельная стороне AC, пересекает основание AB в точке M, такой, что $\frac{AM}{MB} = \frac{5}{3}$. Найдите стороны треугольника ABC, если радиус окружности равен 3.

506. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC с основанием AB, касается стороны BC в точке M. Отрезок AM пересекает окружность в точке N. Найдите $\frac{MN}{AN}$, если $\frac{AB}{BC} = k$.

507. Отрезок AD является биссектрисой прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C. Окружность, проходящая через точки A, C, D, пересекает гипотенузу AB в точке M так, что $\frac{AM}{AB}=\frac{3}{5}$ и $DM=6$. Найдите катеты треугольника ABC.

508. В окружность вписан треугольник ABC. Расстояния от вершины A и B до касательной к окружности в точке C равны соответственно m и n. Найдите высоту CH треугольника ABC.

509. В окружность радиуса R вписан треугольник ABC. Расстояния от вершин A и B до прямой, касающейся окружности в точке C, равны соответственно m и n. Найдите AC и BC.

510. Биссектриса угла C треугольника ABC пересекает описанную около треугольника окружность в точке D. Угол C равен $120°$. Докажите, что $CD=CA+CB$.

511. Окружность с центром в середине стороны AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ касается сторон BC, CD и AD. Найдите AB, если $AD=a$ и $BC=b$.

▲ ▼ ▲

512. Окружность с центром на диагонали AC равнобочной трапеции $ABCD$ касается боковой стороны AD и оснований трапеции. Известно, что $AC=AB$. Найдите острый угол трапеции.

513. Окружность с центром в точке пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ касается меньшего основания CD и боковых сторон. Найдите радиус окружности, если основания трапеции равны 6 и 26.

514. Дан четырехугольник $ABCD$. Окружность с центром на диагонали AC касается сторон AB, AD и CD. Найдите радиус этой окружности, если $AB=a$, $BC=CD=b$ и $DA=d$. Докажите, что $r\leqslant\frac{ab}{a+b}$. При каком условии достигается равенство?

▲ ▼ ▲

515. Около окружности радиуса R описана прямоугольная трапеция с острым углом β. Найдите площадь трапеции.

516. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, в которой угол B равен β. Окружность, центр которой лежит на основании AB, касается прямых BC, CD и AD. Найдите площадь трапеции, если радиус окружности равен R.

517. Около окружности описана трапеция, боковые стороны которой при продолжении пересекаются под углом α. Основания трапеции равны a и b $(a>b)$. Найдите радиус окружности.

518. Окружность, вписанная в квадрат $ABCD$, касается его стороны BC в точке M. Отрезок AM пересекает окружность в точке N. Найдите отношение $\frac{MN}{AN}$.

519. Равнобочная трапеция $ABCD$ с большим основанием AB описана около окружности, которая касается стороны BC в точке M. Отрезок AM пересекает окружность в точке N. Найдите отношение $\frac{AB}{CD}$, если $\frac{MN}{AN}=k$.

▲ ▼ ▲

520. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AB=3$, $BC=5$, $CD=DA=7$, $BD=8$. Вычислите длину диагонали AC. Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность, и найдите ее радиус.

521. а) Известны стороны четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность: $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. Вычислите его диагонали AC и BD.

б) В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, диагональ BD является биссектрисой угла B. Докажите, что $BD^2=ab+c^2$.

522. Докажите, что произведение диагоналей четырехугольника, вписанного в окружность, равно сумме произведений его противоположных сторон (теорема Птолемея).

523. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC вне его построен квадрат. Точка O — центр квадрата. Докажите, что $\sqrt{2}\,CO=AC+BC$.

524. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. На дуге AB, не содержащей точки C, взята произвольная точка M. Докажите, что $MA+MB=2MC\sin\frac{C}{2}$.

525. Окружность с центром O на стороне AB четырехугольника $ABCD$ касается трех других его сторон. Сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°. Докажите, что $AD+BC=AB$.

526. Диагональ AC четырехугольника разбивает его на два треугольника. Докажите, что если окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются между собой, то окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, также касаются между собой.

527. Диагональ вписанного в окружность четырехугольника делит его на два треугольника. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в эти треугольники, не зависит от выбора диагонали.

§ 8. КАСАЮЩИЕСЯ ОКРУЖНОСТИ

Как известно, две окружности могут иметь не более двух общих точек. Если две окружности имеют лишь одну общую точку, то их называют *касающимися*. Точка касания лежит на линии их центров.

Пусть R и r — радиусы окружностей, d — расстояние между их центрами. Тогда $d=R+r$ при внешнем касании окружностей. Если же окружности касаются внутренним образом и $R>r$, то $d=R-r$. Верно и обратное предложение: если $d=R+r$ или $d=R-r$, то окружности касаются.

При решении задач данного параграфа следует построить линию центров каждой пары касающихся окружностей, отметить точки касания, если при этом окружность касается еще и прямой, провести радиус в точку касания. Такое вспомогательное построение обычно приводит к появлению на чертеже прямоугольного треугольника или трапеции, и задача сводится к применению теоремы Пифагора или теоремы косинусов, как в задачах 181, 182, 193, 194, 195 главы I. В более сложных задачах для вычислений пользуются тригонометрией.

Задачи

528. Окружность, вписанная в полуокружность, касается ее диаметра AB в точке C. Найдите радиус этой окружности, если $AC=m$ и $BC=n$.

529. а) Точка O — середина отрезка AB. По одну сторону от прямой AB построены полуокружности с диаметрами AB, AO и OB. Найдите радиус окружности, касающейся трех данных полуокружностей, если $AO=R$.

б) Точка C лежит на отрезке AB. По одну сторону от AB построены полуокружности с диаметрами AB, AC и CB. Известно, что $AB=2R$, $AC=2x$ и $CB=2y$. Окружность радиуса r касается всех трех полуокружностей. Докажите, что:

1) $\frac{1}{r}+\frac{1}{R}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; 2) $r\leqslant\frac{1}{3}R$.

530. Дана полуокружность с диаметром AB и центром O. На отрезках AO и OB как на диаметрах построены две полуокружности с центрами O_1 и O_2, расположенные по ту же сторону от прямой AB, что и первая. Окружность с центром O_3 касается полуокружностей O и O_1, окружность с центром O_4 касается полуокружностей O и O_2. Окружности O_3 и O_4 касаются друг друга внешним образом. Докажите, что $O_1OO_4O_3$ — параллелограмм.

▲ ▼ ▲

531. Круг разделен хордой на два сегмента, в каждый из которых вписана окружность, касающаяся хорды в ее середине. Кроме того, в эти сегменты вписано еще по одной окружности, которые касаются соответственно первых двух. Докажите, что радиусы этих окружностей равны.

532. В окружность радиуса R вписан треугольник ABC и в каждый из образовавшихся сегментов вписана окружность, касающаяся хорды в ее середине. Докажите, что:

1) $r_1+r_2+r_3=R-\frac{1}{2}r$; 2) $\frac{3}{4}R\leqslant r_1+r_2+r_3<R$,

где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, а r_1, r_2, r_3 — радиусы окружностей, вписанных в сегменты.

533. Окружность касается двух сторон треугольника ABC в точках M и N и описанной около треугольника ABC окружности. Докажите, что середина отрезка MN есть центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

534. Около треугольника описана окружность радиуса R. Построены окружности радиусов r_1, r_2, r_3, каждая из которых касается двух сторон треугольника и описанной окружности. Докажите, что $4r\leqslant r_1+r_2+r_3\leqslant 2R$, где r — радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

535. а) Окружность радиуса R_1 касается продолжений сторон AB и AC треугольника ABC и описанной около него окружности. Докажите, что $R_1=\dfrac{r_a}{\cos^2\frac{A}{2}}$, где r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны BC треугольника ABC и продолжений двух его других сторон.

б) Около треугольника описана окружность радиуса R. Построены окружности радиусов R_1, R_2, R_3, каждая из которых касается продолжений двух сторон треугольника и описанной окружности. Докажите, что $R_1+R_2+R_3\geqslant 6R$.

▲ ▼ ▲

536. а) Три окружности, радиусы которых равны 1, 2 и 3, касаются попарно внешним образом. Вычислите радиусы двух окружностей, каждая из которых касается трех данных окружностей.

б) Из вершин данного прямоугольного треугольника опишите три окружности, касающиеся попарно внешним образом. Постройте окружность, касающуюся каждой из этих окружностей внутренним образом, и вычислите ее радиус, если катеты и гипотенуза треугольника равны a, b и c.

537. а) Три окружности, радиусы которых равны a, b и c, попарно касаются внешним образом. Докажите, что если r — радиус четвертой окружности, внешне касающейся каждой из трех данных, то

$$2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{r^2}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{r}\right)^2.$$

Вычислите радиус R окружности, касающейся каждой из трех данных внутренним образом.

б) Докажите, что если центры A, B, C данных окружностей являются вершинами треугольника с прямым углом C, то:

1) $R=\frac{ab}{c}$; 2) $\frac{1}{r}+\frac{1}{R}=\frac{4}{c}$.

§ 9. КВАДРАТ, ПРЯМОУГОЛЬНИК И ТРЕУГОЛЬНИК

538. а) Дан квадрат $ABCD$. На сторонах BC и CD квадрата выбраны точки M и N, такие, что $BM=CM$ и $\frac{CN}{ND}=2$. Докажите, что $\angle MAN=45°$.

б) На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и N так, что $\frac{CM}{MB}=m$, $\frac{CN}{ND}=n$. Докажите, что $\angle MAN=45°$ тогда и только тогда, когда $mn=2$.

539. а) Дан квадрат $ABCD$. Из произвольной точки M стороны BC проведена прямая, пересекающая сторону CD в точке N, такой, что $\angle AMB=\angle AMN$. Докажите, что $\angle MAN=45°$.

б) Дан квадрат $ABCD$. На сторонах BC и CD взяты соответственно точки M и N так, что $\angle MAN=45°$. Докажите, что $\angle AMB=\angle AMN$ и $\angle AND=\angle ANM$.

540. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и N так, что периметр треугольника CMN равен половине периметра квадрата. Докажите, что $\angle MAN=45°$. Сформулируйте и докажите обратную теорему.

541. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведены два луча, образующие между собой угол 45°. Один луч пересекает сторону BC в точке M, а диагональ BD в точке P. Другой луч пересекает сторону CD в точке N, а диагональ BD в точке Q. Докажите, что:

1) точки C, M, N, P и Q лежат на одной окружности;

2) отрезок PQ делит треугольник AMN на две фигуры равной площади.

542. Точка K — середина стороны AB равностороннего треугольника ABC. На сторонах AC и BC взяты точки M и N так, что $\angle MKN=60°$. Докажите, что периметр треугольника MCN равен половине периметра треугольника ABC.

543. Дан треугольник ABC. Окружность с центром O касается его стороны AB в точке K и продолжений сторон CA и CB соответственно в точках M и N. Прямая MN пересекает отрезки AO и BO в точках P и Q. Докажите, что:

1) $\angle AOB=\frac{1}{2}\angle MON=90°-\frac{\gamma}{2}$, где $\gamma=\angle C$;

2) $AB=AM+BN$, периметр треугольника ABC равен $2CM$;

3) AQ и BP — высоты треугольника AOB;

4) $PQ=AB\sin\frac{\gamma}{2}$.

544. В треугольник ABC вписана окружность с центром O, которая касается его сторон AC и BC соответственно в точках M и N. Прямая MN пересекает прямые AO и BO в точках P и Q. Докажите, что:

1) $\angle AOB=90°+\frac{\gamma}{2}$, где $\gamma=\angle C$;

2) AQ и BP — высоты треугольника AOB;

3) $PQ=AB\sin\frac{\gamma}{2}$.

▲ ▼ ▲

545. Дан квадрат $ABCD$. Через его вершину C проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке K, а серединный перпендикуляр к стороне AB в точке M, лежащей внутри квадрата. Найдите $\angle DCK$, если $\angle AKB = \angle AMB$.

546. Дан квадрат $ABCD$. В плоскости квадрата взята точка M, такая, что $BM = CM$ и $\angle AMB = 75°$. Найдите величину угла BMC.

547. Дан квадрат $ABCD$. На сторонах BC и CD взяты точки M и N так, что $\angle MAN = 45°$. Пользуясь одной линейкой, проведите перпендикуляр AH к прямой MN.

548. В данный прямоугольник $ABCD$ впишите равносторонний треугольник AEF так, чтобы его вершины E и F лежали соответственно на сторонах BC и CD. При каком условии задача разрешима?

549. В прямоугольник $ABCD$ вписан равносторонний треугольник AMN так, что вершины M и N лежат соответственно на сторонах BC и CD. Докажите, что площадь треугольника CMN равна сумме площадей треугольников ABM и ADN.

550. Диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и равны. Найдите его углы, если $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$, $CD = \sqrt{3}$.

▲ ▼ ▲

551. В данный прямоугольник $ABCD$ впишите прямоугольный равнобедренный треугольник AMN с прямым углом N так, чтобы вершины M и N лежали соответственно на сторонах BC и CD. Найдите площадь четырехугольника $ABMN$, если $BC = b$. При каком условии задача разрешима?

552. В квадрат $ABCD$ вписана окружность. Касательная к окружности пересекает стороны BC и CD соответственно в точках M и N. Докажите, что площадь треугольника AMN равна $\frac{1}{4}$ площади квадрата.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

2. $\angle B=45°$, $\angle C=90°$, $AC=1+\sqrt{2}$. Указание. Постройте точку D, симметричную C относительно биссектрисы AK. Тогда $DK=1$ и $\angle AKD=45°$.

3. $BC=1+\sqrt{3}$, $AC=3+\sqrt{3}$. **4.** $\angle A=60°$, $AC=2\sqrt{3}$.

5. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Указание. Постройте точку B', симметричную B относительно высоты CH, и рассмотрите треугольник $AB'C$.

7. Пусть B' — точка, симметричная точке B относительно прямой k. Точка пересечения отрезка AB' и прямой k — искомая точка C.

8. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 7.

10. Вершинами треугольника наименьшего периметра являются основания высот данного треугольника.

11. $2d$. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 7 и установите, что наименьший периметр имеет параллелограмм, вписанный в прямоугольник так, что его стороны параллельны диагоналям прямоугольника.

12. 1 и $\sqrt{3}$. **13.** 2,5. **14.** 126 см^2. **15.** 150 см^2, 42 см^2. **16.** 12 см. **17.** $0<h\leqslant\frac{a+b}{2}$.

19. Указание. Постройте точку N так, чтобы $\overline{MN}=\overline{AD}$. Пусть отрезок MN пересекает сторону CD параллелограмма в точке K. Тогда параллельный перенос на вектор $\overline{NK}$ переводит четырехугольник $MCND$ в четырехугольник, вписанный в данный параллелограмм.

20. Точка P — центр параллелограмма. Указание. Пусть точка K лежит на стороне AD параллелограмма. Перенесите параллелограмм $KMCD$ на вектор $\overline{KA}$ и воспользуйтесь тем, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри выпуклого четырехугольника, до его вершин не больше суммы диагоналей четырехугольника.

21. Указание. Пусть точки A и B лежат на сторонах KN и KL данного четырехугольника $KLMN$. Перенесите прямую MN параллельно на вектор $\overline{AB}$. Точка пересечения полученной прямой и стороны LM четырехугольника есть искомая вершина C параллелограмма. Если $\frac{KA}{AN}=\frac{KB}{BL}=\lambda$, то и $\frac{MC}{CL}=\frac{MD}{DN}=\lambda$.

22. 66 см^2. **23.** 4,8. **24.** $\angle ACD > \angle BCD$. **25.** $AC=2$, $BC=4$.

26. Указание. Примените симметрию относительно точки O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$.

27. Решение. Пусть в параллелограмм $ABCD$ вписан параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ и точка O — центр параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$. Так как O — середина каждого из отрезков A_1C_1 и B_1D_1, концы которых лежат на сторонах параллелограмма $ABCD$, то прямые AB и CD, а также прямые AD и BC симметричны относительно точки O. Значит, точка O является центром симметрии параллелограмма $ABCD$.

28. Отрезок PQ (без концов), где P и Q — точки, симметричные точкам K и M относительно центра параллелограмма.

29. Постройте окружность, симметричную одной из данных относительно точки пересечения окружностей.

30. $\frac{1}{2}$. Указание. Докажите, что шестиугольник имеет центр симметрии.

32. Точка D — вершина параллелограмма $ABCD$.

34. 60°.

35. Указание. Примените поворот вокруг точки O на 60°.

36. Указание. Пусть O — центр правильного шестиугольника. Тогда K — середина радиуса OC. Отрезок OC поверните вокруг точки A на 60°.

37. $CM=1$, $\angle BMC=105°$.

40. $DM=\sqrt{3}$, $AB=\sqrt{7}$. **41.** $CM=1+\sqrt{3}$, $\angle BMC=30°$.

42. 20°. Указание. Постройте образ M' точки M при повороте вокруг точки C на 60° и рассмотрите треугольник CMM'.

43. $AC=\sqrt{5}$, $\angle BMC=135°$, $\angle CMA=90°$. Указание. Пусть треугольник ABC ориентирован положительно. Поверните треугольник ACM вокруг точки C на 90° в положение BCD и рассмотрите треугольник BDM.

44. $BM=\sqrt{3}$, $CM=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

46. $AM=\sqrt{3}$, $AC=1+\sqrt{3}$, $\angle AMD=75°$.

47. Указание. Поверните треугольник ABM вокруг точки A на 90°.

48. 45°.

49. Указание. Постройте точку D, симметричную C относительно точки M. Применив поворот на 90°, совместите отрезок CD с отрезком A_1B_1.

50. Указание. Поверните треугольник A_2AB вокруг центра квадрата ACA_1A_2 на 90° так, чтобы отрезок A_2A перешел в отрезок AC, а точка B — в некоторую точку D. Докажите, что DH — высота треугольника ABD, а прямые A_2B и AB_2 перпендикулярны соответственно его сторонам AD и BD.

51. Указание. Воспользуйтесь тем, что $MB = MC$ и $\angle B_1MC_1 = 90°$, где M — середина стороны BC (см. пример 7).

52. Указание. Примените поворот вокруг середины диагонали данного четырехугольника на 90°.

54. 90°, 60°, 30°. Указание. Докажите, что композиция $F = R_N^{60°} \circ R_O^{120°} \circ R_M^{180°}$ есть тождественное преобразование.

56. 40°, 40°, 100°. **57.** 30°, 30°, 120°.

60. Решение. Пусть $KLMN$ — данный параллелограмм. Докажем, что композиция F четырех симметрий относительно точек K, L, M и N возвращает произвольную точку A плоскости в исходное положение. Имеем:

$$F = R_N^{180°} \circ R_M^{180°} \circ R_L^{180°} \circ R_K^{180°} = T_{2\overline{MN}} \circ T_{2\overline{KL}}.$$

А так как $\overline{KL} = -\overline{MN}$, то F — тождественное преобразование. Если точка B симметрична A относительно K, точка C симметрична B относительно L и D симметрична C относительно M, то $ABCD$ — четырехугольник, середины сторон которого — вершины параллелограмма $KLMN$.

61. Указание. Воспользуйтесь тем, что композиция нечетного числа центральных симметрий есть центральная симметрия.

63. $\frac{1}{2}c$. **64.** $d \sin \beta$.

66. Указание. Воспользуйтесь подобием треугольников BCC_1 и HAC_1.

69. Указание. Треугольники MAC и MCB подобны.

73. Указание. Докажите, что стороны данного треугольника ABC и касательные к вписанной в него окружности ограничивают центрально-симметричный шестиугольник, вершины M и K которого лежат на стороне AB (рис. 63). Пусть $AM = x$, $BK = y$, $KM = z$, $AB = c$. Тогда

$$\frac{r_1}{r} = \frac{x}{c}, \quad \frac{r_2}{r} = \frac{y}{c}, \quad \frac{r_3}{r} = \frac{z}{c}.$$

Учитывая, что $x + y + z = c$, получаем:

$$r_1 + r_2 + r_3 = r.$$

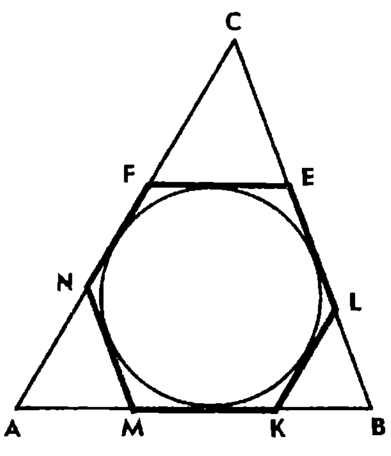


Рис. 63

74. $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

75. $\sqrt{ab}$. Указание. Докажите, что треугольники ABC и ACD подобны.

76. $BC=\sqrt{3}$, $\angle B=30°$. Указание. Треугольники ABC и ACD подобны.

77. Указание. Пусть точка M, принадлежащая стороне CD прямоугольника $ABCD$, удовлетворяет условию задачи. Тогда $\angle AMB=90°$. Высота MN прямоугольного треугольника AMB разбивает его на два треугольника, подобных треугольнику AMB и соответственно равных треугольникам ADM и BCM. Отсюда следует, что точка M должна лежать на окружности, построенной на отрезке AB как на диаметре.

79. Указание. Пусть основания трапеции равны a и b. Тогда длина отрезка, делящего трапецию на две подобные трапеции, равна $\sqrt{ab}$.

80. Окружность с центром A радиуса $\sqrt{AB\cdot AC}$ (без точек пересечения с прямой AB).

81. Решение. Пусть диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, а продолжения боковых сторон AD и BC — в точке S. Середины оснований AB и CD обозначим через M и N. Гомотетия с центром S и коэффициентом $k=\frac{SD}{SA}$ переводит точки A, B, M соответственно в точки D, C, N. Следовательно, центр гомотетии S и точки M и N принадлежат одной прямой. Аналогично докажем, что точки O, M и N также принадлежат одной прямой.

82. Указание. Убедитесь, что $ABMN$ — трапеция, и воспользуйтесь результатом задачи 81.

83. Центр гомотетии — точка пересечения медиан исходного треугольника, коэффициент гомотетии $k=-\frac{1}{2}$.

84. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 83 и докажите, что при гомотетии с центром M и коэффициентом $k=-\frac{1}{2}$ точка H переходит в точку O.

85. $\frac{2}{3}p$.

87. Центр гомотетии — середина средней линии четырехугольника $ABCD$, коэффициент гомотетии $k=-\frac{1}{3}$.

88. Решение. Достаточно доказать, что $AD=KF$ (рис. 64). Середину P стороны BC соединим с точкой M. Тогда $MP\parallel AC$ (по свойству средней линии треугольника) и $MP\parallel KF$. Треугольники CKF и CMP гомотетичны, следовательно, $\frac{KF}{MP}=\frac{CF}{CP}$. А так как $MP=\frac{1}{2}AC$ и $CP=\frac{1}{2}BC$, то $KF=\frac{AC}{BC}\cdot CF$.

Треугольники AED и ABC также гомотетичны, поэтому

$$AD=\frac{AC}{BC}\cdot DE=\frac{AC}{BC}\cdot CF.$$

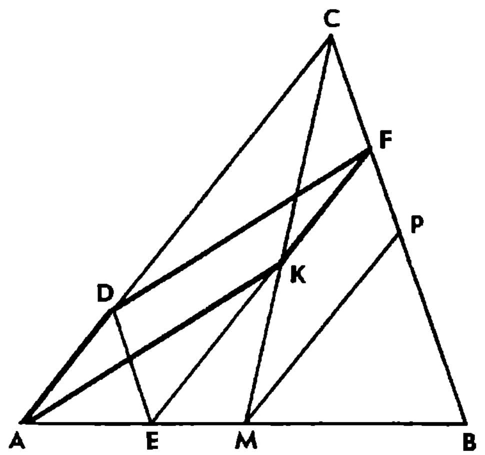


Рис. 64

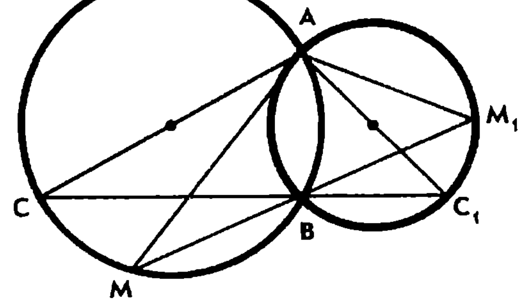


Рис. 65

Итак, $AD = KF$. Кроме того, $AD \parallel KF$. Следовательно, $ADFK$ — параллелограмм.

89. Указание. Докажите, что $\frac{EP}{DP} = \frac{BF}{CF} = \frac{BQ}{DQ}$.

90. Указание. Пусть OA и OB — данные радиусы окружности (точки A и B не диаметрально противоположны). На продолжениях хорды AB постройте точки C и D так, чтобы отрезок CD делился точками A и B на три равные части. Затем примените гомотетию с центром O.

91. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 81 и постройте середины оснований трапеции. Затем середину каждого основания соедините с концами другого основания.

93. Решение. Пусть окружности ω и ω_1 радиусов R и R_1 пересекаются в точках A и B (рис. 65). Центрально-подобный поворот с центром A, коэффициентом $k = \frac{R_1}{R}$ и углом поворота $\varphi = \angle CAC_1$ переводит диаметр AC окружности ω в диаметр AC_1 окружности ω_1 и, значит, окружность ω в окружность ω_1.

Пусть M — произвольная точка окружности ω и прямая MB пересекает окружность ω_1 в точке M_1. Тогда M_1 является образом точки M при указанном преобразовании. Действительно, треугольники MAM_1 и CAC_1 подобны (углы M и M_1 одного соответственно равны углам C и C_1 другого в силу теоремы о вписанных углах). Поэтому $\varphi = \angle MAM_1 = \angle CAC_1$ и $k = \frac{AM_1}{AM} = \frac{R_1}{R}$. Таким образом, при центрально-подобном повороте $H_A^{k,\varphi}$ точка M окружности ω и ее образ M' принадлежат прямой, проходящей через точку B.

94. 45°. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 93.

96. Указание. Докажите, что существует центрально-подобный поворот, при котором отрезок CD переходит в отрезок KA.

97. Решение. Середину N отрезка BE соединим с точкой D (рис. 66). Применим поворот вокруг точки E на $90°$ и гомотетию с тем же центром и коэффициентом $k=\frac{DE}{CE}$. При этом центрально-подобном повороте треугольник CDE переходит в треугольник DBE, точки C и Dпереходят в точки D и B $\left(\frac{BE}{DE}=\frac{DE}{CE}=k\right)$, середина M отрезка DE — в точку N — середину отрезка BE, т. е. отрезок CM — в отрезок DN. А так как при центрально-подобном повороте угол между любым лучом и его образом равен углу поворота, то отрезки CM и DN перпендикулярны.

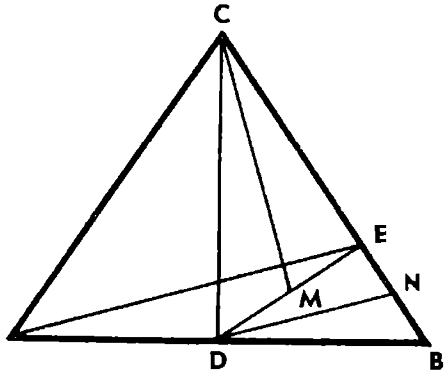


Рис. 66

98. Указание. Примените центрально-подобный поворот, при котором точки B и C переходят в точки M и E. Докажите, что угол между лучами BC и ME равен углу BCD.

99. $30°$, $30°$, $120°$.

100. $\angle BAK=\angle ABK=\gamma$. Указание. Пусть ABC — положительно ориентированный треугольник. Рассмотрите композицию центрально-подобных поворотов $F=\Pi_A^{\frac{1}{k}, 90°}\circ\Pi_B^{k, 90°}\circ R_K^{180°}$, где $k=\operatorname{ctg}\gamma$. Докажите, что F — тождественное преобразование. Постройте образ точки K при композиции F.

101. Указание. Докажите, что $\Pi_M^{\frac{1}{k}, 90°}\circ\Pi_N^{k, 90°}\circ R_K^{180°}=E$, где $k=\operatorname{ctg}\gamma$. Тогда $R_K^{180°}(K)=K$, $\Pi_N^{k, 90°}(K)=L$, $\Pi_M^{\frac{1}{k}, 90°}(L)=K$. Треугольники KLM и KLN симметричны относительно прямой KL и подобны треугольнику ACM.

102. $45°$, $60°$, $75°$. Решение. Пусть треугольник ABC ориентирован положительно (рис. 67, a). Рассмотрим композицию центрально-подобных поворотов $F=\Pi_N^{k_3, \varphi_3}\circ\Pi_P^{k_2, \varphi_2}\circ\Pi_M^{k_1, \varphi_1}$, где

$$\varphi_1=\angle BMA,\ \varphi_2=\angle APC,\ \varphi_3=\angle CNB,\ k_1=\frac{AM}{BM},\ k_2=\frac{CP}{AP},\ k_3=\frac{BN}{CN}.$$

При первом центрально-подобном повороте с центром M точка B переходит в точку A, при втором — точка A переходит в C, при третьем — C переходит в B, значит, $F(B)=B$.

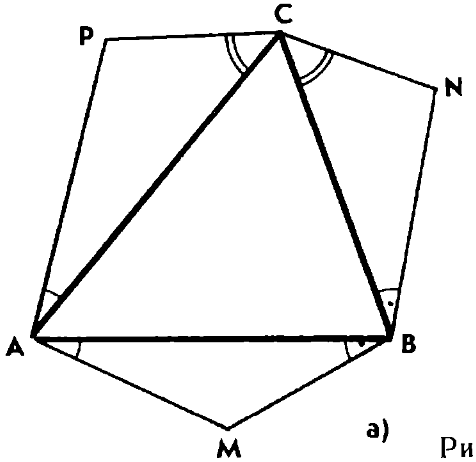
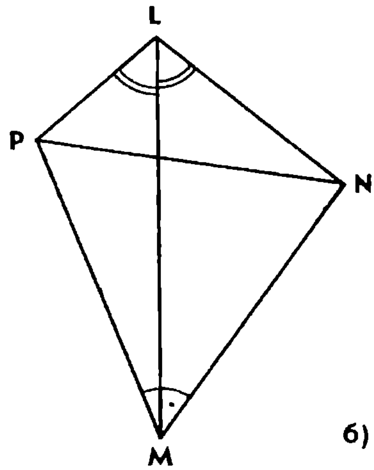


Рис. 67



Используя теорему синусов, получаем:

$$k_1k_2k_3=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ}\cdot\frac{\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ}\cdot\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=1.$$

Складывая углы поворота, находим, что $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=360^\circ$. Следовательно, F — тождественное преобразование.

Найдем углы треугольника MNP. Для этого последовательно построим образы точки M при центрально-подобных поворотах, входящих в композицию F. Имеем $\Pi_M^{k_1,\varphi_1}(M)=M$. Построим образ L точки M при втором центрально-подобном повороте: $\Pi_P^{k_2,\varphi_2}(M)=L$ (рис. 67, *б*). Поскольку F — тождественное преобразование, то $F(M)=M$ и образ точки L при третьем центрально-подобном повороте совпадает с точкой M: $\Pi_N^{k_3,\varphi_3}(L)=M$.

Треугольники ACP и MLP подобны и ориентированы одинаково. Точно так же BCN и MLN — подобные одинаково ориентированные треугольники. Следовательно, $\angle NMP=$ $=30^\circ+15^\circ=45^\circ$.

Величину угла MPN можно вычислить, пользуясь теоремой синусов. Но, если повторить те же рассуждения для тех же трех подобий, взяв их центры в такой последовательности: P, N, M, сразу получим $\angle MPN=15^\circ+45^\circ=60^\circ$.

103. 2α, 2β, 2γ. **104.** 45°.

105. Указание. Пусть $ABCD$ — положительно ориентированный четырехугольник, P и Q — центры равносторонних треугольников, построенных на сторонах BC и AD. Докажите, что $R_Q^{120^\circ}\circ R_M^{60^\circ}=R_P^{120^\circ}\circ R_N^{60^\circ}=R_0^{180^\circ}$, где O — середина диагонали BD. Используйте теорему о композиции двух поворотов и установите, что OMQ и ONP — подобные прямоугольные треугольники, острые углы которых равны 30° и 60°. Далее докажите, что центрально-подобный поворот $\Pi_O^{\sqrt{3},\,90^\circ}$ переводит точки P и Q

соответственно в точки N и M.

106. Указание. Установите, что $\angle MNQ = \angle NMP = \angle MCQ$.

107. Решение. Пусть шестиугольник $ABCDEF$, вписанный в окружность с центром O, ориентирован положительно; треугольники OAB, OCD и OEF равносторонние; X, Y, Z — середины сторон BC, DE, AF (рис. 68).

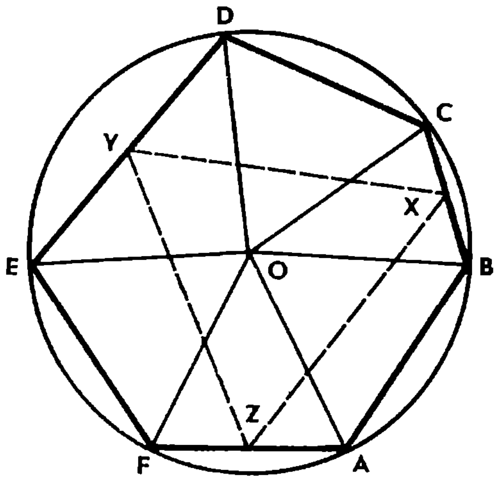


Рис. 68

Композиция двух поворотов $R_X^{180°}$ и $R_O^{60°}$ равносильна одному повороту на 240° вокруг точки L, в которой пересекаются прямые XL и OL, образующие с прямой OX углы, соответственно равные 90° и 30°.

Аналогично $R_O^{60°} \circ R_Y^{180°} = R_M^{240°}$, $R_O^{60°} \circ R_Z^{180°} = R_N^{240°}$, причем положения точек M и N определяются так же, как положение точки L.

