ТБИЛИССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. И. ОПОЙЦЕВ, Т. А. ХУРОДЗЕ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ С КОНУСОМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ТБИЛИСИ 1984

32.965.5
Б17.9
О 616

В книге излагается теория нелинейных операторов в банаховых пространствах с конусом, дается автономное изложение теории вращения векторных полей в банаховых пространствах. Основное внимание уделяется вопросам разрешимости различных классов уравнений, а также построению вычислительных алгоритмов. Дается приложение общих результатов к исследованию и решению некоторых нелинейных интегральных уравнений, нелинейных краевых задач, нелинейных задач Коши.

Книга адресована широкому кругу специалистов в области функционального анализа, вычислительной математики, теории интегральных и дифференциальных уравнений, также может быть использована в качестве учебного пособия для студентов и аспирантов, специализирую- в указанных областях.

Редактор -корр Г. Р. Т. Г. ГЕГЕЛИА

Рецензенты: докт. физ. наук, проф. М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ
докт. физ.-мат. наук, проф. В. В. ФЕДОРОВ

О $\frac{1702050000}{М\,608(06)84}$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория нелинейных операторов в полуупорядоченных пространствах — сравнительно молодая математическая дисциплина, имеющая тем не менее обширный круг приложений: интегральные и дифференциальные уравнения, краевые задачи, нелинейные колебания, теория управления и т. д. Если говорить о главном, то создание и развитие этой теории во многом связано с научной деятельностью М. А. Красносельского, которому принадлежит серия ярких результатов, составляющих каркас теории, служащих источником её роста вширь и вглубь. На сегодняшний день библиография в рассматриваемой области насчитывает несколько сот наименований, но при этом отсутствует книга, в которой бы систематически излагался весь накопленный материал. Первая и пока единственная монография по теории положительных операторов (М. А. Красносельский [1]) вышла двадцать лет назад, и хотя она по сей день сохраняет свое самостоятельное значение и может служить прекрасным введением в предмет, — двадцать лет не прошли даром, появились новые результаты и приложения, новые подходы и трактовки, изменились акценты. В результате, назрела необходимость в написании новой монографии.

По первому впечатлению в наибольшей степени интересам читательской аудитории отвечала бы обширная монография энциклопедического характера. Но это не совсем так. Энциклопедичность и широта хороши для узкого круга специалистов и вредны для первого знакомства с предметом. Если же вникнуть в сложившуюся ситуацию, то именно популяризация теории положительных операторов представляется сейчас наиболее важной задачей. К настоящему времени теория накопила богатый арсенал результатов и методов, который используется далеко не полностью. Как показывает практика, даже классические и довольно „древние“ результаты (принцип Биркгофа-Тарского, теоремы о сжатии и растяжении конуса и др.) оказываются неизвестными многим специалистам по нелинейному анализу, не говоря о тех, кто занимается нелинейными задачами в прикладных областях.

Взвесив сказанное, авторы поставили перед собой следующие цели:

а) дать современное введение в теорию нелинейных положительных операторов;

в) очертить характерный круг приложений;

с) изложить предмет просто и доходчиво.

Конечно, это идеальные намерения. На их практическую реализацию влияли ограниченные возможности авторов и другие факторы. Авторы выражают искреннюю благодарность всем, кто содействовал появлению книги и улучшению качества изложения.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Материал главы имеет две составляющие. Первая из них — сведения, необходимые для понимания последующих глав (конусы и их разновидности, полуупорядоченность, положительные, монотонные и гетеротонные операторы, линейные положительные операторы, дифференцирование по конусу). Вторая составляющая — дополнения справочного характера. В особенности это касается рассмотрения интегральных операторов и операторов сдвига. Многие из описываемых ниже понятий и фактов более детально изучаются в других литературных источниках, указанных в комментариях.

§ 1. ПРОСТРАНСТВА С КОНУСОМ

Далее везде E обозначает вещественное банахово (полное нормированное) пространство, θ — нуль пространства E. Вот несколько наиболее широко распространенных примеров банаховых пространств.

Конечномерное (m-мерное) пространство R^m векторов (элементов) $x=\{x_1,\dots,x_m\}$ с нормой

$$\|x\|=(x_1^2+\dots+x_m^2)^{1/2}.$$

В R^m можно ввести и другие нормы, например,

$$\|x\|_m=\max\{|x_i|: i=1,\dots,m\} \text{ или } \|x\|_l=\sum_{i=1}^{m}|x_i|.$$

Все нормы в R^m эквивалентны друг другу, т. е. для любых двух норм $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ можно указать такие положительные константы α и β, что $\|x\|_1 \leqslant \alpha \|x\|_2$, $\|x\|_2 \leqslant \beta \|x\|_1$ при любом $x \in R^m$. Это весьма полезный факт, который в каждом конкретном случае позволяет без излишних предосторожностей выбирать наиболее подходящую (удобную) для решаемой задачи норму.

Пространство $C[\Omega]$ непрерывных функций $x(t)$, принимающих значения R $(-\infty, \infty)$ и заданных на компакте $\Omega \subset R^m$, с нормой

$$\|x\| = \max \{ |x(t)| : t \in \Omega \}.$$

Из контекста обычно ясно, о каком Ω идет речь, — и тогда вместо $C[\Omega]$ пишут просто C. Так же поступают при формулировке утверждений, справедливость которых не зависит от выбора области определения Ω. Сказанное в равной степени относится и к обозначениям других функциональных пространств.

Пространство L_p $(p \geqslant 1)$ функций, суммируемых p-й степенью на ограниченном подмножестве $\Omega \subset R^m$. Норма L_p определяется следующим образом:

$$\|x\| = \Bigl(\int\limits_{\Omega} |x(t)|^p \, dt \Bigr)^{1/p}.$$

В случае $p = \infty$ пространство L_∞ состоит из функций, существенно ограниченных на Ω с нормой

$$\|x\| = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \Omega} |x(t)|.$$

Пространство $C_1[0, 1]$ функций непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ с нормой

$$\|x(t)\| = \max \{ |x(t)| + |x'(t)| : t \in [0, 1] \}.$$

1.1. Конусы и полуупорядоченность. Замкнутое выпуклое множество $K \subset E$ называется *конусом*, если $x \in K$, $x \neq 0$ влечет за собой $\alpha x \in K$ при $\alpha \geqslant 0$ и $-x \notin K$.

Простейшими примерами конусов могут служить неотрицательные (или любые другие) ортанты в R^m, а также совокупности неотрицательных функций в C, L_p $(p \geqslant 1)$ и других банаховых функциональных пространствах.

Большое число примеров дает следующий метод построения конусов. Пусть $F \subset E$ — ограниченное замкнутое выпуклое множество и $\theta \notin F$. Тогда совокупность $K(F)$ элементов $x \in E$, допускающих представление $x = \alpha z$, $\alpha \geqslant 0$, $z \in F$, является конусом (покажите!). На первый взгляд этот метод представляется достаточно общим, но, как будет видно из дальнейшего, большинство изучаемых конусов (в бесконечномерных пространствах) невозможно построить (определить) таким способом.

Упражнение 1.1. Проверьте, что в пространстве матриц множество неотрицательно определенных матриц является конусом.

Упражнение 1.2. Покажите, что в $C[0, 1]$ множество вогнутых функций, обращающихся в нуль на концах отрезка $[0, 1]$, — конус.

Любой конус $K \subset E$ позволяет ввести в пространстве E *полуупорядоченность*: $x \geqslant y$ (равносильно $y \leqslant x$), если $x - y \in K$. Например, полуупорядоченность, вводимая в C или L_p конусом неотрицательных функций, имеет простой смысл: $x \geqslant y$ означает $x(t) \geqslant y(t)$ при всех в случае C (почти всех в случае L_p) значениях $t \in \Omega$. Запись $x \overline{\geqslant} y$ (равносильно $y \overline{\leqslant} x$) обозначает ситуацию $x - y \notin K$

Элементы $x \geqslant 0$ (т. е. $x \in K$) называются положительными.

В полуупорядоченных пространствах часто приходится рассматривать различные *конусные отрезки* — так называются множества вида $\langle u, v \rangle = \{x : u \leqslant x \leqslant v\}$.

Понятие полуупорядоченности служит одним из эффективных инструментов при изучении линейных и нелинейных отображений в банаховых пространствах. Его использование, естественно, должно опираться на знание свойств отношения $\geqslant$. Эти свойства частично совпадают со свойствами обычного знака $\geqslant$:

1) $x \geqslant y$, $y \geqslant x$ влечет за собой $x = y$;
2) из $x \geqslant y$ следует $\alpha x \geqslant \alpha y$ при $\alpha \geqslant 0$ и $\alpha x \leqslant \alpha y$ при $\alpha < 0$;
3) $x \geqslant y$, $y \geqslant z$ влечет за собой $x \geqslant z$;
4) из $x_1 \geqslant y_1$, $x_2 \geqslant y_2$ следует $x_1 + x_2 \geqslant y_1 + y_2$;
5) из $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x_n \geqslant y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ вытекает $x \geqslant y$.

Набор свойств знака $\geqslant$, конечно, существенно богаче. Например, $x_{n+1} \geqslant x_n$, $x_n \leqslant z_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ влечет за собой существование предела у последовательности x_n. Замена знака $\geqslant$ на $\geqslant$ в общем случае здесь недопустима, и подобных примеров можно привести достаточно много. В то же время понятно, что в каждом конкретном случае специфика используемого конуса может обеспечивать наличие дополнительных полезных свойств у отношения $\geqslant$. Это очевидное соображение служит одним из источников интереса к изучению разновидностей конусов.

1.2. Разновидности конусов. Конус K называется *нормальным*, если существует такое число $N(K)$, что из $\theta \leqslant x \leqslant y$ следует $\|x\| \leqslant N(K) \|y\|$. В этом случае говорят также, что норма *полумонотонна*. Число $N(K)$ называется *константой нормальности* конуса K. Если $N(K)=1$, то конус называют *острым* и говорят что *норма монотонна*.

Нормальность конуса равносильна отсутствию в K элементов, которые „почти противоположно направлены“ Более точно: конус K нормален в том и только в том случае, когда существует $\delta>0$ такое, что $\|l_1+l_2\|\geqslant\delta$ для любых $l_1, l_2\in K$, $\|l_1\|=\|l_2\|=1$. Естественно, все конусы в R^m нормальны. Конусы K_+ неотрицательных функций в C, L_p также нормальны. Конус неотрицательных функций в пространстве C_1 свойством нормальности не обладает (проверьте!).

Конус, содержащий внутренние точки, называется *телесным*. Конус называется *воспроизводящим*, если каждый элемент $x\in E$ представим в виде

$$x=u-v \quad (u, v\in K). \tag{1.1}$$

Оказывается, элементы u, v в (1.1) всегда можно выбрать так, что $\|u\|, \|v\|\leqslant\alpha\|x\|$, где константа α определяется конусом K и не зависит от x. Это свойство называют *несплющенностью* воспроизводящего конуса.

Всякий телесный конус является воспроизводящим. Конус K_+ в C телесен. Конус K_+ в L_p воспроизводящий, но не телесный.

Множество $M\subset E$ называется ограниченным по конусу K, если $x\leqslant z_0$ для всех $x\in M$ и некоторого фиксированного $z_0\in E$. Элемент z_0 называется *верхней границей* множества M. *Нижняя граница* множества определяется аналогично. Если в множестве P верхних границ множества M есть наименьший элемент $\tilde{z}$ (т. е. $\tilde{z}\leqslant z$, $z\in P$), то он называется *точной верхней границей множества M* и обозначается $\tilde{z}=\sup M$ Аналогично определяется *точная нижняя граница* $\inf M$.

Конус K называется *миниэдральным*, если любые два элемента $x, y\in E$ имеют точную верхнюю границу $\sup(x, y)$, и *сильно миниэдральным*, если верхняя граница есть у любого ограниченного множества.

Конус K_+ в C миниэдрален, K_+ в L_p — сильно миниэдрален. Сильно миниэдральны неотрицательные органты в пространствах R^m. Более того, конус в R^m сильно миниэдрален в том и только в том случае, если он представляет собой неотрицательный ортант в некотором базисе.

Конус K называется *правильным*, если любая неубывающая ограниченная по конусу последовательность x_n $(x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n\leqslant\ldots\leqslant z_0)$

сходится по норме. Конус K называется *вполне правильным*, если сходится (по норме) каждая неубывающая ограниченная по норме последовательность.

Каждый правильный конус нормален. Вполне правильные конуса правильны. Телесный правильный конус вполне правилен. Вполне правильны также правильные конуса в слабо полных пространствах E. Конус K_+ в L_p вполне правилен, K_+ в C свойством правильности не обладает. Все конуса R^m вполне правильны.

Говорят, что конус K *допускает оштукатуривание (оштукатуриваем)*, если существует такой больший конус K_1 $(K \subset K_1)$, что каждая точка $x_0 \in K$ входит в K_1 вместе с шаровой окрестностью радиуса $\alpha \| x_0 \|$, где $\alpha > 0$ не зависит от x_0. Конус K называется *локально компактным*, если компактно пересечение конуса K с любым шаром. Каждый локально компактный конус допускает оштукатуривание. Отсюда сразу следует, что все конусы в R^m оштукатуриваемы.

Упражнение 1.3. Покажите, что введенные выше конусы $K(F)$ оштукатуриваемы.

1.3. Пространство E_{u_0}. Пусть фиксирован некоторый ненулевой элемент $u_0 \in K$. Элемент $x \in E$ называется *u_0-измеримым*, если существует такое $\gamma > 0$, что

$$-\gamma u_0 \leqslant x \leqslant \gamma u_0.$$

Множество u_0-измеримых элементов $x \in E$ обозначается через E_{u_0}. Очевидно, E_{u_0} — линейная структура, в которой можно ввести норму

$$\| x \|_{u_0} = \min \{ \gamma : -\gamma u_0 \leqslant x \leqslant \gamma u_0 \}. \qquad (1.2)$$

Норма (1.2) называется *u_0-нормой*. Проверку аксиом нормы предоставляем читателю.

Если $v_0 \in E$ — ненулевой u_0-измеримый элемент, то легко видеть, что E_{u_0} и E_{v_0} состоят из одних и тех же элементов, а u_0-норма и v_0-норма эквивалентны.

Пусть L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ полуупорядочено конусом неотрицательных функций, а в качестве u_0 фиксирована функция, тождественно равная 1. Тогда u_0-измеримыми будут все существенно ограниченные по модулю функции, т. е. в данном случае E_{u_0} совпадает с L_∞, а u_0-норма — с нормой пространства L_∞.

Приведем другой пример. Пусть пространство $C[0, 1]$ полуупорядочено конусом неотрицательных функций и фиксирован элемент $u_0(t)\equiv 1$. Тогда E_{u_0} совпадает с C, а u_0-норма — с исходной нормой пространства C. Если же, например, $u_0(t)=t(1-t)$, то E_{u_0} представляет собой совокупность функций $x(t)$ таких, что

$$|x(t)|\leqslant\gamma t(1-t), \tag{1.3}$$

причем наименьшее в (1.3) γ является u_0-нормой функции $x(t)$.

Если конус K нормален, то:

1) пространство E_{u_0} полно по u_0-норме;

2) сходимость любой последовательности по u_0-норме влечет за собой ее сходимость по исходной норме пространства E;

3) множество $K_{u_0}=K\cap E_{u_0}$ представляет собой нормальный телесный конус в пространстве E_{u_0}.

1.4. Линейные положительные функционалы. Определенный на конусе K функционал $l(x)$ называется *положительным*, если $l(x)\geqslant 0$ при любом $x\in K$.

Можно утверждать, что всегда существуют линейные положительные функционалы. Более того, для каждого ненулевого $x_0\in K$ можно указать такой положительный линейный непрерывный функционал $l(x)$, что $l(x_0)>0$. В случае сепарабельного пространства E всегда существует такой линейный непрерывный функционал $l(x)$, что $l(x)>0$ для всех $x\in K$, $x\neq\theta$.

Линейное нормированное пространство E^* линейных непрерывных на E функционалов называется сопряженным пространством. Если линейная оболочка конуса K плотна в E (например, конус K воспроизводящий), то совокупность положительных функционалов $K^*\subset E^*$ также является конусом, который называется *сопряженным*.

Положительный линейный функционал $l\in E^*$ называют *сильно положительным*, если

$$l(x)\geqslant\beta\,\|x\|\quad(x\in K), \tag{1.4}$$

где $\beta>0$. Сильно положительные функционалы $l\in E^*$ существуют в том и только в том случае, когда конус K допускает оштукатуривание.

Последнее утверждение может эффективно использоваться в качестве критерия оштукатуриваемости конуса. Приведем простой пример. Обозначим через K совокупность положительных вогнутых на $[0, 1]$ функций, обращающихся на границе сегмента $[0, 1]$ в нуль. Легко видеть, что множество K, рассматриваемое в пространстве $C[0, 1]$, представляет собой конус. Этот конус допускает оштукатуривание, так как значение функции в некоторой фиксированной внутренней точке [0, 1] является сильно положительным на K линейным функционалом.

1.5. Пространства с двумя конусами. Иногда удобно в одном пространстве E рассматривать два конуса K и K_0, один из которых является частью другого, например, $K_0 \subset K$

Легко видеть, что из нормальности (правильности, полной правильности) конуса K в этом случае вытекает нормальность (правильность, полная правильность) конуса K_0. Наоборот, если конус K_0 телесный или воспроизводящий, то соответствующим свойством обладает и конус K.

Будем считать, что полуупорядоченность в E определяется бо́льшим конусом K. В пространствах с двумя конусами часто приходится рассматривать множества $K_0\langle v, w\rangle$, состоящие из таких элементов $x \in K_0$, что $v \leqslant x \leqslant w$. Если конус K нормален, то множества $K_0\langle v, w\rangle$ ограничены по норме. Поскольку случай $K_0 = K$ не исключается из рассмотрения, то нормальность конуса K влечет за собой также ограниченность по норме обычных конусных отрезков $\langle v, w\rangle$, которые в случае $K_0 = K$ есть не что иное, как множества $K_0\langle v, w\rangle$.

Конус K_0 назовем *K-нормальным*, если норма полумонотонна на K_0, т. е. из $x \leqslant y$, $x, y \in K_0$ следует $\|x\| \leqslant N \|y\|$, где константа $N > 0$ не зависит от x, y и определяется парой конусов K_0, K Примером K-нормального конуса K_0 в пространстве $C_1[0, 1]$ может служить конус K_0 неотрицательных вогнутых функций, обращающихся в нуль на концах сегмента [0, 1], при конусе K неотрицательных функций.

Конус K_0 называется *K-воспроизводящим*, если любой элемент $x \in E$ допускает представление $x = u - v$, где $u_0 \in K_0$, $v \in K$. K-воспроизводящий конус не обязан быть воспроизводящим. Примером может служить конус K_0 неотрицательных неубывающих функций в пространстве $C[0, 1]$ полуупорядоченном обычным конусом K неотрицательных функций.

Конус K_0 называется *K-правильным*, если любая неубывающая по конусу K и ограниченная элементом из K_0 последовательность $x_n \in K_0$ сходится по норме. K-правилен конус K_0 неотрицательных вогнутых функций, обращающихся в нуль на концах сегмента [0, 1], рассматриваемый в пространстве $C[0, 1]$, полуупорядоченном конусом K неотрицательных функций.

1.6. Специальные конусы. Обычные конусы в функциональных банаховых пространствах—это конусы неотрицательных функций. Отправляясь от этих конусов, иногда удобно вводить в рассмотрение более узкие конусы. Ниже описываются несколько полезных способов построения „узких“ конусов.

Пусть в банаховом пространстве E выделен конус K и фиксирован ненулевой элемент $v^* \in K$ ($\|v^*\| < 1$). Положим

$$K^{v^*} = \{x : x \in K,\ x \geqslant \|x\| v^*\}. \tag{1.5}$$

Легко видеть, что K^{v^*} представляет собой конус $K(F)$, где $F = \{x : x \in K + v^*,\ \|x\| \leqslant 1\}$. Отсюда сразу следует (см. упражнение 1.3), что конус K^{v^*} оштукатуриваем.

Если K конус неотрицательных функций в пространстве $C[\Omega]$, то K^{v^*} состоит из неотрицательных функций $x(t)$, для которых $x(t) \geqslant x(s) v^*(t)$ ($t, s \in \Omega$), т. е. $x(t) \geqslant v^*(t) \max\{x(s) : s \in \Omega\}$.

Заметим, что в определении конуса K^{v^*} условие $v^* \in K$ можно заменить предположением $-v^* \notin K$. В том случае K^{v^*} по-прежнему представляет собой конус $K(F)$, где $F = \{x : x \in K,\ x \in K + v^*,\ \|x\| < 1\}$.

Введем понятие конуса $K_{u_0,\rho}$. Пусть u_0 — ненулевой фиксированный элемент из K, $\rho > 1$. Обозначим через $K_{u_0,\rho}$ совокупность таких элементов $x \in K$, что

$$\gamma u_0 \leqslant x \leqslant \rho \gamma u_0, \tag{1.6}$$

где $\gamma = \gamma(x) \geqslant 0$. Для $K_{u_0,\rho}$ легко проверяются все свойства, фигурирующие в определении конуса.

Пусть конус K нормален, и N — его константа нормальности. Из (1.6) вытекает, что элементы $x \in K_{u_0,\rho}$ удовлетворяют неравенству $x \geqslant \|x\| (N\rho \|u_0\|)^{-1} u_0$, откуда следует $K_{u_0,\rho} \subset K^{v^*}$, где $v^* = (N\rho\|u_0\|)^{-1} u_0$. Это позволяет сразу сделать следующий вывод. Если конус K нормален, то конус $K_{u_0,\rho}$ — оштукатуриваем.

Если K — конус неотрицательных функций в пространстве $C[\Omega]$, а $u_0(t) \equiv 1$, то $K_{u_0,\rho}$ представляет собой совокупность неотрицательных функций, удовлетворяющих условию

$$\max_{t \in \Omega} x(t) \leqslant \rho \min_{t \in \Omega} x(t). \tag{1.7}$$

В той же ситуации, но в пространстве L_p, неравенство (1.7) заменяется своим аналогом

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in \Omega} x(t) \leqslant \rho \operatorname*{ess\,inf}_{t \in \Omega} x(t). \tag{1.8}$$

В данном случае $K_{u_0,\rho}$ совпадает с K^{v^*}, где $v^*(t) \equiv \dfrac{1}{\rho}$

Упражнение 1.4. Покажите, что множество

$$K_\gamma=\{x \quad x\in K,\ l(x)\geqslant\gamma\|x\|\}, \tag{1.9}$$

где l — линейный положительный на K функционал $0<\gamma\leqslant\|l\|$ — является оштукатуриваемым конусом.

§ 2 ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ОПЕРАТОРОВ

2.1. Общие определения. Тот факт, что пространство E полуупорядочено некоторым конусом K, может эффективно использоваться при изучении оператора T, действующего в E, лишь в том случае, когда T обладает теми или иными свойствами, связанными с полуупорядоченностью. Ниже даются определения основных типов операторов, которые изучаются в последующих главах, и приводятся иллюстративные примеры.

Оператор $T: E\to E$ называется *положительным*, если он оставляет инвариантным конус K. Другими словами, оператор $T: E\to E$ положителен, если $T(K)\subset K$, т. е. $T(x)\in K$ при любом $x\in K$. Часто не существенно, что оператор T определен на всем пространстве E, — и тогда положительным называют любой оператор T, определенный на конусе K и преобразующий K в себя.

Важный подкласс положительных операторов составляют так называемые *u_0-положительные операторы*, определяемые следующим образом. Пусть фиксирован некоторый ненулевой элемент $u_0\in K$. Обозначим через $K(u_0)$ множество тех элементов $x\in K$, для которых можно указать такие α, $\beta>0$, что

$$\alpha u_0\leqslant x\leqslant\beta u_0.$$

Оператор T, некоторая итерация которого T^n переводит ненулевые элементы конуса K в $K(u_0)$ и называется u_0-положительным. Если конус K телесен и $u_0\in \operatorname{int} K$, то u_0-положительный оператор называют сильно положительным.

Положительный оператор T называется *u_0-ограниченным снизу*, если для любого ненулевого $x\in K$ найдется такое n_1, что $T^{n_1}(x)\geqslant\alpha u_0$ $(\alpha>0)$; *u_0-ограниченным сверху*, если для любого ненулевого $x\in K$ найдется такое n_2, что $T^{n_2}(x)\leqslant\beta u_0$ $(\beta>0)$.

Упражнение 2.1. Покажите, что линейный положительный оператор, u_0-ограниченный одновременно снизу и сверху, u_0-положителен.

Оператор $T: E\to E$ (не обязательно положительный) называется u_0-ограниченным в пространстве E, если для любого E найдется такое n, что элемент $T^n(x)$ является u_0-измеримым (см. п. 1.3).

Определения многих разновидностей операторов, действующих в полуупорядоченном пространстве, так или иначе связаны со свойством монотонности. Если из $x, y \in M \subset E$, $x \geqslant y$ следует $T(x) \geqslant T(y)$, говорят, что оператор T *монотонен на множестве* M. В случае, когда отсутствие упоминания о множестве M не может вызвать недоразумений, оператор T называют просто *монотонным*. Оператор T, обладающий свойством „$x \geqslant y$, влечет за собой $T(x) \leqslant T(y)$“, будем называть *антимонотонным*. Иногда монотонный и антимонотонный операторы называют, соответственно, *изотонным* и *антитонным*. Наконец, T называют оператором *монотонного типа*, если $T(x) \geqslant T(y)$ влечет за собой $x \geqslant y$.

Остановимся на определении еще одного достаточно общего класса операторов связанного со свойством своеобразной обобщенной монотонности. Оператор T, действующий в E, называется *гетеротонным*, если он допускает *диагональное представление* $T(x) \equiv \hat{T}(x, x)$, причем *сопутствующий оператор* $\hat{T}$ определен на $E \times E$ и $\hat{T}(v, w)$ монотонно возрастает по v и убывает по w. Могут рассматриваться также операторы гетеротонные на некотором множестве $M \subset E$. В этом случае подразумевается, что участвующие в определении гетеротонного оператора элементы x, v, w принадлежат M. Аналогичное замечание уместно также по отношению к определениям монотонного и антимонотонного операторов.

Легко понять, что выбор сопутствующего оператора $\hat{T}(v, w)$ всегда неоднозначен*, [illegible] при решении конкретных задач из этой [illegible]вободы выбора можно извлекать определенные выводы. Тем не менее, когда речь идет о гетеротонном операторе T, всегда подразумевается, что сопутствующий ему оператор $\hat{T}$ уже конкретно указан (фиксирован).

Монотонный и антимонотонный операторы являются частными случаями гетеротонного. Для монотонного оператора T в качестве сопутствующего можно ука[illegible] $\hat{T}$ [illegible] для антимонотонного — $\hat{T}(v, w)$ [illegible] $T(w)$. Именно эти операторы [illegible]нотонном и антимонотонном случаях подразумеваются под сопутствующими (конечно, если не оговорено противное).

---

* Например, [illegible]сли $\hat{T}(v,$ [illegible]путствующий оператор для T, то сопутствующим будет также $\hat{T}(v, w) + v - w$.

Следующая серия разновидностей операторов, действующих в пространстве с конусом, связана с характером роста (изменения) значения оператора по отношению к тем или иным классам приращений аргумента. Наиболее важные (по широте приложений) типы операторов здесь определяются ростом значений оператора вдоль лучей, лежащих в конусе K.

Положительный оператор $T: K \to K$ называется *вогнутым*, если он u_0-положителен и для любых $x \in K(u_0)$ и $\tau \in (0, 1)$

$$T(\tau x) \geqslant \tau T(x), \quad T(\tau x) \neq \tau T(x). \tag{2.1}$$

Вогнутый оператор T называется *u_0-вогнутым*, если выполняется более жесткое по сравнению с (2.1) требование: для любых $x \in K(u_0)$ и $\tau \in (0, 1)$ найдется такое $\eta(x, \tau) > 0$, что

$$T(\tau x) \geqslant [1 + \eta(x, \tau)]\, \tau T(x). \tag{2.2}$$

Положительный оператор $T: K \to K$ называется *выпуклым*, если он u_0-положителен и выполняется обратное по отношению к (2.1) неравенство; u_0-выпуклым, если он u_0-положителен и для любых $x \in K(u_0)$ и $\tau \in (0, 1)$ найдется такое $\eta(x, \tau) > 0$, что

$$T(\tau x) \leqslant [1 - \eta(x, \tau)]\, \tau T(x). \tag{2.3}$$

Сразу нужно заметить, что введенные понятия вогнутости и выпуклости в корне отличаются от соответствующих понятий выпуклого анализа, и в этом отношении избранная терминология, возможно, не совсем удачна. Однако к настоящему времени она довольно прочно утвердилась и едва ли целесообразно ее менять. В качестве „оправдания" можно отметить, что в одномерном случае положительная строго вогнутая в обычном смысле функция u_0-вогнута. Обратное, конечно, не верно (см. п. 2.1).

Наиболее богатым набором интересных свойств обладают монотонные u_0-вогнутые операторы. Их изучение нам еще предстоит, пока же этим замечанием мы хотим подчеркнуть, что часто полезно рассмотрение пересечений классов операторов, определенных выше. В частности, монотонные операторы в дополнительном предположении u_0 вогнутости приводят к наиболее полезным для приложений выводам. Близкое по духу к вогнутости, но отличное по существу и почти столь же „работоспособное" понятие можно ввести для гетеротонных операторов.

Положительный гетеротонный оператор T называется *псевдовогнутым*, если $\hat{T}(x, y) \in K(u_0)$ для любых ненулевых $x, y \in K$ и для любых $v, w \in K(u_0)$ и $\tau \in (0, 1)$

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \gg \tau \hat{T}(v, w) \qquad (2.4)$$

и в (2.4) невозможно равенство.

Псевдовогнутый оператор T называется *u_0-псевдовогнутым*, если для любых $v, w \in K(u_0)$ и $\tau \in (0, 1)$ можно указать такое $\eta(v, w, \tau) > 0$, что

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geqslant [1+\eta(v, w, \tau)]\, \hat{T}(v, w). \qquad (2.5)$$

Псевдовыпуклые и *u_0-псевдовыпуклые* операторы определяются по аналогии с предыдущим.

Собственно абстрактные определения, которые мы намерены сообщить в параграфе, этим исчерпываются. Теперь наша задача — дать иллюстрационные примеры и показать, что широкие классы конкретных задач приводят (непосредственно или с помощью редукции) к изучению описанных типов операторов. Подчеркнем, что перечисленные разновидности операторов являются для нас основными, но они не дают полный перечень — и ряд определений будет вводиться по ходу изложения.

Приводимые ниже задачи будут служить объектами для иллюстрации теорем последующих глав. С тем, чтобы в дальнейшем не загромождать изложение деталями, не связанными непосредственно с конусами соображениями, здесь попутно приводятся некоторые дополнительные сведения.

2.2. Отображения в R^m. В конечномерном пространстве обычно в качестве конуса выделяется неотрицательный ортант R^m_+. В этом случае оператор

$$F(x) = \{f_1(x), \dots, f_m(x)\},$$

действующий в R^m, положителен, если все его компоненты $f_i(x)$ при $x \in R^m_+$ неотрицательны; u_0-положителен ($u_0 \in \operatorname{int} R^m_+$), если дополнительно все компоненты $f_i(x)$ при $x \in R^m_+$, $x \neq 0$ строго положительны; монотонен (антимонотонен), если каждая компонента $f_i(x_1, \dots, x_m)$ по каждой переменной монотонно возрастает (убывает).

Монотонный на R^m_+ оператор F будет u_0-вогнут, если он, разумеется, u_0-положителен и при любых $x \in \operatorname{int} R^m_+$, $\tau \in (0, 1)$, $i = 1, \dots, m$ выполняются неравенства

$$f_i(\tau x) > \tau f_i(x). \qquad (2.6)$$

Обратим внимание, что в данном случае нет необходимости упоминать о функции $\eta(x, \tau)>0$, фигурирующей в определении u_0 вогнутого оператора. Ее существование автоматически вытекает из покомпонентных строгих неравенств (2.6) при условии u_0-положительности и монотонности оператора F. Правда, это очевидно лишь в случае непрерывных на $\operatorname{int} R_+^m$ функций $f_i(x)$. Но непрерывность F на внутренности R_+^m является следствием сделанных предположений. Этот факт вытекает из общих утверждений, доказываемых далее. Здесь его проверку можно рекомендовать в качестве упражнения.

Если в R^m выделен не R_+^m, а некоторый другой телесный конус K, то в определении монотонного u_0-вогнутого оператора F также можно обойтись без явного использования функции $\eta(x, \tau)$, заменяя неравенства (2.6) условием

$$F(\tau x) > \tau F(x), \tag{2.7}$$

где $a > b$ обозначает ситуацию $a - b \in \operatorname{int} K$.

Аналогичные замечания можно сделать также по поводу действующих в R^m гетеротонных u_0-псевдовогнутых операторов.

Рассмотрим несколько примеров гетеротонных операторов. Оператор F называется *гетерогенным*, если каждая его компонента $f_i(x_1, \ldots, x_m)$ по каждой в отдельности переменной x_j или монотонно возрастает (не убывает), или монотонно убывает (не возрастает). Любой гетерогенный оператор является гетеротонным. Действительно, для получения сопутствующего оператора достаточно под знаком каждой функции f_i переменные x_j, по которым f_i возрастает, заменить на v_j, а переменные x_k, по которым f_i убывает, заменить на w_k. Для удобства формальной записи с каждой компонентой $f_i(x)$ свяжем подмножество индексов G_i

$$G_i \subset N = \{i \mid i = 1, \ldots, m\}$$

такое, что $j \in G_i$, если $f_i(x)$ монотонно возрастает (не обязательно строго) по x_j. В силу сказанного выше, любая компонента $f_i(x)$ монотонно убывает по x_j, если $j \in H_i = N \setminus G_i$. Свяжем далее с каждой функцией $f_i(x)$ пару матриц $P_i = [P_{jk}^i]$ и $Q_i = I - P_i$, где I — единичная матрица, $P_{jj}^i = 1$, если $j \in G_i$, остальные $P_{jk}^i = 0$.

Теперь сопутствующий оператор $\hat{F}$ можно записать так:

$$\hat{F}(v, w) = \{\hat{f}_1(v, w), \ldots, \hat{f}_m(v, w)\},$$

где

$$\hat{f}_i(v, w) = f_i(P_i v + Q_i w); \quad i = 1, \ldots, m.$$

Введенные обозначения нужны не столько для записи сопутствующего оператора, сколько для удобства работы с последним. С самого начала важно уяснить, что за этими обозначениями стоит совсем простая идея. Пусть, например, оператор F указанного выше типа действует в R^4 и его первая компонента $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$ монотонно возрастает по x_1 и x_3 и убывает по x_2 и x_4. Тогда первой компонентой сопутствующего оператора будет $f_1(v, w) = f_1(v_1, \quad v_3, w_4)$.

В общем случае выбор сопутствующего оператора для гетеротонного требует определенной изобретательности. Укажем один довольно общий прием, суть которого легче всего пояснить на простом примере.

Рассмотрим определенный на $\operatorname{int} R^2_+$ оператор F с компонентами

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \operatorname{arc\,tg} x_1 + \sqrt[10]{\frac{x_2}{x_1}}, \\
f_2(x) &= \sqrt{\frac{x_1 + x_2}{5 + x_1}} + \sqrt[10]{\frac{x_1}{x_2}}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Здесь нельзя сказать, что функции f_1, f_2 обобщенно монотонны. Тем не менее идея построения сопутствующего оператора может быть оставлена прежней. Каждое конкретное x_j (из тех x_j, которые неоднократно повторяются в записи функций f_i, $i = 1, 2$) заменяем на v_j или w_j, в зависимости от того, возрастает или убывает функция f_i по этому конкретному аргументу (но не вообще по x_j). Такое построение приводит к сопутствующему оператору $\hat{F}$ с компонентами

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_1(v, w) &= \operatorname{arc\,tg} v_1 + \sqrt[10]{\frac{v_2}{w_1}}, \\
\hat{f}_2(v, w) &= \sqrt{\frac{v_1 + v_2}{5 + w_1}} + \sqrt[10]{\frac{v_1}{w_2}}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Использованный выше способ построения сопутствующего оператора оказывается работоспособным во многих практических случаях. Его возможности расширяют некоторые специальные приемы, которые позволяют приводить изучаемый оператор к виду, удобному для применения описанного метода (в тех случаях, когда исходный вид оператора не допускает его непосредственного использования). Укажем один из таких приемов, сущность которого проявляется уже в одномерном случае.

Пусть пространство $R=(-\infty, \infty)$ полуупорядочено конусом $[0, \infty)$, и на сегменте $[0, \pi]$ задана функция $f(x)=\sin x$. Введем в рассмотрение две функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Функция $\varphi_1(x)$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ совпадает с $f(x)$, а на $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ тождественно равна единице. Функция $\varphi_2(x)\equiv 1$ па $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и совпадает с $f(x)$ на $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Очевидно, $f(x)=\min\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$. Теперь тот же прием приводит сопутствующей функции

$$\hat{f}(v, w)=\min\{\varphi_1(v), \varphi_2(w)\}.$$

Заметим, что в одномерном случае любая функция с ограниченной вариацией гетеротонна, так как представима в виде суммы монотонно возрастающей и монотонно убывающей функций.

2.3. Оператор сдвига. Большое число прикладных задач приводит к необходимости изучения систем дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}&=f_1(t, x_1, \dots x_m), \\ \\ \frac{dx_m}{dt}&=f_m(t, x_1, \dots, x_m) \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

Обычно вместо (2.10) мы будем использовать векторную запись

$$\frac{dx}{dt}=F(t, x) \tag{2.11}$$

и будем предполагать, что правая часть (2.11) удовлетворяет неким „хорошим" условиям, обеспечивающим существование решения, его единственность и нелокальную продолжимость. Изучение подобного рода условий представляет собой самостоятельную, достаточно интересную и весьма важную задачу. Ее обсуждение однако не входит в наши намерения. Заинтересованному читателю можно рекомендовать обратиться к монографии М. А. Красносельского [3].

Итак, пусть $x(t, \quad x_0)$ обозначает решение дифференциального уравнения (2.11). Оператор $U(t, s)$, определяемый равенством

$$U(t, s)x_0=x(t, s, x_0), \tag{2.12}$$

называется оператором сдвига по траекториям дифференциального уравнения (2.11). В естественных предположениях функция (2.12) непрерывна по совокупности всех переменных t, s и x_0. В случае автономной системы дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{dt} = F(x)$ оператор сдвига $U(t, s)$ по существу является лишь функцией разности аргументов $\tau = t - s$ и для его обозначения используется более компактная запись U_τ.

Многие задачи, связанные с изучением свойств дифференциального уравнения (2.11), удобно рассматривать в терминах оператора сдвига по траекториям (2.11). В связи с этим возникает необходимость установления различных связей между свойствами правых частей дифференциального уравнения и свойствами соответствующего оператора сдвига. Приведем несколько результатов из этой области, которые будут использоваться в дальнейшем.

Будем говорить, что правые части дифференциального уравнения (2.11) обладают свойством внедиагональной положительности, если при любом i

$$\begin{gathered} f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_m) \geq 0 \\ (x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m) \end{gathered} \tag{2.13}$$

и свойством сильной внедиагональной положительности, если при любом

$$\begin{gathered} f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_m) > 0 \\ (x_j \geq 0,\ \Sigma x_j > 0) \end{gathered} \tag{2.14}$$

Лемма 2.1. *Пусть правые части дифференциального уравнения (2.11) обладают свойством внедиагональной положительности. Тогда оператор сдвига $U(t, s)$ $(t \geq s)$ по траекториям (2.11) положителен*.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, \ldots, x_m) + \varepsilon \\ &\cdots \\ \frac{dx_m}{dt} &= f_m(t, x_1, \ldots, x_m) + \varepsilon \end{aligned}\right\}, \tag{2.15}$$

* Подразумевается, что пространство R^m, как обычно, полуупорядочено неотрицательным ортантом R^m_+.

где $\varepsilon>0$. При движении по траекториям (2.15) изображающая точка не может покинуть неотрицательный ортант R_+^m, так как в каждой граничной точке R_+^m строго возрастают те координаты, которые равны нулю. При $\varepsilon\to 0$ интегральные кривые системы (2.15) переходят в интегральные кривые системы (2.10). Окончательное утверждение леммы вытекает из замкнутости конуса R_+^m. ■

Лемма 2.2. *Пусть правые части дифференциального уравнения (2.11) обладают свойством внедиагональной положительности, а также следующим свойством внедиагональной монотонности: при любом фиксированном i из неравенств*

$$0\leqslant x_j\leqslant y_j\ (j=1,\dots\ i-1,\ i+1,\dots\ m),\ x_i^*\geqslant 0$$

вытекают неравенства

$$\begin{aligned} &f_i(t,\ x_1,\dots\ x_{i-1},\ x_i^*,\ x_{i+1},\dots,\ x_m)\leqslant\\ &\leqslant (f_i(t,\ y_1,\dots\ y_{i-1},\ x_i^*,\ y_{i+1},\dots,\ y_m) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Тогда оператор сдвига $U(t,\ s)$ $(t\geqslant s)$ по траекториям (2.11) положителен и монотонен.

Доказательство. Положительность $U(t,\ s)$ гарантирует лемма 2.1. Перейдем к доказательству монотонности. Пусть

$$x(t)=U(t,\ s)\,x_0,\ y(t)=U(t,\ s)\,y_0,$$

причем $0\leqslant x_0\leqslant y_0$. Нам необходимо показать, что $x(t)\leqslant y(t)$ $(t\geqslant s)$.

Введем в рассмотрение вектор-функцию $z(t)=y(t)-x(t)$, которая, очевидно, является решением системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt}&=f_1[t,\ x_1(t)+z_1,\dots,\ x_m(t)+z_m]-\\ &\qquad -f_1[t,\ x_1(t),\dots,\ x_m(t)],\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{dz_m}{dt}&=f_m[t,\ x_1(t)+z_1,\dots\ x_m(t)+z_m]-\\ &\qquad -f_m[t,\ x_1(t),\dots\ x_m(t)] \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

В силу свойства внедиагональной монотонности правых частей (2.11), система уравнений (2.17) удовлетворяет условиям леммы 2.1. Поэтому $z(t)\geqslant\theta$ при $t\geqslant s$, т. е. $x(t)\leqslant y(t)$. ■

Технический прием, связанный с рассмотрением вспомогательных систем дифференциальных уравнений типа (2.17) и последующим применением леммы 2.1, часто оказывается эффективным и в более сложных ситуациях.

Лемма 2.3. *Пусть правая часть дифференциального уравнения (2.11) при любом t представляет собой гетеротонный оператор. Тогда оператор сдвига $U(t, s)$ $(t \geqslant s)$ по траекториям (2.11) также является гетеротонным.*

Доказательство. Пусть $\hat{F}(t, v, w)$ — сопутствующий оператор по отношению к оператору $F(t, x)$, стоящему в правой части (2.11). Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dv}{dt} = \hat{F}(t, v, w), \quad \frac{dw}{dt} = \hat{F}(t, w, v). \tag{2.18}$$

Пусть $\tilde{U}(t, s)$ обозначает оператор сдвига по траекториям (2.18): $\tilde{U}(t, s)[v(s), w(s)] = [v(t), w(t)]$; а $\hat{U}(t, s)$ — его „половину":

$$\hat{U}(t, s)[v(s), w(s)] = v(t).$$

Покажем, что $\hat{U}(t, s)$ является сопутствующим по отношению к оператору сдвига $U(t, s)$.

Возьмем два любых решения системы (2.18) $[v(t), w(t)]$ и $[\bar{v}(t), \bar{w}(t)]$, удовлетворяющих условию $\bar{v}(s) \geqslant v(s)$, $\bar{w}(s) \leqslant w(s)$. Очевидно, лемма будет доказана, если показать, что $\bar{v}(t) \geqslant v(t)$, $\bar{w}(t) \leqslant w(t)$ при $t \geqslant s$.

Вектор-функции $p(t) = \bar{v}(t) - v(t)$, $q(t) = w(t) - \bar{w}(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \hat{F}[t, v(t)+p, w(t)-q] - \hat{F}[t, v(t), w(t)] \\ \frac{dq}{dt} &= \hat{F}[t, w(t), v(t)] - \hat{F}[t, w(t)-q, v(t)+p] \end{aligned}\right\},$$

которая в свою очередь удовлетворяет условиям леммы 2.1. Поэтому при $t \geqslant s$ выполняются неравенства $p(t) \geqslant \theta$, $q(t) \geqslant \theta$, в справедливости которых нам, собственно, и надо было убедиться. ■

Легко видеть, что требование гетеротонности оператора F в лемме 2.3 может быть ослаблено без изменения окончательного вывода. Та же схема доказательства остается работоспособной в предположении лишь внедиагональной гетеротонности оператора F: каждая компонента $f_i(t, x)$ оператора F допускает диагональное представление $f_i(t, x) \equiv \hat{\hat{f}}_i(t, x, x)$ такое, что $\hat{\hat{f}}_i$ по всем переменным x_j $(j \neq$ первого векторного аргумента x возрастае а по второму векторному аргументу x (т. е. по всем его координатам x_j) убывает. В этом случае вместо системы (2.18) надо рассматривать систему

$$\frac{dv}{dt}=\hat{\hat{F}}(t,\ v,\ w),\quad \frac{dw}{dt}=\hat{\hat{F}}(t,\quad v).$$

Сделанное замечание существенно для большинства приложений. Поэтому мы выделим его в самостоятельное утверждение.

Лемма 2.4. *Пусть правая часть дифференциального уравнения (2.11) при любом t представляет собой внедиагонально гетеротонный оператор. Тогда оператор сдвига $U(t,\ s)$ $(t\geqslant s)$ по траекториям (2.11) — гетеротонный.* ■

В подтверждение того, что предположения лемм 2.1 — 2.4 охватывают широкий круг приложений, можно было бы привести многочисленные примеры. Положительность оператора сдвига, например, часто заведомо ясна из содержательной природы задачи. Так, если переменные, характеризующие состояние динамической системы, представляют собой рыночные цены (численность биологических популяций, концентрации химических соединений, заказы на сырье и т. д.), то понятно, что они в течение всего времени функционирования системы остаются неотрицательными. Понятно также, что в этом случае система дифференциальных уравнений, адекватно описывающая соответствующую динамическую систему, будет удовлетворять условиям леммы 2.1, ибо предположения леммы не только достаточны, но и необходимы.

Изучение других „конусных“ свойств оператора сдвига в терминах правых частей соответствующего дифференциального уравнения мы оставляем до более подходящего момента. Здесь же остановимся на изложении нескольких вспомогательных результатов.

Ограничимся далее рассмотрением автономной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=F(x). \tag{2.19}$$

Положением равновесия системы (2.19) называется точка x^*, в которой $F(x^*)=0$. Устанавливать существование равновесия в системе можно с помощью хорошо развитых топологических методов. Однако нередко (хотя это и представляется на первый взгляд неожиданным) здесь удобнее исходить из рассмотрения свойств оператора сдвига U_t по траекториям (2.19). Содержательные примеры на эту тему будут приводиться в дальнейшем. Здесь же мы сформулируем и докажем простую теорему, которая представляет собой общее звено в решении задач подобного рода.

Теорема 2.1. *Пусть при любом достаточно малом $t \geqslant 0$ оператор сдвига U_t по траекториям (2.19) имеет неподвижную точку на некотором компакте $X \subset R^m$. Тогда система (2.19) имеет на компакте X положение равновесия**

Доказательство. Пусть $t_k \to 0$ $(t_k > 0)$. Из сделанного предположения вытекает, что при достаточно больших k операторы U_{t_k} имеют неподвижные точки $x^k \in X$. Поскольку X — компакт, без ограничения общности можно считать $x^k \to x^*$. Тогда $x^* \in X$ и есть искомое положение равновесия. Действительно, в силу непрерывности U_t последовательность $U_t x^k$ сходится к $U_t x^*$ при любом $t \geqslant 0$. С другой стороны (уже в силу непрерывности функции $U_t x$ по совокупности переменных) при любом $t \geqslant 0$

$$U_t x^k = U_{\tau_k} x^k \to x^*,$$

где $\tau_k = t - n t_k$, причем целое n выбрано так, что $0 \leqslant \tau_k \leqslant t_k$ (и поэтому $\tau_k \to 0$). Таким образом, $U_t x^* = x^*$ при любом $t \geqslant 0$. ■

Многие важные задачи теории динамических систем связаны с выяснением различных видов устойчивости равновесия. Напомним основные определения.

Положение равновесия x^* системы (2.19) называется *устойчивым по Ляпунову*, если по любой окрестности W точки x^* можно указать такую окрестность V точки x^*, что любая траектория (2.19), начинающаяся в V не выходит за пределы W при любом $t \geqslant 0$.

Устойчивое по Ляпунову положение равновесия x^* системы (2.19) называется *асимптотически устойчивым*, если $x(t) \to x^*$ при $t \to \infty$ и $x(0)$ достаточно близких к x^*; *асимптотически устойчивым в целом* (на области X), если $x(t) \to x^*$ при $t \to \infty$ и $x(0) \in X$; *равномерно асимптотически устойчивым*, если существует окрестность V точки x^* такая, что $U_t V \to \{x^*\}$.

---

* Принятое нами в начале раздела предположение о том, что правые части рассматриваемых дифференциальных уравнений удовлетворяют „хорошим" условиям, обеспечивающим, в частности, единственность решения, здесь не существенно. В условиях теоремы под U_t можно подразумевать точечномножественное отображение, неподвижная точка x_t^* которого определяется обычным образом: $x_t^* \in U_t x_t^*$ (см. А. Д. Мышкис [1]).

В случае неавтономной системы (2.11) определения по существу сохраняются. Для автономной системы асимптотическая устойчивость равновесия автоматически влечет за собой равномерную асимптотическую устойчивость. Отметим также, что из сходимости всех траекторий к положению равновесия не следует асимптотическая устойчивость (положение равновесия может оказаться неустойчивым по Ляпунову).

В ходе дальнейшего изложения нам понадобятся следующие простые факты, которые мы приводим здесь без доказательств.

Лемма 2.5. *Пусть по каждой окрестности W точки x^*, являющейся положением равновесия системы (2.19), можно указать такую окрестность V, что*

$$U_\tau^n V \subset W \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

при некотором фиксированном $\tau>0$. Тогда положение равновеси x^* устойчиво по Ляпунову. ■

Лемма 2.6. *Пусть положение равновесия x^* системы (2.19) устойчиво по Ляпунову и*

$$U_\tau^n x \to x^* \quad \text{при } n \to \infty$$

для некоторого фиксированного $\tau>0$ и x достаточно близких к x^* ($x \in X$). Тогда положение равновесия x^* асимптотически устойчиво (а це... на области X). ■

Лемма 2.7 *Пусть $V_n(x^*)$ — такая стягивающаяся к точке последовательность ее окрестностей, что*

$$U_\tau V_n(x^*) \subset V_{n+1}(x^*) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

при некотором фиксированном $\tau>0$. Тогда положение равновесия x^* асимптотически устойчиво. ■

2.4. Нелинейные колебания. В теории динамических систем важное место занимает изучение периодических решений (колебательных режимов, или просто колебаний). Сюда относятся вопросы существования периодических решений, их единственности, устойчивости и т. п. Постановки задач здесь подразделяются на два типа. Первый из них связан с изучением вынужденных колебаний т. е. колебаний в нестационарных системах, находящихся под воздействием внешних периодических возмущений (правая часть соответствующего дифференциального уравнения меняется с течением времени t и периодична по t). Второй — с изучением автоколебаний, т. е. колебаний в автономных системах (правая часть дифференциального уравнения не зависит от t).

Далее мы будем в основном рассматривать задачи о вынужденных колебаниях, предполагая, что изучаемая система описывается дифференциальным уравнением вида (2.11), правая часть которого ω-периодична по t, т. е. $F(t+\omega, x) \equiv F(t, x)$. Важную роль в таких задачах играет оператор сдвига по траекториям (2.11) за промежуток времени, равный периоду ω. В целях удобства мы будем использовать обозначение

$$Ux = U(\omega, 0)\, x. \tag{2.20}$$

Легко понять, что вопрос о существовании в системе ω-периодического решения эквивалентен вопросу о существовании неподвижной точки у оператора U, определяемого равенством (2.20). Этот факт носит название принципа Пуанкаре и в более точной формулировке звучит так: для того, чтобы решение $x(t)$ уравнения (2.11) было ω-периодическим, необходимо и достаточно, чтобы точка $x(0)$ была неподвижной точкой оператора (2.20): $Ux(0) = x(0)$.

Конечно, если в системе существует положение равновесия $x^*(F(t, x^*) \equiv 0)$, то заведомо существует и тривиальное ω-периодическое решение $x(t) \equiv x^*$. В таких случаях простые утверждения о наличии у оператора U неподвижной точки не могут гарантировать существование нетривиальных колебательных режимов, и тогда возникает необходимость в более глубоком анализе множества неподвижных точек оператора U. Во многих задачах, однако, отсутствие равновесия очевидно $\left(\text{например, } \dfrac{dx}{dt} = f(x) + \sin t\right)$, и тогда всякое утверждение о наличии у оператора U неподвижной точки гарантирует существование в системе нетривиального ω-периодического решения).

Леммы 2.1 — 2.4 предыдущего пункта о наличии у оператора сдвига $U(t, s)$ тех или иных „конусных" свойств сохраняют свое значение и для тематики нелинейных колебаний. Специфика здесь состоит лишь в том, что основное внимание уделяется вполне определенному оператору сдвига (2.20).

При изучении ω-периодических решений важную роль играют вопросы устойчивости. Определения здесь сводятся, собственно, к данным в предыдущем пункте, так как устойчивость решения $x^*(t)$ (т. е. уже не равновесия) уравнения (2.11) определяется как устойчивость нулевого положения равновесия дифференциального уравнения, записанного для вектор-функции $y(t) = x(t) - x^*(t)$. Все же для удобства приведем прямые определения.

Решение $x^*(t)$ уравнения (2.11) называется *устойчивым по Ляпунову*, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из $\|x_0 - x^*(0)\| < \delta$ следует $\|U(t, 0)x_0 - x^*(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq 0$. Другими словами, устойчивость решения $x^*(t)$ по Ляпунову означает непрерывность вектор-функции $U(t, 0)x$ в точке $x = x^*(0)$, равномерную относительно $t \in [0, \infty)$.

Устойчивое по Ляпунову решение $x^*(t)$ уравнения (2.11) называется *асимптотически устойчивым*, если

$$U(t, 0)x_0 - x^*(t) \to 0 \quad (t \to \infty) \tag{2.21}$$

при x_0 достаточно близких к $x^*(0)$; *асимптотически устойчивым в целом* (на области $X \subset R^m$), если (2.21) выполняется для всех $x_0 \in X$; *равномерно асимптотически устойчивым*, если предел (2.21) равномерен относительно x_0 из некоторой окрестности точки $x^*(0)$.

В дальнейшем нам будут полезны следующие аналоги лемм 2.5 — 2.7.

Лемма 2.8. *Пусть x^* неподвижная точка оператора (2.20) U, и по каждой окрестности W точки x^* можно указать окрестность V такую, что*

$$U^n V \subset W \quad (n = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда ω-периодическое решение $x^*(t) = U(t, 0)x^*$ уравнения (2.11) устойчиво по Ляпунову. ■

Лемма 2.9. *Пусть ω-периодическое решение $x^*(t)$ уравнения (2.11) устойчиво по Ляпунову и*

$$U^n x_0 \to x^*(0) \quad \textit{при } n \to \infty$$

для x_0 достаточно близких к $x^*(0)$ ($x \in X$). Тогда решение $x^*(t)$ асимптотически устойчиво (в целом на области X). ■

Лемма 2.10. *Пусть $V_k(x^*)$ — такая стягивающаяся к точке x^* последовательность ее окрестностей, что*

$$UV_n(x^*) \subset V_{n+1}(x^*) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тогда ω-периодическое решение $x^*(t) = U(t, 0)x^*$ уравнения (2.11) равномерно асимптотически устойчиво. ■

Изучение ω-периодических колебаний в терминах оператора сдвига (2.20) имеет свои преимущества и свои недостатки. О преимуществах удобнее будет судить непосредственно по результатам, недостатки же достаточно очевидны с самого начала. Во-первых, оператор сдвига задается в неявной форме, в результате чего возникает дополнительная потребность в исследовании его свойств в терминах правых частей дифференциальных уравнений. Во-вторых, при этом необходимо накладывать на правые части те или иные предположения, обеспечивающие единственность и нелокальную продолжимость решений (2.11). Этих недостатков лишен подход (конечно, связанный с появлением своих недостатков), основанный на переходе к эквивалентным исходной задаче интегральным уравнениям.

Простейшим примером такого уравнения может служить*

$$x(t)=x(\omega)+\int_0^t F[\tau,\ x(\tau)]\,d\tau=Ax(t). \tag{2.22}$$

Легко проверить, что каждое определенное на [0, решение уравнения (2.22) является одновременно ω-периодическим решением уравнения (2.11) (будучи ω-периодически продолженным), и наоборот, каждое ω-периодическое решение (2.11) удовлетворяет уравнению (2.22).

2.5. Интегральные операторы. В задачах нелинейного анализа довольно часто возникает необходимость исследования уравнения Урысона

$$x(t)=\int_\Omega k[t,\ s,\ x(s)]\,ds=Ax(t) \tag{2.23}$$

Интегральный оператор A называется *оператором Урысона*. Как правило, через Ω обозначается ограниченное замкнутое** подмножество конечномерного пространства. Обычно предполагается, что *ядро* $k(t,\ s,\ u)$ оператора (2.23) удовлетворяет *условиям Каратеодори*: функция $k(t,\ s,\ u)$ при всех u измерима по совокупности переменных $t,\ s\in\Omega\times\Omega$ и почти при всех $t,\ s\in\Omega\times\Omega$ непрерывна по u. Это предположение обеспечивает измеримость функции $k[t,\ s,\ x(s)]$, если измерима функция $x(s)$.

Частным, но достаточно важным, случаем операторов Урысона являются *операторы Гаммерштейна*, имеющие вид

$$Ax(t)=\int_\Omega k(t,\ s)\,f[s,\ x(s)]\,ds. \tag{2.24}$$

* Точнее говоря, уравнение (2.22) является интегро-функциональным, так как в правой части помимо интегрального присутствует слагаемое $x(\omega)$, представляющее собой линейный функционал, не определенный, например, в пространствах L_p.

** Замкнутость несущественна, если интегральный оператор рассматривается в пространствах суммируемых функций.

Здесь обычно предполагается, что ядро $k(t, s)$ — измеримая по совокупности переменных функция, а $f(t, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори: $f(t, u)$ при каждом фиксированном измерима по $t \in \Omega$ и почти при всех $t \in \Omega$ непрерывна по u.

Оператор Гаммерштейна можно рассматривать как произведение (композицию)

$$A = Kf \tag{2.25}$$

нелинейного *оператора суперпозиции*

$$fx(t) = f[t, x(t)] \tag{2.26}$$

и линейного интегрального оператора

$$Kx(t) = \int\limits_{\Omega} k(t, s)\, x(s)\, ds \tag{2.27}$$

с ядром $k(t, s)$.

Существом исходной задачи обычно не определяется то функциональное пространство, в котором следует рассматривать соответствующий интегральный оператор. В этих случаях руководствуются соображениями удобства. Функциональное пространство E стремятся выбрать так, чтобы интегральный оператор A действовал E в E, был непрерывен или вно. непрерывен. Конечзависимости ситуации существуют и другие требования, которые было бы желательно удовлетворить подбором пространства, требования непрерывности и условие $A: E \to E$ в большинстве случаев играют главную роль.

Напомним общие определения. Действующий из E_1 в E_2 оператор A называется непрерывным в точке $x_0 \in E_1$, если

$$\lim_{\|x - x_0\|_{E_1}} \| Ax - Ax_0 \|_{E_2} = 0.$$

Оператор A зывается непрерывным, если он непрерывен в каждой точке пространства E_1. Если оператор A линеен, то из непрерывности A в одной точке следует его непрерывность на всем пространстве E_1. Равносильное определение: оператор A зывается непрерывным, если прообразы открытых множеств в E_2 крыты в E_1.

Действующий из E в E_2 оператор A называется ограниченным, если он преобразует ограниченные множества в ограниченные; компактным, если он преобразует ограниченные множества из E_1 в предкомпактные множества E_2. Непрерывный и компактный оператор называется вполне непрерывным.

Опишем теперь некоторые достаточные условия непрерывности и полной непрерывности нелинейных интегральных операторов, а также условия, обеспечивающие возможность рассмотрения операторов Урысона и Гаммерштейна, как операторов, действующих из C в C или же из L_p в L_p.

Начнем с менее общего, но более распространенного в прикладных исследованиях оператора Гаммерштейна. Изучение оператора Гаммерштейна удобно проводить, исходя из его представления (2.25) в виде композиции линейного интегрального оператора (2.27) и оператора суперпозиции (2.26).

Теорема 2.2. *Пусть функция $f(t, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Тогда оператор суперпозиции (2.26) действует из L_p в L_q в том и только в том случае, когда функция $f(t, u)$ удовлетворяет неравенству*

$$|f(t, u)| \leqslant \alpha(t) + \beta |u|^{p/q}, \tag{2.28}$$

где $\alpha(t) \in L_q$. ■

Приведенный результат относится к случаю $p < \infty$ (и, конечно, $p \geqslant 1$, но это ограничение мы всегда подразумеваем, так как речь идет исключительно о банаховых пространствах). Теорема остается в силе для $p = \infty$ после замены неравенства (2.28) на $|f(t, u)| \leqslant \alpha_h(t)$ $(|u| \leqslant h)$, где $\alpha_h(t) \in L_q$, $0 < h < \infty$. Последнее неравенство является также достаточным признаком того, что оператор суперпозиции действует из C в L_q, поскольку C можно рассматривать как подпространство L_∞. В случае непрерывности функции $f(t, u)$ по совокупности переменных оператор суперпозиции, очевидно, действует из C в C.

Теорема 2.3. *Пусть измеримая по совокупности переменных функция $k(t, s)$ $(t, s \in \Omega)$ удовлетворяет условию*

$$\psi(t) = \| k(t, s) \|_{L_q} \in L_{\frac{p}{p-1}}$$

Тогда линейный интегральный оператор (2.27) действует из L_p в L_q ■

Теорема 2.4 *Дл... чтобы линейный оператор (2.27) действовал ... L_p ... C ... и дос... полнение следующих условий:*

1) при всех $t \in \Omega$ функция $k(t, s)$ принадлежит L_q, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; а функция $\psi(t) = \| k(t, s) \|_{L_q}$ ограничена;

2) для любого измеримого подмножества $D \subset \Omega$ и любого $t_0 \in \Omega$ имеет место

$$\lim_{t \to t_0} \int_D k(t, s)\, ds = \int_D k(t_0, s)\, ds. \ \blacksquare$$

Объединение перечисленных результатов позволяет указать условия, в которых оператор Гаммерштейна действует из C в C или из L_p в L_p. Получаемые таким образом признаки достаточны для большинства приложений. Существуют и более тонкие (зато более громоздко формулируемые) признаки, которые можно найти в литературных источниках, указанных в Комментариях. Аналогичные по назначению условия для оператора Урысона будут приведены ниже. Пока же остановимся на формулировке предположений, обеспечивающих непрерывность и полную непрерывность рассматриваемых операторов.

Если функция $f(t, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, а оператор суперпозиции (2.26) f действует из L_p в L_q, причем $q < \infty$, — то оператор f непрерывен. Достаточным условием полной непрерывности линейного интегрального оператора (2.27) в пространстве C является, например, непрерывность ядра $k(t, s)$, а пространстве L_p $(1 < p < \infty)$ — неравенство

$$\int_\Omega \int_\Omega |k(t, s)|^q\, dt\, ds < \infty,$$

где $\frac{1}{p}$ $\frac{1}{q}$ Из совокупности перечисленных предположений очевидным образом можно извлечь условия полной непрерывности оператора Гаммерштейна, действующего в L_p или в C.

Для того, чтобы оператор Урысона действовал и был вполне непрерывен в пространстве C, достаточно непрерывности ядра $k(t, s, u)$ по совокупности переменных. Соответствующие признаки в L_p для оператора Урысона обычно формулируются более громоздко.

Предположим, что ядро $k(t, s, u)$ оператора Урысона непрерывно по u и удовлетворяет неравенству

$$|k(t, s, u)| \leqslant R(t, s)(a + b|u|^{\alpha_0}),$$

где $\alpha_0 \geqslant 0$, а функция $R(t,$ суммируема совокупности переменных со степенью $\beta_0 > 1$

$$\int_\Omega \int_\Omega |R(t, s)|^{\beta_0}\, dt\, ds < \infty,$$

причем $\alpha_0 \leqslant \beta_0 - 1$. Тогда можно утверждать, что оператор Урысона с ядром $k(t, s, u)$ действует и вполне непрерывен в каждом пространстве L_p, где $p > 1$ и $\frac{\alpha_0 \beta_0}{\beta_0 - 1} \leqslant p \leqslant \beta_0$. Известны менее ограничительные, но более громоздкие предположения (см. Комментарии).

Если $k(t, s, u) \geqslant 0$ при всех $t, s \in \Omega$, $u \geqslant 0$ (почти при всех $t, s \in \Omega \times \Omega$, если речь идет о пространствах L_p), то оператор Урысона с ядром $k(t, s, u)$ очевидно, положителен на конусе неотрицательных функций, и монотонен, если дополнительно $k(t, s, u)$ монотонно возрастает по Оператор Урысона будет гетеротонным, если при всех (почти при всех) $t, s \in \Omega$ ядро гетеротонно, т. е. функция $k(t, s, u)$ допускает диагональное представление

$$k(t, s, u) = \hat{k}(t, s, u, u),$$

причем $\hat{k}(t, s, v, w)$ монотонно возрастает по v и монотонно убывает по w. Переформулировка сказанного для частного случая оператора Гаммерштейна очевидна (для положительности достаточно $k(t, s) \geqslant 0$, $f(t, u) \geqslant 0$ при $t, s \in \Omega$, $u \geqslant 0$; для монотонности — монотонность возрастания $f(t, u)$ по u и т. д.).

Иногда удается выделить более узкий (по сравнению с конусом неотрицательных функций) конус, на котором рассматриваемый интегральный оператор положителен. Такие примеры, представляющие особый интерес, будут встречаться далее и здесь в пункте 2.7. Пока же продолжим рассмотрение интегральных операторов положительных на конусах неотрицательных функций.

Как уже отмеча. ранее, важную роль играет дополнительное требование u_0-положительности. Ниже мы рассмотрим некоторые из достаточных условий, обеспечивающих положительность интегрального оператора.

Пусть речь идет об операторе Гаммерштейна с неотрицательным ядром $k(t,$ строго положительной при $u > 0$ функцией $f(t, u)$. В этом случае ...ично. то u_0 положительность (при любой ненулевой функции $u_0(t) \geqslant 0$) операто Гаммерштейна равноси на u_0-положительности ...ей интегрального оператора (2.27).

Наиболее прос достаточное условие u_0-положительности оператора (2.27) (для $u_0(t) \equiv 1$) состоит в ограниченности ядра $k(t, s)$ положительными константами: $0 < \alpha \leqslant k(t, s) \leqslant \beta < \infty$ при всех $t, s \in \Omega$. В частности, это условие выполняется автоматически, если ядро непрерывно и строго положительно.

Более тонкий признак связан с понятием *неразложимости ядра*. Непрерывное неотрицательное ядро $k(t, s)$ называется *неразложимым*, если при любом разбиении множества Ω на две непустые непересекающиеся части Ω_1 и Ω_2 найдутся точки $t_0 \in \Omega_1$, $s_0 \in \Omega_2$ такие, что $k(t_0, s_0) > 0$. Кстати, можно показать, что ядро $k(t, s)$ неразложимо в том и только в том случае, когда для любой ненулевой функции $\varphi(t)$ можно указать такую итерацию ядра

$$k^{(N)}(t, s) = \int\limits_{\Omega} \cdots \int\limits_{\Omega} k(t, s_1)\, k(s_1, s_2) \cdots k(s_{N-1}, s)\, ds_1 \cdots ds_{N-1},$$

что

$$\int\limits_{\Omega} k^{(N)}(t, s)\, \varphi(s)\, ds > 0$$

при любом $t \in \Omega$.

Если ядро $k(t, s)$ неразложимо и $u_0(t) \equiv 1$, то оператор (2.27) u_0-положителен (u_0-ограниченность снизу легко проверяется, а u_0-ограниченность сверху — очевидное следствие того, что в определение неразложимого ядра включено предположение о непрерывности $k(t, s)$).

Выбор в качестве u_0 функции $u_0(t) \equiv 1$ при изучении положительных интегральных операторов, пожалуй, не типичен. Свойства функции $u_0(t)$ обычно более тесно связываются с поведением ядра $k(t, s)$.

Пусть, например, ядро $k(t, s)$ удовлетворяет неравенствам

$$u_0(t)\, \alpha(s) \leqslant k(t, s) \leqslant u_0(t)\, \beta(s), \tag{2.29}$$

где $u_0(t)$ — ненулевая неотрицательная функция из пространства E (например, C или L_p), в котором действует изучаемый оператор, а неотрицательные функции $\alpha(s)$, $\beta(s)$ обращаются в нуль лишь на множестве нулевой меры и удовлетворяют неравенствам

$$\int\limits_{\Omega} \alpha(s)\, x(s)\, ds < \infty, \qquad \int\limits_{\Omega} \beta(s)\, x(s)\, ds < \infty$$

при $x(s) \in K_+$. В этом случае очевидно

$$\gamma_1 u_0(t) \leqslant \int\limits_{\Omega} k(t, s)\, x(s)\, ds \leqslant \gamma_2 u_0(t),$$

где $x(s)$ — ненулевая функция, а положительные константы γ_1 и γ_2 определяются равенствами

$$\gamma_1 = \int\limits_{\Omega} \alpha(s)\, x(s)\, ds, \qquad \gamma_2 = \int\limits_{\Omega} \beta(s)\, x(s)\, ds.$$

Таким образом, неравенства (2.29) обеспечивают u_0-положительность оператора (2.27).

Наиболее часто при исследовании линейных интегральных операторов (2.27) и операторов Гаммерштейна (2.25) в качестве u_0 выбирают функцию

$$u_0(t) = \int\limits_{\Omega} k(t, s)\, ds. \tag{2.30}$$

Достаточные условия u_0-положительности интегрального оператора в пространстве C для этого случая дает следующая

Лемма 11. *Пусть оператор (2.27) с неотрицательным ядром действует в $C[\Omega]$ и для каждого подмножества $D \subset \Omega$ положительной меры можно указать $\gamma = \gamma(D) > 0$ такое, что*

$$\int\limits_{D} k(t, s)\, ds \geqslant \gamma \int\limits_{\Omega} k(t, s)\, ds \quad (t \in \Omega). \tag{2.31}$$

Тогда оператор (2.27) u_0-положителен (элемент u_0 определяется равенством (2.30)). ■

Лемма 2.11 позволяет охватить важный и широко распространенный случай неограниченного на диагонали ядра ($k(t, s) \to \infty$ при $t \to s$). Условиям леммы 11 обычно удовлетворяют ядра, представляющие собой функции Грина для краевых задач второго порядка (см. следующий пункт). Такие задачи, в свою очередь, служат одним из основных источников, который приводит к необходимости изучения линейных и нелинейных интегральных уравнений и операторов.

Для оператора Урысона условия u_0-положительности можно указывать по аналогии с предыдущими вариантами. Часто удается вообще обойтись приведенными выше признаками для линейного интегрального оператора (2.27). Так, например, если

$$k_1(t, s) f_1(s, u) \leqslant k(t, s, u) \leqslant k_2(t, s) f_2(s, u),$$

причем, $f_1(s, u) > 0$, $f_2(s, u) > 0$ при $u > 0$, а линейные интегральные операторы с ядрами $k_1(t, s)$ и $k_2(t, s)$ u_0-положительны, то оператор Урысона с ядром $k(t, s, u)$ — также u_0 положителен.

Вогнутость u_0-положительного оператора Урысона обычно обеспечивается вогнутостью ядра $k(t, s, u)$ при любых фиксированных $t, s \in \Omega$. Свойство вогнутости оператора Гаммерштейна определяется вогнутостью соответствующего оператора суперпозиции (2.26). Аналогичным образом обстоит дело с условиями псевдовогнутости.

2.6. Краевые задачи. Многие задачи математической физики (и ряд задач из других областей) сводятся к изучению дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. В левой части уравнений обычно стоит дифференциальный оператор L вида

$$Lx(t) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t) \frac{\partial^2 x}{\partial t_i \partial t_j} + \sum_{i=1}^{m} a_i(t) \frac{\partial x}{\partial t_i} + a_0(t)\, x, \tag{2.32}$$

где $t = \{t_1, \ldots, t_m\} \in \Omega \subset R^m$.

Далее мы ограничимся рассмотрением важного класса эллиптических операторов, которые характеризуются тем, что $a_0(t) \geqslant 0$ и при любых $\xi_1, \ldots, \xi_m$ и $t \in \Omega$

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t)\, \xi_i\, \xi_j \geqslant \varkappa \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 \quad (\varkappa > 0).$$

Под Ω подразумевается ограниченная подобласть R^m с достаточно гладкой границей Γ (поверхность Γ, как правило, считается Ляпуновской). Коэффициенты дифференциального выражения (2.32) также предполагаются достаточно гладкими (см. К. Миранда [1]).

Первой краевой задачей (или задачей Дирихле) для дифференциального уравнения с эллиптическим оператором называют задачу об отыскании решения уравнения

$$Lx(t) = y(t), \tag{2.33}$$

удовлетворяющего нулевому граничному условию $x(t)|_{t \in \Gamma} = 0$.

Под регулярным решением первой краевой задачи понимают дважды непрерывно дифференцируемую в Ω и непрерывную на $\overline{\Omega}$ функцию $x(t)$, удовлетворяющую в Ω уравнению (2.33) и обращающуюся в нуль на границе Γ области Ω.

Известно, что в предположении достаточной гладкости функции $y(t)$ регулярное решение существует и может быть представлено в виде

$$x(t) = Gy(t) = \int_{\Omega} G(t, s)\, y(s)\, ds, \tag{2.34}$$

где ядро $G(t, s)$ называется *функцией Грина* первой краевой задачи.

Функция Грина $G(t, s)$ вне диагонали (т. е. при $s \neq t$) непрерывна по совокупности переменных. Имеют место оценки:

$$0 \leqslant G(t, s) \leqslant k_0 \| t - s \|^{-m+2} \quad (\text{при } m > 2);$$

$0 \leqslant G(t, s) \leqslant k_0 |\ln |t-s||$ (при $m=2$). Из этих оценок и теорем С. Л. Соболева об операторах типа потенциала следует, что оператор G действует из каждого L_p $\left(p > \frac{m}{2}\right)$ в пространство непрерывных функций $C[\overline{\Omega}]$ и вполне непрерывен. В частности, оператор G действует и вполне непрерывен в C.

В тех случаях, когда функция $y(t)$ не обладает свойством достаточной гладкости, регулярное решение краевой задачи может не существовать, — и тогда под решением обычно понимают функцию $x(t)$, определяемую формулой (2,34). Далее решение первой краевой задачи понимается в указанном обобщенном смысле.

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$Lx(t) = f[t, x(t)], \quad x(t)\big|_{t \in \Gamma} = 0 \tag{2.35}$$

с нелинейной функцией f. В указанном выше смысле под ее решением можно понимать решение интегрального уравнения Гаммерштейна

$$x(t) = \int_{\Omega} G(t, s) f[s, x(s)]\, ds = Ax(t), \tag{2.36}$$

где $G(t, s)$ — функция Грина первой краевой задачи.

Как уже отмечалось выше, функция Грина первой краевой задачи неотрицательна (это вытекает из принципа максимума). Поэтому в случае $f(t, u) \geqslant 0$ при $t \in \Omega$, $u \geqslant 0$ оператор A (2.36) положителен на конусе неотрицательных функций. Более того, в случае $f(t, u) > 0$ при $u > 0$ оператор A — u_0-положителен, где элемент u_0 определяется равенством типа (2.30), т. е.

$$u_0(t) = \int_{\Omega} G(t, s)\, ds.$$

Дело в том, что функция Грина $G(t, s)$ удовлетворяет условиям леммы 2.11 (см. М. А. Красносельский [1]), — это и позволяет сделать вывод об u_0-положительности оператора A. Свойства монотонности, вогнутости и др. оператора A определяются характером нелинейности $f(t, u)$.

Широко известным и весьма важным примером эллиптического оператора является оператор $-\Delta$, где Δ — *оператор Лапласа*:

$$\Delta x = \frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2} + \quad + \frac{\partial^2 x}{\partial t_m^2} \tag{2.37}$$

Содержательными примерами решений нелинейной краевой задачи $-\Delta x = f(t, x)$; $x(t)|_{t\in\Gamma} = 0$ могут служить:

1) стационарное распределение температур в изотропном теле распределенными источниками тепла, мощность которых нелинейно зависит от температуры;

2) потенциал электростатического (гравитационного) поля в области с непрерывно распределенными зарядами (гравитационными массами), плотность распределения которых в свою очередь зависит от потенциала.

Эллиптическая задача с нелинейностью может иметь и более сложный вид. Например, функция, стоящая в правой части дифференциального уравнения может зависеть не то[…] от $x(t)$, но и от производных $\frac{\partial x}{\partial t_i}$. В этом случае мы имеем краевую задачу

$$Lx(t) = f\left(t, x, \frac{\partial x}{\partial t_1}, \ldots \frac{\partial x}{\partial t_m}\right); \quad x(t)_{/t\in\Gamma} = 0. \tag{2.38}$$

Пусть функция $f(t, u, v_1, \ldots, v_m)$ неотрицательна при любых $t\in\overline{\Omega}$; $u \geqslant 0$; $v_1, \ldots, v_m \in (-\infty, \infty)$. Тогда опять-таки есть возможность воспользоваться конусными соображениями, сводя задачу (2.38) к уравнению с положительным оператором.

