

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

А. В. Омельченко

А. В. Омельченко

ТЕОРИЯ ГРАФОВ



А. В. Омельченко

Теория графов

Москва
Издательство МЦНМО
2018

УДК 519.17
ББК 22.176
О57

Омельченко А. В.

О57 Теория графов. — М.: МЦНМО, 2018. — 416 с.
ISBN 978-5-4439-1247-9

В основу данного учебника легли материалы семестрового курса лекций, читающегося автором в течение нескольких лет студентам первых курсов бакалавриата Санкт-Петербургского Академического университета. В учебник включены все основные разделы современной теории графов — деревья, циклы, связность в графах, паросочетания, раскраски графов, планарные графы. В конце каждого параграфа приводятся задачи, дополняющие изложенный в учебнике теоретический материал. Все утверждения снабжены подробными доказательствами, изложение иллюстрируется большим количеством рисунков.

Учебник рассчитан на студентов младших курсов, изучающих математику и информатику, а также на специалистов из смежных областей, желающих самостоятельно изучить основные разделы теории графов. Большая часть материала не предполагает специальных предварительных знаний и может быть использована школьниками, изучающими программирование и дискретную математику. Наконец, этот учебник может быть полезен преподавателям, ведущим соответствующие курсы.

ББК 22.176



ISBN 978-5-4439-1247-9

© А. В. Омельченко, 2018
© МЦНМО, 2018

Оглавление

Предисловие	5
Глава 1. Основные понятия	8
§ 1. Основные понятия и определения теории графов	8
§ 2. Маршруты, пути, циклы в графе. Связные графы и орграфы	27
§ 3. Подграф графа G . Основные операции над графами	41
§ 4. Изоморфизм и автоморфизм графов	54
Глава 2. Деревья и их перечисление	73
§ 1. Основные свойства деревьев	73
§ 2. Перечисление деревьев. Формула Кэли	89
§ 3. Подсчет остовных деревьев в графе. Матричная теорема о деревьях	98
Глава 3. Циклы в графах	117
§ 1. Эйлеровы циклы	117
§ 2. Гамильтоновы циклы	132
§ 3. Линейное пространство ребер. Циклы и разрезы	147
§ 4. Циркуляции и напряжения. Электрические сети	165
Глава 4. Связность в графах	181
§ 1. Вершинная и реберная связность графа	181
§ 2. Двусвязные графы	188
§ 3. k -связные графы. Теорема Менгера	200
§ 4. Теорема Форда—Фалкерсона	209
Глава 5. Паросочетания в графах	222
§ 1. Понятие паросочетания. Теорема Берга. Независимые множества и покрытия графа	222
§ 2. Паросочетания в двудольных графах. Алгоритм Куна поиска макси- мального паросочетания в двудольном графе	240
§ 3. Совершенные паросочетания в произвольном графе. Теорема Татта	254
§ 4. Максимальные паросочетания в произвольном графе. Структурная теорема Галлаи—Эдмондса. Алгоритм Эдмондса	273

Глава 6. Раскраска графов	288
§ 1. k -раскрашиваемые графы. Теорема Брукса	288
§ 2. Нижние оценки на хроматическое число. Теорема Турана. Совершенные графы	307
§ 3. Реберная раскраска графов	326
§ 4. Хроматический многочлен графа	336
Глава 7. Планарные графы	347
§ 1. Планарные графы и их основные свойства	347
§ 2. Формула Эйлера для плоских графов	363
§ 3. Карты на поверхностях	374
§ 4. Критерии планарности графов. Теорема Куратовского	388
§ 5. Раскраска плоских графов	401
Литература	410
Предметный указатель	412

Предисловие

Теория графов является в настоящий момент одним из наиболее динамично развивающихся разделов дискретной математики. Связано это прежде всего с активным ее применением в разнообразных практических приложениях, начиная с информатики и теоретической физики и заканчивая социологией и экономикой. Неудивительно поэтому, что изучение базовых разделов теории графов сейчас начинается уже в старших классах практически любой приличной физико-математической школы. Однако зачастую этими базовыми знаниями изучение теории графов и заканчивается — во многих университетах отдельный курс теории графов не читается, а если и читается, то как подраздел некоторых более общих дисциплин, таких как дискретная математика. На изучение теории графов в большинстве университетов отводится довольно мало часов, а литературы на русском языке по этому предмету совсем немного.

Совершенно противоположная тенденция наблюдается сейчас за рубежом — в ведущих зарубежных университетах курс теории графов занял довольно прочные позиции в программах подготовки как математиков и программистов, так и студентов, специализирующихся в области естественных и социально-экономических наук. Каждый год выходит несколько учебников, освещающих в том или ином объеме практически все основные разделы теории графов. Основные элементы теории графов становятся такими же необходимыми элементами математической культуры, как и традиционные разделы современной алгебры и математического анализа. Появление данного учебника призвано в некоторой степени исправить сложившееся у нас в стране положение дел и дать возможность студентам, заинтересованным в изучении теории графов, освоить основные разделы этой науки.

Здесь уместно упомянуть некоторые классические учебники по теории графов. Эталонным курсом по основам теории графов на английском языке в настоящее время является, пожалуй, учебник [1] — его используют во многих зарубежных университетах в качестве базового при изучении этого раздела дискретной математики на первых курсах. Еще одним классическим вводным курсом по теории графов является книга Бонди и Мурти [2]. В 2008 году вышла переработанная версия этого учебника [3], в которой авторы существенным образом расширили как список тем, так и количество излагаемого в каждой из этих тем материала. Очень хороши для начинающих

книги [4], [5] и [6]. Более продвинутыми курсами являются учебники [7], [8], [9] и [10]; первое издание последнего переведено на русский язык (см. [11]). Традиционно в некоторых российских вузах до сих пор используется переведенный на русский язык учебник Харари [12], который к настоящему времени несколько устарел. Из литературы на русском языке стоит также отметить учебник [13]. Та же группа авторов из Белоруссии в 1998 году выпустила неплохой задачник по теории графов [14], правда, уже на английском языке. Наконец, по-прежнему актуальным является сборник задач [15], большая часть которого посвящена задачам теории графов.

Имеется также целый ряд очень неплохих книг, подробно освещающих те или иные разделы современной теории графов. Так, теории паросочетаний в графах полностью посвящен прекрасный учебник [16] (имеется его перевод на русский язык [17]). Теория двудольных графов отдельно и очень подробно излагается в учебнике [18], орграфам посвящена книга [19], а алгебраическая теория графов освещена в достаточно старой монографии [20]. Имеется несколько монографий [21], [22], излагающих вопросы, связанные с раскраской графов. Топологической теории графов посвящены книги [23], [24] и [25]. Наконец, в сборнике [26] собраны статьи ведущих специалистов по теории графов, в которых излагаются основные факты по всем разделам современной теории графов.

Представленный учебник можно рассматривать как вводный курс по теории графов. Никаких предварительных знаний в этой области заранее не предполагается. Как следствие, этот учебник можно взять за основу для построения семестрового курса по теории графов на первых курсах бакалавриата. Кроме того, его можно использовать для самостоятельного изучения теории графов, а также в качестве дополнительной литературы при изучении соответствующих разделов дискретной математики.

Учебник состоит из семи глав. В первой из них достаточно подробно излагается большинство основных понятий, активно используемых в дальнейших разделах учебника. Во второй главе изучаются деревья, остовные деревья, а также излагаются вопросы, связанные с перечислением этих объектов. Эйлеровы и гамильтоновы циклы разбираются в первой части третьей главы. Вторая часть этой главы посвящена некоторым алгебраическим аспектам теории графов, связанным с понятиями циклов и разрезов в графах. Четыре последние главы покрывают четыре основных раздела теории графов — связность в графах, паросочетания в графах, раскраску графов и вопросы, связанные с планарными графами и картами на поверхностях.

Хорошо известно, что ни один предмет невозможно всерьез освоить, не решив определенное количество задач. К теории графов это относится как ни к какой другой науке. Задачи, встречающиеся в этом разделе математики, как правило, достаточно нетривиальны. Кроме того, в теории графов зачастую отсутствует какой бы то ни было набор стандартных приемов, с помощью которых можно решить любую задачу, — часто для решения той или иной задачи необходимо придумать свой, довольно нестандартный подход, отличный от методов, используемых при решении других задач. С этой точки зрения серия основных задач, следующая в каждом параграфе этой

книги за теоретической частью, является обязательной для освоения материала. Помимо основных задач, к каждому параграфу добавлен блок дополнительных задач, уровень которых, как правило, несколько выше задач основного блока. Каждой задаче из основного и дополнительного блоков присвоен некий балл, характеризующий ее сложность; чем выше этот балл, тем сложнее задача. Важно отметить, однако, что в данный учебник не включены задачи исследовательского уровня — все задачи, представленные в книге, поддаются решению за разумное время. Для тех, кто хочет проверить свое решение, в конце каждого параграфа приведены ответы к задачам из основного блока.

В заключение мне хотелось бы поблагодарить всех тех, кто помогал в подготовке этой книги, а также всех тех, с кем мне довелось общаться при ее написании. Отдельную благодарность мне бы хотелось выразить студентам Санкт-Петербургского Академического университета, которые на протяжении последних нескольких лет слушали соответствующий лекционный курс и своим неравнодушным отношением к предмету, безусловно, способствовали улучшению излагаемого материала. Кроме того, я хочу сказать отдельное спасибо всем моим коллегам, принимавшим участие в проведении практических занятий по данному курсу.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§1. Основные понятия и определения теории графов

1. Начнем данный параграф с определения неориентированных и ориентированных графов.

а. Формальное и достаточно общее определение неориентированного графа таково.

Определение 1. Неориентированным графом G называется тройка

$$G = (V, E, I),$$

состоящая из

(1) (конечного) множества вершин $V = V(G)$, например

$$V = \{1, 2, 3, 4\},$$

(2) (конечного) множества ребер $E = E(G)$, например

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\},$$

(3) а также отображения $I: E \rightarrow V_2$, сопоставляющего любому ребру $e \in E$ неупорядоченную пару вершин $\{x, y\} \in V_2$, которую это ребро соединяет.

Вершины x и y называются *концевыми вершинами* ребра e . При этом говорят, что ребро e *инцидентно* своим концевым вершинам. Про любую из двух вершин x, y , в свою очередь, говорят, что она инцидентна ребру e .

В принципе, возможен случай $x = y$. Ребро $e \in E$, соответствующее паре $\{x, x\}$, обычно называется *петлей*. Кроме того, в общем случае у нас могут быть несколько различных ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин $\{x, y\}$. Такие ребра называют кратными ребрами и говорят, что они образуют *мультиребро* графа G . Если пара вершин $\{x, y\}$ соединена между собой единственным ребром, то такое ребро иногда называют простым ребром графа.

Пример 2. Зададим отображение I в виде следующей таблицы:

E	a	b	c	d	e	f	g	h
V_2	$\{1, 4\}$	$\{1, 4\}$	$\{2, 3\}$	$\{3, 4\}$	$\{3, 4\}$	$\{3, 4\}$	$\{1, 2\}$	$\{2, 2\}$

Ей соответствует граф G , изображенный на рис. 1.1. В этом графе ребра c и g являются простыми, кратные ребра a и b образуют мультиребро, соединяющее вершины 1 и 4, а ребро h представляет собой петлю.

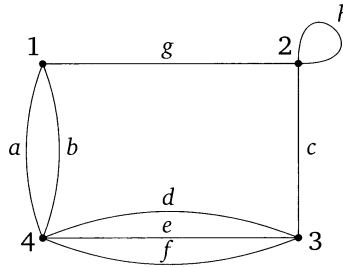


Рис. 1.1. Пример графа на четырех вершинах

б. С понятием инцидентности тесно связано важное понятие степени вершины графа G .

Определение 3. В неориентированном графе G степень $\deg(x)$ или валентность вершины x называется количество ребер, инцидентных x . При этом считается, что петля дает вклад, равный двум, в степень любой вершины.

Так, вершина 1 на рис. 1.1 имеет степень, равную трем, а вершина 2 — степень, равную четырем.

Следующее утверждение часто называют первой теоремой теории графов.

Теорема 4. В неориентированном графе G сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству всех ребер графа:

$$\sum_{x \in V(G)} \deg(x) = 2|E(G)|. \quad (1.1)$$

Доказательство практически очевидно — любое ребро дает вклад, равный двум, в сумму, стоящую в левой части. \square

Следствие 5. Количество вершин в графе G , имеющих нечетную степень, четно.

с. Несмотря на достаточную очевидность доказательства теоремы 4, оно использует чрезвычайно важный прием, очень часто встречающийся и в теории графов, и в комбинаторике, — так называемый двойной подсчет (double counting).

Неформально его можно себе представлять следующим образом. Предположим, что у нас имеется какое-то множество C элементарных объектов C_i , любой из которых мы можем рассматривать как составную часть двух различных, более сложно устроенных объектов A_j и B_k . Тогда количество $c = |C|$ всех элементарных объектов C_i мы всегда сможем сосчитать двумя способами. Именно, для любого сложного объекта первого типа A_j мы можем сосчитать количество a_j элементарных объектов, из которых состоит A_j , а затем просуммировать полученные числа a_j по j от 1 до n , где n есть количество всех сложных объектов первого типа. С другой стороны, мы можем для любого B_k сосчитать количество b_k элементарных объектов, из которых состоит сложный объект второго типа B_k , а затем просуммировать b_k по всем k от 1 до m , где m — количество объектов второго типа. Так как общее количество c всех элементарных объектов C_i от способа подсчета не зависит, мы в итоге получаем равенство вида

$$\sum_{j=1}^n a_j = c = \sum_{k=1}^m b_k, \quad (1.2)$$

которое и отражает некоторый конечный результат процедуры double counting.

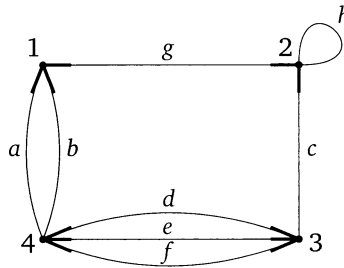


Рис. 1.2

При доказательстве первой теоремы теории графов мы в качестве элементарного объекта C_i можем взять так называемое *полуребро* графа G (semiedge или dart), т. е. половину любого ребра, инцидентного вершине x (см. рис. 1.2, на котором полуребра изображены жирными линиями). Каждое ребро состоит ровно из двух полуребер, поэтому количество c всех полуребер равно удвоенному количеству всех ребер: $c = 2m$, $m = |E(G)|$. С другой стороны, любую вершину x_j мы можем представить в виде «ежа», т. е. вершины вместе с инцидентными ей полуребрами. Количество a_j таких полуребер совпадает со степенью $\deg(x_j)$ вершины x_j . Суммируя эти числа a_j по всем $j = 1, \dots, n$, где n — количество всех вершин в графе, мы вновь получаем общее количество полуребер c . Формула (1.1) при этом есть не что иное, как соотношение (1.2), переписанное для рассматриваемого частного случая.

d. Описанную выше процедуру double counting можно формализовать с помощью так называемой матрицы инцидентности M_i . Именно, рассмотрим матрицу M_i размером $n \times m$, строки которой отвечают объектам A_j , $j = 1, \dots, n$, первого типа, а столбцы — объектам B_k , $k = 1, \dots, m$, второго

типа. Назовем объекты A_j и B_k *инцидентными* друг другу, если существует хотя бы один элементарный объект, являющийся частью как A_j , так и B_k . Любой элемент $m_{j,k}$ матрицы M_i равен количеству элементарных объектов, входящих как в A_j , так и в B_k . При таком подходе левая часть равенства (1.2) подсчитывает количество элементарных объектов суммированием по строкам матрицы M_i , а правая часть — суммированием по столбцам.

В случае неориентированного графа G строки матрицы M_i инцидентности графа G отвечают вершинам этого графа, а столбцы — его ребрам. Элемент $m_{j,k}$ матрицы M_i равен нулю, если вершина x_j и ребро e_k не инцидентны друг другу, $m_{j,k} = 2$ в случае, если e_k есть инцидентная вершине x_j петля, и $m_{j,k} = 1$ в остальных случаях.

Рассмотрим, к примеру, граф G , показанный на рис. 1.1 и 1.2. Для такого графа матрица инцидентности имеет следующий вид:

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \end{matrix}$$

Видно, что сумма элементов в любом столбце этой матрицы равна двум, а сумма элементов в любой строке совпадает со степенью вершины x этого графа. Суммирование по строкам и суммирование по столбцам снова приводит нас к равенству (1.1).

2. Чаще всего на практике встречаются так называемые простые графы, к описанию которых мы и перейдем.

а. Начнем с определения простого графа.

Определение 6. Граф G называется *простым*, если он не содержит петлю и мультиребер. Граф, не являющийся простым, часто называют *мультиграфом*.

В качестве примера рассмотрим изображенный на рис. 1.3(a) простой граф G , построенный на четырех вершинах и имеющий два ребра. Видно, что в таком графе мы можем не вводить какое-то дополнительное специальное обозначение для ребер — любое ребро однозначно задается парой

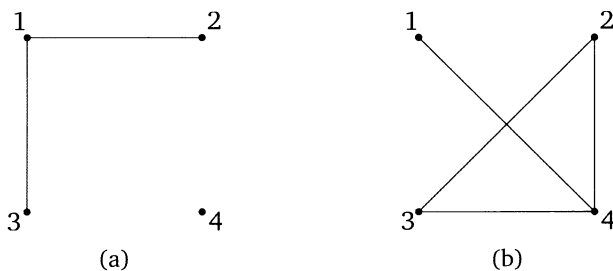


Рис. 1.3. Примеры простых графов: (a) граф G ; (b) граф \bar{G}

вершин, которые оно соединяет. Как следствие, для описания простого графа G нам достаточно задать множество V его вершин, а также множество E его ребер в виде некоторого подмножества множества всевозможных неупорядоченных пар множества вершин. Так, для графа G на рис. 1.3(a) мы имеем

$$V = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}.$$

Итак, с формальной точки зрения любой простой неориентированный граф G , построенный на n вершинах, можно рассматривать как некоторое подмножество множества $V^{(2)}$ всех двухэлементных подмножеств множества $V(G)$ его вершин:

$$G \subseteq V^{(2)}.$$

Если же говорить менее формально, то простой граф — это граф, построенный на n вершинах, любая пара которых может быть соединена или не соединена ребром.

Сразу заметим, что матрица M_i инцидентности простого графа состоит только из нулей и единиц.

б. Разберем некоторые важные примеры простых графов. В качестве первого примера рассмотрим так называемый *полный* граф K_n (см. рис. 1.4(a), на котором показан полный граф K_5), в котором любая вершина соединена со всеми оставшимися вершинами графа. Такой граф отвечает всему множеству $V^{(2)}$ двухэлементных подмножеств множества n вершин. Пустому подмножеству множества $V^{(2)}$ отвечает так называемый *пустой* граф, а именно граф, который состоит из n изолированных вершин (рис. 1.4(b)), т. е. вершин, степени которых равны нулю.

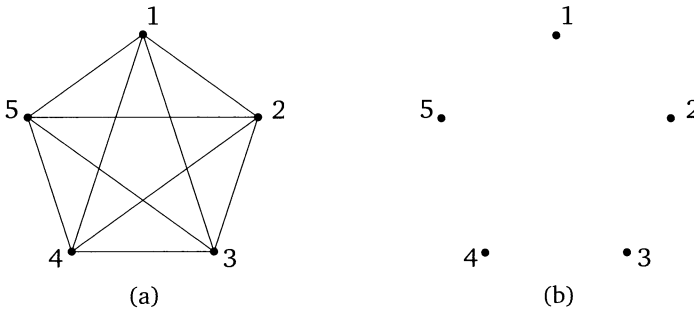


Рис. 1.4. Полный граф K_5 и пустой граф \bar{K}_5

Пустой граф является дополнением к полному графу K_n (и обозначается он \bar{K}_n) в смысле следующего определения.

Определение 7. Граф \bar{G} называется *дополнением* к графу G , если множества вершин этих двух графов совпадают, а множество ребер графа \bar{G} дополняет множество ребер $E(G)$ исходного графа G до множества ребер полного графа K_n .

На рис. 1.3 в качестве примера приведены два графа, построенные на четырех вершинах, — граф G и граф \bar{G} . Граф \bar{G} из графа G можно получить, например, так: взять полный граф K_4 , построенный на том же количестве вершин, что и графы G и \bar{G} , и удалить из него ребра, принадлежащие графу G . Полученный в результате этой операции граф \bar{G} и будет являться дополнением к графу G в смысле данного выше определения.

с. При изучении теории графов нам часто будут встречаться еще несколько важных подклассов простых графов.

Определение 8. Граф G называется *двудольным* (рис. 1.5), если множество $V(G)$ его вершин можно разбить на два блока X и Y так, что концы x и y любого ребра $e = \{x, y\} \in E(G)$ лежат в разных блоках этого разбиения. Обозначается двудольный граф с разбиением (X, Y) через $G[X, Y]$.

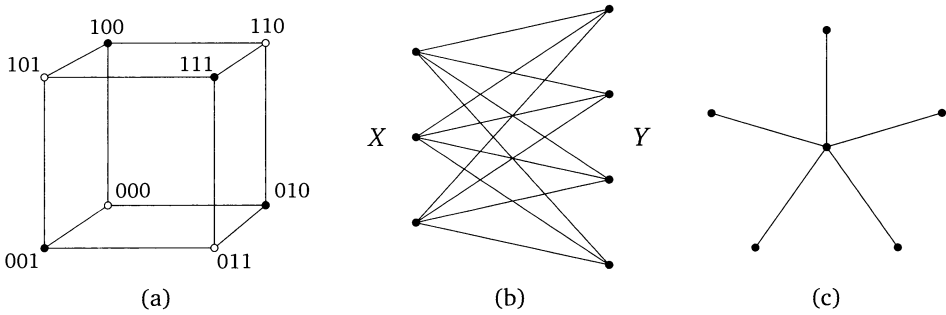


Рис. 1.5. Примеры двудольных графов: (а) граф Q_3 ; (б) полный двудольный граф $K_{3,4}$; (с) граф «звезда» $K_{5,1}$

Простой граф $G[X, Y]$, в котором любая вершина из блока X соединена ребром с каждой вершиной из блока Y и наоборот, называется *полным двудольным графом* (рис. 1.5(b)). Такой граф часто обозначается $K_{n,m}$, где $n = |X|$, а $m = |Y|$. Граф $K_{n,1}$ называется *звездой* (рис. 1.5(c)).

Еще два важных подкласса простого графа, называемые путем P_n и циклом C_n , показаны на рис. 1.6(a) и 1.6(b). Количество ребер в графах P_n и

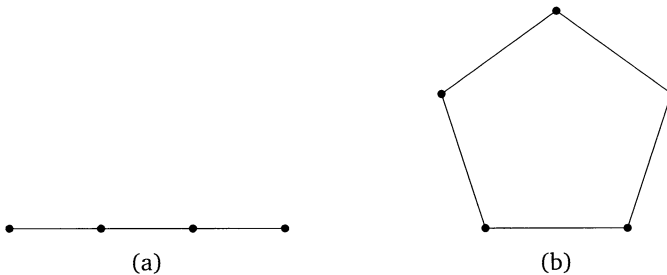


Рис. 1.6. (а) Путь P_4 ; (б) цикл C_5

C_n характеризует длину таких графов. Также нам будет часто встречаться граф W_n , называемый *колесом* (см. рис. 1.7(a)). Индекс n в обозначении W_n такого графа — либо количество вершин в его внешнем цикле, либо количество всех вершин. Мы будем считать, что n — это количество вершин во внешнем цикле графа W_n .

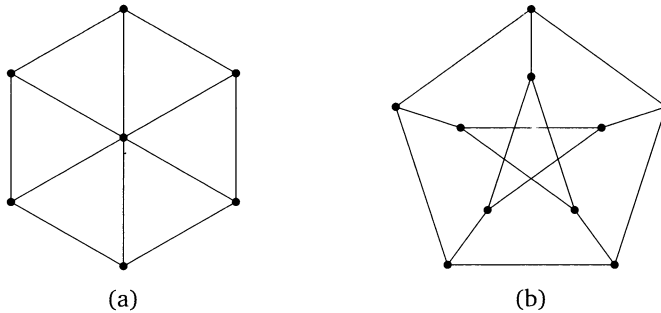


Рис. 1.7. (a) Колесо W_6 ; (b) граф Петерсена

Важный класс простых подграфов представляют собой так называемые *регулярные графы*, т. е. графы, у которых все вершины имеют одну и ту же степень k . Также их называют k -регулярными графами или регулярными графами степени k . В случае $k = 3$ такие графы называются кубическими. На рис. 1.7(b) показан пример кубического графа, который достаточно часто будет встречаться у нас в приложениях, — так называемый граф Петерсена (Petersen graph). Графы C_n и K_n также являются регулярными графами степени 2 и $n - 1$ соответственно.

Наконец, имеется важный класс графов, являющихся одновременно k -регулярными и двудольными, — так называемые k -кубы Q_k . Вершины графа Q_k можно пометить бинарными строками длины k (см. рис. 1.5(a)). Ребра же в таком графе проводятся только между теми вершинами, бинарные последовательности которых отличаются только в одной из k позиций. Пример графа Q_3 показан на рис. 1.5(a).

3. Наряду с неориентированными, в теории графов также изучаются и так называемые ориентированные графы (или орграфы).

а. Начнем мы вновь с достаточно формального и общего определения ориентированного мультиграфа D .

Определение 9. Если в тройке

$$D = (V, E, I),$$

в которой V есть множество вершин, а E — множество ребер, отображение I ставит в соответствие любому ребру e упорядоченную пару вершин $(x, y) \in V \times V$, то такая тройка называется *ориентированным графом* (или *орграфом*). В таком случае говорят, что ребро e *выходит* из вершины x и *входит* в вершину y . На рисунке такое ребро помечается стрелкой, указывающей направление данного ребра.

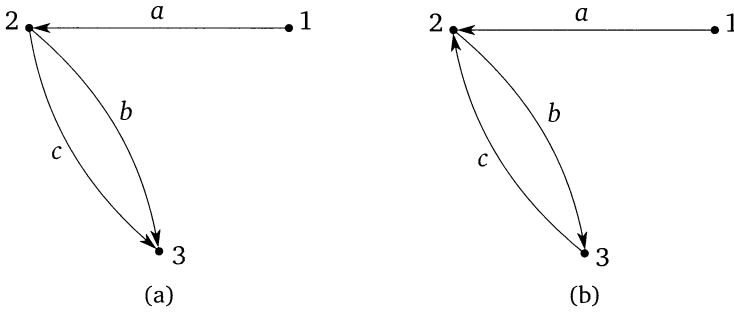


Рис. 1.8. Примеры ориентированных графов

В качестве примера на рис. 1.8(a) показан ориентированный граф D , построенный на множестве вершин $V = \{1, 2, 3\}$ и имеющий три ребра. Ребро a выходит из вершины 1 и входит в вершину 2 (т. е. отвечает упорядоченной паре $(1, 2)$), а ребра b и c исходят из вершины 2 и приходят в вершину 3 (т. е. им соответствует упорядоченная пара $(2, 3)$ вершин графа D). Таким образом, орграф D на рис. 1.8(a) задается тройкой (V, E, I) , в которой множество V вершин и множество E ребер имеют вид

$$V = \{1, 2, 3\}, \quad E = \{a, b, c\},$$

а отображение $I: E \rightarrow V \times V$ задается таблицей вида

E	a	b	c
$V \times V$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(2, 3)$

б. Для беспетлевых орграфов можно ввести понятие матрицы инцидентности $M_i(D)$. Каждая строка такой матрицы отвечает некоторой вершине орграфа, каждый столбец — некоторому ребру. В случае, если из вершины x_i исходит ребро e_j , элемент $m_{i,j}$ матрицы инцидентности считается равным $+1$, а если в вершину x_i входит ребро e_j , то $m_{i,j}$ полагают равным -1 .

Так, для изображенного на рис. 1.8(a) орграфа D матрица инцидентности $M_i(D)$ имеет следующий вид:

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ a & b & c \end{matrix}$$

с. В орграфе различают исходящую ($\text{outdeg}(x)$) и входящую ($\text{indeg}(x)$) степень любой вершины $x \in V(D)$. Так, в графе, изображенном на рис. 1.8(a), вершина 2 имеет входящую степень, равную единице, и исходящую степень, равную двойке.

Так как любое ориентированное ребро в орграфе D вносит вклад, равный единице, в сумму всех исходящих степеней вершин орграфа D , а также вклад,

равный единице, в сумму всех входящих степеней вершин орграфа D , то для орграфа справедливо равенство вида

$$\sum_{x \in V(D)} \text{indeg}(x) = |E(D)| = \sum_{x \in V(D)} \text{outdeg}(x), \quad (1.3)$$

являющееся аналогом первой теоремы теории графов (теорема 4).

d. Как и для неориентированного графа, важным частным случаем орграфа является простой орграф.

Определение 10. Орграф D называется *простым*, если он не содержит петель, а также кратных *упорядоченных* ребер, т. е. ребер, отвечающих одинаковым упорядоченным парам вершин.

Упорядоченность вершин в этом определении важна. Так, граф, показанный на рис. 1.8(a), простым не является — в нем ребра b и c отвечают одной и той же упорядоченной паре вершин $(2, 3)$. Изображенный же на рис. 1.8(b) граф D' является простым. Несмотря на то что в этом графе по-прежнему имеются два ребра, соединяющие вершины 2 и 3, направлены эти ребра в разные стороны. Иными словами, эти ребра отвечают различным упорядоченным парам вершин — ребро b отвечает упорядоченной паре $(2, 3)$, а ребро c — упорядоченной паре $(3, 2)$.

e. Важным частным случаем простого орграфа, довольно часто встречающимся на практике, является турнир T — орграф, полученный ориентацией ребер полного графа K_n (рис. 1.9).

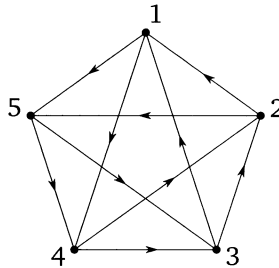


Рис. 1.9

Определение 11. *Ориентацией* графа G называется орграф D , полученный из G ориентацией каждого из ребер G , т. е. заменой любого ребра $\{x, y\} \in E(G)$ неориентированного графа либо на ребро $(x, y) \in E(D)$, либо на ребро $(y, x) \in E(D)$.

Определение 12. *Турниром* T называется орграф, полученный ориентацией полного графа K_n .

Любой орграф T моделирует результат так называемого кругового турнира (round-robin tournament), в котором каждый игрок встречается с каждым другим участником ровно один раз. При этом считается, что результатом встречи может быть победа или поражение, ничьи правилами турнира не

предусматриваются. Ребро (x, y) в турнире направлено от выигравшего игрока x к проигравшему y . Как следствие, исходящая степень $\text{outdeg}(x)$ произвольного турнира T определяет количество очков (score), набранных в турнире соответствующей командой.

4. Следующим важным понятием в теории графов является понятие смежности вершин.

а. Начнем с определения смежных вершин в неориентированном графе G .

Определение 13. Говорят, что в неориентированном графе G вершина y смежна с вершиной x , если в этом графе существует ребро $\{x, y\}$.

На множестве вершин V смежность задает некоторое отношение. Для неориентированного графа G это отношение является симметричным: если вершина x смежна с вершиной y , то и вершина y смежна с вершиной x .

б. Для ориентированного графа ситуация несколько сложнее.

Определение 14. Говорят, что в ориентированном графе D вершина y смежна с вершиной x , если в этом графе существует ребро (x, y) , исходящее из вершины x и входящее в вершину y (см. рис. 1.8(a)). Как следствие, все смежные с x вершины — это вершины, в которые ведут ребра из вершины x .

Для изображенного на рис. 1.8(a) орграфа G вершина 2 смежна с вершиной 1.

Сразу заметим, что если существует ребро (x, y) и не существует ребра (y, x) , то вершина y смежна с вершиной x , а вот x вершиной, смежной с y , уже не является. Так, для изображенного на рис. 1.8(a) орграфа вершина 1 смежной с вершиной 2 не является. Вершина x будет смежной с y только в случае, когда в орграфе D существует ребро (y, x) (см. вершины 2 и 3 на рис. 1.8(b)). Иными словами, в ориентированном графе D отношение смежности на множестве V вершин симметричным не является.

5. Для хранения графа в памяти компьютера, как правило, используются две структуры, тесно связанные с понятием смежности, — матрица смежности и список смежности.

а. Матрица смежности — это матрица M_a размером $n \times n$, любой элемент $a_{i,j}$ которой описывает количество ребер, соединяющих вершины i и j . Так, для примера 2 соответствующая графу G матрица смежности имеет следующий вид:

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае ориентированных графов элементу $a_{i,j}$ отвечает количество ребер, идущих из вершины i в вершину j . Так, для ориентированных графов,

показанных на рис. 1.8, матрицы смежности имеют вид

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для неориентированного графа матрица смежности всегда симметрична. Как следствие, все собственные значения этой матрицы являются вещественными числами.

В случае простого графа или орграфа все диагональные элементы $a_{i,i}$ равны нулю, так что сумма собственных значений такой матрицы, совпадающая со следом матрицы M_a , также равняется нулю. Элементы, не лежащие на диагонали, равны единице в случае, если существует ребро, идущее из вершины i в вершину j , и нулю в случае, если такого ребра не существует.

б. Список смежности — это линейный массив L_a размера n , каждый элемент a_i которого содержит список (мультимножество) вершин, смежных с вершиной i . Для примера 2 соответствующий список имеет следующий вид:

- 1 (смежные с 1 вершины): 2, 4, 4;
- 2 (смежные с 2 вершины): 1, 2, 3;
- 3 (смежные с 3 вершины): 2, 4, 4, 4;
- 4 (смежные с 4 вершины): 1, 1, 3, 3, 3.

Для ориентированного графа напротив каждой вершины с номером i стоит вершины (возможно, повторяющиеся), в которые идут ребра из i . Как следствие, для показанного на рис. 1.8(а) орграфа список смежности записывается так:

- 1 (смежные с 1 вершины): 2;
- 2 (смежные с 2 вершины): 3, 3;
- 3 (смежные с 3 вершины): \emptyset .

Упражнения

1 (1 балл). Докажите, что в любом простом графе, построенном на $n \geq 2$ вершинах, существуют по крайней мере две вершины с одинаковыми степенями. Остается ли верным это утверждение для мультиграфа? Для графа без петель?

2 (0,5 балла). Докажите, что кубический граф, т. е. граф, степени всех вершин которого равны трем, всегда имеет четное число вершин.

3 (0,5 балла). Подсчитайте количество ребер в полном двудольном графе $K_{m,n}$ на $|V(K_{m,n})| = n + m$ вершинах. Что можно сказать о параметрах m и n в случае, если полный двудольный граф $K_{m,n}$ является k -регулярным?

4 (1,5 балла). Пусть G — простой граф, построенный на 9 вершинах. Предположим, что сумма степеней вершин графа G больше или равна 27. Правда ли, что в таком графе обязательно существует вершина, степень которой больше или равна 4?

5 (1,5 балла). Докажите, что граф Q_k (т. е. k -куб) действительно является k -регулярным двудольным графом. Подсчитайте количество вершин и ребер в таком графе. Сколько различных копий P_3 и C_4 содержит такой граф?

6 (1,5 балла). Последовательностью степеней вершин графа или степенной последовательностью (degree sequence) называется список всех степеней вершин графа G , записанный в порядке невозрастания:

$$\deg(x_1) \geq \deg(x_2) \geq \dots \geq \deg(x_n).$$

Докажите, что невозрастающая последовательность (d_1, d_2, \dots, d_n) целых неотрицательных чисел является степенной последовательностью некоторого графа G тогда и только тогда, когда сумма всех этих чисел есть четное число.

7 (0,5 балла). Невозрастающая последовательность неотрицательных чисел

$$\mathbf{d} := (d_1, d_2, \dots, d_n), \quad d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0,$$

называется *графовой*, если она является последовательностью степеней вершин некоторого *простого* графа G . Покажите, что последовательности чисел $(1, 1, 0)$ и $(2, 2, 1, 1)$ являются графовыми, предъявив для каждой из них соответствующие им простые графы.

8 (2 балла). Рассмотрим последовательность $\mathbf{d}_1 := (3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$. Удалим в ней число 3, стоящее на первой позиции, а от следующих трех чисел отнимем по единице. В результате получим последовательность $\mathbf{d}_2 := (2, 2, 2, 3, 2, 2, 1)$, которая после переупорядочивания по невозрастанию примет вид $(3, 2, 2, 2, 2, 2, 1)$. В общем случае соответствующая пара последовательностей будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 &:= (s, d_1, d_2, \dots, d_s, d_{s+1}, \dots, d_n), \\ \mathbf{d}_2 &:= (d_1 - 1, d_2 - 1, \dots, d_s - 1, d_{s+1}, \dots, d_n). \end{aligned}$$

Докажите, что последовательность \mathbf{d}_1 является графовой тогда и только тогда, когда таковой является и последовательность \mathbf{d}_2 . Сформулируйте на основании данного утверждения алгоритм проверки на графовость для невозрастающей числовой последовательности.

9 (1 балл). Какие из представленных ниже числовых последовательностей являются графовыми:

- 1) $(5, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 1)$;
- 2) $(5, 5, 4, 4, 2, 2, 1, 1)$;
- 3) $(5, 5, 5, 3, 2, 2, 1, 1)$;
- 4) $(5, 5, 5, 4, 2, 1, 1, 1)$?

10 (0,5 балла). Запишите матрицу смежности M_a и матрицу инцидентности M_i для графа G , изображенного на рис. 1.10(a).

11 (0,5 балла). Запишите матрицу смежности M_a ориентированного графа, изображенного на рис. 1.10(b).

12 (0,5 балла). Запишите список смежности турнира, показанного на рис. 1.10(c).

13 (1 балл). Пусть M_a — матрица смежности простого графа G . Выразите через нее матрицу \bar{M}_a смежности графа \bar{G} .

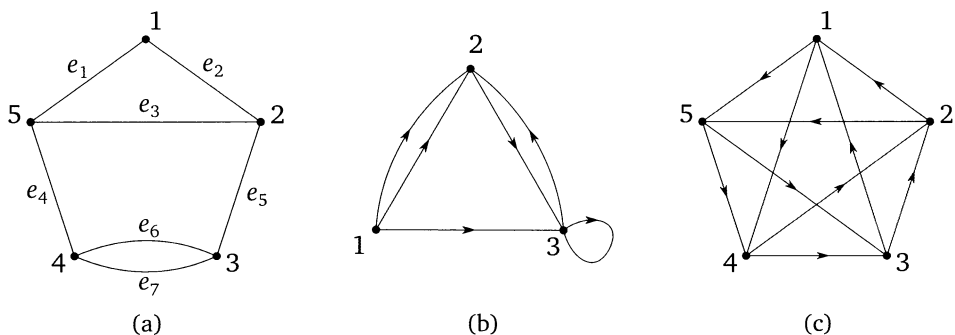


Рис. 1.10

14 (1,5 балла). Пусть M_a и M_i — матрицы смежности и инцидентности простого графа G . Чему равны диагональные коэффициенты матриц M_a^2 и $M_i M_i^t$, где M_i^t — транспонированная к M_i матрица? Как связаны недиагональные элементы матриц $M_i M_i^t$ и M_a ?

15 (0,5 балла). Сколько различных ориентированных графов можно получить из одного и того же простого графа G , $|E(G)| = m$, ориентацией его ребер?

16 (0,5 балла). Докажите, что любой турнир, построенный на n вершинах, имеет не более одной вершины x , исходящая степень которой $\text{outdeg}(x) = n - 1$.

17 (0,5 балла). Докажите, что в случае нечетных n существует турнир T , в котором для любой вершины x выполняется равенство

$$\text{outdeg}(x) = \text{indeg}(x).$$

18 (0,5 балла). Неубывающая последовательность чисел

$$s_1 := (s_1, s_2, \dots, s_n), \quad s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq n - 1, \quad (1.4)$$

называется последовательностью количества очков (score sequence), если существует турнир T , построенный на n вершинах, для которого $\text{outdeg}(x_i) = s_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Докажите, что для любой последовательности (1.4) количества очков справедливы соотношения

$$\sum_{i=1}^k s_i \geq \binom{k}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1; \quad \sum_{i=1}^n s_i = \binom{n}{2}. \quad (1.5)$$

Дополнительные упражнения

19 (1 балл). Рассмотрим произвольную смежную пару вершин $\{x, y\}$ в простом графе G на n вершинах. Докажите, что ребро $e = \{x, y\}$ принадлежит по меньшей мере $\text{deg}(x) + \text{deg}(y) - n$ треугольникам в графе G .

20 (2 балла). Рассмотрим невозрастающую последовательность неотрицательных целых чисел

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0.$$

Докажите, что такая последовательность является степенной последовательностью некоторого графа G без петель тогда и только тогда, когда сумма всех этих чисел есть четное число и выполняется неравенство

$$d_1 \leq d_2 + d_3 + \dots + d_n.$$

21 (1 балл). Какие из представленных ниже числовых последовательностей являются графовыми:

1) (5, 2, 2, 1); 2) (2, 2, 1, 1); 3) (1); 4) (2); 5) (1, 1); 6) (6, 5, 4, 3)?

22 (1 балл). По последовательностям (5, 5, 5, 5, 3, 3) и (5, 5, 4, 3, 3, 2) постройте связные графы с минимальным количеством петель и мультиребер. Можно ли по ним построить простые графы? Если да, то предъявите подобное построение, по возможности наиболее простое.

23 (1,5 балла). Докажите, что последовательность

$$(n, n, n-1, n-1, \dots, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$$

всегда является графовой.

24 (1,5 балла). Пусть \mathbf{d} — невозрастающая последовательность, состоящая из n неотрицательных чисел, сумма которых четна. Предположим, что наибольшее число a этой последовательности строго меньше n и отличается от наименьшего числа b этой последовательности не более чем на единицу. Примерами такой последовательности являются, например, последовательности

$$(4, 4, 3, 3, 3, 3) \quad \text{и} \quad (3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2).$$

Докажите, что последовательность \mathbf{d} является графовой.

25 (1,5 балла). Любой элемент $a_{i,j}$ матрицы M_a смежности графа G можно трактовать как количество путей длины 1 в графе G из вершины i в вершину j . Чему равны с этой точки зрения элементы матрицы M_a^2 ? Можно ли обобщить данный результат на случай произвольной степени $k > 1$ матрицы M_a ?

26 (1,5 балла). Собственным числом графа G называется собственное число матрицы M_a смежности этого графа. Докажите, что k -регулярный граф G имеет собственное число $\lambda = k$.

27 (1 балл). Докажите, что ранг матрицы M_a смежности произвольного турнира T больше или равен $n - 1$.

28 (1 балл). Докажите, что для произвольного турнира T справедливо равенство

$$\sum_{x \in V(T)} \text{outdeg}(x)^2 = \sum_{x \in V(T)} \text{indeg}(x)^2.$$

29 (1,5 балла). Докажите, что неубывающая последовательность (1.4) является последовательностью количества очков тогда и только тогда, когда последовательностью количества очков оказывается последовательность s_2 , полученная из последовательности

$$(s_1, s_2, \dots, s_{s_n}, s_{s_n+1} - 1, \dots, s_{n-1} - 1)$$

переупорядочиванием ее членов в порядке неубывания.

30 (2,5 балла). Докажите, что условия (1.5) являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы неубывающая последовательность (1.4) была последовательностью количества очков.

Указание. Один из возможных способов доказательства достаточности этого факта — индукция по числу

$$t := \sum_{k=1}^n t_k, \quad t_k := \sum_{i=1}^k s_i - \binom{k}{2}.$$

В процессе доказательства нужно показать, что существуют такие индексы $r < k$, что $s_r - s_{r-1} \geq 2$ и $s_{k+1} - s_k \geq 2$, уменьшить s_r на единицу, увеличить s_k на единицу и воспользоваться индукционным предположением.

31 (1,5 балла). Орграф D называется сбалансированным, если для любой его вершины x выполняется неравенство

$$|\text{outdeg}(x) - \text{indeg}(x)| \leq 1.$$

Докажите, что из любого неориентированного графа G можно получить направленный сбалансированный орграф D .

Решение упражнений

1. Предположим, что это не так. В этом случае для любого числа $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ в графе G найдется вершина x_i , степень которой равна i . В частности, это означает, что в графе существуют как изолированная вершина x_0 (т. е. вершина степени 0), так и вершина x_{n-1} степени $n-1$. Последняя по определению должна быть соединена с любой другой вершиной графа G , в том числе и с вершиной x_0 , что невозможно.

В случае мультиграфа это утверждение не выполняется — достаточно рассмотреть граф на двух вершинах, соединенных ребром, с петлей у одной из его вершин. В случае отсутствия петель это утверждение также неверно — в качестве простейшего контрпримера можно взять граф на трех вершинах $\{1, 2, 3\}$ с ребром $\{1, 2\}$ и мультиребром $\{2, 3\}$ из двух ребер.

2. Действительно, согласно теореме 4 сумма степеней вершин равна удвоенному количеству ребер, т. е. всегда равна некоторому четному числу. Но в кубическом графе

$$\sum_{x \in V(G)} \text{deg}(x) = 3|V|,$$

поэтому количество $|V|$ вершин обязательно должно быть четным числом. Понятно, что аналогичный результат справедлив и для любых других k -регулярных графов, в которых $k \geq 3$ — нечетное число.

3. В полном двудольном графе $K_{m,n}$ каждая вершина из первого блока X , $|X| = m$, соединена с каждой вершиной из второго блока Y , $|Y| = n$. Иными словами, любая вершина первого блока инцидентна n ребрам. Всего же у нас имеется m вершин в первом блоке. Суммируя по всем вершинам первого блока, мы получаем, что количество ребер равно $n \cdot m$.

Так как в k -регулярном графе степень любой вершины равна k , а в полном двудольном графе $K_{m,n}$ параметры m и n определяют степень вершин первого и второго блоков этого графа, в таком графе должны выполняться равенства $m = n = k$.

4. Да, это правда. Действительно, из условия задачи следует, что

$$\sum_{i=1}^9 \deg(x_i) \geq 27.$$

Предположим, что в графе степень любой вершины x_i меньше или равна трем. Если хотя бы одна из вершин x_i будет иметь степень, строго меньшую, чем 3, получить в сумме 27 мы не сможем. Единственный вариант, когда это возможно, — это случай $\deg(x_i) = 3$ для любого $i = 1, \dots, 9$. Однако в этом случае мы получим нечетное количество вершин нечетной же степени, что невозможно. Как следствие, хотя бы одна вершина в таком графе обязана иметь степень, большую или равную 4.

5. Так как любой вершине однозначно сопоставляется бинарная строка длины k , в графе Q_k имеется 2^k вершин. Далее, две вершины в графе Q_k смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им бинарные последовательности отличаются только лишь в одной из k позиций. Любая такая позиция задает для выбранной вершины смежную с ней вершину. Следовательно, степень каждой вершины в Q_k одинакова и равна k . Наконец, рассмотрим произвольную вершину, заданную бинарной строкой длины k . Если мы поменяем любую из цифр этой строки на противоположную, мы тем самым поменяем четность суммы всех чисел в строке. Следовательно, любая вершина, сумма чисел в строке которой сравнима с единицей по модулю 2, смежна только лишь с вершинами, сумма чисел в строке которых сравнима с нулем по модулю 2, и наоборот. А это и означает, что граф Q_k является двудольным.

Покажем теперь, что количество ребер в таком графе равняется $k2^{k-1}$. Действительно, в графе имеется 2^k вершин, и из каждой вершины исходит ровно k ребер. Так как любое ребро при этом считается дважды, общее количество ребер равно $k2^{k-1}$.

Подсчитаем количество различных путей P_3 в графе Q_k . Для этого заметим, что любую вершину x такого графа мы можем рассматривать как центральную вершину такого пути. Любая такая вершина имеет ровно k соседей. Нам достаточно выбрать двух соседей из k , для того чтобы задать некоторый путь P_3 . Всего вершин у нас 2^k . Из k соседей заданной вершины мы $\binom{k}{2}$ способами можем выбрать двух соседей. Следовательно, всего имеется $2^k \binom{k}{2}$ копий графа P_3 в графе Q_k .

Теперь заметим, что любой цикл C_4 в графе Q_k состоит из четырех различных путей P_3 . Кроме того, любой путь P_3 однозначно дополняется до цикла C_4 в Q_k . Следовательно, количество копий C_4 в графе Q_k в четыре раза меньше количества копий P_3 , т. е. равно $2^{k-2} \binom{k}{2}$.

6. То, что сумма членов последовательности степеней вершин является четным числом, следует из теоремы 4. Для доказательства в обратную сторону предъявим алгоритм построения некоторого мультиграфа G по заданной последовательности $\mathbf{d} := (d_1, d_2, \dots, d_n)$. Соединим попарно все вершины нечетной степени. Так как их четное число, мы всегда сможем это сделать. Затем добавим к каждой вершине петли в количестве, равном $\deg(x)/2$ для четных вершин и $(\deg(x) - 1)/2$ для нечетных. В результате получим некоторый мультиграф G , у которого степенная последовательность совпадет с заданной числовой последовательностью \mathbf{d} .

7. Первой последовательности соответствует граф на трех вершинах с одним ребром (рис. 1.11(a)), а второй — простой путь на четырех вершинах (рис. 1.11(b)).

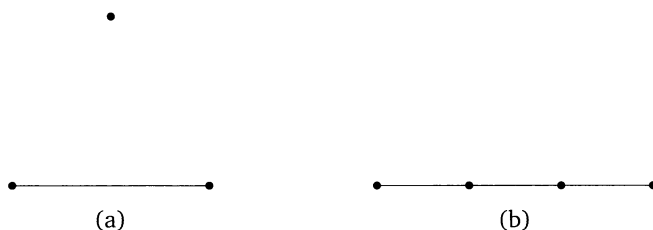


Рис. 1.11

8. Предположим вначале, что последовательность \mathbf{d}_2 является графовой, т. е. ей соответствует некоторый граф, построенный на n вершинах. Добавим тогда к G_2 новую вершину степени s и соединим ее с теми вершинами, которые имеют степени $d_1 - 1, d_2 - 1, \dots, d_s - 1$. В результате получим простой граф G_1 , степенная последовательность которого совпадает с \mathbf{d}_1 . Следовательно, последовательность \mathbf{d}_1 является графовой.

Теперь предположим, что последовательность \mathbf{d}_1 является графовой, т. е. ей отвечает некоторый простой граф G_1 , в котором имеются вершина x степени s , вершины y_1, \dots, y_s степеней d_1, \dots, d_s , а также вершины z_{s+1}, \dots, z_n степеней d_{s+1}, \dots, d_n соответственно. Если вершина x смежна со всеми вершинами y_i , то мы можем удалить x вместе с инцидентными ей ребрами и получить простой граф G_2 , степенная последовательность которого совпадает с \mathbf{d}_2 . Однако у нас может быть и более сложный случай, при котором вершина x смежна с одной или с несколькими вершинами z_j .

Выберем для определенности среди смежных с x вершин z_j вершину с наибольшим индексом j , а среди вершин y_i , не являющихся смежными с x , вершину с наибольшим индексом i . Если степени выбранных таким образом вершин z_j и y_i совпадают, то мы можем просто переставить эти вершины в степенной последовательности и свести задачу к уже разобранным вариантам. Поэтому предположим, что степень d_j вершины z_j строго меньше степени d_i вершины y_i (см. рис. 1.12(a)). Вершина y_i имеет по сравнению с z_j больше смежных с y_i вершин, так что среди этих вершин обязательно найдется вершина v , не смежная с z_j (см. вершины y_i и v , соединенные ребром $\{y_i, v\}$, помеченным штрихпунктирной линией на рис. 1.12(a)). Удалим тогда

ребра $\{y_i, v\}$ и $\{x, z_j\}$ и добавим к графу ребра $\{z_j, v\}$ и $\{x, y_i\}$ (рис. 1.12(b)). В результате получим граф \tilde{G}_1 с той же самой степенной последовательностью \mathbf{d}_1 , но у которого вершины x и y_i уже окажутся смежными. Продолжая эту процедуру до тех пор, пока у нас не останется вершин z_j , смежных с x , мы придем к ситуации, разобранный ранее.

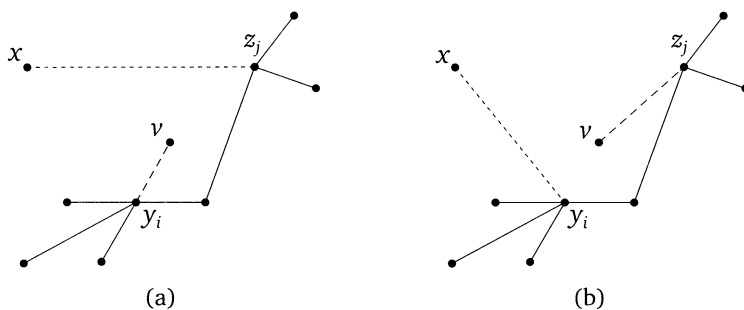


Рис. 1.12

Используя установленную взаимосвязь между графовыми последовательностями \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 , можно для любой упорядоченной по неубыванию последовательности \mathbf{d} предложить следующий алгоритм проверки \mathbf{d} на графовость. Удаляем из \mathbf{d} наибольший элемент d_1 и пытаемся уменьшить d_1 следующих элементов на единицу. Затем переупорядочиваем при необходимости полученную последовательность чисел. Если в результате мы получаем пустую последовательность, исходная последовательность \mathbf{d} является графовой. В противном случае мы на одном из шагов не сможем удалить очередной элемент из-за того, что нам не хватит для этого стоящих справа от d_1 чисел. В этом случае исходная последовательность \mathbf{d} графовой не является.

9. Графовыми являются последовательности под номерами 1, 2 и 3. Последовательность под номером 4 графовой не является.

10. Матрицы M_a смежности и M_i инцидентности изображенного на рис. 1.10(a) графа имеют следующий вид:

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Матрица M_a смежности орграфа D записывается так:

$$M_a(D) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Список смежности турнира, показанного на рис. 1.10(с), записывается так:

1 5, 4;
 2 1, 5;
 3 1, 2;
 4 2, 3;
 5 3, 4.

13. У матрицы \bar{M}_a , как и у матрицы M_a , на диагонали должны стоять нули. Остальные же элементы этой матрицы должны быть устроены так: там, где в матрице M_a смежности стоят единицы, у \bar{M}_a должны стоять нули и наоборот. Следовательно, \bar{M}_a можно записать следующим образом:

$$\bar{M}_a = I - E - M_a,$$

где I — матрица, все элементы которой равны единице, а E — единичная матрица.

14. У матрицы $M_i M_i^t$ на диагонали стоят элементы $a_{i,i}$, которые, по сути, представляют собой скалярное произведение i -й строки соответствующей матрицы на саму себя. В силу симметричности матрицы M_a тот же факт верен и для диагональных элементов матрицы M_a^2 . Но и в том и в другом случае скалярный квадрат i -й строки есть не что иное, как степень i -й вершины графа G . Действительно, количество единиц в любой i -й строке матрицы M_i , а также сумма чисел в i -й строке матрицы M_a совпадают с количеством смежных с i вершин в графе G .

В случае $i \neq j$ любой элемент матрицы $M_i M_j^t$ представляет собой скалярное произведение i -й и j -й строк матрицы M_i . Любое слагаемое этого скалярного произведения отлично от нуля тогда и только тогда, когда в графе G имеется ребро, соединяющее вершины i и j . Следовательно, такое скалярное произведение равно единице в случае, когда вершина i смежна с j в графе G , и нулю в противном случае, т. е. представляет собой, по сути, элемент $a_{i,j}$ матрицы смежности M_a графа G .

15. Так как каждое ребро мы можем сориентировать двумя различными способами, для графа G с t ребрами мы можем получить 2^m различных орграфов D .

16. Из вершины x с исходящей степенью $\text{outdeg}(x) = n - 1$ исходят ребра ко всем другим вершинам орграфа. Если бы в турнире была еще одна вершина y с исходящей степенью $\text{outdeg}(y) = n - 1$, то эти вершины были бы соединены между собой двумя противоположно ориентированными ребрами, что в турнире запрещено.

17. Разместим вершины равномерно по окружности и пометим эти вершины числами от 1 до n , $n = 2k + 1$, против часовой стрелки. Затем соединим каждую вершину x исходящими ребрами с ближайшими $(n - 1)/2$ вершинами, расположенными от x против часовой стрелки. В результате этой операции мы получим ровно $n(n - 1)/2$ ребер турнира, причем исходящая степень каждой вершины будет совпадать со входящей степенью этой вершины.

18. Так как в любом полном графе ровно $\binom{n}{2}$ ребер, равенство

$$\sum_{i=1}^n s_i = \binom{n}{2}$$

немедленно следует из равенства (1.3). Кроме того, любой набор вершин $\{x_1, \dots, x_k\}$, $k = 1, \dots, n - 1$, образует подтурнир в турнире T . Так как для каждой вершины x_i , $i = 1, \dots, k$, исходящая степень $\text{outdeg}(x_i)_k$ в подтурнире меньше или равна исходящей степени этой вершины в турнире T , получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^k s_i \geq \sum_{i=1}^k \text{outdeg}(x_i)_k = \binom{k}{2}.$$

§ 2. Маршруты, пути, циклы в графе. Связные графы и орграфы

1. Следующая важная группа понятий теории графов связана с обходом графа вдоль некоторой последовательности его вершин и ребер. В этой связи нам понадобятся такие понятия, как маршруты и пути в графе, а также некоторые другие связанные с ними характеристики графа.

а. Начнем с определения маршрута в мультиграфе G .

Определение 1. *Маршрутом* (walk) в графе G из вершины x_0 в вершину x_k называется чередующаяся последовательность

$$W := x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \dots, x_{k-1}, e_k, x_k$$

вершин $x_i \in V$ и ребер $e_i \in E$, соединяющих вершины x_{i-1} и x_i . И вершины, и ребра в такой последовательности могут повторяться. Количество ребер в маршруте W называется *длиной* k этого маршрута.

В случае простого графа любой маршрут W полностью определяется последовательностью

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k$$

вершин $x_i \in V(G)$, любые два последовательных элемента x_{i-1} , x_i которой являются смежными вершинами (т. е. соединены между собой ребром $e_i = \{x_{i-1}, x_i\} \in E(G)$).

Вершины x_0 и x_k часто называют начальной и конечной вершинами маршрута W , а остальные вершины — его внутренними вершинами. Говорят также, что вершины x_0 и x_k связаны маршрутом W , а сам маршрут называют x_0x_k -маршрутом.

Определение 2. Если все ребра e_1, \dots, e_k в маршруте различны, то такой маршрут называется *путем* (в английской литературе — trail) из вершины x_0 в вершину x_k . Если также и все вершины в данном пути различны, то такой путь называется *простым* (в английской литературе — path).

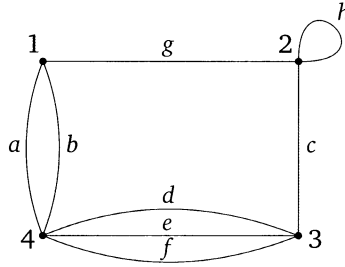


Рис. 1.13

В качестве примера рассмотрим разные маршруты в графе, показанном на рис. 1.13. Маршрут

$$1, a, 4, d, 3, e, 4, d, 3, c, 2, h, 2$$

путем не является — в нем повторяется ребро d . Маршрут

$$1, a, 4, d, 3, e, 4, f, 3, c, 2, h, 2$$

представляет собой путь (trail), который не является простым — в нем повторяются вершины 2, 3, 4. Наконец, маршрут

$$1, a, 4, e, 3, b, 2$$

является простым путем (path) из вершины 1 в вершину 2.

б. Понятие пути позволяет нам дать крайне важное определение связного графа.

Определение 3. Если вершины $x, y \in V$ графа G соединены хотя бы одним путем, то такие вершины называются *связанными*.

Несложно проверить, что связанность задает на множестве V вершин графа G отношение эквивалентности. Это отношение делит граф на классы эквивалентности, называемые *компонентами связности графа*.

Определение 4. В случае, когда в графе G существует лишь одна компонента связности, т. е. в случае, когда любые две вершины x, y графа соединены хотя бы одним путем, граф называется *связным*. В противном случае граф называется *несвязным*.

с. Перейдем теперь к понятиям, характеризующим метрические свойства графа.

Определение 5. Расстоянием $d(x, y)$ между двумя связанными вершинами $x, y \in V(G)$ называется длина наименьшего пути между ними.

Понятно, что такой путь обязательно является простым. В случае, когда вершины не являются связанными, полагают по определению, что $d(x, y) = \infty$.

Определение 6. *Диаметром* графа называется максимальное расстояние между его вершинами:

$$\text{diam}(G) := \max_{x, y \in V(G)} d(x, y).$$

В случае несвязного графа считается, что $\text{diam}(G) = \infty$.

Определение 7. *Эксцентриситетом* $\varepsilon(x)$ вершины $x \in V(G)$ называется максимальное расстояние от x до любой другой вершины графа G :

$$\varepsilon(x) := \max_{y \in V(G)} d(x, y).$$

Определение 8. *Радиусом* $r(G)$ графа G называется минимальный из эксцентриситетов вершин графа G . Вершины, на которых этот минимум достигается, называются *центральными вершинами* графа G . Множество всех центральных вершин называется *центром* графа.

Некоторые несложные факты, связанные с введенными выше понятиями, приведены в упражнениях 13 и 14.

d. Следующая серия определений связана с замкнутыми маршрутами в графах, т. е. маршрутами, в которых начальная вершина x_0 и конечная вершина x_k совпадают.

Определение 9. *Замкнутым путем* (closed trail) или *составным циклом* (circuit) в графе G называется путь, в котором $x_0 = x_k$. Путь, в котором совпадают только начальная и конечная вершины, называется *простым циклом* (cycle). Часто слово «простой» опускают, понимая под циклом замкнутый простой путь.

Так, в графе G , показанном на рис. 1.13, путь $1, a, 4, e, 3, d, 4, b, 1$ является составным циклом, а путь вида $1, a, 4, e, 3, c, 2, g, 1$ — простым циклом. Замкнутый маршрут вида $1, a, 4, e, 3, e, 4, b, 1$ составным циклом не является — в нем повторяется ребро e . В простом графе невозможны циклы длины меньше 3. Циклы длины 3 часто называются треугольниками. Графы, в которых такие циклы отсутствуют, называются графами, свободными от треугольников (triangle-free graphs).

Определение 10. *Обхватом* графа (girth) называется длина наименьшего цикла в нем. Если в графе циклы отсутствуют, то обхват такого графа считают равным бесконечности.

С учетом данного определения простые графы, свободные от треугольников, — это графы, обхват которых больше 3.

В случае мультиграфов возможны и циклы длины 2, и циклы длины 1. Циклы длины 2 — это циклы типа $3, d, 4, e, 3$ на рис. 1.13, появляющиеся при обходе двух ребер одного и того же мультиребра. Циклы длины 1 — это петли графа G . Так, петлю h на рис. 1.13 можно рассматривать как цикл $2, h, 2$ длины 1.

Изолированная вершина по определению является замкнутым путем длины 0, однако циклом она не является.

е. В предыдущем параграфе мы ввели важный подкласс простых графов — так называемые двудольные графы $G[X, Y]$. Оказывается, такие графы допускают характеристику в терминах циклов.

Теорема 11 (Кёниг). *Граф G является двудольным тогда и только тогда, когда в нем отсутствуют циклы нечетной длины (так называемые нечетные циклы).*

Доказательство. То, что в любом двудольном графе нечетные циклы отсутствуют, достаточно очевидно. Действительно, для того чтобы, выйдя из произвольной вершины x блока X , затем в нее же и вернуться, нам необходимо сделать четное число шагов. Следовательно, любой цикл в двудольном графе $G[X, Y]$ обязан иметь четную длину.

Предположим теперь, что в графе G циклы нечетной длины отсутствуют. Сразу заметим, что при доказательстве нам достаточно ограничиться связными графами — любой несвязный граф является двудольным тогда и только тогда, когда двудольной является любая из его компонент связности. Кроме того, мы можем считать, что граф G построен на $n > 1$ вершинах, — в случае $n = 1$ граф $G = K_1$ по определению является двудольным.

Выберем в G произвольную вершину $x \in V(G)$ и разобьем множество $V(G)$ вершин на два блока. К блоку Y отнесем все вершины $y \in V(G)$, для которых длина кратчайшего пути из x в y нечетна, а к блоку X отнесем все оставшиеся вершины. В частности, сама вершина x принадлежит блоку X , а все смежные с ней вершины принадлежат подмножеству Y . Докажем, что любые две вершины x_p, x_q из подмножества X смежными не являются (рис. 1.14).

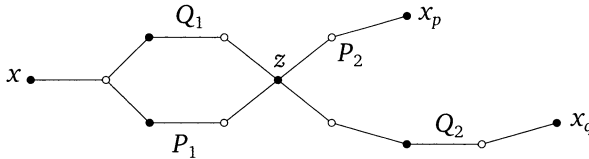


Рис. 1.14

Рассмотрим для этого произвольные кратчайшие пути P и Q , соединяющие эти вершины с вершиной x . Обозначим через $z \in V(G)$ последнюю общую вершину этих путей. Вершина z разделяет пути P и Q на два подпути — участки P_1 и Q_1 этих путей от x до вершины z , а также подпути P_2 и Q_2 , соединяющие z с вершинами x_p и x_q соответственно. Сразу заметим, что длины путей P_1 и Q_1 обязаны совпадать — в противном случае мы могли бы сократить путь от x до одной из двух вершин x_p, x_q , что невозможно. Кроме того, так как x_p и x_q принадлежат блоку X , длины путей P и Q имеют одинаковую четность. Как следствие, одинаковую четность имеют и участки P_2 и Q_2 путей P и Q . Кроме того, P_2 и Q_2 не имеют никаких других общих вершин, помимо z . Добавление к ним ребра $e = \{x_p, x_q\}$ приводит к образованию в G цикла нечетной длины, чего быть не может.

Аналогично доказывается, что и любые две вершины $y_p, y_q \in Y$ смежными не являются. Следовательно, граф G является двудольным. \square

Замечание 12. Идея, описанная при доказательстве теоремы 11, используется для построения довольно элементарного алгоритма проверки графа на двудольность, основанного на поиске в ширину (см. первый параграф второй главы). Именно, выберем произвольную вершину x графа G и окрасим ее в черный цвет. Затем запустим из этой вершины поиск в ширину и начнем оставшиеся вершины окрашивать в два цвета (черный или белый) в зависимости от четности расстояния от этих вершин до вершины x . В случае, если из какой-то вершины x' имеется ребро в уже окрашенную вершину x'' , нам следует проверить, что эти две вершины окрашены в разные цвета. Если это не так, граф двудольным не является. Если же в процессе работы алгоритма конфликтов не возникнет, граф является двудольным. Более формальное описание данного алгоритма, равно как и его реализацию на языке C++, можно посмотреть, например, в книге [27].

2. Рассмотрим теперь понятие связности в ориентированном графе D .

а. Заметим, прежде всего, что понятия маршрута, пути, простого пути и цикла достаточно естественно переносятся на ориентированные графы. В качестве примера рассмотрим ориентированный граф D , показанный на рис. 1.15(a). В таком графе последовательность

$$(1, 2, 4, 1, 2, 3)$$

задает нам маршрут из вершины 1 в вершину 3.

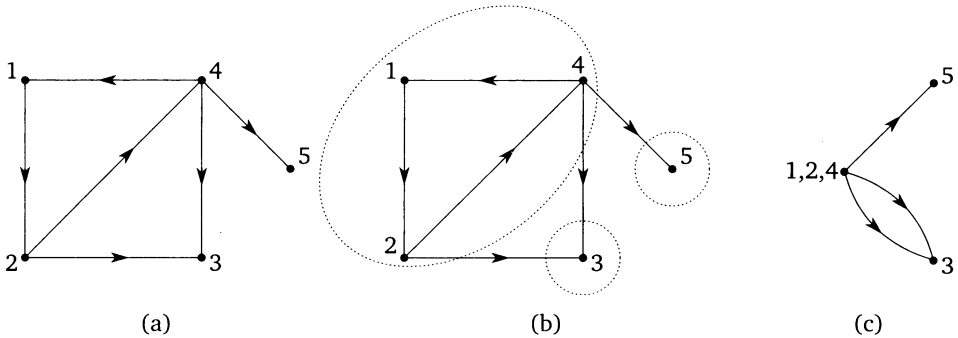


Рис. 1.15. (a) Орграф D ; (b) компоненты орграфа D ; (c) граф $C(D)$

б. Теперь мы можем перейти к определению понятия связанных вершин в орграфе.

Определение 13. Вершины x и y орграфа D называются *связанными*, если в D существует хотя бы один путь из вершины x в вершину y , а также хотя бы один путь из вершины y в вершину x .

Вернемся к орграфу D на рис. 1.15(a). В таком графе вершины 1 и 4 связаны между собой — мы можем пройти из вершины 4 в вершину 1 по ребру $(4, 1)$, а также из вершины 1 в вершину 4 по простому пути $(1, 2, 4)$. Вершины

же 1 и 3 связанными между собой не являются — из вершины 1 в вершину 3 путь существует, однако из вершины 3 в вершину 1 добраться невозможно.

с. Как и в случае неориентированных графов, в случае орграфов отношение связности является отношением эквивалентности. Как всякое отношение эквивалентности, оно разбивает множество $V(D)$ вершин орграфа D на классы эквивалентности, называемые *компонентами сильной связности* орграфа D .

В качестве примера рассмотрим орграф, показанный на рис. 1.15(a). Множество вершин такого орграфа разбивается отношением связности на три блока — блок, состоящий из вершин 1, 2, 4, блок, состоящий из единственной вершины 3, а также блок, состоящий из единственной вершины 5 (рис. 1.15(b)).

Определение 14. Орграф D называется *сильно связным*, если он состоит из единственной компоненты сильной связности, т. е. если любые две его вершины являются связанными.

Иногда наряду с этим понятием для орграфа вводят понятие слабой связности.

Определение 15. Орграф D называется *слабо связным*, если соответствующий ему неориентированный граф G , получающийся заменой всех ориентированных ребер на неориентированные, является связным.

Показанный на рис. 1.15(a) орграф D является примером слабо связного орграфа, не являющегося сильно связным.

d. Вернемся к отношению связности в орграфе, разбивающему множество $V(D)$ вершин орграфа D на классы эквивалентности — компоненты сильной связности. Когда мы рассматривали отношение связности в неориентированном графе G , мы говорили, что между компонентами связности такого графа ребра отсутствуют. В случае ориентированного графа это не так (см., например, рис. 1.15(a)) — в орграфе такие ребра могут существовать, однако направлены все они будут лишь в одну сторону, от одной компоненты связности к другой.

Именно, справедливо следующее достаточно очевидное утверждение.

Лемма 16. Пусть H_1, H_2 — две различные компоненты сильной связности графа D , и пусть существует ребро $e \in E(D)$ из H_1 в H_2 . Тогда ребра из H_2 в H_1 отсутствуют.

Доказательство. Действительно, если бы ребро из H_2 в H_1 присутствовало в D , то любые две вершины в множестве $H_1 \cup H_2$ вершин оказались бы связанными. Но тогда объединение $H_1 \cup H_2$ представляло бы собой компоненту сильной связности графа D , что невозможно — мы изначально предполагали, что H_1 и H_2 представляют собой две различные компоненты сильной связности. \square

е. По любому орграфу D можно построить так называемый граф $C(D)$ компонент сильной связности графа D , вершинами которого будут компоненты

сильной связности графа D , а ребрами — ребра графа D , направленные из одной компоненты сильной связности D к другой (рис. 1.15(с)). Основное свойство такого орграфа $C(D)$ состоит в том, что в таком графе нет циклов.

Теорема 17. *В орграфе $C(D)$ циклы отсутствуют, т. е. он, как еще говорят, представляет собой ациклический орграф (DAG — directed acyclic graph).*

Доказательство. Если бы в таком графе существовал цикл вида $H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow \dots \rightarrow H_n \rightarrow H_1$, то любые две вершины в объединении $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n$ оказались бы связанными. Действительно, внутри каждой компоненты H_i мы по определению сильной связности можем попасть из любой вершины в любую вершину H_i . Вершины же из разных компонент H_i и H_j мы также можем всегда связать с помощью пути, идущего из H_i в H_j , а также пути, соединяющего компоненты H_j и H_i . \square

f. Ориентированные ациклические графы достаточно часто встречаются в практических приложениях. В качестве характерного примера можно рассмотреть орграф D , моделирующий порядок изложения материала в учебнике или онлайн-курсе. Любой параграф (урок) можно изображать вершиной орграфа D . Ребро между вершинами x и y в D проводится в случае, если соответствующий вершине x параграф является пререквизитом к параграфу, моделируемому вершиной y , т. е. в случае, когда для изучения материала, изложенного в параграфе y , необходим материал, изложенный в параграфе x . Довольно очевидно, что в таком орграфе D циклов быть не должно — в противном случае параграф x ссылался бы на параграф y и наоборот и было бы не очень понятно, как изучать подобным образом организованный материал.

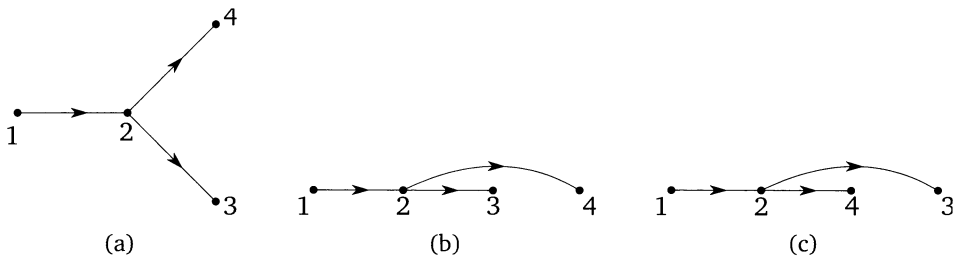


Рис. 1.16. Различные способы топологической сортировки вершин ациклического орграфа

Теперь предположим, что мы хотим организовать учебный курс, основанный на данном учебнике. Первый вопрос, который при этом возникает, — это в каком порядке рассказывать изложенный в нем материал. В простейшем случае в учебнике информация подается линейно — за первым параграфом излагается второй, за вторым — третий и так далее. Такого рода учебник моделируется простым ориентированным путем P , и проблем с организацией курса по этому учебнику не возникает. Однако в более сложно устроенных учебниках могут встречаться параграфы, которые можно проходить

в различном порядке. Так, в учебнике, модель подачи материала в котором описывается орграфом D , показанным на рис. 1.16(a), материал первых двух параграфов излагается линейно. Затем в книге идут два параграфа, не зависящие друг от друга. Как следствие, у лектора, использующего такой учебник в своем учебном процессе, возникает дилемма — он может либо рассказывать вначале материал параграфа 3, а затем — материал, изложенный в параграфе 4 (рис. 1.16(b)), либо начать с параграфа 4 и закончить параграфом 3 (рис. 1.16(c)).

С точки зрения теории графов тот или иной способ линейного упорядочивания вершин ациклического орграфа носит название *топологической сортировки* его вершин. Топологическая сортировка называется *правильной*, если после сортировки все ребра направлены слева направо. Иными словами, вершины орграфа отсортированы правильно в случае, если для любого ребра (x, y) вершина x имеет более ранний номер в линейном порядке по сравнению с номером, присвоенным вершине y . Как мы с вами видели на примере орграфа, показанного на рис. 1.16, для одного и того же орграфа в общем случае существует довольно много различных способов правильно отсортировать его вершины.

На практике топологическую сортировку вершин ациклического орграфа проводят с помощью поиска в глубину (см. первый параграф второй главы). Такого рода алгоритм имеет линейное по количеству вершин в графе время работы.

Упражнения

1 (0,5 балла). Докажите или опровергните следующее утверждение: если любая вершина графа имеет степень 2, то граф G является циклом.

2 (0,5 балла). В графе G , показанном на рис. 1.17, найдите цикл длины 7, замкнутый путь той же длины, не являющийся циклом, а также замкнутый маршрут длины 7, не являющийся замкнутым путем.

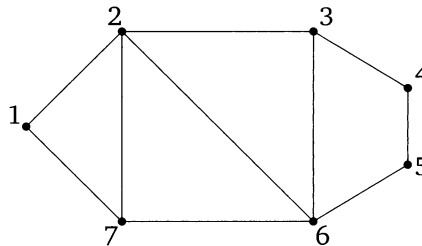


Рис. 1.17

3 (1 балл). Пусть в графе G ровно две вершины имеют нечетную степень. Докажите, что эти вершины являются связанными.

4 (1 балл). Пусть G — граф, построенный на вершинах $1, \dots, 15$, в котором вершины i и j смежны тогда и только тогда, когда их наибольший общий делитель больше единицы. Подсчитайте количество связных компонент та-

кого графа, а также определить максимальную длину простого пути (path) в графе G .

5 (1 балл). Пусть G — регулярный простой связный граф, имеющий 22 ребра. Сколько вершин может содержать данный граф?

6 (1 балл). Докажите, что любой маршрут, соединяющий вершины x и y , содержит простой путь, соединяющий те же самые вершины.

7 (1 балл). Докажите или опровергните следующее утверждение: замкнутый маршрут нечетной длины обязательно содержит цикл. А что будет в случае замкнутого маршрута четной длины?

8 (1,5 балла). Докажите или опровергните следующее утверждение: объединение двух различных маршрутов, соединяющих две вершины, содержит цикл.

9 (1 балл). Докажите или опровергните следующее утверждение: объединение двух различных простых путей, соединяющих две вершины, содержит цикл.

10 (1,5 балла). Докажите, что в связном графе два максимальных простых пути имеют общую вершину.

11 (1 балл). Докажите, что простой граф G , минимальная степень $\delta(G)$ которого больше или равна $n/2$, является связным. Покажите, что эта оценка точная, предъявив несвязный граф, для которого $\delta(G) = n/2 - 1$.

12 (1 балл). Докажите, что в любом графе G расстояние $d(x, y)$ между вершинами удовлетворяет неравенству треугольника

$$d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, y) \quad \forall x, y, z \in V(G).$$

13 (1 балл). Докажите, что радиус и диаметр графа связаны следующим образом:

$$r(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Приведите примеры графов, на которых оба неравенства достигаются.

14 (1,5 балла). Пусть G — произвольный простой несвязный граф. Докажите, что его дополнение \bar{G} всегда является связным графом. Чему равен диаметр графа \bar{G} ?

15 (1,5 балла). Докажите, что в простом графе с обхватом, большим или равным $2k$, диаметр больше или равен k .

16 (2 балла). В первом параграфе мы в качестве примера 3-регулярного графа привели граф Петерсена (см. рис. 1.18(a)). Формальное определение этого графа таково: граф Петерсена — это простой граф, 10 вершин которого занумерованы всеми возможными двухэлементными подмножествами десятиэлементного множества, а ребра соединяют только те вершины, соответствующие двухэлементные подмножества которых не пересекаются (см. рис. 1.18(b)). Исследуйте структуру графа Петерсена исходя из этого определения, доказав при этом граф следующие факты.

1. Граф Петерсена действительно является 3-регулярным графом.

2. Любые две несмежные вершины в графе Петерсена имеют в точности одну соседнюю с ними вершину.

3. Обхват графа Петерсена равен 5.

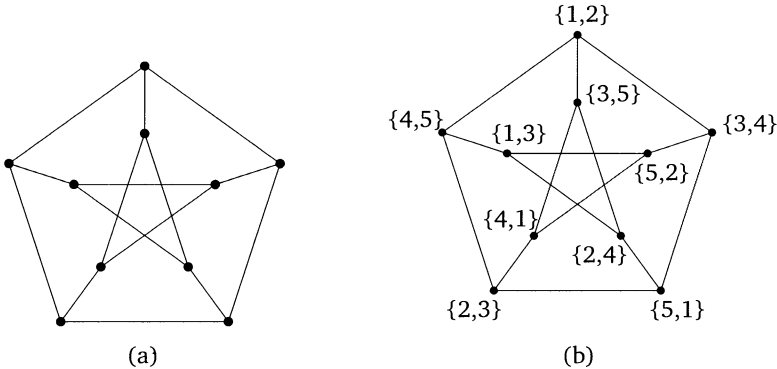


Рис. 1.18

17 (0,5 балла). Турнир T называется транзитивным, если из условий $(x, y) \in E(T)$ и $(y, z) \in E(T)$ следует, что $(x, z) \in E(T)$. Докажите, что турнир T является транзитивным тогда и только тогда, когда он ациклический.

18 (0,5 балла). Докажите, что любой турнир, не являющийся транзитивным, содержит ориентированный цикл длины 3.

19 (0,5 балла). Докажите, что любой орграф $C(T)$ компонент сильной связности произвольного турнира T является транзитивным турниром.

Дополнительные упражнения

20 (1,5 балла). Пусть G — граф, вершины которого помечены битовыми строками длины $k \geq 1$. Вершины x и y в таком графе являются смежными тогда и только тогда, когда соответствующие им битовые строки отличаются ровно в двух позициях. Определите количество связных компонент в таком графе.

21 (1,5 балла). Для графа G , построенного на восьми вершинах, известно, что все его вершины имеют степень, меньшую или равную k . Известно также, что между любой парой вершин графа существует путь длины 1 или 2. При каком минимальном значении k это возможно?

22 (2 балла). Минимальная степень вершины в графе G , построенном на восьми вершинах, равна 4. Докажите, что любые две вершины в таком графе G либо являются смежными, либо соединены путем длины 2.

23 (2 балла). Сколько ребер должен иметь простой граф на n вершинах, чтобы он гарантированно был связным?

24 (2,5 балла). Какое максимальное количество ребер может быть в простом слабо связном ориентированном графе на n вершинах, не являющемся сильно связным?

25 (2,5 балла). Докажите, что простой граф G , построенный на 10 вершинах и имеющий 28 ребер, содержит цикл длины 4.

26 (1,5 балла). Докажите, что в простом графе с $\Delta = n - 2$ и диаметром 2 количество ребер $m \geq 2n - 4$.

27 (2 балла). Пусть G — простой граф, диаметр которого $\text{diam}(G) \geq 3$. Докажите, что его дополнение \bar{G} имеет диаметр $\text{diam}(\bar{G}) \leq 3$.

28 (2,5 балла). Пусть G — простой граф, диаметр которого $\text{diam}(G) > 3$. Докажите, что его дополнение \bar{G} имеет диаметр $\text{diam}(\bar{G}) < 3$. Выведите отсюда, что любой самодополненный граф G (т. е. граф, изоморфный своему дополнению \bar{G}) имеет диаметр $\text{diam}(G) \leq 3$. Для каждого $k = 0, 1, 2, 3$ приведите пример самодополненного графа, имеющего данный диаметр, в случае, если таковой существует.

29 (2 балла). Докажите, что в k -регулярном графе, обхват которого равен 4, количество n вершин больше или равно $2k$.

30 (2 балла). Пусть G — граф с обхватом $g(G) \geq 5$ и минимальной степенью вершины $\delta \geq k$. Докажите, что в нем по меньшей мере $k^2 + 1$ вершин. Для случая $k = 2$ предъявите граф, имеющий в точности $k^2 + 1$ вершин.

31 (1,5 балла). Обычно в курятнике петухи пытаются установить некоторый порядок. Делают они это, пытаясь заклевать конкурентов. При этом отношение «заклевать» является асимметричным — если один из петухов заклевал второго, то второй клевать первого уже обычно не пытается. Это отношение в общем случае не транзитивно — возможна ситуация, когда первый петух заклевал второго, второй — третьего, а третий — первого. Несмотря на это, некоторую иерархию среди петухов все же установить возможно. Именно, мы будем называть королем курятника любого петуха, который либо сам заклевал других петухов, либо заклевал петухов, которые заклевали тех, кто заклевал его самого. На языке теории графов королю курятника отвечает вершина x в турнире T , расстояние от которой до любой другой вершины y турнира меньше или равно двум. Докажите, что королю курятника (т. е. такой вершине x , что $d(x, y) \leq 2$ для любой вершины $y \neq x$) отвечает любая вершина этого турнира с максимальной исходящей степенью.

Решение упражнений

1. Нет, это не так: если граф G состоит из нескольких связных компонент, каждая из которых представляет собой цикл, то сам граф G циклом не является.

2. Циклом длины 7 в показанном на рис. 1.17 графе G является, например, замкнутый путь вида 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Замкнутый путь той же длины — это, например, путь вида 2, 7, 6, 3, 4, 5, 6, 2. Так как в таком пути повторяется вершина 6, такой путь циклом не является. Наконец, замкнутый маршрут длины 7 вида 2, 6, 3, 4, 5, 6, 3, 2 замкнутым путем не является — в нем повторяется ребро $\{6, 3\}$.

3. Обозначим через x и y вершины, имеющие нечетную степень. Пусть вершина x принадлежит компоненте связности V_1 графа G , а вершина y ей не принадлежит. Тогда подграф, индуцированный множеством V_1 , содержит единственную вершину нечетной степени, что невозможно.

4. В графе G вершины 1, 11 и 13 являются изолированными, а остальные вершины являются связанными. Путь вида 7, 14, 10, 5, 15, 3, 9, 6, 12, 4, 8, 2 является простым путем максимальной длины, равной 11.

5. В случае регулярного графа все вершины имеют одинаковую степень, равную d . Из теоремы 4 следует, что в таком графе степень d , умноженная на количество n вершин в графе, равна удвоенному количеству ребер в графе, т. е. $d \cdot n = 44$. Иными словами, d — делитель числа 44, т. е. принадлежит множеству чисел $\{1, 2, 4, 11, 22, 44\}$. С другой стороны, d не может превосходить величины $n - 1$. Как следствие, множество возможных значений d сужается и равно $\{1, 2, 4\}$. Случаи $d = 2$ и $d = 4$ возможны: первый случай отвечает простому циклу C , построенному на 22 вершинах, а второй отвечает графу, построенному на цикле C_{11} , каждая вершина которого соединена двумя дополнительными ребрами с вершинами, расположенными через одну вершину от нее (рис. 1.19). Случай же $d = 1$ отвечает 22 парам вершин, каждая из которых соединена ребром. Такой граф связным уже не является.

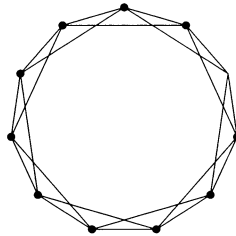


Рис. 1.19

6. Пусть в графе G имеется маршрут, соединяющий две вершины x и y . Тогда в нем могут существовать и другие маршруты, соединяющие эти вершины. Выберем среди них маршрут минимальной длины. Утверждается, что такой маршрут обязательно является простым путем, соединяющим эти вершины.

Действительно, предположим противное, т. е. предположим, что существует вершина z , которая встречается на пути из x в y более одного раза. В этом случае мы можем участок от первой встречи с вершиной z до второй из данного маршрута удалить и тем самым уменьшить его длину, что невозможно.

7. Для случая замкнутого маршрута нечетной длины это утверждение верно. Действительно, рассмотрим в таком маршруте вершину x , повторяющуюся хотя бы два раза. Эта вершина делит исходный замкнутый маршрут на два замкнутых подмаршрута, один из которых обязательно имеет нечетную длину. Повторяя процесс для подциклов нечетной длины, мы получим в конце концов цикл нечетной длины.

В случае замкнутого маршрута четной длины это утверждение неверно. В качестве контрпримера мы можем рассмотреть произвольное ребро $\{x, y\}$ в графе G . Замкнутый маршрут четной длины вида $\{x, y, x\}$ циклом не является.

8. Данное утверждение неверно. Опровергают это утверждение, к примеру, следующие два маршрута в простом графе G :

$$M_1 = x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n \quad \text{и} \quad M_2 = x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n.$$

9. Данное утверждение верно. Для доказательства достаточно идти вдоль первого пути до первой точки пересечения со вторым путем, а затем вернуться обратно в начальную точку по второму пути. Пройденный путь будет тогда искомым простым циклом.

10. Предположим обратное, а именно, что у нас существуют два пути максимальной длины P_1 и P_2 , которые не пересекаются друг с другом. Рассмотрим множество S вершин пути P_1 и множество T вершин пути P_2 . Среди всех путей, соединяющих S и T , выберем путь P наименьшей длины. Такой путь имеет лишь одну общую вершину x с P_1 и лишь одну общую вершину y с P_2 . Теперь построим из участков путей P_1 и P_2 , а также из пути P путь, по длине превосходящий и P_1 , и P_2 . Получим противоречие.

11. Рассмотрим две произвольные вершины в графе G . Если они не связаны ребром, то из каждой из них исходят по крайней мере $n/2$ ребер. Приходят же они в $n - 2$ вершины. Как следствие, обязательно найдется по меньшей мере одна вершина, которая соединена ребрами с обеими этими вершинами.

Можно тот же факт доказать от противного. Предположим, что граф несвязен. Тогда он состоит по меньшей мере из двух компонент, причем в одной из них количество вершин меньше или равно $n/2$. Но в такой компоненте $\delta < n/2$, а это противоречит исходному предположению.

В качестве несвязного графа, для которого $\delta(G) = n/2 - 1$, можно взять два экземпляра ребра K_2 для случая $n = 4$.

12. Данное неравенство достаточно очевидно. Действительно, $d(x, y)$ представляет собой длину кратчайшего пути между вершинами x и y , тогда как $d(x, z) + d(z, y)$ подсчитывает длину пути между теми же вершинами, который проходит через вершину z . Длина такого пути по определению не превосходит $d(x, y)$.

13. Так как диаметр есть наибольшее расстояние между вершинами в графе, а радиус — какое-то расстояние, справедливо неравенство $\text{diam}(G) \geq r(G)$. Для доказательства второго неравенства рассмотрим одну из центральных вершин $z \in V(G)$ графа G . Диаметр графа соединяет какие-то вершины x и y в графе. Согласно неравенству треугольника

$$\text{diam}(G) = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq r(G) + r(G) = 2r(G).$$

В полном графе K_n имеем $\text{diam}(K_n) = r(K_n) = 1$. В цепочке из $2n + 1$ вершины диаметр в точности равен двум радиусам графа.

14. Рассмотрим две произвольные пары вершин x и y в графе G . Если эти две вершины несмежны, то в графе \bar{G} они соединены ребром. Теперь предположим, что они смежны в G . Так как граф G несвязный, в G обязательно найдется хотя бы одна вершина z , не принадлежащая компоненте связности графа G , в которой лежат вершины x и y . В графе \bar{G} вершины z и x , а также вершины z и y связаны ребром. Следовательно, в графе \bar{G} эти две вершины связаны путем длины 2. Отсюда, в частности, следует, что диаметр любого такого графа G строго меньше чем 3.

15. Если в графе G длина минимального цикла C больше или равна $2k$, то в таком графе расстояние между любыми двумя диаметральными противо-

положными вершинами x и y этого цикла C обязано быть больше или равно k — в противном случае путь минимальной длины между x и y вместе с одной из двух половин цикла C , соединяющих x и y , образовывал бы в G цикл, длина которого меньше чем $2k$.

16. Докажем последовательно описанные в задании свойства графа Петерсена G .

1. Для любого двухэлементного подмножества пятиэлементного множества имеется $\binom{3}{2} = 3$ способа выбрать из трех оставшихся элементов двухэлементные подмножества. Как следствие, любая вершина графа G имеет ровно три соседа.

2. Любые две несмежные вершины в графе G имеют непустое пересечение помечающих их двухэлементных подмножеств. Это пересечение может состоять только лишь из одного элемента. Иными словами, любые две несмежные вершины обязаны иметь один общий элемент в их пометке. Как следствие, объединение множеств их пометок состоит из трех элементов. Дополнение же этого множества до пятиэлементного множества определяется однозначно. Это дополнение как раз и отвечает единственной вершине, смежной с двумя выбранными ранее вершинами.

3. Так как граф Петерсена простой, циклы длины 1 и 2 в нем отсутствуют. Цикл из трех элементов в графе Петерсена также отсутствует — наличие такого цикла требует, чтобы в G нашлись три попарно различных двухэлементных множества, что невозможно в случае, когда они все выбираются из пятиэлементного множества. Наличие 4-цикла в отсутствии в G 3-циклов требует, чтобы в G нашлась пара несмежных между собой вершин, у которых имеются по крайней мере две общие смежные для них вершины, что в графе Петерсена невозможно согласно предыдущему пункту. Наконец, вершины $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5\}$, $\{1, 2\}$ образуют в G цикл, состоящий из пяти вершин.

17. Пусть T является ациклическим графом. Предположим, что $(x, y) \in E(T)$ и $(x, z) \in E(T)$. Так как граф T ациклический, $(z, x) \notin E(T)$. Но так как T есть ориентированный полный граф, в T должно существовать ребро между x и z , а именно ребро (x, z) .

Обратно, пусть в T содержится цикл $C_k = (x_1, \dots, x_k, x_1)$. Так как турнир T транзитивен, из условий $(x_1, x_2) \in E(T)$ и $(x_2, x_3) \in E(T)$ следует, что $(x_1, x_3) \in E(T)$. Продолжая далее, мы получим, что $(x_1, x_k) \in E(T)$, что невозможно, так как $(x_k, x_1) \in E(T)$.

18. По определению турнир является транзитивным, если для любой тройки вершин x, y, z из того, что x и y соединены ребром, а также y и z соединены ребром, следует, что x соединено ребром с z . Если турнир транзитивным не является, то существует хотя бы одна тройка вершин, для которой описанное выше условие не выполняется. А это и означает, что в турнире существует ориентированный цикл длины 3.

19. Так как любая пара вершин в турнире T связана между собой ребром, тот же факт имеет место и для компонент сильной связности ориентированного графа $C(T)$. Следовательно, $C(T)$ является турниром. Так как этот орграф ациклический, $C(T)$ является транзитивным турниром.

§ 3. Подграф графа G . Основные операции над графами

1. Вернемся к основным определениям теории графов и введем очень важное понятие подграфа графа G . Заодно мы введем две основные операции над графами — операцию удаления ребра и операцию удаления вершины в графе G .

а. Начнем с формального определения подграфа H графа G .

Определение 1. Подграфом графа G называется граф H , для которого выполнены следующие три условия:

- (1) $V(H) \subseteq V(G)$;
- (2) $E(H) \subseteq E(G)$;
- (3) любое ребро $e \in E(H)$, соединяющее пару вершин x и y в H , должно соединять ту же самую пару вершин в графе G .

По отношению к графу H граф G иногда называют *надграфом* или *суперграфом*.

Первые два условия, данные в определении подграфа, более или менее очевидны. Третье же условие требует некоторых комментариев. Рассмотрим в качестве первого примера знакомый нам граф G (рис. 1.20(a)), а также граф H , показанный на рис. 1.20(b). У обоих этих графов множества вершин совпадают. Кроме того, множество $E(H)$ ребер графа H представляет собой подмножество множества $E(G)$ ребер графа G (в графе H ребро b отсутствует). Наконец, любое ребро, соединяющее вершины в графе H (например, ребро $g \in E(H)$), соединяет те же самые две вершины и в графе G (например, ребро g соединяет и в H , и в G одну и ту же пару вершин — вершины 1 и 2). Как следствие, граф H является подграфом графа G .

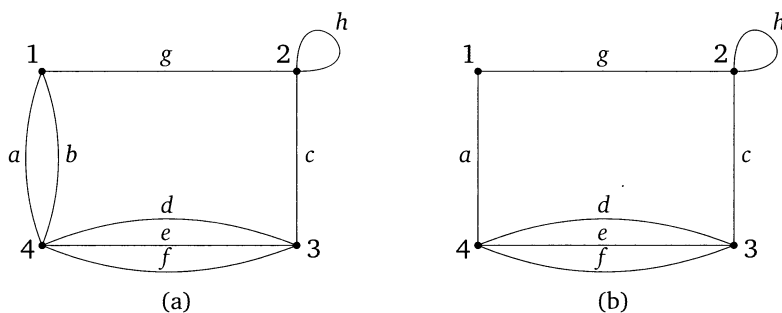


Рис. 1.20. (а) Граф G ; (б) подграф H графа G

Давайте теперь посмотрим на графы G и H' , показанные на рис. 1.21. Множества $V(G)$ и $V(H')$ у таких графов по-прежнему совпадают, множество $E(H')$ является подмножеством множества $E(G)$ ребер графа G . Однако у графа H' ребро e соединяет вершины 1 и 4, тогда как в графе G это же ребро

соединяет вершины 3 и 4. Как следствие, условие 3 определения подграфа для H' нарушается, так что H' подграфом графа G не является.

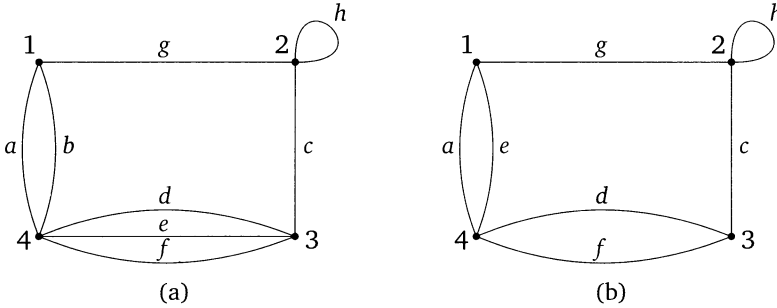


Рис. 1.21. (а) Граф G ; (б) граф H' , не являющийся подграфом графа G

б. Данное выше определение можно сделать несколько более конструктивным, если ввести две основные операции над графами — операцию удаления ребра и операцию удаления вершины. Оказывается, любой подграф H графа G — это граф, полученный из исходного графа G с помощью этих двух операций.

Начнем с более простой операции удаления ребра e . При такой операции множество вершин графа G не меняется, а из множества ребер удаляется элемент $e \in E(G)$. Полученный в результате этой операции граф обозначается $G - e$. Очевидно, что он является подграфом графа G . Действительно, в этом случае $V(H) = V(G)$, и $E(H) \subset E(G)$. Кроме того, так как никакие другие ребра графа G мы в процессе удаления ребра e не трогали, то в этом случае условие 3 определения подграфа у нас выполняется автоматически. Так, в приведенном на рис. 1.20 примере мы в графе G удалили ребро b , соединяющее вершины 1 и 4, и получили подграф $H = G - b$.

В более общем случае мы таким образом можем удалить сразу несколько ребер, принадлежащих некоторому подмножеству S множества $E(G)$ ребер графа G . Полученный в результате этих операций подграф H обозначается $G - S$.

Перейдем теперь к чуть более сложной операции удаления вершины. Предположим, что мы хотим удалить в графе G вершину x . Если эта вершина является изолированной, то нам ничего больше делать не нужно. Если же этой вершине инцидентны какие-то ребра, то мы обязаны будем также вместе с вершиной x удалить и их. Действительно, ранее эти ребра вели в вершину x . Вести в никуда ребра не могут, так что нам вместе с вершиной x приходится удалять и все ребра, инцидентные данной вершине. Так, в показанном на рис. 1.22(а) примере мы удалили в графе G вершину 1. Вместе с ней мы вынуждены были удалить и все три инцидентных ей ребра a, b, g .

Полученный в результате удаления вершины x граф обозначается обычно $G - x$. Очевидно, что граф $H = G - x$ также является подграфом исходного графа G . Действительно, в этом случае $V(H) \subset V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, а третья

условие в определении подграфа у нас вновь выполняется автоматически — мы вновь ничего не делали с оставшимися ребрами графа G в процессе удаления вершины x .

В более общем случае $S \in V(G)$ мы с помощью операции удаления вершин из подмножества S получаем подграф $G - S$, в котором по сравнению с исходным графом G удалены все вершины подмножества S вместе со всеми ребрами, инцидентными этим вершинам.

Теперь рассмотрим граф H , полученный из графа G последовательным выполнением двух операций — операции удаления вершины и операции удаления ребра (см. рис. 1.22(b)). Так как для каждой операции условие 3 в определении подграфа выполняется автоматически, мы тем самым получаем, что граф H является подграфом графа G . Иными словами, мы получаем конструктивное определение подграфа H графа G как графа, полученного из G удалением некоторого количества вершин и/или ребер.

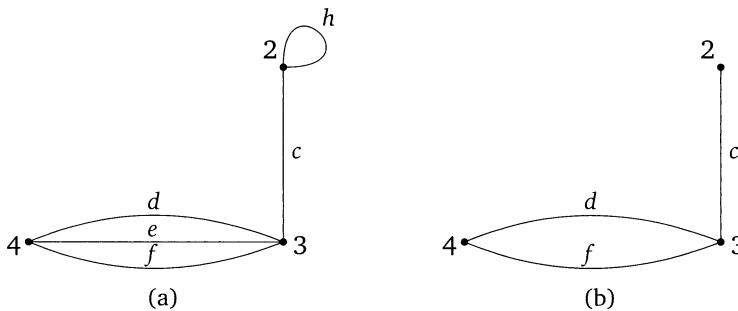


Рис. 1.22. (a) Граф, полученный из G удалением вершины 1;
(b) подграф H графа G

В качестве примера на рис. 1.22(b) показан граф H . Так как граф H получен из графа G , показанного на рис. 1.21(a), удалением вершины 1 и ребер e , h , то он является подграфом графа G .

с. Как мы уже заметили, любой подграф графа G получается из G последовательным выполнением двух операций — удаления вершин и удаления ребер. Естественным кажется рассмотреть два частных случая этой ситуации. Первый — это случай, когда мы в графе G удаляем только ребра, а второй — когда в G мы удаляем только вершины.

Если мы при получении из графа G подграфа H используем лишь операцию удаления ребер, то мы получаем подграф, множество вершин которого совпадает с множеством $V(G)$ вершин исходного графа. Такой подграф называется *остовным* подграфом (spanning subgraph) графа G (см. рис. 1.21(b)). В частности, любой простой граф G , построенный на n вершинах, является остовным подграфом полного графа K_n .

Второй частный случай — когда мы в графе G удаляем одну или несколько вершин. В результате такой операции мы получаем подграф H , индуцированный подмножеством оставшихся вершин графа G . Иными словами, подграфом H графа G , индуцированным подмножеством вершин S , называется

граф, полученный из G удалением всех вершин, не принадлежащих множеству S , вместе со всеми инцидентными этим вершинам ребрами (см. рис. 1.22(a)).

Иногда нам будет удобно использовать понятие подграфа, индуцированного некоторым подмножеством F множества $E(G)$ ребер графа G . Такой подграф состоит из ребер, принадлежащих F , а также из вершин, являющихся концевыми вершинами этих ребер.

d. Достаточно часто в приложениях встречаются важные с практической точки зрения подклассы остовных подграфов. По историческим причинам некоторые из них имеют специальные названия. Так, остовный 1-регулярный подграф носит название 1-фактор графа G , а набор ребер в таком подграфе называется *совершенным паросочетанием* в исходном графе G . Остовный k -регулярный подграф для произвольного натурального $k \geq 1$ называется *k -фактором* графа G .

В качестве примера на рис. 1.23 показаны графы, являющиеся соответственно 2-фактором (рис. 1.23(a)) и 1-фактором (рис. 1.23(b)) графа G , показанного на рис. 1.21(a).

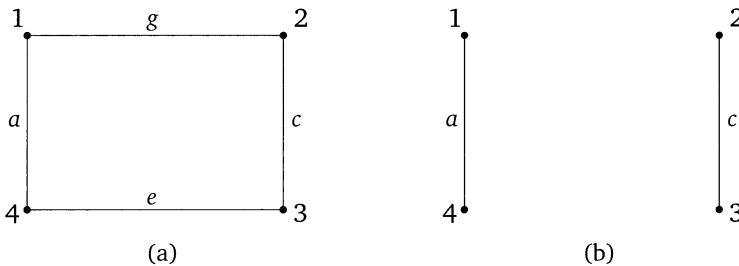


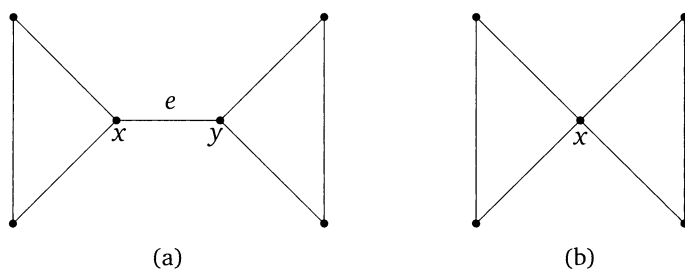
Рис. 1.23. (a) 2-фактор графа G ; (b) 1-фактор графа G

В случае мультиграфа G очень часто рассматривают простой граф, получающийся из исходного графа G удалением всех петель и заменой мультиребер на простые ребра. Такой граф, очевидно, является остовным подграфом исходного графа.

2. Вернемся к понятию связности в графах. Операции удаления ребра и вершины позволяют нам ввести важные понятия моста и точки сочленения в графе.

a. Рассмотрим графы, показанные на рис. 1.24. Видно, что связный граф G_1 (рис. 1.24(a)) перестает быть таковым после удаления ребра e , связывающего вершины x и y .

Определение 2. Ребро $e \in E(G)$ в связном графе G называется *мостом*, если получающийся после его удаления граф $G - e$ становится несвязным. В случае несвязного графа G мостом называется ребро, после удаления которого количество компонент связности увеличивается на единицу.

Рис. 1.24. (a) Граф G_1 ; (b) граф G_2

Теперь рассмотрим связный граф G_2 , показанный на рис. 1.24(b). У этого графа мостов нет, однако имеется вершина x , после удаления которой граф $G_2 - x$ становится несвязным.

Определение 3. Вершина x называется *точкой сочленения* графа G , если после ее удаления количество компонент связности графа $G - x$ увеличивается по сравнению с количеством компонент связности исходного графа G .

Заметим, что даже в случае связного графа G удаление в нем точки сочленения может приводить к появлению как двух, так и большего количества связных компонент.

б. Докажем простое утверждение, характеризующее точку сочленения в связном графе G .

Утверждение 4. Вершина x в связном графе G , построенном на $n \geq 3$ вершинах, есть точка сочленения графа G тогда и только тогда, когда в G существуют такие отличные от x вершины u и z , что x содержится в каждом пути из u в z .

Доказательство. Предположим вначале, что x есть точка сочленения в связном графе G . Предположим, что утверждение неверно, т. е. что для любой пары вершин u, z найдется путь, не проходящий через x . Но тогда в графе $G - x$ любая пара вершин осталась бы связанной, что невозможно.

Теперь предположим, что в G существует описанная в утверждении пара вершин u и z . Удаление вершины x в таком графе уничтожает любой путь из u в z , т. е. превращает эти вершины в несвязанные. Это, в свою очередь, означает, что вершины u и z , лежавшие ранее в одной компоненте связности графа G , стали принадлежать разным компонентам связности графа $G - x$. Иными словами, удаление x увеличивает количество связных компонент графа, т. е. x есть точка сочленения в G . \square

с. Теперь докажем наиболее важное утверждение, характеризующее мосты в графе G .

Утверждение 5. Ребро $e = \{x, y\}$ в простом связном графе G является мостом тогда и только тогда, когда e не принадлежит ни одному из циклов графа G .

Доказательство. Пусть ребро e является мостом в графе G . По определению удаление e приводит к появлению в графе $G - e$ хотя бы одной пары $\{u, v\}$ не связанных между собой вершин (см. рис. 1.25). В исходном графе G эти вершины связаны между собой простым путем $P = (u, v)$, который с необходимостью проходит через $e = \{x, y\}$. В графе $G - e$ вершины u и x связаны между собой участком $P_1 = (u, x)$ пути P , а вершины y и v — участком $P_2 = (y, v)$ этого пути. Если бы ребро e принадлежало циклу C в графе G , то x и y оказались бы связанными в графе $G - e$ путем $C - e$. Но тогда по транзитивности связанными между собой оказались бы и вершины u, v , что невозможно.

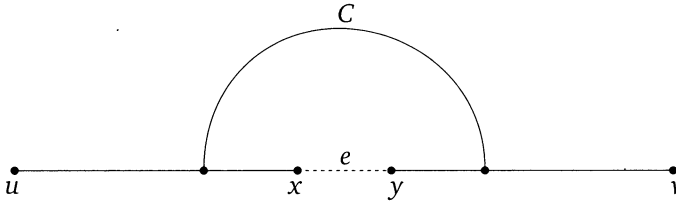


Рис. 1.25

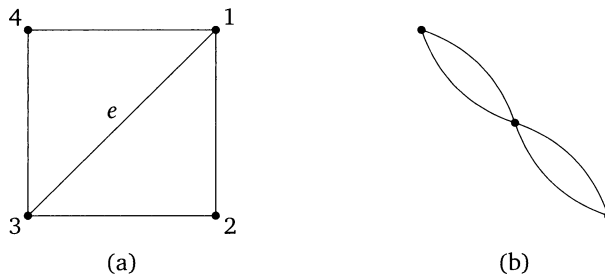
Обратно, предположим, что ребро e не является мостом в графе G , т. е. его удаление оставляет граф $G - e$ связным. Но тогда концы x и y ребра e в графе $G - e$ оказываются связанными некоторым xu -путем. Добавление к этому пути ребра e превращает этот путь в цикл. \square

Замечание 6. Доказанные выше утверждения являются, по сути, аналогами вершинной и реберной теорем Менгера, описывающих k -связные графы. Изучению таких графов будет посвящена отдельная глава.

3. Мы ввели операции удаления ребра и вершины. Нам понадобятся еще несколько операций над графами.

а. Начнем с чуть более сложной по сравнению с удалением ребра операции — операции стягивания ребра.

Определение 7. Говорят, что граф G/e получен из графа G *стягиванием* ребра e , если граф G/e получается из G удалением ребра e и стягиванием инцидентных e вершин x и y в одну (см. рис. 1.26).

Рис. 1.26. Операция стягивания ребра: (а) исходный граф G ; (б) граф G/e

б. Следующие две полезные операции — это операции объединения и пересечения графов. Пусть G и H — пара простых графов.

Определение 8. *Объединением* графов G и H называется граф $F = G \cup H$, множество вершин и множество ребер которого представляют собой объединение соответствующих множеств графов G и H :

$$V(F) = V(G) \cup V(H), \quad E(F) = E(G) \cup E(H).$$

На рис. 1.27(b) в качестве примера показан граф F , полученный в результате объединения графов G и H , показанных на рис. 1.27(a).

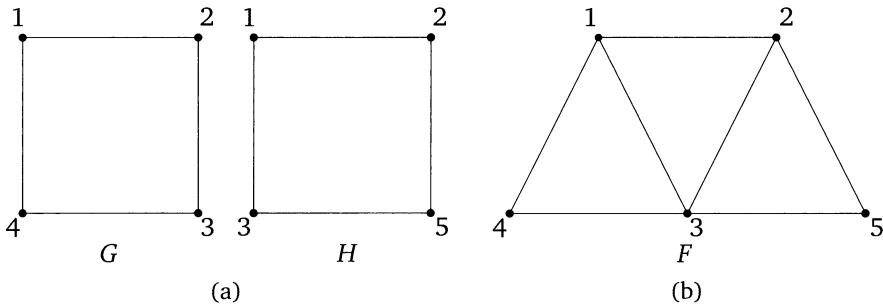


Рис. 1.27. Операция объединения графов G и H

В случае, если множества вершин (а следовательно, и ребер) графов G и H не пересекаются, мы получаем так называемое несвязное объединение $G + H$ таких графов. По сути, любой несвязный граф представляет собой несвязное объединение двух или более связных компонент.

Определение 9. *Пересечением* графов G и H называется граф $F = G \cap H$, множество вершин и множество ребер которого представляют собой пересечение соответствующих множеств графов G и H :

$$V(F) = V(G) \cap V(H), \quad E(F) = E(G) \cap E(H).$$

На рис. 1.28(b) приведен граф F , полученный в результате пересечения графов G и H , показанных на рис. 1.28(a).

Заметим, что мы уже, по сути, встречались с операциями объединения и пересечения графов, когда говорили о графе G и о его дополнении — графе \bar{G} . Действительно, в частном случае $H = \bar{G}$ объединение графов G и \bar{G} есть полный граф K_n на n вершинах, а пересечение графов G и \bar{G} — это пустой граф \bar{K}_n , построенный на n изолированных вершинах.

с. При изучении остовных подграфов H_1 и H_2 одного и того же графа G достаточно часто встречается операция Δ их симметрической разности. С помощью такой операции мы из остовных подграфов H_1 и H_2 получаем остовный подграф $H = H_1 \Delta H_2$, состоящий из ребер, принадлежащих H_1 , но не принадлежащих H_2 , и наоборот.

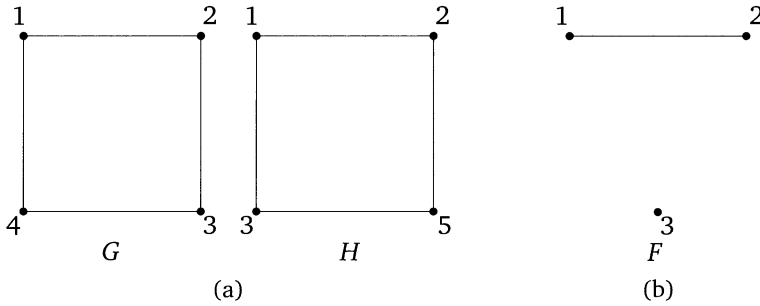
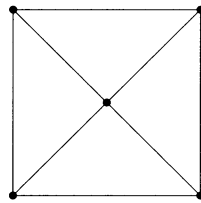
Рис. 1.28. Операция пересечения графов G и H 

Рис. 1.29

Рассмотрим в качестве примера граф G , показанный на рис. 1.29. Два его остовных подграфа H_1 и H_2 показаны на рис. 1.30(a) и 1.30(b), а их симметрическая разность — остовный подграф $H_3 = H_1 \Delta H_2$ — представлен на рис. 1.30(c). Общие для H_1 и H_2 ребра помечены на этих рисунках сплошными линиями, а ребра, встречающиеся в одном подграфе и не встречающиеся в другом, — пунктирными и штрихпунктирными линиями. Результирующий подграф H_3 состоит из ребер, помеченных пунктирными и штрихпунктирными линиями.

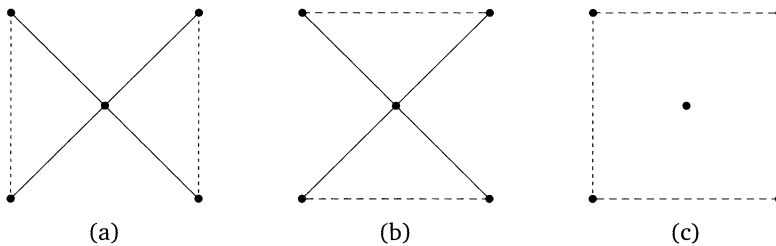


Рис. 1.30. Операция симметрической разности двух остовных подграфов

Упражнения

1 (1 балл). Сколько различных остовных подграфов и сколько различных индуцированных подграфов может иметь простой связный граф G , построенный на n вершинах и t ребрах?

2 (1,5 балла). Пусть G — граф, построенный на $n \geq 2$ вершинах, $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ — минимальная и максимальная степени вершин в графе G . Докажите или опровергните следующие утверждения:

а) удаление вершины степени $\Delta(G)$ не может увеличить среднюю степень вершин в графе;

б) удаление вершины степени $\delta(G)$ не может уменьшить среднюю степень вершин в графе.

3 (1 балл). Пусть G — простой граф, все вершины которого имеют степени, большие или равные двум. Докажите, что в таком графе обязательно присутствует подграф, являющийся циклом C .

4 (1 балл). Пусть G — простой граф, степень любой вершины которого больше или равна δ . Докажите, что в графе G существует путь длины, большей или равной δ . Для любого $k \geq 2$ предъявите простой граф G с $\delta = k$, не содержащий путей, длина которых больше чем k .

5 (1 балл). Докажите, что любой цикл наименьшей длины в графе G представляет собой индуцированный подграф.

6 (1,5 балла). Докажите, что любой простой связный граф $G \neq K_n$, построенный на $n \geq 3$ вершинах, содержит в качестве своего подграфа индуцированный путь P_3 длины 2.

7 (1,5 баллов). В графе, показанном на рис. 1.31, найдите двудольный подграф с максимальным количеством ребер. Докажите, что полученный подграф является максимальным.

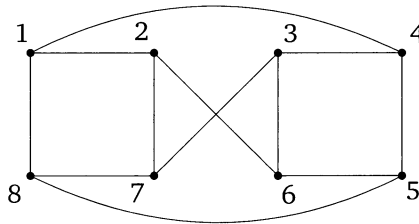


Рис. 1.31

8 (1,5 балла). Докажите, что максимальное количество ребер в простом двудольном графе на n вершинах не превосходит $n^2/4$ в случае, когда число вершин четно, и $(n^2 - 1)/4$ в случае, когда это число нечетно.

9 (теорема Мантеля, 2 балла). Пусть G — простой граф без треугольников, т. е. граф, не содержащий K_3 в качестве своего индуцированного цикла. Покажите, что максимальное количество ребер в таком графе не превосходит $n^2/4$.

10 (2 балла). Решите упражнения 25, 8 и 19 с помощью теоремы Мантеля.

11 (0,5 балла). Среди графов, показанных на рис. 1.32, выберите графы, имеющие точки сочленения.

12 (1,5 балла). Докажите, что в каждом связном графе G без петель, построенном на $n \geq 2$ вершинах, найдутся по меньшей мере две вершины, не являющиеся точками сочленения.

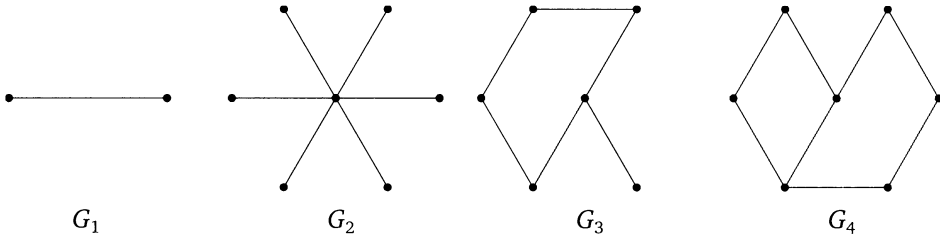


Рис. 1.32

13 (1 балл). Покажите, что в связном графе, построенном на более чем двух вершинах и имеющем мост $\{x, y\}$, хотя бы одна из вершин x и y является точкой сочленения.

14 (1 балл). Докажите, что любой связный граф, все степени вершин которого четны, не имеет мостов.

Дополнительные упражнения

15 (1 балл). Пусть G — простой граф, степень любой вершины которого больше или равна δ , $\delta \geq 2$. Докажите, что в графе G существует цикл длины, большей или равной $\delta + 1$.

16 (1 балл). Докажите, что в простом графе G , построенном на n вершинах, любое ребро $e = \{x, y\}$ принадлежит по меньшей мере $\deg(x) + \deg(y) - n$ индуцированным циклам длины 3.

17 (1 балл). Пусть G — граф, обхват $g(G)$ которого меньше бесконечности. Докажите, что для такого графа справедливо неравенство вида $g(G) \leq 2 \operatorname{diam}(G) + 1$.

18 (2 балла). Докажите, что любой граф G без петель содержит остовный двудольный подграф F , степень любой вершины x в котором больше или равна $\deg(x)/2$, где $\deg(x)$ — степень той же вершины в исходном графе.

19 (2,5 балла). Пусть G — простой граф, построенный на 10 вершинах и имеющий 38 ребер. Докажите, что G содержит K_4 в качестве своего индуцированного подграфа.

20 (2 балла). Пусть G — простой граф на 10 вершинах и 26 ребрах. Докажите, что такой граф содержит в качестве своих индуцированных подграфов по меньшей мере пять треугольников.

21 (1,5 балла). Пусть вершина x есть точка сочленения графа G . Покажите, что граф $\bar{G} - x$ является связным.

22 (1 балл). Пусть в простом графе G с диаметром 2 имеется точка сочленения. Докажите, что в графе \bar{G} найдется изолированная вершина.

23 (2 балла). Докажите, что любой 3-регулярный граф G имеет точку сочленения тогда и только тогда, когда в нем содержится мост.

24 (1,5 балла). Пусть G — k -регулярный двудольный граф, $k \geq 2$. Докажите, что в таком графе мосты отсутствуют.

25 (1 балл). Предположим, что в графе G существуют два отличных друг от друга пути P и Q , соединяющие одну и ту же пару вершин x и y . Докажите, что подграф $P \cup Q$ содержит в качестве своего подграфа некоторый цикл C .

Решение упражнений

1. Любое подмножество ребер графа G может представлять собой остовный подграф графа G . Количество же таких подмножеств равно 2^m . Аналогично количество всех индуцированных подграфов равно 2^n .

2. Первое утверждение верно, а второе нет. Действительно, обозначим через s сумму степеней вершин в графе, а через $m = s/n$ — среднюю степень вершин в графе. Удаление вершины степени d приводит к уменьшению суммарной степени вершин на $2d$ в графе без петель, на d в случае, если все инцидентные этой вершине ребра представляют собой петли, и на αd , $\alpha \in (1, 2)$, в промежуточном случае. Тогда

$$\frac{s - \alpha d}{n - 1} < \frac{s}{n} \Leftrightarrow sn - \alpha dn < sn - s \Leftrightarrow \alpha dn > s \Leftrightarrow \alpha d > \frac{s}{n} = m.$$

Ясно, что в случае $d = \Delta(G)$ это неравенство выполняется всегда. Контрпримером ко второму утверждению может служить либо k -регулярный граф, либо путь P_3 . Из приведенной выше цепочки неравенств следует, что и в том и в другом случае удаление вершины минимальной степени уменьшает среднюю степень вершин в графе.

3. Рассмотрим в графе G путь $P = (x_0, x_1, \dots, x_k)$, наибольший по включению, т. е. такой путь, который нельзя продолжить и получить путь большей длины. Так как степень вершины x_k больше или равна двум, в G помимо x_{k-1} найдется и еще хотя бы одна вершина y , смежная с x_k . Если бы вершина y была отлична от всех вершин пути P , то мы могли бы продолжить этот путь до вершины y и получить путь $P' = P + y$ большей длины, что невозможно. Следовательно, y совпадает с одной из вершин x_i , $i = 0, 1, \dots, k - 2$, так что в графе существует цикл $C = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_k, x_i)$.

4. Пусть P — путь, наибольший по включению, в графе G . Рассмотрим один из двух его концов — вершину x . По условию степень этой вершины не меньше δ . Вершина x не может иметь соседей, отличных от вершин пути P , — в противном случае мы бы получили путь P' , длина которого больше, чем длина пути P , что невозможно. Но тогда длина этого пути должна быть больше или равна δ — так как граф G простой, любое ребро, исходящее из x , обязано приходить в свою, отличную от других вершину.

Рассмотрим теперь полный подграф K_n на n вершинах. В любом таком графе минимальная степень δ вершины равна $n - 1$. Кроме того, в таком графе существуют пути длины $n - 1$ и не существует ни одного пути большей длины.

5. Пусть C — цикл наименьшей длины в графе G . Обозначим через $V(C)$ множество вершин этого цикла. Рассмотрим подграф H графа G , индуцированный этим множеством вершин. Нам нужно доказать, что H совпадает с C . Так как любое ребро из C принадлежит G , а следовательно, и H , нам

остается показать, что любое ребро, соединяющее пару вершин x, y в H , принадлежит множеству ребер $E(C)$.

Предположим, что это не так, т. е. предположим, что в графе G существует ребро $\{x, y\} \in E(H)$, не принадлежащее циклу C . В этом случае в графе G существует цикл, состоящий из ребра $\{x, y\}$, а также одной из двух дуг $\{x, y\}$ цикла C , длина которой минимальна. Длина такого цикла будет меньше длины цикла C , чего быть не может.

6. Так как граф G не является полным графом K_n , $n \geq 3$, у него имеется хотя бы одна несмежная пара вершин. Рассмотрим путь P минимальной длины, соединяющий эти вершины. Удалим все вершины графа, не принадлежащие P . Если длина этого пути равна 3, то мы получили то, что нам нужно. В противном случае рассмотрим концевую вершину x этого пути, а также две его последующие вершины y, z . Вершины x и z смежными быть не могут — в противном случае мы бы имели путь (x, z, \dots) меньшей длины. Следовательно, мы можем удалить все оставшиеся вершины пути P . Вершины x, y и z образуют при этом индуцированный подграф P_3 .

7. Удалив ребра $\{1, 4\}$ и $\{5, 8\}$, мы получим двудольный подграф с блоками $X = \{1, 7, 6, 4\}$ и $Y = \{2, 3, 5, 8\}$, построенный на десяти ребрах. Второй способ получить двудольный подграф с десятью ребрами — это удалить ребра $\{2, 6\}$ и $\{3, 7\}$. В результате получится двудольный подграф с блоками $X = \{1, 3, 5, 7\}$ и $Y = \{2, 4, 6, 8\}$.

Покажем теперь, что мы должны удалить не менее двух ребер для того, чтобы получить двудольный подграф. В таком подграфе, согласно основному критерию двудольности графа, должны отсутствовать циклы нечетной длины. Если бы мы могли для всех циклов нечетной длины удалить одно ребро так, чтобы при этом все циклы нечетной длины разрушились, мы бы получили двудольный граф на 11 ребрах. И у двух циклов нечетной длины, а именно у циклов $(1, 8, 7, 3, 4)$ и $(1, 2, 6, 5, 4)$, есть общее ребро — ребро $\{1, 4\}$, удалив которое мы удалим одновременно два цикла нечетной длины. Однако в графе имеется и еще один цикл нечетной длины $(8, 7, 3, 4, 5)$, который не содержит это ребро. Таким образом, ни одно ребро не лежит во всех циклах нечетной длины графа G , и поэтому нам нужно удалить как минимум два ребра в графе, чтобы превратить его в двудольный.

8. Нам нужно найти простой двудольный граф на n вершинах, у которого количество ребер максимально. Добавление к такому графу еще хотя бы одного ребра должно нарушать свойство двудольности графа. Поэтому в таком графе любая вершина x из первого блока X должна быть соединена с каждой вершиной из второго блока Y .

Действительно, если бы это было не так, т. е. если бы существовала вершина y из второго блока, еще не соединенная с x ребром, то мы смогли бы добавить к G еще одно ребро $e = \{x, y\}$, а граф при этом остался бы двудольным. Тем самым мы доказали, что искомым двудольный граф обязан быть полным двудольным графом $K_{k,m}$, где $k = |X|$, $m = |Y|$. Осталось понять, чему должны быть равны числа k и m .

Согласно предыдущему упражнению количество e ребер в полном графе равно $k \cdot m$. Так как при этом $k = n - m$, задача сводится к нахождению пара-

метра m , при котором произведение $m(n - m)$ будет максимальным. Введем функцию

$$f(m) = m \cdot (n - m) = m \cdot n - m^2.$$

Максимум этой функции достигается при $m = n/2$ в случае, когда n — четное число, и при $m = (n \pm 1)/2$ в случае, когда n нечетно. В первом случае $k = n/2$ и $e = n^2/4$, а во втором случае $k = (n \mp 1)/2$ и $e = (n^2 - 1)/4$.

9. Рассмотрим вершину x максимальной степени Δ в графе G . Так как G не содержит треугольников, все смежные с x вершины являются попарно несмежными друг с другом. Обозначим множество таких вершин через $N(x)$. Вычислим сумму степеней всех вершин, не входящих в $N(x)$ (включая степень самой вершины x). Такая сумма подсчитывает любое ребро в графе G по меньшей мере один раз (она подсчитывает все ребра, исходящие из x , все ребра, соединяющие $N(x)$ с остальными вершинами G , не входящими в $N(x)$, а также по два раза ребра, соединяющие между собой вершины $V(G) \setminus N(x) \setminus \{x\}$). Следовательно,

$$m = |E(G)| \leq \sum_{y \notin N(x)} \deg(y).$$

Но степень каждой из вершин в графе меньше или равна Δ , а количество вершин $y \notin N(x)$ равно $n - \Delta$. Поэтому

$$m \leq \Delta \cdot (n - \Delta).$$

Правая часть этого неравенства достигается при $\Delta = n/2$, откуда и следует требуемая оценка на m . Заметим, что данная оценка является точной — двудольный граф $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor}$ треугольников не содержит, как любой двудольный граф.

10. Рассмотрим вначале граф G на 10 вершинах и 28 ребрах (упражнение 25). В таком графе количество ребер $28 > 100^2/4 = 25$, поэтому там существует хотя бы один треугольник Δ_1 . Рассмотрим подмножество H из семи вершин, не входящих в этот треугольник Δ_1 . Если хотя бы из одной вершины $x \in H$ в Δ_1 идут хотя бы два ребра, то в графе G существует цикл C_4 . Предположим, что это не так. В этом случае из H в Δ_1 могут идти не более семи ребер. Тогда в H имеется не менее $28 - 3 - 7 = 18$ ребер. Так как $18 > 12,25$, по теореме Мантеля в подграфе, индуцированном вершинами множества H , существует треугольник Δ_2 . Оставшиеся четыре вершины по-прежнему соединены с Δ_2 не более чем четырьмя ребрами. Как следствие, эти 4 вершины связаны между собой по меньшей мере $18 - 3 - 4 = 11$ ребрами, чего быть не может — максимальное количество ребер в графе на четырех вершинах равно шести.

Для доказательства утверждения, сформулированного в упражнении 8, достаточно сослаться на теорему Мантеля. Действительно, согласно этой теореме в графе, у которого количество ребер больше или равно $n^2/4$, обязательно имеется треугольник, т. е. цикл нечетной длины. Следовательно, такой граф двудольным быть не может.

Теперь рассмотрим граф G на 10 вершинах и 38 ребрах (упражнение 19). В нем также имеется хотя бы один треугольник Δ . Рассмотрим оставше-

еся подмножество H из семи вершин. Если хотя бы одна из этих вершин соединена со всеми вершинами треугольника Δ , то в графе G существует индуцированный подграф K_4 . Предположим, что это не так. Тогда в подграфе, индуцированном подмножеством H вершин, имеется по меньшей мере $38 - 3 - 2 \cdot 7 = 21$ ребро. Но максимальное количество ребер в подграфе на семи вершинах равно 21, и такой подграф представляет собой граф K_7 , а в нем гарантированно существует индуцированный подграф, изоморфный K_4 .

11. Таковыми являются графы G_2 и G_3 — точкой сочленения у этих графов являются центральные вершины.

12. Рассмотрим в G путь P , наибольший по включению. Утверждается, что его концы x и y не будут точками сочленения данного графа. Действительно, все смежные с x вершины обязаны принадлежать пути P . После удаления вершины x путь P остается связным в графе $G - x$, т. е. все смежные с x вершины принадлежат одной и той же связной компоненте графа $G - x$. Следовательно, x (равно как и y) точкой сочленения графа G не является.

13. Удалив мост $\{x, y\}$, мы разобьем G в точности на две компоненты связности G_x и G_y , $x \in V(G_x)$, $y \in V(G_y)$. По условию хотя бы одна из них содержит больше одной вершины. Пусть такой компонентой является граф G_y . Удаление y разбивает граф на две (непустые) компоненты связности G_x и $G_y \setminus \{y\}$.

14. Если бы такой граф имел мост e , то после его удаления в каждой из его компонент только одна из вершин — одна из концевых вершин ребра e — имела бы нечетную степень, что невозможно — в любом связном графе количество нечетных вершин четно.

§ 4. Изоморфизм и автоморфизм графов

1. Постараемся вначале ответить на вопрос, сколько же существует различных графов, построенных на n вершинах.

а. Сразу заметим, что в случае мультиграфов мы наряду с количеством вершин должны также фиксировать и количество ребер. Действительно, любые две вершины мультиграфа можно соединить произвольным количеством ребер, а значит, количество мультиграфов, построенных на n вершинах, без ограничения на количество ребер может быть сколь угодно большим. Поэтому мы ограничимся пока что задачей подсчета простых графов.

б. Количество g_n простых неориентированных графов достаточно легко сосчитать, используя формальное определение простого графа как некоторого подмножества множества $V^{(2)}$. Действительно, количество всех двухэлементных подмножеств n -элементного множества вершин (т. е. мощность множества $V^{(2)}$) равно $|V^{(2)}| = \binom{n}{2}$. Нас же интересует множество Σ всех подмножеств множества $V^{(2)}$. Количество элементов в этом множестве, как известно, равно

$$|\Sigma| = 2^{|V^{(2)}|} = 2^{\binom{n}{2}}.$$

Следовательно, количество g_n всех простых графов на n вершинах равняется $2^{\binom{n}{2}}$.

Например, существует ровно $g_3 = 2^{\binom{3}{2}} = 2^3 = 8$ различных простых графов, построенных на трех вершинах (см. рис. 1.33).

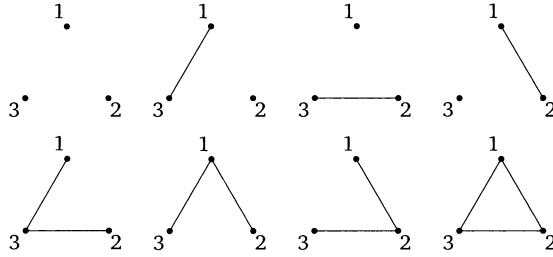


Рис. 1.33. Восемь простых графов на трех вершинах

с. Столь же просто подсчитать количество различных простых орграфов. Действительно, всего существует $n(n-1)$ упорядоченных пар отличных друг от друга вершин. Как следствие, количество различных простых орграфов, построенных на n вершинах, равно $2^{n(n-1)}$.

2. Заметим, что многие из приведенных на рис. 1.33 графов похожи друг на друга в том смысле, что отличаются они друг от друга только перенумерацией вершин. Таковыми, в частности, являются три графа, имеющие только лишь одно ребро, а также три графа, имеющие ровно два ребра. Формализовать эту похожесть можно с помощью понятия изоморфизма графов.

а. Определим вначале понятие изоморфизма для простых неориентированных графов.

Определение 1. Говорят, что два простых графа G_1 и G_2 *изоморфны* друг другу, если существует взаимно однозначное отображение $\varphi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$, которое сохраняет отношение смежности. Последнее означает, что если в графе G_1 некоторая пара вершин $\{x, y\}$ соединена ребром, то в графе G_2 соответствующая ей пара вершин $\{\varphi(x), \varphi(y)\}$ также соединена ребром, и наоборот.

Пример 2. Рассмотрим графы G_1 и G_2 , изображенные на рис. 1.34. Они изоморфны друг другу, так как существует взаимно однозначное отображение $\varphi: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ вида

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(2) = 3, \quad \varphi(3) = 2,$$

при котором ребро $\{1, 2\}$ графа G переходит в ребро $\{\varphi(1), \varphi(2)\} = \{1, 3\} \in E(G_2)$, а ребро $\{2, 3\}$ графа G переходит в ребро $\{\varphi(2), \varphi(3)\} = \{3, 2\}$ графа G_2 .



Рис. 1.34. Два изоморфных графа

б. Как и любой изоморфизм, изоморфизм графов вводит отношение эквивалентности на множестве всех неориентированных простых графов на n вершинах. Отношение эквивалентности, в свою очередь, разбивает все множество таких графов на классы эквивалентности — классы изоморфных друг другу графов. В теории графов эти классы эквивалентности имеют специальное название.

Определение 3. Любой описанный выше класс эквивалентности графов называется *непомеченным* графом. В этом смысле обычный простой граф (т. е. любой представитель класса эквивалентности) часто называется *помеченным* графом.

Так, из рис. 1.33 видно, что существует четыре различных непомеченных графа на трех вершинах: один отвечает пустому графу, второй — трем помеченным графам с одним ребром, третий — трем помеченным графам с двумя ребрами и, наконец, четвертый — полному графу K_3 (см. рис. 1.35). Задача перечисления непомеченных графов на n вершинах для произвольного значения параметра n является значительно более сложной по сравнению с задачей перечисления соответствующих помеченных графов.

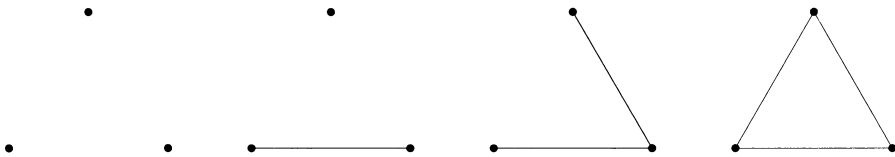


Рис. 1.35. Четыре простых непомеченных графа на трех вершинах

с. Теперь для полноты картины дадим определение изоморфизма для более общего случая неориентированных мультиграфов. Как мы помним, в общем случае любой неориентированный граф G задается тройкой, состоящей из множества $V(G)$ вершин, множества $E(G)$ ребер, а также отображения $I(G)$, сопоставляющего любому ребру $e \in E(G)$ неупорядоченную пару вершин $\{x, y\}$, которые это ребро e соединяет.

Определение 4. Говорят, что графы

$$G_1 = (V(G_1), E(G_1), I(G_1)) \quad \text{и} \quad G_2 = (V(G_2), E(G_2), I(G_2))$$

изоморфны друг другу, если существует пара взаимно однозначных отображений

$$(\varphi, \theta), \quad \varphi: V(G_1) \rightarrow V(G_2) \quad \text{и} \quad \theta: E(G_1) \rightarrow E(G_2),$$

сохраняющих отношение смежности в графах G_1 и G_2 . Последнее в данном случае означает, что если отображение $I(G_1)$ сопоставляет в графе G_1 ребру $e \in E(G_1)$ пару $\{x, y\}$, то в графе G_2 отображение $I(G_2)$ сопоставляет ребру $\theta(e) \in E(G_2)$ пару вершин $\{\varphi(x), \varphi(y)\}$, и наоборот.

3. Часто на практике достаточно важно уметь отвечать на вопрос, являются ли два различных графа изоморфными друг другу или нет. Оказывается, проверка двух графов на изоморфизм является в общем случае довольно-таки нетривиальной задачей.

а. Начнем с простого примера.

Пример 5. Рассмотрим два графа, изображенные на рис. 1.36. Возникает вопрос, являются ли два таких графа изоморфными друг другу.

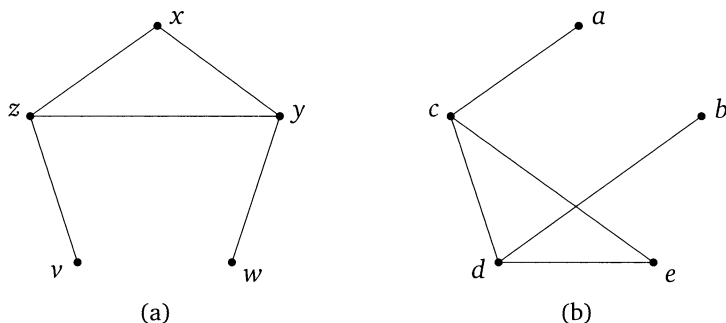


Рис. 1.36. Установление изоморфизма между графами:
(a) граф G_1 ; (b) граф G_2

Для ответа на этот вопрос нам нужно, вообще говоря, найти взаимно однозначное отображение φ из множества вершин $V(G_1)$ в множество $V(G_2)$, сохраняющее отношение смежности. Легче всего в таких простых задачах действовать следующим образом: нужно удалить пометки вершин у первого и у второго графов, пометить вершины первого графа числами от 1 до n , а затем попытаться пометить вершины второго графа теми же числами от 1 до n так, чтобы такой изоморфизм φ был очевиден.