Поворот $R_X^{180°}$ переводит точку B в точку C, поворот $R_O^{60°}$ — точку C в точку D, а их композиция — точку B в точку D, т. е. $R_L^{240°}(B) = D$. Аналогично $R_M^{240°}(D) = F$ и $R_N^{240°}(F) = B$. Таким образом, композиция $F = R_N^{240°} \circ R_M^{240°} \circ R_L^{240°}$ оставляет точку B на месте, и поскольку сумма углов поворота равна 720°, то F является тождественным преобразованием.

Далее обычным образом устанавливаем, что LMN — равносторонний треугольник. Центрально-подобный поворот $\Pi_O^{k,\,30°}$, где $k = \dfrac{1}{\cos 30°}$, переводит треугольник XYZ в треугольник LMN, значит, треугольник XYZ также является равносторонним.

110. Указание. Около четырехугольника $CMHN$ опишите окружность и установите, что $\angle CMN = \angle CHN = \angle B$.

111. б) Решение. Так как $\angle CMP = \angle CNP = 90°$, то около четырехугольника $MCNP$ можно описать окружность. Обозначим $\angle ACB = \gamma$. Так как CP — диаметр окружности, то $MN = CP \sin\gamma$. Следовательно, отрезок MN будет наименьшим, когда отрезок CP наименьший, т. е. при условии, что CP — высота треугольника.

112. Указание. Опишите около треугольника ABC окружность. Продолжив отрезок CP до пересечения с окружностью в точке D, докажите, что $MN \parallel AB$ тогда и только тогда, когда $\angle CPN = \angle CDB$. При этом $\angle CBD = 90°$ и CD — диаметр окружности, а P — точка пересечения CD со стороной AB.

113. Указание. На отрезке AB как на диаметре постройте окружность и убедитесь, что она пройдет через точки O и C. Установите, что $\angle AOC = \angle ABC$ и поэтому при движении треугольника ABC луч OC все время образует с лучом OA угол, равный углу B треугольника. Далее установите, что искомое геометрическое место точек C есть отрезок C_1C_2, причем $OC_1 = AB$ и $OC_2 = AC$, где AC — меньший из катетов.

114. Указание. Около равнобочной трапеции $ADCM$ опишите окружность и убедитесь в том, что она пройдет и через точку N. Докажите, что $DM = DN$ и $\angle BAM = \angle BCN = \angle MDN$.

115. Указание. Треугольники ADN и BCM равнобедренные. Так как $\angle DMN = \angle BCD = 90°$, то точки C, D, M и N лежат на одной окружности и $\angle ADN = \angle BCM$. Следовательно, треугольники ADN и BCM подобны.

116. Указание. См. пример 2.

117. Указание. Постройте вспомогательные окружности, описанные около равносторонних треугольников BCA_1, CAB_1 и ABC_1,докажите, что они пересекаются в одной точке, через которую проходят и все три прямые AA_1, BB_1 и CC_1.

118. Указание. Пусть B и D — вершины тупых углов четырехугольника $ABCD$. На отрезке AC как на диаметре постройте окружность. Докажите, что точки B и D будут лежать внутри этой окружности.

119. 30°, 60°, 90°. Решение. Около четырехугольника $BCFD$, противоположные углы B и F которого прямые, можно описать окружность (рис. 69). Отрезок CD — диаметр этой окружности. Докажем, что она пройдет и через точку K.

Так как FK — медиана прямоугольного треугольника AEF, то $FK = AK$. Значит, треугольник AFK равносторонний и $BCFK$ — равнобокая трапеция. Окружность, описанная около трапеции $BCFK$, совпадает с окружностью, описанной около четырехугольника $BCFD$, поскольку эти четырехугольники имеют три общие вершины. Остается заметить, что $\angle CKD = \angle CFD = 90°$ и $\angle CDK = \angle CBK = 60°$ (по свойству вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу).

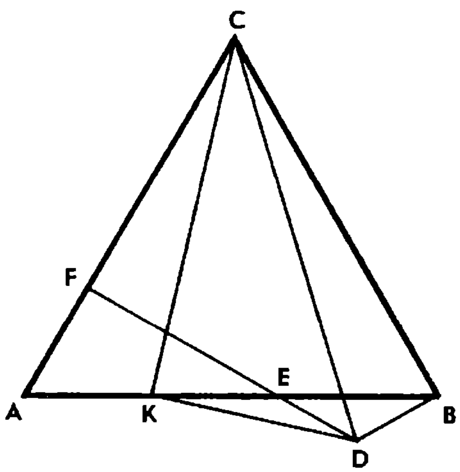


Рис. 69

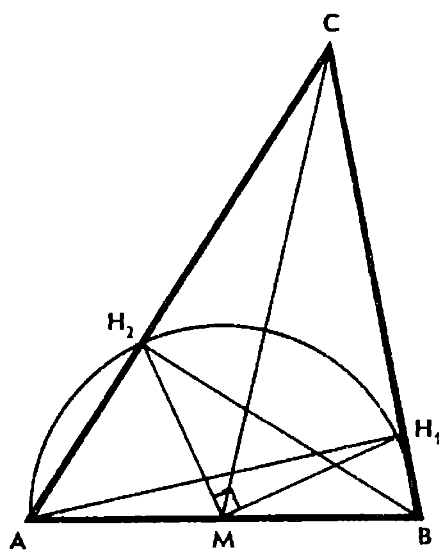


Рис. 70

120. Указание. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, тогда $\angle AOB = 90° + \frac{1}{2}\angle C$. Воспользуйтесь этим соотношением и докажите, что около четырехугольника $CEOF$ можно описать окружность.

121. 45° или 135°. Решение. Если угол C острый, то основания H_1 и H_2 высот AH_1 и BH_2 треугольника ABC лежат на сторонах BC и AC или же одно основание лежит на стороне BC, а другое — на продолжении AC (или наоборот). Если же $\angle C > 90°$, то H_1 и H_2 лежат на продолжениях BC и AC.

Окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, проходит через точки H_1 и H_2. Если $\angle C < 90°$ (рис. 70), то

$$\angle C = 90° - \angle H_1BH_2 = 90° - \frac{1}{2}\angle H_1MH_2 = 45°.$$

Если же $\angle C > 90°$, то

$$\angle C = 90° + \angle H_1BH_2 = 90° + \frac{1}{2}\angle H_1MH_2 = 135°.$$

122. а) Указание. Пусть прямая AB пересекает данную прямую l в точке O, а искомая окружность касается l в точке C. Тогда $OC^2 = OA \cdot OB$. Постройте точку C и около треугольника ABC опишите окружность.

б) Указание. Через точки A и B проведите окружность, касающуюся другой стороны угла. Точка касания — искомая точка C.

123. а) Указание. Постройте точку C_1, симметричную C относительно точки A, и точку C_2, симметричную C относительно точки B. Затем постройте точки пересечения прямой C_1C_2 и окружности.

б) Решение. Около треугольника ABC опишем окружность. Сначала будем считать, что точка M лежит на стороне AB, т. е. внутри окружности. Если хорда CD проходит через точку M, то имеет место равенство $CM \cdot MD = AM \cdot MB$. Значит, точка M удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда M — середина отрезка CD. Остается воспользоваться результатом задачи а).

Если точка M лежит на продолжении стороны AB, то выполняется равенство $AM \cdot BM = CM^2$, где CM — касательная к окружности и C — точка касания. Обратно, если касательная к окружности в точке C пересекает прямую AB, то точка M их пересечения искомая.

Задача не имеет решений лишь при условии, что $AC = BC$ и $\angle ACB < 90°$.

124. Указание. Пусть CH — высота и CM — медиана треугольника ABC. Даны отрезок, равный биссектрисе CD

треугольника, углы HCD и MCD. По этим данным элементам сразу можно построить прямоугольные треугольники CHD и CHM.

Если около треугольника ABC описать окружность и продолжить биссектрису CD треугольника до пересечения с окружностью, то точка пересечения E — середина дуги AB и поэтому она лежит на перпендикуляре к стороне AB, проходящем через точку M.

Из этого анализа видно, как построить точку E, а затем и описанную окружность, которая пересечет прямую HM в искомых точках A и B.

125. 70°. Указание. Точка B является центром окружности, описанной около треугольника ACD.

127. 10°. Указание. Так как $\angle BAC=30°$, $\angle BMC=60°$ и $MB=MC$, то точка M — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

128. 70°. Указание. Постройте точку M, симметричную O относительно стороны AB. Докажите, что точка C является центром окружности, описанной около треугольника ABM, и поэтому $CM=CB$. Установите, что треугольник BOM равносторонний и CO — биссектриса угла BCM.

129. 30°. Указание. Через середину стороны AB проведите к AB перпендикуляр и постройте на нем точку O так, чтобы $\angle ABO=15°$ и $\angle OBC=60°$. Докажите, что O — центр описанной около треугольника ABC окружности.

130. 15°. Указание. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда $\angle AOB=120°$, $\angle BOC=90°$. Докажите, что прямая OC проходит через точку P, поэтому $\angle AOP=30°$, а $\angle ACP=15°$.

131. Равнобедренный или прямоугольный. Решение. Около треугольника ABC опишем окружность и продолжим медиану CM до пересечения с окружностью в точке D (рис. 71). Тогда $\angle BDC=\angle A$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Сумма углов C и D треугольника BCD равна 90°, поэтому $\angle CBD=90°$ и CD — диаметр окружности.

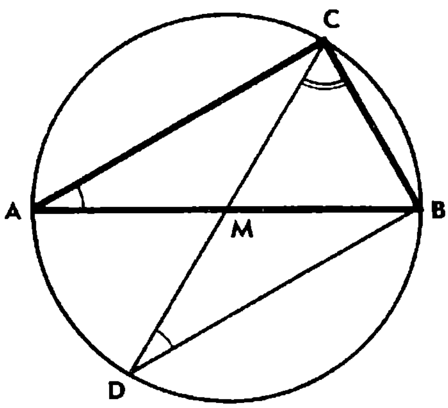


Рис. 71

Возможны два случая:

а) Диаметр CD перпендикулярен стороне AB и является осью симметрии треугольника ABC. Значит, $AC=BC$, т. е. треугольник ABC равнобедренный.

б) Диаметр CD не перпендикулярен AB. Тогда точка M — центр окружности, описанной около треугольника ABC, и AB — диаметр окружности (см. пример 3). Значит, $\angle ACB=90°$ и треугольник ABC прямоугольный.

133. Указание. Пусть ABC — искомый прямоугольный треугольник с гипотенузой AB. Выпрямите ломаную ABC так, чтобы точка B перешла в точку D, лежащую на продолжении катета AC. Тогда $AD=s$, $AB=c$, $\angle D=45°$. Постройте вспомогательный треугольник ABD, а затем точку C. Задача имеет решение тогда и только тогда, когда $c<s\leqslant c\sqrt{2}$.

134. Указание. Примените метод спрямления: постройте вспомогательный прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна p, а катет равен h_1+h_2.

135. 15°, 75°; $S=\frac{1}{2}$. Решение. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C, в котором $AB=2$ и $AC-BC=\sqrt{2}$. Отложим на катете AC отрезок CD, равный катету BC. Тогда BCD — равнобедренный прямоугольный треугольник, $\angle BDC=45°$ и $\angle ADB=135°$. Кроме того, $AB=2$ и $AD=\sqrt{2}$.

Найдем острые углы треугольника ABD. Обозначим $\angle ABD=\beta$ и, пользуясь теоремой синусов, составим пропорцию

$$\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}=\frac{\sin 135°}{2},$$

откуда $\sin\beta=\frac{1}{2}$, $\beta=30°$. Значит, $\angle ABC=30°+45°=75°$, $\angle A=15°$.

Теперь найдем площадь S треугольника.

Так как $BC=2\sin 15°$ и $AC=2\cos 15°$, то

$$S=2\sin 15°\cos 15°=\sin 30°=\frac{1}{2}.$$

136. $AC=BC=\sqrt{3}$.

137. Указание. Сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон равна высоте, проведенной к боковой стороне.

138. Указание. На стороне AB треугольника ABC отложите отрезок AK, равный биссектрисе AD. Установите, что $BK=DK$. Затем рассмотрите четырехугольник $ACDK$ и докажите, что $DK=CD$.

139. Указание. На стороне AB отложите отрезок AK, равный AD. Докажите, что треугольник ADK равносторонний, а треугольники CDK и BCK равнобедренные.

140. Указание. Пусть O — центр окружности и отрезок OA_2 пересекает диагональ A_1A_4 в точке K. Докажите, что $A_1K=A_1A_2$ и $A_4K=OA_4$.

144. Указание. Треугольник $AB'C$, дополнительный к треугольнику ABC, равнобедренный. Так как $B'H=BH$ и $AC=AB'$, то можно построить точку B', а затем точку C.

146. Указание. Постройте треугольник $AB'C$, дополнительный к треугольнику ABC. Так как $\angle ACB'=90°$, то $c'=$ $=AB'=2R=\sqrt{a^2+b^2}$.

147. $BC=6$. Решение. Треугольник $AB'C$, дополнительный к треугольнику ABC, равнобедренный: $AB'=AC=4$ (см. пример 8). Равнобедренные треугольники $AB'C$ и BCB' имеют общий угол B' при основаниях. Значит, они подобны. Обозначив $BC=x$, составим пропорцию $\frac{x}{4}=\frac{9}{x}$, откуда $x=6$.

148. а) $b^2=a(a+b)$, $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; б) $a_{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$. Указание. На продолжении стороны AB за точку B постройте точку A' так, чтобы $A'C=AC=b$. Докажите, что $BA'=a$, и воспользуйтесь подобием треугольников $A'BC$ и ACA'.

149. Указание. Постройте треугольник $AB'C$, дополнительный к треугольнику ABC, и установите, что $\angle ACB'=2\angle B'$.

150. Указание. Постройте треугольник $A'BC$, дополнительный к данному, как в задаче 148. Пользуясь теоремой косинусов, выразите сторону $A'B$ через a и b. Затем воспользуйтесь соотношением, связывающим стороны дополнительных треугольников $A'BC$ и ABC.

151. 2,4. Указание. Общая хорда окружностей является высотой CD треугольника ABC.

154. Решение 1. Пусть окружность с центром O радиуса r, вписанная в треугольник ABC, касается катетов BC, AC и гипотенузы AB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Четырехугольник CA_1OB_1 является квадратом, поэтому $CA_1=CB_1=r$. Обозначив $BC_1=BA_1=m$ и $AC_1=AB_1=n$, имеем:

$$a=r+m,\ b=r+n,\ p=r+m+n.$$

Воспользуемся формулами $2S=ab$, $S=pr$ и найдем:

$$2S=(r+m)(r+n),$$
$$S=(r+m+n)r.$$

Вычтем из первого равенства второе и получим доказываемое соотношение: $S=mn$.

Решение 2. Воспользуемся тождеством $(a-b)^2=c^2-4S$. Так как $c=m+n$ и $a-b=m-n$, то $(m-n)^2=(m+n)^2-4S$, откуда $S=mn$.

155. $r=\frac{-c+\sqrt{c^2+4S}}{2}$, $S\leqslant\frac{1}{4}c^2$. Если $c=13$ и $S=30$, то $r=2$.

156. Решение. Пусть ABC — прямоугольный треугольник, AB — его гипотенуза. При $a<b$ согласно условию задачи имеем: $a=b-d$, $c=b+d$, $d>0$.

По теореме Пифагора $(b+d)^2=(b-d)^2+b^2$, откуда $b=4d$. Итак, $a=3d$, $b=4d$, $c=5d$; треугольники, удовлетворяющие условию задачи, подобны треугольнику со сторонами 3, 4 и 5.

157. Прямоугольный треугольник, длины сторон которого пропорциональны числам 3, 4 и 5.

159. а) $h_b=r_b=12$.

б) Решение. Пусть $h_b=r_b$. Воспользуемся формулами

$$h_b=\frac{2S}{b},\quad r_b=\frac{S}{p-b}.$$

Получим $\frac{2}{b}=\frac{1}{p-b}$, или $2p=3b$, откуда $b=\frac{a+c}{2}$.

160. Решение. Пусть M — точка на биссектрисе BD треугольника ABC и расстояния ее до сторон AB и BC равны x, а расстояние до стороны AC равно y. Вычислим двумя способами удвоенную площадь треугольника:

$$2S=bh_b,$$
$$2S=(a+c)\,x+by=b\,(2x+y),$$

ибо $a+c=2b$. Отсюда $2x+y=h_b$.

162. Указание. Воспользуйтесь формулой

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

164. Прямоугольный.

166. Прямоугольный или равнобедренный. Указание. Из данного соотношения выведите равенство

$$(a-b)(2S-ab)=0.$$

167. Указание. Воспользуйтесь формулами задачи 153 и неравенством $a+b\leqslant c\sqrt{2}$ (см. пример 2). Докажем первое из неравенств.

Так как $ch_c=2pr$, то $\frac{h_c}{r}=\frac{2p}{c}=1+\frac{a+b}{c}\leqslant 1+\sqrt{2}$.

168. Нельзя. Указание. Воспользуйтесь неравенством $r\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}\,c$.

169. Существует.

170. Указание. Пусть x, y, z — расстояния от точки M, расположенной внутри треугольника ABC, до его вершин A, B и C. Установите, что $c<x+y<a+b$, $a<y+z<b+c$, $b<z+x<c+a$, откуда $p<x+y+z<2p$.

171. Точка пересечения диагоналей четырехугольника.

172. б) Выразите площадь треугольника ABC через длины его сторон и расстояния от точки M до прямых BC, CA и AB.

173. б) Решение. Имеем:

$$a-b+h_a-h_b=a-b+2S\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=(a-b)\left(1-\frac{2S}{ab}\right).$$

Так как $a-b<0$ и $2S\leqslant ab$, то $a+h_a-(b+h_b)\leqslant 0$. Равенство достигается только при $2S=ab$, т. е. для прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C.

174. Указание. Воспользуйтесь тождеством задачи 161 (3).

175. Указание. Воспользуйтесь неравенствами

$$m_c<\frac{1}{2}(b+c) \text{ и } m_a+m_b>\frac{3}{2}c.$$

176. $\frac{3}{5}$.

180. Указание. Пусть окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются диагонали AC соответственно в точках M и N. Установите, что $a+CM=b+AM$ и $c+AN=$ $=d+CN$. Затем сложите эти равенства почленно.

Точки M и N совпадают, если около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

181. Указание. Пусть окружности радиусов R_1, R_2 и r касаются прямой в точках M, N и K. Установите, что $MN=$ $=2\sqrt{R_1R_2}$, $MK=2\sqrt{R_1r}$ и $KN=2\sqrt{R_2r}$.

183. 72°. **184.** 36°, 36°, 108°. **185.** 5 см и 15 см или 8 см и 12 см.

186. $BK=\frac{ac}{b+c}$, $CK=\frac{ab}{b+c}$; 4 и 3. Указание. Воспользуйтесь свойством биссектрисы треугольника: $\frac{BK}{CK}=\frac{c}{b}$.

187. $p-a$, $p-b$, $p-c$. Решение. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и CA соответственно в точках L, M и N. Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны: $AN=AL$, $BL=BM$, $CM=CN$. Обозначив $AL=x$, $BM=y$, $CN=z$, составим систему уравнений

$$\begin{cases} y+z=a, \\ z+x=b, \\ x+y=c, \end{cases}$$

откуда $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$.

Примечание. Если точки A, C, B, L считать вершинами четырехугольника, описанного около окружности, то суммы его противоположных сторон равны: $AL+BC=BL+AC$.

188. $AM=p-a$, $BM=p-b$. 189. $\frac{2ab}{a+b}$. 190. $\frac{2ab}{a+b}$.

191. $AO=\frac{am}{a+b}$, $BO=\frac{an}{a+b}$, $|m-n|<a+b<m+n$. При $a=$ $=5$, $b=3$, $m=n=4$ трапеция не существует, и задача решений не имеет.

192. 2; 3. При $b=c\neq p$ задача не имеет решений; при $b=c=$ $=p$ задача имеет бесконечное множество решений.

193. $\frac{3}{8}a$. 194. $\frac{1}{2}$.

195. $\frac{a}{6}$. Указание. Пусть в криволинейный треугольник BCM вписана окружность с центром O. Обозначив через x радиус окружности, выразите двумя способами высоту OH треугольника ABO.

196. 3 см или 6 см. Решение. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AC и BC соответственно в точках M и N. Отрезок DE касательной к окружности, параллельный стороне AB, отсекает от треугольника ABC треугольник CDE, подобный данному. Стороны подобных треугольников относятся как их периметры. Обозначив $AB=x$, имеем: $\frac{x}{2}=\frac{18}{P_{CDE}}$.

Поскольку отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны, то $P_{CDE}=CM+CN=P_{ABC}-2AB$.

Значит, $\frac{x}{2}=\frac{18}{18-2x}$, или $x^2-9x+18=0$.

Откуда $x_1=3$ и $x_2=6$.

197. $\frac{s\pm\sqrt{2c^2-s^2}}{2}$; $c<s\leqslant c\sqrt{2}$.

198. $c=-h+\sqrt{h^2+s^2}$; $s\geqslant 2\sqrt{2}\,h$. При $s=12$ и $h=5$ решений нет.

199. $\frac{a}{5}$.

200. Указание. Пусть d — расстояние от центра окружности до прямой, вершины A и B квадрата $ABCD$ лежат на прямой, две другие — на окружности. Обозначив $AB=2x$, составьте уравнение $5x^2-4dx+d^2-R^2=0$, откуда $x=\frac{2d\pm\sqrt{5R^2-d^2}}{5}$.

Так как $R=1$, то d может принимать лишь значения 1 и 2. При $d=1$ задача имеет одно решение: $AB=\frac{8}{5}$. При $d=$ $=2$ задача имеет два решения: $AB=2$ и $AB=\frac{6}{5}$.

201. 6 или 8.

202. 4 или 12. Решение. Обозначим $AB=2x$. Тогда

$AM=BN=x$, $CM=8-x$. Так как треугольники ABC и CMN подобны, то $\frac{2x}{3}=\frac{8}{8-x}$. Получаем уравнение $x^2-8x+12=0$, где $0<x<8$. Оба корня уравнения $x_1=2$ и $x_2=6$ удовлетворяют условию задачи.

203. 7 и 21 или 12 и 16. Указание. Пусть r — радиус окружности, x и y — длины отрезков, на которые точка касания окружности делит одну из боковых сторон. Воспользуйтесь соотношением $xy=r^2$.

204. 8 см или 6,4 см. **205.** $\frac{p+\sqrt{p^2-16r^2}}{4}$, $p>4r$; при $p=4r$ трапеция превращается в квадрат.

206. Решение. Пусть AB — хорда данной окружности, из центра O которой к AB проведен перпендикуляр OC (рис. 72). Будем считать, что хорда AB не является диаметром окружности. Обозначив $OC=x$, $AC=BC=y$, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+2y=a, \\ x^2+y^2=R^2. \end{cases}$$

По смыслу задачи $0<x<R$ и $R<a$, поскольку $R<x+y<a$. Исключив из системы y, получим уравнение

$$x^2+\frac{(a-x)^2}{4}=R^2, \text{ или } 5x^2-2ax+a^2-4R^2=0.$$

Это уравнение имеет два действительных корня: $x_{1,2}=\frac{a\pm 2\sqrt{5R^2-a^2}}{5}$, когда $5R^2-a^2\geqslant 0$, или $a\leqslant R\sqrt{5}$.

Итак, чтобы задача имела решение, необходимо выполнение условий $R<a\leqslant R\sqrt{5}$. Остается потребовать, чтобы при найденных ограничениях, налагаемых на параметры, выполнялись неравенства $0<x<R$.

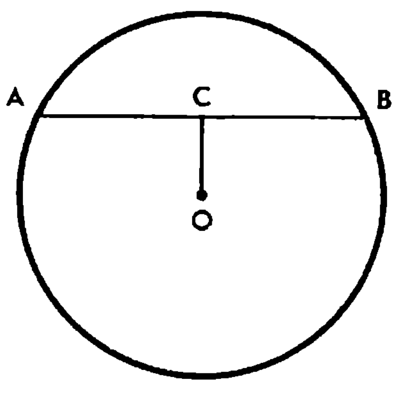


Рис. 72

Оба корня уравнения неравенству $x<R$ удовлетворяют, так как неравенство $\frac{a+2\sqrt{5R^2-a^2}}{5}<R$ равносильно неравенству $(a-R)^2>0$.

При $a<2R$ свободный член уравнения $a^2-4R^2<0$, поэтому неравенство $x>0$ выполняется лишь для большего корня, меньший корень отрицателен. При $a=2R$ меньший корень уравнения равен 0. При $2R<a\leqslant R\sqrt{5}$ оба корня положительны (при $a=R\sqrt{5}$ корни совпадают).

Таким образом, если $R<a\leqslant 2R$ или $a=R\sqrt{5}$, то задача имеет одно решение: расстояние от центра окружности до хорды определяется формулой $x=\frac{a+2\sqrt{5R^2-a^2}}{5}$. Если $2R<a<R\sqrt{5}$, то задача имеет два решения: $x_{1,2}=\frac{a\pm 2\sqrt{5R^2-a^2}}{5}$. В частности:

1) при $a=2R$ получаем: $OC=\frac{4}{5}R$, $AC=\frac{3}{5}R$;

2) при $a=R\sqrt{5}$ (наибольшее возможное значение a) имеем:

$$OC=\frac{R\sqrt{5}}{5},\quad AC=\frac{2R\sqrt{5}}{5},$$

$\operatorname{tg}\alpha=2$, где $\alpha=\angle AOC$, и хорду AB легко построить.

207. $\frac{h^2}{\sin 2\alpha}$. **208.** $\frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$.

209. $AC=3$, $BC=4$, $\angle C=90°$. Указание. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{3}$. Найдите $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$.

210. 45°.

211. $\frac{1}{2}k$. Указание. Пусть $AB=1$, $\angle DAK=\alpha$, $\angle CBK=\beta$. Тогда $\alpha+\beta=45°$, $\frac{CM}{MD}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\frac{CN}{ND}=\frac{\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\beta}$.

212. Решение. Используя теорему синусов, получаем:
$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\sin(A+C)}{\sin A}=\frac{\sin A\cos C+\cos A\sin C}{\sin A}=\cos C+\operatorname{ctg}A\sin C$, откуда и вытекает доказываемое соотношение.

213. 45°; $\sqrt{2}$.

215. $mn\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$. Решение. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке K. Обозначим $BK=m$ и $AK=n$. Тогда $c=m+n$, $a-b=m-n$. Воспользуемся соотношением $c^2=(a-b)^2+4S\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ и получим:

$$(m+n)^2=(m-n)^2+4S\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Отсюда следует, что $mn=S\operatorname{tg}\frac{C}{2}$, или $S=mn\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

216. $\frac{a^2-d^2}{4\sqrt{3}}$, $0<d\leqslant\frac{a}{2}$.

218. Указание. Воспользуйтесь формулами

$$S=2R^2\sin A\sin B\sin C,\quad p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

219. Указание. Так как $A_1A_4=2R\sin 54°$, $A_1A_2=2R\sin 18°$, то задача сводится к доказательству тождества $\sin 54°-\sin 18°=\frac{1}{2}$.

220. Указание. Задача сводится к доказательству тождества $\sin^2\frac{\pi}{5}-\sin^2\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}$.

221. Указание. Задача сводится к доказательству тождества $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

224. Указание. Пусть CL — биссектриса треугольника ABC. Через точку L параллельно стороне AC проведите прямую, пересекающую сторону BC в точке N. Тогда $LN=CN$ и $CL=2CN\cos\frac{C}{2}$. Докажите, что $\frac{CN}{NB}=\frac{b}{a}$, и выразите длину отрезка CN через длины сторон треугольника ABC.

226. Решение. Выразим биссектрисы треугольника через его высоты и углы: $l_a=\frac{h_a}{\cos\frac{B-C}{2}}$, $l_b=\frac{h_b}{\cos\frac{A-C}{2}}$.

Тогда получим: $al_a=\frac{2S}{\cos\frac{B-C}{2}}$, $bl_b=\frac{2S}{\cos\frac{A-C}{2}}$.

Следовательно, $al_a=bl_b$ тогда и только тогда, когда

$$\cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{A-C}{2}.$$

Отсюда находим, что либо $\angle A=\angle B$, либо $\angle B-\angle C=\angle C-\angle A$, т. е. $2\angle C=\angle A+\angle B$, $\angle C=60°$.

228. Указание. 1) Установите, что

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-2\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{2c-a-b}{r}.$$

229. Решение. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, D и E — середины сторон BC и AC (рис. 73). Введем обозначения: $\angle A=2\alpha$, $\angle B=2\beta$, $\angle C=2\gamma$, $\angle ODC=\delta$ и $\angle OEC=\varepsilon$.

Согласно задаче 227 имеем:

$$\operatorname{ctg}\delta=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\gamma),$$

$$\operatorname{ctg}\varepsilon=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\gamma).$$

Отсюда $\operatorname{ctg}\delta+\operatorname{ctg}\varepsilon=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta-2\operatorname{ctg}\gamma)$.

Но $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{c}{r}$ и $\operatorname{ctg}\gamma=\frac{p-c}{r}$, где p — полупериметр треугольника ABC и r — радиус вписанной окружности. Следовательно, получаем:

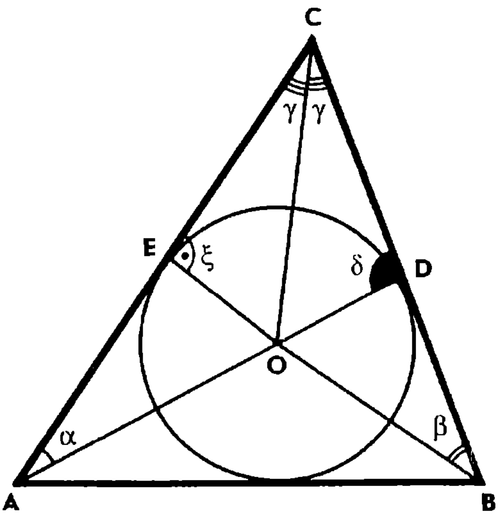


Рис. 73

$$\operatorname{ctg}\delta+\operatorname{ctg}\varepsilon=\frac{2c-a-b}{2r}.$$

Отсюда следует, что если $a+b=2c$, то $\delta+\varepsilon=180°$, и, обратно, если $\delta+\varepsilon=180°$, то $a+b=2c$, т. е. верно и требуемое утверждение, и ему обратное.

230. Указание. Примените формулу площади треугольника и теорему косинусов. Используя их, запишите два равенства:

$$4S=2ab\sin B+2cd\sin D;$$
$$a^2+b^2-c^2-d^2=2ab\cos B-2cd\cos D.$$

Оба равенства возведите в квадрат и почленно сложите.

1) Если четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c).$$

2) Если четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, то

$$S^2=abcd\sin^2\frac{B+D}{2}.$$

231. 15°; 75°. Указание. Обозначив через x меньший угол прямоугольного треугольника, составьте уравнение

$$\sin x\cos x=\frac{1}{4},\ 0°<x<45°.$$

232. 30°.

233. 22,5°; 67,5°. Указание. Пусть x — меньший угол треугольника ABC, S_1 и S — площади треугольников CMN и ABC. Установите, что

$$S_1=\frac{1}{4}h^2\sin 2x \text{ и } S=\frac{h^2}{\sin 2x},\ \text{где } h=CD.$$

234. $15°$.

235. $AC=2$, $\angle A=120°$, $\angle B=30°$. Указание. Обозначив величину угла B через x, выразите двумя способами длину отрезка BH и составьте уравнение

$$\sqrt{3}\operatorname{ctg} x=2+\sqrt{3}\operatorname{tg} x.$$

236. 3; 8. Указание. Пусть $\angle B=x$, тогда

$$\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} 2x=\frac{11}{4},\ 0°<x<60°.$$

237. $\angle A=45°$, $\angle B=\angle C=67{,}5°$, $CD=1$. Указание. Обозначив $\angle BCD=x$, выразите высоту CD двумя способами и составьте уравнение $n\operatorname{ctg} x=m\operatorname{tg} 2x$, откуда

$$\operatorname{tg}^2 x=\frac{m-2n}{m},\ \cos 2x=\frac{n}{m-n}.$$

Полученная формула для вычисления $\cos 2x$ показывает, как тот же результат можно получить геометрически. Если построить точку K, симметричную B относительно прямой CD, то CK — биссектриса треугольника ACD. Применив известное свойство биссектрисы, получим: $\cos 2x=\frac{CD}{AC}=\frac{DK}{AK}=\frac{n}{m-n}$.

238. 2 или 3.

239. $15°$; $105°$. Указание. Воспользуйтесь формулой $h_c=2R\sin A\sin B$ и составьте уравнение $4\sin A\sin(120°-A)=1$.

240. $\arccos\frac{1}{3}$ или $\arccos\frac{2}{3}$. **241.** $\frac{2}{3}$. **242.** $\frac{CD}{AB}=\frac{3}{5}$; $\operatorname{tg} B=2$.

243. $36°$; $108°$. Указание. Положив $\angle A=x$, составьте уравнение $4\cos x\sin\frac{x}{2}=1$, $0°<x<90°$. Умножив обе части этого уравнения на $\cos\frac{x}{2}$, приведите уравнение к виду

$$\sin 2x=\cos\frac{x}{2}.$$

244. $30°$. Указание. Обозначив величину угла при основании треугольника через x, получите уравнение

$$b\cos x=q\sin x,\ 0°<x<90°.$$

Найдите геометрическое решение задачи.

245. Указание. Установите, что $\cos x=\frac{h-2r}{2r}$, где x — величина угла при основании треугольника.

246. Решение. Обозначим величину угла при основании AB равнобедренного треугольника ABC через x и составим уравнение

$$h=2R\sin x\sin 2x.$$

При $R=2$ и $h=3$ это уравнение приводится к виду

$z^3-4z+3=0$, или $(z-1)(z^2+z-3)=0$, где $z=2\cos x$.

Положительные корни уравнения $z_1=1$ и $z_2=\frac{\sqrt{13}-1}{2}$ дают два решения задачи:

1) $\cos x=\frac{1}{2}$, $x=60°$, треугольник ABC равносторонний;

2) $\cos x=\frac{\sqrt{13}-1}{4}$, треугольник ABC можно построить с помощью циркуля и линейки.

