

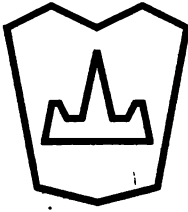


Учебно-научный центр довузовского образования МГУ

**С.Н.Олехник, М.К.Потапов**

**Сборник задач  
по алгебре,  
тригонометрии и  
элементарным  
функциям**

**Москва 1997**



*Московский государственный  
университет  
имени М.В.Ломоносова*

*Учебно-научный центр  
довузовского образования*

С.Н.Олехник, М.К.Потапов

**Сборник задач  
по алгебре, тригонометрии и  
элементарным функциям**

Издание второе

Москва  
1997

УДК 731.176.1:512

ББК22.14.я721

О53

Олехник С.Н., Потапов М.К.

**Сборник задач по алгебре, тригонометрии и элементарным функциям.** — М.: Изд. отдел УНЦ ДО МГУ, 1997. — 132 с.

ISBN 5-88800-086-8

В книге приведено около 2250 задач по алгебре, тригонометрии и элементарным функциям.

Эти задачи взяты из практики подготовки к выпускным и переводным экзаменам в средней школе и к вступительным экзаменам в вузы, из практики обучения на подготовительных курсах и подготовительных отделениях вузов.

Задачник может быть полезен учителям и учащимся средних школ, абитуриентам, слушателям подготовительных курсов и отделений вузов.

ISBN 5-88800-086-8 © Олехник С.Н., Потапов М.К., 1997.

© Учебно-научный центр  
доузовского образования  
МГУ, 1997

© Оформление. Алмазова Е.Е.,  
Шваров В.В., 1996

# ГЛАВА 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

## §1. Натуральные числа

- 1.<sup>1</sup> Доказать, что если каждое из чисел  $m$  и  $n$  делится на число  $p$ , то сумма  $m + n$  делится на  $p$ .
2. Доказать, что если число  $m$  больше числа  $n$  и каждое из этих чисел делится на число  $p$ , то разность  $m - n$  делится на  $p$ .
3. Доказать, что если число  $m$  делится на число  $p$ , а число  $n$  делится на число  $q$ , то произведение  $mn$  делится на произведение  $pq$ .
4. Доказать, что если число  $n$  делится на число  $m$ , а  $m$  делится на число  $k$ , то  $n$  делится на  $k$ .
5. Доказать, что если число  $n$  делится на число  $m$ , то  $n^k$  делится на  $m^k$  для любого числа  $k$ .
6. Доказать, что произведение двух последовательных чисел делится на 2.
7. Доказать, что произведение трех последовательных чисел делится на 3 и на 6.
8. Известно, что у числа последняя цифра 5. Доказать, что квадрат этого числа делится на 25.
9. Найти какое-нибудь шестизначное число, которое делится на 121; найти наименьшее такое число.
10. Доказать, что число  $\overline{abcd}$  тогда и только тогда делится на 99, когда число  $\overline{ab} + \overline{cd}$  делится на 99.
11. Доказать, что число  $\overline{abcd}$  тогда и только тогда делится на 101, когда  $\overline{ab} = \overline{cd}$ .
12. Доказать, что число тогда и только тогда делится на 11, когда разность между суммой его цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах, делится на 11.

---

<sup>1</sup>Под числом в этом параграфе мы всегда будем понимать натуральное число

13. Найти все пятизначные числа вида  $\overline{34X5Y}$ , каждое из которых делится на 36.
14. Найти все пятизначные числа вида  $\overline{71X1Y}$ , каждое из которых делится на 45.
15. Найти все пятизначные числа вида  $\overline{135XY}$ , каждое из которых делится на 45.
16. Найти все пятизначные числа вида  $\overline{517XY}$ , каждое из которых делится как на 6, так и на 9.
17. В шестизначном числе первая цифра совпадает с четвертой, вторая с пятой, третья с шестой. Доказать, что число делится : а) на 7; б) на 11; в) на 13.
18. Делится ли число 123...9899100 (выписаны подряд все числа от 1 до 100): а) на 4; б) на 8; в) на 3; г) на 9?
19. Делится ли число  $\underbrace{111\dots1}_{81 \text{ цифра}}$  на 81?
20. Делится ли число  $\underbrace{777\dots7}_{27 \text{ цифр}}$  : а) на 189; б) на 333; в) на 777; г) на 567?
21. Доказать, что следующие числа являются составными:
- а) 111111111; б)  $2^{33} + 1$ ; в)  $2^{50} - 1$ ; г)  $\underbrace{22\dots21}_{1978 \text{ цифр}}$ ;
- д)  $7^{24} - 4^{12}$ ; е)  $13^{25} + 17^{89} + 2^{71}$ ; ж)  $2^{3^{1979}} + 1$ ; з)  $2^{3^{1979}} - 1$ .
22. Сумма трех чисел больше, чем их произведение, а сумма двух из них равна 33. Найти эти числа.
23. Пусть числа  $m$ ,  $n$  и  $k$  такие, что  $k$  и  $n$  взаимно простые числа, а произведение  $mn$  делится на  $k$ . Доказать, что  $m$  делится на  $k$ .
24. Доказать, что для любого числа  $n$ , большего единицы, число  $n^3 - n$  делится на 6.
25. Доказать, что для любого числа  $n$  число  $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$  является натуральным.
26. Доказать, что для любого нечетного числа  $n$  число

$n^{12} - n^8 - n^4 + 1$  делится на 512.

27. Найти все числа  $k$ , при каждом из которых число  $k^2 + 3k + 5$  делится на 121.

28. Доказать, что если число  $n$ , большее единицы, не делится на 2 и на 3, то число  $n^2 - 1$  делится на 24.

29. Доказать, что если  $p$  – простое число, большее чем 3, то число  $p^2 - 1$  делится на 24.

30. Найти все натуральные числа  $p$  такие, что при каждом из них числа  $p + 1$ ,  $p + 2$ ,  $p + 4$  – простые.

31. Найти все пары простых чисел  $p$  и  $q$ , удовлетворяющих условию  $p^2 - 2q^2 = 1$ .

32. Доказать, что каково бы ни было число  $n$ , большее чем 3, хотя бы одно из чисел  $n$ ,  $n + 2$ ,  $n + 4$  не является простым.

33. Сколькими способами можно сумму 4 руб. 96 коп. составить из монет достоинством по 2 и 15 копеек ?

34. Сколькими способами можно сумму 2 руб. 31 коп. составить из монет достоинством по 3 и 20 копеек ?

35. Доказать равенство  $\sqrt{\underbrace{11\dots1}_{2n \text{ цифр}} - \underbrace{22\dots2}_n} = \underbrace{33\dots3}_n$ .

36. Доказать, что для любого числа  $n$  число  $\underbrace{4444\dots444}_n \underbrace{88888\dots888}_{n-1} 9$  является полным квадратом.

Найти все пары натуральных чисел  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие следующему условию:

37.  $2^{x^2} \cdot 3^y = 12^x$  ;

38.  $2^{x^2} \cdot 3^{y^2} = 6^{x+y}$ ;

39.  $18^{xy} = 2^{x^2} \cdot 3^{4y}$  ;

40.  $5^{-x} \cdot 10^y = 20^{x^2}$ .

41. Существуют ли натуральные числа  $n$  и  $m$  такие, что  $n^2 - m^2 = 101010$  ?

42. Найти наибольший общий делитель (Н.О.Д.) и наименьшее общее кратное (Н.О.К.) чисел:

а) 308, 264 ;

б) 144, 420, 252;

в)  $2^3 \cdot 3^5 \cdot 11 \cdot 13^{12}$ ,  $2^4 \cdot 3^3 \cdot 11^2 \cdot 17$ ,  $2^5 \cdot 3^6 \cdot 17 \cdot 24$ .

43. Доказать, что  $mn = \text{Н.О.Д.}(m, n) \cdot \text{Н.О.К.}(m, n)$ .

44. Доказать, что  $\text{Н.О.Д.}(m + n, n) = \text{Н.О.Д.}(m, n)$ .

## §2. Целые, рациональные и иррациональные числа

Найти все пары целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющие следующему условию:

$$\begin{array}{lll} 1. x + y = xy; & 2. x^2 - 3xy + 2y^2 = 3; & 3. x^2 + 23 = y^2; \\ 4. x^2 - 47 = y^2; & 5. x(y^2 + 1) = 48; & 6. y^2 - 5x^2 = 6; \\ 7. y = \frac{2}{3}x; & 8. y = 2x - 1; & 9. x^2 = 4y^2; \\ 10. x^2 = 2y^2; & & 11. 3^x - y^3 = 1. \end{array}$$

Найти все целые числа  $z$ , удовлетворяющие следующему условию:

$$\begin{array}{ll} 12. \sqrt{z+2} < \sqrt[4]{1-z}; & 13. \sqrt{z+2} > \sqrt[4]{1-z}; \\ 14. \sqrt[6]{z+1} < \sqrt[8]{6-z}; & 15. \sqrt[6]{z+1} > \sqrt[8]{6-z}. \end{array}$$

16. Доказать, что если число  $x + \frac{1}{x}$  является целым, то целым будет и число  $x^8 + \frac{1}{x^8}$ .

17. При каких целых числах  $x$  дробь  $\frac{x^3 - x^2 + 2}{x - 1}$  является целым числом?

18. Доказать, что если  $x$  и  $y$  — целые числа, удовлетворяющие условию  $x^2 - 4y^2 = 4xy$ , то  $x = y = 0$ .

Сколько целых чисел  $n$  удовлетворяет следующему условию:

$$\begin{array}{l} 20. (n^2 - 2)(n^2 - 20) < 0; \\ 21. (n^2 - 3)(n^2 - 33)(n^2 - 103)(n^2 - 203) < 0; \\ 22. (n^2 - 1)(n^2 - 11)(n^2 - 101)(n^2 - 1001) < 0. \end{array}$$

Найти все пары целых чисел  $x$  и  $y$ , удовлетворяющих следующим условиям:

$$23. \begin{cases} x > y, \\ 2x + y < 32, \\ x + 2y > 28; \end{cases} \quad 24. \begin{cases} 20x < y, \\ 23(x - 1) \geq y, \\ 21x + y = 500; \end{cases}$$

ВЫЧИСЛИТЬ

$$25. \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right);$$

$$26. \left(\frac{3}{4} : \frac{5}{6}\right) : \left(2\frac{3}{4} - 1,9\right);$$

$$27. \left(1\frac{5}{7} \cdot 1\frac{3}{4}\right) + \left(3\frac{2}{11} : 2\frac{3}{121}\right);$$

$$28. \frac{(1\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3})(1\frac{3}{4} - \frac{6}{4})}{1\frac{1}{5} + 2\frac{2}{5} + \frac{1}{5}};$$

$$29. \left(\frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}{\frac{1}{9}}\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{\frac{7}{15}}{\frac{2}{5} - \frac{1}{6}}\right);$$

$$30. \frac{1,17 + 1,13}{9} + \left(\frac{1}{4} \cdot 0,8\right) - \left(\frac{1}{5} : 0,9\right);$$

$$31. \frac{1,11 + 0,19 - 1,3 \cdot 2}{2,06 + 0,54};$$

$$32. \frac{1,25 \cdot 1,3 - (1,5 + 1,25)}{1,25} \cdot (1,5 - 0,75);$$

$$33. \left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386}\right) \frac{193}{17} + \frac{33}{34}\right] : \left[\left(\frac{7}{1931} + \frac{11}{3862}\right) \frac{1931}{25} + \frac{9}{2}\right].$$

Можно ли записать в виде конечной десятичной дроби следующую обыкновенную дробь:

$$34. \frac{1}{4}; \quad 35. \frac{1}{625}; \quad 36. \frac{1}{20}; \quad 37. \frac{1}{17};$$

$$38. \frac{3}{35}; \quad 39. \frac{117}{256}; \quad 40. \frac{147}{245}.$$

41. Следующие десятичные дроби записать в виде обыкновенных дробей:

а) 0,1(2); б) 1,(25); в) 1,(171); г) 1,(2519); д) 3,1(73).

Какое из следующих двух чисел больше :

42.  $\frac{4}{5}$  или  $\frac{7}{8}$ ;                      43. 1, 32 или  $\frac{32}{25}$ ;    44. 1, 32 или  $\frac{34}{25}$ ;

45.  $\frac{17}{23}$  или  $\frac{19}{21}$ ;                      46.  $\frac{113}{279}$  или  $\frac{113}{278}$ ;    47.  $\frac{1026}{7095}$  или  $\frac{1027}{7094}$ ;

48.  $\frac{2^{23} + 1}{2^{25} + 1}$  или  $\frac{2^{25} + 1}{2^{27} + 1}$ ;                      49.  $2^{18} + 3^{20}$  или  $6^{10}$ ?

50. Известно, что сумма и разность двух действительных чисел  $a$  и  $b$  есть числа рациональные. Доказать, что числа  $a$  и  $b$  также являются рациональными.

51. Известно, что числа  $x, y, \sqrt{x} + \sqrt{y}$  являются рациональными. Доказать, что числа  $\sqrt{x}$  и  $\sqrt{y}$  также являются рациональными.

52. Найти все рациональные числа  $x$ , при каждом из которых число  $\sqrt{x^2 + x + 1}$  является рациональным.

Доказать рациональность следующих чисел:

53.  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ ;                      54.  $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ ;

55.  $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$ ;                      56.  $\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} - \sqrt[3]{\sqrt{50} - 7}$ .

57. Является ли рациональным или иррациональным числом:

а) сумма рационального и иррационального чисел ?

б) сумма двух иррациональных чисел ?

в) произведение двух иррациональных чисел ?

г) частное рационального и иррационального чисел ?

Доказать иррациональность следующих чисел:

58.  $\sqrt{3}$ ;    59.  $\sqrt{5}$ ;    60.  $\sqrt[3]{2}$ ;    61.  $\sqrt[3]{7}$ ;

62.  $\sqrt[3]{25}$ ;    63.  $\sqrt[5]{16}$ ;    64.  $\sqrt[3]{4}$ ;    65.  $\log_2 3$ ;

66.  $\log_7 12$ ;    67.  $\log_3 50$ ;    68.  $\log_2 7$ ;    69.  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ;

70.  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$ ;    71.  $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ;    72.  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ ;

73.  $\operatorname{tg} 1^\circ$ ;    74.  $\operatorname{tg} 5^\circ$ ;    75.  $\operatorname{tg} 10^\circ$ .

76. Является ли иррациональным число  $\log_n m$ , где  $n$  и  $m$  натуральные числа и  $n \neq 1$  ?

Привести пример иррационального числа, заключенного между числами:

77. 1, 4 и  $\sqrt{2}$ ; 78.  $\sqrt{2}$  и 3; 79.  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{3}$ ; 80. 3 и 3,01.

81. Можно ли в узлах клетчатой бумаги (все клетки одинаковы) поместить вершины равностороннего треугольника?

### §3. Числовые равенства и неравенства

Доказать справедливость следующих равенств:

1.  $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{\sqrt{5} - \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{4}}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$ ;

2.  $\sqrt{8 - \sqrt{15}} = \frac{1}{2}(\sqrt{30} - \sqrt{2})$ ;

3.  $\sqrt{14 - 5\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{50} - \sqrt{6})$ ;

4.  $7778^2 - 2223^2 = 55555555$ ;

5.  $1 + 2 + 3 + \dots + 1000 = 500500$ ;

6.  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{100} = 2^{101} - 1$ ;

7.  $\frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{2}{63 \cdot 65} = \frac{12}{65}$ ;

8.  $\frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{99}} = 9$ ;

9.  $\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1} + \dots + \frac{1}{100^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right)$ ;

10.  $(1 - 2^{-2})(1 - 4^{-2}) \dots (1 - 100^{-2}) = \frac{101}{200}$ .

Какое из следующих двух чисел больше:

11.  $27^3$  или  $9^6$ ; 12.  $4^{300}$  или  $3^{400}$ ;

13.  $3^{600}$  или  $6^{300}$ ; 14.  $(1 + \sqrt{5})^{100}$  или  $3^{100}$ ;

15.  $\sqrt{2}$  или 1,41; 16.  $\sqrt{2}$  или 1,42;

17.  $\sqrt{3}$  или 1,73; 18.  $\sqrt{3}$  или 1,74;

19.  $\sqrt{5} + \sqrt{10}$  или 5;  
 20.  $\sqrt{107} - \sqrt{35}$  или 4;  
 21.  $2\sqrt{3}$  или  $3\sqrt{2}$ ;  
 22.  $2\sqrt[3]{3}$  или  $3\sqrt[3]{2}$ ;  
 23.  $\sqrt[4]{15}$  или  $\sqrt{3,9}$ ;  
 24.  $3\sqrt[3]{4}$  или  $4\sqrt[3]{2}$ ;  
 25.  $(2\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}$  или  $(3\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}$ ;  
 26.  $8^{\frac{3}{2}}$  или  $12^{\frac{3}{4}}$ ;  
 27.  $\sqrt[3]{12}$  или  $\sqrt{5}$ ;  
 28.  $\sqrt{2}$  или  $\sqrt[3]{3}$ ;  
 29.  $12^{\frac{3}{2}}$  или  $18^{\frac{2}{3}}$ ;  
 30.  $64^{\frac{4}{3}}$  или  $36^{\frac{3}{2}}$ ;  
 31.  $\sqrt[12]{2}$  или  $\sqrt[15]{3}$ ;  
 32.  $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^9$  или  $4^9$ ;  
 33.  $\sqrt{5} + \sqrt{6}$  или  $\sqrt{3} + \sqrt{8}$ ;  
 34.  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$  или  $\sqrt[3]{26}$ ;  
 35.  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  или  $\sqrt{7}$ ;  
 36.  $\sqrt{7} + \sqrt{15}$  или 7;  
 37.  $\sqrt{5} + \sqrt{6}$  или  $\sqrt{3} + \sqrt{8,2}$ ;  
 38.  $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^{49}$  или  $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^{49}$ ;  
 39.  $\sqrt{37} + \sqrt{14}$  или  $6 - \sqrt{15}$ ;  
 40.  $\sqrt{21} - \sqrt{5}$  или  $\sqrt{20} - \sqrt{6}$ ;  
 41.  $\sqrt{11} - \sqrt{10}$  или  $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ ;  
 42.  $\sqrt{12} - \sqrt{11}$  или  $\sqrt{11} - \sqrt{10}$ ;  
 43.  $3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}$  или  $6\sqrt{5}$ ;  
 44.  $(\frac{1}{3})^{100}$  или  $(\frac{1}{10})^{50}$ ;  
 45.  $(\frac{1}{18})^{\frac{3}{4}}$  или  $(\frac{1}{12})^{\frac{4}{3}}$ ;  
 46.  $(\frac{3}{7})^{\frac{6}{11}}$  или  $(\frac{3}{8})^{\frac{6}{11}}$ ;  
 47.  $(\frac{2}{5})^{\frac{5}{8}}$  или  $(\frac{2}{5})^{\frac{3}{4}}$ ;  
 48.  $(\frac{1}{5})^{\frac{1}{6}}$  или  $(\frac{1}{6})^{\frac{1}{5}}$ ;  
 49.  $(\frac{1}{6})^{\frac{1}{6}}$  или  $(\frac{1}{5})^{\frac{1}{5}}$ ;  
 50.  $\frac{\sqrt[15]{3^{10}}}{\sqrt[10]{3^3}}$  или  $\frac{\sqrt[14]{3^9}}{\sqrt[9]{3^2}}$ ;  
 51.  $\frac{\sqrt[8]{2^5}}{\sqrt[6]{2}}$  или  $\frac{\sqrt[4]{2^7}}{\sqrt[3]{2^4}}$ ;  
 52.  $\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}}$  или  $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + 0,011$  ?

Доказать справедливость следующих неравенств:

53.  $3^{34} > 2^{51}$ ;  
 54.  $202^{303} > 303^{202}$ ;  
 55.  $(\frac{2}{3})^{50} + (\frac{3}{2})^{50} > 2$ ;  
 56.  $\frac{2^{100} + 3^{100}}{2} > 6^{50}$ ;  
 57.  $2^{30} + 3^{30} + 4^{30} > 3 \cdot 24^{10}$ ;  
 58.  $31^{11} < 17^{14}$ ;  
 59.  $100! > 100^{50}$ ;  
 60.  $\sqrt[100]{6} > \sqrt[100]{8} - \sqrt[100]{2}$ ;  
 61.  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$ ;  
 62.  $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdots \frac{119}{121} < \frac{1}{\sqrt{41}}$ ;  
 63.  $\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \cdots + \frac{1}{100} > \frac{1}{2}$ ;  
 64.  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{1000^2} < 1$ .

Пусть  $a$  – действительное число. Расположить в порядке возрастания следующие числа:

65.  $a^2, 5a^2, 2a^2$ ;      66.  $a, 5a, 2a$ ;      67.  $a, a^3, a^5$ ;

68.  $a, a^2, a^4$ ;      69.  $a, \frac{1}{a}$ .

Пусть  $a, b, c, d$  – любые действительные числа.

Доказать справедливость следующих неравенств:

70.  $a^2 + b^2 \geq 2|a||b| = 2|ab|$ ;

71.  $(a + b)^2 \geq 4ab$ ;

72.  $\frac{2a}{a^2 + 1} \leq 1$ ;

73.  $a^2 + 1 + \frac{1}{a^2 + 1} \geq 2$ ;

74.  $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$ ;

75.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ ;

76.  $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$ ;

77.  $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ ;

78.  $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2$ ;

79.  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq |a| + |b| + |c|$ ;

80.  $(ab + cd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ ;

81.  $(ab - cd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ ;

82.  $5a^2 - 6ab + 5b^2 \geq 0$ ;

83.  $3a^2 - 4ab + 2, 1b^2 \geq 0$ ;

84.  $a^4 + b^4 \geq a^3b + b^3a$ ;

85.  $a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 \geq 0$ ;

86.  $a^4 - 2a^3b + 2a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \geq 0$ ;

87.  $a^4 - 3a^3b + 3a^2b^2 - 3ab^3 + b^4 \geq 0$ ;

88.  $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ ;

89.  $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$ .

Пусть  $a, b, c$  – любые положительные числа.

Доказать справедливость следующих неравенств:

90.  $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a$ ;

91.  $2a^3 + 2a^2 + 1 > a$ ;

92.  $\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$ ;

93.  $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ;

94.  $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$ ;

95.  $\frac{a+bc^4}{c^2} \geq 2\sqrt{ab}$ ;

96.  $\frac{1+a+b}{2} \geq \frac{1+a+b+ab}{2+a+b}$ ;

$$97. (a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc;$$

$$98. \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{b+a};$$

$$99. (a+b+c) \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac};$$

$$100. \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};$$

$$101. (a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geq 16abc;$$

$$102. \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}};$$

$$103. \frac{a^3+b^3}{2} \geq 3ab^2 - 4;$$

$$104. \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}};$$

$$105. ab(a+b-2c) + bc(b+c-2a) + ac(a+c-2b) \geq 0;$$

$$106. ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \geq 6abc;$$

$$107. (a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) \geq 2(a+b)(b+c)(a+c);$$

$$108. (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9;$$

$$109. \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3;$$

$$110. \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{b+a} \geq \frac{3}{a+b+c};$$

$$111. \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2};$$

$$112. \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3};$$

$$113. (\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 \geq 64ab(a+b)^2.$$

114. Доказать, что если действительные числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют условиям  $|a| < 1$  и  $|b| < 1$ , то  $|a+b| < |1+ab|$ .

115. Доказать, что если действительные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  удовлетворяют условию  $a+b+c=0$ , то  $ab+bc+ac \leq 0$ .

116. Доказать, что если действительные числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют условию  $a^2+b^2=1$ , то  $|a+b| \leq \sqrt{2}$ .

117. Доказать, что если действительные числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют условию  $a+b=1$ , то а)  $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$ ; б)  $a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}$ .

118. Доказать, что если действительные числа  $a, b$  и  $c$  удовлетворяют условию  $a+b+c \geq 3$ , то  $a^2+b^2+c^2 \geq 3$ .

119. Доказать, что если действительные числа  $a, b$  и  $c$  удовлетворяют условию  $a+b+c=6$ , то  $a^2+b^2+c^2 \geq 12$ .

120. Доказать, что если положительные числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют условию  $ab=1$ , то  $(1+a)(1+b) \geq 4$ .

121. Доказать, что если положительные числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют условию  $a+b > 2$ , то  $a^2+b^2 > 2$ .

122. Доказать, что если положительные числа  $a, b$  и  $c$  удовлетворяют условию  $a+b=c$ , то  $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}} > c^{\frac{2}{3}}$ .

123. Доказать, что если действительные числа  $a, b$  и  $c$  удовлетворяют условию  $a+b \geq c \geq 0$ , то

$$\text{а) } a^2+b^2 \geq \frac{c^2}{2}; \text{ б) } a^4+b^4 \geq \frac{c^4}{8}; \text{ в) } a^8+b^8 \geq \frac{c^8}{128}.$$

124. Доказать, что для любых действительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n$  справедливо неравенство

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

125. Доказать, что для любых действительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  справедливо неравенство

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

126. Доказать, что для любых действительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , удовлетворяющих условию  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$  справедливо неравенство  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}$ .

Доказать, что для любого натурального числа  $n$  справедливы следующие неравенства:

$$127. \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} < 2;$$

$$128. \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2};$$

$$129. \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1;$$

$$130. \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \frac{2n-1}{n};$$

$$131. \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (4n+1)} < \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$132. \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4};$$

$$133. 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

134. Доказать, что для любых натуральных чисел  $n$  и  $p$  справедливы неравенства

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$

135. Доказать, что для любого положительного числа  $a$  и любых натуральных чисел  $n$  и  $k$  таких, что  $n \leq k$  справедливо неравенство

$$a^k + \frac{1}{a^k} \geq a^{k-n} + \frac{1}{a^{k-n}}.$$

136. Среди всех положительных чисел  $a$  и  $b$  удовлетворяющих условию  $a + b = 1$ , найти такие числа, произведение которых будет наибольшим.

137. Среди всех положительных чисел  $a$  и  $b$  удовлетворяющих условию  $ab = 1$ , найти такие числа, сумма которых будет наименьшей.

138. Среди всех положительных чисел  $a$  и  $b$  удовлетворяющих условию  $a + b = 2$ , найти такие числа, сумма квадратов которых будет наименьшей.

139. Какой наибольший по площади прямоугольный участок можно огородить забором длины  $l$  ?

140. Какую наименьшую длину должен иметь забор, чтобы им можно было огородить прямоугольный участок, площадь которого  $S$  ?

Найти все положительные числа  $a$ , при каждом из которых следующее выражение принимает наибольшее числовое значение:

141.  $a(6 - a)$  ;      142.  $(1 + 2a)(3 - 2a)$  ;      143.  $a\sqrt{10 - a^2}$ .

#### §4. Прогрессии

Найти формулу общего члена арифметической прогрессии

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , если известно, что:

- |                             |                               |
|-----------------------------|-------------------------------|
| 1. $a_1 = 1, a_2 = -5$ ;    | 2. $a_1 = -3, a_2 = 0$ ;      |
| 3. $a_1 = 6, a_{10} = 33$ ; | 4. $a_4 = -4, a_{17} = -17$ . |

Для любого натурального числа  $n$  вычислить следующие суммы:

- |                                     |                                      |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 5. $1 + 2 + 3 + \dots + n$ ;        | 6. $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ ;        |
| 7. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ ; | 8. $3 + 8 + 13 + \dots + (5n + 3)$ . |



24. Числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и числа  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b}$ ,  $\frac{1}{c}$  образуют арифметические прогрессии. Доказать, что  $a = b = c$ .

Найти первый член и разность арифметической прогрессии  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  если известно, что:

25.  $a_2 + a_4 = 16$ ,  $a_1 a_5 = 28$  ;

26.  $a_1 a_{11} = 44$ ,  $a_2 + a_{10} = 24$ .

27. Найти сумму

а) всех двузначных четных чисел ;

б) всех двузначных нечетных чисел ;

в) всех трехзначных чисел ;

г) всех нечетных трехзначных чисел.

28. Найти все арифметические прогрессии, у каждой из которых среднее арифметическое  $n$  первых членов равно  $n$  .

29. Найти сумму всех двузначных чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3.

30. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если сумма ее первых трех членов равна 27, а сумма их квадратов равна 275.

31. Найти сумму таких первых ста чисел натурального ряда, каждое из которых при делении на 5 дает в остатке 1.

32. Доказать, что если положительные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  образуют арифметическую прогрессию, то числа

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

также образуют арифметическую прогрессию.

33. Доказать, что числа  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$  не могут быть членами одной и той же арифметической прогрессии.

34. Найти  $p$ -й член  $a_p$  арифметической прогрессии  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , если известно, что  $a_m = n$ ,  $a_n = m$ .

35. Даны две арифметические прогрессии 5, 8, 11, ... и 3, 7, 11, 15, ..., содержащие по 100 членов. Сколько одинаковых членов они имеют ?

36. Найти сумму первых 20 членов арифметической прогрессии  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , если известно, что  $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$ .

37. Доказать, что если числа  $a, b, c$  образуют арифметическую прогрессию, то

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a - b)^2 + (a + b + c)^2.$$

Найти числа, одновременно являющиеся членами двух следующих арифметических прогрессий

38. 2, 5, 8, ..., 332 и 7, 12, 17, ..., 157 ;

39. 3, 7, 11, ..., 407 и 2, 9, 16, ..., 709.

40. Доказать, что если  $S_n, S_{2n}$  и  $S_{3n}$  – суммы, соответственно,  $n, 2n$ , и  $3n$  членов арифметической прогрессии  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_{2n}, \dots, a_{3n}, \dots$ , то

а)  $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$  ;

б)  $S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n = 0$ .

Даны две геометрические прогрессии  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  и  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ . Является ли геометрической прогрессией последовательность

41.  $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots$ ;

42.  $a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n, \dots$ ;

43.  $a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n, \dots$ ;

44.  $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$  в случае, если все  $b_i \neq 0$  ? ;

Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ , если известно, что

45.  $b_1 + b_4 = \frac{7}{16}$ ,  $b_3 - b_2 + b_1 = \frac{7}{8}$  ;

46.  $b_2 - b_1 = 4$ ,  $b_3 - b_1 = 8$ .

47. Найти четыре числа  $b_1, b_2, b_3, b_4$ , если известно, что числа  $b_2, b_3, b_4$  образуют геометрическую прогрессию, а числа  $b_1, b_2, b_3$  образуют арифметическую прогрессию и

$b_1 + b_4 = 37, b_2 + b_3 = 38$ .

48. Найти три числа  $b_1, b_2, b_3$ , образующие арифметическую прогрессию, если известно, что их сумма равна 30, а числа  $b_1 - 5, b_2 - 4, b_3$  образуют геометрическую прогрессию.

49. Доказать, что если положительные, отличные от 1 числа  $a, b, c$  образуют геометрическую прогрессию, то для любого положительного числа  $n$ , отличного от 1, числа

$$\frac{1}{\log_a n}, \quad \frac{1}{\log_b n}, \quad \frac{1}{\log_c n}$$

образуют арифметическую прогрессию.

50. Найти число членов  $n$  геометрической прогрессии  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ , если известно, что  $b_1 + b_5 = 51$ ,  $b_2 + b_6 = 102$ ,  $S_n = 3069$ .

51. Найти  $p$ -й член  $b_p$  геометрической прогрессии  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ , если известно, что  $b_m = k$ ,  $b_n = l$ .

52. Могут ли числа 11, 12, 13 быть членами одной и той же геометрической прогрессии (не обязательно последовательными)?

53. Могут ли числа 2, 6,  $\frac{9}{2}$  быть членами одной и той же арифметической прогрессии (не обязательно последовательными)?

54. Могут ли числа 18, 8,  $\frac{64}{27}$  быть членами одной и той же геометрической прогрессии (не обязательно последовательными)?

55. Пусть  $a$  – отличное от нуля и единицы число, а  $n$  – любое натуральное число. Вычислить сумму

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2 + \dots + \left(a^n - \frac{1}{a^n}\right)^2.$$

56. Вычислить сумму  $1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11\dots1}_{n \text{ цифр}}$ .

Найти все числа  $x$ , удовлетворяющие следующему условию

57.  $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$ ;

58.  $1 + x + x^2 + \dots + x^{100} = 0$ ;

59.  $1 + x + x^2 + \dots + x^{99} = 0$ .

60. Доказать, что если числа  $\log_k x, \log_m x, \log_n x$  образуют арифметическую прогрессию, то

$$n^2 = (kn)^{\log_k m}.$$

61. Найти все числа  $x, y, z$ , для которых  $2x^4 = y^4 + z^4$ ,  $xyz = 8$  и числа  $\log_y x, \log_z y, \log_x z$  образуют геометрическую прогрессию.

62. Числа  $\alpha, \beta, \gamma$  образуют арифметическую прогрессию с разностью  $\frac{\pi}{3}$ . Доказать, что

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha = -3.$$

63. Доказать, что для любого натурального числа  $n$  и любого действительного числа  $x$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} & (1 + x + x^2 + \dots + x^n)^2 - x^n = \\ & = (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})(1 + x + x^2 + \dots + x^{n+1}). \end{aligned}$$

64. Доказать, что если  $S_n, S_{2n}$  и  $S_{3n}$  — суммы, соответственно,  $n, 2n$  и  $3n$  членов геометрической прогрессии  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots, b_{2n}, \dots, b_{3n}, \dots$ , то

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2.$$

65. Найти острый угол прямоугольного треугольника, если его стороны образуют геометрическую прогрессию.