В данном конкретном примере сделать это довольно просто (см. рис. 1.37): у графов G_1 и G_2 имеются всего лишь две вершины, степень которых равна

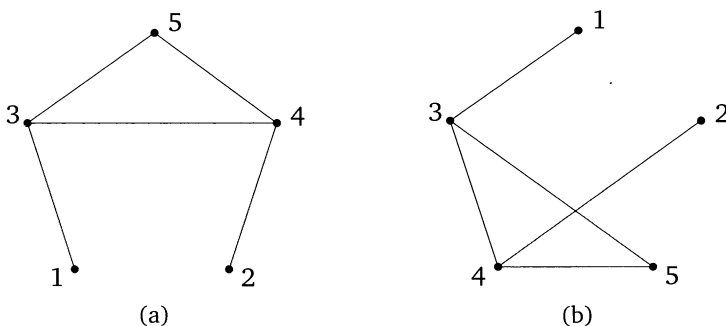


Рис. 1.37. Установление изоморфизма между графами:
(a) граф G_1 ; (b) граф G_2

единице. В графе G_1 они помечены цифрами 1 и 2. Поэтому нам будет удобно теми же самыми цифрами пометить одновалентные вершины и в графе G_2 . Далее, в графе G_1 эти вершины соединены с вершинами 3 и 4, имеющими степень, равную трем. Пометим аналогичные вершины в G_2 теми же цифрами. Нам остается пометить в графе G_2 оставшуюся вершину цифрой 5 и убедиться, что отображение $\varphi(i) = i$ задает изоморфизм этих графов.

Пример 6. Рассмотрим теперь графы, показанные на рис. 1.38(a). Для таких графов уже не вполне очевидно, что они изображают один и тот же непомеченный граф. Для доказательства этого факта можно, например, попытаться пометить вершины двух графов так, чтобы пара вершин $\{x, y\}$, связанная ребром в графе G_1 , оказалась бы связанной ребром и в графе G_2 , и наоборот. В данном примере это можно все же сделать достаточно просто, заметив, что граф G_2 состоит из двух непересекающихся циклов длины 4. Соответственно, выделив в графе G_1 замкнутый цикл аналогичной длины, мы можем уже однозначно пометить оставшиеся вершины графа G_1 так, чтобы списки смежности этих графов совпали (см. рис. 1.38(b)).

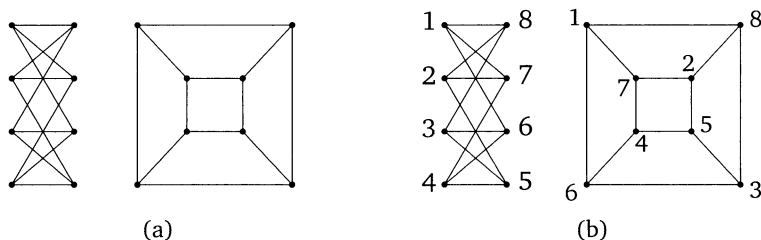


Рис. 1.38. Установление изоморфизма между графами

б. В практических задачах довольно часто встречаются графы, в которых содержатся сотни тысяч вершин. Для таких графов никакие визуальные методы оценки уже не работают. Не существует пока и никаких достаточно простых критериев, позволяющих достаточно быстро ответить на вопрос, являются ли два заданных графа изоморфными или нет. Конечно же, есть очевидные необходимые условия изоморфности двух графов — так, например, у изоморфных графов последовательности степеней их вершин должны, очевидно, совпадать. Но в случае, если подобного рода очевидные условия выполнены, не остается ничего другого, как проверять заданную пару графов на изоморфность простым перебором.

Для этого вершины обоих графов помечают числами из одного и того же множества $[n]$, затем разметку первого графа фиксируют, а пометки второго графа начинают переставлять, вообще говоря, всеми $n!$ способами. Если на каком-то шаге матрицы смежности или же списки смежности этих двух графов совпадут, то графы являются изоморфными друг другу. В противном случае они неизоморфны.

Такого рода алгоритмы крайне неэффективны хотя бы потому, что при больших n значение $n!$ крайне велико. Существуют достаточно сложные ал-

горитмы, позволяющие более эффективно проверять на изоморфизм специальные подклассы графов, однако никакого быстрого алгоритма, позволяющего делать это в общем случае, пока не существует.

4. Наряду с изоморфизмом, в теории графов вводится также понятие автоморфизма — изоморфизма графа G в себя.

а. Прежде чем давать формальное определение автоморфизма, вернемся еще раз к очень важным понятиям непомеченных и помеченных графов. Давайте подумаем, сколькими способами мы можем разметить один и тот же непомеченный граф на n вершинах. Очевидно, что это можно сделать $n!$ способами. Однако при этом возникает вопрос — действительно ли все такие способы пометки дадут нам *различные* помеченные графы?

В качестве примера рассмотрим простой непомеченный граф на трех вершинах, имеющий два ребра (рис. 1.39(a)). Пометим для него $3!$ способами его вершины. В результате мы получим 6 помеченных графов, изображенных на рис. 1.39(b). Однако мы с вами уже перебрали все помеченные графы, построенные на трех вершинах, и выяснили, что существует только лишь три *различных* помеченных графа, имеющих два ребра. Следовательно, среди шести графов, показанных на рис. 1.39(b), половина лишняя в том смысле, что среди этих графов имеются графы, представляющие собой один и тот же помеченный граф.

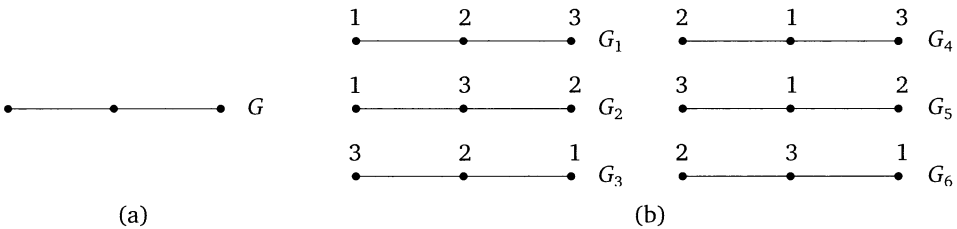


Рис. 1.39

Несложно, в частности, убедиться в том, что графы G_1 и G_3 , показанные на рис. 1.39(b), представляют собой один и тот же помеченный граф — первый из них переходит во второй при его развороте на 180° . То же касается и графов G_2 и G_6 , а также графов G_4 и G_5 .

б. Давайте теперь постараемся разобраться с причиной того, что при разметке вершин непомеченного графа $n!$ способами мы получаем лишние графы. Для этого возьмем непомеченный граф \hat{G} , как-то разметим его вершины (например, так, как это показано на рис. 1.40(a)), а затем рассмотрим поподробнее все функции $\varphi: [3] \rightarrow [3]$, задающие перестановки вершин полученного таким образом помеченного графа G_1 .

Рассмотрим вначале функцию φ_1 , оставляющую единицу на месте и меняющую местами вершины 2 и 3:

$$\varphi_1(1) = 1, \quad \varphi_1(2) = 3, \quad \varphi_1(3) = 2.$$



Рис. 1.40. Изоморфные помеченные графы на трех вершинах:
(a) граф G_1 ; (b) граф G_2

В результате мы из графа G_1 получим помеченный граф G_2 (рис. 1.40(b)). Естественно, что графы G_1 и G_2 изоморфны друг другу, так как они получены из одного и того же непомеченного графа. Однако важно то, что это два различных графа и списки смежности этих двух графов различны:

$$\begin{array}{ll}
 G_1: & \begin{array}{l} 1 \text{ смежна с } 2 \\ 2 \text{ смежна с } 1 \text{ и } 3; \\ 3 \text{ смежна с } 2 \end{array} \\
 G_2: & \begin{array}{l} 1 \text{ смежна с } 3 \\ 2 \text{ смежна с } 3 \\ 3 \text{ смежна с } 1 \text{ и } 2. \end{array}
 \end{array}$$

Рассмотрим теперь перестановку φ_2 вершин графа G_1 вида

$$\varphi_2(1) = 3, \quad \varphi_2(2) = 2, \quad \varphi_2(3) = 1.$$

В результате такой перестановки мы из графа G_1 (рис. 1.41(a)) получим граф G_3 (рис. 1.41(b)). Важно, что у такого графа G_3 список смежности полностью совпадает со списком смежности исходного графа. Следовательно, в результате подобной перестановки φ_2 мы получаем тот же самый помеченный граф, что у нас был до перестановки. Такая перестановка вершин, при которой граф как помеченный объект переходит сам в себя, как раз и называется *автоморфизмом* графа.



Рис. 1.41. Идентичные помеченные графы на трех вершинах:
(a) граф G_1 ; (b) граф G_3

Более формальное определение автоморфизма графа звучит следующим образом.

Определение 7. Взаимно однозначное отображение $\varphi: V(G) \rightarrow V(G)$ множества $V(G)$ вершин простого графа G в себя называется *автоморфизмом* графа G , если оно сохраняет отношение смежности в графе G . Последнее означает, что если вершины x и y соединены в графе G ребром $\{x, y\}$, то в том же самом графе G и образы $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ этих вершин соединены между собой ребром.

с. Давайте еще раз сравним определения изоморфизма и автоморфизма графов. На первый взгляд эти определения очень похожи друг на друга, и сразу не очень понятно, чем они отличаются друг от друга. Казалось бы, отличие этих определений состоит в том, что в определении изоморфизма фигурируют различные множества $V_1(G_1)$ и $V_2(G_2)$ вершин, тогда как в определении автоморфизма эти множества совпадают. Однако это отличие в двух определениях абсолютно непринципиально. Как правило, вершины любого графа помечаются элементами одного и того же множества $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ первых n натуральных чисел, так что и в определении изоморфизма, и в определении автоморфизма в роли отображения φ обычно выступает какая-то перестановка $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ первых n натуральных чисел.

Ключевое же отличие этих двух определений заключается в следующем. В определении автоморфизма мы в результате отображения φ получаем *тот же самый* граф G , тогда как в случае изоморфизма, не являющегося автоморфизмом, граф G_1 под действием отображения φ переходит в некоторый *другой* граф G_2 , отличный от исходного графа G_1 , причем это верно даже в том случае, когда множества $V_1(G_1)$ и $V_2(G_2)$ вершин этих двух графов совпадают. Легче всего это отличие описать в терминах матрицы или списка смежности графов: в случае автоморфизма список смежности графа G не изменится, тогда как в результате действия изоморфизма списки смежности графов G_1 и G_2 будут, вообще говоря, отличаться друг от друга.

d. Рассмотрим теперь множество всех автоморфизмов какого-то простого помеченного графа G . Очевидно, что тождественная перестановка id принадлежит этому множеству. Далее, для любого автоморфизма φ обратный к нему автоморфизм φ^{-1} также не меняет граф G , т. е. принадлежит тому же множеству автоморфизмов. Наконец, если φ_1 и φ_2 являются автоморфизмами графа, то и их композиция задает нам некоторый автоморфизм. Иными словами, операция композиции автоморфизмов задает на множестве всех автоморфизмов группу $\text{Aut}(G)$, которая называется *группой автоморфизмов* помеченного графа G .

Так, в разобранный выше примере группа автоморфизмов помеченного графа G_1 состоит из двух перестановок — тождественной перестановки id , а также перестановки, меняющей местами вершины 1 и 3. Иными словами, эта группа изоморфна группе \mathbb{Z}_2 .

е. Несмотря на то что группа автоморфизмов определена для помеченного графа G , на самом деле она отражает внутреннюю симметрию исходного непомеченного графа \tilde{G} . Так, например, мы видим, что показанный на рис. 1.39(а) непомеченный граф \tilde{G} на трех вершинах симметричен относительно поворота на 180° . Проблема состоит лишь в том, что не очень понятно, как у непомеченного графа такие симметрии искать. И здесь нам как раз и приходится на помощь помеченный граф: мы берем непомеченный граф \tilde{G} , как-то размечаем его вершины, получаем помеченный граф G , вычисляем для него группу автоморфизмов $\text{Aut}(G)$, а затем говорим, что эта группа и отражает внутреннюю симметрию исходного непомеченного графа \tilde{G} .

f. После сделанных замечаний мы можем вернуться к проблеме, с которой мы начинали, — к определению количества различных помеченных графов.

Утверждение 8. Количество N различных помеченных графов, получаемых из непомеченного графа \tilde{G} разметкой его вершин, рассчитывается по формуле

$$N = \frac{n!}{|\text{Aut}(G_1)|}, \quad (1.6)$$

где G_1 — произвольно выбранный помеченный граф, полученный из графа \tilde{G} некоторой разметкой его вершин.

Доказательство. Выберем произвольный помеченный граф G_1 и сосчитаем для него группу автоморфизмов $\text{Aut}(G_1)$. Предположим вначале, что порядок этой группы совпадает с $n!$. Это означает, что любая перестановка вершин переводит граф G_1 в себя, т. е. у нас получается лишь один помеченный граф, отвечающий исходному непомеченному графу \tilde{G} . В этом случае формула (1.6) верна — она принимает вид $N = n!/n! = 1$, т. е. мы имеем единственный помеченный граф.

Теперь предположим, что $|\text{Aut}(G_1)| = k$, $k < n!$. В этом случае среди всех $n!$ перестановок вершин найдется перестановка $\tilde{\varphi}$, не принадлежащая $\text{Aut}(G_1)$. Иными словами, эта перестановка переведет граф G_1 в некоторый изоморфный, но отличный от G_1 граф G_2 . Применим тогда к графу G_1 все перестановки вида

$$\tilde{\varphi} \cdot \varphi_i, \quad \varphi_i \in \text{Aut}(G_1).$$

Число таких перестановок совпадает, очевидно, с мощностью $|\text{Aut}(G_1)| = k$ группы автоморфизмов графа G_1 . Действительно, если $\tilde{\varphi} \cdot \varphi_i = \tilde{\varphi} \cdot \varphi_j$, то и $\varphi_i = \varphi_j$, поэтому для $\varphi_i \neq \varphi_j$ мы получаем и две различные перестановки вида $\tilde{\varphi} \cdot \varphi_i$ и $\tilde{\varphi} \cdot \varphi_j$. При этом все такие перестановки переведут граф G_1 в граф G_2 : вначале мы с помощью перестановки φ_i переводим граф G_1 в себя, а затем с помощью $\tilde{\varphi}$ из графа G_1 получаем граф G_2 .

Предположим теперь, что у нас нашлась еще какая-то перестановка $\hat{\varphi}$, отличная от $2k$ уже найденных перестановок и переводящая G_1 в некоторый граф G_3 . Тогда все перестановки вида $\hat{\varphi} \cdot \varphi$, $\varphi \in \text{Aut}(G_1)$, переводят G_1 в G_3 . При этом, так как $\hat{\varphi} \notin \text{Aut}(G_1)$, граф G_3 отличен от G_1 . Покажем, что этот граф отличен и от G_2 . Действительно, если бы перестановки $\tilde{\varphi} \cdot \varphi_i$ и $\hat{\varphi} \cdot \varphi_j$ переводили граф G_1 в один и тот же граф G_2 , то мы бы имели равенства вида

$$\hat{\varphi} \cdot \varphi_j = \tilde{\varphi} \cdot \varphi_i \iff \hat{\varphi} = \tilde{\varphi} \cdot \varphi_i \cdot \varphi_j^{-1} = \tilde{\varphi} \cdot \varphi_k, \quad \varphi_k \in \text{Aut}(G_1),$$

а это невозможно — мы предположили, что перестановка $\hat{\varphi}$ отлична от перестановок вида $\tilde{\varphi} \cdot \varphi_k$.

Продолжая указанный процесс, мы в конце концов исчерпаем все множество Φ перестановок. При этом все это множество окажется разбитым на N блоков, каждый из которых имеет мощность k . Каждый такой блок соответствует перестановкам, переводящим граф G_1 в некоторый изоморфный, но отличный от G_1 помеченный граф G_i . Общее же количество N различных помеченных графов связано с количеством $n!$ всех перестановок множества $V(G_1)$ вершин графа G_1 формулой

$$N \cdot k = N \cdot |\text{Aut}(G_1)| = n!,$$

из которой и следует формула (1.6). □

g. Переведем проведенные выше рассуждения на язык теории групп. Для этого рассмотрим множество \mathcal{X} всех помеченных графов, построенных на n -множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ вершин, а также действие группы S_n перестановок на этом множестве \mathcal{X} . Действие перестановки σ на помеченный граф G при этом определим следующим образом: любая пометка i вершины графа переходит под действием перестановки σ в пометку $\sigma(i)$. В качестве примера рассмотрим граф G_1 на рис. 1.42(a), а также перестановку $\sigma = (1, 2, 3)$. В этом случае пометка 1 вершины графа G_1 переходит под действием перестановки σ в пометку $\sigma(1) = 2$, пометка 2 — в пометку $\sigma(2) = 3$, а пометка 3 — в пометку $\sigma(3) = 1$. В результате такого действия мы получим граф G_4 , показанный на рис. 1.42(b).



Рис. 1.42. Идентичные помеченные графы на трех вершинах:
(a) граф G_1 ; (b) граф G_4

Говорят, что графы G_1 и G_2 изоморфны друг другу, если существует такая перестановка σ множества вершин, которая переводит граф G_1 в граф $G_2 = \sigma \circ G_1$, т. е. такая перестановка, которая любое ребро $\{i, j\}$ в графе G_1 переводит в ребро $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$. На языке теории групп это означает, что эти графы эквивалентны относительно действия группы S_n , т. е. принадлежат одной и той же орбите

$$S_n \circ G = \{\sigma \circ G : \sigma \in S_n\}$$

элемента G множества \mathcal{X} всех графов, построенных на n вершинах, под действием группы S_n . Каждая такая орбита на языке теории графов представляет собой некоторый непомеченный граф на n -множестве вершин.

Рассмотрим теперь подмножество $\text{Aut}(G)$ перестановок σ , любой элемент которого оставляет некоторый помеченный граф $G \in \mathcal{X}$ неподвижным:

$$\text{Aut}(G) := \{\sigma \in S_n : \sigma \circ G = G\}.$$

Несложно понять, что такое подмножество перестановок образует подгруппу $\text{Aut}(G)$ группы S_n перестановок. Такая подгруппа на языке теории групп называется *стабилизатором* элемента G множества \mathcal{X} . Эта подгруппа (как и любая подгруппа H группы S_n) задает разбиение группы S_n всех перестановок на блоки $\sigma \cdot \text{Aut}(G)$, называемые смежными классами группы S_n по подгруппе $\text{Aut}(G)$. Размер этих блоков одинаков и равен порядку $|\text{Aut}(G)|$ группы $\text{Aut}(G)$. Следовательно, порядок $|S_n|$ всей группы перестановок равен произведению порядка $|\text{Aut}(G)|$ группы автоморфизмов графа G на количество смежных классов $S_n/\text{Aut}(G)$ группы S_n по подгруппе $\text{Aut}(G)$ (теорема Лагранжа):

$$|S_n| = n! = |\text{Aut}(G)| \cdot |S_n/\text{Aut}(G)|.$$

В рассмотренном нами примере мы разбили множество S_3 всех перестановок вершин графа G_1 на блоки, состоящие из перестановок вида $\tilde{\varphi} \cdot \varphi$, где $\varphi \in \text{Aut}(G_1)$, и показали, что размер каждого блока равен двум — порядку группы $\text{Aut}(G_1)$.

Затем мы заметили, что любому такому блоку перестановок отвечает некоторый граф G_i , изоморфный исходному графу G . На языке теории групп данный факт формулируется в виде достаточно важного и в то же время достаточно просто доказываемого утверждения — так называемой теоремы о стабилизаторе орбит. Согласно этой теореме имеется взаимно однозначное соответствие между всеми элементами орбиты $S_n \circ G$ графа G (т. е. всеми изоморфными G графами на n вершинах) и фактормножеством $S_n/\text{Aut}(G)$, т. е. множеством всех смежных классов группы S_n по стабилизатору $\text{Aut}(G)$. Следствием этого утверждения как раз и является равенство

$$|S_n| = n! = |\text{Aut}(G)| \cdot |S_n \circ G| = |\text{Aut}(G)| \cdot N,$$

где N — количество графов на n вершинах, изоморфных G .

h. Дадим еще одно важное определение.

Определение 9. Граф G называется *асимметричным*, если его группа автоморфизмов тривиальна, т. е. состоит только из тождественной перестановки множества $[n]$ его вершин.

Важно заметить, что чем выше n , тем большее количество графов асимметрично. Следовательно, при больших n количество \mathcal{M}_n непомеченных графов можно оценить по формуле

$$\mathcal{M}_n \sim \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}.$$

Упражнения

1 (1 балл). Докажите, что показанные на рис. 1.43 графы G_1 и G_2 изоморфны, построив взаимно однозначное отображение $\varphi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$, сохраняющее отношение смежности.

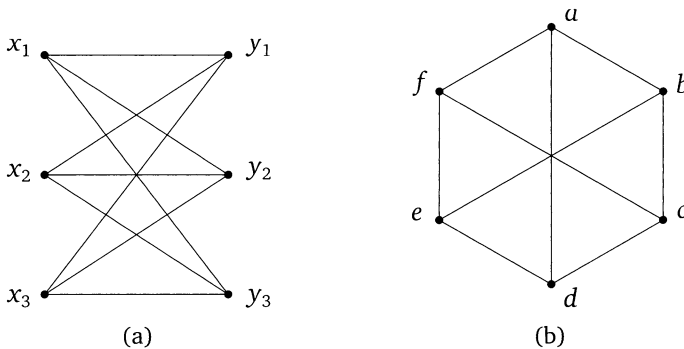


Рис. 1.43. (a) Граф G_1 ; (b) граф G_2

2 (1 балл). Докажите, что графы G и H изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их дополнения \bar{G} и \bar{H} .

3 (1,5 балла). Имеется всего два простых связных неизоморфных друг другу графа G_1 и G_2 , степеньная последовательность которых имеет вид $(6, 3, 3, 3, 3, 3)$. Нарисуйте эти графы.

4 (1,5 балла). Сколько существует различных непомеченных турниров, построенных на двух, трех и четырех вершинах? Постройте все эти турниры.

5 (1 балл). Являются ли изоморфными друг другу графы, изображенные на рис. 1.44?

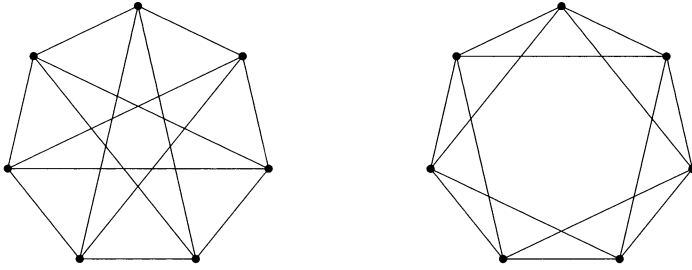


Рис. 1.44

6 (1 балл). Среди графов, показанных на рис. 1.45, найдите изоморфные и/или неизоморфные друг другу графы. Есть ли среди графов, изображенных на рис. 1.45, хотя бы один граф, изоморфный хотя бы одному из графов, показанных на рис. 1.44?

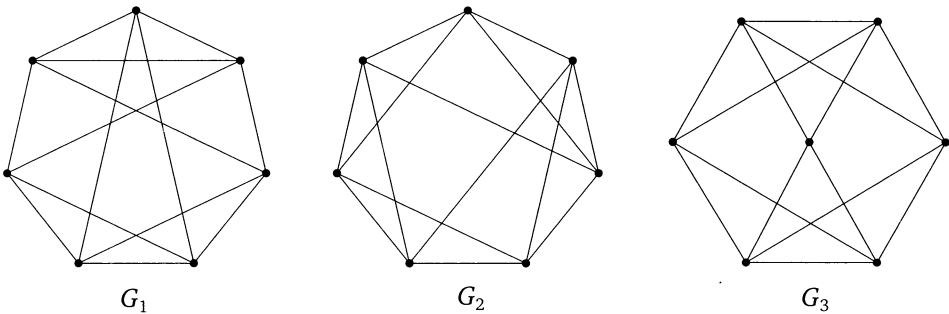


Рис. 1.45

7 (1 балл). Найдите среди графов, изображенных на рис. 1.46, пару изоморфных.

8 (1,5 балла). Докажите, что изображенные на рис. 1.47 и рис. 1.48 графы соответствуют одному и тому же непомеченному графу — графу Петерсена.

9 (1,5 балла). Из предыдущего упражнения следует, что в графе Петерсена имеются циклы длины 5, 6, 8 и 9. Докажите, что в графе Петерсена отсутствуют циклы длины 7.

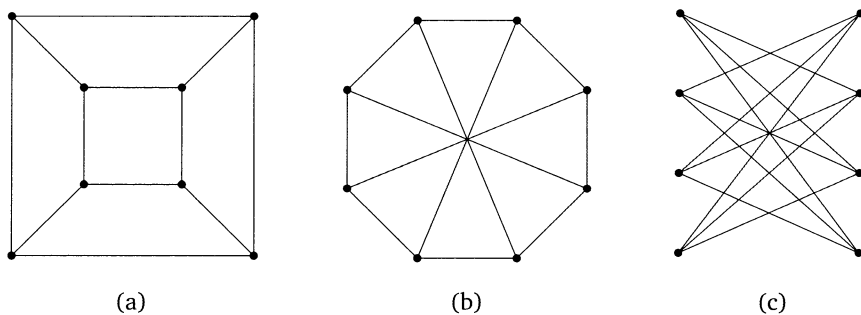
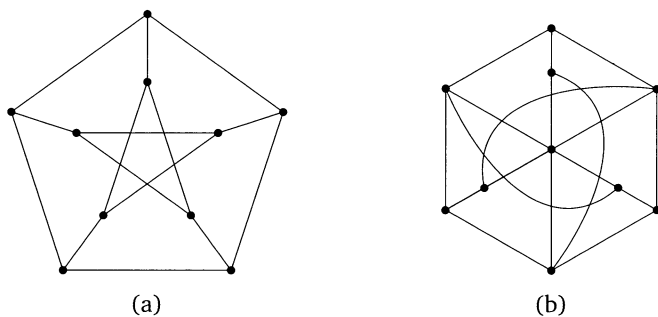
Рис. 1.46. (a) Граф G_1 ; (b) граф G_2 ; (c) граф G_3 

Рис. 1.47

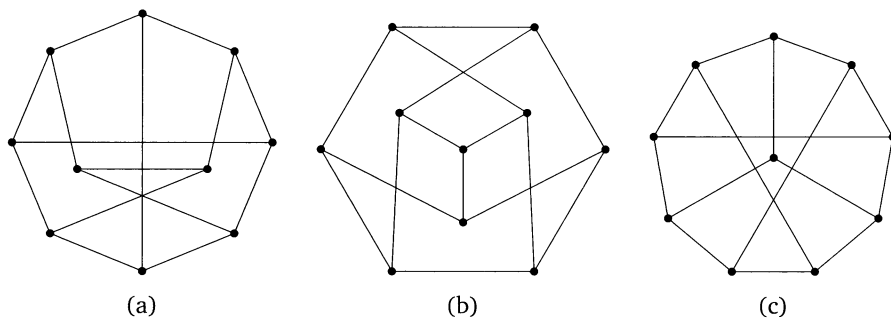


Рис. 1.48

10 (1 балл). Опишите все графы на n вершинах, для которых любая n -перестановка является автоморфизмом.

11 (1 балл). Докажите, что для любого простого графа G группа $\text{Aut}(G)$ совпадает с $\text{Aut}(\bar{G})$.

12 (1 балл). Подсчитайте количество автоморфизмов графов P_n , C_n и $K_{n,m}$.

13 (1,5 балла). Приведите пример простого графа на 6 вершинах, группа автоморфизмов которого тривиальна.

Дополнительные упражнения

14 (1,5 балла). Сколько существует различных 4-регулярных простых непомеченных графов, построенных на семи вершинах?

15 (1,5 балла). Являются ли изоморфными друг другу графы G_1 и G_2 , изображенные на рис. 1.49?

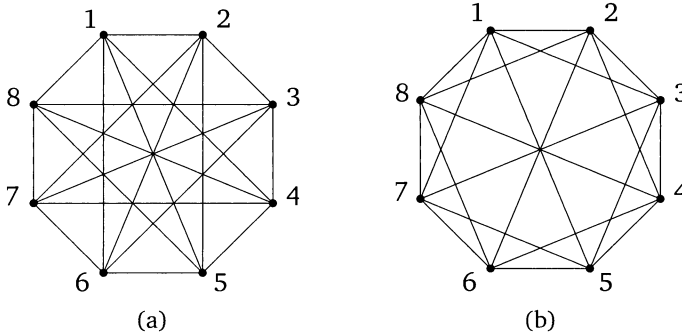


Рис. 1.49. (a) Граф G_2 ; (b) граф G_1

16 (1 балл). Граф G называется самодополненным (self-complementary), если он изоморфен своему дополнению \bar{G} . Приведите примеры самодополненных графов, построенных на четырех и пяти вершинах.

17 (1,5 балла). Докажите, что если граф G , построенный на n вершинах, является самодополненным, то либо n , либо $n - 1$ делится на 4. Постройте самодополненный граф на 8 вершинах.

18 (2,5 балла). Докажите, что самодополненный граф G , построенный на n вершинах, существует тогда и только тогда, когда n или $n - 1$ делится на 4.

19 (1 балл). Найдите граф, не изоморфный циклу C_4 , группа автоморфизмов которого совпадает с группой $\text{Aut}(C_4)$ автоморфизма графа C_4 .

20 (1,5 балла). Сколько существует различных непомеченных связных графов, построенных на четырех вершинах? Постройте все эти графы. Для каждого из этих графов опишите группу автоморфизмов соответствующего помеченного графа G_i , $i = 1, \dots, 6$, а также подсчитайте количество графов, изоморфных G_i .

21 (1,5 балла). Подсчитайте количество автоморфизмов графа на рис. 1.46(a).

22 (1,5 балла). Рассмотрим граф Петерсена, вершины которого помечены двухэлементными подмножествами 5-множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Покажите, что любой автоморфизм графа Петерсена отображает цикл $(\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\})$ в 5-цикл $(\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, a\}, \{b, c\}, \{d, e\})$, где (a, b, c, d, e) — произвольная перестановка 5-элементного множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Докажите, что порядок группы автоморфизмов графа Петерсена равен 120.

23 (2 балла). Постройте простой граф, группа автоморфизмов которого изоморфна C_3 .

24 (2,5 балла). Постройте 3-регулярный граф на 12 вершинах, группа автоморфизмов которого тривиальна.

25 (2 балла). Опишите группу автоморфизмов полного двудольного графа $K_{m,n}$ в случае $m \neq n$ и в случае $m = n$.

26 (1,5 балла). Докажите, что порядок группы автоморфизмов любого турнира есть нечетное число.

Решение упражнений

1. Искомое отображение φ может выглядеть, например, так:

$$\varphi(x_1) = a, \quad \varphi(y_1) = b, \quad \varphi(y_2) = d, \quad \varphi(y_3) = f, \quad \varphi(x_2) = c, \quad \varphi(x_3) = e.$$

2. Пусть $\varphi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ — отображение, сохраняющее отношение смежности в графах G_1 и G_2 . Как следствие, φ сохраняет отношение несмежности в этих графах. Но тогда φ сохраняет как отношение несмежности, так и отношение смежности в графах \bar{G}_1 и \bar{G}_2 . Так как дополнение к \bar{G} есть G , верно и обратное утверждение.

3. Графы G_1 и G_2 с последовательностью вершин (6, 3, 3, 3, 3, 3, 3) показаны на рис. 1.50. В графе G_1 помимо циклов длины 3 имеются циклы длины 4, 5 и так далее, тогда как в графе G_2 имеются только циклы длины 3.

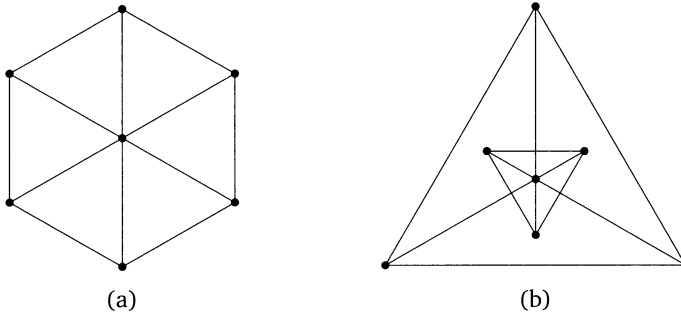


Рис. 1.50. Пара неизоморфных графов: (a) граф G_1 ; (b) граф G_2

4. Все различные неизоморфные друг другу турниры показаны на рис. 1.51.

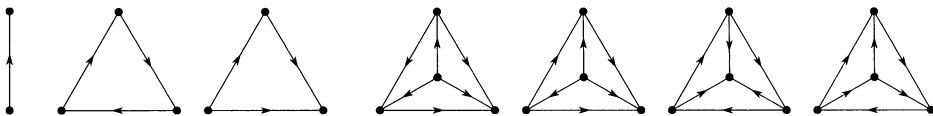


Рис. 1.51. Неизоморфные турниры на $n \leq 4$ вершинах

5. Да, соответствующий изоморфизм показан на рис. 1.52. Еще один способ убедиться в этом — рассмотреть дополнения этих графов (рис. 1.53) и убедиться, что они оба представляют собой циклы C_7 .

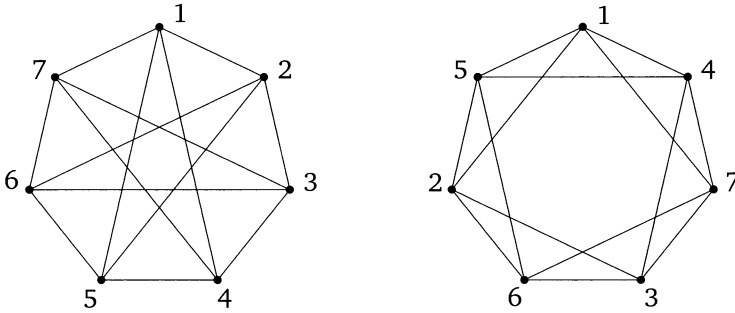


Рис. 1.52

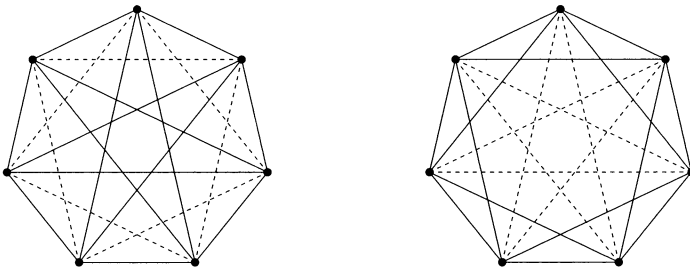


Рис. 1.53

6. Графы G_1 и G_3 изоморфны друг другу (см. рис. 1.54), тогда как граф G_2 изоморфен графам, показанным на рис. 1.52, и не изоморфен графам G_1 и G_3 . Действительно, у графов G_1 и G_3 из каждой вершины исходят два различных цикла длины три, тогда как в графах, изображенных на рис. 1.52, из каждой вершины исходит лишь один цикл длины три.

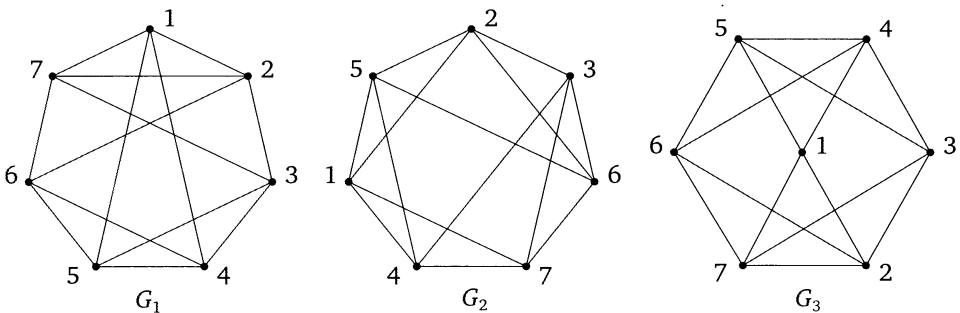


Рис. 1.54

Еще один способ доказательства — рассмотрение дополнений этих графов (рис. 1.55). Дополнения \bar{G}_1 и \bar{G}_3 представляют собой несвязное объединение циклов C_3 и C_4 , и потому G_1 и G_3 изоморфны друг другу. Граф же G_2 представляет собой цикл C_7 , поэтому G_2 изоморфен графам из предыдущего упражнения.

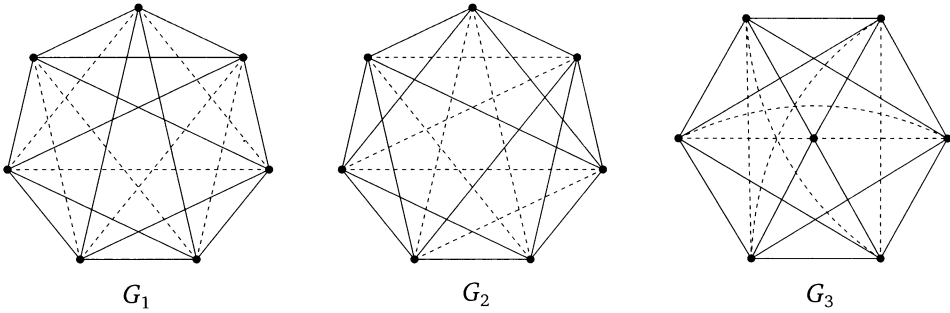
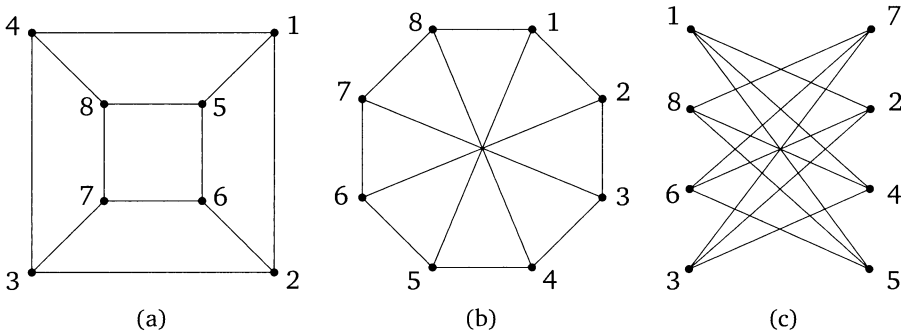


Рис. 1.55

7. Графы G_1 и G_3 являются изоморфными друг другу графами — соответствующий изоморфизм показан на рис. 1.56. Граф G_2 не является изоморфным остальным графам. Действительно, рассмотрим попарно несмежные вершины 1, 6, 8, 3 в графе G_1 . Если бы существовал изоморфизм $\varphi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$, то образы этих четырех вершин также должны были бы быть несмежными. Однако в графе G_2 четверка попарно несмежных между собой вершин отсутствует.

Рис. 1.56. (a) Граф G_1 ; (b) граф G_2 ; (c) граф G_3

8. Пометим вершины каждого графа $\binom{5}{2} = 10$ различными двухэлементными подмножествами множества $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ так, чтобы соответствующие подмножества у смежных вершин не содержали одинаковых элементов. В результате каждый из графов на рис. 1.57 и рис. 1.58 будет представлять собой граф Петерсена, изображенный на рис. 1.18.

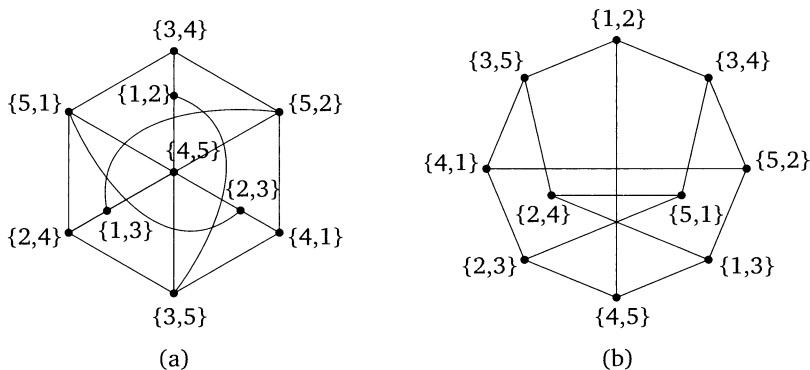


Рис. 1.57

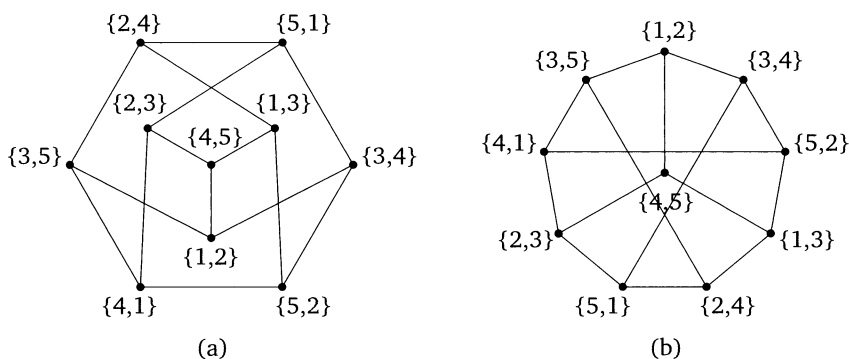


Рис. 1.58

9. Предположим, что в графе Петерсена имеется цикл C длины 7. Так как в графе Петерсена циклы длины 3 и 4 отсутствуют, хорды в цикле C невозможны. Но граф Петерсена 3-регулярен, поэтому из каждой вершины, входящей в C , должно исходить еще ровно одно ребро. Входить же любое такое ребро должно только лишь в оставшиеся вне C три вершины графа G . Согласно принципу Дирихле среди этих трех вершин обязана найтись вершина x , в которую приходят как минимум три ребра. Так как граф G 3-регулярен, в нее приходят ровно три ребра. Рассмотрим тогда три вершины цикла C , соединенные с вершиной x . Заметим, что при любой расстановке этих вершин по циклу C среди них обязательно найдутся две вершины, которые либо оказываются смежными, либо имеют общего соседа. Как следствие, такие вершины вместе с вершиной x образуют либо цикл длины 3, либо цикл длины 4, что невозможно.

10. Достаточно очевидно, что полный граф K_n и пустой граф \bar{K}_n переходят в себя под действием любой перестановки вершин. Покажем, что никакой другой граф G подобным свойством не обладает. Несложно убедиться, что в любом графе G , отличном от K_n и \bar{K}_n , существует вершина x , степень кото-

рой отлична от 0 и от $n - 1$. У такой вершины обязательно существует хотя бы одна смежная с ней вершина y , а также хотя бы одна несмежная с ней вершина z . Осталось заметить, что перестановка, меняющая местами y и z , автоморфизмом графа G не является.

11. Данное утверждение следует из того факта, что любой автоморфизм графа сохраняет как отношение смежности, так и отношение несмежности в графе.

12. Группа автоморфизмов графа P_n изоморфна группе \mathbb{Z}_2 , а графа C_n — группе D_n . Поэтому количество автоморфизмов первого графа равно двум, а второго — $2n$. Наконец, в случае полного двудольного графа $K_{n,n}$ любая перестановка вершин левой доли, равно как и любая перестановка вершин второй доли, переводит граф в себя. Всего имеется $m! \cdot n!$ таких перестановок. В случае же, когда $n = m$, мы можем еще переставить вершины левой и правой долей, поэтому количество автоморфизмов графа $K_{n,n}$ равно $2(n!)^2$.

13. Примеры искомым графов показаны на рис. 1.59.

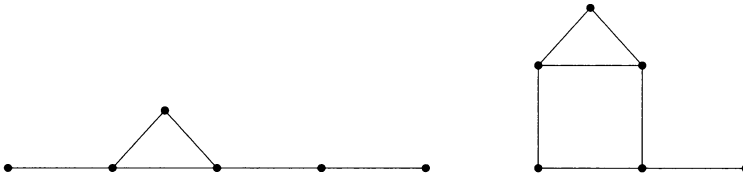


Рис. 1.59. Графы с тривиальной группой автоморфизмов

ГЛАВА 2

Деревья и их перечисление

§1. Основные свойства деревьев

1. Одним из самых важных понятий теории графов является понятие дерева.

а. Начнем с формального определения этого понятия.

Определение 1. *Деревом* называется простой связный граф без циклов. Произвольный (не обязательно связный) простой граф без циклов называется *лесом*.

На рис. 2.1 показан пример дерева T , построенного на 10 вершинах.

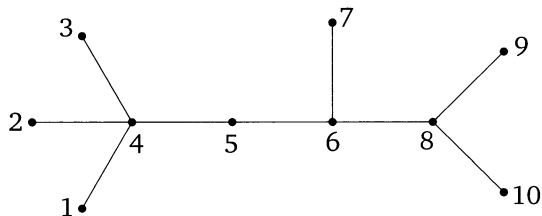


Рис. 2.1. Пример дерева на десяти вершинах

б. Изучим простейшие свойства деревьев. Начнем со следующего важного определения.

Определение 2. Вершина графа G , имеющая единичную степень, называется *листом*.

У дерева T , показанного на рис. 2.1, имеется шесть листьев — вершины 1, 2, 3, 7, 9 и 10.

Лемма 3. У любого дерева T , построенного на $n \geq 2$ вершинах, имеется как минимум два листа.

Доказательство. Рассмотрим произвольный простой путь $P = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ максимальной длины в T (рис. 2.2). Для изображенного на рис. 2.1

дерева таким путем является, например, путь $P = (1, 4, 5, 6, 8, 9)$. Очевидно, что такой путь в T всегда существует, причем его длина k равна диаметру $\text{diam}(T)$ дерева T . Покажем, что концы этого пути — вершины x_1 и x_k — обязаны быть листьями.

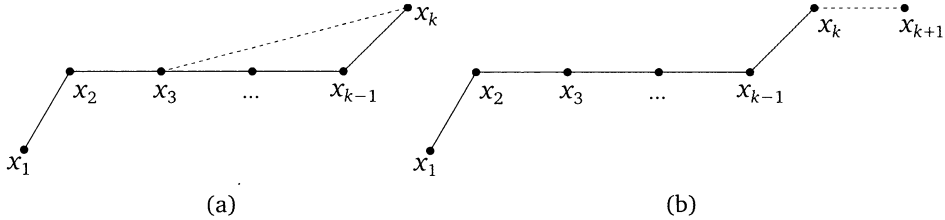


Рис. 2.2. (a) Граф G ; (b) граф G'

Предположим, что это не так, т. е. предположим, например, что степень вершины x_k больше или равна двум. Это означает, что из вершины x_k помимо ребра $\{x_{k-1}, x_k\}$ исходит еще хотя бы одно ребро. Всего имеют место два варианта развития событий. В первом из них исходящее из x_k ребро приходит в одну из вершин пути P , отличную от x_{k-1} (рис. 2.2(a)). Но в этом случае в дереве T появляется цикл, а это невозможно. Во втором варианте инцидентное x_k ребро приходит в какую-то вершину x_{k+1} , отличную от вершин пути P (рис. 2.2(b)). Но тогда в графе G имеется путь $(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1})$, длина которого на единицу больше длины исходного пути P . А это, в свою очередь, противоречит максимальности пути P . Полученное противоречие доказывает наше утверждение. \square

с. Из доказанной леммы достаточно легко следует одно из основных свойств дерева T .

Теорема 4. В дереве T , построенном на n вершинах, имеется ровно $n - 1$ ребро:

$$|E| = |V| - 1 = n - 1.$$

Доказательство проведем индукцией по количеству n вершин в графе. База индукции очевидна — дерево, состоящее из $n = 1$ вершины, не имеет ни одного ребра. Предположим теперь, что утверждение доказано для деревьев, построенных на n вершинах, и покажем, что оно остается верным для произвольного дерева с $n + 1$ вершиной.

Действительно, по доказанной выше лемме 3 у любого такого дерева имеется хотя бы один лист x . Удалим теперь этот лист x вместе с инцидентным ему ребром e . Полученный в результате такой операции граф T' останется, очевидно, связным. Действительно, любой путь, соединяющий в T произвольные две вершины, отличные от x , ребро e содержать не может. Поэтому удаление e на связность оставшихся в T' вершин никак не повлияет. Наконец, от удаления ребра e никаких дополнительных циклов также появиться не может. Следовательно, граф T' является деревом, построенным на n вершинах. Но у такого дерева по индукционному предположению

имеется $n - 1$ ребро. Следовательно, у исходного дерева T имеется ровно n ребер. \square

Достаточно очевидно и обратное утверждение.

Теорема 5. *Любой простой связный граф G , построенный на n вершинах и имеющий $n - 1$ ребро, является деревом.*

Доказательство. Действительно, пусть это не так. Тогда в графе G имеется цикл C . В параграфе, посвященном основным операциям над графами, мы ввели важное понятие моста как ребра, после удаления которого простой связный граф теряет связность. В том же параграфе мы предьявили важную характеристику моста — мы сказали, что мостом в графе G является ребро, не принадлежащее никакому циклу в графе. Это утверждение можно еще переформулировать так: любое ребро e , принадлежащее циклу C , мостом в графе G не является. Следовательно, удаление такого ребра не приводит к потере связности графа G .

Рассмотрим тогда простой связный граф $G_1 = G - e$. Если в нем остались циклы, мы выберем один из них и удалим любое ребро, принадлежащее этому циклу. Продолжая далее, мы на каком-то шаге получим наконец простой связный граф без циклов, т. е. дерево. Но мы только что доказали, что в дереве на n вершинах имеется ровно $n - 1$ ребро. Следовательно, нам для получения дерева никаких ребер удалять не пришлось, т. е. исходный граф G изначально представлял собой дерево. \square

Следствие 6. *Всякий связный граф, построенный на n вершинах, имеет как минимум $n - 1$ ребро.*

Доказательство этого утверждения абсолютно аналогично доказательству теоремы 5. Действительно, рассмотрим произвольный связный граф. Если такой граф не является деревом, то у него имеется хотя бы один цикл. В этом цикле мы всегда можем удалить одно ребро, и граф при этом останется связным. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока в графе не останется ни одного цикла. В результате получим простой связный граф без циклов, т. е. дерево. Количество ребер у дерева равно $n - 1$. Следовательно, у исходного графа имеется как минимум $n - 1$ ребро. \square

d. Следствие 6 по-другому можно переформулировать так: у всякого связного графа существует остовное дерево. Мы можем получить это дерево, либо удаляя лишние ребра, либо (что более рационально) используя так называемый алгоритм поиска в глубину.

В простейшем своем исполнении этот алгоритм выглядит так (см. рис. 2.3). Пусть у нас имеется связный граф G . Будем считать, что все его вершины окрашены в белый цвет. Выберем произвольную вершину x этого графа и окрасим ее в черный цвет. Затем начнем перебирать все инцидентные x ребра. В случае, если ребро e соединяет x с еще не окрашенной вершиной y , окрашиваем ребро $e = \{x, y\}$ в черный цвет (на рис. 2.3 такие ребра помечены толстыми линиями) и рекурсивно повторяем процесс, запуская алгоритм поиска в глубину с вершины y . Если для текущей вершины z все смежные с ней вершины оказываются окрашенными в черный цвет, то

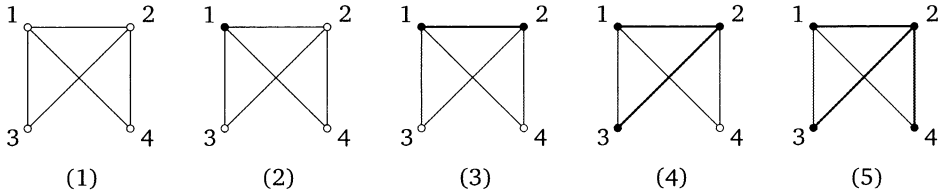


Рис. 2.3. Алгоритм поиска в глубину

алгоритм поиска в глубину для нее заканчивается и мы переходим на более высокий уровень рекурсии.

На рис. 2.3 приведено пошаговое выполнение алгоритма на примере графа G , построенного на четырех вершинах. Как видно, в результате работы алгоритма поиска в глубину все вершины перекрашиваются в черный цвет. Тем же цветом оказываются помечены и ребра (жирные линии на рис. 2.3), причем помеченные таким образом вершины и ребра представляют собой остовное дерево $T(G)$ графа G . Действительно, по окончании работы алгоритма мы получаем окрашенный в черный цвет связный подграф, количество ребер в котором на единицу меньше количества вершин, а мы только что доказали, что такой подграф обязательно является деревом.

Алгоритм поиска в глубину очень часто используется в разнообразных приложениях, связанных с теорией графов. Например, с помощью этого алгоритма можно найти все компоненты связности неориентированного графа, осуществить топологическую сортировку вершин ориентированного ациклического графа, найти мосты и/или точки сочленения в связном графе и т. д.

е. Отметим еще две важные характеристики дерева. Первая из них описывает ребра дерева.

Утверждение 7. *Связный граф T является деревом тогда и только тогда, когда любое его ребро является мостом.*

Доказательство практически очевидно. Действительно, по определению в дереве T циклы отсутствуют. Следовательно, ни одно из его ребер циклу не принадлежит. Согласно основной характеристике моста это и означает, что любое ребро графа T является мостом. Обратное, если любое ребро связного графа является мостом, то оно не принадлежит никакому циклу. Поэтому данный граф обязан быть деревом. \square

Вторая характеристика связана с понятием связности в графе. Мы знаем, что в любом связном графе любые две вершины связаны по крайней мере одним путем. Дерево — это связный граф, в котором для любых двух вершин такой путь единствен.

Утверждение 8. *Граф T является деревом тогда и только тогда, когда для любых двух его вершин существует единственный простой путь, соединяющий эти вершины.*

Доказательство. Пусть в T для любой пары вершин существует единственный соединяющий их простой путь. Тогда T является связным графом. Если бы в таком графе существовал цикл C , то между любыми двумя вершинами этого цикла существовало бы два различных пути, соединяющие эти вершины, а это невозможно.

Обратно, пусть T является деревом, и пусть в нем существуют два различных простых пути P и Q , соединяющие какие-то две вершины x и y . Рассмотрим симметрическую разность $P \Delta Q$ этих путей. Подграф $P \Delta Q$ состоит из одного или нескольких циклов, а это противоречит тому, что T является деревом. \square

Следствие 9. Пусть T есть остовное дерево связного графа G , и пусть e есть ребро, не принадлежащее T . Тогда граф $T + e$ содержит единственный цикл, причем этот цикл проходит через ребро e .

Доказательство. Заметим прежде всего, что любой цикл в графе $T + e$ обязан содержать ребро $e = \{x, y\}$ — в противном случае мы бы получили цикл и в дереве T , чего быть не может. Кроме того, C есть цикл в $T + e$ тогда и только тогда, когда $C - e$ есть x - y -путь в исходном дереве T . Но в дереве T x - y -путь единствен. Следовательно, $T + e$ содержит единственный цикл, проходящий через ребро e . \square

f. Рассмотрим теперь простой связный граф G , в котором имеется хотя бы одна пара отличных друг от друга остовных деревьев T и T' .

Утверждение 10. Рассмотрим два различных остовных дерева T и T' простого связного графа G . Пусть e есть ребро остовного дерева T , не принадлежащее T' . Тогда в остовном дереве T' найдется ребро e' , не принадлежащее остовному дереву T и такое, что граф $T - e + e'$ является остовным деревом графа G .

Доказательство. Удаление ребра $e = \{x, y\}$ разваливает T на две связные компоненты. Обозначим через V_1 и V_2 такие множества вершин этих двух компонент, что $x \in V_1$, $y \in V_2$. В дереве T' существует единственный путь, соединяющий вершины x и y . Такой путь обязан иметь ребро e' из V_1 в V_2 . Так как e есть единственное ребро в дереве T между V_1 и V_2 , то ребро e' не принадлежит дереву T . Граф $T - e + e'$ является связным и содержит $n - 1$ ребро, а следовательно, является остовным деревом графа G .

Заметим, что так как в дереве T имеется единственный путь между вершинами x и y , то добавление к этому пути ребра e' приводит к появлению единственного цикла в графе $T + e'$. Удаление же из этого графа ребра e уничтожает цикл, превращая граф $T - e + e'$ в связный ациклический подграф — еще одно остовное дерево графа G . \square

2. Иногда наряду с обычными деревьями и лесами рассматривают так называемые *корневые деревья* и *леса*.

Определение 11. *Корневым деревом* называется дерево с выделенной вершиной, называемой *корнем*. *Корневым лесом* называется лес, каждая компонента связности которого представляет собой *корневое дерево*.

а. Наглядно корневое дерево можно представлять себе так. Представим дерево в виде некоторого физического объекта, вершинами которого являются некоторые шарниры, а ребрами — соединяющие эти шарниры трубки. Подвесивая такое дерево за какую-то вершину x , мы как раз и получим корневое дерево с корнем в вершине x .

В качестве примера подвесим показанное на рис. 2.4(а) дерево за вершину 6. В результате получим корневое дерево, показанное на рис. 2.4(б).

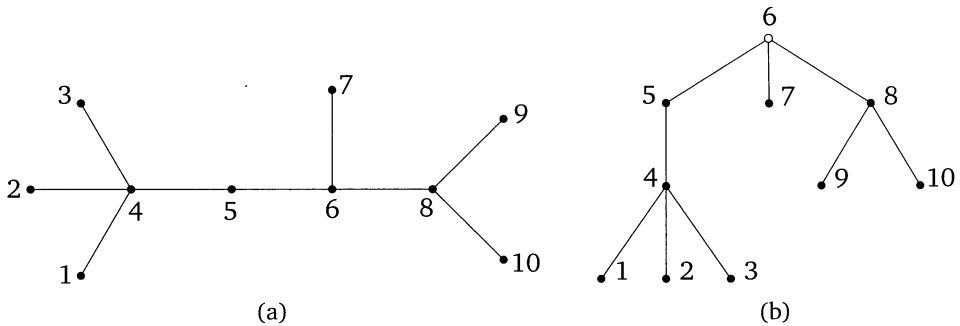


Рис. 2.4. (а) Дерево на десяти вершинах; (б) корневое дерево с корнем в вершине 6

б. В любом корневом дереве T_r с корнем в вершине r у нас имеется единственный путь из корня в произвольную вершину x . Длина этого пути определяет *уровень* вершины x в корневом дереве T_r . *Высотой* дерева называется длина наибольшего пути от корня r дерева до вершины x . Ясно, что в последнем случае вершина x обязана быть листом дерева T_r .

Так, изображенное на рис. 2.4(б) дерево T_r имеет высоту, равную трем. Уровень вершины 4 равен двум.

с. Иногда корневое дерево T_r удобно ориентировать от корня r дерева к его листьям (см. рис. 2.5), получая ориентированный граф \vec{T}_r , который в английском языке носит название *arborescence*. В таком орграфе входящая степень любой вершины, отличной от корня, будет равняться единице. Корень ориентированного дерева \vec{T}_r будет в этом случае источником, т. е. вершиной,

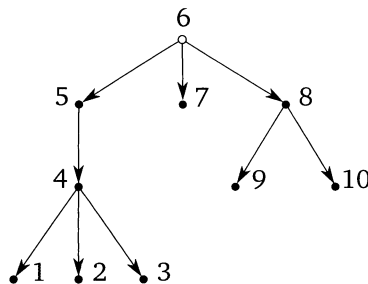


Рис. 2.5

входящая степень которой равна нулю, а любой лист будет стоком, т. е. вершиной, исходящая степень которой равна нулю.

В дереве \vec{T}_r вершина x называется *родителем* (parent) вершины y , а вершина y — *сыном* (child) вершины x , если существует ориентированное ребро (x, y) , ведущее из x в y . Так, на рис. 2.5 вершина 5 является родителем для вершины 4, а вершина 4 — сыном для вершины 5.

Если существует ориентированный путь из вершины x в вершину z , то вершина x называется *предком* (ancestor) для вершины z , а вершина z — *потомком* (descendant) для вершины x . На рис. 2.5 вершины 1, 2 и 3 являются потомками для вершины 5, а вершина 5 — их общим предком.

В случае, если наибольшая исходящая степень вершины в дереве равняется m , такое дерево называется m -арным деревом. Так, дерево, показанное на рис. 2.5, является 3-арным деревом. Часто в случае m -арных деревьев дополнительно подразумевается, что на множестве потомков произвольной вершины x задан некоторый порядок. Например, говоря про бинарные деревья, часто подразумевают, что это деревья, в которых у каждой из вершин может быть как максимум два различных сына — левый и/или правый.

d. Выбор корня в дереве T задает на множестве $V(T)$ вершин этого дерева частичный порядок, превращая это множество в частично упорядоченное. В одной из следующих глав мы подробнее поговорим о таком множестве, а сейчас лишь дадим его определение.

Определение 12. *Частично упорядоченным множеством* называется множество P (конечное или счетное) с введенным на нем бинарным отношением \preceq (так называемым *отношением частичного порядка*), удовлетворяющим следующим трем аксиомам.

1. Рефлексивность: для любого $x \in P$ справедливо соотношение $x \preceq x$.
2. Транзитивность: если $x \preceq y$ и $y \preceq z$, то $x \preceq z$.
3. Антисимметричность: если $x \preceq y$ и $y \preceq x$, то $x = y$.

В случае корневого дерева мы будем считать, что $x \preceq y$, если x лежит на пути, соединяющем корень r дерева с вершиной y . Иными словами, это означает, что в соответствующем T_r ориентированном дереве \vec{T}_r вершина x является предком для вершины y . Кроме того, любые вершины, лежащие на пути, соединяющем корневую вершину с одним из его листов, сравнимы между собой, т. е., как говорят, образуют *цепь* в рассматриваемом частично упорядоченном множестве.

3. Давайте ненадолго вернемся к уже изученному нами алгоритму поиска в глубину в связном графе G .

a. Ранее мы показали, как с использованием данного алгоритма построить остовное дерево $T(G)$ графа G . Заметим сразу же, что в результате работы алгоритма мы, по сути, получаем не просто дерево, а корневое дерево — в качестве корня у нас выступает вершина, с которой мы запускаем наш алгоритм (вершина 1 на рис. 2.3). Такое корневое дерево $T^*(G)$ обладает одним очень полезным свойством, о котором следует сказать несколько слов. Оказывается, любое такое дерево является *нормальным*.

Определение 13. Остовное дерево $T^*(G)$ в связном графе G называется *нормальным*, если концевые вершины x, y любого ребра $e = \{x, y\}$, не принадлежащего дереву $T^*(G)$, сравнимы относительно частичного порядка \preceq , введенного на множестве вершин корневого дерева $T^*(G)$. Иными словами, дерево $T^*(G)$ нормально, если один из концов x, y любого ребра, не принадлежащего этому дереву, лежит на единственном пути между вторым его концом и корнем дерева $T^*(G)$.

Рассмотрим в качестве примера остовное корневое дерево $T^*(G)$ для графа G , показанного на рис. 2.6(a). В качестве корня дерева выбрана вершина 6, помеченная белым цветом на рисунке. Жирными черными линиями помечены ребра остовного дерева $T^*(G)$. Тонкими черными линиями отмечены ребра, не вошедшие в остовное дерево. Заметим, что в этом дереве имеется шесть листьев — вершины 1, 2, 3, 7, 9, 10. Каждый из этих листьев соединен с корневой вершиной 6 некоторым простым путем. Все вершины, лежащие на любом из этих путей, сравнимы между собой относительно частичного порядка \preceq . Заметим теперь, что концевые вершины всех входящих в остовное дерево ребер лежат на каком-то из этих путей, соединяющих один из листьев с корнем. Так, ребро $\{3, 5\}$ лежит на единственном пути $\{3, 4, 5, 6\}$, соединяющем лист 3 дерева $T^*(G)$ с корнем — вершиной 6, ребро $\{4, 6\}$ лежит, к примеру, на пути $\{1, 4, 5, 6\}$, и т. д. Как следствие, такое остовное дерево является нормальным.

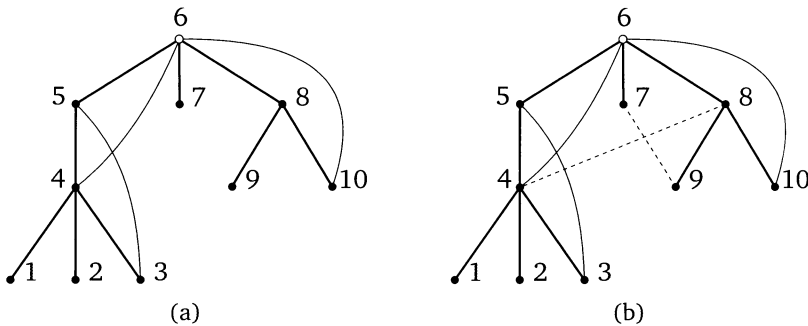


Рис. 2.6. (a) Нормальное остовное дерево; (b) остовное дерево, нормальным не являющееся

Рассмотрим теперь граф, показанный на рис. 2.6(b). В таком графе помеченное жирным черным цветом дерево $T^*(G)$ по-прежнему является остовным, однако нормальным оно уже не является. Действительно, рассмотрим ребра $\{7, 9\}$ и $\{4, 8\}$, помеченные на рисунке пунктиром. В дереве $T^*(G)$ отсутствует путь из листа в корень, который содержал бы обе концевые вершины ребра $\{7, 9\}$. Тот же факт имеет место и для ребра $\{4, 8\}$.

Давайте теперь поймем, почему дерево $T^*(G)$ для графа, показанного на рис. 2.6(b), невозможно построить с помощью алгоритма поиска в глубину. Предположим, что, выйдя из корня, мы пришли вначале в вершину 5, а затем — в вершину 4. После обхода смежных с 4 вершин 1, 2, 3 мы обязаны

пойти в еще одну смежную с 4 вершину — вершину 8. Следовательно, мы должны включить ребро $\{4, 8\}$ в строящееся остовное дерево. Наоборот, придя вначале в вершину 8, мы по тем же соображениям должны были бы зайти во все смежные с ней вершины, в том числе в вершину 4. А тогда и в этом случае ребро $\{4, 8\}$ было бы ребром остовного дерева, строящегося поиском в глубину.

б. Отметим, однако, что построенное с помощью алгоритма поиска в глубину дерево $T^*(G)$ наряду с отмеченными выше достоинствами обладает и одним существенным недостатком. Именно, мы с вами знаем, что в любом дереве существует единственный путь между любыми двумя вершинами. В частности, в дереве $T^*(G)$ существует единственный путь между корневой вершиной и любой другой вершиной графа G . Длина этого пути совпадает с расстоянием между этими вершинами в дереве $T^*(G)$. Однако в исходном графе G расстояние между такими вершинами может быть меньше.

В качестве примера рассмотрим вершины 1 и 3 на рис. 2.3. В построенном нами остовном дереве $T^*(G)$ расстояние между этими вершинами равно двум. При этом расстояние между этими же вершинами в исходном графе G меньше, чем в дереве $T^*(G)$, — в графе G это расстояние равно единице.

Итак, с помощью алгоритма поиска в глубину мы, помимо всего прочего, находим какие-то пути между корневой вершиной и оставшимися вершинами графа G , однако эти пути не обязательно оказываются кратчайшими с точки зрения путей в исходном графе G . В некоторых же приложениях нам необходимо получать такое остовное дерево $\tilde{T}(G)$, в котором расстояние между корневой вершиной и оставшимися вершинами графа G совпадает с расстоянием между этими вершинами в исходном графе, т. е. дерево, состоящее из кратчайших путей между такими вершинами. Алгоритм, позволяющий такого рода дерево получать, называется *алгоритмом поиска в ширину*.

При построении алгоритма нам понадобится дополнительная абстрактная структура данных, называемая очередью Q . В такой структуре данных элементы линейно упорядочены, т. е. образуют линейный список, добавлять элементы мы можем по одному в конец этого списка, а удалять — также по одному, но с начала этого списка. Такого рода структуру данных иногда еще называют структурой данных вида First-In-First-Out (первым вошел — первым вышел: первый элемент, добавленный в очередь, первым же из нее выйдет).

Работа алгоритма начинается с того, что мы помещаем в очередь Q первую вершину графа — будущую корневую вершину строящегося остовного дерева $T(G)$ (вершина б на рис. 2.7). Одновременно с этим действием мы будем считать, что эта вершина окрашивается в какой-то новый цвет, например в черный. Теперь на каждом шаге алгоритма мы будем совершать следующие действия: вынимать вершину x из очереди Q , смотреть на все смежные с x вершины и те из них, которые окрашены в цвет, отличный от черного, помещать в очередь, одновременно окрашивая их в черный цвет. Алгоритм закончится тогда, когда в очереди Q никаких вершин не останется. Соответствующий описанному алгоритму псевдокод можно записать следующим образом:

```

Процедура BFS(x,G), x - стартовая вершина графа G:
// Инициализация начальных значений
for ( y: y - вершина графа G )
  begin
    color[y]:= 0;
    parent[y]:= -1;
    dist[y]:= 0;
  end

// Помещаем в очередь корневую вершину
color[x]:= 1;
Q.push(x);

// Запуск алгоритма поиска в ширину
while ( Q не пусто )
  begin
    y:= Q.pop;
    for ( z: (y,z) принадлежит E(G) )
      begin
        if ( color[z] == 0 )
          begin
            color[z]:= 1;
            Q.push(z);
            dist[z]:= dist[y] + 1;
            parent[z]:= y;
          end
        end
      end
  end
end

```

В этом алгоритме мы дополнительно ввели массив `dist[]` кратчайших расстояний от заданной вершины до корня, а также массив `parent[]`, позволяющий для любой вершины определить единственного родителя в строящемся остовном дереве.

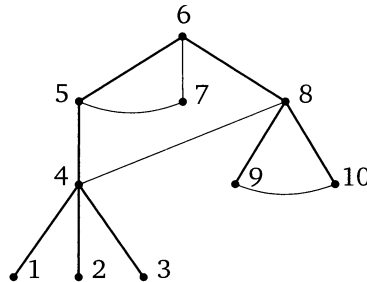


Рис. 2.7

Результат работы алгоритма для дерева, показанного на рис. 2.7, можно свести в следующую таблицу.

Обрабатываемая вершина	Содержание очереди
	{6}
6	{8, 7, 5}
5	{4, 8, 7}
7	{4, 8}
8	{10, 9, 4}
4	{3, 2, 1, 10, 9}
9	{3, 2, 1, 10}
10	{3, 2, 1}
1	{3, 2}
2	{3}
3	{ }

Дадим в заключение физическую интерпретацию остовного дерева в графе, полученного алгоритмом поиска в ширину. Если считать вершины графа шариками, а ребра — соединяющими эти шарики пружинками, то, подвесив граф за выбранный шарик, мы получим картинку, подобную изображенной на рис. 2.7. При этом все шарики (вершины графа) распределятся по слоям — на нулевом слое будет корневая вершина, на следующем — вершины, смежные с корневой, и т. д.

Упражнения

1 (0,5 балла). Приведите пример графа, построенного на n вершинах, имеющего $n - 1$ ребро и не являющегося деревом.

2 (0,5 баллов). Докажите, что любое дерево является двудольным графом.

3 (1 балл). В предыдущем упражнении мы доказали, что дерево является двудольным графом. Докажите, что хотя бы один лист произвольного дерева содержится в той части разбиения вершин на доли, которая содержит наибольшее количество вершин.

4 (1 балл). Пусть в дереве T имеется четное количество ребер. Докажите, что в таком дереве обязательно найдется хотя бы одна вершина четной степени.

5 (1 балл). Пусть F — лес, построенный на n вершинах и имеющий k компонент связности. Подсчитайте количество m ребер в графе F . Докажите, что любой простой граф, имеющий k компонент связности и найденное в первой части упражнения количество m ребер, обязательно является лесом.

6 (1 балл). Докажите, что вершина x дерева T является точкой сочленения тогда и только тогда, когда ее степень строго больше единицы.

7 (1 балл). Постройте все неизоморфные друг другу деревья на $n = 6$ вершинах.

8 (1 балл). Докажите, что любое дерево имеет либо единственный центр, либо два центра, соединенные между собой ребром.

9 (1 балл). Докажите, что в любом дереве T , максимальная степень $\Delta(T)$ вершины в котором равна k , существует по меньшей мере k листьев. В каком дереве существует ровно k листьев?

10 (1 балл). Рассмотрим граф, показанный на рис. 2.8. Докажите, что у такого графа для любого $k \in [2, n - 1]$ найдется остовное дерево диаметра k .

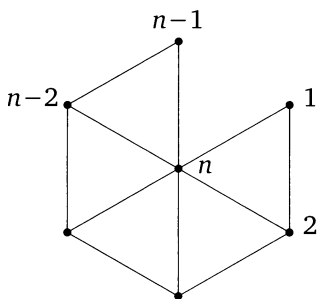


Рис. 2.8

11 (1 балл). Пусть T — дерево, построенное на n вершинах, у которого имеется ровно по одной вершине степени i , $i = 2, \dots, k$, а также x листьев. Постройте такое дерево. Выразите n и x через k .

12 (1 балл). Пусть T — дерево, в котором имеются только лишь вершины степени 1 и/или 3. Предположим, что T имеет 10 вершин степени 3. Сколько вершин степени 1 может иметь такое дерево?

13 (1 балл). Пусть T — дерево, в котором имеются только лишь вершины степени 1 и/или k . Сколько вершин может иметь такое дерево? Какой вид оно может иметь?

14 (1 балл). Пусть T — дерево, в котором степень любой вершины, смежной с листом дерева, имеет степень, большую или равную трем. Докажите, что в T обязательно найдется пара листьев, имеющих общего соседа.

15 (1 балл). Графовая последовательность дерева T имеет вид $5, 4, 3, 2, 1, \dots, 1$. Сколько единиц имеется в этой последовательности?

16 (1,5 балла). Постройте все различные корневые непомеченные деревья на четырех вершинах. Для каждого такого дерева постройте максимальный по количеству ребер простой связный граф на четырех вершинах, в котором поиск в глубину, начинающийся с выделенной вершины, гарантированно даст на выходе заданное корневое дерево.

Дополнительные упражнения

17 (1,5 балла). Пусть G — простой граф, построенный на n вершинах и имеющий k компонент связности. Докажите, что количество t ребер в та-

ком графе лежит в диапазоне

$$n - k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

18 (1 балл). Постройте все неизоморфные друг другу деревья на $n \leq 6$ вершинах, максимальная степень вершины которых равна k , а также деревья, максимальный диаметр которых равен k .

19 (1 балл). Подсчитайте количество неизоморфных друг другу деревьев на $n \geq 2$ вершинах, диаметр которых меньше или равен трем.

20 (2 балла). Пусть граф G имеет остовные деревья диаметрами 2 и l . Докажите, что в таком графе для любого $k \in (2, l)$ существует остовное дерево диаметром k .

21 (1,5 балла). Рассмотрим произвольную неубывающую последовательность $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, $n \geq 2$, положительных натуральных чисел. Докажите, что равенство

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2n - 2, \quad d_i > 0, \quad (2.1)$$

является необходимым и достаточным условием того, чтобы эта последовательность была графовой для некоторого дерева T , построенного на n вершинах.

22 (1,5 балла). Пусть T_D — ориентированное дерево, а $F \subseteq E(T_D)$ — произвольное подмножество множества ребер дерева T_D . Докажите, что в дереве T найдется такая вершина x , что все ребра из F , инцидентные x , входят в x , а все ребра из подмножества $E(T_D) \setminus F$, инцидентные x , из этой вершины выходят.

23 (1,5 балла). *Полным m -арным деревом* называется корневое дерево, у которого любая вершина, отличная от листа, имеет ровно m сыновей. Предположим, что у такого дерева имеется k вершин, отличных от листа. Докажите, что в таком дереве имеется $(m-1)k + 1$ лист.

24 (1,5 балла). Пусть G — простой граф с $\delta(G) \geq k$, а T — произвольное дерево с k ребрами. Докажите, что в G имеется подграф, изоморфный T .

25 (1,5 балла). Пусть T — дерево с k ребрами, а G — простой граф, построенный на n вершинах и имеющий более чем $n(k-1) - \binom{k}{2}$ ребер. Используя предыдущее упражнение, докажите, что в случае $n > k$ в графе G имеется подграф, изоморфный T .

26 (2 балла). Наряду с диаметром при изучении расстояний в графе часто используется так называемый индекс Винера (Wiener index)

$$W(G) := \sum_{x, y \in V(G)} d(x, y)$$

графа G , характеризующий среднее расстояние между вершинами в графе. В частности, Винер использовал этот индекс для изучения точки плавления парафина. В дальнейшем оказалось, что многие химические свойства молекул связаны с индексом Винера соответствующих этим молекулам графов. Докажите, что среди всех деревьев на n вершинах минимальное значение $W(G)$ достигается на графах-звездах, а максимальное — на путях P_n длины n .

27 (1,5 балла). Докажите, что для любого подграфа H графа G расстояние $d_H(x, y)$ между вершинами $x, y \in H$ больше или равно расстоянию $d_G(x, y)$ между теми же вершинами в графе G . Используя данное утверждение, а также предыдущее упражнение, покажите, что для любого связного графа G индекс Винера удовлетворяет оценке $W(G) \leq P_n$. На каком связном графе, построенном на n вершинах, достигается минимум $W(G)$?

28 (2 балла). Докажите следующее необходимое условие существования k попарно реберно непересекающихся остовных деревьев в графе G : для любого разбиения множества $V(G)$ вершин графа G на r блоков, $r \in [2, |V(G)|]$, найдется по меньшей мере $k(r - 1)$ ребер графа G , концы которых лежат в различных блоках разбиения.

29 (2 балла). Пусть у нас имеется какое-то множество G , а также некоторый набор H_1, \dots, H_k его подмножеств. Говорят, что набор таких подмножеств обладает свойством Хелли (Helly property), если из того, что любая пара таких подмножеств имеет непустое пересечение, следует, что пересечение всех этих подмножеств непусто. Так, если у нас имеется набор попарно пересекающихся интервалов на прямой, то их пересечение непусто. Докажите, что поддеревья любого дерева обладают свойством Хелли. Иными словами, докажите, что для любого набора T_1, \dots, T_k поддеревьев дерева T , любые два из которых имеют непустое пересечение, найдется общая для всех этих поддеревьев вершина x . Покажите, что в случае связного графа, деревом не являющегося, это свойство может и не выполняться (указание: рассмотрите цикл C_n).

30 (2 балла). Пусть дерево T , построенное на n вершинах, имеет диаметр, больший или равный $2k - 3$. Докажите, что в таком дереве имеется как минимум $n - k$ путей длины k .

Решение упражнений

1. Такой граф G , согласно следствию 6, обязан быть несвязным. В качестве G можно, к примеру, взять граф, состоящий из двух компонент связности, одна из которых представляет собой цикл C_3 , а вторая — изолированную вершину x .

2. В дереве отсутствуют любые циклы, в том числе и нечётные. Таким образом, для дерева выполняется необходимое и достаточное условие двудольности.

3. Обозначим через X и Y блоки разбиения множества вершин дерева на две доли. Предположим для определенности, что $|X| \geq |Y|$. Допустим, что в X листьев нет. Тогда

$$|E(T)| = m \geq 2|X| = |X| + |X| \geq |X| + |Y| = n,$$

что противоречит тому, что $m = n - 1$.

4. Так как количество $m = n - 1$ ребер в таком графе чётно, то количество n вершин нечётно. Но нам известно, что количество вершин нечётной степени чётно, так что в дереве обязательно найдется хотя бы одна вершина четной степени.

5. Любая i -я компонента связности графа F представляет собой дерево, количество m_i ребер в котором на единицу меньше количества n_i вершин. Следовательно, в графе F количество m ребер на k единиц меньше количества n вершин:

$$m = \sum_i m_i = \sum_i (n_i - 1) = n - k.$$

Предположим теперь, что у нас имеется некоторый простой граф G , имеющий k компонент связности, количество ребер в котором равно $n - k$. Связывая эти компоненты $k - 1$ ребром, мы получаем связный граф, построенный на n вершинах и имеющий $n - 1$ ребро. Такой граф обязан быть деревом. Удаляя добавленные первоначально ребра, мы получаем лес, состоящий из k деревьев.

6. В случае $\deg(x) = 0$ мы имеем граф $T = K_1$, в котором x точкой сочленения не является. Если $\deg(x) = 1$, то эта вершина является листом. Граф $T - x$ есть ациклический граф, построенный на $n - 1$ вершине и имеющий $n - 2$ ребра, а следовательно, является деревом. Иными словами, x в таком графе также точкой сочленения не является.

Наконец, в случае $\deg(x) > 1$ у вершины x в T имеются по меньшей мере две смежные с ней вершины y и z . Как и любой путь в дереве, путь y, x, z является единственным путем в T , соединяющим y и z . Следовательно, после удаления x эти вершины оказываются несвязанными, т. е. x есть точка сочленения.

7. Все шесть неизоморфных друг другу деревьев на шести вершинах показаны на рис. 2.9.

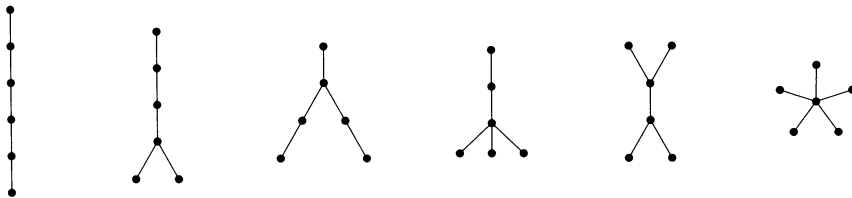


Рис. 2.9. Непомеченные деревья на шести вершинах

8. Утверждение очевидно для деревьев T_1 и T_2 . Теперь предположим, что T есть дерево, построенное на трех или более вершинах. У такого дерева есть по меньшей мере два листа, являющиеся концами некоторого пути максимальной длины в дереве T (см. доказательство леммы 3). Такие листья, очевидно, центрами дерева быть не могут. Удаляя эти листья, получим некоторое дерево T' , которое имеет, очевидно, тот же центр, что и дерево T . Далее можно либо действовать по индукции, либо дойти до дерева T_2 или T_1 и на этом завершить доказательство данного утверждения.

9. Удалим из дерева T вершину x с максимальной степенью k . В результате получим лес, состоящий из k деревьев, каждое из которых содержит свою смежную с x в дереве T вершину u_i . Рассмотрим в каждой из этих компонент

путь максимальной длины, начинающийся в вершине y_i . Он обязательно закончится на некотором листе дерева T . Следовательно, количество листьев в дереве не меньше k .

В качестве простейшего примера дерева, в котором существует ровно k листьев, можно взять дерево «звезду», состоящую из единственной центральной вершины степени k и k смежных с ней листьев.

10. Любое остовное дерево графа G (рис. 2.8), состоящее из пути $(n-1, n, 1, \dots, k-1)$, а также из ребер $(n, k), \dots, (n, n-2)$, имеет диаметр, равный k .

11. Любое дерево такого вида можно построить так (рис. 2.10): взять путь длины $k-1$, первую вершину пути соединить с единственным листом,

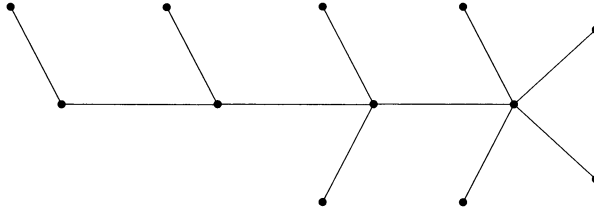


Рис. 2.10

каждую внутреннюю вершину этого пути соединить с $i-1$ листом, а последнюю — с $k-1$ листом. Далее, согласно первой теореме теории графов

$$2 + 3 + \dots + k + x = 2(n-1).$$

Кроме того, общее количество вершин n равно

$$n = k - 1 + x.$$

Решая эту систему, получаем, что

$$n = 2 + \frac{k(k-1)}{2}, \quad x = \frac{k^2 - 3k}{2} + 3.$$

12. Согласно первой теореме теории графов

$$3n_3 + n_1 = 2m,$$

где n_i — количество вершин степени i , m — количество ребер. В дереве $m = n - 1 = n_3 + n_1 - 1$. Следовательно,

$$3n_3 + n_1 = 2n_3 + 2n_1 - 2 \Rightarrow n_1 = n_3 + 2,$$

и поэтому в дереве с $n_3 = 10$ имеется $n_1 = 12$ листьев.

13. Обозначим через n_k количество вершин степени k , а через n_1 — количество вершин степени 1. Согласно первой теореме теории графов

$$kn_k + n_1 = 2m = 2n - 2.$$

Кроме того, $n_1 + n_k = n$, поэтому

$$n = (k-1) \cdot n_k + 2.$$

Простейшие примеры такого рода деревьев — путь P_2 ($n_k = 0$) и граф «звезда» $K_{1,k}$ ($n_k = 1$). Чуть более сложный пример такого дерева для случая $k = 4$ показан на рис. 2.11.

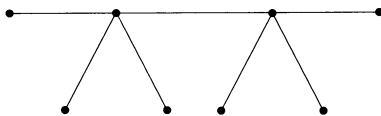


Рис. 2.11

14. Удалим все листья рассматриваемого дерева T . В результате мы вновь получим некоторое дерево T' . В таком дереве имеется по меньшей мере два листа — вершины x и y . Каждая из этих вершин в исходном дереве T смежна по меньшей мере с двумя листьями.

15. Обозначим через x количество единиц в графовой последовательности. Согласно первой теореме теории графов

$$5 + 4 + 3 + 2 + x = 2m,$$

где m — количество ребер. В дереве $m = n - 1 = 4 + x - 1 = 3 + x$. Следовательно,

$$14 + x = 6 + 2x \Rightarrow x = 8.$$

16. Имеется 4 различных корневых непомеченных дерева на четырех вершинах (рис. 2.12). Действительно, существуют два различных непомеченных дерева на четырех вершинах. В каждом из них корень можно выбрать двумя различными способами. Графы с выделенной вершиной x , для которых поиск в глубину, начинающийся с этой вершины, даст соответствующее дерево, показаны на рис. 2.12.

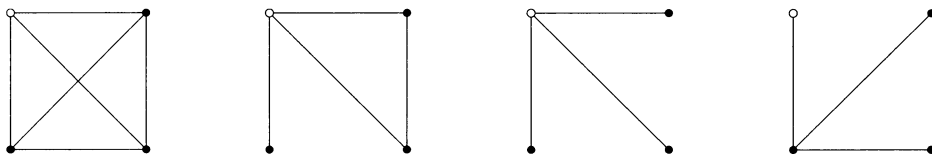
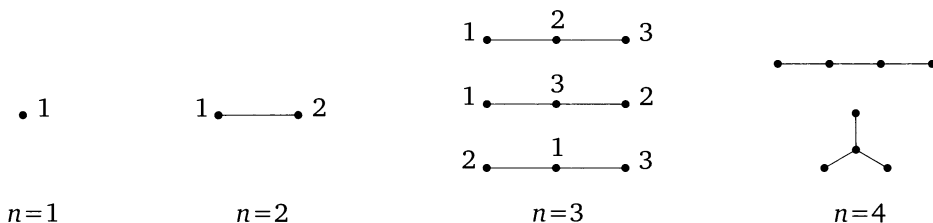


Рис. 2.12

§ 2. Перечисление деревьев. Формула Кэли

1. Перейдем теперь к задаче перечисления всех (помеченных) деревьев, построенных на n вершинах.

а. Несложно убедиться, что существует по одному дереву, построенному на одной и на двух вершинах, а также три дерева, построенные на трех вершинах (см. рис. 2.13). Все эти три дерева отличаются друг от друга только расположением меток вершин. В случае $n = 4$ таких деревьев существует уже 16 штук — 12 деревьев, отвечающих линейной цепочке вершин, и 4 дерева,

Рис. 2.13. Неизоморфные друг другу деревья для $n \leq 4$

построенных на «треножнике». Задача этого пункта — доказать следующий общий результат, известный как формула Кэли.

Теорема 1 (формула Кэли). *Количество a_n различных помеченных деревьев на n вершинах равно n^{n-2} .*

б. К настоящему моменту известно около шестнадцати различных способов доказательства этого результата (см., например, [28]). Мы приведем доказательство этой формулы, впервые предложенное Хайнсом Прюфером (Heinz Prüfer) в 1918 году. Это доказательство является, пожалуй, наиболее простым и понятным и входит практически в любой учебник по комбинаторике и теории графов. В основе доказательства лежит идея построения по данному дереву некоторой строки длины $n-2$ над алфавитом из n чисел, по которой можно однозначно восстановить исходное дерево.

с. Рассмотрим дерево T , вершины которого помечены элементами множества $[n]$, $n \geq 2$, и покажем вначале, как сопоставить такому дереву числовую последовательность вида

$$P(T) = (y_1, y_2, \dots, y_{n-2}), \quad y_i \in [n],$$

называемую кодом Прюфера (или последовательностью Прюфера). Для этого на первом шаге выберем среди всех листьев дерева T вершину x_1 с минимальным номером, удалим эту вершину вместе с инцидентным ей ребром $e_1 = \{x_1, y_1\}$, а затем запишем смежную с удаленным листом вершину y_1 в качестве первого символа в нашем коде. Затем возьмем дерево T_1 , полученное из T удалением вершины x_1 , и выберем среди его листьев вершину x_2 с минимальным номером. Удалим этот лист вместе с инцидентным ему ребром $\{x_2, y_2\}$, а в код Прюфера запишем инцидентную x_2 вершину y_2 . Будем повторять этот процесс до тех пор, пока у нас не останется дерево, состоящее ровно из двух вершин и соединяющего их ребра.

Продemonстрируем этот алгоритм на дереве T , показанном на рис. 2.14. Среди всех его листьев минимальный номер имеет вершина $x_1 = 3$. Удалим эту вершину 3 вместе с инцидентным ей ребром $e_1 = \{3, 2\}$, а в последовательность Прюфера добавим смежную с ней вершину y_1 , т. е. вершину 2. Среди листьев дерева T_1 , полученного из T удалением вершины 3, минимальный номер имеет вершина $x_2 = 4$. Ее удаление добавляет нам второй член $y_2 = 2$ последовательности Прюфера. Продолжая этот процесс, на заключительном,

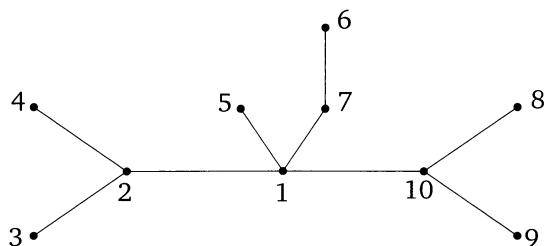


Рис. 2.14. Дерево T на десяти вершинах

8-м шаге мы получаем дерево, построенное на вершинах 10 и 9, а также код Прюфера

$$P(T) = (2, 2, 1, 1, 7, 1, 10, 10).$$

Нам осталось доказать, что описанное выше отображение, сопоставляющее любому помеченному дереву T числовую последовательность $P(T)$, взаимно однозначно. Для этого нам достаточно показать, что по любому коду Прюфера $P(T)$ мы сможем однозначно восстановить исходное дерево T .

d. Заметим прежде всего, что листья исходного дерева T в этом коде вовсе не встречаются. Действительно, удаляя лист, мы записываем в последовательность Прюфера не номер листа, а номер смежной с ним вершины. Рассмотрим теперь более общий случай вершины x , степень $\deg(x) = k$ которой строго больше единицы (рис. 2.15). В процессе построения кода Прюфера

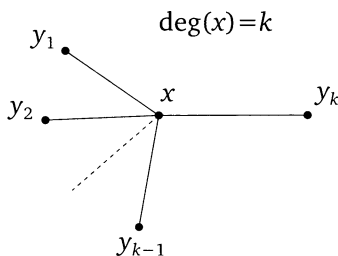


Рис. 2.15

мы постепенно удаляем смежные с x вершины $y_i, i = 1, \dots, k$, до тех пор пока степень вершины x не станет равной единице. На этом шаге сама вершина x стала листом, и если нам придется удалить вершину x , то мы уже в последовательность Прюфера включим не вершину x , а смежную с ней вершину y_k . Таким образом, любая вершина x встречается в коде Прюфера $P(T)$ ровно $\deg_T(x) - 1$ раз.

e. Давайте теперь подумаем, что в идеале нам требуется, чтобы восстановить дерево на n вершинах. Если бы мы в процессе удаления вершины записывали не инцидентную ей вершину, а пару вершин — смежную и удаляемую, то мы легко восстановили бы исходное дерево по такому набору пар

вершин. Действительно, рассмотрим пару последовательностей

$$\begin{array}{cccccccc} 2, & 2, & 1, & 1, & 7, & 1, & 10, & 10; \\ 3, & 4, & 2, & 5, & 6, & 7, & 1, & 8 \end{array}$$

для показанного на рис. 2.14 дерева T . Первая из них — это последовательность Прюфера $P(T)$. Вторая последовательность — это список удаляемых на каждом шаге листьев. Если мы знаем эти пары чисел, то мы знаем все ребра исходного дерева T , кроме разве что последнего ребра. Однако и его мы легко восстановим. Действительно, последним у нас всегда остается ребро, соединяющее вершину, имеющую наибольший номер n , с некоторой вершиной z . Вершина z — это единственная вершина, отличная от вершины с максимальным номером, не встречающаяся во второй последовательности — последовательности удаляемых вершин. Так, в случае дерева, показанного на рис. 2.14, у нас в конце остается ребро, соединяющее вершину 10 с вершиной $z = 9$, не встречающейся во второй строчке таблицы и отличной от 10.

Итак, все, чего нам не хватает — это восстановление по верхней последовательности $P(T)$ — коду Прюфера — соответствующей ей нижней последовательности вершин, удаляемых на соответствующем шаге алгоритма:

$$P(T) = (y_1, y_2, \dots, y_{n-3}, y_{n-2}) \\ (x_1, x_2, \dots, x_{n-3}, x_{n-2}) + \{x_{n-1}, x_n \equiv n\}.$$

Так как любую вершину в процессе построения кода Прюфера $P(T)$ мы удаляем лишь однажды, то все числа в этой последовательности $\{x_i\}$ различны. Кроме того, в эту последовательность не входит вершина $x_n \equiv n$ с максимальным номером, а также вершина x_{n-1} , которая остается соединенной с n ребром на последнем шаге построения последовательности Прюфера.

f. Начнем строить последовательность $\{x_i\}$ с восстановления числа x_1 , т. е. с восстановления первой удаленной нами вершины. Напомним, что на первом шаге мы брали листья дерева, выбирали из них вершину с минимальным номером и ее удаляли. С точки зрения кода Прюфера листья — это все числа, не вошедшие в последовательность $P(T) = \{y_i\}$. Минимальное из этих чисел и будет нужным нам числом x_1 . Так, для дерева, показанного на рис. 2.14, в код Прюфера $P(T)$ не входят числа

$$\{3, 4, 5, 6, 8, 9\}.$$

Число 3 является минимальным среди этих чисел. Следовательно, именно вершину под номером 3 мы и удалили из дерева T на первом шаге построения кода Прюфера $P(T)$ для дерева T . В общем же случае мы рассматриваем множество чисел вида

$$X = \{1, 2, \dots, n-1, n\},$$

исключаем из него числа, входящие в последовательность $P(T)$, выбираем из оставшихся минимальное — число x_1 , — и записываем его под числом y_1 :

$$(y_1, y_2, \dots, y_{n-3}, y_{n-2}) \\ (x_1,$$

Тем самым мы находим первое ребро — ребро $\{x_1, y_1\}$ — восстанавливаемое нами дерева.

г. Теперь нам нужно восстановить число x_2 , т. е. вершину, удаленную на втором шаге построения кода Прюфера $P(T)$. На этом шаге мы рассматривали поддерево T_1 , полученное из T удалением листа x_1 , и в этом поддереве снова выбирали лист с минимальным номером. С точки зрения кода Прюфера поддереву T_1 отвечает числовая последовательность, полученная из $P(T)$ удалением первого члена y_1 :

$$P(T_1) = (y_2, y_3, \dots, y_{n-3}, y_{n-2}).$$

Действительно, удаляя в дереве T вершину x_1 , мы удаляем и соединяющее ее с вершиной y_1 ребро, а следовательно, уменьшаем степень y_1 на единицу. Но тогда мы должны уменьшить на единицу и вхождение y_1 в код Прюфера. Этого мы и достигаем, удаляя из последовательности $P(T)$ число y_1 , стоящее в этой последовательности на первом месте.

А теперь для восстановления x_2 мы должны провести те же рассуждения, что и на предыдущем шаге. Именно, у нас имеется множество $X \setminus \{x_1\}$ оставшихся после первого шага чисел. Исключим из него числа, входящие в код Прюфера $P(T_1)$ поддерева T_1 , а затем выберем среди оставшихся чисел минимальное. Выбранное число x_2 и будет соответствовать вершине, которую мы удалили на втором шаге при построении кода Прюфера исходного дерева T . Записывая его под числом y_2 в коде Прюфера, мы восстанавливаем второе ребро дерева T :

$$\begin{aligned} &(y_1, y_2, \dots, y_{n-3}, y_{n-2}) \\ &(x_1, x_2, \end{aligned}$$

Так, в рассматриваемом примере у нас после первого шага осталось множество чисел

$$X_1 := X \setminus \{x_1\} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Исключим из него числа, входящие в обрезанный слева на единицу код Прюфера

$$P(T_1) = (2, 1, 1, 7, 1, 10, 10).$$

Среди оставшихся в множестве X_1 чисел минимальным является число 4. Следовательно, удаленным на втором шаге оказалось ребро $\{x_2, y_2\} = (4, 2)$ дерева T .

h. Теперь мы можем уже описать и общий шаг алгоритма восстановления дерева T по коду Прюфера $P(T)$. Предположим, что мы уже восстановили ребра $\{x_1, y_1\}, \dots, \{x_{k-1}, y_{k-1}\}$ дерева T . Рассмотрим множество чисел

$$X_{k-1} := X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}.$$

Исключим из этого множества все числа, встречающиеся в коде Прюфера $P(T_{k-1})$, полученном из исходного кода Прюфера $P(T)$ удалением стоящих на первых $k-1$ позициях чисел y_1, \dots, y_{k-1} . Выбирая из оставшихся в множестве X_{k-1} чисел минимальное число x_k и записывая его под числом y_k , мы

тем самым восстанавливаем ребро $\{x_k, y_k\}$ дерева T , отвечающего последовательности Прюфера $P(T)$:

$$\begin{aligned} &(y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_{n-3}, y_{n-2}) \\ &(x_1, x_2, \dots, x_k, \end{aligned}$$

i. Продолжая этот процесс, мы восстановим все числа x_k , $k = 1, \dots, n - 2$, т. е. $n - 2$ ребра $\{x_i, y_i\}$ дерева T , $i = 1, \dots, n$. Оставшееся ребро $\{x_{n-1}, n\}$ отвечает двум не вошедшим в набор $\{x_i\}$ числам x_{n-1} и n . Последовательно присоединяя к ребру $\{x_{n-1}, n\}$ ребра $\{x_{n-2}, y_{n-2}\}$, $\{x_{n-3}, y_{n-3}\}$, ..., мы построим в конечном итоге дерево T , отвечающее коду Прюфера $P(T)$.

В рассматриваемом примере мы по коду Прюфера

$$P(T) = (2, 2, 1, 1, 7, 1, 10, 10)$$

восстанавливаем числа

$$(x_1, \dots, x_8) = (3, 4, 2, 5, 6, 7, 1, 8),$$

а следовательно, 8 ребер дерева T . Добавляя эти ребра к ребру $\{9, 10\}$, мы в результате получаем дерево T , показанное на рис. 2.14. \square

Упражнения

1 (0,5 балла). Для деревьев, показанных на рис. 2.16, постройте последовательности Прюфера.

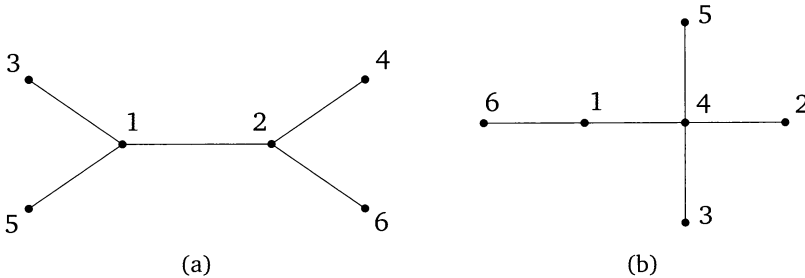


Рис. 2.16

2 (0,5 балла). Постройте деревья, отвечающие последовательностям Прюфера

$$(1, 2, 3, 4) \quad \text{и} \quad (3, 3, 3, 3).$$

3 (0,5 балла). Какова максимальная степень вершины в дереве, последовательность Прюфера которой имеет вид $(1, 7, 2, 2, 2, 2)$?

4 (1 балл). Рассмотрим дерево, показанное на рис. 2.16(a). У этого дерева вершины 1 и 2 имеют степень 2, а вершины 3, 4, 5 и 6 имеют степени, равные единице. Перечислите все возможные деревья на шести вершинах, у которых вершины 1 и 2 имеют степени, равные 2, а остальные вершины — степени, равные единице.

5 (1 балл). Рассмотрим деревья, построенные на множестве вершин $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, в которых вершины 2 и 3 имеют степень 3, вершина 5 имеет степень 2, а остальные вершины имеют степень, равную 1. Постройте все такие деревья. Можно ли получить количество таких деревьев с помощью кода Прюфера?

6 (1,5 балла). Дайте комбинаторное доказательство следующего рекуррентного соотношения для числа t_n деревьев, построенных на n вершинах:

$$t_n = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!} t_k t_{n-k}. \quad (2.2)$$

7 (1 балл). Докажите, что количество корневых лесов, построенных на n вершинах, описывается формулой $(n+1)^{(n-1)}$.

Дополнительные упражнения

8 (1,5 балла). Подсчитайте количество всех деревьев, построенных на множестве вершин $[n]$, у которых вершина с меткой i имеет степень d_i . Выведите отсюда формулу Кэли для количества всех деревьев на n вершинах.

9 (1,5 балла). С помощью кода Прюфера подсчитайте количество деревьев, имеющих в точности k листьев, выразив это количество через числа Стирлинга $S(n, k)$ второго рода

10 (1 балл). Подправив комбинаторное доказательство формулы (2.2), докажите комбинаторно следующее рекуррентное соотношение для числа t_n деревьев, построенных на n вершинах:

$$t_n = \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-2}{k-1} t_k t_{n-k}. \quad (2.3)$$

Докажите эквивалентность рекуррентных соотношений (2.2) и (2.3).

11 (1,5 балла). Зафиксируем k -элементное множество вершин $A = \{1, \dots, k\}$. Обозначим через $T_{n,k}$ количество корневых помеченных лесов на множестве $\{1, \dots, n\}$, $n \geq k$, состоящих из k деревьев, корнями которых являются вершины множества A . Докажите следующую рекуррентную формулу для чисел $T_{n,k}$:

$$T_{n,k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} T_{n-1,k-1+i}, \quad (2.4)$$

$$T_{0,0} = 1, \quad T_{n,0} = 0 \quad \forall n > 0.$$

С ее помощью докажите, что

$$T_{n,k} = k \cdot n^{n-k-1},$$

и в частности, что $T_{n,1} = n^{n-2}$.

12 (2 балла). Рассмотрим произвольное отображение $f : X \rightarrow Y$ множества $X = \{2, 3, \dots, n - 1\}$ в n -элементное множество чисел $Y = [n]$. По этому отображению можно построить (несвязный) ориентированный граф D с ребрами вида $(i, f(i))$. Установите биекцию между такими орграфами и неориентированными помеченными деревьями на n вершинах, доказав тем самым, что количество таких деревьев равно $n^{(n-2)}$.

13 (2 балла). Обозначим через $F_{n,k}$ множество всех корневых лесов, состоящих ровно из k корневых деревьев. Нас будет интересовать представление таких лесов в виде ориентированных графов, все ребра которых направлены от корней образующих лес деревьев. Говорят, что лес F *содержит* лес F' , если F содержит F' как ориентированный подграф. Если при этом множества вершин графов F и F' совпадают, то в F имеется меньшее количество деревьев по сравнению с лесом F' . На рис. 2.17(a) в качестве примера изображен лес $F_{10,2}$, состоящий из двух деревьев, а на рис. 2.17(b) — лес $F'_{10,3}$, содержащий три дерева. Согласно нашему определению лес $F_{10,2}$ содержит лес $F'_{10,3}$.

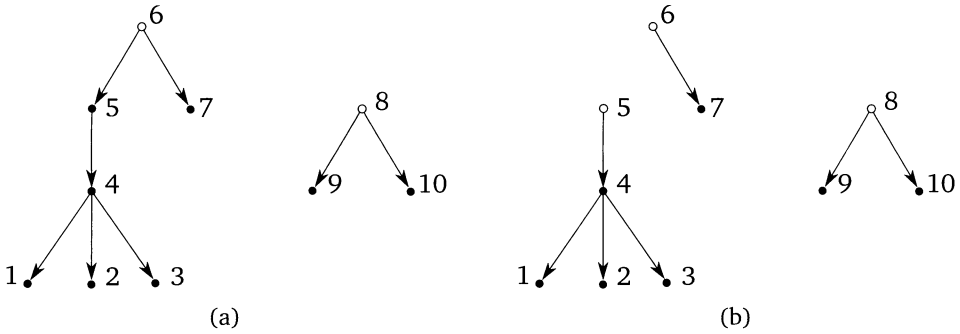


Рис. 2.17. Лес $F_{10,2}$ (слева) содержит лес $F_{10,3}$ (справа)

Последовательность лесов $F_{n,1}, F_{n,2}, \dots, F_{n,k}$ называется *измельчающей последовательностью*, если для любого i лес $F_{n,i}$ содержит лес $F_{n,i+1}$. Обозначим через $N(F_{n,k})$ количество измельчающих последовательностей, заканчивающихся лесом $F_{n,k}$. Используя процедуру double counting для подсчета $N(F_{n,k})$, докажите формулу Кэли для количества деревьев, построенных на n вершинах.

14 (2,5 балла). Пусть у нас имеется улица с односторонним движением, на которой расположено n парковочных мест. На эту улицу последовательно заезжают машины с порядковыми номерами от 1 до n . Каждая i -я машина по прибытии едет вначале к своему любимому парковочному месту $f(i)$. Если это место оказывается свободным, то она занимает его. В противном случае она пытается занять первое следующее за ним свободное место. В случае, если такового не оказывается, процесс парковки считается завершившимся неудачей.

Функция $f : [n] \rightarrow [n]$ называется парковочной функцией, если задаваемая ею парковка всех n машин прошла успешно. Докажите, что количество всех различных парковочных функций равно $(n + 1)^{(n-1)}$.

Решение упражнений

1. Показанному на рис. 2.16(a) дереву отвечает последовательность Прюфера (1, 2, 1, 2), а изображенному на рис. 2.16(b) дереву — последовательность (4, 4, 4, 1).

2. На рис. 2.18(a) показано дерево для последовательности Прюфера (1, 2, 3, 4), а на рис. 2.18(b) — для последовательности (3, 3, 3, 3).

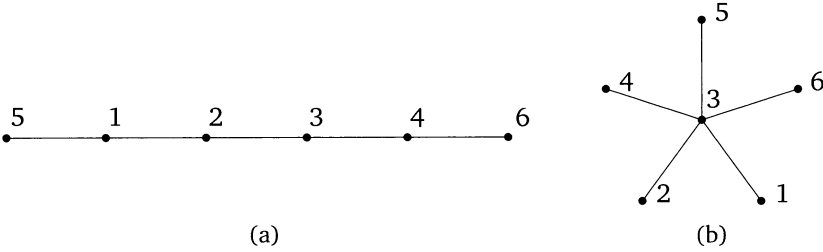


Рис. 2.18

3. Максимальную степень имеет вершина 2 — ее степень, равная пяти, на единицу больше количества двоек в последовательности Прюфера (1, 7, 2, 2, 2, 2).

4. Несложно убедиться, что таких деревьев имеется $\binom{4}{2}$ штук — мы для вершины 1 количеством способов, равным $\binom{4}{2}$, можем подобрать два из четырех листьев, после чего соседи вершины 2 определяются однозначно.

5. Удаляя листья у любого такого дерева, мы получим поддерево $T = P_3$ на трех вершинах {2, 3, 5}. Таких поддеревьев имеется три штуки в зависимости от того, какая из вершин будет стоять в центре поддерева (см. рис. 2.19). Теперь остается к каждому из этих поддеревьев добавить нужное количество листьев.

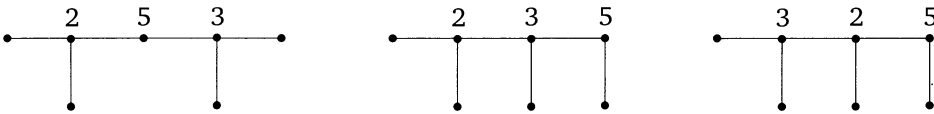


Рис. 2.19

К первому из показанных на рис. 2.19 поддерева листья можно добавить $\binom{4}{2} = 6$ способами — мы к вершине 2 можем добавить две из четырех оставшихся вершин, при этом оставшиеся две вершины соединяются с вершиной 3. К каждому из оставшихся двух поддеревьев мы можем добавить листья двенадцатью способами — четырьмя способами подобрать соседа к вершине 5 и тремя — к соседней с ней вершине в поддерева. Итого получается 30 различных помеченных деревьев, отвечающих двум непомеченным деревьям.

Заметим теперь, что код Прюфера для такого дерева представляет собой любую перестановку упорядоченной последовательности вида $(2, 2, 3, 3, 5)$. Количество таких перестановок равно

$$\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30.$$

6. Перепишем рекуррентное соотношение так:

$$(n-1)t_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) \binom{n}{k} t_k t_{n-k}.$$

Так как у любого такого дерева имеется $n-1$ ребро, то в левой части этого равенства стоит количество t'_n деревьев с помеченным ребром. Удаление помеченного ребра разбивает дерево T на два поддерева, построенных на k и $n-k$ вершинах соответственно. Поэтому для построения всех деревьев на n вершинах мы должны $\binom{n}{k}$ способами разбить n -элементное множество вершин на два подмножества, t_k способами построить на первом подмножестве вершин первое поддерево и t_{n-k} способами — второе поддерево. Теперь эти два дерева нам нужно соединить в одно, добавив между ними ребро. Выбирая в первом дереве k способами первую вершину, во втором — $n-k$ способами вторую и соединяя их ребром, мы получим в итоге некоторое дерево на n вершинах. Для доказательства рекуррентного соотношения осталось просуммировать полученное выражение по k от нуля до n (или, с учетом множителя $k(n-k)$, от 1 до $n-1$) и заметить, что таким образом мы любое дерево подсчитали два раза.

7. Для доказательства равенства $(n+1)^{(n-1)}$ достаточно доказать, что множество таких лесов изоморфно множеству всех деревьев, построенных на $n+1$ -й вершине. А это сделать достаточно просто. Действительно, возьмем произвольный лес, состоящий из k компонент, и добавим к нему вершину, помеченную числом $n+1$. Соединяя эту вершину со всеми корневыми вершинами леса, мы получим дерево на $n+1$ вершине. Обратно, взяв любое такое дерево и удалив в нем вершину, помеченную числом $n+1$, вместе с инцидентными ей ребрами, получим лес, корень любой компоненты которого совпадает с одной из вершин, смежных с вершиной $n+1$ в исходном дереве.

§ 3. Подсчет остовных деревьев в графе.

Матричная теорема о деревьях

1. Доказанную в предыдущем параграфе формулу Кэли мы можем также интерпретировать как формулу подсчета количества всех остовных деревьев в полном графе K_n . Основная задача данного параграфа — научиться решать более общую задачу подсчета количества $t(G)$ всех различных остовных деревьев для произвольного связного графа G .

а. Начнем с примера графа G , показанного на рис. 2.20(а). У такого графа имеется восемь различных остовных деревьев — четыре из них проходят через диагональ этого графа (см. рис. 2.20(б)), а четыре охватывают внешний цикл графа G (рис. 2.20(с)).

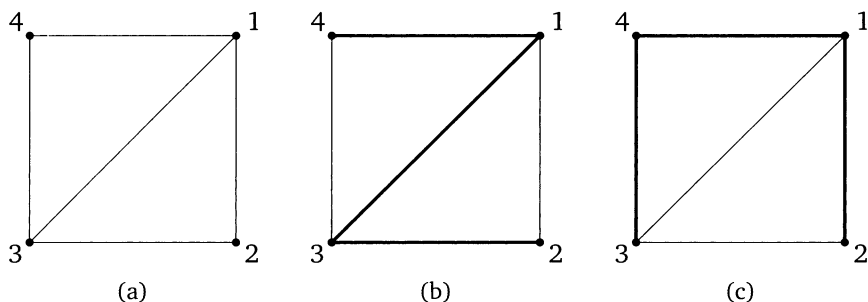


Рис. 2.20

В рассмотренном примере мы все множество остовных деревьев разбили на два блока, один из которых содержит деревья, проходящие через выбранное ребро e , а второй — деревья, через e не проходящие. Подобного рода рассуждения лежат в основе рекурсивной процедуры подсчета количества $t(G)$ всех остовных подграфов графа G , основанной на следующем утверждении.

Утверждение 1. Пусть e — ребро, не являющееся петлей графа G . Тогда

$$t(G) = t(G - e) + t(G/e), \quad (2.5)$$

где $G - e$ — граф, полученный из G удалением ребра e , а G/e — граф, полученный из G стягиванием этого ребра.

Доказательство. Все множество остовных деревьев графа G разбивается на два блока — блок деревьев, содержащих ребро e , и блок деревьев, e не содержащих. Очевидно, что все остовные деревья, которые не содержат ребро e , являются остовными деревьями графа $G - e$. Поэтому количество таких деревьев совпадает с количеством $t(G - e)$. Давайте теперь докажем, что количество остовных деревьев, содержащих e , совпадает с количеством остовных деревьев графа G/e .

Действительно, рассмотрим остовное дерево T графа G , содержащее ребро e . Стягивание этого ребра уменьшает количество ребер и количество вершин в графе T/e на единицу. Кроме того, эта операция не приводит к потере связности получающегося графа G/e . Следовательно, граф T/e вновь является деревом — остовным деревом графа G/e . Кроме того, никакие два различных остовных дерева графа G , содержащие e , не сольются в одно в результате этой операции. Обратно, любое остовное дерево в графе G/e превращается в остовное дерево графа G , содержащее e , расщеплением вершины на две и добавлением между ними ребра. \square

б. Сделаем несколько замечаний, касающихся вычислительных аспектов расчета $t(G)$ по формуле (2.5). Прежде всего, даже если мы стартуем с про-

стого связного графа, то в процессе удаления ребер граф может перестать быть связным, а в процессе стягивания ребер в графе могут появиться петли и мультиребра. Так, например, после стягивания ребра e_1 у графа G , показанного на рис. 2.21(a), ребро e_2 , связывающее в исходном графе G те же вершины, что и e_1 , превращается в петлю.



Рис. 2.21. Операция стягивания ребра: (a) исходный граф G ; (b) граф G/e_1

Со случаем несвязных графов справиться просто — у таких подграфов остовных деревьев не существует, поэтому для таких графов $t(G) = 0$. Мультиребра в графе не мешают нам пользоваться рекуррентным соотношением (2.5). Однако при появлении петель нам нужно быть осторожнее — рекуррентное соотношение (2.5) перестает работать в случае, когда ребро e представляет собой петлю. Рассмотрим, к примеру, граф, состоящий из одиночной вершины и петли. У такого графа имеется единственное остовное дерево, состоящее из изолированной вершины. Формула же (2.5) применительно к данному случаю даст нам $t(G) = 2$. Как следствие, в процессе подсчета по формуле (2.5) нам нужно такие петли либо просто игнорировать, либо сразу удалять в процессе их появления — на количество остовных деревьев это никак не повлияет.

Наконец, рекурсивный подсчет по формуле (2.5) требует задания начальных условий. В процессе удаления и стягивания ребер мы в конце концов получим графы, любое ребро которых представляет собой петлю. Если в полученном графе при этом останется одна вершина, то количество остовных деревьев в таком графе равно единице. В противном случае $t(G) = 0$.

с. Полученное нами рекуррентное соотношение (2.5) приводит к достаточно громоздким вычислениям даже для случая графов, имеющих не очень большое количество m ребер. С увеличением m количество вычислений экспоненциально возрастает. К счастью, наряду с (2.5) для подсчета $t(G)$ имеется замкнутая аналитическая формула, полученная еще в 1847 году Кирхгофом. Эта формула носит название матричной теоремы о деревьях (Matrix Tree Theorem) и выражает $t(G)$ через определитель некоторой матрицы. Определитель же квадратной матрицы размером $n \times n$ мы можем сосчитать, используя менее чем n^3 операций.

Рассмотрим связный граф G без петель, построенный на множестве вершин $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Мы знаем, что матрица M_a смежности такого графа симметрична и все диагональные элементы этой матрицы равны нулю. Возь-

мем теперь матрицу M_d размером $n \times n$, в которой диагональные элементы $d_{i,i}$ равны степеням $\deg(i)$ соответствующих вершин в графе G , а остальные элементы равны нулю, и вычтем из нее матрицу M_d . В результате получим матрицу $L = M_d - M_a$, которая носит название *матрицы Кирхгофа*.

Теорема 2 (матричная теорема о деревьях). Пусть x_k — произвольная вершина графа G , а L^* — матрица, полученная из матрицы Кирхгофа L удалением k -й строки и k -го столбца, отвечающих вершине x_k . Тогда количество $t(G)$ остовных деревьев графа G равно определителю матрицы L^* :

$$t(G) = \det(L^*).$$

Прежде чем доказывать эту теорему, посмотрим, как она работает для примера графа G , показанного на рис. 2.20(а). Для такого графа матрица Кирхгофа имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Удаляя из нее первую строку и первый столбец, мы получаем матрицу

$$L^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

определитель которой равен 8.

d. При доказательстве матричной теоремы о деревьях удобно перейти от неориентированного графа G к некоторому ориентированному графу D , полученному произвольной ориентацией ребер графа G (см. рис. 2.22).

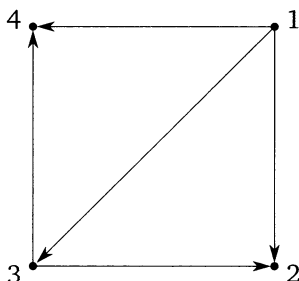


Рис. 2.22

Оказывается, при этом имеется достаточно простая связь между матрицей Кирхгофа L и матрицей M_i инцидентности орграфа D . Именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 3. Пусть D — орграф, полученный из G произвольной ориентацией ребер графа G , а M_i — матрица инцидентности орграфа D . Тогда

$$L = M_i \cdot M_i^T.$$

Доказательство. Напомним, что в матрице M_i элемент $m_{i,j}$ равен 1, если ребро e_j выходит из вершины i , $m_{i,j} = -1$ в случае, если e_j входит в вершину i , и $m_{i,j} = 0$ в остальных случаях. Любой элемент $l_{i,j}$ матрицы $M_i \cdot M_i^T$ есть скалярное произведение i -й и j -й строк матрицы M_i .

В случае $i \neq j$ это скалярное произведение дает нам столько минус единиц, сколько имеется ребер, соединяющих вершины i и j . Действительно, если $m_{i,k} = 1$ и $m_{j,k} = -1$, то это означает, что в графе G имеется ребро e_k , соединяющее вершины i и j . В противном случае хотя бы один из этих сомножителей равен нулю, поэтому слагаемое $m_{i,k} \cdot m_{j,k}$ равно 0 и в скалярное произведение вклада не дает.

В случае $i = j$ мы имеем $m_{i,k}^2$, что дает единицу в случае, если ребро e_k инцидентно вершине i . Суммируя по всем k , мы получаем на диагонали число $l_{i,i}$, равное степени вершины i . \square

Следствие 4. Матрица L^* , полученная из матрицы Кирхгофа L удалением k -й строки и k -го столбца, равна

$$L^* = M_i^* \cdot (M_i^*)^T,$$

где M_i^* есть матрица, полученная из M_i удалением k -й строки.

Для ориентированного графа D , показанного на рис. 2.22, матрица M_i имеет вид

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а матрица M_i^* , полученная в результате удаления первой строки, равна

$$M_i^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

е. Приступим теперь к доказательству матричной теоремы о деревьях. Пусть B — квадратная подматрица $(n-1) \times (n-1)$ матрицы M_i^* . Пусть также G — неориентированный граф, полученный из D заменой любого ориентированного ребра на неориентированное (underlying graph). Столбцы подматрицы B отвечают какому-то набору из $n-1$ ориентированных ребер в орграфе D . Соответствующие этому набору неориентированные ребра вместе с инцидентными им вершинами образуют в графе G некоторый подграф H . Так, столбцы подматрицы

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

полученной из матрицы M_i^* орграфа, показанного на рис. 2.22, удалением последних двух столбцов, индуцируют в графе G на рис. 2.20(а) подграф

$$H = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}.$$

Покажем, что определитель подматрицы B равен ± 1 в случае, если отвечающий этой подматрице подграф H образует остовное дерево графа G , и нулю в противном случае.

Предположим вначале, что подграф H представляет собой остовное дерево. В этом случае в H обязательно найдутся хотя бы два листа. Так как в подматрице B отсутствует только лишь одна строка исходной матрицы M_i инцидентности орграфа D , то в ней обязательно найдется хотя бы одна строка j , отвечающая вершине x подграфа H степени 1. В этой строке имеется единственный ненулевой элемент $m_{j,k} = \pm 1$. Раскладывая определитель матрицы B по j -й строке, мы получаем равенство вида

$$\det B = m_{j,k} \cdot \det B' = \pm 1 \cdot \det B',$$

где B' — подматрица, полученная из B вычеркиванием j -й строки и k -го столбца. На языке подграфа H данная операция отвечает удалению вершины x степени 1 вместе с инцидентным ей ребром. В результате мы получаем подграф $H - x$, который вновь является остовным деревом, но уже графа $G - x$. Продолжая описанный процесс далее, мы на последнем шаге придем к остовному дереву, построенному на двух вершинах, для которого $\det B = \pm 1$.

Так, в рассматриваемом примере все три вершины 2, 3, 4 подграфа H , построенного на ребрах $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, являются листьями. Выбирая в качестве x вершину 2, мы получаем из B матрицу

$$B' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

отвечающую подграфу $H - \{2\}$, индуцированному ребрами $\{1, 3\}$ и $\{1, 4\}$. Удаляя в подграфе $H - \{2\}$ вершину 3, мы получаем матрицу

$$B'' = (-1),$$

отвечающую дереву $\{1, 4\}$. Определитель данной матрицы равен -1 , а следовательно, и определитель исходной матрицы B равен -1 .

Теперь допустим, что соответствующий подматрице B подграф H не является остовным деревом. Следовательно, в таком подграфе обязательно найдется цикл C . Например, если для орграфа D , показанного на рис. 2.22, выбрать в матрице M_i^* первый, второй и четвертый столбцы, то мы получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

отвечающую подграфу H , индуцированному ребрами $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$. В данном случае сам подграф H представляет собой цикл в графе G на рис. 2.20(a).

Покажем, что в таком случае обязательно найдется нетривиальная линейная комбинация столбцов, равная нулю. Отсюда будет следовать, что строки матрицы линейно зависимы, т. е. что $\det B = 0$. Рассмотрим вначале ребра, не входящие в цикл C . Соответствующие им столбцы матрицы B включим в

линейную комбинацию с коэффициентами, равными нулю. Предположим теперь, что направление всех ребер, входящих в цикл, совпадает с каким-то из направлений обхода цикла C . В этом случае линейная комбинация соответствующих этим ребрам столбцов равнялась бы нулю (сколько ребер вошло в вершину x цикла, столько же ребер из нее вышло). Так, если бы у нас вместо ребра $(1, 2)$ в ориентированном подграфе, отвечающем H , было ребро $(2, 1)$, то вместо подматрицы B мы бы имели подматрицу

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

линейная комбинация столбцов которой в точности равнялась бы нулю. Однако в цикле C могут найтись и ребра, которые направлены в сторону, противоположную выбранному направлению обхода цикла C (ребро $(1, 2)$ в орграфе D на рис. 2.22). Тогда мы можем включить отвечающие этим ребрам столбцы (первый столбец подматрицы B) в линейную комбинацию с коэффициентами, равными -1 , и вновь получим линейную комбинацию столбцов, равную нулевому столбцу.

Для завершения доказательства теоремы нам теперь достаточно воспользоваться формулой Бине—Коши, позволяющей вычислять определитель квадратной матрицы, являющейся произведением двух прямоугольных матриц. Согласно этой формуле

$$\det(M_i^* \cdot (M_i^*)^T) = \sum (\det B) \cdot (\det B^T) = \sum (\det B)^2,$$

где суммирование проводится по всем $(n-1) \times (n-1)$ -подматрицам B матрицы M_i^* . Мы только что показали, что $(\det B)^2 = 1$ в случае, если B отвечает остовному поддереву графа G , и $(\det B)^2 = 0$ в противном случае. Тем самым матричная теорема о деревьях доказана. \square

2. Выше мы свели задачу подсчета остовных деревьев в графе к задаче вычисления определителя матрицы L^* , полученной из матрицы $L(G)$ Кирхгофа вычеркиванием произвольного столбца и произвольной строки. Покажем, что эту задачу можно достаточно просто решить, зная собственные значения матрицы $L(G)$ Кирхгофа.

а. Мы уже отмечали, что сумма всех строк матрицы L Кирхгофа даст нам нулевую строку — в любом столбце i количество элементов, равных -1 , в точности равно степени вершины i , стоящей на диагонали матрицы L . Как следствие, строки матрицы L линейно зависимы, и потому одно из собственных чисел матрицы L (мы его будем обозначать через λ_1) обязано равняться нулю. В следующей главе мы докажем, что остальные собственные числа λ_i , $i = 2, \dots, n$, этой матрицы отличны от нуля. Используя этот факт, покажем справедливость следующего утверждения.

Утверждение 5. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы $L(G)$, причем $\lambda_1 = 0$. Тогда количество остовных деревьев в графе G рассчитывается по формуле

$$t(G) = \frac{1}{n} \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n.$$

б. Как мы знаем, собственные числа матрицы представляют собой корни характеристического уравнения

$$\det(\lambda \cdot E - L) = 0 \iff \lambda \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n) = 0,$$

где E — единичная матрица, L — матрица Кирхгофа. Предположим, что мы хотим найти коэффициент при λ^1 этого полинома. С одной стороны, этот коэффициент равен

$$(-1)^{n-1} \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

С другой стороны, его можно вычислить по формуле

$$\frac{d}{d\lambda} \det(\lambda \cdot E - L)|_{\lambda=0}.$$

Попытаемся воспользоваться этой формулой и выразить коэффициент при λ^1 через количество остовных деревьев графа G . Напомним для этого, как в принципе рассчитывается производная определителя $\det(A(t))$ матрицы $A(t)$, зависящей от произвольного параметра t .

с. Так как

$$A(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)),$$

где $a_i(t)$ — столбцы матрицы $A(t)$, то, пользуясь мультилинейностью определителя, мы можем записать производную $d/dt(\det(A(t)))$ как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det(A(t)) = & \det(a'_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)) + \det(a_1(t), a'_2(t), \dots, a_n(t)) + \dots + \\ & + \det(a_1(t), a_2(t), \dots, a'_n(t)). \end{aligned}$$

Действительно, определитель представляет собой сумму $n!$ слагаемых, каждое из которых с точностью до сомножителя ± 1 есть произведение вида $a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n),n}$, где σ — некоторая перестановка n -множества $[n]$. В каждое из таких произведений обязательно входит ровно по одному элементу от каждого столбца матрицы A . После дифференцирования каждого такого произведения по t мы получим в точности n слагаемых, причем j -е слагаемое будет иметь вид

$$a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \dots \cdot a'_{\sigma(j),j} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n),n}.$$

При фиксированном j мы имеем ровно $n!$ слагаемых описанного вида. Собирая все эти слагаемые, мы получаем определитель матрицы $A'_j(t) := (a_1, \dots, a'_j, \dots, a_n)$, полученной из матрицы $A(t)$ заменой элементов j -го столбца на производные этих элементов по t .

Для подсчета определителя вида $\det(a_1(t), \dots, a'_j(t), \dots, a_n(t))$ воспользуемся формулой Кирхгофа:

$$\det(a_1(t), \dots, a'_j(t), \dots, a_n(t)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a'_{i,j}(t) \cdot M_{i,j}(t).$$

Здесь $M_{i,j}(t)$ — минор матрицы $A'_i(t)$, т. е. определитель матрицы, полученной из $A'_i(t)$ вычеркиванием i -й строки и j -го столбца. Как следствие,

$$\frac{d}{dt} \det(A(t)) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a'_{i,j}(t) \cdot M_{i,j}(t) = \text{tr}(C^T \cdot A'(t)), \quad (2.6)$$

где $C = \{C_{i,j}\}$ — матрица, составленная из элементов вида $(-1)^{i+j} M_{i,j}$ (алгебраических дополнений, или кофакторов элементов $a_{i,j}$), $A'(t)$ — матрица, составленная из элементов $a'_{i,j}$, $\text{tr}(A)$ — след матрицы A . Матрицу C^T иногда называют *союзной* или *присоединенной* к A матрицей. Формулу (2.6) называют *формулой Якоби* вычисления производной определителя матрицы, зависящей от параметра t .

d. В рассматриваемом нами случае

$$A(t) = t \cdot E - L \Rightarrow a'_{i,j}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow A'(t) = E.$$

Как следствие,

$$\frac{d}{d\lambda} \det(\lambda \cdot E - L) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+i} M_{i,i}(\lambda) = \sum_{i=1}^n M_{i,i}(\lambda),$$

где $M_{i,i}$ — минор i -го диагонального элемента матрицы $\lambda \cdot E - L$, т. е. определитель размера $(n-1) \times (n-1)$ матрицы $\lambda \cdot E - L$, из которого вычеркнуты i -я строка и i -й столбец. Подставляя в него значение $\lambda = 0$, мы получим определитель

$$\det(-L^*) = (-1)^{n-1} \det(L_i^*),$$

где L_i^* — матрица, полученная из матрицы Кирхгофа вычеркиванием i -го столбца и i -й строки. Следовательно,

$$\frac{d}{d\lambda} \det(\lambda \cdot E - L)|_{\lambda=0} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n \det(L_i^*).$$

Но из матричной теоремы о деревьях следует, что для графа G определитель $\det(L_i^*)$ не зависит от i и равен $t(G)$ — количеству остовных деревьев графа G . Поэтому

$$(-1)^{n-1} \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n \det(L_i^*) = (-1)^{n-1} \cdot n \cdot t(G) \Rightarrow t(G) = \frac{1}{n} \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

3. Матричную теорему о деревьях можно обобщить на случай орграфов. Такое обобщение было получено в 1948 году Уильямом Таттом. С помощью этого обобщения мы затем сможем подсчитать количество всех эйлеровых циклов в связном графе G .

a. Рассмотрим произвольный ориентированный граф D , построенный на n вершинах (см. рис. 2.23). Для неориентированного графа G мы ввели матрицу Кирхгофа L как матрицу, полученную вычитанием матрицы M_a смежности графа G из диагональной матрицы M_d с элементами $M_d[i, i] = \text{deg}(x_i)$. Для ориентированного графа мы можем ввести аналоги матрицы Кирхгофа — матрицы L^- и L^+ , полученные вычитанием матрицы M_a смежности орграфа D из диагональных матриц M_d^- и M_d^+ с элементами $M_d^-[i, i] = \text{outdeg}(x_i)$ и $M_d^+[i, i] = \text{indeg}(x_i)$ соответственно:

$$L^- = M_d^- - M_a, \quad L^+ = M_d^+ - M_a.$$

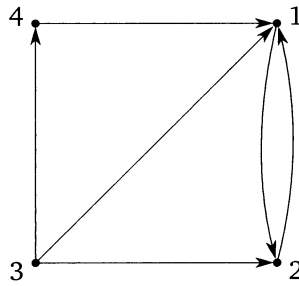


Рис. 2.23

В качестве примера рассмотрим орграф D , изображенный на рис. 2.23. Матрицы Кирхгофа для этого орграфа записываются так:

$$L^- = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L^+ = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим сразу же, что, как и в неориентированном случае, матрицы L^- и L^+ — это матрицы неполного ранга. Действительно, количество исходящих из вершины x_i ребер равно $\text{outdeg}(x_i)$, так что сумма элементов любой строки матрицы L^- равна нулю. Аналогично, $-\sum_j M_a[i, j]$ есть взятое со знаком минус количество ребер, входящих в вершину j . Прибавляя $\text{indeg}(x_j)$, мы получаем, что сумма элементов любого столбца матрицы L^+ равна нулю. Следовательно, столбцы матрицы L^- и строки матрицы L^+ являются линейно зависимыми.

б. Для того чтобы сформулировать теорему Татта, введем понятие корневых остовных деревьев, все ребра которых ориентированы либо к корню x (так называемых *spanning arborescences converging to x*), либо от корня x (так называемых *spanning arborescences diverging from x*). В деревьях первого типа исходящая степень любой вершины, отличной от x , равна единице, а в деревьях второго типа равна единице входящая степень любой вершины, отличной от x . При этом исходящая степень вершины x и входящая степень вершины x равны нулю в деревьях первого и второго типа соответственно.

с. Теорема Татта позволяет подсчитать количество корневых остовных деревьев с корнем в вершине i .

Теорема 6 (W. Tutte, 1948). *Количество $t^-(D, i)$ корневых остовных деревьев, все ребра которых ориентированы к корню i , равно определителю подматрицы матрицы Кирхгофа L^- , из которой выкинуты i -я строка и i -й столбец:*

$$t^-(D, i) = \det(L_{i,i}^-).$$

Так, для показанного на рис. 2.23 графа D количество $t^-(D, 1)$ остовных деревьев, все ребра которых ориентированы к вершине 1, равно

$$t^-(D, 1) = \det(L_{1,1}^-) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Все эти деревья изображены на рис. 2.24.

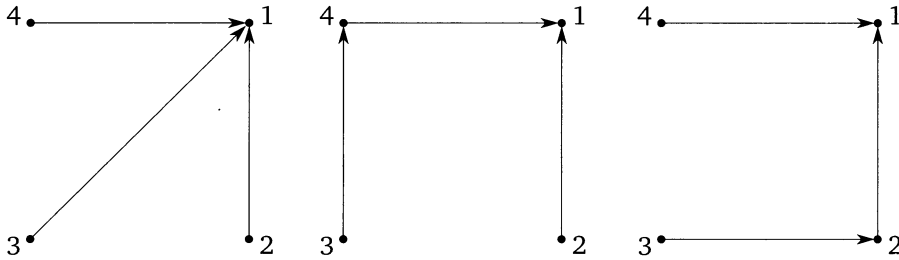


Рис. 2.24

d. Приступим к доказательству теоремы Татта. Для определенности будем считать, что в качестве корня мы выбрали вершину 1. Сразу заметим, что в случае, когда в орграфе D существует вершина с номером $i > 1$, у которой $\text{outdeg}(i) = 0$, количество остовных деревьев, все ребра которых ориентированы к вершине 1, равно нулю. Тот же результат дает нам и теорема Татта: в таком случае как в матрице $L_{1,1}^-$, так и в исходной матрице L^- строка, отвечающая вершине i , нулевая. Действительно, в этом случае диагональный элемент этих матриц равен $\text{outdeg}(i) = 0$. Кроме того, любой другой элемент i -й строки есть взятое со знаком минус количество ребер, исходящих из вершины i в соответствующую этому элементу вершину j , т. е. также равен нулю. Следовательно, и определитель $|L_{1,1}^-|$ соответствующей матрицы равен нулю.

Теперь рассмотрим случай, когда для некоторого $i > 1$ из вершины i исходит $l > 1$ ребер (см. вершину 3 на рис. 2.23). С точки зрения матрицы $L_{1,1}^-$ это означает, что ее i -й диагональный элемент $\text{outdeg}(i) = l > 1$. В этом случае мы вместо орграфа D можем рассмотреть орграфы D_1 и D_{l-1} , идентичные D , за исключением ребер из вершины i в остальные вершины. Именно, в орграфе D_1 мы оставим лишь одно исходящее из i ребро (не важно, куда именно), а все остальные ребра из i оставим в орграфе D_{l-1} . Так, на рис. 2.25 изображены орграфы D_1 (рис. 2.25(a)) и D_2 (рис. 2.25(b)), первый из которых отвечает ребру $(3, 1)$ орграфа D , изображенного на рис. 2.23, а второй — орграфу D , в котором удалено единственное ребро $(3, 1)$. Так как любое остовное дерево должно содержать ровно одно исходящее из i ребро, то

$$t^-(D, 1) = t^-(D_1, 1) + t^-(D_{l-1}, 1).$$

Заметим, что те же рассуждения мы можем провести и на языке матриц $L_{1,1}^-$. Именно, матрицы $L_{1,1}^-(D_1)$ и $L_{1,1}^-(D_{l-1})$ за исключением i -й строки выглядят идентично. В i -й строке матрицы $L_{1,1}^-(D_1)$ диагональный элемент равен 1.

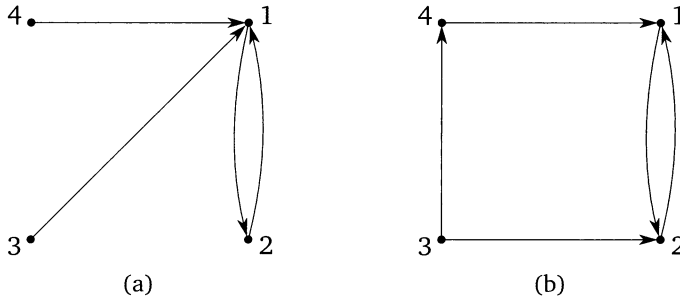


Рис. 2.25. (a) Орграф D_1 ; (b) орграф D_{l-1} .

Кроме того, в той же строке возможно наличие элемента -1 на j -й позиции в случае, если $j \neq 1$. Матрица же $L_{1,1}^-(D_{l-1})$ отличается от $L_{1,1}^-(D)$ тем, что ее i -я строка есть разность i -х строк матриц $L_{1,1}^-(D)$ и $L_{1,1}^-(D_1)$. Так, для орграфов, изображенных на рис. 2.25, имеем

$$L_{1,1}^-(D_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{1,1}^-(D_{l-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Но тогда в силу свойства полилинейности определителя мы можем записать, что

$$\det(L_{i,i}^-(D)) = \det(L_{i,i}^-(D_1)) + \det(L_{i,i}^-(D_{l-1})).$$

Следовательно, нам достаточно доказать утверждение теоремы для случая, когда все диагональные элементы матрицы $L_{1,1}^-$ равны единице, т. е. для случая, когда из любой вершины $i > 1$ исходит единственное ребро.