Пусть CD — диаметр окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда $AD=2R\cos x$. Подставив сюда значения R и $\cos x$, получим:

$$AD=\sqrt{13}-1=\sqrt{2^2+3^2}-1.$$

Теперь легко построить отрезок AD, а затем и треугольник ABC.

247. 15°; 75°. Решение. Пусть a и b — катеты прямоугольного треугольника ABC. Так как $m_c=\frac{1}{2}c$, то согласно условию задачи $ab=\frac{1}{4}c^2$.

Будем считать, что $\angle A<\angle B$. Положим $\angle A=x$, тогда

$$a=c\sin x,\ b=c\cos x.$$

Получим уравнение $\sin x\cos x=\frac{1}{4}$, $0°<x<45°$.

Отсюда $\sin 2x=\frac{1}{2}$, $x=15°$.

Треугольник ABC строим обычным образом по катету и острому углу ($\angle A=15°$, $AC=b$).

248. Указание. Пусть $2x$ — угол, из вершины которого проведена биссектриса. Составьте уравнение

$$6\cos 2x=\cos x,\ 0°<x<45°,$$

откуда $\cos x=\frac{3}{4}$.

249. Указание. Положите $\angle A=2x$ и составьте уравнение

$2\cos x=3\operatorname{ctg} 2x$, $0°<x<45°$, или $4\sin x\cos^2 x=3\cos 2x$.

Выразив $\cos^2 x$ и $\cos 2x$ через $\sin x$, получите уравнение

$$8\sin^3 x-12\sin^2 x-8\sin x+6=0.$$

Это уравнение приведите к виду

$$z^3-3z^2-4z+6=0, \text{ где } z=2\sin x.$$

Если заметить, что $z=1$ является корнем уравнения, то многочлен, стоящий в левой части уравнения, нетрудно разложить на множители: $(z-1)(z^2-2z-6)$.

Условию задачи удовлетворяет лишь корень $z=1$. Значит, $\sin x=\frac{1}{2}$, $x=30°$ и $\angle A=60°$.

250. Указание. Докажите, что $\operatorname{tg} 2B=\frac{2h}{c}$, где $c=AB$ и $h=CH$. Зная угол B, сторону AB и высоту CH, легко построить искомый треугольник ABC.

251. Из равенства $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=\overline{0}$ следует, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам треугольника ABC.

252. Указание. Согласно условию задачи $\overline{BL}=k\,\overline{BC}$, $\overline{CM}=k\,\overline{CA}$, $\overline{AN}=k\,\overline{AB}$. Докажите, что $\overline{AL}+\overline{BM}+\overline{CN}=\overline{0}$.

253. Решение. Имеем $\overline{CC_1}=\overline{AC_1}-\overline{AC}$. Поскольку $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ — параллелограммы, то

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD},\ \overline{AC_1}=\overline{AB_1}+\overline{AD_1}.$$

Отсюда следует, что $\overline{CC_1}=\overline{AB_1}+\overline{AD_1}-\overline{AB}-\overline{AD}$, или

$$\overline{CC_1}=\overline{BB_1}+\overline{DD_1}.$$

Если прямые BB_1 и DD_1 не параллельны, то полученное равенство означает, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам BB_1, CC_1 и DD_1. Если же $BB_1 \parallel DD_1$, то и $CC_1 \parallel BB_1$. В этом случае больший из отрезков BB_1, CC_1 и DD_1 равен сумме двух других.

254. Четыре точки: центроид треугольника и точки, симметричные вершинам треугольника относительно середин противоположных сторон (внешние центроиды треугольника). Указание. Точка M тогда и только тогда удовлетворяет условию задачи, когда выполняется одно из следующих равенств:

1) $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{0}$; 2) $\overline{MA}=\overline{MB}+\overline{MC}$;

3) $\overline{MB}=\overline{MA}+\overline{MC}$; 4) $\overline{MC}=\overline{MA}+\overline{MB}$.

255. Указание. Пусть M — середина любого из трех рассматриваемых отрезков. Примените векторную формулу середины отрезка и установите, что $\overline{OM}=\frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$.

256. б) Решение. Возьмем на медиане CD треугольника ABC точку M, делящую эту медиану в отношении 2:1, считая от вершины C. Согласно формуле деления отрезка в данном отношении при любом выборе точки O имеем:

$$\overline{OM}=\frac{\overline{OC}+2\overline{OD}}{3}, \quad \overline{OD}=\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{2}.$$

Отсюда $\overline{OM}=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$.

Пусть точка M_1 делит любую из двух других медиан треугольника ABC в отношении 2:1, считая от вершины. Тогда для вектора $\overline{OM_1}$ аналогично получим то же самое выражение, т. е. $\overline{OM_1}=\overline{OM}$. Отсюда следует, что точки M_1 и M совпадают. Следовательно, все три медианы треугольника ABC имеют общую точку M, которая делит каждую из медиан в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

257. Указание. Обозначив через M_1 и M_2 центроиды треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, установите, что $\overline{M_1M_2}=\frac{1}{3}(\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2})$.

258. Решение. Используя результат задачи 255, для точки G пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ получаем:

$$\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}+\overline{GD}=\overline{0}.$$

Так как M — центроид треугольника ABC, то

$$\overline{GM}=\frac{1}{3}(\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}) \text{ (см. задачу 256, б).}$$

Отсюда, учитывая предыдущее равенство, находим: $\overline{GM}=-\frac{1}{3}\overline{GD}$.

Значит, точки D, G и M лежат на одной прямой, причем $DG=3GM$.

259. Решение. Обозначим точки, симметричные точке P относительно середин сторон BC, CA и AB, соответственно через A_1, B_1 и C_1. Так как отрезки PA_1 и BC имеют общую середину, то $\overline{OA_1}+\overline{OP}=\overline{OB}+\overline{OC}$, где O — произвольная точка.

Пусть S — середина отрезка AA_1, тогда

$$\overline{OS}=\frac{\overline{OA}+\overline{OA_1}}{2}=\frac{\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}-\overline{OP}}{2}=\frac{3\,\overline{OM}-\overline{OP}}{2},$$

где M — центроид треугольника ABC.

Если S_1 — середина одного из двух других отрезков BB_1 и CC_1, то аналогично получим, что $\overline{OS_1}=\overline{OS}$. Значит, все три отрезка AA_1, BB_1 и CC_1 имеют общую середину, т. е. треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ симметричны относительно точки S. Пусть начальная точка O совпадает с центроидом M треугольника ABC. Тогда полученная выше формула принимает более простой вид.

$$\overline{MS}=-\frac{1}{2}\overline{MP}.$$

Значит, точки P, M и S принадлежат одной прямой (точка M лежит между P и S) и $MS=\frac{1}{2}MP$.

260. Указание. Воспользуйтесь формулой $\overline{OH}=\frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$ и докажите, что $\overline{HK}=\overline{OK}-\overline{OH}=\frac{1}{4}\overline{AE}$.

261. Решение. Продолжим боковые стороны AD и BC трапеции до пересечения в точке O. В силу параллельности отрезков AB и CD имеем:

$$\overline{OD}=\alpha\,\overline{OA},\quad \overline{OC}=\alpha\,\overline{OB}.$$

Из параллельности отрезков BM и DN следует, что

$$\overline{OM}=\beta\,\overline{OD},\quad \overline{OB}=\beta\,\overline{ON}.$$

(Числа α и β можно выразить через отношение отрезков, но для решения задачи это не требуется.)

Далее находим зависимости между векторами $\overline{OM}$ и $\overline{OA}$, $\overline{OC}$ и $\overline{ON}$. Используя полученные выше равенства, получаем:

$$\overline{OM}=\beta\,\overline{OD}=\alpha\beta\,\overline{OA},\quad \overline{OC}=\alpha\,\overline{OB}=\alpha\beta\,\overline{ON}.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{MC}=\overline{OC}-\overline{OM}=\alpha\beta\,(\overline{ON}-\overline{OA}),\ \text{или}\ \overline{MC}=\alpha\beta\,\overline{AN}.$$

Полученное равенство означает, что отрезки AN и CM параллельны.

262. Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ (рис. 74). Так как отрезки AM и BC параллельны, то $\overline{OC}=\alpha\,\overline{OA}$, $\overline{OB}=\alpha\,\overline{OM}$.

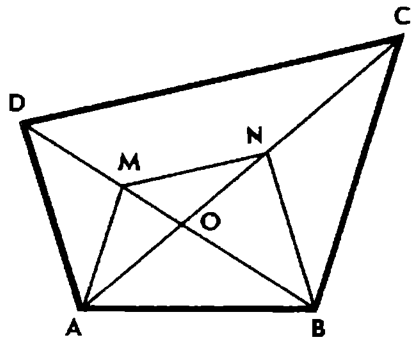


Рис. 74

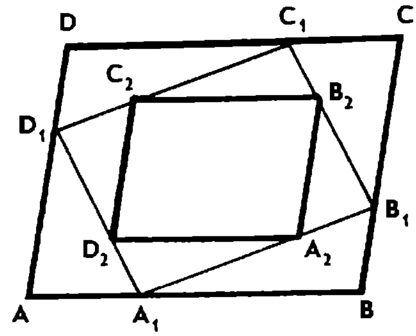


Рис. 75

Отрезки AD и BN также параллельны, поэтому $\overline{OD}=\beta\,\overline{OB}$, $\overline{OA}=\beta\,\overline{ON}$.

Из полученных равенств следует, что

$$\overline{OD}=\beta\,\overline{OB}=\alpha\beta\,\overline{OM},\quad \overline{OC}=\alpha\,\overline{OA}=\alpha\beta\,\overline{ON}.$$

Отсюда $\overline{DC}=\alpha\beta\,\overline{MN}$. Тем самым доказано, что отрезки CD и MN параллельны.

263. Указание. Воспользуйтесь формулой деления отрезка в данном отношении и условием принадлежности трех точек одной прямой.

264. Решение. Для краткости векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, ..., отложенные от произвольной точки O, будем обозначать через $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ и т. д.

Пусть $\frac{AK}{KB}=\lambda$. По формуле деления отрезка в данном отношении имеем:

$$\overline{K}=\frac{\overline{A}+\lambda\,\overline{B}}{1+\lambda},\quad \overline{L}=\frac{\overline{C}+\lambda\,\overline{B}}{1+\lambda},\quad \overline{M}=\frac{\overline{C}+\lambda\,\overline{D}}{1+\lambda},\quad \overline{N}=\frac{\overline{A}+\lambda\,\overline{D}}{1+\lambda}.$$

Отсюда получаем $\overline{K}+\overline{M}=\overline{L}+\overline{N}$, или $\overline{KL}=\overline{NM}$. Следовательно, $KLMN$ — параллелограмм.

Пусть P и Q — середины диагоналей AC и BD, точка S — центр параллелограмма $KLMN$. Тогда имеем:

$$\overline{P}=\frac{1}{2}(\overline{A}+\overline{C}),\quad \overline{Q}=\frac{1}{2}(\overline{B}+\overline{D}),$$

$$\overline{S}=\frac{1}{2}(\overline{K}+\overline{M})=\frac{\overline{A}+\overline{C}+\lambda\,(\overline{B}+\overline{D})}{2\,(1+\lambda)},\ \text{или}\ \overline{S}=\frac{\overline{P}+\lambda\,\overline{Q}}{1+\lambda}.$$

Полученное равенство означает, что точка S принадлежит отрезку PQ и делит его в отношении λ.

265. Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 75). Из условия задачи следует, что

$$\overline{OA_1}=\frac{\overline{OA}+k\,\overline{OB}}{1+k},\quad \overline{OB_1}=\frac{\overline{OB}-k\,\overline{OA}}{1+k}.$$

Далее, $\overline{OA_2}=\frac{\overline{OB_1}+k\,\overline{OA_1}}{1+k}$, или $\overline{OA_2}=\frac{1+k^2}{(1+k)^2}\,\overline{OB}$.
Аналогично

$$\overline{OB_2}=\frac{1+k^2}{(1+k)^2}\,\overline{OC},\ \overline{OC_2}=\frac{1+k^2}{(1+k)^2}\,\overline{OD},\ \overline{OD_2}=\frac{1+k^2}{(1+k)^2}\,\overline{OA}.$$

Значит, точки A_2, B_2, C_2, D_2 гомотетичны соответственно точкам B, C, D, A относительно точки O с коэффициентом гомотетии $\frac{1+k^2}{(1+k)^2}$.

266. $\frac{AK}{KN}=1$, $\frac{BK}{KM}=3$.

267. $\frac{ME}{EN}=\frac{m}{n}$, $\frac{CE}{CD}=\frac{2mn}{m+n}$. Решение. Обозначим $\frac{ME}{EN}=\lambda$, $\frac{CE}{CD}=\alpha$. Выразим двумя способами $\overline{CE}$ через $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$:

$$\overline{CE}=\alpha\,\overline{CD}=\frac{\alpha\,(\overline{CA}+\overline{CB})}{2},\quad \overline{CE}=\frac{\overline{CM}+\lambda\,\overline{CN}}{1+\lambda}=\frac{m\,\overline{CA}+\lambda n\,\overline{CB}}{1+\lambda}.$$

В силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам получим $\frac{\alpha}{2}=\frac{m}{1+\lambda}$, $\frac{\alpha}{2}=\frac{\lambda n}{1+\lambda}$. Отсюда $\lambda=\frac{m}{n}$, $\alpha=\frac{2mn}{m+n}$.

268. $\frac{2}{7}$. Указание. Найдите $k=\frac{AL}{AN}$. Тогда $S_{ABL}=$ $=k\,S_{ABN}=\frac{1}{3}\,k\,S_{ABC}$.

269. а) Решение. По формуле деления отрезка в данном отношении имеем: $\overline{OE}=\frac{n\,\overline{OA}+m\,\overline{OD}}{m+n}$, $\overline{OF}=\frac{n\,\overline{OB}+m\,\overline{OC}}{m+n}$.

Вычитая из второго равенства первое, получаем:

$$\overline{EF}=\frac{n\,\overline{AB}+m\,\overline{DC}}{m+n}.$$

А так как векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ сонаправлены, то $EF\parallel AB$ и

$$EF=\frac{na+mb}{m+n}.$$

б) $\frac{2ab}{a+b}$.

270. Указание. Пусть $\frac{DM}{AB}=k$, тогда $\frac{DP}{PB}=k$ и $\frac{BN}{AD}=\frac{1}{k}$. Выразите векторы $\overline{AP}$, $\overline{AM}$, $\overline{AN}$ через векторы $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ и установите, что $\frac{AP}{AM}=\frac{1}{1+k}$, $\frac{AP}{AN}=\frac{k}{1+k}$.

271. Указание. Так как AB и CD — основания трапеции, то можно положить $\overline{PD}=\alpha\,\overline{PA}$, $\overline{PC}=\alpha\,\overline{PB}$. Пользуясь формулой середины отрезка, докажите, что $\overline{PN}=\alpha\,\overline{PM}$. Отсюда следует, что точки P, M и N лежат на одной прямой. Аналогично доказывается, что точки Q, M и N также лежат на одной прямой. Заметив, что $\frac{BQ}{QD}=\frac{PM}{PN}=\frac{m}{n}$, примените формулу деления отрезка в данном отношении и установите истинность соотношения $\overline{PQ}=\frac{2n\,\overline{PM}}{m+n}$.

272. Указание. Утверждение задачи вытекает из векторного тождества:

$$(\bar{a}+\bar{b})^2-(\bar{a}-\bar{b})^2=4\,\bar{a}\cdot\bar{b}.$$

273. Указание. Воспользуйтесь векторным равенством

$$(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})=\bar{a}^2-\bar{b}^2.$$

274. $CD^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+2ab\cos\gamma)$.

275. Решение. Разложим векторы $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ и $\overline{AB}$ по неколлинеарным векторам $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$. Получим:

$$\overline{AM}=\frac{1}{2}\,\overline{CB}-\overline{CA},\quad \overline{BN}=\frac{1}{2}\,\overline{CA}-\overline{CB},\quad \overline{AB}=\overline{CB}-\overline{CA}.$$

Далее выразим скалярное произведение векторов $\overline{AM}$ и $\overline{BN}$ через длины сторон треугольника ABC. Используя свойства скалярного умножения векторов, находим:

$$\overline{AM}\cdot\overline{BN}=\frac{5}{4}\,\overline{CA}\cdot\overline{CB}-\frac{1}{2}\,CA^2-\frac{1}{2}\,CB^2.$$

Из равенства $AB^2=CA^2+CB^2-2\,\overline{CA}\cdot\overline{CB}$ следует, что

$$2\,\overline{CA}\cdot\overline{CB}=a^2+b^2-c^2.$$

Таким образом, $\overline{AM}\cdot\overline{BN}=\frac{1}{8}(a^2+b^2-5c^2)$.

Если $a^2+b^2=5c^2$, то медианы AM и BN перпендикулярны, и обратно.

276. Решение. Имеем: $2\overline{CD}=\overline{CA}+\overline{CB}$, $\overline{BA}=\overline{CA}-\overline{CB}$. Отсюда $4CD^2-AB^2=4\overline{CA}\cdot\overline{CB}$. Если $\angle C<90°$, то $\overline{CA}\cdot\overline{CB}>0$ и $4CD^2>AB^2$, т. е. $2CD>AB$. Если же $\angle C>90°$, то $\overline{CA}\cdot\overline{CB}<0$ и $2CD<AB$.

277. Указание. Пусть высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Тогда $\overline{HA}\cdot\overline{BC}=\overline{HB}\cdot\overline{CA}=0$.

Отсюда выведите, что $\overline{HC}\cdot\overline{AB}=0$. Для этого достаточно доказать тождество $\overline{HA}\cdot\overline{BC}+\overline{HB}\cdot\overline{CA}+\overline{HC}\cdot\overline{AB}=0$.

278. а) Решение 1. Легко проверить, что доказываемое соотношение выполняется для прямоугольного треугольника. Рассмотрим непрямоугольный треугольник ABC (рис. 76). Построим точку D, симметричную точке O относительно стороны AB. Тогда $\overline{OD}=\overline{OA}+\overline{OB}$. Затем построим точку H, такую, что $\overline{OH}=\overline{OD}+\overline{OC}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$.

Докажем, что точка H и есть ортоцентр треугольника ABC. Действительно, по построению CH и OD параллельны, OD — серединный перпендикуляр к отрезку AB, следовательно, прямая CH также перпендикулярна к прямой AB и точка H принадлежит высоте CC_1 треугольника ABC.

Если повторить построение, начиная с векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OC}$, то получим, что та же точка H принадлежит высоте треугольника, проведенной из вершины B. Аналогично докажем, что точка H принадлежит высоте, проведенной из вершины A. Значит, высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке H, причем

$$\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}.$$

Решение 2. Согласно условию задачи имеем:

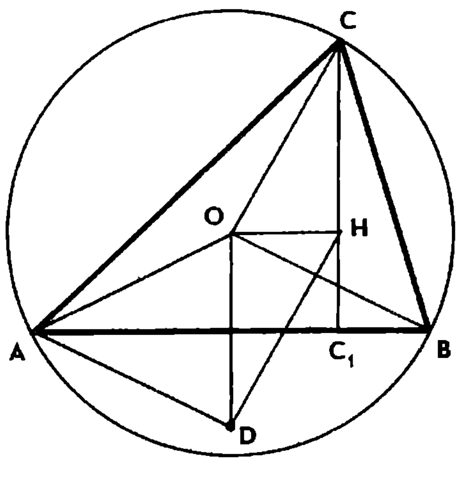


Рис. 76

$$\overline{AH}\cdot\overline{BC}=0,\ OB^2=OC^2,$$

или

$$(\overline{OH}-\overline{OA})\cdot\overline{BC}=0,$$

$$(\overline{OB}+\overline{OC})\cdot\overline{BC}=0.$$

Вычтем из первого равенства второе и получим:

$$(\overline{OH}-\overline{OA}-\overline{OB}-\overline{OC})\cdot\overline{BC}=0.$$

Аналогично докажем, что

$$(\overline{OH}-\overline{OA}-\overline{OB}-\overline{OC})\cdot\overline{AC}=0.$$

А так как векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$ неколлинеарны, то

$$\overline{OH}-\overline{OA}-\overline{OB}-\overline{OC}=\overline{0}.$$

б) $OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$.

279. Решение. Пусть точка H' симметрична точке H относительно середины стороны AB. Отрезки HH' и AB имеют общую середину, следовательно, $\overline{OH'}+\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}$,

где O — центр описанной окружности. Согласно предыдущей задаче имеем:

$$\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}.$$

Отсюда следует, что $\overline{OH'}=-\overline{OC}$. Полученное равенство означает, что точки C и H' — концы диаметра описанной окружности.

280. Указание. Пусть CC_1 — высота треугольника ABC, ее продолжение пересекает описанную около треугольника окружность в точке H_1. Докажите, что

$$\overline{OC_1}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OH_1}),$$

где O — центр описанной окружности. Далее воспользуйтесь результатом задачи 278 и установите, что C_1 — середина отрезка HH_1.

281. Указание. Воспользуйтесь формулами

$$\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC},\quad \overline{OM}=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}).$$

282. Решение. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, O — центр описанной окружности, D — середина стороны BC. Применив тождество задачи 278, получаем:

$$\overline{AH}=\overline{OH}-\overline{OA}=\overline{OB}+\overline{OC}.$$

По формуле середины отрезка находим:

$$\overline{OD}=\frac{1}{2}(\overline{OB}+\overline{OC}).$$

Следовательно, $\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{AH}$.

283. Указание. Воспользуйтесь равенствами

$$\overline{AH}=\overline{OB}+\overline{OC},\quad \overline{CB}=\overline{OB}-\overline{OC},$$

где O — центр описанной около треугольника ABC окружности.

284. а) Решение. Из условия задачи следует, что

$$\overline{OD}=\overline{OA}+\overline{OB}.$$

Поэтому $\overline{CD}=\overline{OD}-\overline{OC}=\overline{OA}+\overline{OB}-\overline{OC}$. Отсюда $CD^2=$ $=3R^2+2\overline{OA}\cdot\overline{OB}-2\overline{OA}\cdot\overline{OC}-2\overline{OB}\cdot\overline{OC}$.

Но $2\overline{OA}\cdot\overline{OB}=OA^2+OB^2-AB^2=2R^2-c^2$.

Аналогично $2\overline{OA}\cdot\overline{OC}=2R^2-b^2$, $2\overline{OB}\cdot\overline{OC}=2R^2-a^2$.

Следовательно, $CD^2=R^2+a^2+b^2-c^2$.

б) Решение. Из полученного в пункте а) равенства следует, что

$$c^2\leqslant a^2+b^2+R^2.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда точки C и D совпадают, т. е. когда $\angle C=120°$, $\angle A=\angle B=30°$.

285. Решение. Согласно правилу сложения векторов имеем: $\overline{AH}=\overline{AC_1}+\overline{C_1H}$, $\overline{CB}=\overline{CC_1}+\overline{C_1B}$. Перемножив эти равенства почленно и учитывая, что $\overline{AH}\cdot\overline{CB}=0$, получим:

$$\overline{CC_1}\cdot\overline{HC_1}=\overline{AC_1}\cdot\overline{C_1B}.$$

Если $\angle C=90°$, то ортоцентр H треугольника ABC совпадает с его вершиной C и полученное соотношение принимает вид

$$CC_1^2=AC_1\cdot BC_1.$$

286. 1) Решение. Пусть CL — биссектриса треугольника ABC. Воспользуемся свойством биссектрисы угла треугольника и найдем, что $AL=\frac{bc}{a+b}$, тогда $\frac{CI}{IL}=\frac{b}{AL}=\frac{a+b}{c}$.

Далее по формуле деления отрезка в данном отношении получим: $\overline{OL}=\frac{a\overline{OA}+b\overline{OB}}{a+b}$, $\overline{OI}=\frac{c\overline{OC}+(a+b)\,\overline{OL}}{a+b+c}$.

Отсюда $\overline{OI}=\frac{a\overline{OA}+b\overline{OB}+c\overline{OC}}{a+b+c}$, где O — любая точка.

2) Указание. Воспользуйтесь равенствами

$$\overline{AI}=\frac{b\overline{AB}+c\overline{AC}}{2p} \text{ и } 2\overline{AB}\cdot\overline{AC}=b^2+c^2-a^2.$$

287. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 286 и формулами $R=\frac{abc}{4S}$, $r=\frac{S}{p}$.

288. а) Указание. Для центроида M треугольника ABC имеет место равенство $\overline{OM}=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$. Вычислите скалярный квадрат вектора $\overline{OM}$, учитывая, что $OA=OB=OC=R$ и $2\overline{OA}\cdot\overline{OB}=2R^2-c^2$.

289. Решение. Имеем:

$$\overline{PA}=\overline{MA}-\overline{MP},\ \overline{PB}=\overline{MB}-\overline{MP},\ \overline{PC}=\overline{MC}-\overline{MP}.$$

Возведем эти равенства в квадрат и почленно сложим. Учитывая, что M — центроид треугольника ABC и поэтому $\overline{MA}+$ $+\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{0}$, получим:

$$PA^2+PB^2+PC^2=3PM^2+MA^2+MB^2+MC^2,$$

откуда и вытекает доказываемое соотношение.

290. Центроид треугольника.

291. Указание. Представьте вектор $\overline{AD}$ в виде суммы векторов:

$$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}.$$

Вычислите скалярный квадрат вектора $\overline{AD}$.

292. Указание. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

293. Решение. Пусть AB и CD — основания трапеции $ABCD$. Воспользуемся тождеством (7):

$$AC^2+BD^2-AD^2-BC^2=2\overline{AB}\cdot\overline{DC}.$$

Так как $\overline{AB}\cdot\overline{DC}=AB\cdot CD$, то доказываемое соотношение верно.

294. Решение. Рассмотрим вектор $\overline{a}=\overline{AB}-\overline{DC}$. Если $ABCD$ — параллелограмм, то $\overline{AB}=\overline{DC}$ и $\overline{a}=\overline{0}$, в противном случае $\overline{a}\neq\overline{0}$.

Итак, $\overline{a}^2\geqslant 0$, $(\overline{AB}-\overline{DC})^2\geqslant 0$, или $AB^2+CD^2\geqslant 2\overline{AB}\cdot\overline{DC}$.

Воспользуемся тождеством $2\overline{AB}\cdot\overline{DC}=AC^2+BD^2-AD^2-$ $-BC^2$.

Получим $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2\geqslant AC^2+BD^2$ (равенство имеет место только для параллелограмма).

295. $MN=3{,}5$. Решение. Согласно правилу сложения векторов имеем: $\overline{MN}=\overline{MA}+\overline{AD}+\overline{DN}$, $\overline{MN}=\overline{MB}+\overline{BC}+\overline{CN}$.

Сложим эти равенства почленно. Учитывая, что $\overline{MA}+\overline{MB}=\overline{0}$

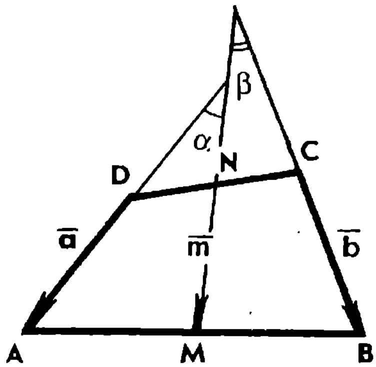


Рис. 77

и $\overline{CN}+\overline{DN}=\overline{0}$, получим $2\overline{MN}=\overline{AD}+\overline{BC}$. Отсюда $MN^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+2ab\cos\varphi)$.

296. Решение. Пусть M и N — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ (рис. 77). Введем обозначения: $\overline{DA}=\overline{a}$, $\overline{CB}=\overline{b}$, $\overline{NM}=\overline{m}$, $AD=BC=a$, $MN=m$, углы между векторами $\overline{a}$ и $\overline{m}$, $\overline{m}$ и $\overline{b}$ обозначим соответственно через α и β. Имеем:

$$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{\overline{a}\cdot\overline{m}}{am}-\frac{\overline{b}\cdot\overline{m}}{am}=\frac{\overline{m}\cdot(\overline{a}-\overline{b})}{am}.$$

А так как $\overline{m}=\frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b})$ (см. решение задачи 295), то

$$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{\overline{a}^2-\overline{b}^2}{2am}.$$

Но $\overline{a}^2=\overline{b}^2$, значит, $\cos\alpha=\cos\beta$ и $\alpha=\beta$.

297. Указание. Пусть K и L — середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Тогда имеем:

$$\overline{KL}=\overline{AL}-\overline{AK}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AD}-\overline{AC}),$$

$$4KL^2=a^2+d^2+e^2+2\overline{AB}\cdot\overline{AD}-2\overline{AB}\cdot\overline{AC}-2\overline{AC}\cdot\overline{AD}.$$

Остается вычислить скалярные произведения векторов в правой части равенства.

Заметим, что $ABCD$ необязательно плоский четырехугольник. Указанное соотношение верно для любых четырех точек пространства, в частности для тетраэдра $ABCD$, если K и L — середины ребер AC и BD.

298. Указание. Пусть $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}=\lambda$. Установите, что

$$\overline{CC_1}=\frac{\overline{CA}+\lambda\overline{CB}}{1+\lambda} \text{ и } \overline{A_1B_1}=\frac{\lambda\overline{CA}-\overline{CB}}{1+\lambda}.$$

299. $3a^2$. Указание. Пусть M — точка окружности с центром O, вписанной в квадрат $ABCD$. Тогда имеем:

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=$$
$$=(\overline{OA}-\overline{OM})^2+(\overline{OB}-\overline{OM})^2+(\overline{OC}-\overline{OM})^2+(\overline{OD}-\overline{OM})^2=$$
$$=4OA^2+4OM^2.$$

300. $4a^2$.

301. Окружность, центр которой совпадает с центром правильного треугольника. Решение. Пусть ABC — правильный треугольник и M — точка, для которой имеет место равенство $MA^2+MB^2+MC^2=d^2$, где d — данное число. Приняв центр O треугольника за начальную точку, запишем это равенство в векторной форме: $(\overline{OA}-\overline{OM})^2+(\overline{OB}-\overline{OM})^2+(\overline{OC}-\overline{OM})^2=d^2$.

Учитывая, что $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{0}$ и $OA=OB=OC=R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, получим:

$$3OM^2+3R^2=d^2, \text{ или } OM=\sqrt{\frac{d^2}{3}-R^2}.$$

Итак, если $R^2<3d^2$, то искомое место точек M есть окружность, центр которой совпадает с центром правильного треугольника.

302. Решение. Пусть ABC — данный треугольник и M — точка, такая, что $MA^2+MB^2=2MC^2$.

В векторной форме это равенство можно записать так:

$$(\overline{OA}-\overline{OM})^2+(\overline{OB}-\overline{OM})^2=2(\overline{OC}-\overline{OM})^2,$$

или

$$2(\overline{OA}+\overline{OB}-2\overline{OC})\cdot\overline{OM}=OA^2+OB^2-2OC^2.$$

Замечаем, что решение упростится, если считать точку O центром окружности, описанной около треугольника ABC. При этом правая часть равенства обращается в нуль. Пусть еще D — середина стороны AB, тогда равенство принимает вид

$$(\overline{OD}-\overline{OC})\cdot\overline{OM}=0, \text{ или } \overline{CD}\cdot\overline{OM}=0.$$

Геометрический смысл этого равенства очень прост: искомое множество точек M есть прямая, проходящая через центр O окружности, описанной около треугольника ABC, перпендикулярно его медиане CD.

303. Если параллелограмм $ABCD$ не является прямоугольником, то искомое множество точек пустое; если же $ABCD$ — прямоугольник, то искомое множество точек — вся плоскость.

304. Прямая, проходящая через центр O параллелограмма $ABCD$ перпендикулярно прямой BC.

305. $\frac{CK}{KD}=\frac{2}{3}$. Указание. Введите на плоскости аффинную систему координат так, чтобы вершины параллелограмма $ABCD$ имели координаты: $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $D(0; 1)$. Найдите координаты точек M, N и P. Запишите уравнения прямых AP и CD. Решив систему полученных уравнений, найдете координаты точки K.

306. $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{12}$. Указание. Введите на плоскости систему координат $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $D(0; 1)$. Установите, что $AK=\frac{2}{3}$. Значит, площадь треугольника ADK составляет $\frac{2}{3}$ площади треугольника ABD или $\frac{1}{3}$ площади параллелограмма $ABCD$.

307. Решение. Выберем на плоскости аффинную систему координат с началом в точке A и координатными векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$. Тогда имеем $B(1; 0)$, $C(1; 1)$, $D(0; 1)$. Уравнение прямой BD имеет вид

$$x+y=1.$$

Пусть точка P имеет координаты $(a; b)$, а так как она лежит на диагонали BD, то $a+b=1$, $0<a<1$. Запишем уравнение прямой AP: $y=\frac{b}{a}x$ — и найдем координаты точек M и N пересечения прямых CD и BC с прямой AP. Получим $M\left(\frac{a}{b};\ 1\right)$, $N\left(1;\ \frac{b}{a}\right)$.

Учитывая, что $a+b=1$, далее находим координаты векторов $\overline{PM}$ и $\overline{PN}$:

$$\overline{PM}=\left(\frac{a^2}{b};\ a\right),\quad \overline{PN}=\left(b;\ \frac{b^2}{a}\right).$$

Поскольку $\overline{AP}=(a;\ b)$, то отсюда получаем:

$$\overline{PM}=\frac{a}{b}\overline{AP},\quad \overline{PN}=\frac{b}{a}\overline{AP},$$

значит, $\frac{PA}{PM}=\frac{PN}{PA}=\frac{b}{a}$, откуда $PA^2=PM\cdot PN$.

308. Указание. Выберите систему координат так же, как при решении задачи 306. Пусть $P(1;\ p)$ — точка на стороне BC параллелограмма $ABCD$, тогда $Q(1;\ p+1)$. Далее найдите координаты точек M и N, рассмотрите векторы $\overline{DN}$, $\overline{NC}$ и $\overline{NM}$. Докажите, что $\overline{NC}=p\overline{DN}$ и $\overline{NM}=\frac{1}{p}\overline{DN}$.

309. б) Решение. Вершину C треугольника ABC примем за начало аффинной системы координат, $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ — координатные векторы. Тогда $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$ и $G\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$. Координаты точек M и N обозначим так: $M(m;\ 0)$, $N(0;\ n)$, где $0<m<$ <1 и $0<n<1$.