Введем в рассмотрение оператор

$$Fz(t) = f[t, Gz(t), H_1z(t), \quad H_mz(t)], \tag{2.39}$$

где G — линейный оператор (2.34), а операторы H_i $(i=1, \ldots, m)$ определяются равенствами *

$$H_iz(t) = \frac{\partial}{\partial t_i} Gz(t). \tag{2.40}$$

Из неотрицательности функции $f(t, u, v)$ вытекает положительность оператора (2.39) на конусе неотрицательных функций. Остается заметить, что если $z^*(t)$ — неподвижная точка оператора F, то $x^*(t) = Gz^*(t)$ — решение краевой задачи (2.38)

Отметим, что описанная схема рассуждений может быть эффективна и при рассмотрении других краевых задач не обязательно с эллиптическим оператором. В общем случае для положительности

---

* Из результатов Кошелева вытекает, что операторы H_i действуют из L_p $(p>m)$ в G и вполне непрерывны. В частности, операторы H_i действуют и вполне непрерывны в C.

аналога оператора (2.39) надо лишь предположить неотрицательность $f(t, u, v)$ не только при $u \geqslant 0$, но и при $u < 0$.

2.7. Двухточечная задача. Рассмотрим сначала скалярное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(t, x) = 0. \tag{2.41}$$

Двухточечной краевой задачей называют задачу об отыскании решения уравнения (2.41), удовлетворяющего граничным условиям $x(a) = x_1$, $x(b) = x_2$. Мы будем рассматривать стандартную постановку задачи (к ней всегда можно перейти с помощью очевидной замены переменных) с нулевыми граничными условиями

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{2.42}$$

Решения этой задачи совпадают с решениями интегрального уравнения Гаммерштейна

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s)\, f[s, x(s)]\, ds = Ax(t), \tag{2.43}$$

где $G(t, s)$ — функция Грина краевой задачи

$$-\frac{d^2x}{dt^2} = y(t), \quad x(0) = x(1) = 0.$$

В данном случае $G(t, s)$ легко выписывается в явном виде

$$G(t, s) = \begin{cases} t(1-s) & \text{при} \quad t \leqslant s \\ s(1-t) & \text{при} \quad s \leqslant t \end{cases} \tag{2.44}$$

Таким образом, функция $G(t, s)$ неотрицательная, и линейный интегральный оператор

$$Gy(t) = \int_0^1 G(t, s)\, y(s)\, ds \tag{2.45}$$

положителен. Более того, оператор (2.45) u_0-положителен, где

$$u_0(t) = \int_0^1 G(t, s)\, ds = \frac{t(1-t)}{2}. \tag{2.46}$$

Очевидно, оператор G, а также оператор A (2.43) (при условии непрерывности $f(t, u)$) действует в пространстве C и вполне непрерывен. Можно показать (рекомендуем читателю это проверить), что операторы G и $\dot{A}$ (в случае $f(t, u) \geq 0$) оставляют инвариантным не только конус неотрицательных функций, но и конус вогнутых (выпуклых вверх) функций, обращающихся в ноль на концах отрезка $[0, 1]$.

Так же как в предыдущем пункте, здесь можно перейти к более общей двухточечной задаче

$$\frac{d^2x}{dt}+f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)=0; \quad x(0)=x(1)=0. \tag{2.47}$$

После замены $\frac{d^2x}{dt^2}=-y(t)$ эта задача приводится к эквивалентному операторному уравнению

$$y(t)=f[t, Gy(t), Hy(t)], \tag{2.48}$$

где *

$$Hy(t)=\frac{d}{dt}Gy(t)=\int_0^1 G_t'(t, s)\, y(s)\, ds. \tag{2.49}$$

Рассмотрим теперь двухточечную задачу для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}+f_i(t, x_1,\dots x_m)=0, \quad i=1,\dots, m \tag{2.50}$$

с граничными условиями стандартного вида

$$x_i(0)=x_i(1)=0; \quad i=1, \quad m. \tag{2.51}$$

Эта задача эквивалентна решению системы интегральных уравнений Гаммерштейна

$$x_i(t)=\int_0^1 G(t, s)\, f_i[s, x_1(s),\dots, x_m(s)]\, ds, \quad i=1,\dots, m,$$

где ядро $G(t, s)$ по-прежнему определяется формулой (2.44). Эту систему можно записать в векторном виде

$$x(t)=\int_0^1 G(t, s)\, f[s, x(s)]\, ds \tag{2.52}$$

и рассматривать (2.52) как операторное уравнение в пространстве $C^m[0, 1]$ непрерывных вектор-функций $x(t)$.

---

* Как и G, оператор H действует и вполне непрерывен в C.

По аналогии со скалярным случаем в $C^m[0, 1]$ естественно выделить два конуса: конус функций с неотрицательными компонентами и конус функций с вогнутыми компонентами, обращающимися в нуль на концах сегментов $[0, 1]$. В силу сказанного выше, при условии $f_i(t, u_1, \dots, u_m) \geq 0$ $(u_1 \geq 0, \dots u_m \geq 0)$ оператор (2.52) оставляет инвариантными оба конуса, и, более того, первый конус переводит во второй. Очевидно также (при условии $f_i(t, u) > 0$, $u_1, \dots, u_m > 0$), что оператор (2.52) u_0-положителен, где

$$u_0(t) = \{t(1 - t), \dots, t(1 - t)\}.$$

Продемонстрируем в заключение один из прикладных аспектов двухточечной задачи. Ограничимся для простоты скалярным случаем.

Пусть исследуются периодические решения уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \tag{2.53}$$

с периодической по t функцией $f(t, u, v)$. Нам удобно период ω считать равным

Допустим, что функция $f(t, u, v)$ нечетна по первым двум переменным, т. е. $f(-t, -u, v) = -f(t, u, v)$.

В этом случае периодические решения уравнения (2.53) можно строить, например, так. Вначале ищется решение $x^*(t)$ уравнения (2.53), определенное на $[0, 1]$ и удовлетворяющее граничным условиям $x^*(0) = x^*(1) = 0$. Другими словами, ищется решение двухточечной задачи. Далее функция $x^*(t)$ доопределяется на $[-1, 0]$ по правилу: $x^*(-t) = -x^*(t)$, и затем периодически продолжается на все значения t. В результате получается искомое периодическое решение. По этой причине в указанных предположениях всякое утверждение о существовании решения двухточечной задачи представляет собой теорему о существовании периодического решения уравнения (2.53). (Конечно, этот пример не исчерпывает приложений двухточечной задачи и даже не относится к традиционным).

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Изучение линейных операторов с точки зрения нелинейного анализа представляет интерес по нескольким причинам. Во-первых, линейные операторы играют важную роль в вопросах дифференцирования. Во-вторых, в нелинейном анализе, в частности рассматриваются операторы, представляющие собой композицию линейных операторов с нелинейными, операторы, близкие к линейным, асимптотически линейные и д. Наконец, линейные операторы часто удобно использовать в качестве минорант и мажорант.

Теория линейных положительных операторов весьма обширна (см. Комментарии), и ее изложение не входит в наши намерения. Ниже сообщаются лишь основные факты этой теории в той ее части, которая непосредственно примыкает к содержанию книги.

3.1. Общие сведения. Простейшим примером линейного положительного оператора может служить оператор, задаваемый неотрицательной матрицей*. Этот пример в определенном смысле исчерпывает разновидности линейных положительных операторов в R^m, так как можно утверждать следующее. Если линейный оператор A действует в R^m и оставляет инвариантным некоторый телесный конус $K \subset R^m$, то существует базис, в котором A описывается неотрицательной матрицей.

С примерами интегральных линейных положительных операторов мы уже сталкивались в предыдущем параграфе (см. (2.27), (2.34), (2.45)). Еще один пример. Оператор сдвига по траекториям системы дифференциальных уравнений (2.10), правая часть которой линейна по x и удовлетворяет предположениям леммы 2.1 (т. е. условию внедиагональной положительности), линеен и положителен на неотрицательном ортанте R^m_+.

Как и в общем случае, для линейных операторов важную роль играет понятие u_0-положительности. Если оператор $A: R^m \to R^m$ задается неотрицательной матрицей $[a_{ij}]$, то необходимым и достаточным условием u_0-положительности оператора A (где $u_0 \in \operatorname{int} R^m_+$), или другими словами сильной положительности, является неразложимость матрицы $[a_{ij}]$. Требование неразложимости эквивалентно существованию у матрицы $[a_{ij}]$ дорожки невырожденности. Последовательность элементов

$$a_{i_1 i_2},\ a_{i_2 i_3}, \ldots,\ a_{i_m i_1} \tag{3.1}$$

называется дорожкой невырожденности матрицы $[a_{ij}]$, если все элементы последовательности (3.1) отличны от нуля и среди индексов $i_1, \ldots, i_m$ имеются все числа $1, 2, \ldots, m$. Обратим внимание,

---

* Матрицы с неотрицательными элементами называют также положительными или полуположительными.

что понятие неразложимости относится лишь к неотрицательным матрицам, тогда как понятие дорожки невырожденности неотрицательность элементов матрицы не предполагает.

Сформулируем условия u_0-положительности (сильной положительности) линейного оператора сдвига $U(0, t)$ траекториям системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)\,x_1 + \cdots + a_{1m}(t)\,x_m \\ &\ \,\cdots \\ \frac{dx_m}{dt} &= a_{m1}(t)\,x_1 + \cdots + a_{mm}(t)\,x_m \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

Предположим, во-первых, что правая часть (3.2) удовлетворяет условию внедиагональной положительности (см. лемму 2.1), т. е. $a_{ij}(t) \geqslant 0$ при $i \neq j$. Пусть теперь существует некоторое $t_0 \geqslant 0$, при котором матрица $A(t_0) = [a_{ij}(t_0)]$ имеет дорожку невырожденности. Тогда оператор сдвига $U(0, t)$ $(t > t_0)$ сильно положителен.

Для доказательства этого факта достаточно заметить следующее. Если $F = F_1 F_2$ представляет собой композицию положительных операторов F_1 и F_2, причем F_2 — сильно положителен, а F_1 переводит $\operatorname{int} K$ в $\operatorname{int} K$, то F также сильно положителен. Из сказанного следует, что достаточно убедиться в сильной положительности $U(t_0, t)$, поскольку $U(0, t) = U(t_0, t)\,U(0, t_0)$. Заметим сразу, что линейный положительный оператор сдвига $U(s, t)$ переводит внутренние точки R^m_+ во внутренние. Поэтому остается показать, что $U(t_0, t)\,x_0 \in \operatorname{int} R^m_+$ для граничных точек x_0. Пусть k координат точки x_0 положительны, а остальные равны нулю. Из существования дорожки невырожденности у матрицы $A(t_0)$ следует, что производная хотя бы одной координаты, равной нулю при $t = t_0$, положительна при $t = t_0$. Поэтому в момент времени $t = t_0 + h$, где $h > 0$ сколь угодно мало, положительны уже $k+1$ координат изображающей точки. Выбор достаточно малого $h > 0$ (такого, чтобы дорожка невырожденности существовала у матрицы $A(t_0+h)$ позволяет индуктивно продолжить рассуждения и показать, что $x(t) \in \operatorname{int} R^m_+$, для $t > t_0$ *

Условия u_0-положительности линейных интегральных операторов достаточно подробно обсуждались в предыдущем параграфе.

---

* Близкие рассуждения в аналогичном контексте более подробно проводятся в книге М. А. Красносельского [3].

При изучении интегральных операторов с неотрицательными ядрами весьма важен вопрос о наличии инвариантных конусов, отличных от конуса неотрицательных функций. Пример на эту тему уже встречался нам в 2:7. Здесь мы приведем еще несколько результатов.

Пусть ядро $k(t, s)$ линейного интегрального оператора

$$Ax(t) = \int_{\Omega} k(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{3.3}$$

действующего в C или L_p, неотрицательно и удовлетворяет условию

$$u_0(t) \leqslant k(t, s) \leqslant \rho u_0(t) \quad (t, s \in \Omega), \tag{3.4}$$

где функция $u_0(t) \geqslant 0$ принадлежит тому же пространству, в котором действует оператор (3.3). В этих условиях очевидно, что оператор A оставляет инвариантным конус $K_{u_0,\rho}$ (см. п. 1.6), где K конус неотрицательных функций. Более того, оператор A переводит K в $K_{u_0,\rho}$. Последнее замечание весьма существенно по следующим соображениям. Предположим, изучается нелинейный оператор Гаммерштейна $G = Af$, где A — линейный оператор (3.3), а f — нелинейный оложительный оператор суперпозиции (2 26). Если известно лишь, что оператор A оставляет инвариантным конус $K_{u_0,\rho}$, то отсюда вовсе не следует инвариантность $K_{u_0,\rho}$ для оператора G. Но если известно, что $AK \subset K_{u_0,\rho}$, а оператор f переводит ненулевые элементы конуса K в ненулевые, тогда можно утверждать, что $G = Af$ — положителен на конусе $K_{u_0,\rho}$, а также $GK \subset K_{u_0,\rho}$.

Для оператора (3.3) с непрерывным неотрицательным ядром $k(t, s)$, действующего в C, вместо (3.4) можно указать более слабое условие

$$u_0(t)\, v(s) \leqslant k(t, s) \leqslant \rho u_0(t)\, v(s) \quad (t, s \in \Omega), \tag{3.5}$$

где $u_0(t)\, v(t) \geqslant 0$; $u_0 \in C$, $v \in L_1$. Следствие $AK \subset K_{u_0,\rho}$ — очевидно. В данном случае верна и обратная импликация: если $AK \subset K_{u_0,\rho}$, то существует такая функция $v(s) \in L_1$, что выполняется (3.5) (проверьте!).

Приведем теперь условия, в которых оператор (3.3) переводит K конус K^{v^*} определенный в п. 1.6.

Лемма 3.1. *Для того, чтобы оператор (3.3) с непрерывным отрицательным ядром преобразовывал конус неотрицательных* *функций $K \subset C$ в конус K^{v^*}, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$k(t, s) \geqslant v^*(t)\, k(\tau, s) \quad (t, \tau, s \in \Omega). \tag{3.6}$$

Достаточность: если $x(t) \geqslant 0$, то при любых $t, \tau \in \Omega$

$$Ax(t) \geqslant \int_\Omega v^*(t)\, k(\tau, s)\, x(s)\, ds = v^*(t)\, Ax(t),$$

откуда $Ax \geqslant \| Ax \| v^*$, т. е. $Ax \in K^{v^*}$

Необходимость: если $AK \subset K^{v^*}$ при любом $x \in K$

$$\int_\Omega k(t, s)\, x(s)\, ds \geqslant v^*(t) \max_{\tau \in \Omega} \int_\Omega k(\tau, s)\, x(s)\, ds,$$

т. е.

$$\int_\Omega [k(t, s) - v^*(t)\, k(\tau, s)]\, x(s)\, ds \geqslant 0 \quad (t, \tau \in \Omega)$$

и из произвольности x вытекает (3 6). ■

Упражнение 3.1. Сформулируйте докажите аналог леммы 3.1 для оператора (3.3), действующего в L_p.

Упражнение 3.2. Пусть непрерывное неотрицательное ядро $k(t, s)$ оператора (3.3) удовлетворяет условию

$$\gamma k(t, s) \leqslant \frac{1}{\operatorname{mes} \Omega} \int_\Omega k(\tau, s)\, d\tau \quad (t, s \in \Omega),$$

где $0 < \gamma \leqslant 1$. Покажите, что в этом случае оператор (3.3) переводит конус $K \subset C$ неотрицательных функций в конус (1.9) K_γ, где K_γ определяется с помощью линейного функционала

$$l(x) = \frac{1}{\operatorname{mes} \Omega} \int_\Omega x(t)\, dt. \tag{3.7}$$

Упражнение 3.3. Пусть непрерывное неотрицательное ядро $k(t, s)$ оператора (3.3), где $\Omega = [0, 1]$ дважды непрерывно дифференцируемо по t, причем $\dfrac{\partial^2 k(t, s)}{\partial t^2} \leqslant 0$ $(t, s \in [0, 1])$. Покажите, что в этом случае оператор (3.3) переводит конус $K \subset C$ неотрицательных функций в конус $K_{\frac{1}{2}}$, определяемый с помощью функционала (3.7).

Упражнение 3.4. Пусть линейный оператор A переводит конус K в конус $K_{u_0, \rho}$, причем ненулевые элементы $x \in K$ переводит в ненулевые. Покажите, что тогда оператор A u_0-положителен на каждом конусе $K_{u_0, \rho+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$.

Остановимся на формулировке еще одного полезного результата.

Теорема 3.1. *Пусть E_1 и E_2 — два банаховых пространства с выделенными конусами соответственно K_1 и K_2, первый из* *которых воспроизводящий, а второй нормальный. Тогда любой линейный оператор $A: E_1 \to E_2$, удовлетворяющий условию $AK_1 \subset K_2$, непрерывен.* ■

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что непрерывным является любой линейный оператор $A: E \to E$, оставляющий инвариантным воспроизводящий нормальный конус $K \subset E$. Поэтому, например, в случае интегрального оператора (3.3) с неотрицательным ядром достаточно убедиться в том, что он действует в C или L_p — свойство непрерывности при этом обеспечивается автоматически

3.2. Неразложимые операторы. Элемент x называется *квазивнутренним элементом* конуса K, если $l(x) > 0$ для любого ненулевого функционала $l \in K^*$. Напомним, что K^* обозначает множество линейных положительных на K функционалов.

В случае телесного конуса понятия квазивнутреннего и внутреннего элемента совпадают. В L_p конус неотрицательных функций свойством телесности не обладает, но имеет квазивнутренние элементы: неотрицательные функции из L_p, принимающие нулевые значения лишь на множестве нулевой меры.

Линейный положительный оператор A называется *неразложимым*, если из $x \geqslant \alpha Ax$, где $x \in K$, $x \neq 0$, $\alpha > 0$, вытекает, что x — квазивнутренний элемент K

Форма определения неразложимого оператора довольно далека от конкретных реализаций. Тем не менее в каждом конкретном случае необходимая редукция проводится достаточно легко. Линейный оператор A, задаваемый неотрицательной матрицей, неразложим в том и только в том случае, когда матрица A неразложима (имеет дорожку невырожденности). Линейный интегральный оператор (3.3) с непрерывным неотрицательным ядром $k(t, s)$, действующий в C, неразложим в том и только в том случае, когда ядро $k(t, s)$ неразложимо (см. п. 2.5). Близкий по характеру критерий можно указать для оператора (3.3), действующего в L_p (см. литературные ссылки в Комментариях).

В определенном смысле понятие неразложимого оператора близко к понятию сильно положительного оператора. Во-первых, каждый сильно положительный оператор (естественно линейный) неразложим. Более того, неразложим любой u_0-ограниченный снизу оператор, если u_0 — квазивнутренний элемент K. В обратную сторону эти утверждения, вообще говоря, не работают, но обращаются в достаточно естественных предположениях. Например, в случае интегрального оператора (3.3) с непрерывным неотрицательным ядром и связной областью интегрирования Ω — неразложимость равносильна сильной положительности.

3.3. Оценки спектрального радиуса. Существенной характеристикой линейного оператора A является его *спектральный радиус* $\rho(A)$, определяемый как наименьший радиус круга, содержащего весь спектр оператора A. Здесь уместно напомнить формулу И. М. Гельфанда

$$\rho(A)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}. \tag{3.8}$$

Известно, что линейное уравнение $\lambda x = Ax + y$ при $|\lambda| > \rho(A)$ имеет единственное решение $x^* = (\lambda I - A)y^{-1}$ (где I — тождественный оператор), являющееся пределом последовательных приближений $\lambda x_{n+1} = Ax_n + y$ ($n=0, 1, 2, \ldots$) при любом $x_0 \in E$ Сходимость последовательных приближений в данном случае равносильна сходимости к решению *ряда Неймана*

$$x^* = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} A^n y. \tag{3.9}$$

Можно утверждать и обратное: если ряд (3.9) сходится при любых $y \in E$ и $|\lambda| > \alpha$, то $\rho(A) \leqslant \alpha$.

Точное вычисление спектрального радиуса удается лишь в исключительных случаях. По этой причине важную роль в теории линейных операторов играют теоремы об оценках спектрального радиуса. Особенно удобные и эффективные приемы таких оценок существуют для положительных операторов, которые собственно и представл[illegible] для нас основной интерес.

Теорема 3.[illegible] *Пус[illegible] линейного положительного оператора A и ненулевого элемента $x_0 \in K$ выполняется неравенство*

$$Ax_0 \geqslant \gamma x_0. \tag{3.10}$$

Тогда $\rho(A) \geqslant \gamma$.

Доказательство. Обозначим через x_ε решение уравнения $(\rho(A)+\varepsilon)x = Ax + y$, где $\varepsilon > 0$, $y \geqslant x_0$. Поскольку все элементы $A^n y$ положительны, то x_ε, представимое рядом (3.9), также положительно, а значит положительно Ax_ε. Поэтому

$$(\rho(A)+\varepsilon)\,x_\varepsilon \quad [illegible] \quad y \geqslant x_0. \tag{3.11}$$

Кроме того,

$$(\rho(A)+\varepsilon)\,x_\varepsilon \geqslant Ax_\varepsilon. \tag{3.12}$$

Применяя к неравенству (3.11) оператор A (заметим, что линейный положительный оператор монотонен) и пользуясь неравенствами (3.10), (3.12), получаем $x_\varepsilon \geqslant \gamma(\rho(A)+\varepsilon)^{-2} x_0$. Продолжая этот процесс, приходим к неравенствам $x_\varepsilon \geqslant \gamma^{n-1}(\rho(A)+\varepsilon)^{-n} x_0$ ($n=1, 2,$ [illegible]), откуда вытекает ограниченность при каждом фиксированном $\varepsilon>0$ последовательности $\gamma^{n-1}(\rho(A)+\varepsilon)^{-n}$ Следовательно $\rho(A)\geqslant\gamma$. ■

Из доказательства легко видеть, что требование $x_0 \in K$ можно заменить предположением: $-x_0 \notin K$, конус K воспроизводящий (или $-x_0$ не принадлежит K, но принадлежит линейной оболочке K). Неравенство (3.10) также можно заменить без изменения вывода на $A^k x_0 \geqslant \gamma^k x_0$ (это очевидно, в силу $\rho(A^k)=[\rho(A)]^k$).

Аналогичная оценка спектрального радиуса по неравенству

$$Ax_0 \leqslant \gamma x_0 \quad (x_0 \neq 0,\ x_0 \in K) \tag{3.13}$$

в общем случае не имеет места. Простые примеры показывают, что (3.13) не влечет за собой $\rho(A) \leqslant$ [illegible] Тем не менее в некоторых достаточно свободных предположениях удается установить справедливость соответствующей [illegible]мпликации.

Пусть, например, K — нормальный воспроизводящий конус, а оператор A x_0— ограничен сверху. Тогда из (3.13) вытекает, что оператор $B = \frac{1}{\gamma} A$ преобразует в себя конусный отрезок [illegible] $x_0\rangle$. Поэтому при любом $y \in \langle -x_0, x_0\rangle$ нормы элементов $B^n y$ ограничены в совокупности, что влечет за собой сходимость рядов Неймана (3.9) при $|\lambda|>\gamma$ Поскольку оператор A x_0 ограничен сверху, то ограниченными по норме будут также элементы $B^n y$ при любом $y \in E$. Следовательно, ряды Неймана (3.9) сходятся при $|\lambda|>\gamma$ для всех $y \in E$, а это дает $\rho(A)\leqslant\gamma$.

Возможны и другие вариации предположений. Часть из них собрана в следующем утверждении.

Теорема 3.3. *Пусть линейный положительный оператор A удов*[illegible]*воряет неравенс*[illegible] *(*[illegible]*13)* [illegible] *пусть выполняется одно из условий:*

1) конус K [illegible]*рм*[illegible] [illegible]*роизводящий, оператор A ограничен сверху;*

2) оператор A [illegible]*прерывен, x_0 — квазивнутренний* [illegible]*мент K;*

3) конус K нормальный и телесный, x_0 — внутренний элемент K;

4) конус K нормальный и воспроизводящий; оператор A u_0-ограничен сверху, x_0 — квазивнутренний элемент K.

Тогда имеет место оценка $\rho(A)\leqslant\gamma$. ■

Часто представляют интерес оценки спектрального радиуса в виде строгих неравенств.

Теорема 3.4. *Пусть выполняются предположения теоремы 3.3. и $\gamma x_0 - Ax_0$ — квазивнутренний элемент конуса K (или же оператор A неразложим и $Ax_0 \neq \gamma x_0$). Тогда $\rho(A)<\gamma$* ■

Рассмотрим иллюстративный пример. Пусть линейный интегральный оператор (3.3) имеет неотрицательное ядро и действует в C. Из теоремы 3.3 (случай 3) вытекает оценка

$$\rho(A)=\max_{t\in\Omega} \frac{1}{x_0(t)} \int_{\Omega} k(t, s)\, x_0(s)\, ds, \tag{3.14}$$

где $x_0(t)$ — произвольная положительная на Ω функция. В случае $x_0(t)\equiv 1$ получаем заведомо грубую оценку

$$\rho(A)\leqslant\max_{t\in\Omega} \int_{\Omega} k(t, s)\, ds=\| A \|.$$

Укажем теперь оценки для оператора (2.45) с ядром (2.44). В п. 2.7 уже отмечалось, что оператор G (2.45) u_0-положителен, где $u_0(t)=t(1-t)$ Простые вычисления приводят к неравенствам. $Gu_0(t)\leqslant 0{,}1041\, u_0(t)$; $G^2u_0(t)\leqslant 0{,}1016\, Gu_0(t)$, из которых по теореме 3.3 (случай 1)) вытекают оценки $\rho(G)\leqslant 0{,}1041$, $\rho(G)\leqslant 0{,}1016$. Точное значение спектрального радиуса в данном случае равно $1/\pi^2\approx 0{,}1013$.

Следующая теорема позволяет использовать описанные выше приемы оценки спектрального радиуса положительного оператора для оценок спектрального радиуса линейного оператора общего вида.

Теорема 3.5. *Пусть линейный оператор A положителен на нормальном воспроизводящем конусе K линейный оператор B удовлетворяет усл*

$$-Ax\leqslant Bx\leqslant Ax \quad (x\in K).$$

Тогда $\rho(B)\leqslant\rho(A)$. ■

3.4. Позитивные собственные значения. Пусть уравнение

$$Ax=\lambda x \tag{3.15}$$

с линейным положительным оператором A имеет при некотором вещественном $\lambda=\lambda_0>0$ ненулевое положительное решение $x_0\in K$. В этом случае λ_0 называют *позитивным собственным значением* оператора A, а x_0 — *положительным собственным вектором*. Позитивные собственные значения положительны, но положительные собственные значения не обязательно позитивны (к позитивным не относятся те положительные собственные значения, которым соответствуют собственные векторы, не лежащие в K).

Теорема 3.6. *Пусть линейный u_0-ограниченный в пространстве E оператор A вполне непрерывен и u_0-положителен. Тогда оператор A имеет единственный (с точностью до нормы) положительный собственный вектор $x_0(Ax_0=\lambda_0x_0)$; соответствующее ему позитивное собственное значение $\lambda_0>0$ — простое и превосходит модуль всякого другого собственного числа оператора A, т. е. $\lambda_0=\rho(A)$.* ■

Эта теорема достаточна для большинства приложений. В ней даются положительные ответы на основные вопросы: существование позитивного собственного значения, его простота, единственность и, наконец, совпадение со спектральным радиусом (и даже более того, отсутствие на окружности радиуса $\rho(A)$ других собственных значений). Предположения теоремы, вообще говоря, довольно жесткие, но они обычно выполняются в конкретных задачах. Эти предположения можно существенно ослабить, если положительные ответы требуются лишь на часть из перечисленных выше вопросов. На этом пути возникает множество вариаций, описание которых здесь едва ли уместно. Приведем лишь несколько основных результатов.

Теорема 3.7. *Пусть линейный вполне непрерывный оператор A положителен на воспроизводящем конусе K и имеет собственные значения, отличные от нуля. Тогда $\rho(A)$ является позитивным собственным значением оператора A.* ■

Теорема 3.8. *Пусть линейный u_0-ограниченный в пространстве E оператор A u_0-положителен и имеет положительный собственный вектор. Тогда соответствующее позитивное собственное значение простое и превосходит модуль любого другого собственного числа оператора A.* ■

Объединение теорем предыдущего пункта об оценках спектрального радиуса с утверждениями данного пункта о совпадении λ_0 и $\rho(A)$ позволяет указать оценки для λ_0. Формальное объединение, правда, приводит к „лишним“ предположениям. На практике удобно пользоваться следующим утверждением.

Теорема 3.9. *Пусть линейный положительный оператор A вполне непрерывен и существует элемент $u \in E$ такой, что $-u \notin K$, $u = v - w$ $(v, w \in K)$ и*

$$A^k u \geqslant \gamma^k u \quad (\gamma > 0).$$

Тогда оператор A имеет позитивное собственное значение $\lambda_0 \geqslant \gamma$ ■

Перечисленные результаты могут натолкнуть на ошибочное мнение, что практически любой линейный положительный оператор (за исключением экзотических) имеет положительный собственный вектор. Категорично говорить об ошибочности, правда, здесь не совсем корректно, поскольку все зависит от того, что понимать под экзотикой. Тем не менее можно указать достаточно обширный класс положительных интегральных операторов Вольтерра *, которые в естественных предположениях не имеют положительных собственных векторов. Например, положительный оператор

$$Ax(t) \quad \int_0^t x(s)\, ds$$

действует вполне непрерывен как в C, так и в L_p. позитивные собственные значения у него отсутствуют.

3.5. Несовместные неравенства. Будем говорить, что элемент x под действием оператора A идет вперед (строго вперед), если $Ax \geqslant x$ $(Ax \geqslant x,\ Ax \neq x)$; идет назад (строго назад), если $Ax \leqslant x$ $(Ax \leqslant \quad Ax \neq x)$.

Уже из теорем пункта 3.3 можно „извлечь“ утверждения о невозможности существования в конусе у линейного положительного оператора различных элементов, одни из которых идут, например, вперед, а другие строго назад (в противном случае получались бы противоречивые оценки спектрального радиуса). Здесь можно было

* Интегральным оператором Вольтерра называется оператор вида

$$Ax(t) = \int_0^t k(t, s)\, x(s)\, ds.$$

Доопределив ядро для $s > t$ по правилу $k(t, s) = 0$, этот оператор можно записать в виде (3.3). Если A действует в $C[0, 1]$ и ядро $k(t, s)$ непрерывно, то спектральный радиус A равен нулю. Более общие условия можно найти у П. П. Забрейко (Литовск. . сб., 7, № 2, 1967).

бы указать целую серию теорем. Нам понадобится следующий результат.

Теорема 3.10. *Пусть линейный u_0-положительный оператор A имеет положительный собственный вектор x_0, соответствующий позитивному собственному значению $\lambda_0 = 1$. Тогда для всех $x \in K$, отличных от νx_0 $(\nu \geqslant 0)$, элементы x и Ax несравнимы, т. е. $x - Ax \notin K$, $Ax - x \notin K$ (или равносильно $x \not\geqslant Ax$, $x \not\leqslant Ax$).*

Доказательство. Заметим, во-первых, что элемент x_0, очевидно, принадлежит $K(u_0)$, и поэтому оператор A x_0-положителен.

Возьмем произвольное $x \in K$, $x \neq 0$. Обозначим через α_0 и β_0 соответственно наибольшее и наименьшее из чисел α и β, при которых $\alpha x_0 \leqslant A^k x_0 \leqslant \beta x_0$, где k выбрано из условия $A^k x \in K(x_0)$. Допустим $A^k x \neq \nu x_0$. Тогда элементы $A^k x - \alpha_0 x_0$ и $\beta_0 x_0 - A^k x$ отличны от нуля и положительны, и поэтому найдутся такие натуральные p и q и положительные α_1 и α_2, что

$$A^p(A^k x - \alpha_0 x_0) \geqslant \alpha_1 x_0; \quad A^q(\beta_0 x_0 - A^k x) \geqslant \alpha_2 x_0. \tag{3.16}$$

Если $x \geqslant Ax$, то $A^k x \geqslant A^{p+k} x$, и в силу первого из неравенств (3.16) $A^k x \geqslant (\alpha_0 + \alpha_1) x_0$, что противоречит максимальности α_0. В случае $x \leqslant Ax$ аналогичным образом получается противоречие (при помощи второго неравенства (3.16)) с определением β_0.

Теперь остается вариант $A^k x = \nu x_0$. Если $Ax \geqslant x$, то $A^k x \geqslant x$, т. е. $\nu x_0 - x \geqslant 0$. Если бы элемент $\nu x_0 - x$ был отличен от нуля, то элемент $A^n(\nu x_0 - x)$ также был бы отличен от нуля при всех достаточно больших n. Но это невозможно, поскольку $A^k(\nu x_0 - x) = 0$. Следовательно $Ax \geqslant x$ возможно лишь при $x = \nu x_0$. Случай $Ax \leqslant x$ рассматривается аналогично. ■

3.6. Положительная обратимость. Линейный оператор $B: E \to E$ называется *положительно обратимым*, если обратный оператор B^{-1} существует и положителен.

Нередко возникает необходимость выяснить положительную обратимость оператора $I - A$, где I тождественный (единичный), а A положительный оператор. Для решения этой задачи можно указать довольно простой и весьма эффективный способ.

Заметим, во-первых, что положительная обратимость $I - A$ равносильна положительной разрешимости неоднородного уравнения

$$x = Ax + y \tag{3.17}$$

при любом $y \in K$ (плюс, разумеется, разрешимости (3.17) при всех $y \in E$).

В достаточно свободных предположениях можно утверждать, что из положительной разрешимости (3.17) хотя бы при одном $y \in K$ ($y \neq \theta$) вытекает положительная разрешимость (3.17) при любом $y \in K$. Это предельно упрощает исходную задачу: достаточно подобрать хотя бы один ненулевой положительный элемент y_0, при котором решение (3.17) существует и положительно*. Теперь уточним сказанное.

Пусть y_0 — квазивнутренний элемент конуса K (или же оператор A неразложим и $y_0 \gg \theta$, $y_0 \neq \theta$) и при $y = y_0$ уравнение (3.17) имеет положительное решение x_0. Пусть оператор A и элемент x_0 удовлетворяют одному из условий 1) — 4) теоремы 3.3. Тогда по теореме 3.4 $\rho(A) < 1$ (так как $Ax_0 = x_0 - y_0 \gg x_0$). Следовательно, уравнение (3.17) имеет решение при любом $y \in E$. При $y \in K$ соответствующие ряды Неймана (3.9) содержат лишь положительные члены — поэтому при любом $y \in K$ решение уравнения (3.17) положительно.

Сформулируем полученный результат в виде отдельной теоремы.

Теорема .11. *Пусть y_0 квазивнутренний элемент конуса K (или же оператор A неразложим, $y_0 \gg \theta$, $y_0 \neq \theta$) и при $y = y_0$ уравнение (3.17) имеет положительное решение x_0, причем оператор A и элемент x_0 удовлетворяют одному из условий 1) — 4) теоремы 3.3. Тогда оператор $I - A$ положительно обратим.* ■

Нужно отметить, что условия 1) — 4) теоремы 3.3 в данной ситуации можно ослабить. Например, в случаях 2), 4) фигурирует предположение о том, что x_0 квазивнутренний элемент K. Понятно, что это требование можно опустить (так как оно выполняется автоматически), если y_0 — квазивнутренний элемент.

Вопрос о положительной обратимости линейного оператора часто требует более широкого понимания. Многие важные задачи связаны с необходимостью рассмотрения линейных операторов, действующих из одного банахова пространства в другое. Стандартную в этом смысле ситуацию иллюстрируют линейные дифференциальные операторы, которые упоминались в § Такие операторы, естественно рассматривать, например, как операторы, действующие из C_2 в C, а под их положительной обратимостью подразумевать положительность функций Грина соответствующих краевых задач. К сожалению, для подобного рода случаев простые

---

* Конечно, практически более естественно действовать наоборот: искать $x_0 \gg \theta$, при котором $x_0 - Ax_0 \gg \theta$.

критерии положительной обратимости общего характера не известны. Тем не менее имеется ряд полезных результатов, основанных на сравнении операторов. Прежде чем излагать эти результаты, приведем формальные определения.

Ниже рассматриваются линейные операторы, действующие из E_1 в E_2. Банаховы пространства E_1, E_2 полуупорядочены соответственно конусами K_1 и K_2. Оператор $A: E_1 \to E_2$ называют положительным, если $AK_1 \subset K_1$. Пишут $A \geqslant B$, если оператор $A - B$ положителен. Линейный оператор $A: E_1 \to E_2$ называют положительно обратимым, если существует $A^{-1}: E_2 \to E_1$ и $A^{-1}K_2 \subset K_1$.

Приведем сначала почти очевидное утверждение.

Теорема 3.12. *Пусть операторы A и B линейны и $A \geqslant B$, причем A положительно обратим, BA^{-1} непрерывен и $\rho_0 = \rho(I - BA^{-1}) < 1$. Тогда оператор B положительно обратим.* ■

Применяя описанные выше приемы оценки спектрального радиуса к оценке ρ_0, можно получить различные следствия из теоремы 3.12. Укажем одно из них.

Теорема 3.13. *Пусть операторы A и B линейны и $A \geqslant B$, причем A положительно обратим. Пусть K_2 нормальный телесный конус, и оператор B переводит некоторый элемент $x_0 \in K_1$ во внутренний элемент конуса K_2. Тогда B положительно обратим.* ■

Можно привести также признаки положительной обратимости на основе двусторонних оценок оператора.

Теорема 3.14. *Пусть конус K_2 воспроизводящий и нормальный, а операторы A, B, C линейны и $A \leqslant B \leqslant C$, причем A и C положительно обратимы. Тогда оператор B положительно обратим.* ■

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ПО КОНУСУ

4.1. Производные Фреше и Гато. Оператор A, действующий в банаховом пространстве E, называют *дифференцируемым по Фреше* в точке x_0, если приращение $A(x_0+h) - A(x_0)$ при любом $h \in E$ представимо в виде

$$A(x_0+h) - A(x_0) = A'(x_0)h + \omega(x_0, h), \tag{4.1}$$

где $A'(x_0)$ — линейный ограниченный оператор и

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0 \tag{4.2}$$

Оператор $A'(x_0)$ называется *производной Фреше* (сильной или слабой) в зависимости от того, сильный или слабый предел подразумевается в (4.2)). Далее, если речь идет о производной Фреше, подразумевается сильная производная.

Для производной Фреше справедливы обычные свойства дифференцирования:

$$(\alpha A)'(x_0) = \alpha A'(x_0),$$

$$(A+B)'(x_0) = A'(x_0) + B'(x_0).$$

Верно обычное правило дифференцирования сложной функции: если $C = AB$, то

$$C'(x_0) = A'[B(x_0)]B'(x_0).$$

Оператор A называют дифференцируемым в точке x_0 по направлению h, если абстрактная функция $y(t) = A(x_0 + th)$ дифференцируема по t в точке $t = 0$, т. е. если существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(x_0 + \Delta t h) - A(x_0)}{\Delta t}. \tag{4.3}$$

Допустим, что оператор A дифференцируем в точке x_0 по всем направлениям $h \in E$. В этом случае производная $y'(0) = D(x_0, h)$ часто (но не всегда) оказывается линейной по h, т. е. $y'(0) = A'(x_0)h$, где $A'(x_0)$ — линейный оператор. Оператор $A'(x_0)$ называют *производной Гато* (сильной или слабой в зависимости от того, какие пределы (4.3) имеются в виду). Далее под производными Гато подразумеваются сильные производные.

Хотя для удобства мы сохранили за производной Гато то же обозначение, что и для производной Фреше, это вовсе не означает, что понятия производных Фреше и Гато совпадают. Оператор может быть дифференцируем по Гато, но не дифференцируем по Фреше. Однако, если существует производная Фреше, то существует и производная Гато, причем обе производные совпадают. Если же производная Гато $A'(x)$ существует в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна по x (как операторная функция) в точке x_0, то производная Фреше $A'(x_0)$ существует и совпадает с производной Гато.

Если оператор A вполне непрерывен, то его производная Фреше является вполне непрерывным линейным оператором.

Если оператор A имеет на выпуклом множестве $T \subset E$ производную Гато $A'(x)$, то для каждой пары точек $x_1, x_2 \in T$ и любого линейного функционала $l \in E^*$ имеет место равенство

$$l[A(x_1) - A(x_2)] = l[A'(x_1 + \tau(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)],$$

где $\tau \in [0, 1]$. Отсюда легко получить также оценку

$$\| A(x_1) - A(x_2) \| \leqslant \sup_{y \in S} \| A'(y) \| \, \| x_2 - x_1 \|,$$

где $S = \{ y : y = x_1 + \tau(x_2 - x_1),\ \tau \in [0, 1] \}$.

Оператор A называется асимптотически линейным, если существует такой линейный оператор $A'(\infty)$, что

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\| A(x) - A'(\infty) x \|}{\| x \|} = 0. \tag{4.4}$$

Оператор $A'(\infty)$ называю производной на бесконечности оператора A.

Данные выше определения естественно переносятся на случай оператора, действующего одного банахова пространства E_1 в другое E_2.

4.2. Производные по конусу. Будем говорить, что оператор A *дифференцируем по конусу* K в точке x_0, ес приращение $A(x_0+h) - A(x_0)$ при любом $h \in K$ представимо в виде (4.1), причем $A'(x_0)$ — линейный ограниченный оператор и

$$\lim_{h \in K,\ \|h\| \to 0} \frac{\| \omega(x_0, h) \|}{\| h \|} = 0. \tag{4.5}$$

Оператор $A'(x_0)$ будем называть *производной по конусу*. Здесь можно также говорить о сильной и слабой производной. Обычно мы будем пользоваться сильной производной по конусу* специально этого не оговаривая.

Понятно, что требование дифференцируемости по конусу слабее требования дифференцируемости по Фреше. Если конус K воспроизводящий, то из существования производной по конусу вы- существование производной Фреше, причем обе производные совпадают. Производная по конусу $A'(x_0)$ вполне непрерывного оператора A представляет собой компактный оператор, если же (дополнительно) конус воспроизводящий, то оператор $A'(x_0)$ — вполне непрерывен.

Использование производных по конусу особо существенно при изучении положительных операторов. Положительный оператор A может быть определен лишь на конусе K, и тогда, если конус K

---

* Предполагая тем самым, что предел (4.5) сильный, $\omega(x_0,$ $\to 0$ по норме пространства E.

не воспроизводящий, о производных Фреше оператора A вообще невозможно говорить. Более того, при этом, даже в случае телесного конуса K, производные Фреше заведомо не определены в граничных точках K. Для положительного же оператора, как будет видно из дальнейшего, весьма важно изучение его дифференциальных свойств в нуле. В определении производной по конусу в нуле $A'(0)$ как раз достаточно, чтобы оператор A был определен на K.

Важным и полезным является понятие *производной по конусу на бесконечности*. Определенный на K оператор A называется асимптотически линейным по конусу K, если существует ограниченный линейный оператор $A'(\infty)$ такой, что

$$\lim_{x \in K, \|x\| \to \infty} \frac{\| Ax - A'(\infty) x \|}{\| x \|} = 0. \tag{4.6}$$

Оператор $A'(\infty)$ называется производной по конусу на бесконечности оператора A.

Если оператор A вполне непрерывен, а конус воспроизводящий, то оператор $A'(\infty)$ вполне непрерывен. Если A положителен, то $A'(\infty)$ также положительный оператор.

Упражнение 4.1. Пусть множество $T \subset E$ выпукло и оператор A дифференцируем по конусу в каждой точке множества T, причем операторы $A'(x)$ при $x \in T$ положительны. Покажите, что тогда оператор A монотонен на T

4.3. Производные высших порядков. Оператор $B(x)$ называется квадратичным (или оператором второго порядка), если он представим в виде $B(x) = B_1(x, x)$, где $B_1(u, v)$ $(u, v \in E)$ — симметричный билинейный оператор со значениями в E (являющийся линейным ограниченным операторои по каждой переменной).

Оператор A, действующий в E, называется дважды дифференцируемым по Фреше в точке x_0, если при любом $h \in E$

$$A(x_0 + h) - A(x_0) = A'(x_0) h + \frac{1}{2!} A''(x_0)(h, h) + \omega_2(x_0, h),$$

где $A''(x_0)$ квадратичный относительно h оператор и

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\| \omega_2(x_0, h) \|}{\| h \|^2} = 0.$$

Производные более высоких порядков определяются далее по индукции. Оператор $A^{(n)}(x_0)$ n-го порядка называется n-й производной Фреше, если для любого $h \in E$

$$A(x_0+h)-A(x_0)=A'(x_0)h+\dots+\frac{1}{n!}A^{(n)}(x_0)(h,\dots,h)+\omega_n(x_0,h),$$

причем

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\omega_n(x_0,h)\|}{\|h\|^n}=0.$$

Аналогично определяется -я производная по конусу. Общая форма определения полностью сохраняется, но вводится дополнительное ограничение $h\in K$.

4.4. Дифференцирование интегральных операторов. Пусть ядро $k(t, s, u)$ оператора Урысона (2.23), действующего в C, непрерывно вместе со своей производной $k'_u(t, \; u)$ по совокупности переменных $t, s\in\Omega$, $u\in(-\infty, \infty)$. Тогда оператор Урысона дифференцируем по Фреше в каждой точке $x_0\in C$. Производная Фреше в данном случае определяется формулой

$$A'(x_0)h=\int_\Omega k'_u[t, s, x_0(s)]h(s)\,ds. \tag{4.7}$$

Доказательство этого факта весьма просто. По теореме Лагранжа можно указать такое $\alpha(t, s)\in[0, 1]$, что

$$A(x_0+h)-A(x_0)-A'(x_0)h=$$

$$=\int_\Omega\{k'_u[t, s, x_0(s)+\alpha(t, s)h(s)]-k'_u[t, s, x_0(s)]\}h(s)\,ds,$$

откуда

$$\|\omega(x_0, h)\|=\|A(x_0+h)-A(x_0)-A'(x_0)h\|\leqslant$$

$$\leqslant\|h\|\operatorname{mes}\Omega\sup_{t,s\in\Omega}|k'_u[t, s, x_0(s)+\alpha(t, s)h(s)]-k'_u[t, s, x_0(s)]|,$$

и так как $k'_u(t, s, u)$ равномерно непрерывно по u, то справедливо (4.2). ■

Заметим сразу, что если ядро $k(t, s, u)$ дважды непрерывно дифференцируемо по u, то оператор Урысона, действующий в C, имеет вторую производную Фреше

$$A''(x_0)(h, h)=\int_\Omega k''_{u^2}[t, s, x_0(s)]h^2(s)\,ds.$$

Что касается операторов Урысона, действующих в пространствах L_p, то их дифференцируемость по Фреше из непрерывной дифференцируемости ядра $k(t, s, u)$ по u не вытекает. Предоставляем читателю убедиться в справедливости следующего утверждения.

Для того, чтобы оператор (4.7) был производной Фреше оператора Урысона, действующего в $L_p(1<p<\infty)$, достаточно, чтобы функция $k'_u(t, \quad u)$ была непрерывна по u и чтобы выполнялось неравенство

$$|k'_u(t, s, u)| \leq \alpha + \beta |u|^{p-} \quad (t, s \in \Omega, u \in (-\infty, \infty)).$$

Наибольший интерес с точки зрения последующих глав представляют условия существования производных по конусу в нуле и на бесконечности у положительного оператора.

Рассмотрим интегральный оператор Урысона A с неотрицательным ядром $k(t, s, u)$ определенным для $t, s \in \Omega$; $u \geq 0$. Если $k(t, s, u)$ непрерывно вместе со своей производной $k'_u(t, s, u)$* по совокупности переменных $t, s \in \Omega$; $u \geq 0$, то очевидно, что положительный оператор A, действующий в C, имеет производную по конусу в нуле $A'(\theta)$, которая определяется формулой (4.7) при $x_0(t) \equiv 0$. Предположение непрерывной дифференцируемости ядра часто оказывается чересчур ограничительным. Ниже указываются достаточные условия дифференцируемости по конусу несколько иной природы.

Будем говорить, что функция

$$\varphi(t, s, u) = \frac{1}{u} k(t, s, u) \quad (u > 0) \tag{4.8}$$

почти всюду убывает по u, если она не возрастает по и при любом фиксированном $t \in \Omega$ и любых фиксированных $u_2 > u_1$ неравенство

$$\varphi(t, s, u_1) > \varphi(t, s, u_2)$$

выполняется почти для всех $s \in \Omega$.

Ниже мы предполагаем выполненным условие

$$k(t, s, 0) \equiv 0. \tag{4.9}$$

Из дальнейшего будет видно, что именно в случае (4.9) рассмотрение производной по конусу в нуле представляет существенный интерес.

Теорема 4.1. *Пусть существует правосторонняя производная $k'_u(t, s, 0)$ и линейный интегральный оператор*

$$Px(t) = \int_{\Omega} k'_u(t, s, 0)\, x(s)\, ds \tag{4.10}$$

---

* Под $k'_u(t, s, 0)$ подразумевается правосторонняя производная.

действует в C, так же как и оператор Урысона (2.23). Пусть функция $\varphi(t, s, u)$ почти всюду убывает по u (при достаточно малых u). Тогда оператор, определяемый формулой (4.10), является производной $A'(\theta)$ по конусу K неотрицательных функций пространства C.

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность неотрицательных непрерывных функций $h_n(t)$, равномерно сходящуюся к нулю (т. е. сходящуюся к нулю в пространстве C). Без ограничения общности можно считать, что $\|h_n\|$ монотонно убывает.

Обозначим через Ω_n множество тех $t \in \Omega$, при которых $h_n(t) > 0$. Очевидно,

$$\| Ah_n - Ph_n \| = \max_{t\in\Omega} \int_\Omega \{ k_u'(t, s, 0) h_n(s) - k[t, s, h_n(s)] \} ds =$$

$$= \max_{t\in\Omega} \int_\Omega \{ k'(t, s, 0) - \varphi[t, s, h_n(s)] \} h_n(s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \| h_n \| \max_{t\in\Omega} \int_{\Omega_n} \{ k_u'(t, s, 0) - \varphi[t, s, h_n(s)] \} ds.$$

Пользуясь теперь тем, что $\varphi(t, s, u)$ почти всюду убывает, получаем

$$\frac{\| Ah_n - Ph_0 \|}{\| h_n \|} \leqslant \max_{t\in\Omega} \int_\Omega \{ k_u'(t, s, 0) - \varphi(t, s, \| h_n \|)\} ds.$$

Остается показать, что непрерывные функции*

$$f_n(t) = \int_\Omega \{ k_u'(t, s, 0) - \varphi(t, s, \| h_n \|) \} ds \qquad (4.11)$$

равномерно сходится к нулю. При каждом фиксированном $t \in \Omega$ под знаком интеграла в (4.11) можно перейти к пределу, так как неотрицательные подынтегральные выражения монотонно убывают. А поскольку $\varphi(t, s, u_n) \to k_u'(t, s, 0)$ при $u_n \to 0$, причем сходимость монотонна, то $f_n(t)$ монотонно сходится к нулю при любом фиксированном $t \in \Omega$. Отсюда по теореме Дини вытекает равномерная сходимость $f_n(t)$ к нулю. ■

---

* Их непрерывность вытекает из того, что операторы (2.23) и (4.10) действуют в C.

Справедливость аналогичного результата для оператора Урысона, действующего в L_p $(1<p<\infty)$, устанавливается существенно более громоздкими рассуждениями.

Теорема 4.2. *Пусть функция $\varphi(t, s, u)$ почти всюду убывает по u. Пусть существует производная $k'_u(t, s, 0)$ и*

$$\int_\Omega\int_\Omega |k'_u(t, s, 0)|^r \, dt \, ds<\infty,$$

где $r=\max\left\{p, \frac{p}{p-1}\right\}$. Тогда оператор Урысона (2.23) действует в L_p, а оператор (4.10) явля его производной $A'(0)$ в нуле по конусу неотрицательных функций из L_p. ■

Приведем теперь для положительного оператора Урысона достаточные условия дифференцируемости по конусу на бесконечности.

Теорема 4.3. *Пусть оператор Урысона действует в C или L_p и вполне непрерывен. Пусть существует функция $k_\infty(t, s)$ такая, что*

$$|k(t, s, u)-k_\infty(t, s)\, u|\leqslant\alpha(u)$$

(при $t, s\in\Omega$ и достаточно больших положительных u, где $\alpha(u)/u\to 0$ при $u\to+\infty$), причем линейный интегральный оператор с ядром $k_\infty(t, s)$ действует в соответствующем пространстве. Тогда оператор Урысона асимптотически линеен по конусу и его производной по конусу на бесконечности служит оператор

$$A'(\infty)\, x(t)=\int_\Omega k_\infty(t, s)\, x(s)\, ds. \ ■$$

Заметим, что $k_\infty(t, s)$ представляет собой равномерный предел функции (4.8).

4.5. Дифференцирование оператора сдвига. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (в векторной записи)

$$\frac{dx}{dt}=F(t, x). \tag{4.12}$$

Пусть $U(t, s)$ $(t\geqslant s)$ обозначает оператор сдвига по траекториям (4.12), а $p(t, s, x^*)$ — решение (4.12), проходящее в момент времени s через точку x^*

Оператор $U(t, s)$ действует в R^m, а для любого оператора $G(x)=\{g_1(x), \ldots, g_m(x)\}$, действующего в R^m, производной Фреше в точке x^*, очевидно, является оператор $G'_x(x^*)$, задаваемый матрицей Якоби

$$G'_x(x^*) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_m} \\ \\ \dfrac{\partial g_m(x^*)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_m(x^*)}{\partial x_m} \end{bmatrix} \qquad (4.13)$$

Это замечание формально исчерпывает вопрос. Однако использование формулы типа (4.13) для оператора сдвига $U(t, s)$ мало что дает, поскольку $U(t, s)$ задается неявно. Поэтому желательно иметь более наглядный и удобный способ описания производной Фреше оператора сдвига.

Пусть $x^*(t) = p(t, s, x^*)$. Положим

$$a_{ij}(t) = \frac{\partial f_i[t, x_1^*(t), \ldots, x_m^*(t)]}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, \ldots, m).$$

Обозначим через $V(t, s)$ оператор сдвига по траекториям линейной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x, \qquad (4.14)$$

где $A(t) = [a_{ij}(t)]$.

Теорема 4.4. *Оператор $V(t, s)$ сдвига по траекториям (4.14) является производной Фреше оператора $U(t, s)$ сдвига по траекториям (4.12)* *.

Схема доказательства весьма проста. Дифференцируя тождество

$$\frac{d}{dt}\,p(t, s, x) = F[t, p(t, s, x)]$$

x, получаем для произвольного $h \in R^m$

$$\frac{d}{dt}\,p'_x(t, s, x)\,h = F'_x[t, p(t, s, x)]\,p'_x(t, s, x)\,h. \qquad (4.15)$$

Подставляя в (4.15) $x = x^*$, имеем

$$\frac{d}{dt}\,p'_x(t, s, x^*)\,h = A(t)\,p'_x(t, s, x^*)\,h.$$

* Напомним, что здесь и далее действует соглашение о том, что правые части рассматриваемых систем дифференциальных уравнений удовлетворяют неким „хорошим“ условиям (см. п. 2.3).

Следовательно, вектор-функция $x(t)=p'_x(t, s, x^*)h$ является решением линейной системы (4.14), причем очевидно $x(s)=h$, поскольку $p'_x(s, s, x^*)=I$ Таким образом, $p'_x(t, s, x^*)=V(t, s)$. ■

Если правая часть (4.12) определена лишь при $x \in R^m_+$ и оператор сдвига $U(t, s)$ положителен, то производной по конусу в нуле оператора $U(t, s)$ будет оператор сдвига по траекториям системы вида (4.14), где коэффициенты матрицы $A(t)$ определяются правосторонними производными:

$$a_{ij}(t)=\frac{\partial f_i(t, 0, \ldots, 0)}{\partial x_j} \quad (i, j=1, \ldots, m).$$

Допустим теперь, что существует матрица $B_\infty(t)$ такая, что при любых положительных x

$$\| F(t, x)-B_\infty(t)x \| \leqslant \varphi(t, x), \tag{4.16}$$

причем равномерно относительно t, принадлежащего любому конечному отрезку времени

$$\lim_{x \geqslant 0, \|x\| \to \infty} \frac{\varphi(t, x)}{\|x\|}=0. \tag{4.17}$$

В этом случае можно утверждать (проверьте!), что оператор сдвига $U(t, s)$ асимптотически линеен по конусу, а его производной по конусу на бесконечности служит оператор сдвига $V_\infty(t, s)$ по траекториям линейной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=B_\infty(t)x. \tag{4.18}$$

Если условия (4.16), (4.17) выполняются без ограничения $x \geqslant 0$, т. е. для всех R^m, то оператор $U(t, s)$ асимптотически линеен на всем пространстве, и $V_\infty(t, s)$ его производная Фреше на бесконечности.

ГЛАВА

ВРАЩЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

Теория вращения векторного поля (степени отображения), берущая начало от классических исследований С. Кронекера, А. Пуанкаре, Л. Брауэра, Г. Хопфа, является краеугольным камнем нелинейного анализа. Главным образом она служит источником теорем о разрешимости нелинейных уравнений, из которых наиболее широкую известность получили принципы неподвижной точки Брауэра и Шаудера, но они на самом деле — лишь маленький фрагмент обширной и разветвленной теории. Помимо теорем существования в поле зрения теории вращения попадают многие другие принципиальные вопросы: количество решений, их зависимость параметров, бифуркации и др. Блестящее изложение ...ории вращения векторного поля и ее приложений дано в монографии М... Красносельского и П. П. Забрейко [1], которая, однако, рассчитана на достаточно ...лифицированного читателя. Для пер... предметом ...ате... несколько иной путь. ...рями ...строго... и общности) позволя... ...ьно интуитивно геометрические представления. ...и преследует данная глава. Что касается ее от... ...новному содержанию книги, то теория вращения служит ...новой при изучении неподвижных точек положительных операторов (глава III).

§ ОСНОВНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

Далее R^n обозначает n-мерное нормированное пространство. Пр... предполагается, что в R^n фиксирована некоторая система координат (базис). Это позволяет представлять элементы

$x \in R^n$ и отображения $F: R^n \to R^n$ в виде $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $F(x) = \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$.

Норма в R^n порождает топологию (систему открытых множеств). Эта топология индуцирует топологию на любом подмножестве $X \subset R^n$: множество $U \subset X$ считается открытым в X, если оно представляет собой пересечение X с некоторым множеством, открытым в R^n. Множество $X \subset R^n$ с индуцированной из R^n топологией называют (топологическим) пространством.

5.1. Связность. Пространство X называется *связным*, если его невозможно представить в виде объединения двух непересекающихся открытых (непустых) множеств; *линейно связным*, если для любых двух точек $a, b \in X$ существует непрерывное отображение $P:[0, 1] \to X$ такое, что $P(0) = a$, $P(1) = b$, т. е. любые две точки могут быть соединены непрерывной кривой, целиком лежащей в X. Линейная связность X влечет за собой связность X (обратное неверно).

5.2. Сужение и продолжение отображений. Пусть $F: X \to Y$ — непрерывное отображение*. При этом для любого $Z \subset X$ естественным образом определяется отображение $G: Z \to Y$ такое, что $G(x) = F(x)$ для всех $x \in Z$. Отображение G называется *сужением* F на Z и обозначается символом $F|Z$. В свою очередь F называется *продолжением (распространением)* отображения G на X.

Одна из важных задач топологии — задача продолжения: можно ли данное отображение $G: Z \to Y$, где $Z \subset X$, продолжить на X (конечно, имеется в виду непрерывное продолжение)? С прикладной точки зрения особо интересен тот случай, когда X представляет собой замкнутый шар $B \subset R^n$, а Y совпадает с Z и является границей шара B, т. е. сферой S.

Известно, например, что тождественное отображение сферы S на себя не может быть продолжено на шар B. Негативный характер этого утверждения не умаляет его ценности. Будучи надлежащим образом переформулировано, оно приводит к позитивному утверждению, а именно к теореме Брауэра:

Любое непрерывное отображение $F: B \to B$ имеет неподвижную точку $x^* \in B$.

Действительно, предположим, что существует отображение $F: B \to B$, не имеющее неподвижных точек, т. е. $F(x) \neq x$ при

---

* Все рассматриваемые отображения предполагаются непрерывными, даже если это специально не оговорено.

любом $x \in B$. Соединим тогда точки x [illegible] $F(x)$ отрезком и продолжим его за точку x до пересечения со сферой S в некоторой точке $P(x)$. Очевидно, $P: B \to S$ представляет собой непрерывное продолжение на шар B тождественного отображения сферы на себя, что невозможно.

5.3. Гомотопия отображений и векторных полей. Частным случаем задачи продолжения является вопрос о гомотопности отображений. Отображения F_0, $F_1: X \to Y$ называются *гомотопными*, если существует непрерывное по совокупности переменных отображение $H: X \times [0, 1] \to Y$ такое, что

$$H(x, 0) \equiv F_0(x), \quad H(x, 1) \equiv F_1(x). \tag{5.1}$$

При этом $H(x, \tau)$ называют *деформацией* или *гомотопией (гомотопическим мостом)* от F_0 к F_1. Легко видеть, что построение гомотопии от F_0 к F_1 равносильно продолжению отображения $H: X \times \{0\} \times \{1\} \to Y$, определяемого условиями (5.1), на пространство $X \times [0, 1]$.

Если F_0 гомотопно F_1, мы будем писать $F_0 \simeq F_1$. Очевидно, гомотопность является отношением эквивалентности. Если существует пара отображений $F: X \to Y$, $G: Y \to X$ таких, что $GF \simeq E_X: X \to X$, $FG \simeq E_Y: Y \to Y$, где E — тождественное отображение, то пространства X, Y называют *гомотопически эквивалентными* и пишут $X \simeq Y$. Пространство, гомотопически эквивалентное точке, называют *стягиваемым* (по себе). Равносильное определение: пространство X стягиваемо, если оно может быть непрерывно деформировано в точку $x_0 \in X$, [illegible] е. существует непрерывное отображение $H: X \times [0, 1] \to X$ такое, что

$$H(x, 0) \; [illegible] \; H(x, [illegible] \tag{5.2}$$

[illegible] является, например, [illegible] выпуклое множество. [illegible] ние, переводящее [illegible] точки $x \in X$ в одну общую точ[illegible] ывается *постоянным*. Если F гомотопно постоянному отоб[illegible] нию, то говорят, что F гомотопно нулю (и пишут $F \simeq 0$).

Отображения в R^n иногда называют *векторными полями* (вектору $x \in R^n$ сопоставляется вектор $F(x) \in R^n$). Как правило, векторное [illegible] F считается определенным на замыкании $\bar{\Omega}$ некоторой [illegible] аниченной области $\Omega \subset R^n$ или же на границе $\dot{\Omega}$.

---

* Областью называется открытое связное множество.

Точку x, в которой $F(x)=0$ (здесь и далее 0 обозначает нуль пространства R^n), называют *нулем* (или *особой точкой*) векторного поля. Поле F называют *невырожденным на множестве* $\Gamma\subset R^n$, если $F(x)\neq 0$ для любого $x\in\Gamma$. Далее будут изучаться лишь непрерывные векторные поля, невырожденные на границе рассматриваемой области Ω.

Векторные поля F_0 и F_1 называются *гомотопными* на $\dot\Omega$ (или просто гомотопными, когда заведомо ясно, о каком множестве $\dot\Omega$ идет речь), если существует *невырожденная* гомотопия $H(x, \tau)$

$$H:\dot\Omega\times[0, 1]\to R^n$$

от F_0 к F_1. Другими словами, векторные поля F_0 и F_1 гомотопны, если отображения F_0, F_1 гомотопны, как отображения из $\dot\Omega$ в $R^n\setminus\{0\}$.

5.4. Гомеоморфизмы. Отображение $F:X\to Y$ называется *сюръективным (сюръекцией)*, если для любого $y\in Y$ найдется элемент $x\in X$ такой, что $F(x)=y$. Другими словами, $F:X\to Y$ сюръективно, если $F(X)=Y$ Отображение $F:X\to Y$ называется *инъективным (инъекцией)*, если из $F(x_1)=F(x_2)$ следует $x_1=x_2$, т. е. инъекция — это взаимнооднозначное отображение (обратный оператор F^{-1}, однако, может не быть определен на всем Y).

Если $F:X\to Y$ инъективно, сюръективно и непрерывно в обе стороны (т. е. оба оператора F и F^{-1} непрерывны), то говорят, что F *гомеоморфизм* X на Y В том случае, когда существует гомеоморфизм X на Y, говорят, что X и Y *гомеоморфны*

Наконец, $F:X\to Y$ называется *локальным гомеоморфизмом*, если для любой пары $x\in X$, $y\in Y$ такой, что $F(x)=y$, найдутся открытые окрестности $V_x\subset X$, $W_y\subset Y$ точек x, y такие, что сужение F на V_x есть гомеоморфизм V_x на W_y. Для случая $F:R^n\to R^n$ широко известны достаточные условия локальной гомеоморфности, состоящие в невырожденности матрицы Якоби $F'(x)=[\partial f_i/\partial x_j]$.

5.5. Гладкие отображения и многообразия. Пусть $X\subset R^n$ и $Y\subset R^n$ — открытые множества. Отображение $F:X\to Y$ называется гладким, если все частные производные $\partial^k f_j/\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}$ существуют и непрерывны.

Отображение $F:X\to Y$ называется *диффеоморфизмом*, если F гомеоморфизм и оба отображения F и F^{-1} гладкие.

Множество $X\subset R^n$ называется *гладким k-мерным многообразием*, если для любой точки $x\in X$ можно указать окрестность

$V \cap X$, которая диффеоморфна открытому множеству $U \subset R^m$. Установление диффеоморфизма между U и $V \cap X$ равносильно введению параметризации области $V \cap X$: точки $y \in V \cap X$ описываются взаимно однозначным и взаимно гладким преобразованием

$$y_j = y_j(x_1, \ldots, x_m), \quad j = 1, \ldots n.$$

Переменные $x_1, \ldots x_m$ называются *локальными координатами* на $V \cap X$.

Если множество $X \subset R^n$ открыто, то в любой точке $x \in X$ дифференциал отображения $F: X \to R^m$ определяется так:

$$dF_x(h) \quad \lim_{t \to 0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t}$$

Известно, что для гладких отображений $dF_x(h) = F'(x)h$, где $F'(x) = [\partial f_i / \partial x_j]$ — матрица Якоби

В общем случае гладкого отображения $F: X \to Y$ дифференциал (производная) определяется несколько более сложно. Если $X \subset R^n$ — m-мерное многообразие, то в каждой точке $x \in X$ вводится касательная m-мерная плоскость, которая наилучшим образом аппроксимирует X вблизи x. Параллельная ей плоскость T_x, проходящая через начало координат, называется *касательным пространством* многообразия X в точке x. Аналогично определяются касательные пространства T_y ($y \in Y$). Если $F(x) = y$, то наилучшая линейная аппроксимация F в окрестности x отображает T_x в T_y и называется производной F в точке x. Понятно, что эта производная может быть записана как матрица Якоби в локальных координатах.

Пусть Q_m обозначает полупространство

$$Q_m = \{x \mid x = \{x_1, \ldots x_m\} \in R^m, \; x_1 \geqslant 0\}.$$

Краем Q_m называется плоскость $\{0\} \times R^{m-1} \subset R^m$.

Множество $X \subset R^n$ называется *гладким m-мерным многообразием с крае.* если для любого $x \in X$ можно указать окрестность $V \cap X$ диффеоморфную открытому множеству $U \cap Q_m$ полупространства Q_m. Край X — это множество тех точек из X, которые под действием соответствующих диффеоморфизмов переходят в точки края Q_m. Например, краем замкнутого шара является сфера. Сфера же (не нульмерная) — *многообразие без края.*

Касательные пространства T_x для многообразий с краем определяются так же. Даже если x — точки края, T_x представляет собой R^m.

Два отображения F_0, $F_1 : X \to Y$ называются *гладко гомотопными*, если существует гладкое отображение $H : X \times [0, 1] \to Y$, удовлетворяющее условию (5.1). Отношение гладкой гомотопности также является отношением эквивалентности (хотя это и менее очевидно, чем для непрерывной гомотопности).

5.6. Теорема Сарда. Пусть $F'(x)$ обозначает производную в локальных координатах гладкого отображения $F : X \to Y$ многообразий одинаковой размерности.

Если $\det F'(x) \neq 0$ ($=0$), то $x \in X$ называется *регулярной (критической)* точкой отображения $F = X \to Y$ Точка $y \in Y$ называется *регулярным значением*, если ее прообраз $F^{-1}(y)$ состоит только из регулярных точек (в частности, если $F^{-1}(y)$ пусто). Очевидно, если X — компакт, то прообраз любого регулярного значения состоит не более, чем из конечного числа точек

Теорема 5.1. *Множество регулярных значений отображения $F : X \to Y$ всюду плотно в Y.*

Схема доказательства довольно проста. Многообразие X можно покрыть счетным множеством окрестностей, каждая из которых диффеоморфна открытому подмножеству из R^m. Далее достаточно рассматривать отображение $G = FP : R^m \to Y$ (где P — соответствующий диффеоморфизм) лишь на некотором кубе $C \subset R^m$ со стороной c. Разобьем этот куб на N^m равных кубиков, разделив каждое ребро на N равных частей. Для любой пары точек x_0, x, лежащих в одном из таких кубиков,

$$G(x) = G'(x_0)(x - x_0) + 0(c/N).$$

Если x_0 является критической точкой, т. е. $\det G'(x_0) = 0$, то ясно, что объем образа этого кубика есть $o(C/N^m)$. Если теперь k обозначает число кубиков, содержащих критические точки, то суммарный объем образов таких кубиков есть $N^k o(C/N^m)$, причем заведомо $k \leqslant m$. В пределе (при $N \to \infty$) приходим к выводу о том, что лебегова мера в Y множества критических значений равна нулю, т. е. множество регулярных значений всюду плотно в Y ■

Если размерность многообразия Y равна m и меньше размерности X, то регулярными называются те точки $x \in X$, в которых ранг матрицы $F'(x)$ равен m. Определение регулярных значений остается прежним. Теорема 1. сохраняет силу для случая многообразий X, Y различных равмерностей.

5.7. Ориентация. Два базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{e'_1, \dots e'_n\}$ пространства R^n называются *одинаково ориентированными*, если $e'_i = \sum_j a_{ij} e_j$

и $\det[a_{ij}]>0$. В случае $\det[a_{ij}]<0$ говорят, что базисы *противоположно ориентированы*. Очевидно, все базисы в R^n распадаются на два класса эквивалентных (в смысле ориентации) базисов. Любое линейное невырожденное преобразование $A: R^n \to R^n$ переводит исходный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в некоторый $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$. В этом случае говорят, что *A сохраняет ориентацию пространства*, если $\det A>0$; *изменяет ориентацию пространства*, если $\det A<0$.

Пусть теперь $X \subset R^n$ — связное гладкое m-мерное многообразие. Для каждой точки $x \in X$ существует окрестность $V_x \subset X$ и диффеоморфизм P, отображающий V на открытое подмножество в R^m или $Q_m \subset R^m$. В R^m фиксируем некоторую систему координат со стандартным базисом.

$$e_1=\{1, 0, \ldots, 0\}, \; e_2=\{0, 1, 0, \ldots, 0\}, \ldots, e_m=\{0, \ldots, 0, 1\}. \quad (5.3)$$

Тем самым фиксируется ориентация R^m. Выберем также (локальные) базисы в каждом касательном пространстве T_x. В достаточно малой окрестности точки x диффеоморфизм P аппроксимируется линейным отображением (производной) $P'(x)$, которое будем считать записанным в виде матрицы в соответствующих координатах, определяемых выбранными базисами. Если все локальные базисы одинаково ориентированы с (5.3) и $\det P'(x)>0$ для любого $x \in X$, — многообразие X называется ориентированным.

Поскольку восприятие понятия ориентации многообразия нередко вызывает затруднения, повторим определение, изменив точку зрения. Пусть по прежнему R^m ориентировано базисом (5.3), локальные же базисы в T_x пока фиксировать не будем. Диффеоморфизм P и производную $P'(x)$ будем записывать в координатах пространства R^n, в котором расположено X. Ранг матрицы $P'(x)$ равен m и базис (5.3) она переводит в базис

$$\{P'(x)\,e_1, \ldots, P'(x)\,e_m\}, \quad (5.4)$$

который теперь будем считать локальным базисом в T_x. Если все базисы (5.4) одинаково ориентированы с базисом (5.3), многообразие X называется ориентированным.

Таким образом, чтобы многообразие X было ориентируемо, необходимо следующее *условие согласования*. В пределах каждой окрестности $V_x \subset X$, взятой в отдельности, ориентации базисов (5.4) безусловно совпадают друг с другом. Но в пересечении двух таких окрестностей действуют два различных диффеоморфизма, которые в каждой точке порождают два различных базиса вида (5.4).

Совпадение ориентаций последних обеспечивает ориентируемость X. Понятно, что любое открытое в R^n многообразие X ориентируемо, поскольку все диффеоморфизмы можно взять тождественными.

Если многообразие X имеет край, то ориентация X (с помощью соответствующего набора диффеоморфизмов) естественно порождает ориентацию края X. Остановимся на этом более подробно.

Пусть окрестности U, $V \subset X$ имеют непустое пересечение, и в $U \cap V$ имеются точки края X. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — локальные координаты в U, $y_1, \ldots y_m$ — локальные координаты в V. В пересечении $U \cap V$ имеем $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_m)$, $i = 1, \ldots, m$; точки края описываются условием $x_1 = 0$ или $y_1 = 0$ Из соотношения $y_1 = y_m(0, x_2, \ldots, x_m) = 0$ вытекает

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial(y_2, \ldots, y_m)}{\partial(x_2, \ldots, x_m)}$$

Поскольку якобиан $\frac{\partial(y_1, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} > 0$ и $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} > 0$, то и якобиан

$$\frac{\partial(y_2, \ldots, y_m)}{\partial(x_2, \ldots, x_m)} > 0.$$

§ 6. ИНТУИТИВНО ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КАРТИНА ТЕОРИИ ВРАЩЕНИЯ

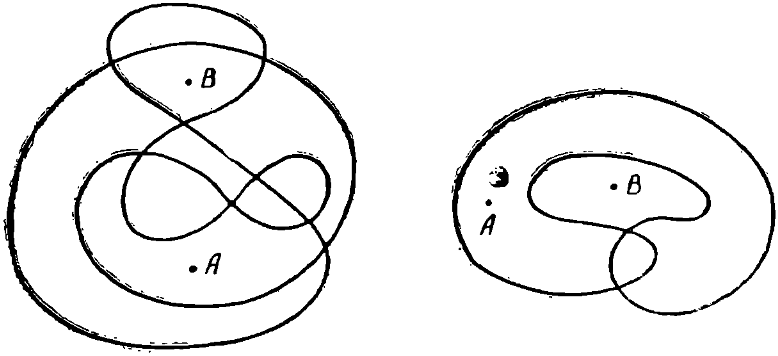
В этом параграфе дается нестрогое, но достаточно прозрачное определение вращения векторного поля. С помощью наглядных геометрических рассуждений выводятся основные свойства вращения и прослеживаются связи с принципами разрешимости уравнений.

Изложение апеллирует к геометрической интуиции читателя. Интуитивные представления полезны во многих отношениях. Как правило, они служат путеводной нитью при изучении предмета, нередко позволяют выдвигать гипотезы, подсказывают схемы строгих доказательств и предостерегают от ошибок (но случается, что бывают источником заблуждений). Выработка интуитивных представлений в той или иной области — обычно весьма трудоемкий процесс, но в конечном итоге затраты с лихвой окупаются.

6.1. Предварительные соображения. Если непрерывная функция f задана на отрезке $[a, b]$ и в граничных точках принимает значения разных знаков, то уравнение $f(x)=0$ разрешимо на $[a, b]$. Обобщение этого результата на многомерный случай—один из основных вопросов теории вращения векторных полей.

Пусть непрерывный оператор (отображение) F действует в R^n $(n \geqslant 2)$, и нас интересует вопрос о существовании решения уравнения $F(x)=0$ в некоторой ограниченной области Ω. Другими словами, мы интересуемся тем, принадлежит ли 0 образу Ω или нет. Действительно, если $0 \in F(\Omega)$, то это означает существование такого $x^* \in \Omega$, что $F(x^*)=0$, т. е. уравнение $F(x)=0$ разрешимо в Ω.

Если ответ на поставленный вопрос мы хотим получить в терминах значений оператора F на границе $\dot{\Omega}$, то рассуждать можно



а) б)

Рис. 1

примерно так. Пусть $F(\dot{\Omega})$ обозначает поверхность, являющуюся образом $\dot{\Omega}$. Интуиция подсказывает, что образ Ω, т. е. $F(\Omega)$, заполняет область (но не обязательно совпадает с ней), находящуюся внутри $F(\dot{\Omega})$. Если при этом 0 лежит внутри $F(\dot{\Omega})$, то $0 \in F(\Omega)$, и задача решена. На самом деле все не так просто, и главная трудность заключается в определении понятия „внутри". Например, окружность при некотором преобразовании F может перейти в замкнутую кривую, изображенную на рис. 1а. Нетривиальность ситуации здесь достаточно очевидна* Если же понятие „внутри"

* Если внутренность определить подходящим для нас образом [т. е. так, чтобы образ $F(\Omega)$ с необходимостью заполнял внутренность $F(\dot{\Omega})$], то точка A на рис. 1а будет внутренней, а B — нет. Визуально легче оценить ситуацию, изображенную на рис. 1б.

не определено, то интуитивный вывод том, что $F(\Omega)$ заполняет „внутренность“ $F(\dot{\Omega})$, теряет смысл (интуиция обычно основывается на совсем простых примерах). Наконец, если даже эти трудности будут преодолены, необходимо развить формализм, который бы в случае $n>2$ позволял обходиться без „чертежей“

Перечисленные препятствия на избранном пути показывают, какие именно вопросы должны быть более детально продуманы, и как стоит видоизменить подход. Оставим эти проблемы до следующего раздела и рассмотрим пока простейший случай, опираясь на следующее (временное) понятие „внутри“.