66. На прямой дано  $n$  точек. Сколько существует отрезков с концами в этих точках?

67. На плоскости дано  $n$  параллельных прямых и  $m$  пересекающих их прямых, параллельных между собой. Сколько существует параллелограммов, стороны которых лежат на этих прямых?

### §5. Элементы комбинаторики и бином Ньютона

Вычислить:

$$1. \left( \frac{100!}{99!} - \frac{99!}{98!} \right) + \left( \frac{50!}{45!} - \frac{30!}{25!} \right); \quad 2. \left[ \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right] \cdot n!;$$

$$3. C_5^3 + C_4^2 + C_3^1;$$

$$4. C_5^3 C_4^2 + C_4^2 C_3^1 + C_3^1 C_3^0;$$

$$5. \frac{C_{100}^{98} + C_{1000}^{998}}{C_{1000}^2 + C_{100}^2};$$

$$6. \frac{C_7^4 + C_7^3 - C_8^4}{C_{10}^5 + C_{10}^6 - C_{11}^6} + \frac{A_3^2}{P_2};$$

$$7. A_5^2 : P_2 + A_{10}^5 : 7P_5;$$

$$8. \frac{A_5^3 - A_5^2}{P_2} + \frac{P_5}{P_2}.$$

9. Сколькими способами можно составить список из 10 человек по 10 человек ?

10. В классе 10 предметов и 5 уроков в день. Сколькими способами можно составить расписание на один день ?

11. Сколько можно составить целых чисел, каждое из которых изображалось бы тремя различными цифрами ?

12. Сколькими способами можно расставить 7 книг на полке ?

13. Сколько девятиричных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, ..., 9, если ни одна цифра не повторяется ? Сколько среди них таких, в которых цифры 2 и 5

а) стоят рядом ; б) не стоят рядом ?

14. Сколькими способами можно выбрать 3 книги из 4 книг разных авторов ?

15. Имеется четырехтомное собрание сочинений книг одного автора и шеститомное собрание сочинений книг другого автора. Сколько наборов из 4 книг можно сделать, чтобы в наборе было 2 книги первого автора и 2 книги другого автора ?

16. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные пятизначные числа  $\overline{abcde}$  без повторения цифр. Сколько среди этих чисел таких, у которых а)  $a = 1$  ; б)  $a \neq 2$  ; в)  $a = 3, b = 2$  ; г)  $a = 3, b = 4, c = 5$  ?

17. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные пятизначные числа  $\overline{abcde}$  ( повторение цифр разрешается). Сколько среди этих чисел таких, у которых а)  $a = 1$  ; б)  $a \neq 2$ ; в)  $a = 3, b = 2$ ; г)  $a = 3, b = 4, c = 5$  ?

18. Сколькими способами можно в группе из 40 человек выбрать комсорга, старосту и профорга ?

19. Из 20 человек надо выбрать 7. Сколькими способами можно это сделать ?

20. Сколько диагоналей имеет: а) выпуклый пятиугольник ; б) выпуклый двенадцатиугольник ; в) выпуклый  $n$ -угольник ?

21. Сколькими способами можно группу из 15 человек разделить на две группы так, чтобы в одной было 4 человека, а в другой 11 ?

22. Из 8 цветков ( роза, астра, тюльпан, гвоздика, гладиолус, фиалка, ромашка, лилия) надо составить букет так, чтобы в него вошло не менее двух цветков. Сколько способов существует для этого ?

23. Из 5 офицеров и 10 солдат надо составить наряд так, чтобы в него входили 2 офицера и 3 солдата. Сколькими способами можно это сделать ?

24. На книжной полке помещается 30-томное собрание сочинений. Сколькими способами книги можно расставить так, чтобы при этом 1-й и 2-ой тома: а) стояли рядом; б) не стояли рядом?

25. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 8 мужчин и 8 женщин так, чтобы никакие двое мужчин или двое женщин не сидели рядом ?

26. Из 7 мужчин и 4 женщин надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами можно это сделать ?

Доказать, что для любых натуральных чисел  $n$  и  $k$  таких, что  $1 \leq k \leq n$  справедливы равенства :

$$27. C_{n+1}^{k+1} = C_n^k \cdot \frac{n+1}{k+1}; \quad 28. kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1};$$

$$29. C_n^k = C_n^{n-k}; \quad 30. C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n;$$

$$31. C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^nC_n^n = 3^n;$$

$$32. 1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0;$$

$$33. C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k;$$

$$34. C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+k-1}^k = C_{n+k}^k;$$

$$35. (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n;$$

$$36. C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1};$$

$$37. C_n^1 - 2C_n^2 + \dots + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0;$$

$$38. C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}.$$

Разложить <sup>1</sup>:

$$39. (a+b)^7; \quad 40. (a-2b)^6; \quad 41. (1+2x)^5;$$

$$42. (x + \frac{1}{x})^8; \quad 43. (1 + \sqrt{2})^5; \quad 44. (1 - \sqrt{2})^5;$$

$$45. \frac{1}{36}(\sqrt{6} + \sqrt{12})^4; \quad 46. \frac{1}{27}(\sqrt{3} - \sqrt{15})^6.$$

47. Найти два средних члена разложения  $(a^3 + ab)^{31}$ .

48. Найти номер наибольшего члена разложения  $(1 + 0,001)^{1000}$ .

49. Известно, что  $C_n^x = C_n^y$ . Верно ли, что  $x = y$ ?

50. Сколько рациональных членов содержит разложение

а)  $(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5})^{124}$ ; б)  $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$ ?

Найти все натуральные числа  $n$ , удовлетворяющие следующему условию:

$$51. C_n^{n-2} + 2n = 9; \quad 52. C_n^{n-2} = C_n^3;$$

$$53. C_{n-1}^{n-2} = n^2 - 13; \quad 54. C_n^5 < C_n^3;$$

$$55. C_{2n}^7 > C_{2n}^5; \quad 56. C_{15}^{n-2} > C_{15}^n.$$

---

<sup>1</sup>В этом параграфе вместо слов "разложить по формуле бинома Ньютона" будем писать кратко "разложить".

57. Доказать, что число  $\sqrt{10} \left[ (1 + \sqrt{10})^{100} - (1 - \sqrt{10})^{100} \right]$  — целое.

58. Доказать, что число  $11^{10} - 1$  делится на 100.

59. Доказать, что число  $101^{100} - 1$  делится на 10000.

60. Доказать, что число  $11^{100} - 1$  делится на 1000.

61. В разложении  $(a + \frac{1}{a})^{12}$  найти коэффициент при  $a^8$ .

62. В разложении  $(2a - \frac{1}{3a})^{10}$  найти коэффициент при  $a^4$ .

63. В разложении  $(\frac{x}{3} - \frac{3}{x})^{12}$  найти коэффициент при  $x^4$ .

64. Найти число  $x$ , если известно, что третий член разложения  $(x + x^{\lg x})^5$  равен  $10^6$ .

65. Пусть  $(x - 2)^{100} = a_0 + a_1x + \dots + a_{100}x^{100}$ . Найти:

а)  $a_{97}$ ; б)  $a_0 + a_1 + \dots + a_{100}$ ; в)  $a_1 + 2a_2 + \dots + 100a_{100}$ .

66. Пусть  $(1 + 2x + 3x^2)^{10} = a_0 + a_1x + \dots + a_{20}x^{20}$ . Найти  $a_4$ .

67. Пусть  $(1 + x^2 - x^3)^9 = a_0 + a_1x + \dots + a_{27}x^{27}$ . Найти  $a_8$ .

68. Пусть  $(1 + x + x^2 + x^3)^5 = a_0 + a_1x + \dots + a_{15}x^{15}$ . Найти  $a_{10}$ .

Для любого натурального числа  $n$  вычислить следующие суммы:

$$69. C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^{2[\frac{n}{2}]};$$

$$70. C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^{2[\frac{n}{2}]-1};$$

$$71. (C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - \dots + (-1)^n (C_n^n)^2.$$

72. Доказать, что для любого натурального числа  $n$  справедливы неравенства:  $2 < (1 + \frac{1}{n})^n < 3$ .

## §6. Степень действительного числа

Вычислить:

$$1. \frac{2^{-3} - (\frac{3}{4})^{-2} \cdot (-\frac{1}{2})^2}{2^{-2} + (-\frac{1}{5})^0 + \frac{3}{4}};$$

$$2. \frac{3^2 \cdot 3^{-1} + (-1, 51)^0}{2^{-2}};$$

$$3. 0,008^{1/3} \cdot 75^0 - (16^{3/2})^{1/3}; \quad 4. \left(2\frac{10}{27}\right)^{-2/3} \cdot 0,81^{-0,5} + \left(\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$5. \left(\frac{9}{16}\right)^{-1/2} : \left(\frac{25}{36}\right)^{-1/2} - \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-1/2}\right]^{-2} \left(\frac{1}{27}\right)^{-1/3};$$

$$6. (9^{-2/3})^{3/4} - (25^{5/2})^{-1/5} + \left[\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{11}\right)^{6/7}\right]^0 : \left(\frac{1}{36}\right)^{-1/2} + \frac{1}{5};$$

$$7. (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{3}) + 8\sqrt{3};$$

$$8. (\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{10} + 2;$$

$$9. (\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) \cdot (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}).$$

Выяснить, какие из следующих чисел являются положительными:

$$10. \left(\sqrt{7} - \frac{5}{2}\right)^7; \quad 11. (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{17}; \quad 12. (2 - \sqrt{5})^6;$$

$$13. \left(-\frac{2}{7}\right)^3; \quad 14. \left(2 - \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{13}; \quad 15. (3 - \sqrt[3]{29})^{15};$$

$$16. 2^{300} - 3^{200}; \quad 17. 4^{100} - 32^{50}; \quad 18. 81^{150} \cdot 8^{250} - 3^{600} \cdot 16^{75};$$

$$19. \left(\frac{1}{6}\right)^{100} - \left(\frac{1}{2}\right)^{50}; \quad 20. 5^{-3} - 4^{-3}; \quad 21. \left(\frac{1}{2}\right)^{-20} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-20};$$

$$22. 5^{-63} - 5^{-64}; \quad 23. \left(\frac{1}{5}\right)^{63} - 5^{-63} \cdot (\sqrt{2} - 1)^5.$$

Вычислить:

$$24. 12^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 + \left[16^4 \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^4 \cdot 4^4 - 2^2 \cdot 4^2 \cdot 8^2 \cdot \frac{1}{16^2}\right] \cdot \frac{243^5}{81^3} + \frac{6^6}{2^5 \cdot 3};$$

$$25. \left(-\frac{10}{17}\right)^5 \cdot \left(-\frac{51}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{51}{15}\right)^2 \cdot \left(-\frac{27}{16}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{27}\right)^2;$$

$$26. \left[\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{3}}\right)^4\right]^3 \cdot \left[\frac{(\sqrt{2})^{10}}{(-\sqrt{2})^{13}}\right]^2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[5]{12}}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5;$$

$$27. \frac{3^{300} \cdot 4^{50} \cdot 2^{200}}{6^{300}} + \frac{(3^6)^7}{9^{10} \cdot 3^{21}};$$

$$28. \sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{125} + \sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{81}; \quad 29. \sqrt{373^2 - 252^2};$$

$$30. \sqrt{153^2 - 72^2} + \sqrt{200^2 - 56^2}; \quad 31. \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2};$$

$$32. \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{36}{64}}\right) \cdot \sqrt[3]{\frac{64}{27}} \cdot \frac{\sqrt{126}}{\sqrt{14}};$$

$$33. \frac{\sqrt[3]{54}}{3\sqrt[3]{2}} + \sqrt[4]{3^{12}} - (\sqrt[4]{2})^8 - (\sqrt[6]{16})^3;$$

$$34. \frac{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[15]{2}}{\sqrt[5]{3\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{9}};$$

$$35. \left(\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right)^3\right)^{1/6} + \frac{5^{-2}}{2^{-5}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^6 \cdot \frac{1}{2^{15}} \cdot 3^4 \cdot 5^8;$$

$$36. \left(\sqrt[5]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{8^{10}}}}\right)^{10} : \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}}\right)^{10} \cdot \frac{1}{2^8};$$

$$37. \sqrt{6 - \sqrt{20}}; \quad 38. \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{10 - 2\sqrt{21}};$$

$$39. \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{1 + \sqrt{2}}}.$$

Освободиться от иррациональности в знаменателе:

$$40. \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$41. \frac{5}{\sqrt[3]{12}};$$

$$42. \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}};$$

$$43. \frac{1}{\sqrt{8} - \sqrt{5}};$$

$$44. \frac{4}{1 - \sqrt{3} + \sqrt{2}};$$

$$45. \frac{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}};$$

$$46. \frac{12}{3 + \sqrt{2} - \sqrt{5}};$$

$$47. \frac{1}{\sqrt{5 + \sqrt{2}}};$$

$$48. \frac{15}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7}};$$

$$49. \frac{1}{1 - \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{6}};$$

$$50. \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}};$$

$$51. \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}};$$

$$52. \frac{7}{1 - \sqrt[4]{2}};$$

$$53. \frac{1}{1 - \sqrt[4]{2} + \sqrt{2}};$$

$$54. \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}};$$

$$55. \frac{1}{2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}};$$

$$56. \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}};$$

$$57. \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}}};$$

$$58. \frac{1}{(2 - \sqrt{3})^5};$$

$$59. \frac{1}{\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{3}};$$

$$60. \frac{1}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8} + 2};$$

$$61. \frac{1}{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{10}};$$

$$62. \frac{1}{2 + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}};$$

$$63. \frac{1}{\sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{3}}.$$

## §7. Логарифмы

Выяснить, какие из следующих чисел являются положительными:

1.  $\log_2 5$ ;      2.  $\log_3 4$ ;      3.  $\log_{1/3} 3$ ;      4.  $\log_7 1$ ;  
 5.  $\log_{\pi/4} 5$ ;      6.  $\log_{1/2} \frac{1}{3}$ ;      7.  $\log_{1/8} \frac{1}{5}$ ;      8.  $\log_{1/3} \frac{1}{2}$ ;  
 9.  $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$ ;      10.  $\lg \arctg 2$ ;      11.  $\lg \sin 87^\circ$ ;      12.  $\lg \tg \frac{\pi}{6}$ ;  
 13.  $\log_{0,2} \ctg \frac{\pi}{3}$ ;      14.  $\log_2 \left( \frac{1}{\cos 5^\circ} + \cos 5^\circ \right)$ .

Вычислить:

15.  $\frac{\log_2 4 + \log_2 16}{\log_{1/2} 4 + \log_{1/2} 16}$ ;      16.  $\frac{\log_{1/\sqrt{2}} 2 \cdot \log_{1/2} \frac{1}{8}}{\log_2 4 \sqrt{2} \cdot \log_4 \sin \frac{\pi}{4}}$ ;  
 17.  $\frac{\log_{\sqrt{3}} \tg \frac{\pi}{6} + \log_{27} 243}{\log_{\sqrt{3}} 27 - \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4}}$ ;      18.  $\frac{\lg 2 + \lg 5}{\log_2 3 - \log_2 6}$ ;  
 19.  $\frac{\log_3 4, 2 - \log_3 1, 4}{\log_6 4 + \log_6 9}$ ;      20.  $\frac{\log_{\sqrt{6}} \sqrt{2} + \log_{\sqrt{6}} \sqrt{3}}{\log_{0,1} 50 - \log_{0,1} 0,5}$ ;  
 21.  $\frac{1}{64} \cdot \log_{2\sqrt{2}} 8 \cdot \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} \cdot \log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{16}$ ;      22.  $3^{\log_{\sqrt{3}} 15}$ ;  
 23.  $343^{1 - \log_{49} 13}$ ;      24.  $3^{\log_{\sqrt[3]{9}} 41 + 1}$ ;      25.  $\log_3 \frac{\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[6]{3}}{\sqrt[5]{27}}$ ;  
 26.  $\sqrt{2} \left( \frac{1}{5} \right)^{\log_{25} 2 - 5}$ ;      27.  $3^{\log_{\sqrt[3]{9}} 17} + 2^{\frac{1}{\log_{15} 8}}$ ;  
 28.  $\sqrt[3]{\left( \frac{1}{\sqrt{243}} \right)^{3 - \frac{\log_4 19}{3 \log_4 27}}}$ ;      29.  $\sqrt[4]{\left( \frac{1}{125} \right)^{2 - \frac{\log_3 17}{2 \log_3 \sqrt[3]{25}}}}$ ;  
 30.  $\left( \sqrt[8]{\frac{1}{243}} \right)^{\frac{1}{6 \log_2 3} + \log_{9\sqrt{3}} 216}$ ;      31.  $\left( \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{7 \log_5 2}} \cdot \left( \sqrt[5]{9} \right)^{\frac{1}{5 \log_5 3}}$ ;

32.  $5^{\log_{1/5} \frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} + \log_{1/2} \frac{1}{10 + 2\sqrt{21}}$  ;
33.  $6^{\log_{\sqrt{6}} 3} + \log_{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \log_{1/3} \frac{1}{7 + 2\sqrt{10}}$  ;
34.  $4^{5\log_{4\sqrt{2}}(3-\sqrt{6}) - 6\log_8(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$  ;
35.  $2^{\log_{2\sqrt{2}}(5-\sqrt{10}) + 8\log_{1/4}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$  ;
36.  $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \lg \operatorname{tg} 3^\circ + \dots + \lg \operatorname{tg} 89^\circ$  ;
37.  $\lg \sin 1^\circ \cdot \lg \sin 2^\circ \cdot \dots \cdot \lg \sin 90^\circ$  ;
38.  $\lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$  ;
39.  $\frac{1 + 2\log_3 2}{(1 + \log_3 2)^2} + \log_6^2 2$  ;
40.  $\frac{\log_3 12}{\log_{36} 3} - \frac{\log_3 4}{\log_{108} 3}$  ;
41.  $\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$  ;
42.  $\frac{\log_5 250}{\log_{50} 5} - \frac{\log_5 10}{\log_{1250} 5}$  ;
43.  $\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$  .

Какое из следующих двух чисел больше:

44.  $\log_2 6$  или  $\log_2 5$  ?
45.  $\log_5 \frac{1}{2}$  или  $\log_5 \frac{1}{3}$  ?
46.  $\log_{1/3} 2$  или  $\log_{1/3} 4$  ?
47.  $\log_{1/7} \frac{4}{5}$  или  $\log_{1/7} \frac{5}{6}$  ?
48.  $\log_{1/2} \frac{1}{3}$  или  $\log_{1/3} \frac{1}{2}$  ?
49.  $\log_{1/5} \frac{1}{7}$  или  $\log_{1/7} \frac{1}{5}$  ?
50.  $\log_4 5$  или  $\log_6 5$  ?
51.  $(\log_2 5)^2$  или  $\log_2 20$  ?
52.  $\log_3 7$  или  $\log_7 27$  ?
53.  $\log_{24} 72$  или  $\log_{18} 36$  ?
54.  $\log_2 5, 1$  или  $\log_8 126$  ?
55.  $\log_2 3$  или  $\log_5 8$  ?
56.  $\log_{3/4} \frac{2}{5}$  или  $\log_{5/2} \frac{3}{4}$  ?
57.  $\log_2 5$  или  $\log_5 32$  ?
58.  $\log_6 729$  или  $\log_3 16$  ?
59.  $\log_9 10$  или  $\lg 11$  ?
60.  $\log_4 6$  или  $\log_6 8$  ?
61.  $\log_4 26$  или  $\log_6 17$  ?
62.  $\log_3 16$  или  $\log_2 5$  ?
63.  $\log_3 7$  или  $\log_2 3$  ?
64.  $2^{\log_3 5, 1}$  или  $5^{\log_3 2}$  ?
65.  $\log_3 10 + 4 \lg 3$  или  $4$  ?
66.  $2^{\log_5 3}$  или  $3^{\log_5 \frac{1}{2}}$  ?
67.  $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg \frac{1}{7}} + 0, 1$  или  $\left(\frac{1}{7}\right)^{\lg \frac{1}{5}}$  ?
68.  $3^{\log_4 2}$  или  $2^{\log_2 7^3}$  ?
69.  $10^{\log_9 3}$  или  $7^{\log_4 2}$  ?
70.  $(2, 1)\sqrt{\log_2 3}$  или  $3\sqrt{\log_3 2}$  ?
71.  $\frac{4}{\log_5 \frac{1}{2}}$  или  $\frac{7}{\log_5 \frac{1}{2}}$  ?

72.  $8\log_{1978}1971$  или  $1 + 7\log_{1978}1970$  ?  
 73.  $4\log_{1759}1753$  или  $1 + 3\log_{1759}1751$  ?  
 74.  $8\log_21863$  или  $3\log_{16}1862 + \log_{16}1866$  ?  
 75. 8 или  $\log_{1147}1154 + 7\log_{1147}1146$  ?

Доказать справедливость следующих неравенств:

76.  $\log_3\pi + \log_\pi 3 > 2$  ;                      77.  $\log_319 \cdot \log_{1/7}3 \cdot \log_4\frac{1}{7} > 2$  ;  
 78.  $\log_215 \cdot \log_{1/6}2 \cdot \log_3\frac{1}{6} > 2$  ;    79.  $\log_{189}1323 > \log_{63}147$  ;  
 80.  $\log_{135}675 < \log_{45}75$  ;                      81.  $\log_{20}80 < \log_{80}640$  ;  
 82.  $\log_375 < \log_222$  ;                          83.  $\log_460 < \log_330$  ;  
 84.  $\log_370 < \log_220$  ;                          85.  $\log_325 < \log_211$  ;  
 86.  $\log_{135}675 > \log_{15}60 > \log_{60}480$  .

87. Пусть  $n$  – натуральное число, большее единицы. Доказать справедливость неравенства  $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$ .

Известно, что  $\lg 2 = a$ ,  $\lg 3 = b$ ,  $\lg 5 = c$ .

Найти логарифмы по основанию 10 следующих чисел:

88. 90 ; 89.  $\frac{5}{6}$  ;    90. 20 ;                      91.  $\frac{1}{30}$  ;    92. 8 ;  
 93. 60 ; 94. 9 ;        95.  $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{5}$  ;    96.  $\sqrt[3]{6}$  ;    97.  $\frac{1}{2}$  ;  
 98.  $\frac{1}{9}$  ;    99.  $\frac{1}{300}$  ;    100.  $\frac{25}{72}$  .

101. Найти  $\log_{25}24$ , если  $\log_615 = \alpha$  и  $\log_{12}18 = \beta$ .

102. Найти  $\log_{49}32$ , если  $\log_214 = \alpha$ .

103. Найти  $\log_{15}49$ , если  $\log_79 = \alpha$  и  $\log_745 = \beta$ .

104. Найти  $\log_{35}28$ , если  $\log_{14}5 = \alpha$  и  $\log_{14}7 = \beta$ .

105. Найти  $\log_53, 38$ , если  $\lg 2 = \alpha$  и  $\lg 13 = \beta$ .

106. Найти  $\log_{175}56$ , если  $\log_{14}7 = \alpha$  и  $\log_514 = \beta$ .

107. Найти  $\log_{35}56$ , если  $\log_{14}7 = \alpha$  и  $\log_{14}5 = \beta$ .

108. Найти  $\log_318$ , если  $\log_515 = \alpha$  и  $\log_210 = \beta$ .

109. Найти  $\log_420$ , если  $\lg 2 = \alpha$ .

110. Доказать, что если  $\alpha = \log_{12}18$  и  $\beta = \log_{24}54$ , то  $\alpha\beta + 5(\alpha - \beta) = 1$ .

## ГЛАВА 2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

### §1. Многочлены

Произвести указанные действия:

1.  $(a + 2b)(a - 2b)(a^2 + 4b^2)$  ; 2.  $(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$  ;
3.  $(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)$  ; 4.  $(a + 2b)(a + c) - (a - 2b)(a - c)$  ;
5.  $ab^2 + (2a - 3b)(a^2 - 3ab + 4b^2) - 6b^2(3a - 2b)$  ;
6.  $ac^2 + (a + 2c)(2a^2 - 5ac - 3c^2) - 2c^3 + ac(a + 12c)$  ;
7.  $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$  ;
8.  $15x^3y^2 - (5xy - 2)(3x^2y + x)$  ;
9.  $(a + b + c)(a + b - c) - 2ab$  ;
10.  $(a + 1)(a + 2)(a^2 + 4)(a - 1)(a^2 + 1)(a - 2)$ .

Разложить на множители следующие многочлены:

- |   |   |
|---|---|
| 11. $ab + cb + ad + cd$ ;               | 12. $ac + bc - ad - bd$ ;               |
| 13. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ ;           | 14. $a^3 - 3a^2 + 4$ ;                  |
| 15. $a^2 + ac - b^2 - bc$ ;             | 16. $a^2 + 2ab + ac + b^2 + bc$ ;       |
| 17. $x^2 + 2x - y^2 + 1$ ;              | 18. $9y^2 - 6y + 1 - x^2$ ;             |
| 19. $y^2 - 10y + 25 - 4m^2$ ;           | 20. $x^2 + 4x - y^2 + 6y - 5$ ;         |
| 21. $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ ; | 22. $(ab + ac + bc)(a + b + c) - abc$ ; |
| 23. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ;   | 24. $a^3 + 5a^2 + 3a - 9$ .             |

Доказать, что для любого действительного числа  $x$  неотрицательны следующие многочлены

- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| 25. $2x^4 + 2x^2 + 1 - x$ ;               | 26. $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ ;      |
| 27. $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1$ ;        | 28. $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ ;   |
| 29. $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 10$ ; | 30. $x^{10} - x^7 + x^4 - x^2 + 1$ . |

Разделить многочлен  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$ , если

31.  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ,  $g(x) = x + 1$  ;
32.  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ ,  $g(x) = x^2 - 2$  ;
33.  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$ ,  $g(x) = 2x + 3$  ;
34.  $f(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1$ ,  $g(x) = x^2 + 2x + 1$  ;
35.  $f(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 - x + 2$ ,  $g(x) = x^3 - x + 2$  ;

36.  $f(x) = x^5 - x^4 - x + 2x^2 - 1$ ,  $g(x) = (x + 1)(x - 1)$ ;  
 37.  $f(x) = 2x^5 - 2x^4 - x^2 - x - 2$ ,  $g(x) = x - 2$ ;  
 38.  $f(x) = 3x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 1$ ,  $g(x) = x - x^2 + 1$ ;  
 39.  $f(x) = 3x^6 - 2x^4 + 4x - 3 - x^2$ ,  $g(x) = 1 - x + x^3$ ;  
 40.  $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 1$ ,  $g(x) = 2 - x^2$ .

## §2. Алгебраические дроби

Найти область допустимых значений каждой из следующих алгебраических дробей:

1.  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ ;                      2.  $\frac{a}{b+c} - \frac{1}{c}$ ;                      3.  $\frac{2a-4b}{a-2b} + \frac{1}{ab}$ ;

4.  $\frac{1}{ab+cb+cd+ad}$ ; 5.  $\frac{1}{a^2-b^2} + \frac{1}{a^3-b^3} + \frac{a}{b}$ .

Найти числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , при которых следующее равенство справедливо на области допустимых значений этого равенства:

6.  $\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + c$ ;

7.  $\frac{1}{(3x-2)(3x+1)} = \frac{a}{3x-2} + \frac{b}{3x+1} + c$ ;

8.  $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}$ ;

9.  $\frac{x+5}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}$ ;

10.  $\frac{1}{x^2(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+2}$ ;

$$11. \frac{1}{(x^2 + 1)(x + 1)} = \frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{c}{x + 1};$$

$$12. \frac{x + 2}{(x^2 + x + 1)(x - 1)} = \frac{ax + b}{x^2 + x + 1} + \frac{c}{x - 1};$$

$$13. \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1};$$

$$14. \frac{1}{x^3 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}.$$

Найти область допустимых значений следующего алгебраического выражения и на этой области произвести указанные действия :

$$15. \left[ \left( \frac{a^5 b}{c^2 d^3} \right)^3 \cdot \left( \frac{a^2 c^3}{b^3 d^5} \right)^2 \right] : \left[ \left( \frac{a^2 b^3}{cd^2} \right)^5 \cdot \left( \frac{c^2}{b^4 d^3} \right)^3 \right];$$

$$16. \left[ \left( \frac{mn^2 p^3}{a^3 b} \right)^2 : \left( \frac{m^2 n^2}{ab^3} \right)^3 \right] \cdot \left[ \left( \frac{a^2 bc^2}{mn^3} \right)^2 : \left( \frac{a^2 cb^3}{m^3 n} \right)^2 \right];$$

$$17. \frac{y + 1}{y - 1} - \frac{2(y + 1)}{3y - 3};$$

$$18. \frac{2a}{x^2 - a^2} + \frac{1}{a - x};$$

$$19. \frac{a + 3b}{(a - b)^2} + \frac{a - 3b}{a^2 - b^2};$$

$$20. \frac{4b}{4b^2 - 1} + \frac{2b + 1}{3 - 6b} + \frac{2b - 1}{4b + 2};$$

$$21. \left( \frac{x-3}{x^2-3x+9} - \frac{6x-18}{x^3+27} \right) : \frac{5x-15}{4x^3+108};$$

$$22. \frac{5x}{x+y} \cdot \left( \frac{xy+y^2}{5x-5xy} + xy+y^2 \right) - \frac{y}{x-y};$$

$$23. \left( \frac{a+1}{2a} + \frac{4}{a+3} - 2 \right) : \frac{a+1}{a+3} - \frac{a^2-5a+3}{2a};$$

$$24. \frac{a-5}{6-3a} + \frac{4(a+1)}{a^2+4a} : \left( \frac{9a}{a^2-16} - \frac{a+4}{a^2-4a} \right).$$

На области допустимых значений следующего алгебраического выражения произвести указанные действия (в этих задачах ОДЗ можно не находить):

$$25. \frac{a-c}{a^2+ab+b^2} \cdot \frac{a^3-b^3}{a^2b-bc^2} \cdot \left( 1 + \frac{c}{a-c} - \frac{1+c}{c} \right) : \frac{c(1+c)-a}{bc};$$

$$26. \left[ \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 \right) \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \right] : \left[ \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right];$$

$$27. \frac{a-2}{a(a-2)+4} + \frac{8+4(1-a)+a^2}{8+a^3} - \frac{1}{2+a};$$

$$28. \left( \frac{4(x+3)}{x^2-3x} + \frac{x}{9-x^2} \right) \cdot \frac{x+3}{x+6} - \frac{5}{x-3};$$

$$29. a : \frac{a-1}{2} - \frac{a^3+3a(a-1)-1}{2a^2+2a} \cdot \frac{-4a}{a^2+1-2a} - \frac{4a^2}{a^2-1};$$

$$30. \frac{\left[ \frac{(a+x)^2}{ax} - 1 \right] \cdot \left[ \frac{(a-x)^2}{ax} + 4 \right] : (a^6 - x^6)}{(a^2x - ax^2) : [(a+x)^2 - ax] \cdot [(a-x)^2 + ax]} \cdot \frac{a - \frac{ax}{a+x}}{a + \frac{ax}{a-x}};$$

$$31. \left[ \frac{3}{2} - \left( x^4 - \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} \right) \cdot \frac{x^3 - x(4x - 1) - 4}{x^7 + 6x^6 - x - 6} \right] : \frac{x^2 + 29x + 78}{3x^2 + 12x - 36};$$

$$32. \frac{\frac{x}{8y^3} + \frac{1}{4y^2}}{x^2 + 2xy + 2y^2} - \frac{\frac{x}{8y^3} - \frac{1}{4y^2}}{x^2 - 2xy + 2y^2} -$$

$$- \frac{1}{4y^2(x^2 + 2y^2)} + \frac{1}{4y^2(x^2 - 2y^2)};$$

$$33. \frac{a^4 + a^3 - a - 1}{(1 - a^3b)^2 + (a^3 + b)^2} \cdot \frac{[2 + \frac{b}{a}(a^2 - 1)]^2 + [2b - \frac{1}{a}(a^2 - 1)]^2}{a^2 + a^{-2}}.$$

### §3. Иррациональные выражения

Найти область допустимых значений следующего алгебраического выражения и на этой области произвести указанные действия :

$$1. (x - \sqrt{y})(x + \sqrt{y}); \quad 2. (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + y);$$

$$3. (\sqrt{2} + a)(2 - a\sqrt{2} + a^2); \quad 4. (\sqrt{a} - 2b)(a + 2b\sqrt{a} + 4b^2);$$

$$5. (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2});$$

$$6. (\sqrt{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt{a} + \sqrt[4]{b})(a + \sqrt{b});$$

$$7. (x^{1/2}y^{0,5})^2 + (x^{1/4}y^{1/4})^4 + (\sqrt{x}\sqrt{y})^2;$$

$$8. (x^{0,5} - y^{0,5})x^{0,5}y + (xy^3)^{0,5};$$

$$9. ab^{1/2}(a^{1/2} + b^{1/2}) - (a^{1/2}b^{1/6})^3; \quad 10. (p^{1/2} + q^{1/2})^2 - (4pq)^{1/2};$$

$$11. (1 - y^{1/4})(1 + y^{1/4}) + (y^8)^{1/16}; \quad 12. \left( \frac{a^{1/4}b^{1/4} - b^{1/2}}{a^{1/2} - a^{1/4}b^{1/4}} \right)^{-4};$$

$$13. \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{x^{3/2} - y^{3/2}}{x - y};$$

$$14. \frac{x^{1/2}}{x^{1/2} - 6} - \frac{3}{x^{1/2} + 6} + \frac{x}{36 - x};$$

$$15. \left( \frac{a^{1/2} + 2}{a + 2a^{1/2} + 1} - \frac{a^{1/2} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{a^{1/2} + 1}{a^{1/2}};$$

$$16. \left( \frac{x^{1/2} + 3y^{1/2}}{x - 2x^{1/2}y^{1/2} + y} + \frac{x^{1/2} - 3y^{1/2}}{x - y} \right) \cdot \frac{x^{1/2} - y^{1/2}}{2};$$