Уравнение прямой MN имеет вид $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$. А так как прямая MN проходит через точку G, то $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3$.

Но $\frac{AM}{MC}=\frac{1-m}{m}=\frac{1}{m}-1$, $\frac{BN}{NC}=\frac{1}{n}-1$, следовательно,

$$\frac{AM}{MC}+\frac{BN}{NC}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-2=1.$$

310. $\frac{2ab}{|a-b|}$. Решение. Пусть AB — большее основание трапеции $ABCD$, $AB=a$, $CD=b$ (рис. 78). Введем на плоскости аффинную систему координат с началом в точке A, за оси координат примем направленные прямые AB и AD. Положим $B(a;\ 0)$, $D(0;\ d)$ и $C(b;\ d)$. Вектор $\overline{AK}$ будем считать единичным, так что $K(0;\ 1)$ и $0<d<1$.

Запишем уравнение прямой BK: $\frac{x}{a}+y=1$.

Координаты точки C удовлетворяют этому уравнению, следовательно, $\frac{b}{a}+d=1$, откуда $d=\frac{a-b}{a}$.

Уравнение прямой AC имеет вид $y=\frac{d}{b}x$ или $y=\frac{a-b}{ab}x$.

Прямая KM параллельна AB, следовательно, ее уравнение $y=1$, тогда точка M имеет координаты $M\left(\frac{ab}{a-b};\ 1\right)$. Отсюда следует, что $KM=\frac{ab}{a-b}$. Заметив, что $KN=KM$, получаем $MN=\frac{2ab}{a-b}$.

311. Решение. Введем аффинную систему координат: $C(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$ (рис. 79). Пусть $M(a;\ b)$ — точка стороны

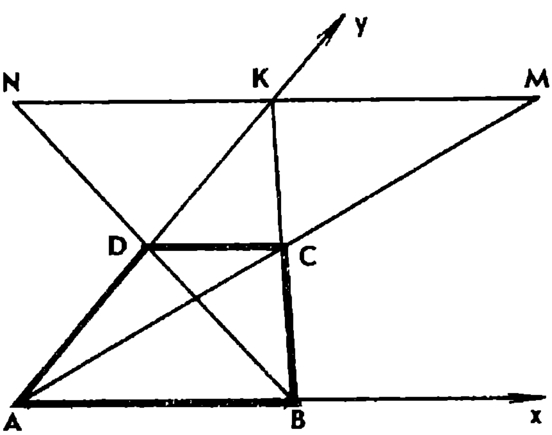


Рис. 78

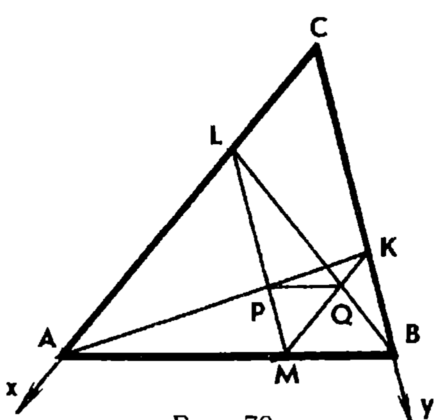


Рис. 79

AB треугольника ABC. Тогда координаты точек K и L будут $K(0;\ b)$, $L(a;\ 0)$.

Уравнения прямых AK и LM имеют вид

$$x+\frac{y}{b}=1,$$
$$x=a.$$

Решая полученную систему уравнений, находим координаты точки P:

$$P(a;\ b-ab).$$

Аналогично получим $Q(a-ab;\ b)$. Отсюда следует, что $\overline{PQ}=(-ab;\ ab)$. А так как $\overline{AB}=(-1;\ 1)$, то $\overline{PQ}=ab\overline{AB}$, откуда и вытекает доказываемое предложение.

Заметим, что в решении не использовано условие принадлежности точки M прямой AB: $a+b=1$. Значит, доказанное утверждение верно для любой точки M, лежащей внутри угла ACB.

Если точка M лежит на стороне AB и $\frac{AM}{MB}=2$, то $M\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$, $\overline{PQ}=\frac{2}{9}\overline{AB}$ и $\frac{PQ}{AB}=\frac{2}{9}$.

312. $AQ:BP=2$. Указание. Выберем аффинную систему координат так же, как при решении предыдущей задачи. Пусть точки M и P имеют координаты $M(a;\ b)$, $P(p;\ b)$. Установите, что

$$Q\left(a;\ \frac{ab}{p}\right),\ \overline{AQ}=\left(-b;\ \frac{ab}{p}\right),\ \overline{PB}=(-p;\ a).$$

Следовательно, $\overline{AQ}=\frac{b}{p}\overline{PB}$.

В частности, если M — середина стороны AB и P — середина отрезка KM, то $a=b=\frac{1}{2}$, $p=\frac{1}{4}$ и $\overline{AQ}=2\overline{PB}$.

313. Указание. Точку O пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ примите за начало аффинной системы координат, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ — за координатные векторы. Тогда $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$ и можно положить $C(c;\ 0)$, $D(0;\ c)$. Обозначив $\frac{AM}{MD}=\frac{CN}{NB}=k$, найдите координаты точек M, N, P и Q. Затем докажите, что

$$\overline{MP}=\overline{QN}=\left(\frac{c}{1+k};\ \frac{-ck}{1+k}\right).$$

314. Решение. Выберем систему координат с началом в точке O так, чтобы точки P и Q имели координаты: $P(1;\ 0)$

и $Q(0;\ 1)$. Тогда имеем $A(3;\ 0)$, $C(-2;\ 0)$, $B(0;\ 4)$, $D(0;\ -3)$. Запишем уравнения прямых PQ и AD:

$$x+y=1,\quad x-y=3.$$

Отсюда находим $x=2$ и $y=-1$. Следовательно,

$$M(2;\ -1),\ \overline{MP}=(-1;\ 1),\ \overline{PQ}=(-1;\ 1).$$

Аналогично найдем, что $\overline{NQ}=(-1;\ 1)$. Значит, $MP=PQ=QN$.

315. $\frac{CN}{ND}=2$. Решение. Выберем аффинную систему координат с началом в точке O так, чтобы вершины четырехугольника $ABCD$ имели координаты $A(2;\ 0)$, $B(0;\ 2)$. Тогда $C(-2;\ 0)$, $D(0;\ -1)$ и $M(1;\ 1)$.

Если $\frac{CN}{ND}=\lambda$, то $N\left(\frac{-2}{1+\lambda};\ \frac{-\lambda}{1+\lambda}\right)$.

Уравнение прямой OM имеет вид $y=x$. Поскольку точка N лежит на прямой OM, то $\lambda=2$.

316. $KL:AB=1:6$. Указание. Введем на плоскости аффинную систему координат с началом в точке O и осями координат OA и OB. Тогда можно положить: $A(a;\ 0)$, $B(0;\ b)$, $C(c;\ 0)$, $D(0;\ d)$. Запишем уравнения прямых AB и KM:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad y=-\frac{d}{a}x.$$

Решив систему этих уравнений, найдем координаты точки K:

$$K\left(\frac{ab}{b-d};\ \frac{-bd}{b-d}\right).$$

Аналогично $L\left(\frac{-ac}{a-c};\ \frac{ab}{a-c}\right)$.

Затем, вычислив координаты векторов $\overline{KL}$ и $\overline{AB}$, найдем, что

$$\overline{KL}=\frac{ab-cd}{(a-c)(b-d)}\overline{AB}.$$

Точно такое же соотношение получим для векторов $\overline{MN}$ и $\overline{CD}$.

Если $a=-c$ и $b=-2d$, то $\overline{KL}=\frac{1}{6}\overline{AB}$.

317. Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 80). Точку пересечения прямых AB и CD обозначим через M, а точку пересечения прямых AD и BC — через N. Введем систему координат $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $D(0;\ 1)$. Положим $M(m;\ 0)$, $N(0;\ n)$ и запишем уравнения прямых BN и DM:

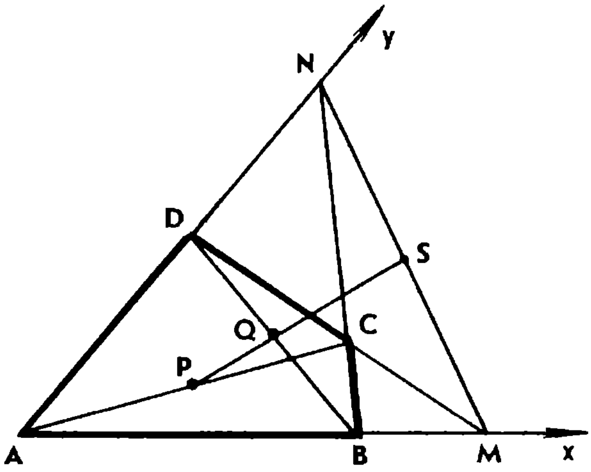


Рис. 80

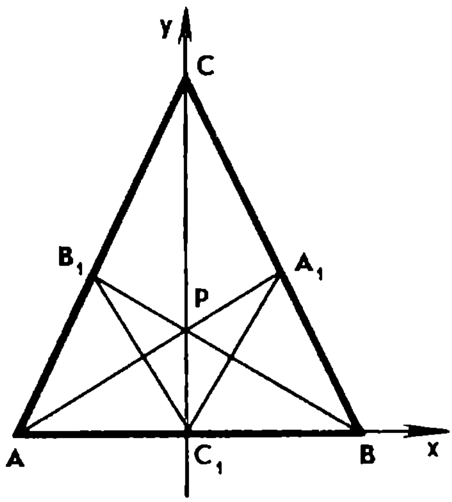


Рис. 81

$$x+\frac{y}{n}=1,\ \frac{x}{m}+y=1.$$

Решая полученную систему, найдем координаты точки C:

$$x=\frac{m(n-1)}{mn-1},\ y=\frac{n(m-1)}{mn-1}.$$

Пусть P, Q, S — середины отрезков AC, BD и MN. Тогда

$$P\left(\frac{mn-m}{2(mn-1)};\ \frac{mn-n}{2(mn-1)}\right),\ Q\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right),\ S\left(\frac{m}{2};\ \frac{n}{2}\right).$$

Вычислив координаты векторов $\overline{PQ}$ и $\overline{QS}$, найдем, что

$$\overline{PQ}=\frac{1}{mn-1}\overline{QS},$$

откуда и следует, что точки P, Q и S лежат на одной прямой.

318. Указание. Введите аффинную систему координат с началом в точке A и координатными векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$. Положив $B(1;\ 0)$, $D(0;\ 1)$, $M(1;\ m)$ и $N(n;\ 1)$, установите, что

$$S\left(\frac{n+1}{3+m+n-mn};\ \frac{m+1}{3+m+n-mn}\right).$$

Запишите уравнение прямой AS: $y=\frac{m+1}{n+1}x$ — и убедитесь, что координаты середины отрезка MN удовлетворяют этому уравнению.

319. Указание. Докажите, что прямая EF проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.

320. Средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AB. Указание. Введите систему координат $C(0;\ 0)$,

$A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$. Докажите, что координаты x и y середины отрезка MN удовлетворяют условиям

$$x=\frac{1}{2(1+k)},\quad y=\frac{k}{2(1+k)},\quad \text{где } k>0.$$

Отсюда $x+y=\frac{1}{2}$, причем $x>0$ и $y>0$.

321. Луч, параллельный OP.

322. Указание. Введите на плоскости аффинную систему координат так, чтобы данные точки имели координаты $O(0;\ 0)$, $A(2;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, $M(1;\ 1)$, $C(-c;\ 0)$, $D(0;\ -c)$.

323. Указание. Введите на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы вершины прямоугольника $ABCD$ имели координаты $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $D(0;\ 2)$. Найдите координаты точек M и N, а затем угловые коэффициенты прямых AM и MN.

325. Указание. За начало координат примите центр данной окружности, а оси координат проведите параллельно сторонам прямоугольника.

326. Указание. Выберите прямоугольную систему координат так, чтобы концы диаметра AB имели координаты $(-1;\ 0)$ и $(1;\ 0)$. Тогда концы хорды CD, параллельной диаметру, будут симметричны относительно оси ординат. Обозначив $C(-x;\ y)$, $D(x;\ y)$, $M(m;\ 0)$, примените формулу для вычисления расстояния между двумя точками.

328. Указание. За начало координат примите середину O стороны AB треугольника, а прямые AB и OC — за оси координат. Пусть точки M и N делят полуокружность на три равные дуги. Введите координаты $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(0;\ \sqrt{3})$, $M\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Запишите уравнения прямых CM и CN и найдите координаты точек пересечения этих прямых с прямой AB.

329. Окружность (без точек пересечения с прямой AB). Центр окружности — точка O, симметричная точке B относительно точки A, радиус равен $2m$, где m — длина медианы AD.

330. Окружность диаметра MN, где $\overline{AM}=\frac{2}{3}\overline{AB}$ и $\overline{AN}=2\overline{AB}$.

331. Прямая, перпендикулярная прямой AB, где A и B — данные точки.

332. Окружность с центром на прямой AB (без двух точек пересечения окружности с прямой AB).

333. Две прямые l и m. Прямая l проходит через точку O, симметричную точке B относительно A, и образует с прямой AB угол 30°. Прямая m симметрична прямой l относительно прямой AB. Указание. Введите прямоугольную систему координат $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$. Обозначив $C(x;\ y)$, составьте уравнение искомого множества точек: $(x+1)^2-3y^2=0$.

334. Если длина данного отрезка больше длины диагонали прямоугольника, то искомое множество — окружность с центром в точке пересечения диагоналей прямоугольника и радиусом $R=\frac{1}{2}\sqrt{m^2-(a^2+b^2)}$, где m — длина отрезка, a и b — длины сторон прямоугольника. При $m=\sqrt{a^2+b^2}$ — точка (центр симметрии прямоугольника); при $m<\sqrt{a^2+b^2}$ — пустое множество. Указание. Выберите прямоугольную систему координат с началом в точке пересечения диагоналей прямоугольника, а оси координат направьте параллельно сторонам прямоугольника.

Задача весьма просто решается и векторным способом, если воспользоваться тождеством $\overline{AM}^2=(\overline{OM}-\overline{OA})^2$.

335. Окружность, центр которой симметричен точке C относительно прямой AB, а радиус равен стороне треугольника. Указание. Выберите прямоугольную систему координат так, чтобы вершины равностороннего треугольника ABC имели координаты $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(0;\ \sqrt{3})$.

337. Решение. Точку C_1 примем за начало прямоугольной системы координат, а прямые AB и C_1C — за оси координат (рис. 81). Координаты данных точек обозначим так: $A(a;\ 0)$, $B(b;\ 0)$, $C(0;\ c)$ и $P(0;\ p)$.

Пусть прямые C_1A_1 и C_1B_1 образуют с осью Ox соответственно углы α_1 и α_2. Тогда $k_1=\operatorname{tg}\alpha_1$ и $k_2=\operatorname{tg}\alpha_2$ — угловые коэффициенты этих прямых. Требуется доказать, что $\alpha_1=180°-\alpha_2$, или $k_1=-k_2$.

Составим уравнения прямых BC и AP:

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{c}=1,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{p}=1.$$

Решив эту систему уравнений, найдем координаты точки A_1: $x_1=\frac{(c-p)ab}{ac-bp}$, $y_1=\frac{(a-b)cp}{ac-bp}$.

Далее, по формуле $k_1=\frac{y_1}{x_1}$ найдем угловой коэффициент прямой C_1A_1:

$$k_1=\frac{(a-b)cp}{(c-p)ab}.$$

Если аналогичным образом вычислять угловой коэффициент прямой C_1B_1, то значения a и b меняются местами, а значения c и p остаются прежними. Поэтому сразу можно записать:

$$k_2=\frac{(b-a)cp}{(c-p)ab}.$$

Таким образом, $k_1=-k_2$, что и требовалось доказать.

338. Указание. Примите точку O за начало прямоугольной системы координат, а ось абсцисс проведите перпендикулярно прямым a и b. Тогда можно положить: $A(1;\ a)$, $B(-1;\ b)$. Так как $\angle AOB=90°$, то $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=0$, или $ab-1=0$.

Запишите уравнение прямой AB: $(a-b)\,x-2y+a+b=0$.

Затем убедитесь, что расстояние от точки O до прямой AB равно 1.

339. Указание. Центр O равностороннего треугольника ABC примем за начало прямоугольной системы координат, ось абсцисс проведем в направлении вектора $\overline{AB}$. Тогда вершинам треугольника можно придать координаты $A(-\sqrt{3};\ -1)$, $B(\sqrt{3};\ -1)$, $C(0;\ 2)$.

Уравнение прямой l, проходящей через точку O, имеет вид

$$kx-y=0.$$

Далее вычислите расстояния от точек A, B, C до прямой l и убедитесь, что сумма их квадратов равна 6 при любом k.

340. Две прямые, одна из которых проходит через вершину A параллельно прямой BC, другая — через A и середину отрезка BC (исключая вершину A).

341. Решение. Примем касательную к параболе в ее вершине O за ось абсцисс, а точку O за начало прямоугольной системы координат (рис. 82). Пусть прямая, проходящая через точку $M(m;\ 0)$, пересекает параболу $y=ax^2$ в точках $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$. Условие принадлежности точек M, A и B одной прямой имеет вид

$$\frac{m-x_1}{x_2-x_1}=\frac{-y_1}{y_2-y_1},\quad x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2.$$

Учитывая, что $y_1=ax_1^2$ и $y_2=ax_2^2$, получаем: $m(x_1+x_2)-x_1x_2=0$.

Для определенности будем считать, что $m<x_1<x_2$, тогда

$$MA_1\cdot MB_1=(x_1-m)(x_2-m)=x_1x_2-\\ -m(x_1+x_2)+m^2,$$

или

$$MA_1\cdot MB_1=m^2.$$

А так как $MO=|m|$, то

$$MA_1\cdot MB_1=MO^2.$$

Из решенной задачи вытекает следующее следствие.

Если через данную точку M к параболе проведена секущая, пересе-

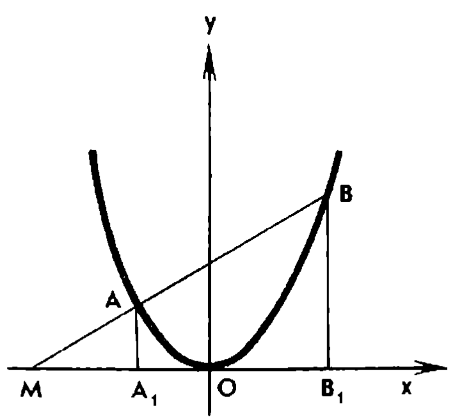


Рис. 82

кающая ее в точках A и B, и M_1, A_1, B_1 — проекции точек M, A, B на прямую, перпендикулярную оси параболы, то произведение $M_1A_1 \cdot M_1B_1$ не зависит от выбора секущей.

342. Решение. Рассмотрим параболу $y=ax^2$. Пусть секущая с данным угловым коэффициентом k имеет уравнение

$$y=kx+m.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением параболы, получим: $ax^2-kx-m=0$. Корни этого уравнения — абсциссы точек P и Q, в которых секущая пересекает параболу. По теореме Виета имеем: $x_1+x_2=\frac{k}{a}$.

Пусть точка $M(X;\ Y)$ — середина хорды PQ. Тогда

$$X=\frac{x_1+x_2}{2},\quad Y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Значит, $X=\frac{k}{2a}$.

Таким образом, X не зависит от m и середины параллельных хорд имеют одну и ту же абсциссу. Следовательно, все эти середины лежат на одной прямой, параллельной оси Oy.

343. Указание. Если секущая пересекает гиперболу $xy=1$ в точках $A_1\left(x_1;\ \frac{1}{x_1}\right)$ и $A_2\left(x_2;\ \frac{1}{x_2}\right)$, то ее угловой коэффициент $k=-\frac{1}{x_1x_2}$.

344. Решение. Пусть прямая пересекает гиперболу $xy=1$ в точках $M_0(x_0;\ y_0)$ и $M_1(x_1;\ y_1)$. Угловой коэффициент секущей вычислим по формуле $k=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$.

Учитывая, что $y_0=\frac{1}{x_0}$ и $y_1=\frac{1}{x_1}$, получим $k=-\frac{1}{x_0x_1}$.

При совпадении точки M_1 с точкой M_0 секущая становится касательной к гиперболе $xy=1$ и ее угловой коэффициент принимает значение $k=-\frac{1}{x_0^2}$.

Следовательно, уравнение касательной к гиперболе в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ можно записать так:

$$y-y_0=-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0),\ \text{или}\ y=-\frac{1}{x_0^2}x+\frac{2}{x_0}.$$

Далее находим точки пересечения касательной с осями координат: $A(0;\ 2y_0)$, $B(2x_0;\ 0)$. Отсюда видно, что точка M_0 — середина отрезка AB.

345. Указание. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

346. Указание. Решая задачу тем же способом, что и задачу 342, установите, что середины параллельных хорд гиперболы $xy=1$ лежат на прямой, определяемой уравнением $y=-kx$, где k — угловой коэффициент хорд.

347. Парабола, если прямая l не проходит через точку A; две прямые, перпендикулярные l, если точка A лежит на прямой l. Решение. Через точку A проведем перпендикуляр к прямой l и точку O их пересечения примем за начало прямоугольной системы координат, а прямую l — за ось абсцисс. Пусть $OA=a$ и $A(0;\ a)$. Если $M(x;\ y)$ — произвольная точка плоскости, то

$$MA^2=x^2+(y-a)^2$$

и расстояние MN от точки M до прямой l равно $|y|$.

Согласно условию задачи точка M принадлежит искомому множеству точек, если выполняется равенство

$$MA^2-MN^2=d^2.$$

Получаем уравнение, которому удовлетворяют координаты точек искомого множества:

$$x^2-2ay+a^2-d^2=0.$$

Если точка A лежит на прямой l, то $a=0$ и уравнение принимает вид

$$x^2-d^2=0.$$

Следовательно, искомое множество есть две прямые: $x=d$ и $x=-d$, перпендикулярные прямой l.

Если точка A не лежит на прямой l, то при $a=1$ получим уравнение

$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1-d^2}{2},$$

которое определяет параболу с осью OA (если и $d=1$, то вершина параболы совпадает с точкой O).

348. Парабола с вершиной в точке A и прямая, проходящая через точку A и центр C данной окружности (исключая точки A и C).

349. Дуги двух парабол с общими концами на прямой l. Указание. Выберите на плоскости прямоугольную систему координат так же, как при решении задачи 347. Составьте уравнение искомого множества точек: $\sqrt{x^2+(y-1)^2}+|y|=3$.

350. Две сопряженные гиперболы: $xy=k$ и $xy=-k$, где k — данное число.

351. $\frac{CK}{KB}=\frac{1}{2}$. Решение 1. Через вершину C треугольника ABC проведем прямую параллельно стороне AB и обозначим через L точку пересечения ее с прямой AM. Из равенства треугольников LCM и ADM следует, что $CL=AD$. Значит, $AB=2CL$, а так как треугольники CLK и ABK подобны, то $\frac{CK}{KB}=\frac{CL}{AB}=\frac{1}{2}$.

Решение 2. Через вершину B треугольника ABC проведем прямую параллельно медиане CD, пересекающую прямую AM в точке N. Тогда $BN=2DM$. Треугольники CKM и BKN подобны, следовательно, $\frac{CK}{KB}=\frac{CM}{BN}=\frac{1}{2}$.

Решение 3. Пусть прямая, проведенная через точку D параллельно прямой AM, пересекает сторону BC в точке E. Тогда по теореме Фалеса имеем $BE=EK=KC$.

Следовательно, $\frac{CK}{KB}=\frac{1}{2}$.

Решение 4. Применив теорему Менелая к треугольнику BCD и секущей AK, сразу получим $\frac{CK}{KB}=\frac{1}{2}$.

Решение 5. Векторное решение задачи получим, если положим $\frac{CK}{KB}=k$ и вектор $\overline{AK}$ выразим двумя способами через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

352. Решение 1. Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O (рис. 83). Через вершину C треугольника ABC проведем прямую, параллельную стороне AB. Точки пересечения этой прямой с прямыми AA_1 и BB_1 обозначим соответственно через M и N.

При гомотетии с центром O и коэффициентом $k=\frac{OC}{OC_1}$ точки A, B и C_1 переходят соответственно в точки M, N и C. Следовательно,

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{MC}{CN}.$$

Треугольники ABA_1 и MCA_1, ABB_1 и CNB_1 гомотетичны. Поэтому

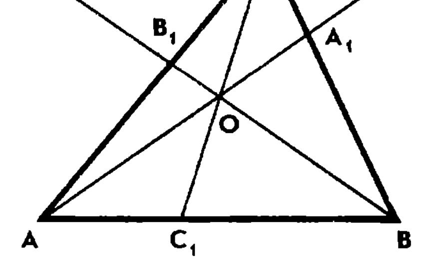


Рис. 83

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BA}{MC},\quad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CN}{BA}.$$

Перемножив найденные три равенства почленно, получим:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Обратную теорему докажем способом от противного. Допустим, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O, а прямая CO пересекает AB в некоторой точке D. Тогда на основании прямой теоремы получим соотношение между длинами отрезков на сторонах треугольника, сопоставив которое с данным соотношением придем к выводу, что точка D совпадает с точкой C_1.

Решение 2. Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O. Применив теорему Менелая к треугольнику ACC_1 и секущей BB_1, а затем к треугольнику BCC_1 и секущей AA_1, будем иметь:

$$\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AB}{BC_1}\cdot\frac{C_1O}{OC}=1, \qquad \frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CO}{OC_1}\cdot\frac{C_1A}{AB}=1.$$

Перемножив эти два равенства почленно, получим доказываемое соотношение.

Далее поступаем так же, как в решении 1.

353. Решение 1. Через вершину C треугольника ABC проведем прямую, параллельную стороне AB. Точки пересечения этой прямой с прямыми AA_1 и BB_1 обозначим через M и N. Треугольники A_1AB и A_1MC, а также треугольники B_1AB и B_1CN гомотетичны.

Следовательно, $\dfrac{CA_1}{A_1B}=\dfrac{CM}{AB}$, $\quad \dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{CN}{AB}$.

Отсюда $\dfrac{CA_1}{A_1B}+\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{MN}{AB}$.

Поскольку треугольники KMN и KAB гомотетичны, то

$$\frac{MN}{AB}=\frac{CK}{KC_1}.$$

Значит, $\dfrac{CA_1}{A_1B}+\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{CK}{KC_1}$.

Решение 2. Применим теорему Менелая к треугольникам BCC_1 и ACC_1. Получим:

$$\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{AC_1}{AB}\cdot\frac{CK}{KC_1}, \qquad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{BC_1}{AB}\cdot\frac{CK}{KC_1}.$$

Сложим эти два равенства почленно. Учитывая, что $AC_1+BC_1=$ $=AB$, получим:

$$\frac{CA_1}{A_1B}+\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CK}{KC_1}.$$

354. Указание. Примените теоремы Чевы и Ван-Обеля.

355. Указание. К треугольнику ABC примените теорему Чевы.

356. Указание. Воспользуйтесь теоремой Менелая.

358. $\frac{2}{5}$. Решение 1. Найдем отношение $\frac{DE}{DM}$. Для этого продолжим отрезок AN до пересечения с прямой CD в точке K. Так как треугольники AEM и KED гомотетичны, то $\frac{DE}{EM}=\frac{DK}{AM}=4$.

Значит, $\frac{DE}{DM}=\frac{4}{5}$.

Аналогично $\frac{DF}{DN}=\frac{4}{5}$. Отсюда следует, что $EF \parallel MN$ и $EF=\frac{4}{5}MN$. А так как MN — средняя линия треугольника ABC, то

$$MN=\frac{1}{2}AC \text{ и } EF=\frac{2}{5}AC.$$

Решение 2. Введем аффинную систему координат: $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$ и $D(0;\ 1)$. Найдем координаты точек M и N и запишем уравнения прямых AN и DM:

$$y=\frac{1}{2}x,\ 2x+y=1.$$

Найдем координаты точки E пересечения этих прямых: $E\left(\frac{2}{5};\ \frac{1}{5}\right)$. Аналогично найдем $F\left(\frac{4}{5};\ \frac{3}{5}\right)$.

Следовательно, $\overline{EF}=\left(\frac{2}{5};\ \frac{2}{5}\right)$. А так как $\overline{AC}=(1;\ 1)$, то $EF=$ $=\frac{2}{5}AC$.

359. а) Указание. Середину K стороны AB параллелограмма соедините с вершинами C и D. Постройте точки пересечения прямых DK и CK с диагоналями AC и BD. Прямая, проходящая через эти точки, является искомой. Аналогичным образом можно построить еще одну прямую, удовлетворяющую условию задачи.

б) Указание. Через точку пересечения продолжений боковых сторон трапеции и точку пересечения диагоналей проведите прямую. Эта прямая пересечет основания трапеции в их серединах. Далее так же, как при решении предыдущей задачи.

360. а) Решение. Согласно теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{AP}{PD}=\frac{AK}{KB}=\frac{CQ}{QB},$$

т. е. точки P и Q делят отрезки AD и CB в равных отношениях (считая от точек A и C). Центральная симметрия с центром O переводит точки A и D соответственно в точки C и B, а точку P — в точку Q. Следовательно, точка O — середина отрезка PQ.

б) Решение 1. Обозначим точку пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ через O (рис. 84).

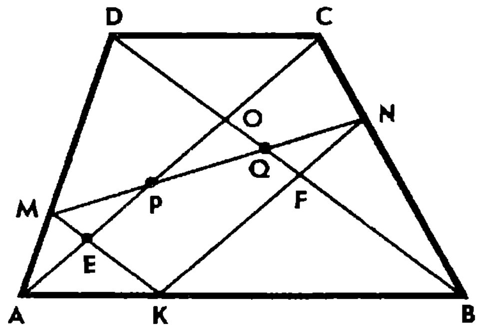


Рис. 84

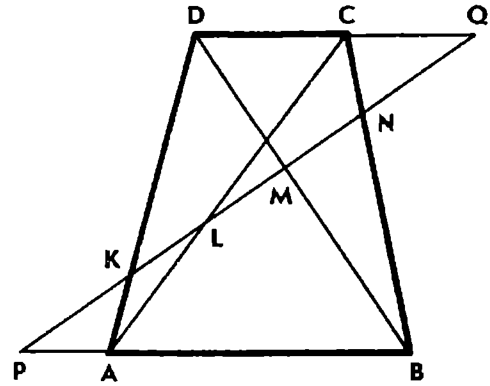


Рис. 85

Ясно, что $\frac{MP}{PN}=\frac{ME}{EK}=\frac{DO}{OB}=\frac{CD}{AB}$. Пусть $AB=a$ и $CD=b$,

$$\text{тогда } \frac{PN}{MP}=\frac{a}{b}, \text{ или } \frac{MN}{MP}=\frac{a+b}{b}.$$

Аналогично $\frac{MN}{QN}=\frac{a+b}{b}$. Значит, $MP=QN$.

Решение 2. Так как $\frac{ME}{EK}=\frac{b}{a}$ и $\frac{NF}{FK}=\frac{b}{a}$, то $EF\parallel MN$. Следовательно, $EMQF$ и $EPNF$ — параллелограммы. Поэтому $MQ=PN=EF$, откуда $MP+PQ=PQ+QN$, т. е. $MP=QN$.

362. Решение. Пусть прямая l пересекает боковые стороны AD и BC трапеции в точках K и N, диагонали AC и BD в точках L и M, продолжения оснований AB и CD в точках P и Q (рис. 85).

Обозначим: $AB=a$, $CD=b$, $PA=x$, $CQ=y$. Тогда, рассматривая пары подобных треугольников, основания которых лежат на прямых AB и CD, а общей вершиной служит одна из точек K, L, M или N, получим:

$$\frac{PK}{KQ}=\frac{x}{b+y}, \quad \frac{PN}{NQ}=\frac{x+a}{y}, \quad \frac{PL}{LQ}=\frac{x}{y}, \quad \frac{PM}{MQ}=\frac{x+a}{y+b}.$$

Отсюда $\frac{PK}{KQ}\cdot\frac{PN}{NQ}=\frac{PL}{LQ}\cdot\frac{PM}{MQ}$.

а) Если $PK=NQ$, то $KQ=PN$, поэтому

$$\frac{LQ}{PL}=\frac{PM}{MQ}, \text{ или } \frac{PQ}{PL}=\frac{PQ}{MQ} \text{ и } KL=MN.$$

б) Если $\frac{PK}{KQ}=\frac{NQ}{PN}=\frac{1}{4}$ и $\frac{PL}{LQ}=\frac{2}{3}$, то и $\frac{MQ}{PM}=\frac{2}{3}$. В таком случае все пять отрезков прямой l будут равны. Эти условия выполняются тогда и только тогда, когда

$$4x=b+y, \quad 4y=a+x, \quad 2y=3x.$$

Из первых двух равенств находим: $x=\frac{a+4b}{15}$, $y=\frac{4a+b}{15}$.

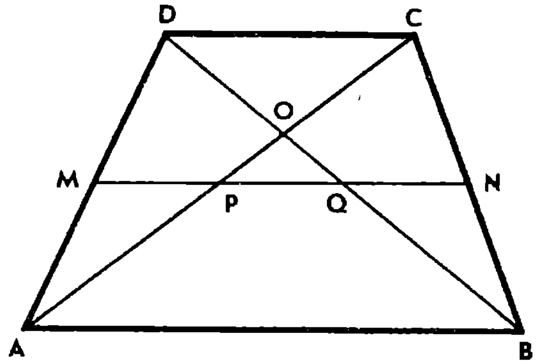


Рис. 86

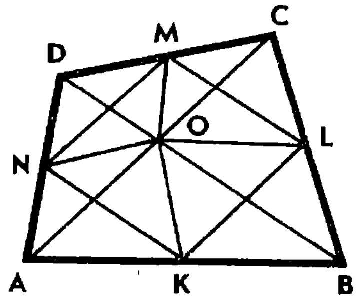


Рис. 87

А третье равенство выполняется, если

$$\frac{a+4b}{4a+b}=\frac{2}{3}, \text{ откуда } a=2b.$$

Таким образом, нужная прямая существует в том и только в том случае, когда одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

При $a=2b$ прямую l можно построить, исходя из полученных соотношений $x=\frac{1}{5}a$ и $y=\frac{3}{5}b$.

