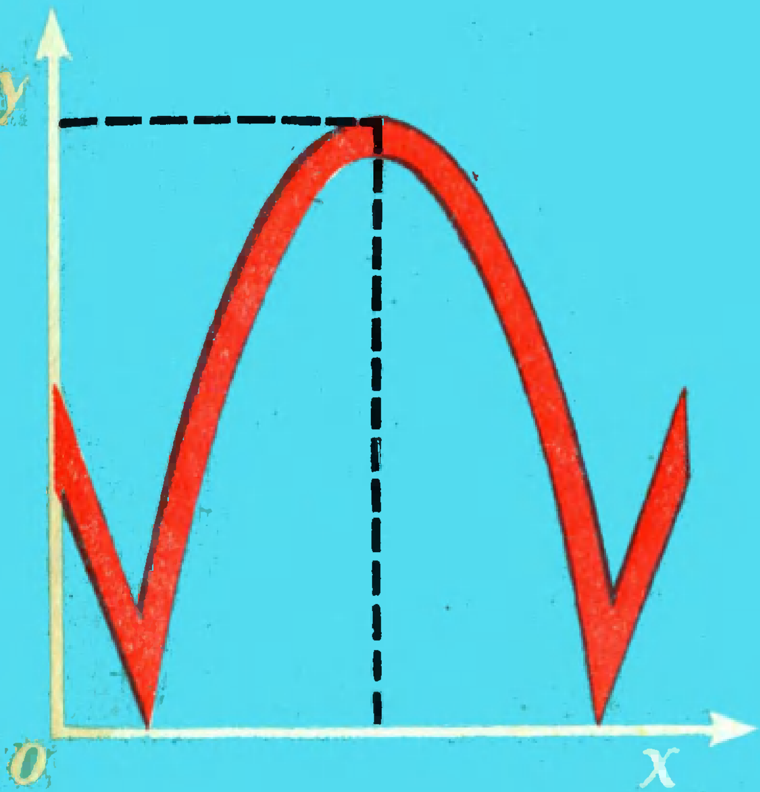
Э. С. Беляева, В. М. Монахов

Экстремальные задачи



Э. С. Беляева, В. М. Монахов

Экстремальные задачи

(пособие для учащихся VIII—X классов)

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1977

518
Б44

Беляева Э. С., Монахов В. М.

Б44 Экстремальные задачи. Пособие для учащихся. М., «Просвещение», 1977.

64 с.

Книга предназначена для учащихся 8—10 классов, интересующихся математикой. Она содержит задачи на нахождение экстремальных значений величин; знакомит читателя с методом отыскания оптимальных решений практических задач, решение которых сводится к определению наибольшего или наименьшего значения линейной целевой функции.

Б $\frac{60601-489}{103\ (03)-77}$ 220—77 513

ВВЕДЕНИЕ

С незапамятных времен перед человеком возникают практические проблемы нахождения наибольшего и наименьшего, наилучшего и наихудшего. Как правило, в задачах подобного рода достижение некоторого результата может быть осуществлено не единственным способом и приходится отыскивать наилучший способ достижения результата.

Однако в одной и той же задаче в разных ситуациях наилучшими могут быть совершенно разные решения. Здесь все зависит от выбранного или заданного критерия. Например, каковы должны быть наилучшие очертания судна? Ответы будут разными в зависимости от того, для каких целей предназначается судно. Для разных целей различны будут и главные критерии. Критерии могут быть следующими:

1) необходимо, чтобы судно при движении испытывало в воде наименьшее сопротивление (это главный критерий быстроходного судна);

2) необходимо, чтобы судно было максимально устойчивым при сильном волнении и сильном ветре;

3) необходимо, чтобы судно имело наименьшую осадку (в случае, если судно предназначается для эксплуатации на мелких водоемах).

Задачи такого характера, получившие название *экстремальных задач*, возникают в самых различных областях человеческой деятельности. В настоящем пособии вы познакомитесь с некоторыми этапами истории зарождения теории экстремальных значений величин, получивших в дальнейшем развитие и обобщение. Содержание рассматриваемых в пособии задач самое разнообразное, разнообразны и методы их решения. Однако общее в решении экстремальных задач заключается в самом характере применения того или иного математического метода. Дело в том, что по самой своей природе математические методы не могут прилагаться непосредственно к действительности, а применяются только к *математическим моделям* того или иного явления. Что же такое математическая модель?

В простейших случаях условие задачи сразу переводится на математический язык (например, условие записывается в виде уравнения или неравенства), и мы получаем математическую формулировку задачи, т. е. ее математическую модель. Математическая модель только тогда имеет практическое значение, когда она достаточно хорошо отображает основные свойства и определенные характеристики исследуемого реального явления.

Математическая модель экстремальных задач имеет свою особенность: в ее состав всегда входит некоторая функция, называемая *целевой функцией*, которую требуется при заданных условиях минимизировать (максимизировать), т. е. найти ее оптимальное значение.

В последние 20—25 лет в прикладной математике огромное внимание стало уделяться новому классу задач оптимизации, заключающихся в нахождении в заданной области точек наибольшего или наименьшего значения некоторой целевой функции, зависящей от большого числа переменных. Те задачи, в которых целевая функция связана с переменными линейной зависимостью и область точек задана линейными ограничениями, принято называть *задачами линейного программирования*. Построению математической модели различных типов задач линейного программирования и математическим методам ее исследования посвящается § 5 настоящего пособия. Кроме цели ознакомления с одним из важнейших современных направлений прикладной математики — линейным программированием, этот параграф существенно расширяет представления о теории систем линейных уравнений и неравенств и их прикладных аспектах.

Одним из таких прикладных аспектов следует назвать математизацию экономики. Предметом исследования теории линейного программирования являются математические модели, порожденные различными экономическими ситуациями и процессами, происходящими в экономике колхозов, предприятий, промышленных объединений.

Для таких задач характерным является множественность возможных решений. Например, определенную продукцию можно получить различными способами, зависящими от выбора оборудования, технологии, сырья, организации производственного процесса и т. д. На первый взгляд может показаться, что следует просто последовательно рассмотреть все возможные решения и выбрать лучшее из них. Практически же дело обстоит не так-то просто. Каждый план представляет собой сложное сочетание различных факторов. Поэтому даже в случае простых задач перебор и сравнение всех возможных вариантов практически не всегда осуществим, даже если воспользоваться услугами современных электронных вычислительных машин.

На помощь человеку приходят специальные математические методы теории линейного программирования. Например, идею *симплексного метода* линейного программирования можно представить следующим образом. В некоторой урне находится миллион пронумерованных шаров. Задача заключается в том, чтобы за возможно меньшее число попыток вынуть шар, имеющий номер 1 000 000. Естественно, шар выбирается вслепую. Нетрудно догадаться, что в самом худшем случае придется сделать миллион попыток. Если же в процесе вынимания шаров внести одно условие, заключающееся в том, что все шары с номерами, меньшими чем номер только что вынутого шара, сразу из урны исчезают, то решение задачи сводится к 20—30 попыткам. Аналогичная идея заложена и в алгоритме симплексного метода. Получив некоторое решение, мы в дальнейшем рассматриваем из возможного огромного набора остальных решений только то, которое л у ч ш е этого. Таким образом осуществляется сравнительно быстро последовательный переход к оптимальному решению.

§ 1. ИЗ ИСТОРИИ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВЕЛИЧИН

Первое замечательное открытие в области теории экстремальных значений величин относят к первому столетию нашей эры. Александрийский ученый Г е р о н установил, что путь светового луча от точки A до точки B при отражении от зеркала в точке C является кратчайшим (минимальным) расстоянием от A до B с заходом на плоскость зеркала M (рис. 1). То, что световой луч, отражаясь от зеркала, образует с зеркальной поверхностью конгруэнтные углы (угол падения светового луча конгруэнтен углу отражения), было известно и ранее, но тот факт, что расстояние $|AC| + |CB|$ меньше $|AC'| + |C'B|$, где C' — любая другая точка зеркальной плоскости, отличная от C, т. е. расстояние $|AC| + |CB|$ является наименьшим, — это было открытием.

З а д а ч а 1. ***M и N — две различные точки, расположенные в одной полуплоскости с границей (AB) ($M \bar{\in} (AB)$, $N \bar{\in} (AB)$). На (AB) найдите такую точку P, чтобы сумма $|MP| + |NP|$ была наименьшей.***

Р е ш е н и е

Построим точку N', симметричную точке N, приняв (AB) за ось симметрии. Оказывается, что точка $P = (MN') \cap (AB)$ искомая. Возьмем произвольную точку $P' \in (AB)$, причем $P' \neq P$, и докажем, что $|MP| + |NP| < |MP'| + |NP'|$.

Возможны два случая:

1) $P' \bar{\in} [RQ]$, где R и Q — проекции точек M и N на (AB) (рис. 2);

2) $P' \bar{\in} [RQ]$ (рис. 3).

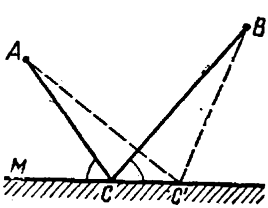


Рис. 1

Рассмотрим первый случай. Из построения видно, что

$$|PN| = |PN'|,\ |P'N| = |P'N'|.$$

Следовательно,

$$|MP| + |PN| = |MP| + |PN'| = |MN'|.$$

Так как точки M, P', N' не принадлежат одной прямой, то $|MN'| < |MP'| + |P'N| =$

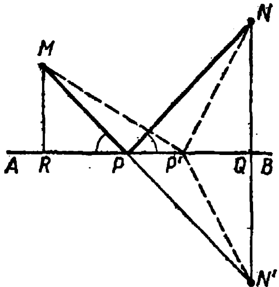


Рис. 2

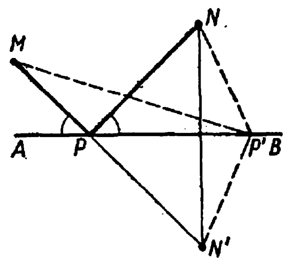


Рис. 3

$= |MP'| + |P'N|$. Поскольку точка $P' \in RQ$ выбрана произвольно, то $|MN'|$ меньше любой другой суммы.

В случае, когда $P' \bar{\in} RQ$, минимальность суммы $|MP| + |NP|$ доказывается аналогично.

Из рисунков 2 и 3 легко понять, что (MP) и (PN) образуют с (AB) конгруэнтные углы.

Дальнейшим развитием рассмотренной задачи следует считать решение *треугольника Шварца.*

Герман Амандус Шварц (1843—1921), немецкий математик, доказал минимальное свойство «высотного треугольника». Задача заключалась в том, чтобы в остроугольный треугольник вписать треугольник с минимальным периметром (рис. 4). Таким треугольником оказывается так называемый *высотный треугольник* PQR, вершинами которого являются основания высот данного треугольника ABC. Если предположить, что стороны треугольника ABC «зеркальные», то треугольник PQR будет единственным треугольным контуром пути светового луча, например луча QR.

Обобщение этой задачи нашло большое практическое приложение в динамике и оптике.

Задача 2. ***Дан остроугольный треугольник ABC, $[AP] \perp [BC]$, $[BQ] \perp [AC]$, $[CR] \perp [AB]$. Докажите, что периметр высотного треугольника PQR наименьший по сравнению с периметрами других вписанных треугольников.***

Решение.

1. Сначала докажем следующее свойство высотного треугольника: $\angle ARQ \cong \angle PRB \cong \angle ACB$ (аналогичные равенства можно доказать и для двух других вершин Q и P высотного треугольника).

Действительно, $\angle OPB$ и $\angle ORB$ прямые, следовательно, около четырехугольника $OPBR$ можно описать окружность. Тогда $\angle PBO \cong \angle PRO$, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же

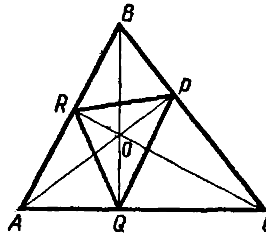


Рис. 4

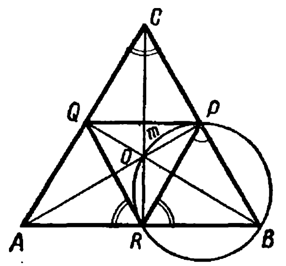


Рис. 5

дугу окружности. Треугольник CBQ прямоугольный, а потому $\angle PBO$ дополнительный к углу C. Но $\angle PRO$ дополнительный к углу PRB. Следовательно, $\angle ACB \cong \cong \angle PRB$. Повторяя эти рассуждения для четырехугольника $AQOR$, заключаем, что $\angle ARQ \cong \angle ACB$.

2. Переходим к доказательству свойства минимальности периметра высотного треугольника. Если точки P и Q принадлежат одной полуплоскости с границей (AB) (рис. 5), то сумма расстояний $|QR| + |RP|$ обращается в минимум лишь в случае, если (QR) и (RP) образуют с (AB) конгруэнтные углы (последнее следует из задачи Герона).

Предположим, что $\triangle PQR$ является решением нашей задачи. Тогда заключаем, что точка $R \in (AB)$ минимизирует сумму $|QR| + |RP|$ и выполняется условие $\angle QRA \cong \angle PRB$; точка $P \in (BC)$ минимизирует сумму $|RP| + |QP|$ и $\angle RPB \cong \angle QPC$; точка $Q \in (AC)$ минимизирует $|QR| + |QP|$ и $\angle AOP \cong \angle COP$.

Следовательно, для искомого треугольника должно быть выполнено то же самое свойство конгруэнтности углов, каким обладает высотный треугольник[1].

В начале XIX в. немецкий геометр Якоб Штейнер исследовал проблему минимизации общей протяженности дорог, связывающих три пункта с четвертым.

Например, необходимо три пункта A, B, C соединить системой дорог так, чтобы общая протяженность построенных дорог была минимальной. В более корректной математической постановке проблема Штейнера формулируется следующим образом.

В плоскости даны три точки A, B, C. Найти четвертую точку D плоскости так, чтобы сумма длин $|AD| + |BD| + |CD|$ была минимальной (рис. 6).

Обобщение проблемы Штейнера для случая m точек A_1, A_2, ..., A_m, заданных на плоскости, привело к удивительным результатам. Если по-прежнему искать одну-единственную точку плоскости D, для которой минимизируется сумма $A_1D + A_2D + \ldots + A_mD$, то это обобщение к практически полезным результатам не приводит. Для случая, когда данные точки являются вершинами выпуклого четырехугольника, решение этой задачи элементарно: искомой точкой является точка пересечения его диагоналей. Для случая невыпуклого четырехугольника решение сложнее. Для случая $m = 5$ решение задачи вообще не

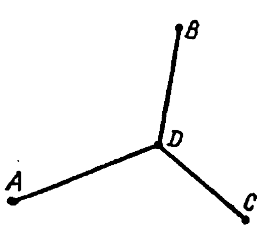


Рис. 6

[1] Доказательство того, что при таком условии искомый треугольник и есть высотный, мы опускаем.

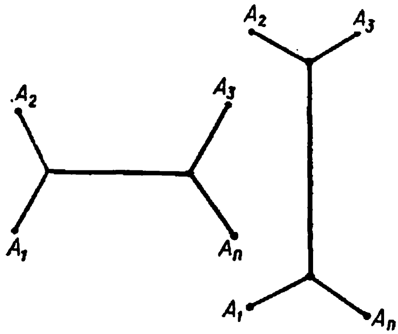


Рис. 7

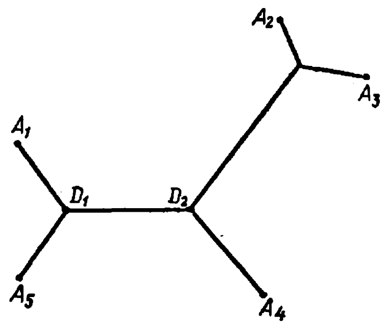


Рис. 8

может быть получено явно. В настоящее время разработаны способы приближенного решения сформулированной выше задачи для любого числа произвольно расположенных точек плоскости.

Если же для данных m точек A_1, A_2, ..., A_m, расположенных в одной плоскости, будем искать такую связанную систему отрезков, чтобы:

1) любые две точки из данных были связаны между собой ломаной линией, звенья которой входили бы в состав системы;

2) общая длина всей системы была бы минимальной, — то результаты оказываются весьма полезными.

