

А. М. ТЕР-КРИКОРОВ

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

---

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1977

**Оптимальное управление и математическая экономика.** Тер-Крикоров А. М. Серия «Оптимизация и исследование операций», Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1977, 216 стр.

Многие задачи техники и математической экономики приводятся к решению оптимальных задач теории управления со смешанными ограничениями. В общем случае в формулировке принципа максимума участвуют меры, имеющие сложную связь с оптимальной траекторией.

В настоящей книге много внимания уделяется изучению тех случаев, когда меры отсутствуют. Метод исследования основан на теории линейного программирования в пространстве, сопряженном пространству Банаха. Исследуются как задачи с непрерывным временем, так и задачи с дискретным временем, но на бесконечном интервале. Полученные результаты применяются для исследования динамических моделей экономического роста леонтьевского типа. Библ. 23.

*Александр Мартынович Тер-Крикоров*

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА**

(Серия: «Оптимизация и исследование операций»)

М., 1977 г., 216 стр.

Редактор *В. В. Абгарян*

Техн. редактор *Е. В. Морозова*

Корректор *Н. Д. Дорохова*

Сдано в набор 19.11.1976 г. Подписано к печати 25.03.1977 г. Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Физ. печ. л. 6,75. Условн. печ. л. 11,34. Уч.-изд. л. 9,59. Тираж 8000 экз. Т-03488. Цена книги 63 коп. Заказ № 942.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.

Отпечатано во 2-й тип. изд-ва «Наука», Москва, Шубинский пер., 10. Заказ 2124.

Т  $\frac{20204-059}{053(02)-77}$  67-76

© Главная редакция  
физико-математической литературы  
издательства «Наука», 1977

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                         |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Предисловие . . . . .                                                                                   | 8         |
| <b>Глава I. Некоторые основные сведения из теории линейных нормированных пространств . . . . .</b>      | <b>11</b> |
| § 1. Основные примеры линейных нормированных пространств . . . . .                                      | 11        |
| § 2. Линейные операторы и функционалы . . . . .                                                         | 16        |
| § 3. Теорема Банаха—Хана о продолжении линейного функционала . . . . .                                  | 20        |
| § 4. Слабая и слабая * сходимости . . . . .                                                             | 20        |
| § 5. Компактные множества. Вполне непрерывные операторы . . . . .                                       | 23        |
| § 6. Производная оператора . . . . .                                                                    | 25        |
| § 7. Замыкания по мере . . . . .                                                                        | 31        |
| <b>Глава II. Выпуклые конусы и выпуклые множества в линейных нормированных пространствах . . . . .</b>  | <b>36</b> |
| § 1. Основные определения . . . . .                                                                     | 36        |
| § 2. Теорема М. Г. Крейна о продолжении неотрицательного линейного функционала и ее следствия . . . . . | 37        |
| § 3. Теоремы отделимости для выпуклых множеств . . . . .                                                | 40        |
| § 4. Регулярно-выпуклые множества в сопряженном пространстве . . . . .                                  | 45        |
| § 5. Теория сопряженных конусов в л. н. п . . . . .                                                     | 52        |
| <b>Глава III. Линейное программирование . . . . .</b>                                                   | <b>56</b> |
| § 1. Конусы, связанные с линейными операторами . . . . .                                                | 56        |
| § 2. Линейные неравенства . . . . .                                                                     | 64        |
| § 3. Элементы теории линейного программирования в л. н. п. . . . .                                      | 68        |
| § 4. Исследование замкнутости конусов, связанных с задачами линейного программирования . . . . .        | 76        |
| § 5. Учет ограничений типа равенств . . . . .                                                           | 79        |

|                                                                                                                |                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| <b>Глава IV. Вогнутое программирование . . . . .</b>                                                           | <b>87</b>      |
| § 1. Выпуклые функции и операторы . . . . .                                                                    | 87             |
| § 2. Элементы выпуклого программирования в сопряженном пространстве . . . . .                                  | 92             |
| § 3. Двойственные задачи выпуклого программирования . . . . .                                                  | 94             |
| § 4. О седловых точках функции Лагранжа . . . . .                                                              | 99             |
| § 5. Локальный экстремум в задачах более общего вида (невыпуклый случай) . . . . .                             | 100            |
| <br><b>Глава V. Сопряженные линейные задачи оптимального управления со смешанными ограничениями . .</b>        | <br><b>105</b> |
| § 1. Постановка задачи . . . . .                                                                               | 105            |
| § 2. Линейные дифференциальные операторы . . . . .                                                             | 107            |
| § 3. Сведение задач А и Б к двойственным задачам линейного программирования в банаховом пространстве . . . . . | 110            |
| § 4. Исследование замкнутости конуса, связанного с задачей А . . . . .                                         | 115            |
| § 5. Необходимые условия оптимальности Принцип максимума Понтрягина . . . . .                                  | 124            |
| § 6. Пример на построение оптимальных управлений . . . . .                                                     | 127            |
| § 7. Достаточные условия оптимальности . . . . .                                                               | 130            |
| § 8. Общий случай . . . . .                                                                                    | 131            |
| § 9. Учет ограничений типа равенств . . . . .                                                                  | 140            |
| <br><b>Глава VI. Выпуклые задачи оптимального управления со смешанными ограничениями . . . . .</b>             | <br><b>148</b> |
| § 1. Постановка задачи . . . . .                                                                               | 148            |
| § 2. Необходимые условия оптимальности . . . . .                                                               | 152            |
| § 3. Принцип максимума Понтрягина . . . . .                                                                    | 156            |
| <br><b>Глава VII. Задачи оптимального управления с дискретным временем на бесконечном интервале . . . . .</b>  | <br><b>159</b> |
| § 1. Постановка задачи (линейный случай) . . . . .                                                             | 159            |
| § 2. Формулировка двойственной задачи . . . . .                                                                | 161            |
| § 3. Необходимые условия оптимальности в линейном случае . . . . .                                             | 165            |
| § 4. Общий случай линейной задачи . . . . .                                                                    | 167            |
| § 5. Выпуклые задачи . . . . .                                                                                 | 176            |