Ясно также, что $PK=NQ=\frac{1}{5}PQ$, если $\frac{AK}{KD}=\frac{CN}{NB}=\frac{1}{4}$.

Последнее замечание указывает на связь данной задачи с задачей 360, *б*.

363. Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, точки M и N — середины его сторон AD и BC (рис. 86). Будем считать, что прямая MN пересекает отрезки AO и BO в точках P и Q, причем $MP=PQ=QN$.

Обозначим: $AP=a$, $BQ=b$, $CO=c$, $DO=d$, $OP=p$ и $OQ=q$. Применив теорему Менелая к треугольникам DMQ и AOD, получим: $\frac{d}{q}=2$, $\frac{p}{a}\cdot\frac{d+q}{q}=1$.

Отсюда $d=2q$, $a=3p$. Аналогично $c=2p$, $b=3q$.

Таким образом, $\frac{AO}{OC}=\frac{a+p}{c}=2$, $\frac{BO}{OD}=\frac{b+q}{d}=2$.

Значит, треугольники OAB и OCD гомотетичны. Поэтому $AB\parallel CD$ и $ABCD$ — трапеция, причем $AB=2CD$.

364. Указание. Точку пересечения средних линий четырехугольника соедините с его вершинами.

365. Указание. Проведите диагональ AC четырехугольника $ABCD$.

366. Указание. Вершины A и C четырехугольника $ABCD$ соедините соответственно с точками L и N. Установите, что площадь четырехугольника $ANCL$ составляет $\frac{2}{3}$ площади четырехугольника $ABCD$, и воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

367. Указание. Через точку M проведите прямые параллельно сторонам параллелограмма.

368. Решение 1. Через точку M параллельно стороне AD трапеции проведем прямую, пересекающую прямые AB и CD соответственно в точках K и L. Тогда $KLDA$ — параллелограмм. Так как треугольники BMK и CML равны, то параллелограмм $KLDA$ и трапеция $ABCD$ равновелики. Площадь треугольника AMD составляет половину площади параллелограмма и, следовательно, половину площади трапеции.

Решение 2. Пусть прямая DM пересекает прямую AB в точке E. Трапеция $ABCD$ и треугольник ADE равновелики (треугольник BEM равен треугольнику CDM). А так как AM — медиана треугольника ADE, то площадь треугольника AMD равна половине площади треугольника ADE, т. е. половине площади трапеции.

369. Решение 1. Пусть K, L, M, N — середины сторон четырехугольника $ABCD$ (рис. 87). Используя свойство средней линии треугольника, докажите, что сумма площадей треугольников BKL и DMN равна $\frac{1}{4}$ площади четырехугольника $ABCD$.

Решение 2. Точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ соедините с вершинами четырехугольника $KLMN$. Докажите, что треугольники AKN и OKN, BKL и OKL, CLM и OLM, DMN и OMN равновелики.

Решение 3. Через вершины четырехугольника $ABCD$ проведите прямые, параллельные диагоналям AC и BD. Установите, что площадь параллелограмма, ограниченного этими прямыми, вдвое больше площади четырехугольника $ABCD$ и вчетверо больше площади параллелограмма $KLMN$.

370. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 365.

371. $\frac{1}{6}$. Указание. Точка P — центроид треугольника ABD, и площадь треугольника ABP составляет $\frac{1}{3}$ площади треугольника ABD.

372. Указание. Пусть данная точка K лежит на стороне AB треугольника ABC. Если K — середина стороны AB, то прямая CK искомая. Если M — середина AB и $AK<AM$, то через точку M проведите прямую параллельно прямой CK, которая пересечет сторону BC треугольника в искомой точке N.

373. Указание. Если M — середина диагонали BD четырехугольника $ABCD$, то ломаная AMC делит площадь четырехугольника пополам.

374. Указание. Проведите прямую AQ параллельно прямой PC. Убедитесь, что треугольники APQ и APC равновелики.

375. Средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AB, без ее концов.

376. Две прямые, проходящие через точку C (без точки C).

Одна прямая параллельна стороне AB, другая проходит через середину стороны AB.

377. Центроид треугольника и три точки пересечения прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно противоположным сторонам.

378. а) Средняя линия трапеции без ее концов.

б) Отрезок с концами на сторонах четырехугольника, проходящий через середины его диагоналей (если четырехугольник не параллелограмм). Указание. Пусть P и Q — середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Тогда

$$S_{ABP}+S_{CDP}=S_{ABQ}+S_{CDQ}=\frac{1}{2}S,$$

где S — площадь четырехугольника $ABCD$.

Если точка M лежит на отрезке, отсекаемом сторонами четырехугольника от прямой PQ, то $S_{APM}=S_{CPM}$ и $S_{BPM}=S_{DPM}$.

Значит, $S_{ABM}+S_{CDM}=\frac{1}{2}S$.

Если же точка M не принадлежит указанному отрезку, то это равенство не выполняется.

379. $\frac{1}{5}$.

380. Решение 1. Пусть прямые CC_1, BB_1, AA_1 пересекаются попарно в точках K, L, M (рис. 88). Обозначим $S_{CB_1K}=x$. Тогда $S_{AB_1K}=2x$, так как $AB_1=2B_1C$. Аналогично если $S_{AC_1K}=y$, то $S_{BC_1K}=2y$. Учитывая, что $S_{ACC_1}=\frac{1}{3}S$, где S — площадь треугольника ABC, и $S_{ABB_1}=\frac{2}{3}S$, получаем:

$$3x+y=\frac{1}{3}S,\quad 2x+3y=\frac{2}{3}S.$$

Отсюда $x=\frac{1}{21}S$.

Далее находим, что $S_{BCK}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{21}\right)S=\frac{2}{7}S$.

Такую же площадь имеет каждый из треугольников ACL и ABM. Следовательно, $S_{KLM}=\frac{1}{7}S$.

Решение 2. Применив теорему Менелая (см. задачу 351) к треугольнику ACC_1 и секущей BB_1, получим $\frac{CK}{KC_1}=\frac{3}{4}$.

Значит, $CK=\frac{3}{7}CC_1$. А так как площади треугольников CB_1K и CAC_1 относятся как произведения длин сторон, заключающих общий угол, то $S_{CB_1K}=\frac{1}{7}S_{ACC_1}=\frac{1}{21}S$.

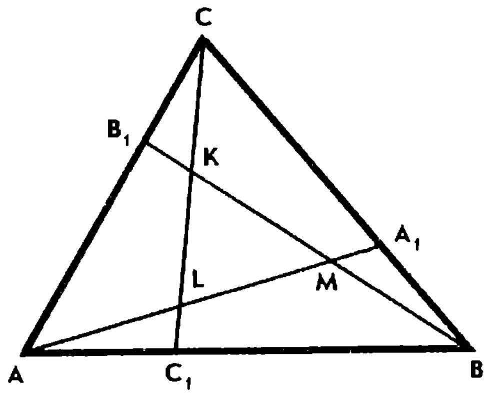


Рис. 88

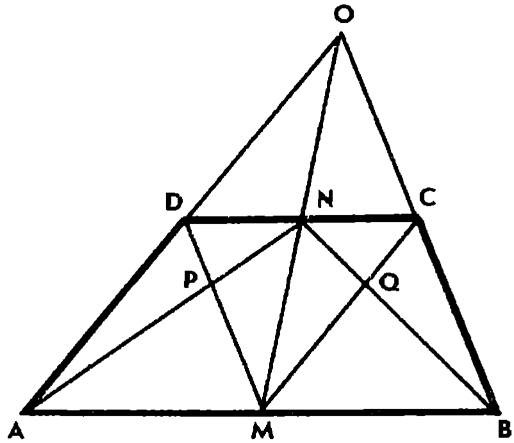


Рис. 89

С помощью аналогичных вычислений докажем, что треугольники AC_1L и BA_1M имеют такую же площадь.

Заметив, что сумма площадей треугольников ABA_1, BCB_1 и CAC_1 равна площади треугольника ABC, приходим к выводу: площадь треугольника KLM равна сумме площадей треугольников AC_1L, BA_1M и CB_1K, т. е. $S_{KLM}=3S_{AC_1L}=\frac{1}{7}S$.

381. Указание. *I способ.* Если обозначить $AO=a$, $BO=b$, $CO=c$ и $DO=d$, то задача сводится к доказательству неравенства $ab+cd>ad+bc$, которое равносильно неравенству $(a-c)(b-d)>0$.

II способ. Если построить точки C_1 и D_1, симметричные точкам C и D относительно точки O, то окажется, что площади треугольников AC_1D и AC_1D_1 равны, а площадь треугольника ABD_1 больше площади треугольника CBD_1.

382. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. Решение. Так как треугольники ABC и ABD равновелики, то треугольники BOC и AOD также равновелики. Обозначив площадь треугольника BOC через S_3, а площадь трапеции через S, имеем:

$$\frac{S_1}{S_3}=\frac{AO}{CO}, \quad \frac{S_3}{S_2}=\frac{AO}{CO}.$$

Отсюда $S_3^2=S_1\cdot S_2$. Следовательно, $S=S_1+S_2+2\sqrt{S_1\cdot S_2}$.

384. $\frac{ab}{(a+b)^2}$. Решение. Введем обозначения: $S_{MNP}=S_1$, $S_{NMQ}=S_2$, $S_{AMN}=S_3$, $S_{MBCN}=S_4$, $S_{ABCD}=S$, $AM=x_1$, $BM=x_2$, $DN=y_1$, $CN=y_2$ (рис. 89).

Воспользуемся результатом предыдущей задачи. Имеем:

$$\frac{S_1}{S_3}=\frac{x_1y_1}{(x_1+y_1)^2}, \quad \frac{S_2}{S_4}=\frac{x_2y_2}{(x_2+y_2)^2}.$$

Отрезки, отсекаемые прямыми OA, OB и OM на параллельных прямых AB и CD, пропорциональны, т. е.

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{a}{b}.$$

Следовательно, $\frac{S_1}{S_3}=\frac{S_2}{S_4}=\frac{ab}{(a+b)^2}$, откуда $S_1+S_2=$ $=\frac{ab}{(a+b)^2}(S_3+S_4)$, т. е. $S_{MQNP}=\frac{ab}{(a+b)^2}S$ (при любом выборе точки M на стороне AB).

385. Площадь четырехугольника $MQNP$ равна $\frac{1}{4}$ площади параллелограмма $ABCD$, если $MN\parallel AD$. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 383.

386. Решение. Сохраним обозначения, введенные при решении задачи 384. Тогда имеем:

$$\frac{S_1}{S_3}=\frac{x_1y_1}{(x_1+y_1)^2}.$$

Так как трапеции $AMND$ и $ABCD$ имеют одну и ту же высоту, то

$$\frac{S_3}{S}=\frac{x_1+y_1}{a+b}.$$

Следовательно, $\frac{S_1}{S}=\frac{x_1y_1}{(a+b)(x_1+y_1)}$.

Аналогично, $\frac{S_2}{S}=\frac{x_2y_2}{(a+b)(x_2+y_2)}$.

Сложив эти два равенства почленно, получим:

$$z=\frac{S_{MQNP}}{S}=\frac{1}{a+b}\left(\frac{x_1y_1}{x_1+y_1}+\frac{x_2y_2}{x_2+y_2}\right),$$

где $x_1+x_2=a$ и $y_1+y_2=b$.

Выясним, при каком условии функция z принимает наибольшее значение.

Воспользуемся неравенством $\frac{x_1y_1}{x_1+y_1}+\frac{x_2y_2}{x_2+y_2}\leqslant\frac{ab}{a+b}$, справедливость которого легко проверить. (При $a=x_1+x_2$ и $b=y_1+y_2$ оно приводится к виду $(x_1y_2-x_2y_1)^2\geqslant 0$.)

Таким образом, получаем:

$$z\leqslant\frac{ab}{(a+b)^2},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{a}{b}$.

Значит, площадь четырехугольника $MQNP$ будет наибольшей, если прямая MN проходит через точку пересечения прямых AD и BC.

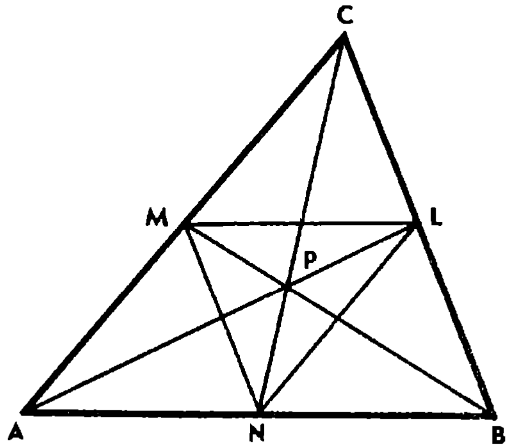


Рис. 90

387. P — центроид треугольника. Решение. Пусть $\frac{BL}{LC}=$ $=x$, $\frac{CM}{MA}=y$, $\frac{AN}{NB}=z$ (рис. 90). По теореме Чевы $xyz=1$.

Площадь треугольника ABC обозначим через S, а площади треугольников CLM, BLN, ANM — через S_1, S_2, S_3. Так как отношение площадей треугольников CLM и ABC равно отношению произведений длин сторон, заключающих общий угол, то

$$\frac{S_1}{S}=\frac{y}{(1+x)(1+y)}.$$

Аналогично $\frac{S_2}{S}=\frac{x}{(1+z)(1+x)}$, $\frac{S_3}{S}=\frac{z}{(1+y)(1+z)}$.

Ясно, что $\frac{S_{LMN}}{S}=1-\frac{S_1+S_2+S_3}{S}$.

Подставив найденные выше значения, получим:

$$S_{LMN}=\frac{2S}{(1+x)(1+y)(1+z)}.$$

Площадь треугольника LMN будет наибольшей при минимальном значении $(1+x)(1+y)(1+z)$. Оценим это произведение:

$$(1+x)(1+y)(1+z)=2+x+y+z+xy+xz+yz=$$
$$=2+\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)\geqslant 8,$$

так как $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$, причем равенство имеет место только при $x=$ $=y=z=1$.

Итак, $S_{LMN}\leqslant\frac{1}{4}S$. Искомая точка P — центроид треугольника ABC.

388. $\frac{2}{3}c$. Указание. Пусть CH — высота треугольника ABC, $AH=x$, $CH=y$. Тогда

$$y^2=-\left(x-\frac{4}{3}c\right)^2+\frac{4}{9}c^2.$$

389. $\frac{p^2}{4}\sin\alpha$. Указание. Если через x обозначить длину боковой стороны трапеции, то ее площадь равна

$$S=(p-x)x\sin\alpha.$$

Так как $(p-x)+x=p$, то произведение $(p-x)x$ принимает наибольшее значение при равенстве сомножителей, т. е. когда $x=\frac{p}{2}$.

390. Длина дуги сектора равна двум радиусам.

391. Решение. Очевидно, достаточно рассмотреть выпуклый четырехугольник $ABCD$. Длины его сторон: $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. Имеем:

$$2S=ab\sin B+cd\sin D\leqslant ab+cd.$$

Аналогично $2S\leqslant ad+bc$. Сложив эти два неравенства почленно, применим теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел и получим:

$$4S\leqslant(ab+cd)+(ad+bc)=(a+c)(b+d)\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2=p^2.$$

Равенство имеет место только тогда, когда $ABCD$ — прямоугольник и $a+c=b+d$, т. е. только в случае квадрата.

392. Указание. Проведите высоту CH треугольника ABC и обозначьте $AB=c$, $CH=h$. Площадь S прямоугольника выразите как функцию его высоты x:

$$S=\frac{c}{h}x(h-x).$$

Площадь прямоугольника будет наибольшей при $x=\frac{h}{2}$.

393. $AC\parallel KL$. Решение. Обозначим $KL=a$, $AN=BL=n$, $MC=MD=x$ (рис. 91). Площадь трапеции $ABCD$ будет наибольшей, когда сумма S площадей прямоугольных треугольников, отсекаемых сторонами трапеции от квадрата, будет наименьшей. Имеем:

$$2S=x^2+2n(a-x)+(a-n)^2$$
$$\text{или } 2S=(x-n)^2+a^2.$$

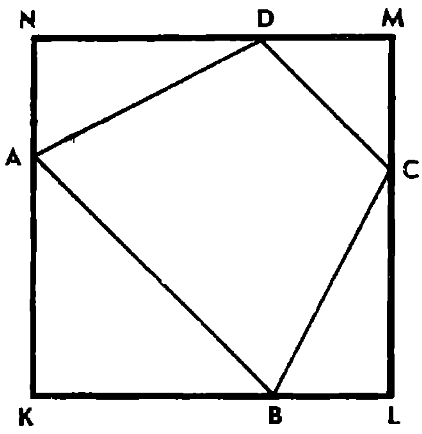


Рис. 91

Значит, площадь трапеции имеет наибольшее значение, равное половине площади квадрата, при $x=n$.

394. $\frac{25}{48}$. Вершина D — середина стороны MN квадрата.

395. Решение. Пусть искомая прямая пересекает стороны данного угла с вершиной O в точках A и B. Через точку M проведем прямые параллельно сторонам угла, пересекающие OA и OB соответственно в точках C и D. Обозначим $OC=a$, $OD=b$, $CA=x$, $DB=y$. Тогда $OA+OB=(a+b)+x+y$.

Из подобия треугольников ACM и BDM имеем $xy=ab$.

Значит, $OA+OB\geqslant a+b+2\sqrt{ab}$, причем равенство только при $x=y=\sqrt{ab}$.

396. Центр искомой окружности есть точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AB и перпендикуляра к прямой l, проходящего через точку M. Решение. Пусть отрезок AB пересекает прямую l в точке M, а окружность, проходящая через точки A и B, отсекает от прямой AB хорду CD. Обозначив $AM=a$, $BM=b$, $CM=x$, $DM=y$, имеем: $CD=x+y$, $xy=ab$. Следовательно, отрезок CD будет наименьшим при $x=y=\sqrt{ab}$.

397. Наибольшее значение длины отрезка касательной равно $\frac{p}{4}$. Оно достигается в треугольнике, основание которого равно $\frac{p}{2}$. Указание. Задача сводится к исследованию функции

$$y=\frac{1}{p}\,x(p-x),$$

где y — длина отрезка касательной, а x — длина стороны треугольника, параллельной касательной.

398. Решение. Пусть сторона AB прямоугольника $ABCD$, вписанного в полукруг с центром O, лежит на диаметре. Проведем радиус OC. Обозначим $OC=R$, $\angle BOC=x$. Периметр прямоугольника выразим как функцию x:

$$P=2R(\sin x+2\cos x),\text{ где } 0^\circ<x<90^\circ.$$

Периметр имеет наибольшее значение при $\operatorname{tg} x=\frac{1}{2}$, т. е. когда $\frac{BC}{AB}=\frac{1}{4}$.

399. $\angle BOC=45^\circ$, где O — центр данной окружности. Решение. Обозначим $AB=2R$ и $\angle BOC=x$. Тогда имеем:

$$CM=R\sin x,\qquad AM=R+R\cos x.$$

Следовательно,

$$AM+CM=R+R(\sin x+\cos x)=$$
$$=R\left[1+\sqrt{2}\sin(x+45^\circ)\right]\leqslant(1+\sqrt{2})R,$$

причем равенство достигается лишь при $x=45^\circ$.

400. $\frac{1}{4}(a^2+b^2)\sqrt{3}+ab$ при $\angle C=150°$.

401. $2(a^2+b^2+ab\sqrt{2})$. Указание. Установите, что треугольники ABC, CNP, BEQ, AFM равновелики. Выразите площадь S шестиугольника через длины сторон a, b и $\angle ACB=x$. Докажите, что функция S имеет наибольшее значение, равное $2(a^2+b^2+ab\sqrt{2})$, при $x=135°$.

402. Решение. Обозначим длины сторон AB и AD прямоугольника через x и y соответственно, $\angle BAM=\alpha$, $\angle DAN=\beta$. Тогда $\angle MAN=90°-(\alpha+\beta)$. Согласно условию задачи

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{2x}, \qquad \operatorname{tg}\beta=\frac{2x}{3y}.$$

Поэтому $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{2x}+\frac{2x}{3y}\right)\geqslant\sqrt{3}$ (в силу теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом).

Значит, $\alpha+\beta\geqslant 60°$ и $\angle MAN\leqslant 30°$, причем $\angle MAN=30°$ тогда и только тогда, когда $\frac{y}{2x}=\frac{2x}{3y}$, т. е. при $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

403. Решение. Пусть M и N — точки, лежащие на сторонах AC и BC треугольника ABC. Обозначим $CM=x$, $CN=y$, а стороны треугольника ABC будем обозначать, как обычно, a, b, c. Тогда $MN^2=x^2+y^2-2xy\cos C=(x-y)^2+2xy(1-\cos C)$.

Так как площадь треугольника CMN составляет половину площади S треугольника ABC, то

$$xy=\frac{1}{2}ab=\frac{S}{\sin C}.$$

Следовательно, $MN^2=(x-y)^2+2S\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

Отсюда следует, что отрезок MN с концами на сторонах угла C треугольника ABC имеет наименьшую длину, равную $\sqrt{2S\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$, при $x=y=\sqrt{\frac{ab}{2}}$.

Если аналогичным образом построить прямую так, чтобы она отсекала от данного треугольника треугольники с углами A и B, то их площади будут соответственно равны

$$\sqrt{2S\operatorname{tg}\frac{A}{2}} \text{ и } \sqrt{2S\operatorname{tg}\frac{B}{2}}.$$

Будем считать, что $c<b<a$. Тогда $\angle C$ — меньший угол треугольника ABC. Сравнивая результаты, приходим к выводу, что отрезок MN, длина которого равна $\sqrt{2S\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$, является искомым.

Точки M и N на сторонах AC и BC треугольника построим по найденным значениям $CM=CN=\sqrt{\frac{ab}{2}}$. Поскольку $a<b+c<$ $<2b$, то $\sqrt{\frac{ab}{2}}<b$ и задача всегда имеет решение.

404. Решение. Пусть прямая k пересекает сторону BC треугольника ABC в точке M (рис. 92). Проведем к прямой k перпендикуляры BD и CE. Площадь S треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ABM и ACM.

Следовательно, $S=\frac{1}{2}AM(BD+CE)$.

Обозначив $BD+CE=d$ и $AM=x$, получим: $d=\frac{2S}{x}$, причем если $AC\leqslant AB=c$ и h_a — высота треугольника ABC, то $h_a\leqslant x\leqslant c$.

Если прямая k не имеет с отрезком BC общих точек, то она пересекает отрезок B_1C, где B_1 — точка, симметричная точке B относительно точки A. Расстояния от точек B_1 и B до прямой k равны между собой, площади треугольников AB_1C и ABC также равны. Следовательно, в этом случае получаем ту же формулу

$$d=\frac{2S}{x}.$$

Принимая во внимание изменение $x=AM$ при перемещении точки M по ломаной BCB_1, приходим к следующему выводу.

Если $AC\leqslant AB$, то d имеет наименьшее значение, когда прямая k совпадает с прямой AB; если $AC=AB$, то наименьшее значение достигается для двух прямых AC и AB.

Сумма d имеет наибольшее значение, если AM принимает наименьшее значение. Таким образом, если $\angle A>90°$, то сумма d максимальна, когда $k\perp BC$; если $\angle A<90°$, то при условии, что $k\perp B_1C$; если $\angle A=90°$, то наибольшее значение достигается для двух прямых, перпендикулярных к BC и B_1C.

405. а) Решение. Пусть серединный перпендикуляр m к отрезку AB пересекает прямую k в точке O (рис. 93). Возьмем на прямой k точку M, лежащую по ту же сторону от m, что и точка A. Тогда $\frac{AO}{BO}=1$ и $\frac{AM}{BM}<1$. Обозначим $AO=BO=r$, $MO=x$,

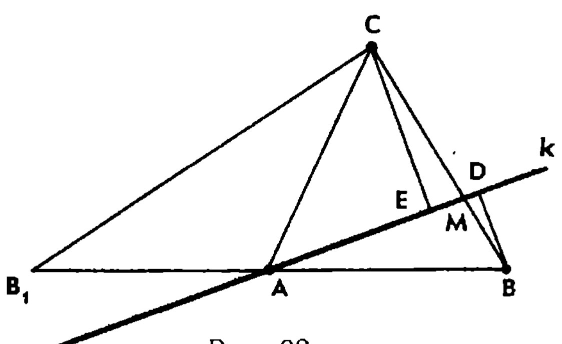


Рис. 92

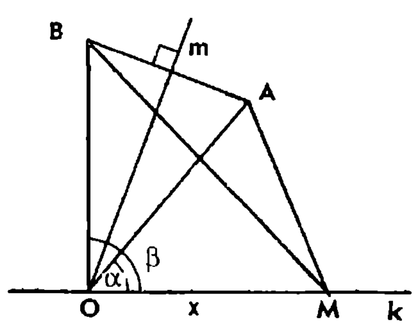


Рис. 93

$\angle AOM=\alpha$, $\angle BOM=\beta$. Применив теорему косинусов к треугольнику AOM, находим:

$$AM^2=x^2+r^2-2rx\cos\alpha=(r-x)^2+4rx\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогично $BM^2=(r-x)^2+4rx\sin^2\frac{\beta}{2}$, причем $0°<\alpha<\beta<180°$.

Для отыскания наименьшего значения $\frac{AM}{BM}$ воспользуемся известным неравенством $\frac{a+c}{b+c}>\frac{a}{b}$ при $0<a<b$ и $c>0$. Получим:

$$\frac{AM^2}{BM^2}=\frac{(r-x)^2+4rx\sin^2\frac{\alpha}{2}}{(r-x)^2+4rx\sin^2\frac{\beta}{2}}\geqslant\frac{4rx\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4rx\sin^2\frac{\beta}{2}},\quad\text{или}\quad\frac{AM}{BM}\geqslant\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x=r$.

Таким образом, если точка M лежит по ту же сторону от прямой m, что и точка A, то отношение $\frac{AM}{BM}$ имеет наименьшее значение (а отношение $\frac{BM}{AM}$ — наибольшее), когда $OM=OA$.

В частном случае, когда прямая m не пересекает k и, значит, прямая AB перпендикулярна k, решение задачи упрощается.

б) Указание. Воспользуйтесь результатом задачи пункта а).

406. Решение 1. Пусть точки A и B лежат на сторонах данного прямого угла соответственно на расстояниях a и b от его вершины O, причем $a>b$. Обозначим $OM=x$, $\angle AMO=\alpha$, $\angle BMO=\beta$ и $\angle AMB=\varphi$. Тогда имеем:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{a},\qquad \operatorname{ctg}\beta=\frac{x}{b},\qquad \operatorname{ctg}\varphi=\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{x^2+ab}{(a-b)x},$$

где $x>0$ и $0°<\varphi<90°$.

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел имеем:

$$x+\frac{ab}{x}\geqslant 2\sqrt{ab}.$$

Следовательно, $\operatorname{ctg}\varphi\geqslant\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$, и наибольшее значение φ достигается при $x=\frac{ab}{x}$, т. е. $x=\sqrt{ab}$.

Решение 2. Через точки A и B проведем окружность, касающуюся другой стороны угла. Тогда точка касания M искомая. Действительно, если M_1 — любая другая точка луча OM, то $\angle AM_1B<\angle AMB$.

По свойству секущей и касательной к окружности имеем:

$$OM^2=ab, \text{ или } OM=\sqrt{ab}.$$

Приведенное решение остается в силе и тогда, когда данный угол не является прямым.

407. Указание. Около треугольника ABC опишите окружность. Биссектриса CD треугольника при продолжении пересечет дугу AB в ее середине.

408. Указание. Пользуясь теоремой косинусов и формулой площади треугольника $S=\frac{1}{2}ab\sin C$, докажите, что

$$m_c^2=\frac{c^2}{4}+2S\operatorname{ctg} C.$$

Отсюда видно, что медиана m_c треугольника с данным основанием c и данным углом C будет наибольшей, если $\operatorname{ctg} C$ будет положительным и площадь S максимальной.

409. $R=\frac{c}{2}$, если $h\leqslant\frac{c}{2}$; $R=\frac{c^2+4h^2}{8h}$, если $h>\frac{c}{2}$. Решение 1. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда имеем: $OA+OB\geqslant AB$, или $2R\geqslant c$, причем $2R=c$ только тогда, когда $\angle C=90°$.

Если $h\leqslant\frac{c}{2}$, то по данным $AB=c$ и $CH=h$ можно построить прямоугольный треугольник ABC ($\angle C=90°$), который и будет удовлетворять условию задачи. При этом радиус R имеет наименьшее значение, равное $\frac{c}{2}$.

Если же $h>\frac{c}{2}$, то прямая, параллельная стороне AB и отстоящая от нее на расстоянии h, не пересекает окружность с диаметром AB.

Следовательно, вершина C треугольника ABC будет лежать вне этой окружности и $\angle C<90°$. В таком случае из формулы $2R=\frac{c}{\sin C}$ следует, что R имеет наименьшее значение тогда, когда величина угла C наибольшая. Легко убедиться в том, что из всех треугольников с данным основанием c и данной высотой h наибольший угол при вершине имеет равнобедренный треугольник. Для такого треугольника

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{c}{2h} \text{ и } R=\frac{c^2+4h^2}{8h}.$$

Итак, искомый треугольник является прямоугольным или равнобедренным в зависимости от того, будет $h\leqslant\frac{c}{2}$ или $h>\frac{c}{2}$.

При этом $R_{\min}=\begin{cases}\frac{c}{2}, & \text{если } h\leqslant\frac{c}{2},\\ \frac{c^2+4h^2}{8h}, & \text{если } h>\frac{c}{2}.\end{cases}$

Решение 2. Пусть M — середина отрезка AB. Обозначим MH через x. Тогда

$$ab=\sqrt{\left[h^2+\left(\frac{c}{2}+x\right)^2\right]\left[h^2+\left(\frac{c}{2}-x\right)^2\right]}.$$

По формуле $R=\frac{ab}{2h}$ находим, что $R=\frac{\sqrt{c^2h^2+\left(x^2+h^2-\frac{c^2}{4}\right)^2}}{2h}$.

Отсюда следует, что если $h\leqslant\frac{c}{2}$, то при $x=\sqrt{\frac{c^2}{4}-h^2}$ радиус R имеет наименьшее возможное значение, равное $\frac{c}{2}$. Если же $h>\frac{c}{2}$, то радиус R имеет наименьшее значение при $x=0$, причем $R_{\min}=\frac{c^2+4h^2}{8h}$.

410. $\frac{a^2h}{4(a-b)}$ или bh. Указание. Обозначим через x длину стороны вырезаемого прямоугольника, лежащую на большем основании трапеции. Тогда задача сводится к отысканию наибольшего значения функции $S=\frac{hx(a-x)}{a-b}$, где $b\leqslant x<a$.

Площадь S имеет наибольшее значение, равное $\frac{a^2h}{4(a-b)}$, при $x=\frac{a}{2}$, если $b<\frac{a}{2}$. Если же $b\geqslant\frac{a}{2}$, то $S_{\max}=bh$ при $x=b$.

411. Наибольшую площадь имеет прямоугольник, вершина E которого, противоположная A, лежит на границе четверти круга и среди точек этой границы наиболее удалена от диагонали BD. Именно если $r\geqslant2(\sqrt{2}-1)a$, то E является точкой пересечения границы с диагональю AC; прямоугольник в этом случае будет квадратом со стороной $a-\frac{\sqrt{2}}{2}r$. Если же $r\leqslant2(\sqrt{2}-1)a$, то в качестве E можно взять точку пересечения границы четверти круга со стороной BC или со стороной CD; прямоугольник в этом случае будет иметь стороны длиной a и $a-r$. Таким образом, в случае $r=2(\sqrt{2}-1)a$ задача имеет три решения: два прямоугольника и квадрат имеют максимальную площадь, равную $(\sqrt{2}-1)^2a^2$. Указание. Выведите формулу

$$2S=(x+y-a)^2+a^2-r^2,$$

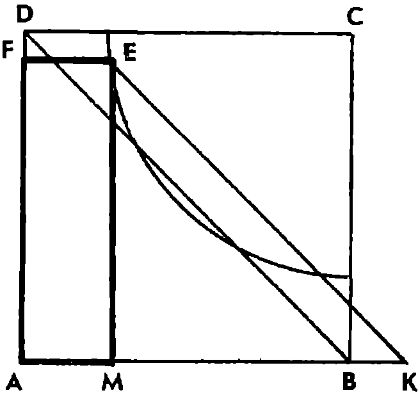


Рис. 94

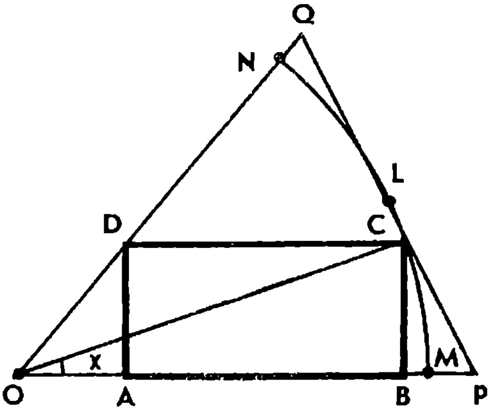


Рис. 95

где S — площадь прямоугольника, x, y — длины его сторон. Проведите через точку E прямую, параллельную диагонали BD квадрата, пересекающую прямую AB в точке K (рис. 94). Тогда $BK = |x+y-a|$, так что площадь S искомого прямоугольника имеет наибольшее значение тогда и только тогда, когда расстояние BK является наибольшим. Вычислите S для случаев, когда E есть точка пересечения границы четверти круга со стороной квадрата и с диагональю AC квадрата. Сравните результаты вычислений.