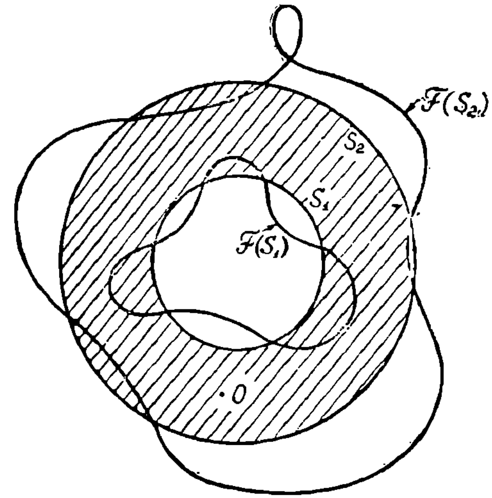


Рис. 2

Пусть $0\in\Omega$. Договоримся, что этом случае точка 0 лежит внутри $\dot{\Omega}$. А теперь скажем, что 0 лежит внутри поверхности Γ, если мы можем, непрерывно деформируя Γ, совместить ее с $\dot{\Omega}$, и при этой деформации не задеваем точку 0 (т. е. деформируемая поверхность в процессе деформации не пересекает точку 0). Более того, при такой деформации различные точки из Γ должны переходить в различные точки из $\dot{\Omega}$ (в то же время каждая точка

---

* Более того, даже в простейшем случае, когда $\dot{\Omega}$ — сфера и F оставляет $\dot{\Omega}$ на месте, такой вывод — нетривиальный топологический факт, равносильный теореме Брауэра или утверждению о нестягиваемости сферы.

самопересечения Г может переходить в разные точки Ω). Это „определение" полезно продумать на нескольких конкретных примерах. Сначала для поверхностей $\dot{\Omega}$ типа сферы $S=\{x \mid \|x\|=1\}$, а затем для более сложных поверхностей, не ограничиваясь лишь плоским случаем (как на рис. 2).

Итак, чтобы установить, что 0 лежит внутри $F(\dot{\Omega})$, достаточно деформировать указанным способом $F(\dot{\Omega})$ на $\dot{\Omega}$. В процессе такой деформации каждая точка $F(x) \in E(\dot{\Omega})$ описывает некоторую траекторию, заканчивающуюся на $\dot{\Omega}$. Допустим, деформацию удается организовать так, что концами каждой траектории является пара точек $x \in \dot{\Omega}$ и $F(x) \in F(\dot{\Omega})$. Эта деформация описывается некоторым непрерывным отображением $H:\dot{\Omega}\times[0, 1]\to R^n$, удовлетворяющим условиям

$$H(x, 0)\equiv F(x), \quad H(x, 1)\equiv x,$$

т. е. $H(x, \tau)$ — невырожденная гомотопия от F к тождественному отображению $E:\dot{\Omega}\to\dot{\Omega}$. Условие невырожденности $H(x, \tau)\neq 0$ обеспечивается тем, что по предположению, деформация не задевает точку 0.

Итак, если существует отображение $H(x, \tau)$ с описанными свойствами, то уравнение $F(x)=0$ разрешимо в Ω. Например, когда при любом $x\in\dot{\Omega}$ векторы x и $F(x)$ не направлены противоположно, в качестве $H(x, \tau)$ можно взять

$$H(x, \tau)=\tau x+(1-\tau)\, F(x). \tag{6.1}$$

Непротивоположная направленность x и $F(x)$ здесь гарантирует невырожденность $H(x, \tau)\neq 0$, т. е. деформация (2.1) не пересекает точку 0. Следовательно, непротивоположная направленность векторов x и $F(x)$ при любом $x\in\dot{\Omega}$ обеспечивает разрешимость уравнения $F(x)=0$. Отсюда буквально в несколько строчек можно вывести теорему Брауэра и ряд других теорем о разрешимости уравнений, что будет сделано далее.

Может встретиться также иной тип деформаций: концы каждой траектории (см. выше) представляют собой пару точек $F(x)\in F(\dot{\Omega})$ и $\alpha_x Ax\in\dot{\Omega}$, где A — линейное невырожденное преобразование, $\alpha_x>0$. В случае $\det A<0$ это соответствует случаю, когда поверхность $\dot{\Omega}$ отображением F как бы выворачивается наизнанку.

Использованное определение понятия „внутри" исключает из рассмотрения множество ситуаций, в которых указанная деформация невозможна, а уравнение $F(x)=0$ тем не менее разрешимо. Например, в случае $\dot{\Omega}=S$ поверхность $F(S)$, будучи деформирована на S, а потом растянута по S (разглаживанием, растяжением складок), может окутывать S несколько раз (а не один раз, как в рассмотренных выше случаях). Число этих окутываний является абсолютным значением вращения векторного поля $F(x)$ на S. Знак вращения ($+$ или $-$) определяется сохранением или изменением ориентации поверхности (выворачиванием наизнанку). В ситуации, изображенной на рис. 3а, число окутываний равно 2, на рис. 3б — 1, а на рис. 3в — нулю.

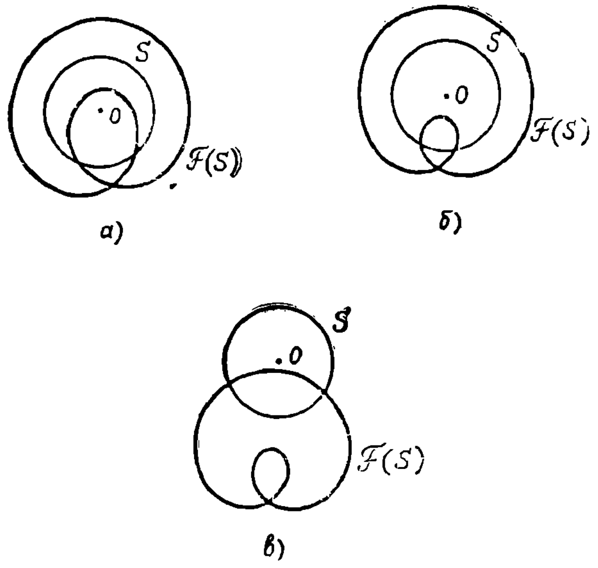


Рис. 3

6.2. Вращение векторного поля. В предыдущем разделе мы довольно близко подошли понятию вращения векторного поля, но для достижения ясности и углубления представлений необходимы дополнительные усилия. Здесь мы не будем заниматься разрешимостью уравнений, а все внимание сконцентрируем на определении вращения векторного поля, вернувшись к исходным позициям и отказавшись от принятых допущений.

Пусть Ω — некоторая ограниченная область в R^n, а $F(\dot{\Omega})$ — образ ее границы. Предположим пока, что поверхность $F(\dot{\Omega})$ связная* и не имеет „слипщихся“ участков. Возьмем любой достаточно маленький кусочек поверхности $F(\dot{\Omega})$ и одну (на выбор) сторону его назовем *внешней*, а другую *внутренней*. Затем всю поверхность $F(\dot{\Omega})$ разобьем на маленькие кусочки так, чтобы они накладывались друг на друга. С исходным кусочком пересекаются несколько других; на них внешнюю сторону определим так, чтобы на участках пересечения внешние стороны были согласованы. Продолжая этот процесс, мы определим внешнюю и внутреннюю стороны на всей поверхности $F(\dot{\Omega})$. На рис. 4 внешняя сторона отмечена стрелочками.

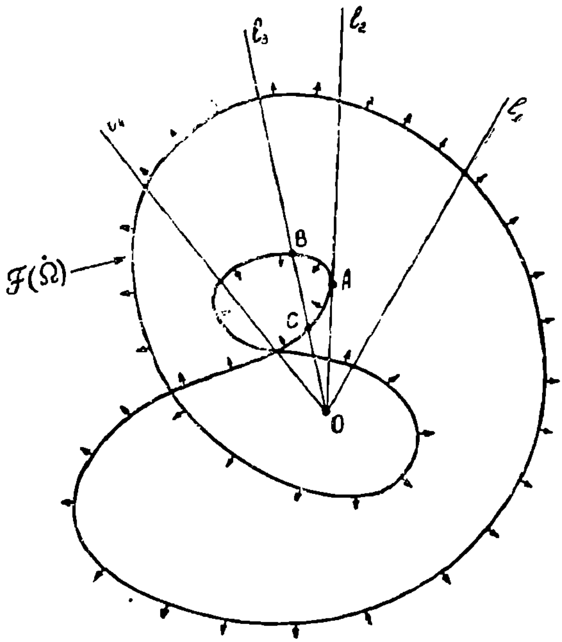


Рис. 4

Напомним, что пока понятия внешней и внутренней стороны относительны. Главное, что есть две стороны. Мы произвольно выбираем одну — и называем от внешней. Здесь необходимо уточ-

* Пример несвязной поверхности $F(\dot{\Omega})$ дают две сферы разных радиусов. В этом случае можно говорить также, что $F(\dot{\Omega})$ состоит из двух замкнутых поверхностей.

нить следующее. То, что граница $\dot{\Omega}$ любой области является двусторонней поверхностью — очевидно. Для любой же поверхности Γ гарантировать наличие двух сторон нельзя. Есть поверхности односторонние (лист Мебиуса, бутылка Клейна). Однако непрерывный „неслипшийся“ образ $F(\dot{\Omega})$ двусторонней поверхности $\dot{\Omega}$—поверхность двусторонняя.

Возьмем теперь произвольный луч l (выходящий из нуля), который „протыкает“ поверхность $F(\dot{\Omega})$, но нигде ее не касается. На рис. 4 этому условию удовлетворяют лучи l_1, l_3, l_4; луч l_2 касается $F(\dot{\Omega})$ в точке A. Пусть этот луч протыкает поверхность $F(\dot{\Omega})$ в точках $x^1, \ldots x^k$. Если в x^i луч протыкает $F(\dot{\Omega})$ изнутри, положим $\varepsilon(x^i)=1$, в противном случае $\varepsilon(x^i)=-1$. На рис. 4 $\varepsilon(C)=1$, $\varepsilon(B)=-1$.

Рассмотрим величину

$$\delta(l)=\sum_i \varepsilon(x^i). \tag{6.2}$$

Если x^i—точка самопересечения $F(\dot{\Omega})$, то в (6.2) она дает два слагаемых* Покажем, что $\delta(l)$ не зависит от l.

Очевидно, при достаточно малых шевелениях луча l величина $\delta(l)$ не меняется, е. функция $\delta(l)$ локально постоянна. Изменений можно ожидать, если при повороте луч пересекает точку касания. Например, на рис. 4 при повороте луча против часовой стрелки из положения l_1 в положение l_3 критическим положением является l_2. Но понятно, что при этом в окрестности точки касания появляются (или исчезают) обязательно две точки a, b, в которых луч протыкает $F(\dot{\Omega})$, причем $\varepsilon(a)+\varepsilon(b)=0$. Так что $\delta(l)$ действительно не зависит от l.

Если $F(\dot{\Omega})$ имеет „слипшиеся“ участки, то все остается попрежнему Надо лишь считать, что в x^i луч l „протыкает“ $F(\dot{\Omega})$ столько раз, сколько в окрестности x^i „слиплось“ слоев в поверхности $F(\dot{\Omega})$.

Общая для всех допустимых l величина δ и есть, с точностью до знака, вращение векторного поля F на $\dot{\Omega}$. Понятно, что знак δ зависит от того, какую сторону $F(\dot{\Omega})$ мы назовем внешней. Аккуратное определение внешней стороны поверхности связано с не-

* Точнее, k слагаемых, если через x^i поверхность $F(\dot{\Omega})$ проходит k раз.

обходимостью несколько громоздких построений. Но по существу в теории вращения можно обойтись без такого определения. Для теории вращения важно найти иное: возможность согласования внешних сторон $F(\dot{\Omega})$ в том случае, когда граница $\dot{\Omega}$ имеет несколько компонент связности, а также возможность согласования внешних сторон различных поверхностей $F(\dot{\Omega}_i)$ при одновременном рассмотрении нескольких областей Ω_i, границы которых имеют общие участки. Однако подобное согласование возможно без априорного определения внешней стороны. Остановимся на этом подробнее.

Пусть Ω_1 и Ω_2 — ограниченные области с общим участком границы $\dot{\Omega}_1 \cap \dot{\Omega}_2 = \Gamma$. Внешнюю сторону границы любой области договоримся выбирать обычным образом. Фиксируем теперь внешнюю сторону $F(\dot{\Omega}_1)$. Это определяет внешнюю сторону (ориентацию) участка поверхности $F(\Gamma)$. Если Ω_2 находится по другую сторону Γ (по ту же сторону Γ), получившуюся ориентацию $F(\Gamma)$ меняем на противоположную (сохраняем). Полученная в результате новая ориентация $F(\Gamma)$ определяет ориентацию (внешнюю сторону) $F(\dot{\Omega}_2)$. При большом числе областей внешние стороны определяются аналогично (индуктивным продолжением описанного процесса).

Если область Ω имеет несвязную границу, то Ω можно представить в виде объединения

$$\Omega = \operatorname{int} \bigcup_i \overline{\Omega}_i$$

непересекающихся областей Ω_i со связными границами. Затем с помощью указанного выше способа согласования ориентаций можно определить внешние стороны всех компонент связности $F(\dot{\Omega})$. Тем самым величина $\delta(l)$ определяется для произвольных областей Ω.

Согласование ориентаций полезно проследить на ряде примеров. Вообще говоря, для указанного способа согласования ориентаций надо было бы установить корректность, но она достаточно очевидна по крайней мере в тех простых ситуациях, которые обычно возникают в практических задачах.

Остановимся теперь коротко на более строгом определении внешней стороны поверхности $F(\dot{\Omega})$. Это определение менее наглядно, но более удобно. Оно однозначно определяет внешнюю сторону [а значит и величину $\delta(l)$], избавляя от необходимости согласования ориентаций *.

Сначала заметим, что величина типа $\delta(l)$ не меняется при достаточно малых изменениях границы $\dot{\Omega}$ и оператора F. Поэтому без ограничения общности $\dot{\Omega}$ и F будем предполагать гладкими (в противном случае можно перейти к гладким аппроксимациям). Введем на $\dot{\Omega}$ локальные координаты, и в каждой точке $x \in \dot{\Omega}$ локальный базис

$$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\} \tag{6.3}$$

выберем так, чтобы вектор e_1 был направлен по внешней нормали, а векторы $e_2, \cdots e_n$ лежали в касательном пространстве T_x. Нормаль к поверхности $F(\dot{\Omega})$ в точке $F(x)$ назовем внешней, если базис

$$\{e_1', e_2', \cdots, e_n'\} = \{e_1', F'(x)e_2, \cdots F'(x)e_n\} \tag{6.4}$$

одинаково ориентирован с базисом (6.3). Конечно, (6.4) является базисом, если $\det F'(x) \neq 0$. Но по теореме Сарда множество регулярных значений $y \in F(\dot{\Omega})$ плотно в $F(\dot{\Omega})$, так что определенная выше внешняя нормаль существует почти во всех точках $y \in F(\dot{\Omega})$. Можно показать, что все такие нормали находятся по одну сторону поверхности $F(\dot{\Omega})$, т. е. однозначно определяют внешнюю сторону $F(\dot{\Omega})$.

Если внешняя сторона $F(\dot{\Omega})$ определена именно так, то общая для всех допустимых l величина $\delta(l)$ называется вращением векторного поля F на $\dot{\Omega}$ и обозначается $\gamma(F, \dot{\Omega})$.

6.3. Основные свойства вращения. Несмотря на несколько легкомысленный заголовок параграфа, ниже даются точные формулировки ряда важных теорем. Что касается доказательств, то их строгость соответствует уровню строгости определения вращения.

Очевидно, величина $\delta(l)$, а значит и $\gamma(F, \dot{\Omega})$, не меняется при малых изменениях (деформациях) как оператора F, так и границы $\dot{\Omega}$. Это обстоятельство позволяет легко установить справедливость следующего результата.

---

* Конечно, это объясняется тем, что трудности переносятся из одного места в другое. Удобства в обращении некоторого определения обычно оплачиваются неудобствами при доказательстве его корректности.

Теорема 6.1. *Гомотопные векторные поля имеют одинаковые вращения.*

Доказательство тривиально. Гомотопический мост $H(x, \tau) = F_\tau(x)$ в силу непрерывности H по совокупности переменных и компактности сегмента $[0, 1]$ дает возможность представить переход от $H(x, 0) = F_0(x)$ к $H(x, 1) = F_1(x)$ в виде конечной последовательности малых деформаций. ■

Несмотря не элементарный характер приведенного утверждения, оно играет чрезвычайно важную роль, поскольку служит основным инструментом для вычисления вращения векторных полей. Теорема 6.1 позволяет переходить с помощью гомотопии от изучаемых полей к более простым, часто стандартным, вращение которых известно.

В связи с теоремой 6.1 закономерно возникает вопрос о справедливости обратного утверждения. Обязательно ли гомотопны поля с одинаковым вращением? В общем случае это не так. Если же Ω — шар, положительный ответ на поставленный вопрос дает знаменитая теорема Хопфа.

Теорема 6.2. *Невырожденные на некоторой сфере пространства R^n $(n \geq 2)$ векторные поля с одинаковым вращением — гомотопны.* ■

При дальнейшем изложении основных результатов эта теорема нигде не используется. Поэтому мы не останавливаемся на доказательстве, которое довольно сложно.

Гомотопический переход от F_0 к векторному полю F_1 деформирует поверхность $F_0(\dot{\Omega})$ в $F_1(\dot{\Omega})$. Деформация поверхности $F_0(\dot{\Omega})$ может осуществляться, однако, не только за счет изменения оператора F_0, но и за счет изменения области Ω. Как бы деформация ни происходила, для сохранения величины вращения существенно лишь, чтобы деформируемая поверхность не пересекала точку 0. Сформулируем это утверждение более точно. Пусть Ω_τ, $\tau \in [0, 1]$ описывает непрерывный переход от области Ω_0 к Ω_1. Результирующую деформацию $F_\tau(\dot{\Omega}_\tau)$ назовем невырожденной, если $F_\tau(x) \neq 0$ при любых $\tau \in [0, 1]$, $x \in \dot{\Omega}_\tau$.

Теорема 6.3. *Пусть деформация $F_\tau(\dot{\Omega}_\tau)$ невырождена. Тогда $\gamma(F_0, \dot{\Omega}_0) = \gamma(F_1, \dot{\Omega}_1)$.* ■

Это простое обобщение теоремы 2.1 иногда оказывается полезным, позволяя при вычислении вращения переходить не только к более простому полю, но и к более простой области.

Теорема 6.4. *Пусть векторное поле F определено и невырождено на границах областей $\Omega, \Omega_1, \ldots, \Omega_m$, причем области Ω_j $(j = 1, \ldots, m)$ попарно не пересекаются* $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_j \overline{\Omega_j}$. *Тогда*

$$\gamma(F, \dot{\Omega}) = \sum_{j=1}^{m} \gamma(F, \Omega_j). \tag{6.5}$$

Доказательство. Выберем луч l, допустимый одновременно для всех областей, т. е. не касающийся ни одной из поверхностей $F(\dot{\Omega})$, $F(\dot{\Omega}_1), \ldots$ $F(\dot{\Omega}_m)$. Через $\delta_j(l)$ обозначим величину типа (6.2) для случая поверхности $F(\dot{\Omega}_j)$. Нам необходимо показать, что

$$\delta(l) = \sum_j \delta_j(l), \tag{6.6}$$

но это почти очевидно. Действительно, пусть $F(x) = z$, $z \in l$, а x принадлежит пересечению границ $\dot{\Omega}_i \cap \dot{\Omega}_k$, т. е. в точке z луч l протыкает как поверхность $F(\dot{\Omega}_i)$, так и $F(\dot{\Omega}_k)$. В этом случае совершенно очевидно, что одну из поверхностей $F(\dot{\Omega}_i)$, $F(\dot{\Omega}_k)$ луч l протыкает изнутри, а другую — извне. Поэтому при вычислении суммы (6.6) по формуле (6. все слагаемые типа $\varepsilon(x^i)$, где точки x^i лежат на попарных пересечениях границ $\dot{\Omega}_j$, взаимно сократятся. Останутся лишь те слагаемые $\varepsilon(x^i)$, которые в сумме как раз определяют величину $\delta(l)$. ■

Будем говорить, что невырожденное на $\dot{\Omega}$ поле F выпускает направление, если $F(x) \neq \lambda h$ для всех $x \in \dot{\Omega}$, $\lambda > 0$ и некоторого ненулевого $h \in R^n$.

Теорема 6.5. *Если векторное поле F на $\dot{\Omega}$ выпускает направление, то* $\gamma(F, \dot{\Omega}) = 0$.

Для доказательства достаточно в качестве l взять луч, задаваемый вектором h

$$l = \{x \mid x = th, \quad 0 \leqslant t < \infty\}.$$

Тогда в сумме (6.2) не ни одного ненулевого слагаемого.

Теорема *Пусть векторное поле F невырождено на замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω, $F(x) \neq 0$ при любом $x \in \overline{\Omega}$. Тогда* $\gamma(F, \dot{\Omega}) = 0$.

Разобьем $\overline{\Omega}$ на конечное число замыканий $\overline{\Omega_j}$ непересекающихся областей Ω_j настолько малых диаметров, что все векторы $F(x)$

на каждом Ω_j друг с другом составляют острый угол. В этом случае на каждой границе $\dot{\Omega}_j$ поле F заведомо выпускает некоторое направление. Поэтому (теорема 6.5) все $\gamma(F, \dot{\Omega}_j)=0$, и по теореме 6.4 $\gamma(F, \dot{\Omega})=0$. ■

Из теоремы 6.6 немедленно вытекает следующий фундаментальный результат.

Теорема 6.7. *Если $\gamma(F, \dot{\Omega}) \neq 0$, то существует точка $x^* \in \Omega$, в которой $F(x^*)=0$, т. е. уравнение $F(x)=0$ разрешимо в Ω.* ■

Таким образом, любая теорема об отличии от нуля вращения векторного поля F может расцениваться как принцип существования решения уравнения $F(x)=0$.

Теорема 6.8. *Пусть $x_0 \in \Omega$ и $F(x)=x-x_0$. Тогда $\gamma(F, \dot{\Omega})=1$.*

Рассмотрим сначала случай $x_0=0$, т. е. F — тождественное отображение. Пусть луч l нигде не касается $\dot{\Omega}$. Очевидно, в первый раз луч l протыкает $\dot{\Omega}$ изнутри, затем извне, потом снова изнутри и т. д. Последний раз l протыкает $\dot{\Omega}$ изнутри. Поэтому по формуле (2.2) получаем $\delta(l)=1$, т. е. $\gamma(F, \dot{\Omega})=1$. В случае $x_0 \neq 0$ образ $\dot{\Omega}$ представляет собой параллельный перенос $\dot{\Omega}$, при котором точка 0 попадает внутрь Ω. Такие же рассуждения снова дают $\gamma(F, \dot{\Omega})=1$. ■

Объединение теорем 6.7, 6.8 и использование различных гомотопических переходов приводит к серии простых (но нетривиальных по существу) принципов разрешимости уравнений. Эти вопросы будут рассмотрены в следующем параграфе.

Остановимся на обобщении теоремы 6.4. Если учесть утверждение теоремы 6.6, то становится ясно, что равенство (6.5) сохраняется без предположения $\overline{\Omega}=\bigcup_j \overline{\Omega}_j$, но при условии невырожденности поля F на $\overline{\Omega}\setminus\bigcup_j \overline{\Omega}_j$. Предположение конечности числа областей Ω_j также не существенно. Вот точная формулировка соответствующего результата.

Теорема 6.9. *Пусть векторное поле F определено и невырождено на $\overline{\Omega}\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}\Omega_j$, причем области Ω_j попарно не пересекаются и лежат в Ω. Тогда вращения $\gamma(F, \dot{\Omega}_j)$ отличны от нуля лишь при конечном числе индексов j и*

$$\gamma(F, \dot{\Omega}) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(F, \Omega_j) \quad \blacksquare$$

6.4. Вращение линейного поля. Пусть A — линейное невырожденное преобразование и $0 \in \Omega$. Возьмем открытый шар B настолько малого радиуса, что $\overline{B} \subset \Omega$. Поскольку поле A невырождено на $\overline{\Omega} \setminus B$, то* $\gamma(A, \Omega \setminus B) = 0$. Поэтому

$$\gamma(A, \dot{\Omega}) = \gamma(A, \dot{B}) + \gamma(A, \Omega \setminus B) = \gamma(A, \dot{B}).$$

Образ $A\dot{B}$ сферы $\dot{B}$ также является сферой, но в другой норме. Следовательно, любой луч l протыкает поверхность $A\dot{B}$ ровно один раз, откуда $|\gamma(A, \dot{\Omega})| = 1$.

Чтобы определить знак вращения, необходимо проследить за ориентацией поверхности $A\dot{\Omega}$. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — локальный базис в точке $x \in \dot{B}$. Как было оговорено выше, векторы $e_2, \ldots, e_n$ расположены в касательном пространстве T_x, а e_1 направлен по внешней нормали. Если $\det A > 0$, то в качестве локального базиса в точке $Ax \in A\dot{B}$ можно взять**

$$\{e'_1, \ldots, e'_n\} = \{Ae_1, \ldots, Ae_n\},$$

который в силу $\det A > 0$ будет одинаково ориентирован с исходным. Таким образом, в случае $\det A > 0$ любой луч протыкает поверхность $A\dot{B}$ изнутри, откуда $\gamma(A, \dot{\Omega}) = 1$. Если же $\det A < 0$, то в качестве локального базиса в $Ax \in A\dot{B}$ можно взять

$$\{e'_1, \ldots, e'_n\} = \{-Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n\}.$$

Поверхность $A\dot{B}$ при этом ориентируется так, что любой луч ее будет протыкать извне. В результате $\gamma(A, \dot{\Omega}) = -1$.

Теорема 6.10. *Пусть A — линейное невырожденное преобразование и $0 \in \Omega$. Тогда*

$$\gamma(A, \dot{\Omega}) = \operatorname{sign} \det A. \quad \blacksquare \tag{6.7}$$

6.5. Формальные схемы определения вращения. Наиболее простой (но зато и менее наглядный) способ введения вращения — аксиоматический. Если утверждения теорем 6.1, 6.8, 6.9 принять

---

* Наряду $\gamma(F, \dot{\Omega})$ мы используем эквивалентное обозначение $\gamma(F, \Omega)$.

** Вектор e'_1 не обязательно должен быть направлен по внешней нормали. Главное, чтобы он был направлен во внешнюю сторону.

за аксиомы, то эти три свойства однозначно определяют целочисленную характеристику $\gamma(F, \dot{\Omega})$ (см. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко [1], Цайдлер [1]).

Для тех, кто знаком с понятием степени отображения (детально изучаемым в любом курсе алгебраической топологии), достаточно сказать, что вращение $\gamma(F, \dot{\Omega})$ есть степень отображения

$$G(x) = F(x)/\|F(x)\| \qquad (6.8)$$

границы $\dot{\Omega}$ в единичную сферу S.

Определение степени отображения в алгебраической топологии традиционно опирается на серию специальных понятий (симплексы, комплексы, ориентации, цепи, циклы, гомологии и т. д.). Изучение этих понятий с единственной целью овладения аппаратом теории степени отображения едва ли оправдано, по крайней мере не обязательно. С тем же успехом здесь могут быть использованы простые нумерационные соображения (М. А. Красносельский [2]) типа тех, которые обычно применяются в доказательстве леммы Шпернера. Для читателя с техническим образованием, по-видимому, наиболее предпочтительны аналитические способы определения степени отображения. Остановимся на схеме одного из таких способов.

Пусть для начала отображение (5.3) и граница $\dot{\Omega}$ гладкие. Введем на $\dot{\Omega}$ локальные системы координат, дополнив их до локальных систем координат в R^n определением первой координаты точки в R^n по внешней нормали к $\dot{\Omega}$, причем эти системы выберем одинаково ориентированными с основной системой координат в R^n. Такие же локальные системы координат введем на единичной сфере $S=\{x \mid \|x\|=1\}$, предполагая $\|x\|=(x, x)^{1/2}$. Через $G'(x)$ будем обозначать матрицу Якоби (в соответствующих локальных координатах) отображения $G: \dot{\Omega} \to S$ в точке $x \in \dot{\Omega}$.

Определим теперь для регулярных значений $y \in S$ величину

$$\deg(G, y) = \sum_{x \in G^{-1}(y)} \operatorname{sign} \det G'(x).$$

Легко видеть, что величина $\deg(G, y)$ конечна (так как компактный прообраз регулярного значения состоит не более чем из конечного числа точек) и локально постоянна как функция y, пробегающего множество $\widetilde{S}$ регулярных значений (которое по теореме Сарда плотно в S). Более того, можно показать, что $\deg(G, y)$

вообще не зависит от $y \in \widetilde{S}$, т. е. $\deg(G, y) = \deg G$. Эта величина и называется степенью гладкого отображения $G: \dot{\Omega} \to S$. Для определения степени отображения $G: \dot{\Omega} \to S$ в общем случае (без предположений о гладкости) необходимо взять достаточно точные гладкие аппроксимации G_1 и Ω_1 $(G_1: \dot{\Omega}_1 \to S)$ и положить $\deg G = \deg G_1$.

Нетрудно заметить, что такой способ введения вращения довольно близок к описанному в разделе 6.2.

Упражнения.

6.1. Если $F(x) = x - x_0$, где $x_0 \notin \overline{\Omega}$, то $\gamma(F, \dot{\Omega}) = 0$.

6.2. Если направления из некоторой окрестности направлений* векторное поле F на $\dot{\Omega}$ принимает один единственный раз, то $|\gamma(F, \dot{\Omega})| = 1$.

6.3. Если направления из некоторой окрестности [illegible] равлени векторное поле F на [illegible] принимает нечетное число раз, то $\gamma(F,$ [illegible]

6,4. Пусть $0 \in \Omega$, Тогда $\gamma(-I, \dot{\Omega}) = (-1)^n$, где I — тождественное преобразование, n — размерность пространства.

6.5. Пусть A — линейное невырожденное преобразование. Тогда

$$\gamma(AF, \dot{\Omega}) = \operatorname{sign} \det \gamma(F, \dot{\Omega}).$$

6.6. Пусть векторное поле F невырождено на границах $\dot{\Omega}_1$, $\dot{\Omega}_2$ и на множествах $\Omega_1 \setminus \Omega_2$, $\Omega_2 \setminus \Omega_1$. Тогда $\gamma(F, \dot{\Omega}_1) = \gamma(F, \dot{\Omega}_2)$.

6.7. Если все лучи допустимы, т. е. ни один луч не касается поверхности $F(\dot{\Omega})$, то $\gamma(F, \dot{\Omega}) \neq 0$. Сформулируйте этот критерий в терминах параметрических уравнений $F(x) = \lambda y$.

§ 7. ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ

7.1. Линейная гомотопия. Среди используемых обычно гомотопических переходов наиболее широко распространен линейный

$$H(x, \tau) = (1 - \tau) F_0(x) + \tau F_1(x). \tag{7.1}$$

Для невырожденности (7.1) достаточно потребовать, чтобы векторы $F_0(x)$ и $F_1(x)$ не были *противоположно направлены* при любом $x \in \dot{\Omega}$. Этот простой признак гомотопности называют теоремой Пуанкаре-Боля.

Теорема 7.1. *Пусть при любом $x \in \dot{\Omega}$ векторы $F_0(x)$ и $F_1(x)$ невырожденных на $\dot{\Omega}$ полей F_0, F_1 не направлены противополож-*

---

* Окрестностью направлений мы называем множество лучей, проходящих через достаточно малую окрестность ненулевой точки.

но. Тогда поля F_0 и F_1 гомотопны на $\dot{\Omega}$ (и, значит, имеют одинаковые вращения). ■

Достаточными условиями непротивоположной направленности полей F_0 и F_1 на $\dot{\Omega}$ могут служить неравенства ($x \in \dot{\Omega}$)

$$\| F_1(x) - F_0(x) \| < \| F_0(x) \| \tag{7.2}$$

или же менее ограничительные

$$\| F_1(x) - F_0(x) \| < \| F_1(x) \| + \| F_0(x) \|. \tag{7.3}$$

7.2. Простейшие принципы. Объединение теорем 6.7, 6.8 и 7.1 легко приводит к следующему результату.

Теорема 7.2. *Пусть $0 \in \Omega$ и при любом $x \in \dot{\Omega}$ векторы x и $F(x)$ не направлены противоположно. Тогда $\gamma(F, \dot{\Omega}) = 1$ и, следовательно, уравнение $F(x) = 0$ разрешимо в Ω.* ■

Условия непротивоположной направленности полей $Ix \equiv x$ и $F(x)$ обычно удобно проверять с помощью тех или иных достаточных признаков. Различный выбор таких признаков приводит к разнообразным следствиям, часть которых формулируется ниже в виде самостоятельных теорем.

Теорема 7.3. *Пусть $0 \in \Omega$ и для любого $x \in \dot{\Omega}$*

$$\| F(x) - x \| < \| F(x) \| + \| x \|, \tag{7.4}$$

Тогда уравнение $F(x) = 0$ разрешимо в Ω. ■

Теорема 7.4. *Пусть $0 \in \Omega$ и для любого $x \in \dot{\Omega}$ можно указать такой номер j, что $x_j f_j(x) > 0$, где $f_j(x)$ обозначает j-ю компоненту оператора F. Тогда уравнение $F(x) = 0$ разрешимо в Ω.* ■

Теорема 7.5. *Пусть $0 \in \Omega$ и для любого $x \in \dot{\Omega}$*

$$(F(x), x) \geqslant 0. \tag{7.5}$$

Тогда уравнение $F(x) = 0$ разрешимо в $\overline{\Omega}$. ■

Часто изучаемые уравнения имеют специальный вид

$$x = T(x). \tag{7.6}$$

В этом случае решение (7.6) называют неподвижной точкой оператора T. Чтобы использовать здесь теоремы 7.3 — 7.5, достаточно перейти к векторному полю $F(x) = x - T(x)$. Соответствующая переформулировка, например, теоремы 7.5 выглядит так.

Теорема 7.6. *Пусть $0 \in \Omega$ и для любого $x \in \dot{\Omega}$*

$$(T(x), x) \leqslant (x, x). \tag{7.7}$$

Тогда оператор T имеет неподвижную точку в $\overline{\Omega}$. ■

Конечно, условия непротивоположной направленности типа (7.5), (7.7) работают с большим запасом, но нередко они оказываются достаточно эффективными и удобными.

7.3. Теорема Брауэра и ее обобщения. Наиболее широкое распространение в прикладных задачах получил следующий принцип неподвижной точки, называемый теоремой Брауэра.

Теорема 7.7. *Пусть оператор T переводит в себя замкнутый шар B. Тогда у T существует неподвижная точка $x^* \in B$.*

Доказательство. Без ограничения общности центр шара B можно считать расположенным в нуле. Предположим противное, т. е. T не имеет неподвижной точки в B. Тогда поле $F(x)=x-T(x)$ невырождено на сфере S, ограничивающей шар B. Легко видеть, что в предположении теоремы $T(B)\subset B$ ни при каком $x\in S$ векторы x и $x-T(x)$ не могут быть противоположно направлены. Но тогда по теореме 7.2 поле F гомотопно тождественному, и, значит, $\gamma(F, S)=1$. Ссылка на теорему 6.7 теперь приводит к противоречию и завершает доказательство. ■

Как показывает приведенное рассуждение, вращение векторного поля $x-T(x)$ на $\dot{B}$ в условиях теоремы Брауэра (при дополнительном предположении невырожденности $x-T(x)$ на $\dot{B}$) равно 1. В дальнейшем мы увидим, что информация о конкретном значении вращения играет важную роль и помогает ответить на ряд дополнительных вопросов о свойствах решения изучаемых уравнений.

Традиционно в условиях теоремы Брауэра фигурирует замкнутый шар, но ясно, что с равным успехом он может быть заменен произвольным замкнутым выпуклым множеством* $\overline{\Omega}$ — прежняя схема доказательства будет работать без изменений. Легко заметить также, что приведенное доказательство не использует в полном объеме требование $T(B)\subset B$, а опирается лишь на предположение $T(\dot{B})\subset B$ и устанавливает по существу справедливость более общего результата.

Теорема 7.8. *Пусть оператор T переводит границу $\dot{\Omega}$ замкнутого выпуклого множества $\overline{\Omega}$ в $\overline{\Omega}$. Тогда T существует неподвижная точка $x^* \in \overline{\Omega}$.* ■

На этом пути полезно отметить следующую теорему Лере-Шаудера, в которой выпуклость Ω не предполагается.

* Не обязательно центрально симметричным, иначе в подходящей норме это опять-таки будет шар.

Теорема 7.9. *Пусть* $0 \in \Omega$, *оператор* T *на границе* $\dot{\Omega}$ *удовлетворяет условию:* $T(x) \neq \lambda x$ *при* $x \in \dot{\Omega}$, $\lambda > 1$. *Тогда у* T *существует неподвижная точка* $x^* \in \overline{\Omega}$.

Действительно, векторы $x \in \dot{\Omega}$ и $x - T(x)$ могут оказаться противоположно направленными лишь в случае $T(x) = \lambda x$, где $\lambda > 1$. ■

Элементарным образом теорема Брауэра обобщается на случай множества $\overline{\Omega}$, гомеоморфного замкнутому шару. Предыдущая схема рассуждений в этом случае, правда, не работает, но несложное до-

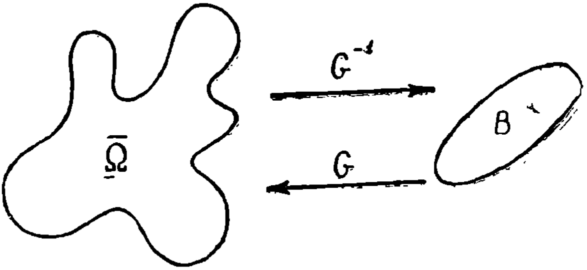


Рис. 5

полнительное построение быстро приводит к цели. Пусть оператор T переводит в себя множество $\overline{\Omega}$ гомеоморфное замкнутому шару B, и G — соответствующий гомеоморфизм (рис. 5). В этом случае оператор $G^{-1}TG$ отображает в себя B и по теореме 7.7 имеет неподвижную точку $x^* \in B$, т. е. $G^{-1}TG(x^*) = x^*$. Но тогда $TG(x^*) = G(x^*)$, следовательно, $y^* = G(x^*) \in \overline{\Omega}$ — неподвижная точка оператора T.

Говорят, что множество $\mathscr{B}$ обладает свойством неподвижной точки, если любое его непрерывное отображение в себя имеет неподвижную точку. Поэтому теорему Брауэра можно сформулировать так: любой замкнутый шар обладает свойством неподвижной точки. При попытках усиления этого результата естественно идти по пути изучения тех классов отображений $T: \mathscr{B} \to \mathscr{P}$, относительно которых свойство неподвижной точки инвариантно. Таким достаточно общим классом является класс r-отображений, который существенно шире класса гомеоморфизмов. Отображение $T: X \to Y$ (здесь предполагается $Y = T(X)$, т. е. T отображает X на Y) называется r-отображением, если существует отображение $S: Y \to X$ такое, что TS представляет собой тождественное отображение Y на Y (напоминаем, что все отображения считаются непрерывными). Другими словами, $T: X \to Y$ есть r-отображение, если для него существует правое обратное.

Теорема 7.10. *Если множество $\mathscr{B}$ обладает свойством неподвижной точки, а $T: \mathscr{B} \to \mathscr{P}$ является r-отображением, то $\mathscr{P}$ также обладает свойством неподвижной точки.*

Доказательство весьма просто. Пусть F — любое непрерывное отображение $\mathscr{P}$ в себя, а S — правое обратное для T. Тогда отображение $G = SFT: \mathscr{B} \to \mathscr{B}$, по предположению, имеет неподвижную точку $x^* \in \mathscr{B}$, т. е. $SFT(x^*) = x^*$. Но тогда

$$FT(x^*) = TSFT(x^*) = T(x^*).$$

Следовательно, $T(x^*) \in \mathscr{P}$ — неподвижная точка отображения F. ■

Объединение теоремы 7.10 с теоремой Брауэра приводит к довольно сильным следствиям и гарантирует наличие свойства неподвижной точки у весьма экзотических множеств.

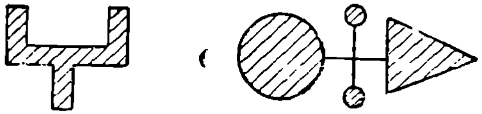


Рис. 6

Обычно принято указывать более частную формулировку теоремы 7.10 для так называемых *ретракций*: r-отображение $T: X \to Y$ называется *ретракцией*, если $Y \subset X$ и правое обратное — тождественное отображение Y на Y. Множество $Y \subset X$ называется *ретрактом* X, если существует ретракция X на Y. Иными словами, $Y \subset X$ — ретракт X, если существует непрерывное отображение $T: X \to Y$ оставляющее все точки $Y \subset X$ „на месте". Из теоремы 7.10 следует, что любой ретракт множества, обладающего свойством неподвижной точки, также обладает этим свойством. На рис. 6 изображены примеры ретрактов выпуклых множеств.

Среди фольклорных теорем встречается следующая: любой стягиваемый по себе компакт в R^n (в частности звездный компакт) обладает свойством неподвижной точки. Это утверждение неверно. Соответствующие контрпримеры можно найти в интересном обзоре Бинга [1]. Утверждение приобретает силу при дополнительном предположении.

Теорема 7.11. *Если стягиваемый по себе компакт K^n локально стягиваем, то он обладает свойством неподвижной точки.* ■

7.4. Индексы и алгебраическое число нулей. До сих пор величина вращения векторного поля для нас существенной роли не играла. Для теорем о неподвижных точках был важен лишь факт отличия вращения от нуля. Установление взаимоотношения между вращением поля на границе и числом нулей поля внутри области позволяет получать более тонкие следствия.

Нуль $x_0 \in \Omega$ поля $F(x)$ назовем *изолированным нулем*, если в достаточно малой окрестности x_0 поле F не имеет других нулей. Вращение поля F на сферах достаточно малого радиуса с центром в x_0 называется *индексом нуля* x_0 и обозначается $\operatorname{ind}(F, x_0)$. Корректность такого определения (т. е. независимость вращения от радиуса сферы, если радиус достаточно мал) немедленно вытекает из теорем 6.4, 6.6.

Теорема 7.12. *Пусть векторное поле F невырождено на $\dot{\Omega}$ и имеет в Ω лишь изолированные нули. Тогда*

$$\sum \operatorname{ind}(F, x_j) = \gamma(F, \dot{\Omega}), \tag{7.8}$$

де суммирование идет по всем нулям $x_j \in \Omega$ поля F.

Заметим, что число нулей $x_j \in \Omega$ заведомо конечно. Это вытекает из изолированности нулей x_j, невырожденности поля F на $\dot{\Omega}$ и компактности $\overline{\Omega}$. Далее остается сослаться на теоремы 6.4, 6.6. ■

Сумма индексов (7.8) называется алгебраическим числом нулей поля F, а теорема 7.12 носит название теоремы об алгебраическом числе нулей. Эта теорема может использоваться для вычисления вращения $\gamma(F, \dot{\Omega})$, если известны индексы всех нулей поля F. Если сумма индексов известных нулей отлична от $\gamma(F, \dot{\Omega})$ — теорема 7.12 гарантирует существование нулей, отличных от известных. Наконец, при наличии априорных оценок индексов теорема 7.12 позволяет иногда устанавливать единственность решения того или иного уравнения. Последнюю возможность мы проиллюстрируем простым примером.

Пусть отображение F гладкое. Если x_0 — нуль поля F, и матрица Якоби $F'_x(x_0)$ невырождена, то в достаточно малой окрестности точки x_0 поле $F(x)$ сколь угодно точно приближается линейным полем $F'_x(x_0)(x-x_0)$. Поэтому *

$$\operatorname{ind}(F, x_0)=\operatorname{sign}\det F'_x(x_0).$$

Предположим теперь, что $\gamma(F, \dot{\Omega})=1$ и $\det F'_x(x)>0$ при любом $x\in\Omega$. Поскольку якобиан преобразования F отличен от нуля в любой точке $x\in\Omega$, отображение F локально обратимо в некоторой окрестности любого $x\in\Omega$. Поэтому поле $F(x)$ может иметь лишь изолированные нули. С другой стороны, в силу $\det F'_x(x)>0$ любой нуль x_j поля F имеет индекс $\operatorname{ind}(F, x_j)=1$. Но тогда из (7.8) и условия $\gamma(F, \dot{\Omega})=1$ следует, что поле F на Ω не может иметь более одного нуля (а один заведомо имеет, поскольку $\gamma(F, \dot{\Omega})\neq 0$).

Ранее было показано, что вращение поля $x-F(x)$ в условиях теоремы Брауэра равно Учитывая изложенное выше, приходим к утверждению.

Теорема 7.13. *Пусть область Ω выпукла и гладкое отображение F переводит $\dot{\Omega}$ в Ω, причем*

$$\det(I-F'_x(x))>0$$

для любого $x\in\Omega$. Тогда F имеет в Ω единственную неподвижную точку. ■

Иногда удобно пользоваться понятием индекса поля на бесконечности. Пусть поле F невырождено при достаточно больших по норме $x\in R^n$. В этом случае говорят, что особая точка ∞ поля F изолирована. При этом теоремы 6.4, 6.6 гарантируют, что вращение поля F на сферах достаточно большого радиуса одно и то же. Это общее вращение обозначают $\operatorname{ind}(F, \infty)$. Если поле F имеет лишь изолированные нули x_j и определен индекс F на бесконечности (т. е. F невырождено при достаточно больших по норме $x\in R^n$), то понятно, что число нулей x_j конечно и справедлива формула

$$\sum_{x_j}\operatorname{ind}(F, x_j)=\operatorname{ind}(F, \infty). \tag{7.9}$$

---

* На сферах достаточно малого радиуса с центром в x_0 поля $F(x)$ и $F'_x(x_0)\times\times(x-x_0)$ будут непротивоположно направлены, так как в малой окрестности точки x_0

$$F(x)=F'_x(x_0)(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)$$

Пусть

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\|F(x)-F'(\infty)x\|}{\|x\|}=0, \tag{7.10}$$

где $F'(\infty)$ — матрица. В этом случае поле F называют асимптотически линейным, а матрицу $F'(\infty)$ — производной на бесконечности оператора F.

Теорема 7.14. *Пусть поле F асимптотически линейно и $\det F'(\infty)\neq 0$. Тогда особая точка ∞ поля F изолирована и* $\operatorname{ind}(F, \infty)=\operatorname{sign}\det F'(\infty)$.

Доказательство совсем просто. По условию $\|F(x)-F'(\infty)x\|=o(\|x\|)$. Но так как матрица $F'(\infty)$ невырождена, это влечет за собой справедливость неравенств

$$\|F(x)-F'(\infty)x\|<\|F'(\infty)x\|$$

на сферах достаточно больших радиусов, что гарантирует непротивоположную направленность полей $F(x)$ и $F'(\infty)x$. ■

7.5. Нечетные поля. Векторное поле F называется нечетным на центрально симметричном множестве Г, если $F(-x)=-F(x)$ при любом $x\in\Gamma$. Пусть B обозначает шар с центром в нуле.

Теорема 7.15. *Вращение нечетного векторного поля F на $\dot{B}$ нечетно (и, значит, отлично от нуля).*

Схема доказательства довольно проста. Пусть r — радиус шара B. Шаровое кольцо, ограниченное сферами радиуса r и $r/2$, разобьем плоскостью, проходящей через 0, на две части Ω_1 и Ω_2 (рис. 7). Шар радиуса $r/2$ обозначим Ω_3. На границе Ω_3 положим $F(x)\equiv x$, и продолжим F с $\dot{B}\cup\dot{\Omega}_3$ на $\dot{\Omega}_1$ так, чтобы результирующее отображение было нечетным и невырожденным*. Теорема 6.4 гарантирует

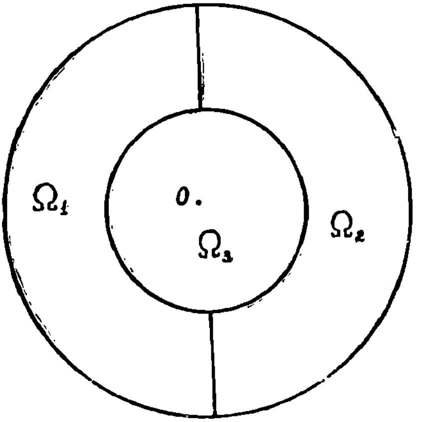


Рис. 7

* Обоснование возможности такого продолжения предоставляется читателю в качестве несложного упражнения. В плоском случае (рис. 7) такая возможность очевидна. Далее удобно использовать индукцию по размерности пространства.

$$\gamma(F, \dot{B})=\gamma(F, \dot{\Omega}_1)+\gamma(F, \dot{\Omega}_2)+\gamma(F, \dot{\Omega}_3). \qquad (7.11)$$

Пусть луч l протыкает поверхность $F(\dot{\Omega}_1)$ в точках $x^1,\ldots, x^m$ В силу нечетности F луч $-l$ будет протыкать $F(\dot{\Omega}_2)$ в точках $-x^1,\ldots, -x^m$, причем характер протыкания (изнутри, извне) будет таким же. Поэтому $\gamma(F, \dot{\Omega}_1)=\gamma(E, \dot{\Omega}_2)$. Вращение же $\gamma(F, \dot{\Omega}_3)=1$ (теорема 6·8). Из (7.11) теперь следует

$$\gamma(F, \dot{B})=2\gamma(F, \dot{\Omega}_1)+1. \blacksquare$$

Казалось бы, теорема 7.15 относится к весьма частному случаю нечетных векторных полей, но она позволяет легко получить результаты существенно более общего характера.

Теорема 7.16. *Пусть поле F невырождено на $\dot{B}$ и*

$$\frac{F(x)}{\|F(x)\|} \neq \frac{F(-x)}{\|F(-x)\|} \qquad (7.12)$$

при любом $x \in \dot{B}$, е. симметричных относительно центра точках векторы поля направлены неодинаково. Тогда $\gamma(F, \dot{B})$ нечетно и, следовательно, уравнение $F(x)=0$ разрешимо в B.

Действительно, в указанных предположениях поле F гомотопно нечетному полю $F(x)-F(-x)$. Гомотопией может служить

$$H(x, \tau)=F(x)-\tau F(-x). \qquad (7.13)$$

Невырожденность (7.13) обеспечивается условием (7.12). Далее остается сослаться на теорему 7·15. $\blacksquare$

7.6. Последовательные итерации и принцип Браудера. Рассмотрим итерационный процесс

$$x^{k+1}=F(x^k), \quad k=0, 1, 2,\ldots \qquad (7.14)$$

Теорема 7 17. *Пусть последовательные итерации (7.14) сходятся к x^* равномерно относительно x^0 из некоторой окрестности точки x^* Тогда* $\operatorname{ind}(I-F, x^*)=1$.

Теорема 7.17 — непосредственное следствие весьма глубокого по содержанию принципа неподвижной точки Браудера, формулируемого ниже.

Теорема 7.18. *Пусть ограниченная область Ω выпук. и оператор обладает следующим свойством: существует k_0 такое, что $F^k(\overline{\Omega})\subset\overline{\Omega}$ для всех $k\geqslant k_0$, и также $F^k(x)\neq x$ для любого $x\in\dot{\Omega}$. Тогда F в Ω имеет неподвижную точку, причем $\gamma(I-F, \dot{\Omega})=1$.* $\blacksquare$

Равенство $\operatorname{ind}(I - F, x^*) = 1$ в условиях теоремы 7.17 легко понять с точки зрения теоремы Яноша-Майерса* гарантирующей существование метрики ρ (эквивалентной исходной), в которой F является сжимающим оператором. Тогда ясно, что F любой замкнутый шар $\overline{\Omega}$ (достаточно малого радиуса) с центром в x^* переводит в себя, т. е. выполняются условия теоремы Брауэра, в которых равенство $\gamma(I - F, \dot{\Omega}) = 1$ было установлено.

Совсем легко понять вывод теоремы 7.17 в дополнительном предположении, что оператор F гладкий и (7.14) сходится одновременно с линейной аппроксимирующей процедурой

$$x^{k+1} = x^* + F'_x(x^*)(x^k - x^*). \tag{7.15}$$

Сходимость (7.15) означает, что спектр матрицы $F'_x(x^*)$ лежит внутри единичного круга — поэтому $\det(I - F'_x(x)) > 0$, что влечет за собой $\operatorname{ind}(I - F, x^*) = 1$. Однако теорема 7.17 интересна и полезна именно тем, что позволяет выйти за рамки этого элементарного соображения

Отметим, наконец, полезную практическую рекомендацию, которую можно извлечь из теоремы 7.17. Итерационные процедуры типа (7.14) часто используются в качестве вычислительных алгоритмов для решения тех или иных уравнений. Безнадежных попыток доказательства равномерной (по начальным приближениям) сходимости (7.14) иногда позволяет избежать вычисление индекса $\operatorname{ind}(I - F, x^*)$. Если $\operatorname{ind}(I - F, x^*) \neq 1$, то (7.14) равномерно не сходится.

7.7. Эквивалентные уравнения. Когда речь идет о решении уравнения $F(x) = 0$, исходная нумерация компонент оператора F не играет никакой роли и может быть произвольно изменена. Это меняет поле, но не меняет существа задачи. Указанное соображение иногда облегчает процесс исследования. Подобный прием представляет собой частный случай общей идеи перехода от уравнения $F(x) = 0$ к некоторому эквивалентному $G(x) = 0$, более удобному для изучения. Пусть, например, $P(0) = 0$ и $P(x) \neq 0$ для $x \neq 0$. Если при этом $\gamma(PF, \dot{\Omega}) \neq 0$, то очевидно, что уравнение $F(x) = 0$ разрешимо в Ω. Вычисление вращения $\gamma(PF, \dot{\Omega})$ при удачном подборе отображения P может быть проще, чем вычис-

* См. В. И. Опойцев [4].

ление $\gamma(F, \dot{\Omega})$. Однако $\gamma(PF, \dot{\Omega})$ может оказаться равным нулю, хотя $\gamma(F, \dot{\Omega}) \neq 0$. Ситуацию разъясняет следующая теорема.

Теорема 7.19 *Пусть векторное поле P имеет в R^n единственный нуль $x_0=0$, а поле F невырождено на $\dot{\Omega}$. Тогда*

$$\gamma(PF, \dot{\Omega}) = \operatorname{ind}(P, 0)\gamma(F, \dot{\Omega}). \blacksquare \tag{7.16}$$

Отсюда автоматически вытекает теорема о произведении индексов.

Теорема 7.20. *Пусть векторное поле P имеет в R^n изолированный нуль $x_0=0$, а поле F — изолированный нуль $x^* \in R^n$ Тогда*

$$\operatorname{ind}(PF, x^*) = \operatorname{ind}(P, 0)\operatorname{ind}(F, x^*). \blacksquare \tag{7.17}$$

7.8. Уравнения с параметром. Ряд практических задач приводит к необходимости изучения уравнений

$$G(x, \lambda)=0 \tag{7.18}$$

со скалярным параметром λ. Непрерывный по совокупности переменных оператор G здесь действует из $R^n \times (-\infty, \infty)$ в R^n, т. е. число (скалярных) уравнений в (7.18) равно n, а число неизвестных — $n+1$. Это, конечно, не гарантирует разрешимость (7.18), но в большинстве случаев оказывается, что уравнению (7.18) удовлетворяют целые ветви решений $x(\lambda)$, т. е. каждому значению λ из некоторого подмножества $\Lambda \subset (-\infty, \infty)$ соответствует свое (не обязательно одно) решение $x(\lambda)$.

Для исследования уравнения (7.18) и описания множества Λ (тех элементов $\lambda \in (-\infty, \infty)$, при которых (7.18) разрешимо) могут с успехом использоваться установленные выше теоремы. Приведем два простых утверждения, доказательство которых предоставляем читателю.

1. *Пусть $\gamma(G(\cdot, \lambda_0), \dot{\Omega}) \neq 0$. Тогда уравнение (7.18) разрешимо в Ω не только при $\lambda=\lambda_0$, но и в некоторой окрестности λ_0.*

2. *Пусть все решения $x(\lambda)$ уравнения (7.18) ограничены по норме* и при некотором λ_0*

$$\operatorname{ind}(G(\cdot, \lambda_0), \infty) \neq 0.$$

Тогда уравнение (7.18) разрешимо при любом $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Иногда оказывается полезным метод функционализации параметра. Он состоит в следующем. Подбирается функционал $\lambda(x)$ и

---

* Имеется априорная оценка $\|x(\lambda)\| \leqslant R < \infty$.

рассматривается оператор $F(x)=G(x, \lambda(x))$. Если $\gamma(F, \dot{\Omega}) \neq 0$, то можно утверждать, что при некотором λ в области Ω существует решение уравнения (7.18).

Довольно часто при изучении уравнений типа (7.18) удается показать существование решений на некоторых поверхностях.

Теорема 7.21. *Пусть*

$$\gamma[G(\cdot, \lambda_1), \dot{\Omega}] \neq \gamma[G(\cdot, \lambda_2), \dot{\Omega}]. \tag{7.19}$$

Тогда при некотором $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ *на* $\dot{\Omega}$ *существует решение уравнения (7.18).*

В противном случае поля $G(x, \lambda_1)$ и $G(x, \lambda_2)$ соединял бы гомотопический мост

$$H(x, \tau)=G[x, \tau\lambda_1+(1-\tau)\lambda_2],$$

что невозможно в силу (7.19). ■

7.9. Собственные векторы. Уравнение (7.18) часто имеет специальный вид

$$F(x)=\lambda x. \tag{7.20}$$

В этом случае решение x уравнения (7.20) называют собственным вектором нелинейного оператора F.

Теорема 7.22. *Пусть* R^n — *нечетномерное пространство,* $0 \in \Omega$ *и поле* F *невырождено на* $\dot{\Omega}$. *Тогда найдется такой* $x \in \dot{\Omega}$, *что векторы* x *и* $F(x)$ *будут коллинеарны, т. е.* $F(x)=\lambda x$ *при некотором* $\lambda \neq 0$.

Если $\gamma(F, \dot{\Omega}) \neq 1$, то поле F не гомотопно тождественному, и, следовательно, при некоторых $\tau \in (0, 1)$, $x \in \dot{\Omega}$

$$\tau F(x)+(1-\tau)x=0.$$

Если же $\gamma(F, \dot{\Omega})=1$, то поле F не гомотопно полю $-Ix$, и тогда при некоторых $\tau \in (0, 1)$, $x \in \dot{\Omega}$

$$\tau F(x)-(1-\tau)x=0. \blacksquare$$

Для справедливости вывода теоремы 7.22 существенна нечетная размерность пространства. Пусть теперь n произвольно. Если поля x и $x-F(x)$ при любом $x \in \dot{\Omega}$ не направлены противоположно, то они гомотопны и их вращения одинаковы. Поэтому, если вращения этих полей различны, найдется вектор $x_0 \in \dot{\Omega}$ такой, что $x_0-F(x_0)=-\mu_0 x_0$ $(\mu_0>0)$, т. е. $F(x_0)=(1+\mu_0)x_0$. Учитывая теперь, что $\gamma(I, \dot{\Omega})=1$ в случае $0 \in \Omega$ и $\gamma(I, \dot{\Omega})=0$ в случае $0 \notin \Omega$ приходим к следующим результатам.

Теорема 7.23. *Пусть $0 \notin \Omega$ и вращение поля $x - F(x)$ на $\dot{\Omega}$ не равно нулю. Тогда уравнение (7.20) разрешимо на $\dot{\Omega}$ при некотором $\lambda > 1$.* ■

Теорема 7.24. *Пусть $0 \in \Omega$ и вращение поля $x - F(x)$ на $\dot{\Omega}$ не равно 1. Тогда уравнение (7.20) разрешимо на $\dot{\Omega}$ при некотором $\lambda > 1$.* ■

Упражнения

7.1. Пусть $0 \in \Omega$ и для любого $x \in \dot{\Omega}$ выполняется неравенство $(T(x), Ax) \geqslant \geqslant (x, Ax)$, где A — линейное невырожденное преобразование. Тогда оператор T имеет неподвижную точку $x^* \in \overline{\Omega}$.

7.2. Пусть $0 \in \Omega$ и $T(x) \neq \lambda x$ при любых $\lambda < 1$ и $x \in \dot{\Omega}$. Тогда оператор T имеет неподвижную точку $x^* \in \overline{\Omega}$

7.3. Если векторное поле F невырождено на $\overline{\Omega}$ и $0 \in \Omega$, то уравнение $F(x) = \lambda x$ разрешимо на $\dot{\Omega}$ при некоторых $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 > 0$.

7.4. Если $\dot{\Omega}$ — сфера в R^n с центром в нуле, а отображение F переводит $\dot{\Omega}$ в $R^k \subset R^n$, причем $k < n$, то существует точка $x \in \dot{\Omega}$, в которой $F(x) = F(-x)$. (Указание: рассмотрите нечетное отображение $F(x) - F(-x)$).

7.5. Постройте пример оператора (разумеется, непрерывного) $T: R^3 \to R^3$, все итерации которого T^k, $k=2, 3, \ldots$ имеют неподвижные точки в некотором шаре, но $T(x) \neq x$ для любого $x \in R^3$.

7.6. Пусть B_0, B_1, B_2 — открытые шары, причем $\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 = \varnothing$, $\overline{B}_1, \overline{B}_2 \subset \overline{B}_0$. Пусть $T: \overline{B}_i \to B_i$, $i=0, 1, 2$. Тогда оператор T в B_0 имеет по крайней мере три неподвижные точки.

§ 8. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ И ДОПОЛНЕНИЯ

При решении конкретных задач, связанных с вычислением вращения и доказательством разрешимости уравнений, не всегда удается обойтись непосредственным применением готовых теорем. Здесь нередко требуется проявление изобретательности, которая обычно опирается на ряд характерных технических приемов. Некоторые из таких приемов описываются ниже.

8.1. Нелинейная гомотопия. При доказательстве гомотопности на $\dot{\Omega}$ векторных полей F_0 и F_1 часто используется идея введения вспомогательного поля F. Желаемый результат достигается, если удается показать гомотопность сначала F_0 и F, а затем F и F_1. На каждом из этих двух шагов может работать простой линейный гомотопический переход — и тогда результирующая гомотопия между F_0 и F_1 будет кусочно-линейной. С этой же целью может использоваться и несколько вспомогательных промежуточных полей.

Эту идею мы проиллюстрируем на простом примере. Докажем, что $\gamma(F, \dot{\Omega})$ не меняется при изменении знаков перед четным числом компонент $f_i(x)$ оператора $F(x)$.

Заметим, что это будет доказано, если мы покажем инвариантность $\gamma(F, \Omega)$ при изменении знаков всего у двух компонент, так как четного числа перемен знаков можно добиться последовательным изменением двух знаков. Итак, убедимся в гомотопности полей $F(x)=\{f_1(x),\dots f_n(x)\}$ и

$$\{-f_1(x), -f_2(x), f_3(x),\dots f_n(x)\}. \tag{8.1}$$

Линейная гомотопия здесь заведомо не работает. Введем промежуточное (вспомогательное) поле

$$\{-f_2(x), f_1(x), f_3(x),\dots f_n(x)\}. \tag{8.2}$$

Покажем, что поля F и (8.2) линейно гомотопны. Если бы соответствующая линейная гомотопия $H(x, \lambda)$ была вырождена, то было бы необходимо при некотором $\lambda \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} h_1(x, \lambda) &= \lambda f_1(x) - (1-\lambda) f_2(x) = 0 \\ h_2(x, \lambda) &= (1-\lambda) f_1(x) + \lambda f_2(x) = 0 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Поскольку же детерминант $\lambda^2+(1-\lambda)^2 \neq 0$, то система (8.3) может иметь лишь нулевое решение

$$f_1(x) = f_2(x) = 0. \tag{8.4}$$

Но если $x \in \dot{\Omega}$ таков, что выполняется (8.4), то из невырожденности F на $\dot{\Omega}$ следует $f_j(x) \neq 0$ при некотором $j \geqslant 3$, т. е. $h_j(x, \lambda) = f_j(x) \neq 0$. Гомотопность полей (8.1) и (8.2) показывается аналогично.

Гомотопический переход от F сразу к полю (8.1) может быть проведен более изящно с помощью гомотопии $H(x, \lambda)$ с компонентами

$$h_1(x, \lambda) = f_1(x)\cos\pi\lambda - f_2(x)\sin\pi\lambda$$

$$h_2(x, \lambda) = f_1(x)\sin\pi\lambda + f_2(x)\cos\pi\lambda$$

$$h_3(x, \lambda) \equiv f_3(x),\dots, h_n(x, \lambda) \equiv f_n(x)$$

8.2. Понижение размерности. Для приводимых ниже результатов полезно доопределить вращение в одномерном случае. Любая ограниченная область Ω в R^1 представляет собой некоторый интервал (α, β). Если $f(\alpha)<0$, $f(\beta)>0$, то полагают $\gamma(f, \dot{\Omega})=1$ В случае $f(\alpha)>0$, $f(\beta)<0$ — $\gamma(f, \dot{\Omega})=-1$. Если же $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ одного знака, то $\gamma(f, \dot{\Omega})=0$.

Пусть дана некоторая система уравнений

$$G_1(u, v)=0, \quad G_2(u, v)=0, \tag{8.5}$$

где векторы u и значения G_1 принадлежат R^{n_1}, а векторы v и значения G_2 принадлежат R^{n_2} $(n_1, n_2\geqslant 1)$. Понятно, что любое уравнение $G(x)=0$ в R^n $(n\geqslant 2)$ может быть представлено в виде (8.5). Очевидно и обратное — любую систему (8.5) можно рассматривать как уравнение $G(x)=0$ в R^n, где

$$n=n_1+n_2, \quad x=\{u, v\}, \quad G(x)=\{G_1(x), G_2(x)\}.$$

Пусть нас интересует существование решения (8.5) в некоторой области $\Omega=\Omega_1+\Omega_2\subset R^n$, где Ω_1, Ω_2 — ограниченные области соответственно в R^{n_1} и R^{n_2}. Предположим, что невырожденный гомотопический переход на $\dot{\Omega}$ переводит поле G в поле

$$F(x)=\{F_1(u), F_2(v)\}, \tag{8.6}$$

которое обычно называют прямой суммой полей F_1 (в R^{n_1}) и F (в R^{n_2}) и обозначают $F=F_1\dot{+}F_2$.

Уравнение $F(x)=0$ в данном случае имеет вид системы двух не связанных уравнений

$$F_1(u)=0, \quad F_2(v)=0, \tag{8.7}$$

разрешимость которых естественно изучать отдельно друг от друга. Допустим, мы установили,

$$\gamma(F_1, \dot{\Omega}_1)\neq 0, \quad \gamma(F_2, \dot{\Omega}_2)\neq 0. \tag{8.8}$$

Это, конечно, гарантирует разрешимость (8.7) в $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$. Но можно ли из (8.8) сделать вывод разрешимости в Ω системы (8.5)? Оказывается можно.

Теорема 8.1. *Пусть поле F_1 невырождено на $\dot{\Omega}_1\subset R^{n_1}$ а поле F_2 — на $\dot{\Omega}_2\subset R^{n_2}$ Тогда*

$$\gamma(F_1\dot{+}F_2, \dot{\Omega}_1\times\dot{\Omega}_2)=\gamma(F_1, \dot{\Omega}_1)\,\gamma(F_2, \dot{\Omega}_2). \tag{8.9}$$

Происхождение формулы (8.9) легко проследить по обычной для нас схеме. Обозначим через l_1, l_2 проек луча $l\subset R^{n_1+n_2}$ на R^{n_1}, R^{n_2}. Пусть луч l_1 протыкает поверхность $F_1(\dot{\Omega}_1)$ в точках

$u^1, \ldots, u^m$, а луч l_2 протыкает $F_2(\dot{\Omega}_2)$ в точках $v^1, \ldots, v^k$. Тогда луч l протыкает поверхность $F(\dot{\Omega}) = F_1 \dot{+} F_2(\dot{\Omega}_1 \times \dot{\Omega}_2)$ в точках (u^i, v^j) $(i=1, \ldots, m;\ j=1, \ldots, k)$. Поскольку очевидно $\varepsilon(u^i, v^j) = \varepsilon(u^i)\,\varepsilon(v^j)$, то

$$\sum_{i,j} \varepsilon(u^i, v^j) = \sum_i \varepsilon(u^i) \sum_j \varepsilon(v^j),$$

что и дает (8.9). ■

Таким образом, (8.8) влечет за собой $\gamma(F, \dot{\Omega}) \neq 0$ — и вывод о разрешимости системы (8.5) в указанных выше предположениях очевиден.

Теорема 8.1 в совокупности с идеей гомотопического перехода от изучаемого поля $G(x)$ к полю вида (8.6) с разделенными переменными позволяет сводить вычисление вращения поля G к вычислению вращений полей F_1, F_2 в пространствах меньшей размерности.

8.3. Слабо связанные системы. Приведем простую конкретную реализацию описанной в предыдущем пункте схемы рассуждений.

В случае $\gamma(F, \dot{\Omega}) \neq 0$ можно гарантировать существование нуля в Ω не только у поля $F(x)$, но и у поля $F(x)+Q(x)$, если только $Q(x)$ на $\dot{\Omega}$ достаточно мало по норме. Было бы полезно располагать возможностью аналогичного заключения в несколько иной ситуации. Иногда изучаемое векторное уравнение $G(x)=0$ имеет вид системы двух (или большего числа) слабо связанных уравнений

$$\left.\begin{aligned} G_1(u, v) = F_1(u) + Q_1(u, v) = 0 \\ G_2(u, v) = F_2(v) + Q_2(u, v) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8.10)$$

Слабо связанных в том смысле, что добавки Q_1 и Q_2 достаточно малы по норме по сравнению с нормами главных частей F_1 и F_2. Для определенности положим, что $\gamma(F_1, \dot{\Omega}_1) \neq 0$, $\gamma(F_2, \dot{\Omega}_2) \neq 0$, а добавки Q_1, Q_2 достаточно малы по норме при $x\{u, v\} \in \dot{\Omega} = \dot{\Omega}_1 \times \dot{\Omega}_2$. В этом случае с точки зрения предыдущего пункта можно гарантировать наличие решения у системы (8.10). К этому заключению приводят два внешне различных рассуждения. Малость по норме добавок на $\dot{\Omega}$ обеспечивает невырожденность гомотопии

$$H(u, v, \tau) = \{F_1(u) + \tau Q_1(u, v),\ F_2(v) + \tau Q_2(u, v)\}.$$

Далее остается сослаться на теорему 8.1. Можно рассуждать и по-другому, с самого начала отправляясь от теоремы 8.1, которая гарантирует $\gamma(F, \dot{\Omega}) \neq 0$. После этого вывод о разрешимости системы (8.10) можно представить как обычное следствие инвариантности вращения при малых деформациях поля.

8.4. Градиентные поля. Пусть имеется скалярная гладкая функция (потенциал) $\varphi(x)$ векторного аргумента $x \in R^n$. Потенциал $\varphi(x)$ определяет векторное поле

$$F(x) = \operatorname{grad} \varphi(x). \tag{8.11}$$

Во многих практически важных случаях вращение поля (8.11) удается изучать непосредственно в терминах потенциала $\varphi(x)$. При этом в процессе исследования часто удобно переходить к изучению полей $x - U_t(x)$, где U_t — оператор сдвига по траекториям векторного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -\operatorname{grad} \varphi(x). \tag{8.12}$$

Ниже предполагается, что решения (8.12) однозначно определяются начальными условиями и определены для всех $t \geqslant 0$ (продолжимы на полуось $[0, \infty)$).

Лемма 8.1. *Пусть градиентное поле (8.11) невырождено на границе ограниченной области Ω. Тогда при любом $t > 0$ вращения полей $F(x) = \operatorname{grad} \varphi(x)$ и $x - U_t(x)$ на $\dot{\Omega}$ совпадают, т. е.*

$$\gamma(F, \dot{\Omega}) = \gamma(I - U_t, \dot{\Omega}). \tag{8.13}$$

Доказательство. При движении (8.12) значение потенциала φ не возрастает, а при прохождении траектории через $\dot{\Omega}$—строго убывает. Поэтому траектория, начавшаяся в точке $x(0) \in \dot{\Omega}$, не может снова вернуться в точку $x(0)$. Следовательно, при $t > 0$ все поля $x - U_t(x)$ невырождены на $\dot{\Omega}$, а значит гомотопны друг другу (поскольку $U_t(x)$ непрерывно по совокупности переменных). Действительно, пусть $0 < t_0 < t_1$. Поля $x - U_{t_0}(x)$ и $x - U_{t_1}(x)$ связывает гомотопия

$$H(x, \tau) = U_{t_0 + \tau(t_1 - t_0)}(x).$$

Таким образом, для установления равенства (8.13) достаточно убедиться в справедливости (8.13) хотя бы при одном $t > 0$. Но при достаточно малых $t > 0$ очевидно, что поля $-\operatorname{grad} \varphi(x)$ и $x - U_t(x)$ гомотопны на $\dot{\Omega}$, так как непротивоположно направлены. ■

Градиентное поле в формулировке леммы 8.1 можно заменить на произвольное, но тогда дополнительно надо потребовать, чтобы каждая траектория уравнения $\dot{x} = -F(x)$, не возвращалась в исходную точку $x(0) \in \dot{\Omega}$ (что в случае градиентного поля обеспечивается автоматически) Лемма 8.1 приводит к интересной и часто плодотворной идее нелинейного гомотопического перехода. Гомотопность полей F_0 и F_1 на Ω можно пытаться доказывать по следующей схеме. Вводятся в рассмотрение дифференциальные уравнения $\dot{x} = -F_0(x)$ и $\dot{x} = -F_1(x)$. Далее рассматриваются соответствующие операторы сдвига U_t^0 и U_t^1 и устанавливается гомотопность полей $x - U_t^0(x)$ $x - U_t^1(x)$ на $\dot{\Omega}$, например, при достаточно больших $t > 0$.

Перейдем теперь к определению индексов особых точек градиентного поля. Пусть x^* — изолированный нуль поля (8.11), и в точке x^* функция $\varphi(x)$ принимает локально минимальное значение. В этом случае решения (8.12), начинающиеся в некоторой окрестности W точки x^*, равномерно сходятся к x^*, т. е. $U_t(x) \to x^*$ при $t \to \infty$ равномерно по $x \in W$. Но тогда для любого $\tau > 0$ имеет место равномерная сходимость

$$U_\tau^k(x) = U_{k\tau}(x) \to x^* \quad \text{при } k \to \infty,$$

т. е. оператор U_τ удовлетворяет условиям теоремы 7.17. Поэтому $\operatorname{ind}(I - U_\tau, x^*) = 1$, и лемма 8.1 приводит к равенству

$$\operatorname{ind}(\operatorname{grad}\varphi(x), x^*) = 1. \tag{8.14}$$

Близкий по характеру результат получается для вращения градиентного поля на сферах достаточно большого радиуса.

Теорема 8.2. *Пусть градиентное поле (8.11), невырожденное при достаточно больших по норме x, удовлетворяет условию*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \varphi(x) = \infty. \tag{8.15}$$

Тогда $\operatorname{ind}(\operatorname{grad}\varphi(x), \infty) = 1$.

Для доказательства воспользуемся переходом к полю $x - U_t(x)$ (лемма 8.1) и покажем, что вращение последнего на сферах большого радиуса равно 1 при достаточно больших $t > 0$.

Обозначим через $\overline{\Omega}(R)$ множество тех элементов x, для которых $\varphi(x) \leqslant \alpha$, где

$$\alpha = \max\{\varphi(x) : \|x\| \leqslant R\}.$$

Заметим, что из (8.15) вытекает ограниченность $\overline{\Omega}(R)$ при любом фиксированном R.

Пусть при $\|x\| \geqslant R_0$ поле (8.11) невырождено. Выберем R_1 так, чтобы шар $\|x\| \leqslant R_1$ содержал $\overline{\Omega}(R_0)$. Движение (8.12), начинающееся на сфере $\|x\|=R_1$, не может выйти за пределы $\overline{\Omega}(R_1)$ и при достаточно больших $t>0$ попадает и остается в $\overline{\Omega}(R_0)$, так как норма градиента на $\overline{\Omega}(R_1) \setminus \overline{\Omega}(R_0)$ ограничена снизу некоторой положительной величиной. Поэтому при достаточно больших $t>0$ оператор U_t отображает шар $\|x\| \leqslant R_1$ в себя, откуда $\gamma(I-U_t, S)=1$, где $S=\{x \mid \|x\|=R_1\}$. ■

Таким образом, градиентные поля с растущими потенциалами [удовлетворяющими условию (8.15)] могут использоваться в качестве стандартных для сравнения с изучаемыми полями.

§ 9. ГОМЕОМОРФИЗМЫ, НАКРЫТИЯ, НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

9.1. Гомеоморфизмы в R^n. Установим предварительно справедливость вспомогательного утверждения.

Лемма 9.1. *Пусть $F: R^n \to R^n$ — локальный гомеоморфизм. Тогда индексы двух точек x_1, x_2 соответственно у векторных полей $F(x)-F(x_1)$ и $F(x)-F(x_2)$ равны.*

Доказательство. Поскольку F — локальный гомеоморфизм, u — изолированный нуль поля $F(x)-F(u)$. Выберем открытый шар Ω с центром в u настолько малого радиуса, чтобы из $v, w \in \overline{\Omega}$, $v \neq w$ вытекало

$$F(v)-F(w) \neq 0. \tag{9.1}$$

Пусть теперь $z \in \Omega$. Векторные поля $F(x)-F(u)$ и $F(x)-F(z)$ на $\dot{\Omega}$ связывает гомотопия

$$H(x, \tau)=F(x)-F[\tau u+(1-\tau) z]. \tag{9.2}$$

Невырожденность (9.2) следует из выпуклости Ω (которая обеспечивает $\tau u+(1-\tau) z \in \Omega$) и условия (9.1).

Отсюда ясно, что $\operatorname{ind}[F(x)-F(u), u]$ — локально постоянная функция аргумента u. Соединим точки x_1 и x_2 отрезком

$$l(\lambda)=\lambda x_1+(1-\lambda) x_2, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Окончательный вывод следует из локального постоянства функции $\chi(\lambda)=\operatorname{ind}[F(x)-F(l(\lambda)), l(\lambda)]$. ■

Теорема 9.1. *Для того, чтобы $F: R^n \to R^n$ было гомеоморфизмом R^n на R^n, необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

a^0. F является локальным гомеоморфизмом.

b^0 Прообраз любого ограниченного множества ограничен.