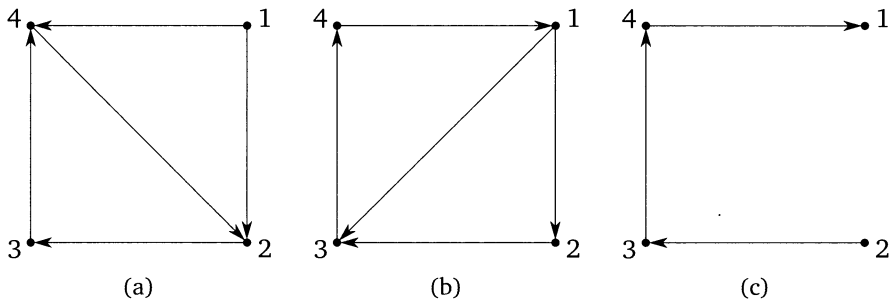


Рис. 2.26

е. В условиях сделанного выше предположения рассмотрим вначале ситуацию, при которой в орграфе D найдется ориентированный цикл, не проходящий через вершину 1 (цикл $(2, 3, 4)$ на рис. 2.26(a)). Ясно, что в таком случае пути из вершин этого цикла в вершину 1 отсутствуют, а потому количество остовных деревьев такого орграфа с корнем в вершине 1 равняется

нулю. Покажем теперь, что и соответствующий такому орграфу определитель $\det(L_{1,1}^-) = 0$. Соответствующая такому графу D матрица $L_{1,1}^-$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видно, что линейная комбинация строк, отвечающих вершинам цикла, равна нулю. Аналогичная ситуация будет наблюдаться и в общем случае: сумма отвечающих вершинам цикла строк будет равняться нулю. Это, в свою очередь, означает, что строки такой матрицы линейно зависимы, а потому $\det(L_{1,1}^-) = 0$.

f. Рассмотрим наконец ситуацию, при которой в орграфе любой замкнутый ориентированный цикл, если он вообще существует, проходит через вершину 1 (рис. 2.26(b)). В этом случае, стартуя из любой вершины $i > 1$, мы обязательно придем в вершину 1. Удаляя все ребра, исходящие из 1 (а такие ребра ни в одно нужное нам остовное дерево не войдут), мы превратим D в ориентированное остовное дерево, все ребра которого направлены к вершине 1 (рис. 2.26(c)). Так как такое дерево получается однозначно, то в D существует единственное нужное нам остовное дерево. Все, что нам осталось показать — это то, что в данном случае $\det(L_{1,1}^-) = 1$.

С точки зрения матрицы L^- удаление ребер, исходящих из 1, означает обнуление первой строки этой матрицы. Иными словами, на матрицу $L_{1,1}^-$ эти операции никак не повлияют. Так, для орграфа D , показанного на рис. 2.26(b), мы имеем

$$L^-(D) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{1,1}^-(D) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выберем теперь в остовном дереве, полученном после удаления всех исходящих из 1 ребер, какой-то лист i (вершина $i = 2$ на рис. 2.26(c)) и рассмотрим соответствующий этому листу столбец матрицы $L_{1,1}^-$ (первый столбец матрицы $L_{1,1}^-(D)$ для орграфа из рис. 2.26(c)). Диагональный элемент этого столбца равен единице. Остальные элементы этого столбца равны нулю — в вершину i никакие ребра из других вершин орграфа D , отличных от 1, не приходят. Раскладывая тогда определитель матрицы по этому столбцу, мы по индукции приходим к равенству $\det(L_{1,1}^-) = 1$. Теорема Татта доказана. \square

g. Заметим, что из теоремы Татта легко получить матричную теорему о количестве $t(G)$ остовных деревьев в неориентированном графе G . Заменяем для этого в графе G любое неориентированное ребро на пару ребер, ориентированных в двух различных направлениях. Выбирая теперь произвольную вершину x полученного орграфа D , мы можем записать, что

$$t(G) = t^-(D, x).$$

Действительно, любому корневому ориентированному дереву, все ребра которого направлены к вершине x , отвечает некоторое остовное дерево гра-

фа G , полученное из корневого ориентированного дерева заменой ориентированных ребер на неориентированные. Обратно, пусть T есть остовное дерево графа G . Ориентируя ребра дерева T единственным образом по направлению к выбранной вершине x , мы получим в D корневое ориентированное дерево, все ребра которого направлены в сторону вершины x .

Кроме того, заметим, что в рассматриваемом случае имеет место равенство

$$t^+(D, x) = t^-(D, x).$$

Действительно, для его доказательства достаточно в орграфе D заменить ориентацию всех его ребер на противоположную.

Упражнения

1 (1 балл). Рассмотрим 3-регулярный граф, представляющий собой ожерелье из m графов «воздушный змей» (на рис. 2.27 такой граф показан для случая $m = 6$). Без использования рекуррентного соотношения (2.5) и матричной теоремы о деревьях подсчитайте количество остовных деревьев в таком графе для произвольного значения параметра $m > 1$.

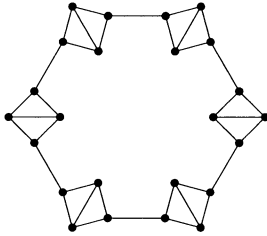


Рис. 2.27

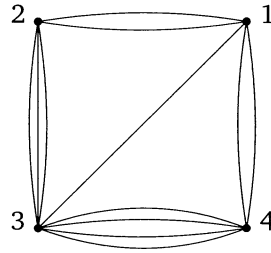


Рис. 2.28

2 (0,5 балла). Используя рекуррентное соотношение (2.5), подсчитайте количество остовных деревьев графа $K_{2,3}$.

3 (1,5 балла). Подсчитайте количество остовных деревьев в графе, изображенном на рис. 2.28, как с использованием рекуррентного соотношения (2.5), так и с помощью матричной теоремы о деревьях.

4 (1,5 балла). Используя рекуррентное соотношение (2.5), подсчитайте количество остовных деревьев графа $K_1 \vee P_n$ «веер» (рис. 2.29), полученного

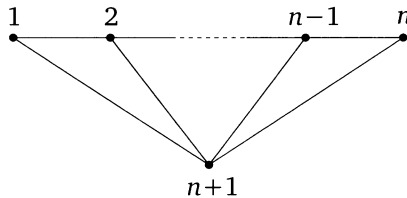


Рис. 2.29. Граф G_n

добавлением к P_n вершины, смежной с каждой из вершин пути P_n . Можно ли выразить это количество через числа Фибоначчи?

5 (1,5 балла). Без использования рекуррентного соотношения (2.5) и матричной теоремы о деревьях подсчитайте количество остовных деревьев графа $K_{2,n}$.

6 (1,5 балла). Используя матричную теорему о деревьях, подсчитайте количество всех деревьев на n вершинах.

7 (1,5 балла). Используя матричную теорему о деревьях, подсчитайте количество всех остовных деревьев полного двудольного графа $K_{m,n}$.

8 (1 балл). В случае d -регулярного графа G выразите собственные числа матрицы Кирхгофа $L(G)$ графа G через собственные числа матрицы M_a смежности графа G .

Дополнительные упражнения

9 (1,5 балла). Без использования рекуррентного соотношения (2.5) и матричной теоремы о деревьях подсчитайте количество остовных деревьев у графов, изображенных на рис. 2.30.

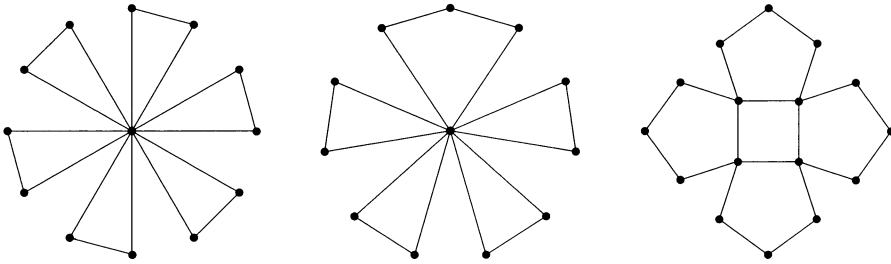


Рис. 2.30

10 (2 балла). Используя рекуррентное соотношение (2.5), подсчитайте количество остовных деревьев графа G_n «лестница» (рис. 2.31), построенного на $2n$ вершинах и $3n - 2$ ребрах.



Рис. 2.31. Граф G_n

11 (2 балла). Используя рекуррентное соотношение (2.5), подсчитайте количество остовных деревьев в графе W_n (колесе).

12 (1,5 балла). Пусть G — простой граф, построенный на n вершинах и m ребрах. Предположим, что H_1 — граф, полученный из G заменой каждого из его ребер на мультиребро кратности k , а H_2 — граф, полученный из G заме-

ной каждого из его ребер на путь длины k , проходящий через $k - 1$ новую вершину. Докажите, что $t(H_1) = k^{n-1} \cdot t(G)$ и $t(H_2) = k^{m-n+1} \cdot t(G)$.

13 (2 балла). Подсчитайте количество различных *непомеченных* остовных деревьев графа $K_{2,n}$.

14 (2 балла). Без использования рекуррентного соотношения (2.5) и матричной теоремы о деревьях докажите, что количество остовных деревьев графа $K_{3,n}$ равняется $n^2 \cdot 3^{n-1}$.

15 (1,5 балла). Используя формулу Кэли, докажите, что в графе $K_n - e$ имеется ровно $(n - 2) \cdot n^{n-3}$ остовных деревьев.

16 (2,5 балла). Докажите, что граф Петерсена имеет 2000 остовных деревьев.

Решение упражнений

1. Мы знаем, что у любого графа «воздушный змей» H имеется 8 остовных деревьев. Поэтому первый способ получить остовное дерево для рассматриваемого графа G — это удалить одно из m ребер, связывающих графы H , а затем в каждом из графов H построить какое-то из остовных деревьев. Все эти операции можно сделать $m \cdot 8^m$ количеством способов.

Второй способ построить остовное дерево графа G — это сохранить все m связывающих графы H ребер. Но в этом случае один из графов H мы должны разрезать так, чтобы в результате получилось остовное дерево графа G . Заметим, что для этого нам достаточно оставить в рассматриваемом графе H только лишь два ребра, и это не должна быть пара ребер, инцидентных вершине степени 2. Всего имеется $\binom{5}{2} = 10$ пар ребер в графе H , и из них две пары нам не годятся. Итого мы восемью способами можем разрезать граф H так, чтобы в графе G получилось остовное дерево, m способами выбрать разрезаемый граф H и 8^{m-1} способами построить остовные деревья в оставшихся графах H . Итого получаем $m \cdot 8^m$ остовных деревьев второго вида и $2 \cdot m \cdot 8^m$ остовных деревьев графа G .

2. На рис. 2.32 показана последовательность действий подсчета количества остовных деревьев графа $K_{2,3}$. На первом шаге мы выбираем ребро, помеченное жирной линией на рисунке. Удаление и стягивание этого ребра

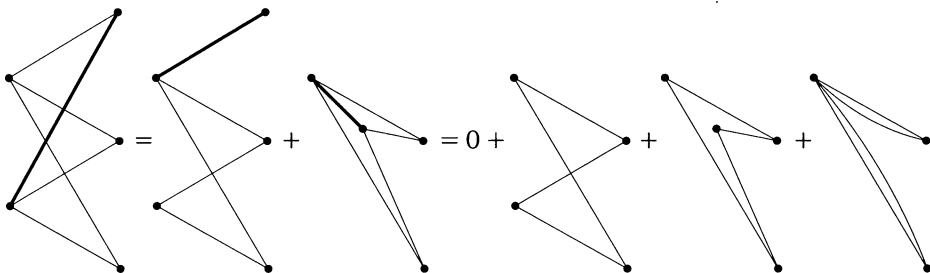


Рис. 2.32. Подсчет количества остовных деревьев графа $K_{2,3}$

приводят к двум графам, показанным на следующей части рисунка. Выберем в каждом из них по ребру, помеченному жирной линией. Удаление первого из них дает несвязный граф H_1 , для которого $t(H_1) = 0$. Стягивание этого ребра превращает граф в граф H_2 , изоморфный графу C_4 , для которого $t(C_4) = 4$. Удаление второго ребра дает нам еще один граф H_3 , изоморфный графу C_4 , для которого $t(C_4) = 4$. Наконец, стягиванием данного ребра мы получаем граф H_4 на трех вершинах с двумя мультиребрами, для которого $t(H_4) = 4$. Итого получаем 12 различных остовных дерева для графа $K_{2,3}$.

3. Матрица L Кирхгофа такого графа имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Удаляя, к примеру, третью строку и третий столбец, получаем матрицу, определитель которой равен $106 = t(G)$.

Второй способ подсчета использует рекуррентное соотношение (2.5). Стягивая диагональное ребро e , мы получаем количество $t(G/e) = 5 \cdot 6$ остовных деревьев графа G/e . Удаляя это ребро, мы получаем цикл на четырех вершинах с мультиребрами. Все множество остовных деревьев мы можем разбить на четыре блока в зависимости от того, с какой из вершин мы начинаем обходить этот цикл для получения остовного дерева. Количество же остовных деревьев в каждом блоке считается легко — оно равно произведению кратностей каждого из оставшихся мультиребер. Следовательно,

$$t(G - e) = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 76 \Rightarrow t(G) = 106.$$

4. Обозначим через a_n искомое количество остовных деревьев в графе G_n . Все множество таких деревьев мы можем разбить на два блока — блок остовных деревьев, не содержащих ребро $\{n+1, n\}$, а также блок остовных деревьев, содержащих это ребро. Количество деревьев в первом блоке равно a_{n-1} . Действительно, после удаления ребра $\{n+1, n\}$ в графе остается лист n , а он должен входить в любое остовное дерево графа $G - \{n+1, n\}$. Обозначим количество остовных деревьев во втором блоке через b_{n-1} . Согласно соотношению (2.5) это количество совпадает с количеством остовных деревьев, полученных стягиванием ребра $\{n+1, n\}$. В результате такого стягивания у нас получается граф G'_{n-1} , отличающийся от графа G_{n-1} тем, что вершины n и $n-1$ соединены мультиребром кратности 2. Удаление одного из кратных ребер даст нам граф G_n , количество остовных деревьев в котором равно a_{n-1} . Стягивание же одного из этих ребер с точностью до петли даст нам граф G'_{n-2} с количеством остовных деревьев, равным b_{n-2} . Итак, с помощью вышеприведенных рассуждений мы получили следующую систему линейных рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + b_{n-1}, \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + b_{n-2}. \end{aligned}$$

Такая система легко решается. Действительно, из первого соотношения следует, что $b_{n-2} = a_{n-1} - a_{n-2}$. Подставляя это равенство во второе соотношение, получаем, что

$$b_{n-1} = 2a_{n-1} - a_{n-2} \Rightarrow a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

Числа

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right],$$

являющиеся решением этого рекуррентного соотношения, выражаются через числа Фибоначчи F_n по формуле $a_n = F_{2n}$.

5. Покажем, что количество остовных деревьев графа $K_{2,n}$ равняется $n \cdot 2^{n-1}$. Действительно, заметим, что в любом остовном дереве графа $K_{2,n}$ только одна вершина правой доли имеет степень, равную двум. Эту вершину x мы можем выбрать n способами. Теперь пометим одну из вершин левой доли нулем, вторую — единицей, соединим их ребрами с вершиной x , а затем каждой из оставшихся вершин правой доли припишем ноль, если в остовное дерево из этой вершины войдет ребро, идущее в вершину 0, и единицу, если в остовное дерево войдет ребро, идущее в вершину 1. Общее количество способов совершить такой выбор равно 2^{n-1} , так что в итоге мы получаем $n \cdot 2^{n-1}$ остовных деревьев.

6. Матрица Кирхгофа для полного графа K_n имеет следующий вид:

$$L(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Удаляя из нее первую строку и первый столбец, получим матрицу L^* того же вида. Прибавляя к первой строке L^* все остальные строки, получаем матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Прибавляя теперь первую строку к каждой из оставшихся, приходим к верхнетреугольной матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix},$$

определитель которой равен n^{n-2} .

7. Матрица Кирхгофа для полного двудольного графа K_n , равно как и ее подматрица L^* , полученная из L удалением последней строки и последнего

столбца, имеют следующий вид:

$$L(K_{n,m}) = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & m & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & m \end{pmatrix}.$$

Прибавляя к первой строке матрицы L^* все остальные строки, а затем прибавляя полученную в результате первой операции первую строку вида $(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)$ к каждой из последних $n - 1$ строк, получим верхнетреугольную матрицу

$$L(K_{n,m}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{pmatrix},$$

определитель которой равен $n^{m-1}m^{n-1}$.

8. В случае, когда G — d -регулярный граф, матрица Кирхгофа $L(G)$ выражается через матрицу смежности M_a и единичную матрицу E по формуле

$$L(G) = d \cdot E - A.$$

Как следствие, если a_1, \dots, a_n — собственные числа матрицы M_a , то собственными числами матрицы $L(A)$ будут числа $d - a_1, \dots, d - a_n$.

ГЛАВА 3

Циклы в графах

§1. Эйлеровы циклы

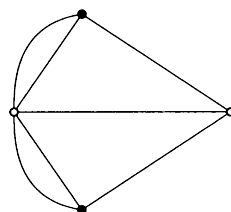
1. Обратимся теперь к самой первой по времени содержательной задаче теории графов — задаче о кёнигсбергских мостах (см. рис. 3.1(a)), которая была предложена жителями города Кёнигсберга (ныне — Калининграда) для решения Леонарду Эйлеру в тридцатых годах XVIII века.

а. Вот как описывал постановку задачи сам Эйлер: «Некогда мне была предложена задача об острове, расположенном в городе Кёнигсберге и окруженном рекой, через которую перекинута семь мостов. Спрашивается, может ли кто-нибудь обойти их, переходя только однажды через каждый мост. И тут же мне было сообщено, что никто до сих пор не мог это проделать, но никто и не доказал, что это невозможно. Вопрос этот, хотя и банальный, показался мне, однако, достойным внимания тем, что для его решения недостаточны ни геометрия, ни алгебра, ни комбинаторное искусство...» Эйлер не только решил эту задачу, но и установил необходимое условие, позволяющее определить, можно ли обойти любой город, имеющий мосты, так, чтобы пройти по всем мостам, не проходя дважды ни по одному из них.

б. Для решения задачи о кёнигсбергских мостах вслед за Эйлером нам следует прежде всего формализовать эту задачу. Именно, построим упрощенную схему города, заменяя части города точками — вершинами графа, а мосты — дугами, то есть ребрами этого графа (см. рис. 3.1(a)). В результате мы придем к графу, изображенному на рис. 3.1(b).



(a)



(b)

Рис. 3.1. К задаче о кёнигсбергских мостах: (a) Кёнигсберг; (b) граф.

Теперь настало время дать несколько дополнительных определений.

Определение 1. *Эйлеровым путем* в произвольном (не обязательно простом) графе G называется путь, который проходит через каждое ребро графа ровно один раз. Эйлеров путь, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине, называется *эйлеровым циклом* C .

Определение 2. Любой граф G , в котором существует эйлеров цикл C , называется *эйлеровым графом*. Граф, в котором существует эйлеров путь, называется *полуэйлеровым*.

Итак, нам нужно определить, является ли граф, изображенный на рис. 3.1(b), эйлеровым. Эйлер ответил на этот вопрос отрицательно, доказав следующее необходимое условие существования эйлерова цикла в графе.

Теорема 3 (необходимое условие существования эйлерова цикла в графе). *Для существования в графе эйлерова цикла необходимо, чтобы он имел как максимум одну нетривиальную (то есть отличную от одиночных вершин) компоненту связности и чтобы все вершины этого графа имели четную степень.*

Доказательство этого факта довольно несложно. Предположим, что в графе G существует эйлеров цикл C . При движении вдоль этого цикла мы посещаем каждое ребро в графе лишь однажды. Следовательно, войдя в какую-то из вершин по одному ребру, мы должны выйти из этой же вершины по какому-то другому ребру. При этом количество входов в любую вершину должно совпадать с количеством выходов. Удовлетворить этим требованиям мы можем лишь тогда, когда степень любой вершины является четной. Кроме того, если два ребра принадлежат одному и тому же циклу C , то они, очевидно, лежат в одной и той же связной компоненте графа G . Как следствие, G может содержать как максимум одну нетривиальную связную компоненту. \square

В графе, представленном на рис. 3.1(b), имеются вершины нечетных степеней. Следовательно, эйлерова цикла в нем не существует.

с. Эйлер оставил без доказательства достаточность сформулированного им условия. Первое полное доказательство теоремы об эйлеровом цикле было дано немецким математиком Карлом Хирхольцером лишь в 1873 году.

Теорема 4 (достаточное условие существования эйлерова цикла в графе). *Для того чтобы граф имел эйлеров цикл, достаточно, чтобы он имел как максимум одну нетривиальную компоненту, и чтобы любая его вершина имела четную степень.*

Доказательство. Выберем в нетривиальной компоненте связности графа G , все вершины которого имеют четную степень (рис. 3.2(a)), произвольную вершину $x \in V(G)$. Будем совершать обход этого графа, проходя по каждому ребру лишь один раз, до тех пор пока мы не сможем двигаться дальше, не нарушая это условие (иными словами, будем пытаться строить наибольший по включению путь в графе). Так как любая вершина в графе имеет

четную степень, то войдя в любую вершину графа, отличную от x , по одному из ребер, мы всегда сможем из нее выйти по какому-то другому ребру. Единственным исключением в этом смысле является сама вершина x : как только мы вернемся в нее, обойдя по разу каждое из инцидентных x ребер, мы уже не сможем из нее выйти. Итак, процесс обхода неизбежно закончится в вершине x . Иными словами, мы доказали, что любой наибольший по включению путь в графе, все степени вершин которого четны, представляет собой замкнутый путь.

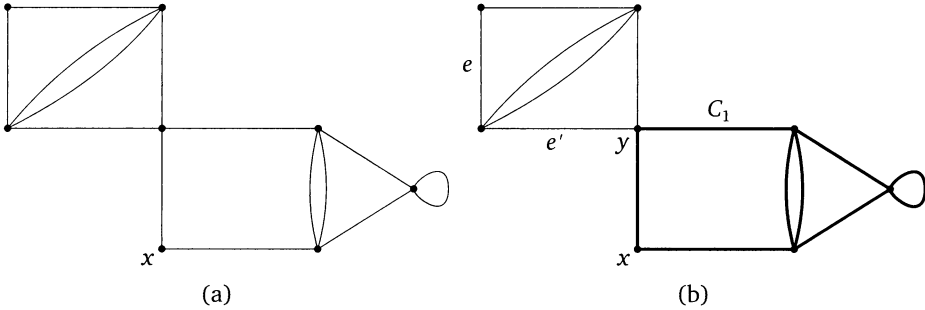


Рис. 3.2

Обозначим полученный в процессе такого обхода графа G замкнутый путь через C_1 (см. рис. 3.2(b), на котором входящие в C_1 ребра помечены жирными линиями). Если он совпал со всем графом, то все доказано — граф G является эйлеровым. В противном случае у нас в графе остались какие-то ребра, через которые мы еще не прошли (ребро e на рис. 3.2(b)). Так как у нас имеется лишь одна нетривиальная компонента связности, то и e , и C_1 ей принадлежат. Следовательно, у нас имеется кратчайший путь, соединяющий e с вершиной x , а значит, и ребро e' , инцидентное одной из вершин C_1 (вершина y на рис. 3.2(b)), но самому замкнутому пути C_1 не принадлежащее (см. рис. 3.2(b)).

Введем тогда подграф $G - E(C_1)$, образованный ребрами, не вошедшими в C_1 , и повторим для него описанную выше процедуру обхода, начинающуюся с вершины y . Полученный в результате такого обхода замкнутый путь C_2 можно объединить с C_1 в единый замкнутый путь $C_1 \cup C_2$. Действительно, стартуя из точки $x \in C_1$, мы можем остановиться в точке $y \in C_1$, обойти все ребра из C_2 , а затем продолжить обход по оставшейся части C_1 . Если теперь $C_1 \cup C_2 = G$, то все доказано. Если же нет, то нам следует продолжать описанный выше алгоритм до тех пор, пока полученное на k -м шаге объединение замкнутых путей $C_1 \cup \dots \cup C_k$ не совпадет со всем графом G . \square

Замечание 5. Проведенное доказательство достаточности легко превращается в алгоритм поиска эйлерова цикла в произвольном графе G , работающий за полиномиальное по количеству ребер в графе время.

d. Обобщением эйлерова графа является понятие так называемого четного графа.

Определение 6. Граф G называется *четным*, если любая его вершина имеет четную степень.

Итак, в случае связного графа G мы выше доказали следующее утверждение.

Теорема 7. *Связный граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда он четный.*

Из этой теоремы немедленно вытекает и такое следствие.

Следствие 8. *Связный граф G имеет эйлеров путь, начинающийся в вершине $x \in V(G)$ и заканчивающийся в некоторой другой вершине $y \in V(G)$, тогда и только тогда, когда степени вершин x и y нечетные, а степени всех остальных вершин являются четными.*

Доказательство. Действительно, добавим к графу G еще одно дополнительное ребро, соединяющее точки x и y . Полученный в результате граф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда исходный граф G имеет эйлеров путь, соединяющий точки x и y . Это обстоятельство и доказывает следствие 8. \square

е. Описанные выше результаты достаточно легко обобщаются на случай эйлеровых циклов в ориентированных графах.

Определение 9. Эйлеровым циклом в орграфе D называется замкнутый путь, содержащий все ребра орграфа D . Орграф D называется эйлеровым, если в нем имеется хотя бы один эйлеров цикл.

Теорема 10. *Орграф D является эйлеровым тогда и только тогда, когда*

$$\text{outdeg}(x) = \text{indeg}(x) \text{ для любой вершины } x \in V(D),$$

а соответствующий D неориентированный граф G имеет не более одной нетривиальной компоненты связности, то есть компоненты связности, отличной от изолированной вершины.

Доказательство практически аналогично доказательству теоремы Эйлера для неориентированных графов. В частности, совершенно аналогично показывается, что любой наибольший по включению ориентированный путь замкнут. Далее мы вновь выбираем произвольную вершину $x \in V(D)$ и пытаемся построить из нее наибольший по включению замкнутый путь C_1 . Если он обходит все ребра D , то все доказано. Иначе осталось некоторое ребро $e \notin C_1$. Так как x и e принадлежат соответствующей D нетривиальной компоненте неориентированного графа G , то имеется путь кратчайшей длины между e и x , а значит, ребро e' , инцидентное вершине $y \in C_1$ и не принадлежащее C_1 . Это ребро может как входить в вершину y , так и выходить из нее. Рассматривая тогда в орграфе $D - E(C_1)$ наибольший по включению путь, исходящий из y , мы получаем некоторый замкнутый путь C_2 . Если объединение $C_1 \cup C_2$ не покрывает все ребра орграфа D , то продолжаем описанный

процесс до тех пор, пока на k -м шаге не построим замкнутый путь, обходящий все ребра орграфа. \square

2. Доказанная в предыдущей главе теорема Татта о количестве остовных деревьев в орграфе D позволяет подсчитать количество эйлеровых циклов в произвольном ориентированном эйлеровом графе D . Этот результат известен как the BEST theorem. Свое название теорема получила по первым буквам фамилий математиков, ее доказавшим — в 1941 году Седрик Смит (Cedric Smith) и Уильям Татт (William Tutte) подсчитали количество эйлеровых циклов в графе, исходящая степень вершин которого равна двум, а в 1951 году Николас де Брёйн (Nicholaas de Bruijn) и Татьяна ван Аарден-Эренфест (Tatyana van Aardenne-Ehrenfest) обобщили эту формулу на случай произвольного значения исходящих степеней вершин орграфа.

Теорема 11 (де Брёйн, ван Аарден-Эренфест, Смит и Татт). *Количество $e(D)$ эйлеровых циклов в орграфе D рассчитывается по формуле*

$$e(D) = t^-(D, x) \cdot \prod_{y \in D} (\text{outdeg}(y) - 1)!,$$

где x — произвольная вершина орграфа D , а $t^-(D, x)$ — количество корневых остовных деревьев, все ребра которых направлены к корню в вершине x .

Следствие 12. *Количество $t^-(D, x)$ корневых остовных деревьев в эйлеровом орграфе D не зависит от выбора корня, то есть вершины x .*

Доказательство. Зафиксируем произвольную вершину x в орграфе D (вершина 1 на рис. 3.3), а также некоторое ребро $e = (x, y)$, являющееся стартовым ребром для любого эйлерова цикла W в графе (ребро $e_1 = (1, 3)$ на рис. 3.3). Покажем вначале, как по эйлерову циклу построить остовное дерево с корнем в вершине x .

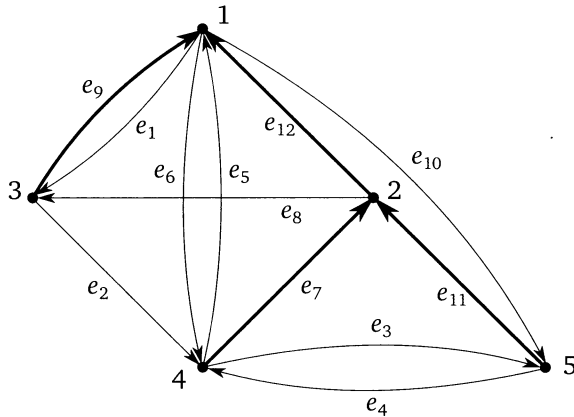


Рис. 3.3

Мы знаем, что эйлеров цикл проходит по каждому ребру орграфа D ровно один раз, задавая на множестве $E(D)$ ребер некоторый линейный порядок (см. ребра e_1, \dots, e_{12} на рис. 3.3). Кроме того, он хотя бы один раз проходит через каждую вершину орграфа D . Выберем для каждой вершины $y \neq x$ исходящее из y ребро с наибольшим номером (см. ребра, помеченные жирными линиями на рис. 3.3). Покажем, что порожденный этими ребрами подграф T представляет собой корневое остовное дерево с корнем в вершине 1.

Действительно, мы построили какой-то остовный подграф, состоящий из $n - 1$ ребра. Покажем, что в таком подграфе циклы отсутствуют. Действительно, если бы мы, выйдя из какой-то вершины z по ребру e_i , вошли в нее же по какому-то ребру e_j , то мы должны были бы получить, что $j > i$. Но мы обходим вершины орграфа D по эйлеровому циклу, начинающемуся в вершине 1. Это означает, что, войдя в какую-то вершину $z \neq x$ по ребру с номером j , мы должны выйти из нее по ребру с номером $j + 1$. Но тогда ребро e_i — это не ребро с наибольшим номером, выходящее из вершины z . Получили противоречие. Таким образом, помеченные жирными линиями ребра в орграфе D циклов не образуют, покрывают все вершины орграфа, а количество этих ребер равняется $n - 1$. Следовательно, эти ребра порождают остовное дерево в орграфе D с корнем в вершине 1.

Рассмотрим теперь какое-то остовное дерево T , все ребра которого направлены к корню в вершине x . Нам нужно понять, сколько различных эйлеровых циклов мы сможем построить из одного и того же остовного дерева T . Для этого давайте пронумеруем (с повторениями) все ребра орграфа D согласно следующему принципу. Зафиксированному в самом начале ребру (x, y) , с которого, как мы договорились, будут начинаться все эйлеровы циклы в орграфе D , мы присвоим номер 1 (ребро e_1 на рис. 3.3). Остальным $\text{outdeg}(x) - 1$ ребрам назначим $(\text{outdeg}(x) - 1)!$ количеством способов произвольные номера из множества $\{2, \dots, \text{outdeg}(x)\}$. Для любой другой вершины $z \neq x$ орграфа D мы присвоим номер, равный $\text{outdeg}(z)$, исходящему из вершины z ребру, принадлежащему остовному дереву. Остальным ребрам мы вновь $(\text{outdeg}(z) - 1)!$ количеством способов назначим произвольные номера из множества $\{1, \dots, \text{outdeg}(z) - 1\}$. Всего, таким образом, мы получаем

$$d := \prod_{z \in D} (\text{outdeg}(z) - 1)!$$

способов пронумеровать ребра орграфа D .

Убедимся теперь, что любая такая нумерация ребер задает один из d ориентированных эйлеровых циклов в орграфе D . Для этого при заданной нумерации ребер определим маршрут в орграфе D следующим образом. Начнем маршрут с ребра (x, y) , помеченного номером 1. При заходе в любую вершину z орграфа покинем эту вершину по еще не использованному ребру с наименьшим номером. Так как при входе в любую вершину $z \neq x$ у нас количество исходящих из z ребер на единицу больше количества входящих, то мы всегда из z сможем перейти в какую-то другую вершину. Остановиться же мы сможем только в вершине x . При этом все входящие в x ребра к этому моменту будут уже использованы. По построению это означает, что

использованными оказались все ребра каждой из вершин, находящихся на расстоянии 1 от корня в остовном дереве. Далее по индукции можно показать, что использованными оказались вообще все ребра орграфа D .

Итак, мы для любого остовного дерева построили d различных эйлеровых циклов в D . Кроме того, различные остовные деревья порождают различные множества эйлеровых циклов. Таким образом, $e(D)$ действительно равно $t^-(D, x) \cdot d$. \square

3. Как мы уже упоминали, эйлеровы графы встречаются в самых разнообразных практических задачах. В качестве очень красивого и полезного примера остановимся на одной из таких задач — задаче о последовательностях де Брёйна.

а. Формальная постановка задачи такова: найти наименьшую циклическую последовательность (циклическое слово) над алфавитом из n букв, содержащую все возможные подстроки длины k (так называемые k -меры).

Пример 13. Рассмотрим циклические последовательности над алфавитом из двух букв — чисел 0 и 1, содержащие все возможные подпоследовательности длины три (тримеры). Таковых, как мы знаем, существует $2^3 = 8$ штук — восемь первых чисел в двоичной системе счисления:

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Расставляя их по кругу, мы, конечно же, получаем циклическую последовательность, состоящую из $k \cdot n^k = 3 \cdot 2^3 = 24$ символов и содержащую все возможные тримеры. Однако такое слово минимальным не будет — несложно видеть, что изображенная на рис. 3.4 циклическая последовательность длины $2^3 = 8$ содержит все тримеры, причем каждый из них она содержит по одному разу. Понятно, что циклическую последовательность длины меньше, чем 2^3 , построить невозможно — она не сможет содержать все 8 тримеров. Поэтому показанная на рис. 3.4 циклическая последовательность минимальна.

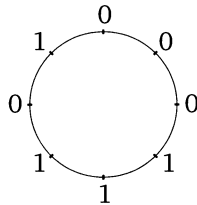


Рис. 3.4. Циклическая последовательность $B(2, 3)$

Проведенные в примере 13 рассуждения позволяют предположить, что и в общем случае для произвольных n и k минимальная циклическая последовательность над алфавитом из n букв, содержащая все n^k возможных k -меров, также имеет длину n^k . В этой связи возникают сразу три вопроса — как доказать это предположение, как понять, сколько таких минимальных строк существует, ну и наконец, как их все найти.

На все эти вопросы дал ответ Николас де Брёйн в своей работе [29] 1946 года. Во-первых, он доказал, что действительно для произвольных n и k существуют циклические последовательности длины n^k над алфавитом из n букв, содержащие все возможные k -меры, — в его честь такие циклические последовательности называют теперь *последовательностями де Брёйна* $B(n, k)$ порядка k . Во-вторых, он подсчитал количество таких последовательностей. Наконец, он указал конструктивный алгоритм построения этих последовательностей. И сделал он это, построив для заданных n и k некоторый орграф специального вида.

б. Итак, попытаемся вслед за де Брёйном сопоставить множеству всевозможных k -меров над алфавитом из n букв некоторый орграф D , обход которого даст нам какую-то циклическую последовательность $B(n, k)$ длины n^k . Как правило, первое, что приходит в голову при анализе этой задачи, — это взять в качестве вершин будущего графа все k -меры и соединить любые две вершины направленным ребром в том случае, если $(k - 1)$ -мер, отвечающий суффиксу первой вершины, совпадает с $(k - 1)$ -мером, соответствующим префиксу второй.

Так, на рис. 3.5 показан орграф, построенный с помощью этого алгоритма для разобранного выше примера 13. В этом орграфе, к примеру, вершина 011 соединена с вершиной 110 ребром, потому что суффикс первой из них — 2-мер 11 — совпадает с префиксом второй.

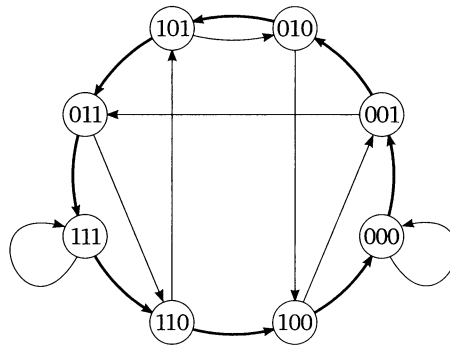


Рис. 3.5. Построение циклической последовательности с помощью гамильтонова цикла в графе

Заметим теперь, что обход этого орграфа по простому циклу, содержащему все вершины (помеченный жирными стрелками на рис. 3.5 цикл), позволяет построить одну из искомым нами циклических последовательностей $B(2, 3)$, а именно последовательность 11101000. Тот же факт справедлив и в общем случае. Иными словами, при таком подходе задача поиска циклической последовательности $B(n, k)$ сводится к построению гамильтонова цикла в орграфе D .

с. На первый взгляд кажется, что мы решили поставленную задачу — действительно, нам удалось формализовать задачу поиска последовательностей

де Брёйна на языке теории графов. Однако у такого решения имеется множество недостатков. Во-первых, априори совсем не очевидно, что гамильтонов цикл у любого такого графа существует. Во-вторых, даже если он и существует, то непонятно, как его там искать — как мы знаем, задача построения гамильтонова цикла весьма нетривиальна. Наконец, если такие циклы и существуют, то неясно, как подсчитать их количество.

Основное достижение де Брёйна состояло в том, что он предложил другой, далеко не столь очевидный подход к формализации данной задачи. Как показал де Брёйн, эту задачу можно изящно переформулировать, сведя ее к сравнительно легко решаемой задаче построения эйлерова цикла в орграфе специального вида — графе де Брёйна.

Алгоритм построения графа де Брёйна следующий: возьмем в качестве вершин орграфа вместо k -меров все возможные $(k - 1)$ -меры (их, очевидно, $n^{(k-1)}$ штук) и свяжем любые две из них ориентированным ребром в случае, если существует k -мер, префиксом которого является первая вершина, а суффиксом — вторая.

На рис. 3.6 показан граф де Брёйна, построенный для данных из примера 13. Так как существуют тримеры 010 и 011, то вершина 01 соединена в этом графе с вершинами 10 и 11. Двум входящим в эту вершину ребрам отвечают тримеры 101 и 001. Так как к любому 2-меру можно двумя способами слева приписать единицу или ноль, и справа приписать единицу и ноль, то аналогичный факт справедлив и для любой другой вершины — в любую вершину входят ровно $n = 2$ ребра, и выходят из этой вершины также ровно $n = 2$ ребра. Как следствие, в таком орграфе обязательно существует эйлеров цикл. Обход графа по эйлерову циклу 000, 001, 010, 101, 011, 111, 110, 100 позволяет восстановить искомую циклическую последовательность $V(2, 3) = 00010111$.

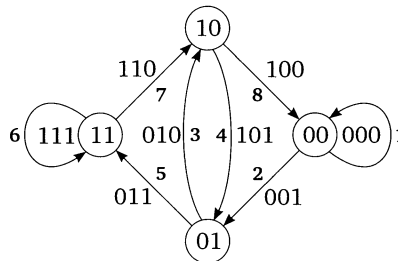


Рис. 3.6. Граф де Брёйна для $n = 2, k = 3$

Аналогичные рассуждения проходят и в общем случае. Следовательно, любой граф де Брёйна является эйлеровым, а любой эйлеров цикл в нем отвечает некоторой последовательности де Брёйна $V(n, k)$.

Итак, построив для любых n и k граф де Брёйна, мы доказали существование соответствующей последовательности де Брёйна. Далее, используя алгоритмы поиска эйлеровых циклов в орграфе, мы можем находить такие последовательности. Осталось понять, сколько всего таких последовательностей

существует. Де Брёйн ответил и на этот вопрос, доказав, что их количество равно $(n!)^{n^{k-1}}/n^k$. Два различных доказательства этого результата — комбинаторное и алгебраическое — можно найти, например, в учебнике [30].

d. Как это часто бывает в прикладной математике, задача, очень похожая на рассмотренную выше, возникла относительно недавно еще в одной, достаточно молодой области прикладной математики — в биоинформатике [31]. Одной из наиболее актуальных задач в этой науке является задача асемблирования (сборки) геномов из так называемых ридов (reads) — относительно коротких (содержащих порядка 100 символов — нуклеотидов) строк над 4-буквенным алфавитом {A, C, G, T}, получаемых в результате секвенирования (разделения) генома (а точнее, очень большого количества одинаковых геномов). Первые методы сборки генома из таких ридов как раз и базировались на построении графа, вершинам которого сопоставлялись риды, а ребрам — перекрытия между этими ридами фиксированной длины. При этом исходный геном восстанавливался с помощью построения гамильтонова цикла в подобном графе.

Рассмотрим в качестве простейшего примера очень короткий циклический геном, показанный на рис. 3.7(a). Предположим, что в результате секвенирования мы получили из него пять ридов CGTGCAA, ATGGCGT, CAATGGC, GGCGTGC и TGCAATG длины 7. Соответствующий этой последовательности ридов граф показан на рис. 3.7(b). Каждому из пяти ридов поставлена в соответствие одна из вершин этого графа. Две вершины соединяются ребром

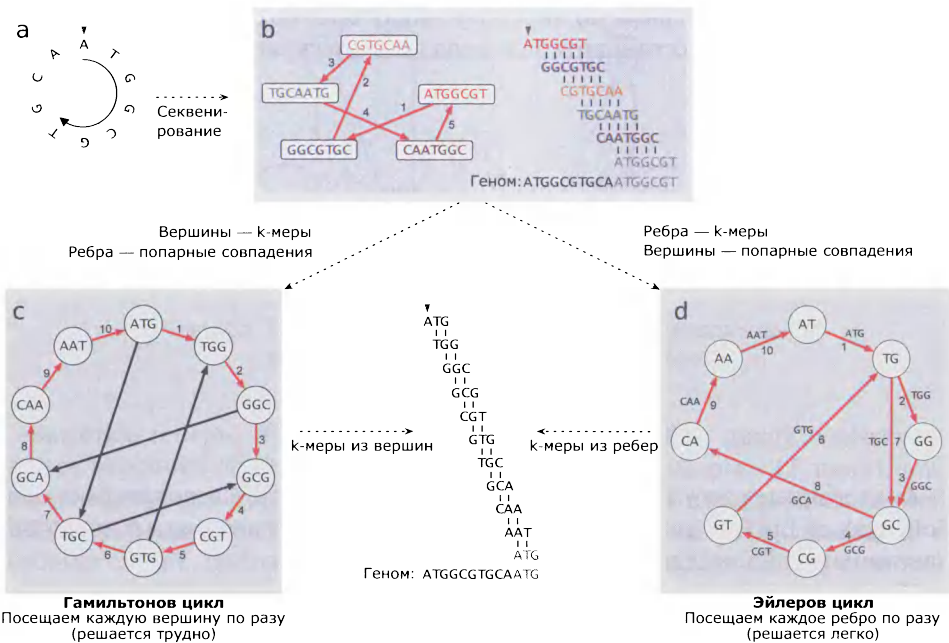


Рис. 3.7. Сборка простейшего генома

в случае, если ширина перекрытия соответствующих ридов составляет пять нуклеотидов (см. рис. 3.7(b)). Проход по гамильтонову циклу

$$\text{ATGGCGT} \rightarrow \text{GGCGTGC} \rightarrow \text{CGTGCAA} \rightarrow \text{TGCAATG} \rightarrow \text{CAATGGC} \rightarrow \text{ATGGCGT}$$

позволяет путем объединения первых двух нуклеотидов в каждом риде восстановить исходный геном ATGGCGTGA.

Более современные методы сборки геномов обычно работают со строками определенной длины k (которые как раз и называются k -мерами), значительно более короткими, нежели исходные риды. Например, типичный 100-нуклеотидный рид разбивается вначале на 55-меры, длина перекрывающихся участков которых равна сорока шести. В нашем модельном примере каждый 7-нуклеотидный рид разбивается на пять 3-меров, перекрывающихся между собой по двум нуклеотидам (см. рис. 3.7(c),d). Даже для этого примера найти соответствующий исходному геному гамильтонов цикл нелегко. В реальной же ситуации из одного генома в процессе секвенирования получают миллионы (10^6) ридов и триллионы (10^{12}) k -меров, то есть графы с огромным количеством вершин. Задача поиска гамильтонова цикла в таком графе практически нерешаема.

Павел Певзнер в 1989 году предложил для таких случаев использовать подход де Брёйна. Переход от задачи поиска гамильтонова цикла в графе (рис. 3.7(c)) к задаче поиска эйлерова цикла (рис. 3.7(d)) существенным образом ускорил процесс ассемблирования геномов и стал общепринятым в большинстве современных ассемблеров, предназначенных для сборки генома из коротких ридов.

Упражнения

1 (0,5 балла). Верно ли, что каждый простой эйлеров граф имеет четное количество ребер? А простой эйлеров граф, построенный на четном количестве вершин? А эйлеров двудольный граф?

2 (0,5 балла). Верно ли, что в эйлеровом графе для любых двух ребер e_1 и e_2 , инцидентных одной и той же вершине, обязательно найдется хотя бы один эйлеров цикл, в котором два эти ребра идут одно за другим?

3 (0,5 балла). Докажите, что в эйлеровом графе мосты отсутствуют.

4 (1 балл). Докажите, что в любом связном графе G найдется маршрут, который проходит по каждому из ребер графа G как максимум два раза.

5 (1 балл). Пусть в связном графе G ровно $2k$ вершин имеют нечетную степень. Докажите, что в этом графе можно построить k эйлеровых путей.

6 (0,5 балла). Определите значения m и n , при которых полный двудольный граф $K_{m,n}$ является эйлеровым. А при каких значениях m и n в таком графе не существует эйлерова цикла, но существует эйлеров путь?

7 (1 балл). Имеется кусок проволоки длиной 12 сантиметров. На какое минимальное количество кусков его следует разрезать, чтобы из этих кусков можно было изготовить каркас кубика размерами $1 \times 1 \times 1$ при условии, что проволоку в процессе изготовления кубиков можно сгибать?

8 (1 балл). Рассмотрим квадратную сетку, состоящую из $5 \cdot 5 = 25$ вершин, соединенных между собой сорока ребрами. Можно ли покрыть эту сетку пятью ломаными длины 8? А восемью ломаными длины 5?

9 (1 балл). Реберным графом $L(G)$ графа G называется граф, в котором любая вершина x' отвечает некоторому ребру $e \in E(G)$ графа G и в котором две вершины смежны между собой тогда и только тогда, когда соответствующие им ребра в графе G инцидентны одной и той же вершине. Докажите, что в случае регулярного связного графа G его реберный граф $L(G)$ является эйлеровым.

10 (1 балл). Рассмотрим еще один алгоритм поиска эйлерова цикла в связном эйлеровом графе G . Разобьем в каждой вершине графа инцидентные ей ребра на пары. Затем, начиная с какого-то ребра e , построим некоторый путь в графе G следующим образом: если мы вошли в вершину по одному из парных ребер, то выйти мы должны из нее по другому парному ребру. Завершится этот путь в ребре e' , парном к e . В результате мы разобьем все множество ребер графа G на попарно непересекающиеся замкнутые пути T_1, \dots, T_k , объединение которых даст нам все множество $E(G)$. В случае, если таковых оказалось два или более, последовательно объединим эти пути в один следующим образом: найдем среди этих замкнутых путей пару путей T_i и T_j , имеющих общую вершину x , и объединим эти пути в путь $T = T_i \cup T_j$ большей длины, поменяв парность ребер в вершине x . Докажите корректность данного алгоритма, а именно покажите, что по его завершении мы получим эйлеров цикл в графе G .

11 (1,5 балла). Постройте для значений $n = 2, k = 4$ граф де Брёйна и с его помощью найдите хотя бы одну последовательность де Брёйна $B(2, 4)$.

12 (1,5 балла). Найдите одну из последовательностей де Брёйна $B(3, 3)$ длины 27, построив предварительно орграф на девяти вершинах, в котором последовательности $B(3, 3)$ отвечает эйлеров цикл.

Дополнительные упражнения

13 (1 балл). Рассмотрим связный простой регулярный граф G , степень любой вершины которого равна четырем. Докажите, что ребра этого графа всегда можно покрасить в два цвета (красный и синий) так, чтобы любая вершина была инцидентна ровно двум синим и ровно двум красным ребрам.

14 (1 балл). В одном из упражнений главы 1 мы доказали, что любой граф G , минимальная степень δ в котором больше или равна двух, обязательно содержит цикл. Используя это утверждение и индукцию по количеству m ребер, дайте еще одно доказательство достаточности условия Эйлера в неориентированном графе G .

15 (1,5 балла). Предположим, что связный граф G эйлеров. Рассмотрим следующий алгоритм обхода ребер графа G . Выберем произвольную вершину x_0 , а также некоторое инцидентное ей ребро $e_1 := \{x_0, x_1\}$ и зафиксируем путь $T_1 := \{x_0, e_1, x_1\}$. Затем на i -м шаге, $i = 1, \dots, m - 1$, рассмотрим граф $G_i := G - E(T_i)$, полученный удалением пройденных ребер e_i пути T_i , а также вершину x_i , до которой мы с помощью этого пути T_i дошли. В случае, если

вершина x_i оказалась листом, добавим к пути T_i ребро $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$. В противном случае в качестве очередного ребра $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ выберем ребро, не являющееся мостом в графе G_i , и добавим его к T_i . В обоих случаях получим новый путь

$$T_{i+1} = \{x_0, e_1, x_1, \dots, x_i, e_i, x_{i+1}\}.$$

Докажите корректность этого алгоритма, а именно покажите, что описанный алгоритм завершится на $(m - 1)$ -м шаге построением эйлерова цикла T_m в исходном графе G .

16 (2 балла). Рассмотрим эйлеров граф без петель. Удалим в нем ребро $e = \{x, y\}$. Докажите, что количество $\{x, y\}$ -путей (не обязательно простых, trails), в которых вершина y встречается только в конце каждого из этих путей, нечетно.

В качестве примера можно рассмотреть граф «бабочка», состоящий из двух треугольников $(1, 2, 3)$ и $(3, 4, 5)$, склеенных в точке 3. Удалив в таком графе ребро $\{1, 2\}$, получаем три пути, соединяющие 1 и 2: один простой путь $(1, 3, 2)$ и два пути $(1, 3, 4, 5, 3, 2)$; $(1, 3, 5, 4, 3, 2)$, не являющиеся простыми (trails).

Докажите, что количество таких путей, не являющихся простыми, обязательно четно.

17 (1,5 балла). Пусть в графе G имеется вершина x нечетной степени. Докажите, что среди инцидентных x ребер найдется ребро e , для которого количество различных циклов, проходящих через e , четно.

18 (1 балл). С использованием двух предыдущих упражнений докажите справедливость еще одной характеристики эйлерова графа: нетривиальный связный граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждое его ребро e принадлежит нечетному количеству циклов в G .

19 (1,5 балла). Мы знаем, что существуют две последовательности де Брёйна на $V(2, 3)$, а именно бинарные циклические последовательности

$$00010111 \text{ и } 11101000,$$

в каждой из которых любой возможный 3-мер встречается ровно один раз в виде подпоследовательности $a_i a_{i+1} a_{i+2}$. Докажите, что не существует бинарной циклической последовательности, состоящей из восьми символов, которая бы ровно один раз содержала любой из восьми возможных 3-меров в качестве подпоследовательности вида $a_i a_{i+1} a_{i+3}$.

20 (1,5 балла). Рассмотрим следующий алгоритм построения последовательности де Брёйна

$$a_1, a_2, \dots, a_{2^k}.$$

Возьмем на первом шаге $a_i = 0$, $i = 1, \dots, k$. Для любого $m > k$ определим a_m как максимальное значение из $\{0, 1\}$, при котором последовательность

$$(a_{m-k+1}, \dots, a_m)$$

не встречается в последовательности (a_1, \dots, a_{m-1}) в виде непрерывной подпоследовательности. Докажите, что данный алгоритм действительно возвращает нам последовательность де Брёйна.

Решение упражнений

1. Первые два утверждения являются неверными. В качестве контрпримера для первого утверждения служит цикл C_3 . Контрпримером для второго утверждения является граф G , представляющий собой объединение циклов C_4 и C_3 , имеющих единственную общую вершину x .

Последнее утверждение является верным. Действительно, рассмотрим двудольный граф, имеющий блоки X и Y . Так как граф эйлеров, то любая степень вершины четна. Но тогда четными являются и сумма степеней всех вершин блока X , и сумма степеней всех вершин блока Y . Но так как в двудольном графе

$$|E| = \sum_{x \in X} \deg(x) = \sum_{y \in Y} \deg(y),$$

то $|E|$ есть четное число.

2. Нет, это неверно — контрпримером вновь является граф G , представляющий собой объединение циклов C_4 и C_3 , имеющих единственную общую вершину x . В этом графе два ребра, принадлежащие C_4 и инцидентные x , ни в одном из эйлеровых циклов последовательно друг за другом идти не могут.

3. Согласно основной характеристике моста в графе, данной в первой главе, мост — это ребро, которое не принадлежит ни одному из циклов графа. Как следствие, мост не может содержаться и в эйлеровом цикле, а значит, в эйлеровом графе мосты отсутствуют.

Можно привести и непосредственное доказательство приведенного в упражнении утверждения. Действительно, предположим, что мост в таком графе существует. Тогда, удаляя его, мы получим ровно две компоненты связности, в каждой из которых имеется ровно одна вершина нечетной степени, а это невозможно.

4. Для доказательства достаточно заменить любое ребро графа G на мультиребро, состоящее из двух ребер. В таком графе степени всех вершин окажутся четными, а значит, новый граф станет эйлеровым. Эйлеров путь обойдет любое ребро нового графа ровно один раз. С точки зрения исходного графа это означает, что такой маршрут пройдет любое ребро графа G максимум два раза.

5. Соединим $2k$ вершин с нечетными номерами попарно k ребрами. В результате получим граф, в котором существует эйлеров цикл. Если удалить из этого цикла k ребер, то цикл распадется на k непересекающихся по ребрам путей, которые нам и нужно было построить.

6. В полном двудольном графе любая вершина имеет степень, равную либо m , либо n . Следовательно, граф $K_{m,n}$ эйлеров в случае, если n и m четны.

Для существования эйлерова пути в графе, в котором не существует эйлерова цикла, необходимо и достаточно, чтобы в графе нашлись ровно две вершины нечетных степеней. В полном двудольном графе это возможно в случае $m = n = 1$, а также в случае $n = 2$, $m = 2i + 1$.

7. Каркас куба представляет собой регулярный граф, степени всех восьми вершин которого равны трем. Так как их четное число, то согласно упражнению 5 этот граф можно разбить на четыре непересекающихся по ребрам

пути. Как следствие, минимальное количество кусков, на которое можно разрезать проволоку для получения кубика единичного объема, также равно четырем.

8. В рассматриваемом графе имеется 12 вершин нечетной степени. Следовательно, согласно упражнению 5 этот граф можно покрыть как минимум шестью непересекающимися по ребрам путями. Пятью ломаными этот граф покрыть нельзя.

9. Обозначим через d общую степень всех вершин графа G . В этом случае любая вершина $e \in E(L(G))$ смежна ровно с $2(d - 1)$ вершинами — в исходном графе G в каждую из концевых вершин ребра e входят, помимо e , еще $d - 1$ ребер. Следовательно, степени вершин графа $L(G)$ четные. Кроме того, граф $L(G)$ связан — если исходный граф G связан, то в G любые два ребра оказываются связаны некоторым путем, а значит, и в $L(G)$ любые две вершины оказываются связанными. Таким образом, $L(G)$ представляет собой связный граф, степени вершин которого четны, то есть эйлеров граф.

10. По построению ребра в строящемся маршруте повторяться не могут, так что любой такой маршрут представляет собой путь. Так как граф конечен, то процесс построения любого такого пути обязательно закончится, причем закончится в том же ребре, в котором мы начали этот путь. Следовательно, любой такой путь замкнут.

Далее, если у нас образовалось два или несколько путей, то в силу связности графа обязательно найдется вершина, инцидентная по крайней мере двум таким путям. Действительно, пусть имеются два различных замкнутых пути T_1 и T_i . Рассмотрим кратчайший путь, соединяющий вершины этих путей. Тогда вершина x , через которую этот путь покидает замкнутый путь T_1 , и будет вершиной, в которой T_1 встречается с каким-то другим замкнутым путем T_2 .

Наконец заметим, что в результате обмена парными ребрами двух путей в вершине x мы, придя в вершину x вдоль ребер пути T_1 , в вершине не остановимся, а продолжим этот путь по ребрам пути T_2 . Следовательно, мы действительно вместо двух путей получим один замкнутый путь $T_1 \cup T_2$, не трогая остальные замкнутые пути. Так как ребер в графе конечное число, то на каком-то шаге мы покроем все ребра, то есть действительно построим эйлеров цикл.

11. Граф де Брёйна для значений $n = 2$, $k = 4$ изображен на рис. 3.8(a). Числа, помеченные жирным шрифтом, отмечают эйлеров цикл, соответствующий последовательности де Брёйна

$$B(2, 4) = 0000110010111101.$$

12. Граф де Брёйна для значений $n = 3$, $k = 3$ изображен на рис. 3.8(b). Числа, помеченные жирным шрифтом, отмечают эйлеров цикл, соответствующий последовательности де Брёйна

$$B(3, 3) = 00010020110120210221112122.$$

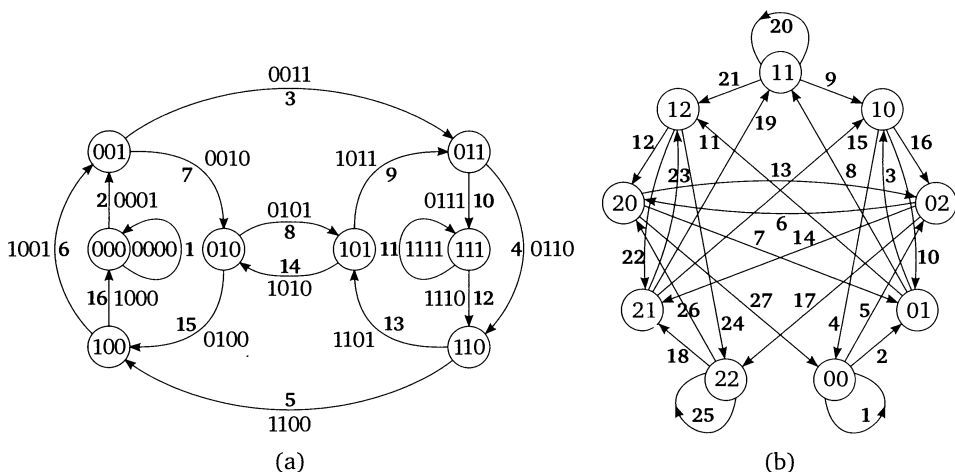


Рис. 3.8

§ 2. Гамильтоновы циклы

1. Во многих практических задачах наряду с эйлеровыми циклами часто встречаются и так называемые *гамильтоновы циклы* — простые циклы, проходящие через каждую вершину графа.

а. Пожалуй, наиболее известная из таких задач — это так называемая *задача о коммивояжере*. В этой задаче торговец должен обойти все города из некоторого списка, заходя в каждый город только один раз, и вернуться в исходный город, с которого он начал свое путешествие. Обычно при этом указывается некоторый критерий оптимальности маршрута (кратчайший, самый дешевый и прочее). В случае, когда дополнительные критерии не указаны, задача сводится к поиску гамильтонова цикла в графе, вершинами которого являются города, а ребрами — соединяющие их дороги.

Еще одна задача, собственно, и дала имя гамильтонову циклу — она была описана в письме Гамильтона своему другу в форме математической игры на додекаэдре (рис. 3.9). В этой игре один из игроков должен был вставить палочки в любые пять последовательно идущих вершин додекаэдра, а второй — продолжить этот путь на все оставшиеся вершины. Иными словами, игроки должны были найти простой цикл, проходящий через все вершины додекаэдра. Одно из возможных решений показано на рис. 3.9 (сплошные линии на рисунке).

б. Сразу заметим, что наличие петель и мультиребер на существование гамильтонова цикла в графе G никак не влияет. Поэтому далее мы будем полагать, что любые рассматриваемые в этом параграфе графы являются простыми.

с. Как и в случае эйлерова цикла, первый вопрос, который возникает при анализе подобного рода задач, связан с существованием гамильтонова цикла в заданном графе. Очевидными необходимыми условиями существования

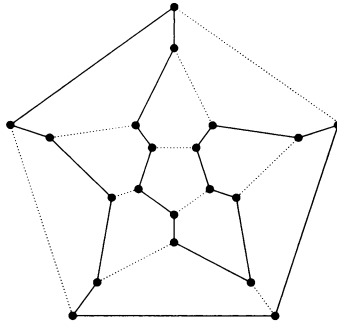


Рис. 3.9. Гамильтонов цикл в додекаэдре

гамильтонова цикла в графе G являются связность этого графа, а также отсутствие в нем вершин степени $\deg(x) = 1$, то есть листьев. Чуть менее тривиальным является следующее необходимое условие существования гамильтонова цикла в графе.

Утверждение 1. Пусть в графе G имеется гамильтонов цикл. Тогда количество $k := c(G - S)$ компонент связности U_1, \dots, U_k , получающихся в результате удаления вершин некоторого непустого подмножества $S \subset V(G)$ графа G , не превосходит количества удаленных вершин:

$$c(G - S) \leq |S|. \tag{3.1}$$

Доказательство. Начнем обход графа G по гамильтонову циклу C с произвольной вершины y компоненты U_1 (рис. 3.10). Выйти из этой компоненты

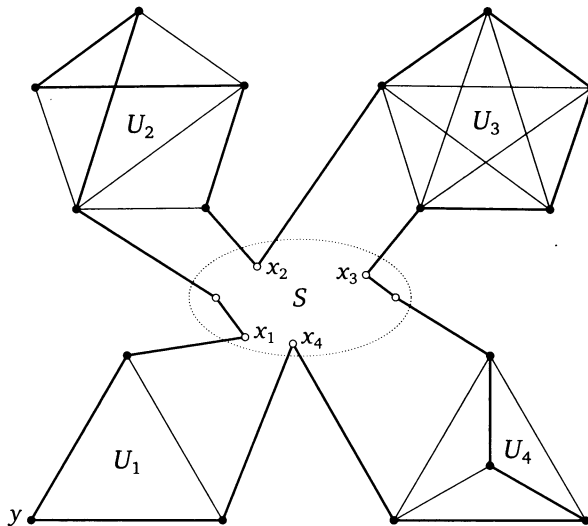


Рис. 3.10

U_1 в другие компоненты U_i , $i \neq 1$, мы не можем, поэтому, выходя из U_1 , мы должны прийти в какую-то вершину $x_1 \in S$. Аналогично, выходя из оставшихся компонент U_i , мы должны прийти в какие-то вершины $x_i \in S$. Так как мы обходим граф G по гамильтонову циклу C , то все вершины $x_i \in S$ должны быть различными. Как следствие, количество вершин в множестве S должно быть больше или равно k . \square

d. Основная проблема со всеми известными на сегодняшний момент необходимыми условиями существования гамильтонова цикла в графе состоит в том, что ни одно из них не является одновременно и достаточным. Конечно же, существуют графы, для которых вопрос о существовании гамильтонова цикла очевиден. Так, в любом циклическом графе C_n , построенном на $n > 2$ вершинах, существует ровно один гамильтонов цикл. В графе K_2 гамильтонова цикла не существует (хотя существует *гамильтонов путь* — простой путь, проходящий через все вершины графа). В случае полного графа K_n , $n > 2$, имеется $(n-1)!/2$ гамильтоновых циклов (см. упражнение 4).

В общем же случае ответ на вопрос, существует ли в данном графе гамильтонов цикл, совершенно нетривиален. В частности, на настоящий момент нет никаких простых критериев существования гамильтонова цикла, подобных тому, что мы сформулировали выше для, казалось бы, очень похожего понятия эйлера цикла. Более того, в 1972 году Ричард Карп доказал, что задача определения того, существует ли в произвольном графе гамильтонов цикл, является *NP*-полной задачей.

Несмотря на это печальное обстоятельство, в теории графов все же имеется целый ряд достаточных условий существования гамильтонова пути или цикла в графе. Так, интуитивно понятно, что чем больше у простого связного графа, построенного на n вершинах, ребер, тем больше вероятность того, что в нем существует гамильтонов цикл. Это видно хотя бы из того, что в полном графе K_n , количество ребер в котором максимально, гамильтонов цикл гарантированно существует. Ниже мы сформулируем несколько результатов, которые формализуют это интуитивное наблюдение.

e. Предположим вначале, что мы смогли каким-то образом построить в простом графе G гамильтонов путь $P = x_1, \dots, x_n$, $n > 2$, то есть простой путь, проходящий через каждую из вершин графа G . Возникает вопрос, когда мы этот путь можем достроить до гамильтонова цикла C . Ответ очевиден в том случае, когда концы построенного пути — вершины x_1 и x_n — оказываются смежными. В этом случае мы всегда можем достроить путь P до гамильтонова цикла C , добавив к нему ребро $\{x_1, x_n\}$. Случай несмежных вершин x_1 и x_n является уже не столь очевидным.

Лемма 2. Пусть в простом графе G имеется гамильтонов путь $P = x_1, \dots, x_n$, $n > 2$, соединяющий пару несмежных вершин x_1 и x_n . Достаточным условием существования гамильтонова цикла в таком графе является выполнение следующего неравенства:

$$\deg(x_1) + \deg(x_n) \geq n. \quad (3.2)$$

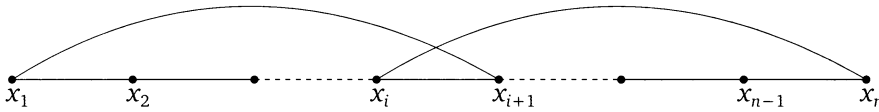


Рис. 3.11. Построение гамильтонова цикла в графе

Доказательство. Основная идея доказательства этого утверждения довольно проста. Пусть в графе G существует гамильтонов путь

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

соединяющий несмежные между собой вершины x_1 и x_n . Нам нужно показать, что в G обязательно существует такое принадлежащее этому пути ребро $e = \{x_i, x_{i+1}\}$, что вершина x_{i+1} смежна с x_1 , а вершина x_i смежна с x_n (рис. 3.11). Тогда мы всегда сможем заменить путь P на гамильтонов цикл

$$C = (x_1, x_2, \dots, x_i, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{i+1}, x_1).$$

Покажем, что такое ребро e обязательно найдется. Для этого заметим прежде всего, что так как путь P гамильтонов, то он проходит через все вершины этого графа, а значит, всего в графе G имеется n вершин. Вершины x_1 и x_n несмежны между собой. Помимо них, в графе существует еще $n - 2$ вершины. Так как суммарная степень вершин x_1 и x_n больше или равна n , то из этих двух вершин в оставшиеся $n - 2$ вершины исходят по меньшей мере n ребер, а это, согласно принципу Дирихле, означает, что среди вершин x_2, \dots, x_{n-1} обязательно найдется хотя бы одна вершина, смежная как с x_1 , так и с x_n .

Нам же понадобится чуть более сильное утверждение. Именно, предположим, что степень вершины x_1 равна l . Мы только что отметили, что среди l смежных с x_1 вершин найдется хотя бы одна вершина, смежная с x_n . Покажем теперь, что среди любых l отличных от x_n вершин графа G найдется хотя бы одна вершина, смежная с x_n . Действительно, если бы это было не так, то степень вершины x_n была бы меньше или равна $(n - 1 - l)$: $n - 1$ — это максимальная степень вершины в графе с $|V(G)| = n$, а кроме того, из вершины x_n в l вершин ребра идти не могут. Это, в свою очередь, противоречит неравенству (3.2).

Теперь возьмем l смежных с x_1 вершин графа G и отступим от этих вершин на одно ребро назад вдоль гамильтонова пути P . Получим набор из l вершин, одна из которых — какая-то вершина x_i — обязательно смежна с x_n . Тогда ребро $\{x_i, x_{i+1}\}$ и будет нужным нам ребром e . \square

f. Заметим, что на самом деле мы доказали следующий чуть более общий результат.

Следствие 3. Пусть $P = x_1, \dots, x_k$, $k > 2$, есть наибольший по включению простой путь в графе G . Тогда этот путь можно превратить в простой цикл C либо в случае, когда концы пути P — вершины x_1 и x_k — являются смежными, либо в случае, когда сумма степеней этих вершин больше или равна k :

$$\deg(x_1) + \deg(x_k) \geq k. \tag{3.3}$$

Доказательство. Действительно, в случае, когда вершины x_1 и x_k являются смежными, искомым циклом C получается добавлением к пути P ребра $\{x_1, x_k\}$.

Предположим, что вершины x_1 и x_k оказались несмежными. Заметим, что эти вершины соединены ребрами только с какими-то другими вершинами того же пути — в противном случае мы смогли бы продолжить путь P на какие-то другие вершины.

Рассмотрим подграф H , индуцируемый всеми вершинами пути P . Согласно сделанному выше замечанию степени вершин x_1 и x_k в этом подграфе останутся прежними. Как следствие, неравенство (3.3) для этих вершин окажется верным и в подграфе H . Но в этом подграфе путь P является гамильтоновым. Следовательно, его можно превратить в гамильтонов цикл C способом, описанным при доказательстве леммы 2. \square

г. Следующая теорема дает нам достаточные условия существования гамильтонова пути в графе.

Теорема 4 (Оре). Пусть G — простой граф, построенный на $n > 2$ вершинах. Если для любых двух несмежных вершин x, y графа G выполняется условие

$$\deg(x) + \deg(y) \geq n - 1, \quad (3.4)$$

то граф G имеет гамильтонов путь.

Доказательство. Заметим прежде всего, что любой граф G , удовлетворяющий условиям (3.4), является связным. Более того, длина кратчайшего пути, соединяющего произвольную пару несмежных вершин, равна двум. Действительно, рассмотрим произвольную пару несмежных вершин x и y . Условие (3.4) вместе с принципом Дирихле гарантирует нам, что среди оставшихся $n - 2$ вершин обязательно найдется хотя бы одна вершина z , смежная как с x , так и с y , то есть в графе существует путь $\{x, z, y\}$.

Теперь предположим, что выполнено условие (3.4), а гамильтонова пути в графе G не существует. Это означает, что максимальный простой путь P в таком графе содержит $k < n$ вершин. Ясно также, что длина такого пути больше или равна двум — если в графе существует пара несмежных вершин, то она соединена путем длины два, а если все вершины графа смежны между собой, то граф полный и там длина максимального пути равна $n - 1$. Наконец, если концевые вершины пути P несмежны, то в силу условия (3.4) сумма их степеней больше или равна $n - 1$, то есть больше или равна k . Все это дает нам основание воспользоваться следствием 3 и утверждать, что в графе G существует простой цикл длины k .

Так как $k < n$ и граф G связан, то в G обязана существовать вершина u , не входящая в цикл C и смежная хотя бы с одной из вершин $x \equiv x_1$ этого цикла $C = (x_1, \dots, x_k)$. Но в таком случае мы всегда можем построить в графе G простой путь u, x_1, x_2, \dots, x_k длины больше чем k , что противоречит предположению о том, что P есть путь максимальной длины. Полученное противоречие доказывает теорему. \square

h. Сформулируем теперь несколько очевидных следствий из теоремы Оре.

Следствие 5. Пусть G — граф, построенный на $n > 2$ вершинах. Если для любой пары несмежных вершин выполняется условие

$$\deg(x) + \deg(y) \geq n, \quad (3.5)$$

то в графе G имеется гамильтонов цикл.

Доказательство. Действительно, в силу теоремы Оре, в таком графе обязан существовать гамильтонов путь $P = x_1, \dots, x_n$. Согласно следствию 3, его всегда можно превратить в гамильтонов цикл. \square

Следствие 6 (Дирак). Пусть G — простой граф на $n > 2$ вершинах. Если степень каждой из его вершин больше или равна $(n - 1)/2$, то в графе существует гамильтонов путь, а если больше или равна $n/2$, то в нем существует и гамильтонов цикл.

2. Исторически первым достаточным условием существования гамильтонова цикла в графе была теорема Дирака, доказанная им в 1952 году. Эта теорема явилась отправной точкой для получения целого ряда все более и более слабых условий на степени вершин графа, достаточных для существования гамильтонова цикла в нем. Теорема Оре, доказанная в 1960 году, была одним из наиболее важных результатов на этом пути. В 1972 году Вацлав Хватал получил достаточное условие, охватывающее все полученные ранее результаты. Для того чтобы его сформулировать, нам понадобятся некоторые дополнительные понятия и факты.

а. Прежде всего, докажем несложное следствие теоремы Оре.

Лемма 7. Пусть G — простой граф, в котором существует пара несмежных между собой вершин x, y , суммарная степень которых больше или равна n . Тогда в G существует гамильтонов цикл в том и только в том случае, если он существует в графе $G + \{x, y\}$.

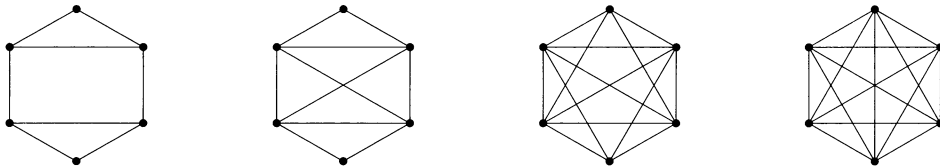
Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно — если в графе G существует гамильтонов цикл, то уж тем более он существует и в графе $G + \{x, y\}$. Обратно, предположим, что в $G + \{x, y\}$ существует гамильтонов цикл. Тогда в графе G существует гамильтонов путь с концами в вершинах x и y , который мы всегда можем трансформировать в гамильтонов цикл способом, описанным при доказательстве леммы 2. \square

б. Теперь сформулируем следующее полезное понятие.

Определение 8. Замыканием $C(G)$ графа G называется граф, полученный из G последовательным соединением в нем ребрами пар несмежных между собой вершин, суммарные степени которых больше или равны n , до тех пор пока ни одной такой пары в графе не останется.

В качестве примера на рис. 3.12 показано замыкание графа G , представляющее собой полный граф K_6 .

Утверждение 9. Граф $C(G)$, полученный в результате процедуры замыкания графа G , не зависит от порядка выбора ребер, соединяющих несмежные вершины в графе G .

Рис. 3.12. Построение замыкания графа G

Доказательство. Обозначим через e_1, \dots, e_r и f_1, \dots, f_s последовательности ребер, добавляемых в процессе получения замыканий G_1 и G_2 графа G . Покажем, что любое ребро e_i присутствует в графе G_2 , а каждое ребро f_j появляется в графе G_1 . Действительно, предположим обратное. Пусть тогда $e_k = \{x, y\}$ — первое ребро в последовательности e_i , которое не вошло в граф G_2 . Рассмотрим граф $H = G + \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$. Из определения графа G_1 следует, что

$$\deg_H(x) + \deg_H(y) \geq n.$$

Но так как все $e_i, i < k$, принадлежат G_2 , то граф H является также и подграфом графа G_2 , а потому

$$\deg_{G_2}(x) + \deg_{G_2}(y) \geq n.$$

Кроме того, так как в G_2 ребро $\{x, y\}$ отсутствует, то в графе G_2 вершины x и y несмежны. А это, в свою очередь, противоречит алгоритму построения графа G_2 . Следовательно, $G_1 = G_2$, так что граф $C(G)$ определен однозначно.

с. Следствием сформулированной выше леммы 7 является такое утверждение.

Теорема 10 (Бонди—Хватал, 1976). *Простой граф G является гамильтоновым тогда и только тогда, когда его замыкание $C(G)$ является гамильтоновым графом.*

Следствие 11. *Если $C(G) = K_n$, то граф G является гамильтоновым.*

Так, в случае $\delta(G) \geq n/2$ каждая пара несмежных вершин графа G должна быть соединена ребром, так что $C(G) = K_n$. Поэтому теорема Дирака есть частный случай теоремы 10.

д. Теперь мы готовы доказать наилучшую из известных оценок на степени вершин, гарантирующую существование гамильтонова цикла в графе.

Теорема 12 (Хватал, 1972). *Пусть G — простой граф, построенный на $n > 2$ вершинах, последовательность*

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$$

степеней вершин которого удовлетворяет следующему условию:

$$\forall i < n/2 \text{ либо } d_i > i, \text{ либо } d_{n-i} \geq n - i. \quad (3.6)$$

Тогда в G существует гамильтонов цикл.

Доказательство. Мы покажем, что замыкание $C(G)$ графа G является полным графом K_n . Будем доказывать это от противного. Именно, предположим, что $C(G) \neq K_n$. Выберем тогда в графе $C(G)$ пару таких несмежных между собой вершин x, y , для которых сумма s степеней максимальна. Мы знаем, что эта сумма ограничена сверху величиной n :

$$s = \deg(x) + \deg(y) < n.$$

Положим для определенности $i := \deg(x) \leq \deg(y)$. В силу последнего неравенства $\deg(y) < n - i$. Кроме того, из этого же неравенства следует, что $i < n/2$, а значит, и $\deg(x) < n - i$.

Мы выбрали несмежную пару вершин с наибольшей суммой s степеней вершин. Поэтому любая несмежная с y вершина имеет степень, меньшую или равную $\deg(x) = i$. Так как $\deg(y) \leq n - 1 - i$, то в графе $C(G)$ гарантированно имеется i несмежных с y вершин, то есть вершин, степени которых меньше или равны i .

Далее, любая несмежная с x вершина имеет степень, меньшую или равную $\deg(y) < n - i$. Так как степень вершины x равна i , то в графе существует $n - 1 - i$ несмежных с x вершин, степень которых меньше $n - i$. Кроме того, сама вершина x имеет степень, меньшую $n - i$. Таким образом, мы нашли по меньшей мере $n - i$ вершин в графе $C(G)$, степень которых меньше $n - i$.

Теперь заметим, что G есть остовный подграф графа $C(G)$. Поэтому если в $C(G)$ какая-то вершина имеет степень, меньшую некоторого числа, то и в G степень этой вершины не превосходит того же числа. Следовательно, мы нашли такое $i < n/2$, для которого в графе G нашлись как минимум i вершин степени, меньшей или равной i , и $n - i$ вершин, степень которых меньше $n - i$, а это противоречит условиям (3.6). Действительно, последовательность (d_1, d_2, \dots, d_n) степеней вершин упорядочена по неубыванию. Значит, первые i из этих чисел меньше или равны i , а следовательно, и i -е число этой последовательности, а именно d_i , меньше или равно i . Аналогично показывается, что $d_{n-i} < n - i$. \square

3. В заключение данного параграфа поговорим о гамильтоновых циклах в орграфах.

а. Оказывается, любое обобщение описанных выше достаточных условий существования гамильтоновых путей и циклов в неориентированных графах на ориентированный случай дается довольно тяжело. В частности, существует следующее обобщение теоремы Дирака на случай орграфов.

Теорема 13. Пусть D — сильно связный орграф, исходящая и входящая степени любой вершины x в котором больше или равны $n/2$. Тогда в D существует гамильтонов цикл.

Доказательство этой теоремы значительно сложнее доказательства теоремы Дирака для неориентированных графов и здесь приводиться не будет.

б. Вместо этого мы рассмотрим частный случай орграфов — турниры, для которых вопрос существования гамильтонова пути или цикла решается значительно проще.

Теорема 14 (Редеи, 1934). В любом турнире T существует ориентированный гамильтонов путь.

Доказательство проведем индукцией по количеству n вершин в турнире D . Очевидно, что тривиальный гамильтонов путь, состоящий из одной вершины, существует в тривиальном же турнире, построенном на одной вершине. Предположим теперь, что при любом фиксированном $n \geq 2$ любой турнир, построенный на $n - 1$ вершине, имеет гамильтонов путь. Рассмотрим тогда в турнире T , построенном на n вершинах, произвольную вершину x . Орграф $T' = T - x$ является турниром на $n - 1$ вершине, так что в нем существует гамильтонов путь $P' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. В этом случае возможно всего три варианта.

1. В орграфе T существует ребро (x, x_1) . Тогда в T существует и ориентированный гамильтонов путь (x, x_1, \dots, x_{n-1}) .

2. В орграфе T существует ребро (x_1, x) , и, кроме того, в T существует ребро (x, x_i) для некоторого $i > 1$, $i < n$ (см. вершину x_i на рис. 3.13). Тогда в T имеется гамильтонов путь, а именно путь

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_i, \dots, x_{n-1})$$

(ребра, помеченные жирными линиями на рисунке).

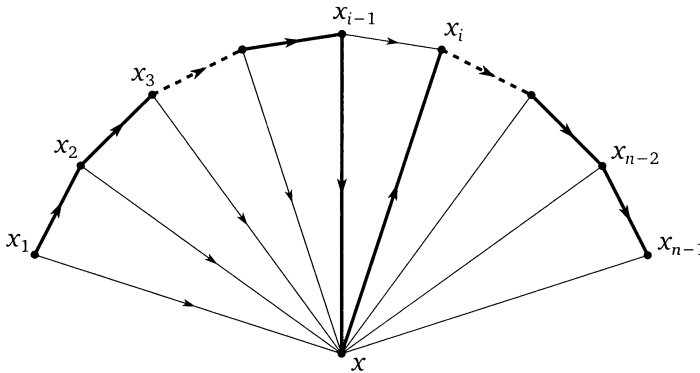


Рис. 3.13

3. Наконец, в орграфе T не существует ребра (x, x_i) ни для какого $i = 1, \dots, n - 1$. Но тогда в T существует ребро (x_{n-1}, x) , а значит, и гамильтонов путь (x_1, \dots, x_{n-1}, x) .

Теорема доказана. \square

Упражнения

1 (0,25 балла). Верно ли, что если в простом графе G существует эйлеров цикл, то в нем существует и гамильтонов цикл? Верно ли обратное утверждение, а именно, верно ли, что если в простом графе существует гамильтонов цикл, то в нем существует и эйлеров цикл?

2 (0,5 балла). Докажите, что в графе G , в котором существует гамильтонов цикл, точки сочленения отсутствуют.

3 (0,5 балла). Сформулируйте необходимые условия существования гамильтонова цикла в двудольном графе $G[X, Y]$, $|X| = m$, $|Y| = n$.

4 (1 балл). Подсчитайте количество гамильтоновых циклов в полном графе K_n , построенном на $n > 2$ вершинах.

5 (1 балл). Подсчитайте количество гамильтоновых циклов в полном двудольном графе $K_{n,n}$, $n > 1$.

6 (1 балл). Кубик сыра размерами $3 \times 3 \times 3$ разделен на 27 кубиков единичного объема. Мышь съедает по кубику в день, начиная с углового кубика. При этом на $(i + 1)$ -й день она съедает один из кубиков, смежных (то есть разделенных гранью) со съеденным кубиком сыра в i -й день. Может ли мышь съесть последним центральный кубик при таком способе поедания сыра?

7 (1 балл). Используя необходимые условия (3.1) существования гамильтонова цикла в графе, докажите, что в графах, изображенных на рис. 3.14, гамильтоновых циклов не существует.

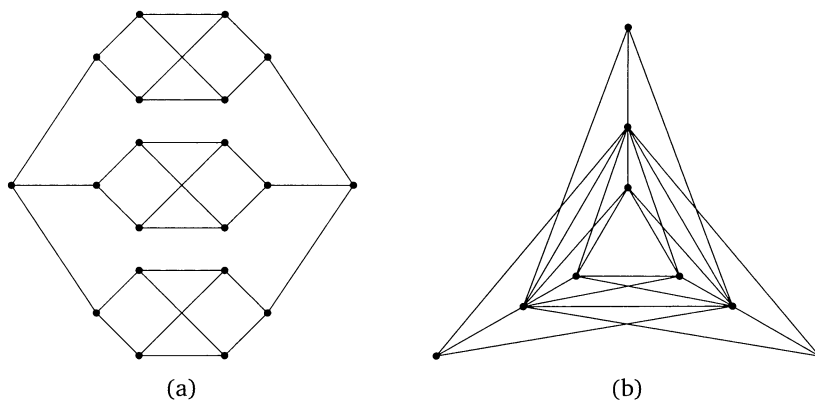


Рис. 3.14

8 (1 балл). Докажите, что в случае шахматной доски размерами $m \times n$ (рис. 3.17) невозможно конем обойти все клетки доски, проходя каждую клетку лишь один раз и вернувшись в ту клетку, с которой начался обход, в случае, если m и n являются нечетными числами.

9 (1,5 балла). Докажите, что для шахматной доски размерами 3×6 невозможно конем обойти все клетки доски, проходя каждую клетку лишь один раз и вернувшись в ту клетку, с которой начался обход.

10 (1,5 балла). Докажите существование гамильтонова цикла в k -кубе Q_k . Подсчитайте количество таких гамильтоновых циклов.

11 (0,5 балла). Докажите, что любой турнир T либо сильно связный, либо может быть превращен в таковой изменением ориентации только лишь одного ребра.

12 (1,5 балла). Докажите, что любой сильно связный турнир T , построенный на n вершинах, содержит циклы длины $3, 4, \dots, n$. Следствием этого

утверждения является, в частности, тот факт, что в любом сильно связном графе существует гамильтонов цикл.

13 (1 балл). Докажите, что среди $n > 3$ вершин сильно связного турнира T найдутся по крайней мере две такие вершины x , что орграф $T - x$ остается сильно связным.

Дополнительные упражнения

14 (1,5 балла). Выведите формулу для подсчета общего количества простых циклов в полном графе K_n .

15 (2 балла). Постройте граф на пяти вершинах, имеющий в точности а) 1 цикл, б) 3 цикла, с) 6 циклов, d) 22 цикла, е) 13 циклов, f) 12 циклов.

16 (1,5 балла). Среди графов G_i , показанных на рис. 3.15, укажите графы, в которых гамильтоновы циклы существуют, а также графы, в которых такие отсутствуют. Приведите доказательство гамильтоновости или негамильтоновости соответствующих графов.

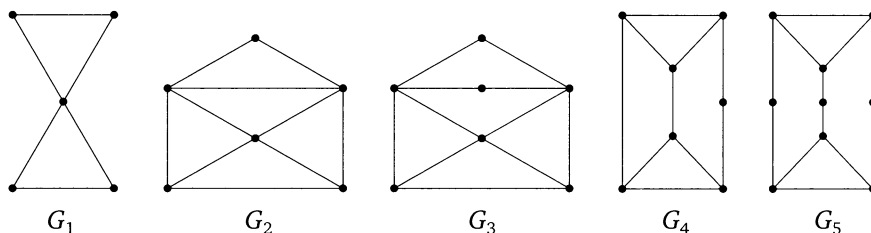


Рис. 3.15

17 (1 балл). Используя необходимые условия (3.1) существования гамильтонова цикла в графе, докажите, что в графе, изображенном на рис. 3.16(a), гамильтонов цикл отсутствует.

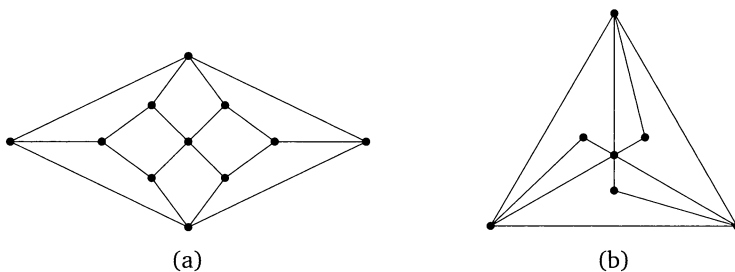


Рис. 3.16

18 (1 балл). Рассмотрим граф, изображенный на рис. 3.16(b). Докажите, что в нем существует гамильтонов путь. Проверьте для него справедливость достаточных условий (3.2) условия существования гамильтонова цикла в графе. Докажите, что гамильтонова цикла в таком графе не существует.

19 (2 балла). Докажите, что для шахматной доски размерами 3×8 невозможно конем обойти все клетки доски, проходя каждую клетку лишь один раз и вернувшись в ту клетку, с которой начался обход.

20 (3 балла). Докажите, что в случае шахматной доски размерами $4 \times n$ (рис. 3.17) невозможно конем обойти все клетки доски, проходя каждую клетку лишь один раз и вернувшись в ту клетку, с которой начался обход.

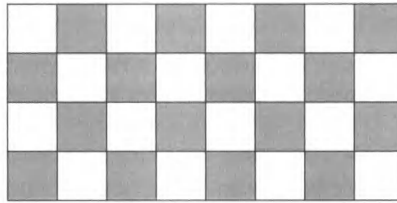


Рис. 3.17

21 (2 балла). Докажите, что в графе Петерсена гамильтонова цикла не существует.

22 (2,5 балла). Возможно ли удалить в графе Петерсена ребра так, чтобы в полученном в результате удаления этих ребер связном графе G существовал эйлеров цикл?

23 (1,5 балла). Пусть T — турнир, построенный на 7 вершинах, каждая из которых имеет исходящую степень, равную трем. Докажите, что в таком орграфе найдутся два вершинно несвязанных цикла.

24 (2,5 балла). Обозначим через $h(D)$ количество гамильтоновых путей в простом орграфе D . Докажите, что для орграфа D и орграфа \bar{D} , являющегося дополнением к D до полного орграфа, построенного на n вершинах (то есть орграфа, в котором любые две вершины соединены между собой парой разнонаправленных ребер), справедливо равенство

$$h(D) \equiv h(\bar{D}) \pmod{2}.$$

Указание. Используйте принцип включений-исключений.

25 (2 балла). Докажите, что любой турнир имеет нечетное количество гамильтоновых путей.

Указание. Докажите, что при замене ориентации произвольного ребра e турнира на противоположную четность количества гамильтоновых путей остается неизменной. Для этого, в свою очередь, воспользуйтесь результатами предыдущего упражнения.

Решение упражнений

1. Нет, эти утверждения неверные. В качестве контрпримера к первому утверждению можно рассмотреть граф, показанный на рис. 3.18(a). В качестве контрпримера ко второму упражнению можно взять граф K_4 (рис. 3.18(b)), в котором существуют три различных гамильтоновых цикла, а эйлерова цикла не существует.

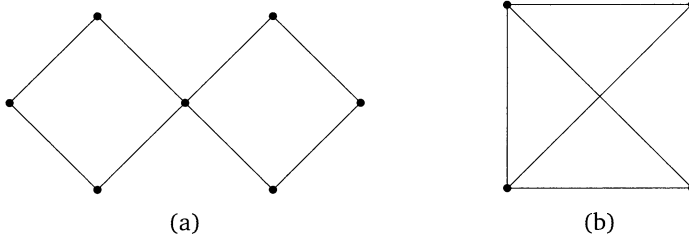


Рис. 3.18. (а) Эйлеров граф, не являющийся гамильтоновым; (б) гамильтонов граф, не являющийся эйлеровым

2. Действительно, после удаления точки сочленения в графе $G - x$ образуется две или более компонент связности, что противоречит необходимым условиям (3.1) существования гамильтонова цикла в графе G .

3. Проходя по гамильтонову циклу в двудольном графе $G[X, Y]$, мы поочередно проходим вершины первой и второй долей графа. Следовательно, количество вершин в долях X и Y обязано совпадать, то есть равенство $m = n$ является необходимым условием существования гамильтонова цикла в двудольном графе $G[X, Y]$.

4. Количество гамильтоновых циклов в полном графе K_n , построенном на $n > 2$ вершинах, равно $(n - 1)!/2$. Действительно, из любой произвольной вершины графа (например, из вершины 1) мы можем $n - 1$ способом пойти в соседнюю с ней вершину, оттуда — $n - 2$ способами в следующую вершину и так далее. Однако при этом у нас всегда будут получаться пары одинаковых циклов, которые мы будем проходить в двух различных направлениях. Следовательно, всего получается $(n - 1)!/2$ различных циклов.

5. В полном двудольном графе $K_{n,n}$ количество гамильтоновых циклов равно $(n - 1)! \cdot n!/2$. Действительно, выбирая в качестве начальной любую из n вершин первого блока, мы затем n способами можем выбрать произвольную вершину из второго блока, $n - 1$ способом — из первого и так далее. Однако таким образом мы подсчитаем любой цикл дважды, поэтому результат мы должны поделить на два.

6. Формализуем данную задачу, представив кубики сыра в виде 27 вершин графа G , помещенных в точки с координатами (i, j, k) , $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$. Соединим эти вершины ребрами в случае, если евклидово расстояние между этими точками равно единице. Задача состоит в том, чтобы найти гамильтонов путь в таком графе, начинающийся в вершине с координатами $(0, 0, 0)$ и заканчивающийся в вершине с координатами $(1, 1, 1)$.

Заметим, что построенный граф является двудольным — любая вершина с четной суммой координат соединена с вершинами, сумма координат которых нечетна, и наоборот. Предположим, что в таком графе существует гамильтонов путь из вершины $(0, 0, 0)$ в вершину $(1, 1, 1)$. Рассмотрим граф G' , полученный из G добавлением ребра, соединяющего эти две вершины. Так как эти вершины имеют различную четность, то граф G' останется двудольным графом, причем графом, в котором существует гамильтонов цикл. Но

гамильтонова цикла в двудольном графе, построенном на нечетном количестве вершин, не существует, так что мышь центральный кубик последним съесть не сможет.

7. Для графа, изображенного на рис. 3.14(a), рассмотрим подмножество $S \subset V$, состоящее из крайней левой и крайней правой вершин. При удалении этих вершин граф распадается на три компоненты связности. Таким образом, $c(G - S) = 3 > 2 = |S|$, и необходимые условия существования гамильтонова цикла в таком графе оказываются нарушенными.

Удаляя в графе, изображенном на рис. 3.14(b), три вершины степени 8, мы получим граф, имеющий четыре компоненты связности. Как следствие, в этом случае $c(G - S) = 4 > 3 = |S|$, так что и здесь необходимые условия существования гамильтонова цикла не выполнены.

8. В случае нечетных m и n мы получаем задачу о построении гамильтонова цикла в двудольном графе G на $m \cdot n$ вершинах. Так как это число нечетное, то такой цикл существовать не может.

9. Предположим, что в случае доски 3×6 имеется гамильтонов цикл, обходящий все вершины соответствующего этой доске двудольного графа G . Заметим, что в таком графе вершины, соответствующие клеткам $(2, 1)$ и $(2, 5)$, имеют степень, равную двум, причем обе они смежны одной и той же паре вершин, отвечающих клеткам $(1, 3)$ и $(3, 3)$. Тогда удаление клеток $(1, 3)$ и $(3, 3)$ приведет к образованию трех связных компонент в графе G , что противоречит необходимым условиям существования гамильтонова цикла в графе G .

10. Рассмотрим вначале 2-куб. В нем существует гамильтонов цикл вида 00, 01, 11, 10, 00. Теперь добавим к каждому из членов этой последовательности ноль на крайнюю левую позицию и дойдем до предпоследнего ее члена. Затем заменим в этой последовательности ноль, стоящий на крайней левой позиции, на единицу и пойдём вдоль полученной последовательности в обратном направлении. В конце этого пути мы получим вершину 100, которая смежна с вершиной 000. В результате мы обойдем все вершины уже трехмерного куба по разу, то есть построим в нем гамильтонов цикл. Заметим теперь, что данный алгоритм можно продолжить на случай произвольной длины k бинарной строки. Тем самым мы получаем конструктивное доказательство существования гамильтонова цикла в k -кубе.

Отметим, что построенный таким образом гамильтонов путь в k -кубе называется *кодом Грея*. Данный код имеет огромное количество приложений. Одно из них — это перебор всех подмножеств данного множества в порядке минимального изменения. Например, если нам нужно перебрать все шифры в замке, закодированные битовой строкой длины k , то перебор всех чисел в обычном бинарном порядке потребует большого количества механических действий. Так, переход от тройки, имеющей двоичное представление 011, к четверке, имеющей двоичное представление 100, потребует изменить биты во всех трех позициях. Теперь предположим, что мы любому числу сопоставим его порядок в коде Грея. Полученное представление числа k называется *кодом Грея* числа k . Так, в этом коде тройке отвечает последовательность 010, а четверке — последовательность 110. В этом случае для перебора всех

вариантов нам достаточно будет на каждом шаге менять бит только лишь в одной позиции.

На том же принципе основано использование кода Грея для минимизации ошибок при преобразованиях аналоговых сигналов в цифровые, при кодировании вещественных чисел битовыми строками и так далее. Например, предположим, что у нас есть считыватель цифровых сигналов, которые меняются со временем. Если считыватель медленный, а цифровой сигнал меняется, например, с тройки на четверку, то при записи этих чисел в обычном двоичном представлении считыватель может прочитать первый бит от числа 011, а два оставшихся — от числа 100, получив в результате число 000, то есть ноль — результат, далекий от реальных значений. Если же числа записаны с помощью кода Грея, то эти числа отличаются лишь на один бит и считыватель прочитает либо старое значение, либо новое, то есть выдаст результат с минимальной ошибкой.

11. Мы знаем, что в любом турнире существует гамильтонов путь. Если конечная вершина x_n и начальная вершина x_1 этого пути связаны ребром (x_n, x_1) , то турнир является сильно связным. В противном случае поменяем ориентацию ребра (x_1, x_n) на противоположную и получим сильно связный турнир.

12. Докажем данное утверждение индукцией по числу n . В качестве базы индукции покажем, что в таком турнире обязан существовать цикл длины $n = 3$. Выберем произвольную вершину x орграфа T . Обозначим через Y подмножество вершин, в которые из x идут ребра (x, y) , а через Z — подмножество вершин, из которых в x идут ребра (x, z) . Так как T сильно связный, то, во-первых, $Y \neq \emptyset$ и $Z \neq \emptyset$, а во-вторых, из Y в Z обязано идти хотя бы одно ребро (y, z) . Следовательно, в T имеется цикл (x, y, z, x) .

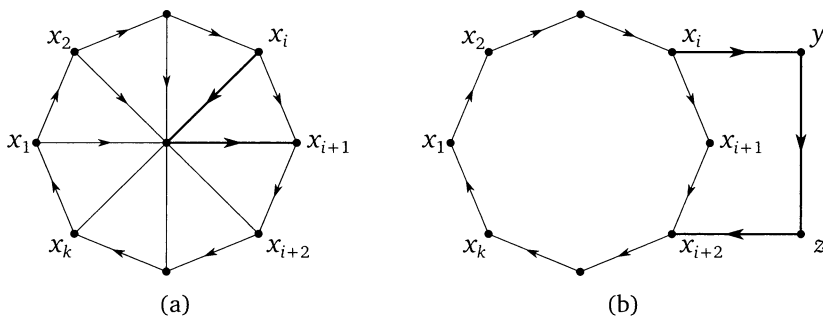


Рис. 3.19

Теперь предположим, что в T существует цикл $C_k := (x_1, \dots, x_k, x_1)$ длины $k < n$, и покажем, что в нем найдется цикл длины $k + 1$. Предположим вначале, что в T найдется такая вершина $x \notin C_k$, что в T имеются ребра (x, x_i) и (x_j, x) . Но тогда в цикле обязательно найдется такая вершина x_i , что в T найдутся ребра (x_{i-1}, x_i) и (x, x_i) (рис. 3.19(a)). В этом случае циклом длины $k + 1$ будет цикл

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_i, \dots, x_k, x_1).$$

Теперь предположим, что такой вершины в T не нашлось. В этом случае все множество вершин, не входящих в цикл C_k , мы вновь можем разбить на два подмножества Y и Z , подробно описанные для случая $k=3$ (см. рис. 3.19(b)). Они непусты и связаны друг с другом по меньшей мере одним ребром (y, z) . Более того, так как турнир — это ориентированный полный граф K_n , то из любой вершины цикла C_k ведут ребра в любую вершину подмножества Y и из любой вершины подмножества Z ведут ребра в любую вершину цикла C_k . Остается тогда взять вершину x_i , перейти из нее в вершину y , оттуда — в вершину z , а затем — в вершину x_{i+2} цикла C_k , для того чтобы получить цикл

$$(x_1, \dots, x_i, y, z, x_{i+2}, \dots, x_k, x_1)$$

длины $k+1$.

13. Рассмотрим в T цикл наибольшей длины, не являющийся гамильтоновым циклом. Так как $n > 3$, то такой цикл в орграфе T обязательно существует. Он не проходит через какую-то вершину x . Следовательно, $T-x$ является сильно связным орграфом.

Покажем теперь, что в T имеются по крайней мере две такие вершины. Пусть x — найденная выше вершина, для которой турнир $T-x$ остается сильно связным. При решении упражнения 12 мы показали, что эта вершина обязательно принадлежит какому-то циклу длины 3. Кроме того, мы показали, как любой цикл длины 3 расширить до цикла произвольной длины $k \leq n$. Расширяя его до цикла C длины $n-1$, мы получим вершину y , не входящую в C . Удаление y вновь не нарушает связности орграфа.

§ 3. Линейное пространство ребер. Циклы и разрезы

1. Перейдем к изучению еще одного важного понятия, тесно связанного как с основными деревьями, так и с четными подграфами графа G , — понятия фундаментального цикла.

а. Пусть T есть некоторое остовное дерево связного графа G . Ребра графа G , не вошедшие в T , образуют, как говорят, *кодерево* \bar{T} графа G . Кодерево \bar{T} можно еще трактовать как остовный подграф, полученный из G удалением всех ребер, принадлежащих остовному дереву T . Ребра дерева T называют иногда *ветвями* (branches) этого дерева, а ребра кодерева \bar{T} называют *хордами* исходного дерева T .

Рассмотрим произвольное ребро $e = \{x, y\}$, принадлежащее кодереву \bar{T} . Согласно доказанному в предыдущей главе утверждению граф $T+e$, полученный добавлением к T ребра e , содержит единственный цикл. Этот цикл обозначается обычно C_e и называется *фундаментальным циклом* графа G по отношению к остовному дереву T .

б. Рассмотрим теперь все множество ребер из \bar{T} . Каждому из этих ребер e соответствует свой фундаментальный цикл C_e , полученный добавлением e к T . Множество всех таких циклов образует, как говорят, *фундаментальное множество циклов*, ассоциированное с T . Количество же циклов в этом множестве, совпадающее с количеством ребер в \bar{T} , называется *цикловым рангом*

$\gamma(G)$ графа G . Понятно, что для любого связного графа G цикловой ранг $\gamma(G)$ не зависит от выбора остовного дерева T в графе и равен $m - n + 1$, где m — количество ребер в графе G .

В качестве примера рассмотрим граф G , показанный на рис. 3.20. Ребра остовного дерева T на этом рисунке помечены жирными линиями. У такого графа имеются четыре ребра e_i , $i = 2, \dots, 5$, входящие в кодереву \bar{T} . Как следствие, цикловой ранг $\gamma(G)$ данного графа равен четырем. Соответствующие каждому из ребер $e_i \in \bar{T}$ фундаментальные циклы C_{e_i} показаны на рис. 3.21.

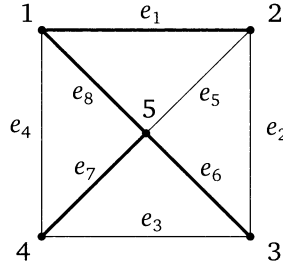


Рис. 3.20. Остовное дерево графа

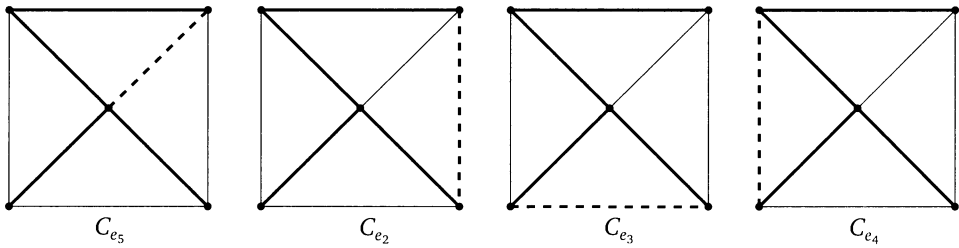


Рис. 3.21. Фундаментальные циклы графа

2. Важно заметить, что по построению порождающее цикл C_{e_i} ребро e_i не входит ни в какие другие фундаментальные циклы графа G , порожденные остальными ребрами $e_j \in \bar{T}$. Это свойство позволяет рассматривать множество фундаментальных циклов как базис в линейном подпространстве некоторого линейного пространства ребер, к описанию которого мы сейчас и перейдем.

а. Рассмотрим простой связный граф G , построенный на n вершинах и имеющий m ребер. Введем множество $\mathcal{E}(G)$ всех подмножеств множества $E(G)$ ребер графа G . Любое подмножество $S \in \mathcal{E}$ ребер графа G индуцирует некоторый остовный подграф $G(S)$ графа G , и далее в этом параграфе, говоря о некотором подмножестве S ребер, мы также будем иметь в виду и связанный с S индуцированный им остовный подграф $G(S)$.

В первой главе мы отмечали, что на множестве всех остовных подграфов (или, что в данном случае то же самое, на множестве \mathcal{E}) корректно определена операция Δ симметрической разности двух остовных подграфов. Неслож-

но убедиться в том, что данная операция вводит на множестве \mathcal{E} структуру линейного пространства над двухэлементным полем $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Нулевым элементом в этом пространстве является пустое подмножество ребер \emptyset . Кроме того, так как $S \Delta S = \emptyset$ для любого подмножества S ребер (то есть элемента множества $\mathcal{E}(G)$), то обратный элемент $-S$ к S в этом пространстве совпадает с S . Умножение $S \in \mathcal{E}$ на 1 в этом пространстве дает нам сам элемент S , а умножение на 0 — пустой подграф, то есть остовный подграф, индуцированный пустым подмножеством ребер \emptyset . Так как набор подмножеств E_i , каждое из которых состоит из единственного ребра e_i принадлежит $E(G)$, образует в этом пространстве базис (так называемый стандартный базис пространства \mathcal{E}), то размерность этого пространства равна m .

Любой элемент $S \in \mathcal{E}$ в стандартном базисе можно представить в виде бинарной строки длины m . В случае, если ребро $e_i \in S$, на i -й позиции этой строки стоит единица. В противном случае там стоит ноль. Например, множество ребер остовного дерева T , показанного на рис. 3.20, описывается вектором

$$(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1).$$

Стандартная операция \otimes «исключающее или» (exclusive-or, или xor) задает бинарную операцию на множестве таких строк, эквивалентную операции симметрической разности Δ на множестве $\mathcal{E}(G)$ подмножеств множества ребер графа G . Операция \otimes превращает множество бинарных строк длины m в линейное пространство над полем \mathbb{F}_2 , изоморфное пространству \mathcal{E} . Как следствие, часто вместо элементов множества \mathcal{E} мы будем рассматривать соответствующие бинарные строки длины m , а вместо операции Δ симметрической разности — операцию \otimes над этими строками.

б. В линейном пространстве \mathcal{E} можно ввести скалярное произведение: по определению скалярным произведением его элементов S и Q называется элемент поля \mathbb{F}_2 , рассчитывающийся по формуле

$$(S, Q) := s_1 q_1 + \dots + s_m q_m \in \mathbb{F}_2,$$

где $s_i \in \{0, 1\}$ и $q_i \in \{0, 1\}$ — коэффициенты в разложении подмножеств S и Q по стандартному базису. Из этого определения видно, что два элемента S и Q ортогональны друг другу тогда и только тогда, когда они пересекаются по четному числу ребер.

с. Давайте теперь введем достаточно важное понятие декомпозиции графа G .

Определение 1. Декомпозицией графа G называется семейство \mathcal{H} попарно реберно непересекающихся подграфов H_1, \dots, H_k графа G , объединение которых дает весь граф G :

$$\bigcup_{1 \leq i \leq k} H_i = G.$$

Сразу заметим, что в любом графе G всегда существует так называемая тривиальная декомпозиция, у которой любое подмножество H_i состоит из одиночного ребра $e_i \in E(G)$. В реальных же задачах нас, как правило, интересуют более содержательные случаи декомпозиции графа G . На рис. 3.22

показаны некоторые примеры таких нетривиальных декомпозиций. Рисунки 3.22(a) и 3.22(b) иллюстрируют примеры так называемых декомпозиций графа на пути (path decomposition) — декомпозиций, в которых все H_i изоморфны некоторым путям P_i . На рис. 3.22(c) показан пример так называемой декомпозиции графа на циклы (cycle decomposition) — декомпозиции, в которой все H_i изоморфны циклам.

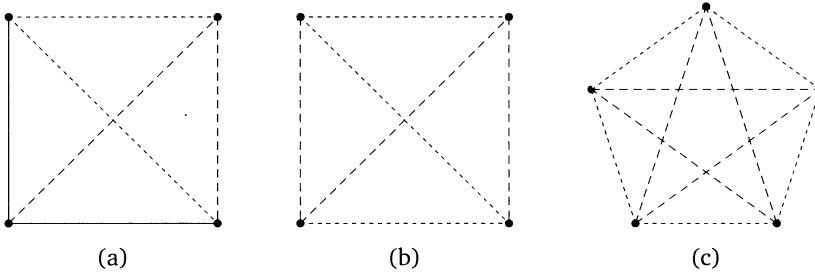


Рис. 3.22. Декомпозиция графа K_4

Определение 2. Если каждый из подграфов H_i изоморфен одному и тому же подграфу H , то такая декомпозиция называется H -декомпозицией графа G .

Декомпозиции, показанные на рис. 3.22(a)–(c), отвечают P_2 , P_3 и C_5 -декомпозициям графов K_4 и K_5 .

Определение 3. Если каждый из подграфов H_i представляет собой гамильтонов цикл в графе G , то такая декомпозиция графа G называется гамильтоновой.

На рис. 3.22(c) представлена гамильтонова декомпозиция графа K_5 .

d. В данном параграфе нас будет особо интересовать декомпозиция графа на циклы (рис. 3.22(c)). Сразу заметим, что такого рода декомпозиция существует далеко не всегда — любое дерево T представляет тривиальный пример графа, для которого декомпозиция на циклы отсутствует (смотри также рисунки 3.22(a) и 3.22(b)).

Предположим, что граф G все же допускает декомпозицию на циклы. В этом случае степень любой вершины $x \in V(G)$ графа G четна. Действительно, эта степень представляет собой удвоенное количество циклов, проходящих через вершину x . Иными словами, мы показали, что любой граф, допускающий декомпозицию на циклы, является *четным* графом. Оказывается, верно и обратное утверждение.

Теорема 4 (Veblen, 1912). *Граф G допускает декомпозицию на циклы тогда и только тогда, когда G четный.*

Доказательство. Нам осталось доказать, что любой четный граф допускает декомпозицию на циклы. Будем доказывать это утверждение индукцией

по количеству ребер. В случае пустого графа это утверждение верно — мы можем разложить G на пустое множество циклов. Пусть теперь G является непустым четным графом. Рассмотрим в нем подграф H , индуцированный вершинами графа G с положительными четными степенями. Так как степень любой вершины этого подграфа больше или равна двум, то такой подграф содержит цикл C . Рассмотрим тогда в графе G остовный подграф $G' := G - E(C)$, полученный удалением ребер цикла C . Этот подграф имеет меньшее количество ребер, а потому допускает разложение на циклы. Но тогда и граф G допускает разложение на те же циклы плюс цикл C . \square

Замечание 5. В случае связного графа G теорему Веблена можно переформулировать так: граф G представляет собой объединение реберно непересекающихся простых циклов тогда и только тогда, когда он эйлеров.

е. Вернемся к пространству \mathcal{E} и рассмотрим в этом пространстве подмножество всех четных подграфов заданного графа G .

Утверждение 6. Симметрическая разность двух четных подграфов H_1 и H_2 есть снова четный подграф.

Доказательство. Предположим вначале, что подграфы H_1 и H_2 не имеют общих вершин. В этом случае их симметрическая разность представляет собой несвязное объединение $H_1 \cup H_2$ этих подграфов, то есть четный подграф. В противном случае рассмотрим произвольную общую вершину x четных подграфов H_1 и H_2 . Обозначим через S_1 подмножество инцидентных вершине x ребер, принадлежащих H_1 , а через S_2 — подмножество ребер, принадлежащих H_2 . Симметрическая разность $S_1 \Delta S_2$ представляет собой объединение двух блоков — подмножества $B_1 = S_1 \setminus (S_1 \cap S_2)$ ребер, принадлежащих H_1 и не принадлежащих H_2 , а также подмножества $B_2 = S_2 \setminus (S_1 \cap S_2)$ ребер, принадлежащих H_2 и не принадлежащих H_1 . Как следствие,

$$|S_1 \Delta S_2| = |S_1 \setminus (S_1 \cap S_2)| + |S_2 \setminus (S_1 \cap S_2)| = |S_1| + |S_2| - 2|S_1 \cap S_2|.$$

Так как $|S_1|$ и $|S_2|$ четны, четным является и число $|S_1 \Delta S_2|$. Иными словами, все вершины остовного подграфа, полученного в результате операции симметрической разности двух четных подграфов H_1 и H_2 , имеют четную степень, а следовательно, подграф $H = H_1 \Delta H_2$ является четным подграфом. \square

Следствие 7. Множество четных подграфов замкнуто относительно операции Δ , то есть образует в \mathcal{E} линейное подпространство \mathcal{C} .

Учитывая теорему Веблена, мы можем сказать, что это линейное подпространство порождается всеми циклами графа G . Как следствие, подпространство \mathcal{C} называется *пространством циклов* графа G .

ф. Ранее мы сказали, что любой фундаментальный цикл C_{e_i} , связанный с некоторым остовным деревом T графа G , содержит ребро e_i (хорду дерева T), не входящее ни в какой другой фундаментальный цикл. С точки зрения линейной алгебры это означает, что такие циклы являются линейно независимыми. Действительно, линейная комбинация

$$\alpha \cdot (0, 1, \dots, \underset{i}{1}, \dots, \underset{j}{0}, \dots, 0) + \beta \cdot (1, 1, \dots, \underset{i}{0}, \dots, \underset{j}{1}, \dots, 0) = (0, 0, \dots, \underset{i}{0}, \dots, \underset{j}{0}, \dots, 0)$$

любых двух циклов равна пустому циклу (нулевому вектору) тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta = 0$. Аналогичные рассуждения верны и для всего набора из $m - n + 1$ фундаментальных циклов. Следовательно, мы имеем $m - n + 1$ линейно независимый вектор в пространстве \mathcal{C} циклов графа G . Нам хочется показать, что набор таких векторов образует базис пространства \mathcal{C} . Для этого нужно доказать, что любой элемент C пространства \mathcal{C} может быть представлен в виде линейной комбинации фундаментальных циклов C_{e_i} .

Обозначим через e_1, \dots, e_k ребра цикла C , не принадлежащие остовному дереву T . Пусть C_{e_i} — соответствующие этим ребрам фундаментальные циклы. Покажем, что цикл C представляется в виде линейной комбинации циклов C_{e_i} :

$$C = C_{e_1} \Delta \dots \Delta C_{e_k} \iff \tilde{C} := C \Delta C_{e_1} \Delta \dots \Delta C_{e_k} = 0.$$

Для этого заметим, что в цикле \tilde{C} ребер e_i быть уже не может — единственному ребру e_i в C отвечает единственное же ребро e_i в наборе C_{e_1}, \dots, C_{e_k} , принадлежащее C_{e_i} . Следовательно, все ребра цикла \tilde{C} принадлежат T , то есть в \tilde{C} циклы отсутствуют. Но в \mathcal{C} единственным элементом, в котором циклы отсутствуют, является пустой подграф 0 , так что $\tilde{C} = 0$. Тем самым мы доказали, что набор фундаментальных циклов образует базис подпространства \mathcal{C} .

Кроме того, отсюда следует, что размерность подпространства \mathcal{C} равна $n - m + 1$. Несложно убедиться в том, что в случае несвязного графа G , имеющего k компонент, эта размерность равна $n - m + k$.

3. Наряду с \mathcal{C} в пространстве \mathcal{E} имеется и еще одно очень важное подпространство, тесно связанное с \mathcal{C} , — так называемое пространство \mathcal{B} разрезов графа G . Для определения этого подпространства нам понадобятся несколько важных понятий.

а. Начнем с понятия реберно разделяющего множества F .

Определение 8. Подмножество $F \subset E(G)$ называется *реберно разделяющим множеством* связного графа G , если после удаления всех ребер из F граф $G - F$ перестает быть связным.

Рассмотрим в качестве примера граф, показанный на рис. 3.23. Штрихпунктирными линиями на каждом из этих рисунков помечены ребра, после удаления которых граф перестает быть связным. Следовательно, любое из таких подмножеств ребер образует реберно разделяющее множество.

б. Следующее важное для нас понятие — это понятие *реберного разреза* (edge cut). Пусть у нас имеются два подмножества S_1 и S_2 множества $V(G)$ вершин графа G (не обязательно непересекающихся). Рассмотрим все ребра графа G , один из концов которых принадлежит S_1 , а второй — S_2 . Множество таких ребер обозначается обычно через $[S_1, S_2]$. Случаю $S_1 = S_2 = S$ отвечает набор ребер, оба конца которых лежат в S . Нас же сейчас будет интересовать противоположный случай, а именно случай, когда $S_2 = V(G) \setminus S_1$, т. е. когда у нас имеется разбиение множества $V(G)$ вершин на два блока — S_1 и S_2 .

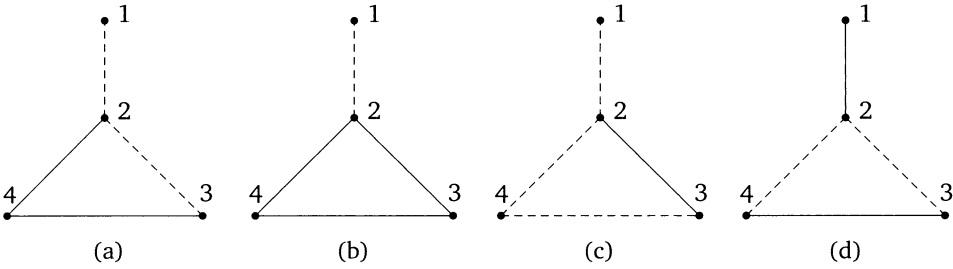


Рис. 3.23

Определение 9. Пусть S — некоторое подмножество множества вершин $V(G)$ графа, а $\bar{S} = V(G) \setminus S$. Набор ребер $[S, \bar{S}]$ называется **реберным разрезом** графа G , связанным с подмножеством S . Иногда он также называется **кограницей** подмножества S и обозначается через $\partial(S)$.

Очевидно, что $\partial(S) = \partial(\bar{S})$, а также что $\partial(V(G)) = \emptyset$. В случае мультиграфа без петель реберный разрез $\partial(x)$, связанный с отдельной вершиной x , является, как говорят, **тривиальным реберным разрезом** и представляет собой набор ребер, инцидентных x , так что $|\partial(x)| = \deg(x)$. По аналогии с этим частным случаем размер $|\partial(S)|$ подмножества ребер $\partial(S)$ в случае мультиграфа без петель называется **степенью** подмножества вершин S .

Так как в графе $G - [S, \bar{S}]$ пути между S и \bar{S} отсутствуют, то любой непустой реберный разрез $[S, \bar{S}]$ является **реберно разделяющим** множеством. Обратное, конечно же, неверно. Так, реберно разделяющее множество, помеченное штрихпунктирными линиями на рис. 3.23(a), реберным разрезом не является — наряду с ребром $\{1, 2\}$ оно содержит лишнее ребро $\{2, 3\}$. Все остальные реберно разделяющие множества, показанные на рис. 3.23(b), (c) и (d), являются одновременно и реберными разрезами. Так, на рис. 3.23(b) представлен реберный разрез $\partial(1)$, связанный с вершиной 1, на рис. 3.23(c) — реберный разрез $\partial(1, 4)$ подмножества вершин $\{1, 4\}$, а на рис. 3.23(d) — реберный разрез $\partial(1, 2)$, связанный с подмножеством $\{1, 2\}$ множества вершин.

с. Наконец, введем последнее нужное нам в этом месте понятие — понятие **минимального реберного разреза**.

Определение 10. Реберный разрез называется **минимальным** (по-английски минимальный реберный разрез называется *bond*), если он представляет собой непустой реберный разрез, любое собственное подмножество которого не является реберным разрезом.

Среди показанных на рис. 3.23 реберных разрезов только два являются минимальными — реберные разрезы $\partial(1)$ (рис. 3.23(b)) и $\partial(1, 2)$ (рис. 3.23(d)). Реберный разрез $\partial(1, 4)$, показанный на рис. 3.23(c), минимальным не является — он содержит в качестве своего собственного подмножества ребро $\{1, 2\}$, являющееся реберным разрезом, связанным с вершиной 1.

д. Докажем теперь для связного графа G следующий важный критерий минимальности реберного разреза.

Теорема 11. *В любом связном графе G любой непустой реберный разрез $\partial(S)$ является минимальным тогда и только тогда, когда граф $G - \partial(S)$ имеет в точности две связные компоненты.*

Доказательство. Предположим вначале, что граф $G - \partial(S)$ имеет в точности две компоненты связности G_1 и G_2 . Реберный разрез $F := \partial(S)$ по определению содержит те и только те ребра, которые соединяют в графе G эти две компоненты. Поэтому если у F существует собственное подмножество F' , то граф $G - F'$ содержит в качестве подграфов те же самые две компоненты связности G_1 и G_2 графа $G - F$ плюс по крайней мере одно ребро, соединяющее эти компоненты. Следовательно, граф $G - F'$ является связным, а это и означает, что $\partial(S)$ представляет собой минимальный реберный разрез.

Обратно, предположим, что граф $G - \partial(S)$ содержит более чем две связные компоненты. Это означает, что либо подграф H , индуцированный подмножеством вершин S , либо подграф \bar{H} , индуцированный подмножеством вершин \bar{S} , содержит по крайней мере две связные компоненты. Пусть для определенности таковым является подграф H . В этом случае $S = A \cup B$, причем между вершинами подмножеств A и B ребра отсутствуют. Но тогда, например, $[A, A]$ есть собственное подмножество множества $\partial(S)$, являющееся реберным разрезом, а это противоречит минимальности $\partial(S)$. \square

е. Аналогом теоремы Веблена для реберных разрезов является следующее утверждение.

Утверждение 12. *Любой реберный разрез $[S, \bar{S}]$ в связном графе G есть объединение нескольких попарно реберно непересекающихся минимальных реберных разрезов.*

Доказательство этого утверждения предлагается провести самостоятельно (упражнение 3).

ф. Докажем, наконец, следующее важное утверждение.

Утверждение 13. *Симметрическая разность двух различных реберных разрезов есть снова реберный разрез, причем*

$$\partial(X) \Delta \partial(Y) = \partial(X \Delta Y). \quad (3.7)$$

Доказательство. То, что симметрическая разность двух различных реберных разрезов есть снова реберный разрез, следует из формулы (3.7). Для ее доказательства рассмотрим рис. 3.24. Все варианты разбиения множества $V(G)$ с помощью двух подмножеств имеют следующий вид:

$$X \cap Y, \quad X \setminus Y, \quad Y \setminus X, \quad \bar{X} \cap \bar{Y}.$$

Все эти варианты можно наглядно представить в виде следующей таблицы:

	Y	\bar{Y}
X	$X \cap Y$	$X \setminus Y$
\bar{X}	$Y \setminus X$	$\bar{X} \cap \bar{Y}$

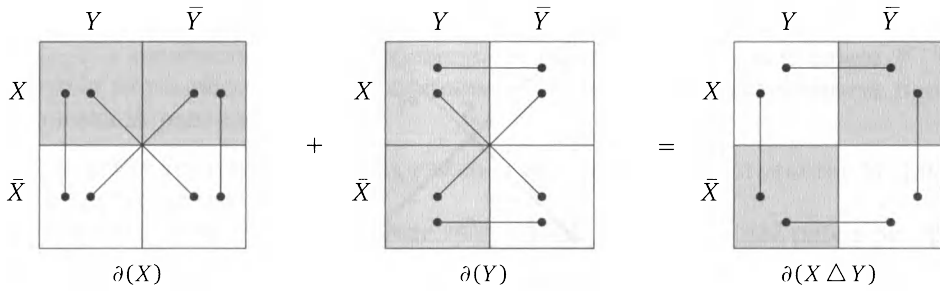


Рис. 3.24

Правые нижние четыре клетки этой таблицы образуют разбиение квадрата на четыре части, как раз и описывающие все четыре блока разбиения множества $V(G)$ вершин графа G .

Теперь рассмотрим набор ребер $\partial(X)$. Эти ребра могут исходить либо из $X \cap Y$, либо из $X \setminus Y$ и входить в любые две клетки нижней части описанного выше квадрата. В итоге получается четыре типа ребер (см. рис. 3.24). Аналогично ребра из набора ∂Y могут выходить из левых клеток квадрата в любую из правых ее клеток. В итоге вновь получаем четыре варианта. Теперь осталось образовать из этих наборов ребер симметрическую разность. Видно, что в нее не будут входить те ребра, которые соединяют диагональные клетки квадрата. Но это и есть $\partial(X \Delta Y)$ — множеству вершин $X \Delta Y$ отвечают правый верхний и левый нижний блоки разбиения $V(G)$, а ребра из $\partial(X \Delta Y)$ соединяют их с двумя оставшимися блоками разбиения $V(G)$. \square

Следствие 14. *Множество всех реберных разрезов вместе с операцией Δ образует в линейном пространстве \mathcal{E} всех подмножеств множества $E(G)$ ребер графа G линейное подпространство \mathcal{R} , называемое линейным пространством реберных разрезов графа G .*

4. Напомним, что в начале этого параграфа мы ввели важное понятие фундаментального множества циклов графа G . С этим понятием тесно связано не менее важное понятие фундаментального множества разрезов в графе G .

а. Пусть T — произвольное остовное дерево связного графа G . Удаление любого ребра e этого дерева разбивает все множество вершин дерева T на два блока X и Y . Рассмотрим тогда минимальный реберный разрез $\partial(X) =: \partial_e$, связывающий в исходном графе G вершины из блоков X и Y . Такой реберный разрез называется *фундаментальным разрезом*, связанным с деревом T , а множество всех таких разрезов — *фундаментальным множеством разрезов*, связанным с деревом T .

б. В качестве примера рассмотрим граф G , показанный на рис. 3.25. Остовное дерево T этого графа состоит из ребер e_1, e_6, e_7 и e_8 (ребра, помеченные жирными линиями на рисунке). Удаляя ребро e_1 , мы разобьем множество вершин дерева T на два блока — блок, состоящий из единственной вершины 2, а также блок, состоящий из вершин $\{1, 3, 4, 5\}$. Соответствующий этому разбиению реберный разрез $\partial(2) = \partial_{e_1}$ состоит из ребер e_1, e_2, e_5 (ребра,

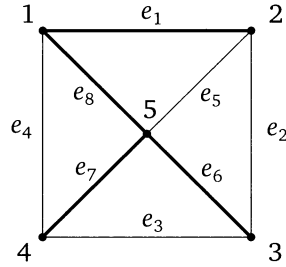


Рис. 3.25. Остовное дерево графа

помеченные штрихпунктирными линиями на рис. 3.26(a)). Реберный разрез ∂_{e_6} , отвечающий ребру e_6 остовного дерева, равен $\partial(3) = \{e_2, e_3, e_6\}$ (рис. 3.26(b)), а реберный разрез ∂_{e_7} , соответствующий ребру e_7 дерева T , есть $\partial(4) = \{e_3, e_4, e_7\}$ (рис. 3.26(c)). Наконец, ребру e_8 отвечает реберный разрез $\partial_{e_8} = \partial(1, 2) = \{e_2, e_4, e_5, e_8\}$ (рис. 3.26(d)).

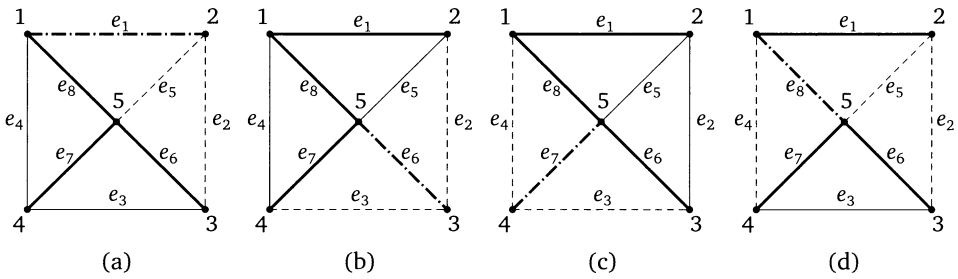


Рис. 3.26. Фундаментальные разрезы графа

Важно заметить, что любой фундаментальный реберный разрез состоит из ребра e_i остовного дерева, которое порождает этот разрез, а также еще из каких-то ребер, которые соединяют X и Y в графе G , но не соединяют их в остовном дереве T . Иными словами, все остальные ребра этого разреза дереву T не принадлежат, то есть все они принадлежат кодереву \bar{T} .

Как следствие, ребро e_i остовного дерева T , порождающее соответствующий разрез ∂_{e_i} , по построению входит только в этот фундаментальный разрез и не входит ни в какой другой фундаментальный разрез, связанный с другими ребрами e_j остовного дерева T . На языке пространства \mathcal{B} реберных разрезов это означает, что такие разрезы образуют набор линейно независимых векторов этого пространства. Количество этих линейно независимых векторов совпадает с количеством ребер в остовном дереве связного графа G и равно $n - 1$.

с. Как и в случае фундаментальных циклов, легко доказать, что любой реберный разрез графа может быть представлен в виде линейной комбинации некоторых фундаментальных разрезов ∂_{e_i} , то есть что набор фундаментальных разрезов графа G образует базис пространства \mathcal{B} (см. упражнение 4).

Отсюда, в частности, следует, что размерность данного подпространства равна $n - 1$, а количество всех реберных разрезов связного графа G равно 2^{n-1} . В случае несвязного графа G , содержащего k компонент, размерность пространства \mathcal{R} равна $n - k$.

5. Давайте теперь поймем, как связаны между собой пространство \mathcal{C} циклов и пространство \mathcal{R} разрезов.

а. Заметим, что в частном случае графа $G = C_n$ любой четный набор ребер представляет собой реберный разрез, тогда как нечетный набор ребер таковым не является. Оказывается, данный факт справедлив и в общем случае — подмножество $F \subset E(G)$ представляет собой реберный разрез $[S, \bar{S}]$ тогда и только тогда, когда F содержит четное количество ребер из любого цикла C в графе G . Более того, справедливо следующее чуть более общее утверждение.

Утверждение 15. *Остовный подграф C графа G принадлежит пространству \mathcal{C} циклов тогда и только тогда, когда у него имеется четное число общих ребер с любым элементом B пространства \mathcal{R} разрезов. Обратное, остовный подграф B принадлежит \mathcal{R} тогда и только тогда, когда он пересекается с любым элементом $C \in \mathcal{C}$ по четному количеству ребер.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что любой цикл C графа G пересекается с любым минимальным реберным разрезом $\partial(X)$ по четному числу ребер. Действительно, зафиксируем произвольную вершину x цикла C и предположим для определенности, что $x \in X$. Выйдя по циклу из подмножества X , мы вернуться в него (а следовательно, и вернуться в вершину x) можем только за четное количество шагов. При этом, делая каждый такой шаг, мы проходим по некоторому ребру минимального реберного разреза $\partial(X)$. Следовательно, $|E(C) \cap \partial(X)|$ есть четное число. Но любой элемент пространства \mathcal{C} есть объединение попарно реберно непересекающихся циклов (теорема Веблена), а любой элемент пространства \mathcal{R} — объединение попарно непересекающихся минимальных реберных разрезов (утверждение 12), так что необходимость данного условия доказана.

При доказательстве достаточности будем считать граф G связным — в противном случае нам достаточно разобрать отдельно каждую из связных компонент. Пусть некоторый остовный подграф C имеет четное число общих ребер с любым элементом B из \mathcal{R} . Предположим, что при этом он не принадлежит \mathcal{C} . Обозначим через e_1, \dots, e_k ребра графа C , не принадлежащие остовному дереву $T(G)$ графа G , и рассмотрим остовный подграф

$$\tilde{C} = C_{e_1} \Delta \dots \Delta C_{e_k},$$

где C_{e_i} — фундаментальный цикл \mathcal{C} , отвечающий ребру e_i . Тогда, как мы уже знаем, симметрическая разность $C \Delta \tilde{C}$ не содержит ребер, принадлежащих кодереву \bar{T} .

Пусть e — ребро дерева T , принадлежащее подграфу $C \Delta \tilde{C}$. Рассмотрим порожденный ребром e фундаментальный разрез ∂_e . Так как все остальные ребра разреза ∂_e принадлежат \bar{T} , то ∂_e пересекается с $C \Delta \tilde{C}$ по единствен-

ному ребру e . Но \tilde{C} представляет собой элемент пространства \mathcal{C} , а следовательно, пересекается с любым реберным разрезом по четному числу ребер. Кроме того, согласно выбору C этот подграф также обладает этим условием. Как следствие, $C \Delta \tilde{C}$ также должен с любым разрезом пересекаться по четному числу ребер (см. упражнение 2). С разрезом же δ_e он пересекается только по одному ребру e . Полученное противоречие доказывает наше утверждение, касающееся циклов. Аналогично доказывается, что и любой подграф, пересекающийся с любым элементом из \mathcal{C} по четному числу ребер, принадлежит подпространству \mathcal{B} . \square

б. Из доказанного выше утверждения 15 вытекает очень важное следствие.

Следствие 16. *Пространство циклов \mathcal{C} и пространство реберных разрезов \mathcal{B} ортогональны друг другу.*

Отметим также, что из анализа размерностей этих двух пространств мы получаем равенство

$$|\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| = (n - k) + (m - n + k) = m = |\mathcal{E}|. \quad (3.8)$$

Замечание 17. Казалось бы, утверждения 16 и равенства (3.8) достаточно для того, чтобы утверждать, что пространства \mathcal{C} и \mathcal{B} являются ортогональными дополнениями друг друга, а объединение их базисов — базисом пространства \mathcal{E} . Однако это утверждение, верное для обычных евклидовых пространств, в рассматриваемом случае неверно. Действительно, введенное в начале этого параграфа скалярное произведение не является положительно определенным. Для такого рода линейных пространств в общем случае

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset,$$

так что пространство циклов \mathcal{C} и пространство реберных разрезов \mathcal{B} являются ортогональными дополнениями друг для друга лишь тогда, когда $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. В этом случае как сам граф G , так и любой его подграф можно представить в виде суммы двух подграфов, один из которых принадлежит \mathcal{B} , а второй — \mathcal{C} . В общем же случае пересечение \mathcal{B} и \mathcal{C} может содержать нетривиальные подграфы. Простейший пример такого рода — это цикл C_4 , в котором множество $E(C_4)$ всех ребер одновременно индуцирует и цикл, и реберный разрез. Как следствие, в данном случае

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{\emptyset, E(C_4)\}.$$

с. Полученную выше формулу (3.8) можно переписать и на языке алгебраической (или комбинаторной) топологии, введя для графов так называемые числа Бетти. Именно, в топологии размерность $|\mathcal{C}|$ пространства циклов называется первым числом Бетти β_1 , а количество компонент связности графа G — числом Бетти β_0 . Тем самым мы доказали, что количество n вершин и количество m ребер связаны с числами Бетти β_0 и β_1 формулой

$$n - m = \beta_0 - \beta_1. \quad (3.9)$$

При этом стоящая в правой части этого равенства разность $\beta_0 - \beta_1$ обозначается обычно через $\chi(G)$ и называется эйлеровой характеристикой графа. В главе, посвященной планарным графам, мы выведем очень важную формулу — формулу Эйлера, связывающую количества вершин, ребер и граней любого плоского графа. Формула (3.9) является аналогом этой формулы для обычных графов.

Формула (3.9) важна, поэтому мы дадим еще одно независимое ее доказательство индукцией по количеству ребер в графе G . База индукции $m = 0$ тривиальна. Действительно, этот случай отвечает пустому графу $G = \bar{K}_n$ на n вершинах, в котором циклы отсутствуют, так что размерность β_1 пространства циклов равна нулю, а $\beta_0 = n$.

Теперь предположим, что утверждение доказано для всех графов, имеющих $m - 1$ ребро, $m > 0$, и покажем, что утверждение верно и для произвольного графа G на m ребрах. Удалим в этом графе произвольное ребро e . Возможны два случая — либо через это ребро проходит какой-то простой цикл, либо оно является мостом. Во втором случае количество связных компонент увеличится на единицу, n не изменится, а m уменьшится на единицу. Осталось показать, что и β_1 в этом случае также не изменится. А это достаточно очевидно — мы знаем, что мост не принадлежит ни одному циклу в графе G , а следовательно, не принадлежит пространству \mathcal{C} . Поэтому удаление этого ребра никак на базис этого пространства не повлияет, а значит, β_1 не меняется, так что формула (3.9) для этого случая верна.

Осталось разобрать случай, когда e принадлежит некоторому циклу. В этом случае не меняются n и β_0 , а m уменьшается на единицу. Осталось показать, что и β_1 уменьшается на единицу. Для этого следует выбрать в пространстве \mathcal{C} базис так, чтобы только лишь один элемент этого базиса содержал ребро e . Сделать это можно, например, удалив из G ребро e и построив в графе $G - e$ остовное дерево $T(G)$. Для такого дерева в исходном графе G ребро e порождает фундаментальный цикл C_e , являющийся одним из базисных векторов. При этом остальные базисные векторы ребро e содержат уже не будут. Тогда удаление e приведет нас к подпространству, размерность которого уменьшится на единицу. А это и означает, что после удаления e уменьшается на единицу и число Бетти β_1 . Итак, и в этом случае формула (3.9) верна.

Упражнения

1 (1 балл). Пусть T — произвольное остовное дерево связного графа G . Докажите, что никакое подмножество ребер кодерева \bar{T} не образует минимального реберного разреза в G .

2 (1,5 балла). Пусть каждый из двух остовных подграфов S_1 и S_2 пересекаются с каким-то третьим остовным подграфом S_3 по четному числу ребер. Докажите, что тогда и $S_1 \Delta S_2$ пересекается с S_3 по четному числу ребер.

3 (1,5 балла). Докажите, что любой реберный разрез $[S, \bar{S}]$ можно представить в виде объединения нескольких попарно непересекающихся между собой минимальных реберных разрезов.

4 (1,5 балла). Докажите, что любой реберный разрез $[S, \bar{S}]$ можно представить в виде линейной комбинации фундаментальных реберных разрезов ∂_{e_i} .

5 (1,5 балла). Для графа G , показанного на рис. 3.27(a), постройте набор фундаментальных циклов, а также набор фундаментальных разрезов, связанных с остовным деревом, ребра которого помечены жирными линиями на рисунке. Покажите, что пересечение пространств \mathcal{C} и \mathcal{R} в таком графе состоит из единственного пустого набора ребер, а следовательно, набор фундаментальных циклов и фундаментальных разрезов образует базис в пространстве \mathcal{E} . Разложите вектор $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ по этому базису.