Разберите самостоятельно характер систем отрезков, соединяющих четыре точки (рис. 7) и пять точек (рис. 8) кратчайшим образом.

Задача 3. ***Из скважин А, В, С выделяется газ. Соедините их наиболее рациональным способом системой трубопроводов (из прямолинейных участков).***

Решение.

Обозначим скважины A, B, C точками плоскости. Если бы точки A, B и C принадлежали одной прямой, то минимальную длину имел бы отрезок, соединяющий крайние точки. Поэтому будем считать, что данные три точки не принадлежат одной прямой. Точки A, B, C определяют некоторый треугольник ABC. Возможны два случая: 1) в $\triangle ABC$ величина каждого из углов меньше 120°; 2) в $\triangle ABC$ величина одного из углов не меньше 120°.

Рассмотрим первый случай. Если соединить трубопроводами точки A с B, B с C, C с A, то, оказывается, что длина всей сети отрезков, т. е. $|AB| + |BC| + |CA|$, не будет наименьшей из всех возможных сетей, соединяющих точки A, B и C. Если длины сторон $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$ треугольника связаны зависимостью $a \leqslant b \leqslant c$, то найдется ломаная линия короче указанной (длина этой ломаной равна $a + b$). Но оказывается возможным соединить точки A, B и C еще более короткой сетью.

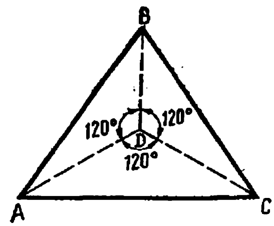


Рис. 9

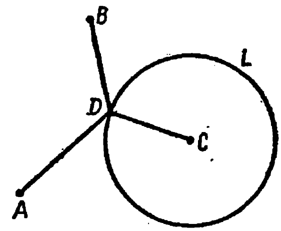


Рис. 10

Для построения минимальной сети достаточно найти так называемую *точку Торричелли* и соединить ее отрезками с данными точками A, B и C. Точкой Торричелли называется такая точка, сумма расстояний которой от трех данных точек плоскости минимальна. Докажем, что точка Торричелли — это такая точка плоскости, из которой каждый из трех отрезков AB, BC и AC виден под углом в 120° (рис. 9).

Пусть L — окружность с центром в точке C и радиусом $R = |CD|$ (рис. 10). Точка D должна быть расположена на окружности L так, чтобы сумма $|DA| + |DB|$ была наименьшей.

Из обобщения теоремы Герона (если заменить прямую дугой окружности) следует, что $[AD]$ и $[DB]$ должны образовывать конгруэнтные углы с окружностью, а значит, и радиусом DC. Повторяя эти рассуждения для двух других точек A и B, убеждаемся, что углы, образованные отрезками AD, BD, CD друг с другом, должны быть конгруэнтны, т. е. равны по величине 120°. Доказательство было построено на допущении, что две остальные точки были вне круга. Но иначе и быть не может. Пусть точка A находится внутри окружности L, тогда $|AC| \leqslant |CD|$. В этом случае при любом расположении точек A, B, D $|AD| + |BD| \geqslant |AB|$ и $|AD| + |BD| + |CD| \geqslant |AB| + |AC|$. Последнее неравенство показывает, что минимальное значение суммы $|AD| + |BD| + |CD|$ получится, если D совпадает с A, но это противоречит нашему допущению. Значит, точка A находится вне круга.

Итак, для отыскания точки D строим на каждой из сторон AB, BC, AC треугольника ABC сегмент, вмещающий угол в 120°. Точка пересечения дуг сегментов — искомая точка (достаточно построить два сегмента).

В т о р о й с л у ч а й. Если треугольник ABC имеет один угол, например C, который по величине не меньше 120°, то точкой Торричелли является вершина этого угла (рис. 11).

Отметим, что попутно с решением задачи о наиболее целесообразном способе соединения трубопроводами трех скважин мы решили следующую задачу Штейнера.

Даны три точки: A, B, C. Требуется в плоскости, определяемой этими точками, найти такую точку D, сумма расстояний которой от точек A, B и C была бы минимальной.

Искомой точкой является точка Торричелли. Эта точка расположена внутри треугольника ABC, если среди его углов нет угла, по величине равного или большего $120°$.

Рассмотренная выше задача органически связана с проблемой определения кратчайшей сети линий, соединяющей некоторую данную систему точек на плоскости.

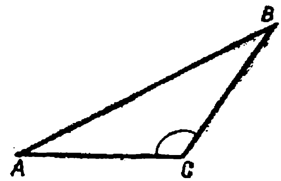


Рис. 11

Пусть надо построить кратчайшую сеть линий, соединяющую некоторую систему точек A_1, A_2, ..., A_n на плоскости. Примем без доказательства, что такая минимальная сеть существует, и сформулируем ряд свойств, которыми она обладает.

1. Очевидно, что рассматриваемая сеть будет состоять из отрезков прямых, соединяющих между собой заданные точки, а также (возможно) некоторые «узлы» сети, в которых сходятся три и более линий. Это следует из того, что кратчайшим путем, соединяющим две точки A и B, является отрезок AB.

2. В узле M кратчайшей сети линий, соединяющей некоторые заданные точки на плоскости (A_1, A_2, ..., A_n, где $n \geqslant 3$), не могут сходиться более трех отрезков. Пусть, например, в узле M сходятся четыре отрезка A_1M, A_2M, A_3M, A_4M (рис. 12). По меньшей мере один из углов при вершине M окажется острым или прямым, т. е. по величине меньше $120°$. Пусть $\widehat{A_1MA_2} < 120°$. Тогда в силу выше сказанного мы можем отрезки A_1M и A_2M заменить отрезками A_1K, KM, A_2K, отчего длина всей системы толвко сократится, т. е. станет меньше длины минимальной сети, что невозможно.

3. Докажем, что три отрезка, сходящиеся в узле M, в случае минимальной сети делят полный угол с вершиной в узле сети на три конгруэнтных угла (каждый по $120°$).

Пусть $\widehat{A_1MA_2} < 120°$ (рис. 13). Тогда для треугольника A_1MA_2 найдется точка Торричелли $K \neq M$ и будет верно неравенство $|A_1M| + |MA_2| > |A_1K| + |MK| + |KA_2|$, пользуясь которым можно сократить длину сети, что противоречит ее минимальности.

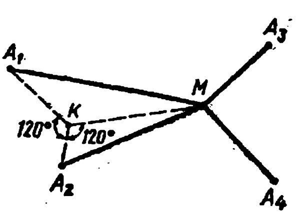


Рис. 12

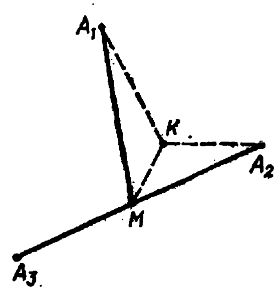


Рис. 13

Но ни один из указанных углов не может быть по величине больше 120°, так как нашелся бы тогда угол, меньший 120°.

4. Докажите самостоятельно, что если в данной точке сходятся два отрезка минимальной сети, то меньший по величине из двух углов, образованных ими, не может быть меньше 120°. Эти свойства могут быть применены при решении задач о кратчайших сетях линий, соединяющих некоторые системы точек.

В XX в. зародилось очень перспективное направление прикладной математики — линейное программирование. Впервые в мире решил конкретную задачу линейного программирования в 1939 г. советский математик, лауреат Ленинской и Нобелевской премий академик Л. В. Канторович. Но заслуга его не столько в решении конкретной задачи, сколько в том, что он увидел общность постановки и методов решения аналогичных задач вне зависимости от их содержательной постановки. Методы, развитые Л. В. Канторовичем, оказались настолько общими, что явились первым шагом в развитии нового направления в математике, которое мы сейчас называем *линейным программированием.*

Американский математик Дж. Данциг ввел для решения задач программирования в линейной структуре общий метод, названный им «симплексным», а в 1951 г. Т. Купманс предложил название «линейное программирование». Слово «линейное» связано с нахождением наибольшего или наименьшего значения линейной целевой функции нескольких переменных с линейными ограничениями. Слово «программирование» происходит от конечной цели метода — составления оптимальной программы, т. е. наилучшего плана.

Теория линейного программирования охватывает огромное число самых различных экономических задач. Математические методы линейного программирования нашли эффективное применение при планировании транспортных перевозок, при разработке производственных планов народного хозяйства на самых различных производственных уровнях от отдельного колхоза до целой промышленной отрасли, при составлении наиболее выгодных смесей из нескольких компонентов.

В настоящее время теория линейного программирования является уже достаточно хорошо разработанным направлением прикладной математики, наглядно иллюстрирующим эффективность применения математических методов в экономике. В § 5 настоящей книги мы рассмотрим более подробно задачи линейного программирования.

Решим несколько задач, используя результаты уже рассмотренных задач (1, 2, 3).

Задача 4. ***Площадь треугольника $AB'C$ равна S. Укажите такой треугольник со стороной AC и площадью S, чтобы сумма длин двух других сторон была наименьшей.***

Решение.

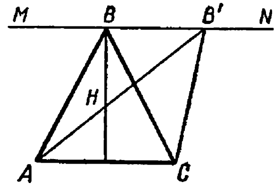


Рис. 14

На рисунке 14 показан $\triangle AB'C$ с площадью $S = \frac{1}{2}|AC| \cdot H$. Заданную площадь треугольника определяет сторона AC и высота H. Проведем через точку B' прямую MN, параллельную (AC). Теперь задачу можно сформулировать так: на прямой MN найдите такую точку B, чтобы сумма $|AB| + |BC|$ была наименьшей, для случая, когда две точки A и C расположены в одной полуплоскости с границей (MN) на одном и том же расстоянии от (MN). Из задачи Герона следует, что $|AB| = |BC|$, т. е. $\triangle ABC$ равнобедренный.

Задача 5. ***Из всех треугольников с общей стороной АС и суммой длин двух других сторон, равной m, укажите тот, у которого площадь наибольшая.***

Решение.

Данная задача является обратной задаче 4. Докажем, что условию удовлетворяет равнобедренный треугольник, у которого $|AB| = |BC| = \frac{m}{2}$. При решении задачи 4 было установлено, что из всех треугольников заданной площади S с заданной стороной AC сумма $|AB| + |BC|$ принимает наименьшее значение в равнобедренном треугольнике ($|AB| = |BC|$). Следовательно, во всяком другом треугольнике с основанием AC и площадью S сумма $|AB| + |BC|$ имеет большее значение. Во всяком треугольнике с основанием AC и площадью большей, чем площадь рассматриваемого равнобедренного треугольника ABC, сумма двух других сторон будет, естественно, больше.

Отсюда следует, что всякий другой треугольник с заданной стороной AC и с заданной суммой m двух других сторон имеет меньшую площадь.

Таким образом, наибольшую площадь при заданной стороне AC и заданной сумме двух других сторон имеет равнобедренный треугольник ABC $\left(|AB| = |BC| = \frac{m}{2}\right)$.

Задача 6. ***Докажите, что в остроугольном треугольнике периметр высотного треугольника меньше, чем удвоенная длина любой высоты данного треугольника.***

Решение.

Из точки B опустим перпендикуляры на (QP), (QR) и (PR) (рис. 15). Из прямоугольных треугольников QLB и QMB следует, что $|QL| < |QB|$, $|QM| < |QB|$ (длина гипотенузы больше длины

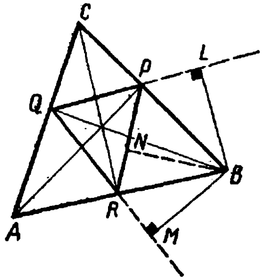


Рис. 15

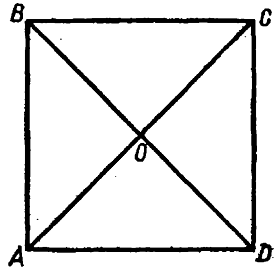


Рис. 16

катета). Следовательно, $|QL| + |QM| < 2|QB|$. Но $|QL| + |QM|$ есть периметр высотного треугольника QPR, так как $|NR| = |RM|$ и $|PN| = |PL|$.

Поэтому периметр высотного треугольника меньше, чем удвоенная длина высоты QB данного $\triangle ABC$. Повторяя эти рассуждения для двух других высот, убеждаемся в правильности утверждения задачи.

З а д а ч а 7. ***Точки A, B, C, D — вершины квадрата. Постройте кратчайшую систему линий: а) с одним узлом; б) с двумя узлами, — соединяющих вершины.***

Р е ш е н и е.

1. Взяв в качестве узла точку пересечения диагоналей квадрата, мы получим кратчайшую систему отрезков, соединяющих вершины квадрата (рис. 16).

2. Из рисунка 16 видно, что в узле O сходятся четыре отрезка и $\widehat{BOC}$, $\widehat{DOC}$, $\widehat{DOA}$, $\widehat{AOB}$ равны 90°, т. е. меньше 120°, а потому введением точек Торричелли можно укоротить систему линий (рис. 17 и 18).

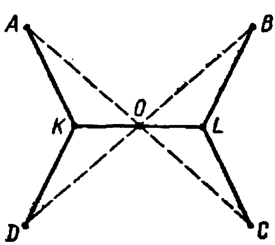


Рис. 17

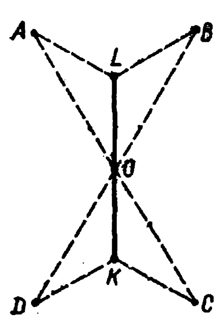


Рис. 18

По указанному ранее, если $\widehat{BOC} < 120°$, то $|BL| + |OL| + |CL| < |OB| + |OC|$. Следовательно, $|BL| + |CL| + |LK| + |KD| + |AK| < |AC| + |BD|$.

Как видно из рисунков 17 и 18, решение задачи о кратчайшей системе линий, соединяющих заданную систему точек, может быть и не единственным.

§ 2. АНАЛИЗ МНОЖЕСТВА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Задачи, рассматриваемые в данной книге, решаются элементарными средствами. При этом широко используется алгебро-геометрический язык (аналитическим проблемам дается геометрическое представление, а геометрические ситуации переводятся на язык уравнений, неравенств и их систем). В расчете на то, что книгой заинтересуются не только учащиеся 9—10 классов, но и восьмиклассники, авторы сознательно не останавливают внимание читателя на том, что при решении задач может быть использовано понятие производной.

Довольно часто решение экстремальной задачи сводится к нахождению наибольшего или наименьшего значения некоторой функции (при определенных ограничениях, налагаемых на аргумент). Знание множества значений этой функции, естественно, поможет нам ответить на вопрос о существовании у нее наибольшего и наименьшего значений.

Пусть $y = f(x)$ — функция действительной переменной x. $D(f)$ — область определения функции f, $E(f)$ — множество значений ее. Как найти множество $E(f)$, зная $D(f)$?

Множество $E(f)$ состоит из тех и только тех значений y, при каждом из которых уравнение $y = f(x)$ имеет хотя бы одно решение, принадлежащее области определения.

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 8. ***Дана функция*** $y = \frac{x+2}{x-3}$. ***Найдите*** $E(f)$.

Решение.

$E(f) = \left\{y \mid \text{уравнение } y = \frac{x+2}{x-3} \text{ имеет решение}\right\} = \left\{y \mid \text{уравнение } y = \frac{(x-3)+5}{x-3} \text{ имеет решение}\right\} = \left\{y \mid \text{уравнение } y = 1 + \frac{5}{x-3} \text{ имеет решение}\right\} = \left\{y \mid \text{уравнение } y - 1 = \frac{5}{x-3} \text{ имеет решение}\right\} = \{y \mid y \neq 1\}$.

Задача 9. ***Найдите множество значений функции*** $y = \frac{x}{1+x^2}$.

Решение.

$$E(f)=\left\{y \mid \text{уравнение } y=\frac{x}{1+x^2} \text{ имеет решение}\right\}=\{y \mid \text{уравне-}$$

ние $yx^2-x+y=0$ имеет решение$\}=\{y \mid 1-4y^2\geqslant 0\}=$

$$=\left\{y \mid -\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\right\}$$

Задача 10. ***Найдите наименьшее значение выражения*** $\frac{1+x^2}{1+x}$ ***при*** $x\geqslant 0$.