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Глава VIII Динамические модели производства леонтьевского типа . . . . .          | 183 |
| § 1. Модель Леонтьева «затраты—выпуск» . . . . .                                  | 183 |
| § 2. Динамическая модель производства Леонтьева . .                               | 184 |
| § 3. Сведение задачи Л к стандартной задаче оптимального управления . . . . .     | 187 |
| § 4. Двойственная задача Л . . . . .                                              | 188 |
| § 5. Экономическая интерпретация двойственной задачи                              | 190 |
| § 6. Необходимые условия оптимальности и их экономическая интерпретация . . . . . | 192 |
| § 7. Модель леонтьевского типа с запасами ( $\pi$ -модель)                        | 197 |
| § 8. Дискретные задачи планирования на бесконечном интервале времени . . . . .    | 203 |
| § 9. Сбалансированный рост . . . . .                                              | 208 |
| Комментарии . . . . .                                                             | 211 |
| Литература . . . . .                                                              | 215 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Многие задачи техники и математической экономики приводятся к задачам оптимального управления со смешанными ограничениями на управления и фазовые переменные. В классическом случае, когда есть только ограничения на область управления и нет смешанных ограничений, необходимые (а в линейном случае и достаточные) условия оптимальности дает принцип максимума Понтрягина. Он же является основой для построения многих вычислительных методов теории оптимального управления. Простота формулировки делает принцип максимума Понтрягина весьма привлекательным, во многих работах прикладного характера принцип максимума Понтрягина механически записывался и для задачи со смешанными ограничениями, что позволяло делать содержательные выводы о свойствах оптимальных траекторий. К сожалению, вообще говоря, писать принцип максимума для задач со смешанными ограничениями в форме Понтрягина нельзя. В работах А. Я. Дубовицкого и А. А. Милютина для чрезвычайно общего класса задач со смешанными ограничениями был правильно сформулирован и доказан принцип максимума. В его формулировку входят меры, имеющие сложную связь с оптимальной траекторией. Эти же авторы выделили класс регулярных задач, для которых меры не возникают. Многие важные задачи математической экономики не являются регулярными. Это побудило автора исследовать довольно узкий в рамках общей задачи класс задач, не являющихся

регулярными, но обладающих тем свойством, что в формулировку принципа максимума для них не входят меры. Многие задачи математической экономики попадают в рассмотренный автором класс. Метод исследования основан на теории линейного и выпуклого программирования в линейных нормированных пространствах. В первых главах излагается соответствующая теория.

Линейная задача оптимального управления со смешанными ограничениями приводится к задаче линейного программирования в пространстве, сопряженном пространству Банаха. Это естественным образом приводит к рассмотрению некоторой двойственной задачи оптимального управления. Необходимые условия можно записать в форме Понтрягина, если некоторый конус, связанный с оптимальной траекторией, замкнут. Находятся легко проверяемые условия замкнутости этого конуса. В тех случаях, когда не удастся доказать замкнутость конуса, принцип максимума записывается в форме Дубовицкого и Милютина. При этом используются некоторые элементы мощного аналитического аппарата, разработанного в работах Дубовицкого и Милютина. Автор имел возможность слушать лекции А. Я. Дубовицкого и вести с ним беседы в течение довольно длительного времени в ВЦ АН СССР и выражает ему свою самую искреннюю благодарность.

Рассматриваются гладкие выпуклые задачи. Исследование необходимых условий оптимальности в этом случае приводится к написанию условий оптимальности для некоторой линейной задачи, связанной с исходной.

Исследуются также дискретные экстремальные задачи со смешанными ограничениями на бесконечном интервале времени. Они также естественно приводятся к задачам линейного и выпуклого программирования

в банаховом пространстве. Необходимые условия оптимальности имеют форму принципа максимума Понтрягина. Дискретные задачи оказываются существенно более простыми, чем задачи с непрерывным временем.

Полученные результаты применяются для исследования динамических моделей производства леонтьевского типа. Показывается, что при достаточно простых и естественных условиях принцип максимума для таких задач может быть записан в форме Понтрягина. Дается возможная экономическая интерпретация двойственной задачи как задачи об оптимальных ценах.