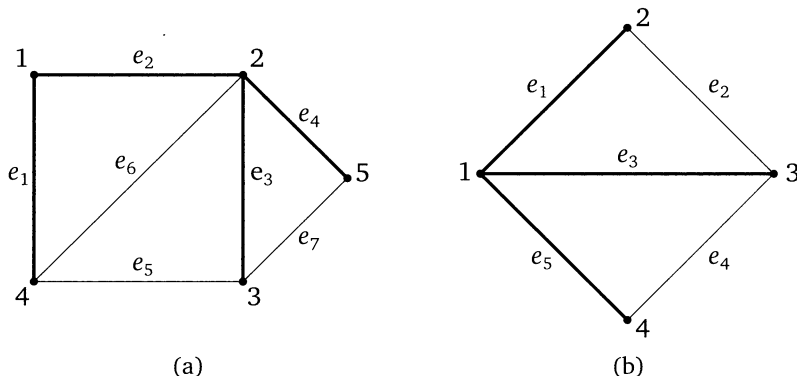


Рис. 3.27

6 (1,5 балла). Для графа G , показанного на рис. 3.27(b), постройте набор фундаментальных циклов, а также набор фундаментальных разрезов, связанных с остовным деревом, ребра которого помечены жирными линиями на рисунке. Перечислите все векторы, принадлежащие подпространствам \mathcal{C} , \mathcal{R} , $\mathcal{C} \cap \mathcal{R}$, а также $\mathcal{C} \cup \mathcal{R}$.

7 (1,5 балла). Докажите, что для любого подмножества S множества $V(G)$ вершин графа G справедливо равенство

$$|\partial(S)| = \sum_{x \in S} \deg(x) - 2|E(G[S])|.$$

8 (0,5 балла). Определите, возможно ли построить P_4 -декомпозицию показанного на рис. 3.28(a) графа G .

9 (1 балл). Определите, возможно ли построить P_4 -декомпозицию показанного на рис. 3.28(b) графа Q_3 . Возможно ли построить для этого графа $K_{1,3}$ -декомпозицию?

Дополнительные упражнения

10 (1,5 балла). Пусть e — какое-то ребро произвольного остовного дерева $T(G)$ связного графа G . Докажите, что в подмножестве ребер кодера \bar{T} , к которому добавлено ребро e , обязательно найдется единственный минимальный разрез графа G .

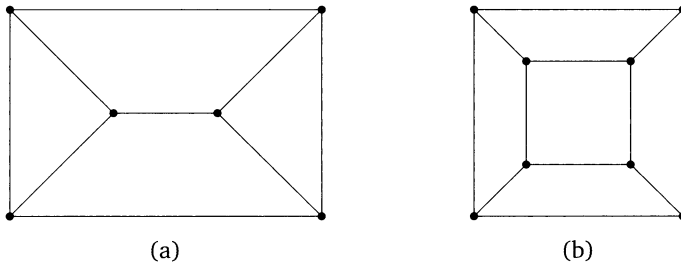


Рис. 3.28. (а) Граф G ; (б) граф Q_3

11 (1,5 балла). Рассмотрим остовное дерево $T(G)$ для графа Петерсена, показанного на рис. 3.29. Опишите систему фундаментальных циклов, а также систему фундаментальных разрезов, связанных с этим остовным деревом. Существуют ли отличные от нуля векторы, лежащие в пересечении пространств \mathcal{C} и \mathcal{B} ?

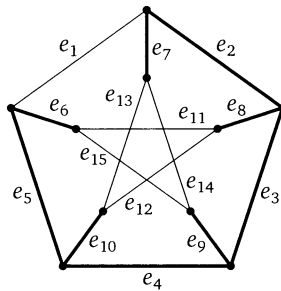


Рис. 3.29

12 (1,5 балла). Пусть r — либо размерность $n - 1$ подпространства \mathcal{B} , либо размерность $m - n + 1$ подпространства \mathcal{C} . Докажите, что в каждом случае количество различных базисов, которые можно получить для заданного подпространства, рассчитывается по формуле

$$\frac{1}{r!} (2^r - 2^0) \cdot (2^r - 2^1) \cdot \dots \cdot (2^r - 2^{r-1}).$$

13 (1,5 балла). Предъявите гамильтонову декомпозицию графов K_7 и K_9 .

14 (2 балла). Докажите, что любой полный граф K_{2n+1} допускает гамильтонову декомпозицию на n циклов C_{2n+1} .

15 (1 балл). Докажите, что любой полный граф K_{2n} допускает декомпозицию на n путей P_{2n} .

16 (1 балл). Рассмотрим граф G , показанный на рис. 3.30. Существует ли декомпозиция такого графа на реберно непересекающиеся остовные деревья? А на изоморфные друг другу реберно непересекающиеся остовные деревья?

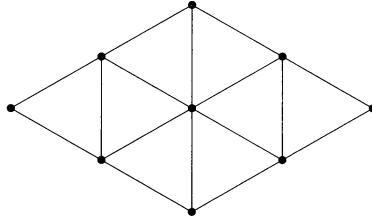


Рис. 3.30

Решение упражнений

1. Любой подграф, индуцированный подмножеством ребер из \bar{T} , не содержит ребер остовного дерева $T(G)$. Следовательно, при удалении ребер этого подграфа в оставшемся подграфе остовное дерево $T(G)$ остается, то есть такой подграф остается связным.

2. Из условия задачи следует, что скалярные произведения (S_1, S_3) и (S_2, S_3) равны нулю. Нам нужно показать, что $(S_1 \Delta S_2, S_3)$ также равно нулю. Так как

$$S_1 \Delta S_2 = (S_1 \setminus (S_1 \cap S_2)) \cup (S_2 \setminus (S_1 \cap S_2)),$$

то

$$\begin{aligned} (S_1 \Delta S_2, S_3) &= ((S_1 \setminus (S_1 \cap S_2)), S_3) + ((S_2 \setminus (S_1 \cap S_2)), S_3) = \\ &= (S_1, S_3) + (S_2, S_3) - 2(S_1 \cap S_2, S_3) = 0. \end{aligned}$$

Первые два слагаемых равны нулю по условию задачи. Последнее слагаемое равно нулю в силу того, что любое четное число оказывается равным нулю после приведения результата к остатку от деления по модулю 2.

3. Достаточно доказать данное утверждение для связного графа G или (что то же самое) для несвязного графа, в котором реберный разрез разрезает только лишь одну компоненту связности. В противном случае $[S, \bar{S}]$ можно представить в виде попарно реберно непересекающихся реберных разрезов, разделяющих ровно одну компоненту связности. Действительно, каждый из реберных разрезов $[S \cap V(G_i), \bar{S} \cap V(G_i)]$, где G_i , $i = 1, \dots, k$, — компоненты связности графа G , состоит только из ребер компоненты G_i , так как вершины всех остальных компонент связности лежат по одну сторону от i -го реберного разреза.

Предположим теперь, что G является связным графом. Реберный разрез $[S, \bar{S}]$ является минимальным тогда и только тогда, когда подграфы, индуцированные подмножествами вершин S и \bar{S} , являются связными. Нам, таким образом, нужно разобраться с ситуацией, когда один из этих подграфов (например, подграф, индуцированный S) несвязен. В этом случае после удаления ребер из $[S, \bar{S}]$ в подграфе $G[S]$ остается более двух компонент связности. Обозначим соответствующие компоненты через H_i , а через S_i — подмножества $V(H_i)$ вершин этих компонент. Так как между компонентами связности подграфа $G[S]$ ребра отсутствуют, то $[S, \bar{S}]$ представляет собой объединение попарно реберно непересекающихся разрезов $[S_i, \bar{S}_i]$.

4. Рассмотрим произвольный реберный разрез $\partial(S) = [S, \bar{S}]$ графа G . На основании предыдущего упражнения достаточно считать G связным. Обозначим через e_i , $i = 1, \dots, k$, ребра кодерева \bar{T} , входящие в $\partial(S)$, и рассмотрим линейную комбинацию

$$\partial(S) \Delta \partial_{e_1} \Delta \dots \Delta \partial_{e_k}.$$

В основном подграфе, порожденном данной линейной комбинацией, ребра кодерева \bar{G} отсутствуют. Следовательно, на основании упражнения 1 эта линейная комбинация отвечает пустому подграфу. Но тогда $\partial(S)$ представляет собой линейную комбинацию фундаментальных разрезов.

5. Набор фундаментальных циклов для показанного на рис. 3.27(а) графа G имеет следующий вид:

$$C_{e_5} = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0),$$

$$C_{e_6} = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0),$$

$$C_{e_7} = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1).$$

Набор фундаментальных разрезов этого графа описывается набором векторов

$$\partial_{e_1} = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0),$$

$$\partial_{e_2} = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0),$$

$$\partial_{e_3} = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 1),$$

$$\partial_{e_4} = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1).$$

В дополнение к фундаментальным циклам в подпространстве \mathcal{C} размерности $2^3 = 8$ содержатся также следующие векторы:

$$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1),$$

$$(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0),$$

$$(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1),$$

$$(1, 1, 1, 1, 0, 1, 1).$$

Ни один из этих четных подграфов, кроме нулевого, реберным разрезом не является, а значит, пространство \mathcal{E} представляет собой в данном случае прямую сумму ортогональных друг другу подпространств \mathcal{C} и \mathcal{B} .

Вектор $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ можно представить в виде суммы базисных векторов:

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = \partial_{e_1} + \partial_{e_2} + \partial_{e_4} + C_{e_5} + C_{e_6}.$$

6. Фундаментальные циклы для графа, показанного на рис. 3.27(а), описываются векторами

$$C_{e_2} = (1, 1, 1, 0, 0),$$

$$C_{e_4} = (0, 0, 1, 1, 1).$$

Кроме того, в пространство \mathcal{C} также входят векторы

$$(0, 0, 0, 0, 0), \\ (1, 1, 0, 1, 1).$$

Фундаментальные разрезы этого графа имеют вид

$$\partial_{e_1} = (1, 1, 0, 0, 0), \\ \partial_{e_3} = (1, 0, 1, 0, 1), \\ \partial_{e_5} = (0, 0, 1, 1, 1).$$

Кроме того, к пространству \mathcal{B} относятся векторы

$$(0, 0, 0, 0, 0), \\ (0, 1, 1, 1, 0), \\ (1, 0, 1, 1, 0), \\ (0, 1, 1, 0, 1), \\ (1, 1, 0, 1, 1).$$

Как видно, помимо нулевого вектора, пересечение подпространств \mathcal{C} и \mathcal{B} содержит вектор $(1, 1, 0, 1, 1)$. Размерность пересечения $\mathcal{C} \cap \mathcal{B}$ равна единице, так что из формулы

$$|\mathcal{C} \cup \mathcal{B}| = |\mathcal{C}| + |\mathcal{B}| - |\mathcal{C} \cap \mathcal{B}|$$

получаем, что пространство $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}$ содержит 16 векторов. В дополнение к десяти описанным выше векторам к нему относятся шесть векторов вида

$$(0, 0, 1, 0, 0) = (1, 1, 1, 0, 0) + (1, 1, 0, 0, 0), \\ (1, 1, 1, 1, 1) = (0, 0, 1, 0, 0) + (1, 1, 0, 1, 1), \\ (0, 1, 0, 1, 0) = (1, 1, 1, 0, 0) + (1, 0, 1, 1, 0), \\ (1, 0, 0, 0, 1) = (1, 1, 1, 0, 0) + (0, 1, 1, 0, 1), \\ (0, 1, 0, 0, 1) = (1, 1, 1, 0, 0) + (1, 0, 1, 0, 1), \\ (1, 0, 0, 1, 0) = (1, 1, 1, 0, 0) + (0, 1, 1, 1, 0).$$

Вектор $(1, 0, 0, 0, 0)$, а также все векторы, полученные в результате сложения этого вектора с пятнадцатью нетривиальными векторами, лежащими в $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}$, пространству $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}$ не принадлежат.

7. Сосчитаем сумму степеней вершин, входящих в множество S . Любое ребро, которое входит в $G[S]$, дает вклад, равный двум, в эту сумму, тогда как любое ребро из реберного разреза $\partial(S)$ вносит в эту сумму только лишь единицу. Как следствие, справедливо равенство

$$\sum_{x \in S} \deg(x) = 2|E(G[S])| + |\partial(S)|,$$

из которого и следует нужная нам формула.

8. Да, это возможно — ответ показан на рис. 3.31(a).

9. Ответы показаны на рис. 3.31(b) и рис. 3.31(c).

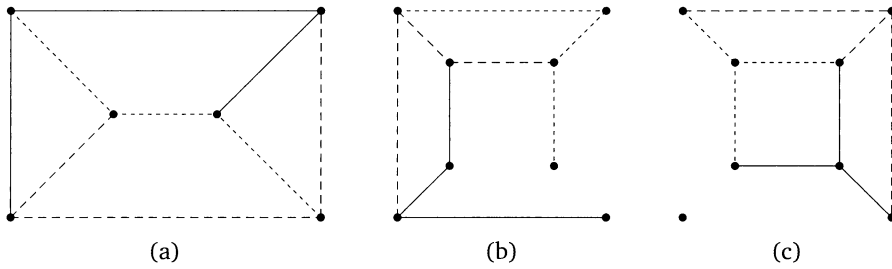


Рис. 3.31

§ 4. Циркуляции и напряжения. Электрические сети

1. В предыдущем параграфе мы показали, что четные подграфы и реберные разрезы неориентированного графа G образуют линейные ортогональные друг другу подпространства пространства \mathcal{E} ребер графа G над двухэлементным полем \mathbb{F}_2 — пространство циклов \mathcal{C} и пространство разрезов \mathcal{B} . В данном параграфе мы рассмотрим аналоги этих конструкций для ориентированных графов.

а. Заметим прежде всего, что наряду с обычными орграфами мы можем рассматривать и так называемые взвешенные орграфы.

Определение 1. *Взвешенным орграфом (D, f) называется орграф D вместе с функцией $f: E(D) \rightarrow \mathbb{F}$, заданной на множестве ребер орграфа D и принимающей значения из некоторого поля \mathbb{F} . Значение $f(e)$ этой функции на ребре e называется *весом* ребра e , а сумма значений этой функции для ребер из некоторого подграфа H орграфа D называется *весом* соответствующего подграфа H .*

Взвешенные графы встречаются в большом количестве важных с практической точки зрения задач. Вес ребра в таких задачах позволяет, например, моделировать стоимость транспортировки того или иного продукта вдоль ребра, величину потока вещества вдоль ребра или какие-то другие параметры сети, математической моделью которой является ориентированный граф D .

Замечание 2. Далее для простоты мы будем считать, что поле \mathbb{F} совпадает с полем \mathbb{R} вещественных чисел. Ситуации, в которых \mathbb{F} отлично от \mathbb{R} , будут оговариваться отдельно. Однако во всех этих случаях мы будем предполагать, что \mathbb{F} представляет собой поле, характеристика которого отлична от двух, то есть поле, отличное от \mathbb{F}_2 .

б. Часто удобно рассматривать функцию $f: E(D) \rightarrow \mathbb{R}$ как вектор f длины m , вещественные координаты которого помечены ребрами орграфа D . Так как такие векторы мы можем складывать и умножать на вещественные числа, то множество этих векторов образует для любого орграфа D линейное пространство, изоморфное \mathbb{R}^m , $m = |E(D)|$.

Как и в случае неориентированного графа, на пространстве \mathbb{R}^m можно задать скалярное произведение векторов. Основным отличием такого пространства от пространства, рассмотренного в предыдущем параграфе, является тот факт, что в рассматриваемом случае скалярное произведение вырожденным не является:

$$(f, f) = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad f = 0.$$

Как следствие, пространство \mathbb{R}^m является евклидовым, что существенным образом упрощает его изучение.

с. На практике довольно часто имеет смысл накладывать дополнительные ограничения на функцию f взвешенного орграфа (D, f) . Так, в случае моделирования процесса переноса вещества с помощью взвешенных орграфов функция f должна удовлетворять так называемому закону сохранения вещества, согласно которому количество вещества, поступающего в заданную вершину x орграфа D , должно совпадать с количеством вещества, из этой вершины исходящего. Если эти условия выполняются в каждой вершине орграфа, то соответствующая функция f носит название циркуляции в орграфе D .

Определение 3. Функция f , заданная на ребрах орграфа D , называется циркуляцией в орграфе D , если в каждой вершине x соответствующего взвешенного орграфа (D, f) выполняются следующие законы сохранения:

$$f^+(x) = f^-(x) \quad \text{для любой вершины } x \in V(D). \quad (3.10)$$

Здесь $f^+(x)$ есть сумма весов ребер орграфа, входящих в вершину x , а $f^-(x)$ — сумма весов исходящих из x ребер.

Пример 4. Рассмотрим взвешенный орграф (D, f) , показанный на рис. 3.32(а). Жирным шрифтом на этом рисунке показаны веса $f(e)$ соответствующих ориентированных ребер $e \in E(D)$. Видно, что в каждой вершине x выполняется закон сохранения (3.10). Следовательно, отвечающий этим весам вектор f представляет собой циркуляцию в орграфе D .

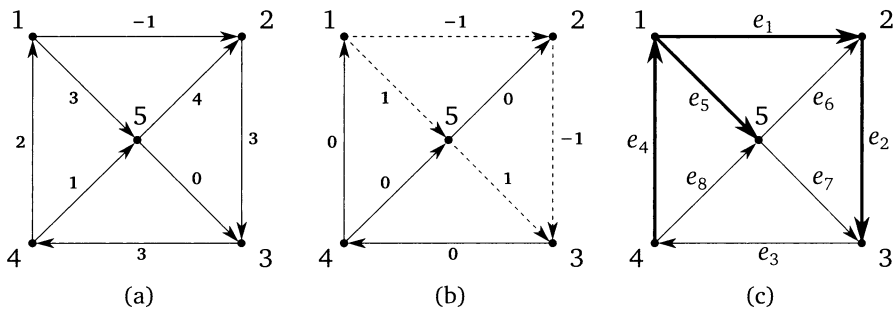


Рис. 3.32. (а) Циркуляция f ; (б) циркуляция f_C ; (с) остовное дерево T

Условия (3.10) можно переписать в векторном виде, используя матрицу M_i инцидентности орграфа D :

$$M_i \cdot f = 0. \quad (3.11)$$

Действительно, произведение любой строки матрицы M_i на столбец f даст нам сумму $f(e_i)$ по всем ребрам, инцидентным соответствующей данной строке вершине x орграфа D . При этом значения f на ребрах, входящих в x , войдут в эту сумму со знаком минус, а значения f на ребрах, исходящих из x , — со знаком плюс.

Рассмотрим теперь линейную оболочку строк матрицы M_i , т. е. совокупность всевозможных линейных комбинаций этих строк. Эта линейная оболочка представляет собой линейное подпространство \mathcal{B} пространства \mathbb{R}^m . Из равенства (3.11), в частности, следует, что любая циркуляция f ортогональна этому подпространству. Последнее, в свою очередь, означает, что все циркуляции сами образуют линейное подпространство \mathcal{C} — линейное подпространство векторов, ортогональных \mathcal{B} . Подпространство \mathcal{C} называется *пространством циркуляций* \mathcal{C} орграфа D .

d. Рассмотрим наряду с ориентированным графом D соответствующий ему (underlying) неориентированный граф G . Оказывается, с любым циклом C в графе G мы можем связать некоторую циркуляцию. Именно, зададим какое-то направление обхода цикла C и определим функцию f_C на множестве ребер орграфа D следующим образом:

$$f_C(e) = \begin{cases} 1, & \text{если направление вектора } e \text{ совпадает} \\ & \text{с направлением обхода цикла } C, \\ -1, & \text{если } e \text{ направлен в сторону,} \\ & \text{противоположную направлению обхода } C, \\ 0, & \text{если } e \text{ не принадлежит циклу } C. \end{cases} \quad (3.12)$$

Несложно убедиться в том, что функция f_C удовлетворяет закону сохранения (3.10). Действительно, количество входящих в любую вершину x неориентированных ребер цикла C обязано совпадать с количеством исходящих из нее неориентированных ребер цикла C . Поэтому в случае, когда каждое инцидентное x ориентированное ребро, принадлежащее циклу, совпадает с направлением обхода C , закон сохранения (3.10) с очевидностью выполняется. Если же направление какого-то инцидентного x ориентированного ребра не совпадает с направлением цикла, то мы, назначая функции f_C на таком ребре значение, равное -1 , подправляем сумму значений f на инцидентных x ребрах так, чтобы закон сохранения (3.10) выполнялся.

В качестве примера на рис. 3.32(b) показана циркуляция f_C , связанная с циклом, помеченным пунктирными линиями на рисунке. Обход этого цикла C осуществляется против часовой стрелки.

e. Важно заметить, что описанные выше циркуляции f_C , связанные с циклами C , порождают все пространство \mathcal{C} циркуляций в орграфе D . Именно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5. Любая циркуляция в орграфе D представляет собой линейную комбинацию циркуляций, связанных с циклами.

Для доказательства этого утверждения нам понадобится понятие носителя функции f .

Определение 6. Носителем функции f называется подмножество S элементов области определения функции f , на котором эта функция отлична от нуля:

$$S = \{x: f(x) \neq 0\}.$$

В случае орграфа носитель функции f — это некоторое подмножество ребер, которое, в свое очередь, можно рассматривать как остовный подграф, индуцируемый соответствующим подмножеством ребер.

Лемма 7. Остовный подграф H , индуцированный носителем S отличной от нуля циркуляции f в орграфе D , содержит хотя бы один цикл.

Доказательство. Так как f — это отличная от нуля циркуляция, то в любую вершину x подграфа H входит хотя бы одно ребро орграфа D , и хотя бы одно ребро из нее выходит. Следовательно, степень любой вершины x в подграфе H обязана быть больше или равна двум. Как следствие, подмножество S ребер содержит хотя бы один цикл C . \square

f. Приступим теперь к доказательству утверждения 5. Рассмотрим произвольную циркуляцию f с носителем S . Будем доказывать данное утверждение индукцией по $|S|$. Случай $S = \emptyset$ тривиален. Пусть теперь $|S| > 0$. Согласно лемме 7 подмножество S ребер содержит хотя бы один цикл C . Рассмотрим произвольное ребро $e \in C$, выберем направление обхода C , совпадающее с ориентацией ребра e , и построим на C циркуляцию f_C вида (3.12). Тогда у циркуляции $f' := f - f(e) \cdot f_C$ мощность подмножества S' ребер, на которых циркуляция f' отлична от нуля, будет хотя бы на единицу меньше мощности подмножества S . По индукционному предположению f' можно представить в виде линейной комбинации циркуляций, связанных с циклами в графе G . Следовательно, то же утверждение верно и для циркуляции

$$f = f' + f(e) \cdot f_C.$$

Замечание 8. Доказанное утверждение является аналогом доказанной в предыдущем параграфе теоремы Веблена для неориентированных графов. В роли четных подграфов здесь выступают циркуляции f . В предыдущем параграфе нам приходилось отдельно доказывать, что подмножество четных подграфов замкнуто относительно операции Δ симметрической разности. Здесь нам это отдельно доказывать не пришлось — мы воспользовались известным результатом линейной алгебры, согласно которому подмножество \mathcal{C} векторов, ортогональных некоторому линейному подпространству \mathcal{B} , само образует подпространство исходного линейного пространства \mathbb{R}^m .

g. Рассмотрим теперь произвольное остовное дерево T графа G (см. рис. 3.32(c), на котором ребра остовного дерева T помечены жирными линиями).

С каждым таким деревом мы можем связать набор из $m - (n - 1)$ фундаментальных циклов C_{e_i} , $e_i \notin C$, каждый из которых получается добавлением к ребрам из T ребра e_i . В свою очередь, для каждого из этих циклов мы можем построить циркуляцию f_{e_i} , связанную с этим циклом, полагая $f_{e_i}(e_i) = 1$ и используя правила (3.12).

В качестве примера рассмотрим остовное дерево T , показанное на рис. 3.32(с). С каждым из четырех ребер $e \notin E(T)$ мы можем связать фундаментальный цикл C_e . Соответствующие этим циклам циркуляции f_e имеют следующий вид:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
$f_{e_3}^T$	1	1	1	1	0	0	0	0
$f_{e_6}^T$	-1	0	0	0	1	1	0	0
$f_{e_7}^T$	-1	-1	0	0	1	0	1	0
$f_{e_8}^T$	0	0	0	-1	-1	0	0	1

2. Заметим, что векторы f_e линейно независимы. Действительно, i -я координата каждого из этих векторов равна единице, а координаты с номерами $j \neq i$, связанные с оставшимися векторами e_j , не принадлежащими $E(T)$, равны нулю. Как и в неориентированном случае, нам осталось показать, что набор этих линейно независимых векторов образует базис пространства \mathcal{C} . Однако в данном случае это будет проще сделать, изучив ортогональное к \mathcal{C} подпространство \mathcal{B} строк матрицы M_i .

а. По определению любой элемент \mathbf{g} пространства \mathcal{B} представляет собой линейную комбинацию строк \mathbf{m}_i матрицы M_i :

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^n p(i) \cdot \mathbf{m}_i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_i, \quad n = |V(D)|. \quad (3.13)$$

Здесь $\mathbf{p} = (p(1), \dots, p(n))$ есть вектор-строка линейного пространства \mathbb{R}^n . По сути дела, вектор \mathbf{p} сопоставляет каждой вершине $i \in V(D)$ орграфа D некоторое вещественное число $p(i)$.

Рассмотрим теперь отдельную компоненту $g_k = \mathbf{g}(e_k)$ вектора \mathbf{g} , отвечающую ребру $e_k = (x, y)$, направленному от вершины x к вершине y . Так как любой столбец матрицы M_i содержит всего два ненулевых числа, а именно 1 в строке, отвечающей вершине x , и -1 в строке, отвечающей вершине y , то

$$g_k = \mathbf{g}(e_k) = \mathbf{p}(x) - \mathbf{p}(y). \quad (3.14)$$

Выписанные соотношения допускают следующую интересную физическую трактовку. Вектор \mathbf{p} мы можем рассматривать как вектор потенциалов в электрической сети, моделируемой ориентированным графом D . Вектор \mathbf{g} мы можем тогда рассматривать как вектор разности этих потенциалов, то есть как вектор напряжений в сети. Из этих соображений пространство, натянутое на строки матрицы M_i , называется *пространством \mathbf{B} напряжений*, а элементы этого пространства называются *напряжениями*.

На рис. 3.33(а) в качестве примера показан взвешенный орграф (D, \mathbf{g}) , веса ребер которого описываются координатами вектора \mathbf{g} напряжений (ма-

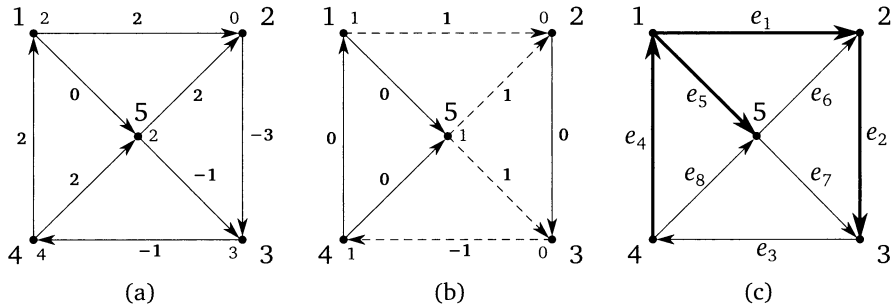


Рис. 3.33. (а) Напряжение и потенциал; (б) минимальный разрез; (с) остовное дерево T .

ленькие цифры, помеченные жирным шрифтом на рисунке). Расположенные у вершин графа числа обозначают значения функции $p(x)$ на множестве вершин. Видно, что координаты векторов g и p связаны равенствами (3.14).

б. Мы уже знаем, что любой цикл графа G порождает в орграфе D некоторую циркуляцию f_C . Аналогично любой минимальный реберный разрез $\partial(X) =: B$ графа G , связанный с подмножеством вершин X , порождает в орграфе D вектор g_B с координатами

$$g_B(e) = \begin{cases} 1, & \text{если } e \in \partial^+(X), \text{ то есть если ребро } e \text{ исходит из } X, \\ -1, & \text{если } e \in \partial^-(X), \text{ то есть если ребро } e \text{ входит в } X, \\ 0, & \text{если } e \text{ не принадлежит разрезу } \partial(X). \end{cases} \quad (3.15)$$

Несложно убедиться, что заданный этими равенствами вектор g_B является напряжением. Действительно, если ввести потенциал p_B вида

$$p_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X, \\ 0, & \text{если } x \notin X, \end{cases} \quad (3.16)$$

то умножение p_B на матрицу M_i как раз и даст нам вектор g_B .

На рис. 3.33(b) в качестве примера показан минимальный реберный разрез $B = \partial(X)$, $X = \{1, 4, 5\}$, помеченный штрихпунктирными линиями. Значения отвечающего этому разрезу напряжения g_B помечены мелким жирным шрифтом, а значения потенциала — мелким нормальным шрифтом.

с. Довольно очевидным является тот факт, что все пространство \mathcal{E} порождается напряжениями g_B , связанными с минимальными реберными разрезами.

Лемма 9. *Носитель S любого отличного от нуля напряжения g в орграфе содержит хотя бы один минимальный реберный разрез $B = \partial(X)$.*

Доказательство. Пусть $g = p \cdot M_i$ — напряжение, для которого $S \neq \emptyset$. Выделим произвольное ребро $(x, y) \in S$, возьмем в качестве X подмножество вершин, потенциалы которых совпадают с $p(x)$, и рассмотрим реберный разрез $\partial(X)$. По построению множества X напряжение $g(e)$ на любом ребре e ,

принадлежащем разрезу $\partial(X)$, отлично от нуля. Так как S есть все множество ребер, на которых функция g отлична от нуля, то $\partial(X) \subseteq S$. Кроме того, $\partial(X) \neq \emptyset$ — это множество обязательно содержит ребро (x, y) . Поэтому $\partial(X)$ есть нетривиальный реберный разрез. Но такой разрез либо сам является минимальным, либо содержит хотя бы один минимальный реберный разрез B . Отсюда следует, что и S содержит B . \square

Утверждение 10. Любое напряжение g в орграфе представляет собой линейную комбинацию напряжений g_B , связанных с минимальными реберными разрезами.

Доказательство полностью аналогично доказательству утверждения 5. Именно, пусть g — произвольное напряжение, а S — подмножество ребер, на которых функция g отлична от нуля. Докажем утверждение индукцией по $|S|$. Утверждение тривиально в случае $S = \emptyset$. Предположим, что $|S| > 0$. Согласно лемме 9 S содержит минимальный реберный разрез $\partial(X) =: B$. Выберем произвольное ребро $e = (x, y) \in \partial(X)$, исходящее из X . В случае, если такое ребро отсутствует, то есть в случае, когда все ориентированные ребра D входят в X , выберем в качестве B реберный разрез $\partial(V(G) \setminus X)$, а в качестве e — произвольное ребро, входящее в X . Рассмотрим теперь напряжение $g' := g - g(e) \cdot g_B$. На ребре e напряжение $g'(e)$ равно 0, так что его носитель S' лежит в S . Следовательно, к нему можно применить индукционное предположение, то есть представить его в виде линейной комбинации напряжений, связанных с минимальными реберными разрезами в G . Но тогда это же утверждение верно и для напряжения

$$g := g' + g(e) \cdot g_B. \quad \square$$

d. Как и в неориентированном случае, мы всегда можем найти в \mathcal{B} набор, состоящий из $n - 1$ линейно независимых векторов напряжений g_i . Для этого нам достаточно рассмотреть остовное дерево T в графе G , выбрать в этом графе $n - 1$ фундаментальный разрез B_{e_i} , $e_i \in E(T)$, и построить соответствующие этим разрезам напряжения g_{e_i} .

В качестве примера рассмотрим остовное дерево T , показанное на рис. 3.33(с). С каждым из четырех ребер $e_i \in E(T)$ мы можем связать фундаментальный разрез B_{e_i} . Соответствующие этим разрезам напряжения g_{e_i} записываются в следующем виде:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
g_{e_1}	1	0	-1	0	0	1	1	0
g_{e_2}	0	1	-1	0	0	0	1	0
g_{e_4}	0	0	-1	1	0	0	0	1
g_{e_5}	0	0	0	0	1	-1	-1	1

Как и векторы f_{e_i} , векторы g_{e_i} линейно независимы. Нам осталось показать, что эти векторы образуют базис пространства \mathcal{B} . Это легче всего сделать, рассматривая одновременно пространства \mathcal{B} и \mathcal{C} .

e. Покажем прежде всего, что любая пара векторов $g \in \mathcal{B}$ и $f \in \mathcal{C}$ взаимно ортогональна. Действительно, согласно определению (3.13) напряжения g ,

любой такой вектор можно представить в виде $\mathbf{g} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_i$. Но согласно равенству (3.11) $\mathbf{M}_i \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0}$ для любого вектора $\mathbf{f} \in \mathcal{C}$. Следовательно, мы имеем

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{f} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{0} = 0.$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Утверждение 11. *Пространства \mathcal{C} циркуляций и \mathcal{B} напряжений взаимно ортогональны. При этом их пересечение состоит из единственного вектора $\mathbf{0}$ — тривиального цикла и тривиального разреза.*

Следствие 12. *Размерности пространства \mathcal{B} напряжений и \mathcal{C} циркуляций орграфа D равны*

$$\dim(\mathcal{B}) = n - 1, \quad \dim(\mathcal{C}) = m - n + 1,$$

а соответствующие фундаментальным разрезам и фундаментальным циклам графа G напряжения и циркуляции орграфа D образуют базисы пространств \mathcal{B} и \mathcal{C} .

Доказательство. Действительно, мы в пространстве \mathcal{B} предъявили $n - 1$ линейно независимых векторов — напряжений, связанных с $n - 1$ фундаментальным разрезом орграфа D . Аналогично, в пространстве \mathcal{C} мы предъявили $m - (n - 1)$ линейно независимых векторов — циркуляций, связанных с $m - n + 1$ фундаментальным циклом в этом орграфе. Следовательно, размерность пространства \mathcal{B} больше или равна $n - 1$, а размерность пространства \mathcal{C} больше или равна $m - (n - 1)$. Но так как пространства \mathcal{B} и \mathcal{C} взаимно ортогональны, то сумма размерностей этих подпространств не может превосходить размерности m всего пространства строк длины m . Поэтому размерности подпространств \mathcal{B} и \mathcal{C} равны соответственно $n - 1$ и $m - (n - 1)$, а описанные выше векторы образуют базисы в этих пространствах. При этом само пространство векторов длины m представляет собой прямую сумму подпространств \mathcal{B} и \mathcal{C} (см. [32], теорема 3, с. 27). \square

3. Покажем теперь, как применить полученные выше результаты в очень важной с практической точки зрения задаче, связанной с расчетом электрических цепей.

а. Мы уже замечали ранее, что любой вектор \mathbf{f} циркуляции в орграфе D с физической точки зрения можно рассматривать как некоторый ток в сети, моделируемой орграфом D , а любой вектор $\mathbf{g} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{V}_i$ напряжения в D с той же точки зрения можно трактовать как некоторое напряжение в этой сети, задаваемое вектором-строкой потенциалов \mathbf{p} . В реальной жизни напряжение и ток в сети связаны друг с другом — согласно закону Ома падение напряжения u между двумя узлами цепи пропорционально силе тока i на этом участке цепи:

$$u = r \cdot i.$$

Коэффициент пропорциональности r носит название электрического сопротивления участка цепи. В случае, если между рассматриваемыми узлами электрической цепи имеется источник электродвижущей силы (ЭДС) —

идеализированный генератор напряжения — мощностью h , то закон Ома переписывается в виде

$$u + h = r \cdot i.$$

В матричном виде это уравнение можно записать так:

$$u + h = R \cdot i.$$

Здесь R — диагональная матрица сопротивлений, h — вектор ЭДС, i и u — векторы силы тока и напряжения в рассматриваемой электрической цепи.

б. В 1847 году Кирхгоф сформулировал два закона, описывающих поведение токов и напряжений в электрической сети. Первый закон гласит, что алгебраическая сумма токов в каждом узле электрической цепи равна нулю. На языке теории графов это означает, что i представляет собой циркуляцию в орграфе D , моделирующем электрическую сеть. Как следствие, первый закон Кирхгофа можно переписать в виде

$$M_i \cdot i = 0,$$

где M_i — матрица инцидентности орграфа D .

Так как размерность пространства \mathcal{B} столбцов матрицы M_i равна $n - 1$, то тому же значению равен и ранг матрицы M_i . Мы знаем, что сумма всех строк матрицы M_i даст нам нулевую строку. Следовательно, любая строка этой матрицы есть линейная комбинация оставшихся $n - 1$ строк. Удаляя эту строку, мы получим так называемую *матрицу Кирхгофа* K , ранг которой равен $n - 1$. Следовательно, строки этой матрицы мы также можем взять в качестве базисных строк пространства \mathcal{B} . Первый же закон Кирхгофа мы, таким образом, можем переписать так:

$$K \cdot i = 0.$$

Действительно, если вектор силы тока i окажется ортогональным всем $n - 1$ строкам матрицы K , то он автоматически окажется ортогональным и последней, n -й строке матрицы M_i .

с. Второй закон Кирхгофа утверждает, что алгебраическая сумма падения напряжения на любом замкнутом контуре электрической цепи равна нулю. Перебирать все циклы в моделирующем электрическую цепь орграфе нам не нужно — достаточно взять систему фундаментальных циклов соответствующего D неориентированного графа G . Предположим, что вектор u напряжений электрической цепи удовлетворяет матричному уравнению

$$C^T \cdot u = 0,$$

где

$$C = [f_{e_1} \quad f_{e_2} \quad \dots \quad f_{e_{m-(n-1)}}]$$

есть базисная матрица пространства циклов, $m - (n - 1)$ столбцов которой состоят из векторов f_{e_i} фундаментальных циркуляций, отвечающих фундаментальным циклам графа G . В этом случае падение напряжения на любом контуре электрической цепи также будет равняться нулю.

d. Закон Ома и законы Кирхгофа представляют собой замкнутую систему линейных алгебраических уравнений для определения силы тока и напряжения в электрической сети при заданных сопротивлениях и ЭДС. Покажем, как решить эту систему, используя изложенные в первой части параграфа сведения.

Пусть T — какое-то остовное дерево соответствующего D графа G . Свяжем с этим деревом систему f_e фундаментальных циркуляций и построим по этим векторам матрицу C . Эту матрицу нам будет удобно записать в следующем блочном виде:

$$C = \begin{bmatrix} C_t \\ E_c \end{bmatrix}.$$

Здесь E_c — единичная матрица размерами $(m - n + 1) \times (m - n + 1)$, а $C_t = C_t[n - 1, m - n + 1]$ — неособая подматрица размерами $(n - 1) \times (m - n + 1)$, отвечающая ребрам дерева T .

В качестве примера рассмотрим электрическую цепь, показанную на рис. 3.34(a). Ей отвечает ориентированный граф, изображенный на рис. 3.34(b).

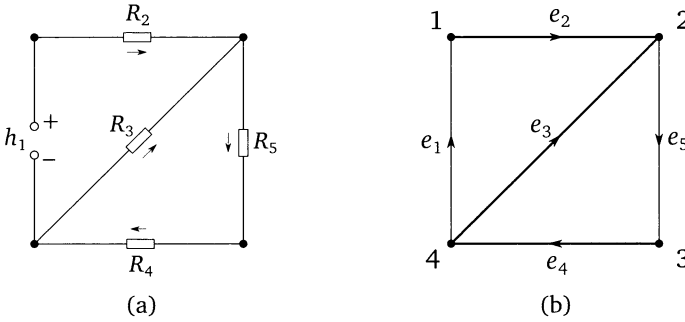


Рис. 3.34

В качестве остовного дерева T выберем неориентированный подграф, порожденный ребрами e_2, e_3, e_4 (ребра, отмеченные жирными линиями на рис. 3.34(b)). Тогда соответствующая этому орграфу матрица C может быть записана так:

$$C^T = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Первая строка матрицы C^T отвечает фундаментальному циклу, порожденному ребром e_1 , а вторая — циклу, порожденному ребром e_5 . Порядок обхода циклов в соответствующем D неориентированном графе G совпадает с направлением порождающих их векторов e_1 и e_5 .

В аналогичном блочном виде мы можем представить и матрицу Кирхгофа:

$$K = \begin{bmatrix} K_t & K_c \end{bmatrix}.$$

Заметим, что так как матрица $K_t = K_t[n - 1, n - 1]$ порождена столбцами, соответствующими дереву T , то определитель этой подматрицы отличен

от нуля, то есть матрица $K_t [n-1, n-1]$ особой не является. Подматрица $K_c = K_c [n-1, m-n+1]$ имеет размеры $(n-1) \times (m-n+1)$.

Для рассматриваемого нами примера электрической цепи (рис. 3.34(а)) матрицы M_i и K имеют следующий вид:

$$M_i = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Так как любой цикл ортогонален любой строке матрицы K , то

$$K \cdot C = 0 \Leftrightarrow K_t \cdot C_t + K_c = 0 \Leftrightarrow C_t = -K_t^{-1} \cdot K_c.$$

е. Вернемся к электрической цепи. Как и матрицы K и C , мы можем представить векторы i и u в виде

$$i = \begin{bmatrix} i_t \\ i_c \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad u = \begin{bmatrix} u_t \\ u_c \end{bmatrix}.$$

Тогда из первого закона Кирхгофа $K \cdot i = 0$ мы получаем следующие равенства:

$$K_t \cdot i_t + K_c \cdot i_c = 0 \Leftrightarrow i_t = -K_t^{-1} \cdot K_c \cdot i_c = C_t \cdot i_c.$$

Учитывая, что $i_c = E_c \cdot i_c$, а также тот факт, что матрица C состоит из подматриц C_t и E_c , мы можем записать последнее равенство так:

$$i = C \cdot i_c.$$

Иными словами, мы показали, что значения силы тока полностью определяются значениями силы тока на ребрах, не принадлежащих остовному дереву T .

Подставим теперь полученное выражение для i в закон Ома:

$$u + h = R \cdot C \cdot i_c.$$

Домножая это уравнение слева на C^T и учитывая второй закон Кирхгофа $C^T \cdot u = 0$, мы получаем систему линейных уравнений

$$(C^T \cdot R \cdot C) \cdot i_c = C^T \cdot h,$$

позволяющую определить элементы вектора i , принадлежащие i_c . Зная эти компоненты, мы вначале с помощью равенства $i = C \cdot i_c$ определим оставшиеся значения вектора i , а затем из закона Ома получим значения вектора u напряжений электрической сети.

ф. Вернемся к примеру электрической цепи, показанному на рис. 3.34(а). Для такого случая

$$i_c = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_5 \end{bmatrix}, \quad C^T \cdot R \cdot C = \begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix}, \quad C^T \cdot h = \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Как следствие,

$$i_1 = \frac{h_1(R_3 + R_4 + R_5)}{R_2(R_3 + R_4 + R_5) + R_3(R_4 + R_5)}, \quad i_5 = \frac{h_1 R_3}{R_2(R_3 + R_4 + R_5) + R_3(R_4 + R_5)}.$$

При этом

$$i_4 = i_5, \quad i_2 = -i_1, \quad i_3 = i_5 + i_1,$$

а напряжения рассчитываются по формулам

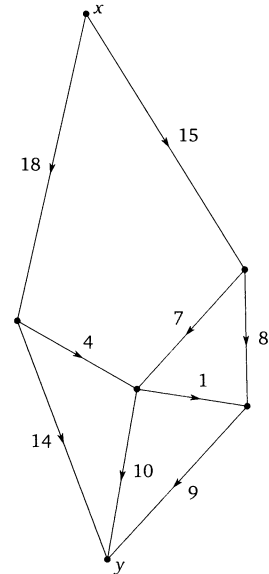
$$u_1 = h_1, \quad u_2 = R_2 i_2, \quad u_3 = R_3 i_3, \quad u_4 = R_4 i_4, \quad u_5 = R_5 i_5.$$

г. В заключение данного параграфа поговорим о достаточно неожиданном применении теории электрических цепей, связанном с задачей квадрирования прямоугольников. Задача квадрирования (squaring) прямоугольника состоит в нахождении разбиения заданного прямоугольника на конечное число попарно неравных между собой квадратов. На рис. 3.35(а) показан пример одного из таких прямоугольников, разбитого на 9 попарно неравных между собой квадратов. Оказывается, задача построения такого разбиения напрямую связана с задачей построения токов и напряжений в электрической сети.

Действительно, рассмотрим горизонтальные стороны квадратов, помеченные жирными линиями на рис. 3.35(а). Сопоставим любой такой стороне вершину в строящемся орграфе D (рис. 3.35(б)). Соединим две вершины x_i и x_j ребром $e = (x_i, x_j)$ в случае, если соответствующие этим вершинам горизонтальные стороны относятся к одному и тому же квадрату. Вершины x



(а)



(б)

Рис. 3.35

и u , отвечающие крайней верхней и крайней нижней сторонам, называются полюсами оргграфа D . Веса на ребрах отвечают ширине соответствующего квадрата. Если теперь считать, что сопротивления каждого из участков цепи равны единице, то напряжения, равные токам, будут удовлетворять закону сохранения заряда в любой вершине, отличной от x и u . Добавляя к этому оргграфу ребро (y, x) с весом, равным суммарной ширине прямоугольника, мы получаем электрическую сеть, удовлетворяющую обоим законам Кирхгофа. При этом мы можем считать, что вес ребра (y, x) есть электродвижущая сила, приложенная к вершинам x и u оргграфа D .

Брукс, Смит, Стоун и Татт в 1940 году показали, что в случае так называемого простого квадрированного прямоугольника, то есть прямоугольника, не содержащего в себе никакого правильно квадрированного прямоугольника меньшего размера, соответствующий этому прямоугольнику оргграф D является планарным трехсвязным графом. Они же доказали обратное, а именно, что любому такому оргграфу отвечает некоторый квадрированный прямоугольник.

Упражнения

1 (1,5 балла). Прямоугольная матрица M размерами $n \times t$ называется вполне унимодулярной, если определитель любой ее квадратной подматрицы принимает значения из множества $\{0, +1, -1\}$. Докажите, что матрица инцидентности M_i оргграфа D является вполне унимодулярной матрицей. Что можно сказать о матрицах B и C , составленных из базисных векторов пространств \mathcal{B} и \mathcal{C} , а также о матрице Кирхгофа K оргграфа D ?

2 (1,5 балла). В параграфе, посвященном матричной теореме о деревьях, мы доказали следующее утверждение. Пусть S — произвольный набор из $n - 1$ ребра оргграфа D , а B_S — подматрица базисной матрицы B , столбцы которой отвечают ребрам из набора S . Определитель $\det(B_S)$ отличен от 0 тогда и только тогда, когда индуцированный S подграф T соответствующего D графа G представляет собой остовное дерево графа G . Докажите это утверждение, используя полученные в данном параграфе результаты.

3 (1,5 балла). Пусть D есть связный оргграф, B — базисная матрица пространства \mathcal{B} . С использованием результатов данного параграфа и предыдущего упражнения докажите, что количество $t(D)$ остовных деревьев рассчитывается по формуле

$$t(D) = \det(B \cdot B^T).$$

4 (1,5 балла). Для электрической цепи, показанной на рис. 3.36(a), а также для соответствующего ей оргграфа, показанного на рис. 3.36(b), найдите токи в цепи в случае, когда все сопротивления R_j , $j = 2, \dots, 8$, равны единице, а напряжение $h = 12$.

5 (1 балл). Рассечение плоскости квадратами, при котором ровно один квадрат имеет сторону, равную числу Фибоначчи F_i , называется фибоначчевым замощением плоскости. Постройте подобное замощение.

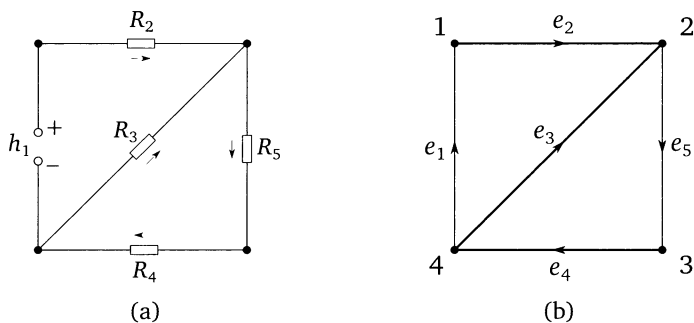


Рис. 3.36

Дополнительные упражнения

6 (2 балла). Докажите, что граф G является двудольным тогда и только тогда, когда его матрица инцидентности M_i является вполне унимодулярной.

7 (1,5 балла). Пусть сопротивления равны единице, и пусть есть одно ЭДС, соединяющая x и y . Докажите, что в этом случае существует единственный поток из x в y . Покажите, что этот поток будет целочисленным в случае, если $h = t(G)$ для соответствующего D неориентированного графа G .

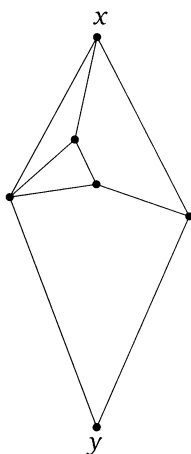


Рис. 3.37

8 (2 балла). Определите токи в орграфе, показанном на рис. 3.37, при условии, что все сопротивления равны единице, а между вершинами x и y имеется электродвижущая сила h , величина которой равна 61. Используя этот результат, постройте соответствующую полученному взвешенному орграфу D квадрангуляцию прямоугольника.

9 (1 балл). Совершенным кубом называется куб, разбитый на более мелкие кубики попарно различных размеров. Докажите, что совершенный куб существовать не может.

Решение упражнений

1. Пусть A — произвольная квадратная подматрица матрицы M_i . Если каждый ее столбец содержит два отличных от нуля числа, то этими числами являются 1 и -1 . Следовательно, сумма всех строк этой подматрицы равна нулю, так что $\det(A) = 0$. В противном случае у матрицы A имеется столбец, в котором ровно одно число отлично от нуля. Раскладывая тогда $\det(A)$ по этому столбцу, мы получаем, что

$$\det(A) = \pm \det(A'),$$

где A' — матрица, полученная из A вычеркиванием строки и столбца. Продолжая этот процесс, мы получаем требуемый результат.

Аналогично показывается, что вполне унимодулярными являются также и матрицы B и C , составленные из базисных векторов пространств \mathcal{B} и \mathcal{C} . В частности, вполне унимодулярной является и матрица Кирхгофа K орграфа D .

2. Заметим, что определитель $\det(B_S)$ равен нулю тогда и только тогда, когда отвечающие S столбцы линейно зависимы:

$$\sum_{e \in S} b_e \cdot f_e = 0.$$

Последнее равенство, в свою очередь, означает, что в орграфе D существует циркуляция f , носитель которой содержится в S . Но тогда согласно лемме 7 подмножество S содержит цикл, то есть деревом не является.

Наоборот, пусть S содержит цикл C . Рассмотрим порожденную этим циклом циркуляцию f_C . Так как

$$M_i \cdot f_C = 0 \iff \sum_{e \in C} b_e \cdot f_C(e) = 0,$$

а $C \subseteq S$, то столбцы матрицы B_S линейно зависимы и $\det(B_S) = 0$.

3. Воспользуемся формулой Бине—Коши для вычисления квадратной матрицы $B \cdot B^T$, являющейся произведением двух прямоугольных матриц:

$$\det(B \cdot B^T) = \sum_S (\det(B_S))^2,$$

где S — некоторое подмножество множества столбцов матрицы B размером $n - 1$. Так как матрица B унимодулярная, то каждое слагаемое в этой сумме равно 0 или 1. Количество же ненулевых слагаемых в этой сумме совпадает, согласно результатам предыдущего упражнения, с количеством остовных деревьев графа G .

4. Рассмотрим остовное дерево, ребра которого помечены жирными линиями на рис. 3.36(b). Соответствующая этому орграфу матрица C имеет вид

$$C^T = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

а матрицы инцидентности и Кирхгофа записываются так:

$$M_i = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$i_c = \begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_6 \\ i_8 \end{bmatrix}, \quad C^T \cdot R \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C^T \cdot h = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Как следствие,

$$i_2 = 8, \quad i_4 = 2, \quad i_6 = -2, \quad i_8 = 0.$$

При этом оставшиеся токи таковы:

$$i_1 = 8, \quad i_3 = 4, \quad i_4 = 2, \quad i_5 = 2, \quad i_7 = 2.$$

5. Начнем построение с двух квадратов площади 1, совмещенных друг с другом по одной из своих сторон. Приложим к ним с одной из сторон квадрат размерами 2×2 . К стороне квадрата 2×2 и стороне одного из квадратов 1×1 приложим квадрат размерами 3×3 . Продолжая далее, на i -м шаге мы будем прикладывать квадрат размерами $F_i \times F_i$ к сторонам квадратов F_{i-1} и F_{i+2} . В силу рекуррентного соотношения для чисел Фибоначчи

$$F_i = F_{i-1} + F_{i+2}$$

это всегда возможно сделать.

ГЛАВА 4

Связность в графах

§1. Вершинная и реберная связность графа

1. Любая коммуникационная сеть тем более надежна, чем большее количество вершин и/или ребер нужно удалить в графе (или в орграфе), моделирующем эту сеть, для того чтобы эту сеть оборвать. Раздел теории графов, описывающий такого рода свойства надежности, называется теорией связности. К изучению этой теории мы и приступаем в данном параграфе.

а. Рассмотрим в качестве примера три графа, изображенные на рис. 4.1. Видно, что с точки зрения надежности все эти три графа достаточно сильно отличаются друг от друга. Показанный на рис. 4.1(a) граф G_1 наименее надежен — его можно превратить в несвязный как удалением одной из двух вершин x или y , так и удалением ребра $e = \{x, y\}$ (моста графа G_1). Граф G_2 (рис. 4.1(b)) с этой точки зрения выглядит лучше — у него нет ни одного ребра, удалив которое мы развалим G_2 на несколько связанных компонент. Однако у него имеется вершина x (точка сочленения графа G_2), удаление которой приводит к потере связности графа. Наконец, граф G_3 с рассматриваемой точки зрения является наиболее надежным — у него нет ни мостов, ни точек сочленения, удаление которых приводит к потере связности графа.

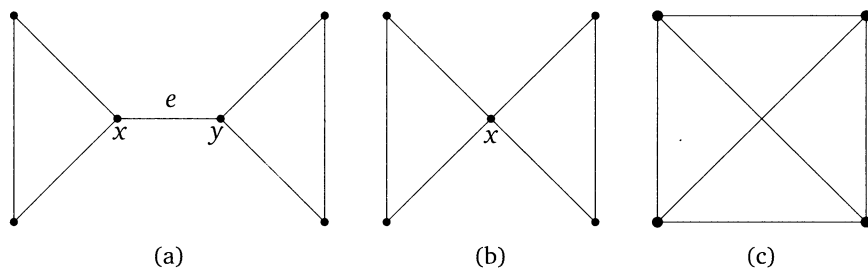


Рис. 4.1. (a) Граф G_1 ; (b) граф G_2 ; (c) граф G_3

Про граф G_1 говорят, что он реберно и вершинно односвязен, про граф G_2 — что он вершинно односвязен, но реберно двусвязен, а про граф G_3 — что он реберно и вершинно двусвязен. Наша задача состоит в том, чтобы дать формальное определение этих понятий.

в. Начнем мы с понятия реберной связности графа G . Напомним, что в прошлой главе мы дали понятие реберного разделяющего множества F , реберного разреза ∂X , а также минимального реберного разреза. Выберем среди всех минимальных реберных разрезов графа G тот, количество ребер в котором минимально.

Определение 1. *Реберной связностью $\lambda(G)$ графа G называется минимальное количество ребер, которое нужно удалить в графе G , для того чтобы он стал несвязным.*

В случае несвязного графа или графа K_1 реберная связность считается равной нулю.

Определение 2. *Граф G , построенный на n вершинах, называется реберно k -связным, если $\lambda(G) \geq k$. Иными словами, такой граф остается связным при удалении любых ребер в количестве, строго меньшем k .*

Например, любой граф, в котором имеется мост, является реберно односвязным графом, но реберно двусвязным он уже не является. Любой цикл C_n является реберно односвязным и реберно двусвязным, однако реберно трехсвязным он уже не является. Наконец, полный граф K_n в случае $n > 1$ является реберно $(n - 1)$ -связным графом.

Ясно, что любой реберно k -связный граф является также реберно i -связным для любых i , $0 \leq i \leq k$.

с. Перейдем теперь к определению вершинной связности графа G .

Определение 3. *Подмножество $S \subset V(G)$ называется вершинным разделяющим множеством или вершинным разрезом графа, если при удалении вершин из множества S граф $G - S$ становится несвязным.*

Определение 4. *Вершинной связностью $\kappa(G)$ называется минимальное количество вершин $|S|$, $S \subset V(G)$, которое нужно удалить, для того чтобы граф $G - S$ стал несвязным или же содержал единственную вершину.*

Замечание 5. У полного графа K_n , построенного на n вершинах, вершинное разделяющее множество отсутствует — удаление любого количества вершин $|S|$ в этом графе не нарушает его связности. Для того чтобы распространить понятие k -связности и на полные графы, нам и нужна оговорка «или же содержит единственную вершину». Используя эту оговорку, мы можем, по сути, по определению положить $\kappa(K_n) = n - 1$.

Как следствие, граф K_1 , состоящий из единственной изолированной вершины, имеет связность, равную нулю. Ребро K_2 имеет связность, равную единице. Полный граф K_3 на трех вершинах имеет связность, равную двум, а дерево T_3 — связность $\kappa(T_3) = 1$. Первый нетривиальный простой граф с $\kappa = 2$ — это квадрат D_4 .

d. Связность можно также определить, используя понятие (вершинно) k -связного графа.

Определение 6. Граф G называется (вершинно) k -связным, если он построен на $n \geq k + 1$ вершине, и при удалении любых вершин графа G в количестве, меньшем чем k , граф остается связным.

Определение 7. Вершинной связностью $\kappa(G)$ графа G называется максимально возможное k , для которого граф остается вершинно k -связным.

При таком подходе связность полного графа отдельно оговаривать не надо.

Пример 8. Граф K_4 , для которого $\kappa(K_4) = 3$, является 1-связным, 2-связным и 3-связным, но не 4-связным графом, хотя бы потому, что он построен на четырех вершинах.

2. Наша следующая задача состоит в том, чтобы получить какие-то простейшие оценки на числа $\lambda(G)$ и $\kappa(G)$.

а. Обозначим через $\delta(G)$ минимальную из степеней вершин графа G . Достаточно очевидно, что реберная связность графа ограничена сверху значением $\delta(G)$. Действительно, удаление всех ребер, инцидентных вершине x , для которого $\deg(x) = \lambda(G)$, превращает любой граф в несвязный.

Несколько менее тривиальным является следующее утверждение.

Утверждение 9. Для любого простого графа G справедливо неравенство

$$\kappa(G) \leq \lambda(G).$$

Доказательство. Рассмотрим некоторый минимальный реберный разрез $[S, \bar{S}] = \{e_1, \dots, e_k\}$, $k = \lambda(G)$, в графе G . Нам нужно показать, что в графе G найдется не более чем k вершин, удаление которых приведет к появлению нескольких несвязных компонент.

На первый взгляд кажется, что данное утверждение доказать несложно. Действительно, удалим для каждого ребра e_i из разреза $[S, \bar{S}]$ одну из двух инцидентных этому ребру вершин. Удаляя такую вершину, мы удаляем и все инцидентные ей ребра, в том числе и ребро e_i . Заметив теперь, что количество таких вершин не превосходит количества ребер в множестве $[S, \bar{S}]$, мы, казалось бы, доказываем требуемое неравенство.

Проблема, однако, состоит в том, что удаление таких вершин не всегда приводит к появлению несвязных компонент в графе. Действительно, рассмотрим, к примеру, дерево T_n , построенное на $n \geq 2$ вершинах. Понятно, что для него $\lambda(T_n) = \kappa(T_n) = 1$. Удаление любого ребра e приводит к появлению двух компонент связности в графе $T_n - e$. Однако, удаляя в этом графе произвольный лист x , мы получим односвязный граф $T_n - x = T_{n-1}$. Поэтому для доказательства неравенства $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ нам нужно действовать чуть более осторожно.

Именно, в случае, если граф G несвязен либо если он состоит из одной вершины, по определению $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$. Если граф G — связан и имеет мост, то $\lambda(G) = 1$. Единице равняется в этом случае и вершинная связанность. Действительно, либо $G = K_2$, и тогда $\kappa(G) = 1$, либо одна из двух инцидентных мосту вершин является точкой сочленения.

Наконец, предположим, что $\lambda(G) \geq 2$. Удаляя $\lambda(G) - 1$ ребер, мы получаем связный граф, имеющий мост $e = \{x, y\}$. Для любого из $\lambda(G) - 1$ ребер выберем инцидентную ему вершину, отличную от x и y . Если удаление таких вершин приведет к несвязному графу, то $\kappa(G) \leq \lambda(G) - 1$. В противном случае у нас останется мост $\{x, y\}$. Удаление одной из вершин x, y приведет либо к потере связности, либо к тривиальному графу K_1 . В обоих случаях мы получаем, что $\kappa(G) \leq \lambda(G)$. \square

б. Таким образом, мы для произвольных графов доказали справедливость цепочки неравенств

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

Простейший пример графа G , для которого эти неравенства являются строгими, показан на рис. 4.2. Действительно, в таком графе $\kappa(G) = 1$, $\lambda(G) = 2$, а $\delta(G) = 3$. Для полного графа, с другой стороны, все эти числа одинаковы и равны $n - 1$.

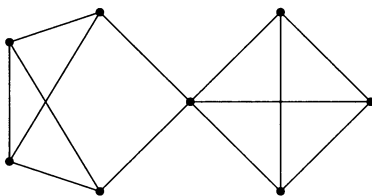


Рис. 4.2

Упражнения

1 (0.5 балла). Докажите, что $\kappa(G) < n - 1$ для всех графов G , отличных от K_n .

2 (0.5 балла). Докажите, что у k -связного графа, построенного на n вершинах, количество t ребер больше или равно $kn/2$.

3 (1 балл). Приведите пример графа G , у которого $\kappa(G) = 2$, $\lambda(G) = 3$, $\delta(G) = 4$.

4 (1,5 балла). Пусть задана тройка натуральных чисел $\kappa < \lambda < \delta$. Приведите алгоритм построения графа G , у которого $\kappa(G) = \kappa$, $\lambda(G) = \lambda$, а $\delta(G) = \delta$.

5 (0,5 балла). Определите значение $\kappa(G)$ для графа, представленного на рис. 4.3(a).

6 (1 балл). Определите значения $\kappa(G)$, $\lambda(G)$ и $\delta(G)$ для графа, показанного на рис. 4.3(b).

7 (1,5 балла). Докажите, что для любого простого графа G , у которого $\Delta(G) \leq 3$, реберная и вершинная связности совпадают. Что можно сказать о $\kappa(G)$ и $\lambda(G)$ в случае простого 3-регулярного графа?

8 (1,5 балла). Постройте наименьшие по количеству вершин 3-регулярные графы G_2 и G_3 , для которых $\kappa(G_2) = 2$, $\kappa(G_3) = 3$.

9 (2 балла). Постройте наименьший 3-регулярный граф G , для которого $\kappa(G) = 1$. Докажите, что построенный граф действительно является минимальным.

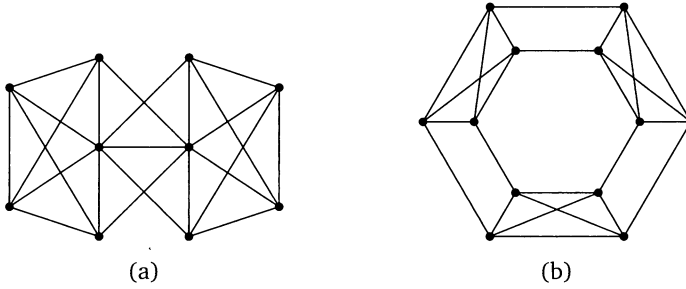


Рис. 4.3

Дополнительные упражнения

10 (2 балла). Возьмем четное количество n вершин и расставим их равномерно по кругу. Зафиксируем некоторое четное натуральное число $k < n$ и проведем из любой вершины k ребер, соединив эту вершину с $k/2$ вершинами слева по кругу от нее и с $k/2$ вершинами справа по кругу от нее. В результате получим k -регулярный граф, построенный на n вершинах. Докажите, что для такого графа $\kappa(G) = k$.

11 (2 балла). Модифицируйте описанный в предыдущем упражнении алгоритм построения графа, в котором $\kappa(G) = k$, для случая нечетного k и четного n , а также для случая, когда параметры k и n нечетные. Докажите, что и в этом случае связность полученных графов равна k .

12 (1,5 балла). Пусть G — простой связный граф, в котором $\delta(G) \geq n - 2$, где n — количество вершин в графе. Докажите, что в этом случае $\kappa(G) = \delta(G)$. Предъявите для любого $n > 3$ граф с $\delta(G) = n - 3$, у которого $\kappa(G) < \delta(G)$.

13 (1,5 балла). Пусть G — простой связный граф, в котором $\delta(G) \geq \frac{n+k-2}{2}$, где n — количество вершин в графе, $n \geq k + 1$. Докажите, что в этом случае G является k -связным графом, то есть что $\kappa(G) \geq k$.

14 (2 балла). Пусть S — произвольное подмножество множества $V(G)$ вершин простого связного графа G . В одном из упражнений предыдущей главы предлагалось доказать, что количество $\partial(S)$ ребер в реберном разрезе $\partial(S)$ рассчитывается по формуле

$$|\partial(S)| = \sum_{x \in S} \deg(x) - 2|E(G[S])|, \quad (4.1)$$

где $G[S]$ — подграф, индуцированный подмножеством S . С использованием этого равенства, а также упражнения 7 докажите, что граф Петерсена является трехсвязным графом.

15 (1,5 балла). С использованием равенства (4.1) докажите, что в графе Петерсена любой реберный разрез $\partial(S)$ мощности $|\partial(S)| = 3$ соответствует случаю $|S| = 1$.

16 (1,5 балла). Пусть G — произвольный простой граф, S — произвольное собственное подмножество множества $V(G)$ вершин этого графа. Используя равенство (4.1), покажите, что в случае $|\partial(S)| < \delta(G)$ мощность $|S|$ подмножества S строго больше $\delta(G)$.

17 (1,5 балла). Пусть G — простой связный граф, в котором $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$, где n — количество вершин в графе. Докажите, что в этом случае $\lambda(G) = \delta(G)$. Предъявите для любого $n > 2$ граф с $\delta(G) = (n-2)/2$, у которого $\lambda(G) < \delta(G)$.

18 (1,5 балла). Пусть G — простой связный граф, построенный на n вершинах, в котором $\deg(x) + \deg(y) \geq n-1$ для любой пары несмежных между собой вершин x и y . Докажите, что в этом случае $\lambda(G) = \delta(G)$.

19 (2,5 балла). Пусть G — простой связный граф, диаметр которого равен двум, а $[S, \bar{S}]$, $|S| \leq |\bar{S}|$, — минимальный реберный разрез в этом графе. Докажите, что любая вершина $x \in S$ имеет хотя бы одну смежную с ней вершину $y \in \bar{S}$. Используя этот факт, покажите, что в таком графе $\lambda(G) = \delta(G)$.

Решение упражнений

1. Заметим, что $\delta(K_n) = n-1$. Для любого другого графа G , построенного на n вершинах, $\delta(G) < (n-1)$. Следовательно, $\kappa(G) < n-1$ для всех графов G , отличных от K_n .

2. Действительно, в силу неравенства $\delta(G) \geq k$ любая вершина должна иметь по меньшей мере k инцидентных ей ребер. Согласно первой теореме теории графов

$$2|E(G)| = \sum_{x \in V(G)} \deg(x) \geq \delta(G) n \geq kn \Rightarrow |E(G)| \geq kn/2 \geq \lceil kn/2 \rceil.$$

3. См. рис. 4.4.

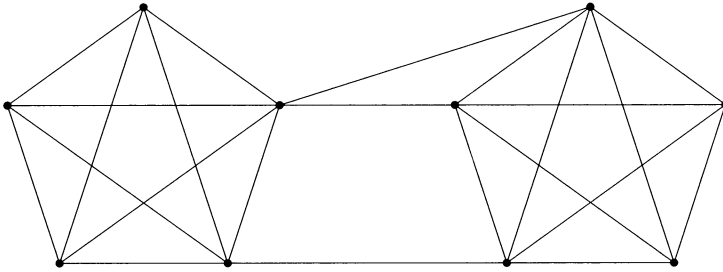


Рис. 4.4

4. Построим граф на $2(\delta + 1)$ вершинах, состоящий из двух клик размера $\delta + 1$. Соединим эти две клики с помощью λ ребер так, чтобы эти ребра были инцидентны λ вершинам из первой клики и κ вершинам из второй. Построенный граф удовлетворяет всем требуемым в задании свойствам.

5. Для графа, изображенного на рис. 4.3(a), $\kappa(G) = 2$. Действительно, граф не имеет точек сочленения. Удаляя же две центральные вершины, мы получим две компоненты связности.

6. Для графа, показанного на рис. 4.3(b), $\kappa(G) = 4$: при удалении менее четырех вершин либо на внутреннем, либо на внешнем цикле останется по меньшей мере пять связанных вершин. В любую вершину другого цикла

можно попасть из одной из этих пяти, пройдя по одному ребру. Так как $\delta(G) = 4$, то и $\lambda(G)$ также равно четырем.

7. Заметим прежде всего, что в полном графе реберная и вершинная связности совпадают. Поэтому далее будем предполагать, что граф G полным не является, а значит, в нем существует вершинное разделяющее множество размера $\kappa(G)$.

Пусть S — минимальное вершинное разделяющее множество в графе G с $\Delta(G) \leq 3$. Нам нужно доказать, что в нем обязательно найдется реберное разделяющее множества размера $|S|$. Пусть H_1 и H_2 — какие-то две компоненты связности графа $G - S$. Так как S является минимальным вершинным разделяющим множеством, то каждая из вершин $x \in S$ обязательно соединена хотя бы с одной вершиной из H_1 и хотя бы с одной вершиной из H_2 . Так как $\Delta(G) \leq 3$, то x не может иметь двух смежных вершин и в H_1 , и в H_2 .

Рассмотрим тогда два случая. В первом случае вершина $x \in S$ не смежна ни с одной другой вершиной из S . В этом случае мы можем рассмотреть ту компоненту, с которой x соединяется единственным ребром, и удалить это ребро. Во втором случае у вершины x имеется единственная смежная с ней вершина $y \in S$. Для такого варианта мы удалим ребра, соединяющие обе эти вершины, например, с H_1 . Во всех случаях мы удалим ровно $\kappa(G) = |S|$ ребер и получим несвязный граф, а это с учетом неравенства $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ и означает, что $\lambda(G) = \kappa(G)$.

В случае 3-регулярного простого графа G реберная и вершинная связности также совпадают, и доказывается этот факт совершенно аналогично только что рассмотренному случаю.

8. Заметим, что любой 3-регулярный граф обязан иметь четное количество вершин. Единственным графом, построенным на четырех вершинах, является граф K_4 , вершинная связность которого равна по определению трем. Он и является минимальным 3-регулярным трехсвязным графом G_3 . В случае $n = 6$ имеется всего два 3-регулярных графа — граф $K_{3,3}$ и граф, показанный на рис. 4.5(a). Оба этих графа имеют связность, равную трем. Наконец, граф G_2 показан на рис. 4.5(b) — он имеет восемь вершин, а его связность равна, очевидно, двум. Несложно убедиться, что все остальные 3-регулярные графы, построенные на восьми вершинах, имеют связность, большую двух. Следовательно, G_2 действительно является минимальным 3-регулярным графом с $\kappa(G) = 2$.

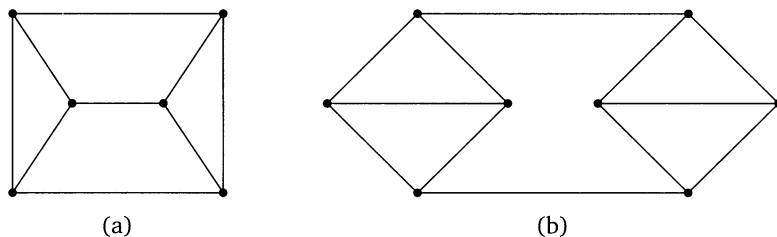


Рис. 4.5

9. Этот граф приведён на рис. 4.6. Докажем, что меньшим числом вершин не обойтись. Согласно упражнению 7 в 3-регулярном графе реберная связность равна вершинной, поэтому искомым граф обязан иметь мост $\{x, y\}$. При удалении этого моста в каждой из компонент связности останется не менее трёх вершин, причём одна из них имеет степень 2, а все остальные — степень 3. Из этого следует, что в каждой компоненте связности обязано остаться нечётное число вершин. С другой стороны, это число не меньше четырёх, так как присутствуют вершины степени 3. Значит, пять — это нижняя оценка на количество вершин в каждой компоненте связности графа $G - \{x, y\}$, и она достигнута для графа, показанного на рисунке.

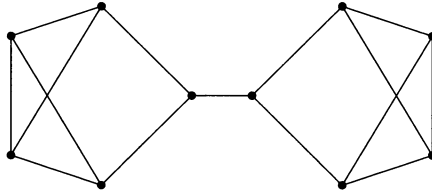


Рис. 4.6

§ 2. Двусвязные графы

1. Вернемся к описанию вершинно односвязных графов. Все множество таких графов можно разбить на два блока, отнеся к первому блоку графы с $\kappa(G) = 1$, а ко второму блоку — все двусвязные графы. Мы знаем, что двусвязный граф — это граф, в котором отсутствуют точки сочленения. Исследуем вначале структуру графов с $\kappa(G) = 1$.

а. Напомним, что множество вершин любого графа G естественным образом разбивается на блоки — компоненты связности такого графа. Оказывается, в случае $\kappa(G) = 1$ мы можем разбить на блоки множество $E(G)$ ребер графа G , введя очень полезное отношение похожести.

Определение 1. Два ребра называются *похожими*, если они либо совпадают (то есть любое ребро похоже на само себя), либо входят в один и тот же простой цикл.

Лемма 2. *Отношение похожести в связном графе G есть отношение эквивалентности.*

Доказательство. Рефлексивность и симметричность такого отношения очевидны, так что нам остается проверить транзитивность. Пусть ребра e_1, e_2 входят в простой цикл C_1 , а ребра e_2, e_3 — в простой цикл C_2 графа G . Возьмем ребро e_1 и будем идти от него вдоль цикла C_1 в двух противоположных направлениях, до тех пор пока не дойдем до вершин x и y , $x \neq y$, принадлежащих циклу C_2 (см. рис. 4.7). Такие вершины обязательно найдутся хотя бы потому, что ребро e_2 входит в цикл C_2 , так что две инцидентные этому

ребру вершины обязательно этому циклу C_2 принадлежат. Заметим теперь, что вершины x и y разбивают цикл C_2 на два простых пути, соединяющие данные вершины. Один из этих простых путей содержит ребро e_3 . Объединяя этот простой путь с куском цикла C_1 , содержащим ребро e_1 и ограниченным вершинами x и y , получим простой цикл C , содержащий ребра e_1 и e_3 . Тем самым мы доказали, что ребра e_1 и e_3 похожи. \square

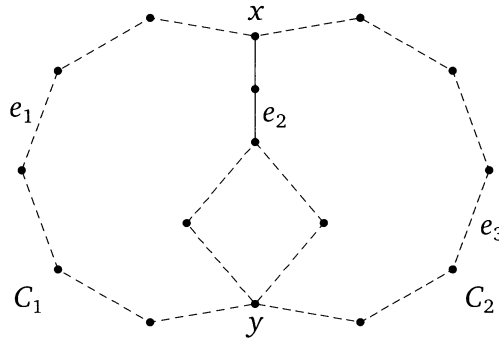


Рис. 4.7

в. Отношение похожести, как и любое отношение эквивалентности, разбивает множество $E(G)$ ребер на классы эквивалентности, называемые *блоками* связного графа G . Каждый такой блок представляет собой либо простое ребро K_2 , либо группу из нескольких ребер, объединенных в один или несколько пересекающихся между собой циклов. Оказывается, такая группа ребер есть не что иное, как двусвязный подграф графа G . Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть G есть связный граф, построенный на $n \geq 3$ вершинах. Следующие три утверждения равносильны:

- (1) граф G является двусвязным;
- (2) любые два ребра этого графа принадлежат некоторому циклу C ;
- (3) для любых двух вершин графа G существует цикл C , проходящий через эти вершины.

Доказательство. Предположим вначале, что граф G является двусвязным. Рассмотрим в таком графе любые два ребра $e_1 = \{x, y\}$ и $e_2 = \{x, z\}$, инцидентные одной и той же вершине x . Так как граф $G - x$ является связным, то существует простой путь P , соединяющий вершины y и z . Объединяя путь P с ребрами e_1 и e_2 , получаем простой цикл C в графе G .

Таким образом, любые два ребра, инцидентные одной и той же вершине двусвязного графа, принадлежат одному и тому же циклу. Иными словами, эти два ребра являются похожими. Но отношение похожести транзитивно, поэтому из похожести любых двух соседних ребер следует похожесть любых двух ребер графа G .

Пусть теперь любые два ребра графа G принадлежат некоторому циклу C . Выберем любые две вершины x_1, x_2 нашего графа и рассмотрим два различных ребра e_1 и e_2 , инцидентные этим вершинам. Цикл C , содержащий два этих ребра, обязательно проходит через выбранные нами вершины x_1 и x_2 .

Последнее, что осталось, — это доказать, что если через любые две вершины графа G проходит цикл C , то граф является двусвязным, то есть не содержит точек сочленения. А это утверждение достаточно очевидно. Действительно, пусть такой граф содержит точку сочленения $x \in V(G)$. Обозначим через G_1 и G_2 две компоненты связности, полученные в результате удаления вершины x , а через $y_1 \in G_1$ и $y_2 \in G_2$ — пару вершин, смежных вершине x в исходном графе. Так как в графе $G - x$ нет пути, соединяющего вершины y_1 и y_2 , то и в исходном графе G нет цикла, проходящего через эти вершины. Полученное противоречие доказывает нашу теорему. \square

с. Итак, с помощью отношения похожести мы разбили ребра графа G с $\kappa(G) = 1$ на блоки (рис. 4.8(a)), каждый из которых представляет собой либо мост, либо максимальный по включению (то есть не содержащийся ни в каком большем подграфе) двусвязный подграф графа G . Эти блоки соединены между собой точками сочленения (черные вершины на рис. 4.8(a)).

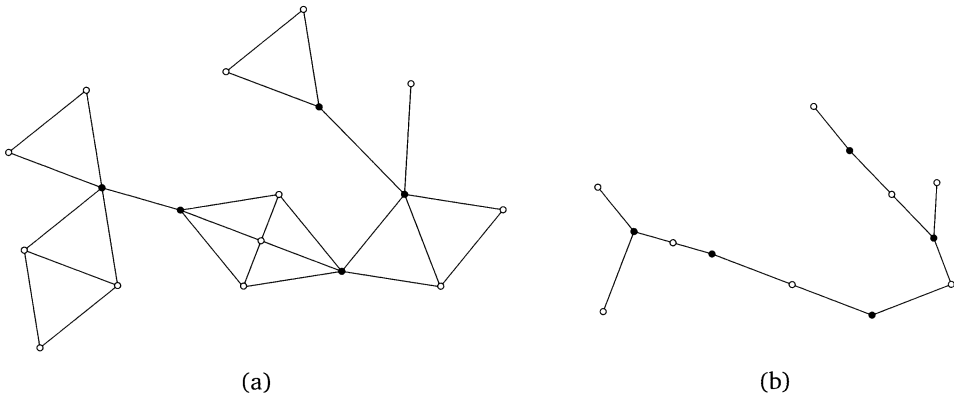


Рис. 4.8

Используя описанное выше разбиение, по графу G можно построить двудольный граф $B(G)$ (рис. 4.8(b)), описывающий блочную структуру исходного графа G . Одна доля графа $B(G)$ состоит из точек x_j сочленения графа G (черные вершины на рис. 4.8(b)), а вторая — из вершин b_i , каждая из которых отвечает некоторому блоку B_i исходного графа G (светлые вершины на рис. 4.8(b)). Вершины x_j и b_i соединяются в графе $B(G)$ ребром в случае, если в исходном графе вершина x_j принадлежала блоку B_i .

Понятно, что в построенном таким образом двудольном графе $B(G)$ циклов быть не может, то есть граф $B(G)$ является деревом. Это дерево называется деревом блоков и точек сочленения исходного графа G . Любая точка сочленения обязательно является внутренней вершиной дерева $B(G)$, тогда как вершины b_i , отвечающие блокам дерева G , могут быть как внутренними

вершинами дерева $B(G)$, так и его листьями. Блок, отвечающий листу дерева $B(G)$, называется крайним блоком графа G . Понятно, что блок графа G является крайним тогда и только тогда, когда он содержит только одну точку сочленения графа G .

2. Опишем алгоритм поиска точек сочленения в односвязном графе, линейный по количеству вершин и ребер в графе. Данный алгоритм был предложен в 1973 году Джоном Хопcroftом и Робертом Тарьяном и базируется на алгоритме обхода графа в глубину.

а. Пусть G — простой односвязный граф. В результате алгоритма поиска в глубину мы получаем дерево $T(G)$ обхода графа с корнем в вершине x_0 , с которой мы начинаем обход графа (рис. 4.9). Как мы знаем, в результате работы алгоритма все ребра графа разбиваются на два класса — ребра, принадлежащие дереву обхода (ребра, отмеченные жирными линиями на рис. 4.9), а также ребра, дереву не принадлежащие (ребра, отмеченные обычными линиями на рис. 4.9), — так называемые обратные ребра. При этом в силу нормальности такого дерева один из концов обратного ребра обязательно лежит на пути, соединяющем второй конец с корнем x_0 остовного дерева.

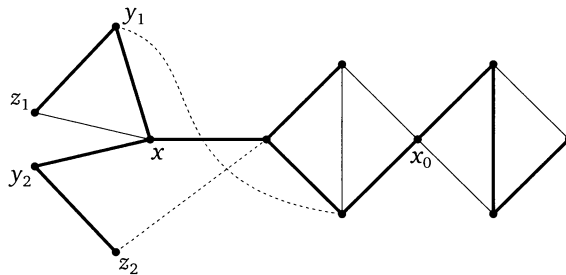


Рис. 4.9

Достаточно очевидно, что корень x_0 дерева $T(G)$ является точкой сочленения тогда и только тогда, когда он имеет два или более потомка в дереве обхода (см. вершину x_0 на рис. 4.9). Действительно, после удаления x_0 смежные с x_0 вершины, являющиеся потомками x_0 в дереве $T(G)$, оказываются в разных компонентах связности графа $G - x_0$. Для того чтобы понять, в каком случае вершина $x \neq x_0$ является точкой сочленения, рассмотрим подмножество y_i непосредственных потомков (детей) вершины x в дереве $T(G)$ обхода графа G (см. рис. 4.9). Предположим, что *хотя бы для одной* вершины y_i обратные ребра, исходящие из поддерева T_i с корнем в вершине y_i , либо вовсе отсутствуют (вершина y_2 на рис. 4.9), либо оканчиваются в вершине x или в вершинах самого поддерева T_i (вершина y_1 на рис. 4.9). В этом случае при удалении x граф G разваливается как минимум на две компоненты связности, то есть x является точкой сочленения. Если же в G существовали бы обратные ребра, исходящие, например, из точек z_2 и y_1 и входящие в предки вершины x (см. пунктирные ребра на рис. 4.9), то вершина x точкой сочленения бы не являлась.

б. Описанные выше наблюдения можно положить в основу алгоритма поиска точек сочленения. Именно, будем обходить граф G в глубину, пометая вершины графа в порядке этого обхода натуральными числами $k(x)$ из диапазона от 1 до $n = |V(G)|$. Наряду с $k(x)$ введем для каждой вершины графа функцию $l(x)$ следующим образом. Для стартовой вершины x_0 с $k(x_0) = 1$ положим $l(x_0) = 1$. Для всех остальных вершин определим $l(x)$ следующим образом:

$$l(x) = \min \begin{cases} k(x), \\ l(y_i), & \text{где } y_i \text{ — непосредственные потомки вершины } x \\ & \text{в дереве } T(G), \\ k(z_j), & \text{где } z_j \text{ — предки вершины } x \text{ в } T(G), \text{ соединенные с } x \\ & \text{обратным ребром в } G. \end{cases}$$

Функция $l(x)$ для вершины x может быть сосчитана только лишь после посещения всех вершин, являющихся потомками вершины x в дереве $T(G)$.

Вершина $x \neq x_0$ является точкой сочленения в случае, когда хотя бы для одного из ее потомков y_i значение $l(y_i)$ оказывается большим или равным номеру $k(x)$ потомков x :

if $\exists y_i : l(y_i) \geq k(x)$, **then** $x \neq x_0$ — точка сочленения.

Для корневой вершины x_0 достаточно подсчитать количество ее потомков в дереве $T(G)$. Если это количество больше единицы, то x_0 является точкой сочленения.

Результаты работы описанного выше алгоритма для графа G , изображенного на рис. 4.9, показаны на рис. 4.10. Вершины этого графа помечены числами от 1 до 12 в порядке обхода этих вершин поиском в глубину. В скобках для каждой вершины i стоит соответствующее ей число $l(i)$. Белым цветом на этом рисунке помечены точки сочленения графа G . Действительно, у вершины 7 имеется потомок — вершина 8, значение $l(8) = 8$ для которой больше номера вершины 7. Аналогичный факт справедлив для вершин 4 и 3 — у них имеются непосредственные потомки y_i с $l(y_i)$, большими или равными номерам этих вершин. Наконец, у вершины 1 имеются два потомка в дереве $T(G)$, так что 1 есть точка сочленения графа G .

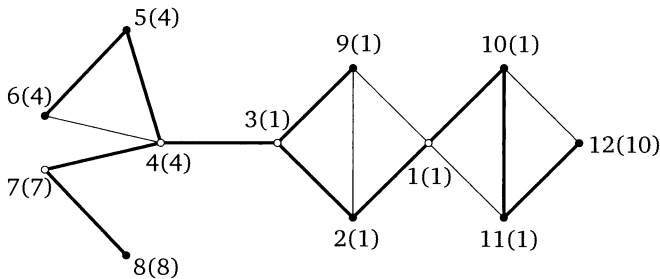


Рис. 4.10

3. Ранее мы достаточно подробно описали структуру графов с $\kappa(G) = 1$. Постараемся теперь понять структуру вершинно двусвязного графа.

а. Оказывается, существует достаточно удобный конструктивный способ построения вершинно двусвязного графа — любой такой граф может быть построен из некоторого цикла $C = P_0$ последовательным добавлением к нему так называемых ручек P_i .

Определение 4. Пусть H — некоторый подграф графа G . Ручкой подграфа H в графе G называется простой путь P , концы которого принадлежат H , а все внутренние вершины которого этому подграфу не принадлежат (см. рис. 4.11(a)).

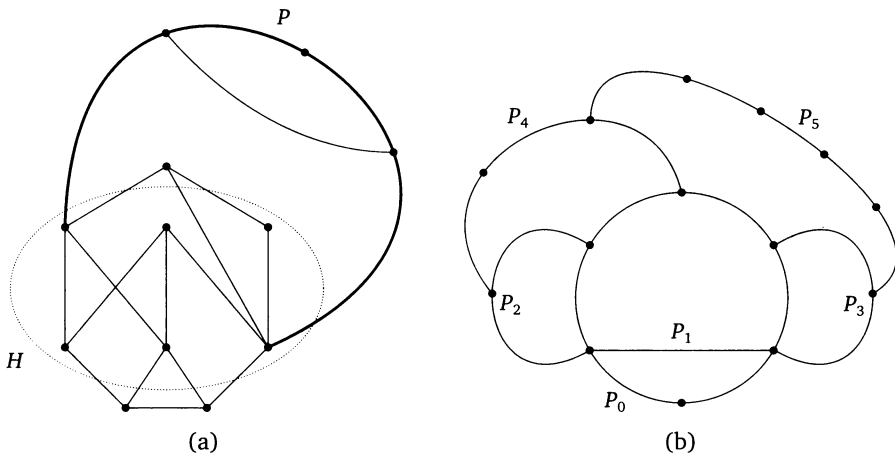


Рис. 4.11

Определение 5. Разложением графа G на ручки называется такая последовательность P_0, \dots, P_k подграфов графа G , что P_0 представляет собой цикл, P_i для любого $i = 1, \dots, k$ представляет собой ручку для подграфа $G_{i-1} = P_0 \cup \dots \cup P_{i-1}$ графа G , а G_k совпадает с исходным графом G (см. рис. 4.11(b)).

Утверждение 6. Граф G является двусвязным тогда и только тогда, когда он допускает разложение на ручки, начинающееся с произвольного цикла в этом графе.

Доказательство. Пусть граф G допускает разложение на ручки. Так как цикл P_0 является двусвязным графом, то нам достаточно показать, что добавление к графу G ручки P двусвязности графа $G \cup P$ не нарушит. Обозначим через x и y концевые вершины пути P . Заметим, что добавление ребра $\{x, y\}$ к графу G двусвязности не нарушит. Теперь заметим, что P представляет собой подразбиение ребра $\{x, y\}$ вершинами степени 2, а любое такое подразбиение также не нарушает двусвязности графа. Действительно, мы показали, что граф G двусвязен тогда и только тогда, когда любые два ребра

принадлежат некоторому циклу, а последнее свойство, очевидно, в процессе подразделения ребра $\{x, y\}$ не меняется.

Обратно, пусть G является двусвязным графом, C — произвольный цикл в нем. Построим разложение на ручки графа G , начиная с цикла $C = P_0$. Для этого рассмотрим граф G_i , полученный добавлением i ручек. Если $G_i \neq G$, то в G найдется ребро $e \in G - E(G_i)$, а также ребро $e' \in E(G_i)$. Так как граф G двусвязный, то эти ребра принадлежат некоторому общему циклу. Обозначим через P ту часть этого цикла, которая содержит ребро e , а также ровно две вершины $x, y \in V(G_i)$. По отношению к G_i путь P является ручкой. Продолжая далее, мы и получим разложение G на ручки. \square

б. Перейдем теперь к описанию реберно двусвязных графов. Мы знаем, что любой реберно двусвязный граф — это связный граф, не содержащий мостов. Такое описание имеет один недостаток — оно показывает нам, чего в графе быть не должно, для того чтобы он был реберно двусвязным. Нам же часто нужно более конструктивное описание такого графа, похожее на то, которое мы только что дали для вершинно двусвязного графа.

Заметим прежде всего, что в силу неравенства $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ любой вершинно двусвязный граф является одновременно и реберно двусвязным графом. Обратное, однако же, неверно. На рис. 4.12 в качестве примера показан граф «бабочка», являющийся реберно двусвязным, но имеющий точку сочленения x . Иными словами, реберно двусвязных графов больше, чем вершинно двусвязных графов. Как следствие, декомпозиция реберно двусвязного графа должна быть несколько более сложной по сравнению с декомпозицией вершинно двусвязного графа.

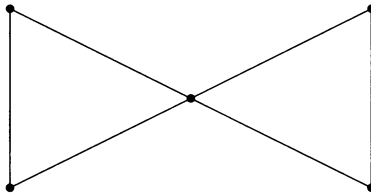


Рис. 4.12

Как видно из рис. 4.12, реберно двусвязный подграф может содержать один или несколько циклов, имеющих с оставшейся частью графа только лишь одну общую точку. Такого рода цикл называется *замкнутой ручкой*. В упражнении 12 предлагается доказать, что любой реберно двусвязный граф можно разложить на ручки и замкнутые ручки, начиная с произвольного замкнутого цикла C в исходном графе.

4. В принципе, при рассмотрении связности в графах наличие петель и/или мультиребер на вершинную связность графа никак не влияет. Однако в некоторых разделах теории графов, например при изучении планарных графов, оказывается полезным ввести некоторые дополнительные понятия, полезные при изучении мультиграфов.

Определение 7. Под *разделением* связного мультиграфа G понимают такую декомпозицию G на два непустых связных подграфа G_1 и G_2 , при которой у них имеется только одна общая вершина x . Сама эта общая вершина называется *разделяющей вершиной* графа G .

Ясно, что любая точка сочленения является разделяющей вершиной любого графа G . Обратное, однако, неверно — любая вершина мультиграфа G , инцидентная петле и еще хотя бы одному ребру, является разделяющей вершиной графа G (см. рис. 4.13, на котором белым цветом помечены две разделяющие вершины).

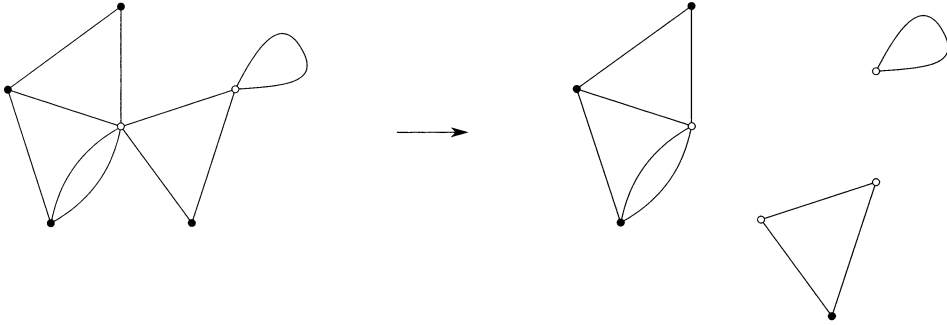


Рис. 4.13. Разделяющие вершины мультиграфа

Определение 8. Связный граф G называется *неразделяемым*, если в нем отсутствуют разделяющие вершины. В противном случае G называется *разделяемым* графом.

С точностью до изоморфизма существуют лишь два неразделяемых графа, построенные на одной вершине, — граф K_1 и граф K_1 с добавленной петлей. Граф K_1 с добавленными k петлями в случае $k > 1$ является разделяемым. Заметим также, что в любых графах на $n > 1$ вершинах петли отсутствуют.

В случае $n \geq 3$ любой неразделяемый граф является двусвязным. Как следствие, теорема 3 для таких графов также оказывается справедливой. Кроме того, для всех графов, отличных от K_1 и K_2 (а значит, и для K_1 с петлей, а также для K_2 с кратными ребрами), остается справедливым утверждение 6 о разложении графа на ручки. Наконец, описанный выше алгоритм разбиения связного графа G на блоки и точки сочленения естественным образом обобщается на случай мультиграфов. Вместо блоков в таком разложении следует брать максимальные по включению неразделяемые подграфы графа G , а вместо точек сочленения — разделяющие вершины мультиграфа G .

5. Заметим, в заключение, что понятия вершинной и реберной связности достаточно естественно переносятся и на случай ориентированных графов. Так, например, *вершинным разрезом* называется такое подмножество $S \subset V(D)$ вершин орграфа D , что при удалении S орграф D перестает быть сильно связным, а мощность минимального из таких подмножеств называется *вершинной связностью* орграфа D .

Оказывается, сильно связанные орграфы в определенном смысле эквивалентны реберно двусвязным неориентированным графам. Именно, в упражнении 13 предлагается доказать следующее утверждение.

Утверждение 9 (Роббинс, 1939). *Граф G допускает сильную ориентацию тогда и только тогда, когда он является реберно двусвязным графом.*

Упражнения

1 (1,5 балла). Предположим, что в связном графе G , построенном на $n \geq 2$ вершинах, нашлась пара вершин, не лежащих на одном цикле. Докажите или опровергните следующие утверждения.

- 1) Возможна ситуация, когда все ребра графа похожи.
- 2) Существует полный граф с описанным в задаче свойством.
- 3) Если граф построен на трех вершинах, то ровно одна из них является точкой сочленения.
- 4) При числе ребер $m > 1$ каждое ребро обязано быть похожим хотя бы на одно другое.
- 5) В графе обязательно найдется вершина степени 1.
- 6) Граф может быть двусвязным.
- 7) Если граф построен на десяти вершинах, то в нем есть непохожие ребра.

2 (0,5 балла). Выразите количество n вершин односвязного графа G через количество n_i этих вершин в каждом из k блоков B_1, \dots, B_k графа G .

3 (0,5 балла). Выразите количество остовных деревьев односвязного графа G через количество остовных деревьев в каждом из k блоков B_1, \dots, B_k графа G .

4 (1 балл). Докажите, что любая вершина односвязного графа G имеет четную степень тогда и только тогда, когда любой блок B_i такого графа эйлеров.

5 (1 балл). Докажите, что вершинно односвязный граф G является реберно k -связным тогда и только тогда, когда любой блок B_i такого графа реберно k -связный.

6 (1 балл). Предположим, что мы в алгоритме Хопкрофта—Тарьяна вместо остовного дерева, полученного поиском в глубину, выбрали произвольное остовное дерево. На примере графа G , изображенного на рис. 4.9, покажите, что в этом случае алгоритм может работать неверно, выдавая в качестве точек сочленения вершины, таковыми не являющиеся.

7 (1 балл). Докажите, что простой граф G , построенный на трёх или более вершинах, двусвязен тогда и только тогда, когда для любой тройки различных вершин (x, y, z) в G есть простой путь из x в z , проходящий через y .

Дополнительные упражнения

8 (1,5 балла). Граф называется *кактусом*, если каждый его блок представляет собой либо одиночное ребро, либо единственный цикл. В частности, лю-

бое дерево является кактусом. Предъявите кактусы, построенные на $2k + 1$ и $2k$ вершинах соответственно и имеющие максимальное количество ребер. Докажите, что кактусы с большим количеством ребер при фиксированном k построить невозможно.

9 (1,5 балла). Модифицируйте алгоритм Хопкрофта—Тарьяна для поиска мостов в односвязном графе G . Реализуйте алгоритм поиска всех блоков и точек сочленения в односвязном простом графе G .

10 (1,5 балла). Опишите разложение на ручки для графа Петерсена.

11 (1,5 балла). Чему равно минимальное количество ручек в разложении графа, показанного на рис. 4.14? Начальный цикл в разложении ручки не считается.

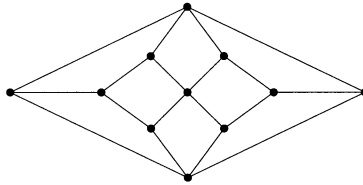


Рис. 4.14

12 (1,5 балла). Докажите, что граф G является двусвязным тогда и только тогда, когда его можно представить в виде

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_k,$$

где G_0 — произвольный цикл в графе G , а G_i , $i > 0$, представляет собой либо ручку, либо замкнутую ручку для подграфа $G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_{i-1}$ графа G .

13 (1 балл). *Сильной ориентацией* неориентированного графа назовём такой выбор направления для каждого из его рёбер, что в результате этой операции получившийся ориентированный граф будет состоять из одной компоненты сильной связности. Докажите, что связный граф G допускает сильную ориентацию тогда и только тогда, когда он рёберно двусвязен, то есть тогда и только тогда, когда в нем отсутствуют мосты (Роббинс, 1939).

Решение упражнений

1. Первое и второе утверждения верны — в обоих случаях примером является полный граф K_2 , состоящий из единственного ребра. Третье утверждение также верно — раз в связном графе имеются две вершины, не лежащие на одном и том же цикле, то третья вершина в этом графе обязана быть точкой сочленения.

Четвертое и пятое утверждение неверны — в качестве контрпримера мы можем рассмотреть граф G , состоящий из двух циклов C_n , $n > 2$, имеющих одну общую вершину x .

Предпоследнее утверждение неверно — из теоремы 3 следует, что в двусвязном графе, построенном на $n \geq 3$ вершинах, любые две вершины лежат

на одном цикле. Граф же, построенный на меньшем количестве вершин, двусвязным быть не может.

Наконец, последнее утверждение верно — из теоремы 3 вновь следует, что если граф построен на десяти вершинах и если в нем имеется пара вершин, не принадлежащая одному и тому же циклу, то в нем обязаны существовать непохожие ребра.

2. Покажем индукцией по k , что

$$n = \sum_{i=1}^k n_i - k + 1.$$

Действительно, в случае $k = 1$ это равенство выполнено — количество n вершин совпадает с количеством n_1 вершин в единственном блоке B_1 двусвязного графа G . Пусть теперь $k > 1$. Мы знаем, что граф $B(G)$ является деревом, листьями которого служат какие-то блоки B_i . Выберем один из этих блоков и обозначим его через B_k . Рассмотрим граф $G' = G - (B_k - x)$, где x — единственная точка сочленения графа G , соединяющая блок B_k с остальными вершинами графа G . Граф G' является связным и состоит из $k - 1$ блока B_1, \dots, B_{k-1} . По индукционному предположению в нем содержится

$$\sum_{i=1}^{k-1} n_i - (k - 1) + 1$$

вершин. Добавляя к ним удаленные вершины в количестве $n_k - 1$, мы получаем требуемый результат.

3. Покажем индукцией по k , что количество $\tau(G)$ остовных деревьев графа G равно произведению

$$\tau(G) = \prod_{i=1}^k \tau(B_i),$$

где $\tau(B_i)$ — количество остовных деревьев в отдельном блоке B_i . Случай $k = 1$ тривиален. В случае $k > 1$ рассмотрим произвольную точку сочленения x графа G , соединяющую блок B_k , являющийся листом дерева $B(G)$, с остальными вершинами графа. Так как мы независимо можем построить остовные деревья в графах B_k и $G' = G - (B_k - x)$, то согласно комбинаторному правилу произведения и индукционному предположению

$$\tau(G) = \tau(G') \cdot \tau(B_k) = \prod_{i=1}^{k-1} \tau(B_i) \cdot \tau(B_k) = \prod_{i=1}^k \tau(B_i).$$

4. Пусть в односвязном графе G любой блок B_i является эйлеровым. Это, в частности, означает, что в таком графе мосты отсутствуют. Кроме того, степень любой точки сочленения x складывается из степеней этой точки в смежных с ней блоках B_i . Поэтому все вершины такого графа имеют четные степени.

Обратно, пусть G является эйлеровым графом, то есть связным графом, все степени вершин которого четны. Покажем, что степень вершины в любом блоке также четна. Это автоматически выполняется для всех вершин, не являющихся точками сочленения. Пусть x — точка сочленения графа G .

После удаления этой точки мы получим несколько односвязных графов. Добавим к каждому из таких графов вершину x вместе с теми ребрами, которые соединяли эту компоненту с x в исходном графе G . У такого графа G' все вершины, кроме x , степени не поменяли, то есть остались четными. Но тогда и x обязана иметь четную степень по следствию из первой теоремы теории графов.

5. Напомним, что реберно k -связный граф — это граф, остающийся связным после удаления любого количества ребер, меньшего k . Предположим, что после удаления каких-то l ребер каждый из блоков B_i графа G остался связным. Но тогда и весь граф G остался связным. Наоборот, если после удаления каких-то l ребер один из блоков B_i перестал быть связным, то перестанет быть связным и исходный граф — в противном случае несвязные компоненты B_i оказались бы связанными в G , а это равносильно существованию цикла в графе блоков и точек сочленения, что невозможно. Данные рассуждения доказывают нужное нам утверждение.

6. Рассмотрим остовное дерево T графа G , ребра которого отмечены жирными линиями на рис. 4.15. В остовном дереве, полученном поиском в глубину, любое ребро, ему не принадлежащее, соединяет вершину x с одним из предков этой вершины. В дереве же T вершины u и z соединены ребром, которое не принадлежит T и соединяет вершины разных поддеревьев этого дерева (ребро, отмеченное пунктирной линией на рис. 4.15). Как следствие, критерий Хопкрофта—Тарьяна для такого дерева перестает работать в вершине x . Действительно, эта вершина точкой сочленения не является, однако ни одно из обратных ребер, исходящих из потомков вершины x , не оканчивается в предке вершины x , что противоречит критерию Хопкрофта—Тарьяна.

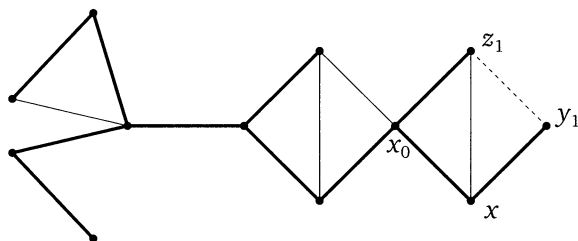


Рис. 4.15

7. Предположим, что граф G является двусвязным. Добавим в него новую вершину u , соединенную только с вершинами x и z . Очевидно, новый граф G^* останется двусвязным. По теореме Уитни в графе G^* через u и u проходит простой цикл. Удаляя из этого цикла вершину u , мы получим путь из x в z , проходящий через u , в графе G .

Предположим, что граф G , построенный на трех или более вершинах, двусвязным не является. В таком графе обязательно найдется точка сочленения. Выберем эту точку сочленения в качестве вершины x , а в качестве вершин u и z возьмем две смежные с ней вершины из разных блоков. Легко видеть, что требуемый путь для такого набора вершин отсутствует.

§ 3. k -связные графы. Теорема Менгера

1. В предыдущих параграфах мы довольно подробно изучили структуру односвязных и двусвязных графов. Можно этот процесс продолжать, пытаясь описывать 3-связные, 4-связные и т. д. графы. При этом с ростом k структура k -связных графов становится все сложнее. Оказывается, однако, любой k -связный граф при $k \geq 3$ обладает целым рядом базовых свойств, характерных и для 2-связных графов. И основным результатом такого рода — это альтернативное описание k -связного графа на языке путей, связывающих любые две вершины в таком графе.

а. Вернемся ненадолго к двусвязным графам. Теорема 3 утверждает, что в двусвязном графе G через любые две вершины x, y графа проходит хотя бы один простой цикл. Но любой такой цикл представляет собой, по сути, два простых пути, соединяющие x и y и не пересекающиеся между собой ни в одной из своих внутренних вершин. Иными словами, мы можем переформулировать теорему 3 следующим образом.

Следствие 1 (Уитни, 1932). *Граф G , построенный на трех или более вершинах, является двусвязным тогда и только тогда, когда для любой пары x, y его вершин найдутся два простых пути, соединяющие x и y и не имеющие общих внутренних вершин.*

Отмеченное свойство можно рассматривать и как альтернативное определение двусвязного графа, а именно, мы можем называть граф G двусвязным в случае, если для любой пары его вершин найдутся по крайней мере два простых пути, соединяющие эти вершины и не имеющие общих внутренних вершин.

б. Оказывается, аналогичный результат имеет место и для произвольного k -связного графа.

Теорема 2 (Уитни, 1932). *Простой граф G является k -связным тогда и только тогда, когда между любыми двумя его вершинами x и y существуют k путей, не имеющих общих внутренних вершин.*

Доказательство этой теоремы базируется, в свою очередь, на одном из наиболее фундаментальных результатов теории графов — теореме, доказанной австрийским математиком Карлом Менгером в 1927 году.

Определение 3. Пусть $\{x, y\}$ — пара различных вершин графа G . Подмножество R множества $V(G) \setminus \{x, y\}$ называется *вершинно разделяющим* x и y множеством, если в графе $G - R$ пути между x и y отсутствуют.

Теорема 4 (Менгер, 1927). *Пусть $x, y \in V(G)$ — две несмежные вершины графа G . Тогда количество $\kappa(x, y)$ вершин в наименьшем вершинно разделяющем x и y множестве совпадает с наибольшим количеством простых путей из x в y , не имеющих общих внутренних вершин.*

Замечание 5. Теорема Менгера характеризует, как говорят, локальную связность графа — она говорит о том, сколько вершин нужно удалить в графе G , с тем чтобы разорвать в этом графе вершины x и y . С этой точки зрения теорема Уитни имеет глобальный характер — она описывает связность графа в целом на языке путей, соединяющих в этом графе две произвольные вершины.

c. Давайте вначале докажем теорему Уитни в предположении, что теорема Менгера верна.

Заметим прежде всего, что в одну сторону утверждение теоремы Уитни очевидно — если между любыми двумя вершинами простого графа существует k не имеющих общих внутренних вершин путей, то в таком графе имеется как минимум $k + 1$ вершина и в нем не существует разделяющего множества, содержащего менее чем k вершин. Поэтому такой граф k -связен.

Теперь предположим, что граф G является k -связным. Если вершины x и y несмежны, то существование k путей между ними сразу следует из теоремы Менгера. Поэтому далее будем рассматривать случай, когда в графе G существует ребро $e = \{x, y\}$. Рассмотрим тогда граф $G - e$. Покажем, что связность $\kappa(G - e)$ такого графа уменьшается не более чем на единицу по сравнению со связностью $\kappa(G)$ исходного графа.

Действительно, так как любое вершинно разделяющее множество S графа G является вершинно разделяющим множеством графа $G - e$, то $\kappa(G - e) \leq \kappa(G)$. Строгое неравенство $\kappa(G - e) < \kappa(G)$ имеет место в случае, когда в $G - e$ найдется вершинно разделяющее множество S , мощность $|S| = \kappa(G - e)$ которого строго меньше $\kappa(G)$. В этом случае S не является вершинно разделяющим множеством в G , граф $G - S$ является связным, граф $G - S - e$ имеет такие две компоненты связности $G[X]$ и $G[Y]$, что $x \in X$, $y \in Y$, и в графе $G - S$ ребро e является мостом. Если теперь $|X| > 1$, то $S \cup \{x\}$ является вершинно разделяющим множеством в G , так что $|S| + 1 = \kappa(G - e) + 1 \geq \kappa(G)$. Аналогичная ситуация имеет место в случае, когда $|Y| > 1$. Наконец, в случае $|X| = |Y| = 1$ имеем $|S| = \kappa(G - e) = n - 2$, $\kappa(G) \geq n - 1$, а значит, $G = K_n$. Но и для этого случая $\kappa(G - e) = n - 2 = \kappa(G) - 1$, что и требовалось доказать.

Итак, связность $\kappa(G - e)$ графа $G - e$ больше или равна $\kappa(G) - 1$. Как следствие, любое вершинно разделяющее x и y множество R содержит как минимум $\kappa(G) - 1$ вершину. Тогда на основании теоремы Менгера между x и y имеется по меньшей мере $\kappa(G) - 1$ простых путей, не имеющих общих внутренних вершин. Вместе с ребром e они образуют k путей, соединяющих x и y в исходном графе G и не имеющих общих внутренних вершин. Теорема Уитни доказана. \square

d. Вернемся к теореме Менгера. Изначальное ее доказательство было довольно сложным и громоздким. За прошедшие годы было предпринято довольно большое количество попыток упростить доказательство этого результата. Мы здесь изложим, пожалуй, наиболее короткое доказательство теоремы Менгера, найденное немецким математиком Франком Гёрингом в 2000 году. Это доказательство базируется на некоторых вспомогательных понятиях и фактах, к изложению которых мы сейчас и перейдем.

Определение 6. Пусть $X, Y \subset V(G)$. Путем между X и Y называется любой простой путь P , начальная вершина которого принадлежит множеству X , конечная — множеству Y , а все внутренние вершины не принадлежат ни множеству X , ни множеству Y .

В качестве примера на рис. 4.16 показаны подмножества $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2\}$ вершин графа G , а также простой путь P , соединяющий X и Y (отмечен пунктирными линиями на рисунке). Отмеченный штрихпунктирными линиями простой путь Q путем между X и Y не является — одна из внутренних вершин этого пути, а именно вершина x_3 , принадлежит X , а такая ситуация в определении исключается.

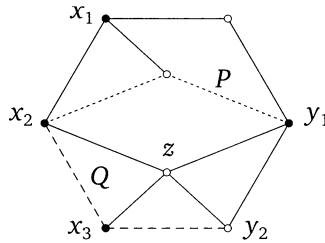


Рис. 4.16

Замечание 7. Не исключен случай, когда $X \cap Y \neq \emptyset$. Поэтому данным определением допускаются и так называемые *тривиальные* пути, каждый из которых состоит из единственной вершины $x \in X \cap Y$.

Так, для графа, изображенного на рис. 4.16, мы в качестве X и Y можем выбрать подмножества $X = \{x_1, x_2, x_3, z\}$ и $Y = \{z, y_1, y_2\}$. В этом случае путь $P = (z)$ является тривиальным путем, соединяющим два этих подмножества.

е. Следующее понятие, которое нам понадобится, — это понятие вершинного отделяющего множества R .

Определение 8. Пусть X, Y и R — некоторые подмножества множества $V(G)$ вершин. Говорят, что R отделяет множество X от множества Y , если любой путь из X в Y проходит через вершины множества R .

На рис. 4.16 белым цветом помечены вершины подмножества R , отделяющего X от Y .

Замечание 9. Обратим внимание на отличие вершинного отделяющего X от Y множества от вершинного разделяющего граф G множества. При удалении вершинного разделяющего множества граф становится несвязным. От множества, которое отделяет X от Y , этого не требуется. Действительно, само множество X отделяет X от Y , а граф $G - X$ вполне может остаться связным.

ф. Обозначим через k количество вершин в минимальном отделяющем X от Y множестве. Как мы уже отмечали ранее, X всегда отделяет себя от Y и

наоборот. Поэтому $k \leq \min(|X|, |Y|)$. В случае, если между X и Y пути отсутствуют, $k = 0$. В остальных случаях $k > 0$.

В качестве примера рассмотрим граф G , показанный на рис. 4.17. В этом графе в качестве отделяющего $X = \{x_1, x_2, x_3, z\}$ от $Y = \{z, y_1, y_2\}$ множества R можно выбрать подмножество Y . Возникает вопрос, является ли такое множество минимальным. Следующее утверждение позволяет получить ответ на этот вопрос.

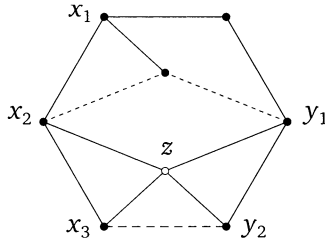


Рис. 4.17

Теорема 10 (Гёринг). Пусть X, Y — пара подмножеств множества $V(G)$. Тогда количество k вершин в минимальном отделяющем X от Y множестве R совпадает с максимальным количеством l попарно не пересекающихся друг с другом путей из X в Y .

Так, для множеств $X = \{x_1, x_2, x_3, z\}$ и $Y = \{z, y_1, y_2\}$, показанных на рис. 4.17, имеются три попарно не пересекающиеся между собой пути, соединяющие вершины множества X с вершинами множества Y (два пути, отмеченные пунктирными и штрихпунктирными линиями на рисунке 4.17, а также тривиальный путь, состоящий из единственной вершины z). Большого количества путей быть не может — это количество не может превосходить мощности множества Y . Следовательно, на основании теоремы 10 размер минимального отделяющего X от Y множества равен трем, так что Y является минимальным отделяющим X от Y множеством.

г. Приступим к доказательству теоремы 10. Понятно, что максимальное количество l попарно непересекающихся путей из X в Y не может превосходить количества k вершин в минимальном отделяющем X от Y множестве R — в противном случае согласно принципу Дирихле через какую-то вершину этого множества проходило бы два или более простых путей, чего быть не может. Теорема утверждает, что эти два числа на самом деле равны. Иными словами, нам нужно доказать, что в графе G обязательно найдутся ровно k непересекающихся путей из X в Y .

Сразу заметим, что в двух тривиальных случаях $k = 0$ и $k = 1$ теорема верна. Действительно, случай $k = 0$ по определению означает, что пути между X и Y отсутствуют. В случае, когда минимальное отделяющее X от Y множество состоит из одной вершины x , нам годится любой путь из X в Y , проходящий через x .

Доказательство теоремы в случае $k > 1$ проведем индукцией по количеству вершин и ребер в графе. В качестве базы индукции мы можем взять

граф \bar{K}_2 , состоящий из двух изолированных вершин, в котором $X = Y = \bar{K}_2$ (рис. 4.18(a)). Размер минимального отделяющего X от Y множества равен двум (в качестве такого множества необходимо взять множество $X = Y$). Максимальное же количество путей, соединяющих X и Y , также равно двум — в качестве таких путей выступают тривиальные пути, состоящие из одной вершины. Таким образом, для данного случая доказываемая нами теорема верна.

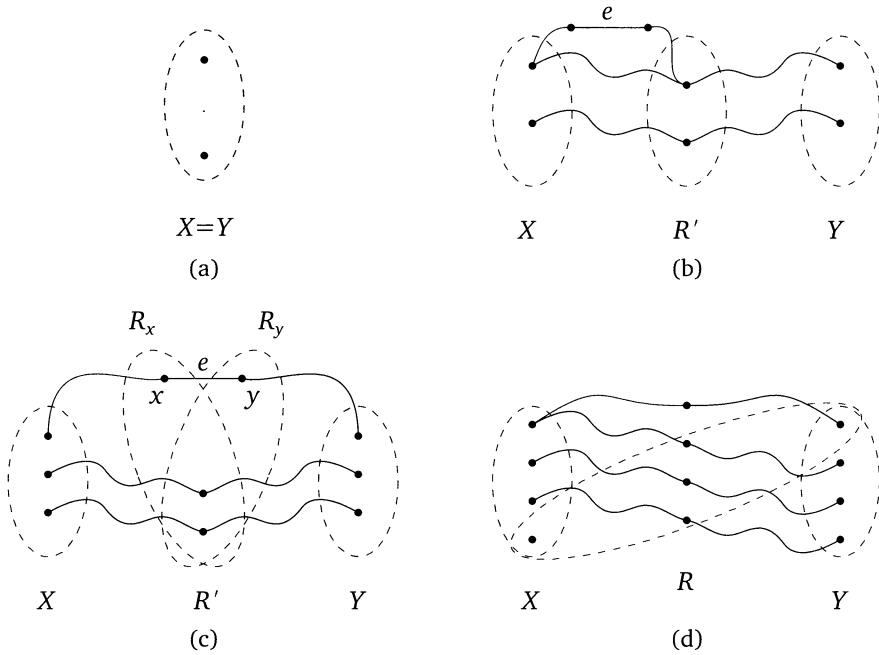


Рис. 4.18

Возьмем теперь некоторый граф $G \neq \bar{K}_2$, в котором существуют такие множества вершин X и Y , что размер минимального отделяющего X от Y множества R равен $k > 1$. Докажем наше утверждение для G , X и Y при условии, что для всех графов с меньшим количеством вершин и/или ребер теорема 10 верна.

Рассмотрим вначале случай, когда в графе G существует вершина $z \in X \cap Y$ (см. рис. 4.17). В графе $G - z$ минимальное отделяющее $X \setminus \{z\}$ от $Y \setminus \{z\}$ множество R' содержит $k - 1$ вершину. Тогда по предположению индукции в $G - z$ имеется $k - 1$ непересекающийся путь из $X \setminus \{z\}$ в $Y \setminus \{z\}$. Добавляя к этому набору тривиальный путь $\{z\}$, получаем набор из k непересекающихся путей в графе G .

Теперь разберем случай $X \cap Y = \emptyset$. Условие $k > 0$ означает, что X и Y соединены между собой хотя бы одним путем P . То, что $X \cap Y = \emptyset$, означает, что этот путь будет нетривиальным, то есть он будет содержать хотя бы одно ребро $e = \{x, y\}$. При этом по определению пути между X и Y вершина x не

принадлежит Y , а вершина u не принадлежит X даже в том случае, когда P состоит из единственного ребра e .

Предположим вначале, что при удалении ребра $e = \{x, y\}$ размер минимального отделяющего X от Y множества R' в графе $G - e$ не уменьшится по сравнению с размером разделяющего множества R в графе G (рис. 4.18(b)). Тогда по индукционному предположению в графе $G - e$ найдется k не пересекающихся друг с другом путей из X в Y . Добавление же ребра e это количество путей уменьшить никак не сможет.

Теперь предположим, что при удалении ребра $e = \{x, y\}$ размер отделяющего X от Y множества R' в графе $G - e$ уменьшился по сравнению с размером отделяющего X от Y множества R в графе G (рис. 4.18(c)) и стал равным $k - 1$. Это, в свою очередь, означает, что множества вершин $R_x = R' \cup \{x\}$ и $R_y = R' \cup \{y\}$ отделяют X от Y в графе G и содержат ровно k вершин. Кроме того, хотя бы одно из множеств R_x, R_y не совпадает ни с X , ни с Y . Действительно, в противном случае мы имели бы $R' = X \cap Y$, $|R'| = k - 1 \geq 1$, что противоречит условию $X \cap Y = \emptyset$. Иными словами, мы доказали, что в рассматриваемом случае в исходном графе G обязательно существует отделяющее X от Y множество R мощности k , не совпадающее ни с X , ни с Y (рис. 4.18(d)).

Обозначим через \bar{X} и \bar{Y} подмножества $X \setminus R$ и $Y \setminus R$ соответственно. Так как R отлично и от X , и от Y , то оба этих множества не пусты. Удалим в графе G все вершины множества \bar{Y} . Рассмотрим в получившемся графе G' множества X и R . Эти множества не совпадают, причем $|X| \geq k$, а $|R| = k$. Любое отделяющее X от R множество в графе G' , если оно существует, содержит не менее чем k вершин — в противном случае мы бы и в исходном графе G смогли отделить X от Y , удалив эти вершины. Но тогда по индукционному предположению в графе G' существует k непересекающихся путей из X в R . Аналогично доказывается, что в графе $G'' = G - \bar{X}$ существует k непересекающихся путей из R в Y . Так как $|R| = k$, то мы всегда можем состыковать эти пути с ранее построенными путями из X в R и получить искомым набор путей, соединяющих X и Y в исходном графе G . \square

h. Покажем теперь, как, используя теорему 10, доказать теорему Менгера. Пусть x, y — две несмежные вершины графа G , удовлетворяющие условиям теоремы Менгера. Рассмотрим множество X вершин, смежных с x , и множество Y вершин, смежных с y . Любое отделяющее X от Y множество разделяет вершины x и y и наоборот. Следовательно, размер минимального отделяющего X от Y множества совпадает с $\kappa(x, y)$. Но тогда согласно теореме 10 существует k попарно непересекающихся путей из X в Y . Продолжая эти пути до точек x и y , мы тем самым доказываем справедливость теоремы Менгера.

Упражнения

1 (0,5 балла). Пусть G — вершинно двусвязный граф, и пусть вершины x и y этого графа соединены в G путем P . Докажите или опровергните следующее утверждение: в графе G найдется путь Q , соединяющий x и y и не пересекающийся с P ни в каких внутренних вершинах этого пути.

2 (1 балл). Определите размер $\kappa(x, y)$ вершинного и $\lambda(x, y)$ реберного разделяющих x и y множеств для графа G , показанного на рис. 4.19.

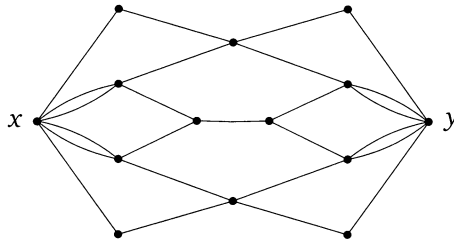


Рис. 4.19

3 (1 балл). Пусть D — орграф, построенный на множестве вершин $[12] = \{1, 2, \dots, 12\}$, в котором из i в j проведено ребро тогда и только тогда, когда i делит j . Определите $\kappa(1, 12)$ и $\lambda(1, 12)$ в таком графе.

4 (1,5 балла). Пусть граф G вершинно k -связен. Образует из G новый граф G' путём добавления к G новой вершины y и не менее k рёбер из y в k различных вершин графа G . Докажите, что граф G' также k -связен.

5 (1,5 балла). Назовем k -веером из вершины x в множество Y набор из k путей, начинающихся в x , заканчивающихся в Y и не имеющих никаких общих вершин, кроме вершины x . Пусть G — k -связный граф, x — некоторая его вершина, а Y — набор из не менее чем k вершин графа G , не включающий x . Докажите, что тогда существует k -веер из x в Y .

6 (1 балл). Докажите, что любой k -связный граф G , построенный на $n \geq 2k$ вершинах, $k \geq 2$, содержит цикл C , длина которого больше или равна $2k$.

7 (1,5 балла). Докажите, что в k -связном графе для любых k вершин найдется цикл C , на котором лежат все эти k вершин.

8 (1,5 балла). Покажите, что в условиях предыдущего упражнения мы не можем заранее задать порядок, в котором должны проходиться вершины, лежащие на общем для них цикле C .

Дополнительные упражнения

9 (2 балла). Докажите, что после удаления произвольного ребра $e = (x, y)$ в орграфе D вершинная связность κ этого орграфа уменьшится как максимум на единицу, то есть что $\kappa(D - e) \geq \kappa(D) - 1$.

10 (1,5 балла). С помощью теоремы Менгера докажите вершинную k -связность k -мерного гиперкуба Q_k .

11 (2 балла). Пусть G — 3-связный граф, не являющийся двудольным графом. Докажите, что в таком графе содержатся по меньшей мере четыре цикла нечетной длины.

12 (2 балла). Постройте минимально возможный 3-связный граф G , в котором имеется пара несмежных вершин, соединенных между собой четырьмя попарно непересекающимися по внутренним вершинам путями.

13 (2 балла). Пусть G — k -связный граф, диаметр которого равен d . Докажите, что количество n вершин в таком графе больше или равно $k(d-1) + 2$. Для любого $k \geq 1$ и $d \geq 2$ постройте k -связный граф, в котором это неравенство превращается в равенство.

14 (2 балла). Пусть G — k -связный граф, а C и D — два цикла в G максимальной длины. Для случаев $k = 2$ и $k = 3$ докажите, что C и D имеют по меньшей мере k общих вершин.

15 (1,5 балла). Пусть G — $2k$ -связный граф, в котором имеется не более двух вершин нечетной степени. Докажите, что такой граф можно превратить в реберно k -связный орграф D , то есть что такой граф допускает реберно k -связную ориентацию.

Решение упражнений

1. Это утверждение является неверным. Действительно, согласно теореме Уитни в таком графе найдутся пути P' и Q' , соединяющие x и y и не пересекающиеся в своих внутренних точках. Если же один из путей задан априори, то не факт, что найдется второй путь, не пересекающийся с ним.

В качестве контрпримера рассмотрим граф $G = K_4 - \{1, 4\}$, построенный на множестве вершин $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$. Граф G является двусвязным, однако в нем не существует пути Q , соединяющего вершины 1 и 4 и не пересекающегося с путем $P = (1, 2, 3, 4)$.

2. Вершинная связность $\kappa(G) = 3$, а реберная связность $\lambda(G) = 5$. Вершины, принадлежащие (x, y) -разделяющему подмножеству множества $V(G)$, помечены белым цветом на рис. 4.20(a). То, что меньшего количества вершин не существует, следует из теоремы Менгера — на рис. 4.20(a) разными типами линий показаны три попарно не пересекающихся в своих внутренних точках пути, соединяющие вершины x и y .

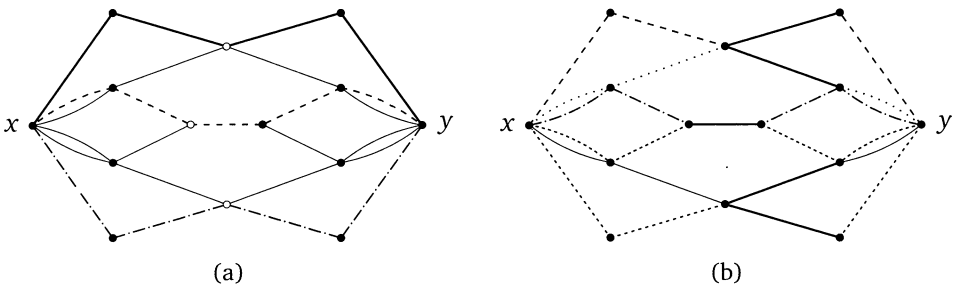


Рис. 4.20

Аналогично доказывается и равенство $\lambda(G) = 5$. На рис. 4.20(b) жирными линиями отмечены пять ребер, представляющие собой реберно разделяющее вершины x и y множество. То, что меньшего количества ребер в таком множестве быть не может, следует из теоремы Менгера — на рис. 4.20(b) раз-

ными типами линий показаны пять реберно непересекающихся путей, соединяющих вершины x и y .

3. Заметим, что величина $\kappa(x, y)$ не определена для случая смежных вершин. Так как 1 делит 12, то в орграфе D вершина 1 связана с вершиной 12 ребром $(1, 12)$, так что $\kappa(1, 12)$ не определено. Значение же $\lambda(1, 12)$, то есть количество ребер, которое нужно удалить, для того чтобы изолировать вершины 1 и 12 в орграфе D , равно пяти. Действительно, из 1 в 12 ведут ориентированные пути $(1, 12)$, $(1, 2, 12)$, $(1, 3, 12)$, $(1, 4, 12)$ и $(1, 6, 12)$. Удаляя все пять входящих в 12 ребер, мы изолируем вершины 1 и 12.

4. Пусть в графе G' найдется разделяющее множество S мощности $|S| < k$. Если $y \in S$, то и в G имеется разделяющее множество $S \setminus \{y\}$ размера меньше, чем k , а этого быть не может по условию. В случае же $y \notin S$ в компоненте связности графа $G' - S$, содержащей y , имеется еще по меньшей мере одна вершина. Но тогда и граф G после удаления множества S становится несвязным, чего быть не может.

5. Добавим в граф G вершину y и соединим её со всеми вершинами множества Y , образовав тем самым граф G' . Пользуясь результатом предыдущего упражнения, заключаем, что граф G' является k -связным. По теореме Менгера в G' есть k непересекающихся путей из x в y . Удалив для каждого из этих путей замыкающую вершину y вместе с инцидентным ей ребром, мы получим в графе G k -веер из x в Y .

6. Рассмотрим в графе G цикл C наибольшей длины. Если все вершины графа G лежат на этом цикле, то его длина $|C| \geq 2k$ и мы все доказали. Поэтому будем считать, что в графе G найдется вершина $x \notin C$. В упражнении 5 мы доказали, что в графе G найдется k путей из x в C , имеющих единственную общую вершину x . Если длина цикла $|C| < 2k$, то согласно принципу Дирихле найдутся хотя бы две концевые вершины этих путей, которые соединены между собой ребром. Но тогда замена в C соединяющего их ребра на два пути, проходящие через вершину x , дает в графе G цикл большей длины, чего быть не может.

7. Докажем данное утверждение индукцией по k . В случае $k = 2$ утверждение верно: в двусвязном графе любые две вершины лежат на простом цикле. Предположим теперь, что $k > 2$. По индукционному предположению в графе G найдется цикл C , проходящий через вершины x_1, \dots, x_{k-1} . Если $x_k \in C$, то все доказано, поэтому будем считать, что $x_k \notin C$.

Предположим вначале, что количество вершин в цикле C больше или равно k . Согласно упражнению 5 в графе G найдется k -веер из x_k в C . Так как вершины x_1, \dots, x_{k-1} разбивают цикл C на $k - 1$ дуг (включающих и граничные вершины x_i), то одна из этих дуг обязательно содержит две концевые точки путей P_1, \dots, P_k . При этом внутри этой дуги никаких вершин x_i уже не содержится. Удаляя теперь эту дугу и добавляя пути из двух ее концов в x_k , получим цикл, содержащий все k вершин x_i .

Теперь предположим, что количество вершин в цикле C равно $k - 1$. Тогда, на основании упражнения 5 найдется $(k - 1)$ -веер из x_k в оставшиеся $k - 1$ вершину. Заменяя одно из ребер цикла на путь, проходящий через x_k , мы вновь получаем цикл, содержащий все вершины x_1, \dots, x_k .

8. В качестве контрпримера рассмотрим четырехсвязный граф, показанный на рис. 4.21. В таком графе отсутствует цикл, который проходит через вершины 1, 3, 2, 4. Действительно, любой путь из 1 в 3 пересекает любой путь из 2 в 4.

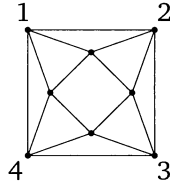


Рис. 4.21

§ 4. Теорема Форда—Фалкерсона

1. Перейдем теперь к реберно k -связным графам. Как и следовало ожидать, и для таких графов имеют место аналогии как вершинной теоремы Менгера, так и вершинной теоремы Уитни.

Теорема 1 (реберная теорема Менгера). *Максимальное количество $\lambda'(x, y)$ реберно непересекающихся простых путей, соединяющих две различные вершины x и y связного графа G , совпадает с размером $\kappa'(x, y)$ минимального реберно разделяющего вершины x и y множества $R \subset E(G)$.*

Теорема 2 (реберная теорема Уитни). *Граф G является реберно k -связным тогда и только тогда, когда любые две вершины x, y этого графа связаны между собой по меньшей мере k попарно реберно не пересекающимися между собой путями.*

Интересно заметить, что эти утверждения были доказаны лишь в 1956 году как следствия более общего результата — теоремы Форда—Фалкерсона о максимальном потоке в сети. В силу чрезвычайной важности теоремы Форда—Фалкерсона нам также будет полезно вначале сформулировать и доказать этот более общий результат, а затем из него как частный случай получить реберную теорему Менгера (см. упражнение 10) и реберную теорему Уитни.

а. Для того чтобы сформулировать теорему Форда—Фалкерсона, нам необходимо ввести несколько дополнительных понятий. Начнем с понятия сети.

Сеть можно представлять себе как математическую модель некоторой транспортной системы, доставляющей какой-то продукт (людей, нефть, воду, электричество) из одного места в другое. Если каналы такой системы представить ориентированными ребрами, а промежуточные станции — вершинами, то мы получим некоторый простой слабо связный орграф в качестве математической модели такой транспортной системы (рис. 4.22).

Однако такого простого математического объекта нам для полного описания транспортной сети явно не достаточно.

Во-первых, нам для любого канала рассматриваемой транспортной системы нужно указать пропускную способность этого канала как максимальное количество транспортируемого продукта, которое можно пропустить через данный канал в единицу времени (см. числа над ребрами на рис. 4.22). Как следствие, любому ориентированному ребру (x, y) мы должны приписать некоторое неотрицательное вещественное число $c(x, y)$, называемое пропускной способностью этого ребра $e = (x, y)$.

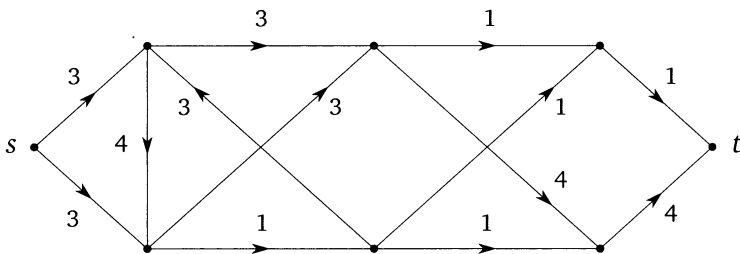


Рис. 4.22. Сеть с источником s и стоком t

Во-вторых, в простейшем случае можно считать, что система сконструирована для передачи продукта из единственного места добычи в единственное же место потребления данного продукта. На языке теории графов это означает, что в орграфе D имеются две выделенные вершины — источник s и сток t (рис. 4.22). Степень входа вершины s равна нулю, то есть в источник ничего не втекает. Напротив, у вершины t равна нулю степень выхода — из этой вершины ничего вытекать не должно.

Теперь мы можем дать формальное определение сети.

Определение 3. Пусть среди вершин простого слабо связного орграфа D выделены две вершины s и t , называемые источником и стоком, для которых $\text{indeg}(s) = \text{outdeg}(t) = 0$. Пусть, кроме того, на множестве $E \subset V \times V$ ребер орграфа D определена вещественная неотрицательная функция $c(x, y)$. Тогда орграф $D = (V, E, s, t, c)$ называется *сетью*, а функция $c(x, y)$ — *пропускной способностью* сети D .

б. Предположим, что мы через нашу транспортную систему пропускаем какое-то количество Q продукта в единицу времени из места добычи этого продукта в место его потребления. Это означает, что какая-то часть этого продукта транспортируется через каждый отдельно взятый канал нашей системы. Нам при этом важно, во-первых, следить за тем, чтобы количество продукта, проходящего через каждый отдельно взятый канал, не превосходило максимальной пропускной способности этого канала. Во-вторых, нам нужно следить за тем, чтобы количество прибывающего на каждую промежуточную станцию продукта равнялось количеству исходящего из данной станции продукта, то есть чтобы на каждой станции не нарушался закон сохранения вещества.

Для того чтобы описать все вышесказанное на языке теории графов, нам нужно ввести понятие потока в сети.

Определение 4. *Потоком в сети D из вершины s в вершину t называется неотрицательная вещественная функция, определенная на множестве $E(D)$ ребер орграфа D и удовлетворяющая следующим условиям:*

- 1) для любых $(x, y) \in E(D)$ выполняются неравенства $f(x, y) \geq 0$ и $f(x, y) \leq c(x, y)$;
- 2) для любой вершины $x \in V(D)$, отличной от s и t , справедливо равенство

$$f^+(x) := \sum_{y: (x,y) \in E(D)} f(x, y) = \sum_{z: (z,x) \in E(D)} f(z, x) =: f^-(x),$$

описывающее закон сохранения вещества в сети: количество $f^+(x)$ вещества, вытекающее из вершины x , равняется количеству $f^-(x)$ вещества, втекающего в x .

Число

$$\text{val}(f) := \sum_{x: (s,x) \in E(D)} f(s, x) = f^+(s),$$

характеризующее количество исходящего из источника s в единицу времени продукта, называется при этом *величиной* данного потока. В силу закона сохранения потока эта же величина характеризует количество входящего в сток t продукта ($f^+(s) = f^-(t)$).

В показанной в качестве примера на рис. 4.23 сети нормальным шрифтом помечен поток через каждое ребро, а жирным шрифтом — величина пропускной способности этого ребра.

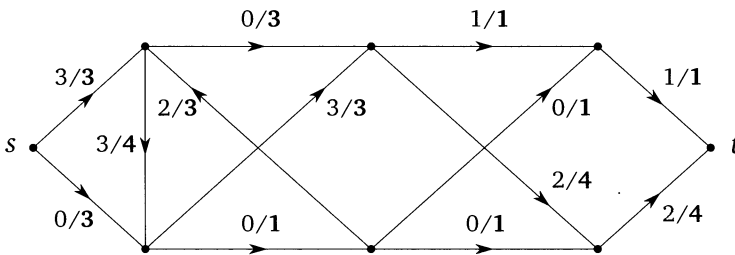


Рис. 4.23. Поток в сети

с. Основной задачей, связанной с потоками в сетях, является задача максимизации потока $\text{val}(f)$ в заданной сети D . Можно показать, что эта задача представляет собой задачу линейного программирования. Как и всякая задача линейного программирования, такая задача имеет и двойственную к ней задачу линейного программирования, а именно задачу о нахождении так называемого *минимального разреза* в сети.

Определение 5. Пусть (S, T) — разбиение множества V вершин орграфа D на два таких блока S и T , что $s \in S$, а $t \in T$. Тогда подмножество

$$R(S, T) := \{e = (x, y) \in E(D) : x \in S, y \in T\}$$

называется (S, T) -разрезом сети D , а величина

$$\text{cap}(S, T) := \sum_{(x,y) \in R(S,T)} c(x, y)$$

называется *пропускной способностью* данного разреза.

На рис. 4.24 показан пример (S, T) -разреза в сети (жирные ребра на рисунке), пропускная способность которого равна 7.