Решение.

Обозначим $y=\frac{1+x^2}{1+x}$, $x\geqslant 0$. Заметим сразу, что $y>0$. $E(f)=$ $=\left\{y \mid \text{уравнение } y=\frac{1+x^2}{1+x},\ y>0 \text{ имеет неотрицательное решение}\right\}=$ $=\{y \mid$ уравнение $y+xy=1+x^2$, $y>0$ имеет неотрицательное решение$\}=\{y \mid$ уравнение $x^2-xy+(1-y)=0$, $y>0$ имеет неотрицательное решение$\}$.

Левая часть уравнения $x^2-xy+(1-y)=0$ есть квадратный трехчлен (y — параметр). Из условия $y>0$ следует, что абсцисса вершины параболы $z=x^2-xy+(1-y)$ больше нуля. Поэтому для существования неотрицательного решения уравнения $x^2-xy+(1-y)=0$, $y>0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $D\geqslant 0$.

Итак, $E(f)=\{y \mid y^2-4(1-y)\geqslant 0 \cap y>0\}=\{y \mid (y\geqslant$ $\geqslant -2+2\sqrt{2} \cup y\leqslant -2-2\sqrt{2}) \cap y>0\}=\{y \mid y\geqslant -2+$ $+2\sqrt{2}\}$.

Видим, что $y_{\text{наим}}=-2+2\sqrt{2}$ и достигается при $x=-1+$ $+\sqrt{2}$.

Задача 11. ***Найдите наибольшее значение функции*** $y=3x+4\sqrt{1-x^2}$.

Решение.

Найдем сначала область определения данной функции: $D(f)=$ $=\{x \mid 1-x^2\geqslant 0\}=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$; $E(f)=\{y \mid$ уравнение $y=3x+4\sqrt{1-x^2}$ имеет решение на $[-1;\ 1]\}=\{y \mid$ уравнение $y-3x=4\sqrt{1-x^2}$ имеет решение на $[-1;\ 1]\}=\{y \mid$ уравнение $25x^2-6xy+(y^2-16)=0$, где $y\geqslant 3x$, имеет решение на $[-1;\ 1]\}=$

$$=\{y \mid (y\geqslant 3x \ \cap y^2-25\leqslant 0) \cap -1\leqslant x\leqslant 1\}=$$
$$=\{y \mid (y\geqslant 3x \ \cap -5\leqslant y\leqslant 5) \cap -1\leqslant x\leqslant 1\}=$$
$$=\{y \mid -3\leqslant y\leqslant 5\}.$$

Следовательно, $y_{наиб} = 5$ (достигается при $x = \frac{3}{5}$).

Поясним решение системы $\begin{cases} y \geqslant 3x \\ -5 \leqslant y \leqslant 5 \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$ графически (рис. 19).

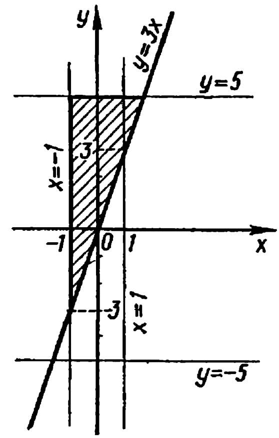


Рис. 19

Задача 12. ***Обтачивается стержень цилиндрической формы. Длина стержня l, диаметр основания D, h— толщина стачиваемого слоя. Найдите наибольшее смещение центра тяжести при обточке цилиндра***[1].

Решение.

Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 20; x — длина сточенного слоя в некоторый момент времени t:

$$0 \leqslant x \leqslant l.$$

До обтачивания центр тяжести цилиндра находился в точке $C\left(\frac{l}{2}; 0\right)$. Затем по мере обтачивания точка C начнет движение влево. Когда будет сточен слой толщины h со всей поверхности цилиндра, то центр тяжести возвратится на исходное место. В начале опыта $x_C = \frac{l}{2}$, масса цилиндра $m = \frac{\pi D^2 l}{4}\rho$, где ρ — плотность материала, из которого сделан цилиндр.

Через некоторое время обтачиваемое тело будет состоять из двух цилиндров разных диаметров: $D—2h$ и D. Масса первого цилиндра $m_1 = \frac{\pi (D - 2h)^2 x}{4}\rho$, абсцисса центра тяжести первого цилиндра $x_1 = \frac{x}{2}$. Масса второго цилиндра $m_2 = \frac{\pi D^2 (l - x)}{4}\rho$, абсцисса центра тяжести второго цилиндра $x_2 = \frac{l - x}{2} + x = \frac{l + x}{2}$.

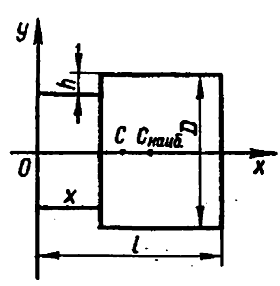


Рис. 20

[1] Следует обратить внимание, что в данной задаче рассматривается идеализированный случай обточки детали для очень небольших h.

Тогда абсцисса центра тяжести системы двух цилиндров есть

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{\frac{\pi (D-2h)^2 x^2\rho}{8} + \frac{\pi D^2 (l-x)\rho (l+x)}{8}}{\frac{\pi (D-2h)^2 x\rho}{4} + \frac{\pi D^2 (l-x)\rho}{4}} =$$

$$= \frac{(D-2h)^2 x^2 + D^2 (l^2 - x^2)}{2((D-2h)^2 x + D^2 (l-x))} = \frac{4h(h-D)x^2 + D^2l^2}{8h(h-D)x + 2D^2l}.$$

Задача свелась к нахождению наибольшего значения функции

$$y = \frac{4h(h-D)x^2 + D^2l^2}{8h(h-D)x + 2D^2l}.$$

Найдем множество значений этой функции:

$$E(f) = \left\{ y \mid y = \frac{4h(h-D)x^2 + D^2l^2}{8h(h-D)x + 2D^2l} \text{ имеет решение в } [0;\ l[\right\} =$$

$= \{y \mid 4(h-D)hx^2 - 8h(h-D)yx + D^2l^2 - 2D^2ly = 0$ имеет решение в $[0;\ l[\} = \left\{ y \mid \left(y \geqslant \frac{Dl}{2h} \cup y \leqslant \frac{Dl}{2(D-h)} \right) \cap 0 \leqslant y \leqslant l \right\} = \left\{ y \mid 0 \leqslant y \leqslant \frac{Dl}{2(D-h)} \right\}.$

Поясним последний вывод: $D > 2h \Rightarrow \frac{D}{2h} > 1 \Rightarrow \frac{Dl}{2h} > l.$

Поэтому остается $0 \leqslant y \leqslant \frac{Dl}{2(D-h)}.$

$$y_{\text{наиб}} = \frac{Dl}{2(D-h)}; \quad x_{\text{наиб}} = \frac{Dl}{2(D-h)}.$$

$$CC'_{\text{наиб}} = \frac{Dl}{2(D-h)} - \frac{l}{2} = \frac{lh}{2(D-h)}.$$

Ряд задач сводится к нахождению наибольшего или наименьшего значения квадратного трехчлена.

Теорема. *Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ имеет наибольшее или наименьшее значение, принимаемое при $x = -\frac{b}{2a}$; значение наименьшее, если $a > 0$, и наибольшее, если $a < 0$. Если существует наибольшее значение y, то не существует наименьшего, и наоборот.*

Доказательство. Пусть $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, — квадратный трехчлен, где коэффициенты a, b, c — действительные числа. Выделим из трехчлена квадрат двучлена:

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Здесь $c - \frac{b^2}{4a}$ — число, не зависящее от переменной x. Если $a > 0$, то первое слагаемое $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ не может быть отрицательным; оно обращается в нуль при $x = -\frac{b}{2a}$. В этом случае y принимает свое наименьшее значение $y = c - \frac{b^2}{4a}$ и функция не имеет наибольшего значения. Если $a < 0$, то $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leqslant 0$, но при $x = -\frac{b}{2a}$ обращается в нуль. Следовательно, y достигает наибольшего значения $y = c - \frac{b^2}{4a}$. В этом случае наименьшего значения не существует.

С л е д с т в и е. *Произведение двух положительных множителей, сумма которых постоянна, достигает наибольшего значения тогда, когда эти множители равны*[1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть p — сумма этих двух множителей. Если первый множитель x, то второй — $p - x$. Произведение рассматриваемых множителей $y = x(p - x) = -x^2 + px$, как следует из вышедоказанной теоремы, принимает наибольшее значение, равное $y = \frac{p^2}{4}$, при $x = \frac{p}{2}$.

З а д а ч а 13. ***Определите при заданном периметре длину и ширину прямоугольного участка земли, при которых его площадь окажется наибольшей.***

Р е ш е н и е.

Обозначим через x и y стороны прямоугольника. Тогда периметр его будет равен $p = 2x + 2y$, а площадь будет равна $S = xy$. По своей природе величины x и y положительны, так как они выражают длины отрезков. По условию периметр p есть величина постоянная, значит, по следствию достигает наибольшего значения, если $x = y = \frac{p}{4}$. Следовательно, участок должен быть квадратом.

З а д а ч а 14. ***Определите, при каком действительном значении p сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (p - 2)x + (p - 3) = 0$ принимает наименьшее значение, и найдите его.***

---

[1] Справедливо и более общее утверждение. Если $x > 0$, $y > 0$ и $(n - 1)x + y = p$ $(n \in N)$, то произведение $x^{n-1} \cdot y$ достигает наибольшего значения, если $x = y = \frac{p}{n}$.

Решение.

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. Обозначим сумму их квадратов через y:

$$y = x_1^2 + x_2^2.$$

Выразим $x_1^2 + x_2^2$ через $x_1 + x_2$ и $x_1 \cdot x_2$:

$$y = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = 2 - p$, $x_1 \cdot x_2 = p - 3$. Имеем: $y = x_1^2 + x_2^2 = (2-p)^2 - 2(p-3) = p^2 - 6p + 10 = (p-3)^2 + 1$.

Квадратный трехчлен $y = p^2 - 6p + 10$ принимает наименьшее значение $y = 1$ при $p = 3$.

Задача 15. ***Отрезок данной длины перемещается так, что концы его скользят по сторонам прямого угла. При каком положении этого отрезка площадь отсекаемого треугольника будет наибольшей?***

Решение.

Пусть концы отрезка AB длины a скользят по сторонам угла ACB: $\widehat{ACB} = 90°$ (рис. 21). Примем $|AC| = x$, $0 \leqslant x \leqslant a$. Тогда $|CB| = \sqrt{a^2 - x^2}$. Площадь треугольника ABC равна $S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CB| = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2(a^2 - x^2)}$.

Сумма неотрицательных слагаемых x^2 и $a^2 - x^2$ постоянна (равна a^2). Поэтому произведение $x^2(a^2 - x^2)$, а вместе с ним и площадь треугольника S достигает наибольшего значения, если $x^2 = a^2 - x^2$, откуда $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|CB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $\triangle ABC$ равнобедренный:

$$\widehat{ABC} = \widehat{CAB} = 45°, \ S = \frac{1}{4}a^2.$$

Задача 16. ***Пункты A и B расположены на прямолинейной магистрали, идущей с запада на восток. Пункт B находится восточнее A на*** 9 ***км. Из пункта A на восток выходит автомашина со скоростью*** 40 км/ч. ***Одновременно из B в том же направлении с постоянным ускорением*** 32 км/ч^2 ***выезжает мотоцикл. Определите наибольшее расстояние, которое может быть между автомашиной и мотоциклом в течение первых двух часов движения.***

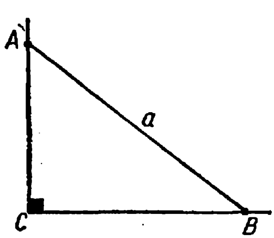


Рис. 21

Решение.

В момент времени t автомашина находится от пункта A на расстоянии $40t$ км, а мотоцикл — на расстоянии $(16t^2 + 9)$ км.

Расстояние между ними равно модулю разности $16t^2 + 9$ и $40t$. Обозначим это расстояние через y:

$$y = |16t^2 + 9 - 40t|.$$

Надо найти наибольшее значение y, если t изменяется в [0; 2].

Построим график функции $y = |16t^2 - 40t + 9|$ (рис. 22). Если t изменяется от 0 до 2, то наибольшую ординату имеет точка графика, абсцисса которой равна $\frac{5}{4}$:

$$y_{наиб} = 16 \text{ (км)}.$$

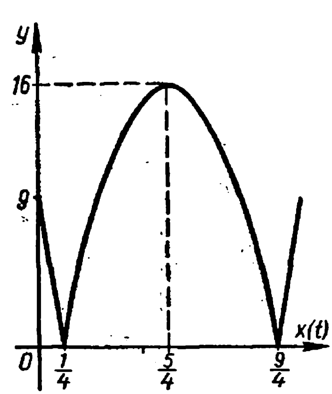


Рис. 22

Проследим по графику, как в течение первых двух часов изменялось расстояние между автомашиной и мотоциклом. В начале движения при $t = 0$ расстояние между ними было 9 км. В течение 15 мин машина догоняла мотоциклиста и на расстоянии 1 км от пункта B обогнала его. Затем машина уходит вперед, и расстояние между ними начинает увеличиваться. В момент $t = \frac{5}{4}$ ч расстояние между ними достигает своего максимального значения — 16 км. В дальнейшем машина продолжает лидировать, но расстояние начинает уменьшаться, так как возрастает скорость мотоцикла и он приближается к машине. Например, при $t = 2$ ч $y = 7$ км, а при $t = \frac{9}{4}$ ч мотоцикл догоняет машину. Если $t > \frac{9}{4}$, то расстояние между машиной и мотоциклом опять увеличивается, но теперь уже лидирует мотоцикл. Так, при $t = 3$ ч $y = 33$ км.

Задача 17. ***Сосуд цилиндрической формы наполнен водой. Высота слоя воды h. Из отверстия (размерами его можно пренебречь), расположенного на высоте z, вытекает вода (рис. 23). При каком z дальность струи воды будет наибольшей?***

Решение.

Введем прямоугольную систему координат как это показано на рисунке 23. Пусть v_0 — скорость вытекания струи, x — расстояние от оси Ox, y — расстояние по оси Oy. Тогда $v_0 = \sqrt{2g(h-z)}$, $x = v_0 t$, $y = z - \frac{gt^2}{2}$. В момент достижения струей воды земли $y = 0$. Отсюда $t = \sqrt{\frac{2z}{g}}$. Имеем:

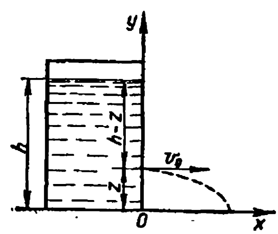


Рис. 23

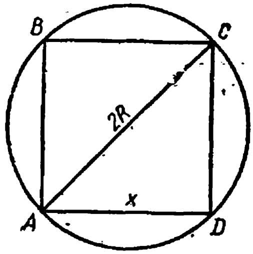


Рис. 24

$$x = v_0\sqrt{\frac{2z}{g}} = \sqrt{\frac{2z}{g}\cdot 2g(h-z)} = 2\sqrt{z(h-z)};$$

x достигает наибольшего значения, если $z(h-z)$ максимально. Но сумма z и $h-z$ постоянна, поэтому произведение неотрицательных множителей достигает наибольшего значения, если $z = h - z$. Отсюда

$$z = \frac{h}{2}.$$

Задача 18. ***Докажите, что из всех четырехугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.***

Решение.

Обозначив длину стороны AD прямоугольника $ABCD$ через x, ($x < 2R$), а радиус круга через R (рис. 24), имеем:

$$|CD| = \sqrt{|AC|^2 - |AD|^2} = \sqrt{4R^2 - x^2}.$$

Тогда площадь прямоугольника равна $S = |AD|\cdot|DC| = x\sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{x^2(4R^2 - x^2)}$.

Сумма x^2 и $4R^2 - x^2$ постоянна, а потому S достигает наибольшего значения, если $x^2 = 4R^2 - x^2$, $x = R\sqrt{2}$. Следовательно, наибольшую площадь имеет квадрат.

Задача 19. ***В треугольнике ABC проведите такую прямую MN, параллельную основанию AC, чтобы площадь прямоугольника $MNPQ$ оказалась наибольшей.***

Решение.