Необходимость условий a^0, b^0 очевидна. Установим их достаточность. Вращения полей $F(x)-F(0)$ и $F(x)-y$ (при любом $y \in R^n$) на сферах S достаточно большого радиуса равны, так как существует гомотопический мост

$$H(x, \tau)=F(x)-\tau F(0)-(1-\tau)\,y. \tag{9.3}$$

Радиус сферы S должен быть выбран настолько большим, чтобы прообраз компакта

$$T=\{x \mid x=\tau F(0)+(1-\tau)\,y,\ \tau \in [0,\ 1]\}$$

лежал внутри S. В этом случае (заведомо осуществимом в силу b^0) гомотопия (9.3) будет невырождена на S.

Учитывая теперь результат леммы 9.1 и утверждение теоремы об алгебраическом числе нулей (теорема 7.12), приходим к выводу, что число решений $F(x)-y=0$, как функция y, есть константа отличная от нуля. Это влечет за собой сюръективность F. Пусть $y=0$ соответствуют решения $x_1, \ldots, x_m$, где $m \geqslant 2$. (Заметим, что число решений конечно, так как все они изолированы в силу a^0 и все лежат в ограниченной области в силу b^0). При движении по любому лучу vt (при фиксированном $v \in R^n$, $\|v\|=1$) от $t=0$ до $t=\infty$ из каждой точки x_i ($i=1, \ldots, m$) выходит однозначная непрерывная (в силу a^0) кривая $x_i(t)$ такая, что $F(x_i(t))=vt$. В силу постоянства числа решений уравнения $F(x)-y=0$ кривые, выходящие из различных точек x_i, x_j, не могут пересекаться. Отнесем теперь к множеству C_i все точки кривых $x_i(t)$ (соответствующих всевозможным $v \in R^n$, $\|v\|=1$), выходящих из точки x_i. Легко видеть, что множества C_i открыты (в силу a^0) и заведомо не пересекаются. В то же время $\bigcup\limits_i C_i=R^n$. Но это противоречит связности R^n. Это доказывает инъективность F. Непрерывность F^{-1} следует из a^0. ■

Заметим, что условию b^0 можно придать другую эквивалентную форму, которая иногда оказывается более удобной.

Лемма 9.2. *Пусть $F: R^n \to R^n$ непрерывно. Тогда для справедливости b^0 необходимо и достаточно*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \|F(x)\| = \infty. \tag{9.4}$$

Необходимость. Пусть b^0 справедливо, а (9.4) не выполняется. Тогда найдется последовательность x_k такая, что $\|x_k\| \to \infty$, но $F(x_k) = y_k \to y^*$. В этом случае прообраз ограниченного множества $\{y_k\} \cup \{y^*\}$ неограничен.

Достаточность. Пусть справедливо (9.4), и существует ограниченное множество Ω, прообраз которого $F^{-1}(\Omega)$ неограничен. Тогда найдется последовательность $x_k \in F^{-1}(\Omega)$ такая, что $\|x_k\| \to \infty$. В силу (9.4) $\|F(x_k)\| \to \infty$. С другой стороны, $\forall k: F(x_k) \in \Omega$. ■

9.2. Общие теоремы о гомеоморфизмах. В прикладных задачах изучаемый оператор F бывает определен лишь на некотором подмножестве R^n. В отдельных случаях при этом удается обойтись применением теоремы 9.1. Вот простая иллюстрация.

Определим на внутренности неотрицательного ортанта R^n_+ отображение

$$Lx = \{\ln x_1, \ldots, \ln x_n\}$$

Теорема 9.2. *Пусть локальный гомеоморфизм* $G: \mathrm{int}\, R^n_+ \to \mathrm{int}\, R^n_+$ *удовлетворяет условию*

$$\|LG(x)\| \to \infty \quad \textit{при} \quad \|Lx\| \to \infty. \tag{9.5}$$

Тогда G — *гомеоморфизм** $\mathrm{int}\, R^n_+$ *на* $\mathrm{int}\, R^n_+$.

Для доказательства достаточно заметить, что отображение L осуществляет гомеоморфизм между $\mathrm{int}\, R^n_+$ и R^n, а отображение $LGL^{-1}: R^n \to R^n$ удовлетворяет предположениям теоремы 9.1. ■

В более сложных ситуациях теорема 9.1 (равно как и ее очевидные следствия) не всегда оказывается работоспособной. Приведем более общий результат.

Теорема 9.3. *Пусть F отображает метрическое пространство X в метрическое пространство Y, причем X линейно связно, а Y стягиваемо по себе. Тогда, чтобы F было гомеоморфизмом X на Y, необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

a^0. F является локальным гомеоморфизмом.

b^0. Прообраз любого компактного подмножества Y компактен в X. ■

Мы не приводим доказательства, так как теорема 9.3 — частный случай теоремы 9.4, доказываемой ниже.

---

* Условия теоремы не только достаточны, но и необходимы, что очевидно.

Отображения, удовлетворяющие условию b^0, называются собственными. Как показывает лемма 9.2, в случае R^n условие b^0 можно заменить эквивалентным требованием ограниченности прообраза любого ограниченного множества. В общем случае такая замена недопустима.

Теорема 9.3 не охватывает ряд ситуаций, которые могут представлять интерес (например, гомеоморфизмы сферы на сферу). Более широкий круг приложений имеет следующее утверждение.

Теорема 9.4. *Теорема 9.3 остается в силе, если условие стягиваемости Y заменить более слабым: Y линейно связно бая непрерывная замкнутая кривая, лежащая в Y может быть непрерывно стянута (деформирована) в точку*.*

Доказательство. Необходимость условий a^0, b^0 очевидна. Покажем достаточность. Установим сначала сюръективность F. В силу a^0, множество $F(X)$ открыто в Y Покажем, что оно также замкнуто. Пусть $y_k \to y$ и $\forall k: y_k \in F(X)$. В силу b^0 прообраз компактного множества $\{y_k\} \cup \{y\}$ компактен в X. Поэтому у последовательности x_k $(x_k \in F^{-1}(y_k))$ существует сходящаяся подпоследовательность $x_{k_m} \to x$. Учитывая непрерывность F, получаем $y_{k_m} = F(x_{k_m}) \to F(x)$. Откуда $F(x) = y$, т. е. $y \in F(X)$. Итак, $F(X)$ одновременно открыто замкнуто в Y, а поскольку Y связно, то $F(X) = Y$ Сюръективность доказана.

Следующий этап — доказательство инъективности. В предположении противного найдутся точки $x_1 \neq x_2$ такие, что $F(x_1) = F(x_2) = y_0$. Соединим x_1 и x_2 непрерывной кривой $P(t)$, $t \in [0, 1]$,

$$P(0) = x_1, \quad P(1) = x_2,$$

и рассмотрим ее образ $Q(t) = F(P(t))$, представляющий собой замкнутую кривую. Пусть $H(t, \lambda)$ $(\lambda \in [0, 1])$ — непрерывная деформация $Q(t)$ в точку y_0,

$$H(t, 0) = Q(t), \quad H(t, 1) = y_0.$$

Поскольку F сюръективно, для любых $t, \lambda \in [0, 1] \times [0, 1]$ прообраз $H(t, \lambda)$ не пуст. Кроме того, в силу a^0, b^0, из каждой точки $P(t) \in X$ (при любом фиксированном $t \in [0, 1]$) выходит однозначная непрерывная по λ ветвь

$$P(t, \lambda) \in F^{-1}(H(t, \lambda)),$$

---

* Этому условию, например, удовлетворяет сфера в R^n $(n \geqslant 3)$, которая по себе нестягиваема.

определенная для любого $\lambda \in [0, 1]$. Если теперь показать, что при любом фиксированном λ, в том числе при $\lambda=1$, $P(t, \lambda)$ представляет собой непрерывную кривую, — получится требуемое противоречие. Действительно, в этом случае прообраз точки $y_0 \in Y$ будет содержать непрерывную кривую $P(t, 1)$, что противоречит a^0.

Покажем непрерывность $P(t, \lambda)$ по t в любой наперед заданной точке $t_0 \in [0, 1]$ при любом фиксированном $\lambda \in [0, 1]$. В силу a^0, b^0 прообраз каждой точки $y \in Y$ состоит не более, чем из конечного числа точек. Поэтому для каждой точки $y \in Y$ существует такой открытый шар $W_y \subset Y$, что для каждого $x \in F^{-1}(y)$ существует окрестность $V_x \subset X$ такая, что сужение F на V_x есть гомеоморфизм V_x на W_y. Выберем $\Delta\lambda_1$ из условия $\forall \gamma \in [0, \Delta\lambda_1]$: $: H(t_0, \gamma) \in W_y$, где $y=H(t_0, 0)$. Тогда для t достаточно близких к t_0, очевидно,

$$P(t, \Delta\lambda_1)=F_{V_x}^{-1}(H(t, \Delta\lambda_1)),$$

где F_{V_x} — сужение F на V_x $(x=P(t_0, 0))$. Аналогичным образом можно представить второй шаг $P(t, \Delta\lambda_1+\Delta\lambda_2)$ и т. д. Поскольку множество $H([0, 1], [0, 1])$ компактно (как непрерывный образ компакта $[0, 1]\times[0, 1]$), то из его покрытия шарами можно выбрать конечное подпокрытие. Поэтому $P(t, \lambda)$ при любом наперед заданном $\lambda \in [0, 1]$ и t достаточно близких к t_0 можно определить с помощью конечного числа указанных выше шагов, т. е. сужение $P(t, \lambda)$ на достаточно малую окрестность t_0 есть композиция конечного числа непрерывных операторов. Это доказывает непрерывность $P(t, \lambda)$ по t и завершает доказательство инъективности. Непрерывность F^{-1} вытекает из a^0. ∎

9.3. Накрытия пространства. Теоремы о гомеоморфизмах одновременно гарантируют разрешимость уравнения $F(x)=y$ при любом $y \in Y$, единственность решения и непрерывность обратного оператора F^{-1} Иногда возникает самостоятельный вопрос о разрешимости $F(x)=y$ при любом $y \in Y$ В случае положительного ответа говорят, что отображение $F: X \to Y$ накрывает* пространство Y

Теорема 9.5. *Пусть вращение векторного поля F на сферах достаточно большого радиуса отлично от нуля, т. е. $\operatorname{ind}(F, \infty) \neq 0$, и пусть выполняется условие (9.4). Тогда уравнение $F(x)=y$ имеет решение при любом $y \in R^n$, т. е. F накрывает R^n.*

---

* Гомеоморфизм осуществляет однолистное накрытие.

Для доказательства достаточно заметить, что в силу (9.4) на сферах достаточно большого радиуса поля $F(x)$ и $F(x)-y$ будут непротивоположно направлены. ■

Из предыдущего раздела легко сделать вывод о справедливости следующего утверждения.

Теорема 9.6. *Пусть F — локальный гомеоморфизм и образ $F(R^n)$ замкнут в R^n. Тогда F накрывает R^n* ■

9.4. Глобальная разрешимость неявных функций. Пусть дано уравнение (относительно x)

$$\Phi(x, y)=z_0, \tag{9.6}$$

где $\Phi: X\times Y \to X$ — непрерывное отображение, z_0 — некоторый фиксированный элемент из X. Здесь X, Y — метрические пространства *, причем X линейно связно, а Y стягиваемо по себе.

Уравнение (9.6) назовем *локально разрешимым*, если

1) существует хотя бы одна пара $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, удовлетворяющая (9.6);

2) для любой пары $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, удовлетворяющей (9.6), можно указать окрестности $V\subset X$, $W\subset Y$ и непрерывное отображение $G: W \to V$ такие, что для любого $y \in W$

$$\Phi(G(y), y)=z_0$$

и $\Phi(x, y) \neq z_0$, если $x \neq G(y)$. Другими словами, (9.6) на множестве $V\times W$ эквивалентно уравнению $x=G(y)$.

Уравнение (9.6) назовем глобально разрешимым, если существует непрерывное отображение $G: Y \to X$ такое, что (9.6) на $X\times Y$ эквивалентно уравнению $x=G(y)$.

В этом случае говорят также, что (9.6) неявно задает функцию $G(y)$. Очевидно, задача о разрешимости (9.6) в указанном смысле является более общей, чем задача о гомеоморфизме, так как последняя может быть сформулирована в виде вопроса о глобальной разрешимости уравнения $F(x)-y=0$ относительно x.

Теорема 9.7 *Чтобы уравнение (9.6) было глобально разрешимо, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1°. Уравнение (9.6) локально разрешимо.

2° Ес. множество $S\subset Y$ компактно, то множество

$$T=\{x \mid \Phi(x, y)=z_0, \ y \in S\}$$

компактно в X.

Не обязательно конечномерные.

Доказательство. Необходимость условий 1° и 2° очевидна. Перейдем к достаточности. Покажем, что при любом $y \in Y$ уравнение (9.6) имеет решение. В силу 1° множество $\Omega \subset Y$ тех точек $y \in Y$, для которых (9.6) имеет решение, открыто. Покажем, что оно также замкнуто. Пусть $y_k \to y^*$ и $\forall k: y_k \in \Omega$. Для каждого y_k возьмем по одному решению (9.6) x_k. Последовательность x_k в силу 2° компактна, и без ограничения общности можно считать $x_k \to x^*$ (иначе можно перейти к подпоследовательности). Но тогда $\Phi(x^*, y^*) = z_0$, поскольку $\Phi(x_k, y_k) = z_0$ для всех k и отображение Φ непрерывно. Следовательно, $y^* \in \Omega$. Итак, Ω одновременно открыто и замкнуто в Y, а поскольку Y связно (так как стягиваемо), то $\Omega = Y$, т. е. при любом $y \in Y$ уравнение (9.6) имеет хотя бы одно решение

Покажем теперь, что (9.6) при любом $y \in Y$ имеет единственное решение $x = G(y) \in X$. В силу 1° и 2° число решений (9.6) при любом $y \in Y$ конечно. Кроме того, число решений (9.6), как функция y, есть константа. Действительно, пусть при $y_1 \in Y$ и $y_2 \in Y$ (9.6) имеет различное число решений. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — решения (9.6), отвечающие y_1. Соединим точки y_1 и y_2 непрерывной кривой $P(\lambda)$

$$P: [0, 1] \to Y \quad P(0) = y_1, \ P(1) = y_2.$$

Из 1° и 2° следует, что из каждой точки x_i $(i = 1, \ldots, m)$ выходит непрерывная кривая $x_i(\lambda)$ такая, что

$$\Phi(x_i(\lambda), P(\lambda)) = z_0.$$

Так как число решений (9.6) при y_1 и y_2 по предположению различно, то кривые $x_i(\lambda)$ должны или ветвиться, или пересекаться. Но это противоречит условию 1°.

Фиксируем теперь некоторую точку $y_0 \in Y$, и пусть ей отвечают решения (9.6) $x_1^0, \ldots, x_m^0$. Предположим, что $m \geqslant 2$. Поскольку Y стягиваемо, существует гомотопия $H_\lambda(y)$, связывающая тождественное отображение $H_0: Y \to Y$ с отображением $H_1: Y \to y_0$. Пусть x_m — множество решений (9.6), отвечающих $y \in Y$. Соединим y и y_0 кривой $P(\lambda) = H_\lambda(y)$ и рассмотрим соответствующие кривые $x_i(\lambda)$ (см. выше) Каждая кривая $x_i(\lambda)$ имеет два конца $x_i = x_i(0)$ и $x_j^0 = x_i(1)$. Точки x_i и x_j^0 в этом случае назовем эквивалентными. Пусть $C_i \subset X$ — множество точек, эквивалентных x_i^0 $(i = 1, \ldots, m)$. Очевидно, $\bigcup_i C_i = X$ и все множества C_i открыты и не пересекаются. Но это противоречит связности X. Следовательно, $m = 1$. Непрерывность $G: Y \to X$ вытекает из 1°. ■

Если $X=Y=R^n$, то в условии 2° теоремы 9.7 требование компактности S и T можно заменить равносильным (в данном случае) требованием ограниченности.

Упражнения

9.1. Пусть локальный гомеоморфизм $F: R^n \to R^n$ осуществляет гомеоморфизм $\dot{\Omega}$ на $F(\dot{\Omega})$. Тогда F — гомеоморфизм $\bar{\Omega}$ на $F(\bar{\Omega})$.

9.2. Пусть гомеоморфизм $F: \bar{\Omega} \to F(\bar{\Omega})$ невырожден на $\dot{\Omega}$ и $F(x)=0$ для некоторого $x \in \Omega$. Тогда $|\gamma(F, \dot{\Omega})|=1$.

9.3. Постройте пример локального гомеоморфизма $F: R^n \to R^n$, который накрывает R^n, но не является гомеоморфизмом.

9.4. Постройте примеры отображений, которые удовлетворяют условиям теоремы 9.5 или 9.6, но не являются гомеоморфизмами.

9.5. Пусть векторное поле F асимптотически линейно и $\det F'(\infty) \neq 0$. Тогда F накрывает R^n.

9.6. Пусть F — гомеоморфизм R^n на R^n и $\| G(x) \| / \| F(x) \| \to 0$ при $\| x \| \to 0$. Тогда отображение $F(x)+G(x)$ накрывает R^n.

9.7 Пусть отображение $F: R^n \to R^m$ $(m \leqslant n)$ гладкое, производная $F'(x)$ в любой точке $x \in R^n$ накрывает R^m, а образ $F(R^n)$ замкнут в R^m. Тогда F накрывает R^m

9.8. Пусть $\| F(x) \| \to \infty$ при $\| x \| \to \infty$ и $(F(x), G(x)) \leqslant 0$ для достаточно больших по норме $x \in R^n$, где G — некоторый гомеоморфизм R^n на R^n. Тогда F накрывает R^n.

§ 10. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

10.1. Общие сведения. Многозначным (точечно-множественным) отображением $T: X \to 2^Y$ (2^Y условно обозначает множество всех подмножеств множества Y) называется оператор, сопоставляющий каждому элементу $x \in X$ некоторое непустое подмножество множества Y, т. е. $T(x) \subset Y$ для любого $x \in X$.

Везде далее под X подразумевается некоторое подмножество R^n с индуцированной из R^n метрикой. Если не оговорено противное, считается $Y=R^n$. Рассматриваются лишь ограниченные отображения $T: X \to 2^Y$, которые каждое ограниченное множество $A \subset X$ переводят в ограниченное множество

$$C=T(A)=\cup \{ T(x): x \in A \}.$$

Многозначное отображение $T: X \to 2^Y$ называется замкнутым (или полунепрерывным сверху), если график этого отображения

$$Z=\{(x, y) \in X \times Y \mid x \in X, \ y \in T(x)\} \qquad (10.1)$$

замкнут в $X \times Y$.

Для ограниченных отображений можно дать эквивалентное определение: отображение $T:X\to 2^Y$ замкнуто (полунепрерывно сверху), если по любой окрестности U любого множества-образа $T(x)$ можно указать окрестность V точки x такую, что $T(V)\subset U$.

Далее нас будут интересовать вопросы, связанные с разрешимостью включений $0\in T(x)$ или $x\in T(x)$. В случае $x\in T(x)$ точку x называют неподвижной точкой отображения T.

10.2. Редукция задач к многозначным отображениям. Теоремы о неподвижных точках многозначных отображений представляют собой довольно мощный аппарат для решения обширного круга вопросов. Использование этого аппарата часто сопряжено с необходимостью перевода формулировок изучаемых задач на язык многозначных отображений. Дело в том, что в исходных постановках задач многозначные отображения, как правило, вообще отсутствуют. При этом ведущие к цели преобразования могут быть далеко не очевидными. Но в большинстве случаев необходимая редукция носит достаточно естественный характер. Ниже рассматриваются две классические иллюстрации.

Обратимся к известной задаче о существовании у функции $\varphi(x, y)$ *седловой точки*. Она эквивалентна вопросу о справедливости равенства

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X}\varphi(x, y)=\max_{x\in X}\min_{y\in Y}\varphi(x, y). \tag{10.2}$$

Напомним, что эта задача играет важную роль в математическом программировании (существование седловой точки у лагранжиана равносильно существованию решения у задачи нелинейного программирования), теории игр и вообще теории минимаксных задач.

Стандартный путь доказательства равенства (10.2) состоит в следующем. Вводятся два многозначных отображения*

$$U(x)=\operatorname{Arg}\min_{y\in Y}\varphi(x, y),$$

$$V(x)=\operatorname{Arg}\max_{x\in X}\varphi(x, y).$$

Теперь из существования неподвижной точки отображения $U(x)\times\times V(y)$ следует (10.2). Действительно, пусть

---

* Как обычно, $\operatorname{Arg}\min_{x\in X}\psi(x)$ обозначает множество тех $x\in X$, при которых достигается минимум $\psi(x)$. Аналогично определяется $\operatorname{Arg}\max_{x\in X}\psi(x)$.

$$(y^*, x^*) \in U(x^*) \times V(y^*).$$

Это означает, что

$$\min_{y \in Y} \varphi(x^*, y) = \varphi(x^*, y^*) = \max_{x \in X} \varphi(x, y^*).$$

Отсюда

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} \varphi(x, y) \leqslant \max_{x \in X} \varphi(x, y^*) = \varphi(x^*, y^*) =$$

$$= \min_{y \in Y} \varphi(x^*, y) \leqslant \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \varphi(x, y).$$

Но справедливость обратного неравенства очевидна, поэтому (10.2) доказано (конечно, при условии существования неподвижной точки у отображения $U \times V$).

Рассмотрим другой пример. Пусть имеется игра N лиц с функциями выигрыша $D_i(x_1, \ldots, x_N)$, где $x_i \in X_i$ — стратегия i-го игрока. Введем обозначение

$$\psi_i(y_i, x) = D_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_N).$$

Решением (положением равновесия) игры по *Нэшу* называется точка $x^* = \{x_1^*, \ldots, x_N^*\}$ такая, что

$$\max_{y_i \in X_i} \psi_i(y_i, x^*) = \psi_i(x_i^*, x^*), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Введем многозначные отображения

$$W_i(x) = \operatorname{Arg} \max_{y_i \in X_i} \psi_i(y_i, x)$$

и положим

$$W(x) = W_1(x) \times \ldots \times W_N(x).$$

Очевидно, что вопрос о существовании равновесия по Нэшу эквивалентен вопросу о существовании решения у включения $x \in W(x)$.

10.3. Отображения с выпуклыми образами. Ниже Ω обозначает ограниченную область в R^n. Рассматриваются многозначные отображения T, заданные на $\overline{\Omega}$ и имеющие выпуклые образы $T(x) \subset R^n$ при любом $x \in \overline{\Omega}$.

Многозначное отображение $T(x)$ называют также многозначным векторным полем, а точку x, в которой $0 \in T(x)$, — нулем многозначного векторного поля. Говорят, что поле $T(x)$ невырождено на множестве Γ, если на Γ оно не имеет нулей, т. е. $0 \notin T(x)$ для любого $x \in \Gamma$. Изучаемые далее поля, если не оговорено противное, предполагаются невырожденными на границах $\dot{\Omega}$ рассматриваемых областей.

Перейдем к описанию стандартной аппроксимационной конструкции. В силу компактности $\dot{\Omega}$ при любом $\varepsilon>0$ в $\dot{\Omega}$ существует ε-сеть $L_\varepsilon=\{x^1,\dots,x^N\}$. В каждом множестве $T(x^i)$ фиксируем произвольную точку $y^i\in T(x^i)$. Определим далее N весовых функций

$$\alpha_{i\varepsilon}(x)=\theta_{i\varepsilon}(x)\Big/\sum_{j=1}^{N}\theta_{j\varepsilon}(x),$$

где $\theta_{j\varepsilon}(x)=\max\{0,\ \varepsilon-\|x-x^j\|\}$. Заметим, что $\sum\theta_{j\varepsilon}(x)>0$ для любого $x\in\dot{\Omega}$, поскольку набор точек x^j образует ε-сеть.

Назовем теперь однозначное отображение

$$t(x)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_{i\varepsilon}(x)\,y^i \tag{10.3}$$

ε-аппроксимацией многозначного отображения $T(x)$.

Пусть отображение T (с выпуклыми образами) невырождено на $\dot{\Omega}$ и замкнуто. В этом случае вращением $\gamma(T,\dot{\Omega})$ многозначного векторного поля $T(x)$ на $\dot{\Omega}$ назовем вращение однозначного векторного поля (10.3) на $\dot{\Omega}$ достаточно малых ε.

Покажем корректность такого определения, т. е. независимость вращения ε-аппроксимаций (10.3) от выбора ε-сети (если только ε достаточно мало) и от выбора точек y^i

В силу невырожденности T на $\dot{\Omega}$ любое замкнутое выпуклое множество $T(x)$ не содержит нуля. Поэтому существует некоторая выпуклая окрестность U множества $T(x)$ также не содержащая нуля. Но так как отображение T полунепрерывно сверху, то в U лежат все образы $T(y)$ точек y из некоторой окрестности V исходной точки x. Таким образом, каждой точке $x\in\dot{\Omega}$ можно поставить в соответствие шаровую окрестность V_x, обладающую тем свойством, что ее образ $T(V_x)$ лежит в выпуклом множестве, не содержащем нуля.

Из покрытия компакта открытыми шарами V_x выберем конечное подпокрытие. Пусть такое подпокрытие образуют шары $V_1,\dots,V_m$.

Лемма 10.1. *Существует такое $\delta>0$, что шар радиуса δ с центром в любой точке $x\in\dot{\Omega}$ целиком лежит в одном из множеств $V_1,\dots,V_m$.*

Пусть $\varepsilon(x)$ обозначает максимальный радиус шара с центром в x, целиком лежащего в одном из множеств $V_1, \dots V_m$. Очевидно, $\varepsilon(x) \geq \varepsilon(y) - \|x - y\|$, $\varepsilon(y) \geq \varepsilon(x) - \|x - y\|$ для достаточно близких точек x, y. Отсюда $|\varepsilon(x) - \varepsilon(y)| \leq \|x - y\|$, т. е. функция $\varepsilon(x)$ непрерывна на компакте $\dot{\Omega}$. Для завершения доказательства достаточно положить $\delta = \min\{\varepsilon(x) : x \in \dot{\Omega}\}$. ■

Возьмем теперь любую ε_1-сеть и любую ε_2-сеть $\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2 < \frac{\delta}{2}\right)$ на $\dot{\Omega}$. Пусть

$$t_1(x) = \sum_i \alpha_{i\varepsilon_1}(x)\, y^i, \quad t_2(x) = \sum_j \alpha_{j\varepsilon_2}(x)\, z^j \tag{10.4}$$

соответствующие однозначные аппроксимации. Рассмотрим произвольную точку $x \in \dot{\Omega}$. В суммах (10.4) ненулевые коэффициенты могут быть только при тех y^i, z^j, которые заведомо принадлежат образу δ-окрестности точки x. Но этот образ лежит в одном из образов $T(V_k)$, который в свою очередь лежит в некотором выпуклом множестве, не содержащем нуля. Поэтому в любой точке $x \in \dot{\Omega}$ все векторы y^i, коэффициенты при которых в (10.4) отличны от нуля, лежат в выпуклом множестве, не содержащем нуля. Отсюда немедленно вытекает невырожденность и непротивоположная направленность однозначных полей $t_1(x)$, $t_2(x)$ на $\dot{\Omega}$, что влечет за собой их гомотопность. Корректность определения вращения многозначного поля доказана.

Для вычисления вращений, как и в случае однозначных полей, важно понятие гомотопии. Многозначные векторные поля $T_0(x)$, $T_1(x)$ называются гомотопными на $\dot{\Omega}$, если существует замкнутое по совокупности переменных многозначное отображение (с выпуклыми образами) $H(x, \tau)$ $(x \in \dot{\Omega},\ \tau \in [0, 1])$ такое, что при любом $\tau \in [0, 1]$ поле $H(x, \tau)$ невырождено на $\dot{\Omega}$ и

$$H(x, 0) = T_0(x), \quad H(x, 1) = T_1(x) \quad (x \in \dot{\Omega})$$

Теорема 10.1. *Гомотопные многозначные векторные поля имеют одинаковые вращения.*

Для доказательства достаточно заметить, что $\gamma(T, \dot{\Omega})$ не меняется при малых деформациях поля. ■

Теорема 10.2. *Если многозначное векторное поле T невырождено на замыкании $\overline{\Omega}$, то $\gamma(T, \dot{\Omega}) = 0$.*

Легко убедиться, что ε-аппроксимации поля T при достаточно малых ε будут невырождены на $\overline{\Omega}$ (имеются в виду ε-аппроксимации не на границе $\dot{\Omega}$, а на замыкании $\overline{\Omega}$). Далее остается сослаться на теорему 6.6. ■

Как и в случае однозначных отображений, эта теорема немедленно влечет за собой справедливость следующего фундаментального результата.

Теорема 10.3. *Пусть* $\gamma(T, \dot{\Omega}) \neq 0$. *Тогда включение* $0 \in T(x)$ *разрешимо в* Ω, *т. е. существует* $x^* \in \Omega$, *в которой* $0 \in T(x^*)$. ■

Понятно, что далее можно следовать путем, аналогичным тому, который был описан в § 6,7. Надо определить вращения ряда стандартных полей, а затем сводить к ним с помощью гомотопии изучаемые поля, после чего использование теоремы 10.3 будет приводить к различным принципам неподвижной точки. Но в качестве стандартных можно использовать однозначные поля (являющиеся частным случаем многозначных), вращение которых известно.

Теорема 10.4. *Если при любом* $x \in \dot{\Omega}$ *произвольные векторы* $y_1 \in T_1(x)$, $y_2 \in T_2(x)$ *не направлены противоположно, то поля* $T_1(x)$ *и* $T_2(x)$ *гомотопны.*

Доказательство элементарно. Легко проверить, что*

$$H(x, \tau) = (1 - \tau)\, T_1(x) + \tau T_2(x)$$

является гомотопическим мостом. ■

Остановимся на выводе получившей широкое распространение теоремы Какутани. Напомним, что все рассматриваемые в этом разделе многозначные отображения имеют выпуклые образы и предполагаются замкнутыми.

Теорема 10.5. *Пусть многозначное отображение* $T(x)$ *переводит в себя некоторый замкнутый шар* $\overline{B}$, *т. е.* $T: \overline{B} \to 2^{\overline{B}}$. *Тогда отображение* T *имеет неподвижную точку* $x^* \in \overline{B}$ $[x^* \subset T(x^*)]$.

Без ограничения общности центр шара B можно считать расположенным в нуле. Многозначное векторное поле $U(x) = x - T(x)$ можно считать невырожденным на $\dot{B}$ (иначе бы существовала не-

---

* Сумма многозначных отображений определяется так:

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x) = \{x \mid x = a + b,\ a \in U_1(x),\ b \in U_2(x)\}.$$

Если $U_1(x)$, $U_2(x)$ замкнутые отображения с выпуклыми образами, то отображение $U_1(x) + U_2(x)$ также замкнуто и имеет выпуклые образы.

подвижная точка $x^* \in B$). Легко видеть, что любые два вектора $x \in \dot{B}$, $y \in x - T(x)$ не могут быть противоположно направлены. Но тогда (теорема 10.4) поля $I(x) \equiv x$ и $U(x)$ гомотопны. Следовательно, $\gamma(U, \dot{B}) = \gamma(I, \dot{B}) = 1$. Доказательство завершает ссылка на теорему 10.3. ■

Обратим внимание, что схема доказательства здесь полностью аналогична схеме доказательства теоремы Брауэра. Такая аналогия имеет место и для ряда последующих теорем.

Теорема 10.6. *Пусть* $0 \in \Omega$ *и* $(x, y) \geq 0$ *для любой пары векторов* $x \in \dot{\Omega}$, $y \in T(x)$. *Тогда включение* $0 \in T(x)$ *разрешимо в* $\overline{\Omega}$. ■

Теорема 10.7. *Пусть* $0 \in \Omega$ *и* $(x, y) \leq (x, x)$ *для любой пары векторов* $x \in \dot{\Omega}$, $y \in T(x)$. *Тогда отображение* T *имеет неподвижную точку* $x^* \in \overline{\Omega}$. ■

Теорема 10.8. *Пусть* $0 \in \Omega$ *и для любых* $x \in \dot{\Omega}$, $y \in T(x)$ *существует индекс* i *такой, что* $x_i y_i > 0$. *Тогда включение* $0 \in T(x)$ *разрешимо в* Ω. ■

Теорема 10.9. *Пусть* $0 \in \Omega$ *и* $y \neq \lambda x$ *для любых* $x \in \dot{\Omega}$, $y \in T(x)$ *и любого* $\lambda > 1$. *Тогда отображение* T *имеет неподвижную точку* $x^* \in \overline{\Omega}$. ■

Теорема 10.10. *Пусть* $0 \in \Omega$, *многозначные поля* $U(x)$, $V(x)$ *невырождены на* $\dot{\Omega}$, $\gamma(U, \dot{\Omega}) \neq 0$ *и для любого* $x \in \dot{\Omega}$

$$\max\{\|y\| : y \in V(x)\} < \max\{\|z\| : z \in U(x)\}.$$

Тогда включение $0 \in U(x) + V(x)$ *разрешимо на* Ω. ■

Аналогию с однозначными отображениями можно было бы продолжить. Так, например, легко доказать аналоги теорем о существовании у многозначных отображений собственных векторов, т. е. разрешимости включений $\lambda x \in T(x)$ при некотором $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Для многозначных отображений справедлива также теорема об алгебраическом числе неподвижных элементов поля, аналогичная теореме об алгебраическом числе нулей однозначного векторного поля. Под неподвижными элементами в данном случае понимаются связные множества нулей многозначного векторного поля, и речь идет о случае изолированных неподвижных элементов (имеющих непересекающиеся окрестности).

В приведенных выше теоремах фигурируют различные предположения относительно пары векторов $x \in \dot{\Omega}$ и $y \in T(x)$. Эти предположения было бы полезно ослабить, требуя справедливость тех или иных условий не для любого $x \in \dot{\Omega}$ и любого $y \in T(x)$, а для любого $x \in \dot{\Omega}$ и некоторого $y \in T(x)$. В отдельных случаях такое ослабление предположений действительно возможно. Вот два примера соответствующих утверждений, первое из которых обобщает теорему Какутани.

Теорема 10.11. *Пусть $\overline{B}$ — замкнутый шар, и для любого $x \in \dot{B}$ некоторый вектор $y \in T(x)$ принадлежит $\overline{B}$, т. е. пересечение любого образа $T(x)$ $(x \in \dot{B})$ с $\overline{B}$ не пусто. Тогда отображение T имеет неподвижную точку $x^* \in \overline{B}$.*

Сначала заметим, что теорема Какутани остается справедливой, если многозначное отображение T переводит в $\overline{B}$ не весь шар $\overline{B}$, а лишь его границу $\dot{B}$ (именно это предположение было использовано при доказательстве теоремы 10.5). В данном случае этому условию удовлетворяет отображение $\overline{B} \cap T(x)$. Теперь остается заметить, что неподвижная точка отображения $\overline{B} \cap T(x)$ заведомо является неподвижной точкой отображения $T(x)$. ■

Теорема 10.12. *Пусть $0 \in \Omega$ и $(x, y) \geqslant 0$ для любого $x \in \dot{\Omega}$ и некоторого $y \in T(x)$. Тогда включение $0 \in T(x)$ разрешимо в $\overline{\Omega}$.*

Положим $P(x) = \{z : (x, z) \geqslant 0\}$. Отображение $P(x) \cap T(x)$ будет удовлетворять предположениям теоремы 10.6. ■

10.4. Многозначные отображения с невыпуклыми образами. Понятно, что если предположение о выпуклости образов в теореме Какутани (и вообще в теории вращения векторных полей) не существенно, то какие-то предположения о структуре образов безусловно необходимы. Геометрическая интуиция подсказывает, что по крайней мере надо сохранить предположение о стягиваемости образов. Хотя это и не обязательно, но такое предположение (в некоторых случаях с оговорками) действительно может эффективно заменять предположение о выпуклости образов.

Подробное изложение теории вращения многозначных векторных полей с невыпуклыми образами заняло бы слишком много места (краткая характеристика и библиографические указания даны в Комментариях). Здесь мы остановимся лишь на формулировке важного обобщения теоремы Какутани, которое принадлежит Эйленбергу и Монтгомери [1].

Теорема 10.13. *Пусть $X \subset R^n$ — стягиваемый локально связный компакт, а $T: X \to 2^X$ — замкнутое многозначное отображе-*

ние со стягиваемыми образами. Тогда T_* имеет в X неподвижную точку.

Интересно отметить технический прием, использованный Эйленбергом и Монтгомери для доказательства основной теоремы. С одной стороны, он полезен вообще при изучении неподвижных точек многозначных отображений, с другой — указывает на важность определенного типа теорем о неподвижных точках однозначных отображений (точнее, теорем о совпадениях).

Теорема 10.14. *Пусть $N \subset R^n$ — стягиваемый локально связный компакт, $M \subset R^n$ — компакт, а $r: M \to N$ и $t: M \to N$ — непрерывные (однозначные) отображения, причем все прообразы $t^{-1}(y)$ (при любом $y \in N$) не пусты и стягиваемы. Тогда r и t имеют точку совпадения, т. $r(x) = t(x)$ для некоторого $x \in M$.* ■

Из этой теоремы предыдущая выводится довольно просто. Пусть z — график отображения $T: X \to 2^X$. Введем в рассмотрение два однозначных непрерывных отображения $r: Z \to X$ и $t: Z \to X$

$$r(x, y) = y, \quad t(x \; y) = x.$$

Очевидно, $t^{-1}(x) \equiv T(x)$. Поэтому все прообразы отображения t стягиваемы. Все предположения теоремы 10.14 выполнены. Следовательно, существует точка $(x^* \; y^*) \in Z$, в которой

$$r(x^*, y^*) = t(x^*, y^*),$$

т. е. $y^* = x^*$. Но это и означает $x^* \in T(x^*)$, т. е. отображение T имеет неподвижную точку

Упражнения

Предполагается, что все рассматриваемые ниже многозначные отображения имеют выпуклые образы и являются замкнутыми.

10.1. Пусть многозначные отображения P и Q переводят в себя замкнутый шар $\bar{B}$ и $P(x) \cap Q(x) \neq \varnothing$ для любого $x \in \bar{B}$. Тогда P и Q в $\bar{B}$ имеют общую неподвижную точку.

10.2. Пусть $0 \in \Omega$ и $y \neq \lambda x$ для любых $x \in \dot{\Omega}$, $y \in T(x)$ и любого $\lambda < 1$. Тогда отображение T имеет неподвижную точку $x^* \in \bar{\Omega}$.

10.3. Пусть вращение многозначного отображения T на сферах достаточно большого радиуса отлично от нуля и $\|y^k\| \to \infty$ для любой последовательности $y^k \in T(x^k)$, при условии, что $\|x^k\| \to \infty$. Тогда отображение T накрывает R^n, т. е. включение $y \in T(x)$ разрешимо при любом $y \in R^n$.

§ 11. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

11.1. Вполне непрерывные поля. Попытка обобщить теорию вращения (§ 5 — 9) на векторные поля в бесконечномерном банаховом пространстве E принципиально не проходит. Причина этой неприятности заключается в том, что всякая сфера S в бесконечномерном пространстве непрерывной деформацией может быть стянута по себе в точку. Отсюда, в свою очередь, следует, что все невырожденные поля на S оказываются гомотопными друг другу.

Упражнение 11.1. Постройте непрерывную деформацию, которая стягивает по себе в точку единичную сферу $S=\{x \quad \|x\|=1\}$ в пространстве C.

Тем не менее, если от непрерывных векторных полей в E перейти к рассмотрению некоторых более узких классов полей, то их гомотопическая классификация становится возможной. Одним из таких классов является класс вполне непрерывных полей, представляющих собой отображения вида

$$\Phi(x)=x-F(x), \tag{11.1}$$

где $F:E\to E$ вполне непрерывный оператор.

Теория вращения строится и для других классов полей, но центральную роль занимает все же теория вращения вполне непрерывных векторных полей (11.1), которые наиболее широко распространены в приложениях.

Если говорить о трудностях восприятия понятий теории вращения, то в основном они концентрируются в рамках конечномерной теории. По этой причине вращение полей в R^n рассмотрено в § 5 — 9 достаточно детально, а случай бесконечномерных пространств в данном параграфе излагается весьма схематично. Для такой расстановки акцентов есть и более веская причина — наличие монографии М. А. Красносельского и П. П. Забрейко [1], в которой дано чрезвычайно интересное и обширное изложение теории вращения векторных полей в банаховых пространствах.

11.2. Конечномерные аппроксимации. Если множество значений оператора $F:E\to E$ лежит в конечномерном подпространстве E, то F называют *конечномерным оператором*.

Примером конечномерного оператора может служить интегральный оператор вида

$$F(x)=\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m} e_i(t)\, f_i[s,\ x(s))]\, ds,$$

значения которого лежат в подпространстве с базисом $e_1(t),\cdots, e_m(t)$.

Оказывается, что вполне непрерывный оператор $F:E\to E$ на ограниченном множестве $M\subset E$ всегда можно сколь угодно точно аппроксимировать конечномерным оператором F_ε таким, что

$$\| F(x) - F_\varepsilon(x) \| < \varepsilon \quad (x \in M). \tag{11.2}$$

Оператор F_ε легко задать конструктивно. Пусть $M \subset E$ — некоторый компакт, а $z_1, \ldots z_k$ — его конечная ε-сеть. Оператор

$$P_\varepsilon(x) = \frac{\mu_1(x) z_1 + \ldots + \mu_k(x) z_k}{\mu_1(x) + \ldots + \mu_k(x)} \quad (x \in M),$$

где

$$\mu_j(x) = \begin{cases} \varepsilon - \| x - z_j \|, & \text{если } \| x - z_j \| \leqslant \varepsilon \\ 0 & \text{если } \| x - z_j \| > \varepsilon \end{cases}$$

называется *проектором Шаудера*. Легко видеть, что конечномерный оператор $F_\varepsilon = P_\varepsilon F$; где P_ε — проектор Шаудера, построенный по компакту $F(M)$ и его произвольный ε-сети, будет удовлетворять неравенству (11.2).

11.3. Гомотопные поля. Заданная на ограниченном множестве $M \subset E$ вектор-функция

$$\Phi(x, \tau) = x - F(x, \tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1 \tag{11.3}$$

называется деформацией поля

$$\Phi_0(x) = x - F_0(x) = x - F(x, 0) \tag{11.4}$$

в поле

$$\Phi_1(x) = x - F_1(x) = x - F(x, 1). \tag{11.5}$$

Деформация $\Phi(x, \tau)$ называется вполне непрерывной, если оператор $F(x, \tau)$ вполне непрерывен, как оператор, действующий из $E \times [0, 1]$ в E. Деформация $\Phi(x, \tau)$ называется невырожденной, если $\Phi(x, \tau) \neq 0$ при любом $x \in M$ и $\tau \in [0, 1]$.

Вполне непрерывные векторные поля (11.4), (11.5) называются гомотопными на M, если существует соединяющая их невырожденная вполне непрерывная деформация (11.3).

11.4. Вращение вполне непрерывного поля. Пусть вполне непрерывное векторное поле (11.1) задано и невырождено на границе $\dot{\Omega}$ некоторой ограниченной области $\Omega \subset E$. Пусть F_ε обозначает конечномерную аппроксимацию F на $\dot{\Omega}$, причем $F_\varepsilon : E \to E_0$, а $F_{\varepsilon E_0}$ — сужение оператора F_ε на конечномерное пространство E_0.

Вращением $\gamma(\Phi, \dot{\Omega}) = \gamma(I - F, \dot{\Omega})$ вполне непрерывного невырожденного векторного поля (11.1) на $\dot{\Omega}$ называется вращение поля $I - F_{\varepsilon E_0}$ на $\dot{\Omega}_0 = \dot{\Omega} \cap E_0$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Такое определение вращения оказывается корректным в том смысле, что вращения полей $I - F_{\varepsilon E_0}$ стабилизируются при достаточно малых $\varepsilon>0$ независимо от выбора пространств E_0 и аппроксимаций F_ε.

Дальнейшее развитие теории вращения вполне непрерывных полей идет по тому же пути, который описан в § 5 — 7. Устанавливается равенство вращений у гомотопных полей, вводятся понятия индекса особой точки, алгебраической суммы нулей и т. д. По существу все „конечномерные теоремы“ остаются справедливыми и в банаховом пространстве. Уточнения требует вычисление индекса линейного оператора. Если $B:E\to E$ линейный вполне непрерывный оператор и 1 не является его собственным значением, то

$$\operatorname{ind}(I-B,\ 0)=(-1)^\beta,$$

где β — сумма кратностей вещественных и бо́льших, чем 1, собственных значений оператора B.

Аналог теоремы Брауэра в банаховом пространстве носит название принципа неподвижной точки Шаудера. Вот его точная формулировка.

Теорема 11·1. *Пусть вполне непрерывный оператор $F:E\to E$ отображает в себя ограниченное замкнутое выпуклое множество $\overline{\Omega}\subset E$. Тогда оператор F имеет неподвижную точку $x^*\in\overline{\Omega}$.* ■

На переформулировке других теорем мы не останавливаемся, поскольку такая переформулировка в большинстве случаев сводится практически к дословному повторению.

ГЛАВА III

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Основное внимание в главе уделяется теоремам существования неподвижных точек у положительных операторов. Здесь же рассматриваются принципы неподвижной точки для монотонных и некоторых других типов операторов.

§ 12. УРАВНЕНИЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Цель параграфа состоит в описании и изучении достаточных условий, обеспечивающих существование положительных (а также ненулевых положительных) решений уравнения

$$x = A(x), \tag{12.1}$$

где A — нелинейный положительный оператор.

Общие топологические методы, приспособленные к решению подобного рода задач, изложены в монографии М. А. Красносельского и П. П. Забрейко [1]. Эти методы основываются на понятии вращения положительного векторного поля $x - A(x)$. Большинство приложений охватываются двумя случаями, в одном из которых вращение равно 0, а в другом — равно 1. В основном далее мы и ограничиваемся ими, что позволяет дать простое изложение теории, базирующееся лишь на широко известном принципе неподвижной точки Шаудера (если оператор A вполне непрерывен) или его аналогах (принцип Тихонова для слабонепрерывных операторов и др.).

Описываемая далее техника опирается на изучение поведения оператора A на некоторых поверхностях, в частности, на пересечениях $S(r)$ сфер $S_r = \{x : \|x\| = r\}$ с конусом K. В конкретных же задачах для изучения обычно доступно поведение оператора A в окрестности нуля и на бесконечности. С этой точки зрения рассмотрение поверхностей $S(r)$ при достаточно малых или достаточно больших значениях $r>0$ представляется наиболее важным. Это соображение и определяет далее формулировки большинства теорем.

12.1. Индексы положительного оператора в нуле и на бесконечности. Мы ограничимся рассмотрением положительных вполне непрерывных операторов.

Два положительных вполне непрерывных оператора A_0 и A_1 называются *положительно гомотопными* на множестве $\Gamma\subset K$, если существует положительный вполне непрерывный (по совокупности переменных) оператор $H(x, \lambda)$ $(H:\Gamma\times[0, 1]\to K)$ такой, что

$$H(x, 0)=A_0(x), \quad H(x, 1)=A_1(x) \quad (x\in\Gamma), \tag{12.2}$$

причем $H(x, \lambda)\neq x$ при любых $x\in\Gamma$ и $\lambda\in[0, 1]$.

Легко видеть, что положительная гомотопность представляет собой отношение эквивалентности. Оператор $H(x, \lambda)$ будем называть *положительным гомотопическим мостом* между A_0 и A_1 или же *положительной гомотопией* от A_0 к A_1 (а иногда — просто гомотопией от A_0 к A_1, если из текста ясно, что речь идет о положительной гомотопии). Наконец, свойство $H(x, \lambda)\neq x$ будем называть невырожденностью гомотопии.

Пусть оператор A положителен и вполне непрерывен на конусе K. Пусть при достаточно малых значениях $r>0$ оператор A положительно гомотопен на множестве

$$S(r)=\{x: x\in K, \ \|x\|=r\}$$

оператору $H_0(x)\equiv\theta$. В этом случае будем говорить, что индекс оператора A в нуле равен 1 и писать $\operatorname{ind}(A, \theta)=1$. Индекс A положим равным нулю ($\operatorname{ind}(A, \theta)=0$), если при достаточно малых значениях $r>0$ оператор A положительно гомотопен на $S(r)$ оператору

$$H_r(x)\equiv rh_0 \quad (h_0\in K, \ \|h_0\|>1). \tag{12.3}$$

Заметим, что все операторы $H_\beta(x)\equiv\beta h_0$ $(\beta\geqslant r)$ на $S(r)$ положительно гомотопны друг другу.

Индексы оператора A на бесконечности определяются аналогично: $\operatorname{ind}(A, \infty)=1$, если при достаточно больших значениях $r>0$ оператор A положительно гомотопен на $S(r)$ оператору $H_0(x)\equiv\theta$; $\operatorname{ind}(A, \infty)=0$, если оператор A при достаточно больших $r>0$ положительно гомотопен на $S(r)$ оператору (12.3).

Точки θ и ∞ мы будем называть иногда *особыми точками* положительного оператора A.

Знание индексов часто позволяет судить о наличии у оператора A неподвижной точки, т. е. о существовании решения уравнения (12.1). Соответствующие теоремы и различные способы вычисления индексов изложены в следующих разделах. Здесь же мы укажем несколько простых результатов.

Теорема 12.1. *Пусть при достаточно малых (достаточно больших) по норме $x \in K$, $x \neq \theta$ положительный вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию*

$$A(x) \overline{\geqslant} x. \tag{12.4}$$

Тогда $\operatorname{ind}(A, \theta)=1$ $(\operatorname{ind}(A, \infty)=1)$.

Доказательство тривиально. Положительной гомотопией от A к $H_0(x) \equiv \theta$ может служить, например, $H(x, \lambda)=\lambda A(x)$. Свойство $\lambda A(x) \neq x$ $(\lambda \in [0, 1]$, $x \in S(r))$ вытекает из (12.4). ■

Теорема 12.2. *Пусть при достаточно малых (достаточно больших) по норме $x \in K$, $x \neq \theta$ положительный вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию*

$$A(x) \overline{\leqslant} x. \tag{12.5}$$

Тогда $\operatorname{ind}(A, \theta)=0$ $(\operatorname{ind}(A, \infty)=0)$.

Доказательство. Оператор A положительно гомотопен на $S(r)$ оператору $H_\beta(x) \equiv \beta h_0$, где β достаточно велико. Положительной гомотопией служит

$$H(x, \lambda)=\lambda A(x)+(1-\lambda)\beta h_0.$$

Свойство невырожденности вытекает из следующего рассуждения. Предположим противное. Тогда для любой последовательности $\beta_n \to \infty$ можно указать последовательности $x_n \in S(r)$ и $\lambda_n \in [0, 1]$ такие, что

$$x_n - \lambda_n A(x_n)=(1-\lambda_n)\beta_n h_0. \tag{12.6}$$

Но так как $x_n \in S(r)$ и оператор A вполне непрерывен, без ограничения общности можно считать $A(x_n) \to z$ (в противном случае можно перейти к сходящейся подпоследовательности). Отсюда вытекает ограниченность последовательности $x_n - \lambda_n A(x_n)$, а значит и $(1-\lambda_n)\beta_n h_0$, что, в свою очередь, позволяет считать $(1-\lambda_n)\beta_n \to \gamma \geqslant 0$, $\lambda_n \to 1$. Из (12.6) теперь следует, что последовательность x_n сходится к некоторому $x_0 \in S(r)$, причем $x_0 - A(x_0)=\gamma h_0$, т. е. $A(x_0) \leqslant x_0$. Но это противоречит (12.5). ■

Заметим, что свойство (12.2), полная непрерывность и положительность использованной в доказательстве гомотопии очевидны. Мы намеренно не задерживали на этом внимания. Подобную договоренность будем сохранять и впредь.

Если для элементов $x \in K$, $x \neq \theta$, достаточно малых по норме, выполняется (12.4), говорят, что точка θ *притягивающая*, в случае (12.5) — *отталкивающая*.

Условия (12.4), (12.5) удобны для практической проверки и позволяют эффективно использовать миноранты и мажоранты изучаемого оператора. В то же время эти условия могут быть существенно ослаблены без изменения выводов теорем. Проведенные доказательства по существу устанавливают справедливость следующих более общих результатов.

Теорема 12.3. *Пусть при достаточно малых (достаточно больших) по норме $x \in K$, $x \neq \theta$ положительный вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию: $A(x) \neq \lambda x$ при любом $\lambda \geqslant 1$. Тогда* $\operatorname{ind}(A, \theta) = 1$ $(\operatorname{ind}(A, \infty) = 1)$. ■

Теорема 12.4. *Пусть $h_0 \in K$ и $h_0 \neq \theta$. Пусть при достаточно малых (достаточно больших) по норме $x \in K$, $x \neq \theta$ положительный вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию: $x \neq A(x) + \mu h_0$ при любом $\mu \geqslant 0$. Тогда* $\operatorname{ind}(A, \theta) = 0$ $(\operatorname{ind}(A, \infty) = 0)$. ■

Если оператор A удовлетворяет условиям теоремы 12.4., то иногда говорят, что положительное векторное поле $x - A(x)$ на $S(r)$ *выпускает направление* h_0.

12.2. Существование положительных решений. Последующее изложение опирается на принцип неподвижной точки Шаудера (§ 11).

Теорема 12.5. *Пусть оператор A положителен и вполне непрерывен на конусе K и* $\operatorname{ind}(A, \infty) = 1$. *Тогда оператор A имеет неподвижную точку $x^* \in K$.*

Доказательство. Условие $\operatorname{ind}(A, \infty) = 1$ гарантирует существование положительной гомотопии $H(x, \lambda)$ на $S(R)$ (R — достаточно велико) от $A(x)$ к $H_0(x) \equiv \theta$. Пусть, для определенности, $H(x, 0) \equiv \theta$, $H(x, 1) = A(x)$. Введем в рассмотрение оператор (везде $x \in K$)

$$\widetilde{A}(x) = \begin{cases} A(x) & \text{если } \|x\| \leqslant R \\ \dfrac{\|x\|}{R} H\left(\dfrac{Rx}{\|x\|},\ 2 - \dfrac{\|x\|}{R}\right), & \text{если } R \leqslant \|x\| \leqslant 2R \\ \theta & , \text{ если } \|x\| \geqslant 2R \end{cases}$$

Очевидно, оператор $\widetilde{A}$ вполне непрерывен и преобразует конус K в свою компактную часть. Но тогда, в силу принципа Шаудера, $\widetilde{A}$ имеет неподвижную точку $x^* \in K$. Для завершения доказательства остается убедиться в том, что $\|x^*\| \leqslant R$. Возможность $\|x^*\| \geqslant 2R$ очевидным образом отпадает. Если же $R < \|x^*\| < 2R$, то $H(x_0, \lambda_0) = x_0$ $\left(\text{где } \lambda_0 = 2 - \frac{\|x^*\|}{R},\ x_0 = \frac{Rx^*}{\|x\|}\right)$, что противоречит определению гомотопии $H(x, \lambda)$. ■

Вывод теоремы 12.5 о существовании неподвижной точки у оператора A корректен в том смысле, что он остается в силе при малых возмущениях оператора A. Понять и уточнить этот факт позволяет следующее простое рассуждение. Операторы* A и B положительно гомотопны на $\Gamma \subset K$, если векторы $x - A(x)$ и $x - B(x)$ при любом $x \in \Gamma$ не направлены противоположно. В этом случае положительной гомотопией может служить $H(x, \lambda) = \lambda A(x) + (1 - \lambda) B(x)$. Условие непротивоположной направленности, в свою очередь, обеспечивается, например, справедливостью неравенств

$$\|A(x) - B(x)\| < \|x - A(x)\| \quad (x \in \Gamma). \tag{12.7}$$

Поэтому, если $\operatorname{ind}(A, \infty) = 1$ и при достаточно больших по норме $x \in K$ справедливо (12.7), то $\operatorname{ind}(B, \infty) = 1$ и по теореме 12.5 оператор B также имеет неподвижную точку.

Теорема 12.5 эффективна в приложениях в сочетании с различными способами вычисления индексов. Так как рассмотрение этих способов откладывается до следующих разделов, здесь мы имеем возможность отметить лишь простой результат, получающийся объединением теорем 12.1 и 12.5.

Теорема 12.6. *Пусть при достаточно больших по норме $x \in K$ положительный вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию (12.4). Тогда оператор A имеет на K неподвижную точку.* ■

Рассмотрим теперь вопрос о существовании положительных решений уравнения

$$x = A(x) + y. \tag{12.8}$$

Сравнение теорем 12.1, 12.5 показывает, что неравенства (12.4), (12.5) на одной и той же поверхности $S(r)$ несовместимы.

---

* Если не оговорено противное, рассматриваемые здесь операторы предполагаются положительными и вполне непрерывными.

Поэтому, например, из $A(x) \overline{\geqslant} x$ $(x \in S(r))$ вытекает существование такого $x_0 \in S(r)$, что $A(x_0) \leqslant x_0$, т. е. уравнение (12.8) в этом случае имеет положительное решение при некотором положительном y. Использование теоремы 12.4 позволяет в данном случае утверждать большее: при любом $y \geqslant \theta$, $y \neq \theta$ и некотором $\mu > 0$ уравнение $x = A(x) + \mu y$ имеет решение $x \in S(r)$. Естественно, положительную разрешимость уравнения (12.8) при любом $y \geqslant \theta$ можно гарантировать лишь в дополнительных предположениях.

Теорема 12.7. *Пусть* $\operatorname{ind}(A, \infty) = 1$ *и*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|x - A(x)\| = \infty. \tag{12.9}$$

Тогда уравнение (12.8) при любом $y \in K$ имеет положительное решение.

Доказательство. В силу (12.9) при достаточно больших по норме $x \in K$ для операторов A и $A + y$ будут выполняться неравенства (12.7). Поэтому при достаточно больших R операторы A и $A + y$ положительно гомотопны на $S(R)$. Следовательно, $\operatorname{ind}(A, \infty) = \operatorname{ind}(A + y, \infty) = 1$. Далее остается сослаться на теорему 12.5. ■

Если дополнительно известно, что уравнение $x = Ax + y$ при любом $y \in K$ не может иметь более одного решения, то в условиях теоремы 12.7 мы имеем возможность гарантировать положительную обратимость оператора $I - A$.

12.3. Ненулевые положительные решения. Довольно часто в приложениях уравнение (12.1) имеет нулевое решение, которое с содержательной точки зрения тривиально. И вопрос заключается в выяснении существования ненулевых (нетривиальных) решений. Естественно, теоремы предыдущего раздела в случае $A(\theta) = \theta$ не могут гарантировать существование у оператора A второй ненулевой неподвижной точки.

Теорема 12.8. *Пусть индексы в нуле и на бесконечности положительного вполне непрерывного оператора A определены и* $\operatorname{ind}(A, \theta) \neq \operatorname{ind}(A, \infty)$. *Тогда оператор A имеет на K ненулевую неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{ind}(A, \theta) = 0$, $\operatorname{ind}(A, \infty) = 1$. В силу $\operatorname{ind}(A, \theta) = 0$, существует положительная гомотопия $H(x, \lambda)$ на $S(r)$ ($r > 0$ — достаточно мало), связывающая $A(x)$ и $H(x, 0) = rh_0$ ($\|h_0\| > 1$). Введем в рассмотрение оператор (везде $x \in K$)

$$\widetilde{A}(x)=\begin{cases}\dfrac{r}{2}h_0 & \text{если } \|x\|\leqslant\dfrac{r}{2}\\ \dfrac{\|x\|}{r}H\left(\dfrac{rx}{\|x\|},\ \dfrac{2\|x\|}{r}-1\right), & \text{если } \dfrac{r}{2}\leqslant\|x\|\leqslant r\\ A(x) & \text{если } \|x\|\geqslant r\end{cases}$$

Так как $\widetilde{A}(x)=A(x)$ при достаточно больших по норме $x\in K$,— $\operatorname{ind}(\widetilde{A},\infty)=\operatorname{ind}(A,\infty)=1$,— и по теореме 12.5 существует неподвижная точка $x^*\in K$ оператора $\widetilde{A}$. Остается показать, что $\|x^*\|\geqslant r$. Возможность $\|x^*\|\leqslant\dfrac{r}{2}$ заведомо исключена. Если же $\dfrac{r}{2}<\|x^*\|<r$, то $H(x_0,\lambda_0)=x_0$ $\left(\text{где } \lambda_0=\dfrac{2\|x^*\|}{r}-1,\ x_0=\dfrac{rx^*}{\|x^*\|}\right)$, что противоречит определению гомотопии $H(x,\lambda)$.

Рассмотрим теперь другой возможный вариант $\operatorname{ind}(A,\theta)=1$, $\operatorname{ind}(A,\infty)=0$. Он легко сводится к предыдущему с помощью перехода к оператору

$$F(x)=\|x\|^2A(x/\|x\|^2),\quad (x\in K,\ x\neq\theta),$$

так как $\operatorname{ind}(F,\theta)=0$, $\operatorname{ind}(F,\infty)=1$. Действительно, пусть $\alpha>0$ — достаточно мало. Положим $r=\alpha$, $R=\dfrac{1}{\alpha}$. Пусть $H_1(x,\lambda)$ — положительная гомотопия на $S(r)$ от $A(x)$ к $H_0(x)\equiv\theta$, $H_2(x,\lambda)$ — положительная гомотопия на $S(R)$ от $A(x)$ к $H_R(x)\equiv Rh_0$ ($h_0\in K$, $\|h_0\|>1$). Тогда $\|x\|^2H_1(x/\|x\|^2,\lambda)$ будет положительной гомотопией на $S(R)$ от F к H_0, а $\|x\|^2H_2(x/\|x\|^2,\lambda)$ — положительной гомотопией на $S(r)$ от F к H_r. Итак, F имеет ненулевую неподвижную точку $x_0\in K$. Тогда $x^*=x_0/\|x_0\|^2$ — неподвижная точка оператора A. ■

Назовем положительный оператор A *сжатием конуса*, если $A(x)\overline{\leqslant}x$ для $x\in K$ $(x\neq\theta)$ достаточно малых по норме и $A(x)\overline{\geqslant}x$ для $x\in K$ достаточно больших по норме. Если же, наоборот, $A(x)\overline{\geqslant}x$ на элементах $x\in K$ $(x\neq\theta)$ малой нормы и $A(x)\overline{\leqslant}x$ на элементах $x\in K$ большой нормы,— оператор A будем называть *растяжением конуса*. Из только что доказанной теоремы и теорем 12.1, 12.2 вытекает

Теорема 12.9. *Пусть положительный вполне непрерывный оператор A является сжатием или растяжением конуса K. Тог-*

да A на K имеет по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку. ∎

Обратим внимание, что здесь, а также в предыдущей теореме, оператор A может быть определен лишь на ненулевых элементах конуса.

12.4. Примеры. Рассмотрим уравнение $x=A(x)$ с интегральным оператором Гаммерштейна

$$A(x) = \int\limits_{\Omega} Q(t, s)\, f[s, x(s)]\, ds, \tag{12.10}$$

действующим в пространстве C непрерывных функций, заданных на компакте Ω.

Везде далее предполагается, что ядро $Q(t, s)$ и нелинейная функция $f(s, u)$ непрерывны по совокупности переменных и неотрицательны. В этих предположениях, очевидно, оператор A вполне непрерывен и положителен на конусе K неотрицательных функций из C.

Остановимся сначала на более простом случае, когда $Q(t, s)$ строго положительно и $f(s, u)>0$ при $u>0$.

Пусть $f(s, u)\leqslant\alpha u$ при всех $s\in\Omega$ и достаточно малых $u>0$, где $\alpha\rho(Q)<1$, $\rho(Q)$ — спектральный радиус линейного оператора

$$Qx=\int\limits_{\Omega} Q(t, s)\, x(s)\, ds. \tag{12.11}$$

Легко видеть, что тогда $\operatorname{ind}(A, \theta)=1$. Действительно, из $f(s, u)\leqslant\alpha u$ вытекает $A(x)\leqslant\alpha Q(x)$ (при достаточно малых по норме $x\in K$; $\|x\|=\max\limits_{t\in\Omega}|x(t)|$) По предположению спектральный радиус оператора αQ меньше поэтому $\alpha Q(x)\overline{\geqslant}x$ (в противном случае из теоремы 3.2 следовало бы $\alpha\rho(Q)\geqslant 1$) и тем более $A(x)\overline{\geqslant}x$, что дает возможность завершить рассуждение применением теоремы 12.1.

Пусть теперь $f(s, u)\leqslant\alpha u+\beta$ при всех $s\in\Omega$ и при всех $u>0$; $\beta\geqslant 0$, $\alpha\rho(Q)<1$. В этом случае $\operatorname{ind}(A, \infty)=1$, и теорема 12.5 гарантирует существование положительного решения (12.10). Очевидно, $A(x)\leqslant\alpha Qx+z_0$, где $z_0=\beta\int\limits_{\Omega} Q(t, s)\, ds$, причем z_0 — внутренний элемент конуса K, так как $Q(t, s)>0$. При достаточно больших по норме $x\in K$ будет $\alpha Qx+z_0\overline{\geqslant}x$. В противном случае нашелся бы элемент $x_0\in K$ такой, что $\alpha Qx_0+z_0\geqslant x_0$. Но тогда $\alpha Q\tau x_0\geqslant\tau x_0$ при достаточно больших $\tau>0$ — и теорема 3.2 дает противоречие $\alpha\rho(Q)\geqslant 1$. Таким образом, снова $A(x)\overline{\geqslant} x$, но теперь для достаточно больших по норме $x\in K$.

В приведенных выше рассуждениях желаемое противоречие мы получали с помощью теоремы 3.2 об оценке снизу спектрального радиуса линейного оператора. Аналогичными рассуждениями, опирающимися на теорему 3.3 об оценке спектрального радиуса сверху, легко устанавливается справедливость следующих результатов:

Пусть $f(s, u)\geqslant\gamma u$ при всех $s\in\Omega$ и достаточно малых $u>0$, причем $\gamma\rho(Q)>1$. Тогда $\operatorname{ind}(A, \theta)=0$.

Пусть $f(s, u)\geqslant\gamma u-\xi$ при всех $s\in\Omega$ и при всех $u>0$; причем $\xi\geqslant 0$, $\gamma\rho(Q)>1$. Тогда $\operatorname{ind}(A, \infty)=0$.

Комбинируя приведенные выше утверждения и используя теорему 12.8, можно получить две различные по характеру теоремы (соответствующие ситуациям сжатия и растяжения конуса), которые гарантируют существование ненулевого решения уравнения $x=A(x)$. Их формулировку предоставляем читателю.

Отказ от предположения о строгой положительности $Q(t, s)$ усложняет задачу, особенно в том случае, когда необходимо установить равенство индекса нулю. И лишь в случае

$$f(s, u)\leqslant\alpha_u,\ \alpha\rho(Q)<1\Rightarrow\operatorname{ind}(A, \theta)=1$$

прежняя схема рассуждений работает без изменений.

Итак, пусть $Q(t, s)\geqslant 0$. Предположим, что линейный оператор $Q^*x=\int\limits_\Omega Q(s, t)\,x(s)\,ds$ имеет собственный вектор $h_0\in K$, $\|h_0\|=1$, которому отвечает собственное значение $\lambda_0>0$, и

$$h_0(t)\geqslant\varkappa\max_{s\in\Omega}Q(s, t),\ t\in\Omega,\ \varkappa>0. \qquad (12.12)$$

Условие (12.12) заведомо выполняется, если $Q(t, s)>0$, а также в других естественных случаях.

Пусть $f(s, u)\geqslant\gamma u-\xi$ при всех $u>0$ и $s\in\Omega$, причем $\gamma\lambda_0>1$, $\xi\geqslant 0$. Покажем, что $\operatorname{ind}(A, \infty)=0$.

Установим положительную гомотопность на бесконечности операторов A и γQ. Положительной гомотопией может служить $H(x, \tau)=\tau A(x)+(1-\tau)\gamma Qx$. В доказательстве нуждается свойство невырожденности.

Пусть $x=H(x, \tau)$, т. е.

$$x(t)=\int\limits_\Omega Q(t, s)\{\tau f[s, x(s)]+(1-\tau)\gamma x(s)\}\,ds. \qquad (12.13)$$

Умножая (12.13) на $h_0(t)$ и интегрируя по Ω, а также используя неравенство $f(s, u) \geqslant \gamma u - \xi$, получаем

$$\int_\Omega x(t) h_0(t)\, dt \geqslant \gamma\lambda_0 \int_\Omega x(t) h_0(t)\, dt - \xi\lambda_0 \operatorname{mes} \Omega,$$

откуда

$$\int_\Omega x(t) h_0(t)\, dt \leqslant \frac{\xi\lambda_0 \operatorname{mes} \Omega}{\gamma\lambda_0 - 1}.$$

С другой стороны, обозначая $\tau f[s, x(s)] + (1 - \tau)\gamma x(s)$ через $z(s)$ и используя (12.12), имеем

$$\int_\Omega x(t) h_0(t)\, dt = \int_\Omega \int_\Omega Q(t, s) z(s) h_0(t)\, ds\, dt = \lambda_0 \int_\Omega z(s) h_0(s)\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_0 \varkappa \int_\Omega z(s) \max_{t \in \Omega} Q(t, s)\, ds \geqslant \lambda_0 \varkappa \left\| \int_\Omega Q(t, s) z(s)\, ds \right\| = \lambda_0 \varkappa \| x \|.$$

Таким образом, получаем оценку

$$\| x \| \leqslant \frac{\xi \operatorname{mes} \Omega}{\varkappa(\gamma\lambda_0 - 1)}$$

Следовательно, при достаточно больших по норме $x \in K$, гомотопия $H(x, \lambda)$ невырожденна, и A гомотопен γQ.

Остается доказать равенство $\operatorname{ind}(\gamma Q, \infty) = 0$. Оно вытекает из того, что положительное векторное поле $\gamma Q x$ выпускает направление h_0. В предположении противного нашлись бы элемент $x \in K$ и константа $\mu > 0$ такие, что

$$x(t) - \gamma \int_\Omega Q(t, s) x(s)\, ds = \mu h_0(t).$$

Но тогда легко приходим к противоречию

$$\mu \int_\Omega h_0^2(t)\, dt = (1 - \gamma\lambda_0) \int_\Omega x(t) h_0(t)\, dt < 0.$$

Этим доказательство завершается.

Обратим внимание, что в случае строгой положительности ядра $Q(t, s)$, мы не только определили индексы оператора A, но и указали по существу условия, при которых оператор A сжимает или растягивает конус. Тот факт, что изучаемый оператор сжимает или растягивает конус, иногда непосредственно вытекает из содержательных предпосылок задачи. Вот соответствующий пример.

Пусть $x_i \geqslant 0$ обозначает численность популяции i-го биологического вида. Всего в системе n видов. Динамика описывается системой дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= g_1(x_1, \ldots, x_n) \\ & \ldots \\ \dot{x}_n &= g_n(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\}, \tag{12.14}$$

или в векторном виде $\dot{x} = G(x)$.

Из очевидных соображений следует, что в системе существует тривиальное нулевое положение равновесия ($G(0)=0$), — и вопрос заключается в существовании ненулевого, естественно, положительного равновесия (будем считать, что в R^n в качестве конуса выделен неотрицательный ортант R^n_+).

Допустим, что $G(x)$ удовлетворяет неким „хорошим" условиям, обеспечивающим существование, единственность и нелокальную продолжимость решений (12.14). Пусть U_t обозначает оператор сдвига по траекториям (12.14). Естественно, U_t положителен, так как численность любого вида не может стать отрицательной.

Разумно считать, что при достаточно малой суммарной численности видов (т. е. при любом достаточно малом по норме $x \neq 0$) численность хотя бы одного вида возрастает (т. е. $g_i(x) > 0$ для некоторого i). И, наоборот, при достаточно большой суммарной численности видов (т. е. при любом достаточно большом по норме $x \in R^n_+$) численность хотя бы одного вида убывает (т. е. $g_i(x) < 0$ для некоторого i). Эти предположения правдоподобно выглядят в случае ограниченности площади обитания и других благ. При малой суммарной численности блага в избытке — и процессы размножения преобладают над процессами гибели, при большой же суммарной численности благ не хватает — и наблюдается обратная картина.

Легко видеть, что в указанных предположениях оператор U_t, по крайней мере при достаточно малых $t > 0$, сжимает конус R^n_+. Покажем, что отсюда вытекает существование у системы ненулевого равновесия.

Пусть $t_k \to 0$ ($t_k > 0$). Тогда при достаточно больших k операторы U_{t_k} будут сжимать конус R^n_+. По теореме 12.9 каждый сжимающий конус оператор U_{t_k} имеет неподвижную точку x^k. Поскольку $0 < r \leqslant \|x_k\| \leqslant R < \infty$, без ограничения общности можно считать $x^k \to x^*$. Точка x^* и есть искомое положение равновесия.

Действительно, $U_t x^k \to U_t x^*$ при любом $t \geqslant 0$. С другой стороны, при любом $t \geqslant 0$

$$U_t x^k = U_{\tau_k} x^k \to x^*,$$

где $\tau_k = t - mt_k$, причем целое m выбрано так, что $0 \leqslant \tau_k \leqslant t_k$. Таким образом, $U_t x^* = x^*$ при любом $t \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Заметим, что в равновесии $G(x^*) = 0$. Поэтому с самого начала можно было бы не переходить на язык операторов сдвига по траекториям (12.14), а изучать существование неподвижной точки у оператора $x + \alpha G(x)$. Теоремой о сжатии конуса можно обойтись и в этом случае, если существует $\alpha > 0$, при котором оператор $x + \alpha G(x)$ положителен.

12.5. Вращение положительного поля. Как уже отмечалось в начале параграфа возможен более общий подход к изучению особых точек положительных векторных полей $I - A$. За детальной информацией отсылаем читателя к упоминавшемуся источнику, здесь же остановимся лишь на некоторых принципиальных моментах.

Пусть $\Omega(K)$ обозначает некоторую ограниченную область в конусе $K \subset E$ (т. е. $\Omega(K)$ открыто в K, но не обязательно в E). Для любой области $\Omega(K)$ в конусе K можно указать такую область $\Omega \subset E$, что

$$\Omega \cap K = \Omega(K), \quad \dot{\Omega} \cap K = \dot{\Omega}(K). \tag{12.15}$$

Пусть теперь невырожденное положительное вполне непрерывное векторное поле $I - A$ определено на границе $\dot{\Omega}(K)$ области $\Omega(K) \subset K$. Продолжим оператор A с сохранением положительности и полной непрерывности на границу $\dot{\Omega}$ области $\Omega \subset E$, удовлетворяющей условиям (12.15), за продолженным оператором сохраним прежнее обозначение A. Вращение $\gamma(I - A, \dot{\Omega})$ назовем вращением положительного поля $I - A$ на $\dot{\Omega}(K)$ и обозначим его через $\gamma[I - A, \dot{\Omega}(K)]$. Конечно, такое определение требует обоснования своей корректности (возможность указанного продолжения, независимость от Ω и от продолжения), но это делается достаточно легко.

В чем же заключаются преимущества понятия вращения положительного поля по сравнению с обычным понятием вращения? Ведь по первому впечатлению его использование сопряжено с необходимостью выполнения дополнительных операций: продолжение области, затем продолжение оператора, — тогда как положительное поле $I-A$ с самого начала можно рассматривать как обычное и ограничиваться вычислением его обычного вращения. Но это лишь первое впечатление.

1. Конус может быть не телесным. Кстати, это не экзотика, а широко распространенная ситуация. Телесными не являются, например, конусы неотрицательных функций в пространствах L_p. В этом случае обычное вращение $I-A$ на границе $\Omega(K)$ вообще не определено.

2. Продолжения области и оператора нужны лишь при построении общей теории. Конечные же, рабочие теоремы о неподвижных точках здесь опираются на стандартные приемы гомотопических переходов.

3 Использование понятия вращения положительного поля освобождает от необходимости делать гомотопические переходы на границе конуса.

§ 13. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДЕКСОВ

13.1. Индексы производных по конусу. Так как индексы $\operatorname{ind}(A, \theta)$ и $\operatorname{ind}(A, \infty)$ не меняются при малых возмущениях оператора A (см. § 12), можно ожидать, что в естественных предположениях они совпадают с индексами $\operatorname{ind}(A'(\theta), \theta)$ и $\operatorname{ind}(A'(\infty), \infty)$, где $A'(\theta)$ и $A'(\infty)$ — производные по конусу оператора A, соответственно, в нуле и на бесконечности. Детализацией этого соображения мы и займемся. Начнем с изучения индексов линейного оператора.

Теорема 13 1. *Пусть у линейного положительного вполне непрерывного оператора B нет в конусе K собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\lambda \geqslant 1$ Тогда* $\operatorname{ind}(B, \theta) = \operatorname{ind}(B, \infty) = 1$.

Для доказательства достаточно сослаться на теорему 12.3. ■

В частности, из теоремы 13.1 следует $\operatorname{ind}(B, \theta) = \operatorname{ind}(B, \infty) = 1$, если спектральный радиус $\rho(B) < 1$.

Теорема 13.2. *Пусть у линейного положительного вполне непрерывного оператора B есть в конусе K собственный вектор x_0 ($\|x_0\| = 1$), отвечающий собственному значению $\lambda_0 > 1$, и нет собственных векторов (в конусе K), отвечающих собственному значению 1. Тогда* $\operatorname{ind}(B, \theta) = \operatorname{ind}(B, \infty) = 0$.

Доказательство. Покажем, что положительное векторное поле $x - Bx$ выпускает направление x_0. Предположим противное, т. е. $x - Bx = \mu x_0$ для некоторых $x \in S(r)$ и $\mu \geq 0$. Тогда $z = x + \frac{\mu}{\lambda_0 - 1} x_0$ будет неподвижной точкой оператора B, что противоречит предположению об отсутствии у B собственных векторов, отвечающих собственному значению 1. Окончательный вывод теперь следует из теоремы 12.4. ■

Теоремы 13.1, 13.2 показывают, что индексы линейного положительного вполне непрерывного оператора B всегда определены, если θ — изолированная в K неподвижная точка оператора B. Подчеркнем, что изолированность θ требуется лишь в конусе K, а не в пространстве E. В частности, индекс положительного оператора B может быть определен, даже если оператор $I - B$ (действующий в E) вырожден.