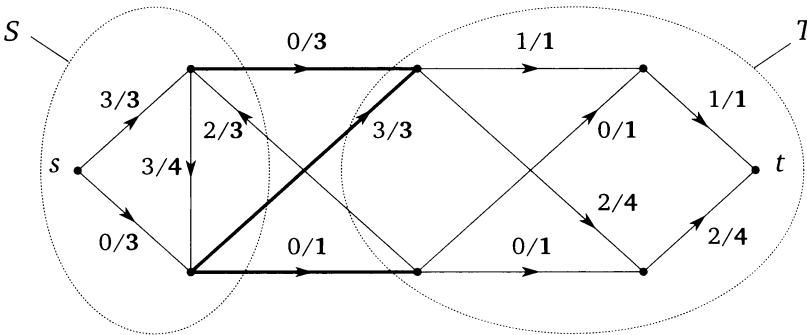


Рис. 4.24. (S, T) -разрез в сети

Нас будут интересовать разрезы, пропускная способность которых минимальна. Любой такой разрез мы и будем называть *минимальным разрезом*.

d. Зафиксируем некоторый поток в сети D . Более-менее очевидно, что величина Q этого потока не может превосходить пропускной способности любого разреза сети D . Именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 6 (слабая двойственность). Для любого потока f в сети D и произвольного (S, T) -разреза в этой сети имеет место неравенство

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(S, T). \quad (4.2)$$

Доказательство. Зафиксируем какое-то подмножество U множества $V(D)$ сети D . Обозначим через $f^+(U)$ суммарный поток на ребрах, исходящих из U , а через $f^-(U)$ — суммарный поток на ребрах, входящих в U . С физической точки зрения $f^+(U)$ представляет собой количество вещества, вытекающего из U , а $f^-(U)$ — количество вещества, втекающего в U . Покажем, что разность между количеством вытекающего из U вещества и количеством втекающего в него вещества, характеризующая, по сути, поток вещества через границу U , равна

$$f^+(U) - f^-(U) = \sum_{u \in U} [f^+(u) - f^-(u)].$$

Посмотрим для этого, какой вклад дает поток $f(e)$ через некоторое ребро e в каждую из частей этого равенства. Если e соединяет две внутренние вершины подмножества U , то в левую часть $f(e)$ вклада не дает, а в правой части этот вклад сокращается. В случае, если e соединяет две внешние по отношению к U вершины, вклад от $f(e)$ отсутствует в обеих частях рассматриваемого равенства. Если e представляет собой ребро, исходящее из U , то $f(e)$ дает одинаковый положительный вклад в каждую из частей нашего равенства, а если e — ребро, входящее в U , то $f(e)$ дает одинаковый отрицательный вклад в обе части равенства.

Теперь рассмотрим некоторый разрез (S, T) в сети. Для потока, вытекающего из S , мы на основании доказанного равенства и законов сохранения ($f^+(x) = f^-(x)$ для любого $x \neq s, t$) можем записать, что

$$f^+(S) - f^-(S) = f^+(s) = \text{val}(f).$$

Но тогда мы и получаем, что

$$\text{val}(f) = f^+(S) - f^-(S) \leq f^+(S) \leq \sum_{(x,y) \in E(D): x \in S, y \in T} c(x, y) = \text{cap}(S, T). \quad \square$$

Следствие 7. Пусть f — поток в сети D , а (S, T) — разрез в этой сети, причем $\text{val}(f) = \text{cap}(S, T)$. Тогда f представляет собой максимальный поток в сети, а (S, T) — минимальный разрез в этой сети.

е. В теории экстремальных задач слабая двойственность (4.2) используется обычно для того, чтобы получить некоторую верхнюю границу на значения целевой функции (в данном случае на величину $\text{val}(f)$). Кроме того, как мы уже заметили выше, слабая двойственность может быть использована при доказательстве оптимальности того или иного решения — если в задаче можно найти величину потока в сети, равную пропускной способности некоторого разреза, то в таком случае найденная величина $\text{val}(f)$ потока гарантированно является оптимальной.

В общем случае вполне возможна ситуация, при которой максимальное значение целевой функции в прямой задаче оказывается строго меньше значения целевой функции в обратной задаче. Однако для рассматриваемого класса задач такая ситуация невозможна — именно, мы сейчас покажем, что если величина $\text{val}(f)$ потока достигает своего максимального значения, то это значение обязательно совпадает с минимальной пропускной способностью некоторого разреза. В теории экстремальных задач подобного рода результат называется обычно сильной двойственностью.

Теорема 8 (сильная двойственность; Форд—Фалкерсон, 1956). Во всякой сети величина любого максимального потока равна пропускной способности любого минимального разреза.

Доказательство. Предположим, что в сети D существует максимальный поток f . Мы покажем, как в этом случае построить в этой сети разрез (S, T) , пропускная способность которого совпадает с величиной максимального потока. На основании следствия 7 это, в свою очередь, означает, что такой разрез является минимальным.

Для этого рассмотрим вместо D неориентированный граф G , полученный из исходного орграфа заменой всех ориентированных ребер на неориентированные. Разобьем множество $V(G)$ вершин этого графа на два блока S и T следующим образом. К блоку S отнесем вершину s , а также любую вершину $x \in V(G)$, для которой существует такой простой путь $(s = x_0, x_1, \dots, x_k = x)$ из s в x , что любому ребру $\{x_i, x_{i+1}\} \in E(G)$ данного пути соответствует

- (1) либо ориентированное ребро (x_i, x_{i+1}) графа D , значение $f(x_i, x_{i+1})$ на котором строго меньше $c(x_i, x_{i+1})$ (в этом случае говорят, что ребро $\{x_i, x_{i+1}\} \in E(G)$ соответствует *ненасыщенному* ребру $(x_i, x_{i+1}) \in E(D)$),
- (2) либо ориентированное ребро (x_{i+1}, x_i) графа D , направленное навстречу построенному пути, значение $f(x_{i+1}, x_i)$ на котором строго больше нуля.

Покажем теперь, что множество $T = V \setminus S$ непусто и, в частности, обязательно содержит вершину t . Действительно, предположим, что это не так. Тогда в графе G существует простой путь из s в t , все ребра которого удовлетворяют описанным выше свойствам (1) и (2), — так называемый дополняющий (или увеличивающий, или ненасыщенный) путь (см. рис. 4.25, на котором показан дополняющий путь в сети из вершины s в вершину t ; ребра, помеченные пунктирными линиями, отвечают первому типу ребра, при котором $f(e_i) < c(e_i)$, а ребро, помеченное штрихпунктирной линией, — второму типу ребра, при котором оно направлено навстречу пути и при этом $f(e_j) > 0$). Эти свойства означают, что существует положительное число ε ,

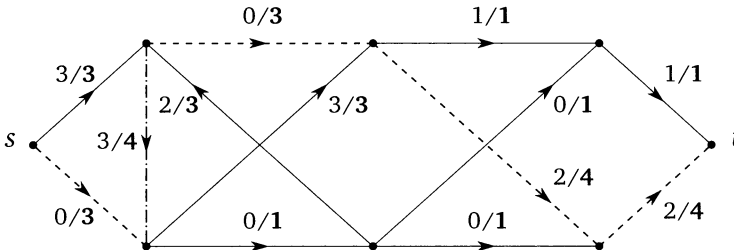


Рис. 4.25. Поток и дополняющий путь

которое, во-первых, не превосходит ни одного числа $c(x_i, x_{i+1}) - f(x_i, x_{i+1})$, необходимого для насыщения любого ребра первого типа, а во-вторых, не превышает ни одной величины потока $f(x_{i+1}, x_i)$ через любое из ребер второго типа ($\varepsilon = 2$ для увеличивающего пути на рис. 4.25). Добавим эту величину ε к потоку $f(x_i, x_{i+1})$ через каждое ребро первого типа и вычтем ее из потока $f(x_{i+1}, x_i)$ через каждое ребро второго типа. В результате мы получим новый поток, величина которого превосходит величину исходного потока на значение $\varepsilon > 0$. Однако это невозможно — по предположению, величина исходного потока была максимальной. Следовательно, вершина t обязательно принадлежит множеству T , то есть это множество T непусто.

Для завершения доказательства остается понять, что построенное разбиение множества вершин на два блока S и T является (S, T) -разрезом, пропус-

ная способность которого совпадает с величиной максимального потока. Но это действительно так: по построению множества S любое ребро, идущее из S в T , является насыщенным, а поток на любом ребре, идущем из T в S , равен нулю. Следовательно, поток через (S, T) в точности равен пропускной способности разреза (S, T) . \square

Замечание 9. Доказанная теорема ничего не говорит о существовании максимального потока в сети.

f. Идеи, положенные в основу доказательства теоремы Форда—Фалкерсона, можно использовать для построения простейшего алгоритма нахождения максимального потока в сети [33, 34] — так называемого алгоритма Форда—Фалкерсона. Именно, положим на первом шаге алгоритма $f(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in E(D)$. Рассмотрим далее произвольный простой путь из s в t и увеличим поток в сети на описанную в доказательстве теоремы величину ε . На следующем шаге найдем произвольный дополняющий путь из s в t в нашей сети и увеличим поток на величину ε , сосчитанную для данного пути. Будем продолжать процесс, пока в сети остаются дополняющие пути. В случае, если этот процесс завершится, результирующий поток будет максимальным.

Основным недостатком этого алгоритма является тот факт, что время его работы существенно зависит от выбора дополняющего пути на каждом шаге алгоритма. При неудачном выборе этих путей данный алгоритм может вообще никогда не завершиться (см. упражнение 5). Можно показать, однако, что в случае целочисленных или рациональных значений пропускных способностей $c(x, y)$ мы всегда получим максимальный поток за конечное число шагов алгоритма (упражнение 6).

Конструктивным доказательством существования максимального потока в сети в случае вещественных значений пропускных способностей является модификация метода Форда—Фалкерсона, известная как алгоритм Эдмонса—Карпа. В этой модификации на каждом шаге с помощью алгоритма поиска в ширину находится *кратчайший* по количеству ребер дополняющий путь. Затем поток в сети, как и в основном алгоритме, увеличивается на величину ε . Можно доказать (см., например, [34]), что время выполнения данной модификации алгоритма составляет $O(|V| \cdot |E|^2)$.

Упражнения

1 (0,5 балла). Чему равно максимальное количество рёберно непересекающихся простых путей, соединяющих любую пару вершин в полном графе K_n ?

2 (1 балл). Возьмем некоторую сеть из n вершин. В каждой её вершине, за исключением источника и стока, добавим петлю с пропускной способностью 1, поменяем местами источник и сток, а потом каждое ребро (x, y) заменим на ребро (y, x) с той же пропускной способностью. Как изменится величина максимального потока в такой сети?

3 (1 балл). Для сети, изображенной на рис. 4.26, определите минимальный реберный разрез, а также предъядвите максимальный поток в этой сети.

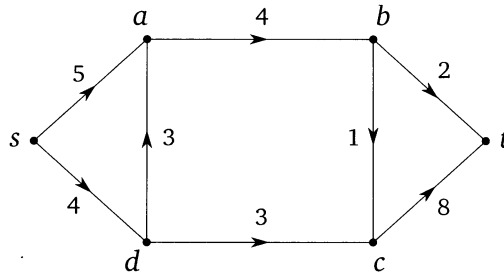


Рис. 4.26

4 (1 балл). Как использовать алгоритм Форда—Фалкерсона для сети, в которой имеется несколько источников и/или стоков? Проиллюстрируйте ответ на примере сети, показанной на рис. 4.27. Определите для этой сети минимальный разрез и соответствующий ему максимальный поток.

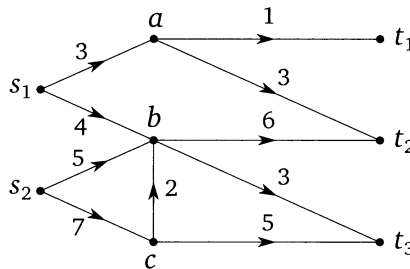


Рис. 4.27

5 (1 балл). Рассмотрим сеть, изображенную на рис. 4.28. Величина пропускной способности ребра (x_4, x_3) равна $r = (\sqrt{5} - 1)/2$ и удовлетворяет уравнению вида $r^2 = 1 - r$. Будем искать максимальный поток в этой сети

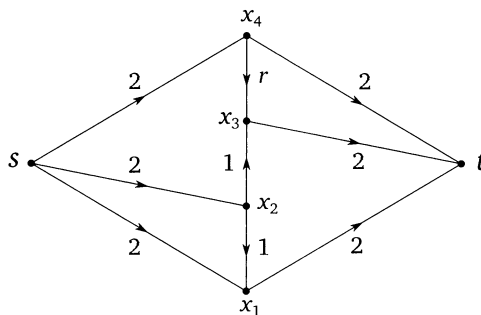


Рис. 4.28

с помощью алгоритма Форда—Фалкерсона. В качестве первого увеличивающего поток пути возьмём путь (s, x_2, x_3, t) . Затем будем увеличивать поток вдоль путей в следующем порядке: $p_1, p_2, p_1, p_3, p_1, p_2, p_1, p_3, \dots$, где $p_1 = (s, x_4, x_3, x_2, x_1, t)$, $p_2 = (s, x_2, x_3, x_4, t)$, $p_3 = (s, x_1, x_2, x_3, t)$. Покажите, что при стремлении количества n итераций к бесконечности величина потока не будет стремиться к величине максимального потока в этой сети.

6 (1 балл). С помощью алгоритма, использованного при доказательстве теоремы Форда—Фалкерсона, докажите, что в случае целочисленных значений пропускных способностей ребер существует максимальный поток в сети, причем как величина этого потока, так и значения потока на каждом из ребер будут целочисленными. Покажите, что любой такой максимальный поток можно разбить на потоки, состоящие из простых путей из s в t , величина каждого из которых равна единице. Модифицируйте доказательство существования максимального потока в сети для случая рациональных значений пропускных способностей ребер сети.

7 (1,5 балла). Для формирования ученого совета университета необходимо выбрать одного преподавателя от каждой из k университетских кафедр, где k — натуральное число, делящееся на 3. Один и тот же преподаватель может быть приписан к одной или нескольким кафедрам, но может быть выбран в ученый совет только от одной из них. На кафедре работают профессора, доценты и ассистенты. В ученый совет должно входить одинаковое количество преподавателей от каждой из этих трех групп. Опишите алгоритм выбора преподавателей в ученый совет.

Дополнительные упражнения

8 (1,5 балла). После проведения некоторого количества матчей в спортивном турнире команда X имела известное нам количество побед. Если команда выигрывает все оставшиеся матчи, в которых она участвует, то она наберет W побед. Могут ли остальные матчи завершиться так, чтобы команда X стала победителем в турнире? Для ответа на поставленный вопрос создадим сеть следующего вида:

1. Пусть X_1, \dots, X_n — все команды, кроме команды X . Добавим в множество вершин сети вершины x_1, \dots, x_n , соответствующие этим командам.

2. Добавим также в сеть $\binom{n}{2}$ вершин с пометками $y_{i,j}$ — по вершине для каждой неупорядоченной пары различных команд $\{X_i, X_j\}$. В вершину $y_{i,j}$ направим ребра бесконечной пропускной способности из вершин x_i и x_j .

3. Добавим в сеть источник s и сток t .

4. Из источника в каждую из вершин x_i будет идти ребро пропускной способности $W - w_i$, где w_i — количество выигранных командой X_i матчей. Из каждой вершины $y_{i,j}$ в сток направим ребро пропускной способности $a_{i,j}$, равной количеству матчей, в которых команда X_i встретится с командой X_j .

Докажите, что максимальный поток в этой сети равен величине $\sum_{i,j} a_{i,j}$ тогда и только тогда, когда команды могут сыграть так, чтобы ни одна из них не выиграла больше W матчей.

9 (2 балла). Рассмотрим два набора $\mathbf{p} := (p_1, p_2, \dots, p_m)$ и $\mathbf{q} := (q_1, q_2, \dots, q_n)$ неотрицательных целых чисел. Говорят, что пара (\mathbf{p}, \mathbf{q}) реализуема в виде простого двудольного графа G , если существует такой простой двудольный граф G с долями $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, что $\deg(x_i) = p_i$ и $\deg(y_j) = q_j$ для всех $i \in [1, m]$ и $j \in [1, n]$.

1. Сведите задачу проверки заданной пары (\mathbf{p}, \mathbf{q}) на реализуемость в виде простого двудольного графа G к задаче о нахождении максимального потока в сети.

2. Докажите, что пара (\mathbf{p}, \mathbf{q}) реализуема в виде простого двудольного графа тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^m p_i = \sum_{j=1}^n q_j \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^m \min\{p_i, k\} \geq \sum_{j=1}^k q_j, \quad 1 \leq k \leq n,$$

при условии, что числа q_j упорядочены по невозрастанию: $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$.

10 (1,5 балла). С помощью теоремы Форда—Фалкерсона докажите рёберную теорему Менгера для неориентированных графов.

11 (1,5 балла). Докажите для неориентированных графов рёберную теорему Менгера с помощью вершинной теоремы Менгера.

12 (2 балла). Докажите вершинную теорему Менгера для ориентированных графов с помощью теоремы Форда—Фалкерсона.

13 (2 балла). Докажите вершинную теорему Менгера для неориентированных графов с помощью теоремы Форда—Фалкерсона.

Решение упражнений

1. Максимальное количество реберно непересекающихся простых путей, соединяющих любую пару вершин в полном графе K_n , равно $n - 1$. Действительно, с одной стороны, большее количество путей мы получить не можем: степени начальной и конечной вершин равны $n - 1$. С другой стороны, легко построить $n - 1$ таких путей: один из них представляет собой ребро $\{x, y\}$, а $n - 2$ других — это все пути вида (x, z, y) , где z — произвольная вершина полного графа, отличная от x и y .

2. Эта величина не изменится. Во-первых, петли не влияют на пропускную способность сети: если в графе без петель уже найден максимальный поток, то в сети нет увеличивающих путей, так что добавление петель их не добавит. Во-вторых, смена ориентации каждого ребра, а также замена источника на сток позволяют «перевернуть» максимальный поток, пустив его вдоль каждого ребра в обратном направлении. Такая операция также не добавляет увеличивающих путей, поскольку каждый путь из источника в сток поменял направление, но при этом ни пропускные способности ребер, ни величины потока на этих рёбрах не изменились.

3. Минимальным реберным разрезом в данной сети является реберный разрез, состоящий из ребер (b, t) , (b, c) и (d, c) . Соответствующий этому реберному разрезу максимальный поток в сети показан на рис. 4.29.

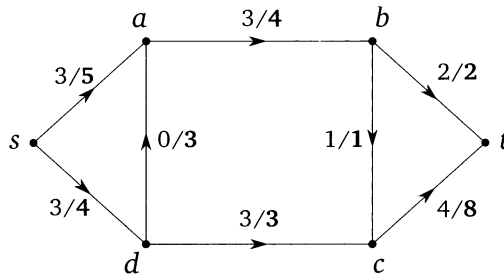


Рис. 4.29

4. Для сведения данной задачи к обычной задаче о потоке в сети нужно добавить еще один дополнительный источник s и еще один дополнительный сток t , а затем соединить s со всеми старыми источниками s_i ребрами (s, s_i) , а также соединить все старые стоки t_j с новым стоком t ребрами (t_j, t) . Наконец, каждому новому ребру нужно добавить пропускную способность, равную бесконечности (рис. 4.30).

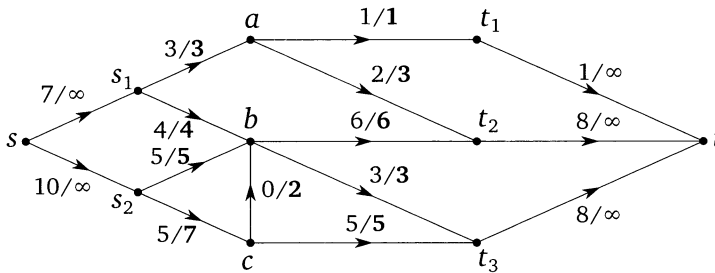


Рис. 4.30

Для сети, показанной на рис. 4.30, минимальным реберным разрезом будет разрез, состоящий из ребер (s_1, a) , (b, t_2) , (b, t_3) и (c, t_3) . Соответствующий этому реберному разрезу максимальный поток в сети показан на рис. 4.29.

5. Остаточные пропускные способности ребер (x_4, x_3) , (x_2, x_3) , (x_2, x_1) после первого шага равны соответственно r^1 , 0 , r^0 . Предположим, что остаточные пропускные способности указанных ребер после $(1 + 4i)$ -го шага равны соответственно r^{2i+1} , 0 и r^{2i} . Проэмулируем работу четырех шагов алгоритма. Мы получим, что соответствующие величины станут равны r^{2i+3} , 0 и r^{2i+2} , а поток увеличится на $2(r^{2i+1} + r^{2i+2})$. Отсюда следует, что величина найденного алгоритмом потока будет, возрастая, стремиться к значению

$$1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} r^i = 1 + \frac{2r}{1-r} = 2 + \sqrt{5}.$$

В то же время легко убедиться, что в сети существует поток величины 5 (вдоль путей (s, x_4, t) ; (s, x_1, t) ; (s, x_2, x_3, t)), что больше чем $2 + \sqrt{5}$.

6. Рассмотрим следующий алгоритм поиска максимального потока в сети, основанный на теореме 8.

1. Инициализация: текущий поток положим равным нулю на всех рёбрах.

2. Итерация: попытаемся найти путь из s в t , все рёбра которого удовлетворяют свойствам (1)–(2), описанным в доказательстве. Если путь не найден, то объявим текущий поток максимальным. Иначе увеличим поток вдоль всех рёбер найденного пути на наибольшую величину, для которой ещё не будут нарушены указанные свойства, после чего повторим итерацию.

Докажем по индукции, что после i -й итерации алгоритма текущий поток f_i будет целочисленным на каждом ребре.

База индукции верна, так как поток инициализируется нулевыми значениями на каждом ребре. Теперь рассмотрим одну итерацию алгоритма, приводящую к увеличению потока. Во время этой итерации будет найден какой-то путь из s в t . Максимальным значением, на которое можно увеличить поток, не нарушив его свойства, является минимум из $\min_i [c(x_i, x_{i+1}) - f(x_i, x_{i+1})]$ и $\min_i f(x_{i+1}, x_i)$. В первом из этих выражений индекс i пробегает по значениям, соответствующим ребрам, по которым мы увеличиваем «попутный» поток, а во втором — по ребрам, в которых мы уменьшаем «встречный» поток. Все эти величины целые по предположению индукции, а значит, и изменение потока на любом ребре будет целочисленным.

Заметим, что каждая итерация увеличивает поток, вытекающий из источника, на величину, не меньшую единицы. Но тогда количество итераций ограничено сверху суммой пропускных способностей всех ребер, выходящих из источника, а значит, алгоритм завершится за конечное число шагов.

Теперь рассмотрим произвольный максимальный поток, полученный в результате работы данного алгоритма. В любой внутренней вершине мы можем заменить ребро e с $f(e) = n$ на n ребер, а затем склеить каждое входящее ребро e с $f(e) = 1$ с некоторым исходящим ребром e' , на котором $f(e') = 1$. В результате мы получим пути из s в t , а также какое-то количество простых циклов. Но любой такой простой цикл мы можем удалить, уменьшив поток f на соответствующих ему ребрах на величину, равную единице, без изменения величины $\text{val}(f)$. В результате удаления всех таких циклов мы и придем к потоку, состоящему из простых путей из s в t .

В случае рациональных значений пропускных способностей обозначим через a наименьший общий знаменатель для всех пропускных способностей ребер. Домножая все пропускные способности на a , мы сводим эту задачу к предыдущей.

7. Построим сеть, моделирующую процесс выбора ученого совета университета. В качестве узлов этой сети выберем все кафедры университета, всех преподавателей университета, а также все три должности, которые преподаватели могут в университете занимать. Добавим к этим узлам источник s и сток t . Соединим источник ребрами единичного веса с каждым из узлов, представляющих отдельную кафедру. Каждый узел, представляющий кафедру, соединим с каждым из узлов, представляющим преподавателя, ребром бесконечной пропускной способности. Каждый из узлов, отвечающих преподавателям, соединим ребром единичного веса с одним из трех узлов, обозна-

чающих должности, которые эти преподаватели могут занимать. Наконец, последние три узла соединим со стоком t ребрами, пропускная способность которых равна $k/3$.

При таком построении сети любая единица потока в этой сети представляет собой одного преподавателя, выбранного в ученый совет. Ребра единичного веса из источника s в узлы, отвечающие кафедрам, гарантируют, что от каждой кафедры в ученый совет войдет не более одного представителя. То, что из узла, представляющего преподавателя, исходит только лишь одно ребро единичной пропускной способности, гарантирует нам, что любой избранный в ученый совет преподаватель будет представлять единственную кафедру. Пропускные способности, равные $k/3$, из узлов, представляющих должности, в сток t этой сети обеспечивают нам равное представительство всех категорий преподавателей в ученом совете. Таким образом, ученый совет требуемого в задаче состава будет избран тогда и только тогда, когда в построенной сети будет существовать поток Q мощности k . В свою очередь, согласно теореме Форда—Фалкерсона требуемый поток существует тогда и только тогда, когда в данной сети существует минимальный разрез, пропускная способность которого равна k .

ГЛАВА 5

Паросочетания в графах

§1. Понятие паросочетания. Теорема Бержа. Независимые множества и покрытия графа

1. Понятие паросочетания является одним из наиболее важных понятий теории графов. Оно встречается в огромном количестве прикладных задач [17].

а. Начнем, как всегда, с определения данного понятия.

Определение 1. Паросочетанием M в произвольном графе G называется любой набор ребер, не имеющих общих концевых вершин.

Замечание 2. Из определения видно, что при изучении паросочетаний нас будут интересовать только лишь простые графы. Действительно, любая петля в мультиграфе соединяет вершину саму с собой и поэтому по определению не может входить ни в какое из паросочетаний. Далее, если одно из ребер мультиграфа, соединяющего пару вершин графа, входит в паросочетание M , то остальные ребра, соединяющие ту же пару вершин, в паросочетание M по определению войти не могут. Поэтому и мультиребра в графе также рассматривать смысла не имеет.

Пример 3. Любое одиночное ребро e в (простом) графе $G \neq \bar{K}_n$ является простейшим примером паросочетания.

Пример 4. На рис. 5.1 показан чуть менее тривиальный пример паросочетания M в полном двудольном графе $K_{3,4}$ (ребра, помеченные жирными линиями на рисунке). Это паросочетание состоит из двух ребер и соединяет (или, как говорят, покрывает) четыре вершины этого графа.

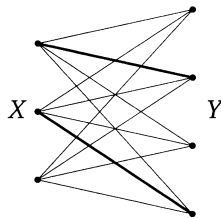


Рис. 5.1

Определение 5. Говорят, что вершина $x \in V(G)$ покрыта паросочетанием M , если она является концом одного из ребер e , входящего в паросочетание M .

б. На практике нам, как правило, хочется покрыть паросочетанием как можно большее количество вершин в графе G . Например, мы можем захотеть для выполнения какого-то задания разбить всех студентов в группе на пары так, чтобы студенты внутри каждой пары имели опыт работы друг с другом. В этом примере все множество студентов можно рассматривать как множество $V(G)$ вершин графа G . Ребро между двумя вершинами проводится в том случае, если соответствующие этим вершинам студенты имели до этого момента опыт совместной работы. Понятно, что если $G \neq \bar{K}_n$, то хотя бы одну такую пару студентов мы как-то сможем найти. Однако нам хотелось бы разбить на пары как можно большее количество студентов, в идеале — всех. На языке теории графов такое идеальное для нас разбиение носит название совершенного паросочетания.

Определение 6. Паросочетание M называется *совершенным*, если оно покрывает все вершины графа G .

В качестве примера рассмотрим граф G , показанный на рис. 5.2(а). Жирными линиями на этом рисунке помечены ребра, образующие паросочетание в представленном графе. Так как эти ребра покрывают все десять вершин графа G , то такое паросочетание является совершенным.

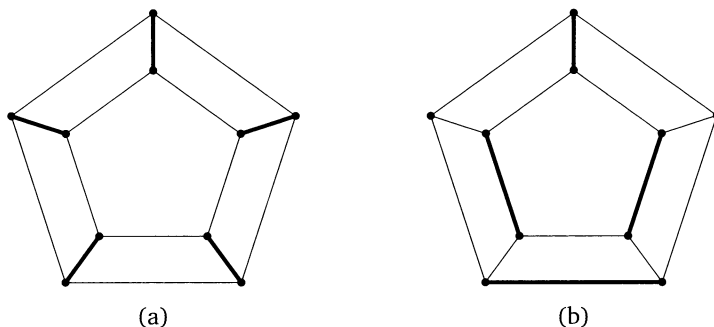


Рис. 5.2. Паросочетания: (а) совершенное; (б) наибольшее по включению

с. Далек не все графы имеют совершенное паросочетание. Так, очевидно, что любое паросочетание M покрывает четное количество вершин в графе G . Поэтому любой граф, построенный на нечетном количестве вершин, совершенного паросочетания не имеет. Для графов, у которых совершенные паросочетания отсутствуют, полезно ввести понятие максимального паросочетания.

Определение 7. *Максимальным паросочетанием* (maximum matching) в графе G называется паросочетание M , размер которого (то есть количество входящих в него ребер) является наибольшим среди всех паросочетаний.

сочетаний в графе G . Количество ребер $|M|$ в таком паросочетании M обозначается обычно через $\alpha'(G)$.

d. Казалось бы, для построения максимального паросочетания в графе можно использовать жадный алгоритм, добавляя случайным образом к M ребра графа до тех пор, пока это возможно. Полученное паросочетание, однако, максимальным может и не оказаться.

В качестве примера на рис. 5.2(b) показано паросочетание M , полученное в результате работы некоторого жадного алгоритма. Оно является *наибольшим по включению* (maximal matching) в том смысле, что добавление к нему любого другого ребра из множества $E(G)$ уже невозможно. Однако количество ребер в M строго меньше $\alpha'(G) = 5$. Максимальное (и одновременно совершенное) паросочетание для такого графа показано на рис. 5.2(a).

2. Итак, мы убедились на приведенном выше примере, что жадный алгоритм дает нам не максимальное, а наибольшее по включению паросочетание. Такое паросочетание иногда может оказаться максимальным, а иногда может таковым и не быть. В принципе, эти соображения могли бы нам позволить построить алгоритм поиска максимального паросочетания в графе, если бы в дополнение к жадному алгоритму у нас был некоторый критерий проверки того или иного графа на максимальность.

a. Действительно, если бы такой критерий существовал, то мы могли бы для произвольного графа G запускать жадный алгоритм, получать с его помощью наибольшее по включению паросочетание, а затем с помощью этого критерия проверять полученное паросочетание на максимальность. В случае, если паросочетание оказывается максимальным, мы останавливаемся. В противном случае мы вновь запускаем жадный алгоритм.

b. Итак, для реализации описанного выше подхода нам необходим критерий максимальности паросочетания. Для того чтобы этот критерий сформулировать, нам понадобятся следующие полезные понятия.

Определение 8. Пусть M — некоторое паросочетание в графе G . Произвольный путь P в графе G , в котором чередуются ребра, входящие в M , и ребра, в M не входящие, называется *M -чередующимся* (рис. 5.3(a)). M -чередующийся путь, оба конца которого не покрыты паросочетанием M , называется *M -дополняющим* путем (рис. 5.3(b)).

Посмотрим теперь повнимательнее на рис. 5.3(b). Заметим, что в M -дополняющем пути P (отмеченном пунктирной ломаной на рис. 5.3(b)) количество ребер, покрытых паросочетанием M , на единицу меньше количества ребер в P , этим паросочетанием не покрытых. Исключим теперь из паросочетания M ребра, входящие в P , и добавим к M ребра этого пути, изначально паросочетанием не покрытые (процесс, известный в англоязычной литературе как matching augmentation). В результате мы получим некоторое новое паросочетание M' , содержащее на единицу большее количество ребер по сравнению с исходным паросочетанием M . Одновременно с этим у нас увеличится количество вершин, покрытых паросочетанием M' . Иными словами, мы показали, что наличие в графе G для заданного паросочетания M -

дополняющего пути является признаком того, что паросочетание M максимальным не является.

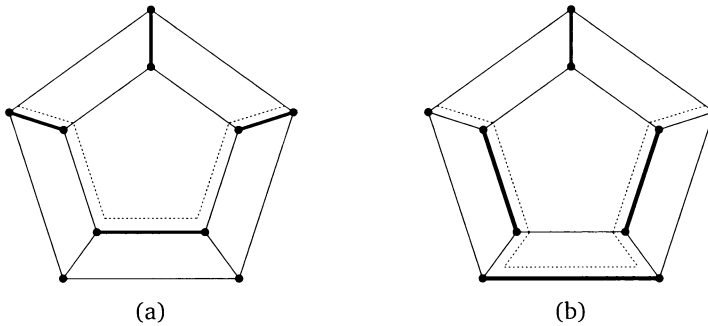


Рис. 5.3. (а) M -чередующийся путь; (б) M -дополняющий путь

с. В 1957 году французский математик Клод Берж (Claude Berge) доказал, что условие отсутствия для заданного паросочетания M в графе M -дополняющего пути является не только необходимым, но и достаточным условием максимальности паросочетания M . Именно, справедлива

Теорема 9 (Берж, 1957). *Паросочетание M в графе G является максимальным тогда и только тогда, когда в таком графе M -дополняющие пути отсутствуют.*

Доказательство. Необходимость этого условия мы уже проверили — мы доказали, что если в графе существует M -дополняющий путь, то паросочетание M максимальным не является. Нам осталось доказать достаточность этого условия. Именно, предположим, что M не является максимальным паросочетанием в графе G . Покажем, что тогда в графе G обязательно найдется M -дополняющий путь.

Обозначим через M' максимальное паросочетание в G (пунктирные ребра на рис. 5.4). Так как паросочетание M максимальным не является, то $|M'| > |M|$. Рассмотрим симметрическую разность $F := M \Delta M'$ этих двух паросочетаний. Так как любая вершина $x \in V(G)$ может быть инцидентна

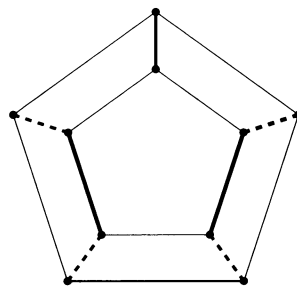


Рис. 5.4

максимум одному ребру из M и максимум одному ребру из M' , то степень любой такой вершины в подграфе H , индуцированном подмножеством ребер F , не превосходит двух. Следовательно, любая компонента связности подграфа H представляет собой путь или цикл, в котором чередуются ребра из M и из M' .

В случае цикла чередование ребер из M и M' , в частности, означает, что любой цикл в H имеет четную длину, а значит, количество ребер из M и M' в любом из циклов одинаково. Следовательно, условие $|M'| > |M|$ означает, что в графе H обязан существовать путь, начальное и конечное ребра которого принадлежат M' . Начальная и конечная вершины такого пути покрыты M' , а значит, не покрыты M . Поэтому данный путь представляет собой M -дополняющий путь в G . \square

3. Наряду с паросочетанием, в теории графов имеется еще целый ряд тесно связанных с ним понятий, к изучению которых мы и перейдем во второй части данного параграфа.

а. Начнем с определения *вершинного покрытия* графа.

Определение 10. *Вершинным покрытием* графа G называется набор вершин, покрывающих все ребра данного графа, то есть, более строго, такое подмножество K множества $V(G)$ вершин графа, что любое ребро $e \in E(G)$ инцидентно по крайней мере одной вершине этого подмножества.

Тривиальным примером вершинного покрытия является все множество $V(G)$ вершин графа G . На рис. 5.5(a) приведен чуть менее тривиальный пример вершинного покрытия — вершины, помеченные белым цветом на рисун-

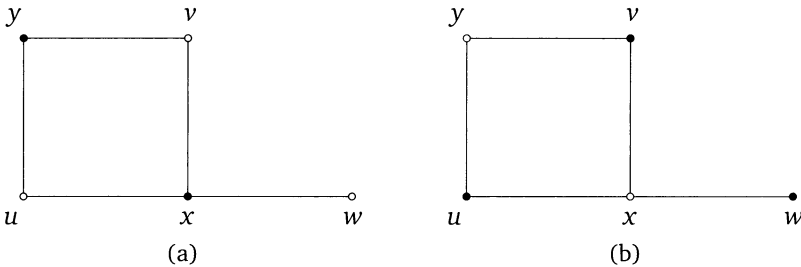


Рис. 5.5

ке, покрывают все ребра нашего графа. Нас же, как правило, будут интересовать вершинные покрытия наименьшего размера — для графа G , показанного на рисунке, таковым является пара вершин, помеченных белым цветом на рис. 5.5(b).

Определение 11. Покрытие K графа G называется *минимальным*, если любое другое покрытие K' имеет размер $|K'|$, больший или равный $|K|$. Количество вершин в минимальном вершинном покрытии обозначается через $\beta(G)$.

Замечание 12. Задача поиска минимального вершинного покрытия имеет довольно наглядную практическую интерпретацию. Предположим, что у нас имеется музей, упрощенный план которого описывается графом G , показанным на рис. 5.5. При этом ребра графа G на этом плане описывают галереи музея, а вершины — проходы между галереями. Дирекция музея хочет так расставить смотрителей в музее, чтобы ими просматривались все галереи музея. Самое простое решение — поставить по смотрителю в каждом проходе. Однако оно, конечно же, оптимальным не является. Решив для этого графа задачу о поиске минимального вершинного покрытия, мы определим минимально необходимое количество $\beta(G)$ смотрителей музея, а также места, в которых эти смотрители должны находиться.

б. Вернемся к задаче поиска максимального паросочетания в графе G . Оказывается, с точки зрения теории экстремальных задач задача поиска минимального вершинного покрытия графа G оказывается двойственной к задаче поиска максимального паросочетания в G . Именно, имеет место следующий результат.

Лемма 13 (слабая двойственность). *В любом графе G размер $|M|$ произвольного паросочетания в G не превосходит количества $|K|$ вершин в произвольном вершинном покрытии графа G . В частности, для любого графа G справедливо неравенство*

$$\alpha'(G) \leq \beta(G). \quad (5.1)$$

Доказательство. Действительно, никакая вершина в графе G не может быть инцидентна двум или более ребрам одного и того же паросочетания M . Следовательно, даже для того, чтобы покрыть все ребра паросочетания M (не говоря уже о всех ребрах графа), нам понадобится по меньшей мере $|M|$ вершин. \square

с. Как обычно, слабая двойственность оказывается крайне полезной для доказательства оптимальности решений двойственных экстремальных задач — если мы в графе G нашли какое-то паросочетание M , размер $|M|$ которого совпал с количеством $|K|$ вершин в некотором вершинном покрытии графа, то отсюда и из леммы сразу следует, что M является максимальным паросочетанием в G , а K — минимальным вершинным покрытием G .

В качестве простейшего примера на рис. 5.6(а) показан цикл C_4 , в котором имеется паросочетание M размером два (жирные ребра), а также вершинное покрытие K размером два (белые вершины на рисунке). Следовательно, для такого графа соответствующее паросочетание M является максимальным, а вершинное покрытие K — минимальным, причем $\beta(C_4) = |K| = 2 = |M| = \alpha'(C_4)$.

В общем случае произвольного графа G равенство $\beta(G) = \alpha'(G)$ выполняется, конечно же, не обязательно. В качестве характерного примера на рис. 5.6(б) показан граф C_5 , для которого $\beta(C_5) = 3$, а $\alpha'(C_5) = 2$. В следующем параграфе мы покажем, что в частном случае двудольных графов равенство $\beta(G) = \alpha'(G)$ выполнено всегда, то есть в этом случае имеет место так называемая сильная двойственность.

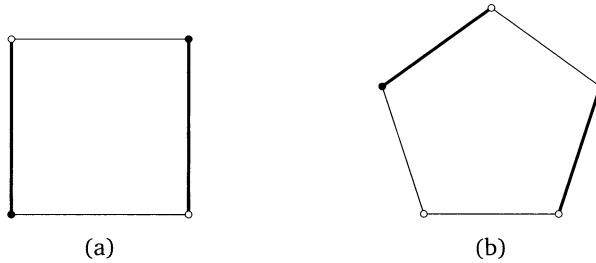


Рис. 5.6

d. Напомним, что под паросочетанием мы понимаем любой набор ребер в графе, не имеющих общих концевых вершин. Иногда паросочетание в графе еще называется *реберно независимым множеством*. Последнее название обычно используется как реберная аналогия еще одного важного понятия — *вершинно независимого множества*.

Определение 14. *Вершинно независимым (или просто независимым) множеством* в графе G называется любой набор S попарно несмежных между собой вершин.

Довольно очевидно, что, выбирая произвольную вершину x в нетривиальном графе G , мы получаем некоторое независимое множество $S = \{x\}$. Нам, однако, часто хочется понять, каков может быть максимальный размер независимого множества S .

Рассмотрим, к примеру, граф G , изображенный на рис. 5.5. Любая вершина такого графа является независимым множеством в G . Независимое же множество S максимального размера состоит из попарно несмежных между собой вершин u , v и w (вершины, помеченные белым цветом на рис. 5.5(a)).

Определение 15. Вершинно независимое множество S называется *максимальным*, если количество $|S'|$ вершин в любом другом вершинно независимом множестве S' меньше или равно $|S|$. Количество вершин в максимальном вершинно независимом множестве графа G иногда называется *числом независимости* (independence number) и обозначается через $\alpha(G)$.

Таким образом, для графа G , показанного на рис. 5.5(a), число независимости $\alpha(G) = 3$.

e. Для графа, показанного на рис. 5.5, достаточно легко убедиться в том, что множество $S = \{u, v, w\}$ действительно является максимальным вершинно независимым множеством. В случае более сложно устроенных графов часто очень непросто понять, действительно ли то или иное подмножество вершин представляет собой вершинно независимое множество максимального размера. Данную ситуацию, однако, часто спасает тот факт, что, как и в случае максимального паросочетания в графе G , для рассматриваемой задачи имеется двойственная к ней экстремальная задача — задача о поиске так называемого минимального реберного покрытия графа.

Определение 16. Реберным покрытием графа G называется набор L ребер, покрывающий все вершины этого графа. Иными словами, любая вершина графа инцидентна одному из ребер, входящих в подмножество $L \subseteq E(G)$.

Как видно из определения, реберное покрытие в графе существует лишь тогда, когда в G отсутствуют изолированные вершины. Другими словами, реберное покрытие существует в случае, когда минимальная степень $\delta(G)$ вершин в графе G строго больше нуля.

Понятно, что все множество $E(G)$ ребер в графе G с $\delta(G) > 0$ является реберным покрытием графа G . Нас, как обычно, будет интересовать минимальный набор ребер, покрывающий все вершины графа.

Определение 17. Реберное покрытие L графа G называется *минимальным*, если размер любого другого реберного покрытия L' графа G больше или равен $|L|$. Размер минимального реберного покрытия графа G обозначается обычно через $\beta'(G)$.

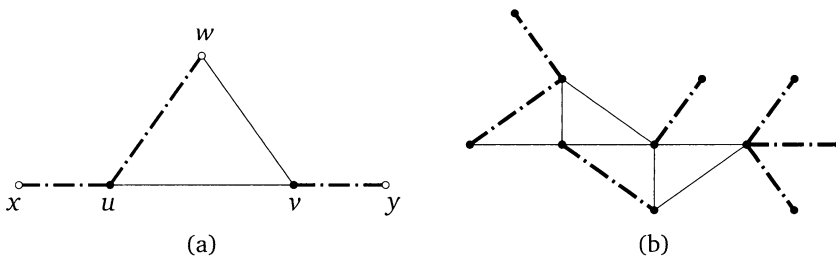


Рис. 5.7

Рассмотрим в качестве примера граф, показанный на рис. 5.7(a). Минимальное реберное покрытие такого графа состоит из трех ребер, отмеченных штрихпунктирными линиями на рисунке. Действительно, ребра $\{x, u\}$ и $\{v, u\}$ нам необходимы, чтобы покрыть два листа нашего графа — вершины x и u . При этом остается непокрытой вершина w , которую можно покрыть, к примеру, ребром $\{u, w\}$. Таким образом, для этого графа $\beta'(G) = 3$.

На рис. 5.7(b) показан чуть более сложный граф G . Утверждается, что размер $\beta'(G)$ минимального реберного покрытия такого графа равен семи. Действительно, пять ребер нужны нам для того, чтобы покрыть пять листьев графа G . Минимальное количество ребер, покрывающих оставшиеся три вершины, равно двум.

f. Вернемся к вершинно независимым множествам и их связи с реберными покрытиями графа.

Лемма 18 (слабая двойственность). В любом графе G с $\delta(G) > 0$ размер $|S|$ произвольного вершинно независимого множества S не превосходит величины $|L|$ произвольного реберного покрытия L графа G . В частности,

$$\alpha(G) \leq \beta'(G). \quad (5.2)$$

Доказательство. Действительно, никакое ребро не может покрывать две вершины, принадлежащие вершинно независимому множеству. Как следствие, любое ребро из L покрывает либо одну, либо ноль вершин из S , так что $|L| \geq |S|$. \square

Используя свойство слабой двойственности, достаточно просто убедиться в том, что найденные в разобранных выше примерах подмножества действительно оптимальны. Так, для графа G , показанного на рис. 5.7(a), мы предъявили вершинно независимое множество $S = \{x, y, w\}$ (белые вершины на рисунке), а также реберное покрытие $L = \{\{x, u\}, \{u, w\}, \{v, y\}\}$ (штрихпунктирные ребра на рисунке). Так как их размеры совпадают, то первое действительно является максимальным вершинно независимым множеством, а второе — минимальным реберным покрытием в G .

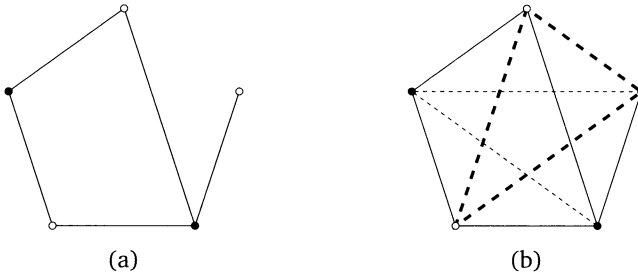


Рис. 5.8

g. Заметим, что любому вершинно независимому множеству в графе G отвечает некоторая клика в дополнении \bar{G} к графу G (см. рис. 5.8). Как следствие, задача поиска максимального независимого множества эквивалентна так называемой задаче о клике — задаче нахождения в заданном графе клики наибольшего размера. Количество вершин в клике максимального размера обозначается обычно через $\omega(G)$. Мы показали, таким образом, что

$$\omega(G) = \alpha(\bar{G}).$$

Задача о клике довольно встречается на практике — например, она возникает в социологии при изучении в некотором сообществе подгруппы людей, каждый человек в которой знает любого другого члена этой подгруппы. Не менее часто встречается на практике и исходная задача — задача о поиске максимального вершинно независимого множества. Все это делает крайне актуальным поиск эффективного алгоритма, позволяющего подобного рода задачи решать. К сожалению, ситуация с эффективными алгоритмами для этих задач складывается даже хуже, чем для задач поиска максимальных паросочетаний в графах.

Заметим прежде всего, что, как и в случае максимального паросочетания, жадный алгоритм в данных задачах также не применим — несложно убедиться, что вместо максимального такой алгоритм дает нам так называемое наибольшее по включению независимое множество.

Определение 19. Вершинно независимое множество S называется *наибольшим по включению*, если при добавлении к нему любой другой вершины x графа G множество $S \cup \{x\}$ перестает быть независимым.

В качестве примера выберем для показанного на рис. 5.5(b) графа G в качестве начальной вершины жадного алгоритма вершину x . Удаляя смежные с ней вершины u , v и w , мы в результате работы алгоритма получаем независимое наибольшее по включению множество $K = \{x, y\}$ вершин, не являющееся максимальным. Несложная оптимизация этого алгоритма, заключающаяся в выборе на каждом шаге вершины с минимально возможной степенью, также не гарантирует получения максимального независимого множества.

В задаче поиска максимального паросочетания ситуацию спасает критерий Бержа существования в графе максимального паросочетания — мы далее покажем, как с его помощью построить довольно эффективные алгоритмы ее решения. Проблема с вершинно независимыми множествами состоит в том, что для них подобного рода простые критерии оптимальности отсутствуют. Следствием этого является тот факт, что с алгоритмической точки зрения задача поиска максимального вершинно независимого множества простых решений не имеет — в семидесятые годы прошлого века было показано, что задача поиска максимального независимого множества (independent set problem) NP -трудна.

4. Мы поняли, как связаны между собой паросочетания (то есть реберно независимые множества) и вершинные покрытия, а также вершинно независимые множества и реберные покрытия. Разберемся теперь с тем, как связаны между собой вершинное покрытие и вершинно независимое множество, а также паросочетание и реберное покрытие.

а. Начнем с вершинно независимого множества и вершинного покрытия. В качестве примера рассмотрим граф G , показанный на рис. 5.5. Его максимальное вершинно независимое множество — это множество $S = \{u, v, w\}$ (рис. 5.5(a)), а минимальное вершинное покрытие — множество $K = \{x, y\}$ (рис. 5.5(b)), являющегося дополнением к S в $V(G)$. Оказывается, этот факт имеет место и в общем случае, причем для любых, а не только оптимальных вершинных независимых множеств и вершинных покрытий. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 20. Подмножество S множества $V(G)$ вершин графа G является независимым тогда и только тогда, когда подмножество $K = V(G) \setminus S$ образует вершинное покрытие графа G .

Доказательство. По определению S является независимым в случае, когда никакие две вершины из S не соединены ребром. Иными словами, если один из двух концов некоторого ребра $e \in E(G)$ входит в вершину подмножества S , то второй конец этого ребра обязан входить в вершину, принадлежащую $K = V(G) \setminus S$. Если же ребро e не является инцидентным ни одной вершине подмножества S , то оно тем более обязано быть инцидентным каким-то вершинам множества K . Иными словами, любое ребро графа G обязано

быть инцидентным хотя бы одной вершине множества K . Но это и означает, что K образует вершинное покрытие графа G .

Обратно, предположим, что у нас имеется какое-то вершинное покрытие K . Это означает, в частности, что в графе не существует ребра, оба конца которого не покрыты вершинами из K . Следовательно, вершины из $V(G) \setminus K$ покрывают не более одной вершины каждого ребра, то есть образуют вершинно независимое множество. \square

Следствие 21. Для любого графа G справедливо равенство

$$\alpha(G) + \beta(G) = n = |V(G)|. \quad (5.3)$$

Доказательство. Пусть S — максимальное независимое множество графа G , $|S| = \alpha(G)$. По теореме (20) $V(G) \setminus S$ образует какое-то (может быть, и не минимальное) вершинное покрытие K графа G . Как следствие,

$$n = \alpha(G) + |K| \geq \alpha(G) + \beta(G).$$

Аналогично, пусть K есть минимальное вершинное покрытие графа G , $|K| = \beta(G)$. По теореме (20) $V(G) \setminus K$ представляет собой какое-то (может быть, и не максимальное) независимое множество S графа G . Поэтому

$$n = \beta(G) + |S| \leq \beta(G) + \alpha(G).$$

Из полученных неравенств следует, что $\alpha(G) + \beta(G) = n$. \square

б. Давайте теперь попытаемся разобраться с реберными покрытиями и паросочетаниями. В случае вершинного покрытия и вершинно независимого множества мы доказали, что дополнение к любому вершинному покрытию обязано являться вершинно независимым множеством и наоборот. Несложно убедиться, что в случае ребер аналогичный факт места не имеет.

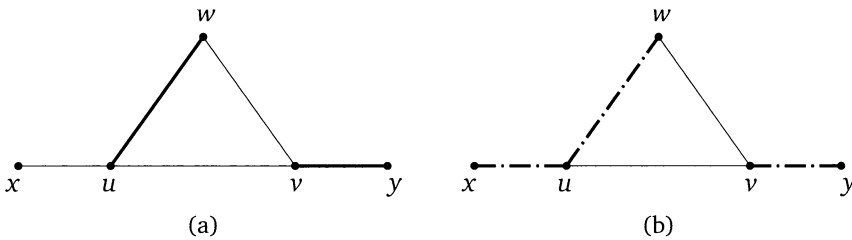


Рис. 5.9

В качестве примера рассмотрим граф G , показанный на рис. 5.9. Набор ребер $M = \{\{u, w\}, \{v, y\}\}$ образует паросочетание, то есть представляет собой реберно независимое множество (жирные ребра на рис. 5.9(a)), однако его дополнение — набор ребер $E(G) \setminus M = \{\{x, y\}, \{u, v\}, \{v, w\}\}$ — реберным покрытием G не является (вершина u остается не покрытой этим набором). Обратно, набор ребер $L = \{\{x, u\}, \{u, w\}, \{v, y\}\}$ образует реберное покрытие графа G (штрихпунктирные ребра на рис. 5.9(b)), однако дополнение к нему — набор ребер $E(G) \setminus L = \{\{u, v\}, \{v, w\}\}$ — паросочетания в графе G не образует.

Несмотря на это, числа $\alpha'(G)$ и $\beta'(G)$ связаны между собой — оказывается, сумма этих чисел равна количеству $|V(G)|$ вершин графа G .

Теорема 22 (Галлаи, 1959). Для любого графа G с $\delta(G) > 0$ справедливо равенство

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = n, \quad (5.4)$$

где $n = |V(G)|$ — количество вершин в графе G .

с. Прежде чем доказывать теорему Галлаи, исследуем структуру остовного подграфа $H = (V(G), L)$, индуцированного ребрами минимального реберного покрытия L (рис. 5.7).

Как видно из рис. 5.7(b), подграф H состоит из нескольких связных компонент, каждая из которых представляет собой некоторое дерево. Оказывается, это дерево имеет специальный вид, а именно представляет собой звезду — дерево, в котором лишь одна вершина может иметь степень, большую единицы (рис. 5.10(a)). Докажем все эти утверждения строго.

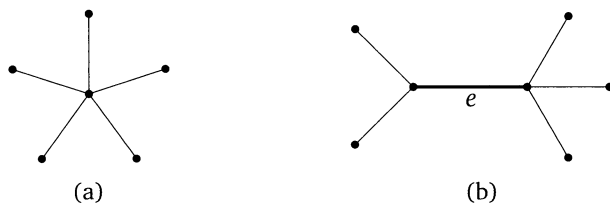


Рис. 5.10

Лемма 23. Остовный подграф H , порожденный набором ребер, входящих в минимальное реберное покрытие L графа G , является объединением связных компонент, каждая из которых представляет собой звезду.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что в H циклов быть не должно, — в противном случае мы бы могли всегда разорвать цикл, убрав одно из ребер $e \in C$, при этом покрытие вершин $V(C)$ оставшимися ребрами не нарушится. Следовательно, H представляет собой остовный лес графа G .

Теперь предположим, что в остовном подграфе H нашлось ребро e , обе инцидентные вершины которого имеют степени, большие единицы (см. рис. 5.10(b)). В этом случае мы всегда можем удалить такое ребро, не нарушив покрытия ребрами остовного подграфа $H - e$ всех вершин графа G . Продолжая описанный процесс до тех пор, пока у нас не закончатся подобные ребра, мы получим лес, каждая связная компонента которого представляет собой звезду. \square

d. Приступим теперь к доказательству теоремы Галлаи. Пусть M — некоторое максимальное паросочетание в графе G , $|M| = \alpha'(G)$ (жирные ребра на рис. 5.9(a)). Так как каждое ребро паросочетания покрывает две различные вершины графа G , то общее количество вершин, покрытых паросочетанием M , равно $2|M| = 2\alpha'(G)$.

Обозначим через U подмножество множества $V(G)$ вершин графа G , не покрытых этим паросочетанием (вершина x на рис. 5.9(a)). Размер этого подмножества равен, очевидно, $n - 2\alpha'(G)$, где $n = |V(G)|$. Так как $\delta(G) > 0$, то из каждой вершины подмножества U исходит хотя бы одно ребро (ребро $\{x, u\}$ на рис. 5.9(a)). Выберем тогда по одному ребру, исходящему из каждой вершины подмножества U , и сформируем из них подмножество F множества $E(G)$ ребер графа G . Размер подмножества F совпадает с размером подмножества U и равен $n - 2\alpha'(G)$.

Заметим теперь, что подмножество $M \cup F$ множества $E(G)$ ребер графа G покрывает все вершины нашего графа. Подсчитаем количество ребер, входящих в подмножество $M \cup F$:

$$|M \cup F| = |M| + |F| = \alpha'(G) + n - 2\alpha'(G) = n - \alpha'(G).$$

Размер подмножества $M \cup F$, как и размер любого реберного покрытия, больше или равен размеру $\beta'(G)$ минимального реберного покрытия L графа G , поэтому

$$n - \alpha'(G) \geq \beta'(G) \Rightarrow n \geq \alpha'(G) + \beta'(G).$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно доказать обратное неравенство.

Для этого рассмотрим некоторое минимальное реберное покрытие L графа G , $|L| = \beta'(G)$ (жирные сплошные или штрихпунктирные ребра на рис. 5.11(a)). Мы знаем, что любая компонента связности остовного подграфа H , построенного на ребрах подмножества L , представляет собой звезду. Давайте теперь построим в остовном подграфе H максимальное паросочетание M (жирные ребра на рис. 5.11(a)). Так как в графе «звезда» максимальное паросочетание состоит из единственного ребра, соединяющего центр звезды с одной из концевых ее вершин, то любая компонента связности остовного подграфа H покрывается только лишь одним ребром из M . Следовательно, размер $|M|$ паросочетания M совпадает с количеством центров звезд (белые вершины на рис. 5.11(b)), а значит, и с количеством компонент связности остовного подграфа H .

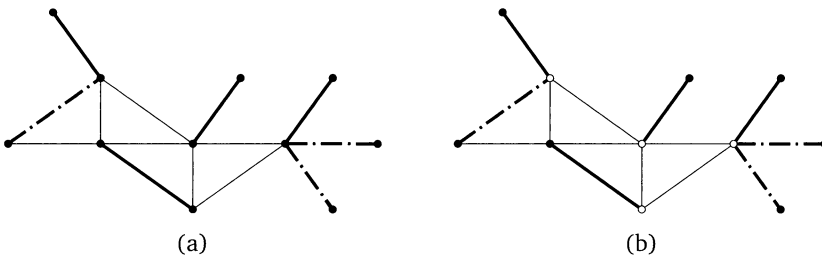


Рис. 5.11

Теперь заметим, что количество концевых вершин каждой звезды в точности совпадает с общим количеством ребер в звезде. Следовательно, количество вершин, не являющихся центрами звезд (черные вершины на рис.

5.11(b)), равно общему количеству $|L| = \beta'(G)$ ребер в минимальном реберном покрытии графа G (ребра, отмеченные жирными сплошными и жирными штрихпунктирными линиями на рис. 5.11(b)). Общее же количество $n = |V(G)|$ вершин в графе G , таким образом, равно

$$n = |M| + |L| = |M| + \beta'(G).$$

Но M — это некоторое паросочетание не только в графе H , но и в исходном графе G , поэтому его размер меньше или равен размеру $\alpha'(G)$ максимального паросочетания в графе G . Следовательно,

$$n = |M| + \beta'(G) \leq \alpha'(G) + \beta'(G).$$

Сравнивая это неравенство с доказанным выше неравенством $n \geq \alpha'(G) + \beta'(G)$, мы и получаем требуемый результат. \square

Упражнения

1 (0,5 балла). Найдите количество совершенных паросочетаний в полном графе на четном числе вершин.

2 (0,5 балла). Подсчитайте количество совершенных паросочетаний у дерева на n вершинах.

3 (0,5 балла). Найдите количество совершенных паросочетаний в колесе W_n .

4 (1 балл). Подсчитайте количество совершенных паросочетаний в полном двудольном графе $K_{n,n}$. Как изменится ответ для графа $K_{n,n}$, в котором удалили ребра, входящие в одно из совершенных паросочетаний?

5 (1 балл). Пусть S — подмножество множества $V(G)$ вершин графа G , покрытое некоторым паросочетанием M . Докажите, что некоторое максимальное паросочетание также покрывает все вершины этого множества. Верно ли, что данный факт будет выполняться для любого максимального паросочетания?

6 (1 балл). Пусть M и M' — два паросочетания в графе G . Опишите структуру их симметрической разности $M \Delta M'$. Как изменится эта структура в случае, если паросочетания M и M' максимальны или совершенны?

7 (1 балл). Подсчитайте количество совершенных паросочетаний у дерева на n вершинах, используя результаты предыдущего утверждения.

8 (1 балл). Найдите минимальный пример двудольного графа, в котором существует паросочетание, наибольшее по включению, не являющееся максимальным.

9 (1 балл). Определите числа $\alpha(G)$, $\alpha'(G)$, $\beta(G)$ и $\beta'(G)$ для графа $G = K_n$.

10 (1 балл). Определите числа $\alpha(G)$, $\alpha'(G)$, $\beta(G)$ и $\beta'(G)$ для графа $G = K_{n,m}$, $n \leq m$.

11 (1 балл). Охарактеризуйте графы, в которых один из четырех параметров $\alpha(G)$, $\beta(G)$, $\alpha'(G)$, $\beta'(G)$ равен единице.

12 (1 балл). Определите числа $\alpha(G)$, $\alpha'(G)$, $\beta(G)$ и $\beta'(G)$ для графа Хершеля (рис. 5.12(a)).

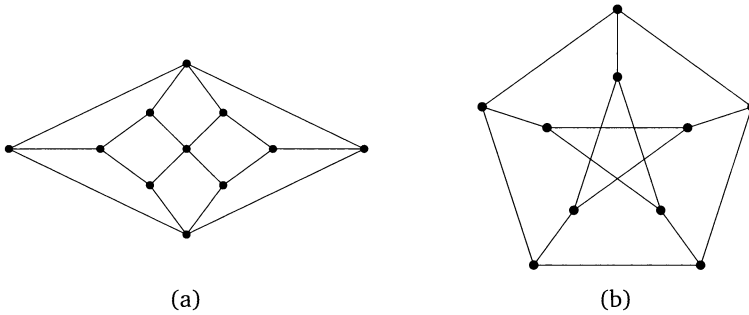


Рис. 5.12

13 (1,5 балла). Определите числа $\alpha(G)$, $\alpha'(G)$, $\beta(G)$ и $\beta'(G)$ для графа Петерсена (рис. 5.12(b)).

Дополнительные упражнения

14 (1,5 балла). Пусть M и N — два паросочетания в графе G , для которых $|N| > |M|$. Докажите, что существуют такие паросочетания M' и N' , что $|M'| = |M| + 1$, $|N'| = |N| - 1$, $M' \cup N' = M \cup N$ и $M' \cap N' = M \cap N$.

15 (1,5 балла). Определите минимальный размер наибольшего по включению паросочетания в простом цикле C_{11} , построенном на одиннадцати вершинах. Чему будет равен этот размер в случае произвольного простого цикла C_n ?

16 (1,5 балла). Рассмотрим следующую игру на графе G : два игрока поочередно выбирают вершины x_1, x_2, \dots, x_n графа так, чтобы вершина x_{i+1} была смежной с вершиной x_i ; тот из игроков, кто не сможет выбрать новую вершину по этим правилам, проигрывает. Докажите, что первый игрок имеет выигрышную стратегию тогда и только тогда, когда в G отсутствует совершенное паросочетание.

17 (1,5 балла). Докажите, что для любого наибольшего по включению паросочетания M в графе G выполняется неравенство $2|M| \geq \beta(G)$. Заметим, что с учетом слабой оптимальности (5.1) отсюда следует справедливость следующих неравенств:

$$\alpha'(G) \leq \beta(G) \leq 2\alpha'(G).$$

18 (1,5 балла). Докажите, что для любого графа G без изолированных вершин (то есть для любого графа G с $\delta(G) > 0$) справедливо неравенство $\alpha(G) \cdot \delta(G) \leq m$, где m — количество ребер в графе G .

19 (1,5 балла). Докажите, что для любого простого нетривиального графа G справедливо неравенство

$$\alpha(G) \leq n - m/\Delta(G),$$

где n — количество вершин, а m — количество ребер в графе G . Покажите, что в случае регулярного графа отсюда следует, что $\alpha(G) \leq n/2$.

20 (1,5 балла). Покажите, что для любого двудольного графа $G[X, Y]$ $\alpha(G) \cdot \beta(G) \geq |E(G)|$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда граф является полным двудольным графом $K_{n,m}$.

21 (1,5 балла). Докажите, что граф G является двудольным тогда и только тогда, когда любой подграф $H \leq G$ имеет вершинно независимое множество S , размер $|S|$ которого больше или равен $|V(H)|/2$.

22 (1,5 балла). Докажите, что для любого графа G справедливо неравенство

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{\Delta(G) + 1},$$

где $n = |V(G)|$, $\Delta(G)$ — максимальная из степеней вершин в графе G .

23 (2,5 балла). Докажите, что для любого графа G справедливо неравенство

$$\alpha(G) \geq \sum_{x \in V(G)} \frac{1}{\deg(x) + 1}.$$

24 (2,5 балла). Докажите, что для любого простого графа G , для которого $|V(G)| = n \geq 2\delta(G)$, где $\delta(G)$ — минимальная степень вершины в G , справедливо неравенство

$$\alpha'(G) \geq \delta(G).$$

Решение упражнений

1. Таких паросочетаний в полном графе K_{2n} ровно $(2n - 1)!!$ штук. Действительно, вершину x мы можем соединить ребром с любой другой вершиной полного графа. Следовательно, имеется $2n - 1$ способ выбрать ребро, соединяющее вершину x с любой другой отличной от нее вершиной полного графа K_{2n} . В оставшемся графе возьмем любую пока еще не покрытую паросочетанием вершину y . Ее мы можем соединить ребром с любой из оставшихся $2n - 3$ вершин, не покрытых строящимся паросочетанием. Продолжая далее, мы получим, что количество совершенных паросочетаний равно

$$(2n - 1) \cdot (2n - 3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 = (2n - 1)!!.$$

2. Дерево T может либо иметь лишь одно совершенное паросочетание, либо не иметь таких паросочетаний вообще. Данный факт можно доказать конструктивно. Именно, любое дерево имеет по крайней мере один лист — вершину x степени $\deg(x) = 1$. Этот лист связан ребром с некоторой вершиной y . Если вершина y связана еще с какими-то листьями дерева, то в графе T совершенное паросочетание отсутствует. В противном случае добавим ребро $\{x, y\}$ в паросочетание M , удалим эти две вершины и продолжим описанный выше процесс. В результате мы либо получим совершенное паросочетание, покрывающее все вершины графа, либо покажем, что такое паросочетание в графе T отсутствует.

3. Количество совершенных паросочетаний в колесе W_n равно n в случае нечетного n . Действительно, выбирая в качестве ребра совершенного паросочетания одну из n «спиц» этого колеса, мы остальные ребра паросочетания

выбираем однозначно. В случае четного n совершенных паросочетаний в W_n не существует.

4. Любая биекция $f: X \rightarrow Y$ задает некоторое совершенное паросочетание в полном двудольном графе $K_{n,n}$. Так как существует $n!$ взаимно однозначных отображений из X в Y , то существует и $n!$ различных совершенных паросочетаний в графе $K_{n,n}$.

Удалим из графа $K_{n,n}$ одно из совершенных паросочетаний. Покажем, что количество D_n совершенных паросочетаний в полученном после удаления этого паросочетания графе $G[X, Y]$ совпадает с числом беспорядков и рассчитывается с помощью рекуррентного соотношения

$$D_n = (n-1) \cdot (D_{n-1} + D_{n-2}), \quad n > 2; \quad D_1 = 0, \quad D_2 = 1.$$

Действительно, рассмотрим вначале совершенные паросочетания в графе G , которые содержат ребра (x_1, y_k) и (x_k, y_1) . Для любого $k = 2, \dots, n$ в графе G имеется D_{n-2} совершенных паросочетаний такого типа. Теперь рассмотрим паросочетания, которые содержат ребро (x_k, y_1) , но не содержат ребро (x_1, y_k) . Для любого $k = 2, \dots, n$ имеется D_{n-1} таких паросочетаний.

5. Предположим, что M покрывает вершины множества S . Из этого паросочетания мы можем построить максимальное паросочетание M' , постепенно увеличивая M -чередующиеся пути. При этом ни одна из вершин множества S не перестанет быть покрыта новым паросочетанием M' . Для произвольного же максимального паросочетания это неверно — мы в цикле C_n нечетной длины $n \geq 5$ всегда можем выбрать вершину, покрытую каким-то паросочетанием M , но не покрытую максимальным паросочетанием M' .

6. Граф $H = M \Delta M'$ является остовным подграфом исходного графа G . Любая вершина графа H имеет степень, равную единице или двойке. Как следствие, такой граф состоит из простых путей и/или простых циклов, не пересекающихся друг с другом ни в одной вершине графа G . При этом любой простой цикл должен иметь четную длину. Действительно, в циклах нечетной длины имеется вершина, инцидентная либо паре ребер из M , либо паре ребер из M' , а этого не может быть по определению паросочетания.

В случае, когда M и M' являются максимальными паросочетаниями, любые пути также обязаны иметь четную длину. Это следует из теоремы Берга — путь нечетной длины обязан заканчиваться ребрами, принадлежащими либо только паросочетанию M , либо только M' . Но тогда в графе найдется M - или M' -дополняющий путь, что противоречит тому, что M и M' максимальны.

Наконец, в случае, когда M и M' являются различными совершенными паросочетаниями, симметрическая разность $M \Delta M'$ обязана состоять только лишь из циклов. Действительно, любой путь должен иметь концевую вершину, которая окажется покрытой либо ребром из M , либо ребром из M' . Но тогда она останется не покрытой ребрами другого паросочетания, что противоречит определению совершенного паросочетания.

7. Если в графе G имеется два различных совершенных паросочетания M и M' , то в нем обязан существовать остовный подграф $H = M \Delta M'$, представляющий собой один или несколько не пересекающихся между собой циклов.

В дереве же, как мы знаем, циклы отсутствуют. Как следствие, количество совершенных паросочетаний в дереве равно нулю или единице.

8. В двудольных графах, построенных на двух и трех вершинах, любое наибольшее по включению паросочетание является одновременно и максимальным. Минимальный пример наибольшего по включению паросочетания, не являющегося максимальным, в двудольном графе дает путь P_4 на четырех вершинах, соединённых тремя рёбрами в цепочку. Паросочетание, состоящее из центрального ребра, наибольшее по включению. Однако, взяв два крайних ребра, можно построить паросочетание большей мощности.

9. В полном графе любая вершина смежна с любой другой вершиной, поэтому $\alpha(K_n) = 1$. При этом $\beta(K_n) = n - 1$: все ребра графа инцидентны $n - 1$ вершине. Уменьшить же это количество мы не сможем — если бы количество вершин было меньше $n - 1$, то нашлись бы две смежные вершины, не входящие в вершинное покрытие. Тогда соединяющее их ребро осталось бы не покрытым этим вершинным покрытием.

Далее, в полном графе на $2m$ вершинах существует совершенное паросочетание, так что в нем $\alpha'(K_{2m}) = m$. В случае полного графа на $2m + 1$ вершине мы имеем $\alpha'(K_{2m+1}) = 2m$. Следовательно, $\alpha'(K_n) = \lfloor n/2 \rfloor$. Как следствие, $\beta'(K_n) = \lceil n/2 \rceil$ — в качестве минимального реберного покрытия мы можем взять совершенное паросочетание в случае $n = 2m$ и совершенное паросочетание плюс одно ребро в случае $n = 2m + 1$.

10. В полном двудольном графе любая вершина первой доли смежна с любой вершиной второй доли. Поэтому $\alpha(K_{m,n}) = \max\{m, n\}$, тогда как $\beta(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$. Действительно, максимальный набор попарно несмежных ребер совпадает с количеством вершин в наибольшей из долей такого графа. Минимальный же набор вершин, покрывающий все ребра, совпадает с количеством вершин в наименьшей из долей — все ребра графа инцидентны этим вершинам.

Далее, в полном двудольном графе размер максимального паросочетания, очевидно, равен $\min\{m, n\}$, а размер минимального реберного покрытия равен $\max\{m, n\}$.

11. При фиксированном n единственный граф с $\alpha(G) = 1$ — это полный граф K_n : в таком графе любая пара вершин смежна, и поэтому минимальное количество несмежных между собой вершин равно единице. Граф с $\beta(G) = 1$ — это звезда: центр звезды покрывает все ребра графа.

Покажем теперь, что $\alpha'(G) = 1$ в случае, если G — звезда или треугольник. Действительно, пусть x — вершина максимальной степени. Если все остальные вершины смежны с ней, то G есть звезда. В противном случае любое ребро, не являющееся инцидентным с x , должно иметь концевые вершины, смежные с x . Так как у ребра только две вершины, то $\deg(x) = 2$, то есть G — треугольник.

Наконец, $\beta'(G) = 1$ в случае, если $G = K_2$. Действительно, любое ребро покрывает только две вершины. Как следствие, требование $\beta'(G) = 1$ влечет за собой требование $n(G) = 2$.

12. Жирными линиями на рис. 5.13(a) отмечены пять ребер паросочетания M , а белым цветом — пять вершин в вершинном покрытии графа G .

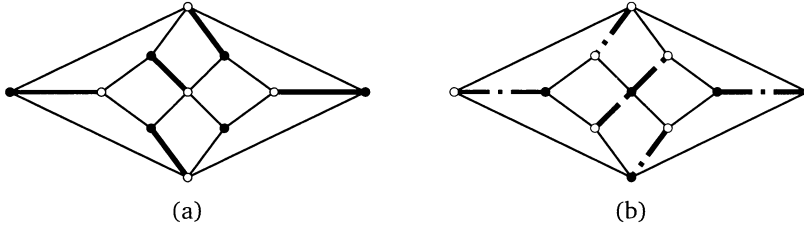


Рис. 5.13

В силу слабой двойственности $\alpha'(G) \leq \beta(G)$ последнее означает, что $\alpha'(G) = 5$ и $\beta(G) = 5$.

Аналогично на рис. 5.13(b) белым цветом помечены шесть вершин вершинно независимого множества, а жирными штрихпунктирными линиями показаны шесть ребер реберного покрытия графа G . В силу слабой двойственности $\alpha(G) \leq \beta'(G)$ это означает, что $\alpha(G) = \beta'(G) = 6$.

13. Для графа Петерсена $\beta(G) = 6$. Для доказательства заметим, что подграфы, индуцированные пятью внешними вершинами и пятью внутренними вершинами, являются циклами C_5 . Мы знаем, что $\beta(C_5) = 3$. Следовательно, по меньшей мере три вершины внешнего цикла и три вершины внутреннего цикла должны быть включены в минимальное вершинное покрытие графа. Как следствие, $\beta(G) = 6$, а $\alpha(G) = n - \beta(G) = 4$.

Далее, в графе Петерсена существует совершенное паросочетание, состоящее из пяти ребер. Следовательно, $\alpha'(G) = \beta'(G) = 5$.

§ 2. Паросочетания в двудольных графах.

Алгоритм Куна поиска максимального паросочетания в двудольном графе

1. Как правило, большая часть задач, встречающихся на практике и сводящихся к поиску паросочетания в графе, связана с поиском максимального паросочетания в двудольном графе. Приведем характерный пример такого рода задач.

Пусть в группе имеется m студентов, которых необходимо распределить по n компаниям на летнюю практику. Для моделирования этой задачи распределения мы можем ввести двудольный граф G , блоки X и Y которого содержат m и n вершин соответственно. Любые две вершины $x \in X$ и $y \in Y$ этого графа соединяются ребром в случае, если квалификация студента удовлетворяет данную компанию, а сама компания, в свою очередь, устраивает данного студента. На рис. 5.14(a) в качестве примера изображен полный двудольный граф $K_{3,4}$, моделирующий некоторую идеальную ситуацию, при которой любой студент готов пройти практику в любой компании, а любая компания, в свою очередь, готова принять на практику любого студента. Если же какой-то студент не готов пойти в ту или иную компанию, или компа-

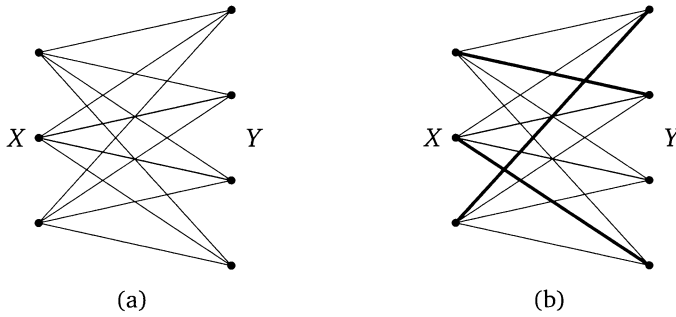


Рис. 5.14

ния не готова пригласить того или иного студента на практику, мы получим некоторый подграф данного полного двудольного графа.

Предположим теперь, что в каждую компанию мы можем устроить только лишь одного студента. Последнее условие означает, что задача распределения студентов по летним практикам сводится к задаче поиска максимального паросочетания в построенном двудольном графе (см. рис. 5.14(b), на котором жирными ребрами показано некоторое решение данной задачи).

2. Доказанная в первом параграфе теорема Бержа позволяет строить достаточно эффективные алгоритмы нахождения максимального паросочетания в двудольных графах. Мы опишем простейший из них — так называемый алгоритм Куна.

а. В качестве первого шага описываемого алгоритма построим в графе $G[X, Y]$, $|X| \leq |Y|$, произвольное паросочетание M (см. рис. 5.15(a)). Для этого мы можем, например, перебрать все вершины $x_i \in X$ и добавить к M ребро $\{x_i, y_j\}$ в случае, если вершина y_j еще не покрыта паросочетанием M (см. ребра, отмеченные жирными линиями на рис. 5.15(a)). Если при этом все вершины x_i оказались покрытыми паросочетанием M , то мы на этом работу алгоритма прекращаем.

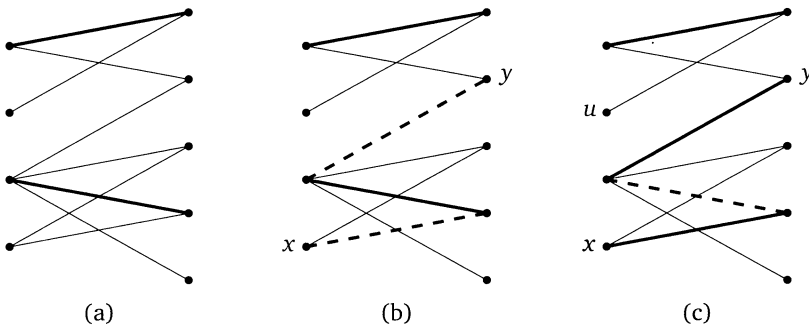


Рис. 5.15

В противном случае мы выбираем произвольную вершину $x \in X$, еще не покрытую паросочетанием M , и запускаем из x поиск в глубину, строя из этой вершины M -чередующиеся пути (см. рис. 5.15(b)). В случае, если хотя бы один из строящихся путей P в какой-то момент окажется M -дополняющим (путь $P = (x, y)$ на рис. 5.15(b)), мы останавливаем поиск в глубину, меняем ребра этого пути, покрытые паросочетанием M , на непокрытые им (то есть вместо M рассматриваем паросочетание $M' = M \Delta E(P)$) и добавляем их в строящееся паросочетание (рис. 5.15(c)). В противном случае переходим к следующей еще не покрытой паросочетанием M вершине $x' \in X$.

б. Наша следующая задача — убедиться в корректности описанного выше алгоритма, а именно доказать, что по окончании его работы мы действительно получим максимальное паросочетание M в двудольном графе $G[X, Y]$. На основании леммы 13 нам достаточно предъявить для этого некоторое вершинное покрытие K , размер которого совпадает с количеством ребер в M . Как мы уже отмечали в первом параграфе, в общем случае это удастся сделать не всегда. Оказывается, однако, в двудольном графе такое вершинное покрытие обязательно найдется. Гарантирует этот факт следующая теорема.

Теорема 1 (сильная двойственность; Кёниг, 1931; Эгервари, 1931). *В любом двудольном графе G количество $\alpha'(G)$ ребер в максимальном паросочетании равно количеству $\beta(G)$ вершин в минимальном вершинном покрытии графа G .*

Доказательство легче всего провести, используя вершинную теорему Менгера. Именно, добавим к вершинам графа $G[X, Y]$ две дополнительные вершины x и y и соединим с x все вершины блока X , а с y — все вершины блока Y (рис. 5.16). Заметим, что в полученном графе G' любое подмножество S множества $V(G')$ вершин разделяет вершины x и y тогда и только тогда, когда это же подмножество покрывает все ребра исходного графа $G[X, Y]$ (белые вершины на рисунке). Кроме того, любое множество путей в графе G' , соединяющих вершины x и y и не имеющих общих внутренних вершин, образует некоторое паросочетание в графе $G[X, Y]$ (жирные ребра на рисунке). Верно и обратное: любое паросочетание M в G может быть продолжено до путей, соединяющих в графе G' вершины x и y и не имеющих общих внутренних вершин. Теперь для доказательства равенства $\alpha'(G) = \beta(G)$ достаточно сослаться на вершинную теорему Менгера. \square

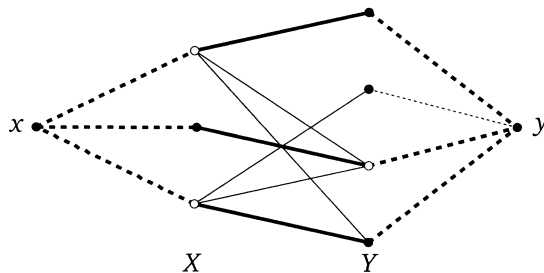


Рис. 5.16

с. Вернемся к алгоритму Куна поиска максимального паросочетания M в двудольном графе $G[X, Y]$.

Утверждение 2. В $G[X, Y]$ найдется вершинное покрытие K , величина которого равна $|M|$, где M — полученное в результате работы алгоритма Куна паросочетание.

Доказательство. Обозначим через U подмножество вершин из X , не покрытых паросочетанием M (вершина x_2 на рис. 5.17), а через Z — подмножество всех вершин графа G , связанных M -чередующимися путями с вершинами из U (вершины x_2, y_2, x_4, y_4, x_5 на рис. 5.17). Пусть $S = Z \cap X, T = Z \cap Y$, а $K = (X \setminus S) \cup T$ (вершины подмножества K помечены белым цветом на рис. 5.17). Покажем, что K представляет собой вершинное покрытие графа G .

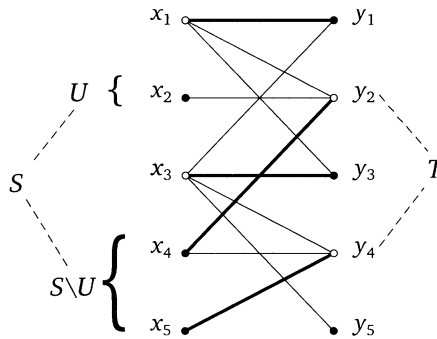


Рис. 5.17

Действительно, все ребра, исходящие из $X \setminus S$, покрыты вершинами из K . Нам остается убедиться, что все ребра, исходящие из S , также покрыты вершинами из K . Понятно, что все ребра, исходящие из S в T , вершинами из K покрыты. Мы докажем требуемое, если поймем, что ребра из S в $Y \setminus T$ отсутствуют. Предположим противное, а именно предположим, что у нас имеется какое-то ребро из вершины $x \in S$ в вершину $y \in Y \setminus T$. Заметим прежде всего, что такое ребро не может принадлежать M . Действительно, вершины подмножества U ребрами из M не могут быть покрыты по определению U , а вершины из $S \setminus U$ покрыты ребрами из M , которые соединяют их с вершинами из T , а значит, другие ребра, принадлежащие M , из этих вершин выходить не могут. Следовательно, из x выходит ребро $e \notin M$. Но тогда, дойдя до вершины x , алгоритм поиска в глубину прошел бы по e и занес бы вершину y в подмножество T , а это противоречит тому, что $y \in Y \setminus U$.

Теперь сосчитаем количество вершин в K . Заметим для этого, что и вершины из $X \setminus S$, и вершины из T покрыты ребрами паросочетания M . Так как любая вершина из T соединена с какой-то вершиной из S ребром, принадлежащим M , то никакое ребро из M не может соединять вершину из T с вершиной из $X \setminus S$. Как следствие, количество ребер в M больше или равно $|K|$. С учетом леммы 13 мы и получаем, что $|K| = |M|$. \square

Замечание 3. Доказательство корректности алгоритма Куна является, по сути, еще одним, независимым доказательством теоремы Кёнига—Эгервари.

d. Итак, в результате работы алгоритма Куна мы получаем максимальное паросочетание M в двудольном графе $G[X, Y]$, которое покрывает $|M|$ вершин как в X , так и в Y .

Определение 4. Паросочетание M в двудольном графе $G[X, Y]$ называется X -насыщенным, если любая вершина из блока X покрыта этим паросочетанием.

Предположим, что построенное нами паросочетание X -насыщенным не является. Это означает, что в X существует некоторое подмножество $U \subset X$ вершин, не покрытых паросочетанием M . Рассмотрим произвольную вершину $x \in U$. В процессе работы алгоритма Куна мы построили M -чередующееся дерево с корнем в вершине x . Давайте поговорим про это дерево немного подробнее.

Характерный пример такого дерева показан на рис. 5.18. Белым цветом на этом рисунке помечены вершины, принадлежащие доле X , а черным цветом — вершины, принадлежащие Y . Ребра, входящие в паросочетание M , отмечены жирными линиями. Так как любой M -чередующийся путь, исходящий из x , обязан заканчиваться в вершинах доли X , то листьями M -чередующегося дерева являются вершины, окрашенные в белый цвет. Наконец, ребра паросочетания, входящие в дерево, устанавливают взаимно однозначное соответствие между всеми черными вершинами и всеми белыми вершинами, отличными от корневой вершины x .

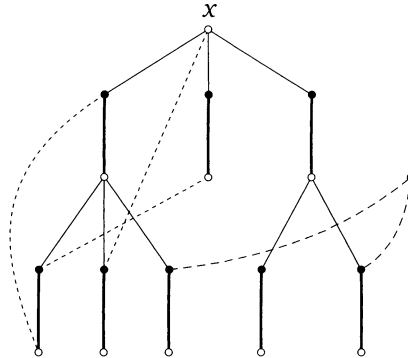


Рис. 5.18

Понятно, что помимо ребер, входящих в M -чередующееся дерево, в графе $G[X, Y]$ могут существовать и какие-то другие ребра, ему не принадлежащие. Однако имеется принципиальное различие между ребрами, исходящими из черных вершин дерева, и ребрами, исходящими из белых вершин. В принципе, ничто не мешает существованию ребер, исходящих из черных вершин дерева и входящих в какие-то другие вершины $x' \in X$ графа $G[X, Y]$ (см. штрихпунктирные ребра на рисунке). Однако для белых вершин такая ситуация

невозможна — любое ребро $e = \{x', y'\}$, отличное от ребра M -чередующегося дерева и исходящее из белой вершины x' , обязано заканчиваться в какой-то черной вершине того же дерева (см. пунктирные ребра на рисунке). Действительно, в противном случае, дойдя до вершины x' , алгоритм прошел бы по этому ребру в вершину $y' \in Y$ и включил бы ее в M -чередующее дерево. Следствием этого наблюдения является тот факт, что подмножество $N(S)$ вершин, смежных с множеством S белых вершин M -чередующегося дерева, совпадает с подмножеством T черных вершин этого дерева.

е. Сделанные выше наблюдения, связанные со структурой M -чередующегося дерева в двудольном графе $G[X, Y]$, лежат в основе доказательства еще одной очень важной теоремы, связанной с паросочетаниями в двудольном графе, — теоремы Холла о X -насыщенном паросочетании в графе.

Рассмотрим произвольный двудольный граф G с блоками X и Y (рис. 5.19(a)). Напомним, что для любого подмножества U множества вершин мы

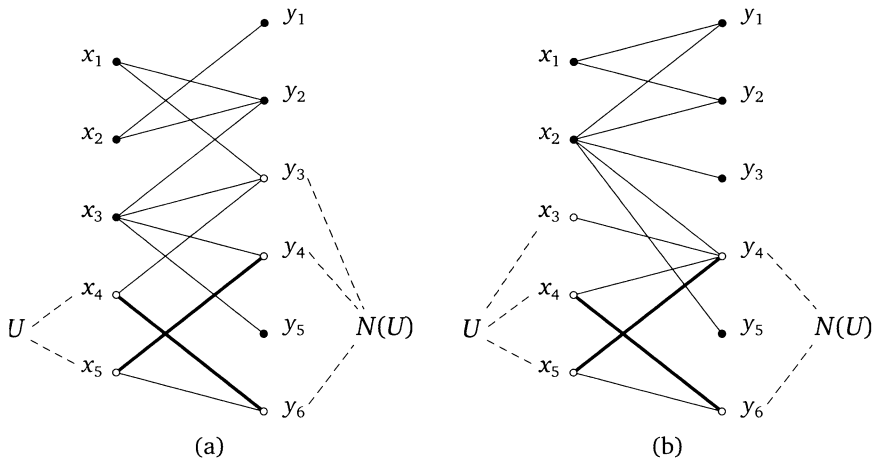


Рис. 5.19

обозначаем через $N(U)$ подмножество вершин, смежных со всеми вершинами из U . Понятно, что в случае двудольного графа для любого подмножества U вершин блока X все вершины множества $N(U)$ принадлежат блоку Y (вершины, принадлежащие U и $N(U)$, помечены белым цветом на рис. 5.19(a)).

Теорема 5 (Ф. Холл, 1935). Для того чтобы в двудольном графе $G[X, Y]$ существовало X -насыщенное паросочетание, необходимо и достаточно, чтобы для любого подмножества U множества X мощность соответствующего ему подмножества $N(U) \subset Y$ смежных с U вершин была бы больше или равна мощности $|U|$ подмножества U :

$$|U| \leq |N(U)| \quad \forall U \subseteq X. \tag{5.5}$$

Замечание 6. Неформально говоря, теорема Холла утверждает, что каждое подмножество $U \subseteq X$ должно иметь в Y достаточное количество смежных вершин. В частности, совершенно очевидно, что для существования X -насы-

ценного паросочетания необходимо выполнение условия $|X| \leq |Y|$. Теорема 5, по сути, обобщает это несложное наблюдение на произвольное подмножество U множества X .

Замечание 7. Теорему Холла часто называют также теоремой о деревенских свадьбах. Это название связано со следующей формулировкой этой задачи, восходящей к известному немецкому математику первой половины двадцатого века Герману Вейлю. В деревне относительно каждой пары юноша-девушка известно, дружат они или нет. Тогда если для любых k юношей объединение подмножеств их подруг содержит по крайней мере k девушек, то каждый юноша сможет выбрать себе будущую жену из числа своих же подруг.

f. Теорема Холла легко доказывается с использованием уже известных нам минимаксных теорем, таких как теорема Менгера или теорема Кёнига—Эгервари. Мы же для полноты изложения приведем здесь прямое доказательство теоремы Холла.

Сразу заметим, что необходимость условия (5.5) совершенно очевидна. Действительно, пусть существует хотя бы одно подмножество U , для которого это условие не выполняется. На рис. 5.19(b) изображена подобная ситуация — в этом примере смежное с подмножеством U первых трех вершин подмножество $N(U) \subset Y$ содержит всего две вершины. Рассмотрим тогда двудольный подграф $G'[U, N(U)]$. В таком графе U -насыщенного паросочетания, очевидно, не существует. Но это автоматически означает, что не существует X -насыщенного паросочетания и в исходном графе G . Действительно, все ребра, исходящие из U , приходят только в $N(U)$. Поэтому правильно выбрать ребра, выходящие из подмножества U , нам уже не удастся вне зависимости от того, насколько успешно мы справились с решением этой задачи для ребер, исходящих из подмножества $X \setminus U$.

Докажем теперь, что выполнение условий (5.5) гарантирует нам существование X -насыщенного паросочетания. Предположим, что в графе $G[X, Y]$ имеется какое-то паросочетание M , количество $|M|$ ребер в котором строго меньше $|X|$. Покажем, что в этом случае мы всегда сможем построить паросочетание M' с количеством $|M'|$ ребер, равным $|M| + 1$. Выберем для этого какую-то вершину $x \in X$, не покрытую паросочетанием M , и запустим из нее алгоритм Куна. Предположим, что в результате его работы M -дополняющий путь не найден. В этом случае алгоритм Куна вместо такого пути выдаст M -чередующееся дерево (рис. 5.18). Мы ранее отмечали, что количество $|S|$ вершин подмножества $S \subseteq X$, достижимых из x , на единицу больше количества $|T|$ вершин, достижимых из x и принадлежащих Y . Кроме того, мы показали, что в этом случае $N(S) = T$. Следовательно, при таком развитии событий

$$|N(S)| = |T| = |S| - 1,$$

что противоречит условиям Холла (5.5). □

Следствие 8. Пусть в двудольном графе $|X| = |Y|$, и для любого подмножества U множества X выполняются условия (5.5). Тогда в этом графе существует совершенное паросочетание.

g. Мы убедились в том, что теоремы Менгера, Форда—Фалкерсона, Кёнига—Эгервари и Холла достаточно тесно связаны между собой — из справедливости одной теоремы достаточно просто доказать справедливость остальных. К этому же классу результатов относятся и еще несколько важных именных теорем, таких, например, как теорема Дилуорса и теорема Мирского в теории частично упорядоченных множеств, матричная переформулировка теоремы Кёнига—Эгервари, теорема Биркгофа и другие (см. упражнения к этому параграфу). Каждая из них была в свое время доказана независимо от остальных, однако легче всего получить доказательства этих теорем, сводя их к одному из уже доказанных выше результатов.

Упражнения

1 (0,5 балла). Выразите количество $\alpha'(T)$ ребер в максимальном паросочетании для дерева T через количество его вершин n и количество k элементов в максимальном вершинно независимом множестве.

2 (1 балл). Найдите максимальные паросочетания в приведенных на рис. 5.20 графах. Докажите, что данные паросочетания максимальны.

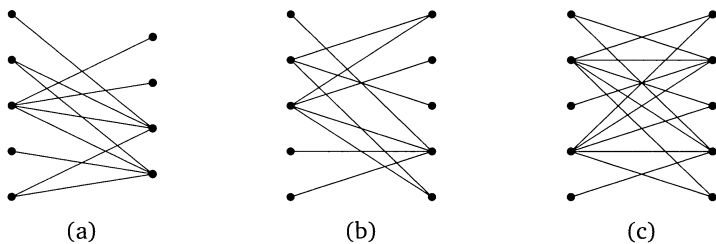


Рис. 5.20

3 (0,5 балла). Найдите количество X -насыщенных паросочетаний в полном двудольном графе $K_{n,m}$ с долями X и Y , $|X|=n$, $|Y|=m$, $n \leq m$.

4 (1 балл). Какие из графов, изображенных на рис. 5.21, имеют X -насыщенное паросочетание?

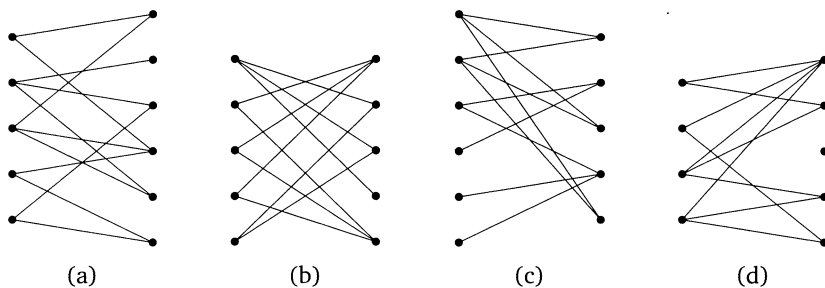


Рис. 5.21

5 (1 балл). Докажите, что в непустом k -регулярном двудольном графе всегда существует совершенное паросочетание.

6 (1,5 балла). Докажите, что в двудольном графе $G[X, Y]$ существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \subseteq V(G)$ выполняется неравенство $|S| \leq |N(S)|$. Предъявите бесконечное семейство графов, для которых данное свойство выполняется, а совершенное паросочетание при этом отсутствует.

7 (1,5 балла). Пусть в двудольном графе $G[X, Y]$ степень любой вершины $x \in X$ больше или равна степени любой вершины $y \in Y$. Докажите, что в $G[X, Y]$ существует X -насыщенное паросочетание.

8 (1 балл). Докажите теорему Холла, используя вершинную теорему Менгера.

9 (1,5 балла). Докажите теорему Холла, используя теорему Кёнига—Эггера.

10 (1 балл). Рассмотрим прямоугольную матрицу A , состоящую из нулей и единиц. Пусть l — максимальное количество единиц, которые можно выбрать так, чтобы никакие две из них не принадлежали одной и той же строке или одному и тому же столбцу матрицы A , а k равно минимальному количеству строк и/или столбцов, содержащих все единицы матрицы A . К примеру, в матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

существуют $l = 2$ единицы, обведенные в квадратную рамочку, которые не принадлежат одной и той же строке или одному и тому же столбцу матрицы A . Далее, существуют $k = 2$ строки, которые содержат все единицы матрицы A . Докажите справедливость равенства $l = k$ в общем случае.

11 (1 балл). Пусть $D_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ — множество натуральных чисел. Известно, что среди любых трех из них всегда можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите, что эти числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось бы на другое. Обобщите данный результат на случай, когда среди любых t чисел можно выбрать ровно два числа, одно из которых делилось бы на другое.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Дилуорса, сформулированной в упражнении 21.

12 (1 балл). В группе имеются шесть студентов. Известно, что первый и третий студенты вместе работают над научным проектом, второй и четвертый вместе посещают спецкурс, первый, второй и пятый вместе занимаются спортом, третий и пятый вместе ходят на занятия по английскому языку и, наконец, пятый и шестой студенты вместе играют в компьютерные игры. Оказалось, что в один из дней все эти дела нужно провести одновременно. Можно ли так распределить студентов по занятиям, чтобы каждое из этих дел не сорвалось?

13 (1 балл). Пусть $A := (A_1, \dots, A_m)$ есть набор из m подмножеств n -элементного множества Y . Системой различных представителей для A называется подмножество $\{a_1, \dots, a_m\}$ таких различных элементов $a_i \in A$, что

для любого i элемент a_i принадлежит A_i . Докажите, что A обладает такой системой тогда и только тогда, когда $|\bigcup_{i \in S} A_i| \geq |S|$ для любого подмножества $S \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$.

Дополнительные упражнения

14 (1,5 балла). Используя свойство слабой оптимальности, докажите, что в изображенном на рис. 5.22 графе G совершенное паросочетание отсутствует.

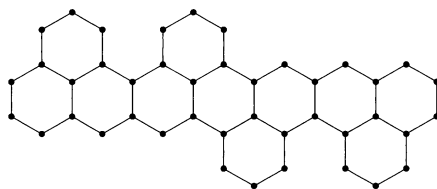


Рис. 5.22

15 (1,5 балла). Докажите, что если $|N(S)| > |S|$ для любого непустого подмножества $S \subset X$ в двудольном графе $G[X, Y]$, то любое ребро принадлежит хотя бы одному X -насыщенному паросочетанию M .

16 (2 балла). Пусть в двудольном графе $G[X, Y]$ существует X -насыщенное паросочетание. Докажите, что количество рёбер в $G[X, Y]$, которые не принадлежат ни одному X -насыщенному паросочетанию, не превосходит $\binom{|X|}{2}$. Покажите, что эта оценка достигается при любом значении $|X|$.

17 (1,5 балла). Имеется колода из $n \cdot m$ карт, по одной карте для каждого значения масти из $[m]$ и для каждого значения достоинства из $[n]$. Мы раскладываем эти карты в m рядов, каждый из которых содержит ровно n карт. Докажите, что при любой раскладке этих карт можно всегда найти m карт разных мастей, никакие две из которых не лежат в одном и том же столбце.

18 (1,5 балла). Предположим, что размер максимального паросочетания в простом двудольном графе G меньше заданного числа k . Известно также, что в таком графе отсутствует звезда, построенная на l ребрах. Получите верхнюю оценку на количество $|E(G)|$ ребер в этом графе через числа k и l .

19 (1,5 балла). В двудольном графе $G[X, Y]$ обозначим через $\text{def}(S)$, $S \subseteq X$, разность между $|S|$ и $|N(S)|$. По определению положим $\text{def}(\emptyset) = 0$. Докажите, что в двудольном графе $G[X, Y]$ существует паросочетание M , состоящее хотя бы из $|X| - d$ ребер, где $d := \max_{S \subseteq X} \text{def}(S)$.

20 (1,5 балла). Докажите теорему Кёнига—Эгервари с помощью доказанного в упражнении 19 утверждения.

21 (2,5 балла). *Цепью* в частично упорядоченном множестве P называется такое подмножество P_1 множества P , любые два элемента которого сравнимы между собой, а *антицепью* — подмножество $A \subset P$, любые два элемента которого не сравнимы между собой. С помощью теоремы Кёнига—Эгервари

докажите теорему Дилуорса, утверждающую, что в любом конечном частично упорядоченном множестве P минимальное количество k попарно непересекающихся цепей P_i , $i = 1, \dots, k$, покрывающих все элементы множества P , равно количеству a элементов в максимальной антицепи A .

22 (1,5 балла). Докажите теорему Кёнига—Эгервари с помощью сформулированной в предыдущем упражнении теоремы Дилуорса.

23 (1,5 балла). Пусть P — частично упорядоченное множество, в котором самая длинная цепь имеет длину, равную m . Докажите теорему Мирского, утверждающую, что все P можно представить в виде объединения m попарно не пересекающихся между собой антицепей. Иными словами, докажите, что наибольшее количество m элементов в цепи совпадает с минимальным количеством антицепей, покрывающих все элементы множества P .

24 (1,5 балла). Матрицей P перестановок называется квадратная бинарная матрица, в которой ровно одна единица стоит в каждой строке и в каждом столбце. Любая такая матрица является, по сути, матричным представлением некоторой перестановки σ . Докажите, что любая квадратная $(n \times n)$ -матрица, состоящая из неотрицательных целых чисел, выражается в виде суммы k матриц перестановок тогда и только тогда, когда сумма чисел в любой строке, а также сумма чисел в любом столбце равны k .

25 (1,5 балла). Дважды стохастической матрицей Q называется вещественная неотрицательная матрица, в которой сумма чисел в любой строке и сумма чисел в любой столбце равны единице. Докажите, что любая такая матрица Q представима в виде линейной комбинации

$$Q = c_1 \cdot P_1 + \dots + c_m \cdot P_m,$$

где P_i — матрицы перестановок, c_i — вещественные неотрицательные числа, сумма которых равна единице.

Решение упражнений

1. Количество таких ребер в максимальном паросочетании M равно $n - k$. Действительно, мы знаем, что количество $\alpha(G) = k$ вершин в максимальном вершинно независимом множестве и количество $\beta(G)$ вершин в минимальном вершинном покрытии связаны с n равенством

$$\alpha(G) + \beta(G) = n.$$

Но согласно теореме Кёнига—Эгервари, $\beta(G) = \alpha'(G)$, так что $\alpha'(G) = n - k$.

2. Ребра, относящиеся к максимальным паросочетаниям, отмечены жирными линиями на рис. 5.23. То, что они максимальны, можно доказать, предъявив минимальное вершинное покрытие того же размера, что и размер максимального паросочетания (вершины, помеченные белым цветом на рис. 5.23).

3. Каждое такое паросочетание можно рассматривать как n -перестановку из m элементов без повторений, поэтому общее число X -насыщенных паросочетаний в $K_{n,m}$ равно $(m)_n$.

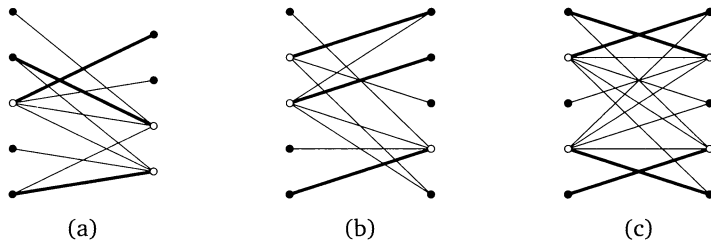


Рис. 5.23

4. Графы, показанные на рис. 5.21(a) и рис. 5.21(d), имеют X -насыщенное паросочетание — для них условие Холла выполняется (см. ребра, отмеченные жирными линиями на рис. 5.24). Для графа, показанного на рис. 5.21(b), условие Холла нарушено на трех средних вершинах из доли X (рис. 5.24(b)), а для графа на рис. 5.21(c) это условие нарушено на двух нижних вершинах доли X (рис. 5.24(c)).

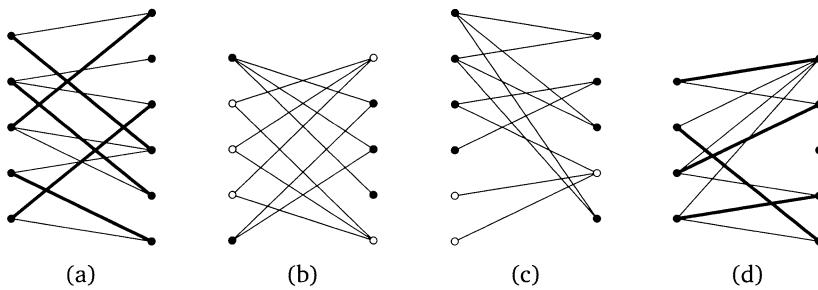


Рис. 5.24

5. Заметим прежде всего, что в k -регулярном двудольном графе $G[X, Y]$ имеет место равенство $|X| = |Y|$. Действительно, в любом двудольном графе количество $|E(G)|$ ребер совпадает с количеством полуребер, исходящих из X , а также с количеством полуребер, исходящих из Y . В рассматриваемом случае первое число равно $k|X|$, а второе — $k|Y|$, поэтому $k|X| = k|Y|$ и $|X| = |Y|$. Как следствие, любое X -насыщенное паросочетание в графе G будет и Y -насыщенным, то есть будет покрывать все вершины графа G . Иными словами, для существования совершенного паросочетания в графе G достаточно проверить выполнение условий Холла (5.5).

Для проверки этих условий рассмотрим произвольное подмножество $S \subseteq X$. Так как степень любой вершины в графе G одинакова и равна d , то из этого множества исходят ровно $d \cdot |S|$ ребер. Рассмотрим теперь множество смежных с S вершин $N(S) \subseteq Y$. Часть инцидентных этим вершинам ребер соединяют эти вершины с вершинами из множества $S \subseteq X$, а часть — с какими-то другими вершинами из блока X . Так как количество таких ребер равно $d \cdot |N(S)|$, то справедливо неравенство $d \cdot |N(S)| \geq d \cdot |S|$. Следовательно, $|N(S)| \geq |S|$ для любого $S \subseteq X$, то есть условия Холла выполнены.

6. Пусть в графе $G[X, Y]$ имеется совершенное паросочетание M . Предположим, что в графе существует подмножество $S \subseteq V(G)$, для которого условие $|S| \leq |N(S)|$ нарушается. Такое подмножество мы можем представить в виде $S = A \cup B$, где $A \subseteq X$, а $B \subseteq Y$. Но тогда из условия $|S| = |A| + |B| > |N(S)| = |N(A)| + |N(B)|$ следует, что либо $|A| > |N(A)|$, либо $|B| > |N(B)|$, а это, в свою очередь, противоречит условиям Холла.

Обратно, предположим, что для любого $S \subseteq V(G)$ выполняется условие $|S| \leq |N(S)|$. Тогда это условие выполняется и для любого $U \subseteq X$, а значит, в графе существует X -насыщенное паросочетание. Аналогично из условия $|V| \leq |N(V)|$ для любого $V \subseteq Y$ следует существование Y -насыщенного паросочетания в $G[X, Y]$. Объединяя эти два факта, получаем, что в $G[X, Y]$ существует совершенное паросочетание.

Наконец, заметим, что для любого цикла нечетной длины данное условие выполняется, однако совершенное паросочетание в нем отсутствует.

7. Предположим, что это не так. Тогда согласно теореме Холла в графе $G[X, Y]$ найдется такое подмножество U множества X , что $|N(U)| < |U|$. Обозначим $a_i = \deg(x_i)$, $x_i \in U$, $i = 1, \dots, |U|$, а $b_j = \deg(y_j)$, $y_j \in N(U)$, $j = 1, \dots, |N(U)|$. Мы знаем, что $a_i \geq b_j$ для любых индексов i и j . Просуммируем количество ребер, идущих из U в $N(U)$. С одной стороны, это количество равно $\sum_i a_i$, с другой стороны, оно же равно $\sum_j b_j$. Следовательно, мы должны иметь равенство вида

$$\sum_{i=1}^{|U|} a_i = \sum_{j=1}^{|N(U)|} b_j.$$

Однако в силу неравенств $a_i \geq b_j$ и $|U| > |N(U)|$ левая часть этого соотношения строго больше его правой части. Полученное противоречие доказывает, что в графе $G[X, Y]$ условия Холла выполнены, а значит, в нем существует X -насыщенное паросочетание.

8. Добавим к графу G две вершины x и y , а затем соединим вершину x со всеми вершинами блока X , а вершину y — со всеми вершинами блока Y . Пусть $k := |X| \leq |Y|$. Заметим, что в силу условий Холла X является наименьшим разделяющим x и y множеством. Тогда по теореме Менгера у нас существует k непересекающихся во внутренних точках простых путей, соединяющих x и y . Участки этих путей, соединяющие вершины блоков X и Y , и представляют собой искомого X -насыщенное паросочетание в исходном графе G .

9. Согласно теореме Кёнига—Эгервари, если в двудольном графе $G[X, Y]$ найдется вершинное покрытие K , количество вершин в котором меньше $|X|$, то в таком графе X -насыщенное паросочетание отсутствует. Верно и обратное утверждение — если в $G[X, Y]$ отсутствует $|X|$ -насыщенное паросочетание, то в таком графе обязано существовать вершинное покрытие K , для которого $|K| < |X|$.

Обозначим $R := K \cap X$, $S := X \setminus R$, и $T := K \cap Y$. Так как K — вершинное покрытие, то ребра между S и $Y \setminus T$ отсутствуют. Как следствие, $N(S) \subseteq T$, а значит, $|N(S)| \leq |T| = |K| - |R| < |X| - |R| = |X \setminus R| = |S|$. Итак, из теоремы Кёнига—Эгервари следует, что отсутствие в графе X -насыщенного паросоче-

тания нарушает условия Холла. Иными словами, условия Холла достаточны для существования X -насыщенного паросочетания в $G[X, Y]$.

Пусть теперь $|N(S)| < |S|$ для некоторого $S \subseteq X$. Тогда $N(S) \cup (X \setminus S)$ представляет собой вершинное покрытие двудольного графа $G[X, Y]$, величина которого меньше $|X|$. А это, в свою очередь, означает, что в $G[X, Y]$ отсутствует паросочетание размера $|X|$. Тем самым мы доказали необходимость условий Холла для существования X -насыщенного паросочетания в $G[X, Y]$.

10. Убедимся, что данное утверждение есть простая переформулировка теоремы Кёнига—Эгервари на матричном языке. Для этого введем в рассмотрение двудольный граф G , блоки X и Y которого отвечают множеству строк и множеству столбцов матрицы A , и соединим вершины этого двудольного графа в том случае, когда на пересечении соответствующих строки и столбца в матрице A стоит единица. В этом случае l окажется равным количеству ребер в максимальном паросочетании графа G , а k — количеству вершин в минимальном вершинном покрытии графа G .

11. Отношение делимости превращает множество D_n в частично упорядоченное множество. То, что среди любых трех элементов множества D_n всегда можно выбрать два таких числа $a, b \in D_n$, что $a \setminus b$, означает, что размер максимальной антицепи в D_n равен двум. Следовательно, согласно теореме Дилуорса существует ровно две цепи, покрывающие все элементы множества D_n .

Случай, когда среди любых m чисел существует ровно два числа, одно из которых делит другое, означает, что размер частично упорядоченного множества в D_n равен $m - 1$. Следовательно, в этом случае D_n можно раскрасить в $m - 1$ цветов.

12. Для решения данной задачи построим двудольный граф $G[X, Y]$, в котором списку дел отвечает блок $X = \{x_1, \dots, x_5\}$, а списку студентов — блок $Y = \{y_1, \dots, y_6\}$. Проведем в таком графе ребро $\{x_i, y_j\}$ тогда и только тогда, когда студент y_j участвует в занятии x_i (рис. 5.25). Тогда X -насыщенное паросочетание, показанное на рис. 5.25, представляет собой графическое решение данной задачи.

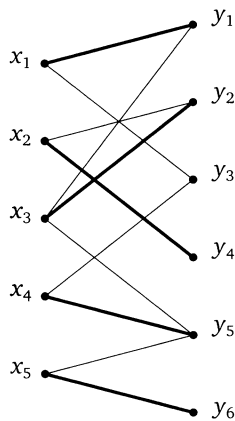


Рис. 5.25

13. Построим двудольный граф $G[X, Y]$, где $X = \{1, 2, \dots, m\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Проведем в таком графе ребро $\{i, y_j\}$ тогда и только тогда, когда $y_j \in A_i$. Тогда, как и в предыдущем упражнении, любое X -насыщенное паросочетание представляет собой графическое решение задачи. Условия же Холла существования X -насыщенного паросочетания и являются нужными нам необходимыми и достаточными условиями существования системы различных представителей.

§ 3. Совершенные паросочетания в произвольном графе. Теорема Татта

1. Вернемся к задаче поиска совершенного паросочетания в произвольном графе G , то есть паросочетания, покрывающего все вершины графа G .

а. Первый и основной вопрос, возникающий при решении данной задачи, состоит в следующем: а существует ли в принципе в заданном графе G хотя бы одно совершенное паросочетание? Иными словами, нам хотелось бы понимать, какими свойствами должен обладать граф G , чтобы в нем гарантированно существовало совершенное паросочетание.

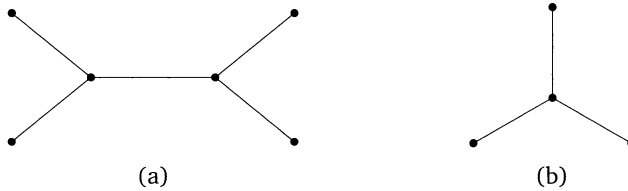


Рис. 5.26

Ранее мы уже упоминали, что совершенное паросочетание невозможно построить в случае, когда количество вершин в графе нечетно. К сожалению, довольно простое условие четности вершин в графе G не гарантирует нам существование совершенного паросочетания в G . В качестве примера на рис. 5.26 показаны достаточно простые графы, построенные на четном числе вершин, совершенное паросочетание в которых отсутствует.

б. Необходимое и достаточное условие существования в графе совершенного паросочетания было получено в 1947 году одним из создателей современной теории графов Уильямом Таттом. Прежде чем формулировать соответствующий результат, давайте поймем, из каких соображений его можно получить.

Рассмотрим произвольный граф G , в котором существует совершенное паросочетание M . Выделим в этом графе некоторое абсолютно произвольное подмножество S множества $V(G)$ вершин графа G и удалим все вершины этого подмножества. Напомним, что при удалении вершин в графе G вместе с ними удаляются и все инцидентные им ребра. В полученном в результате такой операции графе $G - S$ могут оказаться несколько компонент связности.

Будем называть отдельную компоненту связности, содержащую четное количество вершин, *четной компонентой*, а компоненту, содержащую нечетное количество вершин, — *нечетной компонентой*.

На рис. 5.27(a) в качестве примера показан граф G , построенный на четырнадцати вершинах. Совершенное паросочетание M в таком графе состоит из семи ребер, отмеченных жирными линиями на рисунке. Включим в подмножество S единственную вершину x , помеченную белым цветом на рис. 5.27(a). После удаления этой вершины исходный граф G распадется на две компоненты связности — четную и нечетную (рис. 5.27(b)).

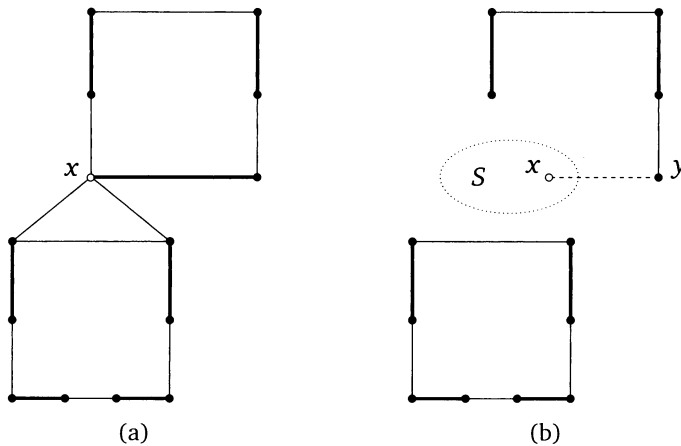


Рис. 5.27

Обратим внимание на произвольную нечетную компоненту графа $G - S$. В этой компоненте остались ребра, входившие в исходное совершенное паросочетание M . Они, очевидно, покрывают только четное количество вершин этой компоненты. Следовательно, среди вершин рассматриваемой нечетной компоненты обязательно найдется хотя бы одна вершина y , покрытая в исходном графе G ребром, входящим в совершенное паросочетание M и соединяющим эту вершину y с одной из вершин удаленного подмножества S (ребро $\{x, y\}$ на рис. 5.27(b)).

Теперь рассмотрим все нечетные компоненты графа $G - S$. Как мы убедились выше, из каждой такой компоненты в исходном графе G обязано исходить принадлежащее M ребро, соединяющее какую-то вершину x нечетной компоненты с какой-то своей собственной вершиной y подмножества S . Следовательно, количество вершин в S должно быть не меньше количества нечетных компонент связности в графе $G - S$:

$$c_{\text{odd}}(G - S) \leq |S| \quad \forall S \subset V(G). \tag{5.6}$$

Здесь $c_{\text{odd}}(G - S)$ — количество нечетных компонент связности графа $G - S$.

Заметим сразу, что из условий (5.6) следует, в частности, тот факт, что и сам граф G , и любая его связная компонента имеют четное число вершин. Действительно, выбирая в качестве S пустое множество \emptyset , мы получаем, что

$c_{\text{odd}}(G) \leq |\emptyset| = 0$, а это и означает, что в графе G отсутствуют компоненты связности, имеющие нечетное число вершин.

с. Оказывается, условие (5.6) является не только необходимым, но и достаточным для существования в графе G совершенного паросочетания.

Теорема 1 (Татт, 1947). *В графе G существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \subset V(G)$ количество $c_{\text{odd}}(G - S)$ нечетных компонент связности графа $G - S$ не превосходит мощности $|S|$ множества S .*

Доказательство. Необходимость условий (5.6) мы уже доказали, так что нам осталось доказать их достаточность для существования совершенного паросочетания в графе G . Доказывать это мы будем от противного. Именно, мы предположим, что имеется граф G , в котором условия Татта (5.6) выполнены, а совершенное паросочетание отсутствует, и получим противоречие.

Так как условия Татта для графа G выполнены, то этот граф построен на четном количестве вершин $n = |V(G)|$. Кроме того, этот граф отличен от полного графа K_n — в полном графе на четном количестве вершин совершенное паросочетание, очевидно, существует. Следовательно, в G имеется хотя бы одна пара несмежных между собой вершин. Соединим эту пару вершин ребром и покажем, что в результате этой операции условия Татта (5.6) не нарушатся.

Действительно, добавление к графу G ребра изменит количество нечетных компонент лишь в том случае, когда это ребро соединит две нечетные компоненты связности в графе $G - S$. Но при этом количество $c_{\text{odd}}(G - S)$ таких нечетных компонент уменьшится, а количество $|S|$ удаляемых вершин от добавления к графу ребра никак не изменится. Поэтому если до добавления к графу G ребра условия (5.6) были выполнены, то они тем более останутся выполненными и после добавления ребра.

Давайте тогда возьмем исходный граф G и начнем добавлять к нему ребра, соединяющие несмежные вершины этого графа. На каком-то шаге мы обязательно придем к так называемому *насыщенному* графу G^* — графу, у которого совершенное паросочетание еще отсутствует, но прибавление к которому *любого* ребра приведет к появлению в новом графе совершенного паросочетания. Действительно, соединив все несмежные в графе G вершины, мы придем к полному графу K_n на четном количестве n вершин, в котором совершенное паросочетание гарантированно существует. Следовательно, добавляя к G ребра так, чтобы в новых графах совершенное паросочетание отсутствовало, мы на каком-то шаге обязательно придем к ситуации, когда соединить *любую* пару несмежных вершин ребром и не получить в результате этой операции граф без совершенного паросочетания окажется невозможным, то есть придем к насыщенному графу G^* .

Выделим теперь в полученном из G насыщенном графе G^* подмножество U вершин, каждая из которых соединена со всеми вершинами графа G^* , то есть подмножество U вершин, каждая из которых имеет степень $n - 1$. Ниже мы покажем (см. лемму 2), что граф $G^* - U$, полученный после удаления такого подмножества U вершин, представляет собой несвязный граф, любая ком-

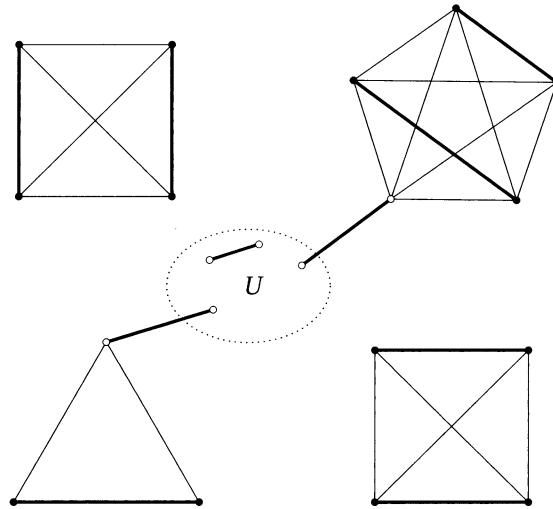


Рис. 5.28

понента связности которого является полным графом. Так как в силу условий (5.6) в графе $G^* - U$ не более $|U|$ нечетных компонент связности, то мы всегда сможем совершить следующие операции (см. рис. 5.28):

- 1) построить в каждой компоненте связности графа $G^* - U$, содержащей четное число вершин, совершенное паросочетание (ребра, отмеченные жирными линиями на рис. 5.28);
- 2) построить в каждой нечетной компоненте связности этого графа паросочетание, покрывающее все вершины, кроме одной (жирные ребра на рис. 5.28);
- 3) соединить каждую оставшуюся вершину в каждой из компонент нечетной связности (белые вершины на рис. 5.28) с какой-то своей собственной вершиной из множества U ;
- 4) разбить на пары оставшееся множество \tilde{U} вершин в U и соединить их ребрами (жирные ребра, соединяющие пары белых вершин из \tilde{U} , на рис. 5.28).

Последнюю операцию мы можем совершить потому, что, во-первых, все вершины в \tilde{U} смежны друг с другом по построению множества U , а во-вторых, количество таких вершин четно. Действительно, удаляя из четного числа вершин в графе G^* вершины, входящие в компоненты с четным числом вершин, мы вновь получаем четное число. Далее, вычитая из остатка нечетное число вершин любой компоненты нечетной связности вместе с одной из вершин множества U , мы вновь получаем четное число.

Таким образом, мы построили в графе G^* совершенное паросочетание, что противоречит определению насыщенного графа. Полученное противоречие доказывает достаточность выполнения условий (5.6) для существования совершенного паросочетания в графе. \square

d. Итак, для доказательства теоремы Татта нам осталось доказать следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть U — подмножество вершин насыщенного графа G^* , каждая из которых соединена со всеми вершинами графа G^* , то есть подмножество вершин, каждая из которых имеет степень $n - 1$, $n = |V(G^*)|$. Тогда в графе $G^* - U$ любая компонента связности является полным графом.

Доказательство. Будем доказывать это утверждение от противного. Именно, мы предположим, что это не так, то есть что в графе $G^* - U$ имеется компонента связности, не являющаяся полным графом. В такой компоненте имеется как минимум три вершины (компоненты связности, содержащие одну или две вершины, изоморфны полным графам K_1 и K_2), и в ней обязана существовать пара несмежных между собой вершин a и c , имеющих общую смежную вершину b (см. одно из упражнений к первой главе). Наша задача — показать, что отсутствие ребра $\{a, c\}$ противоречит насыщенности графа G^* .

Так как вершина b не принадлежит U , то степень этой вершины отлична от $n - 1$. Следовательно, в графе G^* найдется хотя бы одна вершина d , несмежная с b . Так как любая вершина из U смежна со всеми вершинами графа G^* , то вершина d также принадлежит $V(G^* - U)$. Таким образом, отсутствие ребра $\{a, c\}$ в графе $G^* - U$ означает, что в таком графе имеются по меньшей мере две пары несмежных между собой вершин.

Согласно определению насыщенного графа G^* добавление к нему любого ребра e превращает $G^* + e$ в граф, в котором совершенное паросочетание уже существует. Важно отметить, что добавленное ребро e обязано этому совершенному паросочетанию принадлежать — в противном случае совершенное паросочетание можно было бы построить и в исходном графе G^* , что, согласно нашему предположению, невозможно.

Рассмотрим теперь графы $G_1 := G^* + \{a, c\}$ и $G_2 := G^* + \{b, d\}$, полученные добавлением к графу G^* ребер $\{a, c\}$ и $\{b, d\}$ соответственно. Как мы заметили выше, в таких графах существуют некоторые совершенные паросочетания M_1 и M_2 , причем ребро $\{a, c\}$ входит в паросочетание M_1 , а ребро $\{b, d\}$ принадлежит паросочетанию M_2 . Образует симметрическую разность $M_1 \Delta M_2 =: F$ двух паросочетаний и рассмотрим остовный подграф H графа G^* , для которого $E(H) = F$. Так как паросочетания M_1 и M_2 являются совершенными, то любая вершина $x \in V(G^*) = V(G_1) = V(G_2)$ покрыта как ребром $e_1 \in M_1$, так и ребром $e_2 \in M_2$. В случае, если $e_1 = e_2$, эта вершина остается не покрытой ребрами из F . Если же $e_1 \neq e_2$, то степень вершины x в H равна двум. Следовательно, любое ребро в H обязано принадлежать некоторому циклу.

Возможны два случая. В первом из них ребра $\{a, c\}$ и $\{b, d\}$ принадлежат двум различным циклам C_1 и C_2 (рис. 5.29(a)). Во втором случае эти ребра лежат на одном и том же цикле $C_1 = C_2 =: C$ (рис. 5.29(b)). Покажем, что в обоих случаях мы всегда сможем сконструировать из паросочетаний M_1 и M_2 некоторое новое паросочетание M , покрывающее все вершины в графе

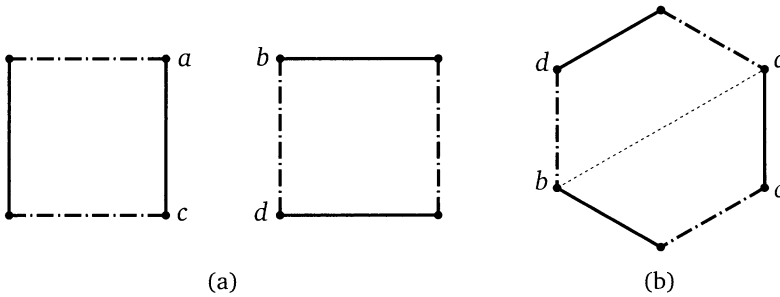


Рис. 5.29

G^* . Тем самым мы получим противоречие с тем, что граф G^* является насыщенным, доказывающее лемму.

Предположим вначале, что циклы C_1 и C_2 различны (рис. 5.29(a)). Выделим в цикле C_1 ребра, принадлежащие паросочетанию M_2 (ребра, отмеченные штрихпунктирными линиями на рис. 5.29(a)), а в цикле C_2 — ребра из паросочетания M_1 (ребра, отмеченные жирными сплошными линиями на рис. 5.29(a)). Эти ребра, во-первых, покрывают все вершины циклов C_1 и C_2 . Во-вторых, этот набор ребер не содержит ни ребро $\{a, c\}$, ни ребро $\{b, d\}$. Добавляя к полученному набору ребра, к примеру, из паросочетания M_1 , не входящие ни в цикл C_1 , ни в цикл C_2 , мы получаем некоторое совершенное паросочетание M в графе G^* .

Разберем теперь вариант, при котором ребра $\{a, c\}$ и $\{b, d\}$ принадлежат одному и тому же циклу C (рис. 5.29(b)). Будем двигаться по этому циклу от вершины b в направлении, задаваемом ребром $\{b, d\}$, до тех пор, пока не встретим одну из вершин ребра $\{a, c\}$. Пусть для определенности это будет вершина a (см. рис. 5.29(b)). Пройденная цепочка ребер P_1 начинается и заканчивается ребрами, принадлежащими паросочетанию M_2 (ребра, отмеченные штрихпунктирными линиями на 5.29(b)). Оставшаяся же часть цикла C — цепочка P_2 — ограничена ребрами паросочетания M_1 (ребра, отмеченные жирными сплошными линиями на рисунке). Рассмотрим тогда ребро $\{a, b\} \in E(G^*)$, разбивающее цикл C на две половины. Добавим к нему ребра цепочки P_1 , принадлежащие паросочетанию M_1 , а также ребра из P_2 , относящиеся к паросочетанию M_2 . В результате мы получим паросочетание, покрывающее все вершины цикла C и не содержащее ни ребро $\{b, d\}$, ни ребро $\{a, c\}$. Дополняя это паросочетание ребрами из M_1 , не входящими в цикл C , мы вновь получим совершенное паросочетание M в насыщенном графе G^* . Это доказывает лемму 2, а вместе с ней и теорему Татта. \square

2. Теорема Татта играет очень важную роль в теории паросочетаний. Прежде всего, она дает хорошую характеристику существования совершенного паросочетания в графе. Если таковое существует, нам достаточно просто его предъявить. Если же его нет, то согласно теореме Татта гарантированно найдется множество S , для которого условие Татта (5.6) нарушается (так называемое множество Татта).

Кроме того, с помощью теоремы Татта достаточно просто доказываются разного рода достаточные условия существования совершенных паросочетаний в том или ином классе графов. Схема доказательства такого рода обычно такова: рассматривается описанная в теореме декомпозиция, и предполагается, что граф не имеет совершенного паросочетания. Затем с помощью разного рода подсчетов или оценок получается то или иное противоречие.

а. В качестве примера такого рода рассуждений можно привести один из первых результатов теории графов, доказанный Петерсеном еще в 1891 году. Этот результат касается достаточных условий существования совершенного паросочетания в так называемом кубическом графе, то есть регулярном графе, степень $\deg(x)$ любой вершины x которого равна трем. Исходное доказательство Петерсена было достаточно сложным. Мы же дадим более простое доказательство, опирающееся на теорему Татта.

Теорема 3 (Петерсен, 1891). *Каждый кубический граф G , имеющий не более двух мостов, обладает совершенным паросочетанием.*

б. Прежде чем доказывать теорему Петерсена, сформулируем и докажем следующее полезное для дальнейших рассуждений утверждение.

Лемма 4. *Для любого подмножества S множества $V(G)$ вершин графа G четность числа $c_{\text{odd}}(G-S) - |S|$ совпадает с четностью количества $n = |V(G)|$ вершин в графе G :*

$$c_{\text{odd}}(G-S) - |S| \equiv n \pmod{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное подмножество S множества $V(G)$ вершин графа G . Любое такое подмножество разбивает все множество $V(G)$ вершин на $c_{\text{odd}}(G-S)$ блоков V_i , отвечающих нечетным компонентам графа $G-S$, $c_{\text{even}}(G-S)$ блоков U_j , соответствующих четным компонентам графа $G-S$, а также на блок, состоящий из вершин самого подмножества S :

$$V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{c_{\text{odd}}(G-S)} \cup U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{c_{\text{even}}(G-S)} \cup S.$$

Так, для изображенного на рис. 5.28 графа G и подмножества S мы имеем $c_{\text{odd}}(G-S) = 2$ нечетных блока и $c_{\text{even}}(G-S) = 2$ четных блока.

Количество вершин во всех блоках U_j четно, поэтому в результате удаления из графа G этих вершин мы получим количество вершин той же четности, что и n . Возьмем теперь в каждом нечетном блоке все вершины, кроме одной, и удалим эти вершины. Так как число удаляемых вершин в каждом таком блоке четно, то четность оставшегося количества вершин по-прежнему будет совпадать с четностью n .

Заметим теперь, что у нас осталось по одной вершине из каждой нечетной компоненты (вершины, помеченные белым цветом на рис. 5.28), а также все вершины подмножества S . Следовательно, общее количество оставшихся вершин равно $c_{\text{odd}}(G-S) + |S|$, и это число совпадает по четности с количеством n всех вершин:

$$c_{\text{odd}}(G-S) + |S| \equiv n \pmod{2}.$$

Вычтем теперь из числа $c_{\text{odd}}(G - S) + |S|$ четное число, равное удвоенному количеству вершин подмножества S . Полученное в результате число $c_{\text{odd}}(G - S) - |S|$ будет иметь ту же четность, что и число $c_{\text{odd}}(G - S) + |S|$, а следовательно, что и n :

$$c_{\text{odd}}(G - S) - |S| \equiv n \pmod{2}.$$

Лемма доказана. \square

с. Приступим теперь к доказательству теоремы Петерсена. Заметим, прежде всего, что в кубическом графе количество $|V(G)|$ вершин четно, — это сразу следует из первой теоремы теории графов:

$$\sum_{x \in V(G)} \deg(x) = 3 \cdot \sum_{x \in V(G)} 1 = 3|V(G)| = 2|E(G)| \Rightarrow |V(G)| \text{ — четное число.}$$

Теперь предположим, что граф G не имеет совершенного паросочетания. Тогда согласно условию Татта в графе можно выделить такое подмножество S вершин, после удаления которых количество $c_{\text{odd}}(G - S)$ нечетных компонент графа $G - S$ оказывается больше количества $|S|$ удаленных из графа G вершин:

$$c_{\text{odd}}(G - S) > |S| \Leftrightarrow c_{\text{odd}}(G - S) \geq |S| + 1.$$

Лемма 4 говорит нам о том, что разность $c_{\text{odd}}(G - S) - |S|$ совпадает с четностью n . Так как n четно, то четна и разность $c_{\text{odd}}(G - S) - |S|$. Как следствие, равенство вида

$$c_{\text{odd}}(G - S) = |S| + 1$$

никогда выполняться не сможет, так что неравенство $c_{\text{odd}}(G - S) \geq |S| + 1$ можно усилить:

$$c_{\text{odd}}(G - S) > |S| + 1 \Leftrightarrow c_{\text{odd}}(G - S) \geq |S| + 2.$$

д. Вернемся к кубическим графам. Обозначим через G_i произвольную нечетную компоненту такого графа, полученную в результате удаления из кубического графа G какого-то подмножества S вершин, а через m_i — количество ребер, соединяющих эту компоненту с подмножеством S . Покажем, что m_i обязано быть нечетным числом.

Согласно первой теореме теории графов сумма степеней вершин в компоненте G_i , равная удвоенному количеству ребер в этой компоненте, является четным числом. Но в рассматриваемом случае сумма степеней вершин равна

$$\sum_{x \in V(G_i)} \deg(x) = 3|V(G_i)| - m_i.$$

Действительно, если бы из G_i никаких ребер в S не выходило, то каждая вершина G_i имела бы степень, равную трем, а суммарная степень вершин равнялась бы $3|V(G_i)|$. Однако за счет исходящих из G_i ребер у некоторых из этих вершин степень уменьшится на количество ребер, соединяющих эту вершину с вершинами множества S . Суммарное же уменьшение суммы всех

степеней вершин из G_i как раз и окажется равным m_i . Таким образом, мы показали, что

$$3|V(G_i)| - m_i = 2|E(G_i)|.$$

Но количество $|V(G_i)|$ вершин в нечетной компоненте G_i является нечетным числом, и поэтому для выполнения этого равенства m_i также обязано быть нечетным.

е. Заметим теперь, что в кубическом графе, имеющем не более двух мостов, не более двух чисел m_i могут равняться единице. Действительно, если бы это было не так, то нашлось бы множество S , соединенное с тремя или более нечетными компонентами G_i одиночными ребрами. Такие ребра образуют мосты в исходном графе G , а их по условию не должно быть больше двух.

Просуммируем теперь числа m_i по всем нечетным компонентам G_i , образующимся после удаления в графе G подмножества S вершин. В случае, когда все $m_i \geq 3$, мы получаем неравенство вида

$$\sum_i m_i \geq 3c_{\text{odd}}(G-S).$$

В случае, когда ровно одно $m_i = 1$, аналогичное неравенство принимает вид

$$\sum_i m_i \geq 3(c_{\text{odd}}(G-S) - 1) + 1 = 3c_{\text{odd}}(G-S) - 2.$$

Наконец, в случае, когда ровно два числа m_i равны 1, наша оценка на сумму m_i выглядит так:

$$\sum_i m_i \geq 3(c_{\text{odd}}(G-S) - 2) + 2 = 3c_{\text{odd}}(G-S) - 4.$$

Итак, в самом худшем для нас случае сумма чисел m_i больше или равна $3c_{\text{odd}}(G-S) - 4$. Но ранее мы показали, что $c_{\text{odd}}(G-S) \geq |S| + 2$. Сравнивая эти два неравенства, мы получаем, что

$$\sum_i m_i \geq 3|S| + 2.$$

Однако такое неравенство выполняться не может — максимальное количество ребер, которое может исходить из S , равно $3|S|$. Мы же получили, что количество ребер, соединяющих S только с нечетными компонентами, строго больше $3|S| + 1$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы Петерсена. \square

ф. Заметим, что условие «не более двух мостов» является существенным — так, изображенный на рис. 5.30 кубический граф (граф Сильвестра), имеющий три моста, совершенного паросочетания не имеет. Действительно, после удаления единственной вершины x в графе $G - \{x\}$ образуется три нечетных компоненты, т. е. для такого графа условие Татта уже не выполняется.

г. Рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы Петерсена, можно использовать и при доказательстве других утверждений, связанных с совершенными паросочетаниями в графах. В частности, более-менее похоже доказывается следующий результат (см. упражнение 10).

Теорема 5 (Плесник, 1972). Пусть G — k -регулярный и $(k - 1)$ -реберно связный граф с четным числом вершин. Тогда в графе G' , полученном из G удалением не более чем $k - 1$ ребер, существует совершенное паросочетание.

3. Приведенное выше доказательство теоремы Татта основывалось исключительно на соображениях, связанных с теорией графов. Сам Татт пришел к этой теореме, используя некоторые факты из линейной алгебры, связанные с определителями кососимметрической матрицы.

а. Напомним, что определитель $\det(T)$ матрицы T рассчитывается по формуле

$$\det(T) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot x_{1\sigma(1)} \cdot x_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot x_{n\sigma(n)}.$$

Здесь $\sigma \in S_n$ — произвольная перестановка n -элементного множества $[n]$, x_{ij} — элементы матрицы T .

Рассмотрим теперь кососимметрическую матрицу

$$T = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ -x_{12} & 0 & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_{1n} & -x_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно, что определитель такой матрицы $\det(T)$ тождественно равен нулю в случае нечетного n . Действительно, так как

$$\det(T) = \det(T^T) = \det(-T) = (-1)^n \det(T),$$

то в случае $n = 2k + 1$ из равенства $\det(T) = -\det(T)$ следует, что $\det(T) = 0$.

В линейной алгебре (а также в комбинаторике, см., например, [35]) доказывается, что в случае четного n определитель $\det(T)$ можно записать в виде $[\text{pf}(T)]^2$, где $\text{pf}(T)$ представляет собой полином специального вида от переменных x_{ij} , называемый *пфаффианом* матрицы T .