Пусть $|AC| = a$, $|MN| = x$, $|QM| = y$, $|DB| = H$ (рис. 25). Так как $\triangle ABC \sim \triangle MBN$, то $\frac{|MN|}{|AC|} = \frac{|BO|}{|BD|}$, или $\frac{x}{a} = \frac{H-y}{H}$.

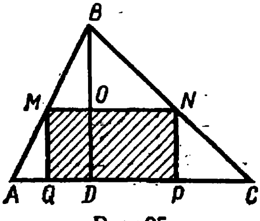


Рис. 25

Отсюда $x = \frac{(H-y)\,a}{H}$. Площадь прямоугольника $MNPQ$ есть $S = x\cdot y = \frac{a}{H}(H-y)\cdot y$.

S достигает наибольшего значения, если $H - y = y$, т. е. $y = \frac{H}{2}$. Следовательно, $[MN]$ — средняя линия $\triangle ABC$.

З а д а ч а 20. ***Из квадратного куска жести шириной* 60 см *надо изготовить коробку без крышки наибольшей вместимости с квадратным дном.***

Р е ш е н и е.

Пусть ширина отгибаемых квадратных полос равна x. Заметим, что $x < \frac{60}{2} = 30$. Ширина квадратного дна равна $60 - 2x$. Найдем объем коробки:

$$V = (60 - 2x)^2 x. \tag{1}$$

Умножив обе части равенства (1) на 4, получим:

$$4V = (60 - 2x)(60 - 2x) \cdot 4x. \tag{2}$$

Сумма (положительных) множителей правой части равенства (2) равна 120 (существенно, что из трех множителей два множителя одинаковые). Следовательно, произведение этих множителей достигает наибольшего значения, если $60 - 2x = 4x$, т. е. $x = 10$.

Именно тогда $4V$, а значит, и V достигают наибольшего значения:

$$V_{наиб} = 40 \cdot 40 \cdot 10 = 16\,000 \text{ (см}^3\text{)}.$$

З а д а ч а 21. ***Нужно изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда с площадью основания, равной* 1 см². *Сумма длин всех ребер параллелепипеда должна быть равна* 20 см. *При каких размерах коробки площадь ее поверхности будет наибольшей?***

Р е ш е н и е.

Пусть x, y, z — измерения параллелепипеда (рис. 26). Тогда по условию можно записать:

$$\begin{cases} xy = 1 \\ 4(x + y + z) = 20. \end{cases} \tag{1}$$

Площадь поверхности коробки $S = 2 + 2(x + y)z$. Используя второе соотношение системы (1), получим S как функцию одной переменной z:

$$S = 2 + 2(5 - z)z = -2z^2 + 10z + 2.$$

S достигает наибольшего значения при $z = \frac{5}{2}$, откуда имеем:

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0{,}5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = 2. \end{cases}$$

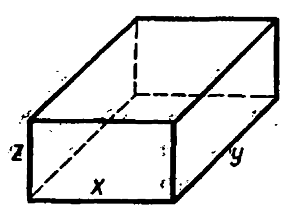


Рис. 26

§ 3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВА НЕРАВЕНСТВА, СВЯЗЫВАЮЩЕГО СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ И СРЕДНЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ДВУХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Теорема. *Если x и y — неотрицательные числа, то* $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$.

Доказательство. Рассмотрим очевидное неравенство $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0$. После несложных преобразований получаем:

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}.$$

Равенство достигается в единственном случае, когда $x = y$.

Следствие. *Сумма двух положительных множителей, произведение которых постоянно, достигает наименьшего значения тогда и только тогда, когда эти множители равны.*

Доказательство. 1. Пусть x и y — данные положительные числа, произведение которых равно S: $xy = S$. По доказанной теореме $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$. Заменим $\sqrt{xy}$ на $\sqrt{S}$. Тогда получаем неравенство $x + y \geqslant 2\sqrt{S}$, правая часть которого постоянна. Следовательно, наименьшее значение $x + y$ равно $2\sqrt{S}$. Приходим к системе

$$\begin{cases} x + y = 2\sqrt{S} \\ xy = S, \end{cases}$$

откуда следует, что $x = y = \sqrt{S}$.

2. Пусть $x = y > 0$ и $xy = S$. Докажем, что $x + y$ принимает в этом случае наименьшее значение. Так как $x = y$, то $xy = x^2 = S$ и $x = \sqrt{S}$. По выше доказанной теореме $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$, т. е. $x + y \geqslant 2\sqrt{S}$. Следовательно, $2\sqrt{S}$ есть наименьшее значение суммы $x + y$.

Замечание. Следствие может быть распространено на любое число положительных чисел $x, x, \dots, x, y$.

Задача 22. ***Найдите прямоугольник наименьшего периметра, ограничивающий заданную площадь.***

Решение.

В данном случае площадь $S = xy$ постоянна. Следовательно, $p = x + y$ достигает наименьшего значения, если $x + y = 2\sqrt{S}$. Таким прямоугольником является квадрат со стороной $\sqrt{S}$, периметр его $4\sqrt{S}$.

Из решения задач 13 и 22 следует, что: 1) квадрат имеет наибольшую площадь из всех прямоугольников с одинаковым периметром; 2) из всех прямоугольников одинаковой площади квадрат имеет наименьший периметр.

Задача 23. ***Требуется сделать коробку, объем которой должен равняться** 108 $см^3$. **Коробка открыта сверху и имеет квадратное дно. Каковы должны быть размеры ее, чтобы на ее изготовление пошло наименьшее количество материала?***

Решение.

Длину стороны основания обозначим через x см, а высоту коробки — y см ($x > 0$, $y > 0$) (рис. 27). Тогда ее объем $V = x^2y$. Учитывая, что $V = 108$ $см^3$, имеем $x^2y = 108 \Rightarrow y = \frac{108}{x^2}$.

Пусть S — площадь поверхности коробки:

$$S = x^2 + 4xy = x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}.$$

Представим выражение для S следующим образом:

$$S = x^2 + \frac{216}{x} + \frac{216}{x}.$$

Произведение $x^2 \cdot \frac{216}{x} \cdot \frac{216}{x}$ равно 216^2. Следовательно, S достигает наименьшего значения, если $x^2 = \frac{216}{x}$, т. е. $x^3 = 216 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 3$. Тогда $S = 108$ ($см^2$).

Задача 24. ***При небрежной транспортировке рулонов типографской бумаги на их поверхности появляются трещины, в результате чего образуется так называемый бумажный срыв, идущий в отходы. Очевидно, что эти отходы тем меньше, чем меньше полная поверхность рулона при данном его объеме. Необходимо исследовать, при каком соотношении между диаметром и длиной (т. е. образующей) рулона срыв бумаги будет наименьшим.***

Решение.

Задача сводится к нахождению такого соотношения между радиусом R основания и высотой H цилиндра, чтобы при данном объеме цилиндра его полная поверхность имела наименьшее значение.

Имеем: $S = 2\pi RH + 2\pi R^2$, $H = \frac{V}{\pi R^2}$.

Поэтому

$$S = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2 = \frac{V}{R} + \frac{V}{R} + 2\pi R^2.$$

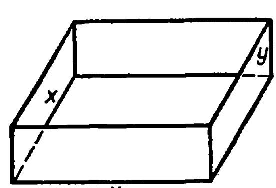


Рис. 27

Надо найти наименьшее значение суммы трех положительных слагаемых

$\frac{V}{R} + \frac{V}{R} + 2\pi R^2$, произведение которых $\frac{V}{R} \cdot \frac{V}{R} \cdot 2\pi R^2 = 2\pi V^2$ неизменно при данном постоянном значении V. Поэтому S достигает наименьшего значения тогда и только тогда, когда $\frac{V}{R} = 2\pi R^2$, т. е. когда $V = 2\pi R^3$. Найдем значение H при $V = 2\pi R^3$.

$$H = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{2\pi R^3}{\pi R^2} = 2R.$$

§ 4. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ЛИНЕЙНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

В этом параграфе мы познакомимся с элементарным методом нахождения оптимальных решений некоторых практических задач, решение которых сводится к определению наибольшего или наименьшего значения некоторой линейной функции. Если число переменных невелико, то этот способ весьма удобен.

Задача 25. ***Пусть на два городских вокзала А и В прибыло 30 гарнитуров мебели, по 15 комплектов на каждый вокзал. Всю мебель требуется доставить в два мебельных магазина С и D, причем в магазин С надо доставить 10 гарнитуров, а в магазин D — 20. Известно, что доставка одного гарнитура с вокзала А в магазин С и D стоит соответственно 1 и 3 денежных единиц, а с вокзала В — 2 и 5 единиц. Надо составить такой план перевозки, чтобы стоимость всех перевозок была наименьшей.***

Решение.

В таблице 1 компактно представлены все условия задачи:

Таблица 1

	C	D	
A	1	3	15
B	2	5	15
	10	20	

В этой таблице числа 15 и 15, стоящие в последнем столбике, указывают на число гарнитуров, имеющихся на вокзалах A и B. Числа 10 и 20 показывают, сколько гарнитуров следует доставить в магазины C и D. Числа 1, 3, 2, 5, написанные в правых верхних углах клеток, обозначают стоимость доставки одного гарнитура с вокзала в магазин.

План перевозки мебели удобно изображать при помощи соответствующей таблицы.

Например, в таблице 2 изображен план, по которому с вокзала A в магазин C следует отправить 3 гарнитура, в магазин D — 12 гарнитуров; с вокзала B отправить 7 гарнитуров в магазин C и 8 — в магазин D.

Таблица 2

	C	D	
A	$\boxed{1}$ 3	$\boxed{3}$ 12	15
B	$\boxed{2}$ 7	$\boxed{5}$ 8	15
	10	20	

Общая стоимость перевозки при этом плане будет равна:

$3 \cdot 1 + 12 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 5 = 93$ денежным единицам.

В таблице 2 представлен один из возможных планов перевозок. Очевидно, что существует еще много других допустимых, т. е. возможных, планов. Из всех допустимых планов нам надо найти оптимальный.

Для определения оптимального плана построим математическую модель нашей задачи, т. е. переведем задачу, данную в виде экономического описания, на математический язык.

Предположим, что в магазин C было доставлено с вокзала A x гарнитуров и с вокзала B y гарнитуров; в магазин D доставили z гарнитуров с вокзала B и u гарнитуров с вокзала B (табл. 3).

Таблица 3

	C	D	
A	$\boxed{1}$ x	$\boxed{3}$ z	15
B	$\boxed{2}$ y	$\boxed{5}$ u	15
	10	20	

В магазин C доставили всего 10 гарнитуров мебели, значит:

$$x + y = 10.$$

В магазин D — 20 гарнитуров:

$$z + u = 20.$$

С вокзала A и B отправлено было по 15 гарнитуров:

$$x + z = 15,$$
$$y + u = 15.$$

Нетрудно видеть, что x, y, z, u — целые неотрицательные числа. Система приобретает такой вид:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ z + u = 20 \\ x + z = 15 \\ y + u = 15 \end{cases} \tag{1}$$

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ u \geqslant 0,$$

$$F = 1 \cdot x + 3 \cdot z + 2 \cdot y + 5 \cdot u. \tag{2}$$

Целевая функция (2) определяет общую стоимость перевозок.

Таким образом, решение задачи может быть сведено к нахождению таких значений x, y, z, u, удовлетворяющих системе (1), при которых F достигает наименьшего значения.

Решение задачи сводится к исследованию функции одной переменной, например x. Действительно, из уравнений системы (1) следует, что $y = 10 - x$, $z = 15 - x$, $u = 5 + x$ (табл. 4).

Таблица 4

	C	D	
A	$\boxed{1}$ x	$\boxed{3}$ $15 - x$	15
B	$\boxed{2}$ $10 - x$	$\boxed{5}$ $5 + x$	15
	10	20	

Общая стоимость перевозок мебели в этом случае будет равна:

$$F = x + 3\,(15 - x) + 2\,(10 - x) + 5\,(5 + x) = x + 90.$$

Мы видим, что переменная x может принимать только такие целые значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Отсюда ясно, что при $x = 0$ F принимает наименьшее значение, равное 90, а при $x = 10$ — наибольшее значение, равное 100. Таким образом, оптимальный план или оптимальное решение этой задачи может быть выражено таблицей 5.

Таблица 5

	C	D	
A	$\boxed{1}$ 0	$\boxed{3}$ 15	15
B	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{5}$ 5	15
	10	20	

Из таблицы 5 следует, что с вокзала A всю мебель надо перевезти в магазин D, а с вокзала B 10 гарнитуров надо перевезти в магазин C, а 5 — в магазин D. Транспортные расходы при этом составят 90 денежных единиц.

Заметим, что в оптимальном плане не использована самая дешевая перевозка (из A в C). Если из A в C доставить хотя бы один гарнитур, то в пункт D из A надо доставлять 14 штук, а из B в C 9 штук (табл. 6).

Таблица 6

	C	D	
A	$\boxed{1}$ 1	$\boxed{3}$ 14	15
B	$\boxed{2}$ 9	$\boxed{5}$ 6	15
	10	20	

Расходы на транспортировку при этом составят

$$F = 1 \cdot 1 + 14 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 5 \cdot 6 = 91 \text{ (ден. ед.)},$$

что дороже, чем при плане таблицы 5. Очевидно, что мы могли бы остальные переменные выразить не через x, а, например, через u (табл. 7).

Таблица 7

	C	D	
A	$\boxed{1}$ $u - 5$	$\boxed{3}$ $20 - u$	15
B	$\boxed{2}$ $15 - u$	$\boxed{5}$ u	15
	10	20	

$F = 1 \cdot (u - 5) + 3 \cdot (20 - u) + 2 \cdot (15 - u) + 5u = 85 + u$. Из таблицы 6 видно, что переменная u может принимать любое целое значение от 5 до 15. При наличии этих ограничений на u функция F достигает наименьшего значения при $u = 5$:

$$F_{\text{наим}} = 90.$$

Оптимальный план перевозок остается прежним.

Попробуйте самостоятельно решить эту задачу, представив целевую функцию F только относительно переменных y или z. Очевидно, что, несмотря на способ решения, при данном условии задачи минимальные расходы составят 90 денежных единиц.

А если изменить условие задачи, например, за счет удешевления доставки с вокзала B в магазин D? Пусть теперь условие задачи представлено таблицей 8.

Таблица 8

	C	D	
A	1	3	15
B	2	3	15
	10	20	

При этом изменении условия задачи система остается той же, что и в предыдущей задаче. Меняется лишь выражение для F.

Пусть x гарнитуров мебели доставили с вокзала A в магазин C. Тогда $F = x + (x - 15)3 + (10 - x)2 + (5 + x)3 = 80 - x$; x принимает целые значения от 0 до 10.

$$F_{\text{наим}} = 80 - 10 = 70 \text{ (ед.)}.$$

Оптимальный план представлен в таблице 9.

Таблица 9

	C	D	
A	1 5	3 10	15
B	2 5	3 10	15
	10	20	

Обратите внимание на то, что с вокзала B мебель доставляется в более отдаленный магазин D, а не в магазин C, что кажется несколько необычным. Изменим теперь условие исходной задачи, перераспределив поставки при неизменных данных о стоимости перевозок (табл. 10).

Таблица 10

	C	D	
A	[1] x	[3] $15-x$	15
B	[2] $20-x$	[5] $x-5$	15
	20	10	

Повлияет ли такое условие на оптимальный план?

$F = 1 \cdot x + 3\,(15 - x) + 2\,(20 - x) + 5\,(x - 5) = 60 + x;$

x изменяется в границах от 5 до 15.

$$F_{наим} = 60 + 5 = 65 \text{ (ед.)}.$$

Запишем оптимальный план (табл. 11):

Таблица 11

	C	D	
A	[1] 5	[3] 10	15
B	[2] 15	[5] 0	15
	20	10	

Задача 26. ***На предприятии 2 цеха и 3 склада. Необходимо определить наиболее выгодную организацию перевозок. В таблице 12 приведены все данные по этой задаче.***

Таблица 12

Склады / Цеха	№ 1	№ 2	№ 3	Изготовлено
I	[3]	[3]	[2]	10000
II	[6]	[5]	[1]	5000
Требуется доставить	4000	8000	3000	

Решение.