На области допустимых значений следующего алгебраического выражения произвести указанные действия (в этих задачах ОДЗ можно не находить):

$$17. \frac{\frac{a^{1,5} + b^{1,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}} - a^{0,5}b^{0,5}}{a - b} + \frac{2b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}};$$

$$18. \frac{3^{1,5}}{(3^{0,5})^3 a^{1/6} - a^{2/3}} + \frac{a^{5/6} + 3^{1,5}a^{1/3}}{(a^{1/3} + 3)^2} \cdot \left( \frac{3a^{1/3}}{a - 27} + \frac{1}{a^{1/3} - 3} \right);$$

$$19. \frac{a^{1/6}}{a^{1/6} - b^{1/3}} + \frac{a^{1/3} + a^{1/6}b^{1/3} + b^{2/3}}{a^{-1/4}b^{1/6}}.$$

$$\cdot \left( \frac{1}{a^{1/2} - b} - \frac{1}{a^{1/2} - a^{1/4}b^{1/2}} \right);$$

$$20. \left[ \frac{x^{1/2} - y^{1/2}}{xy^{1/2} + x^{1/2}y} + \frac{x^{1/2} + y^{1/2}}{xy^{1/2} - x^{1/2}y} \right] \cdot \frac{x^{3/2} \cdot y^{1/2}}{x + y} - \frac{2y}{x - y};$$

$$21. [1 - (1 - a^{-1}b)^{-1}]^{-2} + [1 - (1 - ab^{-1})^{-1}]^{-2};$$

$$22. [a^{-1/2}b^{-1/2} + a^{-1/6}(b^{-5/6} - a^{-1/3}b^{-1/2})]^{-3/2};$$

$$23. [a + (a^2 - 1)^{1/2}]^{-1} + [a - (a^2 - 1)^{1/2}]^{-1};$$

$$24. (a^{-1/2} + b^{-1/2})^{-2} + (a^{-1/2} - b^{-1/2})^{-2};$$

$$25. (a + b^{3/2} : \sqrt{a})^{2/3} \cdot \left( \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right)^{-2/3};$$

$$26. \left( \frac{a - b}{a^{1/3} - b^{1/3}} - \frac{a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}}{a - b} \right) \cdot (a - b)^{-1};$$

$$27. \left[ \frac{a + 1}{a^{2/3} - a^{1/3} + 1} - \frac{a - 1}{a - a^{1/2}} \right]^6;$$

$$28. \frac{a \left( \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2b\sqrt{a}} \right)^{-1} + b \left( \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2a\sqrt{b}} \right)^{-1}}{\left( \frac{a + \sqrt{ab}}{2ab} \right)^{-1} + \left( \frac{b + \sqrt{ab}}{2ab} \right)^{-1}};$$

$$29. \left[ \frac{(a + \sqrt[3]{a^2x}) : (x + \sqrt[3]{ax^2}) - 1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right]^6;$$

$$30. \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2a^2 : \sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab} - 3b}{a - b};$$

$$31. \left( \frac{\sqrt[3]{ax^3} - \sqrt[3]{a^3x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{ax}}{\sqrt[3]{ax}} \right)^{-2} \cdot \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{a}{x}} + \frac{a}{x}};$$

$$32. \left( \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2} + a - 1} \right) \cdot \left( \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} - \frac{1}{a} \right);$$

$$33. \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{1 + \sqrt{5} + \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{5} - 1}{1 - \sqrt{5} + \sqrt{x}} \right) \cdot (x^{1/2} - 4x^{-1/2} + 2) \cdot \sqrt{0,2}$$

$$34. \frac{(b^{5/6}a^{-1/6} + b^{1/3}a^{1/3})^2 + (b^{5/6}a^{-1/6} - b^{1/3}a^{1/3})^2}{(\sqrt[3]{a^{-1}} - \sqrt[3]{b^{-1}})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{ab})} - 2a + \frac{4a^2}{a-b};$$

$$35. \frac{8b - a}{b} \cdot \left( \frac{a^{1/3}b^{1/3}}{2a^{-1/3} - b^{-1/3}} + \frac{a^{1/3} - 2b^{1/3}}{4a^{-2/3} + 2a^{-1/3}b^{-1/3} + b^{-2/3}} \right);$$

$$36. \frac{(a^{1/6}b^{-1/3} + a^{-1/3}b^{1/6})^2 (a^{1/3} + b^{1/3})}{a^{-1} + b^{-1} - (a^{-2/3} - b^{-2/3})(a^{-1/3} - b^{-1/3})} - 2\sqrt{ab};$$

$$37. (2a - b)^2 \left[ \frac{a^{-1}b^{-1}}{a^{-1} + 2\sqrt{2}a^{-1/2}b^{-1/2} + 2b^{-1}} + \frac{a^{-1}b^{-1}}{a^{-1} - 2\sqrt{2}a^{-1/2}b^{-1/2} + 2b^{-1}} \right];$$

$$38. (a - b) \left[ \frac{a^{1/4}}{(1 + b^{1/4}a^{-1/4})(a^{1/4} - b^{1/4})} - \frac{b^{1/4}}{(a^{1/4} + b^{1/4})(a^{1/4}b^{-1/4} + 1) - 2a^{1/4}b^{1/4}} \right];$$

$$39. \frac{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3}{a + b + \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2a}} + \frac{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^3}{a - b - \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2a}};$$

$$40. \sqrt{\frac{x}{x - a^2}} : \left[ \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x - a^2}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + a^2}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x - a^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - a^2}} \right];$$

$$41. \left[ \frac{4x^2 + 2ax}{\sqrt{4a^2x^2 - 8ax^3}} - \frac{16^{3/4}x^{3/2}}{\sqrt{2a(2ax - 4x^2)}} \right] : \sqrt{\frac{1}{2ax} - a^{-2}};$$

$$42. \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{1 + x^4};$$

$$43. x - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 1} - \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{2(x + \sqrt{x^2 - 1})};$$

$$44. -\frac{5 + \sqrt{4x}}{6} \cdot \sqrt{1 + 2x - x^2} - \frac{19 + 5x + 2x^2}{12} \cdot \frac{2 - 2x}{\sqrt{1 + 2x - x^2}} +$$

$$+ \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2}}.$$

#### §4. Метод математической индукции

1. Доказать, что произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 6.
2. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

Доказать, что для любого натурального числа  $n$ :

3. Число  $7^n - 1$  делится на 6 ;
4. Число  $n^3 + 5n$  делится на 6 ;
5. Число  $n^3 + 11n$  делится на 6 ;
6. Число  $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$  делится на 3 ;
7. Число  $n^3 + 5n + 12n^2$  делится на 6 ;
8. Число  $5^{n+3} + 11^{1+3n}$  делится на 17 ;
9. Число  $11^{n+2} + 12^{2n+1}$  делится на 133 ;
10. Число  $4^n + 15n - 1$  делится на 9 ;
11. Число  $7^{2n} - 4^{2n}$  делится на 33 ;

12. Число  $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$  делится на 11 ;  
 13. Число  $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$  делится на 17 ;  
 14. Число  $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$  делится на 19 ;  
 15. Число  $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$  делится на 19 ;  
 16. Число  $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1}$  делится на 59 ;  
 17. Число  $2^{2n+1} + 1$  делится на 3 ;  
 18. Число  $2^{2n} - 1$  делится на 3 ;  
 19. Число  $7^{2n} - 1$  делится на 48 ;  
 20. Число  $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$  делится на 24 ;  
 21. Число  $6^{2n-1} + 1$  делится на 7 ;  
 22. Число  $10^n + 18n - 28$  делится на 27 ;  
 23. Число  $9^{n+1} - 8n - 9$  делится на 16 .  
 24. Доказать, что для любого натурального числа  $n$ , число  $\frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{4} + \frac{11n^2}{24} + \frac{n}{4}$  - целое.  
 25. Доказать, что если  $p$  - простое число, то для любого натурального числа  $n$  число  $n^p - n$  делится на  $p$ .

Доказать, что для любого натурального числа  $n$  справедливы следующие равенства:

$$26. 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$27. 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2;$$

$$28. 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$29. 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2;$$

$$30. (n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1);$$

$$31. 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3};$$

$$32. 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4};$$

$$33. 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12};$$

$$34. 1+3+6+10+\dots + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6};$$

$$35. 2+7+14+\dots + (n^2+2n-1) = \frac{n(2n^2+9n+1)}{6};$$

$$36. 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2;$$

$$37. 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2};$$

$$38. \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1};$$

$$39. \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)};$$

$$40. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n};$$

$$41. \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{n}{4(n+4)};$$

$$42. \frac{7}{1 \cdot 8} + \frac{7}{8 \cdot 15} + \frac{7}{15 \cdot 22} + \dots + \frac{7}{(7n-6)(7n+1)} + \frac{1}{7n+1} = 1;$$

$$43. \frac{1}{4 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{4n(7n+1)} + \frac{1}{16(n+1)} = \frac{1}{16};$$

$$44. 1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{15}{8} + \dots + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2^{1-n} + 2(n-1).$$

Для любого натурального числа  $n$  вычислить следующие суммы:

$$45. S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1};$$

$$46. S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)};$$

$$47. S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!;$$

$$48. S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + n(3n-1);$$

$$49. S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)};$$

Найти все натуральные числа  $n$ , удовлетворяющие следующему условию:

$$50. 2^n > n^2; \quad 51. 2^{n+2} > 2n + 5; \quad 52. 2^n \geq 2n + 1;$$

$$53. 5^n > 2n^2 + 3; \quad 54. \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n};$$

$$55. \frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}; \quad 56. n! > 2^{n-1}.$$

Доказать, что для любого натурального числа  $n$  справедливы следующие неравенства:

$$57. \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24};$$

$$58. \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}};$$

$$59. \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1;$$

$$60. \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2n-1}{n};$$

$$61. 2^n \cdot n! \leq (n+1)^n; \quad 62. 2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! \geq [(n+1)!]^n.$$

Доказать, что для любого натурального числа  $n$  и для любого положительного числа  $\alpha$  справедливы следующие неравенства:

$$63. \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \geq 1 + \alpha;$$

$$64. \alpha^n + \alpha^{n-2} + \alpha^{n-4} + \dots + \frac{1}{\alpha^{n-4}} + \frac{1}{\alpha^{n-2}} + \frac{1}{\alpha^n} \geq n + 1.$$

65. Доказать, что для любого натурального числа  $n$ , большего единицы, и для любого действительного числа  $\alpha$ , такого что  $\alpha > -1$  и  $\alpha \neq 0$ , справедливо неравенство  $(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$ .

66. Доказать, что для любого натурального числа  $n$  и для любых действительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  справедливо неравенство

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

67. Доказать, что для любого натурального числа  $n$ , большего единицы, и для любых действительных чисел  $a$  и  $b$  таких, что  $a + b > 0$  и  $a \neq b$ , справедливо неравенство

$$2^{n-1} \cdot (a^n + b^n) > (a + b)^n.$$

Доказать, что для любого натурального числа  $n$  и для любых положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  справедливы следующие неравенства:

$$68. \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n;$$

$$69. \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

Доказать, что для любого действительного числа  $\alpha$  и для любого натурального числа  $n$  справедливы следующие неравенства:

$$70. |\sin n\alpha| \leq n|\sin \alpha|; \quad 71. \sin^{2n} \alpha + \cos^{2n} \alpha \leq 1.$$

Доказать, что для любого натурального числа  $n$  и для любого действительного числа  $x$ , такого что  $x \neq 2k\pi$ , где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , справедливы следующие равенства:

$$72. \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}};$$

$$73. \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

74. Доказать, что для любого натурального числа  $m$  такого, что  $m \geq 8$ , найдутся целые неотрицательные числа  $k$  и  $l$  такие, что  $m = 3k + 5l$ .

**ГЛАВА 3.**  
**АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА**

**§1. Уравнения с одним неизвестным**

Решить следующие уравнения:

- |   |   |
|---|---|
| 1. $2x - 3 = 1$ ;                           | 2. $3x + 5 = 2x - 7$ ;                  |
| 3. $1 - 3x = 2x$ ;                          | 4. $4 - 5x = 5 - 2x$ ;                  |
| 5. $ x  = 3$ ;                              | 6. $2 x  + 3 = 4$ ;                     |
| 7. $ x - 2  = x$ ;                          | 8. $ x - 1  =  x + 2 $ ;                |
| 9. $  x - 1  - 2  = 3$ ;                    | 10. $ x + 1  +  x - 2  = 3$ ;           |
| 11. $ x - 1  +  x + 1  = 2$ ;               | 12. $ 1 - x  -  x + 3  =  x + 2 $ ;     |
| 13. $ x  +  x + 2  +  2 - x  = x + 1$ ;     | 14. $  x + 1  -  x - 1   = 2$ ;         |
| 15. $x^2 - 1 = 0$ ;                         | 16. $x^2 - 2x + 1 = 0$ ;                |
| 17. $x^2 - 5x + 6 = 0$ ;                    | 18. $x^2 - 5 x  + 6 = 0$ ;              |
| 19. $x^2 - 2 x  - 3 = 0$ ;                  | 20. $x^2 = x$ ;                         |
| 21. $x^2 - 2 x + 1  + 3 = 0$ ;              | 22. $(x + 1)( x  - 1) = -\frac{1}{2}$ ; |
| 23. $ x^2 - 9  +  x^2 - 4  = 5$ ;           | 24. $x^4 - x^2 = 0$ ;                   |
| 25. $x^4 + x^2 = 0$ ;                       | 26. $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ ;              |
| 27. $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ ;                  | 28. $x^4 - x^2 - 6 = 0$ ;               |
| 29. $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$ ;             | 30. $x^3 + 4 = 3x^2$ ;                  |
| 31. $2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$ ;            | 32. $x^4 - 2x^3 + x - 132 = 0$ ;        |
| 33. $(5 - x)^4 + (2 - x)^4 = 17$ ;          | 34. $x^4 + (x - 4)^4 = 82$ ;            |
| 35. $x^4 + (1 - x)^4 = 97$ ;                |   |
| 36. $( x  + 1)^4 + ( x  - 2)^4 = 17$ ;      |   |
| 37. $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 24$ ;         |   |
| 38. $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1 = 0$ ;     |   |
| 39. $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) = 5$ ;    |   |
| 40. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 = 0$ ; |   |
| 41. $x^5 + x^3 + x = 0$ ;                   |   |
| 42. $x^5 - 2x^3 + x = 0$ ;                  |   |
| 43. $2x^6 + 4x^3 + 4 = 5(x^3 + 1)$ ;        |   |
| 44. $(x + 1)^6 + 20 = 9(x + 1)^3$ .         |   |

Выяснить, при каких значениях параметров  $a$  и  $b$  следующие уравнения имеют решения и найти эти решения:

45.  $a - x = 2$ ;                      46.  $ax = a$ ;  
47.  $1 - ax = 5 - b$ ;                48.  $|x - a| = a$ ;  
49.  $|x - a| = x - a$ ;                50.  $|x - a| = x - b$ ;  
51.  $a - |x| = 1 - a^2x$ ;              52.  $|ax - 1| = ax - 1$ ;  
53.  $|x + b| = |x + a|$ ;              54.  $ax^2 + 1 = 0$ ;  
55.  $ax^2 + b = 0$ ;                    56.  $(x - 1)^2 + (x - a)^2 = 0$ ;  
57.  $ax^2 + x = 0$ .

## §2. Неравенства с одним неизвестным

Решить следующие неравенства:

1.  $2x - 1 > 0$ ;                      2.  $1 - 2x < -5$ ;  
3.  $2 + 3x > 1 - x$ ;                4.  $|x| > 1$ ;  
5.  $|x| < 2$ ;                          6.  $|x - 1| \leq 2$ ;  
7.  $1 \leq |x| \leq 2$ ;                    8.  $||x| - 1| > 2$ ;  
9.  $|x - 2| < \frac{x}{2}$ ;                      10.  $|3x - 5| \geq |x|$ ;  
11.  $|x + 2| \leq ||x| - 2|$ ;              12.  $1 - |x| \geq |x - 1|$ ;  
13.  $|2x - 5| - |4x + 7| \geq 0$ ;        14.  $|x - 1| - |x + 1| < 1$ ;  
15.  $||x + 1| - |x - 1|| < 1$ ;        16.  $x^2 - 1 > 0$ ;  
17.  $x^2 - 4 < 0$ ;                      18.  $x^2 + 3 > 0$ ;  
19.  $x^2 + 9 \leq 0$ ;                    20.  $x^2 \geq x$ ;  
21.  $x^2 \leq x$ ;                          22.  $x^2 - 2x + 1 > 0$ ;  
23.  $x^2 - 5|x| + 6 > 0$ ;                24.  $|x^2 - 1| + x + 1 \leq 0$ ;  
25.  $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$ ;        26.  $|x^2 - 1| > x - 1$ ;  
27.  $x^4 - 5x^2 + 6 > 0$ ;              28.  $0 \leq x^2 - 3x \leq 4$ ;  
29.  $-4 < x^2 - 2x - 3 \leq 0$ ;        30.  $x^4 - 2x^2 + 3 > 0$ ;  
31.  $x^6 - 5x^3 + 6 \leq 0$ ;              32.  $x^3 + 1 > 0$ ;  
33.  $x^3 - 1 < 0$ ;                      34.  $x^3 \cdot |x - 2| > 0$ ;  
35.  $x^3 - 1 > x^2 - 1$ ;                36.  $x^3 + 1 < x + 1$ ;

37.  $(x - 3)(x^2 - 3x + 2) \geq 0$ ;  
 38.  $(x^2 - 3x - 4)(x^2 + x - 2) < 0$ ;  
 39.  $(x^2 - 1)(x^2 - x - 2)^2(x - 2)^2 < 0$ ;  
 40.  $x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x > 0$ ;  
 41.  $(5 - x)(2 - x)(x - 1)^2(x + 1)^3(x - 2)^4 > 0$ ;  
 42.  $(|x| - 1)(|x| - 2) \leq 0$ ;  
 43.  $(2 - |x|)(x^2 + x) < 0$ ;  
 44.  $|x|(2 - x)(3 + x) \leq 0$ .

Выяснить, при каких значениях параметров  $a$  и  $b$  следующие неравенства имеют решения и найти эти решения:

45.  $ax > 1$ ;                      46.  $ax \geq b$ ;                      47.  $|x| \leq x - a$ ;  
 48.  $|x + a| > |x + b|$ ;            49.  $x^2 + a > 0$ ;                      50.  $ax^2 < 1$ ;  
 51.  $ax^2 > b$ .

### §3. Системы алгебраических уравнений

Решить следующие системы уравнений:

1.  $\begin{cases} 2x - 3y - 4 = 0, \\ x + 3y = 2; \end{cases}$                       2.  $\begin{cases} x - y = 8, \\ xy = -7; \end{cases}$  ;
3.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = -2; \end{cases}$                       4.  $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x - xy + y = 1; \end{cases}$
5.  $\begin{cases} x^2 - y^2 = -21, \\ x + y = -3; \end{cases}$                       6.  $\begin{cases} x^2 + y = 4, \\ x + y = 2; \end{cases}$
7.  $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0; \end{cases}$                       8.  $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0, \\ xy = 2; \end{cases}$
9.  $\begin{cases} x + y = 5, \\ x + y^2 = 13; \end{cases}$                       10.  $\begin{cases} xy(x + y) = 6, \\ x^3 + y^3 = 9; \end{cases}$

$$11. \begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 14, \\ y^3 + 3x^2y = 13; \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x^2 + y - 2 = 0, \\ x + y^2 - 2 = 0; \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 447, \\ xy(x - y) = 210; \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x^3 - y^3 = 8(x - y), \\ x^2 + y^2 = 8; \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} xy(x + y) = 20, \\ x + y = \frac{5}{4}xy; \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x^4 + y^4 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x^2 + 3 = 2xy, \\ 6x^2 - 11y^2 = 10; \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x + xy + y = 2; \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5xy, \\ 2x^2 - y^2 = 31; \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x + y = 3; \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0; \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy; \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 12, \\ x + xy + y = 0; \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} xy^2 + 24y = x^3, \\ x^2y - 6x = y^3; \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 16, \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 40; \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ x + xy + y = 5; \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x^2 + xy = y^2, \\ x - y^2 = 0; \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x(x + y) = 12, \\ y(y - x) = 8; \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x^2 + y^2x^2 + y^2 = 3, \\ x^4 + y^4 = 2; \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} x^2 + 3xy = 54, \\ xy + 4y^2 = 115; \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} x^3 - y^3 = 26, \\ x^4 - y^4 = 20(x + y); \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} x + xy + y = 15, \\ x^2y + y^2x = 54; \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} x + y^2 = 3, \\ x^2 + y = 3; \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} x^3 + y^3x^3 + y^3 = 17, \\ xy + x + y = 5; \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} x + y = \frac{5}{6}xy, \\ y^2 - x^2 = \frac{5}{36}x^2y^2; \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} x^3 + y^3 = 12xy, \\ x + y = \frac{1}{3}xy; \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x - y), \\ x^3 + y^3 = 7(x + y); \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 3, \\ 5x^2 - 2xy - y^2 = 5; \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 = 0, \\ x^2 + y^2 = 8; \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0, \\ x^3 - y^3 = x - y; \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10, \\ (x + y)(xy - 1) = 3; \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} |xy - 2| = 6 - x^2, \\ 2 + 3y^2 = 2xy; \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} y^2 - |xy| + 2 = 0, \\ 8 - x^2 = (x + 2y)^2; \end{cases}$$

$$45. \begin{cases} x + y = 1, \\ x^5 + y^5 = 31; \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} xy = 6, \\ yz = 3, \\ xz = 2; \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} yz = \frac{2}{3}x, \\ zx = \frac{3}{2}y, \\ xy = 6z; \end{cases}$$

$$48. \begin{cases} x(y + z) = 27, \\ y(x + z) = 32, \\ z(x + y) = 35; \end{cases}$$

$$49. \begin{cases} 5x - 7y = 0, \\ x + z = 12, \\ 3x - 4y + z = 6; \end{cases}$$

$$50. \begin{cases} x + y + z = 2, \\ (x + y)(y + z) + (y + z)(z + x) + (z + x)(x + y) = 1, \\ x^2(y + z) + y^2(x + z) + z^2(x + y) = -6; \end{cases}$$

$$51. \begin{cases} x^2 + 2yz = 1, \\ y^2 + 2zx = 2, \\ z^2 + 2xy = 1; \end{cases}$$

$$52. \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ xy + yz + zx = 3, \\ xyz(x + y + z) = 3; \end{cases}$$

$$53. \begin{cases} 2x + y + z = 4, \\ x + 4y + 4z = -5; \end{cases}$$

$$54. \begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0, \\ x + y + z = -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$55. \begin{cases} x + y + z = 1, \\ xy + yz + zx = -4, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$$

Выяснить, при каких значениях параметра  $a$  следующие системы уравнений имеют решения и найти эти решения:

$$56. \begin{cases} ax + y = a, \\ x + ay = 1; \end{cases}$$

$$57. \begin{cases} ax + y = a^2, \\ x + ay = 1; \end{cases}$$

$$58. \begin{cases} x + ay = 3, \\ ax + 4y = 6; \end{cases}$$

$$59. \begin{cases} ax + y = a^3, \\ x + ay = 1; \end{cases}$$

$$60. \begin{cases} x + ay = 1, \\ ax - 3ay = 2a + 3; \end{cases}$$

$$61. \begin{cases} ax + y = 2, \\ x + y = 2; \end{cases}$$

$$62. \begin{cases} ax + y = a, \\ ax + ay = 1; \end{cases}$$

$$63. \begin{cases} 2x - ay = 5, \\ 3y - 6x = -15; \end{cases}$$

$$64. \begin{cases} ax - y = 1, \\ x + ay = a; \end{cases}$$

$$65. \begin{cases} 2x - ay = a + 1, \\ ax - 2y = 1; \end{cases}$$

$$66. \begin{cases} ax + |y| = 1 + a, \\ x + ay = 1 - a; \end{cases}$$

$$67. \begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a; \end{cases}$$

$$68. \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ ax + y = \sqrt{2}; \end{cases}$$

$$69. \begin{cases} x + 2ay = 1, \\ (a - 1)x + 4y = 2a - 3. \end{cases}$$

Выяснить, при каких значениях параметров  $a$  и  $b$  следующие системы уравнений имеют решения и найти эти решения:

$$70. \begin{cases} ax + y = b, \\ x - y = 2; \end{cases} \quad 71. \begin{cases} ax - by = 0, \\ a^2x - by = ab; \end{cases}$$

$$72. \begin{cases} y - ax = 0, \\ y = x^2 + b; \end{cases} \quad 73. \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x + y = b; \end{cases}$$

$$74. \begin{cases} x^5y^8 = a, \\ x^7y^{11} = b; \end{cases} \quad 75. \begin{cases} x^{11}y^9 = a, \\ x^6y^5 = b. \end{cases}$$

76. Найти все числа  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

77. Найти все числа  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

78. Найти все числа  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + ay = 1, \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

79. Найти все числа  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2x + a^2y = a - 2 + a^2, \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

не имеет решений.

80. Найти все числа  $p$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ y = px + q \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого числа  $q$ .

81. Найти все числа  $b$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x - 2y = a, \\ ax + 3y = b \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого числа  $a$ .

## ГЛАВА 4. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Вычислить:

1.  $2 \sin 30^\circ + 3 \cos 30^\circ - 2 \operatorname{tg} 30^\circ - 4 \operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ + \sec 30^\circ$  ;
2.  $5 \sin 45^\circ + 2 \cos 45^\circ - 3 \operatorname{tg} 45^\circ - 10 \operatorname{ctg} 45^\circ + 2 \operatorname{cosec} 45^\circ - 4 \sec 45^\circ$  ;
3.  $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ - 2 \operatorname{tg} 60^\circ + 3 \operatorname{ctg} 60^\circ + \sec 60^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ$  ;
4.  $\sin 90^\circ - 6 \cos 90^\circ + 3 \operatorname{tg} 0^\circ + 5 \sec 0^\circ$  ;
5.  $2 \sin 180^\circ - 3 \cos 180^\circ + 4 \operatorname{tg} 180^\circ + 2 \sec 180^\circ$  ;
6.  $3 \sin 270^\circ - 4 \cos 270^\circ + 5 \operatorname{ctg} 270^\circ + \operatorname{cosec} 270^\circ$  ;

7. 
$$\frac{\sin 45^\circ \cos 60^\circ - \cos(-45^\circ) \sin(-60^\circ)}{\operatorname{tg}^2 45^\circ - \sin^2 90^\circ \cdot \cos^4 270^\circ}$$
 ;

8. 
$$\frac{\sec(-30^\circ) + \operatorname{cosec}(-30^\circ)}{\sin^2(-60^\circ) + \operatorname{cosec}^2(-30^\circ)}$$
 ;

Может ли синус острого угла быть равен:

9.  $\frac{3}{7}$  ; 10.  $\frac{9}{8}$  ; 11.  $\frac{\sqrt{7}}{3}$  ; 12.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  ; 13.  $-\frac{1}{4}$  ; 14.  $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$  .

Может ли косинус острого угла быть равен:

15.  $\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}}$  ; 16.  $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$  ; 17.  $-\frac{21}{37}$  ; 18.  $\frac{1}{\sin 11^\circ}$  .

Выяснить, какие из следующих чисел являются положительными:

19.  $\sin 157^\circ \cdot \sin 275^\circ \cdot \sin(-401^\circ) \cdot \sin 910^\circ \cdot \operatorname{cosec} 328^\circ$  ;

20.  $\cos 73^\circ \cdot \cos 140^\circ \cdot \cos 236^\circ \cdot \cos 301^\circ \cdot \cos(-384^\circ) \cdot \cos 1000^\circ \cdot \sec 287^\circ$  ;

21.  $\operatorname{tg} 71^\circ \cdot \operatorname{tg} 139^\circ \cdot \operatorname{tg} 235^\circ \cdot \operatorname{tg} 304^\circ \cdot \operatorname{tg}(-393^\circ) \cdot \operatorname{tg} 1000^\circ$  ;

22.  $\operatorname{ctg} 282^\circ \cdot \operatorname{ctg}(-401^\circ) \cdot \operatorname{ctg}(-910^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 140^\circ \cdot \operatorname{ctg} 240^\circ$  ;

23.  $\cos 1 \cdot \sin 3 \cdot \cos 2 \cdot \operatorname{tg} 4 \cdot \operatorname{ctg} 1 \cdot \cos 5 \cdot \sin 7$  ;

$$24. \operatorname{ctg} 10 \cdot \operatorname{ctg} 100 \cdot \cos(-5) \cdot \operatorname{tg}(-10) \cdot \sin(-15) \cdot \operatorname{ctg}(-20) \cdot \operatorname{ctg} 12;$$

$$25. \operatorname{tg} 1,5 \cdot \operatorname{tg} 4,5 \cdot \operatorname{tg}(-3,1) \cdot \operatorname{ctg}(-3,1).$$

Найти все значения угла  $\varphi$  из промежутка  $[0, 2\pi]$ , при каждом из которых справедливо следующее равенство:

$$26. |\sin \varphi| = \sin \varphi; \quad 27. |\cos \varphi| = -\cos \varphi;$$

$$28. \sin \varphi = \cos \varphi; \quad 29. |\operatorname{ctg} \varphi| = \operatorname{tg} \varphi.$$

Найти все значения угла  $\varphi$  из промежутка  $[0, 2\pi]$ , при каждом из которых справедливо следующее неравенство:

$$30. \sin \varphi \cdot \cos \varphi > 0; \quad 31. \sin \varphi \cdot \cos \varphi < 0;$$

$$32. \cos 2\varphi > 0; \quad 33. \sin \varphi < 1;$$

$$34. \cos 2\varphi \cdot \sin 2\varphi > 0; \quad 35. \cos 2\varphi \cdot \sin 2\varphi < 0;$$

$$36. \sin 3\varphi > 0; \quad 37. \cos 3\varphi < 0.$$

Расположить в порядке возрастания следующие числа:

$$38. \sin(-55^\circ), \sin 600^\circ, \sin 1295^\circ; \quad 39. \cos 653^\circ, \cos(-68^\circ), \cos 295^\circ;$$

$$40. \sin 4, \cos 2, \operatorname{tg} 3, \operatorname{ctg} 6; \quad 41. \sin 5, \cos 2, \operatorname{tg} 1, \operatorname{ctg} 8;$$

$$42. \operatorname{tg}(-53^\circ), \operatorname{tg} 600^\circ, \operatorname{tg} 1294^\circ; \quad 43. \operatorname{ctg}(-68^\circ), \operatorname{ctg} 294^\circ, \operatorname{ctg} 683^\circ;$$

$$44. \sin 8, \cos 5, \operatorname{tg} 4, \operatorname{ctg} 1; \quad 45. \sin 3, \cos 1, \operatorname{tg} 7, \operatorname{ctg} 5.$$

Какое из следующих двух чисел больше:

$$46. \sin 62^\circ \text{ или } \sin 63^\circ; \quad 47. \sin 91^\circ \text{ или } \sin 92^\circ;$$

$$48. \sin 195^\circ \text{ или } \sin 200^\circ; \quad 49. \sin 354^\circ \text{ или } \sin 359^\circ;$$

$$50. \cos 78^\circ \text{ или } \cos 77^\circ; \quad 51. \cos 101^\circ \text{ или } \cos 157^\circ;$$

$$52. \cos 190^\circ \text{ или } \cos 200^\circ; \quad 53. \cos 1000^\circ \text{ или } \cos 2000^\circ;$$

$$54. \sin 734^\circ \text{ или } \sin(-1066^\circ); \quad 55. \cos 860^\circ \text{ или } \cos 510^\circ;$$

$$56. \cos(-20^\circ) \text{ или } \cos(-30^\circ); \quad 57. \operatorname{tg} 93^\circ \text{ или } \operatorname{tg} 92^\circ;$$

$$58. \operatorname{tg} 353^\circ \text{ или } \operatorname{tg} 359^\circ; \quad 59. \operatorname{tg} 407^\circ \text{ или } \operatorname{ctg} 497^\circ;$$

$$60. \operatorname{ctg} 102^\circ \text{ или } \operatorname{ctg} 150^\circ; \quad 61. \operatorname{ctg} 290^\circ \text{ или } \operatorname{ctg} 310^\circ;$$

$$62. \operatorname{tg} 375^\circ \text{ или } \operatorname{tg} 194^\circ; \quad 63. \operatorname{ctg} 750^\circ \text{ или } \sin 405^\circ;$$

$$64. \operatorname{ctg} 292^\circ \text{ или } \operatorname{ctg} 510^\circ; \quad 65. \sin 27^\circ \text{ или } \cos 54^\circ;$$

$$66. \cos 1,8 \text{ или } \cos 1,83; \quad 67. \operatorname{tg} 57^\circ \text{ или } \operatorname{ctg} 20^\circ;$$

$$68. \sin 4^\circ \text{ или } \sin 4; \quad 69. \sin 0,63 \text{ или } \cos 0,87;$$

$$70. \sin 0,7\pi \text{ или } \sin 0,71\pi; \quad 71. \operatorname{tg} \frac{31}{90}\pi \text{ или } \operatorname{ctg} \frac{5}{18}\pi;$$

72.  $\sin 7, 2\pi$  или  $\operatorname{tg} 7, 25\pi$ ;      73.  $\sin 2, 16$  или  $0$ ;  
 74.  $\cos 1, 6\pi$  или  $\cos 1, 68\pi$ ;      75.  $\sin 4, 5$  или  $0$ ;  
 76.  $\cos 5, 1\pi$  или  $\cos 5\pi$ ;      77.  $\cos 2, 65$  или  $0$ ;  
 78.  $\operatorname{ctg} 6, 9\pi$  или  $\operatorname{ctg} 7, 1\pi$ ;      79.  $\cos 495^\circ$  или  $\cos 45^\circ$ ;  
 80.  $\operatorname{ctg} 0, 583$  или  $\operatorname{ctg} 0, 582$ ;      81.  $\cos 8, 41\pi$  или  $\cos 0, 4\pi$ ;  
 82.  $\operatorname{ctg} 6, 3$  или  $\operatorname{ctg} 6, 2$ ;      83.  $\sin 2, 31\pi$  или  $\sin 0, 3\pi$ ;  
 84.  $\operatorname{tg} 1, 6$  или  $\operatorname{tg} 1, 5$ ;      85.  $\sin 3, 78\pi$  или  $-\sin 0, 3\pi$ ;  
 86.  $\operatorname{tg} \left(-\frac{10}{23}\right)$  или  $\operatorname{tg} \left(-\frac{11}{23}\right)$ ;      87.  $\operatorname{tg}(-300^\circ)$  или  $\operatorname{tg} 60^\circ$ ;  
 88.  $\sin 1$  или  $\cos 1$ ;      89.  $2 \operatorname{ctg} 6, 4\pi$  или  $-\operatorname{ctg} 0, 6\pi$ ?