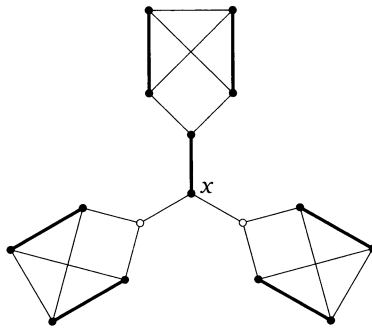


Рис. 5.30. Граф Сильвестра

Определение 6. Рассмотрим множество Π всех $(2n - 1)!!$ разбиений множества $[2n]$ на блоки размера 2. Каждое из таких разбиений можно записать в виде

$$\alpha = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)\}, \quad \text{где } i_k < j_k, \quad 1 = i_1 < i_2 < \dots < i_n.$$

Для любого разбиения $\alpha \in \Pi$ введем перестановку σ_α , действующую по следующему правилу:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \dots & i_n & j_n \end{pmatrix}.$$

Тогда пфаффиан $\text{pf}(T)$ матрицы T определяется по формуле

$$\text{pf}(T) = \sum_{\alpha \in \Pi} \text{sign}(\sigma_\alpha) \cdot x_{i_1 j_1} \cdot x_{i_2 j_2} \cdot \dots \cdot x_{i_n j_n}.$$

Теорема 7. *Определитель кососимметрической матрицы T размером $2n \times 2n$ равен квадрату пфаффиана этой матрицы:*

$$\det(T) = [\text{pf}(T)]^2. \quad (5.7)$$

В качестве примера рассмотрим случай $n = 2$. Множество $\{1, 2, 3, 4\}$ допускает три различных разбиения на блоки размера два

$$\alpha_1 = \{(1, 2), (3, 4)\}, \quad \alpha_2 = \{(1, 3), (2, 4)\}, \quad \alpha_3 = \{(1, 4), (2, 3)\}.$$

Соответствующий этим разбиениям пфаффиан имеет вид

$$\text{pf}(T) = x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}.$$

Несложно убедиться, что квадрат этого пфаффиана даст нам определитель матрицы

$$T = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \det(T) &= x_{12}^2 x_{34}^2 + x_{13}^2 x_{24}^2 + x_{14}^2 x_{23}^2 - 2x_{12}x_{34}x_{13}x_{24} - 2x_{12}x_{34}x_{14}x_{23} - \\ &\quad - 2x_{13}x_{24}x_{14}x_{23} = [\text{pf}(T)]^2. \end{aligned}$$

б. Вернемся к паросочетаниям в графах. Татт заметил, что имеется взаимно однозначное соответствие между множеством всех совершенных паросочетаний в полном графе K_{2n} на $2n$ вершинах и набором всех слагаемых в пфаффиане $\text{pf}(T)$ кососимметрической матрицы $T[2n, 2n]$. При этом сами элементы x_{ij} , $1 \leq i < j \leq 2n$, матрицы T отвечают ребрам графа K_{2n} , соединяющим вершины i и j этого графа.

Рассмотрим в качестве примера полный граф K_4 . Соответствующая ему кососимметрическая матрица T имеет вид (5.8), а ее определитель рассчитывается по формуле

$$\det(T) = [x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}]^2.$$

Слагаемое $x_{12}x_{34}$ отвечает совершенному паросочетанию, состоящему из ребер $\{1, 2\}$ и $\{3, 4\}$ графа K_4 , слагаемое $x_{13}x_{24}$ — совершенному паросочетанию $\{1, 3\}, \{2, 4\}$, а слагаемое $x_{14}x_{23}$ — совершенному паросочетанию $\{1, 4\}, \{2, 3\}$ в графе K_4 .

Рассмотрим теперь произвольный граф G , построенный на $2n$ вершинах. Сопоставим этому графу кососимметрическую матрицу $T[2n, 2n]$, элементы x_{ij} , $1 \leq i < j \leq 2n$, которой отличны от нуля в случае, если между вершинами i и j имеется ребро $\{i, j\}$, и равны нулю в противном случае. Такая матрица $T(G)$, построенная для произвольного графа G , называется теперь *матрицей Татта*. Определитель этой матрицы по-прежнему выражается через пфаффиан $\text{pf}(T)$, любое слагаемое которого отвечает некоторому совершенному паросочетанию в графе G . Случаю равенства нулю всех слагаемых в $\text{pf}(T)$ отвечает отсутствие совершенного паросочетания в графе G .

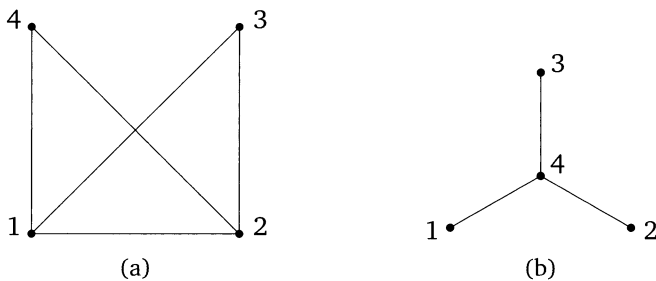


Рис. 5.31. (a) Граф G_1 ; (b) граф G_2

В качестве примера рассмотрим графы G_1 и G_2 , показанные на рис. 5.31. Матрицы Татта для таких графов имеют вид

$$T(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & 0 \\ -x_{14} & -x_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{14} \\ 0 & 0 & 0 & x_{24} \\ 0 & 0 & 0 & x_{34} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы Татта $T(G_1)$, отвечающей графу G_1 , показанному на рис. 5.31(a), определитель равен

$$\det(T) = x_{13}^2 x_{24}^2 + x_{14}^2 x_{23}^2 - 2x_{13} x_{14} x_{23} x_{24} = [\text{pf}(T)]^2, \quad \text{pf}(T) = x_{14} x_{23} - x_{13} x_{24}.$$

Следовательно, в графе G_1 найдутся два совершенных паросочетания — совершенное паросочетание, состоящее из ребер $\{1, 3\}, \{2, 4\}$, а также совершенное паросочетание, ребра которого — $\{1, 4\}, \{2, 3\}$. В случае же графа G_2 , показанного на рис. 5.31(b), определитель матрицы Татта равен

$$\det(T) = 0 = [\text{pf}(T)]^2, \quad \text{pf}(T) = 0 \cdot x_{34} - 0 \cdot x_{24} + 0 \cdot x_{14},$$

поэтому в таком графе совершенные паросочетания отсутствуют.

с. Ласло Ловас заметил, что отмеченное Таттом взаимно однозначное соответствие между слагаемыми пфаффиана и совершенными паросочетаниями в графе можно использовать для быстрой оценки наличия совершенного паросочетания в графе. Для этого он предложил заменить все ненулевые переменные x_{ij} матрицы Татта случайными числами. При такой замене отличный от нуля пфаффиан $\text{pf}(T)$ с высокой вероятностью останется отличным от нуля и наоборот. Повторяя этот тест несколько раз, мы можем повысить нашу уверенность в существовании или в отсутствии совершенного паросочетания в рассматриваемом графе G .

4. Выше мы заметили, что каждое из слагаемых пфаффиана $\text{pf}(T)$ отвечает тому или иному совершенному паросочетанию в графе G . Как следствие, пфаффиан позволяет нам не только отвечать на вопрос о существовании совершенного паросочетания, но и определять количество таких паросочетаний. Однако с практической точки зрения вычисление пфаффиана, зависящего от символьных переменных x_{ij} , представляет собой достаточно сложную задачу. Все было бы значительно проще, если бы мы смогли заменить x_{ij} на 1 или -1 так, чтобы каждое из слагаемых в пфаффиане получило одинаковый знак — например, стало бы положительным. При такой замене мы смогли бы подсчитать количество $m(G)$ совершенных паросочетаний по формуле

$$m(G) = \sqrt{\det(A)}, \quad \text{где } A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \pm 1 \text{ или } 0.$$

Для этого мы прежде всего должны научиться каким-то образом изменять знаки выражений в пфаффиане. Татт заметил, что это можно делать, переходя от неориентированного графа G к ориентированному графу D , то есть задавая каким-то образом ориентацию у каждого ребра $e \in E(G)$. При этом элементы a_{ij} матрицы $A(D)$ определяются так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) \in E(D), \\ -1, & \text{если } (j, i) \in E(D), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Как мы уже сказали, нас интересует не произвольная ориентация ребер, а лишь такая, при которой каждое из слагаемых в пфаффиане имеет один и тот же знак (например, оказывается положительным).

Определение 8. Ориентация D графа G , при которой все слагаемые в пфаффиане P оказываются одного и того же знака, называется *пфаффово-ориентацией*.

К сожалению, в случае произвольного графа пфаффово-ориентация существует далеко не всегда. Как следствие, в общем случае эта идея не проходит. Однако в 1967 году датскому физика Питеру Кастелейну удалось доказать наличие такой ориентации для случая планарных графов. Оказывается, справедлив следующий результат.

Теорема 9 (Kastelyen, 1967). *Любой планарный граф допускает пфаф-фору ориентацию, которая может быть построена за полиномиальное время.*

Следствием этого важного результата является тот факт, что в любом планарном графе G возможно за полиномиальное время подсчитать количество совершенных паросочетаний по формуле

$$m(G) = \sqrt{\det A}.$$

5. Любое совершенное паросочетание M в графе G индуцирует в нем 1-регулярный остовный подграф, который еще называют 1-фактором графа G . Естественным обобщением этого понятия является так называемый k -фактор графа, под которым понимают остовный k -регулярный подграф графа G . Мы уже встречались с такими подграфами в главе, посвященной циклам в графах. Настало время поговорить о критериях существования подобного рода объектов.

а. В начале данного параграфа мы доказали необходимое и достаточное условие существования совершенного паросочетания в графе G — теорему Татта. Возникает вопрос, возможно ли получить критерий существования k -фактора графа G для случая $k > 1$. Блестящий ответ на этот довольно-таки нетривиальный вопрос дал Уильям Татт — в 1954 году ему удалось свести эту задачу к уже известной задаче поиска совершенного паросочетания в произвольном графе G . Более того, он решил эту задачу для совсем уж общего случая, рассмотрев так называемый f -фактор графа.

Определение 10. Предположим, что на множестве $V(G)$ вершин графа G задана функция f , принимающая целые неотрицательные значения. f -фактором графа G называется такой его подграф H , у которого $\deg_H(x) = f(x)$ для любой вершины $x \in V(G)$.

Понятно, что в случае $f(x) = k$ для любой вершины $x \in V(G)$ мы получаем k -фактор графа G .

Давайте теперь вслед за Таттом покажем, что проблема существования в графе f -фактора может быть сведена к проверке существования совершенного паросочетания в некотором графе H , который можно конструктивно построить из G .

Заметим прежде всего, что необходимым условием существования f -фактора графа G является выполнение неравенства $f(x) \leq \deg(x)$ для любого $x \in V(G)$ — в противном случае f -фактор в графе существовать точно не может. Будем считать, что это условие выполнено. Обозначим тогда через $d'(x)$ величину, равную $d(x) - f(x)$, $d(x) = \deg(x)$, и построим по G новый граф H , в котором каждая вершина x заменена на полный двудольный подграф $K_{d(x), d'(x)}$ с долями $X(x)$, $|X(x)| = \deg(x)$, и $Y(x)$, $|Y(x)| = d'(x)$ (см. рис. 5.32; числа при вершинах графа G , изображенного на рис. 5.32(a), задают функцию $f(x)$, определяющую f -фактор графа G). Затем соединим каждую вершину из доли $X(x)$ с вершинами из $Y(y_i)$, $i = 1, \dots, d$, где y_i — смежные с x вершины в исходном графе G (см. рис. 5.32(b)).

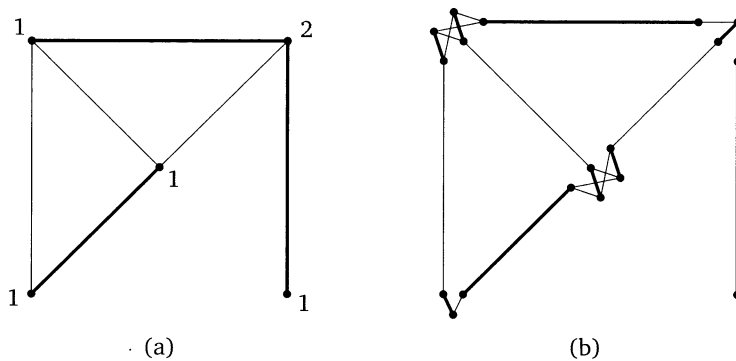


Рис. 5.32

Теорема 11 (Татт, 1954). *Граф G имеет f -фактор тогда и только тогда, когда в построенном описанным выше способом графе $H(G)$ имеется совершенное паросочетание.*

Доказательство. Предположим вначале, что в графе G существует f -фактор. В графе $H(G)$ соответствующие ребра будут покрывать $f(x)$ вершин в каждом полном двудольном графе $K_{d(x),d'(x)}$. Покрывая оставшиеся $2d'(x)$ вершин в каждом из этих двудольных графов ребрами некоторого паросочетания M' размера $d'(x)$, мы получаем совершенное паросочетание в $H(G)$.

Наоборот, предположим, что в графе $H(G)$ имеется совершенное паросочетание M . Стянем тогда все вершины, принадлежащие доле X , $|X| = d(x)$, каждого полного двудольного графа $K_{d(x),d'(x)}$ в одну вершину и удалим все вершины, принадлежащие доле Y , $|Y| = d'(x)$. В результате из $H(G)$ получим граф G , в котором оставшиеся ребра из M образуют f -фактор. \square

б. Итак, мы поняли, что вопрос существования k -фактора графа G сводится к известной задаче существования совершенного паросочетания в графе. Значительно более сложной является задача декомпозиции графа на k -факторы. Напомним, что под декомпозицией графа G на подграфы мы понимали разбиение множества $E(G)$ ребер на блоки, каждый из которых дает нам набор таких подграфов H_1, \dots, H_k , что

$$G = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k.$$

Сейчас нас будет интересовать случай, когда каждый из H_i представляет собой остовный подграф. Далеко не всякий граф, в котором существуют k -факторы, допускает подобную декомпозицию.

На рис. 5.33 показаны примеры графов, для которых подобного рода декомпозиции существуют. На рис. 5.33(а) изображена декомпозиция графа Петерсена G на 1- и 2-факторы. Жирными линиями на этом рисунке отмечены ребра совершенного паросочетания в графе G , индуцирующие остовный 1-регулярный подграф графа G . Обычными линиями на этом рисунке показаны ребра остовного 2-регулярного подграфа, представляющего собой 2-фактор графа G . На рис. 5.33(б) приведен пример графа, допускающего декомпозицию на два 2-фактора.

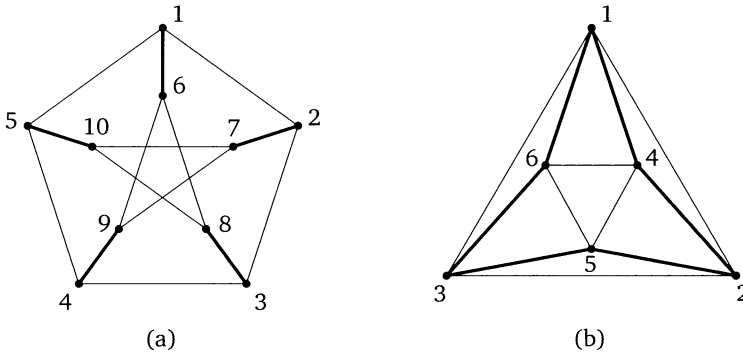


Рис. 5.33. Декомпозиция графов на остовные подграфы

Определение 12. Граф G называется k -факторизуемым, если он представим в виде декомпозиции нескольких k -факторов для некоторого фиксированного числа $k \geq 1$.

Граф, показанный на рис. 5.33(b), представляет собой характерный пример 2-факторизуемого графа.

с. Вообще говоря, вопрос существования у заданного графа декомпозиции его на k -факторы является довольно нетривиальным. Даже к настоящему времени известно не так много содержательных результатов, связанных с этой задачей. Тем удивительнее тот факт, что один из наиболее фундаментальных результатов, связанных с декомпозицией графов на k -факторы, был получен еще в 1891 году датским математиком Юлиусом Петерсенем. И касается этот результат 2-факторизуемых графов.

Ясно, что любой 2-факторизуемый граф обязан быть $2k$ -регулярным графом (см. рис. 5.33(b)). Мы знаем, что любой $2k$ -регулярный граф является четным, а значит, по теореме Веблена он представим в виде декомпозиции циклов. Если бы мы смогли любой такой набор разбить на блоки так, чтобы входящие в каждый блок циклы образовывали остовный 2-регулярный граф, то мы бы получили 2-факторизуемый граф. Петерсен доказал, что это всегда можно сделать.

Теорема 13 (Петерсен). *Граф G является 2-факторизуемым тогда и только тогда, когда он является $2k$ -регулярным для некоторого $k \geq 1$.*

Доказательство. Нам осталось убедиться, что любой $2k$ -регулярный граф 2-факторизуем. Без потери общности можно считать, что G является связным графом (см. рис. 5.34(a)). В этом случае G является эйлеровым графом, а значит, в нем существует эйлеров цикл C . Построим по этому циклу двудольный граф $H(G)$. В качестве долей этого графа возьмем два экземпляра множества $V(G)$ вершин графа G . Ребро между вершинами x и y мы проведем в случае, если вершина y следует непосредственно за x при обходе графа G по эйлерову циклу C .

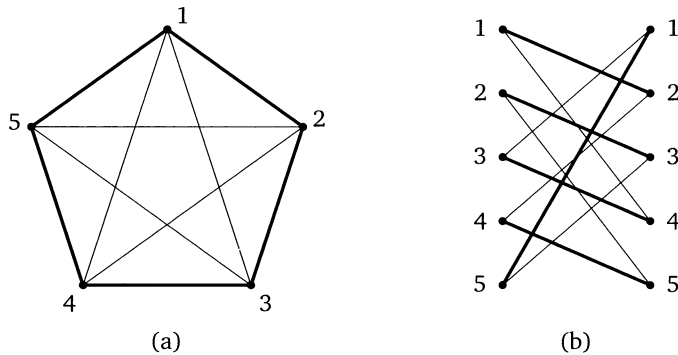


Рис. 5.34

В качестве примера рассмотрим 4-регулярный граф K_5 , показанный на рис. 5.34(a). Эйлеров цикл $C = (1, 2, 3, 4, 5, 3, 1, 4, 2, 5)$ в таком графе порождает двудольный граф $H(G)$, показанный на рис. 5.34(b).

Так как C входит в каждую вершину k раз и выходит из этой вершины k раз, то двудольный граф $H(G)$ является k -регулярным. В таком графе существует совершенное паросочетание (см.упражнение 5). На рис. 5.34(b) соответствующее паросочетание отмечено жирными линиями. Любое такое совершенное паросочетание в H порождает 2-регулярный остовный подграф в графе G . Так, совершенному паросочетанию, показанному на рис. 5.34(b), отвечает 2-фактор $(1, 2, 3, 4, 5)$ графа G , изображенный на рис. 5.34(a). Удаляя теперь данное совершенное паросочетание из двудольного графа H , мы получаем $(k - 1)$ -регулярный двудольный граф H' , в котором также существует совершенное паросочетание. Продолжая далее, мы в итоге получим разбиение исходного графа G на k остовных 2-регулярных подграфов. \square

Упражнения

1 (1 балл). Докажите с помощью теоремы Татта, что в изображенных на рис. 5.35 графах G_1, G_2 совершенное паросочетание отсутствует.

2 (1 балл). Докажите с помощью теоремы Татта, что в изображенном на рис. 5.36 графе G совершенное паросочетание отсутствует.

3 (1 балл). Докажите, что k -куб Q_k имеет совершенное паросочетание для любого $k \geq 1$.

4 (1,5 балла). Покажите, что в кубе Q_k найдется по меньшей мере $2^{2^{k-2}}$ совершенных паросочетаний для всех $k \geq 2$.

5 (1 балл). Подсчитайте количество совершенных паросочетаний в кубе Q_3 .

6 (1 балл). Пусть G — граф, в котором все вершины имеют нечетную степень. Предположим, что в графе G существует совершенное паросочетание M . Докажите, что такое паросочетание обязано включать любой мост в графе G .

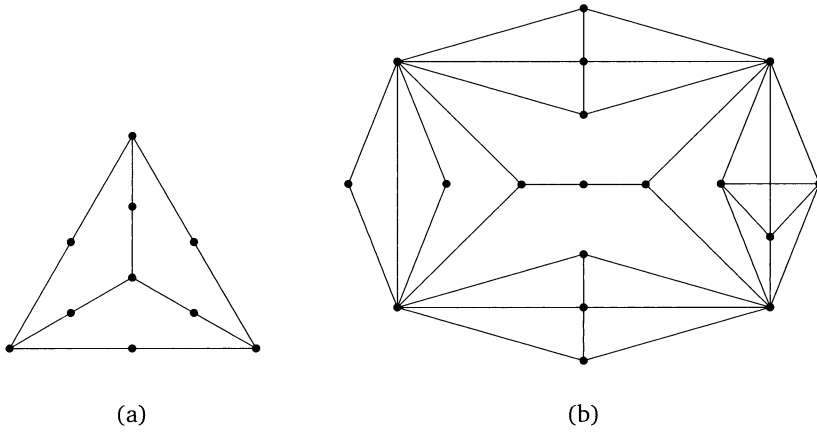


Рис. 5.35. (a) Граф G_1 ; (b) граф G_2

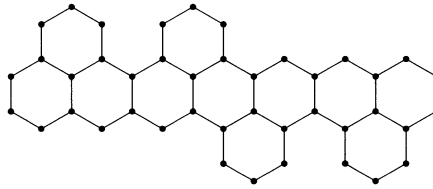


Рис. 5.36. Граф G

7 (1 балл). Пусть G — связный $2k$ -регулярный граф с чётным числом рёбер. Докажите, что G имеет k -фактор.

Дополнительные упражнения

8 (1,5 балла). Обозначим через G_n граф, построенный на $2n$ вершинах x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n , и имеющих рёбра вида $\{x_i, x_{i+1}\}$, $\{y_i, y_{i+1}\}$, а также $\{x_i, y_i\}$. Подсчитайте количество совершенных паросочетаний в таком графе.

9 (2 балла). Подсчитайте количество совершенных паросочетаний в графе Петерсена.

10 (2 балла). Пусть G — k -регулярный граф, построенный на четном количестве вершин, остающийся связным при удалении любых рёбер в количестве $k - 2$ штук. Докажите, что в таком графе существует совершенное паросочетание (теорема Плесника).

11 (2 балла). Докажите, что в условиях теоремы Плесника для любого ребра $e \in E(G)$ существует совершенное паросочетание графа G , содержащее e .

12 (1,5 балла). Пусть $G[X, Y]$ — двудольный граф. Образует из него граф \tilde{G} добавлением к Y дополнительной вершины z в случае, если $n = |V(G)|$ — нечетное число, а также добавлением к Y рёбер до превращения его в клику.

Докажите, что исходный граф G имеет паросочетание размером $|X|$ тогда и только тогда, когда в \tilde{G} существует совершенное паросочетание.

13 (1,5 балла). Докажите, что любой кубический граф, имеющий не более двух мостов, допускает декомпозицию на пути длины 3.

Решение упражнений

1. Удаляя четыре вершины графа G_1 , помеченные белым цветом на рис. 5.37(a), мы получим шесть изолированных вершин. Следовательно, для такого графа условия Татта не выполняются.

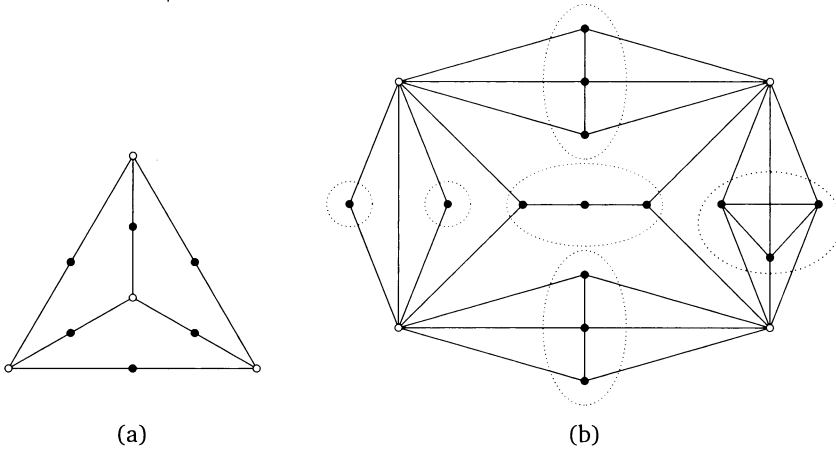


Рис. 5.37. (a) Граф G_1 ; (b) граф G_2

Аналогично, удаляя четыре помеченные на рис. 5.37(b) белым цветом вершины графа G_2 , мы разваливаем G_2 на шесть нечетных компонент. Поэтому и для графа G_2 условия Татта не выполняются.

2. Рассмотрим семь вершин графа G , помеченных белым цветом на рис. 5.38. Они разбивают граф G на девять нечетных компонент (отмеченные пунктирными линиями компоненты связности на рисунке). Следовательно, для этого подмножества S вершин условия Татта нарушаются.

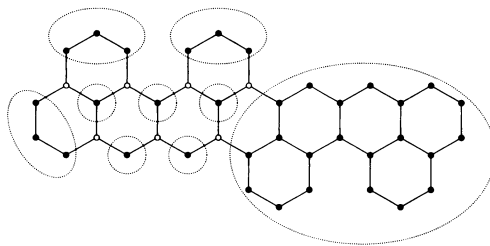


Рис. 5.38

3. Напомним, что любой k -куб Q_k мы можем получить, взяв два экземпляра Q_{k-1} , добавив к вершинам первой копии Q_{k-1} слева ноль, дописав к вершинам второго экземпляра Q_{k-1} слева единицу и соединив соответствующие вершины первого и второго экземпляров Q_{k-1} ребрами. Теперь заметим, что набор ребер, соединяющих эти подграфы, как раз и образует совершенное паросочетание в графе Q_k .

4. Докажем этот факт индукцией по k . В случае $k = 2$ у нас имеется два различных совершенных паросочетания, и это число совпадает с величиной $2^{2^{k-2}} = 2^1 = 2$. Предположим теперь, что требуемое утверждение доказано для всех $k \geq 2$, и покажем, что оно остается верным и в случае $k + 1$. Любой куб Q_{k+1} может быть получен из двух экземпляров куба Q_k . По индукционному предположению в каждом из них существует по меньшей мере $2^{2^{k-2}}$ совершенных паросочетаний. Так как мы можем выбрать в каждом из них совершенное паросочетание независимо от выбора совершенного паросочетания в другом экземпляре Q_k , то в Q_{k+1} найдется по меньшей мере $(2^{2^{k-2}})^2 = 2^{2^{k-1}}$ совершенных паросочетаний.

5. В кубе Q_3 имеется девять различных совершенных паросочетаний. Действительно, мы можем выбрать любое из трех ребер, выходящих из вершины $(0, 0, 0)$, и независимо от этого выбрать одно из трех ребер, выходящих из вершины $(1, 1, 1)$. Остальные два ребра выбираются при этом однозначно.

6. Предположим, что это не так. В этом случае удаление моста e не должно мешать существованию совершенного паросочетания в графе $G - e$. Но в таком графе обязана существовать компонента связности, имеющая ровно одну вершину четной степени. Так как количество вершин нечетной степени в любом графе четно, то мы получаем компоненту связности, имеющую нечетное количество вершин, а в такой компоненте совершенное паросочетание отсутствует.

7. Заметим, что граф G эйлеров. Занумеруем ребра графа в порядке обхода эйлерова цикла и выкинем каждое второе ребро. Очевидно, что результатом будет k -регулярный остовный подграф графа G .

§ 4. Максимальные паросочетания в произвольном графе.

Структурная теорема Галлаи—Эдмондса.

Алгоритм Эдмондса

1. Теперь перейдем к рассмотрению графов, в которых совершенные паросочетания отсутствуют.

а. Вместо совершенного паросочетания мы в любом таком графе G можем попытаться отыскать максимальное паросочетание M . При этом максимальное паросочетание M , не являющееся совершенным, оставляет непокрытыми часть вершин графа G .

Определение 1. Дефицитом $\text{def}(G)$ графа G называется количество его вершин, не покрытых максимальным паросочетанием M :

$$\text{def}(G) := |V(G)| - 2|M| = n - 2\alpha'(G).$$

Оказывается, дефицит графа можно подсчитать, используя подход, обобщающий критерий Татта (5.6) существования совершенного паросочетания в графе. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (Берж, 1958). *Для любого графа G справедливо равенство*

$$\text{def}(G) = \max_{S \subseteq V(G)} [c_{\text{odd}}(G-S) - |S|]. \quad (5.9)$$

Определение 3. Подмножество $B \subseteq V(G)$, на котором достигается максимум функции $c_{\text{odd}}(G-S) - |S|$, называется *барьером*.

б. С учетом равенства $\text{def}(G) = n - 2\alpha'(G)$ последнюю формулу часто записывают в виде

$$\alpha'(G) = \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V(G)} \{n - (c_{\text{odd}}(G-S) - |S|)\}, \quad (5.10)$$

подчеркивающим минимаксный характер формулы Бержа. Формула (5.10) часто называется формулой Татта—Бержа.

Ранее мы могли получать оценку сверху на $\alpha'(G)$ лишь с помощью вершинного покрытия — мы доказали следующее свойство слабой двойственности:

$$\alpha'(G) \leq \beta(G).$$

Равенство $\alpha'(G) = \beta(G)$ (сильная двойственность) имело место только лишь для случая двудольных графов — в случае произвольных графов имелись примеры, когда $\beta(G) > \alpha'(G)$. Равенство (5.10) с этой точки зрения значительно более универсально — по сути, это есть свойство сильной двойственности на языке паросочетаний и барьеров, позволяющее строго доказать максимальность того или иного паросочетания в произвольном графе G .

В качестве примера рассмотрим граф Сильвестра, показанный на рис. 5.30. Отмеченное жирными линиями паросочетание M оставляет непокрытыми две вершины такого графа. Нам хочется доказать, что это паросочетание является максимальным. Для этого заметим, что после удаления центральной вершины x графа G мы получаем три нечетные компоненты в графе $G-S$, $S = \{x\}$. Отсюда на основании формулы Татта—Бержа мы заключаем, что M действительно является максимальным паросочетанием, а подмножество $B = \{x\}$ — барьером для этого графа.

с. Приступим к доказательству формулы Бержа. Легче всего доказать, что для любого S дефицит графа оказывается больше или равным $c_{\text{odd}}(G-S) - |S|$:

$$\text{def}(G) = n - 2\alpha'(G) \geq c_{\text{odd}}(G-S) - |S| \quad \forall S \subseteq V(G).$$

Рассмотрим для этого произвольное подмножество $S \subseteq V(G)$, а также произвольное паросочетание M . В любой нечетной компоненте графа $G-S$ по крайней мере одна вершина не покрыта паросочетанием M . Поэтому, даже если предположить, что каждая вершина подмножества S соединена в G ребром $e \in M$ с некоторой нечетной компонентой графа $G-S$, в графе $G-S$ останется еще как минимум $c_{\text{odd}}(G-S) - |S|$ нечетных компонент. Но тогда как минимум $c_{\text{odd}}(G-S) - |S|$ вершин остаются не покрытыми ребрами из M , так что для любого $S \subseteq V(G)$ и любого M имеем

$$n - 2|M| \geq c_{\text{odd}}(G-S) - |S|.$$

В частности, для максимального паросочетания M и барьера B имеем

$$n - 2\alpha'(G) = \text{def}(G) \geq c_{\text{odd}}(G - B) - |B|.$$

d. Осталось доказать обратное неравенство. Следствием леммы 4 является тот факт, что четность числа

$$m = \max_{S \subset V(G)} [c_{\text{odd}}(G - S) - |S|] = c_{\text{odd}}(G - B) - |B|$$

совпадает с четностью количества n вершин в графе. Кроме того, заметим, что величина m всегда больше или равна нулю. Действительно, выбирая в качестве подмножества S пустое подмножество, мы получаем величину $c_{\text{odd}}(G) \geq 0$, а значит, $m \geq c_{\text{odd}}(G) \geq 0$.

Добавим тогда к исходному графу G подмножество W , состоящее из m новых вершин, и соединим каждую вершину подмножества W со всеми остальными вершинами — как новыми, так и старыми (рис. 5.39). В полученном таким образом графе \tilde{G} имеется достаточно большое количество ребер, поэтому есть шанс, что в нем существует совершенное паросочетание. Покажем, что это действительно так.

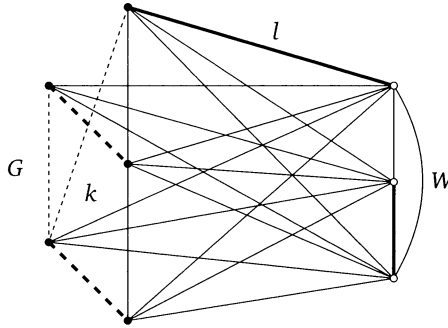


Рис. 5.39

Заметим прежде всего, что необходимое условие существования совершенного паросочетания в графе \tilde{G} выполняется — так как четность чисел m и $n = |V(G)|$ совпадает, то количество $|V(\tilde{G})| = n + m$ вершин в новом графе \tilde{G} четно. Иными словами, для подмножества $T = \emptyset$ условие Татта (5.6) в графе \tilde{G} выполняется. Покажем, что эти условия выполняются и для любого подмножества $T \neq \emptyset$.

Если при удалении подмножества T множества вершин останется хотя бы одна вершина из множества W , то граф $\tilde{G} - T$ останется связным и условие (5.6) выполнено:

$$c_{\text{odd}}(\tilde{G} - T) \leq 1 \leq |T|.$$

В противном случае, то есть в случае, когда $T = W \cup S$, $S \subset V(G)$, мы по построению графа \tilde{G} получаем, что $\tilde{G} - T = G - S$, и поэтому

$$c_{\text{odd}}(\tilde{G} - T) = c_{\text{odd}}(G - S) \leq m + |S| = |W \cup S| = |T|.$$

е. Итак, для графа \tilde{G} условия Татта (5.6) выполняются, то есть в таком графе существует совершенное паросочетание \tilde{M} (ребра, отмеченные жирными линиями на рис. 5.39). Обозначим через l количество ребер в паросочетании \tilde{M} , исходящих из W в G (см. рис. 5.39). Так как в W содержится m вершин, то $l \leq m$.

Пусть теперь k — количество ребер в \tilde{M} , оба конца которых лежат в G (рис. 5.39). Ясно, что

$$2k = n - l.$$

Так как эти k ребер образуют какое-то паросочетание в исходном графе G , то $k \leq |M|$, где M — максимальное паросочетание в графе G . Следовательно,

$$2\alpha'(G) = 2|M| \geq 2k = n - l \geq n - m \Rightarrow m \geq n - 2\alpha'(G) =: \text{def}(G).$$

Теорема Бержа доказана. \square

2. Итак, максимальное паросочетание в графе G тесным образом связано с понятием барьера — подмножества S множества $V(G)$ вершин, доставляющего максимум функции $c_{\text{odd}}(G - S) - |S|$. В принципе, в графе G может существовать несколько различных барьеров. Более того, эти барьеры могут иметь разное количество элементов. В этой связи возникает вопрос — существует ли способ построения в каком-то смысле канонического барьера? Утвердительный ответ на этот вопрос был дан независимо Галлаи (1963 год) и Эдмондсом (1965 год). К описанию такого канонического барьера мы и перейдем в заключительной части данного параграфа.

а. Введем несколько полезных обозначений. Через $B(G)$ мы обозначим подмножество, состоящее из вершин, покрываемых любым максимальным паросочетанием в графе G , а через $D(G)$ — дополнение $V(G) \setminus B(G)$ подмножества $B(G)$ в $V(G)$ (см. рис. 5.40). Подмножество $D(G)$ характеризуется, таким образом, тем, что для любой вершины $x \in D(G)$ найдется хотя бы одно максимальное паросочетание M , не покрывающее x . Подмножество $B(G)$, в свою очередь, можно далее разбить на подмножество $A(G)$, состоящее из вершин, имеющих хотя бы одного соседа из $D(G)$, и на подмножество $C(G) = B(G) \setminus A(G)$.

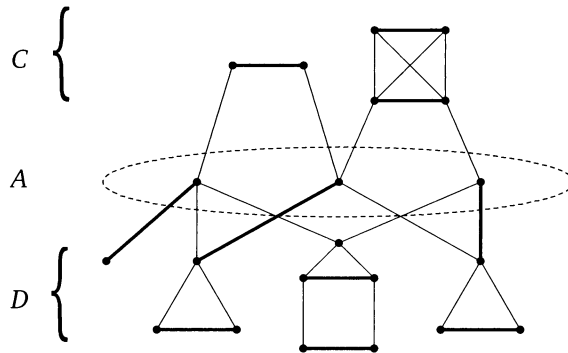


Рис. 5.40

Кроме того, нам еще понадобится понятие фактор-критического графа.

Определение 4. Граф G называется фактор-критическим, если каждый его подграф, полученный из G удалением любой вершины $x \in V(G)$, обладает совершенным паросочетанием.

Примерами фактор-критических графов являются полный граф K_{2n+1} на нечетном числе вершин, а также цикл C_{2n+1} нечетной длины.

б. Теперь мы готовы сформулировать основную теорему.

Теорема 5 (структурная теорема Галлаи—Эдмондса). Обозначим через G_i , $i = 1, \dots, k$, компоненты подграфа $G[D]$, индуцированного подмножеством D вершин. Для любого максимального паросочетания M имеют место следующие утверждения.

1. Паросочетание M покрывает все вершины подграфа $G[C]$, индуцированного подмножеством C вершин. В частности, отсюда следует, что любая связная компонента подграфа $G[C]$ представляет собой четный подграф.
2. Каждая вершина x подмножества A покрыта ребром паросочетания M , соединяющим x со своей собственной компонентой G_i подграфа $G[D]$.
3. Каждая связная компонента G_i подграфа $G[D]$ представляет собой фактор-критический граф.
4. Для любого подмножества $S \neq \emptyset$ множества A подмножество $N_G(S)$ его соседей в G имеет по вершине хотя бы в $|S| + 1$ из k компонент G_i .
5. Подмножество A представляет собой барьер в графе G , то есть

$$\text{def}(G) = c_{\text{odd}}(G - A) - |A|,$$

причем количество $c_{\text{odd}}(G - A)$ нечетных компонент графа $G - A$ совпадает с числом k связных компонент подграфа $G[D]$.

с. Для доказательства этой теоремы нам понадобятся несколько дополнительных утверждений.

Лемма 6. Пусть T — барьер максимального размера в графе G . Тогда все компоненты графа $G - T$ нечетны.

Доказательство. Действительно, в противном случае мы можем рассмотреть произвольное остовное дерево в одной из четных компонент G_i графа $G - T$. Добавляя к T любой из листов x этого дерева, мы получим, во-первых, нечетную компоненту $G_i - x$, а во-вторых, барьер $T \cup \{x\}$ на единицу большего размера с тем же дефицитом, что и у T , что невозможно. \square

Лемма 7. Пусть T — барьер максимального размера в графе G . Тогда любая компонента C связности графа $G - T$ является фактор-критическим графом.

Доказательство. Как мы знаем из предыдущей леммы, компонента C содержит нечетное количество вершин. Пусть x — произвольная вершина графа C . Проверим, что для графа $C - x$ выполняются условия Татта.

Для этого заметим прежде всего, что для любого подмножества S множества $V(C - x)$ справедливо равенство

$$c_{\text{odd}}(G - T - x - S) = c_{\text{odd}}(G - T) - 1 + c_{\text{odd}}(C - x - S).$$

Действительно, количество нечетных компонент в графе $G - T - x - S$ равно сумме количества этих компонент в графе $G - T$ за вычетом компоненты C и количества нечетных компонент, образующихся из C в процессе удаления x и S . Как следствие,

$$c_{\text{odd}}(G - T - x - S) - (|T| + 1 + |S|) = c_{\text{odd}}(G - T) - |T| + c_{\text{odd}}(C - x - S) - |S| - 2.$$

Теперь заметим, что T — максимальный барьер, а значит,

$$c_{\text{odd}}(G - T) - |T| > c_{\text{odd}}(G - T - x - S) - (|T| + 1 + |S|).$$

Более того, на основании леммы 4 оба этих числа имеют одну и ту же четность, так что

$$c_{\text{odd}}(G - T) - |T| - 2 \geq c_{\text{odd}}(G - T - x - S) - (|T| + 1 + |S|).$$

Как следствие,

$$c_{\text{odd}}(C - x - S) - |S| \leq 0,$$

так что для графа $C - x$ условия Татта выполняются. \square

d. Современные способы доказательства теоремы Галлаи—Эдмондса основываются на использовании теоремы Холла [36]. В процессе такого доказательства нам понадобится построить вспомогательный двудольный граф $H(T)$. В качестве доли X в таком графе выбираются вершины подграфа T с удаленными ребрами, соединяющими эти вершины в исходном графе G между собой, а в качестве доли Y — вершины, полученные стягиванием каждой из нечетных компонент графа $G - T$ (рис. 5.41(b)). Ребро $\{x, y\}$ в таком графе проводится в случае, если $x \in V(T)$ имеет в соответствующей вершине y компоненте G_i смежную вершину.

Лемма 8. Пусть T — барьер максимального размера в графе G . Тогда в графе $H(T)$ найдется X -насыщенное паросочетание.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $S \subseteq X$ и рассмотрим подмножество $Y \setminus N(S)$ мощности $|Y| - |N(S)|$. По построению все вершины этого подмножества представляют собой нечетные компоненты в графе $G - (T \setminus S)$, $|T \setminus S| = |T| - |S|$. Как следствие,

$$|Y \setminus N(S)| - |T \setminus S| \leq c_{\text{odd}}(G - (T \setminus S)) - |T \setminus S| \leq c_{\text{odd}}(G - T) - |T|.$$

При этом так как $c_{\text{odd}}(G - T) = |Y|$, то последнее неравенство мы можем переписать в следующем виде:

$$(|Y| - |N(S)|) - (|T| - |S|) \leq |Y| - |T|.$$

Следовательно, $|S| - |N(S)| \leq 0$, так что условия Холла для двудольного графа $H(T)$ выполнены. \square

е. Приступим наконец к доказательству теоремы Галлаи—Эдмондса. Пусть T — барьер максимального размера в G (см. вершины, обведенные пунктирной линией на рис. 5.41(a)), а M — произвольное максимальное паросочетание в G . Согласно формуле Татта—Бержа в графе G остается $\text{def}(G)$ вершин графа G , не покрытых паросочетанием M . Кроме того, из любой вершины T исходит ребро, покрытое паросочетанием M , в какую-то свою собственную компоненту G_i графа $G - T$. Все остальные ребра M формируют в компонентах G_i так называемые почти совершенные паросочетания — паросочетания, покрывающие все вершины G_i , кроме одной.

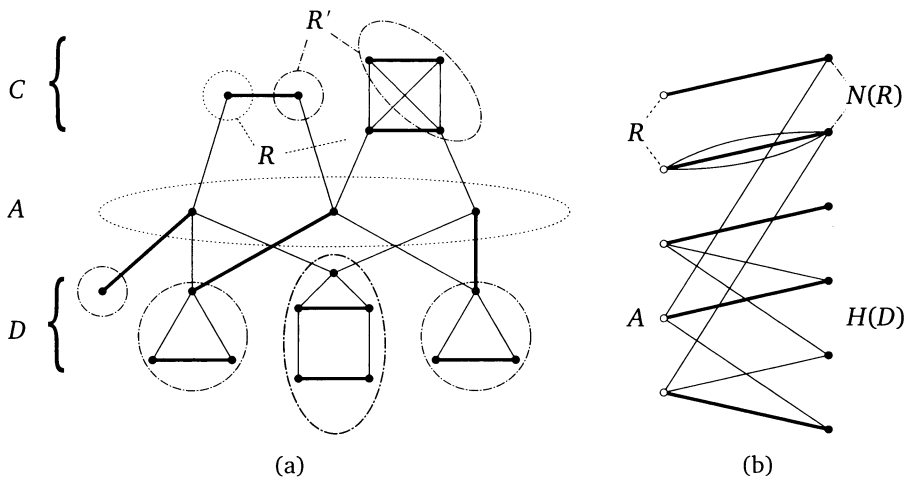


Рис. 5.41

Пусть $H(T)$ — вспомогательный двудольный граф, построенный по барьеру T (см. рис. 5.41(b)). Так как в нем существует T -насыщенное паросочетание, то в нем выполняются условия Холла: $|N(S)| \geq |S|$ для любого $S \subseteq T$. Заметим, что в случае $S = \emptyset$ мощность подмножества $N(\emptyset)$ равна нулю. Следовательно, существует непустой набор подмножеств, для которых неравенство $|N(S)| \geq |S|$ обращается в равенство. Обозначим через R максимальное из таких подмножеств T (см. рис. 5.41):

$$R = \max_{S \subseteq T} \{S : |N(S)| = |S|\}.$$

Введем теперь подмножество R' всех вершин, входящих во все компоненты графа $G - T$, принадлежащие в двудольном графе $H(T)$ подмножеству $N(R)$ (см. рис. 5.41). В силу условия $|N(R)| = |R|$ каждое ребро паросочетания M , исходящее из вершины $x \in R$, приходит в вершину u_i , принадлежащую своей собственной компоненте связности G_i подграфа $G[R']$. Оставшиеся вершины из G_i также покрыты ребрами паросочетания M . Иными словами, любое максимальное паросочетание M покрывает все вершины подмножества $C := R \cup R'$.

Обозначим $A := T \setminus R$, $D := V(G) \setminus (T \cup R')$. Мы уже знаем, что любая вершина из A соединяется ребром, покрытым M , с какой-то своей собственной компонентой подграфа $G[D]$. Покажем теперь, что для любой вершины $x \in D$ найдется максимальное паросочетание M в графе G , не покрывающее x .

Рассмотрим для этого двудольный подграф H' , полученный из H удалением вершин R и $N(R)$ (см. двудольный подграф на рис. 5.41(b), построенный на долях A и $H(D)$). Для любого непустого подмножества $S \subseteq A$ мы имеем $N(S) > |S|$ в H' — в противном случае мы бы могли увеличить R , добавив к нему вершины S . Поэтому мы можем удалить произвольную вершину подмножества $N(A) = H(D)$ в H' , не нарушив при этом условия Холла. Таким образом, найдется A -насыщенное паросочетание в H' , не покрывающее одну из вершин $H(D)$. Кроме того, согласно лемме 7 каждая из компонент подграфа $G - T$ представляет собой фактор-критический граф, а значит, каждая вершина из D остается не покрытой каким-то максимальным паросочетанием M .

Заметим теперь, что никакая вершина из $C = R \cup R'$ не связана ребром ни с какой другой вершиной из D . Как следствие, C , A и D представляют собой нужные нам части декомпозиции Галлаи—Эдмондса, удовлетворяющие пунктам 1–3 теоремы. Кроме того, из условия $N(S) > |S|$ для любого непустого $S \subseteq A$ следует и четвертый пункт теоремы Галлаи—Эдмондса.

Наконец, так как T есть барьер в графе G , то

$$\text{def}(G) = c_{\text{odd}}(G - T) - |T| = c_{\text{odd}}(G[D]) + c_{\text{odd}}(G[R']) - |R \cup A| = c_{\text{odd}}(G[D]) - |A|.$$

Так как при этом $c_{\text{odd}}(G - C) = 0$, то

$$c_{\text{odd}}(G[D]) = c_{\text{odd}}(G - A - C) = c_{\text{odd}}(G - A),$$

так что

$$\text{def}(G) = c_{\text{odd}}(G - A) - |A|,$$

то есть A также представляет собой барьер в графе G . □

Следствие 9. *Граф G является фактор-критическим тогда и только тогда, когда $A = \emptyset$ есть единственный барьер в G .*

3. В заключительной части данного параграфа поговорим о возможности построения алгоритма для нахождения максимального паросочетания в произвольном графе G .

а. В принципе, мы можем попытаться использовать алгоритм Куна для поиска максимального паросочетания и в произвольном графе G . Однако непосредственное применение этого алгоритма к успеху не приводит, что связано, конечно же, с наличием в графе G циклов нечетной длины.

Рассмотрим в качестве примера граф G , показанный на рис. 5.42. В таком графе существует M -дополняющий путь $P = (x, u, a, b, c, d, v, y)$. Если алгоритм поиска в глубину из вершины a пойдет в вершину b , то он этот путь найдет. Однако если алгоритм поиска в глубину, дойдя по пути (x, u, a) до вершины a , пройдет затем в вершины v и d , то он указанный выше M -дополняющий путь P уже не найдет. Иными словами, в случае произвольного

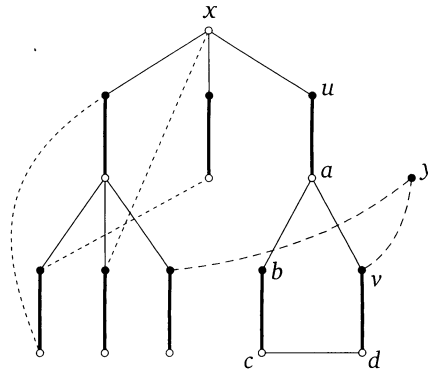


Рис. 5.42

графа G проблема состоит в том, что при попадании в цикл нечетной длины алгоритм поиска в глубину может пойти по циклу в неправильном направлении.

б. Эдмондс (Edmonds, 1965) предложил алгоритм поиска максимального паросочетания в произвольном графе G (так называемый blossom algorithm), который позволяет обойти описанные выше сложности.

Определение 10. Пусть x — вершина, не покрытая паросочетанием M . Предположим, что в графе G существуют два M -чередующихся пути из x в некоторую другую вершину v , имеющие разную четность (пути (x, u, a, v) и (x, u, a, b, c, d, v) на рис. 5.42). Наибольший общий участок этих двух путей, имеющий четную длину (участок (x, u, a) на рис. 5.42), называется *стеблем* (stem). Конечная вершина стебля (вершина a на рис. 5.42), называется *базой* (base). К базе примыкает цикл нечетной длины (цикл (a, b, c, d, v, a) на рис. 5.42), состоящий из $2k + 1$ ребра, k из которых покрыты паросочетанием M , называемый *цветком* (blossom) B . База a представляет собой единственную вершину цикла B , не покрытую ребрами паросочетания M .

Идея, лежащая в основе алгоритма Эдмондса, состоит в процедуре, известной под названием *процедуры сжатия цветка* (blossom shrinking). На каждом шаге этой процедуры мы заменяем цикл нечетной длины B (blossom) на одну псевдовершину B (сжимаем цветок). При этом все внешние ребра, исходящие из цикла нечетной длины, становятся инцидентными псевдовершине B . После сжатия очередного цветка мы пытаемся продолжить данный процесс, стартуя с псевдовершины B . Если у нас в результате сжатия появился еще один цикл C нечетной длины, содержащий псевдовершину B , мы вновь сжимаем его в новую псевдовершину C и так далее. Как только мы находим в процессе этих действий M -дополняющий путь, соединяющий u с вершиной y , не покрытой паросочетанием M , мы разворачиваем все сжатые циклы обратно, выбирая в каждом цикле из двух возможных путей тот, который не нарушит M -чередующесть восстанавливаемого пути.

с. В качестве примера рассмотрим граф G , показанный на рис. 5.43(a). Жирными линиями на этом рисунке отмечены ребра, входящие в некоторое паросочетание M . Вершина u не покрыта этим паросочетанием. Если мы пройдем из u вдоль пути (u, a, b) , мы обнаружим, что этот путь является

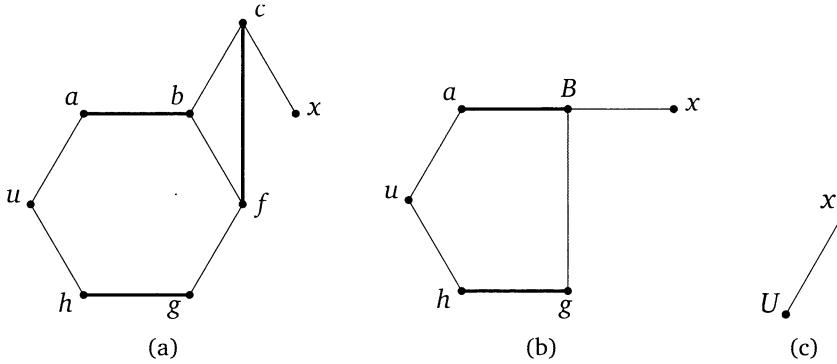


Рис. 5.43

стеблем цветка, образованного объединением путей (u, a, b, f, c) и (u, a, b, c) , а вершина b является его базой. Сжимая цикл (b, c, f) нечетной длины в одну псевдовершину B , мы получим граф G' , показанный на рис. 5.43(b). В таком графе, в свою очередь, имеется цветок, состоящий из тривиального стебля u , а также цикла (u, a, B, g, h) нечетной длины. Сжимая этот цикл в псевдовершину U , мы получаем граф G'' , изображенный на рис. 5.43(c). В этом графе у нас имеется M -дополняющий путь (U, x) . Разворачивая затем цветок, соответствующий псевдовершине U , и выбирая в образовавшемся цикле сегмент (u, a, B, x) , мы получаем M -дополняющий путь (u, a, B, x) в графе G' . Наконец, разворачивая в G' псевдовершину B и выбирая в цикле (b, f, c) сегмент (b, f, c) , мы в исходном графе G обнаруживаем M -дополняющий путь (u, a, b, f, c, x) .

d. Заметим в заключение, что подмножества A , C и D , фигурирующие в формулировке теоремы Галлаи—Эдмондса, можно эффективно находить с помощью алгоритма Эдмондса поиска максимального паросочетания в произвольном графе G , описанного в предыдущем параграфе. Пусть M — максимальное паросочетание в графе G . Предположим, что M оставляет непокрытыми вершины подмножества $X \subseteq V(G)$. Можно показать, что D есть подмножество, состоящее из вершин, достижимых из X с помощью M -чередующихся путей четной длины (в частности, $X \subseteq D$), A представляет собой подмножество, состоящее из всех вершин, достижимых из X с помощью M -чередующихся путей, за вычетом вершин подмножества D , а C есть подмножество, состоящее из вершин, не достижимых из X с помощью M -чередующихся путей.

На рис. 5.44(a) показан пример графа G с описанной выше декомпозицией. Ребра максимального паросочетания M отмечены на этом рисунке жирными линиями. Белым цветом помечены вершины подмножества A ,

ромбами — вершины подмножества B . Оставшиеся вершины принадлежат подмножеству D .

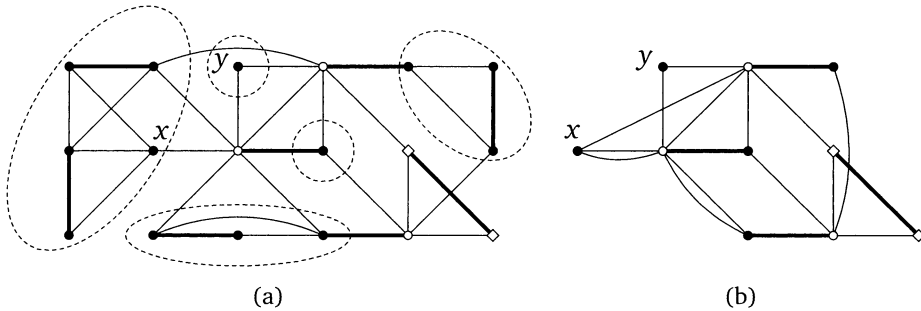


Рис. 5.44

Обозначим теперь через G' граф, полученный из G с помощью алгоритма сжатия цветков (см. рис. 5.44(b)). Оказывается, такой граф распадается на $|X|$ M -чередующихся деревьев с корнями в вершинах подмножества X (вершины x и y на рис. 5.44(b)). Вершины, достижимые из X по M -чередующимся путям нечетной длины, образуют подмножество A из теоремы Галлаи—Эдмондса (вершины, помеченные белым цветом на рис. 5.44(b)), а вершины, не достижимые из X , представляют собой подмножество C (вершины, обозначенные ромбами на рис. 5.44(b)). Заметим, что оба этих подмножества совпадают с соответствующими подмножествами вершин исходного графа G (см. рис. 5.44(a)). Наконец, каждой вершине, достижимой из X в графе G' по M -чередующимся путям четной длины (черные вершины на рис. 5.44(b)), отвечает некоторая нечетная компонента связности графа $G - A$, представляющая собой фактор-критический подграф графа G (см. группы вершин, обведенные пунктирными линиями на рис. 5.44(a)).

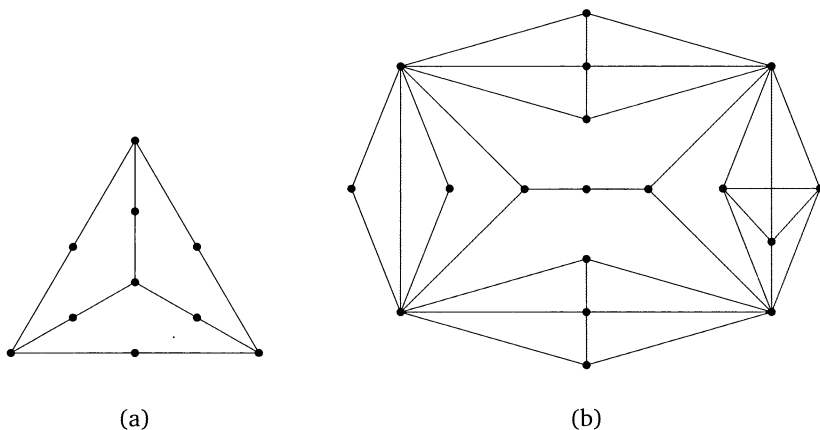
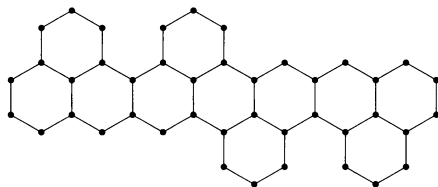
Упражнения

1 (1,5 балла). Найдите максимальные паросочетания в графах G_1 и G_2 , изображенных на рис. 5.45, и докажите с помощью формулы Татта—Бержа, что найденные паросочетания действительно являются максимальными.

2 (1,5 балла). Найдите максимальное паросочетание в графе G , изображенном на рис. 5.46, и докажите с помощью формулы Татта—Бержа, что найденное паросочетание действительно является максимальным.

3 (1,5 балла). Докажите, что в дереве T существует совершенное паросочетание M тогда и только тогда, когда для любой вершины $x \in V(T)$ справедливо равенство $c_{\text{odd}}(T - x) = 1$.

4 (1,5 балла). Чему равно минимальное количество вершин в кубическом графе, не имеющем совершенного паросочетания?

Рис. 5.45. (a) Граф G_1 ; (b) граф G_2 Рис. 5.46. Граф G

Дополнительные упражнения

5 (2 балла). Для любого $k > 1$ предъявите k -регулярный граф, в котором совершенное паросочетание отсутствует.

6 (1,5 балла). Напомним, что граф называется G фактор-критическим, если в нем нет совершенного паросочетания, но при удалении любой вершины оно появляется. Иными словами, для любой вершины x в графе найдется паросочетание, покрывающее все вершины графа, кроме выбранной вершины x . Докажите, что $c_{\text{odd}}(G - S) - |S| \leq 1$ для любого непустого подмножества S вершин графа G .

7 (1 балл). Докажите, что никакой двудольный граф $G[X, Y]$ фактор-критическим быть не может.

Решение упражнений

1. Удаляя четыре вершины графа G_1 , помеченные белым цветом на рис. 5.47(a), мы получим шесть изолированных вершин. Следовательно, величина $c_{\text{odd}}(G - S) - |S|$ для выбранного подмножества S белых вершин равна 2. Так как при этом в графе G_1 найдется паросочетание M , покрывающее восемь из десяти вершин графа G_1 (жирные ребра на рис. 5.47(b)), то такое па-

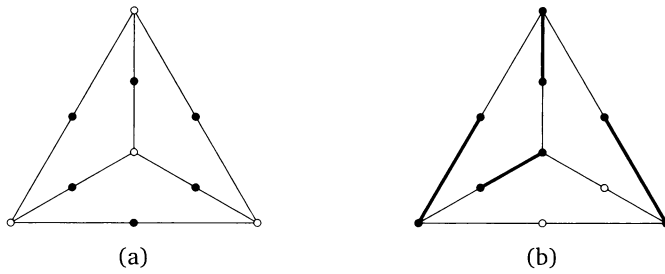


Рис. 5.47

росочетание является максимальным, а подмножество S — барьером в этом графе.

Аналогично, удаляя четыре помеченные на рис. 5.48(a) белым цветом вершины графа G_2 , мы разваливаем G_2 на шесть нечетных компонент. Так как в графе существует паросочетание, покрывающее все вершины, кроме двух (помеченных белым цветом на рис. 5.48(b)), то такое паросочетание является максимальным, а подмножество S вершин, помеченных белым цветом на рис. 5.48(a), является барьером в графе.

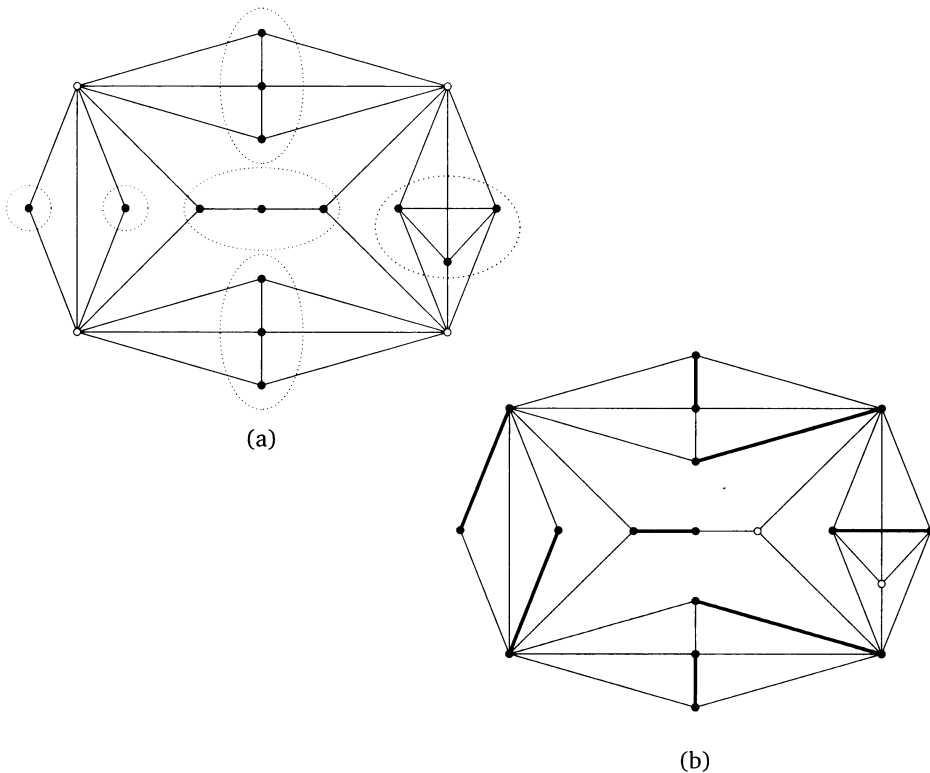


Рис. 5.48

2. Рассмотрим семь вершин графа G , помеченных белым цветом на рис. 5.49(a). Они разбивают граф G на девять нечетных компонент (отмеченные пунктирными линиями компоненты связности на рисунке). Так как в графе G существует паросочетание, покрывающее 40 из 42 вершин графа (ребра, отмеченные жирными линиями на рис. 5.49(b)), то такое паросочетание является максимальным, а помеченные белым цветом на рис. 5.49(a) вершины образуют барьер в G .

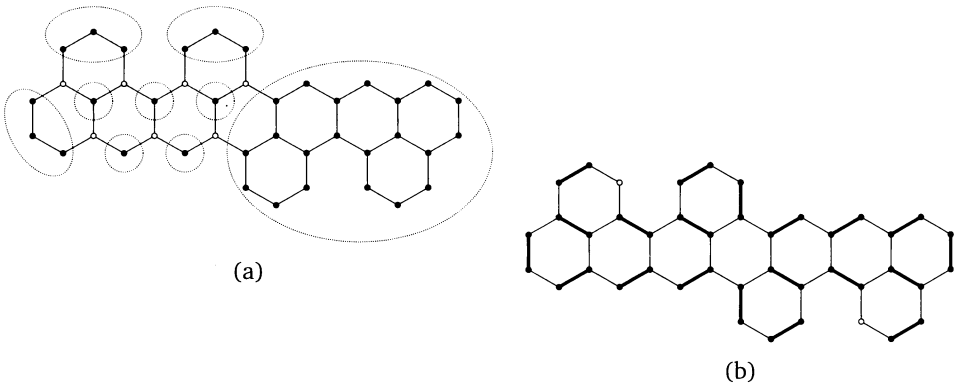


Рис. 5.49

3. Предположим вначале, что в дереве T существует совершенное паросочетание M . Это означает, что любая вершина $x \in V(T)$ инцидентна только одному ребру $e = \{x, y\} \in M$. Удаляя вершину x , мы оставляем единственную вершину y не покрытой паросочетанием M в графе $T - x$. Следовательно, в компоненте $T - x$, содержащей y , нечетное количество вершин. Вершины во всех компонентах связности, не содержащих y , по-прежнему остаются покрытыми ребрами из M , а следовательно, содержат четное количество вершин.

Теперь предположим, что в дереве для любой вершины $x \in V(T)$ выполняется равенство $c_{\text{odd}}(T - x) = 1$. Покажем, что в T существует совершенное паросочетание. Можно доказать этот факт индукцией по количеству n вершин в дереве. В случае $n = 2$ данный факт очевиден. Теперь предположим, что мы доказали его для всех деревьев на $n \geq 2$ вершинах, и покажем, что он остается справедливым и для дерева, построенного на $n + 2$ вершинах. Рассмотрим в дереве T максимальный путь P . Пусть y есть один из концов этого пути, а x — смежная с этим листом вершина дерева T . Так как $c_{\text{odd}}(T - x) = 1$, а P — максимальный путь, то степень вершины x равна двум. Удаляя тогда вершины x и y , мы получаем дерево T' , в котором по индукционному предположению существует совершенное паросочетание M' . Добавляя к M' ребро $\{x, y\}$, мы получаем совершенное паросочетание M в T .

Второй способ доказательства этого факта состоит в следующем. Условие $c_{\text{odd}}(T - x) = 1$ для любой вершины $x \in V(T)$ означает, что любая вершина x в дереве T имеет смежную вершину y , лежащую в нечетной компоненте

графа $T - x$. Покажем, что паросочетание M , состоящее из ребер вида $\{x, y\}$, даст в графе T совершенное паросочетание. Для этого достаточно показать, что если y есть смежная с x вершина в единственной нечетной компоненте T_y графа $T - x$, то и x есть смежная с y вершина в единственной нечетной компоненте T_x графа $T - y$. Так как $c_{\text{odd}}(T - x) = 1$, то все компоненты графа $T - x$, отличные от T_y , имеют четное количество вершин. Поддерево T_x состоит из тех же четных компонент, к которым добавлена вершина x , соединенная ребрами с каждой из этих компонент. Следовательно, количество вершин в T_x нечетно.

4. Это количество равно 16, а граф, на котором эта оценка достигается, показан на рис. 5.50. Действительно, у такого графа должно быть по меньшей мере три моста. Пусть x — вершина, инцидентная этим трем мостам. Три смежные с ней вершины обозначим через $y_i, i = 1, \dots, 3$. Степени этих вершин должны равняться трем. Следовательно, каждая из них должна соединяться еще с двумя вершинами. Но и у этих двух вершин степень должна равняться трем. Достичь этого, соединяя эти две вершины ребром, невозможно. Поэтому нам нужно добавить по меньшей мере одну вершину. Несложно убедиться, что одной вершины нам не хватит, так что добавлять приходится еще по две вершины. В результате получаем граф на 16 вершинах, показанный на рис. 5.50.

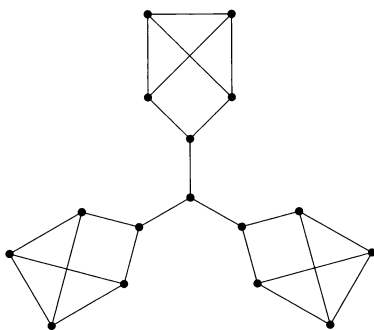


Рис. 5.50. Граф Сильвестра

ГЛАВА 6

Раскраска графов

§1. k -раскрашиваемые графы. Теорема Брукса

1. Как мы уже неоднократно упоминали выше, любой двудольный граф мы можем рассматривать как двураскрашиваемый граф, т. е. граф, вершины которого могут быть правильно окрашены в два цвета. Логично предположить, что наряду с двураскрашиваемыми должны существовать и графы более общего вида, а именно k -раскрашиваемые графы. К изучению таких графов мы сейчас и перейдем.

а. Под раскраской вершин графа G понимается разбиение множества V его вершин на блоки, называемые цветами. Задать такое разбиение можно, например, с помощью функции $\varphi: V \rightarrow C$, отображающей множество V вершин на некоторое множество $C = \{1, \dots, k\}$, называемое множеством цветов.

Определение 1. Раскраска вершин простого графа G называется *правильной*, если любые две смежные вершины графа окрашены в разные цвета. Любой граф, который допускает правильную раскраску своих вершин в k цветов, называется *k -раскрашиваемым графом*.

Замечание 2. При анализе k -раскрашиваемых графов нам достаточно ограничиться простыми графами. Действительно, любая петля соединяет вершину саму с собой. Такую вершину мы одновременно в разные цвета раскрасить, конечно же, не сможем. Как следствие, графы с петлями правильно раскрасить невозможно в принципе, так что мы их сразу можем исключить из рассмотрения. Далее нас, как правило, будет интересовать вопрос, соединены какие-то две вершины ребром или нет. При этом нам совершенно не принципиально, соединены ли эти вершины одним или несколькими ребрами. Так что любое мультиребро мы можем заменить на единственное ребро и рассматривать, таким образом, только лишь простые графы.

б. Рассмотрим граф G , построенный на n вершинах. Мы можем взять n цветов и каждую из вершин графа G окрасить в свой цвет. При этом мы, конечно же, получим правильную раскраску вершин графа. Однако такой способ окраски вершин нам не очень интересен — на практике нас, как правило, интересует *минимальное* количество цветов, в которые мы можем правильно раскрасить вершины графа G .

Определение 3. Наименьшее количество k цветов, в которое можно правильно покрасить вершины графа G , называется *хроматическим числом* $\chi(G)$ этого графа. Сам граф при этом часто называют *k -хроматическим*.

с. Понятно, что простой граф G является 1-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда G представляет собой пустой граф \bar{K}_n , и 2-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда он двудольный. Любой простой цикл нечетной длины является простейшим примером 3-хроматического графа (см. рис. 6.1(a)). Еще одним простым примером 3-раскрашиваемого графа является колесо (рис. 6.1(b)).

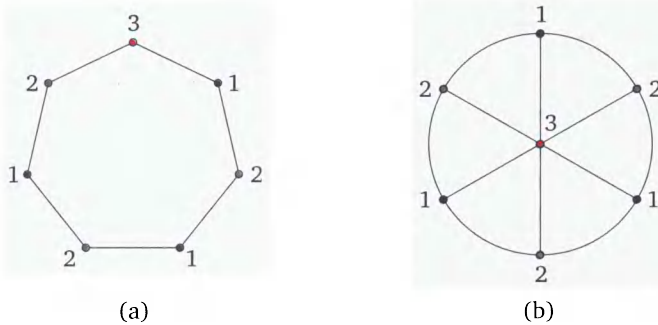


Рис. 6.1. 3-хроматические графы

Как мы уже заметили выше, хроматическое число любого графа, построенного на n вершинах, ограничено сверху значением n . Эта верхняя граница достигается, например, на полном графе. Действительно, так как любые две вершины графа K_n соединены ребром, то никакие две его вершины нельзя окрасить в один и тот же цвет. Следовательно, хроматическое число полного графа $\chi(K_n) = n$.

д. Задачи, связанные с правильной окраской вершин графа G в как можно меньшее количество цветов, достаточно часто встречаются на практике. Приведем несколько характерных примеров такого рода задач [2, 3].

Пример 4. Предположим, что студенты в некотором университете учатся по индивидуальным программам и сдают в конце года экзамены по всем предметам, которые они изучали в течение года. Учебный отдел должен так составить расписание экзаменов, чтобы экзамены, на которые должен прийти один и тот же студент, стояли в разные дни. При этом расписание хочется составить так, чтобы количество экзаменационных дней было минимальным.

Для формализации данной задачи рассмотрим граф G , множество вершин которого совпадает с множеством читаемых в университете курсов. Соединим две вершины ребром в случае, если хотя бы один студент слушает оба этих курса. Тогда любая правильная раскраска вершин графа G даст нам бесконфликтное расписание, а хроматическое число графа G определит минимальное количество экзаменационных дней.

Пример 5. Химическая компания производит набор $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ химикатов. Некоторые пары этих химикатов взрываются, если приходят в контакт друг с другом. В качестве меры предосторожности компания делит свой склад на отсеки, помещая в каждый отсек лишь те препараты, которые не взрываются при контакте друг с другом. Задача состоит в нахождении минимального количества отсеков для данного набора химических веществ.

Для решения данной задачи построим граф G на n вершинах, помеченных элементами множества X . Соединим любые две вершины графа ребром в случае, если соответствующие этим вершинам химикаты взрываются при контакте друг с другом. Тогда минимальное количество отсеков, на которые следует разделить склад, совпадает с хроматическим числом $\chi(G)$ графа.

2. Любую задачу, связанную с раскраской вершин графа, можно разбить на две подзадачи. Первая подзадача состоит в проверке данного графа G на k -раскрашиваемость, вторая — в определении хроматического числа $\chi(G)$ графа G . Мы знаем, что в случае $k = 2$ существует достаточно простой критерий двураскрашиваемости графа, на основе которого мы можем построить простой алгоритм проверки графа G на двудольность. К сожалению, для любого $k > 2$ никаких простых и удобных критериев проверки графа на k -раскрашиваемость не существует. Говоря формальным языком, задача проверки графа G на k -раскрашиваемость является NP -полной задачей. Как следствие, более сложная задача определения хроматического числа графа NP -сложна. В частности, к настоящему времени не известно никакого алгоритма, работающего за полиномиальное время и позволяющего для произвольно взятого графа определить его хроматическое число. В этой связи на практике довольствуются обычно какими-то эвристическими алгоритмами, позволяющими более или менее эффективно определить верхнюю границу хроматического числа $\chi(G)$. Опишем наиболее очевидный и популярный из них — так называемый жадный алгоритм окраски вершин графа.

а. Линейно упорядочим вершины простого связного графа G (рис. 6.2). Мы знаем, что любой граф на n вершинах мы можем всегда правильно окрасить цветами из множества $Y = \{1, \dots, n\}$. Возьмем это множество цветов и начнем окрашивать вершины графа следующим образом (рис. 6.3):

- окрасим вершину x_1 в цвет 1;
- рассмотрим вторую вершину — вершину x_2 ; если она смежна с вершиной x_1 , то окрасим ее в цвет 2; в противном случае вновь окрасим ее в цвет 1;

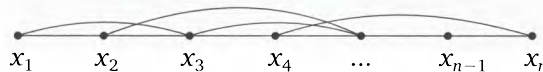


Рис. 6.2

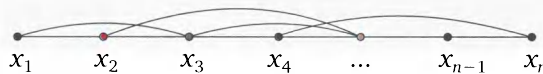


Рис. 6.3

- выберем теперь третью вершину x_3 ; если она смежна с вершинами x_1 и x_2 и если вершины x_1 и x_2 смежны между собой, то x_3 мы сможем окрасить только в новый цвет 3; если она смежна с вершинами x_1 и x_2 , а сами эти вершины не смежны, то мы окрасим ее в цвет 2; если она не смежна ни с одной из вершин x_1 и x_2 , то мы можем ее окрасить в цвет 1; наконец, если она смежна лишь с одной из двух вершин x_1 и x_2 , то мы можем окрасить x_3 в цвет той из вершин x_1 и x_2 , которая с x_3 не смежна;
- опишем теперь общий, k -й шаг алгоритма: рассмотрим вершину x_k , а также все смежные с ней вершины с меньшими индексами; эти вершины как-то нами окрашены на предыдущих шагах алгоритма; исключим тогда из множества Y цветов все те цвета, которые были использованы при окраске смежных с x_k вершин с меньшими индексами; в оставшемся множестве цветов выберем минимальный цвет и окрасим этим цветом вершину x_k .

б. Описанный нами жадный алгоритм далеко не всегда работает оптимально и может очень сильно зависеть от способа линейного упорядочивания вершин. Несмотря на это, максимальное количество использованных в данном алгоритме цветов никогда не превысит величины $\Delta + 1$, где Δ — максимальная из степеней вершин графа G .

Действительно, в жадном алгоритме для любой вершины x_i количество уже использованных цветов, в которые нельзя окрасить вершину x_i , никогда не превысит величины $\deg(x_i) \leq \Delta$. Худший случай с точки зрения окраски вершин наступит, когда мы встретим вершину x степени Δ , и для этой вершины все Δ смежных с ней вершин окажутся окрашенными на предыдущих шагах нашего алгоритма. Тогда вершину x мы будем вынуждены окрасить в новый цвет $\Delta + 1$. Во всех остальных случаях количество использованных цветов будет меньше величины $\Delta + 1$.

Проведенные рассуждения доказывают, в частности, следующий важный результат.

Теорема 6. Хроматическое число $\chi(G)$ графа G ограничено сверху величиной $\Delta + 1$, т. е.

$$\chi(G) \leq \Delta + 1, \quad (6.1)$$

где Δ — наибольшая из степеней вершин графа G .

Следствие 7. Любой k -хроматический граф обязательно содержит по крайней мере одну вершину, степень которой больше или равна $k - 1$.

3. Проанализируем верхнюю оценку (6.1) на хроматическое число $\chi(G)$ графа G .

а. Заметим прежде всего, что эта оценка может быть сколь угодно далека от реального значения хроматического числа $\chi(G)$ графа. В качестве характерного примера рассмотрим произвольное дерево T . Так как любое дерево представляет собой двудольный граф, то хроматическое число $\chi(T)$ дерева T равно двум. Однако в дереве могут быть вершины, степени которых сколь угодно велики. Как следствие, число $\Delta + 1$ может быть сколь угодно большим, т. е. для таких объектов оценка (6.1) может быть сколь угодно далека от реальности.

б. В связи со сделанным выше наблюдением естественным образом возникает следующий вопрос: а можем ли мы как-то улучшить данную оценку? Оказывается, однако, существуют целые классы графов, для которых эта оценка неулучшаема.

Первый такой класс графов — это полные графы K_n . Мы знаем, что у таких графов $\Delta = n - 1$, а окрасить эти графы меньше чем в n цветов, невозможно. Следовательно, для полных графов

$$\chi(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1.$$

Ко второму классу графов относятся простые циклы C_{2n+1} нечетной длины (рис. 6.1(a)). Для таких циклов $\Delta = 2$, а хроматическое число равно трем. Следовательно, и для таких графов верхняя оценка (6.1) достигается.

Во всех остальных случаях эту оценку можно уменьшить, но только лишь на единицу. Именно, справедлива следующая теорема

Теорема 8 (Брукс, 1941). Пусть G — простой связный граф, не являющийся полным графом или же простым нечетным циклом. Тогда

$$\chi(G) \leq \Delta, \quad \text{где } \Delta = \max_{x_i \in V(G)} \deg(x_i).$$

с. Мы приведем доказательство этой теоремы, данное Ласло Ловасом [37]. Основная идея этого доказательства состоит в следующем: нам нужно придумать такой способ нумерации вершин графа, при котором в результате запуска жадного алгоритма на выходе получается граф, вершины которого оказываются окрашенными не более чем в Δ цветов. Заметим сразу же, что при произвольной нумерации вершин жадный алгоритм может окрасить вершины графа более чем в Δ цветов. В качестве примера рассмотрим двудольный граф, показанный на рис. 6.4(a). Максимальная степень Δ его вершин равна двум. Если же мы пронумеруем вершины графа так, как это указано на рис. 6.4(b), то мы получим окраску вершин этого графа в три цвета.

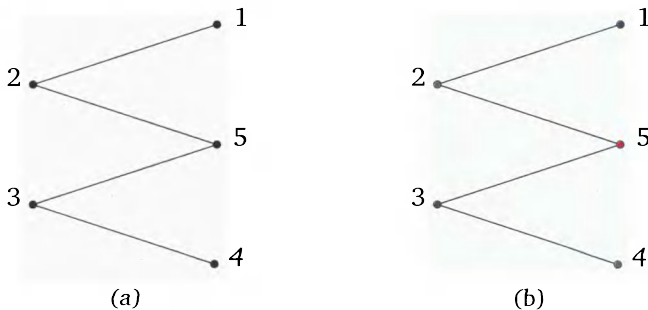


Рис. 6.4

д. Легче всего подобную нумерацию вершин придумать в графе G , не являющемся k -регулярным. Действительно, возьмем в графе G произвольную вершину, степень которой строго меньше Δ , и присвоим ей номер n (см. рис.

6.5). Так как граф G связный, то мы, например, поиском в ширину, можем построить остовное дерево T с корнем в вершине n (ребра, отмеченные пунктирными линиями на рис. 6.5), назначая вершинам этого дерева номера i , убывающие по мере удаления этих вершин от корня дерева.

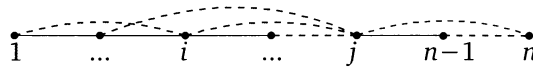


Рис. 6.5

В этом случае любая вершина i , отличная от n , обязательно будет иметь по крайней мере одну смежную с ней в остовном дереве T вершину, номер j которой строго больше i . Как следствие, при подходе жадного алгоритма к вершине $i \neq n$ хотя бы одна смежная с i вершина, а именно вершина j , обязательно останется неокрашенной. Оставшиеся же смежные с i вершины будут окрашены не более чем в $\deg(i) - 1 \leq \Delta - 1$ цветов. Поэтому жадный алгоритм всегда сможет назначить вершине $i \neq n$ один из цветов $1, 2, \dots, \Delta$.

Наконец, так как степень вершины $n < \Delta$, мы всегда сможем на последнем шаге жадного алгоритма назначить этой вершине хотя бы один неиспользованный цвет из списка $1, 2, \dots, \Delta$.

е. Рассмотрим теперь Δ -регулярный односвязный граф, имеющий хотя бы одну точку сочленения x (рис. 6.6(a)). Обозначим через H_i подграфы графа G , полученные в результате удаления вершины x . Расщепим вершину x на Δ вершин x_i и рассмотрим графы G_i , индуцированные подмножествами вершин $\{x_i\} \cup V(H_i)$ (рис. 6.6(b)). В каждом таком графе G_i , рассматриваемом отдельно от остальных, степень вершины x_i равна единице. Так как $\Delta > 1$, то любой такой граф G_i можно правильно окрасить не более чем в Δ цветов, используя алгоритм, описанный в предыдущем пункте для нерегулярных графов. Покажем теперь, что данную окраску всегда можно продолжить на весь граф G , окрасив правильно все его вершины не более чем в Δ цветов.

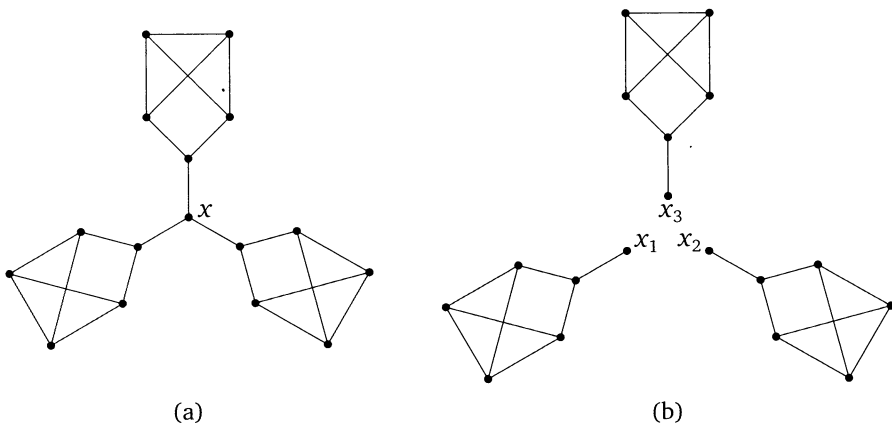


Рис. 6.6

Предположим, что в результате работы жадного алгоритма вершина x_i в графе G_i окрасилась в цвет k (красный цвет на рис. 6.7(a)). Рассмотрим все вершины данного графа, окрашенные в цвет k , а также все вершины этого блока, окрашенные в цвет 1 (синий цвет на рис. 6.7(a)). Поменяем цвета этих вершин на противоположные (рис. 6.7(b)). Правильность окраски при этом, очевидно, не нарушится. В результате такой замены вершина x_i окажется окрашенной в цвет 1. Повторяя эту процедуру для каждого из графов G_i , мы, как говорят, согласуем окраску вершин x_i — для любого i вершины x_i окажутся окрашенными в один и тот же цвет 1. Склеивая теперь обратно Δ вершин x_i в одну вершину x , мы получим правильную окраску исходного графа G не более чем в Δ цветов.



Рис. 6.7

f. Осталось рассмотреть случай простого связного Δ -регулярного графа G без точек сочленения, т. е. Δ -регулярного двусвязного графа. Мы можем считать, что $\Delta \geq 3$, так как случаи $\Delta = 0$ и $\Delta = 1$ отвечают элементарным полным графам K_1 и K_2 соответственно, а случай $\Delta = 2$ соответствует либо нечетному циклу, который мы, также как и полный граф, исключили из рассмотрения, либо двудольному графу с $\Delta = 2$, для которого теорема верна.

Выбирая в рассматриваемом графе G в качестве корня остовного дерева произвольную вершину x (рис. 6.8(a)), присваивая ей номер n и размечая

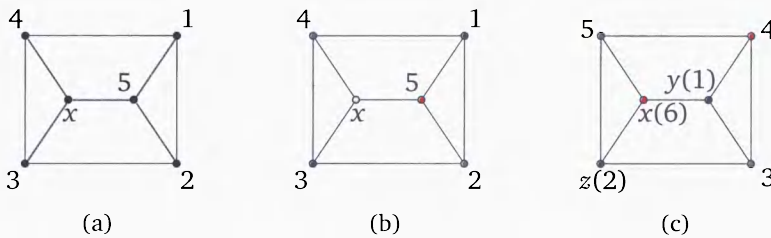


Рис. 6.8

оставшиеся $n - 1$ вершин с помощью поиска в ширину, мы получим некоторое линейно упорядоченное множество вершин графа G . Как и в случае нерегулярного графа, запуская жадный алгоритм на такой разметке вершин, мы гарантируем, что для окраски произвольной вершины $i \neq n$ нам всегда хватит Δ цветов. При окраске же последней вершины, т. е. вершины с номером n , у нас могут возникнуть проблемы (см. рис. 6.8(b)). Действительно, у такой вершины все Δ смежных с ней вершин уже оказываются окрашенными на предыдущих шагах жадного алгоритма. Если при этом все Δ смежных с n вершин окажутся к этому моменту окрашенными в разные цвета, то жадный алгоритм окрасит вершину с номером n в цвет $\Delta + 1$. Иными словами, нам нужно подправить алгоритм разметки вершин так, чтобы подобная ситуация никогда не возникла.

Оказывается, сделать это достаточно просто. Ниже мы покажем, что в любом двусвязном k -регулярном графе обязательно найдется вершина x , имеющая пару таких соседних несмежных между собой вершин y и z , что граф $G - y - z$ остается связным (см. рис. 6.8(c)). Назначим такой вершине x номер n , а вершинам y и z — номера 1 и 2. Удаляя вершины y и z , мы получаем связный граф, вершины которого можно разметить с помощью поиска в ширину, стартуя из вершины $x = n$ и назначая вершинам метки i с номерами, убывающими по мере удаления этих вершин от корня дерева. Добавляя затем обратно вершины y и z , мы получаем граф G , в котором любая вершина, отличная от x , по-прежнему имеет как максимум $\Delta - 1$ смежных с ней вершин, имеющих меньшие номера.

Запустив тогда жадный алгоритм для вершин, упорядоченных в порядке $(1, 2, \dots, n)$, мы окрасим вершины графа не более чем в Δ цветов. Действительно, вершины 1 и 2 алгоритм окрасит в цвет 1 (синий цвет на рис. 6.8(c)). Так как любая вершина i , $i = 3, \dots, n - 1$, обязательно имеет по крайней мере одну смежную вершину j с номером, большим чем i , на своем пути к корню n остовного дерева, то жадному алгоритму хватит для ее окраски цветов из множества $\{1, \dots, \Delta\}$. Наконец, среди Δ смежных с n вершин найдутся как минимум две вершины, окрашенные в один и тот же цвет, а именно вершины 1 и 2. Поэтому для правильной окраски вершины n также окажется достаточно цветов из множества $\{1, 2, \dots, \Delta\}$.

г. Итак, для полного доказательства теоремы Брукса осталось убедиться в том, что описанная в предыдущем пункте тройка вершин x, y, z в двусвязном Δ -регулярном графе с $\Delta \geq 3$ всегда существует. Легче всего сделать это в случае, когда граф трехсвязен. Так как G отличен от полного графа, то в нем найдется пара несмежных между собой вершин y, z , смежных с некоторой общей для них вершиной x . Так как граф трехсвязный, то удаление y и z оставляет граф связным, так что в этом случае искомая тройка вершин существует.

Теперь предположим, что $\kappa(G) = 2$. Выберем в G вершинно разделяющее множество S , $|S| = 2$, и рассмотрим вершину $x \in S$. Так как $\kappa(G - x) = 1$, то граф $G - x$ можно разбить на блоки B_j и точки сочленения v_j (см. рис. 6.9). Рассмотрим произвольную пару блоков B_1 и B_2 , отвечающих листьям дерева блоков и точек сочленения графа $G - x$. Обозначим через v_1 и v_2 принадле-

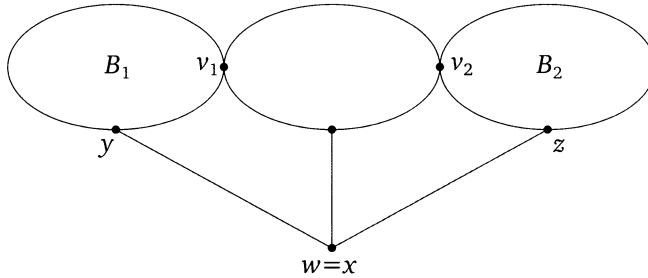


Рис. 6.9

жащие этим двум блокам точки сочленения. Так как исходный граф G двусвязный, то существует вершина $y \in (B_1 - v_1)$, смежная с x в графе $G - v_1$, а также вершина $z \in (B_2 - v_2)$, смежная с x в графе $G - v_2$. По построению вершины y и z несмежны. Кроме того, степень Δ в графе больше или равна 3, так что вершина x , помимо y и z , имеет хотя бы одного соседа в $G - y - z$. Как следствие, граф $G - y - z$ остается связным, а значит, вершины x, y, z , образуют искомую тройку вершин в графе G . Теорема Брукса доказана. \square

4. В следующих параграфах нам встретится важный подкласс графов — так называемые k -критические графы.

Определение 9. Граф G называется k -критическим, если $\chi(G) = k$ и хроматическое число $\chi(H)$ любого его собственного подграфа строго меньше k .

Изучим простейшие свойства таких графов.

а. Заметим, что любой граф с $\chi(G) = k$ имеет k -критический подграф H . Действительно, удаляя ребра и/или вершины графа G , мы в конечном итоге приходим к ситуации, при которой удаление любой вершины и/или ребра уменьшает количество цветов, необходимых для правильной раскраски полученного подграфа.

б. Достаточно очевидно, что любой k -критический граф G связан, — в противном случае мы бы могли удалить одну из связных компонент, не поменяв хроматического числа $\chi(G)$ всего графа. Оказывается, k -критический граф обязательно двусвязен. Этот факт вытекает из следующего более общего наблюдения.

Утверждение 10. В любом k -критическом графе G отсутствует вершинно разделяющее множество S , являющееся кликой.

Следствие 11. В k -критическом графе G точки сочленения отсутствуют.

Доказательство легко следует из предложения 10 — любая точка сочленения в графе изоморфна K_1 , т. е. простейшей клике, состоящей из единственной вершины. \square

с. Для доказательства утверждения 10 нам понадобится понятие S -компоненты графа G .

Определение 12. Пусть S — вершинно разделяющее множество в графе G , и пусть H_1, \dots, H_t — компоненты связности графа $G - S$. Подграфы G_i , индуцированные подмножествами $S \cup V(H_i)$, называются S -компонентами графа G . Правильная раскраска таких компонент называется *согласованной* в случае, если любая вершина $x \in S$ окрашена в один и тот же цвет для правильной раскраски каждой из S -компонент графа G .

Докажем утверждение 10 от противного. Предположим, что в k -критическом графе G нашлось вершинно разделяющее множество S , являющееся кликой. Рассмотрим S -компоненты G_i графа G . Так как исходный граф G является k -критическим, то любой из графов G_i можно правильно раскрасить в $k - 1$ цвет. Так как S является кликой, то каждая из ее вершин обязана быть окрашена в свой цвет. Меняя цвета этих вершин, мы всегда сможем согласовать раскраску вершин множества S в этих компонентах. Но это означает, что объединение G_i , представляющее собой исходный граф G , окрашено в $k - 1$ цвет, что невозможно. \square

д. Заметим, что из приведенного выше доказательства утверждения 10 также следует, что хотя бы одна из S -компонент графа G не имеет правильной раскраски в $k - 1$ цвет, при которой все вершины множества S вершин окрашены в разные цвета. Этот факт нам понадобится при анализе частного случая k -критического графа, в котором существует вершинно разделяющее множество S , состоящее из двух вершин x и y .

В качестве примера такого графа рассмотрим так называемый Hajós graph — граф Хайоша (рис. 6.10). В упражнении 18 предлагается доказать, что такой граф является 4-хроматическим графом. Несложно проверить, что этот граф является 4-критическим графом, — удаление любого ребра и/или любой вершины позволяет раскрасить получившийся граф в три цвета. Кроме того, в таком графе имеется вершинно разделяющее множество S , состоящее из вершин x и y (рис. 6.10(a)).

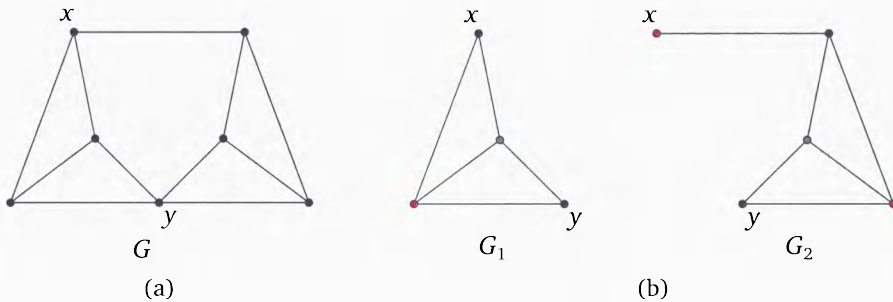


Рис. 6.10. Граф Хайоша

На рис. 6.10(b) показаны две S -компоненты этого графа — графы G_1 и G_2 . Заметим, что при любой минимальной правильной раскраске вершин графа

G_1 вершины x и y обязаны быть окрашены в один и тот же цвет. Напротив, в графе G_2 эти вершины должны быть окрашены в разные цвета. Оказывается, аналогичная ситуация имеет место и в общем случае.

Именно, рассмотрим произвольный k -критический граф G , в котором существует вершинно разделяющее множество $S = \{x, y\}$, состоящее из несмежных друг с другом вершин x и y . Мы уже заметили, что хотя бы одна S -компонента G_1 графа G обладает тем свойством, что при любой правильной ее окраске в $k - 1$ цвет вершины x и y оказываются окрашенными в один и тот же цвет. Иными словами, хроматическое число графа $G_1 + \{x, y\}$ обязано равняться k .

Теперь рассмотрим какую-то другую S -компоненту G_2 графа G . Если бы в ней вершины x и y также оказались бы окрашены в один и тот же цвет, то мы бы смогли согласовать раскраски компонент G_1 и G_2 . Следовательно, вершины x и y обязаны быть окрашены в разные цвета. Но тогда объединение этих двух графов не может быть окрашено в $k - 1$ цвет.

Заметим теперь, что в силу k -критичности графа G никаких других S -компонент, помимо G_1 и G_2 , в графе G быть не может. Действительно, в случае существования еще одной S -компоненты G_3 мы бы при удалении вершины $z \in G_3$, отличной от x и y , получили $(k - 1)$ -раскрашиваемый граф, а это невозможно — мы уже доказали, что объединение одних только G_1 и G_2 не может быть окрашено в $k - 1$ цвет.

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 13 (Дирак). Пусть G — k -критический граф, в котором существует вершинно разделяющее множество $S = \{x, y\}$. Тогда G представляет собой объединение ровно двух своих S -компонент G_1 и G_2 , у одной из которых при любой правильной окраске в $k - 1$ цвет вершины x и y окрашены в один и тот же цвет, а у второй — в разные цвета.

5. В заключение данного параграфа поговорим о важном обобщении понятия k -раскрашиваемого графа — L -раскрашиваемых (или списочно раскрашиваемых) графах.

а. В некоторых практически важных задачах возможны дополнительные ограничения на цвета, которые можно приписать той или иной вершине. Так, в примере о химическом складе для радиоактивных веществ могут потребоваться хранилища специального типа, отличные от хранилищ, используемых для обычных химических веществ. С точки зрения теории графов математические модели соответствующих задач приводят к необходимости назначить каждой вершине свой список L цветов, ассоциированный с данной вершиной.

Перейдем к формальным определениям. Рассмотрим функцию $L: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$, сопоставляющую любой вершине $x \in V(G)$ некоторое множество $L(x)$ натуральных чисел.

Определение 14. Правильная раскраска вершин графа G , при которой любая вершина $x \in V(G)$ графа G оказывается окрашенной в один из цветов, принадлежащих множеству $L(x)$, называется *списочной раскрас-*

кой или L -раскраской графа G . Граф, допускающий такую раскраску, называется L -раскрашиваемым (или списочно раскрашиваемым) графом.

Заметим, что k -раскрашиваемый граф — частный случай L -раскрашиваемого графа. Действительно, выбирая в качестве L множество $[k]$ первых k натуральных чисел, мы сведем задачу о L -раскраске графа к задаче о правильной окраске графа в k цветов.

в. Рассмотрим частный случай сформулированной выше задачи о L -раскраске графа, при котором для любой вершины $x \in V(G)$ список $L(x)$ цветов имеет размер, равный k .

Определение 15. Граф G называется *списочно k -раскрашиваемым*, если у него существует правильная L -раскраска для любых наборов множеств $L(x)$, $x \in V(G)$, размер которых равен k . Наименьшее значение k , при котором граф G является списочно k -раскрашиваемым, называется *списочным хроматическим числом* $\chi_L(G)$ графа G .

Так как обычная раскраска является частным случаем списочной раскраски, то $\chi(G) \leq \chi_L(G)$ для любого графа G . Равенство же этих чисел в общем случае места не имеет. В качестве примера можно рассмотреть двудольный граф, показанный на рис. 6.11(а) и представляющий собой сетку размерами 3×2 . Несложно убедиться (см. упражнение 15), что для случая множеств $L(x)$, указанных на рисунке, правильная списочная раскраска такого графа отсутствует. Можно доказать, однако, что для этого графа $\chi_L(G) = 3$ (упражнение 15).

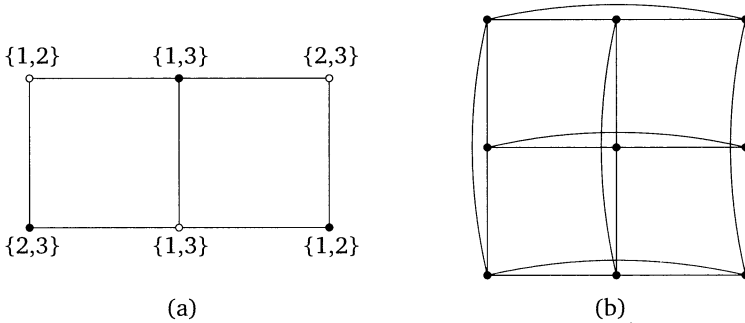


Рис. 6.11

В книге [38] подробно разбирается задача о списочной раскраске графа S_n , представляющего собой сетку из n^2 вершин, соединенных друг с другом в случае, если они находятся в одной и той же строке или в одном и том же столбце этой сетки (см. рис. 6.11(б), на котором представлен граф S_3). В случае $L = [n]$ мы получаем так называемую задачу о латинских квадратах. Очевидно, что в этом случае мы всегда можем правильно окрасить граф S_n в n цветов. Относительно недавно было доказано, что и списочное хроматическое число $\chi_L(S_n)$ такого графа также равняется n (см. [38]).

В общем случае верхнюю оценку на $\chi_L(S_n)$ получили Визинг в 1976 году и, независимо, Эрдёш, Рубин и Тейлор в 1979 году.

Теорема 16. *Списочное хроматическое число любого графа G , для которого справедливо неравенство $\chi(G) \leq \Delta(G)$, также ограничено сверху величиной $\Delta(G)$.*

Упражнения

1 (0,5 балла). Сосчитайте хроматическое число $\chi(G)$, кликовое число $\omega(G)$ и число независимости $\alpha(G)$ для графа, изображенного на рис. 6.12(a).

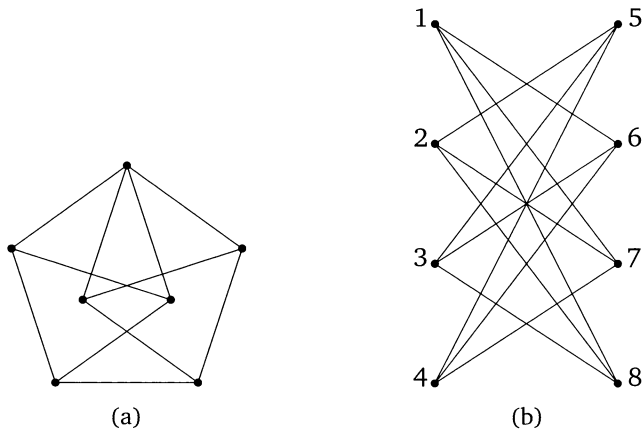


Рис. 6.12

2 (1 балл). Предъявите способ начального упорядочивания вершин графа G , представленного на рис. 6.12(b), для которого жадный алгоритм окрасит вершины в два цвета, а также способ начального упорядочивания вершин, при котором такой алгоритм окрасит вершины графа G в четыре цвета. Обобщите полученные результаты на случай двудольного графа $K_{n,n}^*$, полученного из полного двудольного графа $K_{n,n}$ с блоками $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ удалением ребер $\{x_i, y_i\}$.

3 (1 балл). Определите хроматическое число графа G , показанного на рис. 6.13.

4 (1 балл). Докажите, что хроматическое число $\chi(G)$ любого связного графа G равно максимальному из хроматических чисел его блоков.

5 (1 балл). Докажите, что для любого графа G , построенного на n вершинах, справедливо неравенство

$$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n, \quad n = |V(G)|, \quad (6.2)$$

где $\alpha(G)$ — количество вершин в максимальном вершинно независимом множестве графа G . Верно ли, что для любого k -хроматического графа можно найти такую правильную окраску его вершин в k цветов, чтобы хотя бы одно из подмножеств одноцветных вершин имело мощность, равную $\alpha(G)$?

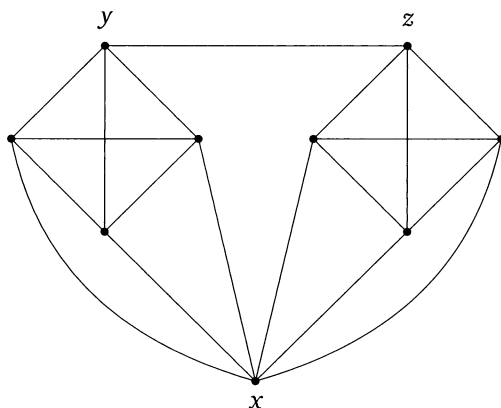


Рис. 6.13

6 (1 балл). Докажите, что в графе G с $|E(G)| = m$ ребрами хроматическое число удовлетворяет неравенству

$$\chi(G) \cdot (\chi(G) - 1) \leq 2m.$$

7 (1 балл). Пусть (d_1, d_2, \dots, d_n) — степенная последовательность простого связного графа G . Докажите, что

$$\chi(G) \leq 1 + \max_i \min\{d_i, i - 1\}.$$

8 (1 балл). Докажите, что если $\chi(G - x - y) = \chi(G) - 2$ для любой пары вершин графа G , то G представляет собой полный граф, построенный на $n = \chi(G)$ вершинах.

9 (1 балл). Докажите, что для любой правильной окраски графа G с $\chi(G) = k$ в k цветов для любого цвета i найдется вершина x , окрашенная в этот цвет, которая смежна с вершинами, окрашенными во все оставшиеся $k - 1$ цветов.

10 (1 балл). Опишите все k -критические графы для значений параметра $k = 1$, $k = 2$ и $k = 3$.

11 (1 балл). Пусть G — k -критический граф. Докажите следующие утверждения.

1) Для произвольной вершины $x \in V(G)$ существует правильная раскраска графа G в k цветов, в которой вершина x окрашена в цвет, не встречающийся при окраске других вершин, а все остальные цвета встречаются при окраске подмножества $N(x)$ ее соседей.

2) Для произвольного ребра $e \in E(G)$ в любой правильной окраске графа $G - e$ в $k - 1$ цвет концевые вершины e оказываются окрашенными в один и тот же цвет.

12 (1 балл). Докажите, что в случае k -критического графа $\delta(G) \geq k - 1$.

13 (1 балл). Используйте результаты упражнения 12 для доказательства неравенства

$$\chi(G) \leq \Delta + 1.$$

14 (1 балл). Докажите, что любой граф G , для которого $\chi(G) = k$, имеет по крайней мере k вершин, степень которых больше или равна $k - 1$.

15 (1 балл). Докажите, что показанный на рис. 6.11 граф G является списочно 3-раскрашиваемым, но не является списочно 2-раскрашиваемым.

Дополнительные упражнения

16 (1,5 балла). Рассмотрим простой связный граф G , не являющийся регулярным. При доказательстве теоремы Брукса для этого случая мы рекомендовали построить остовное дерево с корнем в вершине степени, меньшей Δ , и присвоить корневой вершине номер, равный $n = |V(G)|$. Затем, используя поиск в ширину, мы можем назначить остальным вершинам номера, значения которых уменьшаются с удалением от корня. При этом мы гарантируем, что жадный алгоритм никогда не окрасит граф G более чем в Δ цветов.

Казалось бы, мы можем упростить этот алгоритм, упорядочив вершины графа по невозрастанию. В этом случае мы всегда начнем с вершины, степень которой максимальна, и закончим вершиной минимальной степени. Докажите, что подобного рода упрощение не гарантирует нам требуемый результат. Именно, предъявите простой связный граф, вершины которого упорядочены по невозрастанию, для которого жадный алгоритм окрасит вершины графа в $\Delta + 1$ цвет.

17 (1,5 балла). Докажите, что в любом графе G существует такое линейное упорядочение его вершин, при котором жадный алгоритм раскраски окрасит вершины графа ровно в $\chi(G)$ цветов.

18 (1,5 балла). Докажите, что изображенные на рис. 6.14 графы являются 4-хроматическими.

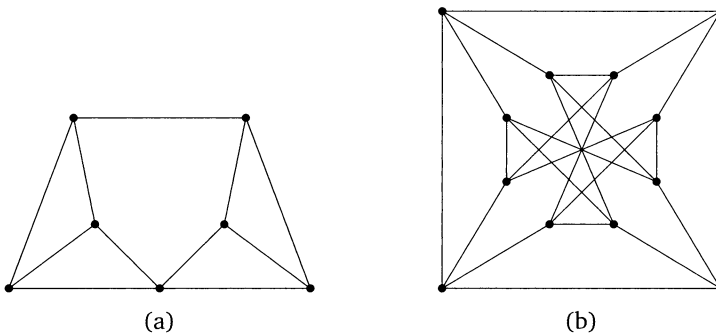


Рис. 6.14. 4-хроматические графы

19 (2,5 балла). Предположим, что в графе G имеет место такое разбиение множества $V(G)$ вершин графа G , $|V(G)| = n$, на блоки B_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, при котором для любой пары блоков B_i, B_j найдется пара несмежных между собой вершин $x_i \in B_i$, $x_j \in B_j$. Докажите, что такой граф G можно покрасить в $n - m + 1$ цветов.

20 (1,5 балла). Докажите, что для любого простого графа G на n вершинах выполнены следующие неравенства:

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1; \quad \chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geq n.$$

21 (1,5 балла). Рассмотрим множество прямых на плоскости, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Образует граф G , вершинами которого будут являться точки пересечения этих прямых, а ребрами — отрезки, соединяющие две соседние точки пересечения на одной прямой. Докажите, что удовлетворяет оценке $\chi(G) \leq 3$.

22 (1,5 балла). Пусть l — длина максимального пути в графе G . Докажите, что $\chi(G) \leq l$.

23 (1,5 балла). Докажите, что для графа G , в котором любая пара нечетных циклов пересекается хотя бы по одной вершине, хроматическое число $\chi(G) \leq 5$.

24 (1,5 балла). Пусть x и y — пара вершин k -критического графа G . Докажите, что ни одно из двух подмножеств $N(x)$ и $N(y)$ смежных с x и y вершин не может быть вложенным в другое. Используя это утверждение, покажите, что не существует k -критического графа, построенного на $k + 1$ вершине.

25 (1,5 балла). Докажите, что теорема Брукса эквивалентна следующему утверждению: каждый $(k - 1)$ -регулярный k -критический граф представляет собой либо полный граф, либо цикл нечетной длины.

26 (1,5 балла). В упражнении 6 мы, по сути, доказали, что в случае k -хроматического графа G количество m ребер ограничено снизу величиной $\binom{k}{2}$. Как изменится эта оценка в случае связного графа G ?

Указание. Для оценки количества ребер связного графа можно воспользоваться результатами упражнений 12 и 14.

27 (1,5 балла). Граф G называется реберно k -критическим, если $\chi(G - e) < \chi(G)$ для любого $e \in E(G)$, и вершинно k -критическим, если $\chi(G - x) < \chi(G)$ для любой вершины $x \in V(G)$. Докажите, что любой нетривиальный связный граф является вершинно k -критическим в случае, если он является реберно k -критическим. Предъявите пример графа с $\chi(G) = 4$, для которого обратное утверждение неверно.

28 (1 балл). Граф G называется k -вырожденным, если любой его непустой подграф H содержит хотя бы одну вершину x , степень $\deg(x)$ которой меньше или равна k . Докажите, что списочное хроматическое число k -вырожденного графа не превосходит $k + 1$. Заметим, что из данного утверждения следует неравенство $\chi_l(G) \leq \Delta + 1$.

29 (1 балл). Докажите, что графы $K_{2,4}$ и $K_{3,3}$ не являются списочно 2-раскрашиваемыми графами.

30 (1,5 балла). Докажите, что для параметра $m = \binom{2k-1}{k}$ полный двудольный граф $K_{m,m}$ списочно k -раскрашиваемым графом не является. Следствием этого является тот факт, что двудольный граф может иметь сколь угодно большое списочное хроматическое число.

Решение упражнений

1. Кликовое число $\omega(G) = 3$ (треугольники в G присутствуют, а K_4 подграфом G не является), хроматическое число $\chi(G) = 4$ (в три цвета G не окрасить — любая правильная окраска вершин четырех треугольников G к успеху не приводит), число независимости $\alpha(G) = 2$ (любая пара несмежных вершин дает нам максимальное вершинно независимое множество в графе G).

2. В качестве последовательности вершин, при которой жадный алгоритм окрасит граф в два цвета, может быть выбрана последовательность вершин

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

В качестве последовательности вершин, для которой жадный алгоритм окрасит граф в четыре цвета, следует, например, взять последовательность вида

$$1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8.$$

В общем случае для начальной последовательности вершин

$$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$$

жадный алгоритм окрасит вершины графа в два цвета, а для начальной последовательности

$$x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$$

получаем окраску вершин жадным алгоритмом в n цветов.

3. Так как граф G содержит индуцированный подграф, изоморфный K_4 , то его нельзя окрасить меньше чем в четыре цвета. Покажем, что в четыре цвета его также окрасить нельзя. Предположим, что это возможно. Так как вершины x и y (рис. 6.15) смежны с одной и той же тройкой вершин, то обе эти вершины должны иметь одинаковый цвет. Аналогично один и тот же цвет должны иметь вершины x и z . Но вершины y и z смежны друг с другом. Полученное противоречие показывает, что $\chi(G) > 4$. Правильная раскраска графа G в пять цветов показана на рис. 6.15. Следовательно, $\chi(G) = 5$.

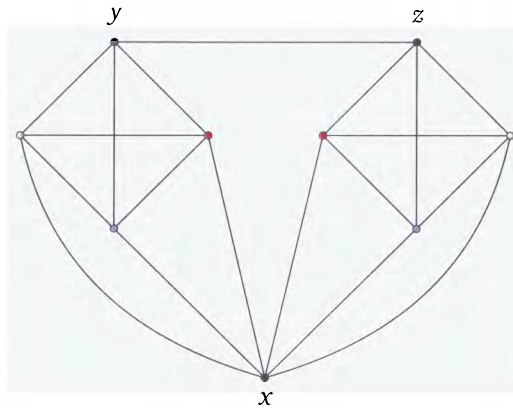


Рис. 6.15

4. Задача, по сути, сводится к доказательству того, что хроматическое число графа G , состоящего из двух блоков G_1 и G_2 , равно максимальному из хроматических чисел $\chi(G_1)$ и $\chi(G_2)$, — обобщение на случай $t > 2$ блоков легко проводится индукцией по t . Пусть для определенности $\chi(G_1) \geq \chi(G_2)$, и пусть блок G_1 правильно окрашен в $\chi(G_1)$ цветов. Если правильная окраска блока G_2 в $\chi(G_2)$ цветов окрасит точку x сочленения блоков в тот же цвет, что и правильная окраска блока G_1 , мы получим правильную окраску всего графа в $\chi(G_1)$ цвет. В противном случае мы получаем правильную окраску графа G , перекрашивая в G_2 вершину x , а также все вершины блока G_2 , окрашенные одинаково с x , в цвет, полученный вершиной x при окраске блока G_1 .

5. Любая правильная k -раскраска графа разбивает множество $V(G)$ на блоки, каждый из которых является вершинно независимым подмножеством, причем $\chi(G)$ — это количество таких подмножеств. Так как $\alpha(G)$ — это размер максимального независимого подмножества, то $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$. Заметим, что равенство достигается в случае, когда все раскрашенные блоки имеют один и тот же размер.

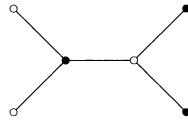


Рис. 6.16

Второе утверждение неверно — контрпример показан на рис. 6.16. Для этого графа $\chi(G) = 2$, а $\alpha(G) = 4$, что отвечает максимальному независимому множеству вершин, состоящему из четырех листьев этого графа.

6. Рассмотрим произвольную правильную окраску вершин графа G в $\chi(G) = k$ цветов. Такая раскраска разбивает множество $V(G)$ вершин графа G на k вершинно независимых подмножеств. Любые два таких подмножества должны быть связаны между собой по крайней мере одним ребром — в противном случае мы могли бы использовать один и тот же цвет для окраски всех вершин этих двух подмножеств. Следовательно, в таком графе должно быть по меньшей мере $\binom{k}{2}$ ребер.

7. Пронумеруем вершины по невозрастанию их степеней и запустим жадный алгоритм. При раскраске i -й вершины мы используем как максимум $\min\{d_i, i - 1\}$ цветов, так что i -я вершина окрасится как максимум в цвет $1 + \min\{d_i, i - 1\}$. Перебирая все вершины графа и подсчитывая максимум из $1 + \min\{d_i, i - 1\}$, мы получим требуемую оценку.

8. Заметим, что в любом графе G , отличном от полного графа, имеется пара несмежных между собой вершин x и y . Как следствие, правильно раскрасив граф $G - x - y$ в $k := \chi(G - x - y)$ цветов, а затем добавив к нему вершины x и y , окрашенные в новый, $(k + 1)$ -й цвет, мы получим правильную раскраску вершин графа G . Как следствие, для любого такого графа

$$\chi(G) \leq \chi(G - x - y) + 1,$$

так что равенство $\chi(G - x - y) = \chi(G) - 2$ выполняется только лишь для полного графа.

9. Предположим, что это не так. Возьмем тогда произвольную вершину x , окрашенную в цвет i , и перекрасим ее в тот цвет, который отсутствует в окраске смежных с x вершин. Перекрашивая таким образом все вершины, окрашенные изначально в цвет i , мы в конечном итоге избавимся от этого цвета, что невозможно.

10. Случаю $\chi(G) = 1$ отвечает граф \bar{K}_n . Следовательно, 1-критическим является граф K_1 , состоящий из единственной вершины.

Графы с $\chi(G) = 2$ представляют собой двудольные графы, в которых имеется хотя бы одно ребро. Поэтому 2-критическим графом является граф K_2 .

Наконец, в графах с $\chi(G) = 3$ обязательно имеются циклы нечетной длины. В случае, если G содержит собственный подграф, изоморфный такому циклу, он 3-критическим быть не может. Поэтому любой 3-критический граф — это простой цикл нечетной длины.

11. Так как граф G является k -критическим, то $G - x$ можно правильно окрасить в $k - 1$ цвет. Добавляя вершину x , окрашенную в цвет k , мы получаем правильную окраску графа G . При этом все оставшиеся цвета обязаны встречаться в $N(x)$ — в противном случае мы бы могли окрасить x в один из цветов, не встречающихся при окраске $N(x)$, и получить правильную окраску G в $k - 1$ цвет.

Предположим теперь, что в какой-то правильной раскраске графа $G - e$ в $k - 1$ цвет концевые вершины ребра e оказались окрашенными в разные цвета. Добавляя тогда ребро e , мы получаем правильную окраску графа G в $k - 1$ цвет, что невозможно.

12. Предположим, что это не так, т. е. предположим, что в графе G нашлась такая вершина $x \in V(G)$, что $\deg(x) < k - 1$. Рассмотрим подмножество $N(x)$ смежных с x вершин графа G . Так как граф G является k -критическим, то граф $G - x$ можно правильно окрасить в $k - 1$ цвет. При этом, так как $|N(x)| < k - 1$, какой-то из этих цветов в подмножестве $N(x)$ будет отсутствовать. Окрасив вершину x в этот цвет, мы получим правильную окраску исходного графа G в $k - 1$ цвет, что противоречит исходному предположению $\chi(G) = k$.

13. Пусть H — k -критический подграф k -хроматического графа G . Из определения такого подграфа следует, что $\chi(H) = k$. В упражнении 12 мы доказали, что

$$\delta(H) \geq k - 1 \Rightarrow k \leq \delta(H) + 1 \leq \Delta(H) + 1 \leq \Delta(G) + 1.$$

14. Пусть H — k -критический подграф графа G . Согласно результатам упражнения 12, любая вершина такого подграфа имеет степень, большую или равную $k - 1$. Кроме того, количество вершин в подграфе H больше или равно k — в противном случае мы бы смогли окрасить его в меньшее количество цветов. Итак, все вершины подграфа H обладают описанными в условии данной задачи свойствами.

15. Покажем, что граф (6.11) является списочно 3-раскрашиваемым. Для этого пронумеруем вершины этого графа так, чтобы две центральные вер-

шины шли первыми, и запустим жадный алгоритм окраски. При такой нумерации любая вершина окажется смежной как максимум с двумя из уже окрашенных вершин, так что ее всегда можно будет окрасить в третий цвет.

Для доказательства того, что граф (6.11) не является 2-раскрашиваемым, рассмотрим, например, вариант, при котором левая верхняя вершина окрашивается в цвет 1. Тогда центральная верхняя вершина должна быть окрашена в цвет 3, а правая верхняя — в цвет 2. При этом нижняя центральная вершина должна быть окрашена в цвет 1, и для правой нижней вершины правильного варианта окраски не существует.

Теперь предположим, что левая верхняя вершина окрашивается в цвет 2. Тогда нижнюю левую вершину нужно окрасить в цвет 3, нижнюю центральную — в цвет 1, верхнюю центральную — в цвет 3, правую верхнюю — в цвет 2, и для нижней правой вершины вариант правильной окраски также отсутствует.

§ 2. Нижние оценки на хроматическое число.

Теорема Турана. Совершенные графы

1. Помимо верхних оценок, для хроматического числа $\chi(G)$ можно пытаться строить и какие-то нижние оценки.

а. Одна из наиболее очевидных нижних оценок связана с понятием кликового числа $\omega(G)$ графа G , под которым понимается количество вершин в наибольшей клике графа G . Очевидным является следующее утверждение.

Утверждение 1. Хроматическое число $\chi(G)$ любого графа G не может быть меньше его кликового числа:

$$\chi(G) \geq \omega(G). \quad (6.3)$$

Отсюда, в частности, следует простой способ построения графа G с большим хроматическим числом — поместить в граф G клику большого размера. Однако оказывается, граф с большим хроматическим числом вовсе не обязан иметь одновременно и большое кликовое число.

б. Рассмотрим, к примеру, так называемые графы без треугольников, т. е. графы, не содержащие простых циклов длины три. Заметим, что любой полный граф K_n , построенный на $n \geq 3$ вершинах, содержит в качестве своих подграфов клики K_k любых размеров $k \in [1, \dots, n-1]$ и, в частности, обязательно содержит треугольники K_3 . Следовательно, графы без треугольников — это графы с кликовым числом $\omega(G) \leq 2$, т. е. графы, которые в качестве своих подграфов не содержат никаких клик помимо ребер K_2 и вершин K_1 .

Теорема 2 (Мицельский, 1955). Для любого натурального числа k существует k -хроматический граф без треугольников.

Доказательство данной теоремы основано на следующей конструкции, позволяющей получить из произвольного простого графа G_k некоторый простой граф G_{k+1} , содержащий G_k в качестве своего подграфа:

- добавляем к множеству $V(G_k) = \{x_1, \dots, x_n\}$ вершин графа G_k вершины $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, а также еще одну вершину z ;
- для любого $i = 1, \dots, n$ соединяем ребрами вершину y_i со всеми вершинами исходного графа G_k , смежными с x_i ;
- соединяем вершину z со всеми вершинами множества Y .

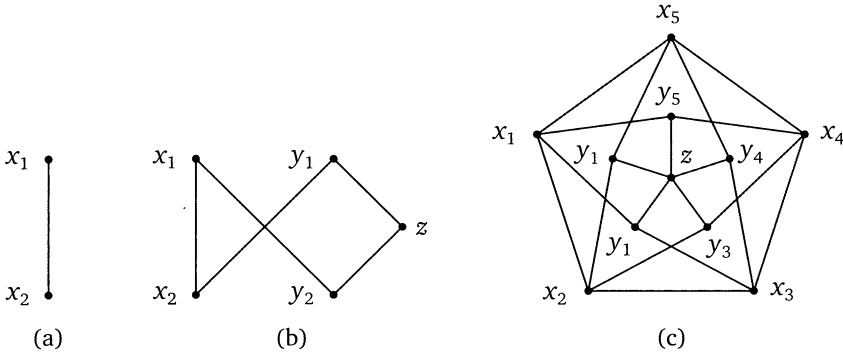


Рис. 6.17. Графы без треугольников

Пример 3. Рассмотрим в качестве примера 2-хроматический граф $G_2 = K_2$ (рис. 6.17(a)). Первая итерация описанной выше конструкции позволяет получить из него 3-хроматический граф $G_3 = C_5$ (рис. 6.17(b)). Следующая итерация, примененная к графу C_5 , дает нам так называемый граф Грётцша G_4 (рис. 6.17(c)).

с. Покажем по индукции, что граф Грётцша G_4 , а также любые графы G_{k+1} , полученные в результате применения данной процедуры к графам G_k , являются $(k+1)$ -хроматическими графами без треугольников.

Заметим прежде всего, что граф G_{k+1} не содержит никаких треугольников. Действительно, так как все вершины множества Y несмежны друг с другом, то любой потенциальный треугольник в графе G' может содержать лишь одну вершину из множества Y . Как следствие, вершину z такой треугольник содержать уже не может. Поэтому единственный возможный вариант такого треугольника — это простой цикл вида $x_i y_j x_k x_i$. Однако и это невозможно — в противном случае в исходном графе G_k существовал бы треугольник $x_i x_j x_k x_i$, чего быть не может по индукционному предположению.

Теперь покажем, что граф G_{k+1} является $(k+1)$ -раскрашиваемым. Для этого рассмотрим произвольную правильную окраску графа G_k в k цветов и продолжим ее на граф G_{k+1} следующим образом: окрасим вершины y_i графа G_{k+1} в те же цвета, что и вершины x_i , а вершину z окрасим в цвет $k+1$. В результате получим правильную окраску графа G_{k+1} .

Осталось доказать, что граф G_{k+1} не является k -раскрашиваемым. Предположим, что граф G_{k+1} все же можно правильно окрасить в k цветов. Без потери общности мы можем считать, что вершина z окрашена в цвет k . При таком способе окраски никакая вершина множества Y не может быть окрашена в этот же цвет k , т. е. все вершины y_j окрашены в цвета из подмно-

жества $\{1, \dots, k-1\}$. Вершины же x_i могут быть, в принципе, окрашены в правильной окраске графа G_{k+1} в цвета $1, \dots, k$. Обозначим через S подмножество вершин x_i , окрашенных в цвет k . Возьмем тогда каждую из вершин x_i , окрашенную в цвет k , и перекрасим ее в цвет, в который окрашена соответствующая ей вершина y_i . Так как множество смежных с x_i вершин совпадает для любого i с множеством вершин, смежных с y_i , то такой способ окраски графа G_k окажется правильным (при этом может испортиться правильная окраска графа G_{k+1} , но для нас сейчас это не важно). Однако этот способ окраски требует лишь $k-1$ цвет графа G_k , что противоречит индукционному предположению. \square

d. Итак, мы установили, что отсутствие в графе G треугольников (а следовательно, и клик большего размера) еще не гарантирует того, что хроматическое число $\chi(G)$ будет маленьким. Посмотрим еще раз на контрпримеры, построенные Мицельским. В каждом из графов G_k треугольники (т. е. клики, изоморфные K_3) отсутствуют. Заметим, однако, что в этих графах довольно много индуцированных подграфов, изоморфных циклам C_l , $l \geq 4$. Иными словами, обхват графа G_k мал. В связи с этим может показаться, что большое значение $\chi(G_k)$ вызвано наличием в них достаточно большого количества циклов не слишком большой длины. Однако и это предположение оказывается неверным. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4 (Эрдёш, 1961). *Для любого натурального k существует k -хроматический граф, обхват которого (т. е. длина наименьшего простого цикла в нем) больше или равен k .*

Эрдёш доказал эту теорему с помощью вероятностных методов. Его доказательство было неконструктивным: он лишь показал, что подобные графы существуют. Несколько лет спустя появились работы, в которых были предложены и конструктивные алгоритмы построения подобного рода графов.

e. Давайте теперь поймем, в чем же заключается проблема с графами, в которых отсутствуют треугольники и в которых обхват графа велик. Локально (в небольшой окрестности заданной вершины x) такие графы очень похожи на деревья. Мы знаем, что хроматическое число дерева равно двум. Поэтому и для графов с большим обхватом можно было бы ожидать, что хроматическое число графа окажется небольшим. Однако, как показали Мицельский и Эрдёш, это предположение неверно — хроматическое число таких графов может быть сколь угодно велико. Иными словами, такая характеристика графа, как его хроматическое число, является глобальной характеристикой графа G и давать какие-то оценки для $\chi(G)$ исходя только из локальных характеристик графа, практически невозможно.

2. Вернемся к нижней оценке $\chi(G) \geq \omega(G)$ на хроматическое число. Эта оценка показывает, в частности, что графы с большим кликовым числом $\omega(G)$ гарантированно имеют большое хроматическое число. В этой связи встает вопрос о том, при каких значениях параметров, характеризующих граф G , в графе гарантированно существует клика заданного размера k .

a. Зафиксируем количество n вершин в графе G и будем следить за числом m ребер в нем. Мы знаем, что при $m = n - 1$ связный граф G представляет

собой дерево. Кроме того, в упражнениях к первой главе мы доказали так называемую теорему Мантеля о том, что в графе, содержащем более чем $n^2/4$ ребер, обязательно существуют треугольники, т. е. подграфы, изоморфные K_3 . В 1941 году венгерский математик Туран обобщил этот результат, определив количество ребер, при котором в графе гарантированно существует клика заданного размера. Считается, что с этого результата берет свое начало новый раздел комбинаторики и теории графов — так называемая экстремальная теория графов.

б. Прежде чем формулировать теорему Турана, напомним, что $n^2/4$ есть также верхняя граница для количества ребер в двудольном графе, построенном на n вершинах, причем эта граница достигается на некотором полном двудольном графе $K_{n,m}$ (см. упражнения к главе 1). Рассмотрим теперь более общее понятие полного k -дольного графа K_{n_1, \dots, n_k} .

Определение 5. Граф G называется *полным k -дольным графом* K_{n_1, \dots, n_k} , $k > 1$, в случае, если множество $V(G)$ его вершин может быть разбито на k таких блоков V_1, \dots, V_k , что вершина x смежна с y тогда и только тогда, когда x и y относятся к различным блокам этого разбиения.

Заметим прежде всего, что любой такой граф является k -хроматическим графом: каждый блок V_i разбиения окрашен в свой цвет в некоторой правильной раскраске графа K_{n_1, \dots, n_k} в k цветов. На рис. 6.18(a) в качестве примера показан полный 3-дольный граф $K_{2,2,3}$. Кроме того, несложно убедиться в том, что дополнение к полному k -дольному графу представляет собой граф \bar{G} , состоящий из k связанных компонент, каждая из которых является полным графом (см. рис. 6.18(b)).

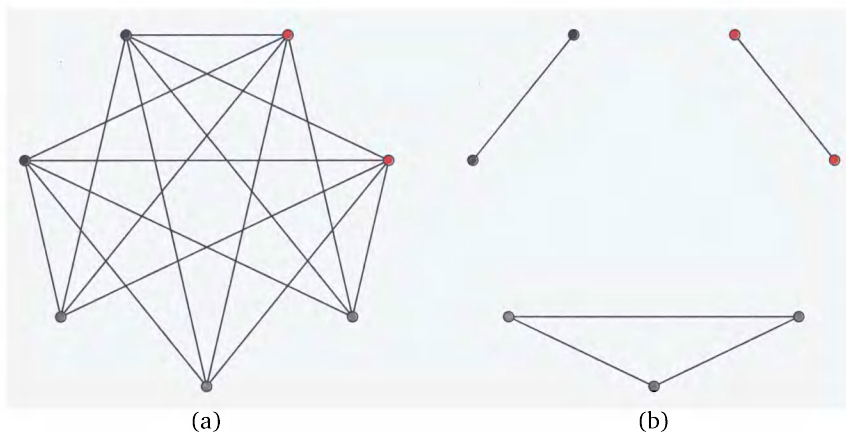


Рис. 6.18. (a) Полный 3-дольный граф $K_{2,2,3}$; (b) Граф $\bar{K}_{2,2,3}$

с. Любой граф K_{n_1, \dots, n_k} содержит ровно $m = \sum_{i \neq j} n_i n_j$ ребер. Интуитивно ясно (см. упражнение 3), что количество m ребер станет максимальным в случае, если мы приблизим числа n_i друг к другу насколько это возможно. Для

этого нам следует потребовать, чтобы в случае $n = t \cdot k + r$, $0 \leq r < k$, ровно r из k блоков, $r = r(n, k) = \{n/k\}$, содержали $t + 1$ вершину, а оставшиеся $k - r$ блоков — t вершин. Такой граф часто называют *графом Турана* $T(n, k)$. Подсчитаем количество $M(n, k)$ ребер в таком графе. В полном графе на n вершинах имеется $\binom{n}{2}$ ребер. Мы знаем, что

$$\binom{n}{2} = |E(G)| + |E(\bar{G})| = M(n, k) + r \binom{t+1}{2} + (k-r) \binom{t}{2}.$$

Отсюда после несложных арифметических преобразований получаем, что

$$M(n, k) = \frac{k-1}{2k} \cdot n^2 - \frac{r(k-r)}{2k}. \quad (6.4)$$

Теорема Турана утверждает, что это число представляет собой верхнюю границу на количество ребер в любом графе, построенном на n вершинах и не содержащем клики размером $k + 1$.

Теорема 6 (Туран, 1941). Пусть количество ребер в простом графе G , построенном на $n = t \cdot k + r$ вершинах, больше числа $M(n, k)$. Тогда G содержит клику размером $k + 1$.

Доказательство. Рассмотрим множество графов, построенных на $n = k \cdot t + r$ вершинах и не содержащих клики размера $k + 1$. Пусть G — граф, имеющий максимальное количество m ребер среди всех графов этого множества. Покажем, что G может содержать как максимум $M(n, k)$ ребер.

Будем действовать индукцией по числу $t = \lfloor n/k \rfloor$. Случаю $t = 0$, т. е. случаю $k > n$, отвечает граф G , количество n вершин в котором равно $r < k$. Графом с максимальным количеством ребер, не содержащим клику размера $k + 1$, является в этом случае полный граф $G = K_r$ на r вершинах. При этом количество ребер в графе Турана $T(n, k)$ в рассматриваемом случае равно

$$M(n, k) = M(r, k) = \frac{k-1}{2k} r^2 - \frac{r(k-r)}{2k} = \binom{r}{2},$$

т. е. совпадает с количеством ребер в полном графе K_r . Понятно, что для такого графа требуемое утверждение выполняется тривиальным образом. Поэтому предположим, что это утверждение выполнено при $t - 1$, $t > 0$, и покажем, что оно остается верным и для числа t .

По построению графа G , добавление любого ребра e к этому графу вызывает появление в графе $G + e$ клики размера $k + 1$. Следовательно, сам граф G обязан содержать клику S размера k . Оценим количество ребер в графе G . В самой клике имеется $\binom{k}{2}$ ребер. Так как в графе G клика размера $k + 1$ отсутствует, то из любой вершины подграфа $G - S$ в клику S может исходить как максимум $k - 1$ ребро. Наконец, подграф $G - S$ содержит $n - k = (t - 1)k + r$ вершин. Следовательно, количество ребер в нем по индукционному предположению не может быть больше $M(n - k, k)$. Собирая все эти факты вместе, мы получаем, что число m ребер в графе G не превосходит величины

$$\binom{k}{2} + (n - k) \cdot (k - 1) + M(n - k, k) = M(n, k).$$

Действительно, согласно формуле (6.4) мы имеем

$$M(n-k, k) = \frac{k-1}{2k} (n-k)^2 - \frac{r(k-r)}{2k},$$

поэтому

$$M(n-k, k) + (n-k) \cdot (k-1) = \frac{(k-1)(n^2-k^2)}{2k} - \frac{r(k-r)}{2k} = M(n, k) - \binom{k}{2}. \quad \square$$

Следствие 7. Пусть количество ребер в простом графе G , построенном на $n = t \cdot k + r$ вершинах, больше числа $M(n, k)$. Тогда G невозможно правильно раскрасить в k цветов.

3. Как мы установили ранее, большое хроматическое число еще не означает, что в графе существуют клики больших размеров. Однако имеется целый класс чрезвычайно важных на практике графов, для которых числа $\omega(G)$ и $\chi(G)$ совпадают:

$$\omega(G) = \chi(G) = k.$$

Конечно же, можно построить любое количество таких графов, рассматривая граф, одной из компонент связности которого является k -хроматический граф, а другой — полный граф K_k , у которого $\omega(K_k) = k$. Понятно, что такая конструкция никак нам не поможет сказать что-то конструктивное о структуре k -хроматического графа. Чтобы исключить подобного рода вырожденные конструкции, вводят понятие так называемого совершенного графа.

Определение 8. Граф G называется совершенным, если как для самого графа G , так и для любого его индуцированного подграфа $G[A]$, $A \subseteq V(G)$, т. е. подграфа, полученного из G удалением одной или нескольких вершин, хроматическое и кликовое числа совпадают:

$$\chi(G[A]) = \omega(G[A]) \quad \forall A \subseteq V(G).$$

Изучим несколько подробнее такого рода графы.

а. Тривиальным примером совершенных графов являются полные графы: так как любой индуцированный подграф полного графа вновь представляет собой полный граф и так как для любого полного графа K_n на n вершинах $\omega(K_n) = \chi(K_n) = n$, то K_n является совершенным графом для любого $n > 0$.

Несложно понять, что любой двудольный граф также является совершенным графом. Действительно, любой двудольный граф G , а также любой его индуцированный подграф $G[A]$ обладают свойством $\omega(G[A]) = \chi(G[A])$. Следовательно, G является совершенным графом по определению такого графа.

б. Впервые термин «совершенный граф» ввел в своих работах французский математик Клод Берж (Claude Berge). В этих работах он исследовал несколько важных подклассов графов, у которых $\omega(G) = \chi(G)$, и высказал две крайне важные гипотезы о том, как все такие графы устроены.

Прежде всего Берж заметил, что для всех известных ему подклассов совершенных графов дополнения \bar{G} к графам G из этих подклассов также являются совершенными графами. В частности, дополнение \bar{G} к любому двудольному

графу G также является совершенным графом (упражнение 9). В 1961 году он выдвинул гипотезу, которая в дальнейшем получила название слабой гипотезы Бержа или теоремы о совершенных графах, утверждающую, что любой совершенный граф обладает этим свойством.

Теорема 9 (слабая гипотеза Бержа, или теорема о совершенных графах). *Граф совершенен тогда и только тогда, когда его дополнение \bar{G} также является совершенным графом.*

Данная гипотеза получила очень красивое доказательство, данное в 1972 году венгерским математиком Ласло Ловасом. На этот момент ему было всего лишь 22 года. В конце этого параграфа мы приведем это доказательство слабой гипотезы Бержа.

с. В том же 1961 году Берж выдвинул и еще одну гипотезу об устройстве совершенных графов, которая получила название сильной гипотезы Бержа. Для ее формулировки нам понадобится ввести несколько дополнительных понятий.

Определение 10. *Хордой цикла C в графе G называется ребро $e = \{x, y\}$, не принадлежащее циклу C , концевые вершины x, y которого лежат на цикле.*

В качестве примера на рис. 6.19 показано ребро $e = \{1, 3\}$, представляющее собой хорду цикла C_5 , построенного на пяти вершинах.

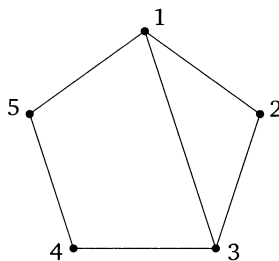


Рис. 6.19

Определение 11. *Индукцированным циклом в графе G называется цикл C длины, большей трех, не имеющий хорд, т. е. цикл длины, большей трех, являющийся индуцированным подграфом исходного графа G .*

Теорема 12 (сильная гипотеза Бержа). *Граф совершенен тогда и только тогда, когда ни G , ни его дополнение \bar{G} не содержат индуцированных циклов нечетной длины.*

Замечание 13. Обратим внимание на то, что формулировка сильной гипотезы Бержа не запрещает совершенным графам иметь нечетные циклы длины три.