Рассмотрим теперь положительный вполне непрерывный и дифференцируемый по конусу K оператор A. Ниже мы будем предполагать, что операторы $A'(\theta)$ и $A'(\infty)$ также положительны и вполне непрерывны. Что касается предположения о положительности $A'(\theta)$ и $A'(\infty)$, то оно по существу излишне. Положительность $A'(\infty)$ автоматически вытекает из положительности A, а положительность $A'(\theta)$ вытекает из положительности A и дополнительного предположения $A(\theta) = \theta$. В свою очередь условие $A(\theta) = \theta$ далее обычно подразумевается, так как случай $A(\theta) \neq \theta$ тривиален (сразу очевидно $\operatorname{ind}(A, \theta) = 0$). Наконец, полная непрерывность $A'(\theta)$ и $A'(\infty)$ следует из полной непрерывности A, если, например, конус K воспроизводящий.

Теорема 13.3. *Пусть положительный вполне непрерывный оператор A ($A(\theta) = \theta$) дифференцируем в нуле, оператор $A'(\theta)$ также вполне непрерывен и не имеет в конусе K собственных векторов, отвечающих собственному значению* 1. *Тогда θ — изолированная неподвижная точка оператора A и* $\operatorname{ind}(A, \theta) = \operatorname{ind}(A'(\theta), \theta)$.

Доказательство. Из полной непрерывности $A'(\theta)$ и отсутствия у оператора $A'(\theta)$ в конусе K собственных векторов, отвечающих собственному значению 1, следует

$$\sup_{x \in S(r)} \| x - A'(\theta) x \| \geq r\alpha,$$

где $\alpha > 0$. Из определения же производной $A'(\theta)$ имеем $\| A(x) - A'(\theta) x \| = o(\| x \|)$. В конечном итоге это обеспечивает справедливость неравенств $\| A(x) - A'(\theta) x \| < \| x - A'(\theta) x \|$ для $x \in S(r)$ при достаточно малых $r > 0$. Эти неравенства имеют вид (12.7) и гарантируют непротивоположную направленность векторов $x - A(x)$ и $x - A'(\theta)x$ при достаточно малых по норме $x \in K$, $x \neq \theta$. ■

Совершенно аналогично доказывается

Теорема 13.4. *Пусть положительный вполне непрерывный оператор A дифференцируем на бесконечности, оператор $A'(\infty)$ также вполне непрерывен и не имеет в конусе K собственных векторов, отвечающих собственному значению 1. Тогда оператор A не имеет неподвижных точек с достаточно большой нормой и* $\operatorname{ind}(A, \infty) = \operatorname{ind}(A'(\infty), \infty)$. ■

В конкретных задачах последние две теоремы естественно должны использоваться совместно с двумя первыми, а также теоремами существования 12.5, 12.8. На формулировках возможных здесь комбинаций мы не останавливаемся.

Обратим внимание, что приведенные теоремы свидетельствуют о достаточной широте класса операторов, для которых определены индексы в смысле, оговоренном в разделе 12.1. Конечно, вполне непрерывно дифференцируемые операторы, производные которых не имеют в K собственных векторов, отвечающих собственному значению 1, не исчерпывают этого класса.

13.2. Миноранты и мажоранты. Если $A_1(x) \leqslant A_2(x)$ для $x \in K$, то говорят, что A_1 — *миноранта* оператора A_2, а A_2 — *мажоранта* оператора A_1. Если неравенства $A_1(x) \leqslant A_2(x)$ выполняются для $x \in K$, достаточно малых по норме, говорят, что $A_1(A_2)$ миноранта (мажоранта) оператора $A_2(A_1)$ в нуле. Аналогично определяются миноранты и мажоранты на бесконечности.

Пусть A^- — миноранта оператора A в нуле, A^+ — мажоранта A на бесконечности. Пусть $A^-(x) \overline{\leqslant} x$ для достаточно малых по норме $x \in K$, $x \neq \theta$ и $A^+(x) \overline{\geqslant} x$ для достаточно больших по норме $x \in K$ В этом случае, очевидно, оператор A является сжатием конуса и по теоремам 12.1, 12.2 можно вычислить его индексы (напомним, что изучаемый оператор A предполагается положительным и вполне непрерывным; наличие соответствующих свойств у A^- и A^+ здесь не обязательно). Таким же образом можно устанавливать, что оператор A — растяжение конуса. Подобные соображения, тривиальные по существу, но часто полезные, не исчерпывают возможностей применения минорант и мажорант.

Теорема 13.5. *Пусть θ — изолированная в конусе K неподвижная точка положительного вполне непрерывного оператора A и при достаточно малых по норме $x \in K$*

$$A(x) \geqslant Bx, \tag{13.1}$$

где B — линейный положительный оператор, имеющий позитивное собственное значение $\lambda_0 \geqslant 1$. Тогда* $\operatorname{ind}(A, \theta) = 0$.

Обратим внимание, что при условии $B = A'(\theta)$ мы не только охватываем вырожденный случай ($\lambda_0 = 1$), но и дополняем утверждение теоремы 13.2, так как полная непрерывность B здесь не предполагается. Заметим также, что не предполагается и непрерывность B. Перейдем к доказательству.

Пусть $Bh_0 = \lambda_0 h_0$, $h_0 \in K$, $\|h_0\| > 1$. Покажем, что при достаточно малых $r > 0$ оператор A положительно гомотопен на $S(r)$ оператору $A + \beta h_0$, где β достаточно велико. Проверим невырожденность гомотопии $H(x, t) = A(x) + t\beta h_0$. Предположим противное. Тогда существуют такие $x_0 \in S(r)$ и $t_0 \in [0, 1]$, что

$$x_0 = A(x_0) + t_0 \beta h_0,$$

причем $t_0 = 0$ заведомо исключается, поскольку неподвижная точка θ оператора A изолирована. В силу (13.1)

$$x_0 \geqslant Bx_0 + t\beta h_0, \tag{13.2}$$

откуда $x_0 \geqslant t_0 \beta h_0$ $(t_0 \beta = \mu > 0)$. Обозначим через μ^* максимальное число $\mu > 0$, удовлетворяющее неравенству $x_0 \geqslant \mu h_0$. Из $x_0 \geqslant \mu^* h^0$ и (13.2) получаем

$$x_0 \geqslant B\mu^* h_0 + \mu h_0 = (\mu^* \lambda_0 + \mu) h_0,$$

что противоречит определению μ^*

Итак, при достаточно больших β оператор A положительно гомотопен на $S(r)$ оператору $A + \beta h_0$. Покажем теперь положительную гомотопность $A + \beta h_0$ и βh_0. Гомотопией может служить $tA(x) + \beta h_0$. Ее невырожденность очевидна. В предположении противного найдутся последовательности $\beta_n \to \infty$, $x_n \in S(r)$, $t_n \in [0, 1]$ такие, что

$$x_n = t_n A(x_n) + \beta_n h_0.$$

Но это повлечет за собой неограниченность по норме последовательности $x_n - t_n A(x_n)$, что невозможно, так как $x_n \in S(r)$ и оператор A вполне непрерывен. ■

Если $r > 0$ считать достаточно большим, то приведенное выше доказательство без каких бы то ни было дополнительных изменений устанавливает справедливость следующего результата.

---

* Напомним, что положительное собственное значение λ_0 называется позитивным, если ему отвечает собственный вектор $x_0 \in K$.

Теорема 13.6. *Пусть у положительного вполне непрерывного оператора A нет неподвижных элементов с достаточно большой нормой и есть на бесконечности линейная положительная миноранта B. Пусть оператор B имеет позитивное собственное значение* $\lambda_0 \geqslant 1$. Тогда $\operatorname{ind}(A, \infty) = 0$. ■

Естественной здесь представляется попытка обобщения теорем 13.5, 13.6 на случай, когда предположение о существовании у линейной миноранты B позитивного собственного значения заменяется требованием $\rho(B) \geqslant 1$. Без дополнительных предположений такая замена, конечно, невозможна. Она допустима, если, например, оператор B вполне непрерывен, а конус K нормальный и воспроизводящий (простая уловка здесь состоит в том, что перечисленные требования обеспечивают (см. § 3) принадлежность $\rho(B)$ позитивному спектру оператора B — и все снова сводится к теореме 13.5 или 13.6). Эта замена возможна также в том случае, когда оператор B неразложим и удовлетворяет условиям теоремы 3.4. В таких предположениях из $Bx_0 \leqslant x_0$ $(x_0 \neq \theta)$ вытекает строгая оценка $\rho(B) < 1$, противоречащая $\rho(B) \geqslant 1$. Поэтому $Bx \overline{\geqslant} x$ и тем более $Ax \overline{\leqslant} x$, откуда (теорема 12.2) $\operatorname{ind}(A, \theta) = 0$ $(\operatorname{ind}(A, \infty) = 0)$.

Перейдем к рассмотрению возможностей использования линейных мажорант.

Теорема 13.7. *Пусть θ — изолированная в конусе K неподвижная точка положительного вполне непрерывного оператора A и при достаточно малых по норме $x \in K$*

$$A(x) \leqslant Bx, \tag{13.3}$$

где B — линейный положительный оператор со спектральным радиусом $\rho(B) \leqslant 1$. *Тогда* $\operatorname{ind}(A, \theta) = 1$.

Доказательство. Покажем положительную гомотопность на $S(r)$ ($r > 0$ достаточно мало) операторов A и $H_0(x) \equiv \theta$. Гомотопией может служить $H(x, t) = tA(x)$. В предположении противного найдутся $x_0 \in S(r)$ и $t_0 \in (0, 1)$ такие, что $t_0 A(x_0) = x_0$. Но тогда $Bx_0 \geqslant \geqslant \frac{1}{t_0} x_0$ и из теоремы 3.2 вытекает оценка $\rho(B) \geqslant \frac{1}{t_0} > 1$, противоречащая $\rho(B) \leqslant 1$. ■

Теорема 13.8. *Пусть у положительного вполне непрерывного оператора A нет неподвижных элементов с достаточно большой нормой и есть на бесконечности линейная положительная мажоранта B. Пусть* $\rho(B) \leqslant 1$. *Тогда* $\operatorname{ind}(A, \infty) = 1$.

Доказательство аналогично предыдущему. ■

Приведенные теоремы отличает по характеру от теорем предыдущего раздела одна существенная деталь. Если изолированность особых точек θ и ∞ в теоремах 13.3, 13.4 относится к выводам, то в теоремах 13.5 — 13.8 — это одно из предположений. Конечно, в тех случаях, когда индексы изучаются лишь с целью установления существования у оператора A ненулевых неподвижных точек, подобное предположение практически „безвредно“ (или ненулевые неподвижные точки есть — и задача решена, или их нет — и тогда особые точки заведомо „изолированы“, что дает возможность двигаться дальше, применяя соответствующие теоремы о вычислении индексов).

13.3. Существование периодических колебаний. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1(t, x_n) - p_1(t)\, x_1, \\ \dot{x}_2 = p_1(t)\, x_1 - p_2(t)\, x_2, \\ \dot{x}_3 = p_2(t)\, x_2 - p_3(t)\, x_3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n = p_{n-1}(t)\, x_{n-1} - v_n(t, x_n), \end{cases} \tag{13.4}$$

предполагая, что все функции $p_1(t), \ldots, p_{n-1}(t)$, $v_1(t, x_n)$, $v_n(t, x_n)$ непрерывны и периодичны по времени t с общим периодом ω (что не исключает случая, когда некоторые из этих функций не зависят от t), а решения (13.4) нелокально продолжимы. Далее предполагается также, что функции $p_i(t)$ положительны при всех t и $v_1(t, x_n) \geqslant 0$ при $x_n \geqslant 0$.

Теорема 13.9. *Пусть выполняются неравенства*

$$v_1(t, x_n) \leqslant M, \quad v_n(t, x_n) \geqslant a x_n - b \tag{13.5}$$

при некоторых положительных константах M, a, b и всех $t \geqslant 0$ и $x_n \geqslant 0$. Тогда система (13.4) имеет неотрицательное ω-периодическое решение.

Доказательство. Перепишем систему (13.4) в виде

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\, x + f(t, x), \tag{13.6}$$

где $f(t, x) = \{v_1(t, x_n),\ 0, \ldots, 0,\ v_n(t, x_n)\}$.

* Система (13.4) возникает при изучении ферментативных реакций с обратной связью. Пример и его анализ заимствованы из работы Р. Мустафокулова, Ю. В. Покорного, Сб. работ по вычислит. математике и теоретич. кибернетике, вып. 13, Изд. ВГУ, 1974.

Пусть U обозначает оператор сдвига по траекториям (13.6) за время ω. Из внедиагональной положительности (§ 3) правой части (13.6) вытекает положительность U (на конусе R^n_+).

В силу непрерывности и положительности функций $p_i(t)$ существуют положительные константы α, β такие, что

$$\alpha < p_i(t) < \beta \quad (0 \leqslant t \leqslant \omega, \; i = 1, \dots, n-1).$$

Это в совокупности с неравенствами (13.5) гарантирует наличие мажоранты у правой части (13.6)

$$P(t)x + f(t, x) \leqslant Bx + h, \quad (x \in R^n_+),$$

где

$$B = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ \beta & -\alpha & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\alpha \quad 0 & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 \quad \beta & -\alpha \end{bmatrix}, \quad h = \{M, 0, \dots, 0, b_i\}.$$

Это, в свою очередь, означает (в силу теорем о дифференциальных неравенствах), что оператор сдвига V за время ω вдоль траекторий системы

$$\frac{dx}{dt} = Bx + h$$

является мажорантой оператора U. Причем асимптотическая производная $V'(\infty)$ оператора V является оператором сдвига вдоль траекторий системы

$$\frac{dx}{dt} = Bx.$$

Поскольку матрица B гурвицева (весь спектр лежит в левой открытой полуплоскости), то спектральный радиус $\rho[V'(\infty)]$ меньше единицы. Поэтому (см. теоремы 13.8 и 12.5) оператор U имеет неотрицательную неподвижную точку. Для завершения доказательства остается сослаться на принцип Пуанкаре существования периодического режима (§ 2). ■

Теорема 13.10. *Пусть в дополнение к предположениям теоремы 13.. выполняется неравенство*

$$v_n(t, x_n) \leqslant 0 \tag{13.7}$$

при достаточно малых $x_n \geqslant 0$. Тогда система (13.4) имеет нетривиальное ω-периодическое неотрицательное решение.

В силу (13.5), (13.7) при достаточно малых по норме $x \geqslant 0$ правая часть системы (13.6) имеет миноранту

$$P(t)x + f(t, x) \geqslant Cx,$$

где

$$C = \begin{bmatrix} -\beta & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \alpha & -\beta & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \quad \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Поэтому оператор сдвига W вдоль траекторий системы

$$\frac{dx}{dt} = Cx$$

является минорантой оператора U при достаточно малых по норме $x \geqslant 0$.

Легко видеть, что $\rho(W) = 1$. Далее остается сослаться на теорему 13.5, после чего использовать теорему 12.8. ■

13.4. Монотонные миноранты. В качестве минорант используются не только линейные операторы.

Теорема 13.11. *Пусть положительный и вполне непрерывный оператор A не имеет в конусе K ненулевых неподвижных точек с малыми нормами. Пусть на элементах малой нормы оператор A имеет монотонную вполне непрерывную миноранту Cx, т. е.*

$$A(x) \geqslant C(x), \tag{13.8}$$

причем

$$C(th_0) \geqslant th_0 \tag{13.9}$$

при достаточно малых $t > 0$ и некотором ненулевом $h_0 \in K$. Тогда $\operatorname{ind}(A, \theta) = 0$.

Доказательство. В случае $A(\theta) \neq 0$ утверждение теоремы тривиально. Положим $A(\theta) = \theta$. Из непрерывности C в нуле следует положительная гомотопность на $S(r)$ при малых $r > 0$ операторов $A_0(x) \equiv h_0$ и $A_1(x) \equiv A(x) + h_0$. Покажем теперь, что A_1 на $S(r)$ при достаточно малых $r > 0$ положительно гомотопен исходному оператору A, причем гомотопией может служить

$$H(x, \tau) = A(x) + \tau h_0.$$

В предположении противного найдется последовательность $x_n \in K$ такая, что $\|x_n\| \to 0$ и

$$x_n = A(x_n) + \tau_n h_0, \quad \tau_n > 0. \tag{13.10}$$

Поскольку из (13.10) следует $x_n \geqslant \tau_n h_0$, то существуют числа t_n максимальные в неравенствах $x_n \geqslant th_0$, причем $t_n > 0$ и $t_n \to 0$. Но тогда в силу (13.9) можно считать $C(t_n h_0) \geqslant t_n h_0$. Учитывая теперь монотонность оператора C и условия (13.9), (13.10), получим

$$x_n = A(x_n) + \tau_n h_0 \geqslant C(x_n) + \tau_n h_0 \geqslant$$
$$\geqslant C(t_n h_0) + \tau_n h_0 \geqslant (t_n + \tau_n) h_0,$$

что противоречит определению чисел t_n. ■

При попытке переноса этого результата на оценку $\operatorname{ind}(A, \infty)$ возникает следующее препятствие: из неравенств $x_n \geqslant t_n h_0$ и условия $\|x_n\| \to \infty$ не следует $t_n \to \infty$. Осложнений не возникает, если априори имеется некая дополнительная информация, например, заранее известно, что $x_n \geqslant \alpha \|x_n\| h_0$. Такая ситуация складывается при использовании специальных конусов, например, конусов K^{v^*} (см. последний раздел § 1).

Будем говорить, что оператор C сильно растет по направлению $v \in E$, если

$$t^{-1} \|C(tv)\| \to \infty \quad \text{при } t \to \infty.$$

Теорема 13.12. *Пусть положительный и вполне непрерывный оператор A не имеет в конусе K неподвижных точек с большими нормами, имеет монотонную миноранту C на элементах большой нормы отображает K в K^{v^*}. Пусть, наконец, $C(K^{v^*}) \subset K^{v^*}$ оператор C сильно растет по направлению v^*. Тогда* $\operatorname{ind}(A, \infty) = 0$. ■

Заметим, что в последних теоремах вместо монотонности миноранты C можно предполагать монотонность исходного оператора A, а в теореме 13.12 требование сильного роста C по направлению v^* можно заменить предположением $C(tv^*) \geqslant tv^*$ при больших t.

§ 14. K-ОТОБРАЖЕНИЯ

Предыдущие два параграфа ориентированы на изучение уравнений вида $x = A(x)$. В бесконечномерных банаховых пространствах именно такие уравнения чаще всего встречаются. В конечномерном пространстве часто приходится рассматривать уравнения $F(x) = 0$, где отображение F по своим свойствам аналогично отображениям типа $x - A(x)$, где A — положительный оператор. Теории таких отображений и посвящен данный параграф.

Ниже K обозначает некоторый телесный конус в R^n. Без ущерба для рассматриваемых далее приложений можно считать $K=R^n_+$.

Отображение $F:K\to R^n$ будем называть *K-отображением* (*K-оператором*), если оно граничные точки K не переводит в $\operatorname{int} K$. Все рассматриваемые отображения предполагаются непрерывными.

14.1. K-индексы. Два K-отображения F_0 и F_1 назовем *K-гомотопными* на множестве $\Gamma\subset K$, если существует непрерывное по совокупности переменных отображение $H(x, \tau)$ $(H:\Gamma\times[0, 1]\to R^n)$ такое, что

$$H(x, 0)\equiv F_0(x), \quad H(x, 1)\equiv F_1(x) \tag{14.1}$$

и $H(x, \tau)$ при любом фиксированном $\tau\in[0, 1]$ является K-отображением, причем $H(x, \tau)\neq 0$ при любых $x\in\Gamma$, $\tau\in[0, 1]$.

Пусть K-отображение F при достаточно малых значениях $r>0$ K-гомотопно на множестве

$$S(r)=\{x\mid x\in K, \ \|x\|=r\}$$

тождественному отображению $I(x)\equiv x$. В этом случае будем говорить, что K-индекс оператора F в нуле равен 1, и писать

$$\operatorname{ind}(F, 0)=1.$$

K-индекс F в нуле положим равным нулю ($\operatorname{ind}(F, 0)=0$), если при достаточно малых $r>0$ отображение F K-гомотопно на $S(r)$ отображению

$$H_r(x)\equiv x-rh_0 \quad (h_0\in K, \ \|h_0\|>1). \tag{14.2}$$

Заметим, что все операторы $H_\beta(x)=x-\beta h_0$ $(\beta\geq r)$ на $S(r)$ K-гомотопны друг другу.

K-индексы на бесконечности определяются аналогично: $\operatorname{ind}(F, \infty)=1$, если при достаточно больших $r>0$ отображение F K-гомотопно на $S(r)$ тождественному $I(x)$; $\operatorname{ind}(F, \infty)=0$, если при достаточно больших $r>0$ отображение F K-гомотопно на $S(r)$ отображению (14.2).

Отношение K-гомотопии разбивает всевозможные K-отображения на бесконечное число классов эквивалентности. Определение лишь двух значений индекса соответствует выделению всего двух таких классов. Но эти классы наиболее обширны (см. далее) и охватывают большую часть приложений. K-индексы можно определить и для произвольных K-отображений, например, по схеме определения индекса положительного оператора (§ 12).

14.2. Теоремы о неподвижных точках. Вопросы существования положительного решения $x \in K$ (или ненулевого положительного решения) у уравнения $F(x)=0$ с K-оператором F можно изучать в рамках обычной теории вращения векторных полей (глава II), вычисляя вращение поля $F(x)$ на границах подходящих областей $\Omega \subset K$. В качестве $\overline{\Omega}$ часто удобно выбирать множества вида

$$K(r)=\{x \mid x \in K, \ \|x\| \leqslant r\} \tag{14.3}$$

или

$$K(r, R)=\{x \mid x \in K, \ r \leqslant \|x\| \leqslant R\}. \tag{14.4}$$

В этом случае, однако, приходится строить гомотопические переходы на всей границе множества (14.3) или (14.4), что связано с излишними неудобствами. Использование K-индексов позволяет ограничиться построением K-гомотопических переходов лишь на поверхностях $S(r)$. Это удобство будет проиллюстрировано далее. Пока же остановимся на теоремах существования.

Теорема 14.1. *Пусть F — K-отображение и* $\operatorname{ind}(F, \infty)=1$. *Тогда уравнение $F(x)=0$ имеет по крайней мере одно решение $x^* \in K$.*

Доказательство опирается на следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 14.0. *Если K-отображение F на $S(r)$ совпадает с тождественным, то уравнение $F(x)=0$ разрешимо в $K(r)$.*

Легко видеть, что в оговоренных условиях обычное вращение векторного поля F на границе $K(r)$ равно 1. Особенно легко сделать такой вывод, если опираться на определение вращения с помощью метода „протыкающего луча“ (глава II). Далее остается сослаться на теорему 6. ■

Заметим теперь, что условие $\operatorname{ind}(F, \infty)=1$ гарантирует существование K-гомотопии $H(x, \tau)$ на $S(r)$ (при достаточно большом r) от $F(x)$ к $I(x) \equiv x$. Пусть, для определенности, $H(x, 0) \equiv I(x)$, $H(x, 1) \equiv F(x)$. Введем в рассмотрение оператор (везде $x \in K$)

$$\widetilde{F}(x)=\begin{cases} F(x) & \text{если } \|x\| \leqslant r \\ \dfrac{\|x\|}{r} H\left(\dfrac{rx}{\|x\|}, 2-\dfrac{\|x\|}{r}\right), & \text{если } r \leqslant \|x\| \leqslant 2r \\ I(x) & \text{если } \|x\| \geqslant 2r \end{cases}$$

Легко проверить, что оператор $\widetilde{F}$ на множестве $K(2r)$ удовлетворяет условиям леммы 14.0. Поэтому уравнение $\widetilde{F}(x)=0$ имеет решение $x^* \in K(2r)$. Для доказательства остается убедиться в том, что $\|x^*\| \leqslant r$. Но возможность $r < \|x^*\| \leqslant 2r$ легко исключается, так как в этом случае $H(x_0, \tau_0) = 0$, где $x_0 = \frac{rx^*}{\|x^*\|}$, $\tau_0 = 2 - \frac{\|x^*\|}{r}$, что противоречит определению K-гомотопии $H(x, \tau)$. ■

Теорема 14.2. *Пусть K-индексы в нуле и на бесконечности K-отображения F определены в указанном выше смысле и*

$$\operatorname{ind}(F, 0) \neq \operatorname{ind}(F, \infty).$$

Тогда уравнение $F(x) = 0$ имеет по крайней мере одно ненулевое решение $x^* \in K$.

Доказательство. В соответствии с данным определением K-индексов возможны два варианта:

$$\operatorname{ind}(F, 0) = 0, \quad \operatorname{ind}(F, \infty) = 1 \tag{14.5}$$

$$\operatorname{ind}(F, 0) = 1, \quad \operatorname{ind}(F, \infty) = 0 \tag{14.6}$$

Рассмотрим сначала вариант (14.5). В силу $\operatorname{ind}(F, 0) = 0$ существует K-гомотопия $H(x, \tau)$ на $S(r)$ (при достаточно малом $r > 0$) от $F(x)$ к $H_r(x)$. Введем в рассмотрение оператор (везде $x \in K$)

$$\widetilde{F}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - rh_0) & \text{если } \|x\| \leqslant \frac{r}{2}, \\ \frac{\|x\|}{r} H\left(\frac{rx}{\|x\|}, \frac{2\|x\|}{r} - 1\right), & \text{если } \frac{r}{2} \leqslant \|x\| \leqslant r, \\ F(x) & \text{если } \|x\| \geqslant r. \end{cases}$$

Так как $\widetilde{F}(x) = F(x)$ при достаточно больших при норме $x \in K$, то $\operatorname{ind}(\widetilde{F}, \infty) = \operatorname{ind}(F, \infty) = 1$, и по теореме 14.1 существует решение $x^* \in K$ уравнения $\widetilde{F}(x) = 0$. Остается показать, $\|x^*\| \geqslant r$. Возможность $\|x^*\| \leqslant \frac{r}{2}$ заведомо исключена. Если же $\frac{r}{2} < \|x^*\| < r$, то $H(x_0, \tau_0) = 0$, где $x_0 = \frac{rx^*}{\|x^*\|}$, $\tau_0 = \frac{2\|x^*\|}{r} - 1$, что противоречит определению K-гомотопии $H(x,$

Рассмотрим вариант (14.6). Он легко сводится к предыдущему с помощью перехода к отображению

$$G(x) = \|x\|^2 F(x/\|x\|^2) \quad (x \in K, \ x \neq 0),$$

так как $\operatorname{ind}(G, 0)=0$, $\operatorname{ind}(G, \infty)=1$. Действительно, пусть $\alpha>0$ достаточно мало. Положим $r=\alpha$, $R=\dfrac{1}{\alpha}$. Пусть $H_1(x, \tau)$ — K-гомотопия на $S(r)$ от $F(x)$ к $I(x)$, $H_2(x, \tau)$ — K-гомотопия на $S(R)$ от $F(x)$ к $H_R(x)=x-Rh_0$. Тогда $\|x\|^2 H_1\left(\dfrac{x}{\|x\|^2}, \tau\right)$ будет K-гомотопией на $S(R)$ от $G(x)$ к $I(x)$. $\|x\|^2 H_2\left(\dfrac{x}{\|x\|^2}, \tau\right)$ — K-гомотопией на $S(r)$ от $G(x)$ к $H_r(x)$. Следовательно, уравнение $G(x)=0$ имеет ненулевое решение $x_0 \in K$. Но тогда $x^*=\dfrac{x_0}{\|x_0\|^2}$ — ненулевое решение уравнения $F(x)=0$. ■

Приведенные теоремы эффективны в приложениях в сочетании с различными способами вычисления K-индексов. Остановимся пока на двух простейших результатах.

Заметим сначала, что любой внедиагонально отрицательный оператор, т. е. оператор $F(x)=\{f_1(x), \ldots f_n(x)\}$, удовлетворяющий условию: для любого $i=1, \ldots n$

$$f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots x_n) \leqslant 0$$

при $x_j \geqslant 0$, $j \neq i$,—заведомо является K-отображением (где $K=R^n_+$).

Лемма 14.1. *Пусть при достаточно малых (достаточно больших) по норме $x \in R^n_+$, $x \neq 0$ внедиагонально отрицательное отображение удовлетворяет условию*

$$F(x) \overline{\leqslant} 0. \tag{14.7}$$

Тогда $\operatorname{ind}(F, 0)=1$ $(\operatorname{ind}(F, \infty)=1)$.

Доказательство совсем просто. K-гомотопией от $F(x)$ к $I(x)$ может служить линейный переход

$$H(x, \tau)=\tau x+(1-\tau) F(x). \ ■ \tag{14.8}$$

Без предположения внедиагональной отрицательности отображения F гомотопия (14.8) может не быть K-гомотопией. Аналогичный же признак нулевого индекса справедлив для K-отображений общего вида.

Лемма 14.2. *Пусть при достаточно малых (достаточно больших) по норме $x \in R^n_+$, $x \neq 0$ K-отображение F удовлетворяет условию*

$$F(x) \overline{\geqslant} 0. \tag{14.9}$$

Тогда $\operatorname{ind}(F, 0)=0$ $(\operatorname{ind}(F, \infty)=0)$.

Доказательство. Покажем, что F K-гомотопно на $S(r)$ отображению $H_\beta(x)=x-\beta h_0$, где $\beta>0$ достаточно велико. K-гомотопией может служить

$$H(x, \tau)=\tau F(x)+(1-\tau)(x-\beta h_0).$$

Установим свойство невырожденности: $H(x, \tau)\neq 0$. Оно вытекает из следующего рассуждения. Предположим противное. Тогда для любого сколь угодно малого (сколь угодно большого) $r>0$ и для любой последовательности $\beta_k\to\infty$ можно указать последовательности $x^k\in S(r)$ и $\tau_k\in[0, 1]$, такие, что

$$\tau_k F(x^k)+(1-\tau_k)\,x^k=(1-\tau_k)\,\beta_k h_0. \tag{14.10}$$

В силу компактности $S(r)\times[0, 1]$ можно считать $x^k\to x^0$, $\tau_k\to\tau_0$. Но тогда из (14.10) следует $(1-\tau_k)\beta_k\to\gamma\geqslant 0$, что в силу $\beta_k\to\infty$ влечет за собой $\tau_k\to 1$. Переходя в (14.10) к пределу, получаем $F(x^0)=\gamma h_0\geqslant 0$, но это противоречит условию (14.9).

Тот факт, что $H(x, \tau)$ — K-отображение при любом фиксированном $\tau\in[0, 1]$, устанавливается по аналогичной схеме. ■

Из этого доказательства легко усмотреть справедливость более общего результата.

Лемма 14.3. *Пусть при достаточно малых (достаточно больших) по норме $x\in R^n_+$, $x\neq 0$ K-отображение F выпускает направление $h_0\in R^n_+$, существует некоторое $h_0\in R^n_+$, $h_0\neq 0$ такое, что $F(x)\neq \mu h_0$, каково бы ни было $\mu>0$. Тогда* $\operatorname{ind}(F, 0)=0$ $(\operatorname{ind}(F, \infty)=0)$. ■

Различные комбинации приведенных теорем и лемм порождают разнообразные принципы разрешимости уравнения $F(x)=0$.

Теорема 14.3. *Пусть при достаточно больших по норме $x\in R^n_+$ внедиагонально отрицательное отображение F удовлетворяет условию (14.7). Тогда уравнение $F(x)=0$ имеет по крайней мере одно решение $x^*\in R^n_+$.* ■

Теорема 14.4. *Пусть внедиагонально отрицательное отображение F при достаточно малых по норме $x\in R^n_+$, $x\neq 0$ удовлетворяет условию (14.7), а при достаточно больших по норме $x\in R^n_+$ — условию (14.9). Тогда уравнение $T(x)=0$ имеет по крайней мере одно ненулевое решение $x^*\in R^n_+$.* ■

Теорема 14.5. *Пусть внедиагонально отрицательное отображение F при достаточно малых по норме $x\in R^n_+$, $x\neq 0$, удовлетворяет условию (14.9), при достаточно больших по норме $x\in R^n_+$ — условию (14.7). Тогда уравнение $F(x)=0$ имеет по крайней мере одно ненулевое решение $x^*\in R^n_+$.* ■

Последние две теоремы можно рассматривать как обобщения теорем М. А. Красносельского о сжатии и растяжении конуса (§ 12).

14.3. Дополнительные методы вычисления индексов. Ниже $F'(0)$ обозначает производную (матрицу Якоби) оператора F в нуле. Если оператор непрерывно дифференцируем и является K-отображением (внедиагонально отрицательным), то линейный оператор $F'(0)$ также является K-отображением (внедиагонально отрицательным).

Легко видеть, что K-индекс $\operatorname{ind}(F, 0)$ не меняется при достаточно малых возмущениях оператора F (при условии, что возмущенный оператор остается в классе K-отображений). Поэтому можно ожидать, что в естественных предположениях $\operatorname{ind}(F, 0)$ совпадает с индексом $\operatorname{ind}(F'(0), 0)$. Детализация этого соображения опирается на простые теоремы о K-индексах линейных K-отображений (K-матриц)

Теорема 14.6. *Пусть у невырожденного линейного внедиагонально отрицательного оператора A нет в R^n_+ собственных векторов, отвечающих действительным собственным значениям $\lambda<0$. Тогда* $\operatorname{ind}(A, 0)=\operatorname{ind}(A, \infty)=1$.

Теорему легко доказывает линейный K-гомотопический переход вида (14.8). ■

Теорема 14.7. *Пусть у невырожденного линейного K-отображения A есть в R^n_+ собственный вектор x_0, отвечающий собственному значению $\lambda_0<0$. Тогда* $\operatorname{ind}(A, 0)=\operatorname{ind}(A, \infty)=0$.

Доказательство просто. Отображение A выпускает направление x_0. В предположении противного найдутся такие $x\in S(r)$ и $\mu>0$, что $Ax=\mu x_0$. Но тогда $Az=0$, где $z=x-\frac{\mu}{\lambda_0}x_0$, что противоречит невырожденности A. Далее остается сослаться на лемму 14.3. ■

Теоремы 6,7 показывают, что K-индексы линейного невырожденного K-отображения всегда определены.

Теорема 14.8. *Пусть производная $F'(0)$ K-отображения F не вырождена. Тогда* $\operatorname{ind}(F, 0)=\operatorname{ind}(F'(0), 0)$.

Доказательство. Из невырожденности $F'(0)$ следует

$$\sup_{x\in S(r)}\|F'(0)x\|\geq r\alpha$$

при некотором $\alpha > 0$. Из определения же производной $F'(0)$ имеем $\| F(x) - F'(0)x \| = o(\| x \|)$. В конечном итоге это обеспечивает справедливость неравенств

$$\| F(x) - F'(0)x \| < \| F'(0)x \| \tag{14.11}$$

для $x \in S(r)$ при достаточно малом $r > 0$. Неравенства (14.11) гарантируют непротивоположную направленность на $S(r)$ полей $F(x)$ и $F'(0)x$, что позволяет осуществить линейный K-гомотопический переход

$$H(x, \tau) = \tau F(x) + (1 - \tau) F'(0)x. \blacksquare$$

Приведенные теоремы показывают, что гомотопические классы K-отображений, отвечающие случаям

$$\operatorname{ind}(F, 0) = 1, \quad \operatorname{ind}(F, 0) = 0$$

весьма широки. Имеет место также аналог теоремы 14.8 для K-индекса на бесконечности, если вместо $F'(0)$ использовать производную $F'(\infty)$ оператора F по R^n_+ на бесконечности, которая определяется условием

$$\lim_{x \in R^n_+,\ \|x\| \to \infty} \frac{\| F(x) - F'(\infty)x \|}{\| x \|} = 0.$$

Упражнение 14.1. Сформулируйте докажите аналоги теорем 13.5, 13.6 для K-отображений.

14.4. Теоремы о накрытиях и разрешимость неравенств.

Рассмотрим уравнение

$$F(x) = y \tag{14.12}$$

с K-отображением (внедиагонально отрицательным оператором) F и укажем условия, в которых (14.12) разрешимо в R^n_+ при любом $y \in R^n_+$. (В этом случае отображение F накрывает конус R^n_+ в смысле $R^n_+ \subset F(R^n_+)$).

Теорема 14.9. *Пусть K-отображение F удовлетворяет условию*

$$\lim_{x \in R^n_+,\ \|x\| \to \infty} \| F(x) \| = \infty \tag{14.13}$$

и $\operatorname{ind}(F, \infty) = 1$. Тогда уравнение (14.12) при любом $y \in R^n_+$ имеет, по крайней мере, одно решение $x \in R^n_+$.

Доказательство. В силу условия (14.12) при достаточно больших по норме $x \in R^n_+$ векторы $F(x)$ и $F(x) - y$ не могут быть противоположно направлены. Поэтому гомотопия

$$H(x, \tau) = F(x) - \tau y \tag{14.14}$$

не вырождена ($H(x, \tau) \neq 0$). Очевидно также, что (14.14) представляет собой K-гомотопию (для этого существенно требование $y \in R^n_+$). Следовательно, отображения $F(x)$ и $F(x) - y$ К-гомотопны на $S(r)$ при достаточно больших $r > 0$. Поэтому

$$\operatorname{ind}(F - x, \infty) = \operatorname{ind}(F, \infty) = 1.$$

Далее остается сослаться на теорему 14.1 ■

На самом деле справедлив более общий результат. Пусть K-отображение F удовлетворяет условию (14.13) и K-индекс F на бесконечности или равен 1, или вообще не определен в указанном выше смысле. Тогда уравнение (14.12) при любом $y \in R^n_+$ имеет крайней мере одно решение $x \in R^n_+$.

Если K-индекс F или равен 1, или вообще не определен в указанном выше смысле, будем писать, что K-индекс не равен нулю.

Теорема 14.10. *Пусть для K-отображения F*

$$\operatorname{ind}(F, 0) \neq 0 \qquad \operatorname{ind}(F, \infty) \neq 0.$$

Тогда неравенство $F(x) > 0$ разрешимо в R^n_+. Более того, для любого ненулевого $y \in R^n_+$ уравнение $F(x) = \mu y$ разрешимо в R^n_+ при некотором $\mu > 0$.

Доказательство вытекает из леммы 14.3. ■

Рассмотрим в качестве иллюстрирующего примера внедиагонально отрицательный оператор F, удовлетворяющий при достаточно больших по норме $x \in R^n_+$ условию (14.7). Лемма 14.1 гарантирует $\operatorname{ind}(F, \infty) = 1$. Следовательно (теорема 14.10), неравенство $F(x) > 0$ имеет положительное решение. Если же F дополнительно удовлетворяет условию (14.13), то (теорема 14.9) уравнение (14.12) разрешимо в R^n_+ при любом $y \in R^n_+$ (другими словами, положительно разрешимо при любом положительном y).

В данном контексте легко формулируются также теоремы о разрешимости неравенств, например, на поверхностях $S(r)$. Дело в том, что с самого начала можно было определять не K-индексы, а K-вращение совершенно аналогичным образом: K вращение $\gamma(F, S(r))$ K-отображения F на границе $K(r)$ равно 1, если F на $S(r)$ K-гомотопно $I(x)$, и равно 0, если F на $S(r)$ K-гомотопно $H_r(x)$. Понятно, что после замены K-индексов K-вращениями все приводившиеся теоремы сохранят силу после внесения в их формулировки очевидных поправок. Например, аналогом теоремы 14.2 является следующее утверждение: пусть $\gamma(F, S(r)) \neq \gamma(F, S(R))$, тогда уравнение $F(x)=0$ разрешимо в $K(r, R)$. Признаки равенства 1 или 0 K-вращения остаются те же, что и для K-индексов. Если, например, для внедиагонально отрицательного отображения на $S(r)$ выполняется условие (14.7), то $\gamma(F, S(r))=1$, если же выполняется (14.9), то $\gamma(F, S(r))=0$. Отсюда легко сделать вывод, что для внедиагонально отрицательного оператора F условия (14.7) и (14.9) на $S(r)$ несовместимы*. Этот факт может быть представлен и в более конструктивной форме.

Теорема 14.11. *Пусть F — внедиагонально отрицательное отображение. Если на $S(r)$ выполняется условие (14.7), то неравенство $F(x)\geqslant 0$ имеет решение $x\in S(r)$. Если на $S(r)$ выполняется условие (14.9), то неравенство $F(x)\leqslant 0$ имеет решение $x\in S(r)$.* ■

Вернемся снова к вопросу о накрытии конуса K-отображением. Задачу накрытия можно рассматривать с несколько иной точки зрения, геометрически более наглядной. Суть дела проще всего пояснить в линейном случае. Пусть A — невырожденное линейное K-отображение (K-матрица). Очевидно, образ неотрицательного ортанта R^n_+ при отображении A, т. е. AR^n_+, представляет собой некоторый конус в R^n. Поскольку граничные точки R^n_+ не переходят внутрь R^n_+ и $\det A\neq 0$, имеются две возможности: или пересечение $R^n_+\cap AR^n_+$ не содержит внутренних точек R^n_+, или конус AR^n_+ охватывает R^n_+, т. е.

$$R^n_+\subset AR^n_+. \tag{14.15}$$

Легко видеть, что в случае (14.15) матрица A положительно обратима (все элементы матрицы A^{-1} неотрицательны), поскольку уравнение $Ax=y$ при любом положительном $y(y\in R^n_+)$ имеет положительное решение. Ясно, что альтернатива (14.15) реализуется в том и только в том случае, когда уравнение $Ax=y$ имеет положительное решение хотя бы при одном строго положительном $y>0$. Эти рассуждения приводят к следующему результату.

Теорема 14.12. *Для того, чтобы невырожденная матрица A была положительно обратима, необходимо и достаточно выполнения двух условий:*

а) матрица A является K-матрицей;

---

* Это утверждение опирается на негомотопность $I(x)$ и $H_r(x)$ на $S(r)$. Отсутствие K-гомотопии от $I(x)$ к $H_r(x)$ нигде ранее не требовалось и не было доказано. Доказательство легко может быть получено предположением противного и получением противоречия с теоремой Брауэра.

б) уравнение $Ax=y$ имеет положительное решение хотя бы при одном $y>0$. ■

Здесь возникает естественный вопрос. А нельзя ли теорему 14.12 распространить на нелинейные операторы? Непосредственное обобщение, конечно, невозможно. Оно невозможно и при наложении дополнительного (необходимого) требования (14.13) (которое в линейном случае выполняется автоматически). Некоторые специальные варианты обобщений, которые здесь можно предложить, довольно явно связаны с теоремой 14.9 и на основе теоремы 14.9 доказываются гораздо легче, чем с использованием описанной геометрической идеи. Вопрос о возможности нетривиального использования указанных соображений в нелинейном случае остается открытым.

14.5. Примеры.

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=F(x), \tag{14.16}$$

описывающее динамику в модели сосуществования n биологических видов (x_i — численность популяции i-го вида).

Поскольку в процессе эволюции численности не могут стать строго отрицательными, траектории (14.16) не могут выходить из R^n_+. Это с необходимостью влечет за собой внедиагональную положительность F. Следовательно, $G(x)=-F(x)$ — внедиагонально отрицательный оператор.

В модели сосуществования биологических видов достаточно естественным выглядит следующее предположение. Если суммарная численность $\sum\limits_i x_i=\|x\|_l$ достаточно мала, то численность популяции хотя бы одного вида возрастает, т. е. $\exists i: f_i(x)>0$. Если же суммарная численность $\|x\|_l$ достаточно велика, то численность популяции хотя бы одного вида убывает, т. е. $\exists i: f_i(x)<0$.

Другими словами, для достаточно малых по норме $x\in R^n_+$, $x\neq 0$

$$F(x)\overline{\leqslant}0,\quad G(x)=-F(x)\overline{\geqslant}0,$$

а для достаточно больших по норме $x\in R^n_+$

$$F(x)\overline{\geqslant}0,\quad G(x)=-F(x)\overline{\leqslant}0.$$

Теорема 14.5 в этом случае гарантирует существование в системе ненулевого (нетривиального) положения равновесия $x^*\in R^n_+$.

2. Пусть теперь система дифференциальных уравнений (14.16) описывает динамику некоторой химической системы, x_i обозначает концентрацию i-го вещества в реакторе. Если система замкнута, то движение происходит в плоскости $\sum_i x_i = 1$ (100%) и не выходит за пределы $S(1)$. Оператор F может быть определен лишь на $S(1)$, но его легко продолжить на весь конус R_+^n, например $\|x\| F(x/\|x\|)$. Очевидно, на S(1) не существует точки x, в которой $F(x) \geqslant 0$, $F(x) \neq 0$ (иначе бы движение вышло за пределы $S(1)$). По той же самой причине на $S(1)$ не существует точки x, в которой $F(x) \leqslant 0$, $F(x) \neq 0$. Если теперь предположить, что система не имеет положения равновесия ($F(x) \neq 0$), то на $S(1)$ будут одновременно выполняться условия $-F(x) \overline{\leqslant} 0$ и $-F(x) \overline{\geqslant} 0$, что невозможно (теорема (14.11).

3. Обратимся к вопросу о существовании рыночного равновесия. Пусть x_i обозначает цену i-го товара, а $f_i(x)$ — функцию избыточного спроса на i-й товар ($i=1,\dots n$). Точка x^* определяет, положение равновесия на рынке, ес. или $f_i(x^*)=0$, или $x_i^*=0$ $f_i(x^*)<0$.

От оператора F перейдем к оператору G по следующему правилу: компоненты $g_i(x)$ получаются непрерывным обнулением функций — $f_i(x)$ в тех граничных точках R_+^n, в которых $f_i(x)<0$ $x_i=0$. Положение равновесия теперь определяется решением уравнения $G(x)=0$, причем G — внедиагонально отрицательный оператор.

Довольно естественным выглядит следующее предположение (a^0): если набор цен $x \in S(1)$ неравновесный, то найдутся такие и j, что $f_i(x)>0$, $f_j(x)<0$. Это равносильно одновременному выполнению условий $G(x) \overline{\leqslant} 0$, $G(x) \overline{\geqslant} 0$ в неравновесных точках $x \in S(1)$. С помощью теоремы 14.11 теперь легко приходим к следующему выводу:

На рынке, удовлетворяющем требованию a^0, существует по крайней мере одно положение равновеси:

14.6. Теория P-отображений. Назовем переменные x_i *действиями*, а $y_i=f_i(x)$ — *результатами* ($i=1,\dots,n$). Пусть $x=0$ соответствуют „нулевые результаты", т. е. $f_i(0)=0$ ($i=1,\dots n$), а при любом $x_j>0$

$$y_j=f_j(0,\dots 0,\ x_j,\ 0,\dots,\ 0)>0,$$

т. е. при отсутствии помех каждое положительное действие x_j приводит к положительному результату y_j.

Понятно, что при наличии перекрестных взаимосвязей совместные положительные (стереотипные) действия могут приводить к отрицательным результатам. Мы выделим класс P-систем, к которых любой набор неотрицательных действий $x \neq 0$ дает хотя бы один положительный результат. Далее будет установлено, что в P-системе всегда существует согласованный набор действий, при котором все результаты положительны.

На самом деле, последующие результаты имеют чисто математический характер. Описанная же модель „действия-результаты" несет вспомогательную нагрузку, давая иногда удобную интерпретацию. Перейдем точным формулировкам.

Непрерывный оператор $F(x)=\{f_1(x),\ldots, f_n(x)\}$, действующий из R^n_+ в R^n и удовлетворяющий условию $F(0)=0$, назовем *P-отображение*, если для любого $x \geqslant 0$ $(x \neq 0)$ существует номер j такой, что $x_j f_j(x) > 0$.

Теорема 14.13. *Пусть F является P-отображение. Тогда существует вектор $x \geqslant 0$, такой, что $f_i(x) > 0$ для $i=1,\ldots$*

Доказательство. Предположим, указанный вектор $x \geqslant 0$ не существует. Тогда F является K-отображением. Легко видеть, что F K-гомотопно на $S(r)$ (при любом $r>0$) внедиагонально отрицательному отображению

$$x \otimes F(x)=\{x_1 f_1(x),\ldots, x_n f_n(x)\}.$$

K-гомотопией может служить отображение $H(x, \tau)$ с компонентами

$$h_i(x, \tau)=f_i(x)(1 - \tau+\tau x_i).$$

Из определения P-отображений следует $x \otimes F(x) \overline{\leqslant} 0$ на $S(r)$, что влечет за собой

$$\operatorname{ind}(F, 0)=\operatorname{ind}(F, \infty)=1.$$

Но тогда теорема 14.10 приводит к противоречию исходным предположением. ■

Далее мы рассмотрим ситуацию, когда P-отображение одновременно является K-отображением. В рамках содержательной модели „действия-результаты" такое предположение соответствует ситуации „неизбыточности набора переменных": не используя всех действий, нельзя добиться, чтобы все результаты были строго положительны.

Теорема 14.14. *Пусть P-отображение F является K-отображением. Тогда для любого ненулевого $y \in R^n_+$ можно указать* *вектор* $x \in R^n_+$ *(с любой наперед заданной нормой) такой, что* $F(x)=\lambda y$ *при некотором* $\lambda>0$.

Для доказательства достаточно повторить предыдущее, отбросив первые две фразы и заменив последнюю простой ссылкой на теорему 14.10. ■

Теорема 14.15. *Пусть P-отображение F является K-отображением и выполняется условие (14.13). Тогда уравнение* $F(x)=y$ *при любом* $y \in R^n_+$ *имеет положительное решение* $x \in R^n_+$.

Доказательство очевидно (см. теорему 14.9). ■

Переменные x_i по-прежнему будем называть действиями, а $y_i=f_i(x)$ — результатами, но теперь будем считать, что x_i могут принимать не только положительные значения, но и отрицательные, причем для любого $x_j \neq 0$

$$\operatorname{sign} f_j(0,\cdots,0,x_j,0,\dots,0)=\operatorname{sign} x_j,$$

т. е. „при отсутствии помех“ каждое положительное действие x_j дает положительный результат y_j, отрицательное — отрицательный.

Пусть $F(0)=0$, и надо некоторые y_j увеличить, а другие уменьшить. Здесь, естественно, задаться следующим вопросом: можно ли такого изменения вектора y добиться „стереотипными“ действиями, т. е. увеличивая x_j, если y_j надо увеличить, и уменьшая x_j, если y_j надо уменьшить. Положительный ответ на этот вопрос можно дать, если оператор $F(x)=\{f_1(x),\cdots,f_n(x)\}$ является универсальным P-отображением.

Непрерывный оператор $F: R^n \to R^n (F(0)=0)$ назовем *универсальным P-отображением*, если для любого $x \neq 0$ существует номер j такой, что $x_j f_j(x)>0$ (т. е. хотя бы один результат является „ожидаемым“).

Теорема 14.16. *Пусть F является универсальным P-отображением, и* R^n_{+-} *обозначает некоторый (произвольный) ортант. Тогда существует вектор* $x \in R^n_{+-}$ *такой, что* $F(x) \in \operatorname{int} R^n_{+-}$ *(т. е. все результаты являются „ожидаемыми“ (все действия „стереотипными“)).*

Для доказательства надо перейти к другой системе координат, изменив перед некоторыми x_j знаки так, чтобы в новой системе координат множество R^n_{+-} стало неотрицательным ортантом. Очевидно, сужение F на R^n_{+-} в новой системе координат является P-отображением, и остается применить теорему 14.13. ■

Непрерывный оператор $F: R^n \to R^n$ назовем *универсальным P-отображением по приращению*, если для любого $x \in R^n$ и любого $\Delta x \neq 0$ ($\Delta x \in R^n$) существует номер j такой, что

$$[f_j(x+\Delta x) - f_j(x)]\Delta x_j > 0. \tag{14.17}$$

Если же (14.17) выполняется лишь для Δx достаточно малых по норме, оператор F будем называть *локальным универсальным P-отображением по приращению*.

Проверка наличия у системы (оператора) „P-свойства" в локальном масштабе представляется более доступной, и, как показывает следующая теорема, ею можно ограничиться.

Теорема 14.17. *Любое локальное универсальное P-отображение по приращению является универсальным P-отображением по приращению*.

Доказательство. Заметим сначала, что теорема 14.13 сохраняет силу, если в определении P-отображения требовать справедливость условия $\exists j: x_j f_j(x) > 0$ лишь для $x \in R^n_+$ ($x \neq 0$) достаточно малых по норме. В этом случае можно утверждать существование лишь достаточно малого по норме вектора $x \in R^n_+$ такого, что $f_i(x) > 0$ для всех $i = 1, \cdots, n$.

Итак, предположим, что утверждение теоремы 14.17 неверно. Тогда найдется пара точек $a \neq b$ таких, что

$$\forall i: [f_i(a) - f_i(b)](a_i - b_i) \leqslant 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $a \geqslant b$, и даже $\forall i: a_i > b_i$ (иначе в последующих рассуждениях можно было бы перейти к „усеченному" оператору $P_m F(\Gamma_m x)$, где P_m матрица, у которой m (произвольных) диагональных элементов равны 1, а все остальные элементы нулевые. Очевидно, любой оператор $P_m F(P_m x)$ также является P-отображением). Обозначим через T множество тех $x = \langle a, b\rangle$, для которых $F(x) \leqslant F(a)$. Поскольку F непрерывен — T компактно, а так как F локальное универсальное P-отображение, точка a является изолированной точкой множества T. Следовательно, компактным является также $T \setminus \{a\}$. На компактном множестве функция $\varphi(x) = \sum_i |x_i|$ достигает минимума в некоторой точке $x^* \in T \setminus \{a\}$. С другой стороны, по упомянутой выше модификации теоремы 14.13 существует достаточно малый по норме вектор $\Delta x \leqslant 0$ такой, что $\forall i: f_i(x^* + \Delta x) < f_i(x^*)$. Следовательно, $x^* + \Delta x \in T \setminus \{a\}$, но тогда $\varphi(x^* + \Delta x) < \varphi(x^*)$. ■

Упражнение 14.1. Линейное универсальное P-отображение называется P-матрицей. Найти характеристическое свойство P-матрицы в терминах ее главных миноров.

Упражнение 14.2. Пусть гладкое отображение F определено в прямоугольной области X и $F'(x)$ всюду в X является P-матрицей. Тогда F взаимно однозначно на всей области X.

Упражнение 14.3. Пусть пространство непрерывных функций $C(\Omega)$ полуупорядочено конусом K неотрицательных функций. Оператор F, действующий в $C(\Omega)$, будем называть P-отображением, если для любого $x \in K$, $\|x\| = \alpha > 0$ найдется такое $t \in \Omega$, что $x(t)\,y(t) \geqslant \beta(\alpha) > 0$, где $y = F(x)$. Если P-отображение F имеет вид $F(x) = x - A(x)$, где A — вполне непрерывный оператор, и справедливо условие (14.13), то уравнение $x = A(x) + y$ имеет положительное решение при любом положительном y.

§ 15. МОНОТОННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

15.1. Принцип Биркгофа-Тарского. Если для монотонного оператора F выполняются условия

$$v \leqslant w, \quad F(v) \geqslant v, \quad F(w) \leqslant w,$$

то легко видеть, что оператор F оставляет инвариантным конусный отрезок $\langle v, w \rangle$ Действительно, в этом случае $v \leqslant x \leqslant w$ влечет за собой

$$v \leqslant F(v) \leqslant F(x) \leqslant F(w) \leqslant w.$$

Теорема 15.1. *Пусть конус K сильно миниэдрален. Тогда любой монотонный оператор F (не обязательно непрерывный), оставляющий инвариантным конусный отрезок $\langle v, w \rangle$, имеет на $\langle v, w \rangle$ по крайней мере одну неподвижную точку.*

Доказательство. Обозначим через Ω множество тех элементов $x \in \langle v, w \rangle$, которые „идут вперед“, т. е. $F(x) \geqslant x$. Очевидно, Ω не пусто, так как заведомо $F(v) \geqslant v$. Покажем теперь, что $z = \sup \Omega$ является неподвижной точкой оператора F

Для любого $x \in \Omega$ имеем $F(z) \geqslant F(x) \geqslant x$, т. е. $F(z)$ — одна из верхних границ Ω. Поэтому $F(z) \geqslant z$, что влечет за собой $z \in \Omega$. С другой стороны,

$$F(F(z)) \geqslant F(z),$$

что дает $F(z) \in \Omega$, но тогда $F(z) \leqslant z$. Два противоположных неравенства дают $F(z) = z$. ■

Это один из уникальных результатов, гарантирующих существование неподвижной точки у разрывного оператора. Теорема 15.1 многократно обобщалась и модернизировалась. Наиболее общий принцип, полученный на этом пути, излагается в следующем разделе.

15.2. Предельно монотонно компактные операторы. Монотонный оператор F называется *предельно монотонно компактным* на ограниченном множестве $M \subset E$, если сходится каждая последовательность элементов

$$x_0 \leqslant F(x_1) \leqslant F^2(x_2) \leqslant \cdots \leqslant F^n(x_n) \leqslant \cdots \tag{15.1}$$

где все $x_n \in M$

Теорема 15.2. *Пусть предельно монотонно компактный оператор F отображает в себя ограниченное замкнутое множество $M \subset E$ $(F(M) \subset M)$, и $F(x_0) \geqslant x_0$ для некоторой точки $x_0 \in M$ Тогда F на M имеет по крайней мере одну неподвижную точку.*

Доказательство Пусть как и прежде Ω обозначает множество тех элементов $x \in M$, которые „идут вперед", т. е. $F(x) \geqslant x$. Множество Ω не пусто в силу $F(x_0) \geqslant x_0$.

Теорема будет доказана, если мы установим существование на Ω хотя бы одного максимального элемента, т. е. такого элемента $x^* \in \Omega$, что $x \overline{\geqslant} x^*$ для любого $x \in \Omega$, $x \neq x^*$ (Обратите внимание, что в случае сильно миниэдрального конуса понятие максимального элемента отличается от понятия $z = \sup \Omega$). Действительно, если такой элемент $x^* \in \Omega$ существует, то $F(x^*) \in \Omega$ в силу $F(F(x^*)) \geqslant F(x^*)$, но тогда из максимальности x^* вытекает $F(x^*) = x^*$

Покажем, что максимальный элемент $x^* \in \Omega$ существует. Пусть x_n — произвольная монотонно возрастающая последовательность, все элементы которой $x_n \in \Omega$. Последовательности x_n сопоставим последовательность $F^n(x_n)$, которая удовлетворяет цепочке неравенств (15.1), сходится $F^n(x_n) \to z$ и мажорирует $\{x_n\}$ в силу $F^n(x_n) \geqslant x_n$ Наконец, $z \in \Omega$, что вытекает из предельного перехода в неравенстве $F(z) \geqslant F^{n+1}(x_n)$. Перечисленные свойства обеспечивают таким образом существование верхней грани в Ω у любой монотонно возрастающей последовательности $x_n \in \Omega$. Для завершения доказазательства остается сослаться на лемму Цорна*. ■

* Лемма Цорна утверждает следующее: если всякая цепь в частично упорядоченном множестве Ω имеет верхнюю грань, то в Ω существует хотя бы один максимальный элемент. Легко проверить, что всякая цепь имеет верхнюю грань в Ω, если верхнюю грань в Ω имеет любая монотонно возрастающая последовательность.

Несмотря на то, что свойство предельной монотонной компактности выглядит несколько неуклюже, оно достаточно удобно, легко проверяется и охватывает широкие классы нелинейных операторов.

Упражнение 15.1. Проверьте, что оператор F предельно монотонно компактен в любой из следующих ситуаций.

1) Пространство (в котором действует F) конечномерно.

2) Конус K вполне правилен, оператор F ограничен на M по норме.

3) Конус K правилен, оператор F преобразует ограниченное множество M в себя.

4) Оператор F (или некоторая его степень) компактен.

Упражнение 15.2. Укажите пример монотонного оператора, действующего в R^n, который отображает в себя ограниченное замкнутое выпуклое множество M и не имеет в M неподвижных точек.

Следующие два упражнения относятся к вопросу о разрешимости уравнения

$$F(x) = G(x) \qquad (15.2)$$

с монотонным (вообще говоря разрывным) оператором F и произвольным непрерывным оператором G. (В предыдущих теоремах по существу $G(x) \equiv x$). В скалярном случае геометрически очевидно, что уравнение (15.2) имеет решение на $\langle v, w\rangle = [v, w]$, если

$$F(v) \geqslant G(v), \quad F(w) \leqslant G(w). \qquad (15.3)$$

В общем случае требуются дополнительные предположения.

Упражнение 15.3. Пусть выполняются неравенства (15.3) и для любого $z \in \langle v, w\rangle$ такого, что $F(z) \leqslant G(z)$ существует такой элемент $y \in \langle v, w\rangle$, $y \leqslant z$, что $F(z) = G(y)$. Тогда уравнение (15.2) имеет по крайней мере одно решение $x^* \in \langle v, w\rangle$.

Упражнение 15.4. Пусть конус K вполне правилен, выполняются неравенства (15.3) и из

$$v \leqslant z_1 \leqslant z_2 \leqslant w, \quad G(v) \leqslant G(z_1) \leqslant u \leqslant G(z_2) \leqslant G(w)$$

следует существование элемента $y \in \langle z_1, z_2\rangle$ такого, что $G(y) = u$. Тогда уравнение (15.2) имеет по крайней мере одно решение.

15.3. Итерационные процессы. В этом разделе везде предполагается, что монотонный оператор F имеет инвариантный конусный отрезок $\langle v, w\rangle$. Рассмотрим последовательные итерации

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (15.4)$$

Если $x_0 = v$, то $F(x_0) \geqslant x_0$ в силу инвариантности $\langle v, w\rangle$. Применяя к последнему неравенству монотонный оператор F, получим

$$F(F(x_0)) \geqslant F(x_0),$$

е. $x_2 \geqslant x_1$. Продолжая этот процесс индуктивно, приходим к цепочке неравенств

$$x_0 \leqslant F(x_0) \leqslant F^2(x_0) \leqslant \ldots \leqslant F^n(x_0) \leqslant \qquad (15.5)$$

Если последовательность (15.5) сходится и оператор F непрерывен, то в (15.4) можно перейти к пределу и сделать таким образом вывод о существовании неподвижной точки v^* и о сходимости к ней последовательных приближений (15.4).

Вывод о сходимости (15.5) может базироваться на разных предположениях. Например, если конус K правилен, то $F^n(x_0)$ автоматически сходится, поскольку последовательность $F^n(x_0)$ ограничена по конусу ($F^n(x_0) \leqslant w$). Если конус K нормален, то для сходимости (15.5) достаточна полная непрерывность оператора F.

Те же рассуждения можно привести для процесса (15.4), начинающегося в точке $x_0 = w$. Разница будет лишь в том, что последовательность $F^n(x_0)$ получится монотонно убывающей и будет сходиться к, вообще говоря, другой неподвижной точке w^* оператора F При этом очевидно, что для любой неподвижной точки $x^* \in \langle v, w\rangle$ оператора F справедливы неравенства

$$v^* \leqslant x^* \leqslant w^*. \qquad (15.6)$$

Если же заранее известно, что неподвижная точка $x^* \in \langle v, w\rangle$ единственна, то обе последовательности $F^n(v)$ и $F^n(w)$ будут сходиться к одному и тому же пределу x^*. Отсюда можно сделать вывод о сходимости процедуры (15.4) к x^* из любой начальной точки $x_0 \in \langle v, w\rangle$. Действительно, из

$$v \leqslant x_0 \leqslant w$$

и монотонности F вытекает

$$F(v) \leqslant F(x_0) \leqslant F(w),$$

что при индуктивном продолжении дает

$$F^n(v) \leqslant F^n(x_0) \leqslant F^n(w)$$

при любом $n = 0, 1, \ldots$ Но так как крайние последовательности сходятся к одному и тому же пределу x^*, то и $F^n(x_0) \to x^*$.

Суммируем сказанное в отдельном утверждении.

Теорема 15.3. *Пусть монотонный оператор F имеет инвариантный конусный отрезок $\langle v, w\rangle$ и выполняется одно из двух условий:*

1) конус K правилен, оператор F непрерывен,

2) конус K нормален, оператор F вполне непрерывен.

Тогда последовательные итерации (15.4) сходятся к v^* при $x_0=v$ w^* при $x_0=w$. Точки v^* и w^* являются неподвижными точками оператора F, причем, если $x^* \in \langle v, w\rangle$ любая другая неподвижная точка F, то выполняются неравенства (15.6). Если же заранее известно, что неподвижная точка $x^* \in \langle v, w\rangle$ единственна, то (15.4) сходится к x^* из любой начальной точки $x_0 \in \langle v, w\rangle$. ■

При использовании (15.4) в качестве вычислительного алгоритма даже в случае единственной неподвижной точки x^* полезно параллельно вычислять как $F^n(v)$ и $F^n(w)$, что в силу монотонной сходимости дает одновременно оценки решения снизу и сверху.

15.4. Гетеротонные операторы. Напомним, что оператор $T: E \to E$ называется гетеротонным, если он допускает диагональное представление $T(x)\equiv\hat{T}(x, x)$ и сопутствующий оператор $\hat{T}(v,$ действующий из $E\times E$ в E, монотонно возрастает по первому аргументу и монотонно убывает по второму.

Теорема 15.4. *Сумма композиции (произведение) гетеротонных операторов являются гетеротонными операторам*

Доказательство тривиально. Пусть T_1 и T_2—гетеротонные операторы, которым сопутствуют, соответственно, $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$. Тогда для суммы T_1+T_2 сопутствующим оператором будет $\hat{T}_1(v, w)+$ $+\hat{T}_2(v, w)$, для композиции T_1T_2 —

$$\hat{T}_1(\hat{T}_2(v, w), \hat{T}_2(w, v)).$$ ■

Выбор сопутствующего оператора для гетеротонного всегда неоднозначен. При этом в определенном смысле удачный выбор является задачей, которая требует для своего решения известной доли изобретательности. Этот вопрос будет обсуждаться далее, а пока, когда речь идет о гетеротонном операторе, подразумевается, что сопутствующий оператор уже конкретно указан.

Конусный отрезок $\langle v_0,$ $\rangle$ назовем *сильно инвариантным* для гетеротонного оператора T, если

$$\hat{T}(v_0, w_0)\geqslant v_0, \quad \hat{T}(w_0, v_0)\leqslant w_0.$$

Очевидно, из сильной инвариантности $w_0\rangle$ следует его обычная инвариантность для T. Действительно, пусть $x\in\langle v_0, w_0\rangle$, тогда

$$v_0 \leqslant \hat{T}(v_0, w_0) \leqslant \hat{T}(x, x) = T(x) \leqslant \hat{T}(w_0, v_0) \leqslant w_0.$$

В последующем изложении существенную роль играет следующее условие

a° Система уравнений

$$\hat{T}(v, w) = v, \quad \hat{T}(w, v) = w \tag{15.7}$$

на множестве $\mathfrak{M} \subset E$ не имеет решений таких, что $v \neq w$.

Отметим, наконец, что введение в множестве пар элементов (v, w) нормы $\|(v, w)\|_{E \times E} = \|v\| + \|w\|$ делает $E \times E$ банаховым пространством и позволяет говорить о непрерывности и полной непрерывности отображения $\hat{T}: E \times E \to E$.

Теорема 15.5. *Пусть конусный отрезок $\langle v_0, w_0 \rangle$ является сильно инвариантным для гетеротонного оператора T и на $\langle v_0, w_0 \rangle$ выполнено условие a°. Пусть, кроме того, выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

Конус K правилен, оператор $\hat{T}$ непрерывен.

2) *Конус K нормален, оператор $\hat{T}$ вполне непрерывен.*

3) *Конус K сильно миниэдрален.*

Тогда у оператора T существует неподвижная точка $x^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\widetilde{T}: E \times E \to E \times E$, который паре элементов (v, w) сопоставляет пару $(\hat{T}(v, w), \hat{T}(w, v))$. Легко видеть, что из непрерывности (полной непрерывности) оператора $\hat{T}$ следует непрерывность (полная непрерывность) оператора $\widetilde{T}$.

Введем далее полуупорядоченность в $E \times E$ по правилу: $(v', w') \succ (v, w)$, если $v' \geqslant v$, $w' \leqslant w$. Можно считать, что полуупорядоченность, определяемая знаком $\succ$, вводится при помощи конуса

$$\widetilde{K} = \{(v, w) \mid v \in K, \; -w \in K\}.$$

При этом очевидно, что правильность, нормальность, сильная миниэдральность конуса K влечет за собой наличие соответствующих свойств у конуса $\widetilde{K}$.

Завершается доказательство теперь весьма просто. Очевидно, из $(v', w') \succ (v, w)$ следует $\widetilde{T}(v', w') \succ \widetilde{T}(v, w)$, т. е. оператор $\widetilde{T}$ является монотонным. Кроме того, $\widetilde{T}$ оставляет инвариантным конусный отрезок

$$\langle (v_0, w_0), (w_0, v_0)\rangle = \{(v, w) \mid (v_0, w_0) \prec (v, w) \prec (w_0, v_0)\}.$$

Теперь из теорем о существовании неподвижной точки у монотонного оператора следует, что в наших предположениях $\tilde{T}$ имеет неподвижную точку (v^*, w^*), которая, очевидно, является решением системы уравнений (15.7). В силу условия a°, $v^* = w^*$. Следовательно, оператор T имеет неподвижную точку $x^* = v^* = w^*$ ■

Список условий 1) — 3) может быть продолжен. В него можно включить практически любое условие, которое обеспечивает существование неподвижной точки у монотонного оператора, имеющего инвариантный конусный отрезок.

Если выполняется условие 2), требование справедливости a° в теореме излишне. Сильная инвариантность $\langle v_0, w_0\rangle$ влечет за собой обычную инвариантность $\langle v_0, w_0\rangle$ для T, поэтому в случае 2) существование неподвижной точки у T следует из принципа Шаудера.

Перейдем к изучению сходимости итерационных процессов вида $x_{n+1} = T(x_n)$, где T — гетеротонный оператор. Здесь, оказывается, удобно рассматривать вспомогательный итерационный процесс

$$v_{n+1} = \hat{T}(v_n, w_n), \quad w_{n+1} = \hat{T}(w_n, v_n), \tag{15.8}$$

начинающийся в точке (v_0, w_0).

Лемма 15.1. *Пусть конусный отрезок $\langle v_0, w_0\rangle$ является сильно инвариантным для гетеротонного оператора T, и выполнено хотя бы одно следующих условий: 1°. Конус K правилен, 2°. Конус K нормален, оператор $\hat{T}$ вполне непрерывен. Тогда итерационный процесс (15.8) сходится, т. е. $v_n \to v^*$ $w_n \to w^*$, причем*

$$v_0 \leqslant \cdots \leqslant v_n \leqslant \qquad \leqslant v^* \leqslant \qquad \leqslant w_n \leqslant \cdots \leqslant w_0.$$

Кроме того, если $y_0 \in \langle v_0, w_0\rangle$, $z_0 \in \langle v_0, w_0\rangle$ и

$$y_{n+1} = \hat{T}(y_n, z_n), \quad z_{n+1} = \hat{T}(z_n, y_n), \tag{15.9}$$

то при любом $n \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$v_n \leqslant y_n \leqslant w_n, \quad v_n \leqslant z_n \leqslant w_n.$$

Для доказательства достаточно переформулировать предположения и выводы леммы в терминах отображения $\tilde{T}$ и полуупорядоченности $\succ$ (см. доказательство теоремы 15.5), после чего воспользоваться теоремой о сходимости последовательных итераций для монотонного оператора к „наименьшему“ „наибольшему“ решениям. ■

Полагая в (15.9) $y_0=z_0=x\in\langle v_0, w_0\rangle$, приходим к следующему результату.

Следствие. *Пусть выполнены предположения леммы 15.1. Тогда:*

1) Для любого $x\in\langle x_0, w_0\rangle$ и любого $n\geq 0$

$$v_n\leqslant T^n(x)\leqslant w_n. \tag{15.10}$$

2) Если T на $\langle v_0, w_0\rangle$ имеет неподвижную точку x^*, то $v^*\leqslant x^*\leqslant w^*$

Теорема 15.6. *Пусть выполнены предположения леммы 15.1. Кроме того, пусть оператор $\hat{T}$ непрерывен и на $\langle v_0, w_0\rangle$ справедливо условие a° Тогда у T на $\langle v_0, w_0\rangle$ существует единственна неподвижная точка x^*, которой сходятся последовательные итерации $T^n(x)$ независимо от $x\in\langle v_0, w_0\rangle$.*

Доказательство. Из непрерывности $\hat{T}$ вытекает, что пара (v^*, w^*) является неподвижной точкой оператора $\tilde{T}$ (другими словами, решением системы уравнений (15.7)). В этом случае предположение о справедливости a° исключает возможность $v^*\neq w^*$. Тогда $x^*=v^*=w^*$ является неподвижной точкой оператора T, и из $v_n\to x^*$, $w_n\to x^*$ и (15.10) следует $T^n(x)\to x^*$ В свою очередь, сходимость $T^n(x)\to x^*$ для любого $x\in\langle v_0, w_0\rangle$ исключает возможность существования неподвижной точки, отличной от x^*, — поэтому x^* — единственна. ■

Заметим, что если по реализации процесса (15.8) или из каких-нибудь других соображений удается установить существование и равенство пределов v^* и w^*, то необходимость в каких-либо предположениях (за исключением нормальности K) отпадает.

Одной из весомых компонент удачи выбора сопутствующего оператора является справедливость условия a°, которое играет существенную роль в приведенных выше теоремах. В общем случае проверка условия a° представляется довольно сложной задачей. Забегая вперед, отметим, что ситуация здесь не настолько безнадежна, как это может показаться. Условие a° автоматически выполняется для u_0-псевдовогнутых операторов (см. следующую главу). При очевидных способах выбора сопутствующих операторов $\hat{T}$ эта проблема не возникает в случае монотонного T, и представляется сравнительно простой для антимонотонного T. Однако и за пределами указанных классов операторов можно дать простые критерии, которые легко поддаются проверке и гарантирует справедливость a°.

Заметим сначала, что в предположениях всех приведенных выше утверждений, за исключением теоремы 15.5, условие a° может быть заменено более слабым: система уравнений (15.7) не имеет решений таких, что $v<w$. Достаточным условием справедливости последнего является, например, следующее

$$\hat{T}(v+u,\ w-u) \geqslant \hat{T}(v,\ w)+u, \tag{15.11}$$

где

$$u>\theta,\ v<w;\ v,\ w,\ v+u,\ w-u \in \langle v_0,\ w_0\rangle.$$

Действительно, если предположить противное, т. е., что система (15.7) имеет решение $(v,\ w)\ (v<w)$, — легко приходим к противоречию. С одной стороны,

$$\hat{T}(v+(w-v),\ w-(w-v))=\hat{T}(w,\ v)=w,$$

с другой,

$$\hat{T}(v+(w-v),\ \ w-(w-v)) \geqslant \hat{T}(v,\ w)+(w-v)=w.$$

Интересно, что (15.11) при определенных предположениях гарантирует справедливость a° в первоначальной (неослабленной) форме.

Теорема 15.7. *Пусть выполнены предположения леммы 15.1, оператор $\hat{T}$ непрерывен и имеет место (15.11). Тогда на $\langle v_0,\ w_0\rangle$ справедливо a°.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть система (15.7) имеет решение $\bar{v},\ \bar{w}\ (\bar{v}\neq\bar{w})$. Как показано выше, замена a° на (15.11) оставляет в силе лемму 15.1. Тогда, полагая в (15.9) $y_0=\bar{v},\ z_0=\bar{w}$, приходим к противоречию: $v_n-w_n\to\theta;\ \ \bar{v}\neq\bar{w};\ \ \bar{v},\ \bar{w}\in\langle v_n,\ w_n\rangle$. ∎

Другой способ установления справедливости a° может быть основан на следующем простом соображении. Можно пытаться найти функционал $f(x,\ y)$ такой, что для любых $v\neq w$

$$f(\hat{T}(v,\ w),\ \hat{T}(w,\ v))\neq f(v,\ w).$$

В частности, в качестве такого функционала можно выбрать норму разности и попытаться установить справедливость неравенства

$$\|\hat{T}(v,\ w)-\hat{T}(w,\ v)\|<\|v-w\| \tag{15.12}$$

для всех $v \neq w$ (или для всех $v<w$, если требуется проверить a° в ослабленной форме). Правда, неравенство (15.12) является довольно грубым инструментом. Оно практически неэффективно, если норма обладает лишь свойством полумонотонности. Более целесообразным представляется использование в (15.12) различных u_0-норм, которые монотонны.

Вторым специфическим условием в теоремах настоящего параграфа является существование сильно инвариантного конусного отрезка $\langle v_0, w_0\rangle$ у гетеротонного оператора T. Вообще говоря, такое требование не является существенно более жестким, чем обычная инвариантность. Для достаточно широкого подкласса гетеротонных операторов сильная инвариантность является следствием обычной. Но даже и в этом случае практически удобнее проверять сильную инвариантность (т. е. искать точки v_0, w_0, удовлетворяющие неравенствам $\hat{T}(v_0, w_0) \geqslant v_0$, $\hat{T}(w_0, v_0) \leqslant w_0$), чем обычную, — поскольку поиск инвариантного конусного отрезка для немонотонного оператора представляет собой „неудобную" задачу. В то же время, справедливость импликации „обычная инвариантность влечет за собой сильную" в определенном смысле свидетельствует, как правило, об удаче выбора сопутствующего оператора.

Отметим, что задача определения сильно инвариантного множества $\langle v_0, w_0\rangle$ у оператора T сводится, по существу, к нахождению инвариантного в обычном смысле конусного отрезка

$$\langle (v_0, w_0), (w_0, v_0)\rangle$$

у монотонного оператора $\widetilde{T}$

Упражнение 15.5. Проверьте, что для гетерогенного оператора, действующего в R^n, из обычной инвариантности конусного отрезка вытекает сильная инвариантность.

15.5. Нелинейная эллиптическая задача. Рассмотрим краевую задачу (см. раздел 2.6)

$$Lx = f(t, x), \quad x(t)|_{t \in \Gamma} = 0 \tag{15.13}$$

с эллиптическим оператором L второго порядка, эквивалентную решению интегрального уравнения

$$x(t) = \int_{\Omega} G(t, s) f[s, x(s)]\, ds,$$

где G — функция Грина первой краевой задачи.