90. Найти  $\cos \varphi$ ,  $\operatorname{tg} \varphi$  и  $\operatorname{ctg} \varphi$ , если  $\sin \varphi = -\frac{2}{3}$  и  $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$ .  
 91. Найти  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$  и  $\operatorname{ctg} \varphi$ , если  $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{3}{4}$  и  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ .  
 92. Найти  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$  и  $\operatorname{ctg} \varphi$ , если  $\cos \varphi = \frac{9}{41}$  и  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ .  
 93. Найти  $\cos \varphi$ ,  $\operatorname{tg} \varphi$  и  $\operatorname{ctg} \varphi$ , если  $\sin \varphi = -\frac{3}{5}$  и  $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$ .  
 94. Найти  $\sin \frac{\varphi}{2}$ ,  $\cos \frac{\varphi}{2}$  и  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ , если  $\cos \varphi = -\frac{12}{13}$  и  $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ .  
 95. Найти  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$  и  $\operatorname{tg} \varphi$ , если  $\operatorname{ctg} \varphi = 2$  и  $\pi < \varphi < 2\pi$ .  
 96. Найти  $\sin \frac{\varphi}{2}$ ,  $\cos \frac{\varphi}{2}$  и  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ , если  $\cos \varphi = 0, 8$  и  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ .  
 97. Найти  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$ ,  $\operatorname{tg} 2\varphi$  и  $\operatorname{ctg} 2\varphi$ , если  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 3$ .  
 98. Найти  $\sin 2\varphi$ ,  $\cos 2\varphi$ ,  $\operatorname{tg} 2\varphi$  и  $\operatorname{ctg} 2\varphi$ , если  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{7}$ .  
 99. Найти  $\sin 4\varphi$ , если  $\operatorname{tg} \varphi = 3$ .  
 100. Найти  $\cos(\alpha + \beta)$  и  $\cos(\alpha - \beta)$ , если  $\sin \alpha = \frac{7}{25}$ ,  $\cos \beta = -\frac{5}{13}$  и  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ .  
 101. Найти  $\cos(\alpha - \beta)$ , если  $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ ,  $\sin \beta = -\frac{5}{13}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ,  $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ .  
 102. Найти  $\sin(\alpha + \beta)$  и  $\sin(\alpha - \beta)$ , если  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ,  $\cos \beta = -\frac{\sqrt{13}}{4}$  и  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ .  
 103. Найти  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$  и  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ , если  $\sin \alpha = 0, 6$ ,  $\cos \beta = -\frac{12}{13}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ,  $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ .  
 104. Найти  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$  и  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$  и  $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{5}$ .

105. Найти  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$  и  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \beta = 0,8$  и  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ .

106. Найти  $\sin(\alpha + 2\beta)$ ,  $\cos(2\alpha - \beta)$  и  $\operatorname{tg}(2\alpha - 2\beta)$ , если  $\sin \alpha = 0,8$ ,  $\cos \beta = \frac{5}{13}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ,  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ .

107. Найти  $\sin \frac{3\alpha}{2}$ ,  $\cos \frac{3\alpha}{2}$  и  $\operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2}$ , если  $\cos 3\alpha = -\frac{1}{3}$  и  $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ .

108. Найти  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ , если  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ .

109. Найти  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha$ , если  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ .

Вычислить без помощи таблиц:

110.  $\sin 15^\circ$ ;      111.  $\cos 15^\circ$ ;      112.  $\operatorname{tg} 112^\circ 30'$ ;

113.  $\operatorname{tg} 105^\circ$ ;      114.  $\operatorname{ctg} 75^\circ$ ;      115.  $\sin 22^\circ 30'$ ;

116.  $\cos 22^\circ 30'$ ;      117.  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$ ;      118.  $\cos 37^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30'$ ;

119.  $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ$ ;      120.  $\cos 15^\circ \cdot \cos 75^\circ$ ;

121.  $\sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{\pi}{24}$ ;      122.  $\sin 52^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30'$ ;

123.  $\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12}$ ;      124.  $\cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$ ;

125.  $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$ ;

126.  $\sin 10^\circ \cdot \cos 50^\circ + \cos 10^\circ \cdot \sin 50^\circ$ ;

127.  $\cos \frac{3\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{8}$ ;

128.  $\sin 15^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \cos 15^\circ$ ;

129.  $\sin 17^\circ \cdot \sin 43^\circ - \cos 17^\circ \cdot \cos 43^\circ$ ;

130.  $\sin 3^\circ \cdot \sin 42^\circ - \cos 3^\circ \cdot \cos 42^\circ$ ;

131.  $\sin 19^\circ \cdot \cos 26^\circ + \sin 26^\circ \cdot \cos 19^\circ$ ;

132.  $\sin 61^\circ \cdot \cos 31^\circ - \cos 61^\circ \cdot \sin 31^\circ$ ;

133.  $\frac{\operatorname{tg} 13^\circ + \operatorname{tg} 17^\circ}{1 - \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 17^\circ}$ ;

134.  $\frac{\operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{tg} 46^\circ}{1 + \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ}$ ;

135.  $\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ$ ;

136.  $\sin \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12}$ ;

137.  $\cos \frac{7\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$ ;      138.  $\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{7\pi}{12}$ ;  
 139.  $\sin 45^\circ \cdot \sin 15^\circ$ ;      140.  $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$ ;  
 141.  $\cos 75^\circ \cdot \cos 105^\circ$ ;      142.  $\cos \frac{5\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$ ;  
 143.  $\cos \frac{75^\circ}{2} \cdot \cos \frac{15^\circ}{2}$ ;      144.  $\cos 105^\circ + \cos 75^\circ$ ;  
 145.  $\sin 105^\circ + \sin 75^\circ$ ;      146.  $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ ;  
 147.  $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ$ ;      148.  $\sin \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}$ ;  
 149.  $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{12} + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$ ;      150.  $\sin 105^\circ - \cos 75^\circ$ ;  
 151.  $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{12} - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$ ;      152.  $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ$ ;  
 153.  $\operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ$ ;      154.  $\operatorname{tg} 5^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$ .

Доказать справедливость следующих равенств:

155.  $\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \frac{1}{8}$ ;      156.  $\sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$ ;  
 157.  $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$ ;      158.  $\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = \frac{1}{4}$ ;  
 159.  $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$ ;  
 160.  $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$ ;  
 161.  $\sin 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$ ;  
 162.  $\cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$ ;  
 163.  $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}$ ;  
 164.  $\cos 55^\circ \cdot \cos 65^\circ \cdot \cos 175^\circ = -\frac{1 + \sqrt{3}}{8\sqrt{2}}$ ;  
 165.  $\sin 200^\circ \cdot \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cdot \cos 50^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  
 166.  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}{1 + \operatorname{tg}^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Доказать, что если  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , то справедливы следующие равенства:

$$167. \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} ;$$

$$168. \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} + 1 ;$$

$$169. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma ;$$

$$170. \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma ;$$

$$171. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1 .$$

172. Доказать, что если  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы остроугольного треугольника, то  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma > 2$ .

Вычислить:

$$173. \frac{2 \arcsin 0 - 3 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - \arccos(-1)}{2 \operatorname{arctg} \sqrt{3} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + 3 \operatorname{arctg} 1 - 2 \operatorname{arctg}(-1)} ;$$

$$174. \sin(\arcsin 0, 2) ;$$

$$175. \cos(\arccos 0, 4) ;$$

$$176. \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{4} - \operatorname{arctg} 5\right) ;$$

$$177. \sin(\arcsin(-0, 9)) ;$$

$$178. \cos(\arccos(-0, 2)) ;$$

$$179. \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{8}{15} - \arcsin \frac{8}{17}\right) ;$$

$$180. \cos(\arcsin 1) ;$$

$$181. \sin(\arccos 0, 8) ;$$

$$182. \cos\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \arccos \frac{3}{5}\right) ;$$

$$183. \cos(\arcsin 0, 6) ;$$

$$184. \sin(\arccos(2 - \sqrt{2})) ;$$

$$185. \sin\left(\frac{1}{2} \arccos(-0, 8)\right) ;$$

$$186. \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-0, 7)) ;$$

$$187. \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 0, 43) ;$$

$$188. \sin(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg}(-2)) ;$$

$$189. \operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{2}{3}\right) ;$$

$$190. \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-0, 27)) ;$$

$$191. \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arcsin(-0, 6)\right) ;$$

192.  $\cos\left(\arcsn \frac{3}{5} - \arccos \frac{5}{13}\right)$ ; 193.  $\operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ ;  
 194.  $\operatorname{arcsn}(\operatorname{sn} 6)$ ; 195.  $\operatorname{arcsn}(\operatorname{sn} 2)$ ;  
 196.  $\arccos(\cos 6)$ ; 197.  $\arccos(\cos 1, 5)$ ;  
 198.  $\arccos(\cos 1)$ ; 199.  $\arccos(\cos 2, 5)$ ;  
 200.  $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 2)$ ; 201.  $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3})$ ;  
 202.  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2)$ ; 203.  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0, 6\pi)$ ;  
 204.  $\operatorname{arcsn}(\operatorname{sn} 3)$ ; 205.  $\arccos(\operatorname{sn} 2)$ .

Какое из следующих двух чисел больше:

206.  $\arccos \frac{2}{3}$  или  $\operatorname{arcsn} \frac{3}{4}$ ;  
 207.  $\operatorname{arcsn} 0, 89$  или  $\arccos 0, 91$ ;  
 208.  $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$  или  $\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$ ;  
 209.  $\operatorname{arcsn}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  или  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  
 210.  $\operatorname{arctg} 3$  или  $\operatorname{arctg} 4$ ;  
 211.  $\operatorname{arcsn} \frac{\sqrt{3}}{5}$  или  $\operatorname{arcsn} \frac{\pi}{8}$ ;  
 212.  $\arccos 0, 7$  или  $\arccos 0, 5$ ;  
 213.  $\operatorname{arctg} 0, 1$  или  $\operatorname{arctg}(-0, 1)$ ;  
 214.  $\operatorname{arcsn}(\sqrt{2} - 1)$  или  $\operatorname{arcsn}(\sqrt{5} - 2)$ ;  
 215.  $\operatorname{arctg} 1$  или  $\operatorname{arctg} 1, 1$ ;  
 216.  $\operatorname{arcsn} \frac{15}{17}$  или  $\arccos \frac{49}{170}$ ;  
 217.  $\operatorname{arctg}(-2)$  или  $\operatorname{arctg} 2$ ;  
 218.  $\operatorname{arcsn} \frac{4}{5}$  или  $\arccos \frac{3}{4}$ ;

219.  $\operatorname{arcctg} 10$  или  $\operatorname{arctg}(-0, 1)$ ;

220.  $\operatorname{arcsn} \left(-\frac{7}{26}\right)$  или  $\operatorname{arctg} \left(-\frac{7}{24}\right)$ ;

221.  $\operatorname{arccos} \left(-\frac{10}{41}\right)$  или  $\pi - \operatorname{arcsn} \frac{40}{41}$ ?

Найти  $\operatorname{sn} \alpha$ ,  $\operatorname{cos} \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если:

222.  $\alpha = \operatorname{arcsn} 0, 4$ ;      223.  $\alpha = \operatorname{arcsn} (-0, 28)$ ;

224.  $\alpha = \operatorname{arcsn} (-0, 8)$ ;      225.  $\alpha = \operatorname{arcsn} 0, 28$ ;

226.  $\alpha = \operatorname{arccos} \frac{1}{2}$ ;      227.  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$ ;

228.  $\alpha = \operatorname{arctg}(-0, 75)$ ;      229.  $\alpha = \operatorname{arctg} \left(-\frac{5}{12}\right)$ ;

230.  $\alpha = \operatorname{arcctg} \left(-\frac{5}{12}\right)$ ;      231.  $\alpha = \operatorname{arccos} 0, 96$ ;

232.  $\alpha = \operatorname{arcctg} 0, 75$ ;      233.  $\alpha = \operatorname{arccos}(-0, 96)$ ;

234.  $\alpha = \operatorname{arcctg} \frac{4}{3}$ ;      235.  $\alpha = \operatorname{arcctg} \left(-\frac{4}{3}\right)$ .

Доказать справедливость следующих равенств:

236.  $\operatorname{arcsn} \frac{15}{17} = \operatorname{arccos} \frac{8}{17}$ ;

237.  $\operatorname{arcsn} \frac{4}{5} = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ ;

238.  $\operatorname{arcsn} \left(-\frac{7}{25}\right) = -\operatorname{arctg} \frac{7}{24}$ ;

239.  $\operatorname{arccos} \left(-\frac{9}{41}\right) = \pi - \operatorname{arcsn} \frac{40}{41}$ ;

240.  $\operatorname{arcsn} \frac{1}{15} + \operatorname{arccos} \frac{1}{15} = \frac{\pi}{2}$ ;

241.  $4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$  ;
242.  $\operatorname{arctg} 0,2 + \operatorname{arctg} 0,2 = \frac{\pi}{2}$  ;
243.  $2 \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arcsn} 0,9 = \pi$  ;
244.  $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{7}{23} = \frac{\pi}{4}$  ;
245.  $\operatorname{arcsn} \sqrt{\frac{3}{7}} + \operatorname{arcsn} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\pi}{3}$  ;
246.  $\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{11}{75} = \frac{\pi}{4}$  ;
247.  $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$  ;
248.  $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} = \operatorname{arctg} \frac{16}{13}$  ;
249.  $\operatorname{arctg} \frac{1}{9} + \operatorname{arctg} \frac{4}{5} = \frac{3\pi}{4}$  ;
250.  $\operatorname{arcsn} \frac{7}{25} + \frac{1}{2} \arccos \frac{7}{25} = \arccos \frac{3}{5}$  ;
251.  $2 \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arcsn} \frac{4}{5} = \pi$  .

Доказать справедливость следующих равенств:

252.  $(\operatorname{sn} \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \operatorname{sn} 2\alpha$  ;
253.  $\cos^4 \alpha - \operatorname{sn}^4 \alpha = \cos 2\alpha$  ;
254.  $\cos^3 \alpha \operatorname{sn} \alpha - \operatorname{sn}^3 \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \operatorname{sn} 4\alpha$  ;
255.  $\cos 2\alpha(\operatorname{sn} \alpha - 2 \operatorname{sn} 2\alpha + \operatorname{sn} 3\alpha) =$   
 $= \operatorname{sn} 2\alpha(\cos \alpha - 2 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha)$  ;
256.  $2 \operatorname{sn} 2\alpha \operatorname{sn} \alpha + \cos 3\alpha = \cos \alpha$  ;
257.  $1 + 2 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 4 \cos^2 \alpha \cos 2\alpha$  ;
258.  $1 + 2 \cos 3\alpha + \cos 6\alpha = 4 \cos^2 \frac{3\alpha}{2} \cos 3\alpha$  ;
259.  $\cos 2\alpha(\operatorname{sn} \alpha + \operatorname{sn} 3\alpha) = \operatorname{sn} 2\alpha(\cos \alpha + \cos 3\alpha)$  ;
260.  $\operatorname{sn} 3\alpha = 3 \operatorname{sn} \alpha - 4 \operatorname{sn}^3 \alpha$  ;

$$261. \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$262. \operatorname{sn} 4\alpha = \cos\alpha(4\operatorname{sn}\alpha - 8\operatorname{sn}^3\alpha);$$

$$263. \cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1;$$

$$264. 1 + \operatorname{sn}\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$265. 1 - \operatorname{sn}\alpha = 2\operatorname{sn}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$266. (\operatorname{sn}\varphi\cos\psi + \cos\varphi\operatorname{sn}\psi)^2 + (\cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sn}\varphi\operatorname{sn}\psi)^2 = 1;$$

$$267. \operatorname{sn}^2\varphi\operatorname{sn}^2\psi + \operatorname{sn}^2\varphi\cos^2\psi + \cos^2\varphi = 1;$$

$$268. 2\operatorname{sn} 4\alpha \operatorname{sn} 2\alpha + \cos 6\alpha = \cos 2\alpha;$$

$$269. 2(\operatorname{sn}^6\varphi + \cos^6\varphi) - 3(\operatorname{sn}^4\varphi + \cos^4\varphi) = -1;$$

$$270. \operatorname{sn}^3\varphi\cos^2\varphi = \frac{1}{8}\operatorname{sn}\varphi - \frac{1}{16}\operatorname{sn} 5\varphi + \frac{1}{16}\operatorname{sn} 3\varphi;$$

$$271. \operatorname{sn}^6\varphi + \cos^6\varphi + 3\operatorname{sn}^2\varphi\cos^2\varphi = 1;$$

$$272. 2\cos^2\alpha + 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha - \cos 2\alpha - \cos 3\alpha = 1;$$

$$273. \operatorname{sn}\alpha + \operatorname{sn}\beta + \operatorname{sn}\gamma - \operatorname{sn}(\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$4\operatorname{sn}\frac{\alpha + \beta}{2}\operatorname{sn}\frac{\beta + \gamma}{2}\operatorname{sn}\frac{\gamma + \alpha}{2};$$

$$274. \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = \operatorname{sn}^2\beta;$$

$$275. \operatorname{sn} 5\varphi\cos 3\varphi\cos 6\varphi = \frac{1}{4}(\operatorname{sn} 14\varphi + \operatorname{sn} 2\varphi + \operatorname{sn} 8\varphi - \operatorname{sn} 4\varphi).$$

Найти все значения угла  $\alpha$ , при каждом из которых одновременно имеют смысл обе части следующего равенства, и для этих значений  $\alpha$  доказать его справедливость:

$$276. \frac{\operatorname{sn}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha;$$

$$277. \frac{\operatorname{sn}\alpha}{1 + \cos\alpha} + \frac{1 + \cos\alpha}{\operatorname{sn}\alpha} = \frac{2}{\operatorname{sn}\alpha};$$

$$278. \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha;$$

$$279. \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1};$$

$$280. \frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$281. \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha;$$

$$282. \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1};$$

$$283. \frac{1}{\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha;$$

$$284. \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha};$$

$$285. \cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha + 2)(2 \operatorname{tg} \alpha + 1) - 5 \sin \alpha \cos \alpha = 2;$$

$$286. \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{1 - \sin 2\alpha} - \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$287. \sin^3 \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^3 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha;$$

$$288. \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$289. \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha;$$

$$290. \frac{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha} = 3;$$

$$291. \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}.$$

Найти все значения  $x$ , при каждом из которых справедливо следующее равенство:

$$292. \sin(\arcsin x) = x;$$

$$293. \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x;$$

$$294. \cos(\arccos x) = x;$$

$$295. \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x;$$

$$296. \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x};$$

$$297. \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x};$$

$$298. \arcsin(-x) = -\arcsin x;$$

$$299. \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$

$$300. \arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

$$301. \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$

$$302. \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2};$$

$$303. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2};$$

$$304. \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2};$$

$$305. \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2};$$

$$306. 2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}} = \arccos x.$$

§1. Исследование функций

Найти область существования следующей функции:

- |   |   |
|---|---|
| 1. $y = \frac{1+x}{2-x}$ ;                              | 2. $y = \log_2(x^2 - 1)$ ;                                      |
| 3. $y = \sqrt{x^2 - x}$ ;                               | 4. $y = \frac{1}{\sin x}$ ;                                     |
| 5. $y = \sqrt{(x-1)^2(x-2)}$ ;                          | 6. $y = \sqrt{x^2(x-1)^2(x-3)}$ ;                               |
| 7. $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4+x}$ ;                       | 8. $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ;                               |
| 9. $y = \log_3(x+2) + \log_3(x-2)$ ;                    | 10. $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{\sin x + \cos x}}$ ; |
| 11. $y = \log_2(\log_3(\log_4 x))$ ;                    | 12. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$ ;                         |
| 13. $y = \arcsin 3x$ ;                                  | 14. $y = \arccos \sqrt{x}$ ;                                    |
| 15. $y = \arccos \frac{x}{1-x}$ ;                       | 16. $y = \sqrt{\cos x^2}$ ;                                     |
| 17. $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$ ;                        | 18. $y = \log_x 2$ ;  |
| 19. $y = \lg(\sqrt{x-3} - 2)$ ;                         | 20. $y = \lg \sin x$ ;  |
| 21. $y = \sqrt{2^x - 2^{-x}}$ ;                         | 22. $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$ ;                              |
| 23. $y = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} x$ ; | 24. $y = \frac{x^2}{1-x} + \frac{1}{ x+2 }$ ;                   |
| 25. $y = \lg \cos(\lg x)$ ;                             | 26. $y = \sqrt[4]{x^4 - 1}$ ;                                   |
| 27. $y = \frac{1}{1-2^x}$ ;                             | 28. $y = \frac{1}{3^x - 3^{-x}}$ ;                              |
| 29. $y = \log_{1/5}(-x)$ ;                              | 30. $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$ ;                              |
| 31. $y = \frac{1}{\sqrt{ x  - 2 x-1 }}$ ;               | 32. $y = \frac{ x-1 }{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ .            |

Найти область существования и область значений следующей функции:

$$\begin{aligned}
33. y &= \sqrt{2+x-x^2}; & 34. y &= \frac{x^2-1}{x^2+1}; \\
35. y &= \log_3(1-2\cos x); & 36. y &= \sin x + |\sin x|; \\
37. y &= 2\sin 5x + 3\cos 5x; & 38. y &= \frac{2x}{1+x^2}; \\
39. y &= \frac{x+2}{x^2+x+1}; & 40. y &= \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}; \\
41. y &= 2|\cos x|.
\end{aligned}$$

Найти область значений следующей функции (на указанной в скобках области ее определения):

$$\begin{aligned}
42. y &= x^2 + x \quad (-2 \leq x \leq 4); & 43. y &= \lg x \quad (10 < x \leq 1000); \\
44. y &= |2x-1| \quad (1 \leq |x| \leq 2); & 45. y &= \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} \quad (0 < |x| \leq 1); \\
46. y &= x^4 - x^2 \quad (-1 \leq x \leq 0); & 47. y &= \frac{1}{1-x} \quad (0 < x < 1); \\
48. y &= \sqrt{x-x^2} \quad (0 \leq x \leq 1); & 49. y &= \frac{x}{1+x^2} \quad (-10 \leq x \leq 10).
\end{aligned}$$

50. Найти числа  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(4)$ , если  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$ .

51. Найти числа  $f(-2)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(1)$ , если

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -\infty < x \leq 0; \\ 2^x, & 0 < x < \infty. \end{cases}$$

52. Найти функции  $f(-x)$ ,  $f(2x)$ ,  $f(x+1)$ ,  $f(x)+1$ ,  $2f(x)$ ,  $f(\frac{1}{x})$ ,  $\frac{1}{f(x)}$ ,  $f(x)+f(2)$ , если  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ .

53. Найти функции  $f(g(x))$ ,  $g(f(x))$ ,  $f(f(x))$ ,  $g(g(x))$ , если:

$$\begin{aligned}
\text{а) } g(x) &= x^2, \quad f(x) = 2^x; \\
\text{б) } g(x) &= \operatorname{sign} x, \quad f(x) = \frac{1}{x};
\end{aligned}$$

$$\text{в) } g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x, & x > 0; \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ -x^2, & x > 0. \end{cases}$$

Выяснить, какие из следующих функций являются ограниченными:

54.  $y = 5 \cos 171x$ ;

56.  $y = 4 \sin 5x + 7 \cos 8x$ ;

58.  $y = \frac{1}{1+x^2}$ ;

60.  $y = 2^{\sin x} + 2^{\cos x}$ ;

62.  $y = (x-1)(x-5)(x-6)(x-2)$ ;

64.  $y = \frac{x^2+x+2}{x^2+x+1}$ ;

66.  $y = \sin(\arcsin x)$ ;

68.  $y = 2^{\log_{1/2} x}$ ;

70.  $y = \log_3(2 + \cos x)$ .

55.  $y = 2 \sin x + 3 \cos x$ ;

57.  $y = \sqrt{4 - \sin^2 x}$ ;

59.  $y = x^4 - 5x^2 + 6$ ;

61.  $y = \sqrt{x-x^2}$ ;

63.  $y = \frac{x^2+2x+3}{x^2+1}$ ;

65.  $y = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$ ;

67.  $y = \arcsin(\sin x)$ ;

69.  $y = 2^{1-x^2}$ ;

Доказать, что следующие функции не являются ограниченными:

71.  $y = 2x + 1$ ;

72.  $y = \frac{1}{x}$ ;

73.  $y = x^2$ ;

74.  $y = |x|$ ;

75.  $y = \operatorname{tg} x$ ;

76.  $y = \log_2 x$ ;

77.  $y = \log_{1/2} |x|$ ;

78.  $y = 1 - x^2$ ;

79.  $y = 2^x$ ;

80.  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ;

81.  $y = \frac{1}{x^2}$ ;

82.  $y = \frac{1}{1-x}$ ;

83.  $y = \sqrt{x}$ .

84. Доказать, что функция  $y = x - x^2$  возрастает на промежутке  $(-\infty, \frac{1}{2})$  и убывает на промежутке  $(\frac{1}{2}, +\infty)$ .

85. Доказать, что функция  $y = \frac{x}{x+1}$  возрастает на промежутках  $(-\infty, -1)$  и  $(-1, +\infty)$ .

86. Доказать, что функция  $y = x^3 - 6x$  убывает на промежутке  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ .

87. Доказать, что функция  $y = x + \frac{1}{x^2}$  возрастает на промежутке  $(-\infty, 0)$ ; убывает на промежутке  $(0, \sqrt[3]{2})$ ; возрастает на промежутке  $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$ .

Определить промежутки монотонности следующих функций:

$$\begin{array}{lll}
 88. y = |x|; & 89. y = |x - 2|; & 90. y = (x - 2)^2; \\
 91. y = \frac{1}{x}; & 92. y = 2 + x - x^2; & 93. y = x^3; \\
 94. y = \frac{1}{x-1}; & 95. y = \sqrt{x} - 1; & 96. y = \sin 2x; \\
 97. y = |\log_2 x|; & 98. y = \lg |x|; & 99. y = \operatorname{ctg} x; \\
 100. y = \operatorname{tg} 2x; & 101. y = \frac{x}{1+x^2}; & 102. y = 2^{|x|}; \\
 103. y = \frac{x}{1-x}.
 \end{array}$$

104. Доказать, что функция  $y = x^4 - x^2$  не является монотонно возрастающей на промежутке  $(-2, 2)$ .

105. Будет ли произведение двух монотонно возрастающих функций монотонно возрастающей функцией?

106. Пусть известно, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  – четные. Что можно сказать о их: а) сумме; б) разности; в) произведении; г) частном?

107. Пусть известно, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  – нечетные. Что можно сказать о их: а) сумме; б) разности; в) произведении; г) частном?

108. Пусть известно, что функция  $f(x)$  – четная, а функция  $g(x)$  – нечетная. Что можно сказать о их: а) сумме; б) разности; в) произведении; г) частном?

109. Доказать, что функцию, определенную на множестве, симметричном относительно начала координат, можно представить в виде суммы функций, одна из которых четная, а другая – нечетная.

Какие из следующих функций являются четными? Какие являются нечетными? Какие не являются ни четными ни нечетными?

$$\begin{array}{ll}
 110. y = \sin x \cdot \cos x; & 111. y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}; \\
 112. y = |\sin 5x|; & 113. y = x^4 + 5x^2 - 2; \\
 114. y = x + \sin^3 x; & 115. y = \frac{|x| + 1}{1 + x^2 + |x|};
 \end{array}$$

116.  $y = \frac{x^2}{x^4 - 1} \cos x$ ;

117.  $y = x^2 + \sin x$ ;

118.  $y = (3 - x)^5 - (3 + x)^5$ ;

119.  $y = |x| + \cos 3x$ ;

120.  $y = \sin x \cdot \operatorname{tg} 5x$ ;

121.  $y = x + \frac{1}{x}$ ;

122.  $y = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$ ;

123.  $y = \sqrt[3]{(1 + x)^2} + \sqrt[3]{(1 - x)^2}$ ;

124.  $y = \sqrt{2x - 1}$ ;

125.  $y = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}$ ;

126.  $y = 2x + 3$ ;

127.  $y = \ln \frac{1 - x}{1 + x}$ ;

128.  $y = \cos x + \sin(\cos x)$ ;

129.  $y = \sqrt{x^4 - |x|(x^2 + 1)}$ ;

130.  $y = \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}}$ ;

131.  $y = \lg(x + \sqrt{1 + x^2})$ ;

132.  $y = |x - 1| - 2|x| + |x + 1|$ ;

133.  $y = \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}}$ ;

134.  $y = x^2 + x$ ;

135.  $y = \frac{(1 + 2^x)^2}{2^x}$ ;

136.  $y = \frac{1}{(x + 1)^2}$ ;

137.  $y = \frac{x - 1}{|x - 1|}$ ;

138.  $y = |x - 1|$ .

Представить следующую функцию в виде суммы четной и нечетной функций:

139.  $y = x^2 + x$ ; 140.  $y = x^2 - \sin x$ ; 141.  $y = 5^x$ ;

142.  $y = |x - 1|$ ; 143.  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ ; 144.  $y = \frac{1}{x^4 - x^2}$ .

Выяснить, какие из следующих функций являются периодическими, и у тех, которые являются периодическими, найти их главный период:

145.  $y = 3 \cos 2x$ ; 146.  $y = \operatorname{tg} 5x$ ;

147.  $y = \cos x + \sin x$ ; 148.  $y = \cos x \cdot \sin x$ ;

149.  $y = 3 \cos 2x + 4 \sin 2x$ ; 150.  $y = \sin^2 x$ ;  
 151.  $y = 3 \sin x + \sin 2x$ ; 152.  $y = 3 \cos x + \cos 2x$ ;  
 153.  $y = x^3$ ; 154.  $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ ;  
 155.  $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ ; 156.  $y = \operatorname{tg} x + \sin 2x$ ;  
 157.  $y = \cos x + \cos 2x$ ; 158.  $y = x - [x]$ ;  
 159.  $y = \sin x^2$ ; 160.  $y = x^2$ ;  
 161.  $y = \sqrt{x}$ ; 162.  $y = \lg x$ ;  
 163.  $y = x^2 - 2$ ; 164.  $y = \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x}$ ;  
 165.  $y = \cos \frac{1}{x}$ ;

166. Доказать, что функция Дирихле

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное число,} \end{cases}$$

имеет периодом любое рациональное число, но главного периода не имеет.

167. Доказать, что функция  $y = \cos x + \cos \sqrt{2}x$  не является периодической.

168. Доказать, что функция  $y = \sin x + \sin \sqrt{2}x$  не является периодической.

Найти экстремальные значения следующих функций:

169.  $y = x^2 + x + 1$ ; 170.  $y = 2 + x - x^2$ ;  
 171.  $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ ; 172.  $y = \frac{1}{2x - x^2 - 2}$ ;  
 173.  $y = \frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 5}$ ; 174.  $y = \sqrt{1 - x^2}$ ;  
 175.  $y = \sqrt{1 + \sin^2 x}$ ; 176.  $y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ ;  
 177.  $y = \frac{x}{1 + x^2}$ ; 178.  $y = \cos(\sin x)$ ;  
 179.  $y = \log_2(x^2 + 2x + 2)$ ; 180.  $y = 2 \sin x - 2 \cos x$ ;  
 181.  $y = x + \frac{1}{x}$ ; 182.  $y = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$ ;

183.  $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1}$  ;
184.  $y = |x - 2| + |3 - x|$  ;
185.  $y = 2^{\sin x}$  ;
186.  $y = |\log_{1/2} x|$  ;
187.  $y = \log_2 \sin x$  ;
188.  $y = x^2 + x, x \in [2, 3]$  ;
189.  $y = \log_3 x, x \in [1, 2]$  ;
190.  $y = \frac{x}{1 + x^2}, x \in [5, 7]$  ;
191.  $y = |x + 1| + |x + 2|, x \in [2, 3]$  ;
192.  $y = \sin^2 x + 2 \sin x - 3$  ;
193.  $y = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$  ;
194.  $y = 2^{-x^2} \cdot |\cos x|$  ;
195.  $y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$  ;
196.  $y = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1}$  ;
197.  $y = 3 \sin 7x + 4 \cos 7x$  ;
198.  $y = \sin^2 x - 2 \sin x - 3$  .