Ясно, что слабая гипотеза Бержа сразу же следует из сильной гипотезы. Действительно, сильная гипотеза утверждает, что граф G является совершенным тогда и только тогда, когда как сам этот граф, так и его дополнение \bar{G} обладают некоторым свойством (не содержать индуцированных циклов нечетной длины). Отсюда сразу же следует, что G и \bar{G} могут либо одновременно являться совершенными графами, либо одновременно таковыми не являться. Случай, когда G является совершенным, а \bar{G} нет, сильной гипотезой Бержа исключается.

Доказательство сильной гипотезы Бержа было анонсировано Чудновски, Робертсоном, Сеймуром и Томасом (Chudnowski, Robertson, Seymour, and Thomas) лишь в 2002 году. Публикация же этого результата появилась только в 2006 году.

4. Поговорим немного подробнее о слабой гипотезе Бержа (теореме о совершенных графах).

а. Напомним, что любая клика в произвольном (не обязательно совершенном) простом графе G есть вершинно независимое множество в \bar{G} и наоборот. В качестве примера на рис. 6.20(a) показан совершенный граф G , хроматическое число которого равно трем. Клика максимального размера $\omega(G) = 3$ в этом графе помечена синим цветом на рис. 6.20(b). На рис. 6.20(c) показано дополнение \bar{G} графа G . Синим цветом на этом рисунке помечены вершины, образующие вершинно независимое множество в графе \bar{G} .

Как следствие, $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$ и $\omega(\bar{G}) = \alpha(G)$.

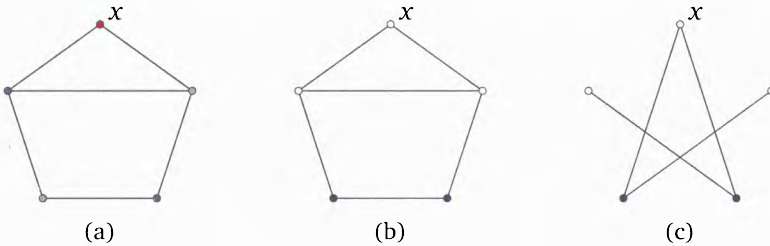


Рис. 6.20

б. Введем теперь важное понятие *кликowego покрытия* (clique cover) графа G .

Определение 14. *Кликовым покрытием* (или вершинным кликовым покрытием) графа G называется такое разбиение множества $V(G)$ вершин этого графа на блоки, при котором подмножество вершин, принадлежащее каждому блоку, индуцирует в исходном графе G клику соответствующего размера.

Ясно, что все множество вершин представляет собой тривиальное разбиение $V(G)$ на блоки единичной длины — любая вершина представляет собой индуцированный подграф, изоморфный графу K_1 . Нас, как обычно, будет интересовать такое кликовое покрытие, при котором количество блоков

минимально. Количество блоков в таком минимальном кликовом покрытии обозначается через $\theta(G)$.

В качестве примера рассмотрим граф G , показанный на рис. 6.20(b). Множество вершин этого графа мы можем разбить на два блока (синие и черные вершины на рисунке) так, чтобы вершины каждого блока индуцировали клику в исходном графе G . Так, три синие вершины графа индуцируют подграф, изоморфный K_3 , а две черные — клику размера 2. На один блок множество вершин разбить невозможно — все пять вершин графа клику, изоморфную K_5 , не образуют. Следовательно, для этого графа $\theta(G) = 2$.

Замечание 15. В некоторых источниках (см., например, [1]) кликовым покрытием графа G называется покрытие множества вершин подмножествами, каждое из которых индуцирует клику в исходном графе G . При таком определении подмножества, образующие это покрытие, могут пересекаться друг с другом. Однако число $\theta(G)$ для этих двух определений совпадает — любое минимальное покрытие вершин графа кликами приводится к разбиению $V(G)$ на блоки, индуцирующие клики в графе G , и наоборот.

с. Рассмотрим наряду с графом G его дополнение — граф \bar{G} . Как мы уже неоднократно замечали, любой клике графа G в графе \bar{G} отвечает некоторое вершинно независимое множество (см. рис. 6.20(c)). Выбрав некоторое кликовое покрытие графа G и окрасив вершины каждого из блоков этого покрытия в свой цвет, мы получим правильную окраску графа \bar{G} (6.20(c)). В случае, если количество покрывающих граф G клик минимально, минимальным будет и количество цветов, необходимых для окраски вершин графа \bar{G} . Следовательно, для произвольного простого графа G мы имеем равенство

$$\chi(\bar{G}) = \theta(G).$$

d. В случае, если граф G совершенен, для него, равно как и для любого его индуцированного подграфа $G[A]$, $A \subseteq V(G)$, из равенства

$$\chi(G[A]) = \omega(G[A]), \quad A \subseteq V(G),$$

следует равенство

$$\theta(\bar{G}[A]) = \alpha(\bar{G}[A]), \quad A \subseteq V(G),$$

для его дополнения. Обратно, если граф \bar{G} совершенен, то из равенства

$$\chi(\bar{G}[A]) = \omega(\bar{G}[A]), \quad A \subseteq V(G),$$

получаем равенство

$$\theta(G[A]) = \alpha(G[A]), \quad A \subseteq V(G).$$

Берж графы, для которых $\theta(G[A]) = \alpha(G[A])$, предложил называть α -совершенными графами, а графы, для которых $\chi(G[A]) = \omega(G[A])$, — γ -совершенными графами. Слабая гипотеза Бержа, таким образом, утверждает, что понятие α -совершенных и γ -совершенных графов совпадают, т. е. что из равенства $\theta(G[A]) = \alpha(G[A])$ следует равенство $\chi(G[A]) = \omega(G[A])$ и наоборот.

е. Отметим в заключение минимаксный характер слабой гипотезы Бержа. Для этого прежде всего заметим, что в общем случае для произвольного простого графа G справедливо неравенство

$$\theta(G) \geq \alpha(G), \quad (6.5)$$

причем в общем случае это неравенство может быть строгим.

В качестве характерного примера рассмотрим граф G , представляющий собой простой цикл длины 5 (рис. 6.21). Число $\alpha(G)$ для такого графа равно двум — взяв в G произвольную пару несмежных между собой вершин (красные вершины на рис. 6.21(a)) и добавив к ней любую из оставшихся вершин, мы нарушим свойство попарной несмежности вершин из этого множества. Число же $\theta(G)$ для этого графа равно трем (рис. 6.21(b)). Действительно, любая клика в таком графе изоморфна либо K_2 , либо K_1 . Как следствие, любое минимальное кликовое покрытие состоит из двух блоков мощности два и одного блока, содержащего единственную вершину (см. рис. 6.21(b)). Таким образом, для рассматриваемого графа $\theta(G) = 3 > 2 = \alpha(G)$.

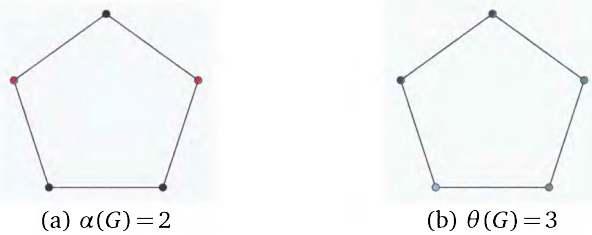


Рис. 6.21

Заметим теперь, что любая клика может покрывать как максимум одну вершину из вершинно независимого множества. Поэтому и в общем случае имеем неравенство (6.5).

В случае же совершенного графа неравенство (6.5) превращается в равенство. Но так как $\theta(G)$ — минимум некоторой функции (количество блоков в кликовом покрытии графа), а $\alpha(G)$ — максимум другой функции (количество вершин в вершинно независимом множестве графа), то равенство $\theta(G) = \alpha(G)$ представляет собой одну из многих минимаксных теорем теории графов.

При этом гипотеза Бержа говорит нам о том, что рассмотренные выше минимаксные задачи являются двойственными друг другу — если в задаче о минимальной окраске вершин неравенство (6.3) обращается в равенство для любого индуцированного подграфа графа G , то и в задаче о максимальном вершинно независимом множестве неравенство (6.5) обращается в равенство для любого $G[A]$, $A \subseteq V(G)$, и наоборот. С этой точки зрения слабая гипотеза Бержа и ее переформулировки идейно близки к многочисленным парам минимаксных теорем комбинаторики и теории графов, таким, например, как теорема Дилуорса и двойственная ей теорема Мирского.

5. Приступим теперь к доказательству слабой гипотезы Бержа.

а. Для доказательства этой гипотезы нам понадобится операция *расширения* (expanding) вершины x графа G на ребро $\{x, x'\}$.

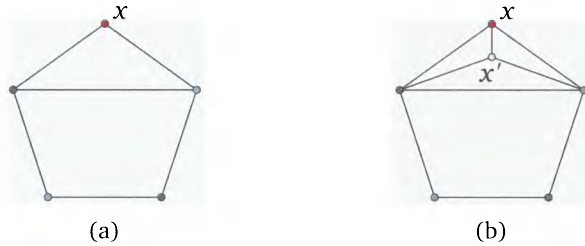


Рис. 6.22. (a) Граф G ; (b) граф G'

Определение 16. Пусть x — произвольная вершина графа G (см. рис. 6.22(a)). Операция *расширения* этой вершины состоит в добавлении к множеству $V(G)$ вершин графа G новой вершины x' и соединении ее с x , а также со всеми вершинами u , смежными с x (рис. 6.22(b)).

Лемма 17. Граф G' , полученный из совершенного графа G расширением произвольной вершины $x \in V(G)$, также является совершенным.

Доказательство проведем индукцией по количеству n вершин совершенного графа. База индукции верна — взяв совершенный граф K_1 и расширив единственную его вершину x , мы получим граф K_2 , который также является совершенным. Пусть теперь G — произвольный совершенный граф, построенный на $n > 1$ вершинах, а граф G' получен из графа G расширением произвольной вершины $x \in V(G)$ на ребро $\{x, x'\}$.

Рассмотрим вначале произвольный собственный (т. е. отличный от G') индуцированный подграф $G'[A']$ графа G' , $A' \subset V(G')$. Нам нужно рассмотреть два случая. В первом из них хотя бы одна из пары вершин x, x' не принадлежит A' . В этом случае $G'[A']$ представляет собой индуцированный подграф графа G . Во втором случае $G'[A']$ можно рассматривать как подграф, полученный из некоторого собственного подграфа $G[A]$ графа G расширением вершины x . В обоих случаях согласно индукционному предположению такой подграф совершенен, поэтому для доказательства леммы нам остается только доказать равенство

$$\chi(G') = \omega(G')$$

для самого графа G' . Так как для любого графа G' выполняется неравенство $\chi(G') \geq \omega(G')$, то для доказательства требуемого равенства нам достаточно убедиться в справедливости обратного неравенства $\chi(G') \leq \omega(G')$.

Предположим вначале, что вершина x принадлежит некоторой максимальной клике K графа G (рис. 6.22(b)). Расширение такой вершины увеличивает на единицу кликовое число графа:

$$\omega(G') = \omega(G) + 1.$$

При этом мы всегда можем окрасить вершину x' в новый, $(\chi(G) + 1)$ -й цвет и получить какую-то правильную окраску графа G' (см. рис. 6.22(b)). Но так как $\chi(G')$ — минимальное количество способов правильно окрасить граф G' , то мы с учетом равенства $\chi(G) = \omega(G)$ можем записать

$$\chi(G') \leq \chi(G) + 1 = \omega(G) + 1 = \omega(G').$$

Из этой цепочки равенств следует, что граф G' совершенный. Нам, таким образом, остается разобраться со случаем, когда x максимальной клике не принадлежит, т. е. со случаем, при котором $\omega(G') = \omega(G)$ (рис. 6.23(a)).

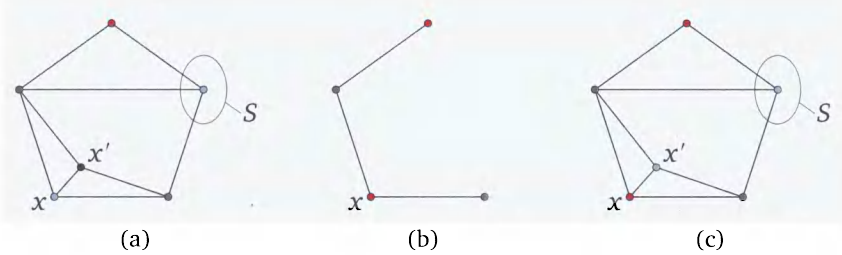


Рис. 6.23. (a) Граф G' ; (b) граф $G - S$; (c) граф G'

Окрасим вершины графа G в $\chi(G) = \omega(G)$ цветов. Пусть i — цвет, который получила вершина x при этой окраске (голубой цвет на рис. 6.23(a)). Обозначим через S подмножество вершин графа G , окрашенных в цвет i и отличных от вершины x .

Заметим прежде всего, что подмножество $S \cup \{x'\}$ в графе G' образует вершинно независимое множество. Действительно, вершины из S несмежны между собой, потому что они окрашены в G в один и тот же цвет, а сама окраска вершин графа G правильная. По той же причине все смежные с x вершины не входят в подмножество S . Но тогда и x' как вершина, полученная расширением вершины x , не является смежной ни с одной из вершин подмножества S .

Кроме того, заметим, что при окраске вершин совершенного графа G в $\chi(G) = \omega(G)$ цветов любая клика максимального размера $\omega(G)$ также окажется окрашенной ровно в $\omega(G)$ цветов. Как следствие, ровно одна вершина каждой клики максимального размера будет окрашена в цвет i , т. е. войдет в подмножество S .

Удалим теперь из графа G' подмножество вершин $S \cup \{x'\}$. В результате мы получим некоторый индуцированный подграф $G - S$ графа G . Согласно предыдущему замечанию кликовое число $\omega(G - S)$ графа $G - S$ оказывается по меньшей мере на единицу меньше кликового числа $\omega(G)$ графа G :

$$\omega(G - S) < \omega(G) \iff \omega(G - S) + 1 \leq \omega(G).$$

Граф $G - S$ как индуцированный подграф графа G совершенен, поэтому мы можем окрасить его в $\chi(G - S) = \omega(G - S)$ цветов (рис. 6.23(b)). Добавим теперь к графу $G - S$ удаленные ранее вершины подмножества $S \cup \{x'\}$ и окрасим эти вершины в цвет $\chi(G - S) + 1$ (рис. 6.23(c)). Так как согласно

сделанному ранее замечанию подмножество $S \cup \{x'\}$ в графе G' является вершинно независимым, то полученная окраска графа G' окажется правильной. Но тогда для хроматического числа графа G' мы с учетом равенства $\omega(G-S) = \chi(G-S)$ можем записать цепочку неравенств

$$\chi(G') \leq \chi(G-S) + 1 = \omega(G-S) + 1 \leq \omega(G) = \omega(G'),$$

из которой следует, что и в этом случае $\chi(G') = \omega(G')$. □

б. Приступим к доказательству теоремы о совершенных графах. Используем индукцию по количеству n вершин для доказательства того, что дополнение \bar{G} любого совершенного графа G также совершенно. Для случая $n = 1$ утверждение тривиально. Будем предполагать, что $n \geq 2$ и что для всех графов, построенных на меньшем количестве вершин, дополнение к любому совершенному графу является совершенным графом. Сразу заметим, что любой собственный индуцированный подграф графа \bar{G} есть дополнение собственного индуцированного подграфа графа G , а следовательно, по индукционному предположению такой подграф совершенен. Поэтому для доказательства того, что граф \bar{G} совершенен, нам остается доказать равенство $\chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$. Как и ранее, нам будет проще доказывать не это равенство, а неравенство $\chi(\bar{G}) \leq \omega(\bar{G})$.

Обозначим через K подмножество вершин, отвечающее некоторой клике в графе G , а через \mathcal{K} — множество всех таких подмножеств. Через \mathcal{A} обозначим множество всех *максимальных* вершинно независимых подмножеств A . Предположим, что в графе G существует такое подмножество $K \in \mathcal{K}$, что $K \cap A \neq \emptyset$ для всех $A \in \mathcal{A}$ (подмножество $K = \{y, z\}$ на рис. 6.24(a)). Удаляя вершины подмножества K , мы получаем, что размер произвольного вершинно независимого множества в графе $G - K$ строго меньше $\alpha(G)$. Но так как $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$, то из неравенства $\alpha(G - K) < \alpha(G)$ следует неравенство

$$\omega(\bar{G} - K) < \omega(\bar{G}) \iff \omega(\bar{G} - K) + 1 \leq \omega(\bar{G}).$$

По индукционному предположению граф $\bar{G} - K$ является совершенным, а значит, мы можем раскрасить его в $\omega(\bar{G} - K)$ цветов (см. рис. 6.24(b), на котором вершины графа $\bar{G} - K$ окрашены в единственный (синий) цвет). Так как вершины любой клики K в графе G являются вершинами какого-то вершинно независимого множества в графе \bar{G} , то мы можем продолжить пра-

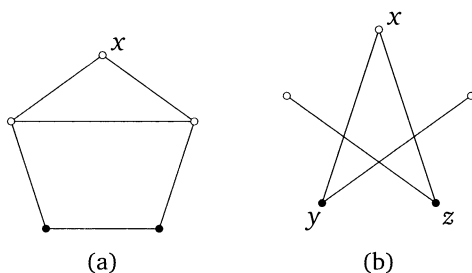


Рис. 6.24. (a) Граф G ; (b) граф \bar{G}

вильную раскраску графа $\bar{G} - K$ на граф \bar{G} , окрасив вершины подмножества K в цвет $\chi(\bar{G} - K) + 1$ (черный цвет на рис. 6.24(b)). При этом хроматическое число $\chi(\bar{G})$ не превосходит $\chi(\bar{G} - K) + 1$ как минимальное количество цветов, требующихся для правильной окраски графа \bar{G} . Таким образом, окончательно мы получаем, что

$$\chi(\bar{G}) \leq \chi(\bar{G} - K) + 1 = \omega(\bar{G} - K) + 1 \leq \omega(\bar{G}),$$

откуда и следует, что $\chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$, т. е. что граф \bar{G} совершенен.

с. Итак, нам нужно доказать, что в совершенном графе G описанная выше клика K обязательно найдется. Предположим противное, а именно будем считать, что для любого $K \in \mathcal{K}$ существует такое вершинно независимое множество $A \in \mathcal{A}$ мощности $\alpha(G)$, что $K \cap A = \emptyset$. Проблема состоит в том, что мы мало что можем сказать о структуре произвольного совершенного графа G , обладающего данным свойством. Вместо этого Ласло Ловас предложил определить новый граф, структура которого будет лучше подходить для доказательства невозможности подобного рода ситуации.

Именно, сопоставим множеству $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_t\}$ равный ему по мощности набор

$$\mathcal{A}_K = \{A_1, \dots, A_t\}$$

таких максимальных вершинно независимых подмножеств A_i , что для любого $i \in \{1, \dots, t\}$ пересечение $K_i \cap A_i$ пусто:

$$K_1 \mapsto A_1: A_1 \cap K_1 = \emptyset,$$

$$K_2 \mapsto A_2: A_2 \cap K_2 = \emptyset,$$

.....

$$K_t \mapsto A_t: A_t \cap K_t = \emptyset.$$

В силу сделанного выше предположения для любого K_i такое подмножество A_i обязательно найдется. В принципе, для разных K_i множества A_j могут и совпадать, поэтому набор \mathcal{A} представляет собой не множество, а мультимножество. Однако для нас это не важно — важно лишь, что количество элементов в наборах \mathcal{K} и \mathcal{A} совпадает и равно t .

Сосчитаем теперь для любой вершины $x \in V(G)$ количество $k(x)$ вершинно независимых множеств $A_i \in \mathcal{A}_K$, содержащих эту вершину. В принципе, в графе G могут существовать вершины, которые не входят ни в одно максимальное вершинно независимое множество. Таковыми, например, являются центральные вершины в графах «звезда» — для таких вершин число $k(x)$ гарантированно равно нулю. Кроме того, в графе G могут найтись и другие вершины, для которых $k(x) = 0$. Нас же будут интересовать лишь те вершины x , для которых $k(x) > 0$. Так как граф G совершенен, то совершенным является и подграф H , индуцированный всеми этими вершинами.

Образуем из графа H граф H' заменой в H любой вершины $x \in S$ на клику Q_x размера $k(x)$. При этом предполагается, что вершины $u \in V(Q_x)$ и $v \in V(Q_y)$ в графе H' соединены между собой ребром либо в случае, если $x = y$, либо в случае, если x и y соединены между собой ребром в исходном

подграфе H . Заметим, что граф H' может быть получен из H последовательным расширением вершин. Следовательно, согласно доказанной выше лемме граф H' также является совершенным, а значит, $\omega(H') = \chi(H')$. Кроме того, по построению $\alpha(H') = \alpha(H)$.

Считаем теперь $\omega(H')$ и $\chi(H')$ из других соображений. По построению H' любой максимальный полный подграф Q' графа H' образован из некоторого полного подграфа Q графа H (одновременно являющегося полным подграфом графа G) расширением его вершин $x \in V(Q)$. Иными словами, существует такое r , что $K_r = V(Q)$ и

$$|V(Q')| = \omega(H') = \sum_{x \in K_r} k(x).$$

Заметим теперь, что по определению $k(x)$

$$k(x) = \sum_{A_i \ni x} 1,$$

где A_i — максимальные вершинно независимые множества, содержащие x : единиц под знаком суммы ровно столько, сколько существует множеств A_i , содержащих вершину x . Поэтому

$$\omega(H') = \sum_{x \in K_r} \sum_{A_i \ni x} 1 = \sum_{i=1}^t |K_r \cap A_i|,$$

так как при фиксированном i количество единиц под знаком суммы совпадает с количеством вершин x , принадлежащих одновременно K_r и A_i . Но мы знаем, что любая клика пересекается с любым вершинно независимым множеством максимум по одной вершине, так что $|K_r \cap A_i| \leq 1$ для любых $i, r \in [t]$. Кроме того, в случае $i = r$ пересечение $K_r \cap A_r$ пусто, так что одно из слагаемых в выписанной выше сумме гарантированно равно нулю. Поэтому мы можем утверждать, что

$$\omega(H') \leq t - 1.$$

С другой же стороны,

$$n' := |V(H')| = \sum_{x \in V(G)} k(x) = \sum_{x \in V(G)} \sum_{A_i \ni x} 1 = \sum_{i=1}^t |V(G) \cap A_i| = \sum_{i=1}^t |A_i| = t \cdot \alpha(G).$$

Нам известно (см. (6.2)), что $\chi(H') \geq n' / \alpha(H') = n' / \alpha(H)$. Кроме того, так как H — индуцированный подграф графа G , то любое (и в том числе максимальное) вершинно независимое множество в H представляет собой одновременно некоторое (не обязательно максимальное) вершинно независимое множество в G . Поэтому размер $\alpha(H)$ максимального вершинно независимого множества в H меньше или равен размеру $\alpha(G)$ максимального вершинно независимого множества в G и

$$\chi(H') \geq \frac{n'}{\alpha(H)} \geq \frac{n'}{\alpha(G)} = \frac{t \cdot \alpha(G)}{\alpha(G)} = t \Rightarrow \chi(H') > \omega(H').$$

Но это противоречит тому, что H' является совершенным. Полученное противоречие доказывает теорему о совершенных графах. \square

d. Совершенство того или иного графа крайне важна с точки зрения описания свойств такого графа. Так, например, задача проверки совершенных графов на k -раскрашиваемость может быть решена за полиномиальное время. То же можно сказать и про некоторые другие алгоритмические задачи теории графов, такие как поиск максимальной клики в графе, максимально-го вершинно независимого множества и т. д.

Многие фундаментальные классы графов являются совершенными. Мы уже отмечали, что полные графы, а также двудольные графы являются совершенными. Еще один важный пример совершенных графов, часто встречающихся в приложениях, — так называемые *интервальные графы*, описанные в упражнении 18. Совершенство так называемых *графов сравнимости* (упражнение 19) эквивалентно двум важнейшим теоремам теории частично упорядоченных множеств — теореме Мирского и теореме Дилуорса. Наконец, совершенными являются так называемые *хордальные графы*, о которых мы подробно поговорим в параграфе, посвященном хроматическим полиномам графа G .

Упражнения

1 (1 балл). Пусть $G_2 = K_2$, а графы G_k , $k > 2$, получаются из графов G_{k-1} с помощью описанной в теореме 2 процедуры. Подсчитайте количество вершин в графе G_k .

2 (1,5 балла). Используя результаты упражнения 9, докажите, что граф G_{k+1} , описанный в теореме Мицельского, нельзя окрасить в k цветов.

3 (1 балл). Докажите, что среди всех k -дольных графов, построенных на

$$n = t \cdot k + r, \quad 0 \leq r \leq k - 1,$$

вершинах, максимальное количество ребер имеет полный k -дольный граф G , в котором r блоков имеют $t + 1$ вершин, а в $n - r$ блоках содержатся t вершин.

4 (0,5 балла). Докажите, что граф G , показанный на рис. 6.20(a), является совершенным графом.

5 (0,5 балла). Является ли граф C_{2n} , $n \geq 2$, совершенным?

6 (1 балл). Докажите, что для всех $k \geq 2$ справедливы неравенства

$$\chi(C_{2k+1}) > \omega(C_{2k+1}) \quad \text{и} \quad \chi(\bar{C}_{2k+1}) > \omega(\bar{C}_{2k+1}).$$

Из этих неравенств, в частности, следует, что как циклы нечетной длины, отличные от $K_3 = C_3$, так и их дополнения совершенными графами не являются.

7 (1 балл). Предположим, что верно следующее утверждение: граф G является совершенным тогда и только тогда, когда для любого индуцированного подграфа H графа G выполняется неравенство

$$|V(H)| \leq \alpha(H) \cdot \omega(H).$$

Докажите, что из этого утверждения следует теорема о совершенном графе.

8 (1 балл). Докажите, что любой двудольный граф $G[X, Y]$ является совершенным графом, с помощью теоремы о совершенных графах.

9 (1,5 балла). Докажите, что дополнение к двудольному графу является совершенным графом.

10 (1,5 балла). Напомним, что реберным графом (line graph) $L(G)$ графа G называется граф, вершинам которого соответствуют ребра графа G . При этом две вершины $e, f \in L(G)$ реберного графа смежны в $L(G)$, если они имеют общую концевую вершину в графе G . Докажите, что реберный граф любого двудольного графа является совершенным.

Дополнительные упражнения

11 (1,5 балла). Используя результаты упражнения 11, докажите, что граф G' , полученный из k -критического графа G с использованием конструкции Мицельского, является $(k + 1)$ -критическим. Заметим, что для доказательства того, что связный граф G является k -критическим, достаточно сравнить его с подграфами, полученными из G удалением единственного ребра.

12 (1,5 балла). Докажите, что простой граф G представляет собой полный k -дольный граф тогда и только тогда, когда не существует никакого индуцированного подграфа графа G , состоящего из трех вершин и одного ребра.

13 (1 балл). Докажите, что любой граф G , построенный на n вершинах и не содержащий клики размера $k + 1$, имеет как максимум $\frac{(1-1/k)n^2}{2}$ ребер.

14 (2,5 балла). Докажите, что простой связный граф, построенный на n вершинах и m ребрах, имеет по меньшей мере

$$(4m - n^2) \frac{m}{3n}$$

треугольников.

15 (2,5 балла). Докажите, что обхват графа G , построенного на n вершинах и имеющего как минимум $\frac{1}{2}n\sqrt{n-1}$ ребер, не превосходит четырех.

16 (2 балла). Предъявите нижнюю оценку на количество вершин в k -регулярном графе G , имеющем обхват, больший или равный g . Рассмотрите отдельно случаи четного и нечетного значения g .

17 (2 балла). Докажите, что в случае выполнения неравенства

$$\sum_{x \in V(G)} \binom{\deg(x)}{2} > (l-1) \binom{n}{2}$$

построенный на n вершинах граф G содержит $K_{2,l}$ в качестве своего подграфа.

18 (1,5 балла). Рассмотрим n замкнутых интервалов I_1, I_2, \dots, I_n на вещественной оси (рис. 6.25). Построим для этих интервалов граф G на n вершинах x_1, \dots, x_n , соединяя вершины x_i и x_j ребром в том и только в том случае, когда пересечение $I_i \cap I_j$ не пусто. Такой граф G называется *интервальным графом*. Докажите, что интервальный граф является совершенным, т. е. что $\chi(G) = \omega(G)$.

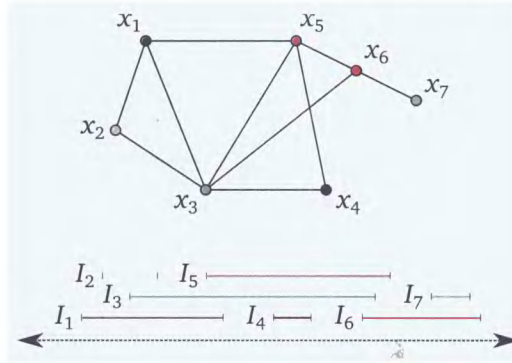


Рис. 6.25. Интервальный граф

19 (1,5 балла). *Графом сравнимости* (comparability graph) называют граф G , связанный с некоторым частично упорядоченным множеством (P, \preceq) . Множество вершин графа G совпадает с множеством P элементов частично упорядоченного множества. Если два элемента $x, y \in P$, $x \neq y$, сравнимы между собой (т. е. $x \preceq y$ или $y \preceq x$), то соответствующие этим элементам вершины x, y графа G соединены между собой ребром.

По-другому этот граф можно определить следующим образом. *Транзитивной ориентацией* графа G называется такая ориентация D ребер этого графа, при которой для любых ориентированных ребер $(x, y) \in E(D)$ и $(y, z) \in E(D)$ найдется ориентированное ребро $(x, z) \in D$. В этих терминах граф G называется графом сравнимости, если в нем существует транзитивная ориентация.

Докажите, что граф сравнимости является совершенным графом, как с помощью теоремы Мирского, так и без нее. Покажите эквивалентность теоремы Мирского утверждению о том, что граф сравнимости совершенен.

20 (1 балл). Докажите теорему Дилуорса для частично упорядоченного множества (P, \preceq) с помощью теоремы о совершенном графе.

Решение упражнений

1. Для количества вершин v_k можно записать следующее рекуррентное соотношение:

$$v_{k+1} = 2v_k + 1, \quad v_2 = 2.$$

Перепишем это соотношение через числа $w_k := v_k + 1$:

$$w_{k+1} = 2w_k, \quad w_2 = 3 \Rightarrow w_k = 3 \cdot 2^{k-2}.$$

Следовательно, $v_k = 3 \cdot 2^{k-2} - 1$.

2. Предположим, что граф G_{k+1} является k -хроматическим. Ограничивая эту окраску на граф G_k , мы получаем правильную окраску графа G_k в k цветов. Согласно результатам упражнения 9 для любого цвета i , $i = 1, \dots, k$, найдется вершина $x \in V(G_k)$, смежная в G_k с вершинами, окрашенными во все оставшиеся цвета. Так как отвечающая x вершина y в графе G_{k+1} имеет тех

же соседей, что и x , то и она обязана быть окрашена в цвет i . Следовательно, для любого цвета i среди вершин $u \in G_k$ найдется хотя бы одна вершина, окрашенная в этот цвет. Но тогда вершину z мы уже не сможем окрасить ни в один из i цветов, $i = 1, \dots, k$. Полученное противоречие доказывает, что граф G_{k+1} хроматическим быть не может.

3. То, что граф G обязан быть полным, очевидно — в противном случае мы бы всегда могли увеличить количество ребер, добавив ребра между несмежными между собой вершинами разных блоков. Теперь предположим, что у нас в полном k -дольном графе имеется пара блоков, размеры которых отличаются более чем на единицу. В этом случае мы всегда сможем переместить одну из вершин из большего блока в меньший и соединить ее дополнительным ребром с одной из оставшихся вершин большего блока. Так как размеры блоков отличаются как минимум на два, то такая свободная вершина в большем блоке обязательно найдется. Следовательно, максимальное количество ребер возможно только лишь в случае, когда размеры блоков отличаются как максимум на единицу.

4. Дополнение к графу G представляет собой простой путь P_5 , построенный на пяти вершинах (см. рис. 6.20(c)), а такой граф является совершенным, равно как и любой другой двудольный граф.

5. Граф C_{2n} является совершенным. Действительно, любой его индуцированный подграф представляет собой путь или несколько путей, т. е. двудольный граф, а любой двудольный граф совершенен. Кроме того, $\chi(C_{2n}) = 2 = \omega(C_{2n})$.

6. Мы знаем, что $\chi(C_{2k+1}) = 3$ для всех $k \geq 1$. При этом кликой максимального размера в цикле C_{2k+1} при $k > 1$ является ребро K_2 . Следовательно, $\omega(C_{2k+1}) = 2$ при всех $k > 1$, так что такие циклы совершенными не являются.

Напомним, что $\chi(\bar{G}) = \theta(G)$ и $\omega(\bar{G}) = \alpha(G)$, так что нам нужно сосчитать $\alpha(G)$ и $\theta(G)$ для графа $G = C_{2k+1}$. Максимальное вершинно независимое множество в цикле C_{2k+1} имеет размер, равный k . Для покрытия же вершин этого графа кликами (ребрами K_2) требуется по меньшей мере $k + 1$ ребро. Следовательно,

$$\omega(\bar{C}_{2k+1}) = k, \quad \chi(\bar{C}_{2k+1}) = k + 1, \quad k \geq 2.$$

7. Действительно, указанное в упражнении неравенство инвариантно относительно операции взятия дополнения к графу H :

$$|V(\bar{H})| = |V(H)|, \quad \alpha(\bar{H}) = \omega(H), \quad \omega(\bar{H}) = \alpha(H).$$

Следовательно, если верно сформулированное в упражнении утверждение, то оно же верно и для графа \bar{G} , а из него следует теорема о совершенном графе.

8. Из теоремы о совершенных графах следует, что G является совершенным тогда и только тогда, когда $\alpha(G) = \theta(G)$. В случае двудольного графа без изолированных вершин любое покрытие его вершин кликами представляет собой покрытие этих вершин ребрами такого графа, т. е. $\theta(G) = \beta'(G)$. Согласно теореме Кёнига $\alpha(G) = \beta'(G)$. Следовательно, для двудольных графов без изолированных вершин равенство $\alpha(G) = \theta(G)$ есть следствие теоремы

Кёнига. Если же в G имеется изолированная вершина x , то в \bar{G} повышается на единицу размер максимальной клики в графе $\bar{G} - x$, т. е. повышается на единицу кликовое число такого графа. При этом повышается на единицу и хроматическое число графа \bar{G} , так что и для этого случая равенство $\omega(\bar{G}) = \chi(\bar{G})$ остается справедливым.

9. Рассмотрим граф \bar{G} , являющийся дополнением к двудольному графу G . Так как дополнение к любому собственному индуцированному подграфу графа G вновь является двудольным графом, то нам достаточно доказать, что $\omega(\bar{G}) = \chi(\bar{G})$.

Заметим, что кликовое покрытие любого двудольного графа G состоит из некоторого паросочетания M и набора S отдельных вершин. Максимальное паросочетание в G дает нам минимальное кликовое покрытие G , причем из равенств

$$\theta(G) = |S| + \alpha'(G), \quad n = |S| + 2\alpha'(G)$$

следует формула

$$\theta(G) = n - \alpha'(G).$$

Кроме того, для любого графа справедлива формула

$$\alpha(G) + \beta(G) = n \Rightarrow \alpha(G) = n - \beta(G),$$

где $\beta(G)$ — количество вершин в минимальном вершинном покрытии. Согласно теореме Кёнига–Эгервари $\beta(G) = \alpha'(G)$, так что

$$\theta(G) = \alpha(G) \Leftrightarrow \chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G}).$$

10. Так как любой индуцированный подграф линейного графа $L(G)$ двудольного графа G вновь является линейным графом для некоторого подграфа графа G , то нам вновь нужно лишь доказать, что $\omega(L(G)) = \chi(L(G))$. Вместо этого докажем равенство $\alpha(L(G)) = \theta(L(G))$ — доказав это равенство и воспользовавшись слабой гипотезой Бержа, мы докажем как совершенство дополнения к графу $L(G)$, так и совершенство самого графа $L(G)$.

Заметим прежде всего, что любому вершинно независимому множеству в $L(G)$ отвечает некоторое паросочетание в G и наоборот, а значит, $\alpha(L(G)) = \alpha'(G)$. Согласно теореме Кёнига–Эгервари $\alpha'(G) = \beta(G)$, т. е. $\alpha'(G)$ равно количеству вершин в минимальном вершинном покрытии графа G . Теперь отметим, что любая клика в графе $L(G)$ состоит из ребер графа G , имеющих общую инцидентную им вершину. Как следствие, минимальное покрытие графа G даст нам некоторое минимальное покрытие ребер графа $L(G)$ кликами в количестве $\beta(G)$, часть из которых может пересекаться. Однако минимальное покрытие графа пересекающимися кликами легко приводится к минимальному покрытию графа попарно непересекающимися между собой кликами, а значит, $\beta(G) = \theta(L(G))$.

§ 3. Реберная раскраска графов

1. Перейдем теперь к так называемым *реберным раскраскам* уже не обязательно простого графа G в k цветов.

а. Формальные определения здесь практически буквально перефразируют соответствующие определения в случае раскраски вершин. Так, *правильная реберная раскраска* — это такая раскраска, при которой любые ребра, инцидентные одной и той же вершине, окрашены в разные цвета. Минимальное количество цветов, в которые можно правильно окрасить ребра графа G , называется *реберным хроматическим числом* $\chi'(G)$.

Очевидно, что правильно раскрасить петлю в графе невозможно. Поэтому в задачах, связанных с реберной окраской графов, мы будем рассматривать мультиграфы, петли в которых отсутствуют.

б. Приведем достаточно характерный пример практической задачи, сводящейся к поиску правильной реберной раскраски графа G , — так называемой задачи планирования соревнований.

Предположим, что имеется n различных команд, участвующих в некотором спортивном турнире. Для любой пары команд нам известно, должны ли они играть между собой в данном сезоне. Предположим также, что любая команда может провести лишь одну игру в неделю. Задача состоит в минимизации времени проведения соревнований.

Для формализации данной задачи можно рассмотреть граф, построенный на n вершинах. Ребро между парой вершин проводится в случае, если соответствующие команды должны сыграть между собой в данном сезоне. Все ребра, отвечающие играм на одной и той же неделе, окрашиваются в один и тот же цвет. Наша задача состоит в построении правильной реберной окраски данного графа в наименьшее количество цветов.

с. Задача реберной окраски графа тесно связана с задачей построения в нем паросочетания. Действительно, любое подмножество ребер, окрашенных в один и тот же цвет, формирует некоторое паросочетание в графе G . Следовательно, любая правильная реберная раскраска в k цветов задает нам разбиение $\{E_1, \dots, E_k\}$ множества $E(G)$ ребер графа G на k блоков, каждый из которых представляет собой некоторое паросочетание. При этом количество цветов, необходимых для правильной окраски m ребер графа, ограничено снизу:

$$\chi'(G) \geq \frac{m}{\alpha'(G)},$$

где $\alpha'(G)$ — количество ребер в максимальном паросочетании, m — количество ребер в графе.

Далее, при правильной реберной раскраске все ребра, инцидентные одной и той же вершине, должны быть окрашены в разные цвета. Это дает еще одну очевидную нижнюю оценку на реберное хроматическое число $\chi'(G)$:

$$\chi'(G) \geq \Delta(G). \quad (6.6)$$

д. Заметим, что реберное хроматическое число $\chi'(G)$ любого графа совпадает с хроматическим числом $\chi(L(G))$ линейного графа $L(G)$, построенного из исходного графа G :

$$\chi'(G) = \chi(L(G)).$$

С этой точки зрения реберная раскраска графа есть частный случай задачи о правильной вершинной раскраске графа.

2. Поговорим теперь о верхних оценках на реберное хроматическое число. Оказывается, в отличие от раскраски вершин, для $\chi'(G)$ существуют удивительно точные оценки.

а. Рассмотрим вначале простые графы. В 1964 году Визинг и независимо от него в 1966 году Гупта установили, что для таких графов имеется всего две возможности — их хроматическое число может быть равно либо $\Delta(G)$, либо $\Delta(G) + 1$. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (Визинг, 1964; Гупта, 1966). Пусть G — простой граф, построенный на n вершинах. Тогда

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

где $\Delta(G)$ — максимальная из степеней вершин графа G .

Доказательство. Предположим, что ребра графа G невозможно окрасить в $\Delta(G) + 1$ цвет. Выберем в G подграф H с максимально возможным количеством ребер, который допускает такую реберную окраску. Мы придем к противоречию, если нам удастся построить подграф H' , имеющий на одно ребро больше, чем H , который также можно реберно окрасить в $\Delta(G) + 1$ цвет.

Согласно нашему предположению в графе G существует ребро $\{x, y_0\} \notin E(H)$ (рис. 6.26(a)). Так как количество цветов, использованных при окраске ребер подграфа H , превосходит максимальную степень вершины $\Delta(G)$, то для вершины x найдется хотя бы один цвет c , не встречающийся при окраске инцидентных с x ребер, входящих в H . Мы будем говорить, что такой цвет не представлен в x (см. рис. 6.26(a), на котором цвет c , не представленный в x , обведен в кружок). По тем же причинам в вершине y_0 не представлен некоторый цвет c_1 . Если цвет c_1 не представлен и в вершине x , то мы можем добавить к подграфу H ребро $\{x, y_0\}$, окрашенное в цвет c_1 , и получить правильную окраску подграфа $H' := H \cup \{x, y_0\}$.

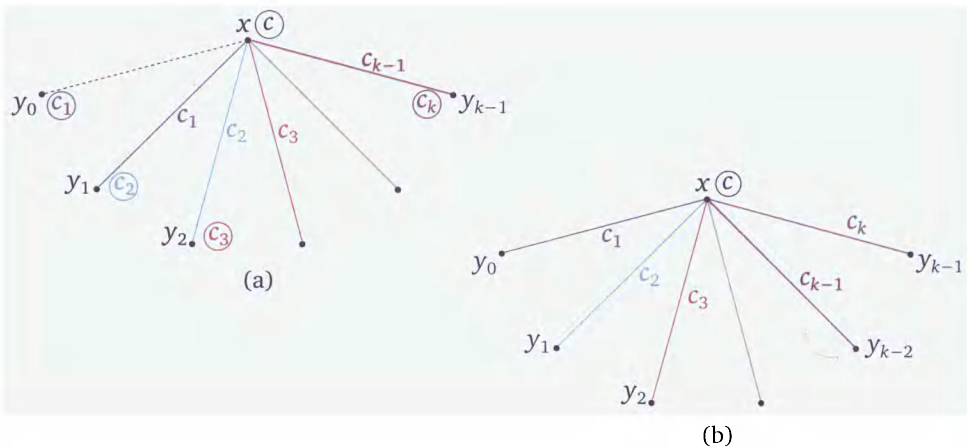


Рис. 6.26

Теперь предположим, что в подграфе H имеется ребро $\{x, y_1\}$, окрашенное в цвет c_1 (рис. 6.26(a)). В вершине y_1 не представлен цвет c_2 . В случае, если этот цвет не представлен и в вершине x , мы можем перекрасить ребро $\{x, y_1\}$ в цвет c_2 , а ребро $\{x, y_0\}$ окрасить в цвет c_1 . В результате мы вновь получим правильную окраску подграфа $H' = H \cup \{x, y_0\}$.

Давайте опишем общий, k -й шаг алгоритма, $k \geq 3$. Предположим, что на этом шаге мы пришли к ребру $\{x, y_{k-1}\}$, окрашенному в цвет c_{k-1} (рис. 6.26(a)). При этом ребра

$$\{x, y_1\}, \dots, \{x, y_{k-2}\}$$

окрашены в попарно различные цвета c_i , $i = 1, \dots, k-2$, а цвет c_i не представлен в вершине y_{i-1} , $i \in [1, \dots, k]$. В случае, если в вершине x не представлен цвет c_k , мы можем перекрасить ребро $\{x, y_{k-1}\}$ в цвет c_k , а оставшиеся ребра $\{x, y_{i-1}\}$, $i \in [1, k-1]$, перекрасить в цвета c_i (такую операцию мы будем называть операцией сдвига цвета ребер) (рис. 6.26(b)). Если при этом k совпадет с $\deg(x)$, то наш алгоритм закончит свою работу, окрасив подграф $H \cup \{x, y_0\}$ в $\Delta(G) + 1$ цвет.

Однако оказывается, что этот алгоритм в случае $k \geq 3$ может закончиться значительно раньше. Именно, на одном из шагов этого алгоритма может оказаться так, что не представленный в вершине y_{k-1} цвет c_k совпадет с одним из ранее встретившихся цветов c_j , $j < k-1$ (рис. 6.27(a)).

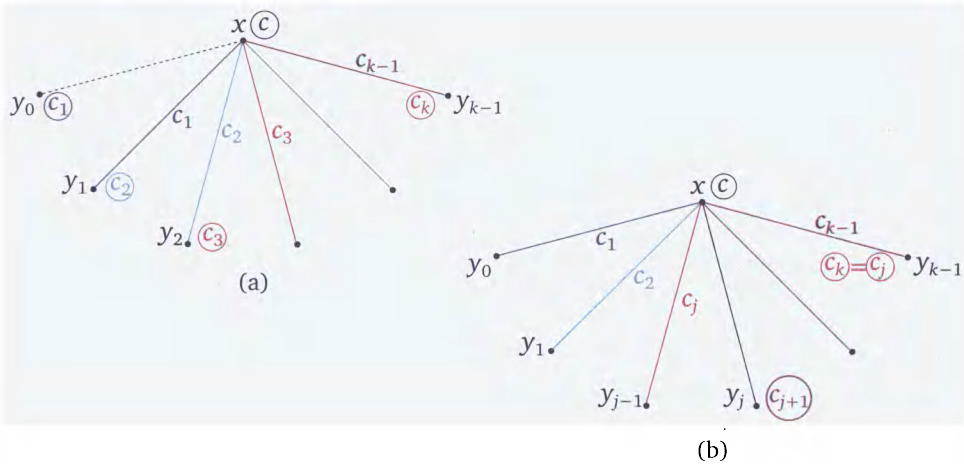


Рис. 6.27

В этом случае сдвинем цвета c_1, \dots, c_j с ребер $\{x, y_1\}, \dots, \{x, y_j\}$ на ребра $\{x, y_0\}, \dots, \{x, y_{j-1}\}$, оставив ребро $\{x, y_j\}$ неокрашенным (см. рис. 6.27). Введем граф $S := H \cup \{x, y_0\} \setminus \{x, y_j\}$, имеющий одинаковое количество ребер с H , и рассмотрим в нем подграф S_{c, c_j} , индуцированный ребрами, окрашенными либо в цвет c , либо в цвет c_j . Каждая компонента такого подграфа представляет собой либо цикл четной длины, либо путь, в котором ребра разных цветов чередуются друг с другом. Покажем, что в подграфе S_{c, c_j} вер-

шины y_j , y_{k-1} и x имеют степень, равную единице, а значит, не могут лежать в одной и той же компоненте связности S_{c,c_j} .

Действительно, цвет c не представлен в вершине x , поэтому в подграфе S_{c,c_j} эта вершина является листом. В вершине y_{k-1} не представлен цвет $c_j = c_k$. Наконец, мы только что сдвинули цвет c_j с вершины y_j , так что и в этой вершине цвет c_j уже не представлен.

Разберем вначале случай, когда x и y_j лежат в различных компонентах связности S_{c,c_j} . Поменяем тогда цвета c и c_j в компоненте, содержащей вершину y_j . После этой операции цвет c не будет присутствовать ни в x , ни в y_j . Окрашивая ребро $\{x, y_j\}$ в цвет c , мы получаем правильную реберную окраску графа $S \cup \{x, y_j\}$.

Теперь предположим, что вершины x и y_j лежат в одной компоненте связности S_{c,c_j} . Тогда, как мы уже заметили, вершина y_{k-1} лежит в отличной от этих двух вершин компоненте связности S_{c,c_j} . Поменяв в компоненте, содержащей y_{k-1} , цвета c и c_j , а затем сдвинув цвета с ребер $\{x, y_i\}$ на ребра $\{x, y_{i-1}\}$, $i = j + 1, \dots, k - 1$, мы сможем окрасить ребро $\{x, y_{k-1}\}$ в цвет c и вновь получить правильную реберную окраску графа $S \cup \{x, y_j\}$. \square

Замечание 2. Базируясь на приведенном выше доказательстве, можно построить достаточно эффективный алгоритм окраски ребер графа G не более чем в $\Delta(G) + 1$ цвет.

б. Как следует из теоремы Визинга, все множество простых графов мы можем разбить на два блока — графы, для которых $\chi'(G) = \Delta(G)$ и графы, для которых $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Определение 3. Говорят, что простой граф G относится к первому классу, если для него $\chi'(G) = \Delta(G)$, и ко второму классу в противном случае.

В общем случае задача определения класса графа является NP -полной, поэтому любые результаты, относящиеся к критериям реберно Δ -раскрашиваемости графов, оказываются крайне полезными. Некоторые из этих результатов представлены в упражнениях к данному параграфу.

с. Теорему Визинга можно обобщить на случай графа G с мультиребрами. Именно, обозначим через $\mu(x, y)$ количество ребер, соединяющих вершины x и y , а через $\mu(G)$ — максимальное среди всех чисел $\mu(x, y)$.

Теорема 4 (Визинг, 1964; Гупта, 1966). Для произвольного графа G с мультиребрами справедливо неравенство

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G).$$

Следствие 5 (Шеннон, 1949). Для произвольного графа G с мультиребрами справедливо неравенство

$$\chi'(G) \leq (3/2) \cdot \Delta(G).$$

Доказательство. Предположим, что данное утверждение неверно. Тогда существует такой критический мультиграф G с реберным хроматическим

числом $\chi'(G) = k$, строго большим $(3/2)\Delta(G)$, что $\chi'(G - e) = k - 1$ для любого ребра $e \in E(G)$. При этом согласно теореме Визинга для мультиграфов

$$k - \mu(G) \leq \Delta(G).$$

Пусть x и y — концевые вершины мультиребра в G с кратностью $\mu(G)$, имеющие степени $\deg(x) =: d_x$ и $\deg(y) =: d_y$. Удалим одно из ребер $e = \{x, y\}$ этого мультиребра. Ребра мультиграфа $G - e$ мы уже сможем правильно окрасить в $k - 1$ цвет. Обозначим через $\Omega(x)$ подмножество цветов, не представленных в вершине $x \in V(G - e)$, а через $\Omega(y)$ — подмножество цветов, не представленных в вершине $y \in V(G - e)$. Тогда

$$|\Omega(x)| = (k - 1) - (d_x - 1) = k - d_x \geq k - \Delta(G),$$

$$|\Omega(y)| = (k - 1) - (d_y - 1) = k - d_y \geq k - \Delta(G).$$

С другой стороны, в графе $G - e$ все оставшиеся $\mu(G) - 1$ ребер мультиребра, соединяющего вершины x и y , окрашены каждое в свой цвет. Так как и из x , и из y могут исходить еще какие-то ребра в $G - e$, то для мощности подмножества $\Omega(x) \cup \Omega(y)$ мы можем записать неравенство

$$|\Omega(x) \cup \Omega(y)| \leq (k - 1) - (\mu(G) - 1) = k - \mu(G) \leq \Delta(G).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\Omega(x) \cap \Omega(y)| &= |\Omega(x)| + |\Omega(y)| - |\Omega(x) \cup \Omega(y)| \geq 2(k - \Delta(G)) - \Delta(G) = \\ &= 2k - 3\Delta(G) > 0, \end{aligned}$$

т. е. у вершин x и y имеется общий для них отсутствующий цвет. Но тогда мы в этот цвет сможем окрасить ребро e , получив правильную окраску графа G в $k - 1$ цвет. Полученное противоречие доказывает теорему Шеннона. \square

d. Заметим, что полученная Шенноном верхняя оценка на число $\chi'(G)$ достигается, — на рис. 6.28 показан мультиграф G , для которого $\Delta(G) = 6$ и $\chi'(G) = 9$.

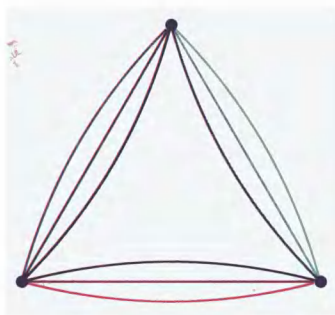


Рис. 6.28

Упражнения

1 (0,5 балла). Определите реберное хроматическое число $\chi'(G)$ для полного двудольного графа $K_{m,n}$.

2 (0,5 балла). Подсчитайте количество ребер в реберном графе $L(G)$ графа G .

3 (1 балл). Подсчитайте реберное хроматическое число $\chi'(G)$ для графов, изображенных на рис. 6.29.

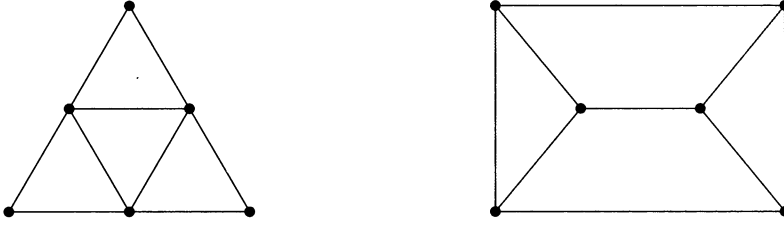


Рис. 6.29

4 (1 балл). Подсчитайте реберное хроматическое число $\chi'(Q_n)$ для гиперкуба Q_n , предъявив способ оптимальной окраски его ребер.

5 (1 балл). Подсчитайте реберное хроматическое число $\chi'(G)$ для 3-регулярного графа G , показанного на рис. 6.30.

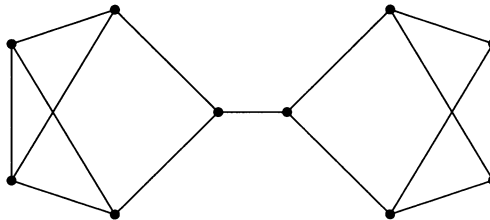


Рис. 6.30

6 (1,5 балла). Докажите, что реберное хроматическое число графа Петерсена равно четырем. Заметим, что граф Петерсена является двусвязным 3-регулярным графом. Любой такой граф с $\chi'(G) = 4$ называется *снарком* (snark). Такие графы обладают довольно интересными свойствами, связанными как с раскраской графов, так и с другими характеристиками графов.

7 (1,5 балла). Докажите, что для любого простого двудольного графа $G[X, Y]$ найдется $\Delta(G)$ -регулярный простой двудольный граф, содержащий $G[X, Y]$.

8 (1 балл). С помощью предыдущего упражнения докажите, что реберное хроматическое число произвольного простого двудольного графа $G[X, Y]$ равняется $\Delta(G)$.

Дополнительные упражнения

9 (2,5 балла). Декартовым произведением $G \square H$ двух графов G и H называется граф, множество вершин которого представляет собой декартово произведение $V(G) \times V(H)$. При этом ребра между вершинами (x, y) и (x', y') в графе $G \square H$ проводятся согласно следующему правилу: если $x = x'$, а вершины y и y' смежны в H , или если $y = y'$, а вершины x и x' смежны в G . Иными словами, в графе $G \square H$ любая вершина $x \in G$ заменяется копией графа H , и наоборот, любая вершина $y \in H$ заменяется на некоторую копию графа G . Так, например, граф $P_n \square K_2$ представляет собой граф «лестница», $K_2 \square K_2 = C_4$, $C_4 \square K_2 = Q_3$, а декартово произведение n экземпляров графа K_2 представляет собой n -мерный куб Q_n .

1) Сосчитайте реберное хроматическое число графа $C_n \square K_2$.

2) Используя теорему Визинга, докажите, что $\chi'(G \square K_2) = \Delta(G \square K_2)$.

3) Пусть G и H представляют собой нетривиальные простые графы, для одного из которых справедливо равенство $\chi'(H) = \Delta(H)$. Используя теорему Визинга, докажите, что в этом случае $\chi'(G \square H) = \Delta(G \square H)$.

10 (2,5 балла). Подсчитайте количество правильных реберных раскрасок графа, полученного из $K_{3,3}$ заменой любого ребра на мультиребро, состоящее из двух ребер.

11 (1,5 балла). Докажите, что реберное хроматическое число $\chi'(G)$ как регулярного графа G , построенного на нечетном количестве $2l + 1$ вершин, так и простого графа, построенного на нечетном количестве $2l + 1$ вершин и имеющего более чем $l \cdot \Delta(G)$ ребер, строго больше $\Delta(G)$.

12 (2 балла). Докажите, что реберное хроматическое число $\chi'(G)$ регулярного графа G , имеющего точку сочленения, строго больше $\Delta(G)$.

13 (2 балла). Докажите, что кубический граф, в котором существует гамильтонов цикл, имеет реберное хроматическое число, равное трем.

14 (2,5 балла). Докажите, что реберное хроматическое число $\chi'(K_{2n})$ полного графа K_{2n} равно $2n - 1$, предъявив конструктивный способ окраски ребер в $2n - 1$ цвет для любого $n > 1$.

15 (1,5 балла). Используя результаты предыдущего упражнения, покажите, что реберное хроматическое число $\chi'(K_{2n-1})$ полного графа K_{2n-1} также равно $2n - 1$.

Решение упражнений

1. Ясно, что $\chi'(K_{m,n}) = \max(m, n)$. Действительно, $\Delta(K_{m,n}) = \max(m, n)$, и, окрашивая каждое из $k = \max(m, n)$ ребер, исходящих из вершины x большей доли, в свой цвет, мы получим правильную окраску ребер полного двудольного графа.

2. Любое ребро графа $L(G)$ отвечает паре ребер графа G , инцидентных одной и той же вершине x . У любой вершины имеется ровно $\binom{\deg(x)}{2}$ пар таких ребер, так что общее количество ребер в $L(G)$ равно $\sum_{x \in V(G)} \binom{\deg(x)}{2}$.

3. Хроматическое число первого графа равно четырем, а второго — трем. Соответствующие этим графам правильные реберные раскраски показаны на рис. 6.31. Так как количество этих цветов совпадает с максимальной степенью графа, то это действительно оптимальная раскраска.



Рис. 6.31

4. Покажем, что $\chi'(Q_n) = n$. Действительно, так как $\Delta(Q_n) = n$, то раскрасить ребра в меньшее количество цветов мы не можем. Далее, граф Q_2 легко раскрасить в два цвета. Если же мы умеем правильно окрашивать ребра куба Q_{n-1} , то мы всегда сможем взять два экземпляра такого куба, правильно их раскрасить в $n - 1$ цвет, а затем выбрать цвет n для окраски ребер, соединяющих вершины двух экземпляров Q_{n-1} .

5. Правильная окраска графа G показана на рис. 6.32. После окраски трех инцидентных вершине 1 ребер в три разных цвета цвет ребра $\{2, 3\}$, а затем и цвет ребра $\{2, 4\}$ определяются однозначно. После этого видно, что тремя цветами правильно окрасить этот граф невозможно, так что приходится использовать четвертый цвет для окраски ребер этого графа.

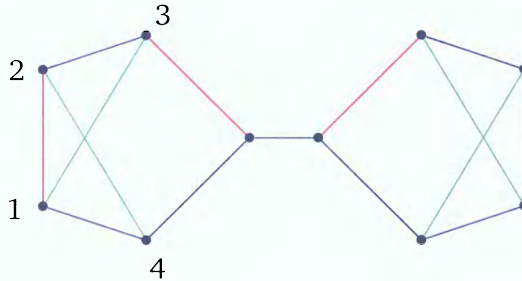


Рис. 6.32

6. Единственный способ правильно окрасить внешний цикл графа Петерсена — окрасить ребра этого цикла в три цвета так, чтобы два ребра оказались окрашены в первый цвет, два ребра — во второй и одно — в третий. Цвета ребер, соединяющих внешний и внутренний циклы C_5 , определяются при этом однозначно (см. рис. 6.33). При этом однозначно определяется цвет и некоторых внутренних ребер графа. Однако, как видно из рисунка, окрасить правильно в три цвета все внутренние ребра уже не получается: два ребра, соединяющие синие и красные ребра, должны быть оба окрашены в зеленый цвет, а это приводит к неправильной окраске внутренних ребер.

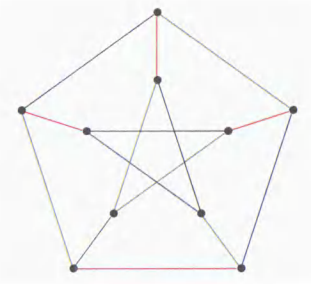


Рис. 6.33

7. Предъявим вначале «простое» неправильное доказательство требуемого утверждения. Предположим, что $|X| < |Y|$. В этом случае добавим $|Y| - |X|$ вершин в блок X так, чтобы количество вершин в каждой доле стало одинаковым. Теперь предположим, что в двудольном графе $G[X, Y]$, для которого $|X| = |Y|$, нашлась вершина $x \in X$, степень которой меньше k . В этом случае обязательно найдется и вершина $y \in Y$ со степенью $\deg(y) < k$. Действительно, в противном случае степень любой вершины $y \in Y$ равна k и из условия $\deg(x) < k$ следует, что в X существует вершина x' со степенью $\deg(x') > k$, что невозможно. Соединяя все такие пары вершин ребрами, мы в конце концов получим k -регулярный надграф G' двудольного графа $G[X, Y]$.

К сожалению, описанный выше способ даст нам двудольный граф, в котором могут появиться мультиребра. В качестве характерного примера рассмотрим граф, полученный из $K_{3,3}$ добавлением двух вершин и заменой одного из ребер на три ребра так, как показано на рис. 6.34. У такого графа добавленные вершины имеют степень, равную два, и добавление к этой паре вершин ребра приведет к появлению мультиребра в графе.

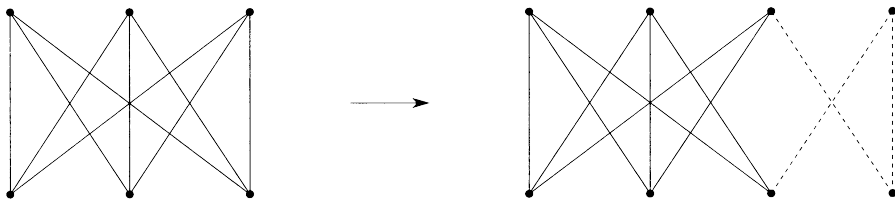


Рис. 6.34

Поэтому вместо описанного способа можно использовать вариант, позволяющий для любого графа G получить некоторый регулярный суперграф H , содержащий G и такой, что $\Delta(H) = \Delta(G)$. На первом шаге такого построения к G следует добавить его копию — граф G' , а затем любую вершину $x \in V(G)$, для которой $\deg(x) < \Delta(G)$, соединить с ее двойником — вершиной $x' \in V(G')$ — ребром. Если у полученного графа останутся вершины со степенями, меньшими $\Delta(G)$, то процедуру следует повторять до тех пор, пока не получится регулярный граф H .

8. Мы знаем, что любой k -регулярный двудольный граф допускает декомпозицию на k совершенных паросочетаний, т. е. он реберно k -раскрашиваем. Кроме того, в предыдущем упражнении мы показали, что любой двудольный граф $G[X, Y]$, для которого $\Delta(G) = k$, является подграфом k -регулярного двудольного графа G' . Как следствие, любая правильная реберная раскраска графа G' в $\Delta(G)$ цветов даст нам правильную реберную раскраску и графа G в то же самое количество цветов.

§ 4. Хроматический многочлен графа

1. Вернемся к правильной вершинной окраске графов. Предположим, что некоторый граф G является правильно k -раскрашиваемым графом. В этом случае мы можем поинтересоваться, сколькими различными способами можно правильно окрасить вершины такого графа в k цветов. Поставленная таким образом задача приводит нас к одному из важнейших объектов как современной алгебраической теории графов, так и современной перечислительной комбинаторики — к хроматическому многочлену графа G .

а. Сопоставим любому целому неотрицательному k количеству $P_G(k)$ способов правильной окраски вершин графа G в k цветов. Давайте поймем, чему может быть равно число $P_G(k)$ для различных значений k .

Мы знаем, что минимальное количество цветов, в которое можно правильно окрасить вершины заданного графа G , равно $\chi(G)$. Следовательно, $P_G(k)$ должно равняться нулю для всех k от 0 до $\chi(G) - 1$. В случае же $k \geq \chi(G)$ мы любой граф конечным числом способов можем правильно окрасить в k цветов, поэтому для таких k значение $P_G(k)$ должно быть строго больше нуля.

В качестве примера рассмотрим граф K_3 . Мы знаем, что хроматическое число такого графа равно трем. Следовательно, $P_{K_3}(0) = P_{K_3}(1) = P_{K_3}(2) = 0$. Далее, при $k = \chi(K_3) = 3$ мы имеем $P_{K_3}(3) = 6$. Действительно, вершину 1 графа мы можем окрасить в любой из трех цветов, соседнюю с ней вершину 2 — в любой из оставшихся двух цветов. Цвет же третьей вершины определяется уже однозначно. Следовательно, $P_{K_3}(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Аналогичные рассуждения проходят и для любого $k > \chi(K_3)$. Действительно, первую вершину мы можем окрасить в любой из k цветов, вторую — в $k - 1$ цветов, а третью — в любой из оставшихся $k - 2$ цветов. Поэтому

$$P_{K_3}(k) = k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \quad \text{для всех } k \geq \chi(K_3).$$

Заметим теперь, что данная формула годится и для $k = 0, 1, 2$. Действительно, для этих значений $P_{K_3}(k)$ обращается в ноль, что нам, собственно, и нужно. Эти соображения и приводят нас к следующему определению.

Определение 1. Хроматическим многочленом $P_G(z)$ называется функция, принимающая в точках $k = 0, 1, 2, \dots$ значения $P_G(k)$, равные количеству правильных окрасок вершин графа G в k цветов.

В частности, мы показали, что для графа $G = K_3$ хроматический многочлен имеет вид $P_{K_3}(z) = z \cdot (z - 1) \cdot (z - 2)$.

б. Приведем еще некоторые простые примеры хроматических многочленов.

Пример 2. Несложно обобщить подробно разобранный выше пример на случай произвольного полного графа K_n — для такого графа функция $P_{K_n}(z)$ равна

$$P_{K_n}(z) = z(z-1) \dots (z-n+1). \quad (6.7)$$

Действительно, при фиксированном $z = k$, $k = n, n+1, \dots$, первую вершину графа можно покрасить в любой из k цветов, вторую — в любой из оставшихся $k-1$ цветов и т. д. Заметим, что при этом, как и следовало ожидать, $P_{K_n}(k) = 0$ при всех $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Пример 3. Хроматический многочлен для пустого графа $G = \bar{K}_n$, построенного на n вершинах, равен

$$P_{\bar{K}_n}(z) = z^n. \quad (6.8)$$

Это следует из того, что для любого $k > 0$ любую вершину мы можем окрасить в любой из k цветов независимо от цвета остальных вершин.

Пример 4. Наконец, хроматический многочлен для дерева T_n имеет вид

$$P_{T_n}(z) = z(z-1)^{n-1}. \quad (6.9)$$

Действительно, в один цвет мы можем правильно окрасить только дерево T_1 , построенное на одной вершине. В случае $n > 1$ нам необходимо как минимум два цвета для правильной окраски вершин дерева T_n . При этом любую произвольно выбранную вершину x дерева мы можем окрасить в любой из $k \geq 1$ цветов, а любую смежную с ней вершину y — в любой из оставшихся $k-1$ цветов. При этом еще не окрашенную смежную к вершине y вершину z мы вновь можем покрасить в один из $k-1$ цветов — вершины x и z в дереве не смежны, и потому мы можем, в частности, использовать и цвет, в который окрашена вершина x , для окраски вершины z .

с. Во всех вышеприведенных примерах $P_G(z)$ действительно является полиномом, причем степень этого полинома совпадает с количеством n вершин графа G . Оказывается, данный факт справедлив и в общем случае. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Для любого графа G , построенного на n вершинах, функция $P_G(z)$ представляет собой полином степени n с целыми коэффициентами, причем коэффициент при z^n всегда равен единице, а знаки коэффициентов при остальных степенях чередуются.

Для доказательства данной теоремы нам понадобится одна лемма, которая сама по себе очень полезна для вычисления конкретных функций $P_G(z)$. Рассмотрим произвольное ребро $e = \{x, y\}$ в графе G . Образует из этого графа два других графа — граф $G - e$, полученный из G удалением ребра e , а

также граф G/e , полученный из G стягиванием ребра e в общую вершину $x \equiv y$.

Лемма 6. Хроматические многочлены графов G , $G - e$ и G/e связаны следующим соотношением:

$$P_{G-e}(z) = P_G(z) + P_{G/e}(z). \quad (6.10)$$

Доказательство. Действительно, все правильные раскраски графа $G - e$ можно разбить на два блока. В первый блок входят раскраски, в которых вершины x и y окрашены в один цвет, а во второй — раскраски, в которых данная пара вершин окрашена в разные цвета. Количество раскрасок первого типа описывается функцией $P_{G/e}(z)$, а количество раскрасок второго типа — функцией $P_G(z)$. \square

d. Перейдем теперь к доказательству теоремы 5. Нам нужно доказать, что для любого графа G , для которого $|V(G)| = n$, хроматический многочлен $P_G(z)$ имеет следующий вид:

$$P_G(z) = 1 \cdot z^n - c_{n-1} \cdot z^{n-1} + c_{n-2} \cdot z^{n-2} - \dots + (-1)^n c_0, \quad c_i \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall i = 0, \dots, n-1.$$

Будем доказывать этот факт индукцией по количеству вершин и количеству ребер графа, считая, что утверждение, доказываемое для графа G на n вершинах, верно для всех графов, построенных на меньшем количестве вершин, а также для всех графов на n вершинах с меньшим, чем у G , количеством ребер. База индукции верна — для пустого графа \bar{K}_n хроматический полином $P_{\bar{K}_n}$, рассчитываемый по формуле (6.8), удовлетворяет всем утверждениям теоремы.

Воспользуемся теперь доказанной выше леммой. В соответствии с рекуррентным соотношением (6.10) мы имеем

$$P_G(z) = P_{G-e}(z) - P_{G/e}(z).$$

Но в графе $G - e$ ребер на единицу меньше, чем у G , а в графе G/e по сравнению с исходным графом G на единицу меньше вершин и на единицу меньше ребер. Следовательно, для этих графов все утверждения теоремы выполнены, т. е.

$$\begin{aligned} P_{G-e}(z) &= z^n - a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} - \dots + (-1)^n a_0, \quad a_i \in \mathbb{Z}_+, \\ P_{G/e}(z) &= z^{n-1} - b_{n-2}z^{n-2} + b_{n-3}z^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} b_0, \quad b_j \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Как следствие, хроматический полином для G записывается в виде

$$P_G(z) = z^n - (a_{n-1} + 1)z^{n-1} + (a_{n-2} + b_{n-2})z^{n-2} - \dots + (-1)^n (a_0 + b_0),$$

т. е. удовлетворяет всем утверждениям теоремы. \square

e. Из доказательства теоремы, в частности, следует, что добавление к графу ребра увеличивает коэффициент a_{n-1} полинома $P_G(z)$ на единицу. Иными словами, справедливо такое следствие.

Следствие 7. Абсолютное значение коэффициента при z^{n-1} в полиноме $P_n(z)$ совпадает с количеством $|E(G)|$ ребер в графе G .

f. Столь же очевидно и следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть $\{G_1, \dots, G_m\}$ — множество односвязных компонент графа G . Тогда

$$P_G(z) = P_{G_1}(z) \cdot \dots \cdot P_{G_m}(z).$$

Действительно, любую компоненту связности G_i графа G мы можем правильно окрасить в k цветов независимо от оставшихся компонент связности графа G . Следовательно, по правилу произведения в комбинаторике общее количество способов правильной окраски вершин графа G равно произведению количества способов правильной окраски вершин в каждой из связных компонент графа G .

г. Как видно из формулы (6.8), число $k=0$ является корнем кратности n для хроматического многочлена $P_{\bar{K}_n}(z)$ пустого графа. Оказывается, данный факт вытекает из следующего более общего утверждения.

Теорема 9. Число $k=0$ является корнем хроматического многочлена $P_G(z)$ графа G кратности, равной количеству компонент связности графа G .

То, что $k=0$ является корнем любого хроматического многочлена, следует из определения $P_G(z)$: раскраски графа в ноль цветов не бывает. В силу теоремы 8, достаточно доказать, что для любого связного графа ноль есть корень единичной кратности $P_G(z)$. Обычно это делается по индукции по количеству вершин в графе.

Заметим в заключение, что изучение корней хроматического многочлена и было основным мотивом введения этого объекта в теорию графов. Эти полиномы были изначально введены в 1913 году для планарных графов Джорджем Биркхофом в одной из многочисленных попыток решения проблемы четырех красок. Если бы удалось доказать, что для всех таких графов $P_G(z) > 0$ для всех $z \geq 4$, то данная проблема была бы решена.

2. В принципе, хроматический полином любого графа можно рассчитать с помощью формулы (6.10). Однако расчеты по этой формуле приводят к достаточно громоздким выкладкам даже для графов, построенных на небольшом количестве вершин. Существуют, однако, определенные классы графов, для которых вычисление хроматических многочленов упрощается.

а. Заметим, что хроматические полиномы деревьев и полных графов имеют весьма специфическую структуру. Для того чтобы понять, в чем состоит эта специфика, нам понадобятся следующие определения.

Определение 10. Вершина x графа G называется *симплициарной*, если все ее соседние вершины в графе G индуцируют клику в этом графе.

В качестве примера рассмотрим граф, изображенный на рис. 6.35. Вершина x_6 в этом графе симплициарна — смежные с ней вершины x_2 и x_5 образуют клику, изоморфную K_2 , в исходном графе. Симплициарными в этом графе являются также вершины x_1 и x_4 .

Определение 11. *Нумерацией в порядке исключения симплициарных вершин (или совершенной схемой исключения, perfect elimination scheme) называется такая нумерация $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$ вершин, при которой каждая вершина x_i является симплициарной для подграфа G_i , индуцированного вершинами x_1, x_2, \dots, x_i .*

Пример 12. В качестве примера рассмотрим граф G , показанный на рис. 6.35. Нумерацией в порядке исключения симплициарных вершин такого графа является нумерация вида x_6, x_5, \dots, x_1 . Действительно, вершина x_6 (см. рис. 6.35) является симплициарной для графа G — ее соседи (вершины x_5 и x_3 , помеченные белым цветом на рис. 6.35) образуют в G подграф,

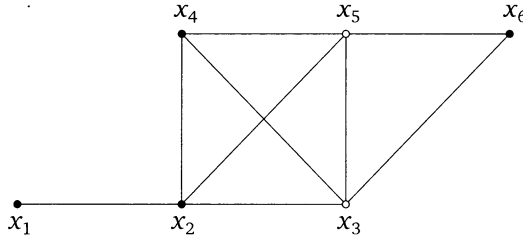


Рис. 6.35

изоморфный K_2 . В графе $G - x_6$, полученном в результате удаления вершины x_6 , вершина x_5 также является симплициарной (см. рис. 6.35) — смежные с ней вершины x_2, x_3, x_4 образуют в графе $G - x_6$ клику, изоморфную K_3 . Продолжая далее, мы в итоге приходим к графу, индуцированному вершинами x_1 и x_2 . Удаление x_2 даст нам граф, состоящий из единственной вершины x_1 .

Заметим, что деревья и полные графы также являются характерными примерами графов, допускающих нумерацию в порядке исключения симплициарных вершин.

б. В случае, когда граф G допускает нумерацию в порядке исключения симплициарных вершин, мы можем легко подсчитать хроматический многочлен $P_G(z)$. Действительно, пусть $\tilde{N}(x_i)$ — количество вершин, смежных с вершиной x_i в подграфе G_i , индуцированном подмножеством вершин $\{x_1, \dots, x_i\}$, $\tilde{d}_i = |\tilde{N}(x_i)|$. Так как подмножество $\tilde{N}(x_i)$ индуцирует клику в подграфе G_i , то при окраске смежных с x_i вершин подграфа H мы гарантированно использовали \tilde{d}_i цветов. Следовательно, саму вершину x_i мы можем при любом фиксированном $z = k \in \mathbb{N}$ окрасить $k - \tilde{d}_i$ способами вне зависимости от способа окраски вершин $\{x_1, \dots, x_{i-1}\}$. Но тогда, согласно комбинаторному правилу произведения,

$$P_{G_i}(z) = P_{G_i - x_i}(z) \cdot (z - \tilde{d}_i).$$

Иными словами, хроматический полином в рассматриваемом графе G представляет собой произведение линейных сомножителей вида $z - \tilde{d}_i$, причем этот полином можно строить пошагово, начиная с вершины x_1 .

В качестве примера рассмотрим граф G , показанный на рис. 6.35. Хроматический полином такого графа мы можем строить, начиная с вершины x_1 . Так как значения \tilde{d}_i получающихся подграфов составляют

$$\tilde{d}_0 = 0, \quad \tilde{d}_1 = 1, \quad \tilde{d}_2 = 1, \quad \tilde{d}_3 = 2, \quad \tilde{d}_4 = 3, \quad \tilde{d}_5 = 2,$$

то хроматический полином $P_G(z)$ для данного графа имеет вид

$$P_G(z) = z \cdot (z-1) \cdot (z-1) \cdot (z-2) \cdot (z-3) \cdot (z-2) = z \cdot (z-1)^2 \cdot (z-2)^2 \cdot (z-3).$$

с. Оказывается, все графы, допускающие нумерацию в порядке исключения симплициарных вершин, являются так называемыми *хордальными графами* (chordal graphs).

Определение 13. Простой граф G называется *хордальным* в случае, если в нем отсутствуют индуцированные циклы, т. е. циклы длины больше трех, не имеющие хорд.

Хордальные графы имеют довольно интересную структуру с точки зрения связности. Напомним, что в главе, посвященной связности в графах, мы для произвольной пары $\{x, y\}$ несмежных между собой вершин ввели понятие минимального вершинно разделяющего их множества.

Лемма 14. В случае хордального графа G , отличного от K_n , любое наименьшее вершинно разделяющее произвольную пару $\{x, y\}$ несмежных вершин множество S представляет собой клику в G .

Доказательство. Предположим, что S кликой не является, т. е. содержит пару $\{z_1, z_2\}$ несмежных между собой вершин (см. рис. 6.36). Обозначим через G_x и G_y компоненты связности графа $G - S$, содержащие вершины x и y соответственно. Заметим, что вершина z_i обязана быть смежной хотя бы с одной из вершин компоненты G_x и хотя бы с одной из вершин компоненты G_y — в противном случае множество $S - z_i$ по-прежнему оставалось бы вершинно разделяющим множеством. Обозначим тогда через P_x кратчайший путь между z_1 и z_2 , все внутренние вершины которого лежат в G_x , а через P_y — аналогичный путь с внутренними вершинами в G_y . Так как длина каждого из этих путей больше или равна двум, то объединение этих путей представляет собой цикл C длины, большей или равной четырем. Так как G представляет собой хордальный граф, то в таком цикле обязаны быть хорды. Заметим, что никакая хорда не может соединять вершины цикла C , лежащие

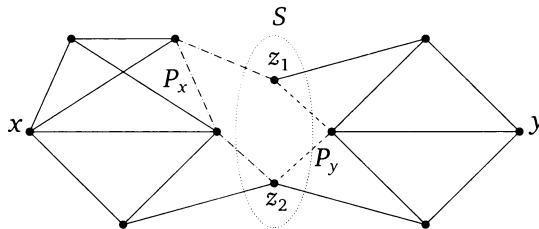


Рис. 6.36

в G_x , с вершинами этого цикла, лежащими в G_y , — в противном случае после удаления S вершины из G_x и G_y остались бы связанными между собой. Кроме того, в силу минимальности путей P_x, P_y хорда не может соединять вершину z_i с внутренними вершинами путей P_x и P_y , а также внутренние вершины этих путей между собой. Следовательно, единственной возможной хордой в этом случае должно быть ребро $\{z_1, z_2\}$, т. е. вершины z_1, z_2 смежны между собой. Полученное противоречие доказывает лемму. \square

d. Следующая лемма устанавливает связь между хордальными графами и симплициарными вершинами.

Лемма 15. *В любом хордальном графе G найдется симплициарная вершина. Более того, в случае $G \neq K_n$ в хордальном графе G найдется по крайней мере пара несмежных между собой симплициарных вершин.*

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по количеству n вершин. База индукции очевидна — в графе $G = K_1$ единственная вершина симплициарна. Утверждение также очевидно в случае, когда $G = K_n$, — в таком графе любая вершина является симплициарной. Предположим поэтому, что $n > 1$, а G кликой не является. В этом случае в графе найдется пара $\{x, y\}$ несмежных между собой вершин. Обозначим через S минимальное вершинно разделяющее x и y множество, а через G_x и G_y — компоненты графа $G - S$, содержащие вершины x и y соответственно. По индукционному предположению подграф H_x , индуцированный вершинами из S и G_x , либо является полным графом, либо содержит пару несмежных симплициарных вершин. В первом случае любая вершина из G_x является симплициарной в G . Во втором случае воспользуемся тем фактом, что $G[S]$ представляет собой клику в исходном графе G . Как следствие, хотя бы одна из двух несмежных симплициарных вершин не принадлежит S . При этом та же вершина является и симплициарной в G , так как у нее отсутствуют смежные с ней вершины, лежащие вне H_x . Итак, в обоих случаях мы имеем симплициарную вершину u , лежащую в G_x . Аналогичные рассуждения показывают, что и в G_y имеется симплициарная вершина v , причем вершины u и v смежными не являются. \square

e. Доказанная лемма позволяет нам наконец связать хордальные графы и графы, допускающие нумерацию в порядке исключения симплициарных вершин.

Теорема 16 (Дирак, 1961). *Простой граф допускает нумерацию в порядке исключения симплициарных вершин тогда и только тогда, когда он является хордальным графом.*

Доказательство. То, что любой граф G , допускающий нумерацию в порядке исключения симплициарных вершин, является хордальным, достаточно очевидно. Действительно, предположим, что мы в процессе удаления симплициарных вершин дошли до вершины $x \in V(C)$, принадлежащей некоторому циклу C длины, большей трех, в графе G . По условию смежные с x вершины должны образовывать клику в соответствующем графе. Эта клика обязана включать соседей вершины x по циклу C . Как следствие, эти соседи

должны быть соединены между собой ребром. Такое ребро, в свою очередь, представляет собой хорду для цикла C . Иными словами, в графе G индуцированные циклы отсутствуют.

Для доказательства обратного утверждения заметим, что любой индуцированный подграф хордального графа G остается хордальным. Мы только что показали, что в любом хордальном графе найдется хотя бы одна симплициарная вершина. Взяв ее в качестве последней вершины x_n в искомой нумерации, мы индукцией по количеству вершин получаем, что G допускает нумерацию в порядке исключения симплициарных вершин. \square

f. Оказывается, хордальные графы являются одновременно и совершенными графами.

Теорема 17 (Берж, 1960). *Хордальные графы совершенны.*

Доказательство. Так как любой собственный индуцированный подграф любого хордального графа хордален, то нам нужно лишь доказать, что $\chi(G) = \omega(G)$. Проведем доказательство индукцией по количеству вершин n .

База индукции $n = 1$ тривиальна — хордальный граф K_1 совершенен. Предположим теперь, что $n > 1$. В силу леммы 15 в хордальном графе G обязательно найдется хотя бы одна симплициарная вершина x . Граф $G - x$ хордален, так что согласно индукционному предположению $\omega(G - x) = \chi(G - x) =: k$. Так как все смежные с x вершины образуют клику в графе G , то $\deg(x) \leq k$.

Рассмотрим два случая. В первом из них $\deg(x) < k$. Тогда мы можем продолжить правильную раскраску графа $G - x$ на вершину x , присвоив ей один из не использованных в подмножестве $N(x)$ цветов. При этом $\omega(G) = \omega(G - x)$, так что

$$\chi(G) = \chi(G - x) = \omega(G - x) = \omega(G),$$

т. е. граф G совершенен. Во втором случае $\deg(x) = k$. Тогда подмножество $N(x) \cup x$ образует клику размера $k + 1 = \omega(G)$ в графе G . Кроме того, мы можем продолжить правильную раскраску графа $G - x$ на вершину x , окрасив ее в цвет $k + 1$. Следовательно,

$$\chi(G) \leq \chi(G - x) + 1 \leq \omega(G),$$

т. е. граф G также совершенен. \square

g. В 1976 году Роуз, Тарьян и Лукер разработали эффективный алгоритм нахождения нумерации в порядке исключения симплициарных вершин, известный как лексикографический поиск в ширину. Используя его, мы можем за линейное время определить, является ли заданный граф G хордальным. Польза от этого факта заключается, в частности, в том, что многие NP -сложные алгоритмы на хордальных графах работают за полиномиальное время. Так, например, за полиномиальное время решается задача о нахождении максимального вершинно независимого множества в хордальном графе.

Упражнения

1 (1 балл). Чему равняется хроматический многочлен $P(z)$ для леса, состоящего из k деревьев и построенного на $n \geq k$ вершинах?

2 (1,5 балла). Пусть подграфы H_1 и H_2 графа $G = H_1 \cup H_2$ имеют единственную общую вершину x , т. е. $V(G) \cap V(H) = \{x\}$. Покажите, что

$$P_G(z) = \frac{P_{H_1}(z) \cdot P_{H_2}(z)}{z}.$$

Обобщите полученный результат на связный граф G , состоящий из m двусвязных блоков B_m .

3 (1 балл). Докажите, что при вычислении хроматического полинома по формуле (6.10) все получающиеся в процессе стягивания ребер мультиребра можно заменять на одиночные ребра.

4 (1 балл). Докажите, что если к одной из вершин x графа примыкает одиночное ребро $e = \{x, y\}$, соединяющее эту вершину с некоторым листом y , то хроматический многочлен данного графа связан с хроматическим многочленом графа $G - e$ соотношением

$$P_G(z) = (z - 1) \cdot P_{G-e}(z).$$

5 (1 балл). Докажите, что хроматический полином простого цикла C_n длины n рассчитывается по формуле

$$P_{C_n}(z) = (-1)^n(z - 1) + (z - 1)^n.$$

6 (1,5 балла). Подсчитайте хроматический полином для колеса W_n (рис. 6.37(a)).

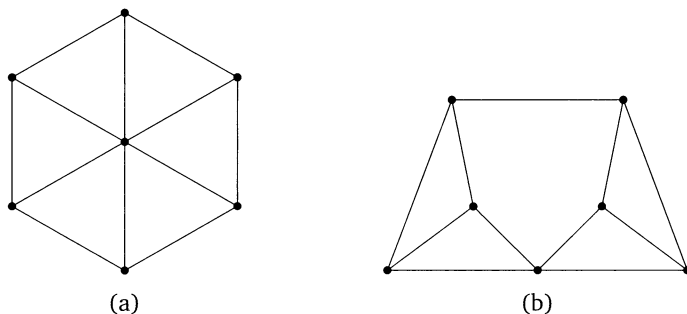


Рис. 6.37

7 (1 балл). Пусть $e = \{x, y\}$ — произвольное ребро в хордальном графе G , принадлежащее некоторому циклу C . Докажите, что в G найдется такая вершина z , что x, y, z образуют треугольник в графе G .

Дополнительные упражнения

8 (1,5 балла). Докажите, что $P(z) = z^4 - 4z^3 + 3z^2$ не является хроматическим полиномом.

9 (1,5 балла). Докажите, что сумма коэффициентов хроматического полинома $P_G(z)$ равна нулю для любого графа G , отличного от \bar{K}_n .

10 (1,5 балла). Докажите, что количество правильных окрасок связного графа G в $k \geq 3$ цветов меньше $k \cdot (k - 1)^{n-1}$ в случае, если G не является деревом, построенным на n вершинах.

11 (2,0 балла). Подсчитайте хроматический полином $P_G(z)$ для графа, показанного на рис. 6.37(b).

12 (1,5 балла). Подсчитайте хроматический полином для лестницы L_n (рис. 6.38(a)), построенной на $2n$ вершинах.

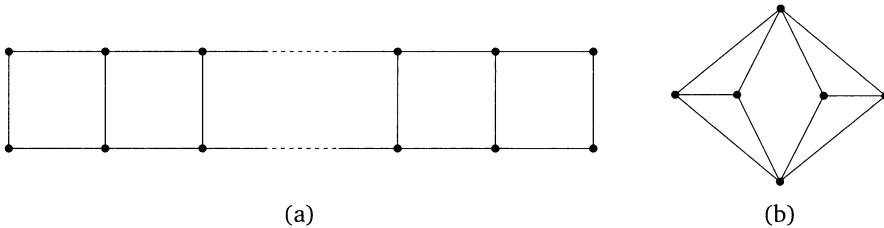


Рис. 6.38

13 (1,5 балла). Подсчитайте хроматический полином для графа G , показанного на рис. 6.38(b).

14 (1,5 балла). Докажите, что верно и обратное к лемме 14 утверждение. Именно, предположим, что любое минимальное вершинно разделяющее пару несмежных вершин x, y множество S представляет собой клику в графе G . Докажите, что G является хордальным графом.

15 (1,5 балла). Докажите, что любой интервальный граф G (см. упражнение 18) является хордальным графом.

Решение упражнений

1. Для получения такого многочлена воспользуемся теоремой 8. В случае дерева мы доказали, что $P_{T_n} = z \cdot (z - 1)^{n-1}$. Следовательно, для леса G на n вершинах, состоящего из k деревьев $T_i, |T_i| = n_i$, мы получаем

$$P_G(z) = z^{1+\dots+1} \cdot (z - 1)^{n_1-1+n_2-1+\dots+n_k-1} = z^k \cdot (z - 1)^{n-k}.$$

2. Если бы H_1 и H_2 были несвязными, то мы могли бы раскрашивать их вершины независимо, так что

$$P_G(z) = P_{H_1}(z) \cdot P_{H_2}(z).$$

В случае же, когда они имеют единственную общую вершину, их раскраски должны быть согласованы. В частности, раскрашивая правильным образом граф H_1 , мы должны вершину x в графе H_2 раскрасить в тот же цвет, что и в графе H_1 . Заметим теперь, что количество способов окраски вершины H_2 в k цветов так, чтобы вершина x была окрашена в определенный цвет, не

зависит от выбора этого цвета. Следовательно, это количество при фиксированном k равно $P_{H_2}(k)/k$, так что

$$P_G(z) = \frac{P_{H_1}(z) \cdot P_{H_2}(z)}{z}.$$

Рассуждая аналогично, получаем, что для графа, состоящего из m блоков,

$$P_G(z) = \frac{P_{B_1}(z) \cdot P_{B_2}(z) \cdot \dots \cdot P_{B_m}(z)}{z^{m-1}}.$$

3. При стягивании одного из ребер, входящих в мультиребро, образуются петли, а хроматический многочлен графа, в котором есть петли, тождественно равен нулю. Поэтому мы можем, используя рекуррентное соотношение (6.10), последовательно удалить все лишние ребра мультиребра, превратив его в одиночное ребро e .

4. Действительно, в этом случае вершина x является точкой сочленения, и согласно доказанному в предыдущем утверждении факту

$$P_G(z) = \frac{z(z-1) \cdot P_{G-e}(z)}{z} = (z-1) \cdot P_{G-e}(z).$$

5. Докажем утверждение по индукции. Для цикла из двух вершин оно верно:

$$P_{C_2}(z) = (z-1)^2 + (z-1) = z(z-1).$$

Пусть утверждение верно для $k < n$, докажем его для n . При удалении из цикла любого ребра образуется цепочка вершин. При стягивании любого ребра образуется цикл на единицу меньшей длины. Поэтому

$$\begin{aligned} P_{C_n}(z) &= P_{C'_n}(z) - P_{C''_n}(z) = P_{C'_n}(z) - P_{C_{n-1}}(z) = \\ &= z(z-1)^{n-1} - (-1)^{n-1}(z-1) - (z-1)^{n-1} = (-1)^n(z-1) + (z-1)^n. \end{aligned}$$

6. Хроматический полином $P_{W_n}(z)$ для графа W_n имеет вид

$$P_{W_n}(z) = z(z-2)^n + (-1)^n z(z-2).$$

Действительно, если мы назначаем произвольный цвет центральной вершине графа W_n , то оставшиеся вершины этого графа должны быть окрашены в оставшиеся $k-1$ цветов. Следовательно,

$$P_{W_n}(z) = z \cdot P_{C_n}(z-1) = z(z-2)^n + (-1)^n z(z-2).$$

7. Докажем это утверждение индукцией по количеству ребер в C . В случае $|C|=3$ утверждение очевидно. В случае $|C|>3$ в цикле найдется хорда h , разделяющая C на две части. Выбирая ту из них, которая содержит e , и добавляя к ней хорду h , получаем цикл C_h меньшей длины. Для доказательства утверждения теперь достаточно воспользоваться предположением индукции.

ГЛАВА 7

Планарные графы

§1. Планарные графы и их основные свойства

1. Мы уже привыкли изображать графы (как простые, так и мультиграфы) с помощью рисунков на плоскости. На этих рисунках вершины изображаются точками, а ребра — соединяющими эти точки отрезками кривых. Обычно нам хочется нарисовать граф как можно проще, избежав излишних пересечений ребер графа. В идеале хочется изобразить граф на плоскости так, чтобы отрезки кривых, изображающие ребра графа, пересекались только лишь в точках, изображающих его вершины. В этой связи мы можем дать следующее определение.

Определение 1. *Планарным графом* называется граф G , который можно нарисовать на плоскости так, чтобы изображающие его ребра отрезки кривых пересекались лишь в точках, изображающих вершины графа G . Такой способ изображения графа на плоскости называется *правильным вложением* графа G в плоскость, а само изображение — *плоским графом* \tilde{G} . Изображающие ребра графа G отрезки кривых на плоскости называются *ребрами* плоского графа \tilde{G} , а точки, изображающие вершины графа G , — *вершинами* плоского графа \tilde{G} .

Раздел теории графов, связанный с изучением планарных графов, носит название топологической теории графов и имеет многочисленные приложения как в математике, так и в других науках. Множество интереснейших проблем теории графов связано с изучением планарных графов. К их числу, например, относятся и знаменитая теорема о четырех красках, утверждающая, что $\chi(G) = 4$ в случае, если G является планарным графом, и не менее известная теорема Эйлера для многогранников, связывающая количество вершин, ребер и граней. Решение этих проблем послужило в свое время мощным стимулом развития как самой теории графов, так и многих смежных с ней областей. Задача данной главы состоит в изложении базовых понятий и фактов, связанных с этим интересным и важным разделом теории графов.

2. С точки зрения данного выше определения все множество графов естественным образом разбивается на два блока — планарные графы, а

также графы, планарными не являющиеся. Давайте в этой связи рассмотрим несколько характерных примеров.

а. На рис. 7.1(a) показан хорошо нам знакомый полный граф K_4 , построенный на четырех вершинах. Такое вложение графа в плоскость правильным, однако, не является — соединяющие противоположные вершины ребра $\{1, 3\}$ и $\{2, 4\}$ пересекаются друг с другом в точке, отличной от вершин графа K_4 . Данную укладку легко, конечно же, подправить и сделать правильной, нарисовав одно из этих ребер вне квадрата, соединяющего вершины графа K_4 (рис. 7.1(b)). Такая укладка, однако, выглядит не очень красиво — в ней потеряна симметрия, присутствующая на рис. 7.1(a). С этой точки зрения значительно более симпатичной выглядит правильная укладка графа K_4 , изображенная на рис. 7.1(c), — в ней все ребра изображены отрезками прямых, а сам рисунок является симметричным.

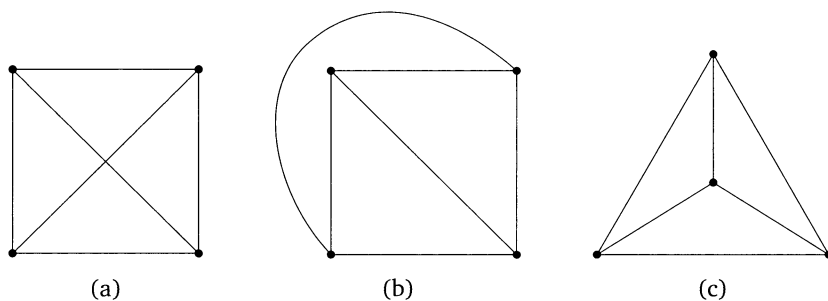


Рис. 7.1. Различные вложения K_4 в плоскость: (a) неправильное вложение; (b) правильное вложение; (c) симметричное вложение

б. Перейдем теперь к графам, которые планарными не являются. Простейшими, и в то же время самыми важными примерами непланарных графов являются графы K_5 и $K_{3,3}$. При этом граф K_5 является минимальным по количеству вершин непланарным графом, а граф $K_{3,3}$ — минимальным по количеству ребер непланарным графом. Несложно убедиться в том, что все графы, имеющие количество вершин, меньшее $|V(K_5)|$, или количество ребер, меньшее $|E(K_{3,3})|$, можно правильно вложить в плоскость.

Доказательство непланарности графов K_5 и $K_{3,3}$ можно провести с помощью леммы Жордана. Эта лемма имеет дело с так называемой замкнутой простой кривой, т. е. замкнутой кривой, нигде не пересекающей саму себя. Такая кривая C делит всю плоскость на две области — внутреннюю $\text{int}(C)$ и внешнюю $\text{ext}(C)$ по отношению к кривой C . Пусть точка a принадлежит внутренней по отношению к C области $\text{int}(C)$, а точка b — внешней по отношению к C области.

Лемма 2 (лемма Жордана). *Любая кривая, соединяющая точку $a \in \text{int}(C)$ с точкой $b \in \text{ext}(C)$, имеет с кривой C хотя бы одну точку пересечения (рис. 7.2).*

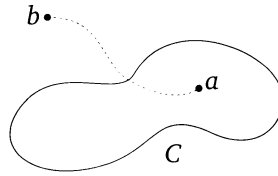


Рис. 7.2. Лемма Жордана

Интуитивно утверждение данной леммы является совершенно очевидным. Строгое же ее доказательство, однако, представляет собой достаточно серьезную задачу. Мы этим заниматься не будем, отсылая заинтересованного читателя, например, к книге [24], в которой дается подробное и современное доказательство этого утверждения.

с. Докажем с помощью леммы Жордана непланарность полного графа K_5 .

Теорема 3. *Граф K_5 не является планарным графом.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. предположим, что граф K_5 является планарным. Рассмотрим простой цикл $C = (1, 2, 3)$ в этом графе. Этот цикл мы всегда можем правильно вложить в плоскость, получив на ней замкнутую простую кривую C , ограниченную ребрами этого цикла (рис. 7.3). Кривая C разбивает плоскость \mathbb{R}^2 на внутреннюю $\text{int}(C)$ и внешнюю $\text{ext}(C)$. В одной из этих областей должна лежать вершина 4. Предположим для определенности, что $4 \in \text{int}(C)$ (рис. 7.3). Как следствие, ребра $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$ и $\{3, 4\}$ также должны принадлежать $\text{int}(C)$.

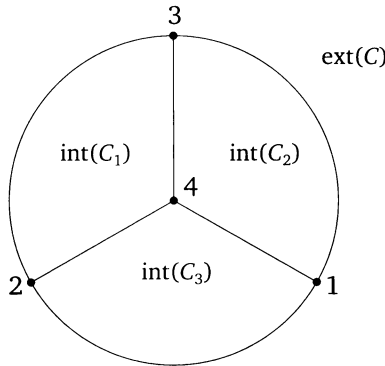


Рис. 7.3

Рассмотрим тогда циклы

$$C_1 := (2, 3, 4), \quad C_2 := (1, 3, 4), \quad C_3 := (1, 2, 4).$$

Заметим, что любая из трех вершин i , $i = 1, 2, 3$, принадлежит внешней области $\text{ext}(C_i)$ соответствующего цикла C_i . Так как в графе K_5 имеются ребра $\{i, 5\}$, то по лемме Жордана $5 \in \text{ext}(C_i)$, $i = 1, 2, 3$, а значит, $5 \in \text{ext}(C)$. Но тогда,

согласно все той же лемме Жордана, ребро $\{4, 5\}$ обязано пересекать кривую C . Полученное противоречие доказывает непланарность графа K_5 . \square

Замечание 4. Аналогичную технику можно использовать и для доказательства непланарности графа $K_{3,3}$ (см. упражнение 4).

3. Вернемся к планарным графам и их правильным вложениям в плоскость. Если сам планарный граф G состоит из двух основных кирпичиков — вершины v и ребра e , то у отвечающего ему плоского графа появляется третий, не менее важный кирпичик — так называемая *грань* (face) f плоского графа \tilde{G} .

Определение 5. Гранью плоского графа \tilde{G} называется односвязная область, ограниченная вершинами и/или ребрами графа \tilde{G} .

Поговорим подробнее об этих новых для нас объектах.

а. Рассмотрим в качестве примера правильное вложение графа K_4 в плоскость (рис. 7.4(b)) — плоский граф \tilde{K}_4 . У этого графа имеются четыре различные грани f_i . При этом три из этих граней ограничены, а одна из них — грань f_4 — является неограниченной. Такая грань (присутствующая в любом плоском графе \tilde{G}) называется *внешней гранью* плоского графа. Остальные грани называются *внутренними гранями* плоского графа \tilde{G} .

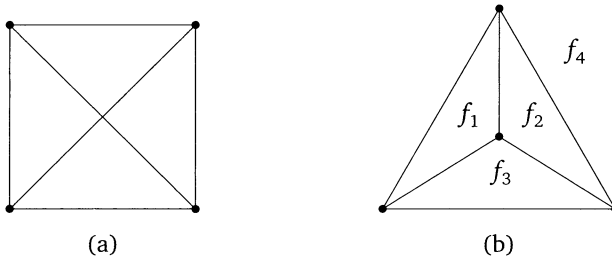


Рис. 7.4. (а) Планарный граф K_4 ; (b) соответствующий ему плоский граф \tilde{K}_4

Заметим сразу же, что с топологической точки зрения никакой особой разницы между внешней и внутренними гранями нет. Для того чтобы это понять, достаточно наряду с правильными вложениями графа в плоскость рассмотреть так называемые *правильные вложения графа в сферу*.

Определение 6. *Правильным вложением графа G в сферу* называется такое изображение графа на сфере, при котором изображающие ребра графа G кривые пересекаются между собой только в точках, отвечающих вершинам графа G .

Сразу заметим, что, в отличие от плоского графа, все грани правильного вложения графа G в сферу ограничены.

Граф K_4 мы сумели правильно вложить как в плоскость, так и в сферу. Оказывается, аналогичный факт имеет место и в общем случае. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 7. Граф G является планарным тогда и только тогда, когда его можно правильно вложить в сферу.

Доказательство. Рассмотрим так называемую стереографическую проекцию сферы на плоскость P (рис. 7.5). Для построения такой проекции сфера ставится на плоскость, а из точки северного полюса сферы — точки N , диаметрально противоположной точке касания сферы S и плоскости P , — проводятся лучи. Любой такой луч пересекает сферу в точке s , а плоскость — в точке p . Тем самым устанавливается взаимно однозначное отображение $\eta: s \rightarrow p$ между точками на сфере с выколотой точкой N и точками на плоскости, которое и называется стереографической проекцией.

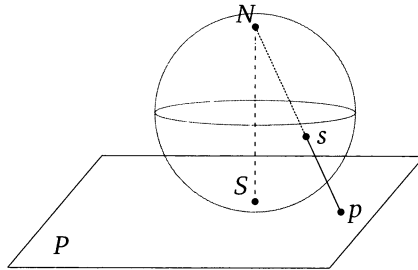


Рис. 7.5. Стереографическая проекция сферы на плоскость P

Теперь рассмотрим произвольное правильное вложение графа G в плоскость. Поставим сферу на плоскость в точке, отличной от вершин или ребер плоского графа \tilde{G} . Тогда стереографическая проекция плоскости на сферу даст нам граф, правильно вложимый в сферу. Очевидно, верно и обратное. \square

Вернемся к произвольному плоскому графу \tilde{G} , у которого имеется внутренняя грань f . Зафиксируем некоторую внутреннюю точку p этой грани. Любая стереографическая проекция отображает точку p в какую-то точку s на сфере S , а сам плоский граф \tilde{G} — в некоторое правильное вложение графа G в сферу. Возьмем теперь точку s в качестве северного полюса сферы и спроектируем граф, вложенный в сферу, на плоскость P' , касательную к сфере в диаметрально противоположной к s точке этой сферы. В результате таких операций мы получим некоторый новый плоский граф \tilde{G}' , внешней гранью которого будет проекция грани f исходного плоского графа \tilde{G} .

б. Любая грань f плоского графа \tilde{G} ограничена каким-то набором его вершин и ребер, образующих границу ∂f грани f . Говорят, что такие вершины и ребра *инцидентны* грани f . В свою очередь, две грани называют *смежными* друг другу, если границы этих граней содержат хотя бы одно общее ребро.

В качестве примера рассмотрим плоский граф \tilde{G} , изображенный на рис. 7.6. Для грани f_2 инцидентными ей вершинами являются вершины v_1, v_4 и v_5 , а инцидентными ей ребрами — ребра e_4, e_5 и e_8 . Смежными с f_2 являются грани f_1 и f_3 графа \tilde{G} .

Для любой грани мы можем также ввести понятие *степени* грани f как количества ребер, инцидентных данной грани. Так, степень грани f_2 на рис. 7.6 равна трем.

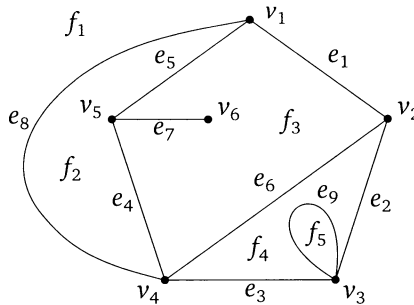


Рис. 7.6. Грани плоского графа \tilde{G}

В определении степени грани f есть одна тонкость. Дело в том, что все множество ребер плоского графа разбивается на два блока. К первому блоку относятся так называемые граничные ребра, т. е. ребра, по обе стороны от которых лежат разные грани. Ко второму блоку относятся так называемые мосты (cut edges), т. е. ребра, по обе стороны от которых лежит одна и та же грань. Примером моста является ребро e_7 на рис. 7.6. Считается, что мост, в отличие от граничного ребра, дает в степень $\deg(f)$ грани f вклад, равный двум. Как следствие, например, степень грани f_3 равна шести.

с. Для суммы степеней всех граней несложно доказать утверждение, аналогичное первой теореме теории графов:

$$\sum_{f \in \tilde{G}} \deg(f) = 2|E(\tilde{G})|. \quad (7.1)$$

Действительно, суммируя степени граней, мы каждое граничное ребро суммируем дважды. Каждый мост, в свою очередь, вносит в степень грани значение, равное двум. Таким образом, суммирование степеней всех граней действительно дает нам удвоенное количество всех ребер плоского графа \tilde{G} .

d. Выше мы сказали, что любое ребро плоского графа обязательно принадлежит границе какой-то грани и может быть либо разделяющим ребром, либо мостом. Данное утверждение, кажущееся довольно очевидным, требует, вообще говоря, строгого топологического доказательства. Мы на этом останавливаться не будем, отсылая заинтересовавшегося читателя, например, к учебнику [11].

В [11] также доказываются и другие интуитивно достаточно очевидные утверждения. В частности, там можно посмотреть, как строго доказать тот факт, что правильное вложение дерева в плоскость имеет единственную грань, а также утверждение о том, что границы различных граней плоского графа различны во всех случаях за исключением плоского графа, представляющего собой простой цикл. Мы будем принимать эти утверждения на веру.

е. Поговорим еще немного о границах грани g плоского графа \tilde{G} . Если граф \tilde{G} связан, то граница любой грани представляет собой замкнутый маршрут. Этот маршрут представляет собой цикл (не обязательно простой, см. границу грани f_4 на рис. 7.6) в случае, если у графа \tilde{G} отсутствуют мосты, т. е. в случае, когда \tilde{G} является реберно двусвязным. Наконец, в случае простого вершинно двусвязного графа или в более общем случае неразделяемого мультиграфа, отличного от K_1 и K_2 , граница грани представляет собой простой цикл.

Теорема 8. Для любого плоского неразделяемого мультиграфа \tilde{G} , отличного от K_1 и K_2 , граница каждой грани представляет собой простой цикл в графе \tilde{G} .

Доказательство. Рассмотрим разложение графа \tilde{G} на ручки P_0, \dots, P_k , а также соответствующую этому разложению последовательность подграфов $G_i = G_{i-1} \cup P_i$, $i = 1, \dots, k$. Так как подграф $G_0 \equiv P_0$ представляет собой простой цикл, то обе его грани — внутренняя и внешняя — ограничены простым циклом G_0 . Докажем по индукции, что данное утверждение остается справедливым и для любого подграфа G_i , $i = 1, \dots, k$.

Заметим прежде всего, что любой подграф плоского графа, и, в частности, подграф G_i , является плоским. Как следствие, ручка P_i подграфа G_{i-1} лежит в одной из граней f этого подграфа. Любая грань подграфа G_{i-1} , отличная от f , является и гранью подграфа G_i . По индукционному предположению все эти грани ограничены простыми циклами. Наконец, и грань f также ограничена простым циклом. Ручка P_i разбивает этот простой цикл на два простых цикла. Таким образом, все грани подграфа G_i ограничены простыми циклами. \square

Следствие 9. В любом трехсвязном плоском графе \tilde{G} без петель все смежные с произвольной вершиной x вершины принадлежат общему циклу C .

Доказательство. Заметим, что граф $\tilde{G} - x$, полученный удалением произвольной вершины x , гарантированно является неразделяемым. Обозначим через f грань графа $\tilde{G} - x$, в которой лежала удаленная вершина x . По доказанной выше теореме граница любой такой грани представляет собой простой цикл ∂f . При этом все смежные с x в графе \tilde{G} вершины обязаны этому циклу принадлежать. \square

4. Сравнение формулы (7.1) с первой теоремой теории графов показывает, что в планарных графах

$$\sum_{v \in \tilde{G}} \deg(v) = \sum_{f \in \tilde{G}} \deg(f).$$

Можно сказать, что вершины и грани планарной карты в определенном смысле взаимозаменяемы. Формализовать это понятие взаимозаменяемости можно с помощью так называемого двойственного к \tilde{G} плоского графа \tilde{G}^* .

а. Строится двойственный граф \tilde{G}^* к плоскому графу \tilde{G} следующим образом (см. рис. 7.7): мы помещаем в каждую грань графа \tilde{G} по вершине (помеченной на рис. 7.7 белым цветом), которые и будут вершинами двойственного графа \tilde{G}^* . Затем для каждого ребра e , инцидентного граням f_1 и f_2 , мы проводим ребро e^* , которое пересекает e в единственной точке и соединяет вершины \tilde{G}^* , соответствующие граням f_1 и f_2 (ребра, отмеченные штрихпунктирными линиями на рис. 7.7). В результате мы по построению получаем некоторый плоский граф \tilde{G}^* , вершины которого отвечают граням, а грани — вершинам исходного плоского графа \tilde{G} . Такой граф и называется двойственным к исходному плоскому графу \tilde{G} .

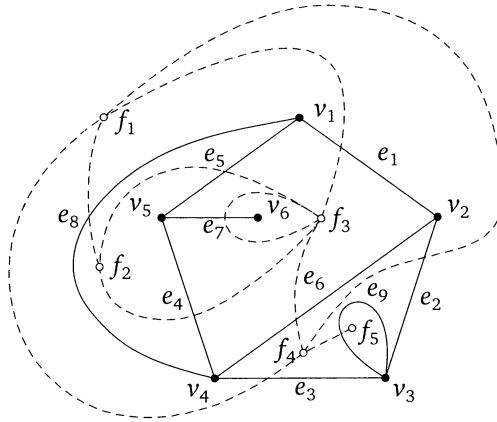


Рис. 7.7. Двойственный к плоскому графу \tilde{G} граф \tilde{G}^*

Заметим, что если ребро e является в \tilde{G} мостом, то $f_1 = f_2$, так что e^* является в двойственном графе \tilde{G}^* петлей. Обратно, любая петля $e \in \tilde{G}$ становится мостом в \tilde{G}^* .

Двойственный к r -регулярному графу \tilde{G} граф \tilde{G}^* называется r -ангуляцией. У такого графа степень любой грани равна, очевидно, r . В частности, в случае $r = 3$ имеем так называемую триангуляцию, а в случае $r = 4$ — квадрангуляцию плоскости.

б. Докажем следующее важное свойство двойственных графов.

Утверждение 10. Двойственный к любому плоскому графу \tilde{G} граф \tilde{G}^* всегда является связным графом.

Доказательство. Действительно, рассмотрим произвольную пару (f_1, f_2) граней плоского графа \tilde{G} . Обозначим через x_1 и x_2 какие-то внутренние точки этих граней. Ясно, что через любую пару таких точек можно провести кривую, соединяющую x_1 и x_2 и не проходящую ни через одну из вершин исходного графа \tilde{G} . Такой кривой в графе \tilde{G}^* будет отвечать путь, соединяющий вершины \tilde{G}^* , соответствующие граням f_1 и f_2 исходного графа. Следовательно, граф \tilde{G}^* является связным. \square

с. Мы определяли двойственный граф \tilde{G}^* как двойственный к плоскому графу \tilde{G} , а не к соответствующему \tilde{G}^* планарному графу. Следующее утверждение позволит нам определить двойственный граф непосредственно к исходному планарному графу G .

Утверждение 11. Пусть \tilde{G}^* — двойственный к плоскому графу \tilde{G} . Тогда набор ребер в \tilde{G} образует в \tilde{G} цикл C в том и только том случае, если соответствующий набор ребер двойственного графа \tilde{G}^* образует в \tilde{G}^* реберный разрез.

Доказательство. Любой цикл C в \tilde{G} ограничивает одну или несколько граней плоского графа \tilde{G} . Как следствие, внутренность этого цикла $\text{int}(C)$ содержит некоторое непустое подмножество S множества вершин двойственного к \tilde{G} графа \tilde{G}^* . Те ребра графа \tilde{G}^* , которые пересекают цикл C , и формируют в \tilde{G}^* реберный разрез $[S, \bar{S}]$. Обратная импликация теперь также очевидна. \square

Используя доказанное утверждение, мы можем теперь определить так называемый *абстрактный двойственный граф* G^* к планарному графу G . При этом граф, двойственный к плоскому графу \tilde{G} называют *геометрически двойственным графом* \tilde{G}^* .

Определение 12. Граф G^* называется *абстрактно двойственным* к планарному графу G в случае, если имеется следующее взаимно однозначное соответствие между ребрами графов G и G^* : если набор ребер в G образует цикл в G , то соответствующий ему набор ребер в G^* образует реберный разрез в G^* , и наоборот.

На рис. 7.8(a) показан граф G , а на рис. 7.8(b) изображен абстрактно двойственный к нему граф G^* . Соответствующие ребра этих графов помечены одними и теми же буквами.

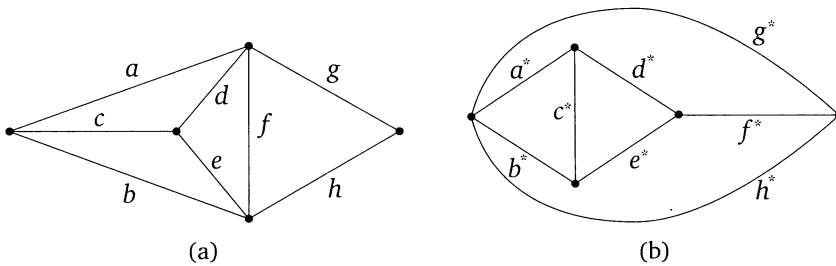


Рис. 7.8. (a) Граф G ; (b) абстрактно двойственный к нему граф G^*

Оказывается, наличие у некоторого графа G абстрактно двойственного к нему означает, что граф G является планарным. Именно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 13. Граф G является планарным тогда и только тогда, когда он имеет абстрактно двойственный к нему граф G^* .

5. В заключение данного параграфа поговорим о единственности вложения планарного графа в плоскость.

а. Рассмотрим два плоских графа \tilde{G}_1 и \tilde{G}_2 , показанные на рис. 7.9(a) и рис. 7.9(b) соответственно. Несложно понять, что оба этих графа изоморфны одному и тому же планарному графу G , построенному на трех вершинах, две из которых являются листьями, и трех ребрах, одно из которых является петлей. Следовательно, и сами графы \tilde{G}_1 и \tilde{G}_2 изоморфны друг другу. Однако два этих графа отличаются друг от друга с топологической точки зрения. Действительно, у графа \tilde{G}_1 одна из граней имеет степень 5, а вторая грань — 1, тогда как у графа \tilde{G}_2 обе грани имеют степень, равную 3. Про такие плоские графы говорят, что они различны с точки зрения вложения планарного графа G в плоскость. И с этой точки зрения, как мы видим, планарный граф в плоскость вкладывается неединственным образом.

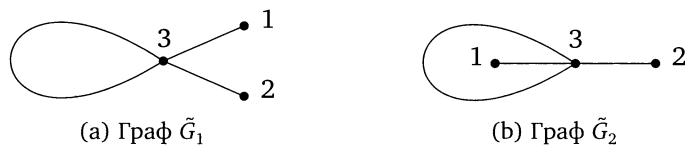


Рис. 7.9. Неединственность вложения планарного графа G

Заметим сразу же, что показанным на рис. 7.9 плоским графам отвечают неизоморфные двойственные графы \tilde{G}_1^* и \tilde{G}_2^* (см. рис. 7.10). Действительно, степени двух вершин графа \tilde{G}_1^* равны 5 и 1, а степени двух вершин графа \tilde{G}_2^* совпадают и равны 3.

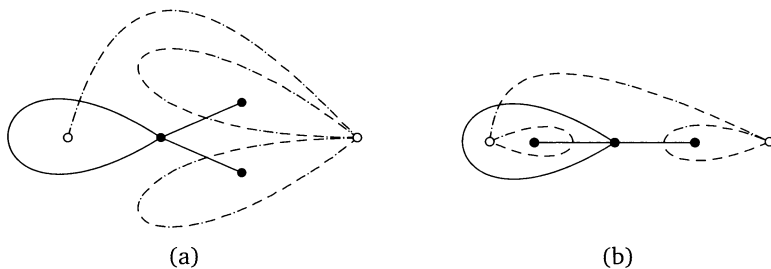


Рис. 7.10. Двойственные графы: (а) граф \tilde{G}_1^* ; (б) граф \tilde{G}_2^*

б. Давайте теперь поймем, чем вызвана неединственность вложения планарного графа в плоскость. Особенность показанных на рис. 7.9 графов \tilde{G}_1 и \tilde{G}_2 состоит в том, что у соответствующего им планарного графа G имеется точка сочленения — вершина 3 на рис. 7.9. Любой блок — в данном случае либо ребро $\{3, 1\}$, либо ребро $\{3, 2\}$ — может вращаться вокруг этой точки сочленения как вокруг шарнира. Как следствие, каждое из этих ребер может

быть уложено либо внутрь, либо снаружи петли. Итак, вложение односвязных графов, не являющихся двусвязными, в плоскость неединственно.

Давайте усилим ограничения на планарный граф G и предположим, что такой граф является двусвязным. К сожалению, и в этом случае вложение такого графа в плоскость может быть неединственным. На рис. 7.11 представлены два вложения одного и того же планарного двусвязного графа G . В первом вложении граф \tilde{G}_1 имеет пять граней степени 3 и одну (внешнюю) грань, степень которой равна 5. В плоском графе \tilde{G}_2 содержатся две грани степени 4 и три грани степени 3. Как следствие, двойственные к ним графы \tilde{G}_1^* и \tilde{G}_2^* неизоморфны друг другу.

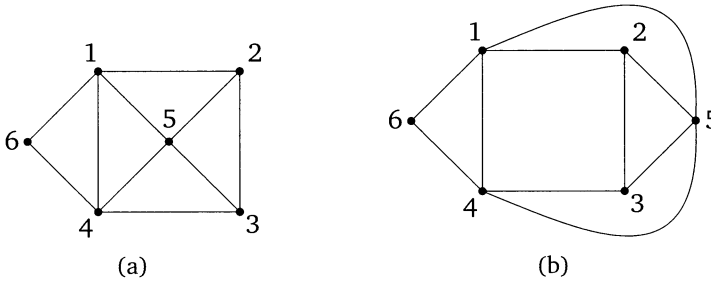


Рис. 7.11. Различные укладки двусвязного планарного графа G

Для объяснения неединственности вложения двусвязных графов в плоскость вспомним, что любой такой граф можно рассматривать как цикл, к которому последовательно прикреплены одна или несколько ручек. Рассмотрим ручку $\{1, 6, 4\}$ на рис. 7.11. Видно, что эту ручку мы можем вращать вокруг вершин 1 и 4 привязки этой ручки к остальной части графа G , вкладывая ее либо во внешнюю грань, либо в одну из внутренних граней. В результате мы и получаем две различные укладки такого графа в плоскость.

Итак, вложение в плоскость планарного графа, не являющегося трехсвязным, может быть неединственным. Уитни в 1933 году показал, что вложение любого планарного трехсвязного графа в плоскость уже является единственным.

Упражнения

1 (1 балл). Октаэдр — это один из пяти выпуклых правильных многогранников, имеющий 8 треугольных граней, 12 ребер и 6 вершин степени 4. Докажите, что октаэдр является планарным графом, нарисовав симметричный плоский граф \tilde{G} , описывающий одно из возможных правильных вложений октаэдра в плоскость. Постройте двойственный к нему граф \tilde{G}^* . Какому планарному графу G^* он соответствует?

2 (1 балл). Найдите минимально возможный 4-регулярный планарный граф.

3 (1,5 балла). Докажите, что граф G , изображенный на рис. 7.12(а), можно правильно вложить в плоскость, нарисовав соответствующий ему плоский граф \tilde{G} .

4 (1,5 балла). С помощью леммы Жордана докажите непланарность графа $K_{3,3}$.

5 (1,5 балла). Рассмотрим произвольный (не обязательно планарный) граф G . Попытаемся нарисовать его на плоскости так, чтобы количество пересечений изображающих ребра этого графа отрезков в точках, отличных от точек, изображающих вершины графа G , было минимальным. Получившееся в результате количество таких «неправильных» пересечений называется *числом пересечений* $cr(G)$ (crossing number) графа G . Оно выступает своеобразной мерой его непланарности и показывает, какое минимальное количество ребер в G нужно удалить для того, чтобы превратить его в планарный. Так, у планарных графов $cr(G) = 0$, у графа K_5 это число равно единице, и т. д. Докажите, что число пересечений 4-регулярного графа G , построенного на семи вершинах (рис. 7.12(б)), равно единице.

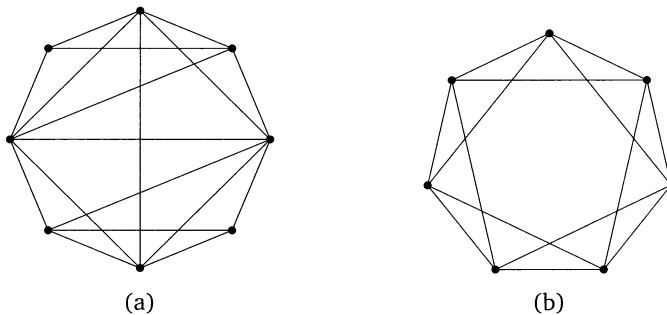


Рис. 7.12

6 (1,5 балла). В процессе доказательства непланарности графа K_5 мы, в частности, доказали, что граф $K_5 - e$, где e — произвольное ребро графа K_5 , можно правильным образом вложить в плоскость. Иными словами, мы показали, что граф $K_5 - e$ является так называемым *максимальным планарным графом*, т. е. простым графом, добавление любого ребра к которому превращает его в непланарный. Заметим, что правильное вложение в плоскость графа $K_5 - e$ представляет собой некоторую триангуляцию плоскости, т. е. разбиение ее на грани степени 3. Докажите, что данный факт справедлив и в общем случае, а именно что планарный граф, построенный на $n \geq 3$ вершинах, представляет собой некоторую триангуляцию плоскости тогда и только тогда, когда он является максимальным планарным графом.

7 (1,5 балла). Рассмотрим граф, показанный на рис. 7.13(а). Является ли он планарным? Максимальным планарным? Если он планарным не является, удалите несколько ребер, чтобы сделать его максимальным планарным. Если он является планарным, но не является максимальным планарным, добавьте к нему ребра так, чтобы он стал максимальным планарным.

8 (1,5 балла). Вложите планарный граф G , отвечающий плоскому графу \tilde{G} , изображенному на рис. 7.13(b), в плоскость так, чтобы грань f стала внешней.

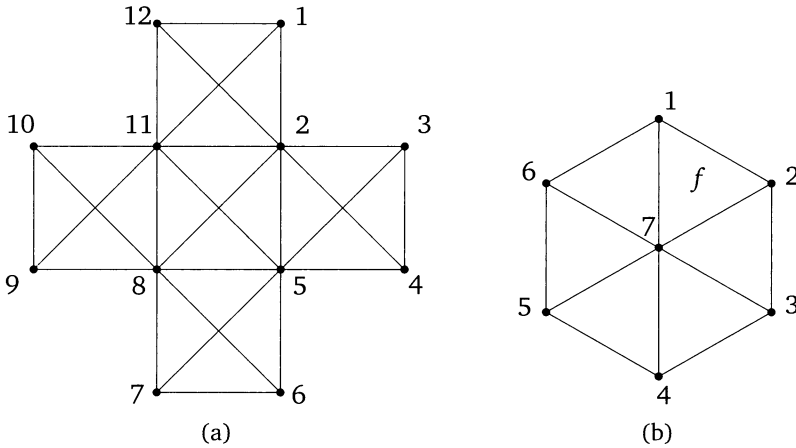


Рис. 7.13

Дополнительные упражнения

9 (2 балла). Докажите, что число пересечений полного графа K_6 равно трем.

10 (2,5 балла). Докажите, что число пересечений двудольного графа $K_{2s,2t}$, построенного на $2s + 2t$ вершинах, ограничено сверху числом $s(s - 1)t(t - 1)$. Как изменится этот результат в случае, когда в одной или в обеих долях присутствует нечетное количество вершин?

11 (1,5 балла). Постройте два графа G_1 и G_2 с одной и той же последовательностью степеней вершин вида $(4, 4, 4, 4, 3, 3)$, один из которых является планарным, а второй таковым не является.

12 (1,5 балла). Докажите, что любой граф G , содержащий не более чем три цикла, является планарным.

13 (2 балла). Плоский граф \tilde{G} называется *самодвойственным*, если он изоморфен \tilde{G}^* . Постройте два бесконечных семейства самодвойственных графов.

14 (1,5 балла). Докажите, что не существует плоского графа \tilde{G} , имеющего ровно пять граней, каждая пара из которых имеет общее ребро.

15 (2 балла). Докажите, что плоский граф \tilde{G} является двудольным тогда и только тогда, когда двойственный к нему граф \tilde{G}^* является плоским связным эйлеровым графом.

16 (1,5 балла). Докажите, что удалению в плоском связном графе \tilde{G} ребра e , не являющегося мостом, отвечает стягивание ребра e^* в \tilde{G}^* . Кроме того, покажите, что если e не является петлей в исходном графе \tilde{G} , то стягиванию e в \tilde{G} отвечает удаление ребра e^* в \tilde{G}^* .

Решение упражнений

1. Довольно легко изобразить правильное вложение октаэдра в плоскость, построив квадрат из четырех вершин и помещая пятую вершину в центр квадрата, а шестую — вне его. Однако такое построение будет несимметричным. Симметричное вложение октаэдра показано на рис. 7.14.

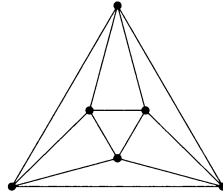


Рис. 7.14. Правильное симметричное вложение октаэдра в плоскость

Если теперь нарисовать двойственный граф \tilde{G}^* к данному плоскому графу \tilde{G} , то мы получим граф, построенный на 8 вершинах степени 3, и имеющий 12 ребер, а также 6 граней степени 4. Несложно понять, что соответствующий этому графу планарный граф G^* представляет собой куб.

2. Таким графом является граф «восьмерка» — граф, построенный на одной вершине и имеющий две петли (см. рис. 7.15).

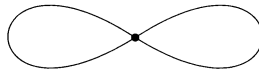


Рис. 7.15. Граф «восьмерка»

3. На рис. 7.16(b) приведено правильное вложение \tilde{G} планарного графа G . На рис. 7.16(a) для наглядности изображен исходный планарный граф G с помеченными вершинами.

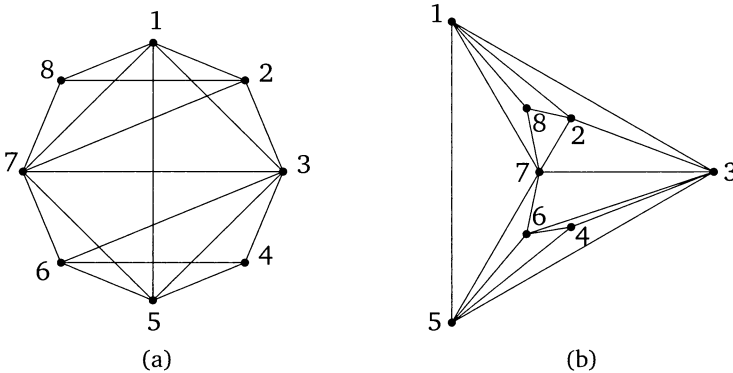


Рис. 7.16. (a) Исходный планарный граф G ; (b) правильная укладка графа G

4. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ — два блока двудольного графа $K_{3,3}$. Рассмотрим простой цикл $C = x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_1$ в графе $K_{3,3}$ (см. рис. 7.17(a)). Его, конечно же, можно правильно вложить в плоскость. Ребро $\{x_1, y_2\}$ можно уложить либо в $\text{int}(C)$, либо в $\text{ext}(C)$. Предположим для определенности, что оно попало во внешнюю по отношению к C область $\text{ext}(C)$ (рис. 7.17(b)). В этом случае ребро $\{y_1, x_3\}$ можно вложить только во внутреннюю по отношению к C область $\text{int}(C)$. Осталось вложить ребро $\{x_2, y_3\}$. Однако сделать это невозможно. Действительно, рассмотрим простой цикл $C_1 = \{x_1, y_1, x_3, y_2, x_1\}$ (см. рис. 7.17(b)). Так как точка, изображающая вершину y_3 , лежит вне этого цикла, а точка, изображающая вершину x_2 , — внутри него, то по теореме Жордана любая кривая, соединяющая эти точки, обязана пересекать цикл C_1 . Следовательно, граф $K_{3,3}$ планарным не является.

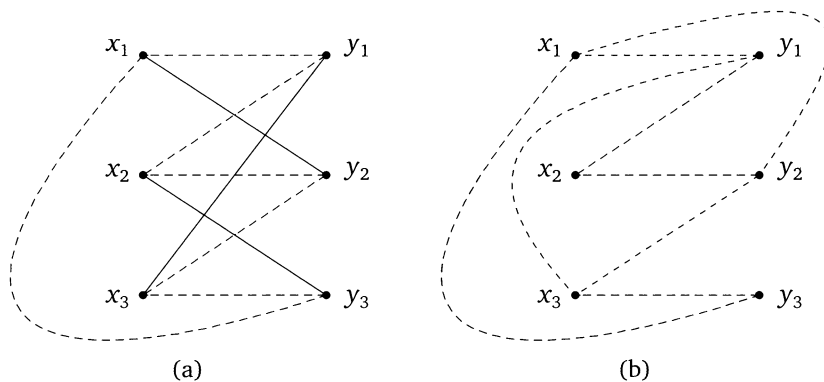


Рис. 7.17. Доказательство непланарности графа $K_{3,3}$

5. На рис. 7.18(a) показано вложение графа G в плоскость, имеющее ровно один перекресток. Заметим, кроме того, что граф G содержит в качестве своего подграфа подразбиение графа $K_{3,3}$ (см. рис. 7.18(b)). Поэтому такой граф планарным быть не может. Следовательно, $\text{cr}(G) = 1$.

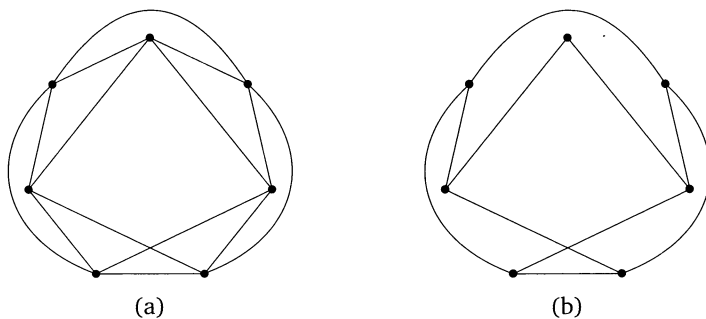


Рис. 7.18

6. Давайте поймем, при каких условиях мы можем вставить ребро между изначально несмежными между собой вершинами так, чтобы простой граф G остался планарным. Пусть \tilde{G} — правильное вложение графа G в плоскость. Предположим, что у этого вложения имеется грань f , степень которой больше или равна четырем. В этом случае мы, очевидно, можем добавить к графу G по крайней мере одно ребро между какой-то парой несмежных вершин, соответствующих паре принадлежащих границе ∂f грани f несмежных вершин плоского графа \tilde{G} . Граф $G + e$ останется при этом, очевидно, планарным — его правильным вложением в плоскость будет плоский граф $\tilde{G} + e$, в котором ребро e лежит внутри грани f . Продолжая далее, мы в результате получим некоторый планарный граф, правильное вложение которого в плоскость представляет собой некоторую триангуляцию плоскости. Очевидно также, что верно и обратное — а именно, любая триангуляция плоскости представляет собой максимальный планарный граф.

7. Данный граф является планарным. Для того чтобы это понять, давайте втянем вершину 5 центрального квадрата внутрь аналогично тому, как мы это делали в графе K_4 (см. рис. 7.19). К ребрам, соединяющим вершину 5 с вершинами 8 и 2, мы можем всегда приклеить по подграфу, изоморфному K_4 . Эти подграфы также, в свою очередь, стягиванием одной из вершин превращаются в треугольники с центральной вершиной. Стянув по вершине верхнего и левого квадрата, мы получим еще два таких же подграфа. В итоге мы получили правильное вложение исходного графа в плоскость.

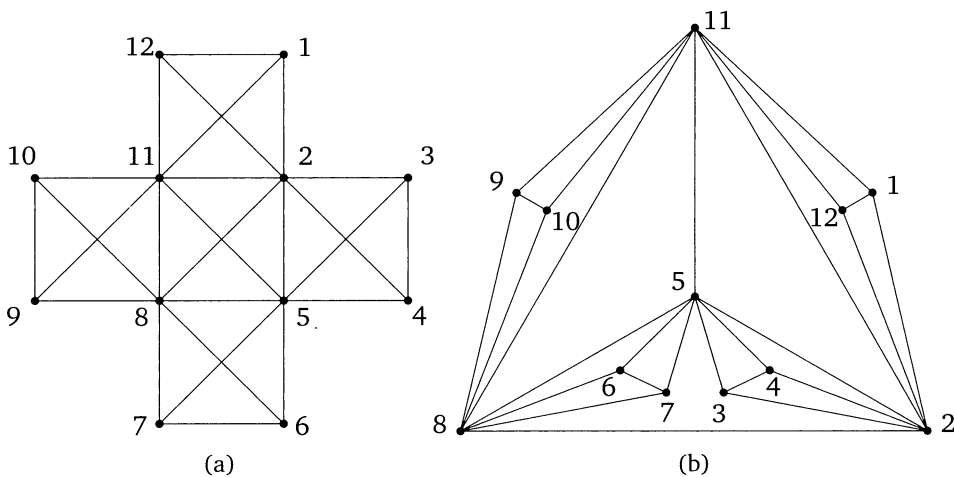


Рис. 7.19. (a) Исходный планарный граф G ; (b) правильная укладка графа G

Такой подграф, однако, максимальным не является. Видно, что мы можем к внешней грани добавить два ребра, а также добавить два ребра в нижнем треугольнике и получить триангуляцию плоскости. Такая триангуляция уже будет представлять собой максимальный планарный граф.

8. В случае вложения графа G , при котором грань f становится внешней, у нас имеется треугольник $\{1, 2, 7\}$ (см. рис. 7.20), к ребру $\{1, 2\}$ которого прилегает шестиугольник $\{1, 2, 6, 3, 4, 5\}$, отвечающий бывшей внешней грани. Из вершины 7 исходят при этом пять треугольников, отвечающих оставшимся граням.

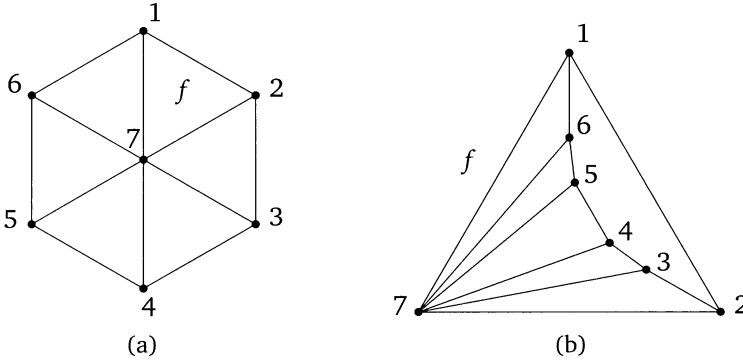


Рис. 7.20

§ 2. Формула Эйлера для плоских графов

1. Приведенное в первом параграфе доказательство непланарности графа K_5 использовало лемму Жордана. Однако оказывается, что это же свойство графа K_5 , равно как и многие другие свойства планарных графов, можно достаточно просто доказать с использованием знаменитой формулы Эйлера, связывающей количество вершин, ребер и граней в плоских графах.

а. Рассмотрим в качестве первого примера одно из пяти платоновых тел, а именно правильный куб. В таком графе количество n вершин равно 8, количество m ребер равно 12, а количество r граней равно 6. Рассматривая линейную комбинацию этих чисел вида $n - m + r$, мы увидим, что она равна двум:

$$n - m + r = 2. \tag{7.2}$$

Оказывается, это же равенство имеет место и для остальных платоновых тел. Более того, изучая выпуклые многогранники, Леонард Эйлер заметил, что для любого из них выполняется равенство (7.2). Проверив данный факт вначале экспериментально, на многочисленных примерах, Эйлер затем нашел строгое доказательство соотношения (7.2).

Мы с вами, однако, уже знаем, что любой выпуклый многогранник правильным образом вкладывается в сферу. Кроме того, мы знаем, что любой граф, правильно вложимый в сферу, правильно вложим и в плоскость. Иными словами, есть подозрение, что соотношение (7.2) может оказаться справедливым и для любых связанных плоских графов. Оказывается, это действительно так. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Количества вершин $n = |V(\tilde{G})|$, ребер $m = |E(\tilde{G})|$ и граней $r = |F(\tilde{G})|$ произвольного связного плоского графа \tilde{G} удовлетворяют следующему соотношению:*

$$n - m + r = 2. \quad (7.3)$$

Доказательство проведем индукцией по количеству r граней плоского графа \tilde{G} . Ранее мы уже заметили, что любое правильное вложение в плоскость связного плоского графа без циклов, т. е. дерева, имеет в точности одну грань. Но для дерева количество n ребер и количество m вершин связаны равенством $n - m = 1$, так что для случая $r = 1$ теорема верна.