Пусть функция $f(t, u)$ в (15.13) непрерывна по совокупности переменных ($t \in \Omega$, $u \in (-\infty, \infty)$). Тогда оператор

$$Tx(t) = \int_{\Omega} G(t, s) f[s, x(s)]\, ds, \tag{15.14}$$

отображая в себя пространство C, вполне непрерывен. Если $f(t, u) \geqslant 0$, при $u \geqslant 0$ то, в силу $G(t, s) \geqslant 0$, оператор (15.14) оставляет инвариантным конус K неотрицательных функций в пространстве C.

Пусть существует неотрицательная функция $\hat{f}(t, v, w)$, монотонно возрастающая по v и монотонно убывающая по w и такая, что $\hat{f}(t, u, u) = f(t, u)$. Очевидно, оператор (15.14) в этом случае будет гетеротонным, а оператор

$$\hat{T}(v(t), w(t)) = \int_{\Omega} G(t, s) \hat{f}[s, v(s), w(s)]\, ds \tag{15.15}$$

сопутствующим ему. Если функция $\hat{f}(t, v, w)$ непрерывна по совокупности переменных, то оператор (15.15) действует из $C[\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ в $C[\overline{\Omega}]$ и вполне непрерывен.

Заметим, что в данном случае можно указать множество ненулевой меры такое, что

$$\int_{\Omega_1} G(t, s)\, ds \geqslant \varepsilon_0 > 0 \quad (t \in \Omega_1)$$

Далее, $\chi(t)$ обозначает характеристическую функцию множества Ω_1.

Теорема 15.8. *Пусть существует пара чисел v, w таких, что $0 \leqslant v \leqslant w$*

$$\hat{f}(t, v, w) \geqslant \alpha v, \quad \hat{f}(t, w, v) \leqslant \beta w \quad (t \in \Omega), \tag{15.16}$$

где

$$\alpha \geqslant \varepsilon_0^{-1}, \quad \beta \leqslant \| G \|^{-1} \tag{15.17}$$

($\| G \|$ — норма линейного оператора G в пространстве C).

Тогда краевая задача (15.13) имеет в C по крайней мере одно решение $x^*(t)$. При этом

$$\hat{T}(v\chi(t), w) \leqslant x^*(t) \leqslant \hat{T}(w, v\chi(t)). \tag{15.18}$$

Доказательство. Учитывая (15.16), (15.17), получаем

$$\hat{T}(v\chi(t), w) = \int_{\Omega} G(t, s) \hat{f}[s, v\chi(s), w]\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \alpha \int_{\Omega} G(t, s) v\chi(s)\, ds \geqslant \alpha\varepsilon_0 v\chi(t) \geqslant v\chi(t).$$

Аналогично

$$\hat{T}(w, v\chi(t)) \leqslant \beta w \int_{\Omega} G(t, s)\, ds \leqslant \beta \, \| G \| \, w \leqslant w.$$

Поэтому (если $\hat{T}$ рассматривать как оператор, действующий в пространстве суммируемых функций) следует признать, что конусный отрезок $\langle v_0, w_0 \rangle$, где $v_0(t) = v\chi(t)$, $w_0(t) = w$, является сильно инвариантным для T. Отсюда, в свою очередь, вытекает (см. предыдущий раздел), что конусный отрезок $\langle v_1, w_1 \rangle$, где

$$v_1(t) = \hat{T}(v\chi(t), w), \quad w_1(t) = \hat{T}(w, v\chi(t)),$$

также сильно инвариантен (а значит инвариантен и в обычном смысле) для T.

Теперь остается заметить, что $v_1, w_1 \in C$, и оператор T отображает в себя ограниченное, замкнутое и выпуклое множество $\langle v_1, w_1 \rangle \subset C$. В этих условиях существование решения $x^*(t)$, удовлетворяющего неравенствам (15.18) (т. е. $x^* \in \langle v_1, w_1 \rangle$, вытекает из принципа Шаудера. ■

Теорема 15.9. *Пусть выполнены предположения теоремы 15.7, и для любых чисел v, w, и таких, что $0 \leqslant v \leqslant w$, $0 < u < w$, при всех $s \in \Omega$ имеет место неравенство*

$$\hat{f}(s, v+u, w-u) < \hat{f}(s, v, w) + u \, \| G \|^{-1}. \tag{15.19}$$

Тогда решение $x^*(t)$ краевой задачи (15.13) единственно, и может быть получено методом последовательных приближений

$$x_{n+1}(t) = \int_{\Omega} G(t, s) f[s, x_n(s)]\, ds, \tag{15.20}$$

где $x_0(t) \in \langle v_0, w_0 \rangle$.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что хотя бы в одной точке $t_0 \in \Omega$

$$\begin{gathered} \int_{\Omega} G(t_0, s) \hat{f}[s, v(s) + u(s), w(s) - u(s)]\, ds < \\ < \int_{\Omega} G(t_0, s) \hat{f}[s, v(s), w(s)]\, ds + u(t_0), \end{gathered} \tag{15.21}$$

где функции $u(t)$ и $w(t) - v(t)$ неотрицательны и не равны тождественно нулю, и

$$v, w, v+u, w-u \in \langle v_1, w_1 \rangle. \tag{15.22}$$

Пусть $u(t)$ принимает максимальное значение в точке t_0. Из (15.22) следует $t_0 \in \Omega$. Теперь, учитывая (15.19), легко приходим к (15.21). Действительно,

$$\int_\Omega G(t_0, s) \hat{f}[s, v(s)+u(s), w(s)-u(s)]\, ds <$$

$$< \int_\Omega G(t_0, s) \hat{f}[s, v(s), w(s)]\, ds + u(t_0) \| G \|^{-1} \int_\Omega G(t_0, s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega G(t_0, s) \hat{f}[s, v(s), w(s)]\, ds + u(t_0) \blacksquare$$

Упражнение 15.6. Проанализируйте возможности одновременного использования нескольких сопутствующих операторов. Например,

$$T_1(x, \quad \equiv T_2(x, x) \equiv \hat{T}(x, x).$$

Рассмотрите итерационные процессы вида

$$v_{n+1} = T_1(v_n, w_n), \quad w_{n+1} = T_2(w_n, v_n).$$

Упражнение 15.7. Гетеротонный оператор по существу определяется так. $T(x) \equiv \hat{T}(x, x)$ и оператор $\hat{T}(v, w)$ монотонно возрастает по v по конусу K, по w по конусу $-K$. Рассмотрите возможность замены в такой формулировке определения конуса $-K$ неким другим.

ГЛАВА IV

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ОПЕРАТОРОВ

В предыдущей главе рассматривались достаточно общие классы операторов. Выводы при этом тоже были достаточно общими. При попытке ответить на более специальные вопросы (единственность решения, наличие непрерывных ветвей решений, бифуркации) возникает необходимость введения дополнительных предположений и выделения таким образом специальных подклассов отображений. На этом пути имеется масса возможностей, выбор которых желательно производить, сохраняя чувство меры. По этой причине мы ограничиваемся в основном теорией монотонных вогнутых операторов, которая проста, удобна и эффективна в решении самых разнообразных прикладных вопросов.

§ 16. ПСЕВДОВОГНУТЫЕ ОПЕРАТОРЫ

16.1. Общие свойства. Напомним основные определения.

Гетеротонный на K оператор T назовем *псевдовогнутым*, если для любых $v, w \in K$ ($v, w \neq \theta$) имеет место $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$, т. е. существуют положительные числа α и β такие, что

$$\alpha u_0 \leqslant \hat{T}(v, w) \leqslant \beta u_0, \tag{16.1}$$

и для любых $v, w \in K(u_0)$ и любого $\tau \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{T}(v, w). \tag{16.2}$$

Псевдовогнутый оператор T назовем *u_0-псевдовогнутым*, если для любых $v, w \in K(u_0)$ и любого $\tau \in (0, 1)$ существует $\eta(v, w, \tau) > 0$ такое, что

Выделим еще один класс операторов.

Псевдовогнутый оператор T назовем *равномерно псевдовогнутым*, если для любого конусного отрезка $\langle \mu u_0, \nu u_0 \rangle$ $(\mu, \nu > 0)$ и любого сегмента $[a, b] \subset (0, 1)$ существует $\eta(\mu, \nu, a, b) > 0$ такое, что для всех $v, w \in \langle \mu u_0, \nu u_0 \rangle$, $\tau \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geqslant [1 + \eta(\mu, \nu, a, b)] \tau \hat{T}(v, w). \qquad (16.4)$$

Замечание. Если для монотонного оператора T используется сопутствующий $\hat{T}(v, w) = T(v)$, то определение псевдовогнутого (u_0-псевдовогнутого, равномерно псевдовогнутого) оператора переходит в определение вогнутого (u_0-вогнутого, равномерно вогнутого) оператора.

При изучении псевдовогнутых операторов весьма эффективным является систематическое использование *метрики Биркгофа*

$$\rho(x, y) = \min \{\alpha : e^{-\alpha} x \leqslant y \leqslant e^{\alpha} x\} \quad (x, y \in K(u_0)) \qquad (16.5)$$

Аксиомы метрики здесь проверяются без труда. Любой конусный отрезок, содержащийся в $K(u_0)$, является полным пространством по метрике (16.5). Из сходимости по метрике (16.5) вытекает сходимость по u_0-норме и, тем более, по исходной норме пространства E. Топологии, порождаемые на $K(u_0)$ метрикой ρ и u_0-нормой, совпадают.

Теорема 16.1. *Любой псевдовогнутый оператор T непрерывен на $K(u_0)$ по u_0-норме.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из топологической эквивалентности метрики ρ и u_0-нормы на $K(u_0)$ и того факта, что T является нерастягивающимся на $K(u_0)$ по метрике ρ. Последний устанавливается весьма просто. Используя очевидные неравенства $x \leqslant e^{\rho(x, y)} y$, $y \leqslant e^{\rho(x, y)} x$ и псевдовогнутость T, получаем

$$T(x) = \hat{T}(x, x) \geqslant \hat{T}(e^{-\rho(x, y)} y, e^{\rho(x, y)} y) \geqslant e^{-\rho(x, y)} T(y).$$

Аналогично

$$T(y) = \hat{T}(y, y) \geqslant \hat{T}(e^{-\rho(x, y)} x, e^{\rho(x, y)} x) \geqslant e^{-\rho(x, y)} T(x).$$

Следовательно, $\rho(T(x), T(y)) \leqslant \rho(x, y)$. ■

Замечание 1. В тех случаях, когда u_0-норма совпадает с исходной нормой пространства E или, по крайней мере, эквивалентна ей, псевдовогнутый оператор T будет непрерывным по исходной норме. Это имеет место, например, в случае пространства $C[0, 1]$, полуупорядоченного конусом неотрицательных функций, и выбора в качестве u_0 элемента $u_0(t) \equiv 1$.

Замечание 2. Легко видеть, что достаточным условием непрерывности гетеротонного оператора T на $K(u_0)$ по u_0-норме является справедливость неравенства (для любых $x \in K(u_0)$, $\tau \in (0, 1)$)

$$\hat{T}\left(\tau x, \frac{1}{\tau} x\right) \geqslant \alpha\tau T(x), \quad \alpha > 0$$

которое менее ограничительно, чем (16.2).

Иногда более удобным оказывается несколько иное определение u_0-псевдовогнутого оператора: псевдовогнутый оператор T называется u_0-псевдовогнутым, если для любых v, $w \in K(u_0)$ и любого сегмента $[a, b] \subset (0, 1)$ существует $\eta(v, w, a, b) > 0$ такое, что для любого $\tau \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geqslant [1 + \eta(v, w, a, b)]\, \tau \hat{T}(v, w). \tag{16.3}$$

Аналогичная ситуация имеет место и в частном случае монотонных u_0-вогнутых операторов, где, по мере надобности, обычно используется то или иное определение. При этом следует отметить, что первое (исходное) определение представляется менее ограничительным (оно немедленно вытекает из второго) и более удобным с точки зрения практической проверки. Второе же определение делает эффективными некоторые способы доказательства, которые при непосредственном использовании первого просто не работают. Тем не менее, как показывает следующая теорема, дилеммы выбора определения здесь не существует.

Теорема 16.2. *Оба определения u_0-псевдовогнутого оператора эквивалентны.*

То, что оператор, u_0-псевдовогнутый в смысле второго определения, u_0-псевдовогнут в смысле первого, — очевидно. Обратная импликация немедленно следует из приводимого ниже вспомогательного утверждения.

Лемма 16.1. *При любых фиксированных v, $w \in K(u_0)$ функция $\eta(v, w, \tau) > 0$, удовлетворяющая неравенству (16.3), может быть выбрана непрерывной по τ.*

Справедливость леммы 16.1 будет установлена далее.

Лемма 16.2. *Пусть оператор T псевдовогнут. Тогда для любых x, $y \in K(u_0)$ и любого $\tau \in (0, 1)$ выполняется неравенство*

$$\hat{T}\left(\frac{1}{\tau} x, \tau y\right) < \frac{1}{\tau} \hat{T}(x, y). \tag{16.6}$$

Неравенство (16.6) получается из (16.2) с помощью замены $\tau v = x$, $\frac{1}{\tau} w = y$. ■

Лемма 16.3. *Пусть оператор T псевдовогнут и* $\min(\alpha, \beta) \in (0, 1)$. *Тогда для любых v, $w \in K(u_0)$ имеют место неравенства*

$$\hat{T}\left(\alpha v, \frac{1}{\beta} w\right) > \min(\alpha, \beta) \hat{T}(v, w).$$

$$\hat{T}\left(\frac{1}{\alpha} v, \beta w\right) < \frac{1}{\min(\alpha, \beta)} \hat{T}(v, w).$$

Доказательство. Рассмотрим два взаимоисключающих случая: 1) $\alpha \leqslant \beta$, — тогда

$$\hat{T}\left(\alpha v, \frac{1}{\beta} w\right) \geqslant \hat{T}\left(\alpha v, \frac{1}{\alpha} w\right) > \alpha \hat{T}(v, w) = \min(\alpha, \beta) \hat{T}(v, w),$$

2) $\alpha > \beta$, — тогда

$$\hat{T}\left(\alpha v, \frac{1}{\beta} w\right) \geqslant \hat{T}\left(\beta v, \frac{1}{\beta} w\right) > \beta \hat{T}(v, w) = \min(\alpha, \beta) \hat{T}(v, w).$$

Справедливость второго неравенства устанавливается аналогично (на основе использования леммы (16.2). ■

В дальнейшем нам потребуются также аналоги лемм 16.2, 16.3 для u_0-псевдовогнутых операторов. Их формулировка и доказательство очевидны, — и поэтому не приводятся.

В теореме 16.1 была доказана непрерывность T на $K(u_0)$ по u_0-норме. Установим более общий результат. Для этого введем в множество пар элементов $(v, w) \in K(u_0) \times K(u_0)$ метрику

$$\tilde{\rho}[(v, w), (v', w')] = \max\{\rho(v, v'), \rho(w, w')\}.$$

Заметим, что топология, порождаемая метрикой $\tilde{\rho}$, совпадает с топологией, порождаемой в множестве $K(u_0) \times K(u_0)$ нормой

$$\|(v, w)\|^*_{u_0} = \max\{\|v\|_{u_0}, \|w\|_{u_0}\}.$$

Теперь можно говорить о непрерывности сопутствующего оператора $\hat{T}: K(u_0) \times K(u_0) \to K(u_0)$ по u_0-норме.

Теорема 16.3. *Если оператор T псевдовогнут, то сопутствующий ему оператор $\hat{T}: K(u_0) \times K(u_0) \to K(u_0)$ непрерывен по u_0-норме.*

Доказательство. Рассмотрим две пары элементов (v, w), (v', w') из $K(u_0) \times K(u_0)$. Используя определение метрики $\tilde{\rho}$, псевдовогнутость T и лемму 16.3, получаем

$$\hat{T}(v, w) \geqslant \hat{T}(e^{-\rho(v, v')} v' \quad e^{\rho(w, w')} w') >$$

$$> \exp(-\max\{\rho(v, v'), \rho(w, w')\}) \hat{T}(v', w') =$$

$$= e^{-\tilde{\rho}[(v', \qquad (v, w)]} \hat{T}(v', w').$$

Аналогично

$$\hat{T}(v' \quad w') > e^{-\tilde{\rho}[(v', w'), (v, w)]} \hat{T}(v, w)$$

Следовательно,

$$\rho(\hat{T}(v, w), \hat{T}(v', w')) \leqslant \tilde{\rho}[(v', w'), (v, w)]. \blacksquare$$

Доказательство леммы 16.1 теперь довольно просто. Определим значение функции η в точке $(v, \quad \tau)$ равным максимальному числу, удовлетворяющему неравенству (16.3). Опираясь на теорему 16.3, нетрудно видеть, что так определенная функция η будет непрерывной по τ. Более того, построенная указанным образом функция будет непрерывной не только по τ, но и по совокупности переменных (и даже равномерно непрерывной по совокупности переменных на любом ограниченном замкнутом множестве). $\blacksquare$

16.2. Теоремы единственности. Если не входить в детали, то можно сказать, что основное достоинство псевдовогнутых операторов — единственность неподвижной точки и сходимость ней последовательных приближений. К сожалению, этот факт нельзя отразить одной теоремой, так как возникающие вариации предположений и выводов довольно широки.

Лемма 16.4. *Для u_0-псевдовогнутого оператора T условие a° (§ 15) на $K(u_0)$ выполняется автоматически.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть имеется решение системы уравнений (15.7) (v, w) такое, что $v, w \in K(u_0)$, $v \neq w$. Тогда

$$v = \hat{T}(v, w) \geqslant \hat{T}(e^{-\rho(v, y)} w, e^{\rho(v, w)} v) \geqslant (1+\eta) e^{-\rho(v, w)} \hat{T}(w\ \ v) =$$
$$= [1 + \eta(w, v, e^{-\rho(v, w)})] e^{-\rho(v, w)} w,$$
$$w = \dots \geqslant [1 + \eta(v, w, e^{-\rho(v, w)})] e^{-\rho(v, w)} v,$$

что противоречит определению метрики ρ. Лемма доказана. ■

Совершенно аналогично доказывается

Лемма 16.5. *u_0-псевдовогнутый оператор не может иметь на $K(u_0)$ более одной неподвижной точки.* ■

Объединение лемм 16.4, 16.5 с утверждениями § 15 приводит к ряду новых результатов.

Теорема 16.4. *Пусть u_0-псевдовогнутый оператор T имеет сильно инвариантный конусный отрезок $\langle v_0, w_0\rangle \subset K(u_0)$ и выполнено хотя бы одно из условий 1) — 3) теоремы 15.5. Тогда оператор T имеет единственную неподвижную точку $x^* \in K(u_0)$.* ■

Теорема 16.5. *Пусть u_0-псевдовогнутый оператор T непрерывен, имеет сильно инвариантный конусный отрезок $\langle v_0, w_0\rangle \subset K(u_0)$ и выполнено хотя бы одно из условий 1° — 2° леммы 15.1. Тогда оператор T имеет единственную неподвижную точку $x^* \in K(u_0)$, к которой сходятся последовательные итерации $T^n(x)$ при любом $x \in K$, $x \neq \theta$*.*

Доказательство. Утверждение теоремы было бы очевидно, если бы утверждалась сходимость $T^n(x) \to x^*$ для $x \in \langle v_0, w_0\rangle$. Однако, в случае существования у псевдовогнутого оператора T ненулевой неподвижной точки x^*, всегда можно указать сильно инвариантный конусный отрезок $\langle \tilde{v}, \tilde{w}\rangle$, который содержит любую наперед заданную точку $x \in K(u_0)$. Действительно, пусть задан некоторый элемент $x \in K(u_0)$. Выберем $\tau \in (0, 1)$ из условия $\tau x^* \leqslant \leqslant x \leqslant \frac{1}{\tau} x^*$, и положим $\tilde{v} = \tau x^*$, $\tilde{w} = \frac{1}{\tau} x^*$. Сильная инвариантность конусного отрезка легко проверяется

$$\hat{T}\left(\tau x^*, \frac{1}{\tau} x^*\right) \geqslant \tau \hat{T}(x^*, x^*) = \tau x^*,$$

$$\hat{T}\left(\frac{1}{\tau} x^*, \tau x^*\right) \leqslant \frac{1}{\tau} \hat{T}(x^*, x^*) = \frac{1}{\tau} x^*.$$

* Можно рассматривать операторы, определенные лишь на элементах $x \in K(u_0)$. Теорема 16.5 в этом случае (а также аналогичные результаты, см. далее) остается справедливой, если утверждается сходимость $T^n(x) \to x^*$ лишь для $x \in K(u_0)$.

для завершения доказательства остается заметить, что в силу (16.1), первая итерация $T(x)$ переводит любую точку $x \in K$, $x \neq \theta$ в $K(u_0)$. ■

Приведенное выше замечание о существовании у псевдовогнутого оператора, имеющего ненулевую неподвижную точку, „сколь угодно большого" сильно инвариантного конусного отрезка подсказывает очевидный вариант переформулировки теоремы 16.5, который на основе использования нового способа доказательства может быть также значительно усилен.

Теорема 16.6. *Пусть u_0-псевдовогнутый оператор T имеет ненулевую неподвижную точку $x^* \in K$. Тогда для любого $x \in K$, $x \neq \theta$ последовательные итерации $T^n(x)$ сходятся к x^* по u_0-норме.*

Доказательство. В силу (16.1), $x^* \in K(u_0)$ и, без ограничения общности, в $T^n(x)$ можно считать $x \in K(u_0)$. Выберем $\tau \in (0, 1)$ так, чтобы $\tau x^* \leqslant x \leqslant \frac{1}{\tau} x^*$. Как уже отмечалось (см. доказательство теоремы 16.5), конусный отрезок $\langle \tau x^*, \frac{1}{\tau} x^* \rangle$ является сильно инвариантным для T.

Положим $v_0 = \tau x^*$, $w_0 = \frac{1}{\tau} x^*$, и рассмотрим итерационную процедуру (15.8), т. е.

$$v_{n+1} = \hat{T}(v_n, w_n), \quad w_{n+1} = \hat{T}(w_n, v_n).$$

Очевидно, (см. § 15)

$$\tau x^* = v_0 \leqslant \ldots \leqslant v_n \leqslant \ldots \leqslant x^* \leqslant \ldots \leqslant w_n \leqslant \ldots \leqslant w_0 = \frac{1}{\tau} x^* \qquad (16.7)$$

Обозначим через α_n максимальное число, для которого выполняется неравенство $\alpha_n x^* \leqslant v_n$, через β_n — максимальное число, для которого — $w_n \leqslant \frac{1}{\beta_n} x^*$. В силу (16.7),

$$0 < \tau = \alpha_0 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n \leqslant \cdots \leqslant 1,$$

$$0 < \tau = \beta_0 \leqslant \cdots \leqslant \beta_n \leqslant \cdots \leqslant 1,$$

откуда следует существование пределов

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha, \quad \lim_{n \to \infty} \beta_n = \beta.$$

Теорема будет доказана, если показать, что $\alpha = \beta = 1$. Предположим противное, т. е. $\xi = \min(\alpha, \beta) < 1$.

В силу существования пределов α, β и монотонности возрастания последовательностей α_n, β_n — для любого $\varkappa$ $(0<\varkappa<\xi)$ найдется такое N, что для всех $n \geqslant N$ будет

$$0<\varkappa \leqslant \min(\alpha_n, \beta_n) \leqslant \xi < 1. \tag{16.8}$$

Учитывая определение чисел α_n, β_n и неравенство (16 8), а также используя второе определение u_0-псевдовогнутого оператора (эквивалентное исходному (теорема 16.2)) и очевидный аналог леммы 16.3 для случая u_0-псевдовогнутого оператора, получаем $(n \geqslant N)$

$$\begin{gathered} v_{n+1} = \hat{T}(v_n, w_n) \geqslant \hat{T}\left(\alpha_n x^*, \frac{1}{\beta_n} x^*\right) \geqslant \\ \geqslant [1+\eta(x^*, x^*, \varkappa, \xi)] \min(\alpha_n, \beta_n) x^*, \end{gathered} \tag{16.9}$$

$$\begin{gathered} w_{n+1} = \hat{T}(w_n, v_n) \leqslant \hat{T}\left(\frac{1}{\beta_n} x^*, \alpha_n x^*\right) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{1+\eta(x^*, x^*, \varkappa, \xi)} \frac{x^*}{\min(\alpha_n, \beta_n)}. \end{gathered} \tag{16.10}$$

Сравнивая (16.9), (16.10) с определением чисел α_n, β_n, приходим к неравенству

$$\min(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) \geqslant [1+\eta(x^*, x^*, \varkappa, \xi)] \min(\alpha_n, \beta_n),$$

откуда $(k \geqslant 0)$

$$\min(\alpha_{N+k}, \beta_{N+k}) \geqslant [1+\eta(x^*, x^*, \varkappa, \xi)]^k \varkappa,$$

что противоречит предположению $\xi<1$. ■

Подчеркнем, что теорема остается справедливой даже без пред, положения о нормальности конуса K. Если конус K нормален то к выводам теоремы 16.6 можно присовокупить сходимость $T^n(x) \to x^*$ по исходной норме пространства E.

Рассмотрим свойства равномерно псевдовогнутых операторов. Укажем сначала два вспомогательных результата.

Лемма 16.6. *При любых фиксированных* $\mu, \nu>0$ *и* $a \in (0, 1)$ *функция* $\eta(\mu, \nu, a, b)>0$, *удовлетворяющая неравенству (4.4), может быть выбрана непрерывной по* $b \in [a, 1)$.

Доказательство элементарно. ■

Лемма 16.7. *Пусть оператор* T, *отображающий в себя полное метрическое пространство* (X, ρ), *удовлетворяет условию*

$$\rho(T(x), T(y)) \leqslant \rho(x, y) - \Delta[\rho(x, y)], \quad (x, y \in X)$$

где $\Delta(r)$ — *непрерывная положительная при* $r>0$ *функция. Тогда оператор* T *имеет единственную неподвижную точку* $x^* \in X$ *и* $T^n(x) \to x^*$ *при любом* $x \in X$. ■

Лемма 16.7 представляет собой частную формулировку принципа обобщенного сжатия М. А. Красносельского.

Теорема 16.7. *Пусть равномерно псевдовогнутый оператор* T *имеет инвариантный* конусный отрезок* $\langle \mu u_0, \nu u_0 \rangle \subset K(u_0)$. *Тогда оператор* T *имеет единственную неподвижную точку* $x^* \in \langle \mu u_0, \nu u_0 \rangle$, *к которой сходятся по* u_0*-норме последовательные итерации* $T^n(x)$ *при любом* $x \in K$, $x \neq \theta$.

Доказательство. Пусть $x, y \in \langle \mu u_0, \nu u_0 \rangle$ Тогда, очевидно, $x \leqslant \left(\frac{\nu}{\mu}\right) y$, $y \leqslant \left(\frac{\nu}{\mu}\right) x$. Поэтому $\frac{\mu}{\nu} \leqslant e^{-\rho(x, y)}$. Используя свойства гетеротонности и равномерной псевдовогнутости оператора T, а также очевидные неравенства (см. определение метрики ρ (2.5)) $x \leqslant e^{\rho(x, y)} y$, $y \leqslant e^{\rho(x, y)} x$, получаем

$$T(y) = \hat{T}(y, y) \geqslant \hat{T}(e^{-\rho(x, y)} x, e^{\rho(x, y)} x) \geqslant$$

$$\geqslant \left[1 + \eta\left(\mu, \nu, \frac{\mu}{\nu}, e^{-\rho(x, y)}\right)\right] e^{-\rho(x, y)} T(x).$$

Аналогично

$$T(x) \geqslant \left[1 + \eta\left(\mu, \nu, \frac{\mu}{\nu}, e^{-\rho(x, y)}\right)\right] e^{-\rho(x, y)} T(y).$$

Откуда

$$\rho(T(x), T(y)) \leqslant \rho(x, y) - \ln\left[1 + \eta\left(\mu, \nu, \frac{\mu}{\nu}, e^{-\rho(x, y)}\right)\right]$$

Применяя теперь леммы 16.6, 16,7, делаем вывод о существовании и единственности неподвижной точки $x^* \in \langle \mu u_0, \nu u_0 \rangle$ (и о сходимости $T^n(x) \to x^*$ по u_0-норме при любом $x \in \langle \mu u_0, \nu u_0 \rangle$). Сходимость $T^n(x) \to x^*$ по u_0-норме при любом $x \in K$, $x \neq \theta$ вытекает из утверждения теоремы 16.6. ■

Дополнительными полезными свойствами обладают равномерно псевдовогнутые операторы, которые удовлетворяют неравенству (16.4) с функцией η, не зависящей от μ и ν. Рассмотрим специальный подкласс таких операторов.

Псевдовогнутый оператор T назовем $\varkappa$-*псевдовогнутым*, если для любых $v, w \in K(u_0)$ и любого $\tau \in (0, 1)$ имеет место неравенство

* Подчеркнем, что сильная инвариантность не предполагается.

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geqslant \tau^{\varkappa} \hat{T}(v, w), \quad \varkappa \in (0, 1). \tag{16.11}$$

Очевидно, $\varkappa$-псевдовогнутый оператор является равномерно псевдовогнутым, поскольку из (16.11) следует

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geqslant \tau[1+(\tau^{\varkappa-1}-1)]\, \hat{T}(v, w).$$

Теорема 16.8. *Пусть оператор T $\varkappa$-псевдовогнут. Тогда T имеет инвариантный конусный отрезок $\langle v_0, w_0\rangle \subset K(u_0)$.*

Доказательство. Выберем величину α из условия

$$\alpha^{1-\varkappa} u_0 \leqslant T(u_0) \leqslant \frac{1}{\alpha^{1-\varkappa}} u_0.$$

Существование такого α следует из (16.1). Тогда конусный отрезок $\langle \alpha u_0, \frac{1}{\alpha} u_0\rangle$ будет искомым. Действительно, для $x \in \langle \alpha u_0, \frac{1}{\alpha} u_0\rangle$ имеем

$$\alpha u_0 \leqslant \alpha^{\varkappa} T(u_0) \leqslant \hat{T}\left(\alpha u_0, \frac{1}{\alpha} u_0\right) \leqslant \hat{T}(x, x) = T(x) \leqslant$$

$$\leqslant \hat{T}\left(\frac{1}{\alpha} u_0, \alpha u_0\right) \leqslant \frac{1}{\alpha^{\varkappa}} T(u_0) \leqslant \frac{1}{\alpha} u_0. \blacksquare$$

Объединение теорем 16.7, 16.8 приводит к следующему результату.

Теорема 16.9. *Если оператор T $\varkappa$-псевдовогнут, то он имеет единственную неподвижную точку $x^* \in K(u_0)$, к которой сходятся по u_0-норме последовательные итерации $T^n(x)$ при любом $x \in K$, $x \neq \theta$.*

Теорема 16.9 может быть доказана также с помощью методики, которая использовалась при доказательстве теоремы 16.7. При этом получается, что оператор T является сжимающим по метрике ρ.

Вообще говоря, в (16.11) не обязательно использовать степенную функцию $\tau^{\varkappa}$. Можно ввести понятие φ-псевдовогнутого оператора, заменив в (16.11) $\tau^{\varkappa}$ на $\varphi(\tau)$, где функция $\varphi(\tau)$ непрерывна, $\varphi(\tau) > \tau$ при $\tau \in (0, 1)$, $\tau\varphi(\tau) \to 0$ и $\tau/\varphi(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$. Для φ-псевдовогнутых операторов утверждения теорем 16.8, 16.9 остаются в силе.

Обратим внимание на одно важное обстоятельство. Определения псевдовогнутых, u_0-псевдовогнутых и равномерно псевдовогнутых операторов можно в значительной степени ослабить в (смысле уменьшения исходных требований), оставляя справедливыми основные результаты параграфа.

Например, u_0-псевдовогнутый оператор можно было бы определить так Гетеротонный на K оператор T называется u_0-псевдовогнутым, если для любого $x \in K$ $(x \neq \theta)$ существуют $\alpha, \beta > 0$ такие, что $\alpha u_0 \leqslant T(x) \leqslant \beta u_0$, и для любого $x \in K(u_0)$ и любого сегмента $[a, b] \subset (0, 1)$ существуют $\eta(x, \quad b) > 0$, $\eta'(x, a, b) > 0$ такие, что при любом $\tau \in [a, b]$

$$\hat{T}\left(\tau x, \frac{1}{\tau} x\right) \geqslant (1+\eta)\tau T(x), \quad \hat{T}\left(\frac{1}{\tau} x, \tau x\right) \leqslant \frac{1}{(1+\eta')\tau} T(x). \quad (16.12)$$

Такое определение менее ограничительно. Первое неравенство (16.12) есть просто частный случай (16.3)' (при $v = w = x$), второе же неравенство (16.12) вытекает из (16.3)' и аналога леммы 16.2. Более того, второе неравенство (16.12) иногда непосредственно следует из первого (не считая тривиальных в данной ситуации случаев монотонного и антимонотонного операторов). В то же время, такое определение оставляет в силе теорему 16.6, которая является одним из наиболее существенных результатов для u_0-псевдовогнутых операторов. Лемма 16.4 (а значит и теоремы 16.4, 16.5) перестает быть справедливой (по крайней мере, приведенный способ доказательства не работает), однако остается в силе ее любопытный аналог (доказательство получается объединением утверждений леммы 15.1 и теоремы 16.6): если u_0-псевдовогнутый оператор T имеет ненулевую неподвижную точку $x^* \in K$, то на $K(u_0)$ справедливо a°, — который, правда, при наличии результата теоремы 16.6 не представляет ценности. В данном случае также удается установить эквивалентность определений типа (16.3) и (16.3)'

Аналогичное упрощение можно сделать при определении равномерно псевдовогнутого оператора. Более того, если в выводах теоремы 16.7 требовать сходимость $T^n(x) \to x^*$ по u_0-норме лишь для $x \in \langle \mu u_0, \nu u_0 \rangle$, то в определении равномерно псевдовогнутого оператора достаточно, чтобы (16.4) выполнялось лишь в частном случае $v = w = x \in \langle \mu u_0, \nu u_0 \rangle$. Аналог второго неравенства (16.12) здесь оказывается излишним.

Вообще говоря, приведенные замечания следует иметь в виду. Однако в конкретных задачах, как правило (что, возможно, связано с использованием специфических приемов построения сопутствующих операторов), условия типа (16.3) не представляются более ограничительными, чем (16.12), а трудоемкость проверки в том и другом случаях практически одинакова.

16.3. Признаки псевдовогнутости. Условия псевдовогнутости операторов того или иного конкретного вида будут рассматриваться далее. Здесь же приведем несколько признаков псевдовогнутости общего характера.

Теорема 16.10. *Пусть операторы T_1 и T_2 псевдовогнуты (u_0-псевдовогнуты, равномерно псевдовогнуты). Тогда операторы αT_1 ($\alpha>0$), T_1+T_2, $T_1 T_2$ также псевдовогнуты (u_0-псевдовогнуты, равномерно псевдовогнуты).* ■

Доказательство элементарно. Безусловно, имеется в виду, что в определении псевдовогнутых операторов, о сумме и композиции которых идет речь, фигурирует один и тот же элемент u_0.

Отметим также справедливость утверждения: если оператор T_1 является u_0-псевдовогнутым, а T_2 — псевдовогнутым, то операторы T_1+T_2, $T_1 T_2$ и $T_2 T_1$ — u_0-псевдовогнуты.

Достаточные признаки псевдовогнутости могут быть сформулированы в терминах производных. Пусть для любых $v, w \in K$ существуют производные $\hat{T}'_v(v, w)$ (по конусу K) и $\hat{T}'_w(v, w)$ (по конусу $-K$), и пусть для любых $v, w \in K$ и $\tau \in (0, 1]$ значение оператора $\hat{T}$ в точке $\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right)$ может быть представлено в виде

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) = z(v, w) + \int_0^\tau \hat{T}'_v\left(\sigma v, \frac{1}{\sigma} w\right) v\,d\sigma -$$

$$- \int_0^\tau \frac{1}{\sigma^2} \hat{T}'_w\left(\sigma v, \frac{1}{\sigma} w\right) w\,d\sigma.$$

Существование элемента $z(v, w) \in K$ обычно легко установить в случае правильного конуса K, — $z(v, w)$ является предельным элементом для ограниченной и монотонно убывающей при $\tau \to 0$ функции $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right)$

Тогда неравенство (16.2) вытекает из условий ($v, w \in K$, $0<\alpha_1<\alpha_2<1$)

$$\hat{T}'_v\left(\alpha_1 v,\ \frac{1}{\alpha_1} w\right) v > \hat{T}'_v\left(\alpha_2 v,\ \frac{1}{\alpha_2} w\right) v, \tag{16.13}$$

$$\frac{1}{\alpha_1^2}\hat{T}'_w\left(\alpha_1 v,\ \frac{1}{\alpha_1} w\right) w < \frac{1}{\alpha_2^2}\hat{T}'_w\left(\alpha_2 v,\ \frac{1}{\alpha_2} w\right) w. \tag{16.14}$$

Действительно, в этом случае ($\tau \in (0,\ 1)$)

$$\hat{T}\left(\tau v,\ \frac{1}{\tau} w\right) = z(v,\ w) + \tau \int_0^1 \hat{T}'_v\left(\tau\sigma v,\ \frac{1}{\tau\sigma} w\right) v d\sigma -$$

$$\tau \int_0^1 \frac{1}{(\tau\sigma)^2} \hat{T}'_w\left(\tau\sigma v,\ \frac{1}{\tau\sigma} w\right) w d\sigma >$$

$$> z(v,\ w) + \tau \int_0^1 \hat{T}'_v\left(\sigma v,\ \frac{1}{\sigma} w\right) v d\sigma -$$

$$- \tau \int_0^1 \frac{1}{\sigma^2} \hat{T}'_w\left(\sigma v,\ \frac{1}{\sigma} w\right) w d\sigma =$$

$$= (1 - \tau)\, z(v,\ w) + \tau \hat{T}(v,\ w).$$

Условие (16.1) может быть установлено отдельно, а также на основе проверки u_0-измеримости элементов $z(v,\ w)$ и проверки неравенств типа (16.1) для операторов $\hat{T}'_v\left(\tau v,\ \frac{1}{\tau} w\right) v$ и

$$\hat{T}'_w\left(\tau v,\ \frac{1}{\tau} w\right) w.$$

Иногда более удобным оказывается следующий признак псевдовогнутости оператора.

Теорема 16.11. *Пусть при любых $v,\ w \in K$ ($v,\ w \neq \theta$) существуют производные Фреше $\hat{T}'_v(v,\ w)$ и $\hat{T}'_w(v,\ w)$, и*

$$\Phi(v,\ w) = \hat{T}(v,\ w) - \hat{T}'_v(v,\ w)\, v + \hat{T}'_w(v,\ w)\, w \geqslant \theta. \tag{16.15}$$

Тогда оператор T псевдовогнут.

Доказательство. Предположим противное, т. е. найдутся ненулевые точки $v_0,\ w_0 \in K$ и такое $\tau_0 \in (0,\ 1)$, что

$$z_0=\hat{T}\left(\tau_0 v_0, \frac{1}{\tau_0} w_0\right)-\tau_0 \hat{T}(v_0, w_0) \notin K.$$

Тогда существует линейный разделяющий функционал $l(x)$ такой, что $l(x)\geqslant 0$ при $x \in K$ и $l(z_0)<0$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\omega(\tau)=l\left[\frac{1}{\tau}\hat{T}\left(\tau v_0, \frac{1}{\tau} w_0\right)-\hat{T}(v_0, w_0)\right], \quad \tau \in (0, 1].$$

Легко проверить, что

$$\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}=-\frac{l\left[\Phi\left(\tau v_0, \frac{1}{\tau} w_0\right)\right]}{\tau^2}. \tag{16.16}$$

Из (16.15), определения функционала $l(x)$ и (16.16) следует $\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\leqslant 0$, поэтому $\omega(\tau_0)\geqslant\omega(1)=0$. С другой стороны, $\omega(\tau_0)=$ $=\frac{1}{\tau_0} l(z_0)<0$. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

Обратим, наконец, внимание на возможность использования степеней операторов. Если при некотором целом $k>0$ оператор T^k имеет неподвижную точку x^* то отсюда, вообще говоря, не следует, что $T(x^*)=x^*$. Но в том случае, когда x^* является единственной неподвижной точкой T^k, — с необходимостью $T(x^*)=x^*$. Если, кроме того, $(T^k)^n(x)\to x^*$, то в этом случае также имеет место сходимость $T^n(x)\to x^*$ Это соображение очевидным образом приводит к формулировке ряда результатов, обобщающих предыдущие. Приведем два из них.

Теорема 16.12 *Пусть оператор T^k удовлетворяет условиям теоремы 16.5. Тогда оператор T имеет единственную неподвижную точку $x^*\in K(u_0)$, к которой сходятся последовательные итерации $T^n(x)$ при любом $x\in K$, $x\neq\theta$.* ■

Теорема 16.13. *Пусть оператор T^k удовлетворяет условиям теоремы 16.7. Тогда оператор T имеет единственную неподвижную точку $x^*\in\langle\mu u_0, \nu u_0\rangle$, к которой по u_0-норме сходятся последовательные итерации $T^n(x)$ при любом $x\in K$, $x\neq\theta$.* ■

16.4. Нелинейная эллиптическая задача. Вернемся к краевой задаче (15.13). Линейный оператор $\int\limits_{\Omega} G(t, s)\, x(s)\, ds$ обозначим через G.

Положим

$$u_0(t)=\int\limits_{\Omega} G(t, s)\,ds. \tag{16.17}$$

Лемма 16.8. *Линейный оператор G u_0-ограничен (элемент u_0 определяется формулой (16.17)), т. е. для любого $x \in K$, $x \neq \theta$ можно указать положительные $\alpha(x)$, $\beta(x)$ такие, что*

$$\alpha(x)\,u_0(t) \leqslant \int\limits_{\Omega} G(t, s)\,x(s)\,ds \leqslant \beta(x)\,u_0(t). \quad \blacksquare \tag{16.18}$$

Теорема 16.14. *Пусть выполнены предположения теоремы 15.7, и для любых положительных чисел v, w при любом $\tau \in (0, 1)$ выполняется неравенство*

$$\hat{f}\left(t, \tau v, \frac{1}{\tau}\,w\right) > \tau \hat{f}(t, v, w) \quad (t \in \Omega). \tag{16.19}$$

Тогда существует единственное ненулевое решение краевой задачи (15.13) $x^*(t) \in K$ и последовательные итерации (15.20) сходятся к $x^*(t)$ по u_0-норме при любом $x_0(t) \in K(u_0)$. Если, помимо этого, функция $\hat{f}(t, v, w)$ положительна, то последовательные итерации (15.20) сходятся к $x^*(t)$ по u_0-норме при любом $x_0(t) \in K$.

Доказательство. Пусть функции $v(t)$, $w(t)$ принадлежат множеству $K(u_0)$. Тогда найдутся точки $t \in \Omega$, в которых обе функции $v(t)$, $w(t)$ одновременно положительны. Из (16.19) следует, что в этих точках $t \in \Omega$ положительной будет также функция $\hat{f}[t, v(t), w(t)]$. Отсюда, в силу леммы 16.8,

$$\alpha(v, w)\,u_0(t) \leqslant \int\limits_{\Omega} G(t, s)\,\hat{f}[s, v(s), w(s)]\,ds \leqslant \beta(v, w)\,u_0(t), \tag{16.20}$$

где α, $\beta > 0$.

Если же функция $\hat{f}(t, v, w)$ положительна, то (16.20) справедливо не только для $v(t)$, $w(t) \in K(u_0)$, но и для любых $v(t)$, $w(t) \in K$. Это соображение и приводит к поправке в утверждении теоремы о начальном приближении $x_0(t)$. Пусть по-прежнему $v(t)$, $w(t) \in K(u_0)$. Из (16.19) и (16.20) следует

$$\int\limits_{\Omega} G(t, s)\left\{\hat{f}\left[s, \tau v(s), \frac{1}{\tau}\,w(s)\right] - \tau \hat{f}[s, v(s), w(s)]\right\} ds >$$

$$\geqslant \alpha_1(v, w)\,u_0(t). \quad (\alpha_1 > 0),$$

откуда

$$\int_\Omega G(t, s)\hat{f}\left[s, \tau v(s), \frac{1}{\tau} w(s)\right] ds \geqslant$$

$$\geqslant \tau\left(1+\frac{\alpha_1}{\beta\tau}\right)\int_\Omega G(t, s)\hat{f}[s, v(s), w(s)]\, ds.$$

Таким образом, оператор T u_0-псевдовогнут. Предположения теоремы 15.7 обеспечивают существование у T сильно инвариантного конусного отрезка. Требуемое заключение вытекает из теоремы 16.6. ■

Несколько более сильное предположение, чем (16.19), позволяет освободиться от необходимости искать сильно инвариантный конусный отрезок у оператора (15.14).

Теорема 16.15. *Пусть для любых положительных чисел v, w при любом $\tau \in (0, 1)$ выполняется неравенство*

$$\hat{f}\left(t, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau^{\varkappa} \hat{f}(t, v, w), \quad (t \in \Omega), \tag{16.21}$$

где $\varkappa \in (0, 1)$. Тогда существует единственное ненулевое решение краевой задачи (15.13) $x^*(t) \in K$ последовательные итерации (15.20) сходятся к $x^*(t)$ по u_0-норме при любом $x_0(t) \in K(u_0)$.

Доказательство элементарно. Условие (16.21) обеспечивает $\varkappa$-псевдовогнутость оператора T. Далее остается применить теорему 16.8. ■

16.5. Интегральные уравнения. В предыдущем разделе, по существу, исследовалось уравнение $x = T(x)$, где T — интегральный оператор Гаммерштейна. При этом использовалось то обстоятельство, что ядро $G(t, s)$ является функцией Грина первой краевой задачи для эллиптического уравнения. Естественно, что аналогичное исследование можно проводить, не выводя те или иные необходимые свойства ядра интегрального оператора из специфики исходной задачи, а просто постулируя их. С этой точки зрения здесь рассматриваются некоторые свойства интегрального оператора Урысона. Будут рассмотрены также системы интегральных уравнений типа Гаммерштейна, возникающие при исследовании двухточечной задачи.

Пусть Ω — замкнутое ограниченное множество конечномерного пространства. Рассмотрим нелинейный интегральный оператор Урысона с неотрицательным при $u \geqslant 0$ ядром $k(t, s, u)$

$$Ax(t)=\int_{\Omega} k[t, s, x(s)]\,ds. \qquad (16.22)$$

Далее рассматриваются операторы вида (16.22), действующие из C в C или из L_p в L_p $(p \geqslant 1)$.

Пусть существует функция $\hat{k}(t, s, v, w)$, которая при всех $t, s \in \Omega$ (или почти при всех $t, s \in \Omega$) монотонно возрастает по v и монотонно убывает по w и $\hat{k}(t, s, u, u)=k(t, s, u)$. Пусть, кроме того, оператор

$$\hat{A}(v(t), w(t))=\int_{\Omega} \hat{k}[t, s, v(s), w(s)]\,ds \qquad (16.23)$$

любую пару функций $v(t)$, $w(t)$ из $C\,(L_p)$ переводит в функцию из $C\,(L_p)$. Для простоты будем считать, что ядро оператора (16.23) $\hat{k}(t, s, v, w)$ непрерывно по совокупности переменных (при рассмотрении операторов (16.23), действующих в L_p, можно считать, что функция $\hat{k}(t, s, v, w)$ удовлетворяет условиям типа Каратеодори: при всех v, w она измерима по совокупности переменных $t, s \in \Omega \times \Omega$ и почти при всех $t, s \in \Omega \times \Omega$ непрерывна по v, w).

Нетрудно видеть, что при указанных условиях оператор (16.22) будет гетеротонным, а (16.23) — сопутствующим ему. (Пространство $C(L_p)$ считается полуупорядоченным конусом K неотрицательных функций)

При построении функции $\hat{k}(t, s, v, w)$ могут быть использованы самые различные соображения. Пусть, например, функция $k(t, s, u)$ допускает представление

$$\begin{aligned} k(t, s, u) = {} & \alpha_1 k_1^{+}(t, s, u)\,k_2^{-}(t, s, u)+\alpha_2 k_3^{+}(t, s, u)+ \\ & +\alpha_3 \min\{k_5^{+}(t, s, u), k_6^{-}(t, s, u)\}, \end{aligned} \qquad (16.24)$$

где $\alpha_i>0$; функции, отмеченные знаком $+$, монотонно возрастают по u, отмеченные знаком $-$, — убывают по Тогда для получения соответствующей функции $\hat{k}(t, s, v, w)$ достаточно в (16.24) те которые стоят под знаком монотонно возрастающих по u функций, заменить на v, остальные — на w.

Другой пример. Пусть функция $k(t, s, u)$ почти при всех фиксированных $t, s \in \Omega \times \Omega$ или не убывает, или не возрастает по u. Обозначим через G_t множество таких $s \in \Omega$, что функция $k(t, s, u)$ не убывает по u. Характеристическую функцию множества G_t обозначим $\chi_t(s)$. В указанных предположениях в качестве $\hat{k}(t, s, v, w)$ может быть выбрана функция

$$\hat{k}(t, s, v, w) = k(t, s, \chi_t(s) v + (1 - \chi_t(s)) w). \tag{16.25}$$

Если используется функция вида (16.25), то из обычной инвариантности конусного отрезка для оператора A следует его сильная инвариантность.

Теорема 16.16. *Пусть гетеротонный оператор A (16.22), действующий в C, имеет сильно инвариантный конусный отрезок $\langle v_0, w_0\rangle \subset K(u_0)$ (где $u_0(t) \equiv 1$) выполняется следующее условие: для любых положительных чисел v, w любого $\tau \in (0, 1)$ имеет место неравенство*

$$\hat{k}\left(t, s, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{k}(t, s, v, w) \quad (t, s \in \Omega). \tag{16.26}$$

Тогда интегральное уравнение $x(t) = Ax(t)$ имеет единственное решение $x^*(t) \in \langle v_0, w_0\rangle$, к которому сходятся последовательные итерации

$$x_{k+1}(t) = \int_\Omega k(t, s, x_k(s))\, ds \tag{16.27}$$

при любом $x_0(t) \in K(u_0)$.

Доказательство. Из (16.26) вытекает, что функция $\hat{k}(t, s, v, w) > 0$, если $v, w > 0$. Пусть функции $v(t)$, $w(t)$ принадлежат $K(u_0)$, тогда

$$\hat{A}(v, w) = \int_\Omega k[t, s, v(s), w(s)]\, ds > 0.$$

Учитывая при этом компактность Ω, имеем

$$\alpha u_0(t) \leqslant \hat{A}(v(t), w(t)) \leqslant \beta u_0(t) \tag{16.28}$$

при некоторых положительных α, β.

Опять-таки из компактности Ω и (16.26) получаем

$$\hat{A}\left(\tau v(t), \frac{1}{\tau} w(t)\right) - \tau \hat{A}(v(t), w(t)) \geqslant \gamma > 0. \tag{16.29}$$

Сравнивая (16.28), (16.29), приходим к неравенству

$$\hat{A}\left(\tau v(t), \frac{1}{\tau} w(t)\right) \geqslant \tau \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha\tau}\right) \hat{A}(v(t), w(t)).$$

Для завершения доказательства остается применить результаты раздела 16.2. ■

Для оператора A, действующего в L_p, может быть установлен близкий по характеру результат.

Теорема 16.17. *Пусть гетеротонный оператор A (16.22), действующий в L_p, имеет сильно инвариантный конусный отрезок $\langle v_0, w_0 \rangle \subset K(u_0)$ $(u_0(t) \equiv 1)$, и для любых положительных чисел v, w и любого $\tau \in (0, 1)$ выполняется неравенство*

$$\operatorname{vrai} \min_{t, s \in \Omega \times \Omega} \left\{ \hat{k}\left(t, s, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{k}(t, s, v, w) \right\} > 0. \tag{16.30}$$

Тогда интегральное уравнение $x(t) = Ax(t)$ имеет единственное решение $x^*(t) \subset \langle v_0, w_0 \rangle$, к которому сходятся по u_0-норме последовательные итерации (16.27) при любом $x_0(t) \in K(u_0)$.

Необходимость перехода от (16.26) к условию (16.30) здесь вполне понятна. Остальные изменения связаны с тем, что конус неотрицательных функций в L_p обладает дополнительно свойством правильности, а u_0-норма не совпадает с нормой L_p. ■

Перейдем к рассмотрению двухточечной задачи. Двухточечная краевая задача после замены переменных сводится к поиску решения системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + f_i(t, x_1, \ldots, x_m) = 0 \quad (i = 1, \ldots m),$$

удовлетворяющего граничным условиям $x_i(0) = x_i(1) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Эта задача эквивалентна решению системы интегральных уравнений типа Гаммерштейна

$$x_i(t) = \int_0^1 G(t, s) f_i[s, x_1(s), \quad x_m(s)]\, ds \quad (i = 1, \ldots m)$$

или в векторном виде

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f[s, x(s)]\, ds. \tag{16.31}$$

Ядро $G(t, s)$ здесь является функцией Грина краевой задачи $-\dfrac{d^2 x}{dt^2} = y(t)$, $x(0) = x(1) = 0$ (см. раздел 2.7).

Пусть функции $f_i(t, x_1, \ldots, x_m)$ непрерывны по совокупности переменных. Тогда оператор Gf (16.31) будет вполне непрерывным в пространстве $C^n[0, 1]$ вектор-функций $x(t)$.

Введем в $C^n[0, 1]$ полуупорядоченность с помощью конуса K функций, компоненты которых неотрицательны, обращаются в ноль на концах сегмента $[0, 1]$ и выпуклы вверх. Конус K является правильным. Заметим также, — если функции f_i неотрицательны, оператор (16.31) оставляет конус K инвариантным.

Пусть теперь существует функция $\hat{f}(s, v, w)$, каждая компонента которой $\hat{f}_i(s, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_m)$ монотонно возрастает по всем v_j и монотонно убывает по всем w_j. В этом случае оператор Gf, очевидно, является гетеротонным. Сопутствующим будет оператор

$$\widehat{Gf}(v, w)=\int_0^1 G(t, s)\, \hat{f}[s, v(s), w(s)]\, ds. \qquad (16.32)$$

В качестве u_0 выберем элемент

$$u_0(t)=\int_0^1 G(t, s)\, ds=\frac{t\,(t-1)}{2}.$$

Нетрудно показать, что оператор (16.32) любую пару функций $v(s)$, $w(s)$ из $K(u_0)$ переводит в $K(u_0)$.

Теорема 16.18. *Пусть гетеротонный оператор Gf имеет сильно инвариантный конусный отрезок $\langle v_0, w_0\rangle \subset K(u_0)$ и для любых положительных чисел $v_1, \ldots, v_m$, $w_1, \ldots, w_m$ и любого $\tau \in (0, 1)$ выполняются неравенства*

$$\hat{f}_i\left(t, \tau v, \frac{1}{\tau}\, w\right) > \tau \hat{f}_i(t, v, w) \quad (t \in \Omega, \ i=1, \ldots\ m).$$

Тогда система уравнений (16.31) имеет единственное решение $x^*(t) \in \langle v_0, w_0\rangle$, к которому сходятся последовательные итерации $(Gf)^n x_0(t)$ при любом $x_0(t) \in K(u_0)$.

Доказательство очевидно. ■

Здесь может быть также указан признак существования сильно инвариантного конусного отрезка на основе соображений, аналогичных использованным в предыдущем разделе.

16.6. Распределение ресурсов. Рассмотрим систему взаимосвязанных предприятий и организаций, выделяющих ограниченные ресурсы на совместные разработки.

Система состоит из двух типов элементов: организаций O_i ($i=1, \ldots, n$) и предприятий $П_j$ ($j=1, \ldots, m$). Каждая организация

O_i располагает ресурсом R_i, который распределяет на сотрудничество с группой предприятий

$$M_i \subset \{1, \dots, m\},$$

r_{ij} далее обозначает ресурс, выделяемый O_i на сотрудничество с Π_j. Аналогично q_{ij} — ресурс, выделяемый Π_j на сотрудничество с O_i.

Сотрудничество O_i и Π_j характеризуется функцией дохода

$$\varphi_{ij}(r_{ij}, q_{ij}) = \gamma_{ij} r_{ij}^{\alpha} q_{ij}^{\beta}$$

$$0 < \alpha < \frac{1}{3}, \quad 0 < \beta < \frac{1}{3}.$$

Целевой функцией O_i служит

$$\varphi_i = \sum_j \varphi_{ij}(r_{ij}, q_{ij}),$$

целевая функция Π_j

$$\psi_j = \sum_i \varphi_{ij}(r_{ij}, q_{ij}).$$

Ограничения в системе

$$\sum_j r_{ij} \leqslant R_i,$$

$$\sum_i q_{ij} \leqslant Q_j.$$

Равновесие по Нэшу в такой системе определяется решением системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi_{ij}}{\partial r_{ij}} - \lambda_i = 0, \quad \dfrac{\partial \varphi_{ij}}{\partial q_{ij}} - \mu_j = 0 \\ \sum\limits_j r_{ij} = R_i, \quad \sum\limits_i q_{ij} = Q_j \end{array}\right. \tag{16.33}$$

$$i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m.$$

где λ_i, μ_i — множители Лагранжа.

В рассматриваемом случае решением (16.33) служит решение системы уравнений

$$
\begin{cases}
r_{ij}=\dfrac{R_i}{\gamma_{ij}}\,\dfrac{q_{ij}^{\frac{\beta}{1-\alpha}}}{\sum\limits_k \dfrac{1}{\gamma_{ik}}\,q_{ik}^{\frac{\beta}{1-\alpha}}}, \\[3ex]
q_{ij}=\dfrac{Q_j}{\gamma_{ij}}\,\dfrac{r_{ij}^{\frac{\alpha}{1-\beta}}}{\sum\limits_k \dfrac{1}{\gamma_{kj}}\,r_{kj}^{\frac{\alpha}{1-\beta}}}, \quad \begin{matrix} i=1,\dots,n, \\ j=1,\dots,m. \end{matrix}
\end{cases}
\tag{16.34}
$$

Легко видеть, что в правой части (16.34) стоит гетеротонный $\varkappa$-псевдовогнутый оператор. Сопутствующим будет оператор с компонентами

$$
\hat f_{ij}(v_i,\ w_i)=\frac{R_i}{\gamma_{ij}}\,\frac{v_{ij}^{\frac{\beta}{1-\alpha}}}{\sum\limits_k \dfrac{1}{\gamma_{ik}}\,w_{ik}^{\frac{\beta}{1-\alpha}}},
$$

$$
\hat g_{ij}(x_i,\ y_i)=\frac{Q_j}{\gamma_{ij}}\,\frac{x_{ij}^{\frac{\alpha}{1-\beta}}}{\sum\limits_k \dfrac{1}{\gamma_{kj}}\,y_{kj}^{\frac{\alpha}{1-\beta}}}.
$$

Очевидно,

$$
\hat f_{ij}\left(\tau v_i,\ \frac{1}{\tau}w_i\right)=\tau^{\frac{2\beta}{1-\alpha}}\,\hat f_{ij}(v_i,\ w_i),
$$

$$
\hat g_{ij}\left(\tau x_j,\ \frac{1}{\tau}y_j\right)=\tau^{\frac{2\alpha}{1-\beta}}\,\hat g_{ij}(x_j,\ y_j).
$$

Поэтому оператор

$$
F(r,\ q)=\{\,f_{ij}(q),\ g_{ij}(r)\,\}
$$

является $\varkappa$-псевдовогнутым, где

$$
\varkappa=\max\left\{\frac{2\beta}{1-\alpha}\quad\frac{2\alpha}{1-\beta}\right\},
$$

причем $\varkappa\in(0,\ 1)$, если $0<\alpha,\ \beta<\dfrac{1}{3}$.

Таким образом, система (16.34) на внутренности неотрицательного ортанта в R^{n+n} имеет единственное решение, к которому глобально сходятся последовательные итерации (теорема 16.9). Заметим, что все остается по-прежнему, если α и β зависят от i, j, но остаются в тех же пределах

16.7. Дополнения. Выделение класса псевдовогнутых операторов (в частном случае монотонных вогнутых) базируется на ограничениях скоростей роста операторов вдоль лучей, лежащих в конусе. Такой путь удобен, но не единствен. Можно вводить ограничения скорости роста по фиксированному направлению, по более узкому или более широкому конусу, по любому направлению и т. д. Ниже рассматриваются некоторые из таких возможностей для простейшего случая монотонного оператора T. Обобщения для гетеротонных операторов и точные формулировки результатов предоставляем читателю.

Монотонный оператор T назовем слабомонотонным, если для любого ненулевого $y \in K$

$$T(x+y) < T(x) + y. \tag{16.35}$$

Если слабомонотонный оператор T оставляет инвариантным некоторый конусный отрезок $\langle v_0, w_0 \rangle$ и находится в условиях, обеспечивающих существование неподвижной точки, то неподвижная точка у T единственна. Дело в том, что в случае неединственности монотонный оператор имеет сравнимые неподвижные точки $x_2^* \geqslant x_1^*$ (§ 15), но тогда в силу (16.35) легко получается противоречие

$$T(x_2^*) = T(x_1^* + (x_2^* - x_1^*)) < T(x_1^*) + x_2^* - x_1^* = x_2^*.$$

Примером слабомонотонного оператора может служить оператор суперпозиции $T(x) = f(t, x(t))$ в случае $0 \leqslant f_u'(t, u) < 1$.

Если интересоваться лишь единственностью неподвижной точки, то (16.35) с тем же успехом можно заменить на

$$T(x+y) \overline{\geqslant} T(x) + y. \tag{16.36}$$

Условие (16.36) существенно более свободно. Рассмотрим, например, оператор

$$T(x(t)) = \int_{\Omega} k[t, s, x(s)]\, ds,$$

и покажем, что при условии

$$\frac{\partial k(t, s, u)}{\partial u} < \frac{1}{\operatorname{mes}(\Omega)}$$

он удовлетворяет условию (16.36).

Пусть $y(t)$ достигает максимума в точке $t_0 \in \Omega$ (мы не уточняем деталей, поскольку нас здесь не интересует точная формулировка результатов). Условие (16.36) вытекает из следующей цепочки неравенств

$$\int\limits_{\Omega} k[t_0, s, x(s)+y(s)]\,ds \leqslant \int\limits_{\Omega} k[t_0, s, x(s)+y(t_0)]\,ds <$$

$$< \int\limits_{\Omega} k[t_0, s, x(s)]\,ds + \int\limits_{\Omega} \frac{y(t_0)}{\operatorname{mes}\Omega}\,ds = \int\limits_{\Omega} k[t_0, s, x(s)]\,ds + y(t_0). \ \blacksquare$$

Если наложить ограничение более жесткое, чем (16.35), например,

$$T(x+y) \leqslant T(x) + \alpha y, \quad \alpha \in (0, 1), \tag{16.37}$$

то это дает основу для теорем существования.

Пусть, например, конус K правилен, непрерывный оператор T положителен, монотонен и удовлетворяет условию (16.37). Тогда T имеет единственную неподвижную точку $x^* \in K$.

Для доказательства рассмотрим итерационный процесс $x_{n+1} = T(x_n)$, начинающийся в точке $x_0 = \theta$. Очевидно (§ 15)

$$\theta \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant$$

Рассмотрим последовательность $y_n = x_n - x_{n-1} \geqslant 0$. Из

$$x_{n+1} = T(x_n) = T(x_{n-1} + y_{n-1}) \leqslant T(x_{n-1}) + \alpha y_{n-1}$$

вытекает $y_{n+1} \leqslant \alpha y_{n-1}$, что дает оценку

$$x_n \leqslant \frac{1}{1-\alpha}(y_1 + y_2).$$

Но в указанных выше предположениях из ограниченности x_n следует существование неподвижной точки $x^* \in K$. Остается заметить, что любая точка $v = x^* + y$ $(y \geqslant 0)$ „идет назад". Действительно,

$$T(x^* + y) \leqslant T(x^*) + \alpha y \leqslant x^* + y.$$

В целом изучение слабомонотонных операторов выглядит малоперспективным из-за жесткости предположений. Существенно более широкий круг прикладных задач попадает в поле зрения, если ограничение скорости роста предполагается вдоль единственного фиксированного направления.

Фиксируем ненулевой элемент $u_0 \in K$. Пусть монотонный оператор T отображает E в E_{u_0} и удовлетворяет условию

$$T(x + \gamma u_0) \leqslant T(x) + (1 - \varepsilon)\gamma u_0, \quad \gamma > 0, \ \varepsilon > 0. \tag{16.38}$$

Тогда T не может иметь двух различных сравнимых неподвижных точек $x_2^* \geqslant x_1^*$. Действительно, пусть α — минимальное число в неравенстве $x_2^* - x_1^* \leqslant \alpha u_0$. Тогда

$$x_2^* = T(x_2^*) \leqslant T(x_1^* + \alpha u_0) \leqslant T(x_1^*) + (1 - \varepsilon)\alpha u_0 =$$
$$= x_1^* + (1 - \varepsilon)\alpha u_0,$$

что противоречит определению α.

В заключение несколько слов о монотонных выпуклых операторах, удовлетворяющих неравенствам вида (2.3). Простые примеры показывают, что монотонный u_0-выпуклый оператор может иметь несколько неподвижных точек. Возникает вопрос о наложении дополнительных предположений, обеспечивающих единственность. Несмотря на многочисленные попытки, нв сегодняшний день никому не удалось существенно выйти за рамки следующего простого принципа единственности.

Монотонный u_0-выпуклый оператор не может иметь двух различных неподвижных точек, удовлетворяющих условию $x_1^* \leqslant t x_2^*$ при некотором $t \in (0, 1)$.

Допустим противное и обозначим через t_0 минимальное число в неравенстве $x_1^* \leqslant t_0 x_2^*$. Тогда $x_1^* = T(x_1^*) \leqslant T(t_0 x_2^*) \leqslant (1 - \eta)\, t_0 T(x_2^*) = (1 - \eta)\, t_0 x_2^*$, что противоречит минимальности t_0.

Легко видеть, что этот принцип допускает различные вариации, но все они с той или иной натяжкой утверждают, что монотонный u_0-выпуклый оператор не может иметь различных сравнимых неподвижных точек. К сожалению, на основе этого принципа удается решить очень мало практических задач. Попытки добиться чего-то большего могут показаться странными. Надо признать, что понятие выпуклого оператора не очень эффективно и заниматься чем-то другим. Тем не менее для неослабевающего интереса к выпуклым операторам есть оправдание. Уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s)\, f[x(s)]\, ds,$$

где $G(t, s)$ функция Грина (2.44) двухточечной задачи, оказывается имеет единственное решение при любой выпуклой и монотонной функции $f(u)$ ($f(0) = 0$). Совершенно непонятно, какие свойства ядра $G(t, s)$ обеспечивают здесь этот удивительный факт*.

---

* Сам вывод о единственности легко получается из рассмотрения фазового портрета уравнения $\ddot{x} + f(x) = 0$.

Есть основания надеяться, что ядро $G(t, s)$ должно быть функцией Грина „достаточно хорошей“ краевой задачи. Однако неизвестно даже, будет ли единственно решение простейшей эллиптической задачи

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 x}{\partial t_n^2} + f(x) = 0, \quad x(t)\Big|_{t \in \Gamma} = 0$$

с выпуклой функцией $f(x)$.

Упражнение 16.1. Пусть оператор T u_0-псевдовогнут, конус K правилен. Докажите, что для существования у T на $K(u_0)$ неподвижной точки необходимо и достаточно наличие у T сильно инвариантного конусного отрезка $\langle v, w\rangle \subset K(u_0)$.

Упражнение 16.2. При изучении гетеротонных и псевдовогнутых операторов важную роль играет вспомогательный итерационный процесс

$$v_{k+1} = \hat{T}(v_k, w_k), \qquad = \hat{T}(w_k$$

который может не только служить звен в доказательствах различных теорем, но и представляет самостоятельный интерес, как вычислительный алгоритм, дающий на каждом шаге оценки решения снизу и сверху.

Рассмотрите возможность использования другого итерационного процесса

$$v_{k+1} = \hat{T}(v_k, w_k), \quad w_{k+1} = \hat{T}(w_k, v_{k+1}).$$

§ 17. УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

17.1. Общие соображения. Изучение нелинейных уравнений

$$x = T(x, \lambda) \tag{17.1}$$

с числовым параметром λ — одна из важных задач нелинейного анализа. Многие содержательные задачи приводят к изучению уравнений вида (17.1). Примерами могут служить разнообразные задачи теории упругости, где роль параметра играет нагрузка, задачи о распределении температуры при пропускании через тело электрического тока (параметр — величина тока), задачи об автоколебаниях (параметр — неизвестный период) и т. д.

При изменении параметра λ решения (17.1) могут ветвиться, исчезать, „приходить из бесконечности“, менять свойства (например, терять устойчивость). Для изучения этих явлений имеются мощные аналитические и качественные методы, составляющие основу самостоятельных теорий (теория бифуркаций, теория катастроф и др.). Важная группа вопросов, касающихся изучения уравнений вида (17.1), относится к нелокальным проблемам: определение множества всех значений λ, при которых уравнение (17.1) разрешимо, структура множества решений в целом т. Эти вопросы весьма сложны и их эффективное решение оказывается возможным лишь в редких ситуациях, которые будут рассмотрены далее.

Для описания множества тех значений λ, при которых уравнение (17.1) разрешимо, можно использовать обычные теоремы о неподвижных точках. Например, если при любом $\lambda \in \Lambda$ оператор $T(x, \lambda)$ положителен, вполне непрерывен сжимает конус, то (17.1) разрешимо при всех $\lambda \in \Lambda$. Понятно, что подобную переформулировку допускает любая теорема существования.

Специфика уравнений с параметром проявляется при постановке более тонких вопросов: существование решений на поверхностях, непрерывные ветви решений, монотонная зависимость решений и др.

Существование решений на поверхностях позволя устанавливать различные леммы о негомотопных полях.

Лемма 17.1. *Пусть оператор $T(x, \lambda)$ положител вполне непрерывен, а $x - T(x$ при $\lambda = \lambda_1$ $\lambda = \lambda_2$ невырождены на $\dot{\Omega}(K)$ и*

$$\gamma[I - T(\quad \Omega(K)] \neq \gamma[I - T(\quad \lambda_2), \Omega(K)]. \qquad (17.2)$$

Тогда при некотором $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ существует по крайне мере одно решение уравнения (17.1) на $\dot{\Omega}(K)$.

Доказательство совсем просто. В предположении противного операторы $T(\cdot, \lambda_1)$ и $T(\quad \lambda_2)$ были бы положительно гомотопны. Гомотопией могла бы служить функция

$$T(x, \tau\lambda_1 + (1 - \tau)\lambda_2).$$

Но тогда получается противоречие с неравенством (17.2). ■

Наиболее широко распространены на практике нелинейные уравнения с параметром специального вида

$$T(x) = \lambda x. \qquad (17.3)$$

По аналогии с линейным случаем ненулевые решения (17.3) называют собственными векторами оператора T, а соответствующие значения λ — собственными значениями

Теорема 17.1. *Пусть положительный вполне непрерывный оператор T не имеет неподвижных точек на $\dot{\Omega}(K)$ $(\theta \in \Omega)$*

$$\gamma[I \quad T, \Omega(K)] \neq 1.$$

Тогда оператор T имеет на $\Omega(K)$ по крайней мере один собственный вектор, которому отвечает положительное собственное значение.

Для доказательства достаточно рассмотреть деформацию $H(x,\tau)=x-\tau T(x)$. Очевидно, вращение $H(x, 0)$ на $\dot{\Omega}(K)$ равно Теперь остается сослаться на лемму 17.1. ■

В приложениях удобен и эффективен следующий принцип М. А. Красносельского.

Теорема 17.2 *Пусть положительный вполне непрерывный оператор T удовлетворяет условию*

$$\inf\{\|T(x)\|: x\in\dot{\Omega}(K)\}>0. \qquad (17.4)$$

Тогда оператор T имеет на $\dot{\Omega}(K)$ по крайней мере один собственный вектор, которому отвечает положительное собственное значение.

Для доказательства достаточно заметить, что поля $x-\tau T(x)$ при больших τ в предположении (17.4) имеют нулевое вращение. Рассуждение завершает ссылка на предыдущую теорему. ■

17.2. Неограниченные области притяжения. Приведем пример использования указанного выше принципа.

Рассмотрим итерационный процесс

$$x_{k+1}=T(x_k). \qquad (17.5)$$

Предположим, что оператор T, действующий в R^n, монотонен, непрерывен, и процесс (17.5) сходится к x^* из некоторой окрестности точки x^*, причем точка x^* асимптотически устойчива* и является единственной неподвижной точкой оператора T. В этом случае можно утверждать, что область притяжения** точки x^* неограничена.

Перейдем к доказательству. Без ограничения общности можно считать $x^*=\theta$. Тогда оператор T будет положительным. Предположим, что область Ω асимптотической устойчивости ограничена. Тогда оператор T будет отображать в себя ограниченное множество $\dot{\Omega}\cap K$. Поскольку

$$\min\{\|T(x)\|: x\in\dot{\Omega}\cap K\}>0,$$

* Свойства устойчивости, асимптотической устойчивости и др. определяются по аналогии с динамическими системами в непрерывном времени.

** Областью притяжения называется множество точек, из которых процесс (17.5) сходится.

из теоремы 17.2 вытекает, что T на $\dot{\Omega}(K)$ имеет собственный вектор, т. е. при некотором $\lambda>0$

$$T(z)=\lambda z, \quad z\in\dot{\Omega}(K).$$

Таким образом, на $\dot{\Omega}(K)$ существует точка z, которая под действием оператора T идет или вперед ($\lambda\geqslant 1$), или назад ($\lambda\leqslant 1$). Но тогда из теоремы 15.2 вытекает существование у T на $\dot{\Omega}(K)$ неподвижной точки, что противоречит предположению о единственности x^* ■

17.3. Непрерывные ветви. Если уравнение (17.1) при каждом λ имеет единственное решение $x(\lambda)$, то в естественных предположениях $x(\lambda)$ представляет собой непрерывную кривую в пространстве E В более общей ситуации аналогом непрерывной кривой служит понятие непрерывной ветви решений.

Пусть $X(\lambda)$ обозначает множество всех решений уравнения (17.1) при значении параметра λ, а $\mathfrak{M}$ — объединение всех $X(\lambda)$. Скажем, что множество $\mathscr{B}\subset\mathfrak{M}$ решений уравнения (17.1) образует *непрерывную ветвь длины* r в окрестности нулевой точки, если непусто пересечение множества $\mathscr{B}$ с границей каждой лежащей в шаре $\|x\|<r$ окрестности нуля, *бесконечную непрерывную ветвь*, если непусто пересечение $\mathscr{B}$ с любой окрестностью нуля.

Приведем сначала два простых утверждения.

Теорема 17.3. *Пусть оператор $T(x, \lambda)$ положителен и вполне непрерывен, нулевая точка является изолированной особой точкой полей $x-T(x, \lambda)$ при $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$, причем ее индекс при $\lambda=\lambda_1$ отличен от индекса при $\lambda=\lambda_2$. Тогда множество $\mathscr{B}$ решений уравнения (17.1), отвечающих значениям $\lambda\in(\lambda_1, \lambda_2)$, образует в K непрерывную ветвь (некоторой длины) в окрестности нулевой точки.* ■

Теорема 17.4. *Пусть положительный вполне непрерывный оператор T удовлетворяет условию $T(\theta)\neq\theta$. Тогда лежащие в K собственные векторы оператора T образуют непрерывную ветвь (некоторой длины) в окрестности нулевой точки.* ■

Остановимся теперь на менее тривиальном результате, представляющем собой одну из вариаций метода монотонных минорант.

Теорема 17.5. *Пусть положительный вполне непрерывный оператор T удовлетворяет условию*

$$T(x)\geqslant A(x) \quad (x\in K, \ \|x\|\leqslant r), \tag{17.6}$$

где оператор A положителен монотонен (но не обязательно вполне непрерывен), причем

$$A(tu) \geqslant \alpha tu \quad (\alpha > 0,\ 0 \leqslant t \leqslant \gamma,\ u \in K,\ u \neq \theta) \tag{17.7}$$

и γ — максимальное число в неравенствах $x \geqslant tu$ при условии $\|x\| \leqslant r$. Тогда лежащие в K собственные векторы оператора T образуют в окрестности нуля непрерывную ветвь длины r.

Доказательство. Пусть окрестность Ω нулевой точки лежит в шаре $\|x\| < r$. Нам нужно показать, что оператор T на множестве $\Gamma = \dot{\Omega} \cap K$ имеет хотя бы один собственный вектор.

Возьмем некоторую последовательность $\delta_n \to 0$ и положим

$$T_n(x) = T(x) + \delta_n u \quad (x \in K). \tag{17.8}$$

Каждый из операторов (17.8) удовлетворяет условию

$$\| T_n(x) \| \geqslant \inf_{y \in K} \| y + \delta_n u \| > 0 \quad (x \in K),$$

что обеспечивает (теорема 17.2) существование у T_n собственного вектора $x_n \in \Gamma$, т. е.

$$T(x_n) + \delta_n u = \lambda_n x_n \quad (n = 1, \tag{17.9}$$

Заметим, что без ограничения общности можно считать $x_n \to x^*$, иначе можно перейти к подпоследовательности. Если теперь показать, что последовательность λ_n тоже сходится $\lambda_n \to \lambda^*$ (или имеет сходящуюся подпоследовательность), причем $\lambda^* > 0$, то предельный переход в (17.9) завершит доказательство. Итак, осталось показать $\lambda_n \to \lambda^* > 0$.