## §2. Графики

В одной и той же системе координат построить графики следующих функций:

1.  $y = x, y = x^3, y = x^5$  ;
2.  $y = x, y = x^2, y = x^4$  ;
3.  $y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x^3}$  ;
4.  $y = \frac{1}{x^2}, y = \frac{1}{x^4}$  ;
5.  $y = x, y = \sqrt{x}, y = \sqrt[3]{x}, y = \sqrt[4]{x}$  ;
6.  $y = \sqrt{x^2}, y = \sqrt[3]{x^2}, y = \sqrt[4]{x^2}$  ;
7.  $y = 2^x, y = 3^x, y = 2^{2x}$  ;
8.  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = 3^{-x}, y = 2^{-2x}$  ;
9.  $y = x, y = \log_2 x, y = \log_3 x$  ;
10.  $y = x, y = \log_{1/2} x, y = \log_{1/3} x$  ;
11.  $y = \log_2 x^2, y = \log_{1/2} x^2$  ;
12.  $y = \sin x, y = \cos x, y = x$  ;
13.  $y = x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$  ;
14.  $y = \arcsin x, y = \arccos x$  ;
15.  $y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$  ;

Построить графики следующих функций:

$$\begin{array}{ll}
16. y = x + 2; & 17. y = 1 - 2x; \\
18. y = |x| - x; & 19. y = |x| - |x - 1|; \\
20. y = |x| + |x + 1|; & 21. y = \left| |x - 1| - 2 \right|; \\
22. y = |1 + x| - x; & 23. y = |x| - |x + 1| - |x + 2|.
\end{array}$$

Используя правило построения графика функции  $y = Af(x)$  по графику функции  $y = f(x)$ , построить графики следующих функций:

$$\begin{array}{ll}
24. y = -x^2; & 25. y = -\frac{1}{x}; \\
26. y = -\cos x; & 27. y = -\frac{1}{3} \arccos x; \\
28. y = 2 \sin x; & 29. y = 3\sqrt{x}; \\
30. y = \frac{1}{4} \operatorname{tg} x; & 31. y = 4 \log_2 x; \\
32. y = -\frac{1}{3} 5^x; & 33. y = \frac{1}{2} \log_{1/3} x; \\
34. y = -2 \arcsin x; & 35. y = 3 \operatorname{arcctg} x.
\end{array}$$

Используя правило построения графика функции  $y = f(-x)$  по графику функции  $y = f(x)$ , построить графики следующих функций:

$$\begin{array}{ll}
36. y = \log_2(-x); & 37. y = \arccos(-x); \\
38. y = \sqrt{-x}; & 39. y = \sqrt[3]{-x}; \\
40. y = 2^{-x}; & 41. y = \sin(-x); \\
42. y = \operatorname{arcctg}(-x); & 43. y = -3\sqrt[4]{-x}; \\
44. y = \operatorname{ctg}(-x).
\end{array}$$

Используя правило построения графика функции  $y = f(kx)$ , где  $k \neq 0$ , по графику функции  $y = f(x)$ , построить графики следующих функций:

$$\begin{array}{ll}
45. y = \sin 2x; & 46. y = \cos \frac{1}{2}x; \\
47. y = \cos 3x; & 48. y = \log_2(2x); \\
49. y = \log_{1/2}\left(\frac{1}{2}x\right); & 50. y = 2^{2x};
\end{array}$$

$$51. y = \operatorname{ctg} \frac{1}{4}x; \quad 52. y = \sin \pi x;$$

$$53. y = \cos \frac{1}{\pi}x; \quad 54. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}x;$$

$$55. y = \sqrt{-2x}; \quad 56. y = -\operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}x\right).$$

Используя правило построения графика функции  $y = f(x + \alpha)$ , где  $\alpha \neq 0$ , по графику функции  $y = f(x)$ , построить графики следующих функций:

$$57. y = (x - 5)^2; \quad 58. y = \sqrt{1 + x};$$

$$59. y = \sqrt{1 - x}; \quad 60. y = \sqrt[3]{2x + 3};$$

$$61. y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right); \quad 62. y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$63. y = \log_2(1 - x); \quad 64. y = \log_{1/3}(2x + 1);$$

$$65. y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right); \quad 66. y = \frac{1}{x - 3};$$

$$67. y = \frac{1}{1 - 2x}; \quad 68. y = \operatorname{tg}(1 - x);$$

$$69. y = 2^{1-x}; \quad 70. y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}.$$

Используя правило построения графика функции  $y = f(x) + A$  по графику функции  $y = f(x)$ , построить графики следующих функций:

$$71. y = 1 - \sin x; \quad 72. y = 2 + 3 \cos x;$$

$$73. y = \frac{\pi}{4} + 2 \arcsin x; \quad 74. y = 2 - \sqrt{1 - 2x};$$

$$75. y = 1 + \log_2(x + 1); \quad 76. y = \cos^2 x;$$

$$77. y = \sin^2 x; \quad 78. y = \frac{2 + x}{1 + x};$$

$$79. y = x^2 + x; \quad 80. y = x^2 - x;$$

$$81. y = x^2 + x + 1; \quad 82. y = x^2 - |x + 1| + 2;$$

$$83. y = |x^2 - 5x + 6| - x + 3; \quad 84. y = |x^2 - 1| + x^2;$$

$$85. y = x^2 - \sqrt{x^2}; \quad 86. y = x^2 + \sqrt[3]{x^4};$$

$$87. y = \frac{x}{x + 1}; \quad 88. y = \frac{2x - 1}{3x + 1};$$

$$89. y = \frac{|x|}{1-2x}; \quad 90. y = \frac{1}{|x+2|-1};$$

$$91. y = \frac{3x-1}{|2x+1|}; \quad 92. y = \frac{|x|+1}{x}.$$

Используя правило построения графика функции  $y = |f(x)|$  по графику функции  $y = f(x)$ , построить графики следующих функций:

$$93. y = |\arctg 2x|;$$

$$94. y = |\log_3 \frac{1}{2}x|;$$

$$95. y = |1 - \sqrt[3]{2+x}|;$$

$$96. y = |\sqrt{x+2}-1|;$$

$$97. y = \left| \frac{2x-1}{3x+4} \right|;$$

$$98. y = \left| \operatorname{ctg}(2x - \frac{\pi}{3}) \right|;$$

$$99. y = |x^2 - x - 2|;$$

$$100. y = \left| \frac{|x|-1}{x} \right|;$$

$$101. y = \left| \frac{\pi}{4} - \operatorname{arccctg}(x+2) \right|.$$

Используя правило построения графика функции  $y = f(|x|)$  по графику функции  $y = f(x)$ , построить графики следующих функций:

$$102. y = \sin |x|;$$

$$103. y = 2^{|x|};$$

$$104. y = \sqrt{|2x|};$$

$$105. y = \log_{1/2}|x|;$$

$$106. y = \frac{1+|x|}{|x|-1};$$

$$107. y = \sqrt{1-|x|};$$

$$108. y = \operatorname{tg}(|x| - \frac{\pi}{3});$$

$$109. y = \operatorname{ctg}(|x|);$$

$$110. y = x^2 - 5|x| + 6;$$

$$111. y = 1 + \sqrt[3]{2-|x|};$$

$$112. y = -2\log_3(|x|-1); \quad 113. y = |\operatorname{tg} |2x||.$$

Построить графики следующих функций:

114.  $y = -\frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ ; 115.  $y = |\log_2|1 - x||$ ;  
 116.  $y = \operatorname{arctg} \frac{1-2x}{3}$ ; 117.  $y = \arcsin \frac{2x+3}{4}$ ;  
 118.  $y = \arccos \frac{1-3x}{5}$ ; 119.  $y = 1 - \sqrt[3]{(1-x)^2}$ ;  
 120.  $y = \sin x + \cos x$ ; 121.  $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ ;  
 122.  $y = 2^{\log_2|x|}$ ; 123.  $y = (\sqrt{2})^{\log_2 x}$ ;  
 124.  $y = \log_{1/2}(x-1)^2$ ; 125.  $y = 2^{|\log_2 x|}$ ;  
 126.  $y = \sin x \cdot \cos x$ ; 127.  $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ ;  
 128.  $y = 2^{\log_4 \sin x}$ ; 129.  $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ ;  
 130.  $y = \sqrt{(x-1)^2}$ ; 131.  $y = \sqrt[4]{\cos^4 x}$ ;  
 132.  $y = \sqrt{\sin^2 x} - \sin x$ ; 133.  $y = \sqrt{\cos^2 x} - \cos x$ ;  
 134.  $y = (\sqrt{x})^2$ ; 135.  $y = x^{\log_x(x^2-1)}$ ;  
 136.  $y = \cos^2 x + \sin^2 x$ ; 137.  $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ ;  
 138.  $y = \frac{x}{x}$ ; 139.  $y = \sin(\arcsin x)$ ;  
 140.  $y = \cos(\arccos x)$ ; 141.  $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ ;  
 142.  $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$ ; 143.  $y = \arcsin(\sin x)$ ;  
 144.  $y = \arccos(\cos x)$ ; 145.  $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ ;  
 146.  $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x)$ ; 147.  $y = \arccos(\sin x)$ ;  
 148.  $y = \arcsin(\cos x)$ ; 149.  $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x)$ ;  
 150.  $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ .

Используя правило построения графика функции  $y = \frac{1}{f(x)}$  по графику функции  $y = f(x)$ , построить графики следующих функций:

151.  $y = \frac{1}{1+x^2}$ ; 152.  $y = \frac{1}{\sin x}$ ;  
 153.  $y = \frac{1}{\cos x}$ ; 154.  $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ ;

$$155. y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}; \quad 156. y = \frac{1}{\log_2|x|};$$

$$157. y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}; \quad 158. y = \frac{1}{\sqrt[3]{2 - |x|}};$$

$$159. y = \frac{1}{||1 - x| - 1|}; \quad 160. y = \frac{1}{2^x - 1};$$

$$161. y = \frac{1}{x^2 - x}; \quad 162. y = \frac{1}{|x| - x^2}.$$

Построить графики следующих функций:

$$163. y = x + \frac{1}{x}; \quad 164. y = x \cdot \sin x;$$

$$165. y = 5^x - 5^{-x}; \quad 166. y = x^2 \cdot \sin x;$$

$$167. y = x + \frac{1}{x^2}; \quad 168. y = 2^{-x} \cdot \sin \frac{x}{2};$$

$$169. y = x + \sin x; \quad 170. y = x - \sin x;$$

$$171. y = \frac{1}{x(x^2 - 1)}; \quad 172. y = \frac{x}{1 + x^2};$$

$$173. y = \frac{x^2}{1 + x^2}; \quad 174. y = \frac{x^3}{1 - x^2};$$

$$175. y = \frac{1}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)}; \quad 176. y = \frac{x}{1 - x^2};$$

$$177. y = \frac{|x| - 1}{(x - 1)^2}; \quad 178. y = \frac{x^2}{1 - x^3};$$

$$179. y = \frac{x^2}{1 + x^2}; \quad 180. y = \frac{(2 - x)(2 - x^2)}{x^4 - 5x^2 + 6};$$

$$181. y = \frac{|x|}{(x + 1)(x - 2)}; \quad 182. y = \sqrt[3]{x(1 + x)(x + 2)};$$

$$183. y = \sqrt[3]{x^2(1 + x)(2 - x^2)}; \quad 184. y = x^2 - x^4;$$

$$185. y = \log_2 \frac{x + 1}{x + 2}; \quad 186. y = \log \cos x;$$

$$187. y = \arccos(2 \sin x); \quad 188. y = \log_{1/2}(x^2 - 5x + 6);$$

$$189. y = 3^{\cos x}; \quad 190. y = \sin(2 \arccos x);$$

$$191. y = 2^{2^{-x}}; \quad 192. y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x};$$

193.  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-|x|}{x+1}}$  ;
195.  $y = \log_{1/3} \frac{|x|}{x+2}$  ;
197.  $y = 2^{\frac{x}{1-|x|}}$  ;
199.  $y = 2^{\frac{1}{\cos x}}$  ;
201.  $y = 2^{\text{tg } x}$  ;
203.  $y = \text{arctg } \frac{x}{x^2 - 4}$  ;
205.  $y = \text{arctg } \lg x$  ;
207.  $y = \sin \sqrt{\frac{1}{|x+2|}}$  ;
209.  $y = \cos(\arcsin x)$  ;
211.  $y = \log_{1/2}(x^2 - x)$  ;
213.  $y = \cos \frac{x-1}{x+1}$  ;
215.  $y = \sqrt{x^2(x-1)^2}$  ;
217.  $y = \frac{1}{2} \arcsin \left| \frac{1-|x|}{3} \right|$  ;
219.  $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  ;
194.  $y = \log_{1/2} |1 - 2^{-x}|$  ;
196.  $y = \sqrt{x^2 + 5x + 4}$  ;
198.  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{|x+2|}}$  ;
200.  $y = \frac{1}{3^x - 9}$  ;
202.  $y = \log_{1/2} \text{arctg } x$  ;
204.  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{ctg } x}$  ;
206.  $y = \log_{1/3} \sin \frac{\pi x - \pi/3}{2}$  ;
208.  $y = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin x \cos x}$  ;
210.  $y = \cos \frac{1}{x}$  ;
212.  $y = \frac{1}{\cos x + \sin x}$  ;
214.  $y = \text{arctg } \frac{\sqrt{3x-1}}{x+2}$  ;
216.  $y = \frac{1}{|1 - 2^{|x|}|}$  ;
218.  $y = x \sqrt{\frac{x}{1-x}}$  ;
220.  $y = x^2 + \frac{1}{x}$  .

## ГЛАВА 6. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Равносильны или нет следующие два уравнения:

- |   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| 1. $x^2 = x^3$                            | и $x = 1$ ;                         |
| 2. $\sqrt{x} = 1$                         | и $x^2 = 1$ ;                       |
| 3. $x + 2 = 0$                            | и $(x^2 + 1)(x + 2) = 0$ ;          |
| 4. $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} = 1$      | и $\sqrt{x^2} = 1$ ;                |
| 5. $x^2 + 2x + 1 = 0$                     | и $x + 1 = 0$ ;                     |
| 6. $\sqrt{x(x+1)} = \sqrt{2}$             | и $\sqrt{x}\sqrt{x+1} = \sqrt{2}$ ; |
| 7. $\frac{x-2}{x^2-5x+6} = 1$             | и $x-2 = x^2-5x+6$ ;                |
| 8. $\sqrt{x-2}(x^2+3) = 4x\sqrt{x-2}$     | и $x^2+3 = 4x$ ;                    |
| 9. $3^{\log_3 x} = x^2$                   | и $x^2 = x$ ;                       |
| 10. $\log_2 x(x+1) = 1$                   | и $\log_2 x + \log_2(x+1) = 1$ ;    |
| 11. $\log_2 x^2 = 1$                      | и $2\log_2 x = 1$ ;                 |
| 12. $\log_2 x^3 = 0$                      | и $3\log_2 x = 0$ ;                 |
| 13. $x - 1 = 0$                           | и $(x-2)2^{\log_5(1/2-x)} = 0$ ;    |
| 14. $x^2 + \log_2 x = 1 + \log_2 x$       | и $x^2 = 1$ ;                       |
| 15. $\log_2(x^2 - 4) = \log_2(4x - 7)$    | и $x^2 - 4 = 4x - 7$ ;              |
| 16. $\sin x = \cos x$                     | и $\sin^2 x = \cos^2 x$ ;           |
| 17. $ \sin x  =  \cos x $                 | и $\sin^2 x = \cos^2 x$ ;           |
| 18. $\sqrt{\cos^2 x} = 1$                 | и $\cos x = 1$ ;                    |
| 19. $\sqrt{\sin^2 x} = 1$                 | и $ \sin x  = 1$ ;                  |
| 20. $\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos 5x} = 0$ | и $\sin 2x = 0$ .                   |

Равносильны или нет следующие два неравенства:

21.  $x^2 > x$  и  $x > 1$ ;  
 22.  $x^4 > x^2$  и  $x^2 > 1$ ;  
 23.  $x^3 \leq 1$  и  $x < 1$ ;  
 24.  $\sqrt{x-1} < x$  и  $x-1 < x^2$ ;  
 25.  $(1-x)^2 x \geq 2(1-x)^2$  и  $x \geq 2$ ;  
 26.  $\sqrt{x+2} > \sqrt{2x+1}$  и  $x+2 > 2x+1$ ;  
 27.  $\frac{1}{x} < 1$  и  $x > 1$ ;  
 28.  $\frac{x^2-1}{x^2+x+1} > 1$  и  $x^2-1 > x^2+x+1$ ;  
 29.  $\frac{1}{x} < 1$  и  $\frac{1-x}{x} < 0$ ;  
 30.  $\lg(2-x)(x-3) < 0$  и  $(2-x)(x-3) < 1$ ;  
 31.  $\log_2 x^2 < 2$  и  $\log_2 x < 1$ ;  
 32.  $\sin^2 x > \cos^2 x$  и  $|\sin x| > |\cos x|$ .

Решить следующие уравнения:

33.  $\sqrt{x+2} = 2$ ; 34.  $\sqrt{x+2} = -2$ ;  
 35.  $\sqrt{x} = \sqrt{6x+1} - \sqrt{2x+1}$ ; 36.  $\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(1-x)^2} = 10$ ;  
 37.  $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$ ; 38.  $(1+x^2)^2 = 4x(1-x^2)$ ;  
 39.  $\sqrt{x^2-1} = (x+5)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ ; 40.  $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}$ ;  
 41.  $2^{x^2-6x-5/2} = 16\sqrt{2}$ ; 42.  $49^x - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$ ;  
 43.  $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$ ; 44.  $9^x - 2^{x+1/2} = 2^{x+7/2} - 3^{2x-1}$ ;  
 45.  $3^{2x^2+6x-9} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} = 3 \cdot 5^{2x^2+6x-9}$ ;  
 46.  $27^{\log_2 \pi x} + 12^{\log_2 \pi x} = 2 \cdot 8^{\log_2 \pi x}$ ;  
 47.  $\log_{1/3}(x^2 - 6) + \log_9 x^2 = 0$ ;  
 48.  $|2 + \log_{1/5} x| = |1 + \log_5 x| - 3$ ;

$$49. \frac{3}{2} \log_{1/4}(x+2)^2 - 3 = \log_{1/4}(4-x)^3 - \log_4(x+6)^3;$$

$$50. \log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x = 2;$$

$$51. \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7;$$

$$52. \lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1);$$

$$53. \log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1;$$

$$54. \log_2^2 x + (x-1) \log_2 x = 6 - 2x;$$

$$55. \sin^2 x = \cos^2 x;$$

$$56. 4 \cos x - 2 \cos 2x = 2 \cos^2 2x;$$

$$57. 2 \cos x - \cos 2x = 1;$$

$$58. \sin 2x + \operatorname{tg} x = 2;$$

$$59. \sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x);$$

$$60. \sin x \cdot \sin 7x = \sin 3x \cdot \sin 5x;$$

$$61. \cos x \cdot \cos 7x = \cos 3x \cdot \cos 5x;$$

$$62. \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8};$$

$$63. \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1;$$

$$64. \sin^2 x + \sin^2 2x = 1;$$

$$65. 4\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x + 3\sin^2 x = 3;$$

$$66. \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2;$$

$$67. \sin^3 x + \cos^3 x = 1;$$

$$68. \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = (\sin x + \cos x)^2;$$

$$69. \sin 3x = \sin x \cdot \cos 2x;$$

$$70. \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x;$$

$$71. \cos(\pi \lg x) + \sin(\pi \lg x) = \sqrt{2};$$

$$72. 4 \operatorname{arctg}(x^2 - 3x + 3) = \pi;$$

$$73. \sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x};$$

$$74. 2 - 3 \operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{5 - 6\cos^2 x}{\cos^2 x}};$$

$$75. \cos 2x + \sqrt{\frac{1 - \sin 2x}{2}} = 0;$$

$$76. \arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6};$$

$$77. \arccos x + \arccos(1 - x) = \arccos(-x);$$

$$78. \arccos x = \operatorname{arctg} x;$$

$$79. \operatorname{arctg}(1+x) + \operatorname{arctg}(1-x) = \frac{\pi}{4}.$$

Решить следующие неравенства:

$$80. \frac{1}{|x|} > \frac{1}{x+1};$$

$$81. 1 < \frac{3x-1}{2x+1} < 2;$$

$$82. (1+x)^2 < |1-x^2|;$$

$$83. \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} < \frac{8}{x^2-1};$$

$$84. \frac{(1+x)(2+x)}{x^2-|x|-2} \geq -1;$$

$$85. \frac{x^2-1}{\sqrt{13-x^2}} \geq x-1;$$

$$86. \sqrt{5x^2+10x+1} \geq 7-|x^2+2x|;$$

$$87. \sqrt{x+2} \geq x;$$

$$88. \sqrt{x+1} > \sqrt{x-1};$$

$$89. (x-2) \cdot \sqrt{x^2+1} > x^2+2;$$

$$90. \sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x} > 3;$$

$$91. \sqrt{x-2} - \sqrt{x-3} > -\sqrt{x-5};$$

$$92. \frac{1 - \sqrt{1 - 9x^2}}{x} < 1;$$

$$93. \sqrt{x-1} > 1 + \sqrt[3]{x-2};$$

$$94. \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} < \frac{3}{2};$$

$$95. \sqrt{x^2} > 2\sqrt{x^2 - 2x + 1};$$

$$96. 2^{x^2} > 1;$$

$$97. 4^{-\sqrt{x}} < 3;$$

$$98. 2^{\sqrt{x+1}} > 0;$$

$$99. 2^x < 3^{x+1};$$

$$100. 2 \cdot 4^x + 4 < 33 \cdot 2^{x-1};$$

$$101. \frac{24}{1 - 25^{-x}} \leq \frac{1}{5^{-x} - 6};$$

$$102. \frac{1}{2^x - 1} > \frac{1}{1 - 2^{x-1}};$$

$$103. 4^x \leq 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot 2^x + 4 \cdot 4^{\sqrt{x}};$$

$$104. 98 - 7^{x^2+5x-48} \geq 49^{x^2+5x-49};$$

$$105. \log_2(x + 2) > 1;$$

$$106. \log_{1/3}(x - 1) < 2;$$

$$107. \log_x x \geq 1;$$

$$108. \log_{1/3}(2x + 1) > -1;$$

$$109. \log_4(2x^2 + 3x + 1) \leq \log_2(2x + 2);$$

$$110. \log_2(2x + 1) < 1;$$

$$111. 2\log_2(x - 1) - \log_2(2x - 4) \geq 1;$$

$$112. \log_{\sqrt{3}}(x^2 + 4x + 6) + 6\sqrt{\log_3(x^2 + 4x + 6)} \geq 8;$$

$$113. \log_x [\log_2(4^x - 6)] \leq 1;$$

$$114. \log_2(\sqrt{x + 3} - x - 1) \leq 0;$$

$$115. \log_3 \frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x + 5|} \leq 0;$$

$$116. \sqrt{\log_{1/3}(4x - 3 - x^2)} > \log_3(4x - 3 - x^2);$$

$$117. \frac{1}{\log_2 x} > \frac{1}{\log_2 \sqrt{x + 2}};$$

$$118. -\frac{1}{3} \leq \cos x < \frac{1}{2};$$

$$119. |\operatorname{ctg} x| < 4;$$

$$120. |\sin x| < |\cos x|;$$

$$121. |\sin x| > |\cos x|;$$

$$122. \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} > 2;$$

$$123. \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1;$$

$$124. |\sin x| + |\cos x| > 1;$$

$$125. |\sin x + \cos x| < 1;$$

$$126. \sin 3x < \sin x;$$

$$127. 4\cos^2 x - 2(1 - \sqrt{2})\cos x - \sqrt{2} > 0;$$

$$128. \sqrt{5 - 2\sin x} \geq 6\sin x - 1;$$

$$129. \arcsin x < \arcsin(1 - x);$$

$$130. \arcsin x > \arccos x;$$

$$131. 2 \arcsin x > \operatorname{arctg} x;$$

$$132. \log_{1/3} [\log_4(\sin x + 2\sqrt{2}\cos x)] > 0.$$

# ГЛАВА 7. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

## §1. Предел числовой последовательности

Написать несколько членов числовой последовательности, задаваемой следующей формулой общего члена:

$$1. a_n = \frac{1}{n+2};$$

$$2. a_n = (-1)^n;$$

$$3. a_n = \cos \pi n;$$

$$4. a_n = \frac{(-1)^n}{n+1};$$

$$5. a_n = n^2 - n + 1;$$

$$6. a_n = n + \frac{1}{n};$$

$$7. a_n = \sin \pi n;$$

$$8. a_n = n(-1)^n;$$

$$9. a_n = \sqrt[n]{n};$$

$$10. a_n = \frac{1 + (-1)^n}{n};$$

$$11. a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$12. a_n = [\sqrt{n}];$$

$$13. a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n};$$

$$14. a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2};$$

$$15. a_n = a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1)};$$

$$16. a_n = \begin{cases} n, & n \text{ — четное,} \\ \sqrt{n}, & n \text{ — нечетное;} \end{cases}$$

$$17. a_n = \frac{1}{n!};$$

$$18. a_n = \operatorname{tg} \frac{\pi n}{4}.$$

Найти формулу общего члена следующей числовой последовательности:

19.  $\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \frac{37}{6}, \dots$ ;      20. 1, 7, 31, 127, 511,  $\dots$ ;

21. 2, 10, 26, 82, 242, 730,  $\dots$ ;      22. 1, 8, 27, 64, 125, 216,  $\dots$ ;

23. 0, 3, 2, 5, 4, 7,  $\dots$ ;      24. 1,  $-2, \frac{1}{3}, -4, \frac{1}{5}, -6, \frac{1}{7}, \dots$ ;

25. 3,  $-3, 3, -3, 3, -3, \dots$ ;      26. 1, 3, 5, 7, 9, 11,  $\dots$ ;

27. 1, 0, 1, 0, 1, 0,  $\dots$ ;      28. 1, 0,  $-1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, \dots$ ;

29. 2,  $-4, 6, -8, 10, -12, \dots$ ;      30.  $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, \dots$ ;

31.  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \dots$ .

32. Найти  $a_7$ , если последовательность  $a_n$  задана соотношениями  $a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1}$  для  $n \geq 2$ .

33. Найти  $a_{37}$  и  $a_{1967}$ , если последовательность  $a_n$  задана соотношениями  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} : a_{n-2}$  для  $n \geq 3$ .

34. Найти  $a_{90}$  и  $a_{885}$ , если последовательность  $a_n$  задана соотношениями  $a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$  для  $n \geq 3$ .

Найти 1224-й член следующей числовой последовательности:

35.  $1, -2, \frac{1}{3}, 1, -2, \frac{1}{6}, 1, -2, \frac{1}{9}, \dots$ ;

36. 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 10,  $\dots$ .

Найти наибольший член последовательности  $a_n$ , задаваемой следующей формулой общего члена:

37.  $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ ;      38.  $a_n = \frac{n}{100 + n^2}$ ;      39.  $a_n = \frac{1000^n}{n!}$ ;

40.  $a_n = -n^2 + 14n - 45 + \frac{4}{(2n - 17)^2 + 2}$ ;

41.  $a_n = -2n^2 + 20n - 48 + \frac{25}{(5n - 31)^2 + 10}$ .

Найти наименьший член последовательности  $a_n$ , задаваемой следующей формулой общего члена:

$$42. a_n = n^2 - 5n + 1; \quad 43. a_n = n + \frac{100}{n};$$

$$44. a_n = n + 5 \sin \frac{\pi n}{2};$$

$$45. a_n = 2n^2 - 24n + 69 - \frac{9}{(3n - 22)^2 + 3};$$

$$46. a_n = n^2 - 8n + 15 - \frac{9}{(3n - 16)^2 + 6}.$$

Выяснить, какие из следующих последовательностей являются монотонными:

$$47. a_n = n; \quad 48. a_n = 2^{n-1};$$

$$49. a_n = \frac{n-1}{n}; \quad 50. a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n};$$

$$51. a_n = \frac{1}{[n]}; \quad 52. a_n = [n^2];$$

$$53. a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}; \quad 54. a_n = (-1)^{n+1};$$

$$55. a_n = 2^n - 3^n; \quad 56. a_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}};$$

$$57. a_n = \frac{2n+3}{3n-2}; \quad 58. a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n};$$

$$59. a_n = n^3 - n^2; \quad 60. a_n = \sin n;$$

$$61. a_n = \operatorname{tg} \frac{\pi n}{3}; \quad 62. a_n = \frac{2^n}{2n+1};$$

$$63. a_n = \frac{2n+3}{6n-5};$$

$$64. \frac{1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{\sqrt{2}+1}, \frac{1}{\sqrt{3}-1}, \frac{1}{\sqrt{3}+1}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}-1}, \frac{1}{\sqrt{n}+1}, \dots;$$

$$65. a_n = 1 + (-1)^n + n^2;$$

$$66. a_n = 2^{1/n} + (-1)^n.$$

Выяснить, какие из следующих последовательностей являются ограниченными:

$$67. a_n = (-1)^n; \quad 68. a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2};$$

$$69. a_n = \frac{1}{n} + \sin n; \quad 70. a_n = \frac{2n-1}{2n};$$



93. Доказать, что возрастающая последовательность всегда ограничена снизу, а убывающая последовательность всегда ограничена сверху.

Доказать следующие равенства, пользуясь только определением предела последовательности (т.е. по  $\varepsilon$  найти номер  $N$ ):

$$94. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

$$95. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0;$$

$$96. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + n - 1} = 0;$$

$$97. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1;$$

$$98. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{n+1} = 1;$$

$$99. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2+n+1} = 2;$$

$$100. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n+\sqrt{n}+1} = 0;$$

$$101. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0;$$

$$102. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{1+n^2} = -1;$$

$$103. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+1} = 3;$$

$$104. \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \quad |q| < 1;$$

$$105. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n + \cos n}{n} = 0;$$

$$106. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sin n}{n + 2} = 1;$$

$$107. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (-1)^n}{n} = 0;$$

$$108. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{n^3 - n^2 + 1} = 0;$$

$$109. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0;$$

$$110. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0;$$

$$111. \lim_{n \rightarrow \infty} 0,99^n = 0;$$

$$112. \lim_{n \rightarrow \infty} 5^{\frac{1}{n}} = 1;$$

$$113. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n + 1} = 0;$$

$$114. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log_2 n} = 0;$$

$$115. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{[n]} = 0.$$

Выяснить, какие из следующих последовательностей имеют предел:

$$116. a_n = (-1)^n + 1;$$

$$117. a_n = 1^n;$$

$$118. a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}};$$

$$119. 0, 2; 0, 22; 0, 222; \dots, 0, \underbrace{22\dots 2}_n; \dots;$$

$n$  цифр

120.  $a_n = \sin n^\circ$  ;  
 121.  $a_n = \cos n^\circ$  ;  
 122.  $a_n = \frac{\cos n^\circ}{n}$  ;  
 123. 0; 1; 2; 3; 0; 1; 2; 3; 0; 1; 2; 3; ... ;  
 124. 0, 2; 0, 23; 0, 234; 0, 2345; ... ;  
 125.  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{9}$ ; ...  $\frac{1}{2^n}$ ;  $\frac{1}{3^n}$ ; ... ;  
 126.  $a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}$  ;  
 127.  $a_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n \cdot (n+1)}$  ;  
 128.  $a_n = 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$ .

Пусть  $a$  – некоторое действительное число. Привести пример последовательности  $a_n$ , удовлетворяющей следующему условию:

129. Существует положительное число  $\varepsilon$  и существует натуральное число  $k$  такие, что для любого натурального числа  $n$ , большего  $k$ , справедливо неравенство  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

130. Существует положительное число  $\varepsilon$  и существует натуральное число  $k$  такие, что для любого натурального числа  $n$ , большего  $k$ , справедливо неравенство  $|a_n - a| \geq \varepsilon$ .

131. Существует положительное число  $\varepsilon$  такое, что для любого натурального числа  $n$ , справедливо неравенство  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

132. Существует положительное число  $\varepsilon$  такое, что для любого натурального числа  $n$ , справедливо неравенство  $|a_n - a| \geq \varepsilon$ .

133. Для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует натуральное число  $n$  такое, что справедливо неравенство  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

134. Для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует натуральное число  $k$  такое, что для любого натурального числа  $n$ , большего  $k$ , справедливо неравенство  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

135. Для любого положительного числа  $\varepsilon$  и любого натурального числа  $k$  существует натуральное число  $n$ , большее  $k$  и такое, что справедливо неравенство  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

136. Для любого положительного числа  $\varepsilon$  и любого натурального числа  $n$  справедливо неравенство  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

137. Пусть предел последовательности  $a_n$  равен 0:

а) могут ли все члены последовательности  $a_n$  быть отрицательными ?