412. Решение 1. Сначала рассмотрим случай, когда сторона AB вписанного прямоугольника $ABCD$ лежит на радиусе OM сектора (рис. 95). Пусть $OM = R$, центральный угол сектора $\angle MON = \alpha$. Величину угла MOC обозначим через x. Тогда имеем:

$$BC = R \sin x, \qquad CD = \frac{R \sin(\alpha - x)}{\sin \alpha}, \qquad 0° < x < \alpha.$$

Площадь S прямоугольника $ABCD$ есть функция от x:

$$S = \frac{R^2 \sin x \sin(\alpha - x)}{\sin \alpha} = \frac{R^2 [\cos(2x-\alpha) - \cos \alpha]}{2 \sin \alpha}.$$

Отсюда видно, что наибольшее значение S достигается при $\cos(2x-\alpha) = 1$, т. е. когда $x = \frac{\alpha}{2}$. Определим это значение S_1:

$$S_1 = S_{\max} = \frac{R^2 (1 - \cos \alpha)}{2 \sin \alpha} = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Теперь рассмотрим второй возможный случай. Пусть прямоугольник $ABCD$ вписан в сектор так, что две его вершины A и B лежат на дуге MN сектора (рис. 96). Биссектриса OL является осью симметрии полученной фигуры, и, следовательно, задача сводится к предыдущей. Площадь прямоугольника $ABCD$ будет наибольшей, когда площадь прямоугольника, вписанного в сектор MOL, наибольшая, т. е. вершины A и B являются серединами дуг ML и LN.

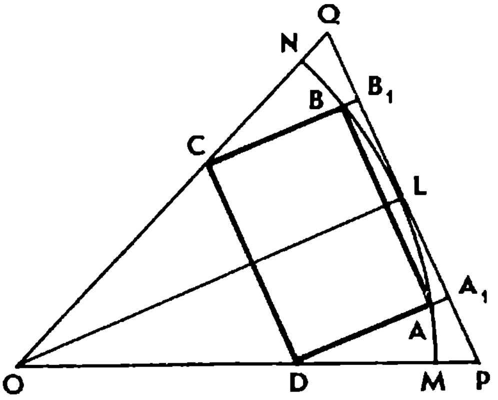


Рис. 96

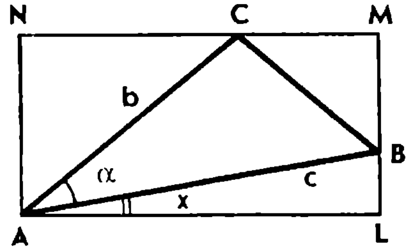


Рис. 97

В этом случае $\angle AOL = \frac{\alpha}{4}$, т. е. наибольшая площадь прямоугольника $ABCD$ равна $S_2 = R^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$.

Остается сравнить S_1 и S_2. Поскольку $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$ при $0° < \alpha < 90°$, то $S_1 > S_2$. Значит, прямоугольник наибольшей площади получится при первом способе построения, когда одна из сторон прямоугольника лежит на радиусе, а вершина, лежащая на дуге, делит ее пополам.

Решение 2. Пусть L — середина дуги MN. Построим касательную к дуге сектора в точке L. Точки пересечения ее со сторонами угла MON обозначим через P и Q (рис. 95 и 96).

Если вершина C прямоугольника $ABCD$, вписанного в сектор первым способом, совпадает с точкой L, то его площадь, равная половине площади треугольника OPQ, будет наибольшей. Это следует из задачи 392.

Если прямоугольник $ABCD$ вписан в сектор вторым способом, то, продолжив его стороны DA и CB до пересечения с отрезком PQ в точках A_1 и B_1, получим прямоугольник A_1B_1CD, вписанный в треугольник OPQ. Используя опять задачу 392, получаем, что $S_{ABCD} < S_{A_1B_1CD} < \frac{1}{2} S_{OPQ}$.

Итак, вписанный в сектор прямоугольник имеет наибольшую площадь, если одна из его сторон лежит на радиусе сектора, а вершина, лежащая на дуге, делит дугу пополам.

413. Решение. Рассмотрим прямоугольник $ALMN$, описанный около треугольника ABC (рис. 97). Величину угла BAL примем за независимую переменную x. Из треугольников ABL и ACN находим:

$$AL = c\cos x, \qquad AN = b\sin(x+\alpha).$$

Следовательно, площадь прямоугольника $ALMN$ есть функция от x:

$$S = bc \sin(x+\alpha)\cos x.$$

Исходя из геометрического смысла задачи, находим область изменения функции S:

$$x+\alpha < 90^\circ, \quad x \leqslant \beta, \text{ где } \beta = \angle ABC.$$

Преобразуем полученное выражение функции S:

$$S = \frac{1}{2}\, bc\,[\sin(2x+\alpha)+\sin\alpha].$$

Учитывая область определения функции, получим следующий результат.

Если $2\beta+\alpha > 90^\circ$, то площадь прямоугольника имеет наибольшее значение $S_{\max} = \frac{1}{2}\, bc\,(1+\sin\alpha)$ при $2x+\alpha = 90^\circ$, т. е. $x = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Условия $x \leqslant \beta$ и $x+\alpha < 90^\circ$ в таком случае выполняются.

Если же $2\beta+\alpha \leqslant 90^\circ$, то функция S является возрастающей, принимая при $x=\beta$ наибольшее значение $S_{\max} = bc\sin(\alpha+\beta)\cos\beta$.

414. Решение. Пусть $AB=a$, $AK=x$, $BL=y$, $KL=z$. Площади треугольников AKN, BLM и CMN обозначим соответственно через S_1, S_2 и S_3, а площадь треугольника ABC — через S. Треугольники AKN и BLM подобны треугольнику ABC. Следовательно, $\frac{S_1}{S} = \frac{x^2}{a^2}$, $\quad \frac{S_2}{S} = \frac{y^2}{a^2}$.

Отношение площадей S_3 и S выразим через отношения отрезков:

$$\frac{S_3}{S} = \frac{CN \cdot CM}{CA \cdot CB} = \frac{BK}{AB} \cdot \frac{AL}{AB} = \frac{(y+z)(x+z)}{a^2}.$$

Таким образом,

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{S}{a^2}\,(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx).$$

Легко проверить истинность тождества

$$6(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx) = \\ = 4(x+y+z)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2.$$

Отсюда следует, что

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx \geqslant \frac{2}{3}\,(x+y+z)^2 = \frac{2}{3}\,a^2,$$

где равенство достигается лишь при $x=y=z$.

Итак, $S_1+S_2+S_3 \geqslant \frac{2}{3}\ S$.

Поэтому $S_{KLMN} \leqslant \frac{1}{3}\ S$. При $AK=KL=LB$ площадь четырехугольника $KLMN$ имеет наибольшее значение, равное $\frac{1}{3} S$.

415. Решение. Пусть в треугольник ABC вписан прямоугольник, имеющий с треугольником общий прямой угол C.

Пусть на гипотенузе AB лежит вершина M прямоугольника. Диагональ CM прямоугольника будет наименьшей, если она перпендикулярна гипотенузе AB треугольника, и, следовательно, длина ее будет равна высоте h треугольника, проведенной из вершины прямого угла C.

Рассмотрим теперь случай, когда две вершины K и L прямоугольника $KLMN$ лежат на гипотенузе. Обозначим $AB=c$, $KN=$ $=x$ и $KL=y$.

Так как треугольники CMN и ABC подобны, то $y=\frac{c}{h}\ (h-x)$.

Длину диагонали KM выразим как функцию от x:

$$KM^2=x^2+\frac{c^2}{h^2}\ (h-x)^2=\frac{c^2+h^2}{h^2}\left(x-\frac{c^2h}{c^2+h^2}\right)^2+\frac{c^2h^2}{c^2+h^2}.$$

Отсюда находим, что диагональ KM имеет наименьшее значение равное $d=\frac{ch}{\sqrt{c^2+h^2}}$, при $x=\frac{c^2h}{c^2+h^2}$ или $\frac{x}{y}=\frac{c}{h}$.

Так как $\frac{c}{\sqrt{c^2+h^2}}<1$, то $d<h$.

Сравнив наименьшие значения, полученные для каждого из двух возможных случаев, можем сделать вывод.

Из всех прямоугольников, вписанных в данный треугольник ABC с прямым углом C, наименьшую диагональ имеет прямоугольник $KLMN$, две вершины K и L которого лежат на гипотенузе AB и отношение сторон которого $\frac{KN}{KL}=\frac{c}{h}$.

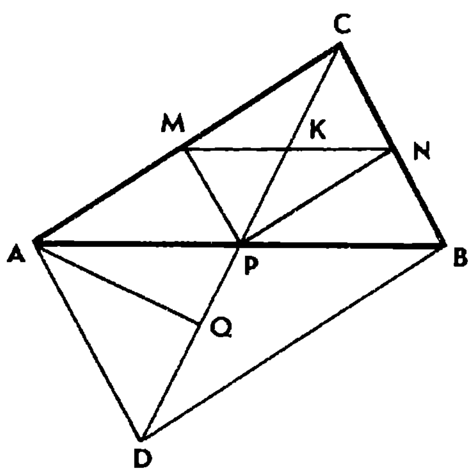


Рис. 98

416. Решение 1. Положим $\overline{AP}=x\overline{AB}$, где $0\leqslant x\leqslant 1$, и выразим вектор $\overline{MN}$ через $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ (рис. 98).

Так как $PN \parallel AC$ и $PM \parallel BC$, то

$$\frac{CN}{CB}=\frac{AP}{AB}=x, \qquad \frac{CM}{CA}=\frac{BP}{BA}=1-x.$$

Следовательно, $\overline{CN}=x\overline{CB}$, $\overline{CM}=$ $=(1-x)\ \overline{CA}$, поэтому

$$\overline{MN}=\overline{CN}-\overline{CM}=x\overline{CB}-(1-x)\overline{CA}=\overline{AC}+x(\overline{CA}+\overline{CB}),$$

т. е. $\overline{MN}=\overline{AC}+x\overline{CD}$, где CD — диагональ параллелограмма $ACBD$.

Пусть $x\overline{CD}=\overline{CQ}$, тогда $\overline{MN}=\overline{AC}+\overline{CQ}$, или $\overline{MN}=\overline{AQ}$.

Полученное векторное соотношение подсказывает чисто геометрическое завершение задачи. Когда точка P пробегает отрезок AB, то x меняется от нуля до 1, а точка Q пробегает отрезок CD. Следовательно, длина отрезка MN будет наименьшей, когда Q — ближайшая к A точка отрезка CD.

Заметив, что $AMNQ$ — параллелограмм и точка P лежит на прямой NQ, приходим к следующему построению точки P. Достроим данный треугольник до параллелограмма $ACBD$, найдем на его диагонали CD точку Q, ближайшую к A, и проведем через нее прямую, параллельную стороне AC. Точка пересечения этой прямой со стороной AB и есть искомая точка P.

Если оба угла ACD и ADC острые, то Q — проекция точки A на CD; если ACD — не острый угол, то Q совпадает с вершиной C, а P — с A; если же ADC — не острый угол, то Q совпадает с D, а точка P — с B.

Решение 2. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ACBD$ и обозначим точку пересечения отрезков MN и CD через K (см. рис. 98).

Пусть $CM=x$, $CN=y$, $\angle CKM=\varphi$, $\angle ACD=\alpha$ и $\angle BCD=\beta$.

По теореме синусов находим $MK=\dfrac{x\sin\alpha}{\sin\varphi}$, $KN=\dfrac{y\sin\beta}{\sin\varphi}$.

Следовательно, $MN=\dfrac{1}{\sin\varphi}(x\sin\alpha+y\sin\beta)$.

Поскольку треугольники APM и ABC подобны, то

$$\frac{y}{a}=\frac{b-x}{b}, \text{ или } y=a-\frac{a}{b}x.$$

По теореме синусов $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. Принимая во внимание полученные соотношения, преобразуем выражение для MN:

$$MN=\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}\left(x+\frac{b}{a}y\right)=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\left[x+\frac{b}{a}\left(a-\frac{a}{b}x\right)\right]$$

и получаем

$$MN=\frac{b\sin\alpha}{\sin\varphi}, \text{ где } \varphi>\beta \text{ и } 180^\circ-\varphi>\alpha.$$

Отсюда следует, что если $\alpha<90^\circ$ и $\beta<90^\circ$, то длина отрезка MN имеет наименьшее значение, равное $b\sin\alpha$, при $\varphi=90^\circ$, т. е. когда $MN\perp CD$.

417. а) 45°. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 406 (решение 2).

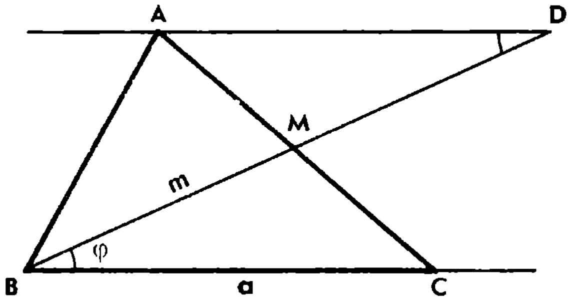


Рис. 99

б) 90°. Решение 1. Построим точку D, симметричную B относительно середины M стороны AC треугольника ABC (рис. 99). Обозначив $BC=a$, $BM=m$, $\angle CBM=\angle ADM=\varphi$, из треугольников ABD и AMD находим:

$$AB^2=a^2+4m^2-4am\cos\varphi,\qquad AM^2=a^2+m^2-2am\cos\varphi.$$

Из треугольника ABM $\operatorname{ctg} A=\frac{AB^2+AM^2-BM^2}{2S}$, где S — площадь треугольника ABC (см. задачу 214).

Подставляя в последнее выражение найденные значения AB и AM и учитывая, что $S=am\sin\varphi$, получим:

$$\operatorname{ctg} A=\frac{a^2+2m^2-3am\cos\varphi}{am\sin\varphi},\quad \text{или}\quad \operatorname{ctg} A=\frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{a}{m}+\frac{2m}{a}-3\cos\varphi\right).$$

На основании неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим получаем:

$$\operatorname{ctg} A\geqslant\frac{1}{\sin\varphi}\,(2\sqrt{2}-3\cos\varphi).$$

Равенство имеет место при $a=m\sqrt{2}$.

Если $m_b=\frac{3}{2}\,h_a$, то $\sin\varphi=\frac{h_a}{2m_b}=\frac{1}{3}$ и $\cos\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. При этом $\operatorname{ctg} A\geqslant 0$ и наибольшее значение угла A равно 90°, оно достигается при $a=m\sqrt{2}$.

Решение 2. Обозначим луч DA через d (см. рис. 99). При перемещении точки A вдоль луча d величина угла A треугольника ABC изменяется и согласно задаче 406 принимает наибольшее значение, когда A есть точка касания луча d с окружностью, проходящей через точки B и M. При этом по свойству касательной к окружности имеем: $DA^2=BD\cdot DM$, или $a=m\sqrt{2}$.

Найдем соответствующее значение угла A. Пусть $\angle DAM=\angle BCA=\gamma$ и $\angle BAD=\delta$. Тогда по формуле задачи 212 находим:

$$\operatorname{ctg}\gamma=\frac{\frac{a}{m}-\cos\varphi}{\sin\varphi}=\sqrt{2},\quad \operatorname{ctg}\delta=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{ctg} A=\operatorname{ctg}(\delta-\gamma)=0$ и $\angle A=90°$.

418. Решение. Имеем $h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$.

Но $\sqrt{(p-b)(p-c)}\leqslant\frac{(p-b)+(p-c)}{2}=\frac{a}{2}$.

Следовательно, $h_a\leqslant\sqrt{p(p-a)}$, причем равенство имеет место только при $b=c$.

419. 1) Решение. Воспользуемся формулой $l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$. Поскольку $\sqrt{bc}\leqslant\frac{b+c}{2}$, то $l_a\leqslant\sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}$.

Учитывая, что $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, получим: $l_a\leqslant\sqrt{p(p-a)}$.

Равенство имеет место только при $b=c$.

2) Решение. Применив неравенство $\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\geqslant\frac{b+c}{2}$, получим: $m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\geqslant\frac{(b+c)^2}{4}-\frac{a^2}{4}=p(p-a)$.

Неравенство обращается в равенство при $b=c$.

420. Решение. Воспользуемся равенством

$$a^2=(b-c)^2+4S\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Заменив $2S=ah_a$, получим $a^2=(b-c)^2+2ah_a\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, откуда $a\geqslant 2h_a\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, где равенство имеет место лишь при $b=c$.

Приведем геометрическое доказательство второго неравенства $a\geqslant 2l_a\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, представляющее собой усиление неравенства $a\geqslant 2h_a\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

Продолжим биссектрису AD треугольника ABC до пересечения с описанной окружностью в точке E. Проведем диаметр EM и обозначим через N точку пересечения его со стороной BC. Так как E — середина дуги BC, то $ME\perp BC$, $BN=NC=\frac{a}{2}$ и $MN=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$.

Заметим, что $AE\leqslant ME$ и $DE\geqslant NE$, поэтому

$$AD=AE-DE\leqslant ME-NE=MN.$$

Итак, $AD\leqslant MN$, т. е. $l_a\leqslant\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$, или $a\geqslant 2l_a\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда точки A и M совпадают, т. е. когда $b=c$.

421. Указание. Для доказательства геометрических неравенств воспользуйтесь формулами задачи 161 и числовыми неравенствами, приведенными в начале данного параграфа.

В частности, для доказательства неравенства $h_a+h_b+h_c \geqslant 9r$ воспользуйтесь тождеством $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$ и неравенством

$$(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right) \geqslant 9.$$

Аналогичным образом докажите, что

$$(r_a+r_b+r_c)^2 \geqslant 3(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a)=3p^2.$$

Во всех случаях равенство имеет место только для равностороннего треугольника.

422. Указание. Установите, что $m_a^2-m_b^2=\frac{3}{4}(b^2-a^2)$.

423. Указание. Используйте результат задачи 288. Установите, что

$$(m_a+m_b+m_c)^2 \leqslant 3(m_a^2+m_b^2+m_c^2)=\frac{9}{4}(a^2+b^2+c^2) \leqslant \left(\frac{9}{2}R\right)^2.$$

424. Указание. Пусть AA_1 и BB_1 — медианы треугольника ABC. Докажите, что если $a>b$, то $\angle AA_1B > \angle AB_1B$. Для этого около треугольника ABB_1 опишите окружность. Точку пересечения окружности с прямой A_1B_1, отличную от B_1, обозначьте через D. В треугольнике ABC угол A больше угла B, поэтому точка A_1 будет лежать между точками B_1 и D. Обозначьте $\angle AA_1B=\alpha$, $\angle AB_1B=\beta$, тогда $\alpha>\beta$.

Далее, к треугольникам ABA_1 и ABB_1 примените формулу 3 задачи 214. Из полученных соотношений

$$\left(m_a+\frac{a}{2}\right)^2=c^2+4S\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \qquad \left(m_b+\frac{b}{2}\right)^2=c^2+4S\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

выведите, что $m_a+\frac{a}{2}>m_b+\frac{b}{2}$.

425. Указание. Воспользуйтесь неравенствами задачи 421:

$$9r \leqslant p\sqrt{3} \leqslant \frac{9}{2}R.$$

427. Решение. Воспользуемся формулой $ab=2Rh_a$. Тогда имеем:

$$ab+bc+ca=2R(h_a+h_b+h_c).$$

Применим неравенства задачи 421:

$$h_a+h_b+h_c\geqslant 9r, \qquad 9R\geqslant 2p\sqrt{3}.$$

Следовательно, $ab+bc+ca\geqslant 18Rr\geqslant 4pr\sqrt{3}=4S\sqrt{3}$.

Равенство имеет место только при $a=b=c$.

428. б) Решение.

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{a^2+b^2}{2ab}\geqslant\frac{n-1}{n}.$$

429. Указание. Воспользуйтесь неравенством $h_c\leqslant l_c$ и формулой $l_c=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$.

431. 1) Решение 1. Сначала понизим степень синуса, пользуясь формулой $2\sin^2 A=1-\cos 2A$. Получим:

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\frac{1}{2}(3-\cos 2A-\cos 2B-\cos 2C).$$

Выполним дальнейшие преобразования. Учитывая, что

$$\cos(A+B)=\cos(180^\circ-C)=-\cos C,$$

имеем:

$$\begin{gathered}\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=2\cos(A+B)\cos(A-B)+\\ +2\cos^2 C-1=-2\cos C\,[\cos(A+B)+\cos(A-B)]-1=\\ =-1-4\cos A\cos B\cos C.\end{gathered}$$

Следовательно, $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$.

Попутно мы получили тождество

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C.$$

Теперь докажем истинность неравенства

$$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}.$$

Так как $\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]\leqslant\frac{1}{2}(1-\cos C)$, то $\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{2}(1-\cos C)\cos C\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$\left(\text{здесь мы использовали неравенство } ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$.

Равенство достигается только при $\angle A=\angle B=\angle C$, т. е. для равностороннего треугольника.

Решение 2. Докажем истинность неравенства

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\geqslant -\frac{3}{2}.$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\angle C\leqslant\angle B\leqslant\angle A$. Тогда имеем:

$$\begin{gathered}\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=\\=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1=\\=2\cos^2 C-2\cos C\cos(A-B)-1\geqslant\\\geqslant 2\cos^2 C-2\cos C-1=2\left(\cos C-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\geqslant-\frac{3}{2}.\end{gathered}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\angle A=\angle B=\angle C$, т. е. когда треугольник ABC равносторонний. Доказываемые неравенства справедливы в силу тождеств, полученных в решении 1.

Решение 3. Воспользуемся результатом задачи 288:

$$a^2+b^2+c^2\leqslant 9R^2.$$

В силу формулы $a=2R\sin A$ сразу получаем:

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leqslant\frac{9}{4}.$$

Решение 4. Если O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, то вектор $\overline{s}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$ является нулевым только для равностороннего треугольника.

Имеем $\overline{s}^2=(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})^2\geqslant 0.$

Так как $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=R^2\cos 2C$, $\overline{OA}\cdot\overline{OC}=R^2\cos 2B$ и $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=R^2\cos 2A$, то после возведения в квадрат получим:

$$3R^2+2R^2(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)\geqslant 0,$$

или $$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\geqslant-\frac{3}{2}.$$

Использовав формулу $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$, полученное неравенство приведем к виду $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leqslant\frac{9}{4}$.

2) Указание. Воспользуйтесь неравенством $r\leqslant\frac{1}{2}R$ и формулой $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

Доказываемые неравенства можно вывести также из соотношений

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C\geqslant -\frac{3}{2},$$

имеющих место для любого треугольника, в частности для треугольника $A_1B_1C_1$ с углами $A_1=90°-\frac{A}{2}$, $B_1=90°-\frac{B}{2}$, $C_1=90°-\frac{C}{2}$. Выполнив соответствующую подстановку, получим:

$$\cos A+\cos B+\cos C-1=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{2}.$$

3) Указание. Воспользуйтесь неравенством $2p\sqrt{3}\leqslant 9R$ (см. задачу 421) и формулой $a=2R\sin A$.

432. Решение. Воспользуемся соотношениями

$$a^2=b^2+c^2-4S\operatorname{ctg} A,$$

$$a^2=(b+c)^2-4S\operatorname{ctg}\frac{A}{2},$$

$$a^2=(b-c)^2+4S\operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

вытекающими из теоремы косинусов (см. задачу 214).

Из первого равенства находим $\operatorname{ctg} A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$.

Выразив таким же образом $\operatorname{ctg} B$ и $\operatorname{ctg} C$, сложим эти равенства почленно:

$$\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$$

Аналогично, используя два следующих соотношения, получаем:

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{(a+b+c)^2}{4S},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{4S}.$$

В силу того что для любых положительных чисел a, b, c имеют место неравенства

$$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2\geqslant$$
$$\geqslant a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2,$$

приходим к неравенствам

$$\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C \geqslant \frac{1}{3}\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Далее, используя результат задачи 427, получаем:

$$\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S} \geqslant \frac{ab+bc+ca}{4S} \geqslant \sqrt{3}.$$

Применим это неравенство к треугольнику с углами $90°-\frac{A}{2}$, $90°-\frac{B}{2}$, $90°-\frac{C}{2}$ и получим:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2} \geqslant \sqrt{3}.$$

Остается доказать тождество

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

Так как полусумма углов треугольника равна 90°, то

$$\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}, \text{ или } \operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-1}.$$

Отсюда и вытекает доказываемое равенство.

Легко проверить, что все неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда ABC — равносторонний треугольник.

433. Указание. Примените неравенства

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2} \geqslant 3\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) \geqslant 3\sqrt{3}$$

к треугольнику с углами $180°-2A$, $180°-2B$, $180°-2C$ (такой треугольник существует при условии, что A, B, C — острые углы).

434. Решение 1. Доказываемое неравенство вытекает из соотношений

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{4S} \geqslant \sqrt{3}$$

(см. решение задачи 432).

Решение 2. Воспользуемся неравенством задачи 421:

$$r_a+r_b+r_c \geqslant p\sqrt{3}.$$

Учитывая, что $r_a = p\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $r_b = p\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $r_c = p\operatorname{tg}\frac{C}{2}$, получим

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}.$$

Остается воспользоваться тождеством, приведенным в решении 1.

Решение 3. В силу тождества

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2},$$

доказанного в решении задачи 432, имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1.$$

Применив неравенство $(x+y+z)^2\geqslant 3(xy+yz+zx)$, справедливое для любых положительных чисел x, y, z, получим:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}.$$

Далее так же, как в решении 2.

435. Решение 1. Пусть ABC — данный треугольник. На лучах BC, CA, AB построим точки X, Y, Z, такие, что $BX=x$, $CY=y$, $AZ=z$. Воспользуемся неравенством

$$(\overline{BX}+\overline{CY}+\overline{AZ})^2\geqslant 0.$$

Поскольку $\angle(\overline{BX}, \overline{CY})=180°-\angle C$ и точно так же для углов между векторами $\overline{BX}$ и $\overline{AZ}$, $\overline{CY}$ и $\overline{AZ}$, то после возведения в квадрат левой части неравенства получим:

$$x^2+y^2+z^2-2yz\cos A-2zx\cos B-2xy\cos C\geqslant 0.$$

Выясним, при каком условии это неравенство обращается в равенство. Складывая векторы $\overline{BX}$, $\overline{CY}$, $\overline{AZ}$ по правилу многоугольника, получим ломаную, которая будет замкнутой тогда и только тогда, когда $\overline{BX}+\overline{CY}+\overline{AZ}=\overline{0}$. При этом получится треугольник, углы которого соответственно равны углам треугольника ABC, т. е. треугольник, подобный треугольнику ABC. Итак, равенство имеет место тогда и только тогда, когда x, y, z — длины сторон треугольника с углами A, B, C, т. е. при условии, что выполняется равенство $\frac{x}{\sin A}=\frac{y}{\sin B}=\frac{z}{\sin C}$.

Решение 2. Легко проверить, что если $\alpha+\beta+\gamma=180°$, то имеет место тождество

$$x^2+y^2+z^2-2yz\cos\alpha-2zx\cos\beta-2xy\cos\gamma=$$
$$=(x\cos\beta+y\cos\alpha-z)^2+(x\sin\beta-y\sin\alpha)^2,$$

из которого и вытекает доказываемое неравенство.

Равенство

$$x^2+y^2+z^2-2yz\cos\alpha-2zx\cos\beta-2xy\cos\gamma=0$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{y}{\sin\beta} \text{ и } z=x\cos\beta+y\cos\alpha,$$

т. е. когда x, y, z — длины сторон треугольника с углами α, β, γ.

436. Решение. Обозначим $\angle BAO=x$, $\angle CBO=y$, $\angle ACO=z$. Тогда имеем:

$$2p=a+b+c=OA[\cos x+\cos(A-x)]+$$
$$+OB[\cos y+\cos(B-y)]+OC[\cos z+\cos(C-z)].$$

Поскольку $\cos x+\cos(A-x)=2\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{A}{2}-x\right)\leqslant 2\cos\frac{A}{2}$ и две другие суммы преобразуются аналогичным образом, то

$$p\leqslant OA\cos\frac{A}{2}+OB\cos\frac{B}{2}+OC\cos\frac{C}{2}.$$

При этом равенство достигается тогда и только тогда, когда $x=\frac{A}{2}$, $y=\frac{B}{2}$, $z=\frac{C}{2}$, т. е. когда точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

437. Решение. В треугольниках BOC, COA и AOB высоты, проведенные из точки O, равны соответственно r_1, r_2 и r_3. Обозначим $\angle BOC=2\alpha$, $\angle COA=2\beta$, $\angle AOB=2\gamma$. В силу задачи 419 и неравенства $h_a\leqslant l_a$ имеем:

$$r_1\leqslant\sqrt{R_2R_3}\cos\alpha,\qquad r_2\leqslant\sqrt{R_1R_3}\cos\beta,\qquad r_3\leqslant\sqrt{R_1R_2}\cos\gamma.$$

Остается доказать, что

$$R_1+R_2+R_3\geqslant 2(\sqrt{R_2R_3}\cos\alpha+\sqrt{R_1R_3}\cos\beta+\sqrt{R_1R_2}\cos\gamma).$$

Положим $\sqrt{R_1}=x$, $\sqrt{R_2}=y$, $\sqrt{R_3}=z$. Тогда получим:

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2(yz\cos\alpha+zx\cos\beta+xy\cos\gamma),$$

где $\alpha+\beta+\gamma=180°$. Мы пришли к неравенству, доказанному ранее (см. задачу 435).

Равенство достигается лишь тогда, когда $\alpha=\beta=\gamma$ и $R_1=$

$=R_2=R_3$, т. е. лишь для равностороннего треугольника ABC и его центра O.

439. Указание. Треугольники A_1B_1C и ABC подобны. Следовательно, $\angle CA_1B_1=\angle BAC$. Аналогично $\angle BA_1C_1=$ $=\angle BAC$.

Если ABC — тупоугольный треугольник и $\angle C>90°$, то H — центр вневписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, касающейся стороны A_1B_1.

440. Указание. Воспользуйтесь формулой $a=2R\sin A$, примените ее к треугольникам ABC и ABH.

441. Указание. Пусть $\triangle ABC$ — данный, H — его ортоцентр, A_0, B_0, C_0 — середины сторон, A_1, B_1, C_1 — основания высот, A_2, B_2, C_2 — середины отрезков AH, BH и CH (рис. 100).

Установите, что $A_0B_0A_2B_2$ и $A_0C_0A_2C_2$ — прямоугольники. Окружность, построенная на отрезке C_0C_2 как на диаметре, проходит через вершины этих прямоугольников, а также через точку C_1, поскольку $\angle C_2C_1C_0=90°$. Точно так же она проходит через точки A_1 и B_1.

442. Указание. Центр окружности девяти точек является центром симметрии треугольников $A_0B_0C_0$ и $A_2B_2C_2$ (см. рис. 100). Следовательно, ортоцентр H треугольника $A_2B_2C_2$ симметричен ортоцентру H' треугольника $A_0B_0C_0$. А так как H' есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC, то она совпадает с центром O описанной около треугольника ABC окружности.

443. Указание. При гомотетии с центром H и коэффициентом $k=2$ середины A_2, B_2, C_2 отрезков AH, BH, CH переходят в точки A, B, C, а окружность девяти точек — в окружность, описанную около треугольника ABC. Следовательно, при этой гомотетии треугольник $A_1B_1C_1$ переходит в треугольник $A'B'C'$.

445. Указание. Пусть данные точки A_1, B_1, C_1 — основания высот искомого треугольника ABC. Постройте точку H пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$. Через точки A_1, B_1, C_1 проведите прямые перпендикулярно соответственно отрезкам HA_1, HB_1 и HC_1. Докажите, что точки пересечения этих прямых — вершины искомого треугольника ABC.

Задача имеет четыре решения, так как точки A_1, B_1 и C_1 являются также основаниями высот треугольников ABH, BCH и CAH.

446. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 444.

447. Решение 1. Докажем, что касательные к окружностям в их общей точке B_1 перпендикулярны. Пусть CC_1 — высота треугольника ABC и точка H — его орто-

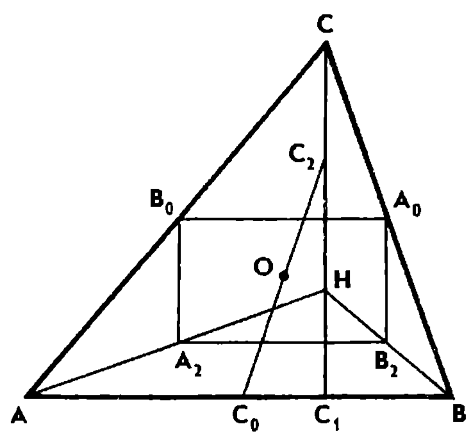


Рис. 100

центр. Если M — середина стороны AB, то $B_1M=AM$ и $\angle AB_1M=\angle A$; если N — середина отрезка CH, то $\angle CB_1N=$ $=\angle ACC_1=90°-\angle A$. Отсюда следует, что $\angle AB_1M+\angle CB_1N=$ $=90°$. Значит, $\angle MB_1N=90°$, т. е. MB_1 и NB_1 — перпендикулярные касательные к окружностям в их общей точке B_1, а потому окружности ортогональны.

448. Указание. Пусть R — радиус описанной окружности, α, β, γ — величины углов треугольника ABC, p и p_1 — полупериметры треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, S и S_1 — их площади. Установите, что

$$p=R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma),$$

$$p_1=R\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$S=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

$$S_1=2R^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

449. $a^2+b^2=5c^2$.

450. Указание. Воспользуйтесь формулами

$$\operatorname{ctg} A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S} \quad \text{и} \quad m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}.$$

452. Решение 1. Пусть $\angle A<\angle B$, тогда $BC<AC$ и $\varepsilon=$ $=\angle BMC<90°$. По теореме синусов находим:

$$\frac{AM}{CM}=\frac{\sin(\varepsilon-A)}{\sin A}, \quad \frac{BM}{CM}=\frac{\sin(\varepsilon+B)}{\sin B}.$$

Учитывая, что $AM=BM$, получаем: $\dfrac{\sin(\varepsilon-A)}{\sin A}=\dfrac{\sin(\varepsilon+B)}{\sin B}$.