Из (17.9) вытекает справедливость оценок $x_n \geqslant \lambda_n^{-1} \delta_n u$, откуда следует существование таких $t_n > 0$, что

$$x_n \geqslant t_n u, \quad x_n \overline{\geqslant} tu \quad (t > t_n),$$

причем заведомо $t_n \leqslant \gamma$ в силу $\|x_n\| \leqslant r$. Из монотонности оператора A и условия (17.7) следует

$$A(x_n) \geqslant A(t_n u) \geqslant \alpha t_n u \quad (n = 1, 2, \ldots \tag{17.10}$$

Сравнивая теперь (17.10) с неравенствами $A(x_n) \leqslant \lambda_n x_n$, вытекающими из (17.6), (17.9), получаем

$$x_n \geqslant \lambda_n^{-1} \alpha t_n u \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

откуда в силу определения чисел t_n вытекает

$$\lambda_n \geqslant \alpha \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{17.11}$$

Таким образом, левые части в (17.9) равномерно ограничены сверху, нормы элементов x_n ограничены снизу положительным числом. Это позволяет считать последовательность λ_n сходящейся $\lambda_n \to \lambda^*$, $\lambda^* > 0$ вытекает из (17.11). ■

17.4. Собственные векторы вогнутых операторов. Напомним, что монотонный оператор T называется вогнутым, если $T(x) \in K(u_0)$ для любого ненулевого $x \in K$ и для любых $x \in K(u_0)$ и $\tau \in (0, 1)$

$$T(\tau x) > \tau T(x). \tag{17.12}$$

Теорема 17.6. *Пусть вогнутый оператор T вполне непрерывен. Тогда лежащие в K собственные векторы оператора T, которым отвечают положительные собственные значения, образуют бесконечную непрерывную ветвь.*

Доказательство. Фиксируем некоторый элемент $u \in K(u_0)$, причем норму u выберем так, чтобы из $x \gg tu$, $\|x\| \leqslant r$ вытекало $t \leqslant 1$. В силу $T(K) \subset K(u_0)$ имеем $T(u) \gg \alpha u$ при некотором $\alpha > 0$. Учитывая теперь свойство (17.12), получаем для $t \in [0, 1]$

$$T(tu) \gg tT(u) \gg \alpha tu.$$

Таким образом, оператор T можно рассматривать как миноранту для самого себя. Эта миноранта удовлетворяет условию (17.7). Доказательство завершает ссылка на теорему 17.5 (бесконечность непрерывной ветви вытекает из произвольности r). ■

Ветви собственных векторов вогнутого оператора обладают рядом полезных свойств. Например, если $x(\lambda)$ обозначает собственный вектор вогнутого оператора T, отвечающий собственному значению λ, то из $\lambda_1 < \lambda_2$ вытекает

$$x(\lambda_1) \gg x(\lambda_2). \tag{17.13}$$

Действительно, пусть t_0 обозначает максимальное число в неравенстве

$$x(\lambda_1) \gg tx(\lambda_2).$$

В предположении противного $t_0 < 1$, что дает

$$x(\lambda_1) = \frac{1}{\lambda_1} T(x(\lambda_1)) \gg \frac{1}{\lambda_1} T(t_0 x(\lambda_2)) \gg$$

$$\gg \frac{1}{\lambda_1} t_0 T(x(\lambda_2)) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} t_0 x(\lambda_2).$$

Но это противоречит определению t_0. Поэтому справедливо (17.13). ■

Множество положительных λ, при которых уравнение (17.3) (с положительным оператором T) имеет ненулевое положительное решение (собственный вектор) $x(\lambda)$, называется *позитивным спектром* S_+ оператора T.

В естественных предположениях S_+ вогнутого оператора представляет собой интервал. Причина заключается в следующем. Если $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, то

$$x(\lambda_2) = \frac{1}{\lambda_2} T(x(\lambda_2)) \leqslant \frac{1}{\lambda} T(x) \leqslant \frac{1}{\lambda_1} T(x(\lambda_1)) = x(\lambda_1)$$

для любого $x \in \langle x(\lambda_2), x(\lambda_1)\rangle$. Здесь мы воспользовались монотонной зависимостью $x(\lambda)$. Таким образом, оператор $\frac{1}{\lambda} T$ преобразует конусный отрезок $\langle x(\lambda_2), x(\lambda_1)\rangle$ в себя, что в свободных предположениях (см. предыдущий параграф) гарантирует существование неподвижной точки у оператора $\frac{1}{\lambda} T$. Следовательно, из $\lambda_1, \lambda_2 \in S_+$ вытекает

$$[\lambda_1, \lambda_2] \subset S_+.$$

Тот факт, что S_+ представляет собой обычно интервал (а не отрезок), достаточно очевиден будет обсуждаться в следующем разделе.

17.5. Позитивный спектр псевдовогнутого оператора. В этом разделе мы изучим позитивный спектр гетеротонного u_0-псевдовогнутого оператора.

Для решения вопроса о принадлежности S_+ некоторого конкретного значения λ удобно пользоваться следующим утверждением (см. § 16).

Теорема 17.7. *Пусть выполняется одно из следующих условий:*

a) оператор T равномерно u_0-псевдовогнут;

b) оператор T u_0-псевдовогнут и вполне непрерывен;

c) оператор T u_0-псевдовогнут, конус K правилен. Тогда для существования у T на $K(u_0)$ неподвижной точки необходимо и достаточно наличие у T сильно инвариантного конусного отрезка $\langle v, w\rangle \subset K u_0$). ■

Использовать теорему 17.7 для решения вопроса о принадлежности S_+ того или иного значения λ позволяет следующее простое соображение. Решение уравнения (17.3) является неподвижной точкой оператора $\frac{1}{\lambda}T$ Если T удовлетворяет одному из условий а) — с), то этому же условию удовлетворяет оператор $\frac{1}{\lambda}T$; и все сводится к поиску сильно инвариантного конусного отрезка для оператора $\frac{1}{\lambda}T$

Соответствующее решение $x(\lambda)$, которое в условиях теоремы 17.7 всегда единственно, можно получить как предел обычной итерационной процедуры $x_{n+1}=\frac{1}{\lambda}T(x_n)$, так как последовательные итерации в случае u_0-псевдовогнутого оператора, имеющего неподвижную точку $x^*\in K(u_0)$, сходятся к x^* по u_0-норме при любом начальном приближении $x_0\in K(u_0)$.

Перейдем к рассмотрению свойств позитивного спектра. Первый естественный вопрос — непустота позитивного спектра. Этот вопрос может решаться на основе теоремы 17.7, а также общими методами, связанными с использованием минорант и мажорант, асимптотики поведения оператора в нуле и на бесконечности и т. д.

Теорема 17.8. *Пусть выполняется одно из условий а) — с) теоремы 17.7. Тогда позитивный спектр оператора T является открытым множеством.*

Доказательство. Из существования решения $x(\lambda)$ уравнения (17 3) при некотором $\lambda>0$ вытекает наличие у оператора $\frac{1}{\lambda}T$ сильно инвариантного конусного отрезка

$$\langle \alpha x(\lambda),\ \frac{1}{\alpha}x(\lambda)\rangle, \tag{17.14}$$

где $\alpha\in(0, 1)$. Неравенства

$$\frac{1}{\lambda+\Delta\lambda}\hat{T}\left(\alpha x(\lambda),\ \frac{1}{\alpha}x(\lambda)\right)\geqslant\frac{\lambda}{\lambda+\Delta\lambda}(1+\eta)\,\alpha x(\lambda),$$

$$\frac{1}{\lambda+\Delta\lambda}\hat{T}\left(\frac{1}{\alpha}x(\alpha),\ \alpha x(\lambda)\right)\leqslant\frac{\lambda}{(\lambda+\Delta\lambda)(1+\eta')}\,\frac{1}{\alpha}x(\lambda)$$

показывают, что при

$$|\Delta\lambda|\leqslant\min\left(\lambda\eta,\ \frac{\lambda\eta'}{1+\eta'}\right)$$

конусный отрезок (17.14) сильно инвариантен и для оператора $\frac{1}{\lambda+\Delta\lambda}T$. Теперь для завершения доказательства остается сослаться на теорему 17 7 ■

Приведенные выше рассуждения показывают заодно, что $x(\lambda+\Delta\lambda)$ принадлежит конусному отрезку (17.14) отсюда легко сделать вывод о справедливости следующего утверждения.

Теорема 17.9. *Пусть выполняется одно из условий a) — c) теоремы 17.7 Тогда вектор-функция $x(\lambda)$ непрерывна по u_0-норме, а если конус K нормален, то и по исходной норме пространства E.* ■

Теорема 17.10. *Пусть оператор T u_0-псевдовогнут, $\lambda_1, \lambda_2 \in S_+$ и $\lambda_1>\lambda_2$. Тогда $x(\lambda_1)\overline{\gg} x(\lambda_2)$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. $x(\lambda_1)\gg x(\lambda_2)$. Тогда максимальное число α, при котором выполняется неравенство $x(\lambda_2)\gg\alpha x(\lambda_1)$, принадлежит интервалу (0, 1). Отсюда

$$x(\lambda_2)=\frac{1}{\lambda_2}\hat{T}(x(\lambda_2),\ x(\lambda_2))\gg\frac{1}{\lambda_2}\hat{T}\left(\alpha x(\lambda_1),\ \frac{1}{\alpha}x(\lambda_1)\right)\gg$$

$$\gg\frac{(1+\eta)\alpha}{\lambda_2}T\ x(\lambda_1),\ x(\lambda_1))=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(1+\eta)\alpha x(\lambda_1),$$

но это противоречит определению α. ■

Известно, что в частном случае монотонного u_0 вогнутого оператора T (при естественных дополнительных предположениях: полная непрерывность или равномерная u_0-вогнутость T) позитивный спектр представляет собой интервал, причем ветвь $x(\lambda)$ уходит в бесконечность при приближении λ к нижней границе S_+ и стремится к нулю при приближении λ к верхней границе S_+. Наличие соответствующих свойств в общем случае гетеротонного u_0-псевдовогнутого оператора установить не удается. Ниже эти свойства устанавливаются в некоторых дополнительных предположениях. Изучаемый оператор T везде предполагается вполне непрерывным.

Рассмотрим сначала спектральные свойства возмущенного оператора $T_\varepsilon(x)=T(x)\ \ \varepsilon u_0$, где $\varepsilon>0$.

Теорема 17.11. *Пусть конус K нормален и u_0-псевдовогнутый оператор T вполне непрерывен. Тогда позитивный спектр* *оператора T_ε при любом $\varepsilon>0$ представляет собой интервал, т. е. $S_+=(\alpha, \beta)$, причем*

$$\lim_{\lambda\to\alpha}\| x(\lambda)\|=\infty, \quad \lim_{\lambda\to\beta}\| x(\lambda)\|=0. \tag{17.15}$$

Доказательство. Положительный вполне непрерывный оператор A будем называть u_0-сжатием, если $A:K\to K+\varepsilon u_0$, и при некотором $\varepsilon>0$ существует $R>0$ такое, что $A(x)\overline{\geqslant} x$ для всех $x\in K+\varepsilon u_0$, $\|x\|=R$.

Легко показать, что любое u_0-сжатие имеет неподвижную точку $x^*\in K+\varepsilon u_0$. Действительно, перейдем к вспомогательному оператору

$$\widetilde{A}(x)=\begin{cases} A(x) & \text{если } \|x\|\leqslant R, \\ A\left(\alpha(x)\dfrac{x-\varepsilon u_0}{\|x-\varepsilon u_0\|}+\varepsilon u_0\right), & \text{если } \|x\|\geqslant R, \end{cases}$$

где $\alpha(x)$ определяется из условия

$$\left\|\alpha(x)\frac{x-\varepsilon u_0}{\|x-\varepsilon u_0\|}+\varepsilon u_0\right\|=R.$$

В силу принципа Шаудера оператор $\widetilde{A}$ имеет неподвижную точку x^*, причем $\|x^*\|\leqslant R$, поскольку A является u_0-сжатием. Поэтому x^* будет неподвижной точкой оператора A.

Покажем теперь, что оператор T_ε, имеющий неподвижную точку x^* является u_0-сжатием. Заметим, во-первых, что при условии существования неподвижной точки x^* оператора T_ε, оператор $\hat{T}(x, z)+\varepsilon u_0$ при любом фиксированном $z\in K(u_0)$ также имеет неподвижную точку *. Кроме того, оператор $T(x, z)+\varepsilon u_0$ монотонен и u_0-вогнут и поэтому последовательные итерации $x_{n+1}=\hat{T}(x_n, z)+$ $+\varepsilon u_0$ сходятся к неподвижной точке оператора $T(x, z)+\varepsilon u_0$ по u_0-норме. Отсюда следует, что при достаточно больших по норме $x\in K+\varepsilon u_0$ выполняется условие $T(x, \varepsilon u_0)+\varepsilon u_0\overline{\geqslant} x$, и тем более $T(x)+\varepsilon u_0\overline{\geqslant} x$. Итак, T_ε — u_0-сжатие.

---

* Случай $\beta=\infty$ не исключается.

** Действительно, если $\alpha\in(0,$ выбрать из условия $\alpha x^*\ll z\ll\frac{1}{\alpha}x^*$, то конусный отрезок $\frac{1}{\alpha}x^*)$ будет инвариантен для вполне непрерывного оператора T, что и дает требуемое заключение.

Пусть $0<\lambda_1<\lambda_2$ и уравнение $T_\varepsilon(x)=\lambda x$ имеет положительные решения при λ_1 и λ_2. Покажем, что это уравнение имеет положительное решение и при любом $\lambda\in[\lambda_1, \lambda_2]$. Операторы $\frac{1}{\lambda_1}T_\varepsilon$ и $\frac{1}{\lambda_2}T_\varepsilon$ являются u_0-сжатиями, так как они имеют неподвижные точки. С другой стороны, оператор $\frac{1}{\lambda}T_\varepsilon$ при любом $\lambda\in[\lambda_1, \lambda_2]$ также является u_0-сжатием, так как представим в виде

$$\frac{1}{\lambda}T_\varepsilon=\left[\tau\frac{1}{\lambda_1}+(1-\tau)\frac{1}{\lambda_2}\right]T_\varepsilon,$$

где $\tau\in[0, 1]$ — и поэтому имеет неподвижную точку. Таким образом, позитивный спектр оператора T_ε представляет собой интервал.

В данном случае

$$\inf\{\|T_\varepsilon(x)\|: x\in K, \ \|x\|=R>0\}>0,$$

поэтому из принципа М. Красносельского следует существование у T_ε собственного вектора с любой наперед заданной положительной нормой. Отсюда легко сделать вывод о том, что ветвь $x(\lambda)$ при приближении λ к границам спектра S_+ или стремится к нулю, или уходит в бесконечность. Соответствие (17.15) вытекает из теоремы 17.10. ■

Изучение уравнения (17.3) наиболее просто в случае, когда u_0-псевдовогнутый оператор T удовлетворяет условию

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau}w\right)\geqslant\tau^{\varkappa}\hat{T}(v, w) \tag{17.16}$$

при всех $\tau\in(0, 1)$, $v, w\in K(u_0)$ и некотором $\varkappa\in(0, 1)$.

Теорема 17.12. *Пусть u_0-псевдовогнутый оператор T удовлетворяет условию (17.16). Тогда $S_+=(0, \infty)$,*

$$\lim_{\lambda\to 0}\|x(\lambda)\|=\infty, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\|x(\lambda)\|=0. \tag{17.17}$$

Доказательство совсем просто. В указанных предположениях оператор $\frac{1}{\lambda}T$ при любом $\lambda\in(0, \infty)$ является $\varkappa$-псевдовогнутым, а значит сжимающим по метрике Биркгофа на $K(u_0)$. Остается заметить, что $K(u_0)$ по метрике Биркгофа — полное метрическое пространство. Свойство (17.17) очевидно. ■

Если бы в теореме 17.10. можно было гарантировать не только $x(\lambda_1) \geqslant x(\lambda_2)$, но и $x(\lambda_1) \leqslant x(\lambda_2)$, то использованные выше дополнительные предположения оказались бы излишними. Вопрос о справедливости импликации „$\lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow x(\lambda_1) \leqslant x(\lambda_2)$" остается открытым.

Как уже неоднократно отмечалось, монотонный и антимонотонный операторы являются частными случаями гетеротонного. Монотонный u_0-псевдовогнутый оператор u_0-вогнут в обычном смысле.

Антимонотонный u_0-псевдовогнутый оператор удовлетворяет условию

$$T\left(\frac{1}{\tau} x\right) \geqslant (1+\eta)\,\tau T(x),$$

где $x \in K(u_0)$, $\tau \in (0, 1)$, $\eta(x, \tau) > 0$.

Для таких операторов приведенные выше утверждения могут быть усилены.

Теорема 17.13. *Пусть оператор T антимонотонен и выполняется одно из условий a) — c) теоремы 17.7. Пусть позитивный спектр S_+ оператора T не пуст. Тогда S_+ совпадает с некоторым интервалом $(\alpha, \beta) \subset (0, \infty)$; справедливо (17.15), вектор-функция $x(\lambda)$ непрерывна по u_0-норме монотонно убывает по λ.*

Доказательство. В плане вышеизложенного легко видеть, что все сводится к установлению последнего свойства: монотонности убывания $x(\lambda)$ по λ.

Пусть $\lambda_1 > \lambda_2$. Покажем, что тогда $x(\lambda_2) \geqslant x(\lambda_1$ В предположении противного максимальное число α, при котором выполняется неравенство $x(\lambda_2) \geqslant \alpha x(\lambda_1)$, принадлежит интервалу $(0, 1)$. Обозначим через β максимальное число в неравенстве $x(\lambda_1) \geqslant \beta x(\lambda_2)$. Рассмотрим сначала случай $\alpha \leqslant \beta$:

$$x(\lambda_2) = \frac{1}{\lambda_2} T[x(\lambda_2)] \geqslant \frac{1}{\lambda_2} T\left[\frac{1}{\alpha} x(\lambda_1)\right] \geqslant \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \alpha x(\lambda_1),$$

но это противоречит определению α. Пусть теперь $\beta < \alpha$. С одной стороны

$$x(\lambda_2) = \frac{1}{\lambda_2} T(x(\lambda_2)) \geqslant \frac{1}{\lambda_2} T\left[\frac{1}{\beta} x(\lambda_1)\right] \geqslant (1+\eta)\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \beta x(\lambda_1),$$

откуда $\alpha > \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\beta$. С другой —

$$x(\lambda_1) = \frac{1}{\lambda_1} T(x(\lambda_1)) \geqslant \frac{1}{\lambda_1} T\left[\frac{1}{\alpha} x(\lambda_2)\right] \geqslant (1+\eta')\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \alpha x(\lambda_2),$$

откуда $\beta > \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\alpha$, т. е. $\alpha < \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\beta$. Полученное противоречие доказывает, что $x(\lambda_2) \geqslant x(\lambda_1)$, и в конечном итоге позволяет сделать вывод о справедливости остальных утверждений теоремы. ■

Большинство приведенных выше утверждений строилось на предположении о справедливости одного из условий а) — с) теоремы 17.7. В этом отношении некоторые результаты можно усилить, опираясь на возможность введения понятия вращения векторного поля $x - T(x)$ с u_0-псевдовогнутым оператором T. Так, например, можно утверждать, что позитивный спектр u_0-псевдовогнутого оператора является открытым множеством в общем случае. Действительно, если $\lambda_0 \in S_+$, то оператор $\frac{1}{\lambda_0}T$ имеет единственную неподвижную точку на $K(u_0)$, к которой равномерно сходятся последовательные итерации $x_{n+1} = \frac{1}{\lambda_0}T(x_n)$. Но тогда, по теореме Майерса*, существует метрика, эквивалентная исходной, по которой оператор $\frac{1}{\lambda_0}T$ — сжимающий. Это позволяет указать меру некомпактности, по которой оператор $\frac{1}{\lambda_0}T$ будет уплотняющим** и ввести, таким образом, вращение векторного поля $x - \frac{1}{\lambda_0}T(x)$. В рассматриваемом случае индекс точки равен 1, что в конечном итоге дает $\lambda_0 + \Delta\lambda \in S_+$ при достаточно малых по модулю $\Delta\lambda$.

Приведем иллюстрационный пример. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^1 G(t, s) f[x(s)]\, ds = \lambda x(t) \tag{17.18}$$

с непрерывным строго положительным ядром $G(t, s)$ и непрерывной строго положительной при $u > 0$ функцией $f(u)$. Будем считать, что оператор

$$Tx(t) = \int_0^1 G(t, s) f[x(s)]\, ds$$

---

* см. Олейцев В. И. [4].

** см. Садовский Б. Н. [1].

действует в пространстве C полуупорядоченном конусом неотрицательных функций, а в качестве v_0 выбран элемент $u_0(t) \equiv 1$.

Пусть

$$f(u) = \frac{\sqrt[3]{u}}{1+\sqrt{u}} \quad \text{или} \quad f(u) = \min\left(\sqrt{u},\ \frac{1}{\sqrt{u}}\right)$$

Легк видеть, что в этом лучае оператор T удовлетворяет условиям теоремы 17.12, и можно утверждать, что уравнение (17.18) при любом $\lambda \in (0, \infty)$ имеет единственное ненулевое положительное решение x_λ, непрерывно зависящее от λ и удовлетворяющее условию (17 17).

Теорема 17.12 остается справедливой и в том случае, когда изучаемый оператор T определен лишь на $K(u_0)$. Поэтому те же выводы относительно разрешимости уравнения (17.18) можно сделать и в случае $f(u) = \max\left(\sqrt{u},\ \frac{1}{\sqrt{u}}\right)$

Многие из приведенных утверждений легко обобщаются на случай уравнений вида (17.I). Если $T(x, \lambda)$ монотонно убывает по то многие утверждения сохраняют силу (естественно, в видоизмененной форме). Легко переформулируются для уравнения (17.1) (без изменения содержания) теоремы 17.7 — 17.9.

Если T u_0-псевдовогнут по x и уравнение (17.1) разрешимо при λ_1 и λ_2, причем $\lambda_1 > \lambda_2$, то $x(\lambda_1) \overline{\gg} x(\lambda_2)$ (аналог теоремы 17.10). Действительно, в предположении противного найдется максимальное число $\alpha \in (0, 1)$, при котором выполняется неравенство $x(\lambda_2) \geqslant \alpha x(\lambda_1)$. Но тогда

$$x(\lambda_2) = \hat{T}(\lambda_2, \qquad x(\lambda_2)) \geqslant \hat{T}\left(\lambda_1,\ \alpha x(\lambda_1),\ \frac{1}{\alpha} x(\lambda_1)\right) \geqslant$$

$$\geqslant (1+\eta)\alpha \hat{T}(\lambda_1,\ x(\lambda_1),\ x(\lambda_1)) = (1+\eta)\alpha x(\lambda_1),$$

что противоречит определению α.

Для уравнения (17.1) легко обобщается также теорема 17.12.

Теорема 17.14. *Пусть оператор $T(x, \lambda)$ непрерывен и монотонно убывает по пусть при $\lambda \in (0, \infty)$, $\tau \in (0, 1)$, v, $w \in K(u_0)$ и некотором $\varkappa \in (0, 4)$ выполняется неравенство*

$$T\left(\qquad \frac{1}{\tau} w,\ \lambda\right) \geqslant \tau^{\varkappa} T(v, \qquad \lambda).$$

Тогда уравнение (17.1) разрешимо при любом $\lambda \in (0, \infty)$, решение $x(\lambda) \in K(u_0)$ единственно при любом $\lambda \in (0, \infty)$, причем

$$\lim_{\lambda \to 0} \| x(\lambda) \| = \infty, \quad \lim_{\lambda \to \infty} \| x(\lambda) \| = 0. \blacksquare$$

17.6. Уравнения с векторным параметром. Пусть задан оператор $R: E \times E \to E$ и нас интересует разрешимость уравнения

$$R(y, x) = x \tag{17.19}$$

относительно x, причем R монотонно убывает по x и монотонно возрастает по y.

Теорема 17.15. *Пусть оператор $T(x) \equiv R(x, x)$ u_0-псевдовогнут ($\hat{T} = R$) и имеет неподвижную точку $x^* \in K(u_0)$. Пусть для оператора T выполнено хотя бы одно из условий a) — c) теоремы 17.7. Тогда уравнение (17.19) имеет единственное решение $x(y) \in K(u_0)$ при любом $y \in K(u_0)$.*

Доказательство. Возьмем произвольное $y \in K(u_0)$ и выберем $\alpha \in (0, 1)$ из условия

$$\alpha x^* \leqslant y \leqslant \frac{1}{\alpha} x^* \tag{17.20}$$

Покажем теперь, что конусный отрезок $\langle \alpha x^*, \frac{1}{\alpha} x^* \rangle$ инвариантен для u_0-псевдовогнутого (антимонотонного) оператора $R(y, x)$ Действительно, для любого $x \in \langle \alpha x^*, \frac{1}{\alpha} x^* \rangle$ в силу (17.20) имеем

$$R(y, x) \geqslant R\left(\alpha x^*, \frac{1}{\alpha} x^*\right) \geqslant \alpha R(x^*, x^*) = \alpha x^*.$$

Аналогично

$$R(y, x) \leqslant R\left(\frac{1}{\alpha} x^*, \alpha x^*\right) \leqslant \frac{1}{\alpha} R(x^*, x^*) = \frac{1}{\alpha} x^*.$$

Для завершения доказательства остается сослаться на теорему 17.7. $\blacksquare$

Таким образом, в указанных предположениях существует оператор $S: K(u_0) \to K(u_0)$ такой, что

$$R(x, S(x)) \equiv S(x).$$

Другими словами, уравнение (17.19) задает на $K(u_0)$ неявную функцию.

Если, например, изучается уравнение

$$x(t) = \int_{\Omega} r[t, y(s), x(s)]\, ds \tag{17.21}$$

с положительным ядром $r(t, y, x)$, которое монотонно возрастает по y и убывает по x и удовлетворяет условию

$$r\left(t, \tau y, \frac{1}{\tau} x\right) \geqslant (1+\eta) \tau r(t, y, x),$$

то в естественных предположениях (надо определить пространство, элемент $u_0 \in K$) вопрос о разрешимости (17.21) при любой функции $y(t) \in K(u_0)$ сводится к вопросу о разрешимости обычного интегрального уравнения Урысона

$$x(t) = \int_{\Omega} r[t, x(s), x(s)]\, ds.$$

ГЛАВА V

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

В главе рассматриваются некоторые приложения общих результатов в различных областях. В соответствии с преследуемыми целями степень общности излагаемых результатов, как правило, приносится в жертву наглядности. Не всегда приложения сводятся к ссылкам на общие теоремы, нередко это лишь рассуждения в стандартном русле, часто специфика прикладных задач приводит к построениям, имеющим самостоятельный интерес и дающим пищу для далеко идущих обобщений. Наконец, содержание главы иллюстрирует тот очевидный факт, что деление теории на основную и прикладную части в известной степени условно.

§ 18. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

18.1. Интегрирование расщепляемых систем. В скалярном случае справедливо следующее утверждение (мы здесь не уточняем детали): условия

$$\frac{d\alpha}{dt} > \varphi(t, \alpha); \quad \frac{d\beta}{dt} < \varphi(t, \beta); \quad \beta(0) \leqslant \alpha(0)$$

влекут за собой оценку $\beta(t) < \alpha(t)$ при $t > 0$. Именно этот простой факт (и его вариации) служит основой для чаплыгинского метода интегрирования скалярного дифференциального уравнения первого порядка.

Упомянутый результат не допускает непосредственного обобщения на системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x); \quad x(t) \in R^n. \tag{18.1}$$

Для получения оценок в этом случае обычно предполагается монотонность $f(t, x)$ по x, а также используются некоторые стандартные приемы перехода к эквивалентному уравнению с монотонной правой частью. Приводимые ниже теоремы дают оценки решений в существенно более общей ситуации.

Пусть R^n полуупорядочено неотрицательным ортантом R^n_+. Ниже рассматривается система дифференциальных уравнений (18.1) с правой частью $f(t, x)$, допускающей диагональное представление (расщепление) $f(t, x) \equiv \hat{f}(t, x, x)$, причем каждая компонента $\hat{f}_j(t, v,$ монотонно возрастает по всем v_j $(j \neq i)$ и монотонно убывает по всем w_j (включая $j=i$).

С помощью $\hat{f}(t, v, w)$ определим вспомогательную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dv}{dt} = \hat{f}(t, v, \qquad \frac{dw}{dt} = \hat{f}(t, \quad v). \tag{18.2}$$

Очевидно, если $v(0) = w(0) = x(0)$, то решение (18.2) $[v(t), w(t)]$ есть $[x(t), x(t)]$, где $x(t)$ решение (18.1).

Далее мы будем предполагать, что все рассматриваемые системы дифференциальных уравнений удовлетворяют условиям единственности решения (т. е. через любую точку проходит не более одной траектории) и эти решения определены на некотором отрезке $[0, T]$.

Теорема 18.1. *Пусть существует пара функций* $v^0(t)$, $w^0(t)$ $(t \in [0, T])$ $v^0(t) \leqslant w^0(t)$, *(т. е.* $v^0_i(t) \leqslant w^0_i(t)$*)* и

$$\begin{aligned} &\frac{dv^0}{dt} \geqslant \hat{f}[t, v^0(t), w^0(t)], \\ &\frac{dw^0}{dt} \geqslant \hat{f}[t, w^0(t), v^0(t)]. \end{aligned} \tag{18.3}$$

Тогда из $v^0(0) \leqslant x^*(0) \leqslant w^0(0)$ *вытекает оценка*

$$v^0(t) \leqslant x^*(t) \leqslant w^0(t), \quad (t \in [0, T]), \tag{18.4}$$

где $x^*(t)$ *— решение системы (18.1).*

В доказательстве удобно отправляться от следующего вспомогательного факта.

Лемма 18.1. *Пусть правые части (18.1) удовлетворяют условию внедиагональной положительности*

$$\forall i: f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geqslant 0 \quad (x_j \geqslant 0, \ j \neq i),$$

Тогда из

$$\frac{dv(t)}{dt} \geqslant f[t, v(t)], \quad v(0) \in R_+^n \tag{18.5}$$

(где R_+^n — неотрицательный ортант) вытекает $v(t) \in R_+^n$ для всех $t \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $x_\varepsilon(t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = f[t, v(t)+x_\varepsilon(t)] - f[t, v(t)] + \varepsilon; \quad x_\varepsilon(0) = 0. \tag{18.6}$$

Заметим, что на $[0, T]$ решение $x_\varepsilon(t)$ равномерно сходится к $x_0(t) \equiv 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Складывая (18.5) и (18.6), получаем

$$\frac{d(v+x_\varepsilon)}{dt} \geqslant f[t, v+x_\varepsilon] + \varepsilon.$$

Т. е. для вектор-функций $v_\varepsilon(t) = v(t) + x_\varepsilon(t)$ выполняется неравенство типа (18.5), но более сильное: в любой граничной точке R_+^n производная $\frac{dv_\varepsilon}{dt}$ направлена строго внутрь R_+^n. Поэтому очевидно $v_\varepsilon(t) \in R_+^n$. Но так как $v_\varepsilon(t) \to v(t)$ равномерно на $[0, T]$, то $v(t) \in R_+^n$. ■

Перейдем теперь к доказательству теоремы 18.1. Нам требуется положительность функций $y(t) = x^*(t) - v^0(t)$; $z(t) = w^0(t) - x^*(t)$.

В силу (18.1) и (18.3)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &\geqslant \hat{f}[t, v^0+y, w^0-z] - \hat{f}[t, v^0, w^0], \\ \frac{dz}{dt} &\geqslant \hat{f}[t, w^0, v^0] - \hat{f}[t, w^0-z, v^0+y], \end{aligned} \tag{18.7}$$

что получается простым сопоставлением неравенств (18.3) и уравнения (18.1), переписанного в эквивалентной форме $\frac{dx}{dt} = \hat{f}[t, x, x]$.

Системы неравенств (18.7) удовлетворяют условиям леммы 18.1, — следовательно $(y(t), z(t)) \in R_+^{2n}$, т. е. $y(t) \geqslant 0$, $z(t) \geqslant 0$, что и требовалось доказать. ■

Как это обычно делается в теории дифференциальных и интегральных неравенств, утверждение теоремы 18.1 можно естественным образом обобщать на случай неединственных решений. Нас, однако, интересует возможность построения последовательностей оценок, сходящихся к решению, и здесь в данном случае предположение единственности оказывается существенным.

Теорема 18.2. *В предположениях теоремы 18.1 и дополнительном предположении, что каждая* $\hat{f}_i(t, v, w)$ *монотонно возрастает по* v_i, *последовательности вектор-функций* $v^k(t)$, $w^k(t)$, *определяемые по правилу* ($k=0, 1, 2, \dots$)

$$\frac{dv^{k+1}}{dt} = \hat{f}[t, v^k(t), w^k(t)], \quad \frac{dw^{k+1}}{dt} = \hat{f}[t, w^k(t), v^k(t)],$$
$$\forall k: v^k(0) = w^k(0) = x^*(0), \tag{18.8}$$

сходятся равномерно на $[0, T]$ *(соответственно, снизу и сверху) к решению (18.1)* $x^*(t)$.

Доказательство. Процедуру (18.8) перепишем в интегральной форме

$$v^{k+1}(t) = x^*(0) + \int_0^t \hat{f}[s, v^k(s), w^k(s)]\, ds,$$
$$w^{k+1}(t) = x^*(0) + \int_0^t \hat{f}[s, w^k(s), v^k(s)]\, ds. \tag{18.9}$$

Легко показать, что

$$v^0(t) \leqslant \dots \leqslant v^k(t) \leqslant \quad \leqslant w^k(t) \leqslant \dots \leqslant w^0(t),$$

а так как оператор, определяемый правой частью (18.9), вполне непрерывен в пространстве непрерывных вектор-функций $C^{2n}[0, T]$, то $v^k(t) \to v^*(t)$, $w^k(t) \to w^*$. Поскольку очевидно $v^*(0) = w^*(0)$ и по предположению система уравнений

$$\frac{dv}{dt} = \hat{f}[t, v, w], \quad \frac{dw}{dt} = \hat{f}[t, w, v]$$

однозначно разрешима (точнее, однозначно разрешима любая задача Коши для этой системы) остается единственная возможность $v^*(t) = w^*(t) = x^*(t)$. Итак $v^k(t) \to x^*(t)$ (снизу), $w^k(t) \to x^*(t)$ (сверху). ■

Указанные теоремы характеризуют каноническую ситуацию, к которой сводится ряд других. Рассмотрим, например, задачу

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(0) = x^*, \tag{18.10}$$

где $f(t, x) \equiv \hat{f}(t, x, x)$, причем $\hat{f}(t, v, w)$ монотонно возрастает по v, а „желаемого“ (в плане вышеизложенного) убывания по w нет-

Допустим, по w убывает лишь $\hat{f}(t, v, w) - P(t) w$, где $P(t)$ положительная матрица с нулевыми элементами на диагонали.

В этом случае от (18.10) естественно перейти к эквивалентной задаче

$$Lx = f(t, x) - P(t)x, \quad x(0) = x^* \tag{18.11}$$

с более общим дифференциальным оператором $Lx = \frac{dx}{dt} - P(t)x$.

Допустим, на $[0, T]$ удалось подобрать пару вектор-функций $v^0(t)$, $w^0(t)$ таких, что $v^0(0) = w^0(0) = x^*$ и

$$\begin{gathered} Lv^0 \leqslant \hat{f}[t, v^0(t), w^0(t)] - P(t) w^0(t), \\ Lw^0 \geqslant \hat{f}[t, w^0(t), v^0(t)] - P(t) v^0(t). \end{gathered} \tag{18.12}$$

Тогда по теореме 18.1 можно гарантировать оценку $v^0(t) \leqslant x^*(t) \leqslant \leqslant w^0(t)$, где $x^*(t)$ — решение (18.10) (или равносильно (18.11)). Чтобы воспользоваться теоремой 18.1, достаточно переписать (18.12) в форме

$$\frac{dv^0}{dt} \leqslant \hat{f}[t, v^0, w^0] + P(t)[v^0 - w^0],$$

$$\frac{dw^0}{dt} \geqslant \hat{f}[t, w^0, v^0] + P(t)[w^0 - v^0].$$

Теорема 18.2 здесь непосредственно не работает, но справедлив аналогичный результат.

Теорема 18.3. *В указанных предположениях последовательности вектор-функций $v^k(t)$, $w^k(t)$, порождаемые процедурой*

$$\begin{gathered} Lv^{k+1} = \hat{f}(t, v^k, w^k) - P(t) w^k, \\ Lw^{k+1} = \hat{f}(t, w^k, v^k) - P(t) v^k, \\ \forall k : v^k(0) = w^k(0) = x^* \end{gathered} \tag{18.13}$$

равномерно на $[0, T]$ сходятся $x^*(t)$ (соответственно, снизу и сверху).

Доказательство. Пусть $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы $Lx = 0$. Для решения $u(t)$ неоднородной системы $Lu = z(t)$ имеет место формула Коши

$$u(t) = Y(t) Y^{-1}(0) u(0) + \int_0^t Y(t) Y^{-1}(s) z(s)\, ds,$$

поэтому (18.13) можно переписать в эквивалентной форме

$$v^{k+1}=\hat{F}(v^k,\ w^k),\quad w^{k+1}=\hat{F}(w^k,\ v^k)$$

с интегральным оператором Вольтерра

$$\hat{F}(v,\ w)=Y(t)\,Y^{-1}(0)\,x^*+\int_0^t \hat{k}[t,\ s,\ v(s),\ w(s)]\,ds,$$

где

$$\hat{k}(t,\ s,\ v,\ w)=Y(t)\,Y^{-1}(s)\,[\hat{f}(s,\ v,\ w)-P(t)\,w].$$

В указанных предположениях оператор $\hat{f}(x,\ x)$ — гетеротонный, причем, сопутствующий оператор $\hat{f}(v,\ w)$ вполне непрерывен как оператор, действующий из $C^{2n}[0,\ T]$ в $C^n[0,\ T]$. Требуемое заключение вытекает из общих теорем о гетеротонных операторах. ■

18.2. Интегральные операторы Вольтерра. Стандартным образом от (18.1) можно перейти к эквивалентному векторному интегральному уравнению Вольтерра

$$x(t)=\int_{t_0}^t k[t,\ s,\ x(s)]\,ds+a(t). \tag{18.14}$$

В указанных выше предположениях ядро $k(t,\ s,\ u)$ можно выбрать так, что вектор-функция $k(t,\ s,\ u)$ допускает диагональное представление $k(t,\ s,\ u)\equiv\hat{k}(t,\ s,\ u,\ u)$, причем $\hat{k}(t,\ s,\ v,\ w)$ монотонно возрастает по v и убывает по w. Для дальнейшего, собственно, не важно, что источником (18.14) служит некоторая задача Коши для дифференциального уравнения. Существенны следующие предположения: ядро $k(t,\ s,\ u)$ допускает обобщенно монотонное диагональное представление (см. выше); оператор, определяемый правой частью (18.14), действует и вполне непрерывен в $C^n[t_0,\ t_1]$; система уравнений

$$\begin{aligned} v(t)&=\int_{t_0}^t \hat{k}[t,\ s,\ v(s),\ w(s)]\,ds+a(t),\\ w(t)&=\int_{t_0}^t \hat{k}[t,\ s,\ w(s),\ v(s)]\,ds+a(t) \end{aligned} \tag{18.15}$$

имеет единственное решение.

В частном случае единственность решения (18.15) вытекает из единственности решения задачи Коши для системы (18.2). В общем случае требование единственности решения (18.15) также не является чересчур жестким, поскольку в естественных предположениях операторы Вольтерра — сжимающие операторы (в метрике эквивалентной исходной).

Теорема 18.4. *Пусть существует пара непрерывных функций $v^0(t)$, $w^0(t)$ $(t \in [t_0, t_1])$ таких, что $v^0(t) \leqslant w^0(t)$,*

$$
\begin{aligned}
v^0(t) &\leqslant \int_{t_0}^{t_1} \hat{k}[t, s, v^0(s), w^0(s)]\,ds + a(t),\\
w^0(t) &\geqslant \int_{t_0}^{t} \hat{k}[t, s, w^0(s), v^0(s)]\,ds + a(t).
\end{aligned} \tag{18.16}
$$

Тогда из $v^0(0) \leqslant x^*(0) \leqslant w^0(0)$ вытекает оценка $v^0(t) \leqslant x^*(t) \leqslant w^0(t)$, где $x^*(t)$ решение уравнения (18.14). ■

Теорема 18.5. *В условиях теоремы 18.4, при дополнительном предположении о том, что в (18.16) для $t > t_0$ выполняются строгие оценки, выполняются строгие неравенства, при $t > t_0$ справедлива оценка $v^0(t) < x^*(t) < w_0(t)$.* ■

Полученные оценки позволяют строить итерационные вычислительные алгоритмы с монотонными приближениями к решению.

Теорема 18.6. *Последовательности $v^k(t)$, $w^k(t)$, порождаемые итерационной процедурой*

$$
\begin{aligned}
v^{k+1}(t) &= \int_{t_0}^{t} \hat{k}[t, s, v^k(s), w^k(s)]\,ds + a(t),\\
w^{k+1}(t) &= \int_{t_0}^{t} \hat{k}[t, s, w^k(s), v^k(s)]\,ds + a(t),
\end{aligned} \tag{18.17}
$$

где $k = 0, 1, \ldots$ $v^0(t)$, $w^0(t)$ удовлетворяют неравенствам (18.16), сходятся к решению $x^*(t)$ уравнения (18.14), т. е. $v^k(t) \to x^*(t)$, $w^k(t) \to x^*(t)$, причем

$$v^0(t) \leqslant \ldots \leqslant v^k(t) \leqslant \ldots \leqslant x^*(t) \leqslant \ldots \leqslant w^k(t) \leqslant \ldots \leqslant w^0(t). \tag{18.18}$$

Тот факт, что итерационная процедура (18.17) дает последовательности, удовлетворяющие (18.18), легко устанавливается типичным при изучении гетеротонных операторов техническим приемом. Для вывода на этой основе сходимости $v^k(t) \to v^*(t)$, $w^k(t) \to w^*(t)$ надо лишь заметить, что пара $(v^*(t), w^*(t))$ — решение системы (18.15), и если $v^*(t) \neq w^*(t)$, то $(w^*(t), v^*(t))$ — второе решение (18.15), что противоречит предположению. ■

18.3. Единственность и нелокальная продолжимость решений. При изучении и решении систем дифференциальных уравнений вопросы однозначной разрешимости задачи Коши и нелокальной продолжимости решений играют важную роль и им посвящено большое число исследований.

Пусть $x(t)$ обозначает решение системы дифференциальных уравнений $\dot{x}=f(t, x)$, т. е.

$$\begin{gathered}\frac{dx_1}{dt}=f_1(t, x_1,\dots x_n),\\ \dots\dots\dots\dots\\ \frac{dx_n}{dt}=f_n(t, x_1,\dots, x_n),\end{gathered} \tag{18.19}$$

проходящее через точку $x(t_0) \in R^n$. Пространство R^n будем считать далее полуупорядоченным некоторым телесным конусом K.

Теорема 18.7. *Пусть вектор-функция $f(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных и для $h>0$*

$$Ah \leqslant f(t, x+h)-f(t, x) \leqslant Bh, \tag{18.20}$$

где A и B — некоторые линейные операторы. Тогда через любую точку $x(t_0) \in R^n$ проходит не более одного решения $x(t)$ системы (18.19) и любое решение $x(t)$ нелокально продолжимо.

Доказательство. Очевидно, в силу общих теорем единственности и нелокальной продолжимости достаточно показать, что $f(t, x)$ в предположениях теоремы удовлетворяет условию Липшица (в какой-нибудь норме пространства R^n).

Конус положительных на K линейных операторов нормален и оштукатуриваем. Поэтому из (18.20) вытекает существование такого положительного оператора C, что

$$-Ch \leqslant f(t, x+h)-f(t, x) \leqslant Ch. \tag{18.21}$$

Фиксируем некоторую норму пространства R^n и пусть $\|C\|=L$. Введем в R^n новую норму

$$\|x\|_*=\inf\{\|y\|: -y \leqslant x \leqslant y\}.$$

Аксиомы нормы легко проверяются. Вопрос об эквивалентности норм здесь не возникает, так как все нормы в R^n эквивалентны.

Возьмем две произвольные точки $x, y \in R^n$ и пусть $-z \leqslant x - y \leqslant z$. Тогда

$$x \geqslant \frac{1}{2}(x+y-z), \quad y \geqslant \frac{1}{2}(x+y-z)$$

и из (18.21) вытекает

$$-C\left(\frac{x-y+z}{2}\right) \leqslant f(t, x) - f\left(t, \frac{x+y-z}{2}\right) \leqslant C\left(\frac{x-y+z}{2}\right),$$

$$-C\left(\frac{y-x+z}{2}\right) \leqslant f\left(t, \frac{x+y-z}{2}\right) - f(t, y) \leqslant C\left(\frac{y-x+z}{2}\right)$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$-Cz \leqslant Ax - Ay \leqslant Cz.$$

Откуда

$$\| f(t, x) - f(t, y) \|_* \leqslant \| Cz \| \leqslant L \| z \|. \qquad (18.22)$$

Поскольку (18.22) выполняется для любого удовлетворяющего условию $-z \leqslant x - y \leqslant z$, то

$$\| f(t, x) - f(t, y) \|_* \leqslant L \inf \{ \| z \| : -z \geqslant x - y \geqslant z \} = $$
$$= L \| x - y \|_*,$$

что завершает доказательство. ■

Если $f(t, x)$ действует из $(-\infty, \infty) \times E$ в E, то аналогичным образом можно показать, что из оценки (18.21) вытекает липшицевость $f(t, x)$ в некоторой норме, эквивалентной норме пространства E. При этом надо лишь полагать, что конус K, полуупорядочивающий E — нормальный и воспроизводящий.

Предположим теперь, что R^n полуупорядочено неотрицательным ортантом R^n_+. Пусть $f(t, x)$ допускает диагональное представление $\hat{f}(t, x, x)$, причем каждая компонента $\hat{f}_i(t, v, w)$ монотонно возрастает по всем v_j $(j \neq i)$ и убывает по всем w_j $(j = 1, \ldots, n)$. Наряду с системой (18.19) будем рассматривать вспомогательную систему дифференциальных уравнений в R^{2n}

$$\frac{dv}{dt} = \hat{f}(t, v, w), \quad \frac{dw}{dt} = \hat{f}(t, w, v). \qquad (18.23)$$

Выше было показано, что из разрешимости задач Коши для систем (18.19) и (18.23) на сегменте $[t_0, t_1]$ и существования пары функций $v^0(t)$, $w^0(t)$ таких, что $v^0(t) \leqslant w^0(t)$,

$$\frac{dv^0}{dt} \leqslant \hat{f}(t, v^0, w^0), \quad \frac{dw^0}{dt} \geqslant \hat{f}(t, w^0, v^0) \qquad (18.24)$$

и условия $v^0(t_0) \leqslant x^*(t_0) \leqslant w^0(t_0)$ вытекает оценка

$$v^0(t) \leqslant x^*(t) \leqslant w^0(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

где $x^*(t)$ — решение задачи $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x^*(t_0)$.

Близкими рассуждениями устанавливается справедливость следующего факта.

Теорема 18.8. *Пусть существует пара функций $v^0(t)$, $w^0(t)$, определенных на всей числовой оси и удовлетворяющих неравенствам (18.24). Тогда любое решение $x(t)$ системы (18.19), принадлежащее в некоторый момент t_0 конусному отрезку $\langle v^0(t), w^0(t_0)\rangle$, нелокально продолжимо, т. е. определено для всех $t \geqslant t_0$.* ■

Описанное выше диагональное расщепление вектор-функции $f(t, x)$ может оказаться полезным и в других ситуациях. Для автономных систем $[f(t, x) = f(x), \hat{f}(t, v, w) = \hat{f}(v, w)]$ теореме 18.8 можно придать более полезную форму.

Теорема 18.9. *Пусть для автономной системы $\dot{x} = f(x)$ существует пара функций $v^0(t)$, $w^0(t)$, определенных на всей числовой оси и удовлетворяющих неравенствам (18.24), причем, для любого j*

$$\lim_{t \to -\infty} v_j^0(t) = -\infty, \quad \lim_{t \to -\infty} w_j^0(t) = \infty \tag{18.25}$$

Тогда любое решение системы $\dot{x} = f(x)$ нелокально продолжимо.

Доказательство. Пусть решение $x(t)$ в некоторый момент времени проходит через точку x^0. В силу (18.25) можно указать такой момент времени t_0, что

$$x^0 \in \langle v^0(t_0), w^0(t_0)\rangle.$$

Поскольку система автономна, без ограничения общности можно считать $x(t_0) = x^0$. Поэтому для любого $t \in [t_0, \infty)$ имеем оценку

$$v^0(t) \leqslant x(t) \leqslant w^0(t),$$

из которой вытекает нелокальная продолжимость $x(t)$.

Теорему 18 9 можно дополнить следующим очевидным (в плане вышеизложенного), но полезным утверждением.

Теорема 18.10. *Пусть выполнены предположения теоремы 18.9* и $\| v^0(t) \| \to 0$, $\| w^0(t) \| \to 0$ *при* $t \to \infty$. *Тогда нулевое положение равновесия системы $\dot{x} = f(x)$ асимптотически устойчиво в целом.* ■

18.4. Матричные системы сравнения. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(t, x), \tag{18.26}$$

где $x \in R^n$ — вектор-столбец, а правая часть удовлетворяет неким условиям, обеспечивающим существование, единственность и нелокальную продолжимость решений (18.26), причем $f(t, 0)\equiv 0$, т. е. $x=0$ является положением равновесия системы. Далее нас будет интересовать вопрос об асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия системы (18.26), который мы будем изучать, исследуя вспомогательное дифференциальное уравнение в пространстве матриц.

Пусть пространство E симметрических матриц $n\times n$ полуупорядочено конусом K неотрицательно определенных матриц. Очевидно, $\operatorname{int} K$ — множество положительно определенных матриц. Если матрица U невырождена, то из $H \in K$, $H \in \operatorname{int} K$ вытекает соответственно

$$UHU^T \in K, \quad UHU^T \in \operatorname{int} K. \tag{18.27}$$

Полагая в (18.27) $U=H^{-1}$, получаем

$$H \in \operatorname{int} K \Rightarrow H^{-1} \in \operatorname{int} K. \tag{18.28}$$

Фиксируем произвольную матрицу $U_0 \in \operatorname{int} K$ и положим

$$\| H \|_{U_0}=\inf \{\gamma: -\gamma U_0 \leqslant H \leqslant \gamma U_0\}. \tag{18.29}$$

Очевидно, (18.29)—обычная U_0-норма. Норму в R^n определим так:

$$\| x \|=(x^T U_0^{-1} x)^{1/2}. \tag{18.30}$$

В дальнейшем важную роль будет играть оператор $H(x)=xx^T$, отображающий R^n на границу конуса K. Покажем, что

$$\| H(x) \|_{U_0}=\| x \|^2. \tag{18.31}$$

Так как $H(x) \in K$ для любого $x \in R^n$, то в данном случае

$$\| H(x) \|_{U_0}=\inf \{ \gamma: xx^T \leqslant \gamma U_0 \}=\gamma_0.$$

Нам надо показать, что $\gamma_0=x^T U_0^{-1} x$, т. е.

$$(x^T U_0^{-1} x) U_0 - xx^T \in K \tag{18.32}$$

и при любом $\varepsilon>0$

$$(x^T U_0^{-1} x - \varepsilon) U_0 - xx^T \notin K. \tag{18.33}$$

В силу неравенства Буняковского-Шварца для любого $c \in R^n$ имеем

$$c^T[(x^T U_0^{-1} x) U_0 - xx^T] c = (c^T U_0 c)(x^T U_0^{-1} x) - (c^T x)^2 =$$
$$= (\bar{c}^T \bar{c})(\bar{x}^T \bar{x}) - (\bar{c}^T \bar{x})^2 \geqslant 0,$$

где $\bar{c}^T = c^T U_0^{1/2}$, $\bar{x}^T = x^T U_0^{-\frac{1}{2}}$ Это обеспечивает справедливость (18.32).

Положим теперь $c^T = x^T U_0^{-1}$. Для $\varepsilon > 0$ имеем

$$c^T[(x^T U_0^{-1} x - \varepsilon) U_0 - xx^T] c = -\varepsilon x^T U_0^{-1} x < 0,$$

что гарантирует справедливость (18.33). ■

Рассмотрим теперь в пространстве E дифференциальное уравнение

$$\dot{S} = F(t, S), \tag{18.34}$$

правая часть которого, как и в (18.26), удовлетворяет неким условиям, обеспечивающим существование, единственность и нелокальную продолжимость решений (18.34),

Матричное дифференциальное уравнение (18.34) назовем системой сравнения для уравнения (18.26), если в числе своих решений оно содержит решения $S(t)$, связанные с решениями $x(t)$ уравнения (18.26) соотношениями

$$H(x(0)) = S(0), \; H(x(t)) \leqslant S(t), \quad t > 0. \tag{18.35}$$

Из (18.35) и (18.31) следует

$$\| x(t) \|^2 \leqslant \| S(t) \|_{U_0}.$$

Поэтому устойчивость, асимптотическая устойчивость нулевого решения (18.26) вытекают из аналогичных свойств системы уравнения (18.34).

Будем говорить, что уравнение (18.34) принадлежит классу M ($F \in M$), если для его любого решения $S(t)$ и функции $P(t)$, удовлетворяющей дифференциальному неравенству

$$\dot{P} \leqslant F(t, P)$$

из $P(0) \leqslant S(0)$ следует $P(t) \leqslant S(t)$ при $t > 0$.

Из определения следует, что в случае $F \in M$ оператор сдвига по траекториям (18.34) монотонен, т. е. для любых двух решений $S_1(t)$ и $S_2(t)$ из $S_1(0) \leqslant S_2(0)$ следует $S_1(t) \leqslant S_2(t)$ при $t > 0$.

Прежде чем двигаться дальше, остановимся на простом примере, иллюстрирующем суть подхода. Рассмотрим автономную линейную систему

$$x = Ax, \tag{18.36}$$

где матрица A не обязательно симметрическая.

Дифференцируя $H(x)$ вдоль траекторий (18.36), получаем

$$\frac{d}{dt}(xx^T)=xx^T A^T+Axx^T.$$

Таким образом,

$$\dot{H}=HA^T+AH \tag{18.37}$$

можно взять в качестве системы сравнения для уравнения (18.36).

Решениями (18.37) служат функции

$$H(t)=e^{At} H(0)\, e^{A^T t}.$$

Из $H_1(0)\geqslant H_2(0)$ следует

$$e^{At} H_1(0)\, e^{A^T t}-e^{At} H_2(0)\, e^{A^T t}=e^{At}[H_1(0)-H_2(0)]\, e^{A^T t}\geqslant 0,$$

что означает монотонность оператора сдвига по траекториям (18.37).

Для того, чтобы нулевое положение равновесия системы с монотонным оператором сдвига было асимптотически устойчиво, достаточно, чтобы нашлась точка $X\in \operatorname{int} K$, которая под действием оператора сдвига идет назад, и точка $Y\in -\operatorname{int} K$, идущая вперед. В данном случае наличие таких точек гарантирует разрешимость в $\operatorname{int} K$ уравнения

$$H_0 A^T+AH_0=-G_0 \tag{18.38}$$

при $G_0\in \operatorname{int} K$.

Если матрица A гурвицева (все собственные значения имеют отрицательные действительные части), то интеграл

$$H_0=\int\limits_0^\infty e^{At}\, G_0\, e^{A^T t}\, dt$$

сходится и является решением уравнения (18.38) (проверьте!).

Таким образом, переход к системе сравнения и использование конусных соображений позволяют для произвольной линейной системы установить необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости. Это указывает на перспективность подхода и дает надежду на получение иных полезных результатов.

Вернемся к нелинейной системе (18.26). Продифференцируем $H(x)$ вдоль траекторий (18.26)

$$\dot{H}=xf^T(t, x)+f(t, x)\, x^T$$

Если имеют место неравенства

$$\dot{H}=xf^T(t, x)+f(t, x)\, x^T\leqslant F(t, H)$$

и $F \in M$, то ясно, что $S = F(t, S)$ можно использовать в качестве системы сравнения.

Эффективность предлагаемого подхода во многом зависит от наличия критериев, гарантирующих принадлежность используемых систем сравнения классу M. Другими словами, необходим набор удобных теорем о дифференциальных неравенствах для матричных дифференциальных уравнений в пространстве, полуупорядоченном конусом K неотрицательно определенных матриц. Эта проблема детально не изучалась и здесь можно ожидать появления интересных результатов.

Простыми примерами, в которых соответствующие теоремы о дифференциальных неравенствах легко устанавливаются, могут служить матричное дифференциальное уравнение Ляпунова

$$\dot{S} = SA^T(t) + A(t)\,S \tag{18.39}$$

и матричное дифференциальное уравнение Риккати

$$\dot{S} = SA^T(t) + A(t)\,S + SD(t)\,S, \tag{18.40}$$

где $A(t)$ и $D(t)$ — ограниченные непрерывные матрицы $n \times n$.

Поскольку первое уравнение — частный случай второго, оба случая охватываются следующим результатом.

Теорема 18.11. *Пусть $S(t)$ является решением (18.40), а $P(t)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству*

$$\dot{P} \leqslant PA^T(t) + A(t)\,P + PD(t)\,P \tag{18.41}$$

Тогда $P(0) \leqslant S(0)$ вытекает $P(t) \leqslant S(t)$ при $t > 0$.

Доказательство. Запишем (18.41) в виде

$$\dot{P} = PA^T(t) + A(t)\,P + PD(t)\,P - G(t), \quad G(t) \in K.$$

Для $Q(t) = S(t) - P(t)$ имеем

$$\dot{Q} = QB^T(t) + B(t)\,Q + G(t), \tag{18.42}$$

где

$$Q(0) \in K, \quad B(t) = A + PD + QD/2.$$

Решением (18.42) является

$$Q(t) = U(t, 0)\,Q(0)\,U^T(t, 0) + \int_0^t U(t, s)\,G(s)\,U^T(t, s)\,ds,$$

где $U(t, s)$ — оператор сдвига по траекториям дифференциального уравнения $\dot{X} = B(t)\,X$.

Теперь $Q(t) \in K$ при $t > 0$ вытекает из $Q(0) \in K$ и свойства (18.27). ■

§ 19. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ

19.1. Постановка задач. Динамика системы часто описывается системой дифференциальных уравнений $\dot{x}=G(x)$ или же (в случае дискретного времени) итерационной процедурой $x^{k+1}=F(x^k)$.

Даже если оставаться в рамках этих простейших способов описания динамических процессов, то и тогда при переходе к изучению сложных систем возникают специфические трудности, преодоление которых зачастую связано с необходимостью развития новых математических методов. В первую очередь здесь стоит отметить тот факт, что для сложных систем характерной особенностью является отсутствие их точного количественного описания. Скажем, для рыночной модели* правая часть (векторного) дифференциального уравнения представляет собой набор функций избыточного спроса, которые едва ли могут быть известны исследователю сколько-нибудь точно в широких диапазонах изменения цен. Относительно функций избыточного спроса известна лишь некая качественная информация, на основе которой и необходимо сделать вывод, например, об устойчивости равновесия. Такая ситуация типична для системных приложений, и ясно, что она существенно отличается от традиционных постановок задач классической теории устойчивости, где правые части дифференциальных уравнений обычно могут быть определены с любой необходимой точностью.

Нужно также отметить, что специфика функционирования сложных систем выдвигает на передний план вопросы глобальной устойчивости, которые в теории устойчивости с точки зрения системных приложений недостаточно разработаны.

Наконец, динамические процессы в сложных системах часто содержат неопределенные факторы — и это выводит адекватные постановки задач за рамки исследований обычных дифференциальных уравнений и итерационных процедур. Ниже описывается формальная динамическая модель, отражающая недетерминированность функционирования многих реальных систем. (Иллюстрационные примеры рассматриваются в следующем разделе).

Пусть система состоит из n взаимосвязанных элементов A_i. Элемент A_i распоряжается выбором скалярной величины x_i, состояние системы характеризуется вектором $x=\{x_1,\dots, x_n\}$.

---

* См. следующий раздел.

Для каждого i при любом допустимом x существует единственная точка

$$\hat{x}_i = f_i(x),$$

которую будем называть положением цели i-го элемента. Если допустимые состояния системы определяются ограничениями $\forall i$: $x_i \in [v_i^0, w_i^0]$, то предполагается также $\forall i: \hat{x}_i = f_i(x) \in [v_i^0, w_i^0]$.

Время функционирования системы может быть дискретным (разбито на периоды с номерами $k=0, 1, \ldots$) и непрерывным. В том и другом случае гипотеза о поведении элементов состоит в следующем (аксиома индикаторного поведения): каждый элемент A_i с течением времени изменяет значение собственной переменной в направлении к текущему положению цели $\hat{x}_i$, т. е. движется по направлению к поверхности $x_i = f_i(x)$.

В случае непрерывного времени подобная тактика поведения может быть описана системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \tilde{\gamma}_i(t, x, \alpha)[f_i(x) - x_i], \quad \tilde{\gamma}_i \geqslant 0. \qquad (19.1)$$

Запись (19.1) означает, что $\operatorname{sign} \dot{x}_i = \operatorname{sign}[f_i(x) - x_i]$, параметр α символизирует зависимость функций $\tilde{\gamma}_i$, а следовательно и скоростей $\dot{x}_i$, от некоторых факторов, внешних по отношению к модели

Каждая конкретная реализация процесса (19.1) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$x_i = \gamma_i(t)[f_i(x) - x_i], \quad \gamma_i(t) \geqslant 0, \qquad (19.2)$$

т. е. каждой реализации соответствует свой набор функций $\gamma_i(t)$, которые в дальнейшем предполагаются ограниченными. В большинстве случаев для простоты предполагается также непрерывность $\gamma_i(t)$, но практически все приводимые далее результаты при использовании более громоздкой техники обобщаются на случай функций $\gamma_i(t)$, суммируемых на любом конечном отрезке.

Исходное описание системы нередко бывает заданным не в виде *оператора межэлементных связей* $F(x) = \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$, а в виде оператора $G(x) = \{g_1(x), \ldots, g_n(x)\}$, который с $F(x)$ связан соотношениями*

$$\forall i: \operatorname{sign} g_i(x) = \operatorname{sign}[f_i(x) - x_i],$$

$$\forall i: g_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, f_i(x), x_{i+1}, \ldots, x_n) \equiv 0,$$

* В этом случае функции $f_i(x)$ не должны явно зависеть от x_i.

и каждая функция $g_i(x)$ убывает по x_i. Такие функции $g_i(x)$ называются *функциями-индикаторами*. Динамику системы в этом случае удобнее изучать непосредственно в форме

$$x_i = \gamma_i(t)\, g_i(x), \quad \gamma_i(t) \geqslant 0,$$

что (в очевидных предположениях) эквивалентно предыдущему.

В случае дискретного времени индикаторное поведение описывается процедурой

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \gamma_i^k[f_i(x) - x_i^k], \quad \gamma_i^k \in [0, 1],$$

где x_i^k — точка, которую элемент A_i выбирает в k-й период времени.

Конкретное значение γ_i^k, определяющее величину шага $\Delta x_i^k = x_i^{k+1} - x_i^k$, может зависеть от времени, текущего состояния и некоторых других факторов α, внешних по отношению к модели. Ограничение $\gamma_i^k \leqslant 1$ означает, что в системе отсутствует „перерегулирование“, т. е. каждый A_i делает шаг не больший, чем рас-

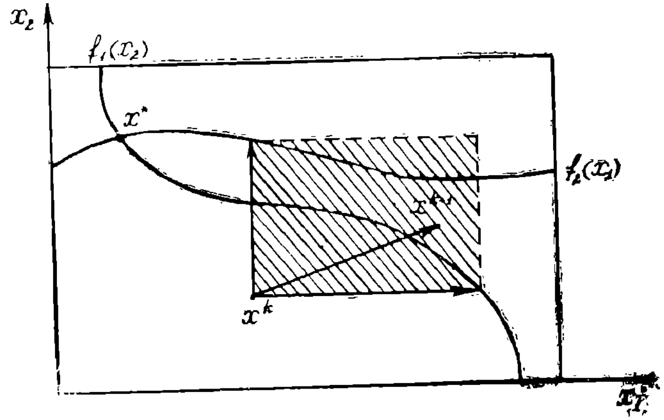


Рис. 8.

стояние (по направлению x_i) от x^k до поверхности $x_i = f_i(x)$. Для частного случая двухэлементной системы, в которой $f_i(x)$ не зависит явно от x_i, геометрический аналог процедуры (19.3) изображен на рис. 8. В соответствии с (19.3) в $(k+1)$-й момент времени система может попасть в любую точку заштрихованного прямоугольника.

Процедуры (19.2), (19.3) будем записывать далее в векторном виде

$$x^{k+1}=x^k+\Gamma_k[F(x^k)-x^k], \tag{19.4}$$

$$x=\Gamma(t)[F(x)-x], \tag{19.5}$$

где Γ_k $\operatorname{diag}\{ \quad \gamma_n^k\}$, $\Gamma(t)=\operatorname{diag}\{\gamma_1(t),\dots\ \gamma_n(t)\}$.

Здесь возникает следующий цикл вопросов: устойчиво ли равновесие, сходятся ли к нему все траектории из любого начального положения обладает ли система свойством асимптотической устойчивости и т. Формулировка этих вопросов пока апеллирует лишь к интуитивным аналогиям с классической теорией динамических систем. Процедуры типа (19.2), (19.3) по существу описывают не одну динамическую систему, а целый ансамбль динамических систем (каждой системе ансамбля соответствует своя траектория (реализация). Поэтому различные свойства устойчивости здесь должны быть определены заново.

Несколько более подробно стоит остановиться на вопросе о сходимости траекторий к положению равновесия. В рамках указанных ограничений $\gamma_i^k\in[0,1]$, $\gamma_i(t)\geqslant 0$ элементы могут просто „стоять на месте“ ($\gamma_i^k\equiv 0$, $\gamma_i(t)\equiv 0$) или сходиться к положению, отличному от равновесного (если γ_i^k или $\gamma_i(t)$ с ростом времени слишком быстро стремятся к нулю). Чтобы исключить эти малоинтересные в содержательном отношении случаи, оказывается достаточным, соответственно, в дискретном и непрерывном вариантах, наложить дополнительные ограничения

$$\forall i:\sum_k^{\infty}\gamma_i^k=\infty, \quad \sum_0^{\infty}\gamma_i(t)\,dt=\infty. \tag{19.6}$$

Траектории, удовлетворяющие этим условиям, будем называть невырожденными. Содержательный смысл невырожденности траектории заключается в том, что в системе не существует слишком „ленивых“ элементов, которые бы „успокаивались“, не достигнув цели.

Описанный выше простейший вариант модели допускает различные модификации, более адекватно отражающие природу некоторых конкретных задач.

Например, конкретные задачи не всегда оказываются содержательно более емкими, чем исходная модель. Скорее наоборот, — и тогда разумнее упростить модель, чтобы не „палить из пушек по воробьям“. Так, например, доказывая сходимость всех невырожденных траекторий (19.2) или (19.3) к положению равновесия, мы получаем зачастую гораздо больше, чем того требует конкретный смысл задачи. Может оказаться, что множество несходящихся траекторий чрезвычайно мало по сравнению с множеством сходящихся. Если при этом величины γ_i^k или функции $\gamma_i(t)$ являются в каком-то смысле независимыми, то ситуацию можно признать вполне удовлетворительной. Отсечение „малых" множеств несходящихся траекторий можно осуществлять переходя на вероятностную трактовку процессов (19.2), (19.3), считая величины γ_i^k или функции $\gamma_i(t)$ случайными.

Рассмотрение игровых моделей (см. следующий раздел) приводит также к мысли видоизменить модель в несколько ином направлении. Как правило, элемент A_i располагает лишь локальной информацией о собственной функции выигрыша, зная ее поведение в некоторой малой окрестности точки, в которой находится система. Еще лучше сказать, что A_i в состоянии оценить лишь направление роста выигрыша по собственной переменной (близкая по духу ситуация имеет место в рыночной модели). В таких условиях гипотеза индикаторного поведения представляется наиболее правдоподобной, и все остается по-старому, если система функционирует в непрерывном времени. В дискретном же случае процедуру (19.4) можно считать адекватной реальным динамическим процессам лишь в предположении, что элементы делают в нужном направлении заведомо малые шаги. Не будучи уверенным в этом, едва ли можно считать выполненным ограничение $\gamma_i^k \leqslant 1$, — так как элементы не располагают информацией для вычисления текущих положений цели. Если отказаться от указанного предположения, то приходится изучать итерационную процедуру вида

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \xi_i^k \operatorname{sign} g_i(x^k), \qquad (19.7)$$

где ξ_i^k обозначает длину шага $\xi_i^k = |x_i^{k+1} - x_i^k|$. Конечно, о сходимости траекторий (19.7) не может быть речи при отсутствии тех или иных ограничений на последовательности ξ_i^k. Одним из естественных ограничений представляется условие $\xi_i^k \to 0$ (при дополнительном требовании невырожденности $\forall i\colon \sum\limits_k^{\infty} \xi_i^k = \infty$).

Запись (19.7) допускает также другую трактовку. Можно считать, что элементы движутся в „нужном" направлении лишь в среднем, т. е. ξ_i^k случайные величины, которые могут принимать даже отрицательные значения, но имеют положительные математические ожидания m_i^k.

На первый взгляд существенным ограничением представляется тот факт, что в исходной модели рассматриваются системы, состоящие из „скалярных" элементов, т. е. из элементов, которые распоряжаются лишь скалярными переменными. Но в такую модель укладываются и системы с векторными элементами, что связано с условностью ответа на вопрос „что считать элементом системы". Рассмотрим, например, модель рынка, в которой каждый продавец торгует сразу несколькими товарами, распоряжаясь сразу целым набором цен, т. е. вектором. Опять-таки естественной здесь выглядит независимая регулировка цен (каждую в отдельности цену продавец повышает или понижает в зависимости от знака соответствующего избыточного спроса). При этом все сводится к изучению процедур типа (19.2) или (19.3), т. е. на модельном уровне векторные элементы как бы дезагрегируются в скалярные. Другими словами, векторные элементы A_i распадаются на совокупности независимо действующих скалярных элементов $\{A_{ij}\}$.

Для возможности подобного формального описания системы, конечно, нужно иметь достаточные основания в виде тех или иных содержательных предпосылок. Рассмотренный способ моделирования систем с векторными элементами (состоящий в дезагрегации элементов) не исключает возможности рассмотрения процедур типа (19.2), (19.3), в которых не скаляр, а вектор.

19.2. Примеры. Рассматриваемые ниже примеры иллюстрируют динамическую модель, описанную в предыдущем разделе.

Пример 1. При условии $\forall i, k: \gamma_i^k = 1$ процедура (19.4) переходит в обычную итерационную процедуру $x^{k+1} = F(x^k)$, которая широко используется в качестве вычислительного алгоритма для решения уравнений. В непрерывном случае при условии $\forall i: \gamma_i(t) \equiv 1$ мы приходим к автономной системе дифференциальных уравнений $\dot{x} = G(x)$, к изучению которой сводятся самые разнообразные задачи

Пример 2. Пусть элементы A_i являются игроками, причем x_i — стратегия A_i, а $D_i(x)$ — его функция выигрыша. Положение цели i-го элемента естественно определить как положение условного максимума его функции выигрыша (по собственной переменной при фиксированных стратегиях остальных игроков), т. е.

$$\forall i: D_i(x_1,\ldots, x_{i-1}, f_i(x), x_{i+1},\ldots, x_n)=\max_{x_i} D_i(x).$$

Неподвижная точка оператора $F(x)$ является здесь точкой Нэша. Если суммарный выигрыш каждого элемента складывается из его выигрышей в последовательности партий, представляется интуитивно естественным считать (см. обсуждение следующего примера), что тактика игроков имеет вид (19.3). Тот факт, что игроки в действительности используют весьма различные соображения для выбора шага Δx_i^k, и это приводит к последовательностям γ_i^k весьма неопределенного вида, может объясняться, по крайней мере, двумя обстоятельствами. Во-первых, полный шаг ($\gamma_i^k=1$), который по первому впечатлению представляется наиболее выгодным, в результате совместных действий остальных элементов может приводить к уменьшению ожидаемого выигрыша A_i, и это часто заставляет элементы действовать более осторожно. Во-вторых, определение истинного положения цели бывает затруднено. При этом элемент определяет лишь направление роста своего выигрыша и по грубой прикидке делает шаг в этом направлении*.

Пример 3. Этот пример по существу является частным случаем предыдущего, но здесь общая схема наполняется конкретным содержанием. Пусть в каждый плановый период некий центральный орган (ЦО), которому подчинены n элементов (производителей), располагает запасом ресурса (сырья) в количестве R и выдает элементу A_i ресурс в количестве r_i по цене λ. Функция выигрыша A_i имеет вид $D_i=\alpha_i \sqrt{r_i}-\lambda r_i$ (здесь $\alpha_i \sqrt{r_i}$ — функция дохода A_i, так что $\alpha_i \sqrt{x_i}-\lambda r_i$ — его прибыль). Если бы ЦО знал коэффициенты α_i, то, например, задача максимизации суммарного дохода системы $\sum\limits_i \alpha_i \sqrt{r_i}$ была бы тривиальной. На практике, однако, представления всякого управляющего органа об элементах нижнего уровня, как правило, не точны. Как бы там ни было, предположим, что ЦО известны лишь границы v_i^0, w_i^0, в которых находятся коэффициенты α_i. Информацию ЦО получает следующим образом: просит A_i назвать значение α_i, — элемент отвечает: „x_i" (правду A_i говорить не обязан, но должен оставаться в рамках ограничений $x_i \in [v_i^0, w_i^0]$). На основе вектора x ЦО произво-

* Вообще говоря, для игровых моделей более адекватным представляется поведение типа (19.7).

дит распределение ресурса и назначает цену. Пусть ЦО действует в соответствии с принципом открытого управления

$$r_i = \frac{Rx_i^2}{\sum_j x_j^2}; \quad \lambda = \frac{1}{2\sqrt{R}} \sqrt{\sum_j x_j^2} \tag{19.8}$$

После подстановки (19.8) в D_i имеем

$$D_i = \alpha_i \sqrt{r_i} - \lambda r_i = \sqrt{R}\, \frac{x_i\left(\alpha_i - \frac{1}{2} x_i\right)}{\sqrt{\sum_j x_j^2}} \tag{19.9}$$

Итак, функционирование системы представляет собой бесконечную последовательность партий с функциями выигрыша (19.9). Эта система моделировалась и неоднократно „проигрывалась" на различных участках. Всякий раз участники неизменно после нескольких итераций приходили в точку Нэша, а их поведение было близко к (19.7).

Если для некоторых классов игр подобный факт и представляется вполне закономерным, то в данном случае наличие в системе индикаторного поведения выглядит довольно неожиданным поскольку обнаруживается в ситуации, где оно „невыгодно" Поясним сказанное. Пусть, для простоты, все α_i равны единице и все нижние пределы v_i^0 равны и близки к нулю (все $w_i = \infty$). Легко показать, что равновесной по Нэшу будет точка с координатами $\forall i: x_i = \frac{2n-2}{2n-1}$. В этой точке выигрыш каждого игрока будет равен $D_i \approx \frac{1}{2}\sqrt{R/n}$. В точке же x с координатами $x_i = v_i^0$ выигрыш каждого примерно в два раза больше. Тот факт, что индикаторное поведение присутствует даже в таких играх, показывает, что оно действительно отражает некие реальные психологические мотивы общего характера, хотя, конечно, при анализе подобных игровых систем нужно соблюдать определенную осторожность.

Пример 4. Модель установления рыночных цен. Пусть на рынке имеется n видов товаров, цена на i-й товар обозначается λ_i, спрос на него $\pi_i(\lambda)$, предложение $\varkappa_i(\lambda)$. Функция

$$\chi_i(\lambda) = \chi_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \pi_i(\lambda) - \varkappa_i(\lambda)$$

называется функцией избыточного спроса. Если i-й продавец (элемент) продает i-й товар, то естественной тактикой его поведения представляется увеличение цены λ_i, если избыточный спрос $\chi_i(\lambda)$ больше нуля, и уменьшение λ_i, если $\chi_i(\lambda)<0$. Таким образом. $\chi_i(\lambda)$ может быть принята здесь за функцию-индикатор.

В этом и некоторых последующих примерах мы сталкиваемся с необходимостью изучения динамических систем, точное количественное описание которых, по существу, не задано. В подобных ситуациях поначалу обычно возникает ощущение безвыходности: Как можно говорить об устойчивости, если мы ничего не знаем о системе? Конечно, при полном отсутствии информации вопрос об устойчивости действительно не имеет смысла. Но в таких случаях, как правило, все-таки есть информация качественного характера — и часто этого оказывается достаточно.

Не вдаваясь в подробности детального изучения свойств функций избыточного спроса, отметим лишь самые элементарные из них. Как правило, считают, что товары на рынке могут находиться в одном из двух возможных отношений. Если $\chi_j(\lambda)$ не убывает при возрастании λ_i, то говорят, что j-й товар является (слабым) валовым заменителем i-го, если же $\chi_j(\lambda)$ не возрастает при увеличении λ_i, то говорят, что j-й товар обладает свойством (слабой) валовой дополнительности по отношению i-му товару. В экономической литературе в основном изучались рыночные модели с валовой заменимостью товаров, в меньшей степени — с валовой дополнительностью товаров, и почти совсем не исследовались смешанные рынки. Качественная информация в последнем наиболее общем случае, казалось бы, крайне бедна. Известно лишь, что каждая функция-индикатор системы по каждой в отдельности переменной или возрастает, или убывает. Но, как будет видно из дальнейшего, и этот факт можно весьма эффективно использовать.

Пример 5. Модель сосуществования биологических видов. Пусть N_i есть численность популяции i-го вида. Очевидно, при заданном наборе

$$N_1, \dots, N_{i-1}, N_{i+1}, \dots N_n$$

из-за ограниченности ресурсов (пища, площадь обитания и проч.) существует стационарное значение численности $\hat{N}_i=f_i(N)$, при котором процессы размножения и гибели индивидуумов данного вида взаимно компенсируют друг друга. Естественным выглядит предположение, что численность популяции i-го вида возрастает при $N_i<\hat{N}_i$, и убывает при $N_i>\hat{N}_i$, т. е.

$$\dot{N}_i=\gamma_i(t)[f_i(N)-N_i], \quad \gamma_i(t)\geq 0.$$

Качественная информация о функциях $f_i(N)$ имеет примерно такой же вид, как и в рыночной модели. Если в системе отсутствуют отношения типа „хищник—жертва", то получается что-то вроде рынка с валовой дополнительностью товаров. (Если N_i возрастает, то пищи и других „благ" j-му виду остается меньше, — и $\hat{N}_j$ убывает). В общем случае естественно ожидать, что $f_i(N)$ опять-таки обладает своеобразным свойством обобщенной монотонности (по каждой переменной N_j функция $f_i(N)$ или убывает, или возрастает). Просмотр большого числа примеров из различных областей показывает, что свойство обобщенной монотонности операторов межэлементных связей весьма широко распространено. (Это оправдывает выделение гетерогенных систем в самостоятельный объект изучения).