б) могут ли в этой последовательности быть члены больше  $10^{10}$  ?

в) могут ли все члены последовательности  $a_n$  быть больше  $10^{-10}$  ?

138. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Найти предел последовательностей

$$b_n = a_{n+1} - a_n ; c_n = a_{n+1} + a_n.$$

Найти следующие пределы:

139.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+5} ;$

140.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n}{n^2+1} ;$

141.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} ;$

142.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-1}{2^n+1} ;$

143.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{5n^2 - 1} ;$

144.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) ;$

145.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n} ;$

146.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n + 5^n}{2^n + 6^n} ;$

147.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 2}{1 + 2 + \dots + n} ;$

148.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k ;$

149.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1} ;$

150.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}) ;$

151.  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{(n+2)(n+3)} - n] ;$

152.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n}) ;$

153.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+2n} - 2\sqrt{n^2+n} + n) ;$

154.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1}) ;$

155.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) ;$

$$156. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2};$$

$$157. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=2}^n k(k-1).$$

Найти предел последовательности, используя теорему о пределе монотонной и ограниченной последовательности:

$$158. a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}};$$

$$159. a_n = \frac{c^n}{n!}, c > 0;$$

$$160. a_0 > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right);$$

$$161. a_n = \underbrace{\sin(\sin(\sin \dots (\sin a)))}_{n \text{ раз}}.$$

162. Доказать, что если последовательность  $a_n$  имеет предел, то она ограничена. Верно ли обратное утверждение?

163. Доказать, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

164. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ . Следует ли отсюда, что либо  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , либо  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ?

165. Привести пример ограниченных последовательностей  $a_n$  и  $b_n$ , каждая из которых не имеет предела, но:

а) сумма имеет предел;

б) разность имеет предел;

в) произведение имеет предел.

166. Известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = c$ . Что можно сказать о  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ?

167. Известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = c$ . Что можно сказать о  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ?

Найти пределы при  $n \rightarrow \infty$  последовательностей, исходя из определения предела:

$$168. a_n = n; \quad 169. a_n = \frac{n^2 + 1}{n}; \quad 170. a_n = 2^{n-1};$$

$$171. a_n = \sqrt{n}; \quad 172. a_n = -2 - n; \quad 173. a_n = -2^n;$$

$$174. a_n = \log_{1/2} n; \quad 175. a_n = (-1)^n n^2; \quad 176. a_n = -n[2 + (-1)^n].$$

177. Пусть последовательность  $a_n$  является неограниченной. Верно ли утверждение, что ее предел равен плюс бесконечности? Верно ли обратное утверждение?

Вычислить следующие бесконечные суммы:

$$178. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots;$$

$$179. \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots;$$

$$180. \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots;$$

$$181. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots;$$

$$182. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} + \dots;$$

$$183. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots;$$

$$184. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

## §2. Предел функции и непрерывность

1. Найти множество предельных точек для множества  $M$ , если множество  $M$  есть:

- а) интервал  $(1, 2)$  ;
- б) полуинтервал  $[1, 2)$  ;
- в) множество всех рациональных точек интервала  $(0, 1)$  ;
- г) множество всех иррациональных точек интервала  $(0, 1)$  ;
- д) множество чисел  $n^2$ , где  $n \in \mathbf{N}$  ;
- е) множество чисел  $m$ , где  $m \in \mathbf{Z}$ .

Доказать следующие равенства, пользуясь только определением предела функции в точке ( т.е. по  $\varepsilon$  найти  $\delta$ ):

2.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 5) = 7$ ;    3.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$  ;
4.  $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1$ ;    5.  $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$  ;
6.  $\lim_{x \rightarrow 2} 2^x = 4$ ;    7.  $\lim_{x \rightarrow 2} \log_2 x = 1$  ;
8.  $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$ ;    9.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$  ;
10.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$ ;    11.  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$  ;
12.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = 1$ ;    13.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x^3 + x + 4} = \frac{1}{3}$  ;
14.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}}{x + 2} = \frac{1}{3}$ ;    15.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}}{x - 2} = -1$  .

16. Доказать, что если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и функция  $f(x)$  определена в точке  $x = a$ , то найдутся положительные числа  $\delta$  и  $C$  такие, что  $|f(x)| \leq C$  для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - a| < \delta$ .

17. Доказать, что если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  и существуют положительные числа  $\delta$  и  $M$  такие, что  $|g(x)| \leq M$  для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < |x - a| \leq \delta$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$ .

18. Доказать, что если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$ .

Найти следующие пределы:

19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2}{x + 3}$ ;
20.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ ;
21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 2}$ ;
22.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2}$ ;
23.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^3}$ ;
24.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+5x)^7 - (1+7x)^5}{x^2}$ ;
25.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^{10}(1-5x)^{20}}{(x^{15}+3)^2}$ ;
26.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x^3 - 1}$ ;
27.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^{20} - 20}{x - 1}$ ;
28.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4}$ ;
29.  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$ ;
30.  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x^2 - 7x - 8}$ ;
31.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ ;
32.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x}$ ;
33.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{3x^2}$ ;
34.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 mx}{\sin^2 nx}$ ;
35.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ ;
36.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$ ;
37.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ;
38.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 5x}$ ;
39.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$ ;
40.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$ ;
41.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$ ;
42.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$ ;
43.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ ;
44.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ ;
45.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ ;
46.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$ ;
47.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 5x}$ ;
48.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ ;
49.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$ ;
50.  $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$ ;
51.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}$ ;
52.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{(1+x^2)\operatorname{tg}^2 x}$ ;

53.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin x}{x}$  ;
54.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - 5 \sin \frac{1}{x}}$  ;
55.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$  ;
56.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{1 - \cos x}$  ;
57.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$  ;
58.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$  ;
59.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$  ;
60.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{x + 1}}{x^2 - 9}$  ;
61.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + 3x - x^2} - 2}{x + x^2}$  ;
62.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$  ;
63.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 1}$  ;
64.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 2})$  ;
65.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$  ;
66.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lg(x^2 + x + 1)}{\lg(x^{10} + x^5 + 1)}$  ;
67.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(2^x + 2^{-x})}{\lg(2^x + 3^{-x})}$  ;
68.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lg(2^x + 2^{-x})}{\lg(2^x + 3^{-x})}$  ;
69.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$  ;
70.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x + \sqrt[3]{1 - x^3} \right)$  ;
71.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^x$  ;
72.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^x$  ;
73.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$  ;
74.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$  .

Выяснить, существуют ли следующие пределы:

75.  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$  ;
76.  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 \frac{1}{x^2}$  ;
77.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2}$  ;
78.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  ;
79.  $\lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{1}{x-1}$  ;
80.  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sign} x$  ;
81.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$  ;
82.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sign} x)^2$  ;
83.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  .

Найти следующие пределы:

$$84. \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{-\frac{1}{x}} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{-\frac{1}{x}};$$

$$85. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x};$$

$$86. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \text{где } f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x > 0, \\ x^3 - 4, & x \leq 0; \end{cases}$$

$$87. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \text{где } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0, \\ \cos x, & x \leq 0; \end{cases}$$

$$88. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sign} x)^2 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (\operatorname{sign} x)^2;$$

$$89. \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} [x];$$

$$90. \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos^2 \frac{1}{x} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos^2 \frac{1}{x};$$

$$91. \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{\pi}{x} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos \frac{\pi}{x};$$

$$92. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{x} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x};$$

$$93. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \text{где } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x}, & x > 0, \\ 1 + x, & x \leq 0; \end{cases}$$

$$94. \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \quad \text{где } f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x - \text{рационал.}, \\ 0, & x - \text{иррационал.}; \end{cases}$$

$$95. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x}}} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x}}};$$

$$96. \lim_{x \rightarrow 3^+} x \left[ \frac{1}{x} \right] \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} x \left[ \frac{1}{x} \right];$$

$$97. \lim_{x \rightarrow 2^+} x - [x] \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} x - [x].$$

Доказать, что следующие функции непрерывны каждая на своей области существования:

$$\begin{aligned} 98. y = 2 + x; & \quad 99. y = -3x + 4; & \quad 100. y = x^2; \\ 101. y = x^2 - x; & \quad 102. y = \sqrt{x}; & \quad 103. y = \cos x; \\ 104. y = \sin x; & \quad 105. y = x^3; & \quad 106. y = \sqrt[3]{x}; \\ 107. y = \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Выяснить, при каких значениях  $x$  из промежутка  $(-\infty, +\infty)$  следующие функции являются непрерывными:

$$108. y = \frac{1}{(1-x)^2}; \quad 109. y = (\operatorname{sign} x)^2;$$

$$110. y = \frac{|x|}{x}; \quad 111. y = \frac{\sin x}{x};$$

$$112. y = x \sin \frac{1}{x}; \quad 113. y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$114. y = \begin{cases} \sin \pi x, & x - \text{рац.}, \\ 0, & x - \text{иррац.}; \end{cases} \quad 115. y = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1, \\ |x-1|, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$116. y = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0; \end{cases} \quad 117. y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$118. y = \begin{cases} 0, & x - \text{иррац.}, \\ 1, & x - \text{рац.}; \end{cases} \quad 119. y = \begin{cases} 0, & x - \text{иррац.}, \\ x, & x - \text{рац.}; \end{cases}$$

$$120. y = \begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \pi x, & x - \text{нецелое}, \\ 0, & x - \text{целое}. \end{cases}$$

### §3. Производная функции

Найти производную следующей функции, пользуясь только определением производной:

$$\begin{array}{lll} 121. y = 2x + 1; & 122. y = x^2; & 123. y = x^3; \\ 124. y = \sin x; & 125. y = \cos x; & 126. y = \sin 2x; \\ 127. y = \cos 2x; & 128. y = \sqrt{x}; & 129. y = x^2 - 1; \\ 130. y = x^3 + x; & 131. y = \frac{1}{x}; & 132. y = (1 + x)^2. \end{array}$$

Найти производную следующей функции в точке  $x = 0$ :

$$\begin{array}{ll} 133. y = x|x|; & 134. y = x^2|x|; \\ 135. y = |x|; & 136. y = \operatorname{sign} x; \\ 137. y = x \operatorname{sign} x; & 138. y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \end{array}$$

139. Привести пример функции, которая не имеет производной  
а) в двух точках ; б) в трех точках ; в) в  $n$  точках .

140. Привести пример функции, которая имеет производную  
а) только в одной точке ; б) только в двух точках ; в) только в  $n$  точках .

Найти производные следующих функций:

$$\begin{array}{ll} 141. y = x^3 - 4x^2 + x - 2; & 142. y = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - 3; \\ 143. y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}; & 144. y = \sqrt{x} + x^{2/3} - x^{-3} + \frac{1}{x}; \\ 145. y = x\sqrt{x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{x}; & 146. y = x^2\sqrt[3]{x} - \frac{\sqrt{x}}{x^2}; \\ 147. y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}; & 148. y = \frac{1+x}{2-x}; \\ 149. y = \frac{2x+1}{x^2-1}; & 150. y = \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{x}; \\ 151. y = 2 \sin x - 3 \cos x; & 152. y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x; \\ 153. y = \operatorname{tg} x + \sin x; & 154. y = \operatorname{ctg} x + \cos x; \\ 155. y = x \cos x + x \sin x; & 156. y = \frac{x}{\cos x} - \frac{\sin x}{x}; \end{array}$$

157.  $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ ;      158.  $y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}$ ;
159.  $y = 2^x + e^x - \frac{1}{3^x}$ ;      160.  $y = 3^x + e^{-x} + \frac{1}{2^x}$ ;
161.  $y = \frac{e^x}{x^2}$ ;      162.  $y = \frac{2^{2x}}{x^3}$ ;
163.  $y = e^x \cdot \cos x$ ;      164.  $y = 2^{-3x} \cdot \sin x$ ;
165.  $y = (x - 2) \cdot e^{-x}$ ;      166.  $y = (x^2 - x + 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ;
167.  $y = \ln x + \log_2 x + \log_3 x$ ;      168.  $y = \ln x - \log_4 2x + \log_2 8x$ ;
169.  $y = x \cdot \log_x 2$ ;      170.  $y = \sqrt{x} \cdot \log_x 5$ ;
171.  $y = \frac{x^2}{\ln x} - \frac{\log_2 x}{\log_3 x}$ ;      172.  $y = \ln x \cdot \lg x - \frac{\ln x}{x^2}$ ;
173.  $y = \sin 2x$ ;      174.  $y = \cos 2x$ ;
175.  $y = \sqrt{1 + 2x}$ ;      176.  $y = \sqrt[3]{1 - 3x}$ ;
177.  $y = e^{\sin x}$ ;      178.  $y = \cos^3 x$ ;
179.  $y = \sin(\cos \sqrt{x})$ ;      180.  $y = \log_2(\operatorname{ctg} 7x)$ ;
181.  $y = \frac{1}{\cos^3 4x^2}$ ;      182.  $y = \ln(\ln(2^x + 2^{-x}))$ ;
183.  $y = \cos^2\left(\operatorname{ctg} \frac{1}{x}\right)$ ;      184.  $y = e^{-x^2} \cdot \operatorname{tg}^3\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ ;
185.  $y = \frac{xe^x}{\ln(\sin x)}$ ;      186.  $y = \ln(\sqrt{3x} - \sqrt{x-1})$ ;
187.  $y = e^x + e^{e^x}$ ;      188.  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ;
189.  $y = \ln^2 \frac{1-x}{1+x}$ ;      190.  $y = \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ ;
191.  $y = x^x$ ;      192.  $y = (\cos)^{\sin x}$ .

Найти производные второго порядка следующих функций<sup>1</sup>:

193.  $y = x^2 \cdot e^x$ ;    194.  $y = \operatorname{tg} x$ ;    195.  $y = \ln(2x - 3)$ ;  
 196.  $y = \sin^2 2x$ ;    197.  $y = \frac{1}{x^3}$ ;    198.  $y = e^{-x^2}$ .

<sup>1</sup>По определению под производной 2-го порядка функции  $y(x)$  будем понимать производную функции, которая в свою очередь является производной функции  $y'(x)$ , т.е.  $y''(x) = [y'(x)]'$ . Если  $n > 2$ , то под  $y^{(n)}(x)$  будем понимать  $y^{(n)}(x) = [y^{(n-1)}(x)]'$

Найти производные третьего порядка следующих функций:

$$199. y = x \cdot e^{-x}; \quad 200. y = x^2 \cdot \cos x; \quad 201. y = \frac{1}{x};$$

$$202. y = e^x \cdot x^2; \quad 203. y = x \cdot \ln x; \quad 204. y = x^2 + x - 1.$$

Найти производные  $n$ -го порядка следующих функций:

$$205. y = \cos x; \quad 206. y = \sin x; \quad 207. y = 2^x;$$

$$208. y = \cos^2 x; \quad 209. y = \sin^2 x; \quad 210. y = \cos^3 x;$$

$$211. y = \log_2 x; \quad 212. y = x^m; \quad 213. y = \frac{1}{x};$$

$$214. y = \sin x \cdot \cos 2x; \quad 215. y = \cos x \cdot \cos 3x; \quad 216. y = \frac{\ln x}{x};$$

$$217. y = \ln(2 + x); \quad 218. y = x \cdot \cos x; \quad 219. y = \frac{1}{x(1 - x)};$$

$$220. y = \frac{1}{x^3 - 3x + 2}; \quad 221. y = \frac{x + 2}{x - 1}.$$

# ОТВЕТЫ

## ГЛАВА 1. Действительные числа

### §1. Натуральные числа

9. 100067 – наименьшее число.

13. Решение. Надо воспользоваться теоремой: для того, чтобы натуральное число  $N$  делилось на произведение двух взаимно простых натуральных чисел  $m$  и  $n$  необходимо и достаточно, чтобы  $N$  делилось на каждое из них. Так как число 36 можно представить в виде произведения двух взаимно простых чисел 4 и 9, то нам надо найти число, которое делится на 4, а также на 9. Применим признаки деления на 4 и на 9. Чтобы наше число  $\overline{34X5Y}$  делилось на 4 необходимо и достаточно, чтобы число  $\overline{5Y}$  делилось на 4. Значит  $Y$  равно либо 2, либо 6. Для того, чтобы наше число  $\overline{34X5Y}$  делилось на 9 необходимо и достаточно, чтобы число  $3 + 4 + X + 5 + Y$  делилось на 9. Если  $Y$  есть 2, то надо найти цифру  $X$  так, чтобы число  $3 + 4 + X + 5 + 2$  делилось на 9. Это возможно, если  $X$  есть число 4. Если  $Y$  есть 6, то надо найти цифру  $X$  так, чтобы число  $3 + 4 + X + 5 + 6$  делилось на 9. Это возможно, если  $X$  либо 0, либо 9. Следовательно, условию задачи удовлетворяют только три числа: 34452, 34056, 34956.

14. 71010, 71910, 71415. 15. 13500, 13545, 13590.

16. 51750, 51732, 51714, 51786, 51768. 18. а) да, б) нет, в) нет, г) нет.

19. да. 20. а) да, б) да, в) да, г) да. Указание:  $189 = 7 \cdot 27$ .

22. 32, 1, 1. 25. Указание.  $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ .

26. Указание.  $n^{12} - n^8 - n^4 + 1 = (n-1)^2(n+1)^2(n^2+1)^2(n^4+1)$ ;  $512 = 2^9$ .

27. Чисел  $k$ , удовлетворяющих условию задачи, не существует.

30.  $p = 1$ . 31.  $p = 3, q = 2$ . 33. 17. 34. 4.

37.  $x = y = 2$ . 38.  $x = y = 2$ . 39.  $x = y = 2$ .  
 40.  $x = 1, y = 2$ . 41. Нет. 42. а) Н.О.Д.=44 ; Н.О.К.=1848;  
 б) Н.О.Д.=12; Н.О.К.=5040; в) Н.О.Д.=216 ; Н.О.К.= $2^8 \cdot 3^7 \cdot 11^2$ .  
 $13^{12} \cdot 17$ .

## §2. Целые, рациональные и иррациональные числа

1. (0, 0); (2, 2). 2. (1, 2); (5, 2); (-1, -2); (-5, -2).  
 3. (11, 12); (-11, -12); (-11, 12); (11, -12).  
 4. (24, 23); (24, -23); (-24, -23); (-24, 23).  
 5. (48, 0); (24, 1); (24, -1). 6. Решений нет.  
 7.  $x = 3m, y = 2m, m \in \mathbf{Z}$ . 8.  $x = l, y = 2l - 1, l \in \mathbf{Z}$ .  
 9.  $x = 2m, y = m; x = 2m, y = -m, m \in \mathbf{Z}$ .  
 10. Решений нет. 11. (2, 2). 12. -1; -2. 13. 0; 1.  
 14. -1; 0; 1. 15. 2; 3; 4; 5; 6. 17. 0; -1; 2; 3. 20. 6.  
 21. 16. 22. 46. 23. (11, 9). 24. (12, 248).  
 25.  $\frac{1}{20}$ . 26.  $\frac{18}{17}$ . 27.  $4\frac{4}{7}$ . 28.  $\frac{5}{19}$ . 29. -6.  
 30.  $\frac{7}{30}$ . 31.  $-\frac{1}{2}$ . 32.  $-\frac{27}{40}$ . 33.  $\frac{1}{5}$ .  
 34. Да. 35. Да. 36. Да. 37. Нет. 38. Нет.  
 39. Да. 40. Да. 41. а)  $\frac{11}{90}$ ; б)  $\frac{124}{99}$ ; в)  $\frac{130}{111}$ .  
 42.  $\frac{4}{5} < \frac{7}{8}$ . 43.  $1,32 > \frac{32}{25}$ . 44.  $1,32 < \frac{34}{25}$ . 45.  $\frac{17}{23} < \frac{19}{21}$ .  
 46.  $\frac{113}{279} < \frac{113}{278}$ . 47.  $\frac{1026}{7095} < \frac{1027}{7094}$ . 48.  $\frac{2^{23} + 1}{2^{25} + 1} > \frac{2^{25} + 1}{2^{27} + 1}$ .  
 49.  $2^{18} + 3^{20} > 6^{10}$ . 51. Указание.  $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ .  
 52.  $x = \frac{R^2 - 1}{1 - 2R}$ , где  $R$  - рациональное число, отличное от  $\frac{1}{2}$ .

## §3. Числовые равенства и неравенства

4. Указание. Воспользоваться формулой  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .  
 7. Указание. Воспользоваться равенством  $\frac{1}{n(n + 1)} = \frac{1}{n} -$

$$\frac{1}{n+1}.$$

8. Указание. Воспользоваться равенством

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

9. Указание. Воспользоваться равенством

$$(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 1.$$

10. Указание. Воспользоваться равенством

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}.$$

В задачах 13 – 15, 17, 19, 20, 26, 27, 29, 30, 32, 33, 35, 37, 39, 40, 43 – 46, 48, 49, 51 первое число больше второго. В задачах 11, 12, 16, 18, 21 – 25, 28, 31, 34, 36, 38, 41, 42, 47, 50, 52 второе число больше первого.

59. Указание. Доказать, что для любого натурального числа  $m$  из промежутка  $1 \leq m \leq 50$  справедливо неравенство  $m(101 - m) \geq 100$ .

60. Решение. Из справедливости неравенства  $\frac{k}{k+1} < \frac{k+1}{k+2}$ , где  $k$  – любое натуральное число, следует, что  $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{99}{100}$  удовлетворяет условию  $\alpha < \frac{1}{\alpha \cdot 101}$ , откуда  $\alpha^2 < \frac{1}{101}$  или  $\alpha < \frac{1}{\sqrt{101}} < \frac{1}{10}$ .

65. Если  $a \neq 0$ , то  $a^2 < 2a^2 < 5a^2$ , если  $a = 0$ , то  $a^2 = 2a^2 = 5a^2$ .

66. Если  $a > 0$ , то  $a < 2a < 5a$ , если  $a < 0$ , то  $a > 2a > 5a$ , если  $a = 0$ , то  $a = 2a = 5a$ .

67. Если  $a > 1$  или  $-1 < a < 0$ , то  $a < a^3 < a^5$ , если  $0 < a < 1$  или  $a < -1$ , то  $a > a^3 > a^5$ . Если  $a = 0$ ,  $a = 1$  или  $a = -1$ , то  $a = a^3 = a^5$ .

68. Если  $a > 1$ , то  $a^4 > a^2 > a$ , если  $a < -1$ , то  $a < a^2 < a^4$ , если  $a = 0$  или  $a = 1$ , то  $a = a^2 = a^4$ , если  $a = -1$ , то  $a < a^2 = a^4$ , если  $0 < a < 1$ , то  $a > a^2 > a^4$ , если  $-1 < a < 0$ , то  $a^2 > a^4 > a$ .

69. Если  $a > 1$  или  $-1 < a < 0$ , то  $a > \frac{1}{a}$ , если  $0 < a < 1$  или  $a < -1$ , то  $\frac{1}{a} > a$ . Если  $a = 1$  или  $a = -1$ , то  $a = \frac{1}{a}$ .

75. Указание. Воспользоваться неравенствами:  $2ab \leq a^2 + b^2$ ;  $2ac \leq a^2 + c^2$ ;  $2bc \leq b^2 + c^2$ .

82. Решение.  $5a^2 - 6ab + 5b^2 = 3(a - b)^2 + 2a^2 + 2b^2 \geq 0$ .

92. Решение. Так как  $\frac{a}{1+a+b} < \frac{a}{1+a}$  и  $\frac{b}{1+a+b} < \frac{b}{1+b}$ , то  $\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$ .

97. Решение. Так как  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ,  $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ ,  $a+c \geq 2\sqrt{ac}$  и  $a+b+c = \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{a+c}{2}$ , то справедливость неравенства очевидна.

103. Решение. Применяя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для чисел  $a^3$ ,  $b^6$  и 8, получаем  $a^3 + b^6 + 8 \geq 3\sqrt[3]{8a^3b^6}$ , откуда очевидна справедливость данного неравенства.

104. Решение.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2c} \geq \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} + \sqrt{\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} + \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{c}}$ .

107. Указание. Рассмотреть разность левой и правой части.

108. Указание. К числам  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b}$ ,  $\frac{1}{c}$  применить неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

112. Указание. Воспользоваться неравенством  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ .

114. Указание. Рассмотреть разность чисел  $(a+b)^2$  и  $(1+ab)^2$ .

117. Указание. Утверждение а) следует из равенства  $(a+b)^2 = 1$  и неравенства  $(a-b)^2 \geq 0$ .

119. Указание. Применить неравенство задачи 88.

122. Указание. Доказать, что  $\frac{a}{c} < 1$ ,  $\frac{b}{c} < 1$ ,  $\left(\frac{a}{c}\right)^{2/3} > \frac{a}{c}$ .

127. Указание. Воспользоваться неравенством  $\frac{1}{n+i} < \frac{1}{n}$ .

128. Указание. Воспользоваться неравенством  $\frac{1}{n+i} > \frac{1}{2n}$ ,  $i < n$ .

129. Указание. Воспользоваться неравенством  $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ ,  $n \geq 2$ .

130. Указание. Воспользоваться неравенством  $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ ,  $n \geq 2$ .

131. Указание. Воспользоваться неравенством

$$\frac{4n-1}{4n+1} < \frac{4n+1}{4n+3}$$

132. Указание. Воспользоваться неравенством

$$\frac{2}{(2k+1)^2} < \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}$$

133. Указание. Воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$$

134. Указание. Воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} < \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

135. Указание. Рассмотреть разность левой и правой части.

136.  $a = b = \frac{1}{2}$ .    137.  $a = b = 1$ .    138.  $a = b = 1$ .    139.  $\frac{l^2}{16}$ .

140.  $4\sqrt{S}$ .    141.  $a = 3$ .    142.  $a = \frac{1}{2}$ .    143.  $a = \sqrt{5}$ .

#### §4. Прогрессии

1.  $a_n = -10n + 15$ .    2.  $a_n = 3n - 6$ .    3.  $a_n = 3n + 3$ .

4.  $a_n = -n$ .    5.  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .    6.  $a_n = (1+n)n$ .

7.  $n^2$ .    8.  $\frac{5n^2 + 11n + 6}{2}$ .    9.  $b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ .

10.  $b_n = 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ .    11.  $b_n = 1^n$  либо  $b_n = (-1)^{n+1}$ .

12.  $b_n = 2^{n-1}$ .    13.  $2^{n+1} - 1$ .    14.  $\frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3 \cdot 2^n}$ .

15.  $\frac{n(n+1)}{2} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ .    16.  $4 - (n+2) \cdot 2^{1-n}$ .

17. а) 0, 1,  $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ,  $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ ; б) 1; в) 1.

18.  $a_1 = 14$ ,  $d = -3$  или  $a_1 = 2$ ,  $d = 3$ .    19.  $a_1 = 2$ ,  $d = 2$  или

$a_1 = 22$ ,  $d = -2$ .    27. а)  $54 \cdot 45$ ; б)  $55 \cdot 45$ ; в)  $450 \cdot 1099$ ; г)  $247500$ .

28. 1, 3, 5, 7, 9, ...    29. 1620.    30. 5, 9, 13, ...    31. 25350.

34.  $a_p = m + n - p$ .    35. 25 членов: 11, 23, 35, ..., 299.

36. 100.    38. 17, 32, 47, ..., 152.    39. 23, 51, 79, ..., 381.

45.  $b_1 = \frac{1}{2}$ ,  $q = -\frac{1}{2}$ .    46.  $b_1 = 1$ ,  $q = -3$ .    47. 12, 16, 20, 25.

48. 17, 10, 3 или 8, 10, 12.    50.  $n = 10$ .    51.  $b_p = m \cdot \sqrt[p]{\frac{k^{p-n}}{l^{p-m}}}$ .

52. Нет. 53. Да. 54. Да. 55.  $\frac{(1+a^{2n+2})(1-a^{2n})}{a^{2n}(1-a^2)} - 2n$ .
56.  $\frac{1}{9} \left( \frac{10^{n+1} - 10}{9} - n \right)$ . 57. 55. 58. Таких чисел нет.
59.  $x = -1$ . 61.  $x = y = z = 2$ . 65.  $\alpha = \operatorname{arccotg} \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ .
66.  $\frac{n(n-1)}{2}$ . 67.  $\frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ .

### §5. Элементы комбинаторики и бином Ньютона

1. 1. 2.  $\frac{n}{n+1}$ . 3. 19. 4. 81. 5. 1. 6. 4. 7. 46.
8. 40. 9.  $10!$ . 10.  $A_{10}^5$ . 11.  $A_{10}^3 - A_9^2$ . 12.  $7!$ .
13.  $9!$ ; а)  $8! \cdot 2$ ; б)  $9! - 2 \cdot 8!$ . 14.  $C_4^3$ . 15.  $C_4^2 \cdot C_5^2$ .
16. а)  $4!$ ; б)  $5! - 4!$ ; в)  $3!$ ; г)  $2!$ . 17. а)  $5^4$ ; б)  $5^5 - 5^4$ ; в)  $5^3$ ; г)  $5^2$ .
18.  $A_{40}^3$ . 19.  $C_{20}^7$ . 20. а) 5; б) 54; в)  $\frac{1}{2}n(n-3)$ .
21.  $C_{15}^4$ . 22.  $2^8 - 9$ . 23.  $C_5^2 \cdot C_{10}^3$ .
24. а)  $2 \cdot 29!$ ; б)  $30! - 2 \cdot 29!$ . 25.  $2 \cdot (8!)^2$ .
26.  $C_4^2 \cdot C_7^4 + C_4^3 \cdot C_7^3 + C_4^4 \cdot C_7^2 = 371$ . 27.  $A_5^3 \cdot A_6^3 \cdot A_7^3$ .
44.  $41 + 29\sqrt{2}$ . 45.  $17 + 12\sqrt{2}$ . 46.  $576 - 256\sqrt{5}$ .
47.  $C_{31}^{15} a^{63} b^{15}$ ,  $C_{31}^{16} a^{61} b^{16}$ . 49. Нет. 50. а) 32; б) 26.
51. 3. 52. 5. 53. 4. 54. 5, 6, 7. 55.  $n > 6$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
56. 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. 61. 66. 62.  $-\frac{5120}{9}$ .
63.  $T_5 = C_{12}^4 \left(\frac{x}{3}\right)^8 (-1)^4 \left(\frac{3}{x}\right)^4$ . 64. 10. 65. а)  $C_{100}^3 (-2)^3$ ; б) 1; в)  $-100$ .
66. 8085. 67.  $3C_9^3 + C_9^4$ . 68. 1010. 69.  $2^{n-1}$ . 70.  $2^{n-1}$ .
71. 0, если  $n$  — нечетное;  $(-1)^{n/2} \cdot C_n^{n/2}$ , если  $n$  — четное. Указание. Сравнить коэффициенты при  $x^n$  в разложениях  $(x^2 - 1)^n$  и  $(x+1)^n \cdot (x-1)^n$ .

### §6. Степень действительного числа

1.  $\frac{23}{144}$ . 2. 16. 3.  $-3\frac{4}{5}$ . 4.  $\frac{7}{8}$ . 5.  $-2\frac{8}{9}$ .
6.  $\frac{1}{2}$ . 7.  $4\sqrt{6}$ . 8.  $2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}$ . 9. 1. 24.  $3^6$ .

25.  $-125$ . 26.  $8$ . 27.  $4$ . 28.  $12$ . 29.  $275$ . 30.  $327$ .  
 31.  $\sqrt{3} + \sqrt{5} - 3$ . 32.  $51$ . 33.  $20$ . 34.  $3$ . 35.  $6$ .  
 36.  $\frac{1}{3}$ . 37.  $\sqrt{5} - 1$ . 38.  $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ . 39.  $\sqrt{2} + 1$ . 40.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .  
 41.  $\frac{5}{12} \sqrt[3]{144}$ . 42.  $5 + 2\sqrt{6}$ . 43.  $\frac{1}{3}(\sqrt{8} + \sqrt{5})$ .  
 44.  $2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}$ . 45.  $4 + \sqrt[3]{45} + \sqrt[3]{75}$ . 46.  $2(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - 1)$ .  
 47.  $\frac{\sqrt{5 + \sqrt{2}(5 - \sqrt{2})}}{23}$ . 48.  $\frac{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{2})}{2}$ .  
 49.  $\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{49})$ .  
 50.  $-\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{3}})\sqrt{3}}{3}$ . 51.  $\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}})\sqrt{3}}{3}$ .  
 52.  $-7(1 + \sqrt[4]{2})(1 + \sqrt{2})$ . 53.  $\frac{1 + 3\sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt[4]{8}}{7}$ .  
 54.  $\frac{-3 + 7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}}{23}$ . 55.  $\frac{(\sqrt[3]{2} - 1)\sqrt[3]{4}}{2}$ . 56.  $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ .  
 57.  $\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3} - \sqrt{2})}(4 + 2\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{81})$ . 58.  $(2 + \sqrt{3})^5$ .  
 59.  $-(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ . 60.  $\frac{2 - \sqrt[4]{8}}{2}$ .  
 61.  $(1 - \sqrt{2})(2 - \sqrt{5})$ . 62.  $\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{3}$ .  
 63.  $\frac{\sqrt[5]{16} + \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{3^2} + \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{3^3} + \sqrt[5]{3^4}}{-1}$ .