Пусть из цеха I на склад 1 перевезено x штук, а на склад 2 — y штук изделий. Тогда из цеха I на склад 3 будет перевезено $(10\,000 - x - y)$ штук изделий, а из цеха II на склады 1, 2, 3 будет отправлено соответственно $4000 - x$, $8000 - y$, $x + y - 7000$ штук изделий (табл. 13).

Таблица 13

	№ 1	№ 2	№ 3	
I	3 x	3 y	2 $10000 - x - y$	10000
II	6 $4000 - x$	5 $8000 - y$	1 $x + y - 7000$	5000
	4000	8000	3000	

Общая стоимость перевозок F при таком предположении будет равна:

$$F = 3x + 3y + 2 \cdot (10\,000 - x - y) + 6 \cdot (4000 - x) + \\ + 5 \cdot (8000 - y) + 1 \cdot (x + y - 7000) = \\ = -x - 3\,(x + y) + 77\,000.$$

Так как $x + y = 10\,000$, то $F = x - 30\,000 + 77\,000 = -x + 47\,000$. Мы видим, что уменьшение F возможно при возрастании x (x — целое число из $[0; 4000]$). Следовательно, при $x = 4000$ F достигает наименьшего значения. Оставшиеся в цехе I 6000 изделий можно перевезти на склад 2, вмещающий 8000 изделий. Это значит, что при $x = 4000$ переменная y принимает свое наибольшее значение, равное 6000. Таким образом, функция F достигает наименьшего значения при $x = 4000$ и $y = 6000$.

Оптимальный план перевозок показан в таблице 14.

Таблица 14

	№ 1	№ 2	№ 3	
I	3 4000	3 6000	2 0	10000
II	6 0	5 2000	1 3000	5000
	4000	8000	3000	

Минимальный расход на перевозку всех 15 000 штук изделий составит 43 000 денежных единиц:

$$F_{\text{наим}} = 43\,000.$$

Задача 27. ***Для изготовления двух видов изделий А и В завод расходует в качестве сырья сталь и цветные металлы, запас которых ограничен. На изготовлении указанных изделий заняты токарные и фрезерные станки в количестве, указанном в таблице* 15.**

Таблица 15

Затраты на одно изделие		A	B	Ресурсы
Материалы	Сталь (кг)	10	70	320
	Цветные металлы (кг)	20	50	420
Оборудование	Токарные станки (станко-ч)	300	400	6 200
	Фрезерные станки (станко-ч)	200	100	3 400
Прибыль на одно изделие (в тыс. руб.)		3	8	

Необходимо определить план выпуска продукции, при котором будет достигнута максимальная прибыль, если время работы фрезерных станков используется полностью.

Решение.

Построим математическую модель задачи. Обозначим через x число изделий вида A, а через y — число изделий вида B. На изготовление всей продукции уйдет $(10x + 70y)$ кг стали и $(20x + 50y)$ кг цветных металлов. Так как запасы стали не превышают 320 кг, а цветных металлов — 420 кг, то

$$10x + 70y \leqslant 320,$$
$$20x + 50y \leqslant 420.$$

$(300x + 400y)$ч — время обработки всех изделий на токарных станках:

$$300x + 400y \leqslant 6200.$$

Учитывая, что фрезерные станки используются максимально, имеем:

$$200x + 100y = 3400.$$

Итак, система ограничений этой задачи есть:

$$\begin{cases} 10x + 70y \leqslant 320 \\ 20x + 50y \leqslant 420 \\ 300x + 400y \leqslant 6200 \\ 200x + 100y = 3400 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Общая прибыль фабрики может быть выражена целевой функцией

$$F = 3x + 8y. \qquad (2)$$

Выразим y через x из уравнения $200x + 100y = 3400$ и подставим полученное выражение вместо y в неравенства и целевую функцию:

$$\begin{cases} x + 7(34 - 2x) \leqslant 32 \\ 2x + 5(34 - 2x) \leqslant 42 \\ 3x + 4(34 - 2x) \leqslant 62 \\ y = 34 - 2x \\ x \geqslant 0 \\ 34 - 2x \geqslant 0, \end{cases} \qquad (3)$$

$$F = 3x + 8(34 - 2x) = -13x + 272. \qquad (4)$$

Преобразуем систему ограничений (3):

$$\begin{cases} 13x \geqslant 206 \\ 8x \geqslant 128 \\ 5x \geqslant 74 \\ 0 \leqslant x \leqslant 17 \\ y = 34 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 15\frac{11}{13} \\ x \geqslant 16 \\ x \geqslant 14\frac{4}{5} \\ 0 \leqslant x \leqslant 17 \\ y = 34 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 \leqslant x \leqslant 17 \\ y = 34 - 2x. \end{cases}$$

Очевидно, что $F = 272 - 13x$ принимает наибольшее значение, если $x = 16$.

$$F_{\text{наиб}} = 272 - 13 \cdot 16 = 64 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Итак, если выпускается 16 изделий вида A и два изделия вида B, то завод получает наибольшую прибыль.

В задачах 25, 26, 27 для определения оптимального решения пришлось искать наименьшее или наибольшее значение линейной функции, причем на переменные накладывались определенные ограничения. Если бы на переменные не накладывалось никаких ограничений, то в этом случае линейная функция не имела бы ни наибольшего, ни наименьшего значений.

Например, функция $F = x + 90$ не будет иметь ни наибольшего, ни наименьшего значений, если x пробегает любые действительные значения. Если же на x наложить определенные ограничения, например (задача 24) считать, что x может принимать только целые значения от 0 до 10, то при $x = 0$ и $x = 10$ функция F будет принимать соответственно наименьшее и наибольшее значения 90 и 100. Если число переменных линейной функции, к определению наибольшего или наименьшего значения которой и сведена задача, достаточно велико, то такую задачу решить элементарным способом уже трудно.

Упражнения.

1. Постройте кратчайшую сеть для вершин правильного пятиугольника; правильного шестиугольника.

2. Определите численное значение параметра a в уравнении $x^2 - ax + a - 1 = 0$, при котором сумма $x_1^2 + x_2^2$ будет наименьшей (x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения, a — действительное число).

3. К каменной стене надо пристроить ограду для сада в форме прямоугольника. Длина ограды $ABCD$ равна l. Какие размеры должны быть у ограды, чтобы площадь, которую она будет ограничивать, была наибольшей?

4. Два прямолинейных шоссейных пути пересекаются в пункте C под углом 60°. К пункту C одновременно отбыли две автомашины: одна со скоростью 1 км/мин — из пункта A, расположенного на одном из этих шоссе на расстоянии 60 км от C, а вторая со скоростью 0,5 км/мин — из пункта B, находящегося на другом из этих шоссе на расстоянии 40 км от C. Через сколько минут после своего отбытия автомашины окажутся на наименьшем расстоянии одна от другой и каково это расстояние?

5. Из городов M и N, расстояние между которыми 145 км, одновременно выезжают, как показано на рисунке 28, велосипедист и мотоциклист.. Скорость велосипедиста 16 км/ч, скорость мотоциклиста 40 км/ч. Через сколько часов расстояние между ними окажется минимальным?

6. На вокзалы A и B прибыло 30 комплектов мебели. Известно, что перевозка одного комплекта с вокзала A в магазины C, D, E соответственно стоит 2, 5, 4 (руб.), а с вокзала B в те же магазины — 1, 3, 5 (руб.). Необходимо доставить по 20 комплектов в каждый из магазинов. Требуется: 1) представить условие задачи в виде таблицы; 2) найти оптимальное решение и изобразить его также в виде таблицы; 3) вычислить минимальную стоимость перевозки.

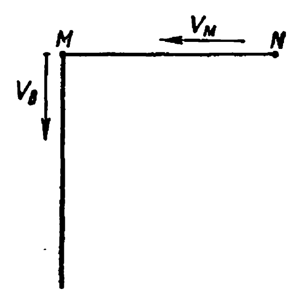


Рис. 28

Таблица 16

Пункты отправления \ Пункты назначения	1	2	3	
I	1,6	2	4	10
II	1,3	2,9	3,8	8
	3	5	8	

7. Условие задачи задано таблицей 16.

I и II — пункты отправления, 1, 2, 3 — пункты назначения. Тарифы приведены в верхнем правом углу каждого прямоугольника. Найдите оптимальное решение.

§ 5. ПОНЯТИЕ О ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

5. 1. ТИПЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Познакомимся с основными типами задач линейного программирования. Обычно задачи линейного программирования разделяют на три типа: 1) транспортная задача; 2) задача составления производственного плана; 3) задача составления смеси.

Математическая модель транспортной задачи.

Задача 28. ***На трех складах* (I, II, III) *имеются соответственно* 90, 70, 50 т *муки, которую надо перевезти в магазины* (1, 2, 3, 4),*соответственно в количестве* 80, 60, 40, 30 т. *Необходимо составить оптимальный план перевозки муки, если стоимость перевозки* 1 т *в магазины* 1, 2, 3, 4 *со склада* I *равна соответственно* 2, 1, 3, 2 руб., *со склада* II — 2, 3, 3, 1 руб., *со склада* III — 3, 3, 2, 1 руб.**

На основании приведенного экономического описания сформулируем эту задачу математически, т. е. построим ее математическую модель. Представим эту задачу в виде таблицы:

Таблица 17

Склады \ Магазины	1	2	3	4	Отправлено тонн муки
I	2 x_{11}	1 x_{12}	3 x_{13}	2 x_{14}	90
II	2 x_{21}	3 x_{22}	3 x_{23}	1 x_{24}	70
III	3 x_{31}	3 x_{32}	2 x_{33}	1 x_{34}	50
Получено тонн муки	80	60	40	30	210 \ 210

Через x_{ij} обозначено количество муки в тоннах, перевозимое с i-го склада в j-й магазин. Так, x_{23} означает, сколько тонн муки перевозится со склада II в 3-й магазин, x_{12} — с I склада во 2-й магазин и т. д. Количество муки, вывозимое со склада I в магазины, будет $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}$. Эта сумма равна 90, так как со склада I вывозится в магазин вся мука:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=90.$$

Аналогично для II и III складов:

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=70,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=50.$$

Так как потребность каждого из магазинов по условию задачи полностью удовлетворяется количеством муки, полученной со складов I, II, III, то

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=80 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=60 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=40 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=30. \end{cases}$$

Естественно считать, что значения переменных x_{ij} неотрицательны (иначе имели бы какой-то смысл обратные перевозки). Итак, переменные x_{ij}, где $i=1, 2, 3$, а $j=1, 2, 3, 4$, удовлетворяют следующей системе уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=90 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=70 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=50 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=80 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=60 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=40 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=30 \\ x_{ij}\geqslant 0,\ i=1, 2, 3,\ j=1, 2, 3, 4. \end{cases} \qquad (1)$$

Система (1) называется *системой ограничений* данной задачи. Обозначив через F все транспортные расходы, имеем:

$$F=2x_{11}+x_{12}+3x_{13}+2x_{14}+2x_{21}+3x_{22}+ \qquad (2)$$
$$+3x_{23}+x_{24}+3x_{31}+3x_{32}+2x_{33}+x_{34}.$$

Функция F называется *целевой функцией*. Каждое решение системы (1) будет являться одним из возможных вариантов решения. Каждое такое решение носит название *допустимого плана*. Задача линейного программирования состоит в отыскании из множества допустимых планов такого плана, который обращал бы в минимум целевую функцию F. Такой допустимый план называют *оптимальным*.

Сформулируем теперь задачу математически: ***на множестве решений системы ограничений* (1) *найти такое, которое обращает в минимум целевую функцию* (2), или: *найти оптимальный план, определяемый системой ограничений* (1) *и целевой функцией* (2).**

Задача, которую мы рассмотрели, может быть представлена и в общем виде, т. е. с любым числом поставщиков и потребителей. Задачи такого типа называются транспортными задачами по критерию стоимости. Математическая модель транспортной задачи имеет некоторые особенности.

В рассмотренной нами задаче общее наличие груза у поставщиков (210 т) равно общей потребности получателей (210 т). Такая модель называется *закрытой моделью*, а соответствующая ей транспортная задача называется *сбалансированной транспортной задачей*.

В экономических расчетах немалую роль играют и так называемые *открытые модели*, в которых указанное равенство не соблюдается. При этом возможны два случая: или запас у поставщиков больше потребности получателей, или, наоборот, спрос превышает наличие грузов.

Система ограничений (1) содержит 7 уравнений с 12 переменными. Одно из этих уравнений (любое) можно отбросить, так как оно вытекает из остальных шести уравнений. Например, последнее уравнение можно получить, если сложить почленно первые три уравнения и от полученного уравнения отнять уравнение, полученное сложением 3-го, 4-го и 5-го уравнений: $(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}) - (x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{13} + x_{23} + x_{33}) = (90 + 70 + 50) - (80 + 60 + 40)$.

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30$. Это следует из того, что если определено наличие груза у всех отправителей и потребность всех потребителей, кроме одного, то спрос последнего легко устанавливается как разность между общим запасом и общей потребностью оставшихся потребителей. Этот вывод распространяется на любую сбалансированную транспортную задачу: если m — число поставщиков, n — число потребителей, то система ограничений содержит $m + n - 1$ независимых уравнений с $m \cdot n$ переменными.

Рассмотрим несбалансированную транспортную задачу.

З а д а ч а 29. ***В пунктах А и В расположены кирпичные заводы, а в пунктах С и D — карьеры, снабжающие их песком. Потребность заводов в песке не больше производительности карьеров. Известно, сколько песка нужно каждому из заводов и сколько его добывают в каждом из карьеров. Кроме того, известна стоимость перевозки*** 1 т ***песка из каждого карьера к заводам. Нужно так спланировать снабжение заводов песком, чтобы затраты были наименьшими. Данные приведены на рисунке*** 29.

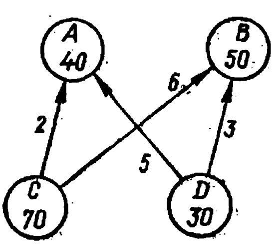


Рис. 29

Построим математическую модель этой задачи. Потребность заводов в песке (90 т) меньше производительности карьеров (100 т). Обозначим через x_{11} количество песка в тоннах, перевозимого из карьера C на завод A, через x_{12} — из C на B, через x_{21} — из D на A, через x_{22} — из D на B. На завод A должно быть доставлено 40 т песка: $x_{11} + x_{21} = 40$. На завод B надо привезти 50 т песка: $x_{12} + x_{22} = 50$. Из карьера C может быть вывезено не более 30 т песка: $x_{21} + x_{22} \leqslant 30$. Из карьера D может быть вывезено не более 70 т песка: $x_{11} + x_{12} \leqslant 70$.

Стоимость всех перевозок определяется целевой функцией

$$F = 2x_{11} + 6x_{12} + 5x_{21} + 3x_{22}. \tag{3}$$

Итак, на множестве решений системы ограничений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \leqslant 70 \\ x_{21} + x_{22} \leqslant 30 \\ x_{11} + x_{21} = 40 \\ x_{12} + x_{22} = 50 \\ x_{ij} \geqslant 0, \ i = 1,\ 2; \ j = 1,\ 2 \end{cases} \tag{4}$$

надо найти такое решение, которое минимизировало бы целевую функцию (3). Заметим, что в систему ограничений несбалансированной транспортной задачи входят наряду с уравнениями также и неравенства.

Математическая модель задачи составления производственного плана.

Составление плана (программы) колхоза, цеха, завода, отрасли промышленности является одной из важнейших задач экономики народного хозяйства. Решение таких задач осложняется тем, что приходится находить значения не двух и не трех переменных величин — число переменных может быть от нескольких десятков до нескольких сотен и даже тысяч.

Рассмотрим простейшую задачу составления производственного плана.

Задача 30. ***Некоторому заводу требуется составить оптимальный план выпуска двух видов изделий при определенных возможностях четырех видов машин. План выпуска этих изделий надо составить так, чтобы от реализации изготовленной продукции завод получил наибольшую прибыль. Оба вида изделий последовательно обрабатываются этими машинами. В плане должно быть предусмотрено, что первая машина ежедневно может обрабатывать эту продукцию лишь в течение*** 8 ч, ***вторая*** — 12 ч, ***третья*** — 12 ч, ***четвертая*** — 9 ч.