Разделив обе части этого равенства на $\sin\varepsilon$, будем иметь:

$$\operatorname{ctg} A-\operatorname{ctg}\varepsilon=\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg}\varepsilon, \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg}\varepsilon=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg} A-\operatorname{ctg} B).$$

Решение 2. Пусть CH — высота треугольника ABC и $\angle A<\angle B<90°$. Положим $CH=1$. Тогда $AH=\operatorname{ctg} A$, $BH=$ $=\operatorname{ctg} B$, $MH=\operatorname{ctg}\varepsilon$. Так как $AM=AH-MH$, $BM=BH+MH$ и $AM=BM$, то

$$\operatorname{ctg} A-\operatorname{ctg}\varepsilon=\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg}\varepsilon, \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg}\varepsilon=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg} A-\operatorname{ctg} B).$$

Легко проверить, что полученная формула остается в силе и тогда, когда $\angle B\geqslant 90°$.

453. $a^2+b^2=2c^2$, где c — средняя по величине сторона треугольника. Решение. Пусть $A_1B_1C_1$ — треугольник, сторонами которого служат медианы данного треугольника ABC (треугольник $A_1B_1C_1$ всегда можно построить). Если треугольники

ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и AB — средняя по величине сторона треугольника ABC, то $\frac{m_a}{b}=\frac{m_b}{a}=\frac{m_c}{c}$

(поскольку меньшей стороне треугольника соответствует большая медиана).

На основании тождества задачи 161

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\ (a^2+b^2+c^2)$$

заключаем, что коэффициент подобия равен $\sqrt{\frac{3}{4}}$. Значит, $m_c^2=\frac{3}{4}\ c^2$. В силу формулы $m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$ это равенство равносильно соотношению $a^2+b^2=2c^2$.

455. Указание. *I способ.* Пусть медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Воспользуйтесь результатом задачи 452 и, обозначив $\angle AA_1C=\alpha$, $\angle BB_1C=\beta$, докажите, что

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{2}\ (\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B-2\operatorname{ctg}C)=\frac{2c^2-a^2-b^2}{2S}.$$

II способ. Используя соотношение, связывающее отрезки хорд A_1B_1 и CM окружности, описанной около четырехугольника A_1MB_1C, докажите, что $m_c^2=\frac{3}{4}\ c^2$.

456. Указание. Воспользуйтесь подобием треугольников CC_1B и BC_1M, где CC_1 — медиана треугольника ABC.

457. а) Решение. Пусть CK — биссектриса треугольника ABC и O — центр вписанной в треугольник окружности. Тогда AO — биссектриса треугольника ACK. Согласно свойству биссектрисы угла треугольника

$$\frac{AK}{BK}=\frac{b}{a},\ \text{или}\ AK=kb,\ BK=ka,\ \text{где}\ k>0.$$

А так как $c=k(a+b)$, то $k=\frac{c}{a+b}$.

Поскольку AO — биссектриса треугольника ACK, то

$$\frac{CO}{OK}=\frac{AC}{AK}=\frac{1}{k}=\frac{a+b}{c}.$$

б) $a:b:c=4:3:5$. Указание. Используя результат задачи пункта а), составьте систему уравнений:

$$\begin{cases} b+c=2a, \\ a+c=3b. \end{cases}$$

458. Решение. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC, $\angle OA_1C=\alpha$, $\angle OB_1C=\beta$.

В силу формулы задачи 452 имеем:

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-2\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right).$$

Если вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны BC в точке K, то $CK=p-c$ и $CK=r\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$. Отсюда

$$\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{p-c}{r}.$$

Аналогично $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r}$ и $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=\frac{p-b}{r}$.

Таким образом, $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{2c-a-b}{2r}$. Отсюда следует, что если $a+b=2c$, то $\alpha+\beta=180°$, и, обратно, если $\alpha+\beta=180°$, то $a+b=2c$, т. е. верно и требуемое утверждение, и ему обратное.

459. $c=\frac{a+b}{2}$.

461. а) Вершина большего из углов A и B треугольника ABC. Указание. Пусть расстояния от точки M, лежащей на стороне AB треугольника ABC, до двух других сторон равны x и y. Тогда $2S=ax+by$, где S — площадь треугольника ABC.

Отсюда видно, что если $a=b$, то $x+y=h_a$, т. е. сумма расстояний от точки M до сторон BC и AC постоянна и не зависит от положения точки M на стороне AB.

Далее установите, что если $a<b$, то $x+y\geqslant h_a$, причем равенство имеет место только тогда, когда точка M совпадает с вершиной A треугольника.

б) Вершина наибольшего из углов при условии, что треугольник разносторонний.

462. Указание. Воспользуйтесь следующей формулой $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ и тождеством $\cos A+\cos B+\cos C=$ $=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

463. Решение. Сумма расстояний от центра описанной окружности до сторон треугольника заключена между наименьшей и наибольшей высотами (задача 172). Следовательно, в силу предыдущей задачи получаем $R+r\leqslant h_a$.

464. Решение. Имеем:

$$R+r=R\left(1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=R(\cos A+\cos B+\cos C).$$

Использовав формулу $a=2R\sin A$, приведем доказываемое неравенство к виду

$$(\cos A+\cos B+\cos C)^2-(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)\leqslant 0.$$

Преобразуем левую часть:

$$2\cos A\cos B+2\cos C(\cos A+\cos B)+\cos 2A+\cos 2B+$$
$$+2\cos^2 C-1=$$
$$=\cos(A-B)+\cos(A+B)+2\cos C(\cos A+\cos B)+$$
$$+2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1=$$
$$=\cos(A-B)-1-\cos C[1-2\cos A-2\cos B+2\cos(A-B)+$$
$$+2\cos(A+B)]=$$
$$=\cos(A-B)-1-\cos C(1-2\cos A-2\cos B+4\cos A\cos B=$$
$$=\cos(A-B)-1-\cos C(1-2\cos A)(1-2\cos B).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что либо оба угла A и B не меньше $60°$, либо оба они не больше $60°$, тогда

$$(1-2\cos A)(1-2\cos B)\geqslant 0.$$

Кроме того, $\cos(A-B)-1\leqslant 0$ и $\cos C\geqslant 0$ (треугольник не тупоугольный). Следовательно, полученное выражение неположительно.

Равенство достигается только для равностороннего или равнобедренного прямоугольного треугольника. Действительно, из приведенных выше выкладок следует, что для достижения равенства необходимо и достаточно, чтобы $\cos(A-B)=1$ (т. е. $\angle A=\angle B$) и либо $\cos C=0$ (т. е. $\angle C=90°$), либо $\cos A=\cos B=\frac{1}{2}$ (т. е. $\angle A=\angle B=60°$).

466. Указание. Выразив двумя способами отношение площадей ACM и BCN, ACN и BCM, установите, что

$$\frac{AM}{BN}=\frac{AC\cdot CM}{BC\cdot CN},\qquad \frac{AN}{BM}=\frac{AC\cdot CN}{BC\cdot CM}.$$

Перемножьте эти два равенства почленно и, учитывая, что $AM=BM$, получите требуемое соотношение.

Обратное предложение докажите способом от противного.

467. $AN=\frac{b^2c}{a^2+b^2}$, $BN=\frac{a^2c}{a^2+b^2}$, $CN=\frac{ab\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{a^2+b^2}$ или $CN=\frac{2ab}{a^2+b^2}m_c$, где m_c — длина медианы CM.

468. Решение. Симедианы треугольника ABC пересекаются в одной точке P согласно теореме Чевы (см. задачу 352).

Пусть CN — симедиана треугольника ABC. Расстояния от точки P до сторон BC и AC обозначим через x и y, расстояния от точки N до этих сторон — через h_1 и h_2. Тогда $\frac{x}{y}=\frac{h_1}{h_2}$. Выразив двумя способами отношение площадей треугольников BCN и ACN, получим: $\frac{BN}{AN}=\frac{ah_1}{bh_2}$.

С другой стороны, $\frac{BN}{AN}=\frac{a^2}{b^2}$.

Следовательно, $\frac{h_1}{h_2}=\frac{a}{b}$ и $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$.

469. Указание. Примените теорему Ван-Обеля (см. задачу 353).

470. Решение 1. Пусть расстояния от точки N стороны AB треугольника ABC до сторон BC и AC равны соответственно x и y. Тогда площадь S треугольника ABC выражается через x и y формулой $2S=ax+by$. Отсюда

$$y=\frac{2S-ax}{b}.$$

Следовательно, сумма $x^2+y^2=\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)x^2-\frac{4aS}{b^2}x+\frac{4S^2}{b^2}$ имеет наименьшее значение при $x=\frac{2aS}{a^2+b^2}$ и $y=\frac{2bS}{a^2+b^2}$. Так как $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$ и $\frac{S_{BCN}}{S_{ACN}}=\frac{BN}{AN}=\frac{ax}{by}$, то $\frac{BN}{AN}=\frac{a^2}{b^2}$.

Значит, точка N, удовлетворяющая условию,— основание симедианы CN треугольника.

Решение 2. Легко проверить справедливость тождества

$$(ax+by)^2+(bx-ay)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2).$$

Если x и y — расстояния от некоторой точки стороны AB треугольника ABC до сторон BC и AC, то $ax+by=2S$.

Учитывая это, получаем $x^2+y^2\geqslant\frac{4S^2}{a^2+b^2}$, причем равенство достигается только при $bx=ay$, или $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$.

Значит, искомая точка — основание симедианы треугольника, проведенной из вершины C.

471. Точка Лемуана (см. задачу 468). Указание. Воспользуйтесь легко проверяемым тождеством

$$(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2=$$
$$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2).$$

472. а) Решение. Введем на плоскости прямоугольную систему координат с началом в середине стороны AB так, чтобы вершины треугольника ABC имели координаты $A(-1;\ 0)$,

$B(1;\ 0)$ и $C(a;\ b)$. Если $M(x;\ 0)$ — произвольная точка прямой AB, то

$$MA^2+MB^2+MC^2=3\left(x-\frac{1}{3}\ a\right)^2+\frac{2a^2}{3}+b^2+2.$$

Следовательно, сумма квадратов расстояний имеет наименьшее значение при $x=\frac{1}{3}a$.

б) Центроид M треугольника. Указание. Выберите на плоскости прямоугольную систему координат так же, как в случае а). Тогда

$$MA^2+MB^2+MC^2=3\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{b}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\ (a^2+b^2+3).$$

473. Решение 1. Пусть больший угол C треугольника ABC меньше $120°$ (рис. 101). В таком случае окружности, описанные около треугольников BCA_1 и CAB_1, кроме точки C, имеют еще одну общую точку P, лежащую внутри треугольника. Так как $\angle A_1=\angle B_1=60°$, то $\angle BPC=\angle CPA=120°$, а также и $\angle APB=120°$. Таким образом, стороны треугольника ABC видны из точки P под равными углами. Поскольку $\angle APB+\angle C_1=$ $=180°$, то окружность, описанная около треугольника ABC_1, также проходит через точку P.

Докажем, что точка P лежит на отрезке AA_1. Действительно, так как $\angle APB=120°$ и по свойству вписанных углов $\angle A_1PB=$ $=60°$, то их сумма равна $180°$. Точно так же доказывается, что прямые BB_1 и CC_1 также проходят через точку P.

В случае, когда угол C треугольника ABC больше $120°$, доказательство аналогично, но точка P лежит вне треугольника.

Если же $\angle C=120°$, то точки A, A_1 и C лежат на одной прямой, так же как и точки B, B_1 и C. Окружности, описанные около треугольников BCA_1 и CAB_1, касаются друг друга в точке C (точка C лежит на линии центров этих окружностей). Ясно, что через точку C проходит и третья окружность, описанная около треугольника ABC_1.

Решение 2. При повороте вокруг точки C на $60°$ точка B перейдет в точку A_1, точка B_1 — в точку A и отрезок BB_1 — в отрезок A_1A. Значит, $A_1A=BB_1$ и угол между прямыми BB_1 и AA_1 равен углу поворота: если P — точка пересечения этих прямых, то $\angle BPA_1=\angle B_1PA=60°$.

Отсюда следует, что точка P лежит на каждой из окружностей, описанных около треугольников BCA_1, CAB_1 и ABC_1. Так же как в решении 1, доказывается, что прямая CC_1 тоже проходит через точку P.

474. а) Указание. *I способ.* Пусть прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке P. Так как все углы треугольника ABC мень-

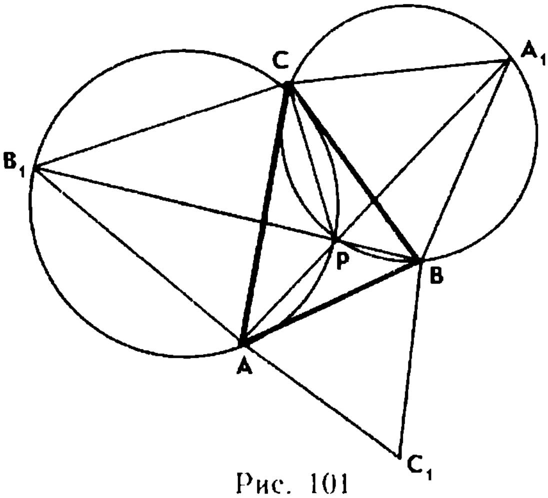


Рис. 101

ше 120°, то точка P лежит внутри треугольника ABC (см. рис. 101).

Примените поворот вокруг точки B на 60°, при котором точка A перейдет в точку C_1, и докажите, что точка P перейдет в точку P_1, лежащую на отрезке CC_1.

Следовательно, $PA+PB+PC=CC_1$. Далее покажите, что при указанном повороте любая точка M, лежащая внутри треугольника, переходит в такую точку M_1, что

$$MA+MB+MC=C_1M_1+M_1M+MC>CC_1.$$

Таким образом, сумма расстояний от точки P до вершин треугольника ABC является наименьшей. Из решения предыдущей задачи следует, что точка P лежит внутри треугольника и $\angle BPC=\angle CPA=\angle APB=120°$.

II способ. Пусть P — точка, лежащая внутри треугольника ABC, из которой все стороны видны под углом 120°. Через вершины треугольника ABC проведите прямые, перпендикулярные отрезкам PA, PB и PC. Точки пересечения этих прямых являются вершинами равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$. Затем воспользуйтесь результатом задачи 172.

475. Решение. Из решения предыдущей задачи следует, что

$$PA+PB+PC=CC_1,$$

где P — точка Торричелли и C_1 — вершина равностороннего треугольника ABC_1 (см. рис. 101). Длину отрезка CC_1 найдем из треугольника ACC_1 по теореме косинусов:

$$CC_1^2=b^2+c^2-2bc\cos(A+60°)=$$
$$=b^2+c^2-bc\cos A+\sqrt{3}\,bc\sin A=b^2+c^2-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+2S\sqrt{3}.$$

Итак, $CC_1^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}+2S\sqrt{3}$.

476. Решение. Из условия задачи следует, что A — больший угол треугольника ABC. Если $\angle A<120°$, то, используя результат предыдущей задачи и неравенство $a^2+b^2+c^2\geqslant 4S\sqrt{3}$ (см. задачу 434), получим:

$$k_1+k_2+k_3\geqslant\sqrt{\frac{1}{2}\,(a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3})}\geqslant\sqrt{4S\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{abc\sqrt{3}}{R}}.$$

Но сторона a наибольшая, поэтому

$$a \geqslant R\sqrt{3} \text{ и } k_1+k_2+k_3 \geqslant \sqrt{3bc}.$$

Если же $\angle A \geqslant 120°$, то наименьшее значение достигается в вершине A и поэтому $k_1+k_2+k_3 \geqslant b+c \geqslant 2\sqrt{bc} > \sqrt{3bc}$. Таким образом, для произвольного треугольника ABC имеем:

$$k_1+k_2+k_3 \geqslant \sqrt{3bc},\ a \geqslant b,\ a \geqslant c.$$

477. Указание. Задача решается аналогично задаче 473.

478. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 477.

479. а) Решение. Обозначим $NA=x$, $NB=y$, $NC=z$. По теореме косинусов имеем:

$$x^2=z^2+b^2-2bz\cos\varphi,$$
$$y^2=x^2+c^2-2cx\cos\varphi,$$
$$z^2=y^2+a^2-2ay\cos\varphi.$$

Сложив эти равенства почленно, получим:

$$a^2+b^2+c^2=2(cx+ay+bz)\cos\varphi.$$

Воспользуемся еще равенством, выражающим площадь S треугольника ABC: $2S=(cx+ay+bz)\sin\varphi$.

Отсюда находим $\operatorname{ctg}\varphi=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

Учитывая, что $\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$ (см. решение задачи 432), получаем $\operatorname{ctg}\varphi=\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C$.

480. Указание. Рассмотрите треугольники ACC_1 и AHC_1.

481. Указание. Проведите перпендикуляр A_1K к высоте CC_1. Установите, что $\dfrac{AC_1}{BC_1}=\dfrac{1}{2}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, или докажите, что $AB=BA_1$.

482. $\sin C=\cos A \operatorname{tg} B$. Указание. Из условия задачи следует, что $AC_1=b\cos A$, $C_1B=a\cos B$, $\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{a}{c}$. Используя теорему Чевы, получите равенство $b\cos A=c\cos B$, которое равносильно соотношению $\sin C=\cos A \operatorname{tg} B$.

483. Указание. Около четырехугольника $CEDF$ опишите окружность.

484. 1) Решение. Треугольники ABC, ACD и BCD подобны. Следовательно,

$$\frac{r_1}{r}=\frac{b}{c},\ \frac{r_2}{r}=\frac{a}{c}.$$

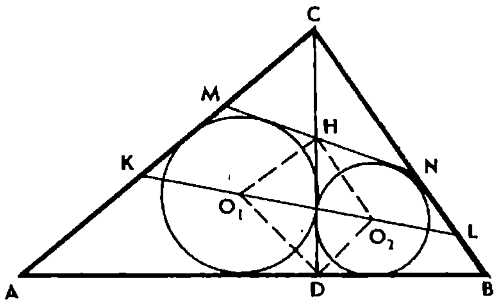


Рис. 102

Обе части каждого равенства возведем в квадрат и сложим их. Учитывая, что $a^2+b^2=c^2$, получим $r_1^2+r_2^2=r^2$.

2) Указание. Воспользуйтесь формулой $2r=a+b-c$.

485. Решение. Рассмотрим четырехугольник HO_1DO_2 (рис. 102). Так как HO_1 и HO_2 — биссектрисы смежных углов, то $\angle O_1HO_2=90°$. Точно так же $\angle O_1DO_2=90°$. Значит, вершины четырехугольника HO_1DO_2 лежат на окружности с диаметром O_1O_2 и $\angle HO_1O_2=\angle HDO_2=45°$. Отсюда следует, что треугольник HO_1O_2 является прямоугольным равнобедренным.

Рассмотрим треугольник DO_1O_2. Из подобия треугольников ACD и BCD имеем:

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{b}{a}.$$

Но $DO_1=r_1\sqrt{2}$, $DO_2=r_2\sqrt{2}$, поэтому $\frac{DO_1}{DO_2}=\frac{b}{a}$.

Следовательно, прямоугольный треугольник DO_1O_2 подобен треугольнику ABC и $\angle O_2O_1D=\angle A=\alpha$.

Из подобия треугольников ABC и BCD следует, что $\angle BCD=\angle A=\alpha$. По свойству вписанных углов $\angle O_2HD=\angle O_2O_1D=\alpha$. Значит, $HO_2\|BC$ (аналогично $HO_1\|AC$). Теперь ясно, что $\angle CNM=\angle O_2HD=\alpha$.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1) треугольники CMN и ABC подобны;

2) треугольники CKL и HO_1O_2 также подобны, а так как $HO_1=HO_2$, то $CK=CL$;

3) $CH=HM=HN$.

Кроме того, $CH=HO_1$, так как $HO_1\|AC$ и CO_1 — биссектриса угла ACD. Следовательно, точки C, M, N, O_1 и O_2 лежат на окружности с центром H. Вычислим радиус этой окружности. Из треугольника DO_1O_2 по теореме Пифагора имеем:

$$O_1O_2=\sqrt{2(r_1^2+r_2^2)}.$$

Учитывая, что $r_1^2+r_2^2=r^2$ (см. задачу 484), получаем:

$$O_1O_2=r\sqrt{2} \text{ и } HO_1=HO_2=r.$$

Примечание. Применив теорему Птолемея к вписанному четырехугольнику HO_1DO_2, легко получить соотношение $HD=r_1+r_2$. Тем самым будет доказано, что $CD=r+r_1+r_2$ (см. задачу 484).

486. Решение. 1) Пусть O — центр данной полуокружности; r_1 и r_2 — радиусы окружностей, вписанных в криволинейные треугольники ACD и BCD; a, b, c — стороны треугольника ABC (рис. 103).

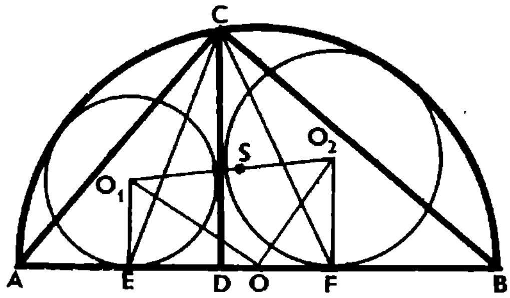


Рис. 103

Положим $AD=m$, $BD=n$, $CD=h$. Тогда имеем:

$$AO=\frac{m+n}{2}, \quad OE=\frac{n-m}{2}+r_1,$$
$$OO_1=\frac{m+n}{2}-r_1.$$

Применив теорему Пифагора к треугольнику OO_1E, получим:

$$\left(\frac{m+n}{2}-r_1\right)^2-\left(\frac{n-m}{2}+r_1\right)^2=r_1^2, \text{ или } r_1^2+2nr_1-mn=0.$$

Учитывая, что $mn=h^2$, находим положительный корень уравнения: $r_1=-n+\sqrt{n^2+h^2}$.

А так как $n^2+h^2=a^2$, то $r_1=a-n$.

Аналогично $r_2=b-m$.

Следовательно, $r_1+r_2=a+b-(m+n)=a+b-c=2r$.

2) Из формулы $r_1=a-n$ следует, что $r_1+n=a$, или $BE=BC$. Аналогично $AF=AC$. Пусть $\angle A=\alpha$, тогда $\angle ACF=90°-\frac{\alpha}{2}$, $\angle ACD=90°-\alpha$, $\angle DCF=\frac{\alpha}{2}$. Поскольку $\angle BCD=\alpha$, то CF — биссектриса угла BCD.

Аналогично докажем, что CE — биссектриса угла ACD.

Заметим, что $\angle ECF=45°$.

3) Пусть ST — средняя линия трапеции EO_1O_2F. Тогда

$$ST=\frac{r_1+r_2}{2}=r.$$

Так как $EF=r_1+r_2=2r$, то $ST=ET=FT=r$. Отсюда следует, что $\angle ESF=90°$.

Построим окружность с центром S радиуса $r\sqrt{2}$. Эта окружность пройдет через точки E и F, а также через вершину C, так как $\angle ESF=90°$ и $\angle ECF=45°$.

Итак, $SC=SE=SF=r\sqrt{2}$.

4) Точка S одинаково удалена от сторон AB и AC, поскольку $AC=AF$ и $SC=CF$. Она одинаково удалена и от сторон AB и BC. Значит, S — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

5) Окружность, описанная около треугольника ACE, проходит через точку S, так как $\angle ACS=45°$ и $\angle AES=135°$.

Аналогично получим, что окружность, описанная около тре-

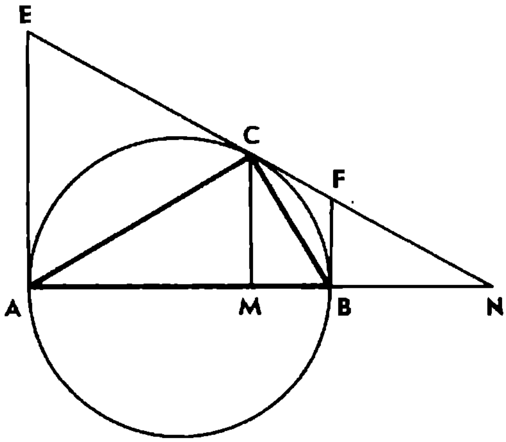


Рис. 104

угольника BCF, также проходит через точку S.

487. Указание. Установите, что радиус r_1 искомой окружности выражается через стороны данного прямоугольного треугольника формулой $r_1=a+b-c$.

488. Решение 1. Для определенности будем считать, что $AC>BC$ (рис. 104). Обозначим $\angle A=\alpha$. Тогда $\angle BCM=\angle BCN=\alpha$ и $\angle ACN=90°+\alpha$. Выразив отношение площадей треугольников ACM и BCM, ACN и BCN двумя способами, получим:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AC\cos\alpha}{BC\sin\alpha},\ \frac{AN}{NB}=\frac{AC\cos\alpha}{BC\sin\alpha}.\ \text{Значит, }\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NB}.$$

Решение 2. Проведем касательные к окружности в точках A и B. Обозначим точки пересечения их с прямой CN через E и F. Имеем: $\frac{AM}{MB}=\frac{EC}{CF}$, $\frac{AN}{NB}=\frac{AE}{BF}$.

Но $AE=EC$ и $BF=CF$. Следовательно, $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NB}$.

491. $\operatorname{arctg} 3$, $\operatorname{arctg} 2$, $45°$. Указание. Найдите угол C треугольника ABC, используя подобие треугольников ACM и BCN.

492. 1.

493. 9,6. Указание. Установите, что $PQ=2AB\cos C$.

494. $\angle A=\angle B=\operatorname{arctg} 3$, $\angle C=\arccos\frac{4}{5}$. Указание. Обозначив $BC=a$, $AE=m$, $A_1E=x$, установите, что

$$x=\frac{a^2}{4m},\ m^2=\frac{9}{20}a^2.$$

Затем примените теорему косинусов к треугольнику ACE.

495. Решение. Обозначим $A_1E=x$, тогда $m_ax=\frac{a^2}{4}$.

Следовательно, $AA_1=m_a+\frac{a^2}{4m_a}=\frac{b^2+c^2}{2m_a}$.

Аналогично $BB_1=\frac{a^2+c^2}{2m_b}$.

Таким образом, имеем: $AA_1^2-BB_1^2=\frac{(b^2+c^2)^2}{4m_a^2}-\frac{(a^2+c^2)^2}{4m_b^2}$.

Выразим медианы m_a и m_b через стороны треугольника и, выполнив необходимые преобразования, получим:

$$AA_1^2-BB_1^2=\frac{(a^2-b^2)(a^4+b^4-a^2b^2-c^4)}{16m_a^2m_b^2}.$$

Отсюда следует, что $AA_1 = BB_1$ тогда и только тогда, когда $a = b$ или $c^4 = a^4 - a^2b^2 + b^4$.

496. Пусть $AC = BC$, тогда $m_a = m_b = \frac{14}{9} R$, $m_c = \frac{8}{9} R$. Указание. Обозначив $\angle C = 2x$, получим уравнение

$\cos x (\sqrt{5 - 4\cos 2x} + \cos x) = 2$, $0° < x < 90°$, откуда $\cos x = \frac{2}{3}$.

497. Указание. Воспользуйтесь формулами

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \text{ и } a = 2R \sin A.$$

Докажите, что $m_c^2 - R^2 = R^2 \cos C [\cos C + 2\cos(A - B)]$.

498. $OM = ON = 1$. Указание. Установите, что $\angle MON = 90° + \frac{1}{2} \angle C$.

499. $\sqrt{6}$; $105°$.

500. $1 + \sqrt{17}$. Решение. Пусть $BM = m$, $CM = n$ и $AB = 2a$ (рис. 105). В силу свойства биссектрисы треугольника

$$\frac{2a}{m + n} = \frac{m}{n}, \text{ или } 2an = m(m + n).$$

Так как BL — касательная к окружности, а BC — секущая, то

$$a^2 = m(m + n).$$

Из полученных равенств находим $n = \frac{a}{2}$, $m = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} \cdot a$.

При $a = 4$ получим $BC = m + n = 1 + \sqrt{17}$.

501. $AC = \frac{\sqrt{13}}{2} R$, $AB = \frac{\sqrt{39}}{4} R$. Указание. Если $\angle BAC = \alpha$, то $\angle AOC = 2\alpha$ и $AC = 2R \sin \alpha$. Воспользуйтесь свойством касательной: $AB^2 = BC \cdot BD$.

Пусть $AB = c$, $CD = x$, тогда $BD = 3x$.

Получим $c^2 = 12x^2$, $\cos \alpha = \frac{c}{8x} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

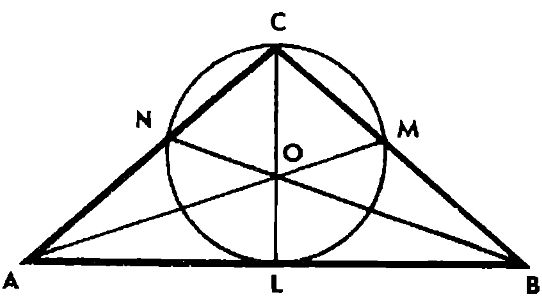


Рис. 105

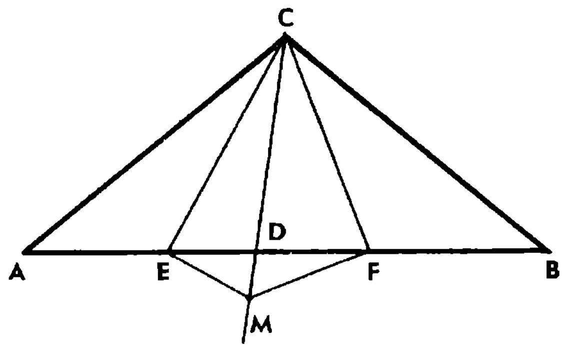


Рис. 106

502. $BC=\sqrt{b(b-c)}$; $R=\frac{bc}{b+c}$. Указание. Установите, что $OP\parallel AB$. Воспользуйтесь подобием треугольников ABC и OPC, где O — центр окружности.

503. $\frac{ab}{a+b}$. Решение 1. Выразим биссектрисы CE и CF треугольников через стороны a, b и углы при вершине C (рис. 106). Обозначим $\angle ACD=2\alpha$, $\angle BCD=2\beta$ и получим:

$$CE=\frac{2ab}{a+b}\cos\alpha,\quad CF=\frac{2ab}{a+b}\cos\beta.$$

На луче CD построим точку M так, чтобы $\angle CEM=90°$. Тогда

$$CM=\frac{CE}{\cos\alpha}=\frac{2ab}{a+b}.$$

Аналогично если на луче CD построить точку N так, чтобы $\angle CFN=90°$, то $CN=\frac{2ab}{a+b}$.

Значит, точки M и N совпадают и CM — диаметр окружности, описанной около треугольника CEF.

Таким образом, центр окружности лежит на отрезке CD, ее радиус равен $\frac{ab}{a+b}$ и не зависит от величины угла ACB.

Решение 2. Через точку E проведем прямую параллельно стороне AC, пересекающую отрезок CD в точке O. Тогда

$$\frac{CO}{OD}=\frac{AE}{ED}=\frac{a}{b}.$$

Поскольку также $\frac{BF}{FD}=\frac{a}{b}$, то прямая OF параллельна стороне BC.

Треугольники CEO и CFO равнобедренные: $OC=OE=OF$. Значит, O — центр окружности, проходящей через точки C, E и F. Обозначив $CO=r$, из подобия треугольников ACD и EOD имеем:

$$\frac{r}{a}=\frac{b-r}{b},\ \text{откуда}\ r=\frac{ab}{a+b}.$$

504. $\arccos\frac{1}{9}$, $\frac{22}{3}$. Решение 1. Пусть $\angle A=2\alpha$. Применив теорему синусов к треугольнику ACM, получим:

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{11}{9}.$$

Применив формулу $\sin 3\alpha=\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)$, найдем, что $\sin\alpha=\frac{2}{3}$.

Пусть CD — высота треугольника ABC. Тогда OD — радиус вписанной окружности. Из треугольника AOD имеем $OD=11\sin\alpha=\frac{22}{3}$.

Решение 2. В силу свойства биссектрисы треугольника имеем: $\frac{AC}{CM}=\frac{11}{9}$, $\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{CM}=\frac{2}{9}$.

Следовательно, $\cos A=\frac{AD}{AC}=\frac{1}{9}$ и $\frac{DO}{OC}=\frac{1}{9}$.

Радиус окружности вычислим, пользуясь теоремой Пифагора.

Пусть $AD=x$, тогда $AC=9x$, $CD=4x\sqrt{5}$, $OD=\frac{2x}{\sqrt{5}}$.

Поскольку $AO=11$, то $x^2+\frac{4x^2}{5}=121$, откуда $x=\frac{11\sqrt{5}}{3}$.

Значит, $OD=\frac{22}{3}$.

505. $AB=12$, $BC=10$. Указание. Проведите касательные к окружности, параллельные сторонам AB и BC. Рассмотрите полученный описанный шестиугольник. Докажите, что $\cos B=\frac{BM}{AM}$.

506. $2(2-k)$. Решение. Пусть окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AB в точке L. Тогда $AM\cdot AN=AL^2$.

Обозначив $MN=m$, $AN=n$, $BC=a$ и $AB=2c$, имеем:

$$(m+n)n=c^2.$$

Так как $BM=BL=c$ и $\cos B=\frac{c}{a}$, то, применив теорему косинусов к треугольнику ABM, получим:

$$(m+n)^2=5c^2-4c^2\cdot\frac{c}{a}.$$

Разделим это равенство почленно на предыдущее. Учитывая, что $\frac{2c}{a}=k$, получим: $\frac{m}{n}=4-2k$.

507. $BC=16$, $AC=12$. Указание. Установите, что $AM=AC$ и $\cos A=\frac{3}{5}$.

508. $\sqrt{mn}$.

509. $\sqrt{2Rn}$, $\sqrt{2Rm}$. Указание. Проведите диаметр CD окружности.

510. Решение. Пусть отрезки AB и CD пересекаются в точке L. Треугольники ACL и DBC подобны, поэтому $CD=\frac{CA\cdot CB}{CL}$.

Биссектрису CL треугольника ABC с углом C, равным 120°, выразим через стороны: $CL=\frac{CA\cdot CB}{CA+CB}$. Из полученных соотношений и вытекает утверждение задачи.

Задача представляет собой перефразировку задачи 38 и может быть решена разными способами, например с помощью теоремы Птолемея (см. задачу 521).

511. $2\sqrt{ab}$. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 71.

512. 36°.

513. 4,5. Указание. Докажите, что трапеция $ABCD$ является равнобочной и $AD=AB$.