### §7. Логарифмы

15.  $-1$ . 16.  $-\frac{48}{15}$ . 17.  $-\frac{4}{15}$ . 18.  $-1$ . 19.  $\frac{1}{2}$ .  
 20.  $-\frac{1}{2}$ . 21.  $-\frac{256}{27}$ . 22.  $225$ . 23.  $343 \cdot 13^{-\frac{3}{2}}$ .  
 24.  $3 \cdot 41^{\frac{3}{2}}$ . 25.  $\frac{9}{10}$ . 26.  $5^5$ . 27.  $17^{\frac{3}{2}} + 15^{\frac{1}{2}}$ .  
 28.  $3^{-\frac{5}{2}} \cdot 19^{\frac{5}{54}}$ . 29.  $5^{-\frac{3}{2}} \cdot 17^{\frac{3}{2}}$ . 30.  $2^{-\frac{5}{48}} \cdot 216^{-\frac{1}{4}}$ .  
 31.  $5^{-\frac{36}{175}}$ . 32.  $6$ . 33.  $13$ . 34.  $9$ . 35.  $25$ . 36.  $0$ .  
 37.  $0$ . 38.  $1$ . 39.  $1$ . 40.  $2$ . 41.  $3$ . 42.  $2$ . 43.  $3$ .  
 55. Указание. Сравнить числа с числом  $2$ .  
 57. Указание. Сравнить данные числа с  $\frac{9}{4}$ .  
 59. Решение. Рассмотрим отношение

$\frac{\log_{10} 11}{\log_9 10}$ ; используя неравенство  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ , имеем

$$\frac{\log_{10} 11}{\log_9 10} = \log_{10} 11 \cdot \log_{10} 9 < \left[ \frac{\log_{10} 11 + \log_{10} 9}{2} \right]^2 = \frac{\log_{10}^2 99}{4} < 1.$$

63. Указание. Сравнить данные числа с числом  $\frac{7}{4}$ .  
 82. Указание. Сравнить данные числа с числом 4.  
 83. Указание. Сравнить данные числа с числом 3.  
 84. Указание. Сравнить данные числа с числом 4.  
 85. Указание. Сравнить данные числа с числом 3.  
 87.  $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$ . 88.  $a+2b+c$ . 89.  $c-a-b$ .  
 90.  $a+1$ . 91.  $-(a+b+c)$ . 92.  $3a$ . 93.  $2a+b+c$ .  
 94.  $2b$ . 95.  $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}c$ . 96.  $\frac{1}{3}(a+b)$ . 97.  $-a$ .  
 98.  $-2b$ . 99.  $-(a+b+c+1)$ . 100.  $2c-3a-2b$ .  
 101.  $\frac{\beta-5}{2(\alpha\beta-\alpha+2\beta-1)}$ . 102.  $\frac{5}{2(a-1)}$ . 103.  $\frac{4}{2b-a}$ .  
 104.  $\frac{2-a}{a+b}$ . 105.  $\frac{a+2b-2}{-a+1}$ . 106.  $\frac{3-2a}{2b+a}$ .  
 107.  $\frac{3-2a}{b+a}$ . 108.  $2+(b-1)(a-1)$ . 109.  $\frac{a+1}{2a}$ .

## ГЛАВА 2. Алгебраические выражения

### §1. Многочлены

1.  $a^4 - 16b^4$ . 2.  $a^3 - 8b^3$ . 3.  $a^3 + 8b^3$ . 4.  $4ab + 2ac$ .  
 5.  $2a^3 - 9a^2b$ . 6.  $2a^3 - 8c^3$ . 7.  $a^8 - b^8$ . 8.  $x^2y + 2x$ .  
 9.  $a^2 + b^2 - c^2$ . 10.  $(a^4 - 1)(a^4 - 16)$ . 11.  $(a+c)(b+d)$ .  
 12.  $(a+b)(c-d)$ . 13.  $(a+b+c)(a+b-c)$ . 14.  $(a+1)(a-2)^2$ .  
 15.  $(a-b)(a+b+c)$ . 16.  $(a+b)(a+b+c)$ .  
 17.  $(x+1)^2 - y^2$ . 18.  $(3y-1)^2 - x^2$ . 19.  $(y-5)^2 - 4m^2$ .  
 20.  $(x+2)^2 - (y-3)^2$ . 21.  $3(a+b)(b+c)(a+c)$ .  
 22.  $(a+b)(a+c)(b+c)$ . 23.  $(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$ .  
 24.  $(a-1)(a+3)^2$ . 31.  $x^2+2x+1$ . 32.  $x+3$ .  
 33.  $x^2-1$ . 34.  $x^2+4x-1$ . 35.  $2x^2+1$ .  
 36.  $x^3-x^2+x+1$ . 37.  $x^4-x+1$ . 38.  $-3x^4+x-1$ .

39.  $3x^3 + x - 3$ .

## §2. Алгебраические дроби

6.  $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = 0$ .    7.  $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = 0$ .  
 8.  $a = \frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{1}{2}$ .    9.  $a = -1, b = \frac{1}{5}, c = \frac{4}{5}$ .  
 10.  $a = -\frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}$ .    11.  $a = -\frac{1}{2}, b = c = \frac{1}{2}$ .  
 12.  $a = -1, b = -1, c = 1$ .    13.  $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}$ .  
 14.  $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = -\frac{2}{3}$ .    15.  $\frac{a^9}{cb^6d^{10}}$ .    16.  $\frac{c^2b^3p^6}{a^3}$ .  
 17.  $\frac{y+1}{3(y-1)}$ .    18.  $-\frac{1}{a+x}$ .    19.  $\frac{2a^2+6b^2}{(a-b)^2(a+b)}$ .  
 20.  $\frac{2b+1}{6(2b-1)}$ .    21.  $\frac{4}{5}(x-3)$ .    22.  $5xy$ .    23.  $\frac{2-a}{2}$ .  
 24.  $\frac{1}{6}$ .    25.  $\frac{a-b}{a+c}$ .    26.  $\frac{1}{y-x}$ .    27.  $\frac{1}{a+2}$ .  
 28.  $-\frac{2}{x}$ .    29.  $\frac{10a+2}{a^2-1}$ .    30.  $\frac{a-x}{a^3x^3}$ .    31. 3.  
 32.  $\frac{2x^4}{x^8-16y^8}$ .    33.  $\frac{a^2+a+1}{a^4-a^2+1}$ .

## §3. Иррациональные выражения

1.  $x^2 - y$ .    2.  $x^2 - y^2$ .    3.  $a^3 + \sqrt{8}$ .    4.  $\sqrt{a^3} - 8b^3$ .  
 5.  $x - y$ .    6.  $a^2 - b$ .    7.  $3xy$ .    8.  $xy$ .    9.  $ab$ .  
 10.  $(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2$ .    11. 1.    12.  $\frac{a}{b}$ .    13.  $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x+\sqrt{y}}}$ .  
 14.  $\frac{3}{\sqrt{x-6}}$ .    15.  $\frac{2}{a-1}$ .    16.  $\frac{x+3y}{x-y}$ .    17. 1.  
 18.  $a^{-\frac{1}{6}}$ .    19. 1.    20. 2.    21.  $(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})(a-b)^2$ .  
 22.  $\sqrt[4]{ab^5}$ .    23.  $2a$ .    24.  $\frac{2ab(a+b)}{(a-b)^2}$ .    25.  $(a-b)^{\frac{2}{3}}$ .  
 26.  $\frac{1}{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2}$ .    27.  $\sqrt[3]{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}$ .    28.  $\sqrt{ab}$ .

29.  $\sqrt[3]{\frac{a}{x^2}}$ . 30. 3. 31.  $\sqrt{a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})$ . 32. -1.  
 33.  $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ . 34.  $2(a+b)$ . 35.  $\frac{ab}{3}$ . 36.  $a+b$ .  
 37.  $2(b+2a)$ . 38.  $a+b$ . 39. 2. 40.  $\frac{-a^2}{4(x-a^2)}$ .  
 41.  $\sqrt{2ax}$ . 42.  $\frac{x}{x^8-1}$ . 43.  $x - \sqrt{x^2-1}$ . 44.  $\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ .

#### §4. Метод математической индукции

45.  $2^n - 1$ . 46.  $\frac{n}{2n+1}$ . 47.  $(n+1)! - 1$ . 48.  $n^2(n+1)$ .  
 49.  $\frac{n}{3n+1}$ . 50.  $n > 4$ . 51.  $n \geq 1$ . 52.  $n \geq 3$ .  
 53.  $n \geq 2$ . 54.  $n \geq 2$ . 55.  $n > 1$ . 56.  $n \geq 3$ .

### ГЛАВА 3. Алгебраические уравнения и неравенства

#### §1. Уравнения с одним неизвестным

1.  $x = 2$ . 2.  $x = -12$ . 3.  $x = \frac{1}{5}$ . 4.  $x = -\frac{1}{3}$ .  
 5.  $x_1 = 3, x_2 = -3$ . 6.  $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$ . 7.  $x = 1$ .  
 8.  $x = -\frac{1}{2}$ . 9.  $x_1 = -4, x_2 = 6$ . 10.  $-1 \leq x \leq 2$ .  
 11.  $-1 \leq x \leq 1$ . 12.  $x_1 = -\frac{4}{3}, x_2 = -6$ . 13. Нет решений.  
 14.  $x \leq -1, x \geq 1$ . 15.  $x_1 = 1, x_2 = -1$ . 16.  $x_1 = x_2 = 1$ .  
 17.  $x_1 = 2, x_2 = 3$ . 18.  $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 3, x_4 = -3$ .  
 19.  $x_1 = 3, x_2 = -3$ . 20.  $x_1 = 0, x_2 = 1$ . 21.  $x = 1$ .  
 22.  $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, x_3 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ .  
 23.  $-3 \leq x \leq -2, 2 \leq x \leq 3$ . 24.  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$ .  
 25.  $x = 0$ . 26.  $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{2}, x_4 = -\sqrt{3}$ .  
 27.  $x_1 = 1, x_2 = -1$ . 28.  $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$ .  
 29.  $x_1 = -1, x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, x_3 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ .  
 30.  $x_1 = -1, x_{2,3} = 2$ . 31.  $x = 1$ .  
 32.  $x_1 = -3, x_2 = 4$ . Указание.  $(x^2 - x)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$ .

33.  $x_1 = 3, x_2 = 4$ . Указание. Обозначить  $x = z + \frac{7}{2}$ .
34.  $x_1 = 1, x_2 = 3$ . 35.  $x_1 = -2, x_2 = 3$ .
36.  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$ .
37.  $x_1 = -4, x_2 = 1$ . Указание. Обозначить  $z = x^2 + 3x$ .
38.  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2 + \sqrt{3}, x_4 = 2 - \sqrt{3}$ .
39.  $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = -4, x_4 = 1$ . 40.  $x_1 = -2, x_2 = 1$ .
41.  $x = 0$ . 42.  $x_1 = 0, x_{2,3} = 1, x_{4,5} = -1$ .
43.  $x_1 = 1, x_2 = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ . 44.  $x_1 = \sqrt[3]{4} - 1, x_2 = \sqrt[3]{5} - 1$ .
45.  $x = a - 2$ .
46. Если  $a \neq 0$ , то  $x = 1$ ; если  $a = 0$ , то  $x$  - любое действительное число.
47. Если  $a \neq 0$ , то  $x = \frac{b-4}{a}$ ; если  $a = 0$  и  $b = 4$ , то  $x$  - любое действительное число; если  $a = 0$  и  $b \neq 4$ , то решений нет.
48. Если  $a > 0$ , то  $x_1 = 0, x_2 = 2a$ ; если  $a = 0$ , то  $x = 0$ ; если  $a < 0$ , то решений нет.
49.  $x \geq a$ .
50. Если  $b < a$ , то  $x = \frac{a+b}{2}$ ; если  $b = a$ , то  $x \geq a$ ; если  $b > a$ , то решений нет.
51. Если  $a \neq \pm 1$ , то  $x = -\frac{1}{a+1}$ ; если  $a = 1$ , то  $x$  - любое действительное число; если  $a = -1$ , то решений нет.
52. Если  $a > 0$ , то  $x \geq \frac{1}{a}$ ; если  $a < 0$ , то  $x \leq \frac{1}{a}$ ; если  $a = 0$ , то решений нет.
53. Если  $b = a$ , то  $x$  - любое действительное число; если  $b \neq a$ , то  $x = \frac{-a-b}{2}$ .
54. Если  $a < 0$ , то  $x_1 = \frac{1}{\sqrt{-a}}, x_2 = \frac{-1}{\sqrt{-a}}$ ; если  $a \geq 0$ , то решений нет.
55. Если  $\frac{b}{a} < 0$ , то  $x_1 = \sqrt{-\frac{b}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{b}{a}}$ ; если  $b = 0, a \neq 0$ , то  $x = 0$ ; если  $\frac{b}{a} > 0$ , то решений нет; если  $a = b = 0$ , то  $x$  - любое действительное число; если  $a = 0, b \neq 0$ , то решений нет.
56. Если  $a = 1$ , то  $x = 1$ ; если  $a \neq 1$ , то решений нет.
57. Если  $a \neq 0$ , то  $x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{a}$ ; если  $a = 0$ , то  $x = 0$ .

## §2. Неравенства с одним неизвестным

1.  $x > \frac{1}{2}$ .
2.  $x > 3$ .
3.  $x > -\frac{1}{4}$ .
4.  $x < -1, x > 1$ .
5.  $-2 < x < 2$ .
6.  $-1 \leq x \leq 3$ .
7.  $-2 \leq x \leq -1, 1 \leq x \leq 2$ .
8.  $x < -3, x > 3$ .
9.  $\frac{4}{3} < x < 4$ .
10.  $x \leq \frac{5}{4}, x \geq \frac{5}{2}$ .
11.  $x \leq 0$ .
12.  $0 \leq x \leq 1$ .
13.  $-6 \leq x \leq -\frac{1}{3}$ .
14.  $x > -\frac{1}{2}$ .
15.  $|x| < \frac{1}{2}$ .
16.  $x < -1, x > 1$ .
17.  $-2 < x < 2$ .
18.  $x$  – любое действительное число.
19. Решений нет.
20.  $x \leq 0, x \geq 1$ .
21.  $0 \leq x \leq 1$ .
22.  $x < 1, x > 1$ .
23.  $x < -3, -2 < x < 2, x > 3$ .
24.  $x = -1$ .
25.  $2 < x < 5$ .
26.  $x < 1, x > 1$ .
27.  $x < -\sqrt{3}, -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, x > \sqrt{3}$ .
28.  $-1 \leq x \leq 0, 3 \leq x \leq 4$ .
29.  $-1 \leq x < 1, 1 < x \leq 3$ .
30.  $x$  – любое действительное число.
31.  $\sqrt[3]{2} \leq x \leq \sqrt[3]{3}$ .
32.  $x > -1$ .
33.  $x < 1$ .
34.  $x > 0, x \neq 2$ .
35.  $x > 1$ .
36.  $x < -1, 0 < x < 1$ .
37.  $1 \leq x \leq 2, x \geq 3$ .
38.  $-2 < x < -1, 1 < x < 4$ .
39.  $-1 < x < 1$ .
40.  $-\infty < x < -3, -2 < x < 0, 1 < x < +\infty$ .
41.  $-1 < x < 1, 1 < x < 2, x > 5$ .
42.  $-2 \leq x \leq -1, 1 \leq x \leq 2$ .
43.  $x < -2, -1 < x < 0, x > 2$ .
44.  $x \leq -3, x = 0, x \geq 2$ .
45. Если  $a > 0$ , то  $x > \frac{1}{a}$ ; если  $a < 0$ , то  $x < \frac{1}{a}$ ; если  $a = 0$ , то решений нет.
46. Если  $a > 0$ , то  $x \geq \frac{b}{a}$ ; если  $a < 0$ , то  $x \leq \frac{b}{a}$ ; если  $a = 0$  и  $b \leq 0$ , то  $x$  – любое действительное число; если  $a = 0$  и  $b > 0$ , то решений нет.
47. Если  $a < 0$ , то  $x \geq \frac{a}{2}$ ; если  $a = 0$ , то  $x \geq 0$ ; если  $a > 0$ , то решений нет.
48. Если  $a \leq 0, b > 0$ , то  $x < \frac{-a-b}{2}$ ; если  $a \geq 0, b < 0$ , то  $x > \frac{-a-b}{2}$ ; если  $a > b \geq 0$ , то  $x > \frac{-a-b}{2}$ ; если  $0 < a < b$ , то  $x < \frac{-a-b}{2}$ ; если  $a < b \leq 0$ , то  $x < \frac{-a-b}{2}$ ; если  $0 > a > b$ , то  $x > \frac{-a-b}{2}$ ; если  $a = b$ , то решений нет.
49. Если  $a < 0$ , то  $x < -\sqrt{-a}$ , а также  $x > \sqrt{-a}$ ; если  $a \geq 0$ , то решений нет.

50. Если  $a > 0$ , то  $-\frac{1}{\sqrt{a}} < x < \frac{1}{\sqrt{a}}$ ; если  $a \leq 0$ , то  $x$  – любое действительное число.

51. Если  $a > 0$  и  $b > 0$ , то  $x < -\sqrt{\frac{b}{a}}$ , а также  $x > \sqrt{\frac{b}{a}}$ ; если  $a < 0$  и  $b < 0$ , то  $-\sqrt{\frac{b}{a}} < x < \sqrt{\frac{b}{a}}$ ; если  $a \leq 0$  и  $b \geq 0$ , то решений нет; если  $a \geq 0$  и  $b < 0$ , то  $x$  – любое действительное число, если  $a > 0$  и  $b = 0$ , то  $x$  – любое действительное, отличное от нуля число.

### §3. Системы алгебраических уравнений

1. (2; 0). 2. (7; -1); (1; -7).

3. (2; -1); (-2; 1); (1; -2); (-1; 2).

4. (1; 5); (5; 1). 5. (2; -5). 6. (-1; 3); (2; 0). 7. (1; 1).

8. (2; 1); (-2; -1). 9.  $(\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}; \frac{1 + \sqrt{33}}{2})$ ;  $(\frac{9}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}; \frac{1 - \sqrt{33}}{2})$ .

10. (1; 2); (2; 1). 11. (2; 1).

12. (-2; -2); (1; 1);  $(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2})$ ;  $(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2})$ .

13. (10; 7); (-7; -10).

14. (2; 2); (-2; -2);  $(2\sqrt{2}; 0)$ ;  $(-2\sqrt{2}; 0)$ ;  $(0; 2\sqrt{2})$ ;  $(0; -2\sqrt{2})$ .

15. (4; 1); (1; 4);  $(\frac{-5 + \sqrt{41}}{2}; \frac{-5 - \sqrt{41}}{2})$ ;  $(\frac{-5 - \sqrt{41}}{2}; \frac{-5 + \sqrt{41}}{2})$ .

16. (3; 1); (1; 3). 17. (1; 0); (0; 1). 18. (3; 2); (-3; -2).

19. (2; 0); (0; 2). 20.  $(\sqrt{31}; \sqrt{31})$ ;  $(-\sqrt{31}; -\sqrt{31})$ ; (4; 1); (-4; -1).

21. (2; 1); (1; 2). 22. (0; 0); (2; -1);  $(-\frac{10}{7}; -\frac{4}{7})$ .

23. (2; 1); (-2; -1). 24.  $(1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$ ;  $(1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$ .

25. (-4; -2); (4; 2); (0; 0). 26. (3; 1); (1; 3). 27. (1; 2); (2; 1).

28. (0; 0);  $(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2})$ ;  $(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2})$ .

29. (2; 4); (-2; -4);  $(3\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ ;  $(-3\sqrt{2}; \sqrt{2})$ .

30.  $(1; 1); (-1; -1); (1; -1); (-1; 1)$ .
31.  $(3; 5); (-3; -5); \left(-36; \frac{23}{2}\right); \left(36; -\frac{23}{2}\right)$ .
32.  $(\sqrt[3]{13}; -\sqrt[3]{13}); (3; 1); (-1; -3)$ .
33.  $(3; 3); \left(\frac{9+\sqrt{57}}{2}; \frac{9-\sqrt{57}}{2}\right); \left(\frac{9-\sqrt{57}}{2}; \frac{9+\sqrt{57}}{2}\right)$ .
34.  $(-1; 2); (2; -1); \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right); \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)$ .
35.  $(2; 1); (1; 2)$ .    36.  $(2; 3); (0, 0)$ .
37.  $(6; 6); \left(\frac{-3+\sqrt{45}}{2}; \frac{-3-\sqrt{45}}{2}\right); \left(\frac{-3-\sqrt{45}}{2}; \frac{-3+\sqrt{45}}{2}\right); (0; 0)$ .
38.  $(0; 0); (\sqrt{7}; \sqrt{7}); (-\sqrt{7}; -\sqrt{7}); (\sqrt{19}; -\sqrt{19}); (-\sqrt{19}; \sqrt{19}); (2; 3); (-2; -3); (3; 2); (-3; -2)$ .
39.  $(1; -2); (-1; 2); \left(\frac{13}{\sqrt{138}}; \frac{5}{\sqrt{138}}\right); \left(\frac{-13}{\sqrt{138}}; \frac{-5}{\sqrt{138}}\right)$ .
40.  $(2; 2); (-2; -2); (-2; 2); (2; -2); \left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right); \left(\frac{-4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$ .
41.  $\left(\frac{3}{\sqrt{19}}; \frac{2}{\sqrt{19}}\right); \left(\frac{-3}{\sqrt{19}}; \frac{-2}{\sqrt{19}}\right); (t; t)$ , где  $t$  – любое действительное число.
42.  $(1; -2); (-2; -1); (2; 1); (1; 2); (0; -3); (-3; 0)$ .
43.  $(\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}); (-\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{3})$ .    44.  $(2\sqrt{2}; -\sqrt{2}); (-2\sqrt{2}; \sqrt{2})$ .
45.  $(2; -1); (-1; 2)$ .    46.  $(2; 3; 1); (-2; -3; -1)$ .
47.  $(0; 0; 0); (3; 2; 1); (-3; -2; 1); (3; -2; -1); (-3; 2; -1)$ .
48.  $(3; 4; 5); (-3; -4; -5)$ .    49.  $(7; 5; 5)$ .
50.  $(0; -1; 3); (0; 3; -1); (-1; 0; 3); (3; 0; -1); (3; -1; 0)$ .
51.  $(1; 0; 1); (-1; 0; -1); \left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right); \left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ .
52.  $(1; 1; 1); (-1; -1; -1)$ .    53.  $x = 3, y = t, z = -2 - t$ , где  $t$  – любое действительное число.
54.  $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .    55.  $(1; 2; -2); (1; -2; 2); (2; 1; -2); (2; -2; 1)$ ;

$(-2; 1; 2); (-2; 2; 1)$ .

56. Если  $a \neq \pm 1$ , то  $x = 1, y = 0$ ; если  $a = 1$ , то  $x = \alpha, y = 1 - \alpha$ , где  $\alpha$  – любое действительное число; если  $a = -1$ , то  $x = \beta, y = \beta - 1$ , где  $\beta$  – любое действительное число.

57. Если  $a \neq \pm 1$ , то  $x = \frac{a^2 + a + 1}{a + 1}, y = -\frac{a}{a + 1}$ ; если  $a = 1$ , то  $x = \alpha, y = 1 - \alpha$ , где  $\alpha$  – любое действительное число; если  $a = -1$ , то решений нет.

58. Если  $a \neq \pm 2$ , то  $x = \frac{6}{2 + a}, y = \frac{3}{2 + a}$ ; если  $a = 2$ , то  $x = 3 - 2\alpha, y = \alpha$ , где  $\alpha$  – любое действительное число; если  $a = -2$ , то решений нет.

59. Если  $a \neq \pm 1$ , то  $x = a^2 + 1, y = -a$ ; если  $a = 1$ , то  $x = \alpha, y = 1 - \alpha$ , где  $\alpha$  – любое действительное число; если  $a = -1$ , то  $x = \beta, y = \beta - 1$ , где  $\beta$  – любое действительное число.

60. Если  $a \neq 0$  и  $a \neq -3$ , то  $x = 2, y = -\frac{1}{a}$ ; если  $a = -3$ , то  $x = 1 + 3\alpha, y = \alpha$ , где  $\alpha$  – любое действительное число; если  $a = 0$ , то решений нет.

61. Если  $a \neq 1$ , то  $x = 0, y = 2$ ; если  $a = 1$ , то  $x = \alpha, y = 2 - \alpha$ , где  $\alpha$  – любое действительное число.

62. Если  $a \neq 1$  и  $a \neq 0$ , то  $x = \frac{a + 1}{a}, y = -1$ ; если  $a = 0$ , то нет решений; если  $a = 1$ , то  $x = \alpha, y = 1 - \alpha$ , где  $\alpha$  – любое действительное число.

63. Если  $a \neq 1$ , то  $x = \frac{5}{2}, y = 0$ ; если  $a = 1$ , то  $x = \alpha, y = 2\alpha - 5$ , где  $\alpha$  – любое действительное число.

$$64. x = \frac{2a}{1 + a^2}; y = \frac{a^2 - 1}{1 + a^2}.$$

65. Если  $a \neq \pm 2$ , то  $x = \frac{1}{2 - a}, y = \frac{a - 1}{2 - a}$ ; если  $a = 2$ , то решений нет; если  $a = -2$ , то  $x = \alpha, y = -\alpha - \frac{1}{2}$ , где  $\alpha$  – любое действительное число.

66.  $x = 1, y = 1$ ; если  $|a| < 1$ , то еще решения  $x = \frac{a^2 + 2a - 1}{a^2 - 1}, y = \frac{a^2 + 1}{1 - a^2}$ .

67. Если  $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ , то  $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2a - 1}}{2}; y_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{2a - 1}}{2}$ ;

$x_3 = -x_2, y_3 = y_2; x_4 = -x_1, y_4 = y_1; x_5 = -x_1, y_5 = -y_1;$   
 $x_6 = -x_2, y_6 = -y_2; x_7 = x_2, y_7 = -y_2; x_8 = x_1, y_8 = -y_1;$  если  
 $a < \frac{1}{2}$  или  $a > 1$ , то решений нет.

68. Если  $|a| > 1$ , то

$$x = \frac{\sqrt{2a \pm \sqrt{a^2 - 1}}}{1 + a^2}; y = \sqrt{2} - \frac{a(\sqrt{2a \pm \sqrt{a^2 - 1}})}{1 + a^2}; \text{ если } a = 1,$$

то  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; если  $a = -1$ , то  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; если  
 $|a| < 1$ , то решений нет.

69. Если  $a \neq 2$  и  $a \neq -1$ , то  $x = \frac{2 + 3a - 2a^2}{2 + a - a^2}, y = \frac{a - 2}{4 + 2a - 2a^2}$ ;  
 если  $a = 2$ , то  $x = 1 - 4\alpha, y = \alpha$ , где  $\alpha$  - любое действительное  
 число; если  $a = -1$ , то решений нет.

70. Если  $a \neq -1$ , то  $x = \frac{b + 2}{a + 1}, y = \frac{b - 2a}{a + 1}$ ; если  $a = -1, b = -2$ ,  
 то  $x = \alpha, y = \alpha - 2$ , где  $\alpha$  - любое действительное число; если  
 $a = -1, b \neq -2$ , то решений нет.

71. Если  $a \neq 0, a \neq 1$  и  $b \neq 0$ , то  $x = \frac{b}{a - 1}, y = \frac{a}{a - 1}$ ; если  
 $a = 0$  и  $b \neq 0$ , то  $x = \alpha, y = 0$ ; если  $a \neq 0, b = 0$ , то  $x = 0,$   
 $y = \alpha$ ; если  $a = b = 0$ , то  $x = \alpha, y = \beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  - любые  
 действительные числа; если  $a = 1, b \neq 0$ , то решений нет.

72. Если  $a = b = 0$ , то  $x = y = 0$ ; если  $b > 0$  и  $a^2 < 4b$ , то  
 решений нет; если  $b > 0$  и  $a^2 = 4b$ , то  $x = \frac{a}{2}, y = \frac{a^2}{2}$ ; если  $b > 0$   
 и  $a^2 > 4b$ , то  $x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, y_1 = ax_1; x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$   
 $y_2 = ax_2$ ; если  $b \leq 0$  и  $a$  - любое действительное число, то  
 $x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, y_1 = ax_1; x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, y_2 = ax_2.$

73. Если  $a = b = 0$ , то  $x = y = 0$ ; если  $a \neq 0$  и  $|b| > |a|\sqrt{2}$ , то  
 нет решений; если  $a \neq 0$  и  $|b| \leq |a|\sqrt{2}$ , то  $x_1 = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2},$   
 $y_1 = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}; x_2 = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}, y_2 = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2};$  если  
 $a = 0$  и  $b \neq 0$ , то решений нет.

74. Если  $a = b = 0$ , то  $x_1 = 0, y_1 = \alpha; x_2 = \beta, y_2 = 0$ , где  $\alpha$  и  $\beta$   
 - любые действительные числа; если  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ , то  $x = \frac{b^8}{a^{11}},$

- $y = \frac{a^7}{b^5}$ ; если  $a = 0$  и  $b \neq 0$  или  $b = 0$  и  $a \neq 0$ , то решений нет.
75. Если  $a = b = 0$ , то  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = \alpha$ ;  $x_2 = \beta$ ,  $y_2 = 0$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — любые действительные числа; если  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ , то  $x = \frac{a^5}{b^9}$ ,  $y = \frac{b^{11}}{a^6}$ ; если  $a = 0$  и  $b \neq 0$  или  $b = 0$  и  $a \neq 0$ , то решений нет.
76.  $a = 0$  и  $a = 2$ . 77.  $a = -\frac{2}{3}$ . 78.  $a = \frac{4}{3}$ .
79.  $a = -2$ . 80.  $|p| < 1$ . 81.  $b = -\frac{3}{4}$ .

#### ГЛАВА 4. Тригонометрия

1.  $3 - \frac{5\sqrt{3}}{2}$ . 2.  $\frac{3\sqrt{2}}{2} - 13$ . 3.  $-\frac{7\sqrt{3}}{6} + \frac{5}{2}$ . 4. 6.
5. 1. 6. -4. 7.  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ . 8.  $\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}$ . 9. Да.
10. Нет. 11. Да. 12. Нет. 13. Да. 14. Да. 15. Да.
16. Да. 17. Да. 18. Нет. 19. Положительное.
20. Положительное. 21. Положительное. 22. Положительное.
23. Положительное. 24. Отрицательное. 25. Отрицательное.
26.  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . 27.  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ . 28.  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ .
29.  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ . 30.  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ,  $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ .
31.  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$ .
32.  $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4}$ ,  $\frac{7\pi}{4} < \varphi < 2\pi$ .
33.  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ . 34.  $\frac{\pi}{2}n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$ , где  $n = 0, 1, 2, 3$ .
35.  $\frac{\pi}{2}l + \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}l$ , где  $l = 0, 1, 2, 3$ .
36.  $\frac{2\pi}{3}l \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}l$ , где  $l = 0, 1, 2$ .
37.  $\frac{2\pi}{3}l + \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}l$ , где  $l = 0, 1, 2$ .
38.  $\sin 1295^\circ > \sin(-55^\circ) > \sin 600^\circ$ .
39.  $\cos(-68^\circ) < \cos 653^\circ < \cos 295^\circ$ .
40.  $\operatorname{ctg} 6 < \sin 4 < \cos 2 < \operatorname{tg} 3$ . 41.  $\sin 5 < \cos 2 < \operatorname{ctg} 8 < \operatorname{tg} 1$ .
42.  $\operatorname{tg}(-53^\circ) < \operatorname{tg} 1294^\circ < \operatorname{tg} 600^\circ$ .
43.  $\operatorname{ctg} 294^\circ < \operatorname{ctg}(-68^\circ) < \operatorname{ctg} 683^\circ$ .
44.  $\cos 5 < \operatorname{ctg} 1 < \sin 8 < \operatorname{tg} 4$ . 45.  $\operatorname{ctg} 5 < \sin 3 < \cos 1 < \operatorname{tg} 7$ .

В задачах 47, 48, 51, 53, 55, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 66, 68, 70, 71, 73, 76, 82, 83, 85, 86, 88, 89 первое число больше второго.

В задачах 46, 49, 50, 52, 58, 63, 64, 65, 67, 69, 72, 74, 75, 77, 78, 79, 80, 81, 84, 87 второе число больше первого.

В задаче 54 числа равны.

90.  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ .    91.  $\sin \varphi = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \varphi = \frac{-4}{5}$ .

92.  $\sin \varphi = \frac{40}{41}$ ,  $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{9}{40}$ .    93.  $\cos \varphi = \frac{4}{5}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{3}{4}$ .

94.  $\frac{5}{\sqrt{26}}$ ,  $-\frac{1}{\sqrt{26}}$ ,  $-5$ .    95.  $\sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\cos \varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ .

96.  $\frac{1}{10}$ ,  $3\sqrt{\frac{1}{10}}$ ,  $\frac{1}{3}$ .    97.  $\frac{3}{5}$ ,  $-\frac{4}{5}$ ,  $-\frac{3}{4}$ ,  $-\frac{4}{3}$ .

98.  $\frac{7}{25}$ ,  $\frac{24}{25}$ ,  $\frac{7}{24}$ ,  $\frac{24}{7}$ .    99.  $-\frac{24}{25}$ .    100.  $\frac{36}{325}$ ,  $\frac{204}{325}$ .

101.  $\frac{24 - 5\sqrt{21}}{65}$ .    102.  $0$ ,  $-\frac{\sqrt{39}}{8}$ .    103.  $-\frac{16}{63}$ ,  $-\frac{56}{63}$ .