Предположим теперь, что теорема верна для всех плоских связных графов с $r - 1$ гранью; $r > 1$, и покажем, что она остается верной и для любого плоского связного графа \tilde{G} с количеством граней, равным r . Так как $r > 1$, то такой граф содержит хотя бы один простой цикл. Произвольное ребро e этого цикла принадлежит границам ровно двух граней f_1 и f_2 . Удаление этого ребра приводит к образованию единой грани $f_{12} = f_1 \cup f_2$. Так как e принадлежит циклу графа \tilde{G} , то получающийся после удаления ребра e плоский граф $\tilde{G} - e$ остается связным. По индукционному предположению для такого графа справедлива формула Эйлера:

$$|V(\tilde{G} - e)| + (|F(\tilde{G} - e)| - 1) - (|E(\tilde{G} - e)| - 1) = 2.$$

Отсюда следует, что формула (7.3) верна и для исходного графа \tilde{G} . \square

б. Формула Эйлера является чрезвычайно мощным инструментом доказательства многих полезных фактов, касающихся плоских графов. Например, априори не очевидно, что различные плоские графы, отвечающие вложению одного и того же связного планарного графа G в плоскость, имеют одинаковое количество граней. С помощью же формулы Эйлера данное утверждение доказывается абсолютно элементарно.

Утверждение 2. *Все правильные вложения одного и того же связного планарного графа G в плоскость имеют одинаковое количество граней.*

Доказательство. Согласно формуле Эйлера (7.3) количество $r = |F(\tilde{G})|$ граней плоского графа \tilde{G} зависит лишь от количества вершин и ребер исходного планарного графа G и никак не зависит от конкретного способа вложения G в плоскость. \square

с. С помощью теоремы Эйлера можно получить некоторые полезные оценки на количество ребер в плоских графах.

Утверждение 3. *Количество m ребер в произвольном простом связном плоском графе \tilde{G} , построенном на $n \geq 3$ вершинах, не превосходит $3n - 6$.*

Доказательство. В простом связном плоском графе, построенном на $n \geq 3$ вершинах, степень любой грани больше или равна трем. Следовательно, сумма степеней всех граней такого графа больше или равна $3r$, $r = |F(\tilde{G})|$. С дру-

гой стороны, согласно равенству (7.1) эта же сумма равна удвоенному количеству ребер. Иными словами,

$$2m \geq 3r \Rightarrow r \leq 2m/3.$$

Теперь осталось воспользоваться формулой Эйлера (7.3):

$$2 = n - m + r \leq n + 2m/3 - m = n - m/3 \Rightarrow m \leq 3n - 6. \quad \square$$

Следствие 4. *Любой простой связный плоский граф \tilde{G} обязан иметь вершину, степень которой не превосходит пяти.*

Доказательство. Для графов с количеством вершин $n < 3$ утверждение тривиально, поэтому будем считать, что в графе \tilde{G} количество вершин $n \geq 3$. Предположим, что в таком графе для любой вершины $x \in V(\tilde{G})$ выполнено условие $\deg(x) \geq 6$. В этом случае

$$2m = \sum_{x \in V(\tilde{G})} \deg(x) \geq 6n,$$

а это противоречит утверждению 3, согласно которому $m \leq 3n - 6$. \square

Замечание 5. Так как в последних двух утверждениях речь идет только о вершинах плоского графа \tilde{G} , то это означает, что аналогичные утверждения справедливы также и для исходного планарного графа G .

Следствие 6. *Граф K_5 непланарен.*

Доказательство. Действительно, граф K_5 содержит $\binom{5}{2} = 10$ ребер, тогда как согласно утверждению (3) планарный граф на $n = 5$ вершинах не может содержать более чем $3 \cdot 5 - 6 = 9$ ребер. \square

2. Ранее мы уже неоднократно убеждались в том, что один и тот же планарный граф можно правильно вложить в плоскость различными способами. Как правило, более предпочтительными с эстетической точки зрения являются вложения, при которых изображающие ребра кривые являются отрезками прямых.

а. Рассмотрим еще раз в этой связи два правильных вложения графа K_4 (рис. 7.21(a)) в плоскость, показанные на рис. 7.21(b) и рис. 7.21(c). Мы уже отмечали, что показанное на рис. 7.21(c) вложение K_4 является значительно более симпатичным по сравнению со вложением того же графа, изображенным на рис. 7.21(b). В этой связи возникает законный вопрос: всегда ли мы можем правильно вложить планарный граф в плоскость так, чтобы его ребра изображались отрезками прямых?

б. Положительный ответ на этот вопрос был дан независимо сразу тремя математиками — Клаусом Вагнером (Klaus Wagner) в 1936 году, Иштваном Фари (Istvan Fary) в 1948 году и С. К. Штайном (S. K. Stein) в 1951 году.

Теорема 7. *Каждый простой планарный граф имеет правильное вложение в плоскость, при котором все его ребра изображаются отрезками прямых.*

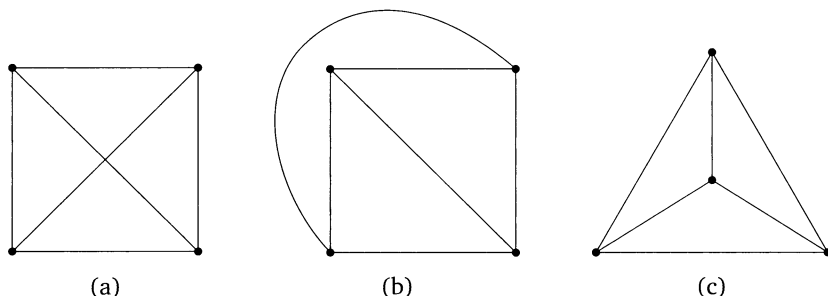


Рис. 7.21. Различные вложения K_4 в плоскость: (а) неправильное вложение; (б) правильное вложение; (с) симметричное вложение

Доказательство. Индукцией по количеству n вершин в графе G мы докажем даже чуть более сильное утверждение. Именно, рассмотрим некоторое правильное вложение \tilde{G} планарного графа G в плоскость. Покажем, что любое такое вложение мы можем «распрямить», а именно что с помощью непрерывной деформации изображающих вершины и ребра планарного графа G точек и отрезков кривых, в процессе которой у нас не возникает дополнительных пересечений вершин и ребер, мы сумеем преобразовать это вложение в такое, при котором все ребра графа G будут изображаться отрезками прямых. В качестве базы индукции выберем граф K_4 — мы уже убедились в том, что и сам этот граф, и любой его подграф можно вложить в плоскость нужным нам образом.

Теперь предположим, что теорема верна для всех планарных простых графов, построенных на $n - 1$ вершине, и покажем, что она верна и для графа G , построенного на n вершинах. Сразу заметим, что если G не является максимальным планарным графом, то мы всегда можем добавить к нему ребра без добавления дополнительных вершин и превратить его в максимальный планарный граф G' . Если мы можем нужным нам образом нарисовать на плоскости граф G' , то, удаляя добавленные на предыдущем шаге ребра, мы получим правильное вложение графа G в плоскость, в котором все ребра будут изображаться отрезками прямых. Поэтому далее будем считать, что G — максимальный планарный граф.

Рассмотрим какое-то правильное вложение \tilde{G} графа G в плоскость. Согласно упражнению 9 в графе G имеется по крайней мере четыре вершины, степень которых меньше или равна пяти. Степень внешней грани \tilde{G} равна трем, поэтому количество вершин степени $\deg(x) \leq 5$, инцидентных этой грани, не превосходит трех. Как следствие, в графе \tilde{G} обязательно найдется вершина x степени $\deg(x) \leq 5$, не принадлежащая границе внешней грани графа \tilde{G} .

Удалим теперь вершину x . Обозначим через f ту грань графа $G - x$, в которой до удаления находилась вершина x . На границе грани f лежат вершины y_1, \dots, y_r , $3 \leq r \leq 5$, смежные с x в исходном графе. Добавляя в грань R дополнительные $r - 3$ ребра, мы превратим граф $G - x$ в максимальный планарный граф G' . По индукционному предположению граф \tilde{G}' можно непрерывной

деформацией изображающих его вершины и ребра точек и отрезков кривых превратить в плоский граф, у которого все ребра изображаются прямолинейными отрезками. После удаления $r - 3$ ребер, добавленных к графу $G - x$, мы получим внутреннюю грань f , степень которой равна трем, четырем или пяти. Если эта грань оказалась выпуклым многоугольником, то мы всегда сможем добавить внутрь этой грани вершину x , соединить ее прямыми отрезками с вершинами многоугольника и получить требуемое вложение графа G в плоскость. Если f является треугольником, это мы сможем сделать всегда. Если же f является четырехугольником или пятиугольником, грань f может оказаться невыпуклой и мы должны действовать чуть более осторожно.

На рис. 7.22 показано, как действовать в случае, когда грань f представляет собой невыпуклый четырехугольник (рис. 7.22(a)), — нам нужно просто продолжить два ребра до пересечения с двумя другими ребрами, получить выпуклый заштрихованный четырехугольник (рис. 7.22(b)), поместить вершину x в любую точку, лежащую внутри заштрихованной области (рис. 7.22(c)), а затем соединить ее ребрами с оставшимися вершинами рассматриваемого четырехугольника (пунктирные линии на рис. 7.22(c)).

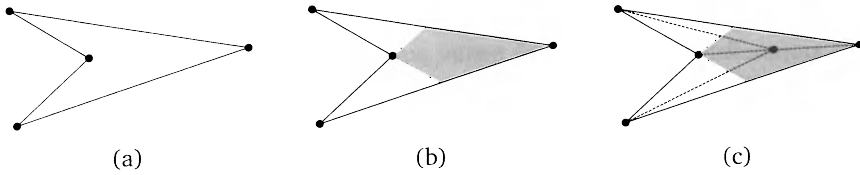


Рис. 7.22. Схема построения в случае невыпуклого четырехугольника

На рис. 7.23–7.25 разобран самый нетривиальный случай, когда грань f представляет собой невыпуклый пятиугольник. Этому случаю отвечают три подслучая. Первый подслучай, по сути, не отличается от случая невыпуклого четырехугольника (рис. 7.23). Как действовать во втором подслучае, показано на рис. 7.24. Наконец, на рис. 7.25 изображен третий подслучай, а также объяснено, как в этом подслучае следует действовать для того, чтобы получить требуемое вложение графа G в плоскость. \square

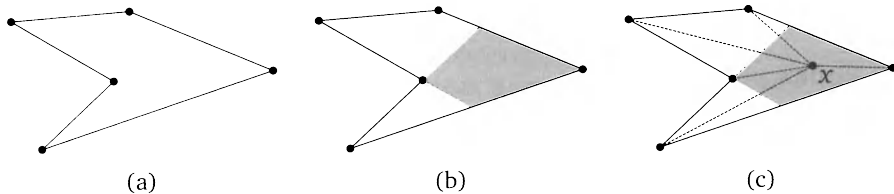


Рис. 7.23. Схема построения в случае невыпуклого пятиугольника.
Первый подслучай

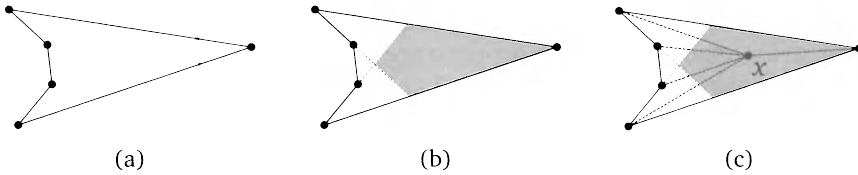


Рис. 7.24. Схема построения в случае невыпуклого пятиугольника.
Второй подслучай

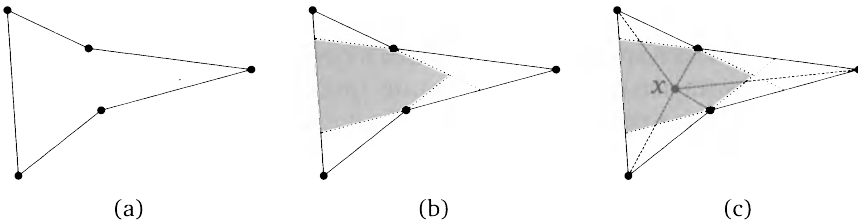


Рис. 7.25. Схема построения в случае невыпуклого пятиугольника.
Третий подслучай

с. В дальнейшем доказанный выше результат был существенным образом усилен. Так, в 1963 году Уильям Татт доказал следующее замечательное утверждение.

Теорема 8 (Татт, 1963). *Любой планарный простой трехсвязный граф G допускает правильную укладку в плоскость \tilde{G} , при которой любое ребро \tilde{G} изображается отрезком прямой, а любая внутренняя грань и граница внешней грани \tilde{G} представляют собой выпуклые многоугольники.*

Мы докажем это утверждение в следующем параграфе. Здесь же стоит отметить интересную механическую интерпретацию данного результата. Зафиксируем границу внешней грани, закрепив принадлежащие этой грани вершины в вершинах соответствующего выпуклого n -угольника. Если теперь предположить, что остальные вершины связаны друг с другом и с вершинами внешней грани пружинками, то в состоянии равновесия данной механической системы мы получим некоторую укладку, которая описывается теоремой Татта.

Упражнения

1 (0,5 балла). Предположим, что граф G имеет 100 вершин и 300 ребер. Является ли он планарным?

2 (1 балл). Докажите, что в случае плоского графа, имеющего ровно k связных компонент, формула Эйлера принимает вид

$$n - m + r = k + 1.$$

3 (1 балл). Пусть T — дерево на $n > 2$ вершинах. Сколько ребер нужно к нему добавить, чтобы получился максимальный планарный граф?

4 (1 балл). Докажите, что в случае простого связного плоского графа без треугольников справедливо неравенство $m \leq 2n - 4$. Используя это свойство, докажите непланарность графа $K_{3,3}$.

5 (0,5 балла). Выразите количество m ребер через количество n вершин в произвольном самодвойственном плоском графе, т. е. графе, для которого $\tilde{G} \cong G^*$.

6 (1 балл). Покажите, что средняя степень вершин в планарном графе меньше шести.

7 (1 балл). Покажите, что если количество n вершин в графе G больше или равно 11, то либо сам граф G , либо дополнение к нему \bar{G} планарным не является.

8 (1 балл). Пусть G — планарный 4-регулярный граф, построенный на 16 вершинах. Предположим, что его правильное вложение в плоскость состоит только из треугольных и/или четырехугольных граней. Сколько треугольных и сколько четырехугольных граней имеет такое вложение?

9 (1,5 балла). Рассмотрим максимальный планарный граф G , построенный на $n \geq 4$ вершинах и m ребрах. Обозначим через n_i количество вершин степени i . Докажите, что для чисел n_i выполняется равенство

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 = 12 + n_7 + 2n_8 + 3n_9 + 4n_{10} + \dots$$

Используя это равенство, докажите, что в графе G имеются по меньшей мере четыре вершины, степени которых не превосходят пяти.

10 (1,5 балла). В упражнении к первому параграфу мы ввели число пересечений $cr(G)$ графа G как меру его непланарности. Оказывается, существует и еще одна популярная мера непланарности графа — так называемая *толщина* (thickness) графа $t(G)$, под которой понимают минимальное количество его планарных подграфов H_i , композиция

$$H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_\theta$$

которых дает нам исходный граф G . Термин «толщина графа» пришел в теорию графов из микроэлектроники, в которой электрические цепи печатаются на непроводящей (как правило, кремниевой) плате, называемой *печатной платой*. Так как контакты между элементами печатной платы (транзисторами, конденсаторами и т. д.) наносятся на плату неизолированными, то они не должны пересекаться между собой. Иными словами, соответствующие графы на плате должны быть плоскими.

На практике, однако, заранее неизвестно, сколько контактов может понадобиться и какие элементы печатных плат они должны соединять между собой. С точки зрения теории графов это означает, что граф, описывающий печатную плату, планарным может и не являться. Как следствие, с технологической точки зрения мы должны предусмотреть несколько печатных плат (или несколько слоев одной и той же печатной платы) для построения полной электрической цепи на плате. Отсюда и определение толщины графа G как наименьшего количества печатных плат, которые нужно наложить друг

на друга для обеспечения функциональности проектируемой электрической сети.

В случае планарных графов $t(G) = 1$. Для графов K_5 и $K_{3,3}$ толщина равна двум. Докажите, что в случае простого графа G , построенного на $n \geq 3$ вершинах и m ребрах, его толщина ограничена снизу величиной $m/(3n - 6)$.

11 (1 балл). Докажите, что для двудольного графа $K_{s,t}$ справедлива следующая оценка на его толщину:

$$t(K_{s,t}) \geq \frac{st}{2s + 2t - 4}.$$

Дополнительные упражнения

12 (1,5 балла). Рассмотрим плоский граф \tilde{G} , показанный на рис. 7.26. Нарисуйте двойственный к нему граф \tilde{G}^* , а также двойственный к двойственному графу граф \tilde{G}^{**} . С помощью формулы Эйлера докажите, что в случае, когда исходный плоский граф G является связным, граф \tilde{G}^{**} изоморфен исходному графу G .

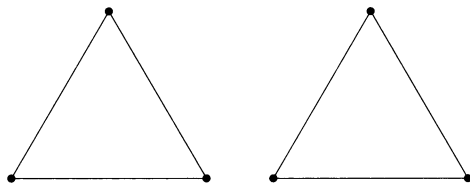


Рис. 7.26

13 (1,5 балла). Напомним, что обхватом h графа называется длина наименьшего цикла в нем. Докажите, что для связного простого планарного графа G , имеющего n вершин и m ребер, справедливо неравенство

$$m \leq \frac{h(n-2)}{h-2}.$$

Пользуясь доказанным неравенством, покажите, что граф Петерсена планарным не является.

14 (1,5 балла). Пусть \tilde{G} представляет собой простой связный плоский d -регулярный граф, любая грань которого имеет степень 3 или 5. Предположим, что любой треугольник в этом графе окружен пятиугольниками, а любой пятиугольник — треугольниками. Докажите, что это возможно только в случае $d = 4$. Подсчитайте количество треугольников и пятиугольников в \tilde{G} и нарисуйте получившийся граф.

15 (2 балла). Говорят, что граф G представляет собой правильный многогранник, если это есть простой d -регулярный граф, $d \geq 3$, у которого степени всех граней одинаковы и равны s . Докажите, что существует всего пять таких многогранников, отвечающих пяти платоновым телам.

16 (1,5 балла). Перерисуйте изображенный на рис. 7.27 плоский граф \tilde{G} так, чтобы ребра такого графа представляли собой отрезки прямых.

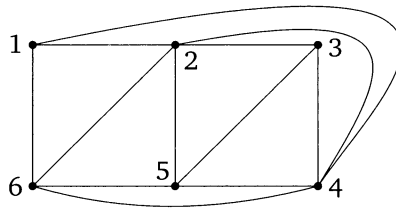


Рис. 7.27

17 (1,5 балла). С помощью теоремы Эйлера докажите, что число $st(K_6)$ пересечений графа K_6 равно трем.

18 (1,5 балла). Рассмотрим показанную на рис. 7.28 декомпозицию графа K_8 на два изоморфных друг другу графа H_1 (рис. 7.28(a)) и H_2 (рис. 7.28(b)). Докажите, что каждый из двух изображенных на рис. 7.28 графов является планарным. Тем самым будет доказано, что толщина графа K_8 равна двум.

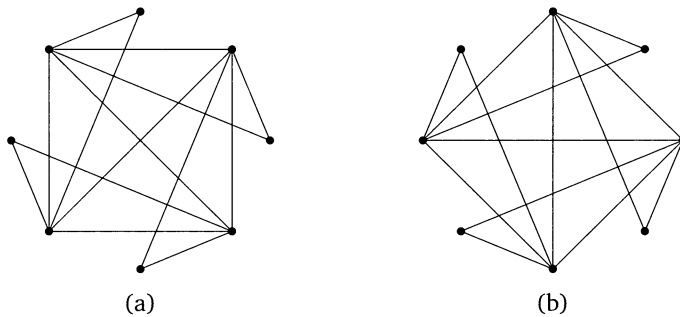


Рис. 7.28. (a) Граф H_1 ; (b) граф H_2

19 (1,5 балла). Докажите, что толщина графа Петерсена равна двум.

20 (1 балл). Докажите, что толщина любого 4-регулярного графа меньше или равна двум.

21 (1,5 балла). Докажите с помощью упражнения 10 следующую оценку на толщину полного графа K_n :

$$t(K_n) \geq \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor. \tag{7.4}$$

Усилиями достаточно большого количества математиков было показано, что на самом деле

$$t(K_n) = \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor$$

для $n \neq 9, 10$. Для чисел $n = 9, 10$ толщина равна трем.

Решение упражнений

1. Максимальное количество ребер в планарном графе равно $3n - 6 = 294$. Следовательно, граф на 100 вершинах, имеющий 300 ребер, планарным не является.

2. Легче всего доказать эту формулу с помощью формулы Эйлера (7.3) для связных графов. Пусть у нас имеется граф G , состоящий из k компонент связности. Обозначим через n_i , m_i и r_i количество вершин, ребер и граней i -й компоненты связности, $i = 1, \dots, k$. Тогда количество n вершин и количество m ребер всего графа G равно, очевидно,

$$n = \sum_{i=1}^k n_i, \quad m = \sum_{i=1}^k m_i,$$

а количество r граней рассчитывается по формуле

$$r = 1 + \sum_{i=1}^k (r_i - 1) = \sum_{i=1}^k r_i - (k - 1).$$

Каждая тройка чисел n_i , m_i и r_i удовлетворяет равенству (7.3). Суммируя эти равенства по i от 1 до k , получаем, что

$$2k = \sum_{i=1}^k (n_i - m_i + r_i) = n - m + r + (k - 1) \Rightarrow n - m + r = k + 1.$$

3. В максимальном планарном графе, построенном на n вершинах, имеется $3n - 6$ ребер, а количество ребер в любом дереве равно $n - 1$. Следовательно, нам нужно добавить $2n - 5$ ребер для того, чтобы превратить дерево в максимальный планарный граф.

4. Так как в графе G треугольники отсутствуют, то степень любой грани такого графа больше или равна четырем. Но тогда

$$2m = \sum_f \deg(f) \geq 4r,$$

где r — количество граней плоского графа G , и из формулы Эйлера мы получаем, что

$$r = 2 + m - n \leq \frac{m}{2} \Rightarrow m \leq 2n - 4.$$

Двудольный граф $K_{3,3}$ свободен от треугольников. Но в нем $m = 9$, а $2n - 4 = 8$, поэтому такой граф планарным не является.

5. В самодвойственном графе количество r граней совпадает с количеством n вершин. В этом случае согласно формуле Эйлера (7.3) имеем

$$2n - m = 2 \Rightarrow m = 2n - 2.$$

6. Средняя степень вершин в графе G , построенном на n вершинах и m ребрах, равна

$$\frac{\sum_{x \in V(G)} \deg(x)}{n} = \frac{2m}{n}.$$

Мы знаем, что $m \leq 3n - 6$. Следовательно, средняя степень вершин меньше или равна $6 - 12/n$, т. е. строго меньше шести.

7. Пусть $\delta(G)$ — наименьшая из степеней вершин в графе G . Заметим, что в случае $n > 10$ либо $\delta(G) > 5$, либо $\delta(\bar{G}) > 5$. Если $\delta(G) > 5$, то граф G не является планарным. В противном случае вершина, степень которой в графе G равна $\delta(G)$, имеет в графе \bar{G} степень, большую пяти. Следовательно, в этом случае не является планарным граф \bar{G} .

8. Согласно первой теореме теории графов в 4-регулярном графе количество ребер e в два раза превосходит количество вершин. Следовательно, в графе G имеется 32 ребра. Обозначим через r_3 и r_4 количество трех- и четырехвалентных граней соответствующего G плоского графа \tilde{G} . Согласно формуле Эйлера

$$n - m + r_3 + r_4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad r_3 + r_4 = 18.$$

Наконец, согласно формуле (7.1) сумма степеней всех граней равна удвоенному количеству ребер:

$$3r_3 + 4r_4 = 2m = 64.$$

Полученная система двух линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение $r_3 = 8$, $r_4 = 10$.

9. Согласно первой теореме теории графов

$$2m = \sum_{x \in V(G)} = 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + 6n_6 + 7n_7 + 8n_8 + 9n_9 + 10n_{10} + \dots$$

С другой стороны, в максимальном планарном графе $m = 3n - 6$. Подставляя это выражение для m в записанное выше равенство, мы и получим, что

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 = 12 + n_7 + 2n_8 + 3n_9 + 4n_{10} + \dots$$

Минимальное значение левая часть этого равенства принимает в случае, когда $n_7 = n_8 = \dots = 0$. При таких значениях параметров n_i наша формула переписывается в виде

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 = 12.$$

Максимальный коэффициент в левой части равенства стоит при n_3 . Следовательно, наихудший с точки зрения количества вершин случай соответствует значениям параметров $n_4 = n_5 = 0$, когда $n_3 = 4$. Во всех остальных случаях количество вершин степени, меньшей или равной пяти, будет строго больше четырех.

10. По определению толщины графа G можно представить в виде декомпозиции $t(G)$ планарных подграфов H_i . Для каждого из них должно выполняться неравенство $m_i \leq 3n - 6$, где m_i — количество ребер в подграфе H_i . Суммируя все эти неравенства, мы и получим, что

$$m \leq t(G) \cdot (3n - 6).$$

11. Совершенно аналогично предыдущему упражнению доказывается, что в случае двудольного графа G , построенного на n вершинах и m ребрах, $t(G) \geq m/(2n - 4)$. Учитывая, что в двудольном графе $K_{s,t}$ имеется $m = st$ ребер и $n = s + t$ вершин, мы и получаем требуемую оценку на $t(K_{s,t})$.

§ 3. Карты на поверхностях

1. В первом параграфе мы доказали, что любое правильное вложение планарного графа в плоскость эквивалентно некоторому правильному вложению этого графа в сферу и наоборот. Как следствие, планарные графы мы можем рассматривать как графы, правильным образом вложимые в сферу. Но такая точка зрения вызывает довольно естественный вопрос: а можем ли мы рассмотреть правильные вложения графа в другие двумерные поверхности, отличные от сферы? И если да, то насколько интересны с практической точки зрения подобного рода обобщения?

Ответ на первый вопрос очевиден — понятие плоского графа достаточно легко обобщается на случай так называемых карт (maps) на поверхностях, представляющих собой правильные вложения графа в двумерные поверхности. В последние десятилетия выяснилось, что и на второй вопрос ответ положителен — такого рода объекты возникают в самых неожиданных приложениях — в теоретической физике, биоинформатике, теоретической информатике, в других разделах чистой и прикладной математики. Задача этого параграфа — дать не слишком формальное, но все же по возможности строгое введение в этот интересный раздел современной теории графов, а также рассказать о некоторых задачах в смежных областях современной математики, в которых эти объекты естественным образом появляются.

2. Прежде чем говорить о каких-то вложениях графа в двумерные поверхности, логично напомнить о том, что же такое двумерная поверхность, какие бывают поверхности, как их описать и т. д.

а. Очень неформально любая двумерная поверхность — это нечто, что локально выглядит как кусок плоскости. Характерный и наиболее близкий нам пример — это поверхность планеты, на которой мы с вами живем. Мы знаем, что в первом приближении эта поверхность представляет собой сферу достаточно большого радиуса. Однако убедиться в этом мы сможем, лишь поднявшись над Землей на очень большое расстояние. Локально же поверхность Земли выглядит как кусок плоскости, так что точка зрения некоторых из наших предков (и отдельных современных фантастов), представлявших себе поверхность Земли в виде диска, покоящегося на спинах четырех слонов, стоящих на плывущей в космосе огромной черепахе, с точки зрения человека, выглянувшего из окна, ничем не хуже альтернативных моделей устройства нашей Вселенной.

Эпоха великих географических открытий, сопровождавшаяся, помимо всего прочего, и развитием методов и средств наблюдения за другими телами Солнечной системы, серьезно поколебала позиции сторонников слонов и черепах — в конечном итоге все поверили, что Земля представляет собой шар. Однако теоретически ничто не мешало существованию туннеля, проходящего через центр Земли. Наиболее удачно это предположение было обыграно еще в середине девятнадцатого века в прекрасном романе Жюль Верна. С формальной точки зрения наличие такого туннеля радикально меняет модель Земли — вместо сферы мы в таком случае имеем

нечто напоминающее пышку, или, говоря математическим языком, тор (рис. 7.29(a)). Его можно получить, вырезав из сферы две дырки и заклеив эти дырки ручкой. Несколько таких туннелей, не пересекающихся между собой, превращают поверхность Земли в то, что называется сферой с ручками (рис. 7.29(b)). Еще в девятнадцатом веке математики доказали, что никаких других замкнутых ориентируемых двумерных поверхностей, отличных от сферы с k ручками, в природе не существует. При этом количество этих ручек называется *родом* g замкнутой ориентируемой поверхности X .

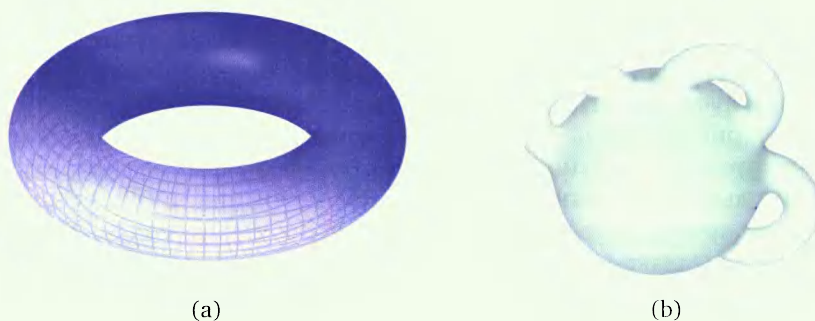


Рис. 7.29

Слова «замкнутая» и «ориентируемая» в этом определении принципиальны. Характерный пример незамкнутой поверхности или поверхности с краем — это тот же самый диск, у которого имеется край — окружность, его ограничивающая. Сфера — типичный и наиболее важный пример замкнутой поверхности, т. е. поверхности без края. Ориентируемая поверхность — это поверхность, в которой однозначно можно выбрать нормаль к этой поверхности или же ориентацию замкнутой кривой на этой поверхности. Характерный пример неориентируемой поверхности — это лента Мёбиуса (рис. 7.30(a)). Ее легко получить, если склеить противоположные концы



Рис. 7.30

длинной бумажной полоски, предварительно перекрутив на 180° один из ее концов. Начав путешествие по листу Мёбиуса вдоль его края из некоторой точки, мы в какой-то момент окажемся в той же точке, но перевернутые с ног на голову. Чтобы вернуться к исходному положению в пространстве, нам нужно будет пройти по тому же самому пути еще раз. У этой поверхности, как и у диска, имеется край, который, как говорят топологи, гомеоморфен окружности: если мы пойдем вдоль этого края из выделенной точки, то в конце концов придем в ту же точку, из которой мы стартовали. В пространстве такая кривая описывает петлю, которая часто изображается в виде знака бесконечности ∞ .

Наряду с неориентируемыми поверхностями с краем существуют и замкнутые неориентируемые поверхности. Наиболее простыми и интересными примерами такого рода являются проективная плоскость и бутылка Клейна (рис. 7.30(b)). В топологии доказывается, что любая замкнутая неориентируемая поверхность получается из сферы с k дырками заклеиванием этих дырок лентами Мёбиуса. Такую операцию чисто физически в трехмерном пространстве не провести, однако в четырехмерном пространстве для этого никаких препятствий не существует.

На этом мы заканчиваем краткий экскурс в теорию двумерных поверхностей. Подробности и формальное описание введенных выше понятий можно найти в любом хорошем учебнике по топологии.

в. Вернемся к картам на поверхностях. Неформально любую такую карту можно рассматривать как граф, нарисованный на поверхности рода g . Более формальное определение таково.

Определение 1. (Топологической) картой \mathfrak{M} называется правильное вложение мультиграфа G в поверхность X , т. е. такое вложение, при котором G рассматривается как некоторое подмножество поверхности X , вершинам графа G отвечают некоторые точки на поверхности X , а ребра представляются несамопересекающимися кривыми на поверхности, не имеющими общих точек, отличных от вершин графа. При этом каждая из связных компонент дополнения $X \setminus G$, называемая *гранью* карты \mathfrak{M} , гомеоморфна открытому диску. Иными словами, после разрезания поверхности вдоль ребер G поверхность X распадается на односвязные куски.

Сделаем несколько замечаний к данному выше определению. Все они, по сути, связаны с требованием односвязности граней карты \mathfrak{M} .

Рассмотрим, к примеру, граф C_4 . Его вложение в плоскость (а следовательно, и в сферу) является правильным, т. е. сам граф является планарным, а его вложение в сферу — картой на сфере. Однако вложить его в тор уже невозможно — нарисовав такой граф на торе, карту мы не получим — после разрезания поверхности вдоль его ребер мы получим либо тор с дыркой (рис. 7.31(a)), либо цилиндр (рис. 7.31(b)), а нам нужно, чтобы в результате разреза получались куски, гомеоморфные диску.

Далее, при рассмотрении плоских графов \tilde{G} мы не исключали возможности того, что соответствующие им планарные графы G могут оказаться

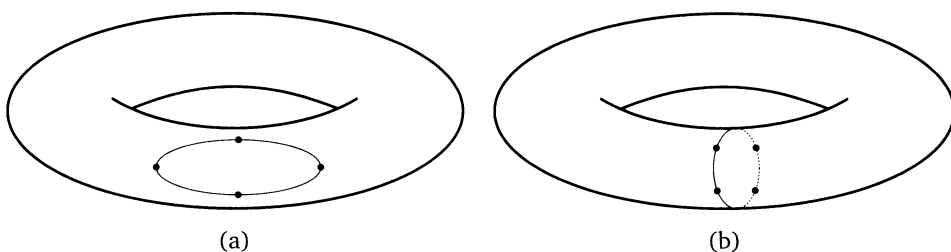


Рис. 7.31

несвязными. Данное выше определение такую возможность полностью исключает — попытка нарисовать несвязный граф на поверхности приводит к появлению грани, которая не является односвязной. Поэтому при рассмотрении топологических карт соответствующие им графы обязаны быть связными.

с. Многие факты и понятия, справедливые для плоских графов, имеют место и для карт. В частности, мы можем определить для карты степень $\text{deg}(f)$ грани f как количество инцидентных этой грани ребер. При этом по-прежнему будет справедливым равенство

$$\sum_{f \in F(\mathfrak{M})} \text{deg}(f) = 2|E(\mathfrak{M})| = 2m,$$

где $F(\mathfrak{M})$ — множество граней, а $E(\mathfrak{M})$ — множество ребер карты \mathfrak{M} .

Наконец, для карт справедлива теорема Эйлера, обобщающая соответствующее утверждение для плоских графов на случай карты, нарисованной на поверхности рода g .

Теорема 2. *Обозначим через n , m и r количество вершин, ребер и граней карты \mathfrak{M} . Рассмотрим все множество карт, нарисованных на поверхности рода g . Тогда для всех карт из этого множества число*

$$\chi(\mathfrak{M}) = n - m + r,$$

называемое эйлеровой характеристикой карты \mathfrak{M} , оказывается одинаковым и равным $2 - 2g$. Равенство

$$n - m + r = 2 - 2g \tag{7.5}$$

называется формулой Эйлера для карт, построенных на замкнутой ориентируемой поверхности рода g .

Как следствие, любая карта характеризуется, помимо количества вершин, ребер и граней, также и своим родом g , понимаемым как род поверхности, на которой она нарисована.

Карты рода $g = 0$, т. е. карты, нарисованные на сфере, носят название планарных карт.

d. Важно понимать, что соответствие «граф — карта» не является взаимно однозначным. Так, мы уже отмечали в первом параграфе, что один и тот же

граф G можно вложить в плоскость разными способами, получив различные плоские графы \tilde{G} . Кроме того, оказывается, один и тот же граф можно правильно вложить в разные поверхности.

В качестве примера рассмотрим граф-тетраэдр. Его можно вложить в сферу, разбив ее при этом на четыре треугольные грани (рис. 7.32(a)). Однако наряду с таким вложением существует и его вложение в тор (см. рис. 7.32(b)). Количество вершин и ребер у такой карты, конечно же, осталось неизменным, а вот количество граней (в полном соответствии с формулой Эйлера) стало равным двум.

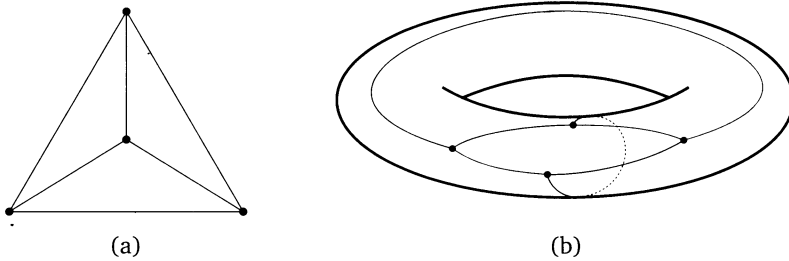


Рис. 7.32. (a) Вложение K_4 в плоскость (сферу); (b) вложение K_4 в тор

3. С комбинаторной точки зрения топологические карты \mathfrak{M} являются помеченными графами. Если мы произвольным образом разметим $2m$ полуребер такой карты (см. рис. 7.33), то получим аналог помеченного графа, который называется комбинаторной картой M . Название это связано с тем, что такие карты допускают очень простое описание с помощью пары перестановок σ и α длины $2m$.

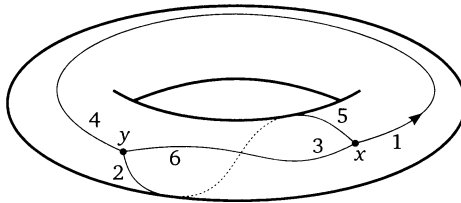


Рис. 7.33. Карта M_1 на торе

а. Покажем вначале, как по заданной помеченной карте M на поверхности получить некоторую пару перестановок. Рассмотрим для этого помеченные полуребра, исходящие из произвольной вершины x карты M (см. полуребра 1, 3 и 5 на рис. 7.33). Будем обходить эту вершину, например, в направлении против часовой стрелки (мы рассматриваем ориентируемые поверхности, так что мы всегда можем выбрать некоторый порядок обхода и затем его зафиксировать) и записывать полуребра, которые получаются у нас в порядке этого обхода. Так, обходя вершину x на рис. 7.33, мы получим полуребра

в порядке 1, 5, 3. Результат этого обхода мы можем записать в виде цикла (1, 5, 3). Поступая аналогично с остальными вершинами карты, мы получаем перестановку σ длины $2m$, состоящую из n циклов, где n — количество вершин карты M . Так, для изображенной на рис. 7.33 карты M_1 соответствующая ей перестановка σ имеет вид

$$\sigma = (1, 5, 3)(4, 2, 6).$$

Теперь заметим, что все полуребра карты M разбиты на пары. Информацию о таком разбиении мы можем закодировать с помощью перестановки α длины $2m$, состоящей из t циклов длины 2. При этом цикл (i, j) в такой перестановке описывает ребро исходной карты M , образованной полуребрами i и j . Например, для карты M_1 на рис. 7.33 перестановка α имеет следующий вид:

$$\alpha = (1, 4)(2, 5)(3, 6).$$

Замечание 3. Так как перестановка α состоит из t циклов длины 2, то $\alpha^{-1} = \alpha$. Следовательно, перестановка α , описывающая ребра карты M , представляет собой специальный вид перестановки — инволюцию. При этом, так как в перестановке α циклы длины 1 отсутствуют, это инволюция без неподвижных точек.

б. Итак, мы показали, что по заданной карте M , полуребра которой помечены числами от 1 до $2m$, мы можем построить две перестановки σ и α длины $2m$, описывающие вершины и ребра этой карты. Мы знаем, однако, что любая карта состоит из трех блоков — вершин, ребер и граней. Оказывается, грани карты M можно закодировать с помощью еще одной перестановки — перестановки φ длины $2m$.

Для получения такой перестановки будем обходить границу каждой из граней f карты M так, чтобы эта граница в процессе обхода оставалась слева, и записывать встречающиеся при этом обходе метки полуребер. При этом мы будем считать, что при выходе полуребра i из вершины x метка полуребра записывается справа от него, т. е. относится к той грани, которая лежит справа от полуребра.

В качестве примера вновь рассмотрим карту M_1 , изображенную на рис. 7.33. Эта карта имеет единственную грань f_1 , и перестановка φ , полученная в результате обхода границы этой грани, записывается так:

$$\varphi = (1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

В общем случае φ будет состоять из r циклов, каждый из которых описывает одну из граней карты M .

Пример 4. В качестве еще одного примера рассмотрим карту M_2 на сфере, показанную на рис. 7.34. Эта карта имеет три вершины x , y и z , три ребра (т. е. шесть полуребер 1, ..., 6), а также две грани f_1 и f_2 . Соответствующие этой карте перестановки σ , α и φ имеют следующий вид:

$$\sigma = (1, 3, 5, 4)(2)(6), \quad \alpha = (1, 2)(3, 4)(5, 6), \quad \varphi = (1, 2, 3)(4, 5, 6).$$

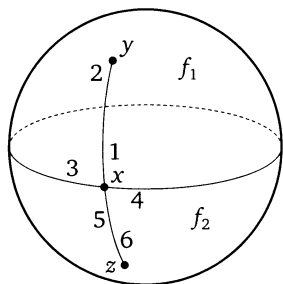
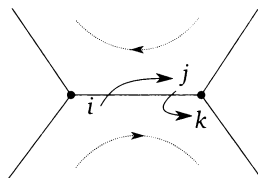
Рис. 7.34. Карта M_2 на сфере

Рис. 7.35

с. Оказывается, перестановки σ , α и φ , описывающие вершины, ребра и грани карты M , связаны между собой. Именно, покажем, что для этих перестановок выполняется равенство

$$\varphi = \sigma \cdot \alpha \quad (7.6)$$

(умножение перестановок происходит справа налево). Рассмотрим для этого рис. 7.35. Мы условились обходить границу грани так, чтобы эта граница оставалась при обходе слева (см. пунктирные линии на рис. 7.35). Как следствие, за полуребром i в перестановке φ должно идти полуребро k . Однако обеспечить переход от i к k можно и по-другому — мы можем вначале перейти из полуребра i в полуребро j вдоль ребра $\{i, j\}$ (этот переход задается перестановкой α), а затем перейти от j к k с помощью перестановки σ . В результате мы и получаем нужное нам равенство (7.6). Так, в примере на рис. 7.33 имеем

$$\sigma \cdot \alpha = (1, 5, 3)(4, 2, 6) \cdot (1, 4)(2, 5)(3, 6) = (1, 2, 3, 4, 5, 6) = \varphi.$$

д. Итак, мы показали, что по карте M с помеченными полуребрами можно построить три перестановки, описывающие вершины, ребра и грани карты M . Оказывается, верно и обратное — мы по любым трем таким перестановкам можем однозначно восстановить как карту M , так и поверхность X , на которой она нарисована.

Для этого прежде всего заметим, что перестановка φ описывает грани многоугольников, полученные в процессе разрезания карты M по ребрам. Как следствие, любому циклу длины k перестановки φ мы можем сопоставить многоугольник с k сторонами. Любая сторона многоугольника отождествляется при этом с некоторым полуребром карты M . Наконец, циклический порядок полуребер в φ задает некоторую ориентацию сторон многоугольника в направлении по часовой стрелке.

Пример 5. В качестве примера рассмотрим карты, показанные на рис. 7.33 и рис. 7.34. Как мы уже упоминали выше, карта, изображенная на рис. 7.33, состоит из единственной грани f_1 . Разрезая карту M_1 вдоль ребер, мы получим шестиугольник, показанный на рис. 7.36(а), стороны которого ориентированы по часовой стрелке. Карта M_2 , показанная на рис. 7.34, состоит

из двух граней f_1 и f_2 . Разрезая M_2 по границам этих граней, мы получаем два треугольника (см. рис. 7.36(b)) с ориентированными по часовой стрелке сторонами.

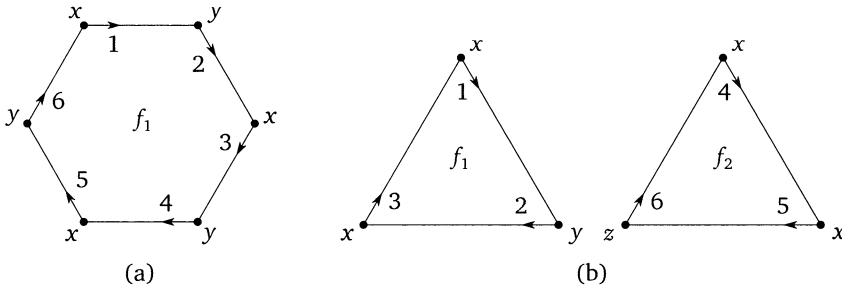


Рис. 7.36. (a) Грань карты M_1 на торе; (b) грани карты M_2 на сфере

Из грани f_1 карты M_1 довольно легко, зная перестановку α , склеить исходную карту M_1 на торе. Действительно, склеивая грани, помеченные полурёбрами 1 и 4, так, чтобы ориентация этих полурёбер была направлена навстречу друг другу, мы получим цилиндр, образующей которого является ребро $\{1, 4\}$. Склеивая между собой с помощью аналогичного подхода полурёбра 3 и 6, а затем — полурёбра 2 и 5, мы восстановим как исходную поверхность — тор, так и карту M_1 на этой поверхности.

Склеивая аналогичным образом стороны 1 и 2, а также стороны 5 и 6 треугольников, изображенных на рис. 7.36(b), мы получаем два конуса с основаниями, отвечающими полурёбрам 3 и 4. Если теперь склеить эти два конуса так, чтобы полурёбра 3 и 4 были направлены навстречу друг другу, мы восстановим как саму сферу, так и карту M_2 на ней.

Итак, анализируя приведенные выше примеры, мы получаем довольно несложные правила склейки многоугольников, описываемых циклами перестановки φ . Для восстановления исходной карты M на многообразии X нам нужно разбить все стороны этих многоугольников на пары, описываемые перестановкой α , а затем склеить эти пары так, чтобы ориентации склеиваемых полурёбер были противоположны друг другу (см. полурёбра i и j на рис. 7.37). Такой способ склейки полностью согласуется с правилами обхода границ граней в карте M на поверхности X — мы обходим границу грани так, чтобы эта граница все время оставалась слева от нас (см. пунктирные линии на рис. 7.37).

Все, что нам осталось, — это убедиться в том, что в результате таких операций циклический порядок полурёбер, исходящих из каждой вершины карты M , совпадает с порядком, задаваемом перестановкой σ . Для этого заметим, что в силу соотношения (7.6) и равенства $\alpha^{-1} = \alpha$

$$\sigma = \varphi \cdot \alpha^{-1} = \varphi \cdot \alpha.$$

Следовательно, если в перестановке σ полурёбро i переходит в полурёбро k , то аналогичный переход должно нам обеспечить и произведение перестано-

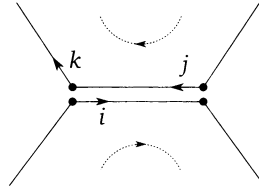


Рис. 7.37

вок φ и α . А это при описанном выше способе склейки сторон многоугольников выполняется автоматически. Действительно, как видно из рис. 7.37, полуребро i вначале под действием перестановки α переходит в полуребро j , а последнее под действием φ переходит в полуребро k . А это, собственно, нам и требовалось.

Заметим также, что по известным перестановкам σ , α и φ мы легко можем восстановить род поверхности X , на которой нарисована описываемая этими перестановками карта. Действительно, количество циклов в этих перестановках совпадает с количеством вершин, ребер и граней карты M . А этой информации нам достаточно для определения рода g поверхности X — на основании формулы Эйлера (7.5) мы имеем

$$g = \frac{2 - n + m - r}{2}.$$

е. Описанный выше способ склейки карт на поверхностях из многоугольников используется также и для комбинаторного описания самих поверхностей. Мы уже рассмотрели характерный пример такого рода операции — склейку однофейсовой карты M_1 на торе (рис. 7.33) из шестиугольника (рис. 7.38). В качестве еще одного, чуть более простого примера рассмотрим квадрат, показанный на рис. 7.38(a). Склеивая верхнюю и нижнюю стороны этого квадрата, мы получаем цилиндр (рис. 7.38(b)). Если теперь в квадрате склеить и оставшуюся пару противоположных сторон (левая и правая стороны квадрата на рисунке), то мы в результате получим тор (рис. 7.38(c)).

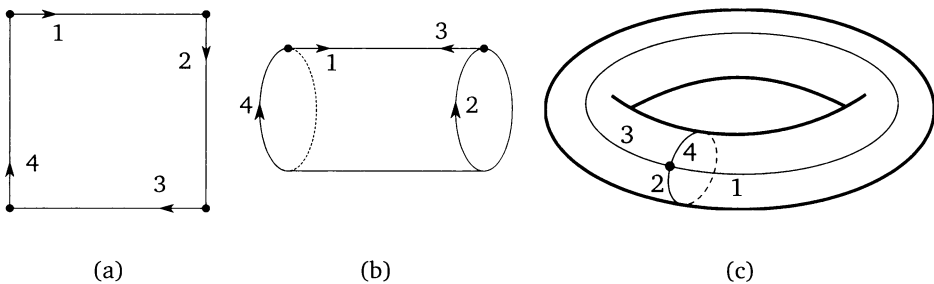


Рис. 7.38

Заметим теперь, что полуребра квадрата мы могли бы склеивать и по-другому. Именно, склеивая между собой стороны, помеченные полуребрами 1 и 2, а затем стороны, помеченные полуребрами 3 и 4, мы получим карту М с одной гранью, показанную на рис. 7.39(a).

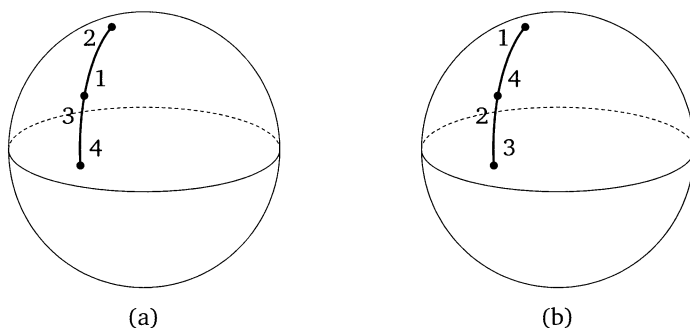


Рис. 7.39

Наконец, последний оставшийся вариант — это склеить полуребра 1 и 4, а затем соединить между собой полуребра 2 и 3. В результате мы получим карту на сфере, показанную на рис. 7.39(b).

Подводя итоги, мы получаем, что квадрат со сторонами, помеченными полуребрами 1, ..., 4, ориентация которых совпадает с направлением обхода по часовой стрелке, можно тремя способами склеить в поверхность X. При этом склейке, отвечающей перестановке

$$\alpha^{(1)} = (1, 3)(2, 4),$$

соответствует карта на торе, а склейкам, отвечающим перестановкам

$$\alpha^{(2)} = (1, 2)(3, 4), \quad \alpha^{(3)} = (1, 4)(2, 3),$$

соответствуют карты на сфере.

Аналогичная ситуация имеет место и для произвольного $2m$ -угольника, $m = 2, 3, \dots$ Размечая стороны этого многоугольника числами от 1 до $2m$ и ориентируя их в направлении по часовой стрелке, мы получаем грань будущей карты М на поверхности, отвечающую перестановке

$$\varphi = (1, 2, \dots, 2m).$$

Теперь мы можем $(2m - 1)!!$ количеством способов разбить числа $1, 2, \dots, 2m$ на пары, получив $(2m - 1)!!$ перестановок $\alpha^{(i)}$, описывающих ребра карт на поверхностях, образующихся в процессе склейки соответствующих сторон многоугольника. Род получающихся поверхностей мы можем получить, вычислив с помощью формулы (7.6) перестановку σ , подсчитав количество n циклов в ней и воспользовавшись формулой Эйлера (7.5):

$$g = \frac{1 - n + m}{2}.$$

Харер и Цагир в 1986 году показали, что количество поверхностей заданного рода g , получающихся в процессе склейки правильного $2m$ -угольника, может

быть определено в процессе разложения производящей функции $w(z, t)$ вида

$$w(z, t) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^t = 1 + 2zT_0(t) + 2z^2 \frac{T_1(t)}{1!!} + 2z^3 \frac{T_2(t)}{3!!} + \dots = 1 + 2z \sum_{m=0}^{\infty} \frac{T_m(t)}{(2m-1)!!} z^m.$$

В частности,

$$T_0(t) = t, \quad T_1(t) = t^2, \quad T_2(t) = 2t^3 + 1, \quad T_3(t) = 5t^4 + 10t^2.$$

Отсюда, например, следует, что в случае склейки сторон правильного шестиугольника из $(2 \cdot 3 - 1)!! = 15$ возможных способов склейки пять дадут нам сферу, а десять — тор. Доказательство формулы Харера—Цагира можно найти в [39].

Упражнения

1 (1,5 балла). Граф, который можно правильно вложить в поверхность рода g и невозможно вложить в поверхность меньшего рода, называется графом рода g . Докажите, что род произвольного простого связного графа G удовлетворяет неравенству

$$g \geq 1 + \frac{m}{6} - \frac{n}{2}, \quad (7.7)$$

а род простого связного графа, свободного от треугольников, — неравенству

$$g \geq 1 + \frac{m}{4} - \frac{n}{2}. \quad (7.8)$$

2 (1 балл). Докажите, что род полного графа K_n удовлетворяет неравенству

$$g(K_n) \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}. \quad (7.9)$$

3 (1 балл). Докажите, что род полного двудольного графа $K_{n,m}$ удовлетворяет неравенству

$$g(K_{n,m}) \geq \frac{(m-2)(n-2)}{4}.$$

4 (1 балл). Докажите, что род k -мерного куба Q_k удовлетворяет неравенству

$$g(Q_k) \geq 1 + (k-4) \cdot 2^{k-3}.$$

5 (1 балл). Используя представление тора в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами, постройте правильное вложение графов K_5 и $K_{3,3}$.

6 (1,5 балла). Используя представление тора в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами, постройте правильное вложение графа Петерсена в тор, доказав тем самым, что род графа Петерсена равен 1.

7 (1,5 балла). Докажите формулу Эйлера (7.5) для карт на поверхности рода g .

Дополнительные упражнения

8 (1,5 балла). Докажите, что в случае замкнутой неориентируемой поверхности N_k , представляющей собой сферу с k дырками, заклеенными k лентами Мёбиуса, формула Эйлера принимает вид $n - m + r = 2 - k$.

9 (1,5 балла). С помощью формулы Эйлера (7.5) докажите, что граф K_7 можно правильно вложить в тор, а граф K_8 уже нельзя. Нарисуйте правильное вложение K_7 в тор, используя представление тора в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами.

10 (1,5 балла). Проективную плоскость можно представлять в виде диска, у которого отождествляется любая пара диаметрально противоположных точек, лежащих на ограничивающей диск окружности. Постройте правильное вложение графа Петерсена в проективную плоскость, используя такое представление проективной плоскости.

11 (1,5 балла). Постройте изоморфизм, позволяющий каждому планарному графу G поставить в соответствие некоторую квадрангуляцию $Q_{\tilde{G}}$.

12 (1,5 балла). Очевидно, что двойственный к построенной в предыдущем упражнении квадрангуляции $Q_{\tilde{G}}$ граф представляет собой четырехвалентный граф Q_G^* . Можно ли его построить непосредственно из исходного графа G ?

13 (1,5 балла). Для сферических карт, показанных на рис. 7.40, а также для карты на кренделе, изображенной на рис. 7.41, запишите перестановки σ , α и φ .

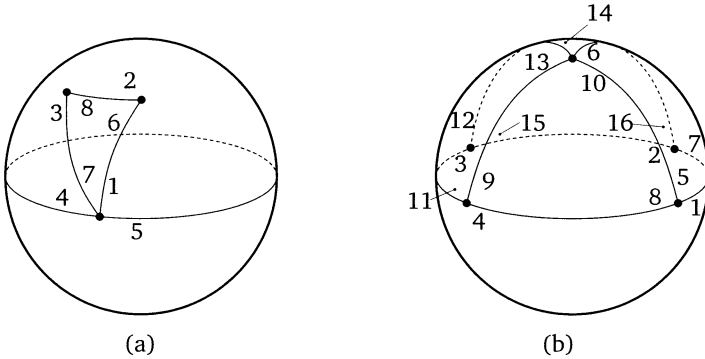


Рис. 7.40

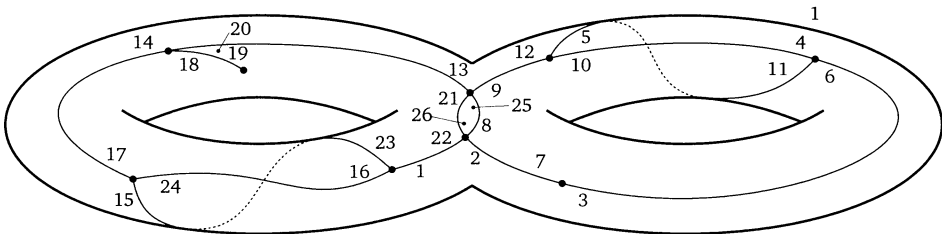


Рис. 7.41. Карта на кренделе

14 (1 балл). Комбинаторная карта M задана перестановками

$$\sigma = (1, 2, 3, 16)(4, 5, 17, 12, 13)(14, 15)(10, 11, 18)(6, 7, 9)(8),$$

$$\alpha = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12)(13, 14)(15, 16)(17, 18).$$

Докажите, что род этой карты равен нулю. Постройте плоскую карту, отвечающую данным перестановкам.

15 (1,5 балла). Хордовой диаграммой называется набор из $2n$ точек, расположенных на окружности и попарно соединенных между собой отрезками (хордами) (рис. 7.42). Докажите, что существует биекция между всеми плоскими корневыми деревьями, построенными на n ребрах, и хордовыми диаграммами с непересекающимися хордами. Получите рекуррентное соотношение для чисел C_n , описывающих количество таких хордовых диаграмм.

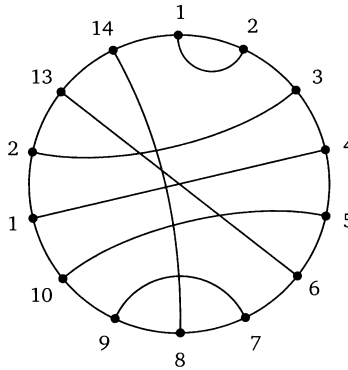


Рис. 7.42. Хордовая диаграмма

Решения упражнений

1. В правильном вложении простого связного графа G степень любой грани не может быть меньше трех. Поэтому из последнего равенства следует, что $2m \geq 3r$. Подставляя это неравенство в формулу Эйлера (7.5), мы получаем, что

$$g \geq 1 + \frac{m-3n}{6}.$$

В случае графа, свободного от треугольников, $2m \geq 4r$, и поэтому

$$g \geq 1 + \frac{m-2n}{4}.$$

2. В правильном вложении графа K_n в поверхность рода g любая грань должна иметь степень 3. Поэтому, подставляя в формулу (7.7) вместо m выражение $\binom{n}{2}$, получаем нужное неравенство.

3. Так как в двудольном графе циклы длины три отсутствуют, то в правильном вложении $K_{n,m}$ в поверхность рода g степень любой грани должна быть больше или равна четырем. Подставляя тогда в формулу (7.8) вместо

числа вершин и ребер выражения $n + t$ и nt , получаем требуемое неравенство.

4. Заметим прежде всего, что в кубе Q_k треугольники отсутствуют. Количество вершин в графе Q_k равно 2^k , а количество ребер равно $k \cdot 2^{k-1}$. Подставляя эти выражения в формулу (7.8), мы и доказываем нужное неравенство.

5. Правильные вложения графов K_5 и $K_{3,3}$ показаны на рис. 7.43.

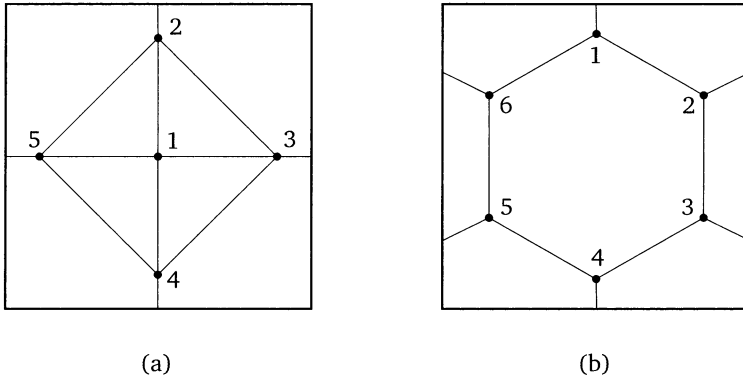


Рис. 7.43

6. Правильное вложение графа Петерсена (рис. 7.44(a)) в тор показано на рис. 7.44(b).

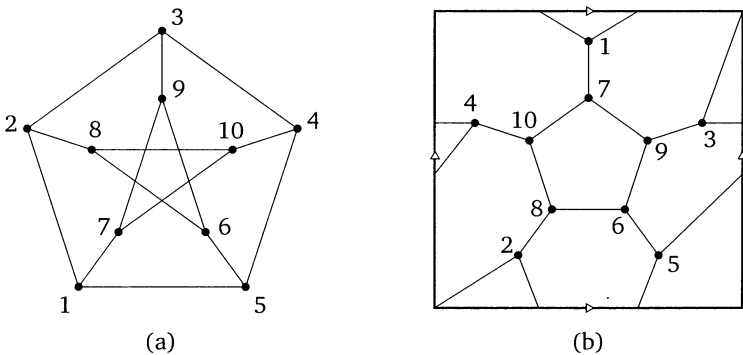


Рис. 7.44

7. Будем доказывать это утверждение индукцией по роду g . В случае $g = 0$ формула переходит в классическую формулу Эйлера для плоских графов. Теперь предположим, что формула Эйлера верной для $g - 1$, $g \geq 1$, и покажем, что она остается верна и для всех графов на поверхности g . Для этого выберем произвольную ручку поверхности X и проведем в ней петлю, т. е. меридиан, разрезающий эту ручку, так, чтобы он пересекал карту \mathfrak{M} только лишь

в конечном числе точек, расположенных во внутренних точках ребер карты \mathfrak{M} . В случае, если меридиан пересечет одно и то же ребро несколько раз, подразобьем его, добавив на ребро вершины так, чтобы меридиан пересекал любое ребро \mathfrak{M} не более чем один раз. Заметим, что выражение $n - m + r$, стоящее в левой части формулы (7.5), от этих операций не изменится.

Затем растянем меридиан, превратив его в ленту конечной ширины на поверхности X . Подразобьем каждое ребро карты \mathfrak{M} , пересекающее ленту, добавив по вершине на каждом из двух краев этой ленты. Левая часть формулы (7.5) от этого также не изменится. Наконец, добавим к карте \mathfrak{M} ребра, соединив между собой вершины, расположенные на одном крае ленты, а также вершины, расположенные на другом крае ленты. Так как добавление этих ребер увеличит и количество граней карты \mathfrak{M} на ту же самую величину, то число $n - m + r$ вновь не изменится.

Заметим, что ребра и грани, расположенные внутри ленты, чередуются между собой, причем количество ребер и количество граней там совпадает. Следовательно, удаление ребер, расположенных внутри, число $n - m + r$ не поменяет. Наконец, разрезая поверхность X вдоль меридиана и заклеивая получившиеся дырки дисками (т. е. добавляя к карте две дополнительные грани), мы получим поверхность X' , род которой окажется на единицу меньше рода g поверхности X . Для X' формула (7.5) верна. Как следствие, эта формула является верной и для исходной поверхности X .

§ 4. Критерии планарности графов. Теорема Куратовского

1. Как мы убедились в первом параграфе, не все графы можно правильно вложить в плоскость. В этой связи естественным образом возникает задача нахождения тех или иных критериев планарности графа G .

а. Заметим прежде всего, что при проверке любого несвязного графа на планарность достаточно проверить на планарность каждую из его связных компонент. Поэтому далее мы можем считать, что граф G является связным. Следующая простая теорема позволяет свести проверку связного графа на планарность к проверке на планарность каждого отдельного блока такого графа.

Теорема 1. *Односвязный граф G является планарным тогда и только тогда, когда каждый из его блоков является планарным.*

Доказательство. Действительно, в одну сторону утверждение теоремы очевидно — подграф любого планарного графа планарен. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда все блоки некоторого графа G планарны, и доказать, что и G в этом случае также является планарным графом. Проведем доказательство данного факта по индукции.

В случае, когда граф содержит единственный планарный блок, он, очевидно, с ним совпадает и является планарным. Теперь будем считать, что утверждение доказано для любых графов, состоящих из $k - 1$ блоков, $k > 1$, и

докажем справедливость данного утверждения для графа, который содержит ровно k блоков. Пусть B — произвольный концевой блок графа G . Удалим все вершины этого блока за исключением точки сочленения x — вершины, связывающей B с остальной частью графа G . Граф $G - B$ содержит $k - 1$ блок и потому является планарным. Следовательно, существует плоский граф $\tilde{G} - \tilde{B}$, в котором точка \tilde{x} , изображающая вершину $x \in V(G)$, принадлежит внешней грани плоского графа. При таком выборе \tilde{x} мы всегда во внешнюю грань данного плоского графа можем правильно вложить и блок B . В результате мы получим правильное вложение исходного графа G в плоскость. \square

б. С учетом доказанной выше теоремы нам достаточно найти критерии планарности двусвязных графов. Исторически первым и наиболее известным результатом такого рода является критерий, полученный польским математиком Казимиром Куратовским в 1930 году. Для того, чтобы сформулировать данный критерий, нам понадобится ряд вспомогательных определений.

Определение 2. Подразбиением ребра $e = \{x, y\}$ графа G называется процесс замены ребра e на путь вида $\{x, z, y\}$, в котором z — вершина степени два. Неформально подразбиение ребра означает, что мы размещаем на ребре e дополнительную вершину z .

Определение 3. Подразбиением графа G называется граф G' , полученный из исходного графа последовательным подразбиением его ребер.

На рис. 7.45 показан пример графа, являющегося подразбиением графа $K_{3,3}$.

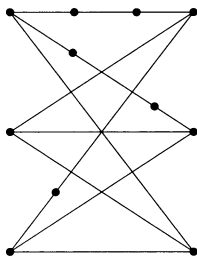


Рис. 7.45

с. Понятно, что замена любого ребра в графе G на простой путь никак не влияет на возможность вложения данного графа в плоскость. Поэтому достаточно очевидным является следующее утверждение.

Утверждение 4. Граф G является планарным тогда и только тогда, когда любое его подразбиение также является планарным графом.

Как следствие, никакой планарный граф не может содержать подграф, представляющий собой подразбиение графа K_5 или графа $K_{3,3}$. Польский математик Казимир Куратовский в 1930 году доказал замечательный факт — оказывается, это условие является не только необходимым, но и достаточным условием непланарности графа G .

Теорема 5 (Куратовский, 1930). *Граф G не является планарным тогда и только тогда, когда он содержит подграф, представляющий собой подразбиение K_5 или $K_{3,3}$.*

Определение 6. Для заданного графа G *подграфом Куратовского* называется подграф графа G , представляющий собой подразбиение K_5 или $K_{3,3}$.

Таким образом, теорема Куратовского утверждает, что любой непланарный подграф содержит подграф Куратовского.

2. Первое относительно простое доказательство теоремы Куратовского появилось в работе Дирака и Шустера 1954 года. Это доказательство вошло в некоторые старые учебники по теории графов (см., например, [2], [12]). Более современные учебники по теории графов, такие как [11], [1], [3], а также более специальные книги [24], [23] излагают доказательство теоремы Куратовского, полученное Томассеном (Thomassen) в 1980 году. Как отмечают авторы книги [23], это доказательство не является в настоящее время ни самым простым, ни самым коротким. Так, например, имеется красивое и короткое доказательство теоремы Куратовского, полученное Юрием Макарычевым [40, 41]. Однако доказательство Томассена позволяет получить многие другие полезные результаты теории планарных графов. В частности, это доказательство включает в себя и крайне полезный результат Уильяма Татта, касающийся правильного вложения планарного трехсвязного графа в плоскость и утверждающий, что для такого графа существует правильное его вложение в плоскость, при котором все его грани являются выпуклыми многоугольниками. Поэтому здесь мы будем придерживаться идеи доказательства теоремы Куратовского, изложенных Томассеном. И начнем мы с доказательства данного критерия для трехсвязных графов.

а. Доказательство Томассена базируется на следующем результате, связанном с описанием трехсвязных графов.

Теорема 7 (Томассен, 1981). *Пусть G — трехсвязный граф, построенный на пяти или более вершинах. Тогда в G имеется такое ребро $e \in E(G)$, что граф G/e , получаемый при стягивании этого ребра, остается трехсвязным.*

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 8. *Пусть G — трехсвязный граф, построенный на пяти или более вершинах, и пусть $e = \{x, y\}$ — ребро, при стягивании которого граф G/e перестает быть трехсвязным. Тогда найдется такая вершина $z \in V(G)$, что множество $\{x, y, z\}$ представляет собой вершинно разделяющее множество графа G .*

Доказательство. Предположим, что условия леммы выполнены, т. е. нашлось ребро e , в результате стягивания которого граф G/e становится двухсвязным. Как следствие, в таком графе обязательно существует вершинно разделяющее множество $\{z, w\}$, состоящее из двух вершин. Хотя бы одна из

этих двух вершин (для определенности вершина z) обязана быть отличной от вершины, полученной при стягивании ребра e .

Рассмотрим теперь граф $F := G - z$. Так как граф G трехсвязный, то F обязан как минимум остаться двухсвязным. Однако уже граф F/e имеет точку сочленения, а именно вершину w . Это возможно лишь в случае, когда вершина w представляет собой результат стягивания ребра e в графе G/e . Это, в свою очередь, означает, что $\{x, y\}$ является вершинно разделяющим множеством в графе F , а $\{x, y, z\}$ — вершинно разделяющим множеством в графе G . \square

б. Приступим теперь к доказательству теоремы Томассена. Пусть эта теорема неверна, т. е. для любого ребра $e \in E(G)$ граф G/e не является трехсвязным. Тогда, согласно лемме, для любого $e = \{x, y\}$ найдется такая вершина $z \in V(G)$, что множество $\{x, y, z\} \in V(G)$ представляет собой вершинно разделяющее множество графа G . Выберем ребро e и вершину z в графе G так, чтобы одна из компонент графа $G - x - y - z$ — компонента F — содержала максимально возможное количество вершин (рис. 7.46). Добавляя к F вершины x и y , мы получим подграф H графа G (см. рис. 7.46). Заметим, что подграф H обязан быть двухсвязным. Действительно, если бы это было не так, т. е. если бы в H нашлась точка сочленения w , то вершины z и w представляли бы собой вершинно разделяющее множество в исходном графе G , что невозможно.

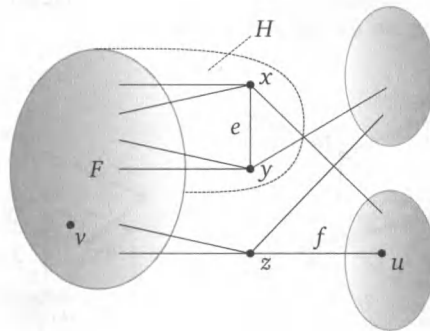


Рис. 7.46

Пусть теперь u — вершина, смежная в G с z и лежащая в компоненте связности графа $G - x - y - z$, отличной от F (см. рис. 7.46). Выбирая в качестве ребра $f = \{z, u\}$, мы на основании леммы получаем, что в графе G найдется такая вершина v , что $\{z, u, v\}$ является вершинно разделяющим множеством в G . При этом в силу двухсвязности подграфа H удаление вершины v оставляет H связным вне зависимости от того, попадает v в H или нет. Но так как вершины z и u подграфу H изначально не принадлежат, то H лежит в некоторой компоненте связности графа $G - z - u - v$. Это же, в свою очередь, противоречит выбору F . Действительно, даже если вершина v попала в H , то после удаления v в подграфе $H - v$ остается на одну вершину больше, чем в F . Полученное противоречие доказывает теорему. \square

с. Следующая лемма позволяет не только получить доказательство теоремы Куратовского для случая трехсвязных графов, но и доказать теорему Татта о выпуклом вложении трехсвязного планарного графа.

Лемма 9. *Любой простой трехсвязный граф G , не содержащий подграфов Куратовского, допускает выпуклое вложение в плоскость.*

Доказательство будем проводить индукцией по количеству $n = |V(G)| \geq 4$ вершин графа G . В случае $n = 4$ и $n = 5$ утверждение леммы легко проверяется непосредственно, поэтому мы далее будем считать, что $n \geq 6$.

По теореме Томассена G содержит такое ребро e , что граф $H := G/e$ остается трехсвязным. Если бы граф H содержал некоторые подразделения K_5 или $K_{3,3}$, то тогда такие подразделения содержал бы и исходный граф G , что невозможно. Следовательно, по индукционному предположению граф H допускает выпуклое вложение \dot{H} в плоскость. Осталось доказать, что тогда такое же вложение допускает и исходный граф G .

Пусть $z \in H$ — вершина, полученная в результате стягивания ребра e (рис. 7.47(a)). Согласно следствию 9 все соседи вершины z лежат на некотором общем для них простом цикле C , представляющем собой границу грани f плоского графа $\dot{H} - z$. На том же цикле тогда должны лежать и все соседи вершин x и y в исходном графе G (рис. 7.47(b)). Кроме того, так как граф G трехсвязный, то и у вершины x , и у вершины y имеются по меньшей мере по два соседа, лежащие на цикле.

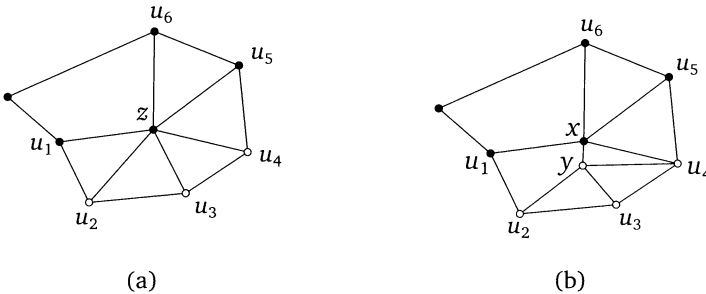


Рис. 7.47

Пронумеруем в циклическом порядке все k вершин u_1, \dots, u_k , соседних с вершиной z в графе H (рис. 7.47(a)). Часть из этих вершин — вершины u_{i_1}, \dots, u_{i_l} — являются соседними с x вершинами в исходном графе G , а часть — соседними с вершиной y (вершины цикла, смежные с y в исходном графе G , помечены белым цветом на рис. 7.47 и последующих рисунках). Предположим вначале, что в наборе вершин u_1, \dots, u_k все вершины, соседние с y , находятся между какими-то двумя соседними с x вершинами $v := u_{i_j}$ и $w := u_{i_{j+1}}$ (крайние вершины v и w могут быть при этом и общими соседями вершин x и y , см. рис. 7.47(b)). В этом случае мы всегда сможем получить выпуклое вложение графа G в плоскость, если разместим x на месте вершины z ,

а вершину u — в некоторой малой окрестности вершины x , руководствуясь следующими правилами:

- если угол между ребрами $\{v, x\}$ и $\{w, x\}$, ограничивающими сектор, в котором лежат соседние с u вершины, оказался меньше 180° (см. рис. 7.48), то вершину u нужно разместить внутри угла, образованного этими ребрами;
- если же этот угол оказался больше 180° (см. рис. 7.49), то u нужно поместить внутри угла, образованного продолжениями этих ребер.

Покажем теперь, что никакое другое расположение соседей вершин x и y в рассматриваемом графе невозможно. Действительно, если бы x и y имели какие-то три общие друг с другом соседние вершины u, v и w (см. рис. 7.50), то тогда ребро $\{x, y\}$, а также ребра $\{x, u\}, \{x, v\}, \{x, w\}, \{y, u\}, \{y, v\}, \{y, w\}$ вместе с простыми путями, соединяющими между собой вершины u, v и w , образовывали бы подразбиение графа K_5 , что невозможно. Если же в цикле

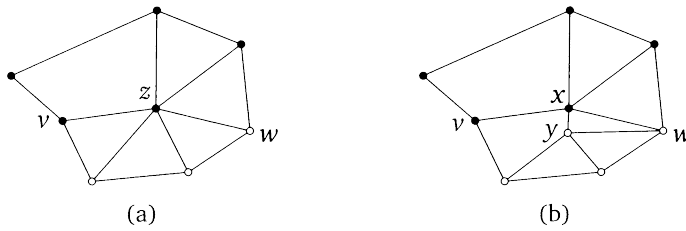


Рис. 7.48

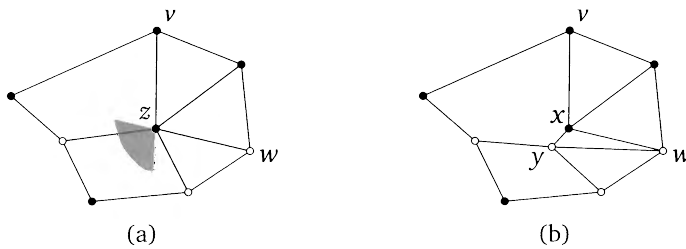


Рис. 7.49

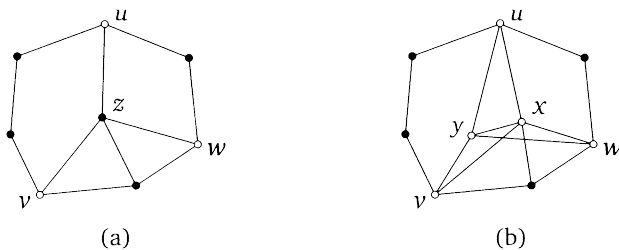


Рис. 7.50

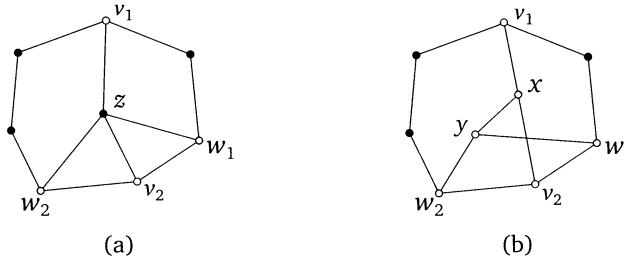


Рис. 7.51

имелись бы такие вершины v_1, v_2 и w_1, w_2 , что v_1 и v_2 были бы соседями вершины x , а w_1 и w_2 — соседями вершины y (см. рис. 7.51), то ребра $\{x, y\}, \{x, v_1\}, \{x, v_2\}, \{y, w_1\}, \{y, w_2\}$ вместе с простыми путями, соединяющими вершины v_1, w_1, v_2, w_2 , образовывали бы подразбиение графа $K_{3,3}$, что также невозможно. \square

Из доказанной леммы с очевидностью следует теорема Татта о выпуклом вложении трехсвязного планарного графа, сформулированная на с. 368.

3. Итак, для полного доказательства теоремы Куратовского нам осталось разобраться со случаем двусвязных графов.

а. В исходном доказательстве Томассена [24] использовалась следующая идея для случая $\kappa(G) = 2$. Возьмем граф G_0 , не содержащий подграфов Куратовского, и будем добавлять к нему ребра до тех пор, пока не получим максимальный по количеству ребер граф G , удовлетворяющий этому свойству. У такого графа добавление любого ребра, соединяющего изначально несмежные вершины x и y , обязано приводить к появлению подграфов Куратовского. Если нам удастся показать, что такой граф G обязательно является трехсвязным, то тем самым мы докажем, что G является планарным. Удаление в нем ребер, добавленных изначально к G_0 , планарности не нарушит. Следовательно, любой граф G_0 , не содержащий подграфов Куратовского, является планарным, и теорема Куратовского доказана.

Одним из достоинств описанного выше подхода является тот факт, что из него сразу следует теорема Фари. Действительно, граф G допускает выпуклое вложение в плоскость. В процессе удаления ребер, т. е. в процессе перехода от графа G к исходному графу G_0 , выпуклость граней может нарушиться, тогда как свойство прямолинейности всех ребер останется неизменным.

Недостатком же такого подхода является достаточно долгое доказательство трехсвязности графа G . Поэтому вместо подхода Томассена для доказательства теоремы Куратовского для графов, не являющихся трехсвязными, мы используем несколько другой подход [1], опирающийся на идею минимального непланарного графа.

Определение 10. Минимальным непланарным графом называется непланарный граф G , любой подграф $H \neq G$ которого является планарным графом.

Доказав, что любой минимальный непланарный граф, в котором отсутствуют подграфы Куратовского, является трехсвязным, мы получим противоречие с доказанной в предыдущем пункте леммой 9 и тем самым полностью докажем теорему Куратовского. Действительно, мы докажем, что любой минимальный непланарный граф содержит подграф Куратовского. Но тогда и произвольный непланарный подграф тем более обязан содержать подграф Куратовского, а ровно это и утверждается в теореме Куратовского.

б. Итак, предположим, что у нас имеется минимальный непланарный граф G . Заметим прежде всего, что такой граф обязан быть по меньшей мере двусвязным. Действительно, если он несвязен или состоит из нескольких блоков, то каждый из этих блоков/связных компонент является планарным подграфом, а это невозможно — мы уже знаем, что если все блоки/связные компоненты графа G планарны, то и сам он является планарным.

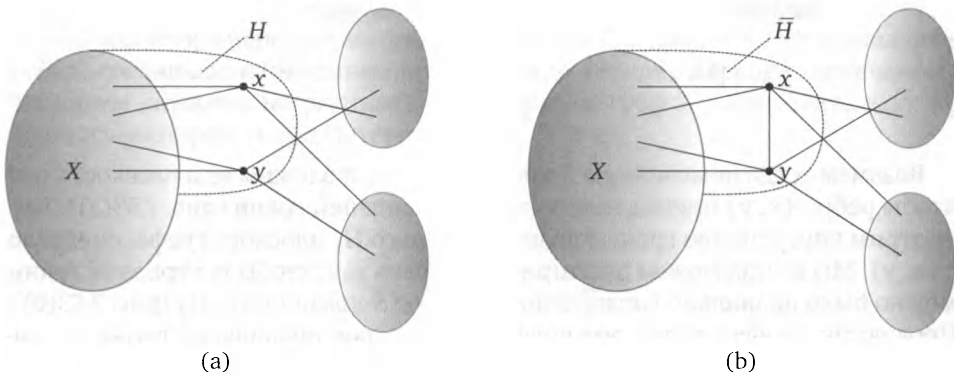


Рис. 7.52

Предположим теперь, что G не является трехсвязным, т. е. в нем существует вершинное разделяющее множество $S := \{x, y\}$, удаление которого приводит к появлению двух или более компонент связности графа $G - S$. Пусть X — множество вершин одной из компонент связности графа $G - S$ (см. рис. 7.52(a)). Добавив к X подмножество S вершин вместе со всеми ребрами, соединяющими x и y с вершинами из множества X в исходном графе G , мы получим так называемую S -компоненту H графа G (рис. 7.52(a)). Если теперь к этой S -компоненте добавить ребро $\{x, y\}$ (вне зависимости от того, имелось ли такое ребро в исходном графе G или нет), то мы получим так называемую помеченную S -компоненту \tilde{H} (рис. 7.52(b)).

Лемма 11. Пусть $S = \{x, y\}$ — двухвершинный разрез в непланарном графе G . Тогда хотя бы для одной S -компоненты H_i графа G соответствующая ей помеченная S -компонента \tilde{H}_i представляет собой непланарный граф.

Доказательство. Предположим обратное, а именно предположим, что все помеченные S -компоненты графа G являются планарными. Заметим, что планарный граф всегда можно правильно вложить в плоскость так, чтобы вы-

бранное ребро $\{x, y\}$ лежало на границе внешней грани соответствующего плоского графа \bar{G} . Действительно, пусть в результате правильного вложения графа G в плоскость ребро $\{x, y\}$ оказалось на границе пары внутренних граней. Тогда, как показано в первом параграфе данной главы, мы всегда можем перестроить граф так, чтобы одна из этих граней стала внешней.

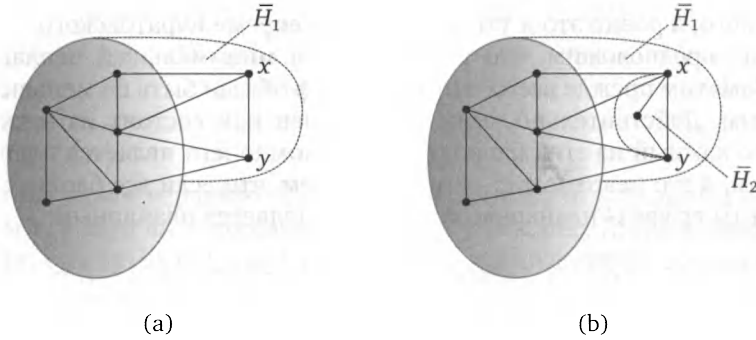


Рис. 7.53

Возьмем тогда помеченную S -компоненту \bar{H}_1 и вложим ее в плоскость так, чтобы ребро $\{x, y\}$ принадлежало границе внешней грани (рис. 7.53(a)). Рассмотрим внутреннюю грань соответствующего \bar{H}_1 плоского графа, смежную с $\{x, y\}$. Мы всегда можем расширить эту грань так, чтобы внутри этой грани можно было правильно вложить помеченную S -компоненту H_2 (рис. 7.53(b)). Продолжая процесс далее, мы получим некоторое правильное вложение либо графа G , либо графа $G + \{x, y\}$ (в зависимости от того, присутствовало ли изначально в графе G ребро $\{x, y\}$) в плоскость, что невозможно. \square

с. Теперь мы наконец можем доказать нужное нам утверждение.

Лемма 12. Пусть G — минимальный непланарный граф, в котором отсутствуют подграфы Куратовского. Тогда граф G обязан быть трехсвязным.

Доказательство. Ранее мы заметили, что минимальный непланарный граф как минимум двусвязен. Предположим, что он не является трехсвязным. Обозначим через $S = \{x, y\}$ вершинное разделяющее множество в таком графе. Все его помеченные S -компоненты \bar{H}_i имеют меньше ребер, чем сам граф G . Следовательно, каждая из этих помеченных компонент либо представляет собой планарный граф, либо является непланарным графом, в котором присутствует подграф Куратовского. Заметим теперь, что все помеченные S -компоненты планарными быть не могут — это противоречит доказанной выше лемме. Значит, найдется хотя бы одна помеченная S -компонента H , не являющаяся планарным графом, в которой присутствует подграф Куратовского. Покажем, однако, что это невозможно.

Действительно, у нас имеются два варианта. Первому варианту отвечает случай, когда вершины x и y соединены в G ребром. Но это означает, что G содержит помеченную компоненту H в качестве своего подграфа, т. е. содер-

жит подграф Куратовского, что противоречит выбору G . Во втором варианте вершины x и y в G ребром не соединены. Выберем тогда в G произвольную S -компоненту H' , отличную от H . В этой компоненте обязан существовать простой путь P , соединяющий вершины x и y в H' . Замена в K ребра $\{x, y\}$ на путь P приводит к появлению в G подграфа Куратовского, что опять-таки невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму, а вместе с ней и теорему Куратовского. \square

4. Теорема Куратовского не всегда удобна для практической проверки планарности того или иного графа. Немецкий математик Вагнер в 1937 году предложил еще одну, несколько более удобную характеристику планарных графов, основанную на понятии минора графа G .

Определение 13. Граф H называется *минором* графа G , если H можно получить из G удалением и/или стягиванием ребер графа G .

В качестве примера рассмотрим граф Петерсена (рис. 7.54). Стягивая пять ребер, соединяющих внешние и внутренние вершины (ребра, отмеченные жирными линиями на рисунке), мы получаем граф K_5 . Следовательно, K_5 является минором графа Петерсена.

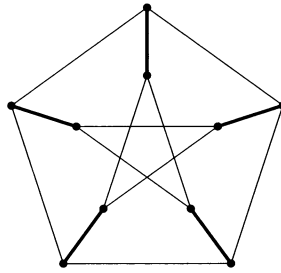


Рис. 7.54. Граф Петерсена

Достаточно очевидно, что удаление или стягивание ребра в планарном графе не приводит к потере планарности. Иными словами, любой минор планарного графа планарен. Так как графы K_5 и $K_{3,3}$ планарными не являются, то любой граф, имеющий в качестве хотя бы одного из своих миноров графы K_5 и $K_{3,3}$, планарным не является. Вагнер доказал, что верно и обратное утверждение.

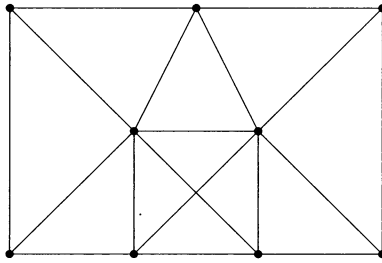
Теорема 14 (Вагнер, 1937). *Граф является планарным тогда и только тогда, когда графы K_5 и $K_{3,3}$ не являются его минорами.*

Доказательство. Так как миноры планарного графа обязательно являются планарными, то любой граф, содержащий K_5 или $K_{3,3}$ в качестве своих миноров, обязательно является непланарным.

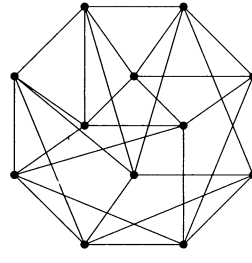
Теперь предположим, что граф G является непланарным. По теореме Куратовского G содержит подграф H , представляющий собой подразбиение K_5 или $K_{3,3}$. Стягивая в нем ребра, мы в итоге получим K_5 или $K_{3,3}$ в качестве миноров графа G . \square

Упражнения

1 (1 балл). Докажите с помощью теоремы Куратовского непланарность графа G , изображенного на рис. 7.55(a).



(a)



(b)

Рис. 7.55

2 (1 балл). Найдите выпуклое вложение в плоскость графа G , показанного на рис. 7.55(b).

3 (1,5 балла). Для графа G , изображенного на рис. 7.56, найдите выпуклое вложение G в плоскость или докажите его непланарность как с помощью формулы Эйлера, так и с помощью теоремы Куратовского.

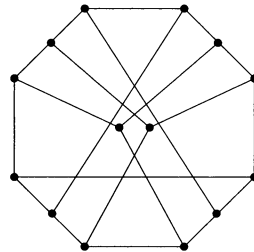


Рис. 7.56

4 (1,5 балла). Граф G называется *внешнепланарным* (outerplanar graph), если для него существует такое вложение \tilde{G} в плоскость, что все его вершины лежат на границе его внешней грани. Докажите, что графы K_4 и $K_{2,3}$ не являются внешнепланарными.

Дополнительные упражнения

5 (1,5 балла). Для графа G , изображенного на рис. 7.57(a), найдите выпуклое вложение G в плоскость или докажите его непланарность как с помощью формулы Эйлера, так и с помощью теоремы Куратовского.

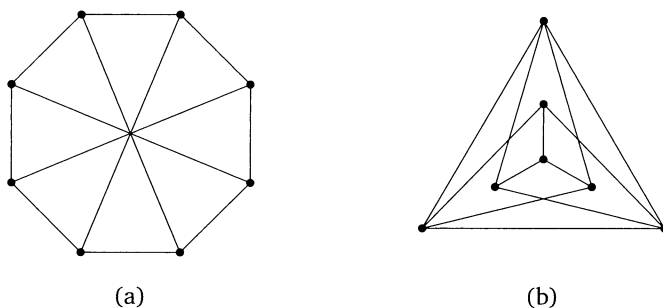


Рис. 7.57

6 (1,5 балла). Для графа G , изображенного на рис. 7.57(b), найдите выпуклое вложение G в плоскость или докажите его непланарность как с помощью формулы Эйлера, так и с помощью теоремы Куратовского.

7 (1,5 балла). Докажите, что граф G является внешнепланарным тогда и только тогда, когда он не содержит графы K_4 или $K_{2,3}$ в качестве своих миноров.

8 (1,5 балла). Покажите, что в любом простом внешнепланарном графе обязательно существует вершина, степень которой меньше или равна двум, причем в случае графа, построенного на $n > 3$ вершинах, имеется как минимум две несмежные вершины, степени которых не превосходят двух.

9 (1,5 балла). Какое максимально возможное количество ребер может иметь внешнепланарный граф? Когда достигается этот максимум?

Решение упражнений

1. Решение показано на рис. 7.58(b) — нам достаточно удалить четыре крайних внутренних ребра, для того чтобы получить подразбиение графа K_5 (вершины этого графа помечены на рисунке белым цветом).

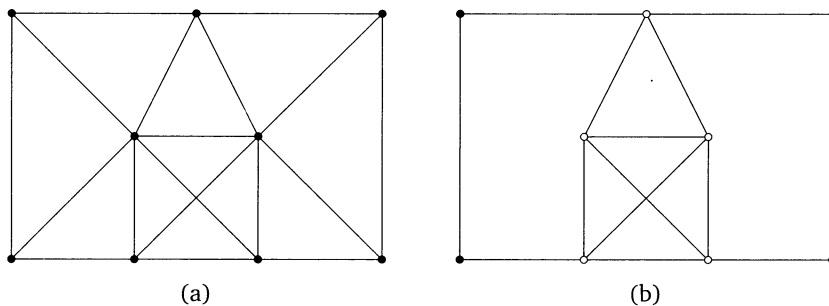


Рис. 7.58

2. Изображенный на рис. 7.59(a) граф является 5-регулярным графом, построенным на $n = 12$ вершинах и $m = 30$ ребрах. По формуле Эйлера у него

должно быть $r = 20$ граней. Кроме того, если r_i , $i = 3, 4, \dots$, есть количество граней степени i , то из формулы (7.1) должна следовать система уравнений вида

$$\begin{aligned} 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + \dots &= 2m = 60; \\ r_3 + r_4 + r_5 + \dots &= r = 20. \end{aligned}$$

Такая система в данном случае допускает единственное решение $r_3 = 20$, $r_4 = r_5 = \dots = 0$. Следовательно, это должен быть максимальный планарный граф, построенный на 12 вершинах. Его правильное вложение в плоскость показано на рис. 7.59(b).

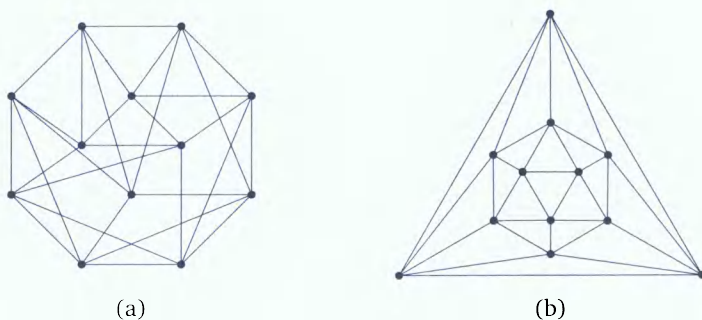


Рис. 7.59

Заметим в заключение, что граф G является (d, s) -регулярным, т. е. графом, в котором любая вершина имеет степень d , а любая грань — степень s . В упражнении 15 мы выяснили, что всего существует пять таких графов. Построенный нами плоский граф \tilde{G} представляет собой выпуклое симметричное вложение одного из них, а именно икосаэдра.

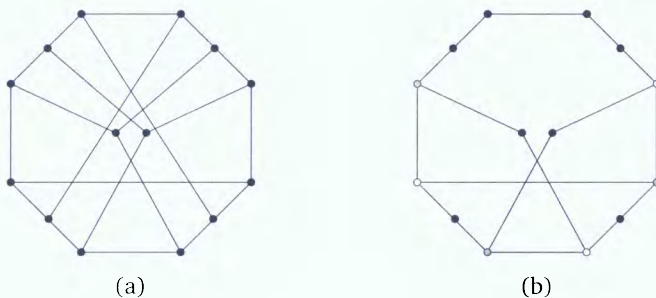


Рис. 7.60

3. Граф G , показанный на рис. 7.60(a), является 3-регулярным графом, построенным на $n = 14$ вершинах и $m = 21$ ребрах. Если он планарен, то он должен иметь $r = 9$ граней. В данном случае система уравнений

$$\begin{aligned} 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + 6r_6 + \dots &= 2m = 42; \\ r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + \dots &= r = 9 \end{aligned}$$

также имеет достаточно много различных решений в целых числах, например решения вида $r_3 = 0$, $r_4 = 5$, $r_5 = 3$ и $r_6 = 1$, решения вида $r_4 = 7$, $r_7 = 2$ и т. д. Изображенный же на рис. 7.60(а) граф G имеет минимальную длину цикла, равную шести. При таких значениях r_i описанная выше система решений не имеет. Следовательно, такой граф G планарным не является.

Докажем этот же факт с помощью теоремы Куратовского. Согласно этой теореме в графе G должен содержаться подграф, являющийся подразбиением $K_{3,3}$ или K_5 . Так как степени вершин в графе не превосходят 3, есть подозрение, что из G_2 можно получить подразбиение графа $K_{3,3}$ удалением каких-то ребер. Посмотрим, сколько ребер нам нужно удалить. В графе G_2 имеется 21 ребро. В подразбиении графа $K_{3,3}$ должно быть только шесть вершин степени три, а остальные восемь вершин должны иметь степень, равную два. Тогда из первой теоремы теории графов получаем, что в искомом подграфе H графа G_2 количество вершин n и количество ребер e_n связано равенством

$$6 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 2e_n \Rightarrow e_n = 17 \Rightarrow \text{нужно удалить 4 ребра.}$$

Давайте удалим две верхние пары перекрещивающихся ребер, т. е. ребра, исходящие вниз из двух самых верхних вершин, а также ребра, исходящие к двум центральным вершинам из двух вершин, смежных с самыми верхними вершинами. В результате все четыре верхние вершины получают степень, равную двум, т. е. будут представлять собой подразбиение одного и того же ребра (рис. 7.60(b)). Также степень, равную двум, получают две центральные вершины и две вершины, лежащие на нижних косых гранях. Видно, что полученный граф H является подразбиением графа $K_{3,3}$: окрасив одну из оставшихся вершин степени три в серый цвет, мы однозначно сможем окрасить остальные пять вершин в серый и белый цвета.

4. Заметим прежде всего, что графы $K_{2,3}$ и K_4 являются двусвязными. В случае двусвязного внешнепланарного графа G граница внешней его грани обязана представлять собой простой цикл, который проходит через все вершины графа G (так называемый обхватывающий цикл), — в противном случае мы бы при обходе этой границы прошли через какую-то из вершин дважды, что означало бы, что эта вершина является точкой сочленения. В графе $K_{2,3}$ обхватывающий цикл гарантированно отсутствует — такой цикл должен был бы иметь длину, равную пяти, а в двудольном графе циклы нечетной длины существовать не могут. В графе K_4 простой цикл, проходящий через все вершины графа, существует, однако вершины двух ребер, которые в этот цикл не входят, чередуются при обходе по любому такому циклу. Такие ребра не могут быть нарисованы одновременно внутри одной и той же грани без самопересечения друг с другом. Если же одно из ребер нарисовать вне цикла, то это ребро отделит одну из вершин от внешней грани.

§ 5. Раскраска плоских графов

1. Давайте теперь перейдем к одной из наиболее старых и наиболее известных проблем теории графов, которая известна как задача о четырех красках.

а. Рассмотрим плоский граф \tilde{G} , изображенный на рис. 7.61(а). Предположим, что мы хотим окрасить грани этого графа так, чтобы любые две смежные грани, т. е. грани, разделенные друг с другом общим ребром, были окрашены в разные цвета $i \in \mathbb{N}$. Такую окраску называют *правильной окраской* граней плоского графа \tilde{G} . Разумеется, мы можем для окраски каждой новой грани использовать какой-то новый цвет, получая в итоге правильную окраску граней графа \tilde{G} в $|F(\tilde{G})|$ цветов. Однако, как и во всех подобных задачах, нас, как правило, интересует минимальное количество цветов, в которое можно правильно окрасить грани заданного графа \tilde{G} . В частности, несложно убедиться в том, что изображенный на рис. 7.61(а) граф \tilde{G} невозможно правильно окрасить менее чем в четыре цвета.

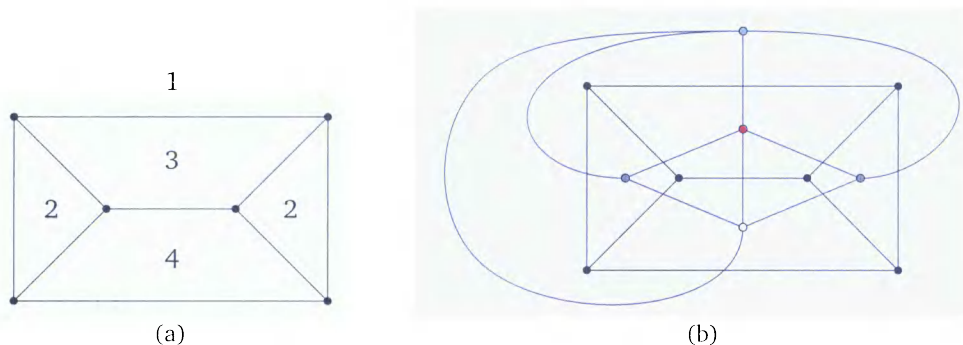


Рис. 7.61. Примеры правильной окраски графа: (а) окраска граней графа \tilde{G} ; (б) окраска вершин двойственного графа \tilde{G}^*

б. В 1852 году Френсис Гатри (Francis Guthrie), бывший в то время студентом университетского колледжа Лондона (University College London), в качестве подработки занимался раскраской карты Англии. В результате этих занятий он чисто экспериментально обнаружил, что для окраски карты любой сложности достаточно использовать только лишь четыре цвета. Это свое наблюдение он сформулировал как гипотезу и попросил своего брата Фредерика Гатри (Frederick Guthrie), изучавшего математику в том же университете, уточнить, справедлива ли она. Фредерик Гатри обратился с этой проблемой к своему научному руководителю, профессору Огастесу де Моргану (Augustus De Morgan), одному из основателей современной математической логики, который, не сумев ответить на этот вопрос, написал в письме про эту гипотезу одному из известнейших математиков того времени Уильяму Гамильтону (William Hamilton). С этого письма и началось достаточно интенсивное изучение математиками данной проблемы, получившей впоследствии название задачи о четырех красках.

Задача о четырех красках, достаточно просто и понятно формулируемая, привлекла внимание многих математиков. Первые достаточно серьезные продвижения в данной области были сделаны в конце XIX века такими математиками, как Альфред Кемпе (Alfred Kempe), Питер Гатри Тэйт (Peter Guthrie Tait), Перси Хивуд (Percy Heawood) и другие. Совместными усилиями

ими было получено несколько чрезвычайно полезных переформулировок данной задачи. Кроме того, им удалось доказать возможность правильной окраски граней плоского графа в пять цветов. Однако доказать гипотезу о возможности правильно окрасить грани плоского графа в четыре цвета у них так и не получилось. Со временем стало ясно, что никакого простого доказательства этой гипотезы, по-видимому, все же не существует. Лишь в 1976 году Кеннет Аппель (Kenneth Appel) и Вольфганг Хакен (Wolfgang Haken), сотрудники Иллинойского университета (University of Illinois), аннотировали доказательство данной теоремы, существенным образом использовавшее численные расчеты на компьютере. В дальнейшем это доказательство было несколько упрощено, однако оно по-прежнему базировалось на использовании компьютера. Вопрос о том, существует ли более простое доказательство данной гипотезы, до сих пор остается открытым.

с. Прежде чем двигаться дальше, сделаем несколько важных замечаний. Прежде всего напомним, что у любого плоского графа \tilde{G} имеются ребра двух сортов — граничные ребра, разделяющие две разные грани, а также мосты, т. е. ребра, по обе стороны от которых лежит одна и та же грань. Достаточно очевидно, что плоский граф, в котором имеется хотя бы один мост, мы правильно окрасить в принципе не можем. Действительно, окраска грани, содержащей мост, в любой цвет автоматически нарушает условие правильности окраски — мы требуем, чтобы по обе стороны от каждого ребра лежали грани разных цветов, а в случае моста это условие никогда выполниться не может. Поэтому далее мы будем предполагать, что все рассматриваемые нами плоские графы мостов не имеют.

Далее, у любого плоского графа \tilde{G} имеется двойственный к нему плоский граф \tilde{G}^* (рис. 7.61(b)). Напомним, что вершинам такого графа отвечают грани исходного графа \tilde{G} . Кроме того, если две грани графа \tilde{G} смежны, то соответствующие вершины графа \tilde{G}^* также соединены ребром. Следовательно, любая правильная окраска граней плоского графа \tilde{G} отвечает правильной окраске вершин графа \tilde{G}^* , и наоборот. Иными словами, задача правильной окраски граней плоского графа эквивалентна задаче правильной окраски вершин плоского графа.

Стоит отметить, однако, что переформулировка задачи в терминах окраски вершин имеет некоторое преимущество перед исходной постановкой задачи. Действительно, грани плоского графа \tilde{G} — это объекты, связанные с конкретным вложением некоторого планарного графа G в плоскость. Вершины же такого графа от способа вложения планарного графа G никак не зависят, так что в этих терминах исходная проблема может быть переформулирована как задача поиска хроматического числа $\chi(G)$ исходного планарного графа G . В частности, гипотеза четырех красок эквивалентна предположению о том, что для любого планарного графа без петель $\chi(G) \leq 4$.

Наконец, задача окраски вершин любого мультиграфа без петель эквивалентна задаче окраски вершин простого графа, полученного из исходного мультиграфа заменой всех мультиребер на простые ребра. Поэтому далее мы будем предполагать, что все рассматриваемые графы являются простыми. И, как обычно, нам будет достаточно рассматривать связные графы — в вопро-

сах окраски вершин графа правильная окраска вершин графа G сводится к поиску правильной окраски вершин каждой из его связных компонент.

2. Итак, мы переформулировали задачу о четырех красках в терминах хроматического числа простого связного планарного графа G . Именно, мы хотим доказать, что для любого планарного графа G его хроматическое число $\chi(G) \leq 4$. К сожалению, полностью привести доказательство этого утверждения в учебнике по теории графов в настоящее время невозможно. Вместо этого мы расскажем о некоторых других, не столь сложно доказываемых результатах, касающихся верхней границы числа $\chi(G)$.

а. Докажем прежде всего, что любой планарный граф G вершинно 6-раскрашиваем. Доказательство будем вести по количеству n вершин графа G . База индукции $n = 1$ очевидна. Пусть теперь утверждение доказано для всех графов, построенных на $n - 1$ вершине, $n > 1$, и покажем, что оно остается верным для любого графа, для которого $|V(G)| = n$.

Как мы показали ранее (см. утверждение 4), в любом планарном графе G обязательно найдется вершина x , степень $\deg(x)$ которой меньше или равна пяти. Удаляя эту вершину, мы получим граф $G - \{x\}$, правильно 6-раскрашиваемый по индукционному предположению. При этом все соседние с x вершины в исходном графе G окажутся окрашенными как максимум в пять цветов. Но тогда для вершины x обязательно останется хотя бы один цвет, отличный от цветов, использованных при окраске смежных с x вершин. Окрашивая x в этот цвет, мы и получим правильную окраску вершин исходного графа G .

б. Перейдем к доказательству того, что для любого простого планарного графа G справедливо неравенство $\chi(G) \leq 5$. Идея этого доказательства была приведена в статье английского математика Альфреда Кемпе, опубликованной в 1879 году. В этой статье Кемпе попытался доказать теорему о четырех красках. Спустя одиннадцать лет другой английский математик, Перси Хивуд, нашел в доказательстве Кемпе ошибку. Несмотря на это, Хивуд показал, что подход Кемпе можно использовать для доказательства того, что любой простой планарный граф G является 5-раскрашиваемым.

Теорема 1 (теорема о пяти красках). *Любой простой планарный граф 5-раскрашиваем.*

Доказательство вновь будем проводить индукцией по количеству n вершин. Начало доказательства ничем не отличается от доказательства неравенства $\chi(G) \leq 6$. В частности, удаляя вершину x , степень которой меньше или равна пяти, мы по-прежнему получаем граф $G - \{x\}$, вершины которого мы можем правильно окрасить в пять цветов. Однако на этом шаге у нас возникают уже два различных варианта. В первом из них соседние с x вершины в исходном графе G оказываются окрашенными менее чем в пять цветов. В этом случае нам остается окрасить x в оставшийся неиспользованным цвет и получить правильную окраску вершин графа G . Во втором, более сложном варианте вершина x имеет ровно пять соседей и все они окрашены в разные цвета. Наша задача состоит в том, чтобы перекрасить вершины графа

$G - \{x\}$ так, чтобы мы смогли правильно окрасить вершину x и тем самым получить правильную окраску исходного графа G .

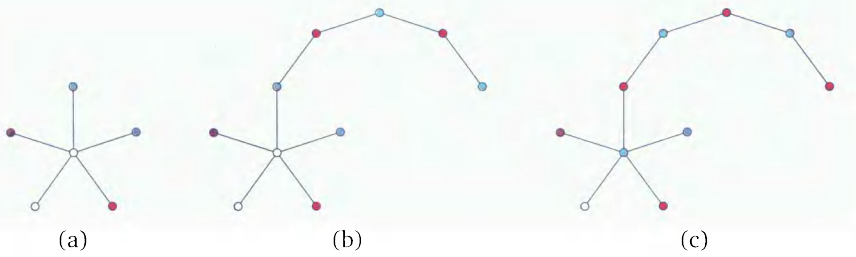


Рис. 7.62

Предположим, что пять смежных с x вершин окрашены в цвета от 1 до 5 и что порядок цветов совпадает с порядком обхода этих вершин по часовой стрелке (см. рис. 7.62(a)). Рассмотрим вершину $y \equiv y_1$, окрашенную в цвет 1 (синяя вершина на рис. 7.62(a)). Если у этой вершины в графе $G - \{x\}$ отсутствуют соседи, окрашенные в цвет 3 (красный цвет на рис. 7.62(a)), то мы можем ее в этот цвет перекрасить, а вершину x окрасить в оказавшийся свободным цвет 1. В противном случае у вершины y_1 имеется смежная с ней вершина y_2 , окрашенная в цвет 3. Рассмотрим тогда в графе $G - \{x\}$ все смежные с y_2 вершины, отличные от y_1 . Если ни одна из этих вершин не окрашена в цвет 1, то мы можем перекрасить y_2 в цвет 1, y_1 в цвет 3 и закрасить вершину x в цвет 1. В противном случае у вершины y_2 найдется вершина смежная y_3 , окрашенная в цвет 1, и т. д. Продолжая далее, мы получаем цепочку вершин y_1, \dots, y_k , окрашенных попеременно то в цвет 1, то в цвет 3, которая в настоящее время называется цепочкой Кемпе (см. рис. 7.62(b)). Когда-то эта цепочка обязательно оборвется. В лучшем для нас случае она оборвется в вершине y_k , отличной от вершины z , смежной с x и окрашенной в цвет 1 или 3. В этом случае мы всегда сможем инвертировать цвета в этой цепочке, а затем окрасить вершину x в цвет 1 (см. рис. 7.62(c)). Нам осталось рассмотреть худший случай, когда $y_k = z$ (см. рис. 7.62(d)). В этом случае инвертирование цветов в цепочке y_1, \dots, y_k делу не поможет — мы в результате данной операции просто перекрасим вершины y и z в противоположные цвета, а вершина x при этом по-прежнему не сможет быть окрашена ни в цвет 1, ни в цвет 3.

Итак, предположим, что мы получили окрашенную в два цвета цепочку вершин, исходящих из вершины y и приходящих в вершину z . Рассмотрим тогда вершину $v \equiv v_1$, окрашенную в цвет 2 (зеленый цвет на рис. 7.63(a)), и повторим для нее рассуждения, описанные выше. В результате мы получим цепочку Кемпе вершин v_1, \dots, v_l , окрашенных попеременно в цвет 2 и в цвет 4 (желтый цвет на рис. 7.63(b)). Казалось бы, и здесь у нас есть хороший случай, при котором вершина v_l отлична от вершины w , смежной с x в графе G и окрашенной в цвет 4, а также плохой случай, при котором эти вершины совпадают. Однако, оказывается, на этот раз второй случай уже невозможен. Действительно, так как граф G планарен, то в соответствующей

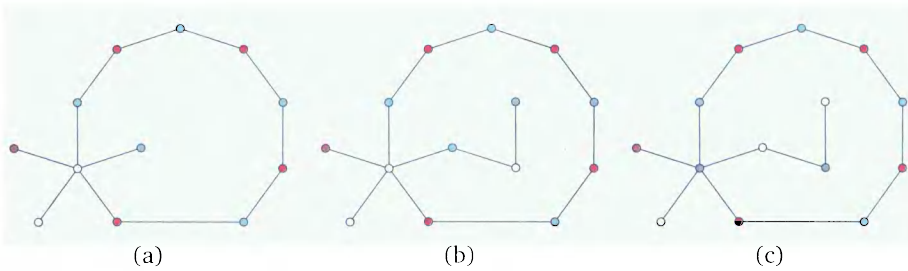


Рис. 7.63

щем G плоском графе \tilde{G} любые два цикла могут пересекаться только лишь по вершинам. Но в данном случае это невозможно, так как входящие в эти циклы вершины обязаны быть окрашены в графе $G - \{x\}$ в разные цвета. Следовательно, цепочка вершин v_1, \dots, v_k обязательно оборвется в некоторой вершине v_k , отличной от w , и мы всегда сможем инвертировать в ней цвета. В результате этих действий вершина v_1 окрасится в цвет 4 (см. рис. 7.63(c)). Окрашивая затем вершину x в освободившийся цвет 2, мы получим правильную окраску исходного графа G . \square

с. Давайте теперь попытаемся использовать те же самые рассуждения для доказательства неравенства $\chi(G) \leq 4$. Вновь будем действовать индукцией по количеству n вершин. Если бы в планарном графе обязательно существовала вершина x , степень которой меньше или равна четырем, то мы могли бы, слово в слово повторив доказательство предыдущей теоремы, доказать нужное нам неравенство $\chi(G) \leq 4$. К сожалению, мы знаем, что существуют графы, минимальная степень вершины которых равна пяти. Поэтому нам, наряду со случаем $\delta(G) \leq 4$, где $\delta(G)$ — минимальная из степеней вершин графа G , придется дополнительно рассмотреть случай, когда $\delta(G) = 5$.

Итак, предположим, что $\delta(G) = 5$. Рассмотрим вершину x , для которой $\deg(x) = 5$. Удаление этой вершины даст нам граф $G - \{x\}$, который мы можем правильно окрасить в четыре цвета по индукционному предположению. Сразу заметим, что случай, когда один из цветов встречается в паре вершин, идущих рядом при обходе вокруг вершины x , сводится, по сути, к случаю $\delta(x) = 4$, поэтому рассмотрим сразу нетривиальный случай, когда цвета пяти смежных с x вершин идут, например, в порядке 2, 1, 2, 3 и 4 (см. рис. 7.64(a)). Рассмотрим пару вершин 1, 3 (синяя и красная вершины на рис. 7.64). Если в графе G не существует соединяющей эти две вершины цепочки Кемпе, то мы сможем инвертировать цвета в двухцветной цепочке, исходящей из вершины 2, и получить правильную окраску вершин графа G . Аналогичная ситуация имеет место в случае, когда в G отсутствует цепочка Кемпе, связывающая вершины 1 и 4 (синяя и желтая вершины на рис. 7.64). Иными словами, последний случай, с которым нам придется разобраться, — это случай, при котором в графе G существуют две цепочки Кемпе, изолирующие две соседние с x вершины, окрашенные в цвет 2 (зеленый цвет на рис. 7.64(a)).

Для такого случая Кемпе предложил следующий подход. Давайте для вершины, окрашенной в цвет 2 и лежащей внутри цепочки Кемпе, окрашен-

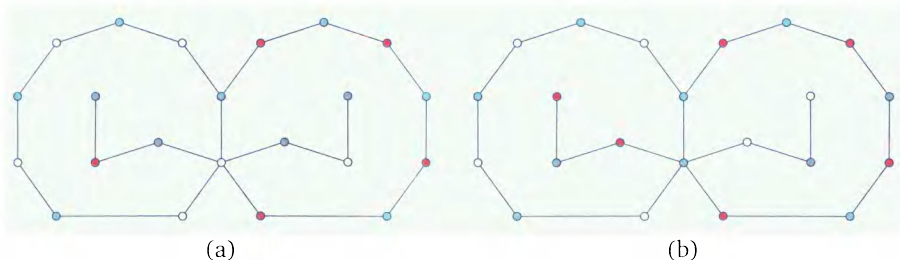


Рис. 7.64

ной в цвета 1, 3 (сине-красная цепочка на рис. 7.64(a)), рассмотрим цепочку Кемпе вершин, окрашенных в цвета 2 и 4 (зелено-желтая цепочка на рис. 7.64(a)), а для вершины, окрашенной в цвет 2 и лежащей внутри второй цепочки Кемпе (сине-желтая цепочка на рис. 7.64), рассмотрим цепочку, окрашенную в цвета 2 и 3 (зелено-красная цепочка на рис. 7.64(a)). Каждый из этих путей за цикл, ограниченный соответствующей цепочкой Кемпе, выйти не может. Тогда все, что нам остается, — это одновременно инвертировать цвета в обеих этих цепочках, а затем окрасить вершину x в цвет 2 (см. рис. 7.64(b)).

Несмотря на кажущуюся убедительность данного доказательства, оно, тем не менее, содержит ошибку. В упражнении 5 требуется эту ошибку найти.

Упражнения

1 (1 балл). Докажите, что простой связный планарный граф G , построенный на 17 ребрах и 10 вершинах, нельзя правильным образом раскрасить в два цвета.

2 (1,5 балла). Какое минимальное количество цветов требуется, чтобы правильно раскрасить грани графа W_n , $n \geq 4$?

3 (1,5 балла). Без использования теоремы о четырех красках докажите, что любой граф, свободный от треугольников, 4-раскрашиваем. Доказанная в 1959 году Гербертом Грётчем (Herbert Grötzsch) теорема утверждает, что любой такой граф на самом деле является 3-раскрашиваемым.

4 (1,5 балла). С использованием теоремы о четырех красках докажите, что любой внешнепланарный граф 3-раскрашиваем.

5 (2,5 балла). Найдите ошибку в доказательстве Кемпе теоремы о четырех красках.

Дополнительные упражнения

6 (2 балла). Без использования теоремы о четырех красках докажите, что любой планарный связный граф, построенный на не более чем $n = 11$ вершинах, является 4-раскрашиваемым.

7 (1,5 балла). Без использования теоремы о четырех красках докажите, что любой внешнепланарный граф 3-раскрашиваем.

8 (2,5 балла). Задача о картинной галерее (поставлена в 1973 году Виктором Кли (Victor Klee), решена Хваталом в 1975 году). Предположим, что план картинной галереи имеет вид плоского (не обязательно выпуклого) многоугольника с n сторонами и n вершинами. Докажите, что в любой такой галерее мы можем расставить $\lfloor n/3 \rfloor$ охранников так, что любая внутренняя точка многоугольника попадает в область видимости хотя бы одного охранника (т. е. для любой точки q многоугольника найдется такая точка x из рассматриваемого множества $V(G)$ вершин, что отрезок $[x, q]$ целиком лежит в многоугольнике).

Решение упражнений

1. Мы можем раскрасить в два цвета только лишь двудольный граф, т. е. граф без нечетных циклов. Для такого графа должно выполняться неравенство $m \leq 2n - 4$. Но у нас $m = 17$, а $2n - 4 = 16$, поэтому данный граф в два цвета раскрасить невозможно.

2. Грани графа W_n можно правильно окрасить в три цвета в случае нечетного n и в четыре в случае четного n . Для того чтобы это доказать, можно вспомнить, что граф W_n самодвойственный, а следовательно, минимальное количество цветов, требующееся для правильной окраски его граней, совпадает с его хроматическим числом. Но хроматическое число цикла C_n , построенного на четном количестве вершин, равно 2, а на нечетном — 3. Хроматическое же число графа W_n ровно на единицу больше, чем $\chi(C_n)$ — центральную вершину мы обязаны окрасить в цвет, не использованный при окраске внешних вершин этого графа.

3. Ранее мы доказали, что в планарном связном графе G , свободном от треугольников, количество m ребер ограничено сверху величиной $2n - 4$, где n — количество вершин в графе G . Следствием этого неравенства является тот факт, что в таком графе обязательно найдется вершина x степени, меньшей или равной трем. Действительно, если бы это было не так, то, согласно первой теореме теории графов мы имели бы

$$2m = \sum_{x \in V(G)} \deg(x) \geq 4n \Rightarrow m \geq 2n.$$

А это неравенство противоречит тому, что $m \leq 2n - 4$.

Теперь для доказательства 4-раскрашиваемости графа G мы можем повторить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы о шести красках. Именно, удаляя вершину x , мы правильно окрасим все вершины графа $G - x$ в четыре цвета. Однако вершина x в исходном графе G имеет не более чем три соседние с ней вершины, так что для ее правильной окраски всегда останется свободный цвет.

4. Рассмотрим произвольное правильное вложение \tilde{G} внешнепланарного графа G . Добавим во внешнюю грань плоского графа \tilde{G} еще одну вершину x . Как и любой планарный граф, такой граф 4-раскрашиваем. Заметим, что вер-

шина x соединена со всеми вершинами графа \tilde{G} . Следовательно, все вершины графа \tilde{G} должны быть окрашены в цвета, отличные от цвета вершины x . А это и означает, что все они окрашены только лишь в три цвета, тогда как вершина x окрашена в четвертый цвет.

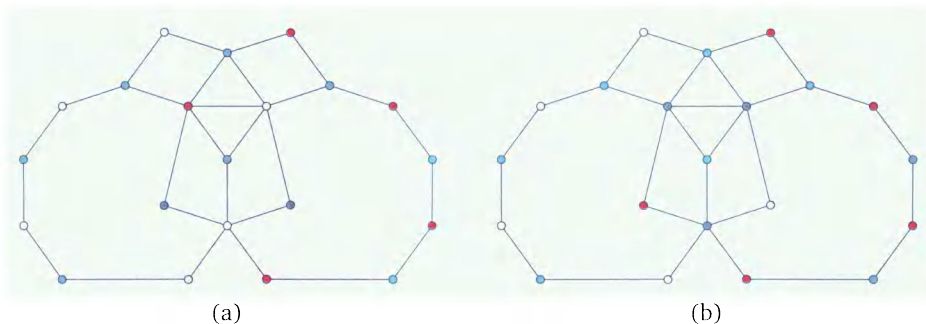


Рис. 7.65

5. В приведенных рассуждениях по умолчанию считалось, что цепочки Кемпе $P_{1,3}$ и $P_{1,4}$, состоящие из цветов 1 и 3 (синий и красный цвета на рис. 7.64), а также из цветов 1 и 4 (синий и желтый цвета на рис. 7.64), пересекаются между собой только в вершине, окрашенной в цвет 1 (синий) и смежной с вершиной x . В этом случае все рассуждения Кемпе проходят. Однако эти цепочки могут пересекаться и в какой-то еще вершине, окрашенной в тот же цвет 1 (см. рис. 7.65(a)). При этом появляется возможность существования пути, начинающегося и заканчивающегося в смежных с x вершинах, окрашенных в цвет 2 (зеленый цвет на рис. 7.65(a)). В этой ситуации мы не сможем одновременно и независимо друг от друга поменять цвета в двух цепочках, исходящих из смежных с x зеленых вершин, — если мы это сделаем для графа, показанного на рис. 7.65(a), то мы придем к ситуации, показанной на рис. 7.65(b), при которой две смежные вершины оказываются окрашенными в один и тот же цвет (зеленый цвет на рис. 7.65(b)).

Пример одного из наименьших по количеству вершин графов, для которого данные рассуждения не проходят, приведен на рис. 7.66(a). Соответствующая раскраска вершин, иллюстрирующая ошибочность доказательства Кемпе, показана на рис. 7.66(b).

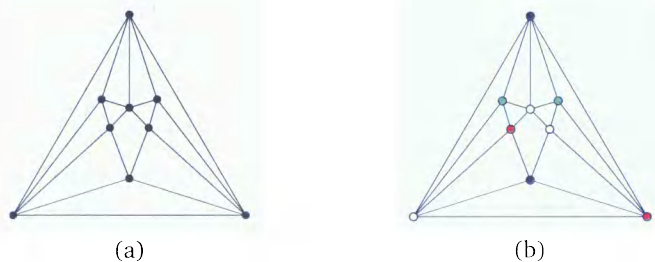


Рис. 7.66

Литература

- [1] *West D. B.* Introduction to Graph Theory. Prentice Hall, 2001.
- [2] *Bondy J. A., Murty U. S. R.* Graph Theory with Applications. North-Holland, 1976.
- [3] *Bondy J. A., Murty U. S. R.* Graph Theory. Springer, 2008.
- [4] *Bóna M.* A Walk Through Combinatorics: an Introduction to Enumeration and Graph Theory. World Scientific, 2006.
- [5] *Ringel G., Hartsfield N.* Pearls in Graph Theory. Academic Press, 1990.
- [6] *Wilson R. J.* Introduction to Graph Theory. Longman, 1996.
- [7] *Chartrand G., Lesniak L., Zhang P.* Graphs and Digraphs. CRC Press, 2016.
- [8] *Balakrishnan R., Ranganathan K.* A Textbook of Graph Theory. Springer, 2012.
- [9] *Bollobas B.* Modern Graph Theory. Springer, 1998.
- [10] *Diestel R.* Graph Theory. Springer-Verlag, 2000.
- [11] *Дустель Р.* Теория графов. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002.
- [12] *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1969.
- [13] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
- [14] *Melnikov O., Sarvanov V., Tyshkevich R., Yemelichev V., Zverovich I.* Exercises in Graph Theory. Springer, 1998
- [15] *Lovász L.* Combinatorial Problems and Exercises. Elsevier, 1993.
- [16] *Lovász L., Plummer M. D.* Matching Theory. North-Holland, 1986.
- [17] *Ловас Л., Пламмер М.* Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. М.: Мир, 1998.
- [18] *Asratian A. S., Denley T. M. J., Häggkvist R.* Bipartite Graphs and their Applications. Cambridge University Press, 1998.
- [19] *Bang-Jensen J., Gutin G.* Digraphs: Theory, Algorithms and Applications. Springer, 2009.
- [20] *Biggs N.* Algebraic Graph Theory. Cambridge University Press, 1993.
- [21] *Jensen T. R., Toft B.* Graph Coloring Problems. John Wiley & Sons, 1995.
- [22] *Chartrand G., Zhang P.* Chromatic Graph Theory. Chapman and Hall, 2008.
- [23] *Gross J. L., Tucker T. W.* Topological Graph Theory. John Wiley & Sons, 1987.
- [24] *Mohar B., Thomassen C.* Graphs on Surfaces. John Hopkins University Press, 2001.
- [25] *Звонкин А. К., Ландо С. К.* Графы на поверхностях и их приложения. М.: МЦНМО, 2010.

- [26] Handbook of Graph Theory / Gross J. L., Yellen J., Zhang P., editors. CRC Press, 2014.
- [27] Седжвик Р. Фундаментальные алгоритмы на C++. Часть 5. Алгоритмы на графах. ДиаСофт, 2002.
- [28] Moon J. W. Counting Labelled Trees. William Clowes and Sons, 1970.
- [29] de Bruijn N. G. A Combinatorial Problem // Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetenschappen. 1946. V. 49, № 7. P. 758–764.
- [30] van Lint J. H., Wilson R. M. A Course in Combinatorics. Cambridge University Press, 2001.
- [31] Compeau P. E. C., Pevzner P. A., Tesler G. How to Apply de Bruijn Graphs to Genome Assembly // Nature Biotechnology. 2011. V. 29. P. 987–991.
- [32] Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М.: МЦНМО, 1998.
- [33] Дасгупта С., Пападимитриу Х., Вазирани У. Алгоритмы. М.: МЦНМО, 2014.
- [34] Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. М.: Вильямс, 2009.
- [35] Aigner M. A Course in Enumeration. Springer, 2007.
- [36] West D. B. A short proof of the Berge—Tutte Formula and the Gallai—Edmonds Structure Theorem // European Journal of Combinatorics. 2011. V. 32 (5). P. 674–676.
- [37] Lovász L. Three Short Proofs in Graph Theory // J. Combin. Theory. Ser. B. 1975. V. 19 (3). P. 269–271.
- [38] Айгнер М., Циглер Г. Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней. М.: Мир, 2006.
- [39] Ландо С. К. Лекции о производящих функциях. М.: МЦНМО, 2007.
- [40] Makarychev Yu. A Short Proof of Kuratowski's Graph Planarity Criterion // J. of Graph Theory. 1997. V. 25. P. 129–131.
- [41] Скопенков А. Б. Вокруг критерия Куратовского планарности графов // Математическое просвещение. 2005. Сер. 3, вып. 9. С. 116–128.

Предметный указатель

f -фактор графа 267
 H -декомпозиция графа 150
 k -мер 123
 k -фактор 44
 S -компонента графа 297
— — помеченная 395

А

автоморфизм графа 60
алгоритм жадный окраски вершин 290
— Куна поиска максимального паросочетания в двудольном графе 241
— поиска в глубину 75
— — в ширину 81
— — точек сочленения в односвязном графе 191
— Форда—Фалкерсона 215
— Эдмондса поиска максимального паросочетания 281
— Эдмондса—Карпа 215

Б

барьер 274, 276

В

вершина плоского графа 347
— потомок 79
— предок 79
— разделяющая 195
— родитель 79
— симплициарная 339
— сын 79
— уровень 78
вершинное покрытие 226
— — минимальное 226
вершины связанные 28

вершины смежные 17

Г

грань плоского графа 350
— — — внешняя 350
— — — внутренняя 350
— — — граница 351
— — — степень 352
граф 8
— k -критический 296
— k -мерный куб Q_k 14
— k -раскрашиваемый 288
— k -факторизуемый 269
— k -хроматический 289
— абстрактно двойственный 355
— вершинно k -связный 183
— — двусвязный 193
— двойственный к плоскому графу 353
— двудольный $G[X, Y]$ 13, 30
— де Брёйна 125
— интервальный 323
— колесо W_n 14, 289, 344
— кубический 14
— лестница 345
— непомеченный 56
— неразделяемый 195
— Петерсена 14
— планарный 347
— плоский 347
— подразбиение 389
— полный K_n 12
— — k -дольный 310
— — двудольный $K_{n,m}$ 13
— простой 11
— пустой \bar{K}_n 12
— путь P_n 13
— реберно k -связный 182

граф реберно двусвязный 194

- регулярный 14
- связный 28
- Силвестра 274
- совершенный 312
- списочно раскрашиваемый 299
- сравнимости 324
- фактор-критический 277
- хордальный 341
- цикл C_n 13
- четный 119
- Эйлеров 118

Д

- двойной подсчет 9
- декомпозиция графа 149
 - — гамильтонова 150
 - — на пути 150
 - — на циклы 150
- дерево 73
 - m -арное 79
 - блоков и точек сочленения связного графа 190
 - высота 78
 - корневое 77
 - нормальное 79
 - остовное 75
 - полное m -арное 85
- дефицит графа $\text{def}(G)$ 273
- диаметр графа 29
- дополнение к графу 12

З

- задача квадрирования
 - прямоугольников 176
- о клике 230
- о коммивояжере 132
- о четырех красках 401
- сборки геномов 126
- законы Кирхгофа 173
- замыкание графа 137

И

- изоморфизм мультиграфов 56
- простых графов 55
- источник 78

К

- карта комбинаторная 378
- планарная 377

карта топологическая 376

- Эйлерова характеристика 377
- кликое покрытие графа 314
- код Прюфера 90
- кодереву 147
- компоненты связности в графе 28
- сильной связности в орграфе 32

Л

- лемма Жордана 348
- лес 73
 - корневой 77
- линейное пространство напряжений 169
 - — разрезов 152, 155
 - — ребер 149
 - — циклов 151
 - — циркуляций 167
- лист 73

М

- маршрут 27
- матрица дважды стохастическая 250
 - инцидентности 10
 - Кирхгофа 101
 - перестановок 250
 - пфаффиан 264
 - смежности 17
- минор графа 397
- многочлен хроматический 336
- множество вершинно независимое 228
 - — отделяющее X от Y 202
 - — разделяющее x и y 200
- вершинное разделяющее 182
- разрезов фундаментальное 155
- реберно независимое 228
 - — разделяющее 152
- циклов фундаментальное 147
- частично упорядоченное 79
- мост 44, 45
- мультиребро 8

Н

- напряжение 169
 - связанное с минимальным реберным разрезом $\partial(X)$ 170
- нумерация в порядке исключения
 - симплициарных вершин 340

О

- обхват графа 29

объединение графов 47
 операция подразделения ребра 389
 — расширения вершины 317
 — симметрической разности 47
 — стягивания ребра 46
 — удаления вершины 42
 — — ребра 42
 оргграф 14
 — ациклический 33
 — взвешенный 165
 — сильно связный 32
 — слабо связный 32
 ориентация пфаффов 266
 — транзитивная 324
 отношение инцидентности 8
 — похожести 188
 — связанности в графе 28
 — — в оргграфе 31
 — частичного порядка 79
 очередь 81

П

паросочетание 222
 — максимальное 223
 — наибольшее по включению 224
 — совершенное 223
 первая теорема теории графов 9
 пересечение графов 47
 петля 8
 поверхность 374
 — неориентируемая 375
 — ориентируемая 375
 — род 375
 — с краем 375
 подграф 41
 — индуцированный подмножеством
 вершин 43
 — — — ребер 44
 — Куратовского 390
 — остовный 43
 последовательность графовая 19
 — де Брёйна 123
 — Прюфера 90
 — степенная 19
 правильное вложение графа в
 плоскость 347
 — — — в сферу 350
 путь 27
 — M -дополняющий 224
 — M -чередующийся 224

путь гамильтонов 134
 — замкнутый 29
 — между X и Y 202
 — простой 27
 — эйлеров 118

Р

радиус графа 29
 разделение связного мультиграфа 195
 раскраска вершин 288
 — правильная 288
 — реберная 326
 — согласованная 297
 — списочная 299
 расстояние между вершинами 28
 реберное покрытие 229
 — — минимальное 229
 реберный разрез 152
 — — минимальный (bond) 153
 — — связанный с подмножеством S ,
 $\partial(S)$ 153
 — — фундаментальный 155
 ребро плоского графа 347
 рид 126
 ручка подграфа H в графе G 193

С

связность вершинная 182
 — реберная 182, 183
 сеть 210
 — (S, T) -разрез 212
 — минимальный разрез 212
 — поток 211
 — пропускная способность 210
 список смежности 18
 степень вершины 9
 — — максимальная $\Delta(G)$ 49
 — — минимальная $\delta(G)$ 35, 49
 сток 79

Т

теорема BEST 121
 — Бержа 225
 — Бонди—Хватала 138
 — Брукса 292
 — Вагнера 397
 — Веблена 150
 — Визинга 328
 — Галлаи 233
 — Гёринга 203

теорема Дилуорса 250
 — Дирака о гамильтоновом цикле 137
 — Кастелейна 267
 — Кёнига 30
 — Кёнига—Эгервари 242
 — Куратовского 390
 — Мантеля 49
 — матричная о деревьях 100, 101
 — Менгера 200
 — — реберная 209
 — Мирского 250
 — Мицельского 307
 — о пяти красках 404
 — о совершенных графах, или слабая гипотеза Бержа 313
 — Оре 136
 — Петерсена о 2-факторизуемых графах 269
 — — о совершенном паросочетании в кубическом графе 260
 — Плесника 263
 — Редеи о гамильтоновом пути в турнире 140
 — сильная гипотеза Бержа 313
 — структурная Галлаи—Эдмондса 277
 — Татта о f -факторе 268
 — — о выпуклом вложении трехсвязного планарного графа 368
 — — о подсчете корневых остовных деревьев 107
 — — о совершенном паросочетании 256
 — теории графов первая 9
 — Томассена 390
 — Турана 311
 — Уитни для k -связных графов 200
 — — для двусвязных графов 200
 — — реберная 209
 — Фари 365
 — Форда—Фалкерсона 213
 — Хватала о гамильтоновом цикле 138
 — Холла о X -насыщенном паросочетании 245
 — Шеннона 330
 — Эрдёша о k -хроматическом графе 309
 точка сочленения 45

турнир 16
 — транзитивный 36

У

условия Татта существования совершенного паросочетания 255

Ф

формула Бержа 274
 — Бине—Коши 104
 — Кирхгофа 100
 — Кэли 90
 — Татта—Бержа 274
 — Харера—Цагира 384
 — Эйлера для карты на поверхности 377
 — — для плоского графа 364
 — Якоби 106

Ц

цепочка Кемпе 405
 цикл гамильтонов 132
 — индуцированный 313
 — простой 29
 — составной 29
 — фундаментальный 147
 — хорда 313
 — эйлеров 118
 цикловой ранг 148
 циркуляция 166
 — связанная с циклом C 167

Ч

частично упорядоченное множество, антицепь 249
 — — — цепь 249
 числа Бетти 158
 число кликовое 307
 — независимости $\alpha(G)$ 228
 — реберное хроматическое $\chi'(G)$ 327
 — списочное хроматическое $\chi_L(G)$ 299
 — хроматическое $\chi(G)$ 289

Э

эксцентриситет 29

Учебное издание для вузов

Александр Владимирович Омельченко

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Подписано в печать 11.12.2017 г. Формат 70×100/16. Гарнитура ITС Charter.
Печать офсетная. Печ. л. 26. Тираж 2000 экз. Заказ № 4772.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8».
Тел. 8 (495) 363-48-84. <http://capitalpress.ru>

Теория графов является одним из наиболее важных, интересных и динамично развивающихся разделов современной дискретной математики. С теми или иными задачами теории графов приходится иметь дело физикам, химикам, биологам, экономистам, социологам, а также специалистам во многих других областях научных исследований. Однако наиболее полезной теория графов является, конечно же, для программистов – огромное количество важных как с теоретической, так и с практической точек зрения задач современной информатики используют терминологию и факты этого раздела дискретной математики.

В учебник вошли все основные разделы современной теории графов, такие как связность в графах, паросочетания, раскраски графов, планарные графы, эйлеровы и гамильтоновы циклы, остовные деревья и пр. В книге собрано большое количество задач, дополняющих и закрепляющих теоретические разделы курса. Все задачи разделены на две группы – основные и дополнительные. Все задачи из основного блока снабжены подробными решениями. Важной особенностью учебника является наличие в нем большого количества рисунков, делающих изложение материала более понятным и наглядным.

Учебник предназначен для студентов, изучающих математику и информатику, специалистов в смежных областях, желающих самостоятельно изучить теорию графов, а также для преподавателей, читающих соответствующие разделы дискретной математики в университетах.

ISBN 978-5-4439-1247-9



9 785443 912479 >