Пример 6. Пусть имеется система n обслуживающих устройств A_i, подразделенных на m непересекающихся групп K_j. Каждый элемент A_i обладает пропускной способностью ξ_i. Каждая группа K_j имеет свой диспетчерский пункт D_j, на котором величина потока клиентов к D_j делится между элементами данной группы пропорционально их пропускным способностям. Качество обслуживания A_i, изменяя которое элемент может так или иначе влиять на перераспределение потоков клиентов, будем характеризовать величиной x_i. Цель A_i состоит в обеспечении оптимальной для себя загрузки ξ_i. Индикаторное поведение здесь выглядит достаточно естественным.

Правдоподобным здесь представляется также следующее предположение. Если элемент A_i принадлежит группе K_j, то улучшение качества обслуживания остальными элементами этой группы приводит к увеличению потока клиентов к D_j и, соответственно, к увеличению загрузки A_i. Улучшение же качества обслуживания элементами, не принадлежащими K_j, приводит к уменьшению тока клиентов к D_j и, соответственно, к уменьшению загрузки A_i. В соответствии с этим разумно признать, что каждая функция $\hat{x}_i=f_i(x)$ не возрастает по переменным x_k, если A_i и A_k принадлежат одной группе, и не убывает по остальным переменным. Таким образом, $F(x)$ снова обладает свойством обобщенной монотонности.

Пример 7. Пусть n электрических сопротивлений R_i подключены последовательно к источнику с напряжением E и внутренним сопротивлением r. Каждое сопротивление R_i является переменным и снабжено соответствующим регулятором. Регулятор находится в распоряжении элемента (оператора) A_i, цель которого состоит в поддержании на своем сопротивлении напряжения V_i^0. Функцией-индикатором здесь может служить

$$g_i(R)=V_i^0-\frac{ER_i}{r+\sum_j R_j}.$$

19.3. Определение и свойства АДС. Пусть система функционирует в соответствии с итерационной процедурой (19.2), т. е.

$$x^{k+1}=x^k+\Gamma_k(F(x^k)-x^k),$$

где $F(x)$ — оператор межэлементных связей, $\Gamma_k=\operatorname{diag}\{\gamma_1^k,\ldots,\gamma_n^k\}$, $\gamma_i^k\in[0,1]$.

Мы уже отмечали, что на последовательности Γ_k здесь надо накладывать некоторые дополнительные ограничения, чтобы можно было говорить о сходимости (19.2). Проще всего это достигается требованием $0<\varepsilon_i\leqslant\gamma_i^k\leqslant 1$. Приведем более общий результат, доказательство которого очевидно.

Теорема 19.1. *Пусть оператор F непрерывен и фиксированная последовательность Γ_k удовлетворяет условию*

$$\forall i:\sum_k^{\infty}\gamma_i^k=\infty. \tag{19.10}$$

Тогда последовательность x^k, порождаемая процедурой (19.2), не может сходиться к точке, которая не является неподвижной точкой оператора F ■

Заметим теперь, что итерационная процедура (19.2) представляет собой частный случай процедуры вида

$$x^{k+1}=f_k(x^k),$$

в которой оператор f_k зависит от номера итерации и заведомо принадлежит некоторому семейству $\mathcal{F}$. Этой более общей точки зрения мы и будем пока придерживаться.

Итак, пусть F обозначает семейство непрерывных операторов f, каждый из которых отображает в себя полное метрическое пространство (X, ρ).

Семейство точечно-множественных отображений

$$F^k(x) = \cup \{ f_k(\ \cdot (f_1(x))) : f_i \in F,\ i=1,\dots, k\}$$

будем называть ***ансамблем динамических систем*** (АДС) с дискретным временем. При этом всегда будем предполагать, что АДС (семейство F) удовлетворяет условию равномерной непрерывности:

для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из $\rho(x, y) < \delta$ следует $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ при любом $f \in F$.

В дальнейшем нас будут интересовать АДС, имеющие положение равновесия $\xi \in X$. Положением равновесия АДС мы называем точку $\xi \in X$, которая является неподвижной одновременно для всех операторов $f \in F$, т. е.

$$\cap \{ f(\xi) : f \in F\} = \{\xi\}.$$

Перейдем к определению динамических характеристик АДС.

А1. Устойчивость: *по любой окрестности W точки ξ можно указать окрестность V точки ξ такую, что из $x \in V$ следует $F^k(x) \subset W$ при любом $k \geqslant 0$.*

А2. Сходимость: $F^k(x) \to \{\xi\}$ *при любом* $x \in X$.

А3. Равномерная сходимость: *существует окрестность U точки ξ такая, что*

$$F^k(U) \to \{\xi\}.$$

Условие А2 стоит прокомментировать. Заметим, во-первых, что запись $F^k(x) \to \{\xi\}$ означает следующее: по любой окрестности V множества $\{\xi\}$ (состоящего из одной точки ξ) можно указать такое $N > 0$, что для всех $k > N$ будет $F^k(x) \subset V$ Вернемся теперь к частному случаю АДС вида (19.2). Пусть все невырожденные траектории сходятся. В содержательном отношении это может вполне устраивать нас, однако условие сходимости А2 при этом заведомо не выполняется, поскольку ряды (19.10) могут расходиться сколь угодно медленно, а значит сколь угодно медленно может сходиться процедура (19.2). Выполнение А2 естественно ожидать в том случае, когда действуют ограничения $0 < \varepsilon_i \leqslant \gamma_i^k \leqslant 1$, или в более общем случае, когда все ряды (19.10) мажорируются снизу некоторым фиксированным расходящимся рядом, например,

$$\forall N > 0 : \sum_{k=1}^{N} \gamma_i^k \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

19.4. Сходимость и устойчивость. Здесь и далее мы предполагаем, что АДС имеет положение равновесия $\xi \in X$.

Теорема 19.2. *Условие равномерной сходимости влечет за собой устойчивость* ξ, *т. е.* $A3 \Rightarrow A1$.

Доказательство. Предположим, что сформулированное утверждение неверно. Тогда существует такая окрестность W (точки ξ), что для любой последовательности окрестностей $V_k \to \{\xi\}$ найдутся такие $x_k \in V_k$, $n_k > 0$ и $y_k \in F^{n_k}(x_k)$, что $y_k \notin W$. Без ограничения общности можно считать $x_k \in U$ (окрестность U фигурирует в определении равномерной сходимости). Возможны два варианта: 1) $n_k \to \infty$, — тогда $y_k \notin W$ противоречит условию $F^k(U) \to \{\xi\}$, 2) последовательность $\{n_k\}$ ограничена, тогда $y_k \notin W$ противоречит непрерывности операторов $f \in F$. ■

Теорема 19.3. *Пусть* ξ *имеет компактную окрестность. Тогда* $A1$ *и* $A2$ *влекут за собой справедливость* $A3$.

Заметим, что ξ всегда имеет компактную окрестность, когда X представляет собой подмножество R^n с обычной топологией. Перейдем к доказательству.

Пусть C компактная окрестность точки ξ. Нам нужно указать открытую окрестность U такую, что $F^k(U) \to \{\xi\}$. Положим $U = \operatorname{int} C$. Пусть задана окрестность V точки ξ. Из А2 следует существование наименьшего $N(x)$ такого, что $F^k(x) \subset V$ для всех $k \geq N(x)$. Чтобы доказать теорему, достаточно установить, что $\sup\{N(x) : x \in C\}$ конечен. В противном случае, в силу компактности C, существует последовательность $x_k \to x^* \in C$ такая, что $N(x_k) \to \infty$. По окрестности V укажем такую окрестность W, что из $x \in W$ следует $F^k(x) \subset V$ для всех $k \geq 0$ (это можно сделать, в силу А1). Из условия А2 вытекает существование наименьшего $\widetilde{N}(x)$ такого, что $F^{\widetilde{N}(x)}(x) \subset W$. Очевидно, $N(x) \leq \widetilde{N}(x)$, поэтому из $N(x_k) \to \infty$ следует $\widetilde{N}(x_k) \to \infty$. Но $\widetilde{N}(x^*)$ конечно, и для x, достаточно близких к x^*, справедливо равенство $\widetilde{N}(x) = \widetilde{N}(x^*)$. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

Теорема 19.3 является дискретным аналогом известной в теории устойчивости теоремы, утверждающей, что асимптотически устойчивое положение равновесия автономной системы является равномерно асимптотически устойчивым.

19.5. Гомогенные системы. Мы начнем изучение динамических свойств модели с наиболее простого случая, когда оператор межэлементных связей $F(x)$ является монотонным (предполагается, что полуупорядоченность введена неотрицательным ортантом R^n_+). Систему в этом случае будем называть положительно гомогенной.

Приведем несколько примеров положительно гомогенных систем. Обратимся для этого к примерам, описанным выше. Рыночная модель (пример 4) будет положительно гомогенной системой в случае валовой заменимости товаров, модель массового обслуживания (пример 6) — в случае, когда каждая группа K_j состоит из единственного элемента. В игровой интерпретации, когда стратегия x_i элемента (игрока) A_i имеет характер усилия, и оператор межэлементных связей

$$F(x)=\{f_1(x),\dots f_n(x)\}$$

определяется из условия

$$\forall i: D_i(x_1,\dots, x_{i-1}, f_i(x), x_{i+1},\dots, x_n)=\max_{x_i} D_i(x),$$

где D_i — функция выигрыша A_i, положительная гомогенность означает, что каждому игроку для поддержания оптимума своего выигрыша приходится отвечать увеличением собственного усилия на увеличение усилий остальных игроков. С интуитивной точки зрения такое положение вещей представляется вполне естественным.

Достаточно распространенными являются также отрицательно гомогенные системы, оператор межэлементных связей которых антимонотонен. Рыночная модель (пример 4) является отрицательно гомогенной системой в случае валовой дополнительности товаров, модель сосуществования биологических видов (пример 5) — в случае отсутствия в системе отношений типа „хищник—жертва", наконец, модель массового обслуживания (пример 6) — в случае, когда имеется лишь одна группа K_1.

Пусть положительно гомогенная система функционирует в дискретном времени, т. е.

$$x^{k+1}=x^k+\Gamma_k(F(x^k)-x^k), \tag{19.11}$$

где $\Gamma_k=\mathrm{diag}(\gamma_1^k,\dots \gamma_n^k)$, $\gamma_i^k\in[0, 1]$.

Будем рассматривать пока лишь невырожденные траектории (19.11), которые характеризуются тем, что $\forall i: \sum\limits_k^{\infty}\gamma_i^k=\infty$. Предположим также, что переменные x_i могут изменяться в пределах сегментов $[v_i^0, w_i^0]$, и при любом допустимом состоянии системы текущие положения цели $f_1(x)$ также заключены в этих пределах, е. конусный отрезок

$$\langle v^0, w^0\rangle = \{x \mid v^0 \leqslant x \leqslant w^0\}$$

является инвариантным для оператора $F(x)$

$$F(\langle v^0, w^0\rangle) \subset \langle v^0, w^0\rangle. \tag{19.12}$$

Теорема 19.4. *Пусть оператор F положительно гомогенной системы непрерывен и имеет на $\langle v^0, w^0\rangle$ единственную неподвижную точку x^*. Тогда любая невырожденная траектория (19.11) сходится к x^* независимо от начального положения $x^0 \in \langle v^0, w^0\rangle$.*

Доказательство. Рассмотрим любую невырожденную траекторию v^k, порождаемую процедурой (19.11), начинающуюся в точке v^0. Покажем, что последовательность v^k монотонно возрастает, т. е.

$$v^0 \leqslant v^1 \leqslant \ldots \leqslant v^k \leqslant \ldots$$

В силу (19.12), $F(v^0) \geqslant v^0$, поэтому

$$v^1 - v^0 = \Gamma_0(-v^0 + F(v^0)) \geqslant 0.$$

Кроме того,

$$-v^1 + F(v^1) \geqslant -v^1 + F(v^0) = (E - \Gamma_0)(-v^0 + F(v^0)) \geqslant 0,$$

откуда $v^2 - v^1 = \Gamma_1(-v^1 + F(v^1)) \geqslant 0$ и т. д.

Монотонно возрастающая последовательность v^k ограничена (так как $\forall k: v^k \in \langle v^0, w^0\rangle$), поэтому $v^k \to v^*$. В силу невырожденности траектории и непрерывности F, v^* с необходимостью является неподвижной точкой оператора F (теорема 19.1). Следовательно, $v^* = x^*$

Совершенно аналогично можно показать, что невырожденная траектория w^k (19.11), начинающаяся в точке w^0, монотонно убывает, что в конечном итоге дает $w^k \to w^*$ и $w^* = x^*$

Рассмотрим теперь произвольную невырожденную траекторию (19.11) x^k, начинающуюся в некоторой точке $x^0 \in \langle v^0, w^0\rangle$. Заметим, что каждой траектории x^k отвечает вполне определенная последовательность Γ_k. Пусть эта же последовательность Γ_k отвечает траекториям v^k и w^k, — тогда

$$\forall k: v^k \leqslant x^k \leqslant w^k. \tag{19.13}$$

Это неравенство легко доказывается по индукции. Крайние последовательности в (19.13) сходятся к одному и тому же пределу x^*. Отсюда $x^k \to x^*$. ∎

Рассмотренные выше последовательности v^k, w^k дают возможность указать последовательность вложенных конусных отрезков

$$\langle v^k, w^k \rangle \to \{x^*\},$$

каждый из которых инвариантен для оператора F, и поэтому любая траектория (19.11), начинающаяся в $\langle v^k, w^k \rangle$, не может выйти за пределы $\langle v^k, w^k \rangle$. По этой причине положение равновесия системы (АДС) в условиях теоремы 19.4 является устойчивым.

Заметим, что сходимость невырожденных траекторий вовсе не влечет за собой условие сходимости АДС А2. Как уже отмечалось, среди невырожденных траекторий существуют сколь угодно медленно сходящиеся. В предположениях теоремы 19.4 условие сходимости АДС обеспечивает дополнительное ограничение

$$\forall i,\ k: 0 < \varepsilon \leqslant \gamma_i^k \leqslant 1 \tag{19.14}$$

В этом случае легко показать, что для любой траектории (19.2) имеет место

$$x^k \in \langle v_\varepsilon^k, w_\varepsilon^k \rangle \to \{x^*\}, \tag{19.15}$$

где последовательности v_ε^k, w_ε^k также порождаются процедурой (19.2) при условии, что

$$\forall k: \Gamma_k = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

и $v_\varepsilon^0 = v^0$, $w_\varepsilon^0 = w^0$. Условие (19.15) означает также, что в данном случае имеет место равномерная сходимость АДС.

До сих пор речь шла о системах, траектории состояний которых заведомо находятся в ограниченном множестве $\langle v^0, w^0 \rangle$. Приведенные результаты, однако, могут применяться и в том случае, когда пределы изменения переменных неограничены. Для этого надо лишь дополнительно установить существование „сколь угодно большого" инвариантного конусного отрезка, и проверить, что на каждом таком конусном отрезке выполняются, например, предположения теоремы 19.4.

В практических задачах областью изменения переменных часто служит неотрицательный ортант R_+^n. Если при этом оператор межэлементных связей $F(x)$ положительно гомогенной системы является вогнутым и имеет на $\operatorname{int} R_+^n$ неподвижную точку x^*, то любая невырожденная траектория (19.2) будет сходиться к x^* независимо от начального положения $x^* \in \operatorname{int} R_+^n$.

Обратимся теперь к рассмотрению положительно гомогенной системы, функционирующей в непрерывном времени, т. е.

$$\dot{x} = \Gamma(t)\,(F(x) - x), \tag{19.16}$$

где $\Gamma(t) = \mathrm{diag}\{\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)\}$, $\gamma_i(t) \geqslant 0$.

Будем рассматривать пока невырожденные $\left(\forall i: \int\limits^{\infty} \gamma_i(t)\,dt = \infty\right)$ траектории (19.16) на некотором инвариантном для F конусном отрезке $\langle v^0, w^0 \rangle$. Предположим также, что функции $\gamma_i(t)$ непрерывны и ограничены.

Теорема 19.5. *Пусть оператор F положительно гомогенной системы дважды непрерывно дифференцируем и имеет на $\langle v^0, w^0 \rangle$ единственную неподвижную точку x^*. Тогда любая невырожденная траектория сходится к x^* независимо от начального положения $x(0) \in \langle v^0, w^0 \rangle$.*

Доказательство. При любой конкретной функции $\Gamma(t)$ через любую наперед заданную точку $x(0) \in \langle v^0, w^0 \rangle$ проходит единственная нелокально продолжимая траектория (19.16) $x(t)$. Единственность вытекает из липшицевости правой части (19.16) (последнее справедливо, в силу ограниченности функций $\gamma_i(t)$, непрерывной дифференцируемости $F(x)$ и компактности $\langle v^0, w^0 \rangle$, а нелокальная продолжимость является непосредственным следствием инвариантности $\langle v^0, w^0 \rangle$. Таким образом, для любой конкретной функции $\Gamma(t)$ и любого $t \geqslant 0$ определен оператор сдвига U_t по траекториям (19.16)

$$x(t) = U_t\, x(0).$$

Докажем монотонность оператора U_t, т. е.

$$\alpha(0) \geqslant \beta(0) \Rightarrow U_t\, \alpha(0) \geqslant U_t\, \beta(0).$$

Введем обозначение

$$\xi(t) = U_t\, \alpha(0) - U_t\, \beta(0) = \alpha(t) - \beta(t).$$

Очевидно, $\xi(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\forall i: \dot{\xi}_i = \gamma_i(t)\,[f_i(\xi + \beta) - (\xi_i + \beta_i) - f_i(\beta) + \beta_i],$$

т. е.

$$\forall i: \dot{\xi}_i = \gamma_i(t)\,[f_i(\xi + \beta) - f_i(\beta) - \xi_i]. \tag{19.17}$$

Легко видеть, что система (19.17) удовлетворяет условиям леммы 2.1, — и поэтому $\xi(t) \in R^n_+$, что означает монотонность U_t.

Рассмотрим теперь решения (19.16), $v(t)$, $w(t)$ с начальными значениями

$$v(0) = v^0, \quad w(0) = w^0.$$

В силу (19.16), переменные

$$y_i = f_i(x) - x_i$$

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\forall i: \dot{y}_i = -\gamma_i(t)\, y_i + \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \gamma_j(t)\, y_j. \qquad (19.18)$$

Применяя к (19.18) лемму 2.1, получаем

$$y(0) = F(v^0) - v^0 \geqslant 0 \Rightarrow y(t) \geqslant 0,$$

откуда

$$\frac{dv}{dt} = \Gamma(t)\, y(t) \geqslant 0.$$

Следовательно, $v(t)$ монотонно возрастает по t. Аналогично доказывается монотонность убывания $w(t)$. Из монотонности и ограниченности функций $v(t)$, $w(t)$ вытекает

$$v(t) \to v^*, \ w(t) \to w^* \quad \text{при } t \to \infty.$$

Из единственности неподвижной точки у оператора F, непрерывности F и невырожденности траекторий $v(t)$, $w(t)$ следует

$$v^* = w^* = x^*.$$

Наконец, в силу монотонности U_t и $v^0 \leqslant x(0) \leqslant w^0$, имеем

$$v(t) \leqslant x(t) \leqslant w(t).$$

Крайние последовательности здесь сходятся к одному и тому же пределу x^*. Отсюда $x(t) \to x^*$. ■

Нужно отметить, что требование дважды непрерывной дифференцируемости $F(x)$ использовалось в доказательстве лишь для обеспечения единственности решений (19.18), — и может быть опущено, если эта единственность вытекает из других соображений. Предположение же о непрерывной дифференцируемости $F(x)$ здесь существенно связано со способом доказательства, но и от него можно отказаться, если использовать более громоздкую технику.

При рассмотрении функционирования модели в дискретном времени было установлено существование последовательности инвариантных конусных отрезков $\langle v^k, w^k \rangle \to \{x^*\}$. Ясно, что этот факт обеспечивает устойчивость положения равновесия x^* и в случае непрерывного времени.

Для неограниченных областей изменения переменных здесь можно сделать те же замечания, что и в дискретном случае. В частности, если оператор F вогнут и имеет на $\operatorname{int} R_+^n$ неподвижную точку x^* то любая невырожденная траектория (19.16) сходится к x^* независимо от начального положения $x(0) \in \operatorname{int} R_+^n$.

19.6. Гетеротонные системы. Для положительно гомогенных систем (т. е. в случае монотонного оператора F) нам удалось сопоставить каждой невырожденной траектории (19.2) две последовательности v^k и w^k, которые монотонно сходились и зажимали x^k, т. е $v^k \leqslant x^k \leqslant w^k$. Эта же идея может быть сохранена и в общем случае, но если прежде последовательности v^k, w^k порождались той же самой процедурой (19.2), то теперь процедура (19.2) для этой цели не годится. Теперь соответствующие последовательности v^k, w^k мы будем „генерировать" с помощью вспомогательной процедуры *

$$v^{k+1} = v^k + \Gamma_k \left[\hat{F}(v^k, w^k) - v^k\right],$$
$$w^{k+1} = w^k + \Gamma_k \left[\hat{F}(w^k, v^k) - w^k\right], \tag{19.19}$$

исходящей из (v^0, w^0), где $v^0 \leqslant w^0$. В случае положительно гомогенной системы монотонность последовательностей вытекала из инвариантности (для F) конусного отрезка $\langle v^0, w^0 \rangle$. Здесь потребуется более сильное предположение: сильная инвариантность $\langle v^0, w^0 \rangle$, т. е. справедливость неравенств

$$\hat{F}(v^0, w^0) \geqslant v^0, \quad \hat{F}(w^0, v^0) \leqslant w^0. \tag{19.20}$$

Представим теперь, что сходимость $v^k \to v^*$, $w^k \to w^*$, а также условие $x^k \in \langle v^k, w^k \rangle$ уже доказаны. В очевидных предположениях пара (v^*, w^*) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} \hat{F}(v, w) = v, \\ \hat{F}(w, v) = w. \end{cases} \tag{19.21}$$

Ясно, что требование единственности решения (19.21) будет играть ту же роль, что и требование единственности неподвижной точки у монотонного оператора F.

Таким образом, в отличие от случая монотонного оператора F здесь происходит „ужесточение" требований в двух пунктах: инвариантность заменяется сильной инвариантностью, а единственность равновесия — единственность решения систем (19.21).

---

* Напомним, что $\hat{F}$ обозначает сопутствующ

Однако эти „потери" не являются следствием недостатков метода, а связаны с существом задачи.

Для весьма широкого класса гетеротонных операторов (а значит и для монотонных, и для антимонотонных) сильная инвариантность равносильна обычной, — и поэтому требование обычной инвариантности конусного отрезка работоспособно не только для монотонных операторов, но и для операторов существенно более общего вида. Этого нельзя сказать о требовании единственности равновесия системы. Только для монотонного оператора F единственность решения (19.21) равносильна единственности равновесия системы (единственности неподвижной точки оператора F), а уже для антимонотонного оператора F она переходит в требование единственности неподвижной точки у F^2.

Оператор F (а значит и $\hat{F}$) далее предполагается непрерывным, — и это не всегда оговаривается.

Теорема 19.6. *Пусть оператор F гетеротонной системы имеет сильно инвариантный конусный отрезок $\langle v^0\ w^0\rangle$, на котором система уравнений (19.21) не может иметь более одного решения v, $w \in \langle v^0, w^0\rangle$. Тогда у системы существует положение равновесия $x^* \in \langle v^0, w^0\rangle$, и любая невырожденная траектория (19.2) сходится к x^* независимо от начального положения $x^0 \in \langle v^0\ w^0\rangle$.*

Доказательство. Заметим сразу, что существование положения равновесия $x^* \in \langle v^0, w^0\rangle$ очевидно. Возьмем любую невырожденную траекторию (19.2) x^k и сопоставим ей траекторию процедуры (19.19) с той же самой последовательностью Γ_k. (Подразумевается, что траектория (19.19) исходит из (v^0, w^0), где v^0, w^0 служат точными границами конусного отрезка $\langle v^0, w^0\rangle$, т. е. совпадение обозначений не случайно).

Очевидно, см. (19.20)

$$v^1 - v^0 = \Gamma_0[\hat{F}(v^0, w^0) - v^0] \geqslant 0.$$

Аналогично $w^1 - w^0 \leqslant 0$. Наконец,

$$w^1 - v^1 = (E - \Gamma_0)(w^0 - v^0) + \Gamma_0[\hat{F}(w^0, v^0) - \hat{F}(v^0, w^0)] \geqslant 0.$$

Таким образом, $v^0 \leqslant v^1 \leqslant w^1 \leqslant w^0$. При этом конусный отрезок $\langle v^1, w^1\rangle$ снова является сильно инвариантным. Действительно,

$$\hat{F}(v^1, w^1) - v^1 \geqslant \hat{F}(v^0, w^0) - v^0 - \Gamma_0[\hat{F}(v^0, w_0) - v^0] =$$

$$= (E - \Gamma_0)[\hat{F}(v^0, w^0) - v^0] \geqslant 0,$$

$$w^1 - \hat{F}(w^1, v^1) \geqslant w^0 + \Gamma_0[\hat{F}(w^0 \;\; v^0) - w^0] - \hat{F}(w^0, v^0) =$$

$$= (E - \Gamma_0)[w^0 - \hat{F}(w^0, v^0)] \geqslant 0.$$

Это позволяет индуктивно продолжить процесс доказательства и получить цепочку неравенств

$$v^0 \leqslant \ldots \leqslant v^k \leqslant \ldots \leqslant w^k \leqslant \ldots \leqslant w^0.$$

Отсюда следует $v^k \to v^*$, $w^k \to w^*$ (причем $v^* \leqslant w^*$). Поскольку оператор $\hat{F}$ непрерывен и рассматривается невырожденная траектория, то пара (v^*, w^*) с необходимостью является решением системы уравнений (19.21). Но система (19.21) имеет очевидное решение $v = w = x^*$ и других решений по предположению не имеет. Следовательно, $v^* = w^* = x^*$, т. е.

$$v^k \to x^*, \quad w^k \to x^*. \tag{19.22}$$

Покажем теперь, что последовательности v^k, w^k „зажимают" x^k в смысле

$$v^k \leqslant x^k \leqslant w^k \tag{19.23}$$

Применяя индукцию, получаем: $x^0 \in \langle v^0, w^0 \rangle$. Пусть $x^k \in \langle v^k, w^k \rangle$ для некоторого $k \geqslant 0$, тогда

$$v^{k+1} = (E - \Gamma_k)\, v^k + \Gamma_k\, \hat{F}(v^k, w^k) \leqslant$$

$$\leqslant (E - \Gamma_k)\, x^k + \Gamma_k\, \hat{F}(x^k, x^k) = x^{k+1} \leqslant$$

$$\leqslant (E - \Gamma_k)\, w^k + \Gamma_k\, \hat{F}(w^k, v^k) = w^{k+1}.$$

Сравнивая теперь (19.22) и (19.23), приходим к выводу $x^k \to x^*$ ■

Вопросы устойчивости рассматриваются аналогично предыдущему.

Теорема 19.7 *Пусть гетеротонный оператор F дважды непрерывно дифференцируем и имеет сильно инвариантный конусный отрезок $\langle v^0, w^0 \rangle$, на котором система уравнений (19.21) не может иметь более одного решения. Тогда у системы существует положение равновесия $x^* \in \langle v^0, w^0 \rangle$, любая невырожденная траектория (19.16) сходится к x^* независимо от начального положения $x(0) \in \langle v^0, w^0 \rangle$.*

Доказательство. Существование положения равновесия $x^* \in \langle v^0, w^0 \rangle$ очевидно.

Сопоставим каждой невырожденной траектории (19.16) $x(t)$ две вектор-функции $v(t)$ и $w(t)$, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dot v = \Gamma(t)\,[\hat F(v,\, w) - v] \\ \dot w = \Gamma(t)\,[\hat F(w,\, v) - w] \end{cases} \tag{19.24}$$

и проходят через точку

$$v(0) = v^0, \quad w(0) = w^0.$$

Положим

$$x(t) - v(t) = \alpha(t), \quad w(t) - x(t) = \beta(t).$$

Очевидно,

$$\dot\alpha = \Gamma(t)\,[\hat F(v+\alpha,\, x) - (v+\alpha) - \hat F(v,\, x+\beta) + v],$$

$$\dot\beta = \Gamma(t)\,[\hat F(x+\beta,\, v) - (x+\beta) - \hat F(x,\, v+\alpha) + x].$$

Применяя к этой системе дифференциальных уравнений лемму 2.1 и учитывая $\alpha(0) \geqslant 0$ и $\beta(0) \geqslant 0$, получаем

$$\forall t \geqslant 0 : v(t) \leqslant x(t) \leqslant w(t).$$

Введем далее обозначения

$$y_i = \hat f_i(v,\, w) - v_i,$$

$$z_i = w_i - \hat f_i(w,\, v).$$

В силу уравнений (19.24), вектор-функции $y(t)$, $z(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\forall i : \begin{cases} \dot y_i = -\gamma_i y_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \hat f_i}{\partial v_j} \gamma_j y_j - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \hat f_i}{\partial w_j} \gamma_j z_j, \\ \dot z_i = -\gamma_i z_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \hat f_i}{\partial w_j} \gamma_j z_j - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \hat f_i}{\partial v_j} \gamma_j y_j. \end{cases}$$

Снова применяя к этой системе дифференциальных уравнений лемму 2.1, получаем

$$\dot v(t) = \Gamma(t)\, y(t) \geqslant 0, \quad \dot w(t) = -\Gamma(t)\, z(t) \leqslant 0.$$

---

* Соответствие между $x(t)$ и $v(t)$, $w(t)$ определяется тем, что в обоих случаях фиксируется одна и та же функция $\Gamma(t)$.

Следовательно, $v(t)$ монотонно возрастает, а $w(t)$ монотонно убывает. Присовокупляя сюда ограниченность $v(t)$ и $w(t)$, получаем $v(t) \to v^*$, $w(t) \to w^*$

Из невырожденности траектории следует, что пара (v^*, w^*) является решением системы уравнений (19.21). Но система (19.21) имеет очевидное решение $v = w = x^*$ и других решений по предположению не имеет. Поэтому $v^* = w^* = x^*$, и наконец, $x(t) \to x^*$ ■

Теорема 19.8. *Пусть дважды непрерывно дифференцируемый (на* $\operatorname{int} R^n_+$*) псевдовогнутый оператор* F *имеет неподвижную точку* $x^* \in \operatorname{int} R^n_+$*. Тогда любая невырожденная траектория (19.16) сходится к* x^* *независимо от начального положения* $x(0) \in \operatorname{int} R^n_+$. ■

§ 20. ФИЛЬТР КАЛМАНА

20.1. Постановка задачи. Рассмотрим динамический объект с дискретным временем

$$x_{k+1} = Ax_k + C\xi_{k+1}, \tag{20.1}$$

$$y_{k+1} = Hx_k + \eta_k, \tag{20.2}$$

где x_k — n-мерный вектор состояния системы, y_k — m-мерный вектор наблюдений, ξ_k — последовательность независимых случайных l-мерных векторов с нулевым математическим ожиданием и не зависящей от k матрицей ковариации Q, η_k — последовательность независимых случайных m-мерных векторов с нулевым математическим ожиданием и единичной матрицей ковариации, A, C, H — постоянные матрицы, размеры которых, соответственно, равны $n \times n$, $n \times l$, $m \times n$.

Фильтром Калмана для системы (20.1), (20.2) называют рекуррентное правило получения оптимальной в среднеквадратичном линейной оценки $\bar{x}_k$ вектора x_k по наблюдениям $y_0, y_1, \ldots, y_k$, задаваемое парой следующих уравнений

$$\bar{x}_{k+1} = A\bar{x}_k + \Gamma_{k+1} H^T (y_{k+1} - HA\bar{x}_k), \tag{20.3}$$

$$\Gamma_{k+1} = (A\Gamma_k A^T + B) -$$

$$- (A\Gamma_k A^T + B) H^T [I + H(A\Gamma_k A^T + B) H^T]^{-1} H (A\Gamma_k A^T + B), \tag{20.4}$$

где $B = CQC^T$.

Для реализации фильтра принципиальным является вопрос о стабилизации последовательности матриц Γ_k. Дальнейшее изложение посвящено изучению условий, гарантирующих сходимость последовательности Γ_k при произвольных начальных условиях Γ_0.

Формальное описание задачи не может быть удовлетворительным для читателя, который встречается с фильтром Калмана впервые. Но в данном случае вопросы фильтрации играют второстепенную роль (вернее, не играют никакой роли). Читатель может рассматривать дальнейший текст как анализ достаточно сложного итерационного процесса (20.4), не интересуясь происхождением последнего.

20.2. Достаточные условия стабилизации. Полуупорядочим пространство E симметрических матриц $n\times n$ конусом K неотрицательно определенных матриц. Перепишем процесс (20.4) в виде

$$\Gamma_{k+1}=f(\Gamma_k). \tag{20.5}$$

Очевидно, оператор f действующий из E в E, может быть представлен в виде суперпозиции двух операторов $f(\Gamma)=\varphi(L(\Gamma))$, где

$$\varphi(\Gamma)=\Gamma-\Gamma H^T(I+H\Gamma H^T)^{-1}H\Gamma, \tag{20.6}$$

$$L(\Gamma)=A\Gamma A^T+B. \tag{20.7}$$

Теорема 20.1. *Операторы φ и L положительны и монотонны.*

Доказательство. Положительность и монотонность L очевидны (в силу $B\in K$). Что касается оператора φ, то достаточно установить его монотонность (так как $\varphi(0)=0$).

Простые преобразования дают

$$\begin{gathered}\varphi(P+\varepsilon\Delta)-\varphi(P)=P+\varepsilon\Delta-\\ -(P+\varepsilon\Delta)H^T(I+HPH^T)^{-1}H(P+\varepsilon\Delta)-P+\\ +PH^T(I+HPH^T)^{-1}HP=\varepsilon\Delta-\\ -\varepsilon\Delta H^T(I+HPH^T+\varepsilon H\Delta H^T)^{-1}HP-\\ -\varepsilon PH^T(I+HPH^T+\varepsilon H\Delta H^T)^{-1}H\Delta+\\ +PH^T(I+HPH^T)^{-1}HP-\\ -PH^T(I+HPH^T+\varepsilon H\Delta H^T)^{-1}HP+O(\varepsilon).\end{gathered}$$

При достаточно малых ε имеем

$$\begin{gathered}(I+HPH^T+\varepsilon H\Delta H^T)^{-1}=\\ =(I+HPH^T)^{-1}[I+\varepsilon H\Delta H^T(I+HPH^T)^{-1}]^{-1}=\\ =(I+HPH^T)^{-1}[I+\varepsilon H\Delta H^T(I+HPH^T)^{-1}+O(\varepsilon).\end{gathered}$$

Поэтому

$$\frac{\varphi(P+\varepsilon\Delta)-\varphi(P)}{\varepsilon}\to(I-DP)^T\Delta(I-DP)$$

при $\varepsilon\to0$, где $D=H^T(I+HPH^T)^{-1}H$.

Отсюда следует, что производная φ по конусу K всюду принадлежит конусу K, а это влечет за собой монотонность φ. ■

Из монотонности φ и L вытекает монотонность оператора $f=\varphi L$. Поэтому можно утверждать, что для существования решения уравнения

$$\Gamma=\varphi(\Gamma) \tag{20.8}$$

необходимо и достаточно существование элемента $S\in K$ такого, что

$$f(S)\leqslant S. \tag{20.9}$$

В этом случае очевидно, что оператор f будет иметь инвариантный конусный отрезок $\langle 0,\ S\rangle$. Интерес к разрешимости уравнения (20.8) в данном контексте вполне понятен, так как только решения уравнения (20.8) могут быть пределом сходящегося процесса (20.5).

Заметим, что условие (20.9) выполняется в достаточно общей ситуации. Если, например, уравнение $L(\Gamma)=\Gamma$ имеет решение S_0, то $f(S_0)\leqslant S_0$. Или пусть матрица H квадратна и невырождена, тогда условие (20.9) будет выполняться для $S=(HH^T)^{-1}$

Установим справедливость двух вспомогательных утверждений.

Лемма 20.1. *Для любого $P\in K$ найдется такое число $\alpha\in(0,\ 1)$, что $\varphi(P)\geqslant\alpha P$.*

Доказательство. Используя матричное тождество

$$I-B^T(I+BB^T)^{-1}B=(I+B^TB)^{-1},$$

легко получить

$$\varphi(P)=P-PH^T(I+HPH^T)^{-1}HP=$$
$$=\sqrt{P}(I-\sqrt{P}H^T(I+H\sqrt{P}\sqrt{P}H^T)^{-1}H\sqrt{P})\sqrt{P}=$$
$$=\sqrt{P}(I+\sqrt{P}H^TH\sqrt{P})^{-1}\sqrt{P}$$

Отсюда имеем

$$\varphi(P)-\alpha P=\sqrt{P}[(I+\sqrt{P}HH^T\sqrt{P})^{-1}-\alpha I]\sqrt{P}$$

Так как $(I+\sqrt{P}HH^T\sqrt{P})^{-1}$ внутренний элемент конуса K, то матрица в квадратных скобках положительно определена при достаточно малых $\alpha>0$. ■

Лемма 20.2. *Для любых P и B K и любого $\tau \in (0, 1)$ найдется такое положительное $\alpha_0 \in (0, 1)$, что*

$$\varphi(\tau P+\alpha B) \geqslant \tau\varphi(P)+\alpha B/2$$

при всех $\alpha \leqslant \alpha_0$.

Доказательство. Введем следующие обозначения

$$S=\frac{\varphi(\tau P+\alpha B)-\tau\varphi(P)-\alpha B/2}{\tau}$$

$$D_\tau=(I/\tau+HPH^T)^{-1},$$

$$D=(I+HPH^T)^{-1},$$

$$W=B/\tau.$$

Для $\alpha \in (0, 1)$ легко проверить, что

$$S \geqslant \alpha W/2-(P+\alpha W)H^T D_\tau H(P+\alpha W)+PH^T DHP=$$

$$=\alpha W/4-\alpha WH^T D_\tau HP-\alpha PH^T D_\tau HW+$$

$$+[\alpha W/4-\alpha^2 WH^T D_\tau HW]+[PH^T DHP-PH^T D_\tau HP].$$

При достаточно малом $\alpha>0$ матрица

$$\alpha W/4-\alpha WH^T D_\tau HW=$$

$$=\alpha\sqrt{W}/4\,(I-4\alpha\sqrt{W}H^T D_\tau HW)\sqrt{W}$$

принадлежит конусу K. Обозначая через R положительно определенную матрицу

$$R=D_\tau^{-1/2}DD_\tau^{-1/2}-I,$$

имеем

$$PH^T DHP-PH^T D_\tau HP=$$

$$=PH^T(D-D_\tau)HP=PH^T D_\tau^{1/2}RD_\tau^{1/2}HP.$$

Матричное тождество

$$(\alpha R^{-1/2}D_\tau^{1/2}HW-R^{1/2}D_\tau^{1/2}HP)^T(\alpha R^{-1/2}D_\tau^{1/2}HW-$$

$$-R^{1/2}D_\tau^{1/2}HP)-\alpha^2 WH^T D_\tau^{1/2}R^{-1}D_\tau^{1/2}HW=$$

$$=PH^T D_\tau^{1/2}RD_\tau^{1/2}HP-\alpha WH^T D_\tau HP-\alpha PH^T D_\tau HW$$

показывает, что для неотрицательной определенности S достаточно, чтобы неотрицательно определенной была матрица

$$\alpha W/4-\alpha^2 WHD_\tau^{1/2}R^{-1}D_\tau^{1/2}HW=$$

$$=\alpha\sqrt{W}/4\,(I-4\alpha\sqrt{W}H^T D_\tau^{1/2}R^{-1}D_\tau^{1/2}H\sqrt{W})\sqrt{W}$$

Последнее, очевидно, выполняется при достаточно малых α_0. ■

Теорема 20.2. *Пусть существует решение Γ_* уравнения (20.8), $B \neq 0$ и выполняется условие*

$$\ker L^N(0) \subset \ker A^N \tag{20.10}$$

при некотором $N>0$. Тогда решение Γ_* единственно и к нему сходятся последовательные итерации (20.5) независимо от начального приближения $\Gamma_0 \in K$.

Доказательство. Лемма 20.1 гарантирует, что для любого $S \in K$ найдется $\alpha>0$, при котором

$$f(S)=\varphi L(S) \geqslant \alpha L(S). \tag{20.11}$$

применяя к (20.11) N раз оператор f и используя монотонность f, φ, L и лемму 20.1, получим оценку

$$L^N(S) \geqslant f^N(S) \geqslant \alpha L^N(S) \geqslant L^N(0) \quad (\alpha>0). \tag{20.12}$$

В силу (20.10) найдется такое $\beta>0$, что

$$L^N(S)=L^N(0)+A^N S(A^T)^N \leqslant \beta L^N(0). \tag{20.13}$$

Положим $U_0=L^N(0)$. Неравенства (20.12), (20.13) влекут за собой

$$f^N(\mathrm{S}) \in K(U_0). \tag{20.14}$$

Используя теперь лемму 20.2 для любых $S \in K$ и $\tau \in (0, 1)$, получим

$$f(\tau \mathrm{S})=\varphi L(\tau S)=\varphi[\tau L(S)+(1-\tau) B] \geqslant$$

$$\geqslant \varphi[\tau L(S)+\alpha(1-\tau) B] \geqslant \tau\varphi L(S)+\frac{\alpha}{2}(1-\tau) B \geqslant$$

$$\geqslant \tau f(\mathrm{S})+\alpha_1 L(0),$$

где $\alpha_1 \in (0, \tau)$, $\alpha \in (0, 1)$.

Применяя к обеим частям этого неравенства оператор f и снова используя лемму 20.2, получаем

$$f^2(\tau S) \geqslant \varphi L\,[\tau f(S)+\alpha_1 L(0)]=\varphi\,[\tau L f(S)+\alpha_1 L^2(0)+$$

$$+(1-\tau+\alpha_1) B] \geqslant \varphi\,[\tau L f(S)+\alpha_1 L^2(0)] \geqslant$$

$$\geqslant \varphi\,[\tau L f(\mathrm{S})+\alpha\alpha_1 L^2(0)] \geqslant$$

$$\geqslant \tau\varphi L f(S)+\frac{\alpha}{2} L^2(0) \geqslant \tau f^2(S)+\alpha_2 L^2(0),$$

где $\alpha \in (0, 1)$ и $\alpha_2 \in (0,$

Повторяя эту операцию N раз, имеем

$$f^N(\tau S) \geqslant \tau f^N(S)+\alpha_N L^N(0), \quad \alpha_N \in (0, 1),$$

что в совокупности с (20.14) дает

$$f^N(\tau S) \geqslant \tau f^N(S) + \frac{\alpha_N}{\beta} f^N(S) = \tau(1+\eta) f^N(S),$$

где $\eta = \alpha_N/\beta\tau$

Таким образом, оператор f^N является U_0-вогнутым. Выводы теоремы вытекают из общих результатов о монотонных U_0-вогнутых операторах. ■

§ 21. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

21.1. Эллиптическая задача. Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = \lambda f(x, u), \quad x \in \Omega \subset R^n \tag{21.1}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} Bu = \alpha(x) u(x) + \beta(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \dot{\Omega} \\ \alpha(x) \geqslant 0 \ (\not\equiv 0), \quad \beta(x) \geqslant 0. \end{gathered} \tag{21.2}$$

Здесь L — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка

$$Lu = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0(x) u,$$

$\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ обозначает производную по конормали

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j} \eta_i(x) a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

где $\eta(x) = \{\eta_1(x), \ldots \eta_n(x)\}$ — единичный вектор внешней нормали к $\dot{\Omega}$ в точке x.

Нелинейная эллиптическая задача уже рассматривалась в предыдущих главах. Отличие данной задачи заключается в более общих граничных условиях (21.2).

Лемма 21.1. *Пусть функция $\rho(x)$ положительна и непрерывна в Ω, а функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям*

$$\begin{gathered} L\varphi - \lambda\rho(x)\varphi > 0, \quad \varphi \in \Omega \\ B\varphi = 0, \quad x \in \dot{\Omega}. \end{gathered} \tag{21.3}$$

Тогда $\varphi(x)>0$ в Ω тогда и только тогда, когда $\lambda<\mu_0$, где μ_0—главное (наименьшее) собственное значение задачи

$$
\begin{aligned}
&L\psi-\mu\rho(x)\,\psi=0, \quad x\in\Omega \\
&B\psi=0, \quad x\in\dot{\Omega}.
\end{aligned}
\tag{21.4}
$$

В части достаточности этот результат вытекает из положительности функции Грина G_λ краевой задачи (Аронштайн, Смит [1])

$$
Lu-\lambda\rho(x)\,u=0, \quad Bu\Big|_{x\in\dot{\Omega}}=0,
$$

если $\lambda<\mu_0$. Идея приводимого ниже непосредственного доказательства принадлежит Беллману.

Запишем задачу (21.3) в виде

$$
\begin{aligned}
&L\varphi-\lambda\rho(x)\,\varphi=p(x), \quad x\in\Omega \\
&B\varphi=0, \quad x\in\dot{\Omega},
\end{aligned}
\tag{21.5}
$$

где функция $p(x)>0$ непрерывна в Ω. Решением этой задачи является функция, минимизирующая квадратичный функционал

$$
I(\psi)=Q(\psi)+\int\limits_{\dot{\Omega}_2}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\,\psi^2(x)\,d\sigma,
$$

где

$$
Q(\psi)=\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{i,j}a_{ij}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+[a_0(x)-\lambda\rho(x)]\,\psi^2-2p(x)\,\psi(x)\right\}dx,
$$

в классе допустимых кусочно непрерывно дифференцируемых функций $\psi(x)$ в Ω, которые обращаются в нуль на $\dot{\Omega}_1(\dot{\Omega}=\dot{\Omega}_1\cup\dot{\Omega}_2)$ *.

Используя вариационную характеристику μ_0, легко показать, что при $\lambda<\mu_0$ квадратичные члены в $I(\psi)$ положительно определены для класса допустимых функций. Это обеспечивает существование единственного минимума. В предположении достаточной гладкости коэффициентов $a_{ij}(x)$ можно показать также, что этот минимум достигается на дважды непрерывно дифференцируемом решении краевой задачи (21.5).

Чтобы доказать положительность $\varphi(x)$, допустим противное. Затем положим

$$
\psi(x)=|\varphi(x)|.
$$

---

* Предполагается, что $\alpha(x)\equiv1$, $\beta(x)\equiv0$ на $\dot{\Omega}_1$ и мера множества $\dot{\Omega}_1$ положительна.

Замена φ на ψ не влияет на квадратичные члены $I(\psi)$, но уменьшает вклад слагаемого, содержащего $p(x)$. Это противоречит тому, что $\varphi(x)$—минимизирующая функция. Таким образом, $\varphi(x)\geqslant 0$ в Ω при $\lambda<\mu_0$. Для доказательства строгого неравенства $\varphi(x)>0$ в Ω допустим $\varphi(x)=0$ в некоторой точке $x\in\dot{\Omega}$. Ясно, что в этой точке матрица $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_j}$ должна быть неотрицательно определена. В то же время в этой точке

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i\,\partial x_j}=p(x)>0,$$

что противоречит положительной определенности матрицы $[a_{ij}(x)]$ (проверьте!). Итак, достаточность установлена.

Чтобы показать необходимость, допустим, что $\varphi(x)>0$ в Ω—решение задачи (21·5), и пусть $\psi_0(x)$—собственная функция задачи (21.4), соответствующая собственному значению μ_0. Интегрируя по частям функцию $\psi_0 L\varphi-\varphi L\psi_0$ по Ω, получим равенство

$$(\mu_0-\lambda)\int_\Omega \rho(x)\,\varphi(x)\,\psi_0(x)\,dx=\int_\Omega p(x)\,\psi_0(x)\,dx.$$

Поскольку оба интеграла имеют один знак, то $\lambda<\mu_0$. ■

Из проведенных рассуждений можно извлечь также следующий результат.

Лемма 21.2. *Пусть функция $\rho(x)$ положительна и непрерывна в Ω, а функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям*

$$L\varphi-\lambda\rho(x)\,\varphi\geqslant 0,\quad x\in\Omega$$

$$B\varphi=0,\quad x\in\dot{\Omega}.$$

Тогда $\varphi(x)\geqslant 0$ в Ω, если $\lambda<\mu_0$. ■

Предположим теперь, что функция $f(x,u)$ непрерывна, строго монотонно возрастает по u и $f(x,0)\equiv f_0(x)>0$ в Ω.

Теорема .1. *Краевая задача (21·1) может быть положительно разрешима только при положительных λ. Если при $\lambda>0$ задача (21·1) разрешима, то последовательные итерации $u_k(x)$*

$$\begin{aligned} Lu_{k+1}(x)&=\lambda f(x,u_k(x)),\quad x\in\Omega\\ Bu_k(x)&=0,\quad x\in\dot{\Omega}\end{aligned}\qquad(21\cdot 6)$$

сходятся в $C(\Omega)$ к одному из решений (точнее, к минимальному решению).

Доказательство. Покажем сначала, что задача (21.1) может быть положительно разрешима только при положительных λ. Будем рассуждать от противного. Пусть $u(x)>0$ — решение задачи (21.1) при $\lambda<0$. Тогда

$$L(-u(x))>0,\ x\in\Omega;\quad B(-u)=0,\quad x\in\dot{\Omega},$$

и лемма 21.1 гарантирует $-u(x)>0$, что приводит к противоречию.

Запишем теперь итерационную процедуру (21.6) в эквивалентной форме

$$u_{k+1}(x)=\lambda\int\limits_{\Omega} G_0(x,\ y)\,f(y,\ u_k(y))\,dy, \tag{21.7}$$

где $G_0(x,\ y)\geqslant 0$ — функция Грина для оператора L в Ω с краевым условием $BG_0=0$ для $x\in\dot{\Omega}$.

Очевидно, оператор в правой части (21.7) монотонный (по конусу неотрицательных функций). Точка $u_0(x)\equiv 0$ под действием этого оператора идет вперед. Действительно,

$$Lu_1(x)=\lambda f_0(x)>0,\quad x\in\Omega$$

$$Bu_1(x)=0,\quad x\in\dot{\Omega},$$

что в силу леммы 21.1 влечет за собой $u_1(x)>0$. Поэтому последовательность $u_k(x)$ монотонно возрастает и ограничена по конусу любым решением задачи (21.1). Сходимость $u_k(x)$ к решению теперь вытекает из полной непрерывности оператора (21.7). ■

Легко сформулировать обобщения теоремы 21.1 на случай гетеротонной функции $f(x,\ u)$. Если же функция $f(x,\ u)$ вогнута или псевдовогнута, то для возможности использования общих результатов § 17 необходима более детальная информация о функции Грина G_0. Насколько известно авторам, с этой точки зрения свойства G_0 не изучались.

21.2. Многоточечная задача. Пусть отрезок $[a,\ b]$ не является промежутком осцилляции дифференциального оператора

$$Lx=\frac{d^n x}{dt^n}+p_1(t)\,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+p_n(t)\,x,$$

т. е. любое нетривиальное решение уравнения $Lx=0$ имеет на отрезке $[a,\ b]$ не более, чем $n-1$ нуль (с учетом кратностей).

Известно, что при достаточной гладкости коэффициентов $p_i(t)$ функция Грина $G(t, s)$ оператора L для краевых условий интерполяционного типа

$$x(a_k)=x'(a_k)=\ldots=x^{(r_k-1)}(a_k)=0 \tag{21.8}$$

$$\left(k=1,\ldots, m;\ m\geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{m} r_k=n,\ a=a_1<a_2<\ldots<a_m=b\right)$$

удовлетворяет неравенствам

$$M_1 h(s)\leqslant \frac{G(t, s)}{g(t)}\leqslant M_2 \quad (a\leqslant t,\ s\leqslant b,\ t\neq a_k,\ k=1,\ldots, m),$$

где $M_1,\ M_2>0$.

$$h(s)=\max_{t\in[a, b]}|G(t, s)|,\quad g(t)=\prod_{k=1}^{m}(t-a_k)^{r_k}.$$

Таким образом,

$$G(t, s)\,\sigma(t)\geqslant 0 \quad (a\leqslant t,\ s\leqslant b),$$

где $\sigma(t)=\operatorname{sign} g(t)$.

Поэтому линейный интегральный оператор

$$Gx(t)=\int_a^b G(t, s)\,x(s)\,ds,$$

действующий и вполне непрерывный в $C[a, b]$, переводит конус неотрицательных функций K в конус

$$K_0=\{x: x\in C[a, b],\ x(t)\,\sigma(t)\geqslant 0,\ t\in[a, b]\}.$$

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$Lx=f(t, x) \tag{21.9}$$

в предположении непрерывности $f(t, x)$ по совокупности переменных, $f(t, 0)\equiv 0$ и неотрицательности функции $F(t, u)=f[t, u\sigma(t)]$ при $t\in[a, b]$, $u\in[0, \infty)$.

Теорема 21.2. *Пусть функция $f(t, u)$ непрерывно дифференцируема по u в окрестности $u=0$ и отрезок $[a, b]$ не является промежутком осцилляции оператора $L_1 x=Lx-f'_u(t, 0)\,x$. Пусть для некоторого подмножества $\Omega\subset[a, b]$ положительной меры*

$$f[t, u\sigma(t)]\geqslant\varphi(u) \quad (t\in\Omega_0,\ u\in[0, \infty)), \tag{21.10}$$

где $\varphi(u)$ — неубывающая неотрицательная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\varphi(u)}{u} = \alpha_0 > 0 \tag{21.11}$$

Пусть, наконец,

$$\alpha_0 M_1 \int_{\Omega_0} h(s) \, | g(s) | \, ds > 1. \tag{21.12}$$

Тогда задача (21.9) при краевых условиях (21.8) имеет в K_0 по крайней мере одно ненулевое решение.

Доказательство. Рассматриваемая краевая задача эквивалентна уравнению $x = Ax$ с нелинейным интегральным оператором

$$Ax(t) = \int_a^b G(t, s) f[s, x(s)] \, ds.$$

Очевидно, оператор A вполне непрерывен и положителен на конусе K_0.

Покажем сначала, что спектральный радиус оператора $A'(0)$, где

$$A'(0) x(t) = \int_a^b G(t, s) f'_u(s, 0) x(s) \, ds,$$

меньше единицы. В предположении противного существует ненулевая функция $x_0(t) \in K_0$ такая, что

$$A'(0) x_0 = \lambda_0 x_0, \quad \lambda_0 > 1.$$

Это значит, что $x_0(t)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0} L_1 x_0(t) = f'_u(t, 0) x_0(t) \tag{21.13}$$

при краевых условиях (21.8), причем $\frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0} < 0$. Но из неосцилляции L_1 на $[a, b]$ следует, что оператор L_1^{-1} имеет ядро (функцию Грина), обладающее теми же общими свойствами, что и $G(t, s)$. Поэтому оператор

$$Dy = L_1^{-1} [f'_u(t, 0) y]$$

положителен на конусе K_0, что вступает в противоречие с равенством (21.13), которое дает

$$D x_0 = \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0} x_0 \in -K_0.$$

Таким образом, $\rho[A'(0)]<1$, что влечет за собой

$$\operatorname{ind}(A, 0)=1. \tag{21.14}$$

Для анализа поведения A на бесконечности рассмотрим вспомогательный оператор

$$Bx(t)=\int_a^b |G(t, s)|\, f[s, \sigma(s)x(s)]\,ds.$$

Очевидно, $Bx(t)=|A[\sigma(t)x(t)]|$, оператор B положителен на конусе K неотрицательных функций, и любой неподвижной точке v^* оператора B соответствует неподвижная точка $u^*(t)=\sigma(t)v^*(t)$ оператора A.

Положим $u_0(t)=|g(t)|=\sigma(t)g(t)$. Из оценок $G(t, s)$ вытекает

$$\|Bx\|u_0(t)=u_0(t)\cdot\max_{\tau\in[a, b]}\left|\int_a^b G(\tau, s)F[s, x(s)]\,ds\right|=$$

$$=u_0(t)\int_a^b\left(\max_{\tau\in[a, b]}|G(\tau, s)|\right)F[s, x(s)]\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{M_1}\int_a^b |G(t, s)|\,F[s, x(s)]\,ds=\frac{1}{M_1}Bx(t).$$

Таким образом, для любой неотрицательной функции $x(t)$ справедливо неравенство

$$Bx(t)\geqslant M_1\|Bx\|u_0(t), \quad t\in[a, b],$$

которое означает, что оператор B переводит K в конус K_0^u

$$K_0^u=\{x: x(t)\geqslant M_1\|x\|u_0(t),\ t\in[a, b]\},$$

и тем более $BK_0^u\subset K_0^u$.

По существу, из предыдущих рассуждений следует, что $\operatorname{ind}(B, 0)=1$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что $\operatorname{ind}(B, \infty)=0$.

На элементах любой нормы из K_0^u оператор

$$B_1 x=Bx+2\|x\|\frac{u_0}{\|u_0\|}$$

положительно гомотопен оператору $B_0 x=2\|x\|\dfrac{u_0}{\|u_0\|}$. Легко проверить, что положительной гомотопией может служить

$$B(x, \tau)=\tau Bx+2\|x\|\frac{u_0}{\|n_0\|}\ .$$

Покажем теперь, что на элементах большой нормы из K_0^u оператор B_1 положительно гомотопен оператору B. В качестве гомотопии возьмем

$$H(x, \lambda)=Bx+\lambda 2\|x\|\frac{u_0}{\|u_0\|}.$$

Доказательства требует лишь невырожденность гомотопии. В предположении противного найдется такая последовательность $x_n \in K_0^u$, $\|x_n\| \to \infty$, что

$$Bx_n+\lambda_n 2\|x\|\frac{u_0}{\|u_0\|}=x_n, \tag{21.15}$$

причем можно считать $\lambda_n>0$, иначе соответствующее x_n будет неподвижной точкой B (и теорема будет доказана).

Обозначим через λ_n^* наибольшее значение λ в неравенстве $x_n \geqslant \lambda u_0$. Так как $x_n \geqslant M_1\|x_n\| u_0$, то $\lambda_n^* \geqslant M_1\|x_n\|$. Поэтому $\lambda_n^* \to \infty$. Покажем, что отсюда при достаточно больших n вытекают неравенства

$$B(\lambda_n^* u_0) \geqslant \lambda_n u_0. \tag{21.16}$$

Множество Ω_0 можно считать не содержащим нулей a_k функции $u_0(t)$. Поэтому для каждого $\varepsilon>0$ при достаточно больших n будет выполняться в силу (21.11) неравенство

$$\varphi[\lambda_n u_0(t)] \geqslant (\alpha_0-\varepsilon)\lambda_n^* u_0(t),$$

что с учетом (21.10) дает

$$f[t, \lambda_n^* u_0(t)\sigma(t)] \geqslant (\alpha_0-\varepsilon)\lambda_n^* u_0(t).$$

Поэтому

$$B(\lambda_n^* u_0(t)) \geqslant \int_{\Omega_0} |G(t, s)| f[s, \lambda_n \sigma(s) u_0(s)\, ds \geqslant$$

$$\geqslant [(\alpha_0-\varepsilon) M_1 \int_{\Omega_0} h(s) u_0(s)\, ds] \lambda_n^* u_0(t),$$

что в совокупности с (21.12) дает (21.16).

Теперь (21.15), (21.16) в силу $x_n \geqslant \lambda_n u_0$ дают цепочку неравенств

$$x_n=Bx_n+\lambda_n 2\frac{\|x_n\|}{\|u_0\|}u_0 \geqslant B(\lambda_n^* u_0)+\lambda_n 2\frac{\|x_n\|}{\|u_0\|}u_0 \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_n^* u_0+\lambda_n 2\frac{\|x_n\|}{\|u_0\|}u_0,$$

что противоречит определению λ_n^*.

Таким образом, B положительно гомотопен B_1, а значит и B_0, откуда следует $\operatorname{ind}(B, \infty)=0$. ■

КОММЕНТАРИИ

К ГЛАВЕ ПЕРВОЙ

§ 1. Начало развитию теории полуупорядоченных пространств положил Л. В. Канторович (Матем. сб., 44, № 2, 1937). Серьезный вклад в теорию внес Г. Биркгоф [1]. История вопроса кратко изложена в предисловии к монографии Б. З. Вулиха [1]. Наиболее продуктивная аксиоматика с точки зрения нелинейного анализа была разработана и изучена М. Г. Крейном (см. М. Г Крейн, М. А. Рутман [1]). Многие важные и широко используемые в настоящее время понятия конусов были введены М. А. Красносельским [1]. Благодаря работам М. А. Красносельского и его учеников нелинейный анализ в полуупорядоченных пространствах превратился в самостоятельную математическую дисциплину. Что касается разновидностей конусов, то в параграфе рассматриваются лишь основные. Сейчас известно более сотни разновидностей конусов (см. И. Е. Бахтин [3]). Конусы, рассматриваемые в разделе 1.6, были введены М. А. Красносельским и Ю. В. Покорным [1].

§ Комментарии по поводу различных общих понятий операторов (положительные, монотонные, вогнутые, гетеротонные) будут даны в тех параграфах, где эти операторы изучаются. Для более подробного знакомства со свойствами оператора сдвига можно рекомендовать книгу М. А. Красносельского [3]. Детальный анализ нелинейных интегральных операторов имеется в книге М. А. Красносельского, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльника, П. Е. Соболевского „Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций" (Физматгиз, М., 1966).

§ 3. Линейные положительные операторы изучались на протяжении длительного времени многими авторами. Громадное количество наименований насчитывает библиография по теории положительных матриц. Работ по линейным положительным операторам существенно меньше — и они разбросаны по журналам. Частично систематизированная информация имеется в книгах М. А. Красносельского [1] и М. А. Красносельского, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкого, М. Я. Стеценко [1]. В настоящее время коллективом авторов во главе с М. А. Красносельским готовится к печати монография по линейным положительным операторам, в которой будет систематически изложен обширный материал. По затронутым в параграфе вопросам можно рекомендовать обратиться к упомянутым выше книгам и статьям В. Я. Стеценко [2—4], М. Г Крейна, М. А. Рутмана [1], П. П. Забрейко, М. А. Красносельского, В. Я. Стеценко [1] (см. также Б. З. Вулих [1]).

§ 4. С точки зрения большинства приложений знакомство с дифференцируемостью по конусу не обязательно, так как обычно производная по конусу совпадает с производной Фреше. Более подробные детали см. у М. А. Красносельского [1, 3].

К ГЛАВЕ ВТОРОЙ

§ 5 — 11. Как уже отмечалось, вращение векторного поля эквивалентно понятию степени отображения. Теория степени отображения в основном построена Л. Брауэром и завершена Г. Хопфом. Развитие этой теории, как и всей современной топологии, во многом определили фундаментальные топологические исследования А. Пуанкаре. Начало использованию топологических методов для изучения нелинейных уравнений в функциональных пространствах положил Ю. Шаудер. Значительный вклад в развитие и внедрение топологических методов в нелинейный анализ принадлежит М. А. Красносельскому.

Современное состояние теории вращения векторных полей и ее приложений отражено в монографии М. А. Красносельского, П. П. Забрейко [1], где собран богатейший фактический материал. Следует, однако, иметь в виду, что эта книга ориентирована в основном на изучение уравнений в бесконечномерных пространствах. К сожалению, практически нет книги, в которой бы обстоятельно (но в то же время просто и доходчиво) излагалась конечномерная теория вращения с приложениями к нелинейному анализу. Непосредственно с понятием вращения (степени отображения) можно ознакомиться по любому курсу алгебраической топологии. Для первого знакомства здесь можно рекомендовать небольшую книгу Л. С. Понтрягина. Основы комбинаторной топологии, Физматгиз, М., 1976. Пожалуй, наиболее просто степень отображения вводится в дифференциальной топологии (см. Д. Милнор, А. Уоллес. Дифференциальная топология. „Мир“, М., 1972). Аксиоматическое построение теории вращения предлагал Е. Цайдлер [1].

Данная глава практически целиком написана на основе небольшой книги В. И. Опойцева [5], где (как и здесь) при написании ставилась задача дать интуитивно ясное представление о теории вращения и сделать изложение приемлемым для первого знакомства с топологическими методами. Некоторые нетрадиционные приложения теории вращения можно найти в работах В. И. Опойцева [1, 6, 8].

Что касается многозначных отображений, то топологические методы здесь берут начало от работ С. Какутани. В настоящее время эти методы получили существенное развитие в работах Ю. Г. Борисовича и его учеников (Б. Д. Гельман, Ю. Е. Гликлих, В. В. Обуховский). Тема весьма обширна и затронутые в § 10 вопросы не дают даже оснований для ее подробного обсуждения. Заинтересованный читатель может обратиться к обзору Ю. Г. Борисовича, Б. Д. Гельмана, А. Д. Мышкиса, В. В. Обуховского [1].

К ГЛАВЕ ТРЕТЬЕЙ

§ 12, 13. Понятие вращения положительного векторного поля (М. А. Красносельский, П. П. Забрейко [1]) по существу является частным случаем двух понятий: относительного вращения и полного индекса Лере, которые независимо вводились Н. В. Марченко, Ю. Г. Борисовичем и другими авторами. Техника вычисления вращения положительного поля развита в работах М. А. Красносельского, П. П. Забрейко, Э. Мухамадиева, Ю. В. Покорного, Т. Сабирова и др.

К наиболее ярким результатам теории положительных операторов относятся теоремы М. А. Красносельского о сжатии и растяжении конуса. Любопытно, что первоначальное доказательство теоремы о растяжении (М. А. Красносельский [1]) было довольно длинным и технически сложным. Впоследствии П. П. Забрейко изобрел „процедуру выворачивания конуса наизнанку", которая буквально в две строчки позволяет сводить теоремы о растяжении к теореме о сжатии. Здесь эта процедура используется при доказательстве теоремы 12.8.

В изложении материала авторы существенно опирались на работы Ю. В. Покорного [2, 3]. Избранная схема изложения, конечно, не имеет достаточной степени общности, но она оказывается достаточной для большинства приложений и имеет преимущества в простоте и наглядности. Среди интересных и нетривиальных приложений теоремы о сжатии и растяжении конуса и их обобщений отметим результаты Ю. В. Покорного [1] и В. С. Климова (Дифф. ур-ния 7, № 5 (1971); Изв. АН СССР, сер. матем. 35, № 2 (1971); СМЖ 12, № 4 (1971); Дифф. ур-ния 9, № 3 (1973)).

§ 14. K-отображения были введены в статье В. И. Опойцева [6]. Теорема 14.3 (в других терминах) принадлежит С. Карамардиану, который доказывал ее, используя переход к многозначным отображениям. Новое доказательство (на основе леммы о покрытии симплекса) было дано А. В. Малишевским. Доказательства, использующие идеи теории вращения векторных полей, были даны в статьях В. И. Опойцева [6, 8], где и была построена теория P-отображений.

§ 15. Принцип Биркгофа-Тарского многократно обобщался и модернизировался (И. А. Бахтин, К. Самадов, В. Я. Стеценко и др.). Наиболее общий и достаточно удобный результат (теорема 15.2) принадлежит М. А. Красносельскому, А. В. Соболеву [1]. Две теоремы из этой статьи сформулированы здесь в виде упражнений 15.3, 15.4.

Теория гетеротонных операторов была построена в работах В. И. Опойцева [1—3]. Некоторые результаты теории гетеротонных операторов тесно соприкасаются с результатами школы Н. С. Курпеля по двусторонним операторным неравенствам (см. Н. С. Курпель, Б. А. Шувар [1]).

К ГЛАВЕ ЧЕТВЕРТОЙ

§ 16. Псевдовогнутые операторы и их разновидности были введены и изучены в работе В. И. Опойцева [2]. Теория псевдовогнутых операторов представляет собой обобщение теории монотонных вогнутых операторов (см. М. А. Красносельский [1], И. А. Бахтин [2], И. А. Бахтин, М. А. Красносельский [1], М. А. Красносельский, В. Я. Стеценко [1], В. И. Опойцев [1], В. Я. Стеценко [1]).

§ 17. Общие вопросы, относящиеся к нелокальным проблемам для уравнений с параметром, достаточно подробно излагаются в монографии М. А. Красносельского [1, 2], М. А. Красносельского, П. П. Забрейко [1]. Имеется много работ, изучающих специальные классы уравнений с параметром (см., например, И. А. Бахтин [2]), В. Я. Стеценко, Б Имомназаров [1]). Наиболее полно в этой области изучены собственные векторы монотонных вогнутых операторов (М. А. Красносельский, И. А. Бахтин, В. Я. Стеценко и др.). Позитивный спектр псевдовогнутых операторов изучается в статьях В. И. Опойцева, Т. А. Хуродзе [1, 3]. В разделе 17.2 приводится фрагмент из статьи В. И. Опойцева [7].

К ГЛАВЕ ПЯТОЙ

Глава дает далеко не полное представление о возможных приложениях. На выбор примеров влияли два обстоятельства: научные интересы авторов и попытка выйти (но не уйти) за рамки традиционных приложений, описанных в монографии М. А. Красносельского [1].

§ 18. Теория положительных, монотонных и вогнутых операторов имеет обширные приложения в теории дифференциальных уравнений (М. А. Красносельский [3]). Здесь большей частью излагаются аналоги этих приложений для дифференциальных уравнений с гетеротонной (расщепляемой) правой частью. Некоторые результаты были указаны в кандидатской диссертации Т. А. Хуродзе, см. также В. И. Опойцев, Т. А. Хуродзе [2]. Дифференциальные и интегральные неравенства имеют богатую историю, и в кратких комментариях трудно обозначить ее вехи, не упустив чего-нибудь существенного. Поэтому заинтересованного читателя мы отсылаем за результатами и библиографией к книге Я. Д. Мамедова, С. Аширова, С. Атдаева [1]. Кто интересуется более „древней“ историей, может обратиться к книге Э. Беккенбаха, Р. Беллмана „Неравенства“ „Мир“, М., 1965.

Последний раздел (Матричные системы сравнения) написан на основе статьи Н. С. Постникова, Е. Ф. Сабаева [1]. В этой статье читатель может найти приложения изложенных общих результатов к анализу нелинейных задач абсолютной устойчивости.

§ 19. Более подробная информация по всем рассматриваемым вопросам имеется в книге В. И. Опойцева [1].

§ 20. Излагаются результаты С. Б. Клейбанова, В. Б. Привальского, И. В. Тиме [1]. На наш взгляд эта работа хорошо иллюстрирует потенциальные возможности использования конусов неотрицательно определенных матриц.

§ 21. В первом разделе излагаются некоторые фрагменты из работы Г. Б. Келлера [1], во втором — из статьи Ю. В. Покорного [1].

ЛИТЕРАТУРА

Аронщайн, Смит (Aronszajn N., Smith K.), 1. Characterization of positive reproducing kernels. Applications to Green's functions. Amer. J. Math., 79 (2957). 611—622.

Бахтин И. А. 1. О существовании собственных векторов у линейных положительных не вполне непрерывных операторов. Матем. сб. 64 (1964), 102—114.

2. О нелинейных уравнениях с равномерно вогнутыми операторами, СМЖ, 4, № 2 (1963), 268—286.

3. Конусы линейных положительных операторов, изд. Воронежского пединститута, В., 1978.

Бахтин И. А., Красносельский М. А. 1. Метод последовательных приближений в теории уравнений с вогнутыми операторами, СМЖ. 2 № 3 (1961), 313—330.

Бинг (Bing R. H.) 1. The elusive fixed point property, Amer. Math. Monthly, 76, No. 2 (1969), 119—132.

Биркгоф Г. 1. Теория структур, ИЛ, М., 1952.

Борисович Ю. Г. Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. 1. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений, Успехи матем. наук, 35, вып. 1 (1980), 59—126.

Вулих Б. З. 1. Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, М., 1961.

Забрейко П. П., Красносельский М. А., Стеценко В. Я. 1. Об оценках спектрального радиуса линейных положительных операторов, Матем. заметки I, вып. 4 (1967), 461—468.

Келлер Г. Б. 1. Некоторые позитивные задачи, выдвигаемые нелинейной теорией генерации тепла. В кн. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения, под ред. Г. Б. Келлера и С. Антмана, „Мир", М., 1974.

Клейбанов С. Б., Привальский В. Б., Тиме И. В. 1. Стабилизация коэффициентов в дискретном фильтре Калмана, Автом. и телемех, № 3 (1974), 76—82.

Красносельский М. А. 1. Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, М., 1962.

2. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Физматгиз, М., 1956.

3. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, Физматгиз, М., 1966.

Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я. 1. Приближенное решение операторных уравнений, „Наука", М., 1969.

Красносельский М. А., Забрейко П. П. 1. Геометрические методы нелинейного анализа, „Наука", М., 1975.

Красносельский М. А. Покорный Ю. В. 1. Ненулевые решения уравнений с сильными нелинейностями, Матем. заметки 5, № 2 (1969), 253 — 260.

Красносельский М. А., Соболев А. В. 1. О неподвижных точках разрывных операторов, СМЖ 14, № 3 (1973), 674 — 677.

Красносельский М. А., Стеценко В. Я. 1. К теории уравнений с вогнутыми операторами, СМЖ, 10, № 3 (1969), 565 — 572.

Крейн М. Г. Рутман М. А. 1. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, Успехи матем. наук, 3, вып. 1, (1948) 3 — 95.

Курпель Н. С., Шувар Б. А. 1. Двусторонние операторные неравенства и их применения. „Наукова думка", Киев, 1980.

Мамедов Я. Д., Аширов С., Атдаев С. 1. Теоремы о неравенствах, „Ылым", Ашхабад, 1980.

Мышкис А. Д. 1. Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории, Матем. сб. (Нов. серия). 34, № 3 (1954), 525 — 540.

Опойцев В. И. 1. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения, „Наука", М., 1977.

2. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов, Труды Моск. матем. об-ва, (36) (1978), 237 — 273.

3. Гетеротонные и комбинированно-вогнутые операторы, СМЖ, 16 № 4 (1975), 781 — 792.

4. Обращение принципа сжимающих отображений, Успехи матем. наук. 31, вып. 4 (1976), 169 — 198.

5. Конечномерная теория вращения векторных полей, изд. Ин-та проблем управления, М., 1978.

6. Теоремы существования в задачах системостатики, Автом. и телемех., № 3 (1979), 85 — 95.

7. Неограниченные области асимптотической устойчивости, Автом. телемех., № 3 (1981), 5 — 13.

8. Топологические методы в теории сложных систем, Автом. и телемех., № 3 (1976), 142 — 160.

Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. 1. Спектральные свойства псевдовогнутых операторов, Сообщ. АН ГССР, 83, № 3 (1976), 557 — 560.

2. Некоторые теоремы о дифференциальных и интегральных неравенствах, Сообщ. АН ГССР, 87, № 3 (1977), 565 — 568.

3. Позитивный спектр псевдовогнутого оператора, СМЖ, 19, № 4 (1978), 849 — 856.

Покорный Ю. В. 1. О вторых решениях многоточечных краевых задач с выпуклыми нелинейностями, Диф. уравнения, 11, № 10 (1975), 1801 — 1810.

2. Об относительных индексах положительных операторов. Труды матем. ф-та ВГУ, вып. 4 (1971), 79 — 89.

3. О неподвижных точках положительных операторов. Труды матем. ф-та ВГУ, вып. 10 (1973), 112—116.

Постников Н. С., Сабаев Е. Ф. 1. Матричные системы сравнения и их приложения к задачам автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, № 4(1980), 24—34

Садовский Б. Н. 1. Предельно компактные и уплотняющие операторы, Успехи матем. наук, 27, вып. 1 (1972), 81—146.

Стеценко В. Я. 1. О неподвижных точках нелинейных отображений, СМЖ, 10, № 3 (1969), 642—652.

2. Критерии неразложимости линейных операторов, Успехи матем. наук, 21, вып. 5 (1966), 265—267.

3. Об оценке спектра некоторых классов линейных операторов, ДАН СССР, 157, № 5 (1964).

4. Об одном способе оценки спектра линейного оператора, Успехи матем. наук, 19, вып. 2 (1964).

Стеценко В. Я., Имомназаров Б. 1. О существовании собственных векторов у нелинейных не вполне непрерывных операторов, СМЖ, 8, № 1, (1967), 146—155.

Хуродзе Т. А. 1. О единственности и нелокальной продолжимости решений систем дифференциальных уравнений. Сообщ. АН ГССР, 112, № 2, (1983), 265—268.

Цайдлер Е. (Zeidler E.). 1. Existenz, Eindentigkeit, Eigenschaften und Anwendungen des Abbildungsgzades im, Theory of nonlinear operators, Proc. Summer-Schoel, Akademie-Verlag, Berlin (1974), 259—311.

Эйленберг, Монтгомери (Eilenberg S. Montgomery D.). 1. Fixed point theorems for multi-valued transformations, Amer. J Math., 68, No. 2 (1946), 214—222.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор издательства Л. Алапишвили

Художник Г Горделадзе

Художественный редактор И. Чиквиниидзе

Технический редактор И. Хуцишвили

Корректор М. Карселадзе

ИБ 879

Сдано в производство 11.07.83. Подписано в печать 30.10.84.

УЭ 04165 Бумага $60 \times 90^{1}/_{16}$.

Усл. печ. л. 17. Уч-изд. л. 14, 41 Тираж 1500 Заказ 948

Цена 1 руб. 90 коп.

Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 14.
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14.

Типография Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 1.
თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,
თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი,

ვალერი ივანეს ძე ოპოიცევი
თეიმურაზ ადოლფის ძე ხუროძე

არაწრფივი ოპერატორები კონუსიან სივრცეებში

(რუსულ ენაზე)

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი 1984