514. $\frac{a\sqrt{4b^2-(a-d)^2}}{2(a+b)}$, $a<d<a+2b$. Если $a=d$, то четырехугольник является ромбоидом и задача становится неопределенной. Равенство $r=\frac{ab}{a+b}$ имеет место тогда и только тогда, когда $a=d$ и $\angle B=90°$. Указание. Постройте точку E, симметричную точке B относительно диагонали AC, и рассмотрите треугольник CDE.

515. $2\left(1+\frac{1}{\sin\beta}\right)R^2$. **516.** $\left(1+\frac{2-\cos\beta}{2\sin\beta}\right)R^2$.

517. $\frac{ab}{a-b}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AB=a$, $CD=b$, причем $a>b$ (рис. 107).

Применим перенос на вектор $\overrightarrow{CD}$. При этом точка B перейдет в точку F, принадлежащую стороне AB. В силу свойств параллельного переноса $DF\parallel BC$ и $DF=BC$. Поскольку трапеция описана около окружности, то $AD+DF=AD+BC=a+b$.

Высота DH треугольника ADF равна диаметру $2r$ окружности. Применим к треугольнику ADF формулу задачи 214 и получим: $AF^2=(AD+DF)^2-4S\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Но $AF=a-b$ и $S=(a-b)r$. Следовательно,

$(a-b)^2=(a+b)^2-4(a-b)r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$,

откуда $r=\frac{ab}{a-b}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Задача имеет решение при условии, что $\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{a-b}{a+b}$, $a>b$.

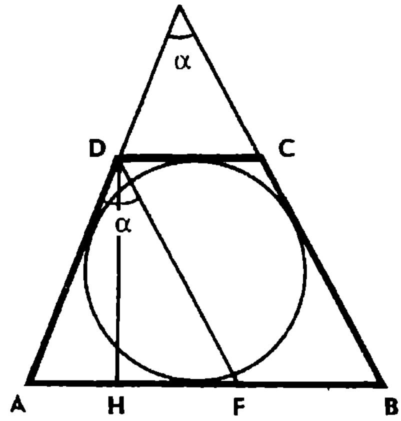


Рис. 107

518. 4.

519. $\frac{8}{k}-1$, $k<4$. Решение. Обозначим $AB=2a$, $CD=2b$, $MN=m$ и $AN=n$. Поскольку трапеция описана около окружности, то $BC=a+b$. Следовательно, $\cos B=\frac{a-b}{a+b}$.

Заметим, что $BM=a$, и применим теорему косинусов к треугольнику ABM.

Получим $(m+n)^2=5a^2-4a^2\cdot\frac{a-b}{a+b}$.

В силу свойства секущей и касательной к окружности имеем:

$$(m+n)\,n=a^2.$$

Разделив на это равенство предыдущее, получим:

$$\frac{m}{n}=\frac{8b}{a+b}, \text{ откуда } \frac{a}{b}=\frac{8}{k}-1.$$

520. $AC=7$, $R=\frac{7}{\sqrt{3}}$. Указание. Пользуясь теоремой косинусов, установите, что $\angle ABD=\angle DBC=60°$ и треугольник ACD равносторонний.

521. а) $e^2=\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}$, $f^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$, где $e=AC$ и $f=BD$.

522. Указание. Воспользуйтесь формулами задачи 521, *а*.

Задачу можно решить также геометрически. Постройте на диагонали AC точку M так, чтобы $\angle ADM=\angle BDC$. Обозначив $AC=e$ и $BD=f$, докажите, что $AM=\frac{bd}{f}$, $CM=\frac{ac}{f}$, $e=\frac{ac+bd}{f}$.

523. Указание. Около четырехугольника $ACBO$ опишите окружность и примените теорему Птолемея.

524. Решение 1. Пусть $AC=BC=a$, тогда $AB=2a\sin\frac{C}{2}$. По теореме Птолемея получаем $MA+MB=2\,MC\sin\frac{C}{2}$.

Решение 2. Треугольник BCM повернем вокруг точки C так, чтобы сторона BC совпала со стороной AC. При этом точка M перейдет в точку M_1, лежащую на прямой AM.

Из треугольника CMM_1 имеем $MM_1=MA+MB$.

Кроме того, $MM_1=2\,MC\sin\frac{C}{2}$, поскольку $\angle MCM_1=\angle C$.

Отсюда следует, что $MA+MB=2\,MC\sin\frac{C}{2}$.

525. Решение 1. Пусть полуокружность касается сторон BC и AD четырехугольника $ABCD$ соответственно в точках M и N (рис. 108). Обозначим $OM=r$, $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$. Тогда $\angle COM=\frac{\alpha}{2}$ и $\angle DON=\frac{\beta}{2}$. Теперь имеем: $AB=r\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right)$;

$$BC+AD=r\left(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=r\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right).$$

Следовательно, $BC+AD=AB$.

Замечаем, что $AN+CM=r\left(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{r}{\sin\alpha}$ и $AO=\frac{r}{\sin\alpha}$, т. е. $AN+CM=AO$. Это соотношение можно доказать и без применения тригонометрии.

Решение 2. Пусть полуокружность касается стороны CD четырехугольника $ABCD$ в точке K. Тогда $CK=CM$ (см. рис. 108). Треугольник OCK повернем вокруг точки O на угол KON. При этом точка K перейдет в точку N, а точка C — в точку C_1, принадлежащую лучу ND. Докажем, что треугольник AOC_1 равнобедренный. Так как $\angle AC_1O=\angle KCO=90°-\frac{\alpha}{2}$ и $\angle AOC_1=90°-\frac{\alpha}{2}$, то $AC_1=AO$. Но $AC_1=AN+NC_1=AN+CM$.

Следовательно, $AN+CM=AO$.

Аналогично докажем, что $BM+DN=BO$.

Сложив эти два равенства почленно, получим $BC+AD=AB$.

Решение 3. Точку пересечения прямых BC и AD обозначим через P. Так как $OM=ON$, то PO — биссектриса угла APB. При симметрии относительно PO отрезок CD перейдет в отрезок C_1D_1, концы которого будут принадлежать сторонам PA и PB угла P. Получим трапецию ABD_1C_1, т. к. $\angle PC_1D_1=\angle PCD=\alpha$.

Но $PC_1+PD_1=PC+PD$, следовательно,

$$AC_1+BD_1=BC+AD.$$

Так же как в решении 2, докажем, что $AC_1=AO$ и $BD_1=BO$.

Значит, $BC+AD=AB$.

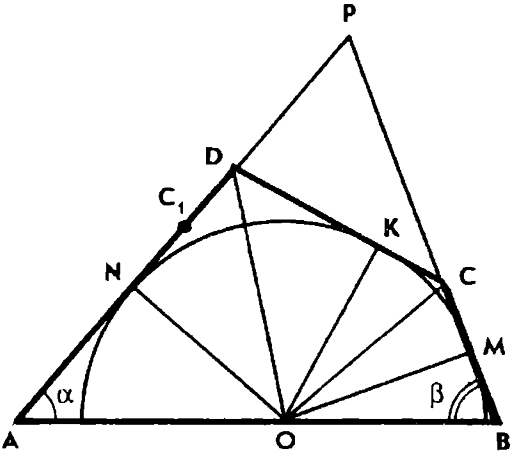


Рис. 108

526. Решение. Пусть окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются диагонали AC соответственно в точках M и N. Обозначим $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=a$.

Поскольку отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны, то $AM-CM=a-b$, $AN-CN=d-c$. Вычтем почленно из первого равенства второе и получим:

$$2MN=|a+c-b-d|.$$

Отсюда следует, что точки M и N совпадают тогда и только тогда, когда $a+c=b+d$.

Итак, если окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются между собой, то $AB+CD=BC+AD$, но тогда окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, также касаются между собой.

527. Решение 1. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Обозначим дуги AB, BC, CD и DA соответственно через 2α, 2β, 2γ и 2δ. Проведем диагональ AC четырехугольника и выразим радиусы r_1 и r_2 окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD, через радиус R данной окружности:

$$r_1=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\delta}{2}=2R\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma+\delta}{2}.$$

Учитывая, что $\sin\frac{\gamma+\delta}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, после несложных преобразований получим: $r_1=R\left(\cos\alpha+\cos\beta-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

Аналогично $r_2=R\left(\cos\gamma+\cos\delta-2\cos^2\frac{\gamma+\delta}{2}\right)$.

Таким образом, $r_1+r_2=R(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta-2)$. Такой же результат получим для окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD.

Решение 2. Обозначим расстояния от центра O окружности, описанной около четырехугольника, до сторон AB, BC, CD и DA соответственно через d_1, d_2, d_3 и d_4, а расстояние от точки O до диагонали AC через d_0.

Применим к треугольникам ABC и ACD теорему Карно (см. задачу 462). В случае, когда точка O лежит внутри треугольника ABC и треугольник ACD тупоугольный, получим:

$$r_1+R=d_1+d_2+d_0,\quad r_2+R=d_3+d_4-d_0.$$

Отсюда следует, что $r_1+r_2=d_1+d_2+d_3+d_4-2R$, и, значит, сумма радиусов не зависит от выбора диагонали.

528. $\dfrac{mn}{m+n}$.

529. а) $\frac{1}{3}R$. б) Р е ш е н и е. Пусть O, O_1, O_2 — центры полуокружностей, построенных на диаметрах AB, AC, CB, и O_3 — центр окружности, касающейся данных полуокружностей (рис. 109). Тогда

$$O_1O_2 = x + y = R, \quad OO_1 = R - x = y,$$
$$OO_2 = R - y = x, \quad OO_3 = x + y - r.$$

Применим теорему косинусов к треугольникам OO_1O_3 и OO_2O_3. Обозначив $\angle O_1OO_3 = \alpha$, находим:

$$(x + r)^2 = y^2 + (x + y - r)^2 - 2y(x + y - r)\cos\alpha,$$
$$(y + r)^2 = x^2 + (x + y - r)^2 + 2x(x + y - r)\cos\alpha.$$

Из этих равенств исключим $\cos\alpha$ и получим:

$$x(x + r)^2 + y(y + r)^2 = xy(x + y) + (x + y - r)(x + y).$$

Отсюда $\frac{1}{r} = \frac{(x+y)^2 - xy}{xy(x+y)}$.

Поскольку $(x + y)^2 \geqslant 4xy$, то $\frac{1}{r} \geqslant \frac{3}{x+y}$, или $r \leqslant \frac{1}{3}R$, а полученное равенство можно записать в виде $\frac{1}{r} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{R}$.

530. Р е ш е н и е 1. Пусть радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 равны r (рис. 110), а радиусы окружностей с центрами O_3 и O_4 равны соответственно x и y. В силу касания окружностей, указанных в условии, имеем:

$$O_1O_3 = r + x, \; O_2O_4 = r + y, \; OO_3 = 2r - x,$$
$$OO_4 = 2r - y, \; O_3O_4 = x + y.$$

Обозначив $\angle O_1OO_3 = \alpha$, $\angle O_2OO_4 = \beta$, и $\angle O_3OO_4 = \gamma$, по теореме косинусов находим:

$$\cos\alpha = \frac{2r - 3x}{2r - x}, \quad \cos\beta = \frac{2r - 3y}{2r - y}, \quad \cos\gamma = \frac{4r^2 - 2r(x + y) - xy}{(2r - x)(2r - y)}.$$

Вычислим $\sin\alpha$ и $\sin\beta$, затем найдем $\cos(\alpha + \beta)$.

Из условия $\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma$ получим соотношение

$$(r - x)(r - y) = xy, \text{ откуда } x + y = r.$$

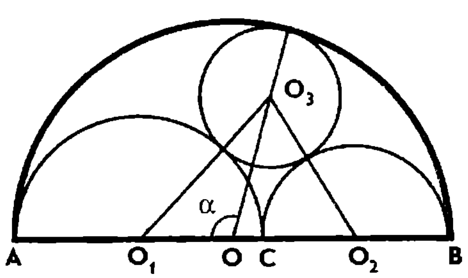


Рис. 109

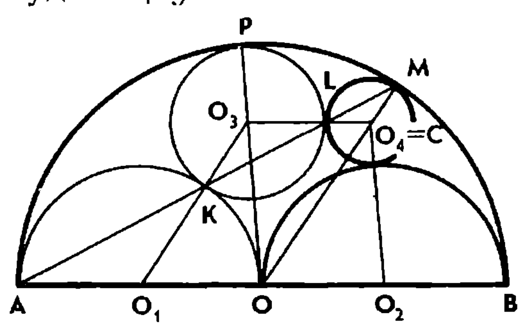


Рис. 110

Значит, $O_3O_4=O_1O=r$ и $O_1O_3=OO_4=r+x$, т. е. $O_1OO_4O_3$ — параллелограмм.

Решение 2. Пусть окружность O_3 касается окружностей O_1 и O в точках K и P. Обозначим через L и M точки пересечения прямой AK с окружностями O_3 и O (см. рис. 110). Из подобия равнобедренных треугольников AO_1K, KO_3L и AOM следует параллельность прямых AO и O_3L, O_1K и OM. Следовательно, O_1OCO_3 — параллелограмм, где C — точка пересечения прямых O_3L и OM.

Остается доказать, что точка C совпадает с точкой O_4.

Окружность с центром C и радиусом $CM=CL$ касается окружностей O_3 и O. Чтобы эта окружность касалась окружности O_2, надо, чтобы $O_2C=r+CL$. Имеем:

$$O_2C=OO_3=2r-O_3P=2r-O_3L=2r-(r-CL)=r+CL,$$

что и требовалось доказать.

531. Указание. Пусть R и r — радиусы первых двух окружностей, касающихся данной окружности и хорды в ее середине. Можно считать, что $R\geqslant r$. Обозначим через x радиус одной из двух других окружностей, вписанной в один из сегментов, например окружности, касающейся окружности радиуса R. Тогда, применив дважды теорему Пифагора, получим:

$$(R+r-x)^2-(R-r-x)^2=(R+x)^2-(R-x)^2,$$

откуда $x=\frac{Rr}{R+r}$.

532. Решение. Пусть окружность, вписанная в сегмент, касается хорды BC в ее середине M и дуги сегмента в точке N (рис. 111). Тогда $\angle MBN=\frac{1}{2}\angle A$, и из прямоугольного треугольника BMN имеем:

$$2r_1=MN=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=R\sin A\operatorname{tg}\frac{A}{2}=2R\sin^2\frac{A}{2}=R(1-\cos A).$$

Следовательно, $r_1+r_2+r_3=\frac{1}{2}R(3-\cos A-\cos B-\cos C)$.

Пользуясь тождеством задачи 431 и формулой $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, находим, что

$$R(\cos A+\cos B+\cos C)=R\left(1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=R+r.$$

Значит, $r_1+r_2+r_3=\frac{1}{2}R-r$. Применив же неравенство $1<\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$, получим:

$$\frac{3}{4}R\leqslant r_1+r_2+r_3<R.$$

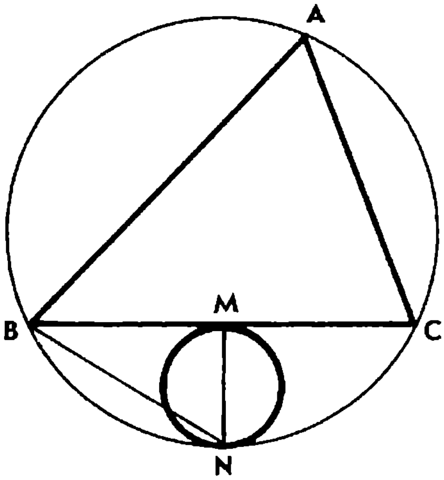


Рис. 111

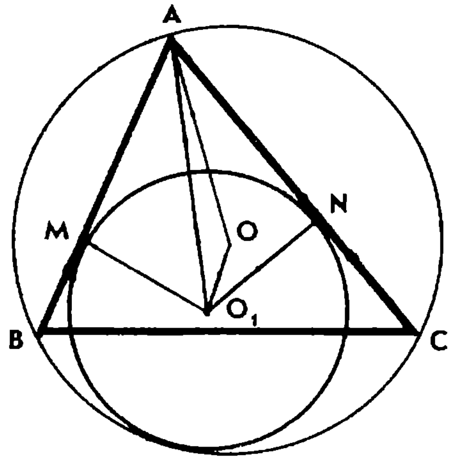


Рис. 112

533. Решение. Пусть окружность радиуса r_1 с центром O_1 касается сторон AB и AC треугольника ABC и описанной около него окружности радиуса R с центром O (рис. 112). Для определенности будем считать, что $\angle C < \angle B$, тогда $\angle OAO_1 = 90° - \angle C - \frac{1}{2}\angle A$.

По теореме косинусов из треугольника AO_1O имеем:

$$(R-r_1)^2 = \frac{r_1^2}{\sin^2\frac{A}{2}} + R^2 - \frac{2Rr_1}{\sin\frac{A}{2}} \sin\left(C + \frac{A}{2}\right),$$

откуда $r_1 \cos^2\frac{A}{2} = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$, или $r_1 = \dfrac{r}{\cos^2\frac{A}{2}}$.

Легко проверить, что полученная формула верна и в том случае, когда $\angle B = \angle C$. Из нее и вытекает доказываемое утверждение.

534. Решение. Воспользовавшись формулой, полученной при решении предыдущей задачи, будем иметь:

$$r_1 + r_2 + r_3 = r\left(\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\right) =$$

$$= r\left(3 + \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right).$$

Но $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2} \geqslant \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1.$

Следовательно, $r_1 + r_2 + r_3 \geqslant 4r$.

Чтобы доказать вторую половину неравенства, докажем истинность неравенства $2\cos^2\frac{A}{2} \geqslant \frac{h_a}{R}$. Имеем:

$$\frac{h_a}{R}=2\sin B\sin C=\cos(B-C)-\cos(B+C)\leqslant 1+\cos A,$$

а так как $1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}$, то $2\cos^2\frac{A}{2}\geqslant\frac{h_a}{R}$.

Пользуясь этим неравенством и полученным выше соотношением, будем иметь: $r_1+r_2+r_3\leqslant 2Rr\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$.

Но $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$ (см. задачу 161), следовательно,

$$r_1+r_2+r_3\leqslant 2R.$$

Из решения задачи видно, что равенство имеет место тогда и только тогда, когда треугольник ABC равносторонний.

535. а) Решение. Пусть окружность радиуса R_1 с центром O_1 касается продолжений сторон AB и AC треугольника ABC и описанной около него окружности радиуса R с центром O. Так же как при решении задачи 533, применим теорему косинусов к треугольнику AO_1O:

$$(R+R_1)^2=\frac{R_1^2}{\sin^2\frac{A}{2}}+R^2-\frac{2RR_1}{\sin\frac{A}{2}}\sin\left(C+\frac{A}{2}\right).$$

Отсюда после преобразований получаем:

$$R_1\cos^2\frac{A}{2}=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},\text{ или } R_1=\frac{r_a}{\cos^2\frac{A}{2}}.$$

Заметим, что $r_b+r_c=4R\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\right)=$ $=4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}=4R\cos^2\frac{A}{2}$. Поэтому полученной формуле можно придать вид: $R_1=\frac{4Rr_a}{r_b+r_c}$.

б) Для любых трех положительных чисел a, b и c имеет место неравенство $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$, доказательство которого легко получить, положив $b+c=2x$, $c+a=2y$, $a+b=2z$.

Воспользовавшись этим неравенством и результатом предыдущей задачи, будем иметь:

$$R_1+R_2+R_3=4R\left(\frac{r_a}{r_b+r_c}+\frac{r_b}{r_c+r_a}+\frac{r_c}{r_a+r_b}\right)\geqslant 4R\cdot\frac{3}{2}=6R.$$

536. а) 6 и $\frac{6}{23}$. Указание. Центры трех данных окружностей являются вершинами прямоугольного треугольника. Радиус большей окружности равен полупериметру этого треугольника, или, что то же, сумме радиусов данных окружностей.

б) $\frac{1}{2}(a+b+c)$. Указание. Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник с прямым углом C и вписанная в треугольник окружность касается сторон BC, CA и AB соответственно в точках K, L и M. Тогда AM, BM и CK — радиусы трех попарно касающихся окружностей с центрами в точках A, B и C.

Построив точку D, симметричную точке C относительно середины стороны AB, установите, что окружность с центром D и радиусом $R=\frac{1}{2}(a+b+c)$ касается внутренним образом каждой из этих окружностей. Для доказательства вычислите радиусы r_1, r_2 и r_3 окружностей с центрами A, B и C: $r_1=p-a$, $r_2=p-b$, $r_3=p-c$ — и установите, что расстояния между центрами $AD=R-r_1$, $BD=R-r_2$, $CD=R-r_3$.

537. а) Решение. Пусть A, B, C — центры трех данных окружностей и O — центр окружности, касающейся каждой из них внешним образом (рис. 113). Обозначим $\angle BOC=2\alpha$, $\angle COA=2\beta$ и $\angle AOB=2\gamma$. Учитывая, что при внешнем касании двух окружностей расстояние между их центрами равно сумме радиусов, из треугольника AOB по теореме косинусов находим:

$$(a+b)^2=(a+r)^2+(b+r)^2-2(a+r)(b+r)\cos 2\gamma,$$

откуда $\cos 2\gamma=\frac{r^2+(a+b)r-ab}{(a+r)(b+r)}$.

Далее вычислим: $\sin^2\gamma=\frac{ab}{(a+r)(b+r)}$, $\cos^2\gamma=\frac{r(a+b+r)}{(a+r)(b+r)}$.

Если $\alpha+\beta+\gamma=180°$, то имеет место тождество

$$\sin^2\gamma=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$$

Подставив сюда найденные значения тригонометрических функций, получим:

$$\frac{ab}{(a+r)(b+r)}=\frac{bc}{(b+r)(c+r)}+\frac{ac}{(a+r)(c+r)}-\frac{2c\sqrt{abr(a+b+r)}}{(a+r)(b+r)(c+r)},$$

или
$$\frac{1}{c}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{r}+2\sqrt{\frac{1}{ar}+\frac{1}{br}+\frac{1}{ab}}=0,$$

откуда
$$2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{r^2}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{r}\right)^2. \qquad (*)$$

Для вычисления радиуса R большей окружности, касающейся каждой из данных трех окружностей внутренним образом, совершенно аналогично получим уравнение лишь с одним отличием: в нем r заменяется на $(-R)$. Полученное нами равенство (*) есть квадратное уравнение, имеющее два действительных корня. Решая его, найдем:

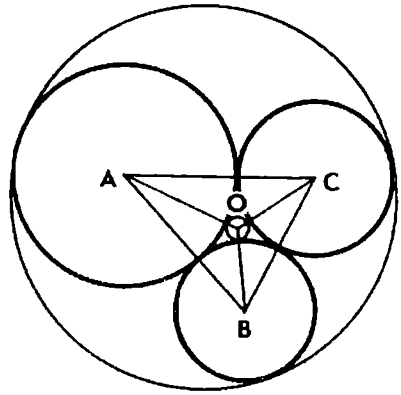


Рис. 113

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+2\sqrt{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}},$$

$$-\frac{1}{R}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-2\sqrt{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}}$$

(окружность радиуса R не существует, если треугольник ABC «слишком» тупоугольный).

538. б) Установите, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{m+n+2}{m+n+mn}$, где $\alpha=\angle BAM$ и $\beta=\angle DAN$.

539. а) Указание. Проведите высоту AH треугольника AMN.

б) Указание. Треугольник ABM поверните вокруг точки A на 90° в положение ADM_1. Докажите, что полученный треугольник AM_1N равен треугольнику AMN.

540. Указание. Поверните отрезок BM вокруг точки A на 90° в положение DM_1. Точка M_1 будет лежать на продолжении стороны CD квадрата. А так как из условия задачи следует, что $BM+DN=MN$, то $M_1N=MN$. Затем докажите, что треугольники AM_1N и AMN равны.

541. Указание. Докажите, что MQ и NP — высоты треугольника AMN.

542. Указание. Из середины K стороны AB треугольника ABC проведите перпендикуляры KE и KF к сторонам AC и BC. Применив поворот вокруг точки K на 60°, докажите, что $FM+EN=MN$.

545. $\angle DCK=15°$. Указание. Около четырехугольника $ABMK$ опишите окружность и установите, что треугольник ABM равносторонний.

546. 150° или 60°.

547. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 541.

548. Указание. Пусть M — середина стороны AE. Опишите около четырехугольника $AMFD$ окружность и докажите, что CDM — равносторонний треугольник.

Задача имеет решение при условии, что $\frac{a\sqrt{3}}{2}\leqslant b\leqslant\frac{2a}{\sqrt{3}}$, где a и b — длины сторон прямоугольника.

550. $\angle A = \angle B = 105°$, $\angle C = \angle D = 75°$. Указание. Постройте квадрат ACC_1A_1. Установите, что его стороны AA_1 и CC_1 параллельны и равны диагонали BD данного четырехугольника. Затем примените поворот вокруг точки C_1 на $90°$.

551. Решение. Если в прямоугольник $ABCD$ вписан треугольник AMN, удовлетворяющий условию задачи, то $\angle AND = \angle CMN$, $AN = MN$. Значит, треугольники ADN и CMN равны, поэтому $CN = AD$.

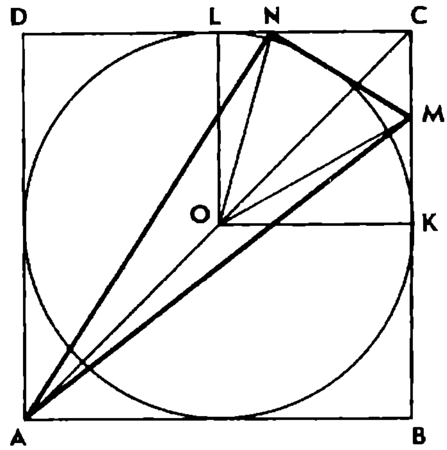


Рис. 114

Пусть $AB = a$, $BC = b$. Построение точек N и M возможно тогда и только тогда, когда $CN < a$ и $CM < b$, или $b < a < 2b$ (при этом точки N и M являются внутренними точками отрезков CD и BC).

Сумма площадей треугольников ADN и CMN равна $(a-b)\,b$, а площадь четырехугольника $ABMN$ равна:

$$S = ab - (a-b)\,b = b^2.$$

552. Решение 1. Пусть O — центр окружности, касающейся сторон BC и CD квадрата соответственно в точках K и L (рис. 114).

Обозначим $AB = a$, $CM = x$, $CN = y$. Тогда

$$KM = \frac{a}{2} - x,\quad LN = \frac{a}{2} - y,\quad MN = KM + LN = a - x - y.$$

По теореме Пифагора из треугольника CMN имеем:

$$(a-x-y)^2 = x^2 + y^2, \text{ или } 2a(x+y) - 2xy = a^2.$$

Пусть S — сумма площадей прямоугольных треугольников ABM, MCN и ADN. Тогда $2S = a(a-x) + a(a-y) + xy$. Используя найденное выше равенство, получаем:

$$S = a^2 - \frac{1}{2}\,[a(x+y) - xy] = \frac{3}{4}\,a^2.$$

Следовательно, $S_{AMN} = \frac{1}{4}\,a^2$.

Решение 2. Докажем, что площадь треугольника AMN равна площади квадрата $OKCL$.

Так как O — центр вневписанной окружности треугольника CMN, то высота OH треугольника OMN разбивает его на два треугольника, соответственно равных треугольникам OKM и OLN.

Треугольники AOM и COM, а также треугольники AON и CON равновелики, так как O — середина отрезка AC. Следовательно, площадь треугольника AMN равна площади квадрата $OKCL$ или $\frac{1}{4}$ площади квадрата $ABCD$.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

I. Обозначения

Треугольник

Стороны треугольника ABC обозначаются: $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, а его углы — буквами A, B, C.

h_a, h_b, h_c — высоты; m_a, m_b, m_c — медианы; l_a, l_b, l_c — биссектрисы, проведенные соответственно из вершин A, B, C;

$2p$ — периметр треугольника;

S — площадь треугольника;

R — радиус описанной окружности;

r — радиус вписанной окружности;

H — точка пересечения высот (ортоцентр) треугольника;

M — точка пересечения медиан (центроид) треугольника;

O — центр описанной окружности;

J — центр вписанной окружности.

Четырехугольник

Стороны четырехугольника $ABCD$ обозначаются: $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$;

e и f — диагонали AC и BD;

$2p$ и S — периметр и площадь четырехугольника.

II. Формулы

Метрические соотношения в треугольнике

1. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
2. $h_a=\dfrac{2S}{a}$.
3. $m_c^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{c^2}{4}$.
4. $l_a=\dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.
5. $R=\dfrac{abc}{4S}$; $R=\dfrac{ab}{2h_c}$.
6. $r=\dfrac{S}{p}$.
7. $AH^2=4R^2-a^2$.
8. $OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$.

9. $AI=\sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}$.

10. $OI=\sqrt{R^2-2Rr}$.

11. $h_a=b\sin C=c\sin B$.

12. $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$.

13. $l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$.

14. $r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

15. $S=\frac{1}{2}ab\sin C$.

16. $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$.

17. $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$.

18. $$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\frac{1}{2}\sin A\sin B\sin C}}=$$
$$=\frac{h_a}{\sin B\sin C}=\frac{r}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

19. $1+4\cos A\cos B\cos C=-(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)=3-2(\cos^2 A+$ $+\cos^2 B+\cos^2 C)\leqslant\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\sin\frac{A}{2}+$ $+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{2}$.

20. $4\sin A\sin B\sin C=\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\leqslant\sin A+\sin B+\sin C=$ $=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

21. $\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C\geqslant\frac{1}{3}\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)=\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\times$ $\times\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\geqslant\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}$.

Метрические соотношения в четырехугольнике

22. $a^2+c^2-b^2-d^2=2ef\cos\varphi$, где $\varphi=\angle AOB$, O — точка пересечения диагоналей.

23. $S=\frac{1}{2}ef\sin\varphi$.

24. $e^2f^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(A+C)$.

25. $S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$.

26. $ef\leqslant ac+bd$.

Вписанный четырехугольник

27. $ef=ac+bd$.

28. $2(ab+cd)\cos B=a^2+b^2-c^2-d^2$.

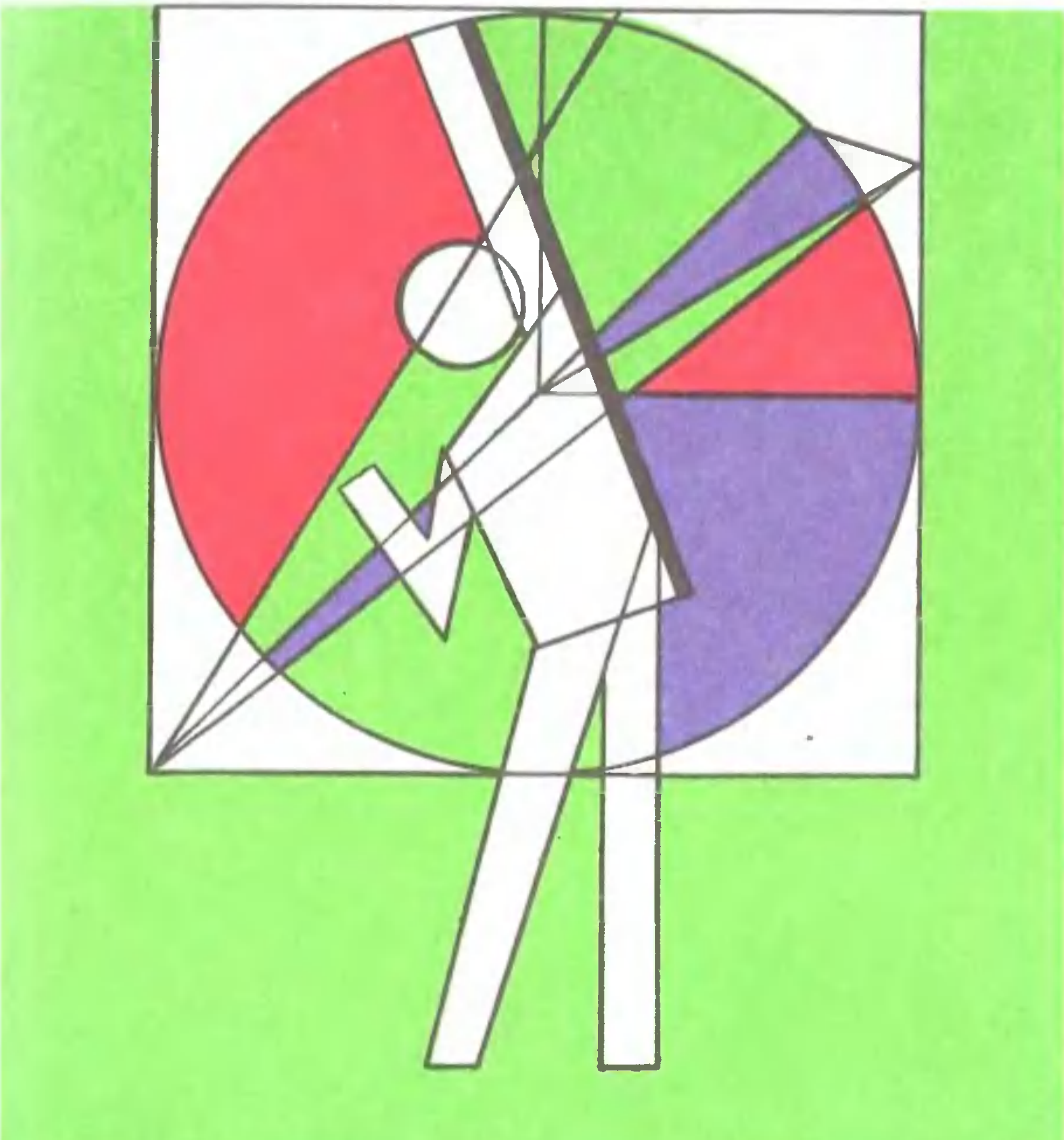
29. $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}$.

30. $S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Э. Г. ГОТМАН

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ



Старшеклассник,
абитуриент,
учитель,
эта книга для вас!
Автор предлагает большой выбор
нестандартных задач.
А пять основных методов,
которые рассматриваются в книге,
помогут преодолеть трудности и
проблемы решения геометрических задач.