104.  $\frac{25}{19}$ ,  $\frac{5}{31}$ .    105.  $\frac{38}{41}$ ,  $\frac{2}{41}$ .    106.  $-\frac{116}{845}$ ,  $-\frac{253}{325}$ ,  $\frac{2016}{3713}$ .

107.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\sqrt{2}$ .    108.  $\frac{7}{25}$ .    109.  $-\frac{84}{625}$ .    110.  $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ .

111.  $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ .    112.  $-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$ .    113.  $\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4-\sqrt{6}}$ .

114.  $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ .    115.  $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ .

116.  $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ .    117.  $\sqrt{2}-1$ .    118.  $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$ .

119.  $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ .    120.  $\frac{1}{4}$ .    121.  $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$ .    122.  $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$ .

123.  $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ .    124.  $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ .    125.  $\frac{1}{4}$ .    126.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

127.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .    128.  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ .    129.  $\frac{1}{2}$ .    130.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .    131.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

132.  $\frac{1}{2}$ . 133.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ . 134.  $-1$ . 135.  $\frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{5} + \sqrt{5})$ .
136.  $0$ . 137.  $-\frac{1}{4}$ . 138.  $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ . 139.  $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ . 140.  $\sqrt{\frac{3}{2}}$ .
141.  $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$ . 142.  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ . 143.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ . 144.  $0$ . 145.  $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ .
146.  $\sqrt{\frac{3}{2}}$ . 147.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . 148.  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ . 149.  $2$ . 150.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .
151.  $2\sqrt{3}$ . 152.  $\sqrt{3}$ . 153.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ . 154.  $2 - \sqrt{3}$ .
173.  $\frac{22}{17}$ . 174.  $\frac{1}{5}$ . 175.  $\frac{2}{5}$ . 176.  $\frac{1}{21}$ . 177.  $-\frac{9}{10}$ .
178.  $-\frac{1}{5}$ . 179.  $0$ . 180.  $0$ . 181.  $\frac{3}{5}$ . 182.  $\frac{13}{85}$ .
183.  $\frac{4}{5}$ . 184.  $\sqrt{4\sqrt{2}-5}$ . 185.  $\sqrt{\frac{9}{10}}$ . 186.  $-\frac{10}{7}$ .
187.  $0, 43$ . 188.  $-\frac{3}{5}$ . 189.  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ . 190.  $-0, 27$ . 191.  $-\frac{1}{3}$ .
192.  $\frac{56}{65}$ . 193.  $-\frac{4}{3}$ . 194.  $6 - 2\pi$ . 195.  $\pi - 2$ . 196.  $2\pi - 6$ .
197.  $\frac{3}{2}$ . 198.  $1$ . 199.  $2, 5$ . 200.  $2$ . 201.  $-\frac{\pi}{6}$ .
202.  $2 - \pi$ . 203.  $\frac{9}{10}\pi$ . 204.  $\pi - 3$ . 205.  $2 - \frac{\pi}{2}$ .
- В задачах 207, 211, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221 – первое число больше второго.
- В задачах 206, 208, 209, 210, 212, 213 – второе число больше первого.
222.  $\frac{2}{5}, \sqrt{0,84}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{\sqrt{21}}{2}$ . 223.  $-\frac{7}{25}, \frac{24}{25}, -\frac{7}{24}, -\frac{24}{7}$ .
224.  $-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}$ . 225.  $\frac{7}{25}, \frac{24}{25}, \frac{7}{24}, \frac{24}{7}$ .
226.  $0, -1, 0$ , не существует. 227.  $\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, \frac{5}{12}, \frac{12}{5}$ .
228.  $-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}$ . 229.  $-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, -\frac{5}{12}, -\frac{12}{5}$ .

230.  $\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}, -\frac{12}{5}, -\frac{5}{12}$ .    231.  $\frac{7}{25}, \frac{24}{25}, \frac{7}{24}, \frac{24}{7}$ .  
 232.  $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}$ .    233.  $\frac{7}{25}, -\frac{24}{5}, -\frac{7}{24}, -\frac{24}{7}$ .  
 234.  $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}$ .    235.  $\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}$ .

## ГЛАВА 5. Функции и графики

### §1. Исследование функций

1.  $x \neq 2$ .    2.  $|x| > 1$ .    3.  $x \leq 0, x \geq 1$ .    4.  $x \neq \pi k, k \in \mathbf{Z}$ .
5.  $x = 1, x \geq 2$ .    6.  $x = 0, x = 1, x \geq 3$ .    7.  $-4 \leq x \leq 0$ .
8.  $-1 \leq x < 1$ .    9.  $x > 2$ .
10.  $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, x \neq 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ .    11.  $x > 4$ .
12.  $x > 0, x \neq n$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ .    13.  $|x| \leq \frac{1}{3}$ .
14.  $0 \leq x \leq 1$ .    15.  $x \leq \frac{1}{2}$ .
16.  $|x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  и  $\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k-1)} \leq |x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}(4k+1)}$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ .
17.  $4k^2\pi^2 \leq x \leq (2k+1)^2\pi^2$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ .    18.  $x > 0, x \neq 1$ .
19.  $x > 7$ .    20.  $2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ .
21.  $x \geq 0$ .    22.  $x \geq -3, x \neq 5$ .
23.  $x \neq \pi k, x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$ .    24.  $x \neq -2, x \neq 1$ .
25.  $10^{(2k-\frac{1}{2})\pi} < x < 10^{(2k+\frac{1}{2})\pi}$ , где  $k \in \mathbf{Z}$ .
26.  $|x| \geq 1$ .    27.  $x \neq 0$ .    28.  $x \neq 0$ .    29.  $x < 0$ .
30.  $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$ .    31.  $\frac{2}{3} < x < 2$ .    32.  $x > -3, x \neq 1$ .
33.  $-1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{3}{2}$ .    34.  $|x| < \infty, -1 \leq y < 1$ .
35.  $2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{3}$ , где  $k \in \mathbf{Z}, -\infty < y \leq \lg 3$ .
36.  $|x| < \infty, 0 \leq y \leq 2$ .    37.  $|x| < \infty, |y| \leq \sqrt{13}$ .
38.  $|x| < \infty, |y| \leq 1$ .    39.  $|x| < \infty, 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \leq y \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ .
40.  $x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}, y \geq 4$ .    41.  $|x| < \infty, 1 \leq y \leq 2$ .
42.  $-\frac{1}{4} \leq y \leq 20$ .    43.  $1 < y \leq 3$ .    44.  $1 \leq y \leq 5$ .
46.  $-\frac{1}{4} \leq y \leq 0$ .    47.  $1 < y < \infty$ .    48.  $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ .

49.  $|y| \leq \frac{1}{2}$ . 50.  $f(0) = 1, f(1) = -4, f(2) = -7, f(4) = -161$ .

51.  $f(-2) = -1, f(-1) = 0, f(0) = 1, f(1) = 2$ .

52.  $f(-x) = \frac{1+x}{1-x}, f(2x) = \frac{1-2x}{1+2x}, f(x+1) = \frac{-x}{x+2},$

$f(x) + 1 = \frac{2}{1+x}, 2f(x) = \frac{2-2x}{1+x}, f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x+1},$

$\frac{1}{f(x)} = \frac{1+x}{1-x}, f(x) + f(2) = \frac{2-4x}{3+3x}.$

53. а)  $f(g(x)) = 2^{x^2}, g(f(x)) = 2^{2x}, g(g(x)) = x^4, f(f(x)) = 2^{2x};$

б)  $g(f(x)) = f(g(x)) = \text{sign } x, (x \neq 0), f(f(x)) = x, (x \neq 0);$

в)  $f(g(x)) = f(x), g(f(x)) = 0, f(f(x)) = 0, g(g(x)) = g(x).$

В задачах 55 – 58, 60, 61, 63, 64, 66, 67, 69, 70 функции являются ограниченными.

В задачах 59, 62, 65, 68 функции не являются ограниченными.

88. Возрастает на  $(0, +\infty)$ ; убывает на  $(-\infty, 0)$ .

89. Возрастает на  $(2, +\infty)$ ; убывает на  $(-\infty, 2)$ .

90. Возрастает на  $(2, +\infty)$ ; убывает на  $(-\infty, 2)$ .

91. Убывает на  $(-\infty, 0)$  и  $(0, +\infty)$ .

92. Возрастает на  $(-\infty, \frac{1}{2})$ ; убывает на  $(\frac{1}{2}, +\infty)$ .

93. Возрастает на  $(-\infty, +\infty)$ .

94. Убывает на  $(-\infty, 1)$  и  $(1, +\infty)$ .

95. Возрастает на  $(0, +\infty)$ .

96. Возрастает на  $\pi k - \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$ ; убывает на  $\pi k + \frac{\pi}{4} <$

$x < \frac{3\pi}{4} + \pi k$ , где  $k \in \mathbf{Z}$ .

97. Убывает на  $(0, 1)$ ; возрастает на  $(1, +\infty)$ .

98. Убывает на  $(-\infty, 0)$ ; возрастает на  $(0, +\infty)$ .

99. Убывает на  $\pi k < x < \pi + \pi k, k \in \mathbf{Z}$ .

100. Возрастает на  $\frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$ , где  $k \in \mathbf{Z}$ .

101. Убывает на  $(-\infty, -1)$  и  $(1, +\infty)$ ; возрастает на  $(-1, 1)$ .

102. Убывает на  $(-\infty, 0)$ ; возрастает на  $(0, +\infty)$ .

103. Возрастает на  $(-\infty, 1)$  и  $(1, +\infty)$ .

В задачах 112, 113, 115, 116, 119, 120, 123, 125, 128, 129, 132, 135 функция является четной.

В задачах 110, 111, 114, 118, 121, 122, 127, 130, 131, 133 функция является нечетной.

В задачах 117, 124, 126, 134, 136, 137, 138 функция не является ни четной, ни нечетной.

139.  $\varphi = x^2$ ,  $\psi = x$ .    140.  $\varphi = x^2$ ,  $\psi = -\sin x$ .

141.  $\varphi = \frac{5^x + 5^{-x}}{2}$ ,  $\psi = \frac{5^x - 5^{-x}}{2}$ .    142.  $\varphi = \frac{|x-1| + |x+1|}{2}$ ,  
 $\psi = \frac{|x-1| - |x+1|}{2}$ .

143.  $\varphi = 0$ ,  $\psi = \frac{x}{x^2 - 1}$ .    144.  $\varphi = \frac{1}{x^4 - x^2}$ ,  $\psi = 0$ .

В задачах 145, 148, 149, 150, 155, 156 главный период  $T$  равен  $\pi$ .

146.  $T = \frac{\pi}{5}$ .

В задачах 147, 151, 152, 154, 157, 164 главный период  $T$  равен  $2\pi$ .

158.  $T = 1$ .

В задачах 153, 159 – 163, 165 функции не являются периодическими.

169.  $y_{\min} = \frac{3}{4}$  при  $x = -\frac{1}{2}$ , функция неограничена сверху.

170.  $y_{\max} = \frac{9}{4}$  при  $x = \frac{1}{2}$ , функция неограничена снизу.

171.  $y_{\max} = \frac{4}{3}$  при  $x = -\frac{1}{2}$ , функция наименьшее значение не принимает, но является ограниченной снизу:  $y > 0$ .

172.  $y_{\min} = -1$  при  $x = 1$ , функция максимальное значение не принимает.

173.  $y_{\max} = \frac{-1 + 2\sqrt{5}}{9}$  при  $x = -1 + \sqrt{5}$ ;  $y_{\min} = \frac{-1 - 2\sqrt{5}}{9}$  при  $x = -1 - \sqrt{5}$ .

174.  $y_{\min} = 0$  при  $x = \pm 1$ ,  $y_{\max} = 1$  при  $x = 0$ .

175.  $y_{\max} = \sqrt{2}$  при  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $y_{\min} = 1$  при  $x = \pi k$ .

176.  $y_{\max} = 1$  при  $x = 0$ , функция не принимает минимума, но ограничена снизу нулем.

177.  $y_{\min} = -\frac{1}{2}$  при  $x = -1$ ,  $y_{\max} = \frac{1}{2}$  при  $x = 1$ .
178.  $y_{\max} = 1$  при  $x = \pi k$ ,  $y_{\min} = \cos 1$  при  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ .
179.  $y_{\min} = 0$  при  $x = -1$ , функция неограничена сверху.
180.  $y_{\max} = \sqrt{8}$  при  $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $y_{\min} = -\sqrt{8}$  при  $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
181.  $y_{\min} = -2$  при  $x = -1$ ,  $y_{\max} = 2$  при  $x = 1$ .
182.  $y_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}}$  при  $x = -1 + \sqrt{2}$ ;  $y_{\min} = \frac{-\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}}$  при  $x = -1 - \sqrt{2}$ .
183.  $y_{\max} = y(-2 + \sqrt{3})$  при  $x = -2 + \sqrt{3}$ ;  $y_{\min} = y(-2 - \sqrt{3})$  при  $x = -2 - \sqrt{3}$ .
184.  $y_{\min} = 1$  при  $2 \leq x \leq 3$ , функция неограничена сверху.
185.  $y_{\max} = 2$  при  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $y_{\min} = \frac{1}{2}$  при  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
186.  $y_{\min} = 0$  при  $x = 1$ , функция неограничена сверху.
187.  $y_{\max} = 0$  при  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ , функция неограничена снизу.
188.  $y_{\max} = 12$  при  $x = 3$ ,  $y_{\min} = 6$  при  $x = 2$ .
189.  $y_{\min} = 0$  при  $x = 1$ ,  $y_{\max} = \log_3 2$  при  $x = 2$ .
190.  $y_{\min} = \frac{7}{50}$  при  $x = 7$ ;  $y_{\max} = \frac{5}{26}$  при  $x = 5$ .
191.  $y_{\min} = 7$  при  $x = 2$ ,  $y_{\max} = 9$  при  $x = 3$ .
192.  $y_{\max} = 0$  при  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $y_{\min} = -4$  при  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ .
193. Функция принимает единственное значение 0 в точках  $x = 1$  и  $x = -1$ .
194.  $y_{\max} = 1$  при  $x = 1$ ,  $y_{\min} = 0$  при  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ .
195.  $y_{\min} = 2$  при  $x = 1$ , функция неограничена сверху.
196.  $y_{\max} = \frac{4 - \sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}}$  при  $x = 1 - \sqrt{2}$ ;  $y_{\min} = \frac{4 + \sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}}$  при  $x = 1 + \sqrt{2}$ .
197.  $y_{\max} = 5$  при  $x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7} - \frac{\arccos \frac{3}{5}}{7}$ ,  $y_{\min} = -5$  при  $x = -\frac{3\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7} - \frac{\arccos \frac{3}{5}}{7}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .
198.  $y_{\max} = 0$  при  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $y_{\min} = -4$  при  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

## ГЛАВА 6. Уравнения и неравенства

1. Нет. 2. Нет. 3. Да. 4. Нет. 5. Да. 6. Нет.  
 7. Нет. 8. Нет. 9. Нет. 10. Нет. 11. Нет. 12. Да.  
 13. Нет. 14. Нет. 15. Нет. 16. Нет. 17. Да. 18. Нет.  
 19. Да. 20. Нет. 21. Нет. 22. Да. 23. Да. 24. Нет.  
 25. Нет. 26. Нет. 27. Нет. 28. Да. 29. Да. 30. Нет.  
 31. Нет. 32. Да. 33. 2. 34. Нет решений. 35. 0; 4.  
 36. -3; 7. 37. 2; 1, 10. 38.  $-1 + \sqrt{2}$ ;  $-1 - \sqrt{2}$ . 39. -1; -2.  
 40.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ;  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ . 41. 7; -1. 42. 0;  $\frac{\lg 5}{\lg 7}$ . 43.  $\frac{3}{2}$ .  
 44.  $\frac{3}{2}$ . 45. 1; -4. 46.  $\frac{1}{\pi}$ . 47. 3; -3. 48.  $x \geq 25$ .  
 49. 2;  $1 - \sqrt{33}$ . 50.  $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ;  $k \in \mathbf{Z}$ . 51. 16. 52. 2; 4.  
 53. 4. 54. 2;  $\frac{1}{4}$ . 55.  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{4}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .  
 56.  $2\pi n$ ;  $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$ ,  $k, n \in \mathbf{Z}$ . 57.  $2k\pi$ ;  $n\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k, n \in \mathbf{Z}$ .  
 58.  $\frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . 59.  $\frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{7}$ ,  $k, n \in \mathbf{Z}$ .  
 60.  $\frac{k\pi}{4}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . 61.  $\frac{k\pi}{2}$ ,  $(2n + 1)\frac{\pi}{8}$ ,  $k, n \in \mathbf{Z}$ .  
 62.  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ,  $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ,  $k, n \in \mathbf{Z}$ .  
 63.  $\frac{2k\pi}{5} \pm \frac{\pi}{10}$ ,  $2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $k, n \in \mathbf{Z}$ .  
 64.  $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ,  $k, n \in \mathbf{Z}$ .  
 65.  $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $n\pi - \frac{\pi}{4}$ ,  $k, n \in \mathbf{Z}$ .  
 66.  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . 67.  $2k\pi$ ,  $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k, n \in \mathbf{Z}$ .  
 68.  $k\pi$ ,  $n\pi - \frac{\pi}{4}$ ,  $k, n \in \mathbf{Z}$ . 69.  $\frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .  
 70.  $\frac{k\pi}{3}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . 71.  $10^{2k+\frac{1}{4}}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . 72. 1; 2.  
 73.  $\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . 74.  $k\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .  
 75.  $\frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $-\frac{5\pi}{12} + n\pi$ ,  $k, n \in \mathbf{Z}$ . 76.  $\frac{1}{2}$ .

77.  $0, \frac{1}{2}$ . 78.  $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ . 79.  $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ .
80.  $x < -1; -\frac{1}{2} < x < 0; x > 0$ .
81.  $-\infty < x < -3; 2 < x < +\infty$ .
82.  $x < -1; -1 < x < 0$ . 83.  $-2 < x < -1; 1 < x < 3$ .
84.  $x \leq 0; x > 2$ . 85.  $-\sqrt{13} < x \leq 1; 2 \leq x < \sqrt{13}$ .
86.  $x \leq -3, x \geq 1$ . 87.  $-2 \leq x \leq 2$ . 88.  $x \geq 1$ .
89. Решений нет. 90.  $0 \leq x \leq 5$ . 91.  $x \geq 5$ .
92.  $-\frac{1}{3} \leq x < 0; 0 < x < \frac{1}{5}$ . 93.  $1 < x < 2; 10 < x < +\infty$ .
94.  $x < -1; x > \frac{5}{3}$ . 95.  $\frac{2}{3} < x < 2$ . 96.  $x \neq 0$ .
97.  $x \geq 0$ . 98.  $x \geq -1$ . 99.  $x > \log_{2/3} 3$ .
100.  $-2 < x < 3$ . 101.  $x < -\log_5 6; -1 \leq x < 0$ .
102.  $0 < x < \log_2 \frac{4}{3}; x > 1$ . 103.  $0 \leq x \leq 4$ .
104.  $-10 \leq x \leq 5$ . 105.  $x > 0$ . 106.  $1 < x < \frac{10}{9}$ .
107.  $x > 0, x \neq 1$ . 108.  $-\frac{1}{2} < x < 1$ . 109.  $x > -\frac{1}{2}$ .
110.  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ . 111.  $x > 2$ . 112.  $x \leq -3; x \geq -1$ .
113.  $\log_4 7 < x \leq \log_2 3$ . 114.  $\frac{\sqrt{5}-3}{2} \leq x < 1$ .
115.  $x \geq -\frac{2}{5}$ . 116.  $1 < x < 2; 2 < x < 3$ .
117.  $0 < x < 1; x \geq 2$ .
118.  $\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq x \leq \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k,$   
 $-\arccos \frac{1}{3} + 2\pi n \leq x \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, k, n \in \mathbf{Z}$ .
119.  $\operatorname{arctg} 4 + \pi n < x < \pi - \operatorname{arctg} 4 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$ .
120.  $-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$ .
121.  $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$ .
122.  $k\pi - \operatorname{arctg} 2 < x < k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$ .
123.  $2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ .
124.  $x \neq \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbf{Z}$ .
125.  $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < k\pi, k \in \mathbf{Z}$ .

$$126. \frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < 2\pi k + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}; \pi + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; 2\pi m - \frac{\pi}{4} < x < 2\pi m, m \in \mathbf{Z}.$$

$$127. \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}; -\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}.$$

$$128. -\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

$$129. 0 \leq x < \frac{1}{2}. \quad 130. \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1. \quad 131. 0 < x \leq 1.$$

## ГЛАВА 7. Предел последовательности и предел функции

### §1. Предел числовой последовательности

$$19. \frac{n^2 + 1}{n}. \quad 20. 2^{2n-1} - 1. \quad 21. 3^n + (-1)^n. \quad 22. n^3.$$

$$23. n + (-1)^n. \quad 24. (-1)^{n+1} \cdot n^{(-1)^n}. \quad 25. (-1)^{n+1} \cdot 3.$$

$$26. 2n - 1. \quad 27. \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}. \quad 28. \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\pi n}{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$29. (-1)^n \cdot 2n. \quad 30. n^{(-1)^{n+1}}. \quad 31. \frac{1}{n} \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}}.$$

$$32. 192. \quad 33. 1; \frac{1}{2}. \quad 34. -1; 1. \quad 35. \frac{1}{1224}.$$

$$36. 1226. \quad 37. \frac{9}{8}. \quad 38. \frac{1}{20}. \quad 39. \frac{1000^{999}}{999!}.$$

$$40. \frac{48}{11}. \quad 41. 2\frac{25}{46}. \quad 42. a_2 = a_3 = -5. \quad 43. 20.$$

$$44. -2. \quad 45. -3\frac{9}{19}. \quad 46. -1\frac{9}{22}.$$

47. Возрастающая. 48. Возрастающая. 49. Возрастающая.

50. Убывающая. 51. Невозрастающая. 52. Неубывающая.

53. Не является монотонной. 54. Не является монотонной.

55. Убывающая. 56. Возрастающая.

57. Убывающая. 58. Не является монотонной.

59. Возрастающая. 60. Не является монотонной.

61. Не является монотонной. 62. Возрастающая.

63. Убывающая. 64. Не является монотонной.

65. Возрастающая. 66. Не является монотонной.

В задачах 67 – 71, 73 – 80, 82, 86 последовательности являются ограниченными.

В задачах 72, 81, 83, 84, 85 последовательности не являются ограниченными.

87. Указание. Использовать неравенство Бернулли.

138. 0;  $2a$ . 139.  $\frac{2}{3}$ . 140. 0. 141. 1. 142. 1. 143.  $\frac{1}{5}$ .

144. 0. 145. 1. 146. 0. 147. 2. 148.  $\frac{1}{2}$ . 149. 0. 150. 1.

151.  $\frac{5}{2}$ . 152.  $\frac{1}{2}$ . 153.  $-\frac{1}{4}$ . 154.  $\frac{2}{3}$ . 155. 1. 156. 2.

157.  $\frac{1}{3}$ . 158. 2. 159. 0. 160. 1. 161. 0. 178.  $\frac{2}{3}$ .

179.  $\frac{3}{2}$ . 180. 3. 181. 1. 182.  $\frac{1}{4}$ . 183.  $\frac{1}{3}$ . 184.  $1 - \sqrt{2}$ .

## §2. Предел функции и непрерывность

19.  $-\frac{2}{3}$ . 20. -2. 21. 1. 22. 10. 23. 10. 24. 35.

25.  $2^{10} \cdot 5^{20}$ . 26.  $\frac{10}{3}$ . 27. 210. 28.  $\frac{1}{8\sqrt{2}}$ . 29.  $\frac{1}{4}$ .

30.  $\frac{1}{144}$ . 31. 3. 32.  $\frac{5}{7}$ . 33.  $\frac{4}{3}$ . 34.  $\frac{m^2}{n^2}$ .

35. 1. 36. 1. 37.  $\frac{1}{2}$ . 38.  $\frac{9}{25}$ . 39.  $\cos a$ .

40.  $-\sin a$ . 41.  $\frac{1}{3}$ . 42.  $\frac{n^2 - m^2}{2}$ . 43.  $\frac{1}{2}$ .

44.  $-\frac{1}{12}$ . 45. 0. 46.  $-\frac{2}{\pi}$ . 47.  $-\frac{1}{6}$ . 48.  $\frac{1}{4}$ .

49. 1. 50.  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ . 51.  $\sec^2 a$ . 52.  $-\frac{1}{12}$ . 53.  $\frac{\sin 2}{2}$ .

54. 1. 55.  $\frac{4}{3}$ . 56.  $\sqrt{2}$ . 57.  $\frac{m}{n}$ . 58. 1.

59.  $\frac{4}{3}$ . 60.  $-\frac{1}{16}$ . 61.  $\frac{1}{4}$ . 62. 0. 63. -2.

64. 0. 65. 2. 66.  $\frac{1}{5}$ . 67. 1. 68.  $\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3}$ .

69.  $-\frac{1}{2}$ . 70. 0. 71.  $e^2$ . 72.  $e^{-1}$ . 73.  $e^{-4}$ .

74.  $e$ . 75. Нет. 76. Нет. 77. Да. 78. Нет.

79. Нет. 80. Нет. 81. Нет. 82. Да. 83. Да.

84. 0;  $+\infty$ . 85. 1; 1. 86. 2; -4. 87. 1; 1. 88. 1; 1.  
 89. 1; 0. 90. Не существует; не существует.  
 91. Не существует; не существует.  
 92. 1; -1. 93. 1; 1. 94. 0; 0.  
 95. 0; 1. 96. 0; 0. 97. 0; 1.  
 108.  $x \neq 1$ . 109.  $x \neq 0$ . 110.  $x \neq 0$ . 111.  $x \neq 0$ .  
 112.  $x \neq 0$ . 113.  $x$  - любое. 114.  $x = k, k \in \mathbf{Z}$ . 115.  $x \neq -1$ .  
 116. Если  $A = \frac{1}{2}$ , то непрерывна при любом  $x$ , если  $A \neq \frac{1}{2}$ , то  
 непрерывна при всех  $x$ , кроме  $x = 0$ .  
 117.  $x$  - любое. 118. Всюду разрывна.  
 119.  $x = 0$ . 120.  $x \neq k, k \in \mathbf{Z}$ .

### §3. Производная

133. 0. 134. 0. 135. Не существует.  
 136. Не существует. 137. Не существует. 138. 0.  
 205.  $\cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$ . 206.  $\sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$ .  
 207.  $(\ln 2)^n \cdot 2^x$ . 208.  $2^{n-1} \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right)$ .  
 209.  $-2^{n-1} \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right)$ .  
 210.  $\frac{3}{4} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) + \frac{3^n}{4} \cdot \cos\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right)$ .  
 211.  $\frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ . 212.  $m(m-1) \dots (m-n+1)x^{m-n}$ .  
 213.  $\frac{(-1)^{n+1}n!}{x^n}$ .  
 214.  $\frac{(-1)^n}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2} - x\right) + \frac{3^n}{2} \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)$ .

$$215. (-1)^n 2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4^n}{2} \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$216. \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left\{ \ln x - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right\}.$$

$$217. \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(2+x)^n}.$$

$$218. x \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$219. n! \left[ \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right].$$

$$220. (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right].$$

$$221. \frac{(-1)^{n-1} n! (-3)}{(x-1)^{n+1}}.$$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Действительные числа .....	3
§1. Натуральные числа .....	3
§2. Целые, рациональные и иррациональные числа .....	6
§3. Числовые равенства и неравенства .....	9
§4. Прогрессии .....	15
§5. Элементы комбинаторики и бином Ньютона .....	20
§6. Степень действительного числа .....	24
§7. Логарифмы .....	28
Глава 2. Алгебраические выражения .....	31
§1. Многочлены .....	31
§2. Алгебраические дроби .....	32
§3. Иррациональные выражения .....	35
§4. Метод математической индукции .....	39
Глава 3. Алгебраические уравнения и неравенства .....	45
§1. Уравнения с одним неизвестным .....	45
§2. Неравенства с одним неизвестным .....	46
§3. Системы алгебраических уравнений .....	47
Глава 4. Тригонометрия .....	53
Глава 5. Функции и графики .....	65
§1. Исследование функций .....	65
§2. Графики функций .....	71
Глава 6. Уравнения и неравенства .....	78
Глава 7. Предел последовательности и предел функции ....	86
§1. Предел числовой последовательности .....	86
§2. Предел функции и непрерывность .....	95
§3. Производная функции .....	100
ОТВЕТЫ .....	103

**В Издательском отделе Учебно-научного центра  
двузовского образования МГУ им. М.В. Ломоносова  
в 1997 году вышли в свет:**

1. **А.Б. Буда** «Элементарная математика.  
Руководство для поступающих в вузы»  
В мягк. обложке, т.10000 экз., 330 стр., 60x84 1/16
2. **С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин**  
«Алгебра-7». Учебник по алгебре для 7-ого класса.  
В тв., целлофан. обложке, т.12000 экз., 250 стр., 60x84 1/16
3. **О.Ю. Черкасов, А.Г. Якушев**  
«Проверь свои знания по математике»  
В мягк. обложке, т.5000 экз., 96 стр., 60x84 1/16
4. **В.В. Рождественский, Е.В. Панкратьев,  
И.И. Мельников, В.В. Вавилов**  
«Математический тренинг» (Арифметика, алгебра,  
тригонометрия и анализ).  
В мягк. обложке, т.7000 экз., 64 стр., 60x84 1/16
5. **В.И. Григорьев** «Вехи физики XX века»  
В мягк. обложке, т.3000 экз., 127 стр., 60x84 1/16
6. **С.А. Ушаков, Н.Г. Комарова, Л.В. Ромина**  
«Москвоведение» (Природа и экология).  
В мягк. обложке, т.12000 экз., 207 стр., 60x84 1/16
7. **Л.Н. Степанова, Г.Н. Тамбовцев**  
«История России» Методическое пособие для поступающих  
в вузы. В мягк. обложке, т.12000 экз., 295 стр., 60x84 1/16
8. **Л.Н. Степанова**  
«Методические разработки к темам по истории Отечества»  
В мягк. обложке, т.5000 экз., 87 стр., 60x84 1/16
9. **А.К. Руденко, Н.В. Соколова**  
«Тесты по русскому языку. Орфография и пунктуация»  
В мягк. обложке, т.5000 экз., 52 стр., 60x84 1/16

**По вопросам приобретения литературы просим обращаться  
в Издательский отдел УНЦ ДО МГУ по адресу:**

**119899, Москва, Ленинские горы, МГУ,**

**Гл.здание, сектор «Ж» комн. 105А**

**Тел/факс: (095) 939-3934, 939-1093**

**Пейджер: 974-0111, Абонент № 91-045**

**Эл.почта: [izdat@esc.msu.ru](mailto:izdat@esc.msu.ru)**

Учебное издание

**Олехник Слав Николаевич,  
Потапов Михаил Константинович.**

**'Сборник задач по алгебре, тригонометрии и элементарным  
функциям.**

Издание второе

*Серия: В помощь поступающим в вузы  
(естественные дисциплины)*

И.о. Зав. издательским отделом *Воронцова Е.В.*

Ответственный редактор *Потапов М.К.*

Компьютерный набор *Дьяченко И.В.*

Издательский отдел  
Учебно-научного центра довузовского образования  
МГУ им. М.В.Ломоносова  
119899, Москва, Ленинские горы, МГУ, сектор «Ж», к. 105а  
Тел./факс (095) 939-39-34, 939-10-93  
ЛР № 063833 от 28.12.94.

Подписано в печать 20.10.97 Формат 60×90/16.

Бум. Типографская. Усл. печ. л. 8,5.

Тираж 7000 экз. Заказ 102.

Подготовка к печати ТОО «Экономика и информатика»  
107564, Москва, 1-я Мясниковская ул., 16.

Отпечатано в типографии «Геодезия»  
141260, г.Красноармейск, ул. Центральная, 16

**ДЛЯ ЗАМЕТОК**

---



**Учебно-научный центр  
довузовского образования**

- **Подготовительные вечерние и заочные курсы для абитуриентов МГУ и других вузов**  
*Москва, 119899, Ленинские горы, МГУ, Главное здание, сектор "Ж", комн. 105б, тел. 939-21-37, 939-33-10*
- **Лекторий выходного дня — воскресные и субботние лекции по предметам вступительных экзаменов**  
*Москва, ул. Моховая, д.9 (корпус ф-та журналистики МГУ), комн. 302, тел. 203-98-12*
- **Начальные школы МГУ — Мини-лицей "Чашниково" (полный пансион) и Начальная гимназия (полупансион) обучение детей 6-9 лет**  
*тел. 939-10-93*
- **Вечерняя гимназия МГУ — специализированное обучение школьников**  
*Москва, 119899, Ленинские горы, МГУ, Главное здание, сектор "Ж", комн.106-а, тел. 939-39-34*
- **Предметные олимпиады и Школы юных при факультетах университета**  
*Москва, 119899, Ленинские горы, МГУ, Главное здание, сектор "В", комн.107, тел. 939-17-00*
- **Научно-исследовательская часть (НИЧ) — разработка и внедрение новых методов обучения с использованием компьютерной техники**  
*Москва, 119899, Ленинские горы, МГУ, Главное здание, сектор "Ж", комн.33а, (цоколь) тел. 939-10-93*
- **Издательский отдел — издание и реализация учебной и учебно-методической литературы для абитуриентов и старших школьников**  
*Москва, 119899, Ленинские горы, МГУ, Главное здание, сектор "Ж", комн.105а, тел./факс 939-39-34, 939-10-93*