В таблице указано время, необходимое для обработки каждого изделия этих двух видов (в часах). Нуль означает, что изделие машинами данного вида обрабатывать не надо.

Таблица 18

Изделия	Виды машин			
	1-й	2-й	3-й	4-й
I	1	0,5	1	0
II	1	1	0	1
Возможное время работы машины (в часах)	18	12	12	9

Завод от реализации одного изделия I вида получает 4 руб., а от реализации одного изделия II вида — 6 руб. прибыли.

Построим математическую модель этой задачи. Пусть x_1 — число изделий I вида, а x_2 — число изделий II вида. Так как машины каждого вида (1, 2, 3, 4) могут обрабатывать продукцию не более (18, 12, 12, 9) часов соответственно, то получаем следующую систему ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 18 \\ 0{,}5x_1 + x_2 \leqslant 12 \\ x_1 \leqslant 12 \\ x_2 \leqslant 9 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Общая прибыль может быть выражена как

$$F = 4x_1 + 6x_2, \tag{2}$$

где x_1 и x_2 удовлетворяют условиям задачи (1).

Таким образом, построенная математическая модель данной задачи состоит из системы неравенств (1), на множестве решений которой надо найти наибольшее значение целевой функции (2).

Рассмотренная нами ранее задача 27 также относится к задачам составления плана. Система ограничений ее наряду с неравенствами содержит и уравнение. В общем виде математическая модель задачи составления плана может быть записана так: на множестве решений системы ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \leqslant b_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

найти такое, которое максимизирует значение целевой функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Заметим, что: 1) ограничения системы имеют вид неравенств и уравнений;

2) требуется максимизировать значение целевой функции.

Математическая модель задачи составления смеси.

Еще одним распространенным типом задач линейного программирования являются задачи составления смеси. Примером такой задачи может быть задача составления таких смесей нефтепродуктов, которые удовлетворяли бы определенным техническим требованиям и были бы наиболее дешевыми.

Пусть дневная потребность в белках, жирах, углеводах, витаминах известна. Кроме того, известно содержание этих веществ в имеющихся продуктах, а также цена единицы каждого продукта. Требуется составить такой рацион, который, удовлетворяя дневной потребности в необходимых веществах, вместе с тем был бы наиболее дешевым. Практически подобная задача может ставиться в любом колхозе или совхозе, занимающемся откормом животных.

Рассмотрим пример простейшей задачи составления смеси.

Задача 31. *Требуется составить смесь, содержащую три химических вещества A, B, C. Известно, что составляемая смесь должна содержать вещества A не менее* 6 *ед., вещества B не менее* 8 *ед., вещества C не менее* 12 *ед.*

Вещества A, B, C содержатся в трех видах продуктов — I, II *и* III — *в концентрации, указанной в таблице 19.*

Таблица 19

Продукты	Химические вещества		
	A	*B*	*C*
I	2	1	3
II	1	2	4
III	3	15	2

Стоимость единицы продуктов I, II, III *различна: единица продукта* I *стоит* 2 руб., *единица продукта* II — 3 руб., *единица продукта* III — 2,5 руб. *Смесь надо составить так, чтобы общая стоимость используемых продуктов была наименьшей.*

Решение.

Построим математическую модель задачи составления смеси. Число единиц продукта I, входящего в смесь, обозначим через x_1, продукта II — через x_2 и продукта III — через x_3.

Составляемая смесь должна содержать вещество A. Вещество A содержится во всех трех продуктах. На каждую единицу продукта I приходится 2 части концентрации вещества A. Следовательно, если использовано x_1 единиц продукта I, то в составленной смеси будет $2x_1$ частей вещества A. Если использовано x_2 единиц продукта II, то в составленной смеси будет $1x_2$ частей вещества A. Наконец, если использовано x_3 единиц продукта III, то в смеси будет $3x_3$ частей вещества A.

Так как общее количество вещества A в смеси должно быть не меньше 6, то

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 6.$$

Смесь должна содержать и вещество B, которое также содержится в трех продуктах. В каждой единице продукта I содержится 1 часть вещества B, следовательно, если использовано x_1 единиц продукта I, то в составляемой смеси будет $1x_1$ частей вещества B. Аналогично, если использовано x_2 единиц продукта II, то в составляемой смеси окажется $2x_2$ частей вещества B. Если использовано x_3 единиц продукта III, то в смеси окажется $1{,}5x_3$ частей вещества B. Таким образом, общее количество вещества B окажется $x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3$, но его должно быть в смеси не менее 8 единиц:

$$x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \geqslant 8.$$

Рассуждая аналогично, мы придем к тому, что общее количество вещества C в составляемой смеси должно быть не менее 12:

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geqslant 12.$$

Стоимость смеси слагается из $2x_1$ руб. (стоимости использованного продукта I), $3x_2$ руб. (стоимости использованного продукта II) и $2{,}5x_3$ руб. (стоимости использованного продукта III). Следовательно, общая стоимость смеси будет равна

$$2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3.$$

Из условия задачи следует, что число единиц используемого продукта всегда неотрицательно: $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$.

Таким образом, математическая модель задачи представлена системой линейных неравенств

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 6 \\ x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 \geqslant 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geqslant 12 \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, \end{cases} \qquad (1)$$

на множестве решений которой надо найти наименьшее значение целевой функции

$$F = 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3. \qquad (2)$$

Заметим, что: 1) все ограничения системы (1) имеют вид неравенств; 2) требуется минимизировать F.

5.2. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

В каждой задаче линейного программирования ищутся значения переменных при условии, чтобы:

1) эти значения удовлетворяли некоторой системе линейных уравнений и неравенств;

2) при этих значениях некоторая линейная функция обращалась бы в минимум или максимум.

Одним из универсальных методов линейного программирования является *симплексный метод* (с идеей этого метода мы познакомимся в дальнейшем), который эффективен при исследовании математической модели задачи линейного программирования, заданной в канонической форме. Ее система ограничений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \qquad (1)$$

Требуется на множестве решений системы ограничений (1) найти такое, при котором целевая функция

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (2)$$

достигла бы минимального значения.

Существенно, что в канонической форме модели задачи линейного программирования все ограничения системы (1) (кроме неравенств, выражающих условие неотрицательности переменных) имеют вид уравнений и требуется найти минимальное значение целевой функции.

Чтобы иметь возможность применить симплексный метод, необходимо задачу линейного программирования привести к канонической форме.

Проследим, как это делается в конкретных случаях. Рассмотренная ранее математическая модель сбалансированной транспортной задачи 28 уже записана в канонической форме.

Однако в большинстве экономических задач линейного программирования чаще всего в систему ограничений первоначально наряду с уравнениями входят и неравенства.

Вернемся к задаче 30 составления производственного плана. От ограничений, заданных системой линейных неравенств (1) с помощью введения новых переменных (их называют *дополнительными переменными*) $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$, $x_6 \geqslant 0$, можно перейти к системе ограничений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ 0{,}5x_1 + x_2 + x_4 = 12 \\ x_1 + x_5 = 12 \\ x_2 + x_6 = 9 \\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, \ \dots, \ 6. \end{cases}$$

Экономический смысл дополнительных переменных в нашем примере заключается в том, что они означают величину неиспользованного времени работы машин соответствующих видов. Если бы, например, машины первого вида работали все 18 ч, то выполнялось бы соотношение $x_1 + x_2 = 18$, откуда сразу следует, что $x_3 = 0$. Но мы допускаем возможности неполного использования рабочего времени, когда $x_1 + x_2 < 18$. В этом случае x_3 приобретает положительное значение и может рассматриваться как неиспользованный лимит времени. Аналогично, x_4, x_5, x_6 характеризуют неиспользованное время работы машин второго, третьего и четвертого видов.

Задача нахождения максимального значения целевой функции может быть сведена к нахождению минимального значения $-F$, так как $\max F = -\min(-F)$.

Система ограничений задачи составления смеси (задача 31) имеет вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 6 \\ x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 \geqslant 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Введением дополнительных переменных $x_4 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$, $x_6 \geqslant 0$ эту систему неравенств легко привести к системе ограничений вида:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 - x_5 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_6 = 12 \\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, \ \dots, \ 6. \end{cases}$$

Дополнительные переменные вычитаются из левой части неравенств. Итак:

1) для представления в канонической форме и решения задачи линейного программирования исходные ограничения — неравенства должны быть преобразованы в уравнения с помощью введения дополнительных неотрицательных переменных;

2) максимизируемая целевая функция F заменяется минимизируемой функцией $-F$.

5.3. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

Если число переменных системы ограничений и целевой функции в математической модели задачи линейного программирования равно 2 или 3, то такую задачу можно решить графически.

Познакомимся с графическим методом решения на конкретных примерах.

Задача 32. ***Найдем максимальное значение целевой функции** $F = 4x_1 + 6x_2$ **при условиях (на множестве допустимых планов):***

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0 & (a) \\ x_2 \geqslant 0 & (b) \\ x_1 + x_2 \leqslant 18 & (c) \\ 0{,}5x_1 + x_2 \leqslant 12 & (d) \\ x_1 \leqslant 12 & (e) \\ x_2 \leqslant 9 & (f). \end{cases}$$

(Практическое содержание данной задачи линейного программирования уже было разобрано в задаче 30 составления производственного плана.)

Решение.

1. Прежде всего найдем множество допустимых планов (рис. 30). Неравенства (a) и (b) показывают, что многоугольник допустимых планов расположен в первом квадранте. Неравенства (e) и (f) ограничивают в первом квадранте прямоугольник $D_2OC_1C_2$. Нера-

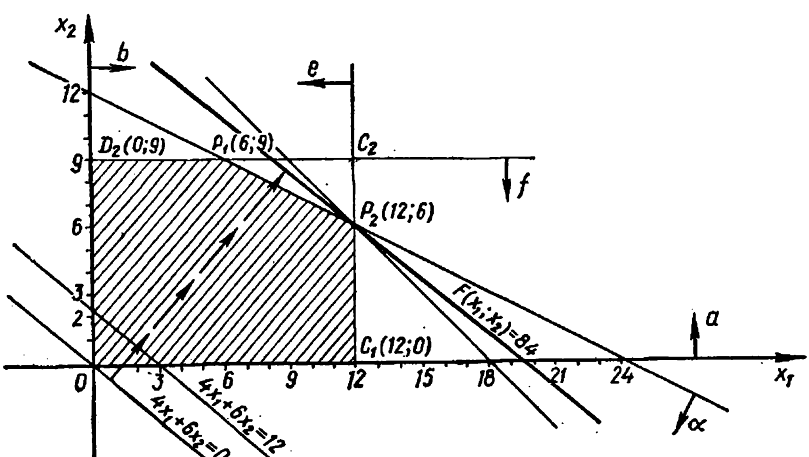


Рис. 30

венства (c) и (d) еще более суживают искомую область до многоугольника $OD_2P_1P_2C_1$, являющегося многоугольником допустимых планов.

2. Среди точек многоугольника $OD_2P_1P_2C_1$ выберем такую, в которой целевая функция $F(x_1, x_2)$ достигает максимального значения. Для этого по уравнению $4x_1 + 6x_2 = C$ строим несколько прямых (линий уровня $F(x_1, x_2)$, произвольно выбирая C равным 12, 0 и т. д.). Так получается семейство параллельных между собой прямых. С увеличением значения C прямая $4x_1 + 6x_2 = C$ будет двигаться вверх направо (рис. 30). Последней вершиной, к которой прикоснется прямая $4x_1 + 6x_2 = C$ при выходе за границу многоугольника допустимых решений системы ограничений, будет вершина P_2. Определим ее координаты. Точка P_2 образована пересечением трех прямых: $x_1 + x_2 = 18$, $0{,}5x_1 + x_2 = 12$, $2x_1 = 24$. Поэтому для определения ее координат достаточно решить, например, систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 18, \\ 2x_1 = 24. \end{cases}$$

В результате получаем: P_2 (12; 6). Полученное решение будет оптимальным производственным планом, дающим цеху максимальную прибыль. Найдем ее: $F_{max} = 4 \cdot 12 + 6 \cdot 6 = 84$ (руб.).

Для сравнения вычислим значение целевой функции в соседней вершине P_1. Находим ее координаты:

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + x_2 = 12, \\ 2x_2 = 18, \end{cases} \qquad P_1\ (6;\ 9).$$

Значение целевой функции $F(x_1, x_2)$ в точке P_1:

$$F = 4 \cdot 6 + 6 \cdot 9 = 78 \text{ (руб.)}.$$

F (6; 9) меньше, чем F (12; 6).

Если бы F (12; 6) равнялось F (6; 9), то задаче удовлетворяли бы все точки $[P_1, P_2]$.

Прямая $4x_1 + 6x_2 = C$ в этом случае была бы параллельна стороне P_1P_2 многоугольника допустимых планов.

Задача 33. *Ежедневно в город поставляется одним видом транспорта* 12 т *картофеля из трех колхозов: из* I *колхоза по цене* 4 руб. *за* 1 т, *из* II — *по цене* 3 руб., *из* III — 1 руб. *Чтобы поставка картофеля в город была произведена своевременно, необходимо на погрузку требуемых* 12 т *затратить не более* 40 мин. *Известно, что в* I *колхозе уровень механизации позволяет погрузку* 1 т *производить за* 1 мин., *во* II — *за* 4 мин., *в* III — *за* 3 мин. *Производственные мощности этих колхозов выглядят так:* I *колхоз должен ежедневно выделять для поставки в город не более* 10 т, II — *не более* 8 т, III — *не более* 6 т. *Как распре-*

делить заказы на поставку 12 т между колхозами, чтобы общая стоимость привозимого в город картофеля была минимальной?

Решение.

Сначала построим математическую модель этой задачи. Обозначим через x_1, x_2, x_3 количество тонн картофеля, привозимого соответственно из I, II, III колхозов в город. Тогда задачу можно будет сформулировать так. Минимизировать целевую функцию

$$F = 4x_1 + 3x_2 + 1x_3 \qquad (1)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0 & (a) \\ x_2 \geqslant 0 & (b) \\ x_3 \geqslant 0 & (c) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 12 & (d) \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leqslant 40 & (e) \\ x_1 \leqslant 10 & (f) \\ x_2 \leqslant 8 & (g) \\ x_3 \leqslant 6 & (h) \end{cases} \qquad (2)$$

1. Изобразим в пространстве с помощью геометрических построений условия (2), т. е. построим многогранник допустимых планов.

Из условия неотрицательности переменных следует, что область решений задачи заключена между положительными осями координат Ox_1, Ox_2, Ox_3, как это показано на рисунке 31.

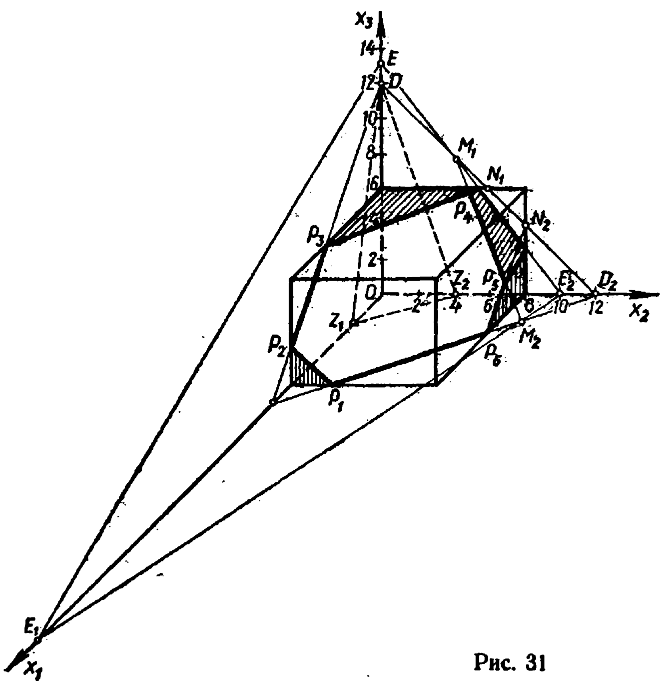


Рис. 31

Условия (f), (g), (h) ограничивают множество возможных решений задачи прямоугольным параллелепипедом, образованным шестью плоскостями, описываемыми уравнениями $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 = 10$, $x_2 = 8$, $x_3 = 6$.

Если рассматривать точку вне этого параллелепипеда, то план, соответствующий координатам этой точки, невыполним, ибо будут превышены производственные мощности колхозов. Из условия (d) следует, что оптимальное решение должно принадлежать части плоскости D_1, D_2, D_3, описываемой уравнением $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ и ограниченной прямоугольным параллелепипедом. Итак (без учета условия (e)), имеем многоугольник допустимых планов $P_1P_2P_3N_1N_2P_6$. Накладываем последнее условие (e). Точки, удовлетворяющие этому условию, лежат за плоскостью $E_1E_2E_3$, ближе к началу координат. Но плоскости $E_1E_2E_3$ и $D_1D_2D_3$ пересекаются по прямой M_1M_2. Таким образом, многоугольник $P_1P_2P_3N_1N_2P_6$ разделяется на две части, причем в точках одной из частей ($P_4N_1N_2P_5$) последнее условие (e) не выполняется.

Следовательно, многоугольником допустимых планов данной задачи линейного программирования является многоугольник $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, точки которого удовлетворяют всем восьми условиям системы ограничений (2).

2. Воспользуемся критерием оптимальности: из множества точек многоугольника $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ надо выбрать только те, координаты которых обращают в минимум целевую функцию $F = 4x_1 + 3x_2 + 1x_3$.

В теории линейного программирования доказано, что целевая функция достигает своего минимального (или максимального) значения в крайних точках многоугольника допустимых планов. Здесь могут быть два пути отыскания нужных точек: 1) определяются координаты всех шести вершин многоугольника и путем подстановки полученных координат вершин в $F = 4x_1 + 3x_2 + x_3$ выбирается оптимальный план, соответствующий минимуму F;

2) сначала строится плоскость $4x_1 + 3x_2 + x_3 = a$, соответствующая некоторому (любому) значению целевой функции, а затем определяется та вершина, которую эта плоскость достигает раньше (или последней) при перемещении параллельно самой себе.

Второй путь более рационален. Построим плоскость $Z_1Z_2D_3$, заданную уравнением $4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$ ($a = 12$ взяли произвольно). При перемещении этой плоскости параллельно самой себе в сторону увеличения значения a от начала координат (т. е. $a > 12$) первыми вершинами, к которым прикоснется эта плоскость, видимо, будут или P_3, или P_4. То, что вершины P_2, P_5 и P_6 не будут первыми, вытекает из рассмотрения $\triangle D_1Z_1D_3$ и $\triangle D_2Z_2D_3$. Найдем координаты P_3: P_3 является точкой пересечения трех плоскостей, заданных уравнениями: $x_3 = 6$, $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, $x_2 = 0$. Значит, ее координаты суть (6; 0; 6).

Значение целевой функции F, соответствующее плану P_3 (6; 0; 6), есть $F(P_3) = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 6 = 30$ (руб.).

Вычислим координаты точки P_4:

$$\begin{cases} x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 40, \quad P_4\left(\frac{2}{3}, 5\frac{1}{3}, 6\right), \end{cases}$$

$$F(P_4) = 4 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 5\frac{1}{3} + 6 = 24\frac{2}{3} \quad \text{(руб.)}.$$

Таким образом, в крайней точке $P_4\left(\frac{2}{3};\ 5\frac{1}{3};\ 6\right)$ целевая функция $F = 4x_1 + 3x_2 + x_3$ достигает минимального значения.

Иными словами, минимум общей стоимости транспортировки 12 т картофеля, привозимого в город, получается, если из I колхоза брать $\frac{2}{3}$ т, из II — $5\frac{1}{3}$ т, из III — 6 т.

Задача 34. ***Решим графически задачу 27.***

Решение.

Математическая модель этой задачи представляется системой ограничений

$$\begin{cases} x + 7y \leqslant 32 \\ 2x + 5y \leqslant 42 \\ 3x + 4y \leqslant 62 \\ 2x + y = 34 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

на множестве решений которой надо найти наибольшее значение целевой функции

$$F = 3x + 8y. \tag{2}$$

Найдем множество точек плоскости (множество допустимых планов), координаты которых удовлетворяют системе ограничений (1) (рис. 32). Неравенства $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ показывают, что множество допустимых планов расположено в первом квадранте. Неравенства $x + 7y \leqslant 32$, $2x + 5y \leqslant 42$, $3x + 4y \leqslant 62$ вместе с осями координат ограничивают в первом квадранте фигуру $OACKL$ (она отмечена штриховкой). Уравнение $2x + y = 34$ из множества точек пятиугольника $OACKL$ выделяет множество допустимых планов. Это точки $[EN]$. Среди точек отрезка EN выберем такую, в которой целевая функция F достигает максимального значения. Для этого по уравнению $3x + 8y = c$ строим несколько линий уровня.

Последней точкой $[EN]$, которой коснется прямая $3x + 8y = c$ при выходе из полученного многоугольника, будет точка E. Определим ее координаты. Для этого достаточно решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 34 \\ 2x + 5y = 42, \end{cases} \tag{3}$$

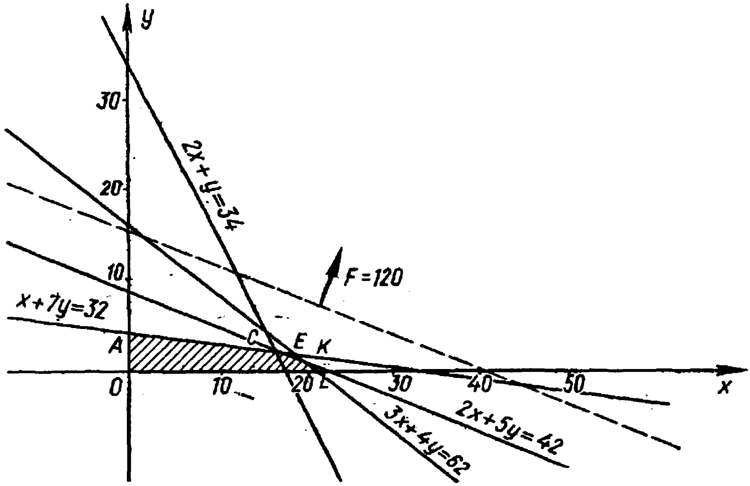


Рис. 32

так как точка E является пересечением прямых $2x + y = 34$ и $2x + 5y = 42$.

Решением системы (3) является (16; 2). Это же является и оптимальным планом:

$$F_{max} = 3 \cdot 16 + 8 \cdot 2 = 64 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Задача 35. ***Для откорма животных употребляется два вида кормов I и II. В каждом килограмме корма I содержится 5 единиц питательного вещества А и 2,5 единицы питательного вещества В, а в каждом килограмме корма II содержится 3 единицы питательного вещества А и 3 единицы вещества В. Экспериментальным путем было установлено, что откорм животных будет экономически выгоден, когда каждое животное будет получать в дневном рационе не менее 30 единиц питательного вещества А и не менее 22,5 единицы вещества В. Известно, что стоимость 1 кг корма I и 1 кг корма II одинаковы и равны 1 денежной единице. Каков должен быть ежедневный расход корма каждого вида, чтобы затраты на корм были минимальными и чтобы были соблюдены указанные выше условия питания?***

Решение.

1. Построим математическую модель этой задачи. Обозначим через x и y число килограммов корма I и II видов соответственно, расходуемых ежедневно. Тогда система ограничений имеет вид:

$$\begin{cases} 5x + 3y \geqslant 30 & (a) \\ 2{,}5x + 3y \geqslant 22{,}5 & (b) \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Минимизируемая целевая функция $F = x + y$.

2. Построим множество допустимых планов (на рис. 33 это множество заштриховано). Очевидно, что F достигает наименьшего значения в точке M.

Найдем ее координаты, для чего решим систему

$$\begin{cases} 5x + 3y = 30 \\ 2{,}5x + 3y = 22{,}5. \end{cases}$$

Получаем (3; 5); $F_{\min} = 8$ (ден. ед.).

Задача 36. ***Найдите максимальное значение целевой функции***

$$F = 3 - 4x + y \qquad (1)$$

на множестве решений системы ограничений

$$\begin{cases} 1 - x \geqslant 0 \\ 1 - x + y \geqslant 0 \\ x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решение.

Построим область допустимых планов, соответствующую системе (2) (рис. 34). Из рисунка 34 видно, что, какое бы значение c (даже сколь угодно большое) функция ни принимала, прямая $3 - 4x + y = c$ всегда будет пересекать область допустимых решений, а следовательно, будет существовать неотрицательное решение, при котором это значение c функцией F достигается. Отсюда следует, что функция $F = 3 - 4x + y$ на множестве решений системы (2) не ограничена сверху, т. е. максимального значения не достигает.

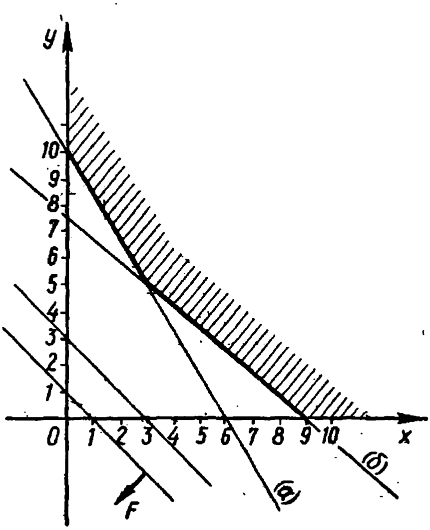
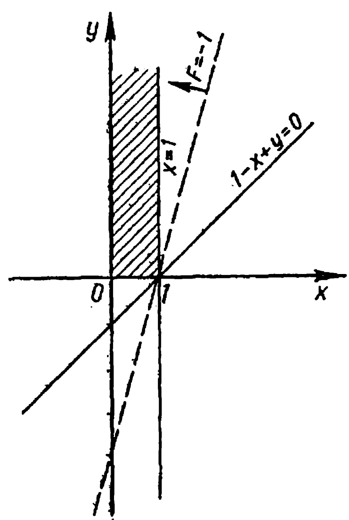


Рис. 33



Рис, 34

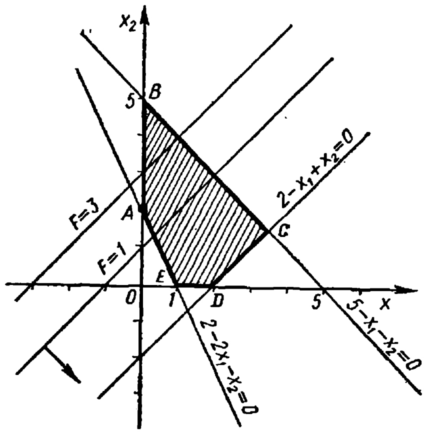


Рис. 35

Задача 37. ***На множестве решений системы ограничений***

$$\begin{cases} 2 - 2x_1 - x_2 \geqslant 0 \\ 2 - x_1 + x_2 \geqslant 0 \\ 5 - x_1 - x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

найти наименьшее значение функции $F = x_2 - x_1$.

Решение.

Множеством допустимых планов является многоугольник $ABCDE$ (рис. 35). Прямая $2 - x_1 - x_2 = 0$ параллельна прямым уровня функции $F = x_2 - x_1$. Следовательно, все точки отрезка CD дают одно и то же минимальное значение целевой функции $F = x_2 - x_1$ на множестве точек пятиугольника $ABCDE$: $F = -2$.

Задача 38. ***Один цех фабрики выпускает два вида изделий: А и В. Сколько изделий должно выпускаться ежедневно, чтобы максимизировать общее число изделий и прибыль Р? Необходимые данные задачи приведены в таблице 20.***

Таблица 20

	A	B	Максимальное время работы машин (в ч)
Прибыль от одного изделия (в руб.)	3	1	
Время обработки на станке (в ч)	2	0	90
Время штамповки (в ч)	0	2	80
Время полировки (в ч)	8	5	390
Время окраски (в ч)	5	5	300

Решение.

1. Построим математическую модель задачи. Обозначим через x число изделий вида A, а через y — число изделий вида B, выпускаемых ежедневно. Система ограничений задачи:

$$\begin{cases} 2x \leqslant 90 \\ 2y \leqslant 80 \\ 8x + 5y \leqslant 390 \\ 5x + 5y \leqslant 300 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Целевые функции:

$$\begin{aligned} &\text{а) } n = x + y; \\ &\text{б) } p = 3x + y. \end{aligned} \qquad (2)$$

Существенно, что в задаче не одна целевая функция, а две, и обе они должны быть максимизированы.

Задача может быть сформулирована так: найти такое решение системы ограничений (1), при котором достигают максимума целевые функции (2).

2. Строим многоугольник допустимых планов, соответствующий системе (1). Из чертежа видно, что n достигает максимума в любой точке $[CD]$, а p максимизируется в точке B. Следовательно, n и p при данном условии задачи не достигают максимума одновременно ни в одной точке многоугольника допустимых планов.

Задача решений не имеет.

3. А что, если изменить условие задачи?

Поставим целью выработать предложения по реорганизации производственных условий на фабрике, чтобы можно было составить план, максимизирующий одновременно и общее число изделий n и прибыль p.

Из анализа рисунка 36 видно несколько путей решения поставленной задачи. Можно, например, прямую CB заменить другой прямой, параллельной p и проходящей или через точку C (1), или через точку B (2). Тогда решением задачи будут координаты точки пересечения прямой $x + y = 60$ и вновь проведенной прямой.

На рисунке 37 представлен случай (1).

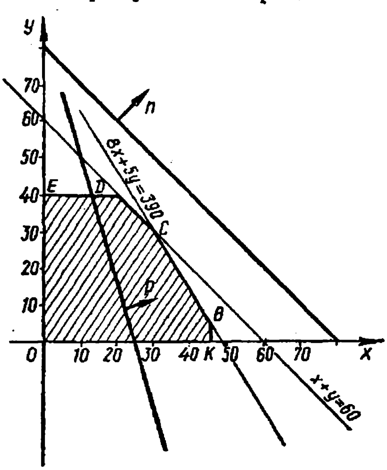


Рис. 36

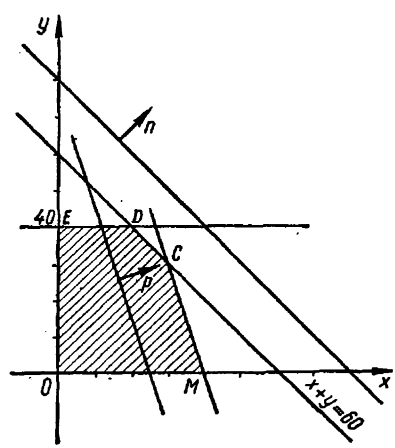


Рис. 37

Найдем уравнение прямой CM. Эта прямая проходит через точку C (30; 30) параллельно прямой $3x + y = p$. Из условия параллельности следует, что уравнение искомой прямой будет иметь вид $3x + y = l$. Найдем l, подставив вместо x и y координаты точки C: $l = 3 \cdot 30 + 30 = 120$; $3x + y = 120$.

Умножим обе части полученного уравнения на число $\frac{390}{120}$, чтобы правая часть стала равна числу 390. Получаем:

$$6\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{6}y = 390.$$

Соответствующее неравенство системы ограничений:

$$6\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{6}y \leqslant 390.$$

Итак, не ухудшая качества изделий, надо найти возможность уменьшить время полировки одного изделия вида A до $6\frac{1}{2}$ ч, а вида B — до $2\frac{1}{6}$ ч. Тогда при плане 30 изделий вида A, 30 изделий вида B максимизируется и число всех выпускаемых изделий ($n = 60$) и прибыль ($p = 3 \cdot 30 + 30 = 120$ (руб.)).

Рассмотрим случай (2) (рис. 38). Прямая C_1B параллельна прямой $3x + y = p$. Следовательно, ее уравнение $3x + y = K$. Найдем число K из условия, что (C_1B) проходит через точку B:

$$K = 3 \cdot 45 + 6 \cdot 1 = 141.$$

Итак, прямая C_1B описывается уравнением $3x + y = 141$. Умножим обе части уравнения на $\frac{390}{141}$: $8\frac{14}{47}x + 2\frac{36}{47}y = 390.$

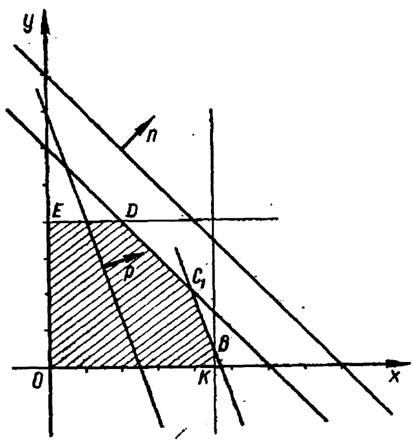


Рис. 38

Соответствующее неравенство системы ограничений:

$$8\frac{14}{47}x + 2\frac{36}{47}y \leqslant 390.$$

Следует увеличить время полировки одного изделия вида A до $8\frac{14}{47}$ ч, а вида B — уменьшить до $2\frac{36}{47}$ ч.

Найдем координаты точки C_1:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 3x + y = 141, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 40{,}5 \\ y = 19{,}5. \end{cases}$$

Учитывая, что значения x и y целые, берем $x = 40$, $y = 19$.

$$n_{\max} = 59, \; p_{\max} = 3 \cdot 40 + 19 = 139 \text{ (руб.)}.$$

Можно ли еще разработать предложения по реорганизации производственных условий для достижения максимальной прибыли и максимального общего числа изделий одновременно?

5.4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ В СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

Симплексный метод в настоящее время получил широчайшее практическое применение и стал универсальным методом линейного программирования.

Алгоритм метода состоит из ряда шагов. Проследим за этой последовательностью шагов на примерах, но предварительно познакомимся с некоторыми понятиями, связанными с решением систем линейных уравнений. Именно такой вид имеет система ограничений задачи линейного программирования в канонической форме.

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.

Система линейных уравнений называется *несовместной*, если множество ее решений пусто.

Например, система $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$ несовместна.

Совместная система линейных уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение.

Например, система $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение (1; 2).

Совместная система линейных уравнений называется *неопределенной*, если она имеет бесконечное множество решений.

Решение системы $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$ сводится к решению уравнения $x_1 + x_2 = 2$. Запишем его множество решений:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_2 \\ -\infty < x_2 < +\infty. \end{cases}$$

При решении задач линейного программирования нас будет интересовать случай, когда система линейных уравнений неопределенна, причем практическое значение имеют лишь неотрицательные решения системы ограничений.

Пусть дана система линейных уравнений вида $\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 5 \\ x_2 + 5x_3 = 11. \end{cases}$ (1)

Видим, что число уравнений в системе меньше числа переменных. Выразим x_1 и x_2 через x_3:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 4x_3 \\ x_2 = 11 - 5x_3. \end{cases} \tag{2}$$

Мы получим общее решение исходной системы. Если переменной x_3 придавать произвольные числовые значения, то будут получаться частные решения системы (1). Пусть, например, $x_3 = 1$. Тогда $x_1 = 1$, $x_2 = 6$, т. е. имеем решение (1; 6; 1).

Переменные x_1 и x_2 называются *базисными*, а переменная x_3, через которую мы выразили базисные переменные, называется *небазисной* переменной.

Совокупность переменных x_1 и x_2 образует базис: Б (x_1, x_2).

Если x_3 придать значение, равное нулю, то полученное частное решение (5; 11; 0) называется *базисным решением*, соответствующим базису (x_1, x_2).

В качестве базисных переменных можно взять и другие пары переменных: (x_1, x_3), (x_2, x_3).

Как перейти от базиса Б (x_1, x_2) к базису Б (x_1, x_3)?

Для этого надо переменную x_3 перевести в базисные, а x_2 — в небазисные. Из второго уравнения системы (2) выразим x_3 через x_2 и подставим это выражение в первое уравнение:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{19}{5} + \dfrac{4}{5}x_2 \\ x_3 = \dfrac{11}{5} - \dfrac{1}{5}x_2. \end{cases} \tag{3}$$

Найдем базисное решение, соответствующее базису Б (x_1, x_3): $\left(-\frac{19}{5};\ 0;\ \frac{11}{5}\right)$.

Перейдем теперь от базиса Б (x_1, x_3) к базису Б (x_2, x_3):

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{19}{4} + \dfrac{5}{4}x_1 \\ x_3 = -\dfrac{7}{8} - \dfrac{5}{8}x_1. \end{cases}$$

Базисное решение, соответствующее базису Б (x_2, x_3): $\left(0;\ \frac{19}{4};\ \frac{7}{8}\right)$.

Из трех найденных базисных решений лишь одно неотрицательное. Именно такие решения системы ограничений нас и будут интересовать. Доказано, что если задача линейного программирования имеет решение, то оно достигается на множестве базисных неотрицательных решений системы ограничений канонической формы задачи.

Задача 39. ***Минимизируем $F = x_2 - x_1$ при неотрицательных x_1 и x_2, удовлетворяющих системе ограничений:***

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5. \end{cases} \tag{1}$$

Решение.

Эти ограничения могут рассматриваться как происшедшие от неравенств, поскольку каждая из переменных x_3, x_4, x_5 встречается только в одном уравнении.

1. Запишем ограничения как уравнения, выражающие базисные переменные через небазисные:

$$\begin{cases} x_3 = 2 + 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 2 - x_1 + 2x_2 \\ x_5 = 5 - x_1 - x_2. \end{cases} \tag{2}$$

Базис Б состоит из переменных x_3, x_4, x_5. Ему соответствует базисное неотрицательное решение (0; 0; 2; 2; 5).

Теперь надо выразить F через небазисные переменные. В нашем конкретном случае это, оказывается, уже сделано.

2. Проверим, достигла ли целевая функция своего минимального значения. Коэффициент при x_1 в выражении для F отрицателен. Следовательно, возрастание x_1 приведет к дальнейшему уменьшению F. Однако при увеличении значения x_1 значения переменных x_4, x_5 будут уменьшаться, и необходимо следить за тем, чтобы ни одна из них не стала отрицательной. Так как увеличение значения x_1 ведет к увеличению значения x_3, то для этой переменной такой опасности не существует. Из анализа других переменных получаем, что значение x_1 может быть увеличено только до 2. Такое увеличение даст $x_4 = 0$, $x_3 = 6$, $x_5 = 3$.

Новый базис Б состоит из x_1, x_3, x_5.

3. Чтобы приступить к выполнению следующего шага, выразим эти переменные и целевую функцию через небазисные переменные x_2 и x_4. Для этого сначала решим второе уравнение системы (2) относительно новой базисной переменной x_1:

$$x_1 = 2 + 2x_2 - x_4.$$

Подстановка этого выражения в остальные уравнения и целевую функцию дает:

$$\begin{aligned} x_3 &= 6 + 3x_2 - 2x_4, \\ x_5 &= 3 - 3x_2 + x_4, \\ F &= -2 - x_2 + x_4. \end{aligned}$$

4. Можно и дальше уменьшать целевую функцию F, увеличивая значение x_2. Однако x_2 можно увеличивать только до 1: это следует из уравнения $x_5 = 3 - 3x_2 + x_4$. Подстановка $x_2 = 1$ в другие уравнения дает $x_1 = 4$, $x_3 = 9$. Еще раз выразим базисные переменные и F через небазисные:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 \\ x_2 = 1 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \\ x_3 = 9 - x_4 - x_5, \end{cases}$$

$$F = -3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5.$$

Базис Б состоит из переменных x_1, x_2, x_3.

5. Увеличивая значения x_4 и x_5, мы уже не можем получить дальнейшего уменьшения F. Следовательно, нами получено оптимальное решение.

Наименьшее значение F, равное -3, достигается при $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 9$.

Сравним значения целевой функции, соответствующие различным базисам:

$$F_Б = 5,\ F_{Б'} = -2,\ F_{Б''} = -3,$$
$$-3 < -2 < 5.$$

Задача 40. *Максимизируется* $F = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4$ (1)

при $$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решение.

1. Систему ограничений (2) перепишем в виде:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 \\ x_2 = 1 - x_3 + x_4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Базис Б состоит из переменных x_1 и x_2. Базисное решение, соответствующее Б, есть (0; 1; 0; 0).

$$F = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = (x_3 - x_4) - (1 - x_3 + x_4) + 2x_3 - $$
$$-x_4 = -1 + 4x_3 - 3x_4.$$
$$F_Б = -1.$$

Значение F можно увеличить за счет увеличения x_3.

2. Из системы ограничений (3) видно, что увеличивать x_3 можно только до 1, так как в противном случае x_2 станет отрицательным. Введем x_3 в базисные переменные, а x_2 выведем в небазисные:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ x_3 = 1 - x_2 + x_4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0, \end{cases} \qquad (4)$$
$$F = 3 - 4x_2 + x_4.$$

Б состоит из переменных x_1 и x_3. Базисное решение (1; 0; 1; 0):

$$F_{Б'} = 3.$$

Значение F можно еще увеличить, увеличивая значение x_4. Но из системы (4) следует, что, как бы велико ни было x_4, переменные x_1 и x_3 не станут отрицательными. Следовательно, F не ограничена сверху на множестве решений системы (2). Целевая функция F максимального значения не достигает, т. е. задача решения не имеет.

Задача 41. ***Найдем максимальное значение*** $F = 4x_1 + 6x_2$ (1)

при

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 18 \\ 0{,}5x_1 + x_2 \leqslant 12 \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 12 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 9 \end{cases} \quad (2)$$

Решение.

Эта задача уже была ранее решена графически (см. задачу 32). При решении симплексным методом эту систему ограничений, состоящую из неравенств, необходимо преобразовать к системе линейных уравнений путем введения дополнительных переменных:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ 0{,}5x_1 + x_2 + x_4 = 12 \\ x_1 + x_5 = 12 \\ x_2 + x_6 = 9 \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 6. \end{cases} \quad (3)$$

$$F = 4x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6.$$

1. Найдем базисное неотрицательное решение системы ограничений. Переменные x_3, x_4, x_5, x_6 возьмем за базисные, тогда x_1 и x_2 небазисные:

$$\begin{cases} x_3 = 18 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 12 - 0{,}5x_1 - x_2 \\ x_5 = 12 - x_1 \\ x_6 = 9 - x_2 \\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, \ \ldots, \ 6. \end{cases} \quad (4)$$

Базис Б состоит из переменных x_3, x_4, x_5, x_6. Базисное решение (0; 0; 18; 12; 12; 9),

$$F_Б = 4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0.$$

2. F можно увеличивать путем увеличения x_1 или x_2. Увеличим, например, x_2. Из системы (4) видно, что наибольшее допустимое значение, которое может принимать x_2, равно 9. Перейдем к базису Б', состоящему из x_3, x_4, x_5, x_6. Для этого выведем в небазисные переменную x_6, а x_2 введем в базисные:

$$\begin{cases} x_3 = 9 - x_1 + x_6 \\ x_4 = 3 - 0{,}5x_1 + x_6 \\ x_5 = 12 - x_1 \\ x_2 = 9 - x_6 \\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, \ \ldots, \ 6. \end{cases} \quad (5)$$

$$F = 4x_1 + 6(9 - x_6) = 54 + 4x_1 - 6x_6.$$

Базисное решение (0; 9; 9; 5; 12; 0), $F_{Б'} = 54$.

3. Дальнейшее увеличение F возможно только за счет x_1. Анализ системы (5) показывает, что x_1 может быть не более 6 (иначе,

$x_4 < 0$). Переходим к базису Б, состоящему из переменных x_3, x_1, x_5, x_2. Имеем:

$$\begin{cases} x_3 = 3 + 2x_4 - x_6 \\ x_1 = 6 - 2x_4 + 2x_6 \\ x_5 = 6 + 2x_4 - 2x_6 \\ x_2 = 9 - x_6 \\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, 6, \end{cases} \tag{6}$$
$$F = 78 - 8x_4 + 2x_6.$$

Базисное решение (6; 9; 3; 0; 6; 0), $F_{Б''} = 78$.

4. Увеличим F, сделав x_6 равным 3. Перейдем к базису Б''', состоящему из переменных x_1, x_6, x_5, x_2:

$$\begin{cases} x_6 = 3 - x_3 + 2x_4 \\ x_1 = 12 - 2x_3 + 2x_4 \\ x_5 = 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 6 + x_3 - 2x_4 \\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, 6. \end{cases} \tag{7}$$

$$F = 78 - 8x_4 + 2(3 - x_3 + 2x_4) = 84 - 2x_3 - 4x_4.$$

Базисное решение (12; 6; 0; 0; 0; 3), $F_{Б'''} = 84$.

Дальнейшее увеличение F невозможно, так как x_3 и x_4 входят в выражение F с отрицательными коэффициентами. Итак, $F_{max} = 84$ и достигается оно при $x_1 = 12$, $x_2 = 6$.

Упражнения.

8. В швейном цехе имеется 84 м ткани. На пошив одного халата требуется 4 м ткани, а на одну куртку — 3 м. Сколько следует изготовить халатов и курток для получения наибольшей прибыли от реализации продукции, если халат стоит 6 руб., а куртка — 3 руб., причем халатов можно изготовить не более 15, а курток — не более 20.

Требуется записать условие задачи в виде таблицы и построить математическую модель.

9. Содержание витаминов A и B в 1 кг фруктов задано следующей таблицей:

Таблица 21

Витамины / Фрукты	A (мг)	B (мг)
Вишня	3	150
Абрикосы	24	75

Сколько граммов вишни и сколько граммов абрикосов следует включить в дневной рацион, чтобы в нем оказалось не менее 6 мг витамина A и не менее 75 мг витамина B при минимальных затратах, если 1 кг вишни стоит 0,25 руб., а 1 кг абрикосов — 0,3 руб.?

Постройте математическую модель задачи.

10. Для транспортной задачи, исходные данные которой указаны в таблице 22, постройте математическую модель.

Таблица 22

	1	2	3	Получено
A	3	5	8	70
B	6	3	2	80
Отправлено	20	40	30	

11. Решите графически следующую задачу линейного программирования. На множестве решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ x_1 - x_2 \leqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

найдите максимальное значение $F = x_1 + 2x_2$.

12. Найдите наименьшее значение $F = x_1 - x_2$

при
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 3 \\ x_1 + x_2 \leqslant \frac{1}{2} \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

13. Найдите максимальное значение $F = x_1 - x_2$

при
$$\begin{cases} 1 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ 2 \leqslant x_1 - 2x_2 \leqslant 3 \\ 1 \leqslant 2x_1 - x_2 \leqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

14. Найдите наименьшее значение $F = x_1 + x_2 - x_3$

при
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Следующие задачи линейного программирования решите аналитически и, где возможно, дайте геометрическую интерпретацию.

15.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3, 4, \end{cases}$$
$$F_{\min} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4.$$

16. $\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3, 4, \end{cases}$
$F_{\max} = x_1 + x_2.$

17. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ x_3 \geqslant 0, \end{cases}$
$F_{\max} = x_2 + x_3.$

18. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ x_3 \geqslant 0, \end{cases}$
$F_{\max} = x_1 - 4x_2 + 5x_3.$

19. $\begin{cases} 10x_1 + x_3 \leqslant 10 \\ 10x_2 + x_3 \leqslant 10 \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ x_3 \geqslant 0, \end{cases}$
$F_{\max} = x_1 - x_2 + x_3.$

При создании настоящего пособия авторы использовали следующую литературу:

1. Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? М., «Просвещение», 1967.

2. Н. П. Натансон. Простейшие задачи на максимум и минимум. М., Физматгиз, 1960.

3. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. М., «Наука», 1970.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИБ № 1537

Эмма Степановна Беляева
Вадим Макарьевич Монахов

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Редактор Г. С. Уманский
Художник обложки Б. Н. Юткин
Художественный редактор Е. Н. Карасик
Технический редактор С. Н. Филатова
Корректор Л. П. Михеева

Сдано в набор 19/X 1976 г. Подписано к печати 18/III 1977 г. 60×90$^1/_{16}$. Бумага тип. № 3. Печ. л. 4. Уч.-изд. л. 3,05. Тираж 80 тыс. экз.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц Саратовского ордена Трудового Красного Знамени полиграфического комбината Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли в типографии им. Смирнова Смоленского облуправления издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Смоленск, пр. им. Ю. Гагарина, 2.

Цена 9 коп.