Основой книги послужили лекции, прочитанные автором по инициативе Н. Н. Моисеева в Четвертой Всесоюзной школе по методам оптимизации в г. Тольятти в 1971 г. Мне чрезвычайно приятно выразить тут свою признательность Н. Н. Моисееву за постоянное внимание и благожелательное отношение к настоящей работе.

При написании книги автору была полезна возможность дискуссий и научного общения с А. А. Петровым, А. Н. Дюкаловым, А. А. Левиковым, А. В. Лотовым, В. Ю. Лебедевым, А. А. Белолипецким, Ю. Бродским. Выражаю им искреннюю благодарность.

*А. Тер-Крикоров*



## ГЛАВА I

# НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

### § 1. Основные примеры линейных нормированных пространств

*Линейным пространством* называется множество  $E$ , для элементов которого определены операции сложения и умножения на вещественные числа, причем эти операции удовлетворяют известным аксиомам линейного пространства.

Линейное пространство  $E$  называется *линейным нормированным пространством*, сокращенно л. н. п., если каждому элементу  $x \in E$  поставлено в соответствие неотрицательное число  $\|x\|$ , причем выполнены следующие аксиомы нормы:

I.  $\|x\| = 0$  эквивалентно  $x = 0$ .

II.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  для любого вещественного  $\lambda$ .

III.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника).

Последовательность  $x_n$  называется *сходящейся* к элементу  $x$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ . Последовательность  $x_n$

называется *фундаментальной*, если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N(\varepsilon)$  такой, что для всех номеров  $m, n > N(\varepsilon)$  выполнено неравенство  $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ . Если каждая фундаментальная последовательность элементов пространства  $E$  сходится, то пространство  $E$  называется *полным л. н. п.* или *банаховым пространством*.

Приведем примеры банаховых пространств, которые будут использоваться в этой книге.

**Пример 1.** Линейное пространство  $L^p[0, T]$  функций, суммируемых на отрезке  $[0, T]$  со степенью  $p \geq 1$ , будет банаховым, если определить норму следующим образом:

$$\|f\| = \left\{ \int_0^T |f(t)|^p dt \right\}^{1/p}.$$

Линейное пространство функций, суммируемых на отрезке  $[0, T]$  с любой степенью  $p \geq 1$ , будем обозначать  $L^\infty[0, T]$ . Оно совпадает с линейным пространством функций, измеримых и почти всюду ограниченных на отрезке  $[0, T]$ . Норму можно определить следующим образом:

$$\|f\| = \operatorname{vrai\,max}_{0 \leq t \leq T} |f(t)|,$$

где  $\operatorname{vrai\,max}$  — это истинный максимум функции.

Пример 2. Пусть  $L_n^p[0, T]$  есть линейное пространство вектор-функций столбцов

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)),$$

все компоненты которых суммируемы со степенью  $p \geq 1$  на отрезке  $[0, T]$ . Если положить

$$\|f\|_{L_n^p[0, T]} = \sum_{i=1}^n \|f_i(t)\|_{L^p[0, T]},$$

то  $L_n^p[0, T]$  будет банаховым пространством.

Пример 3.  $\tilde{L}_m^q[0, T]$  есть линейное пространство вектор-функций строк, компоненты которых суммируемы со степенью  $q \geq 1$ . Если положить

$$\|f\|_{\tilde{L}_m^q[0, T]} = \max_{i=1, \dots, m} \|f_i\|_{L^q[0, T]},$$

то  $\tilde{L}_m^q[0, T]$  будет банаховым пространством.

Пример 4. Рассмотрим линейное пространство  $m$  ограниченных последовательностей вещественных чисел. Если положить

$$\|x\| = \sup |x_i|,$$

то  $m$  будет банаховым пространством. Через  $c_0$  будем обозначать подпространство последовательностей, стремящихся к нулю, а через  $m^n$  и  $c_0^n$  — соответствующие пространства последовательностей  $n$ -мерных векторов.

Пример 5.  $l^p$  есть банахово пространство вещественных последовательностей таких, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < +\infty, \quad p \geq 1, \quad \|x\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right\}^{1/p}.$$

Пример 6.  $l_n^p$  есть банахово пространство последовательностей  $n$ -мерных векторов столбцов таких, что все последовательности  $i$ -х координат принадлежат пространству  $l^p$ . Норма определяется следующим образом:

$$\|x\|_{l_n^p} = \sum_{i=1}^n \|x^i\|_{l^p} = \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} |x_m^i|^p \right\}^{1/p}.$$

Пример 7.  $\tilde{l}_m^p$  есть банахово пространство последовательностей векторов строк, таких, что последовательности  $i$ -х координат принадлежат пространству  $l^p$ . Норма определяется следующим образом:

$$\|x\|_{\tilde{l}_m^p} = \max_{i=1, \dots, m} \|x^i\|_{l^p}.$$

Пример 8.  $C[0, T]$  — пространство функций, непрерывных на отрезке  $[0, T]$ . Норма определяется следующим образом:

$$\|f\| = \max_{t \in [0, T]} |f(t)|.$$

Пример 9. Обозначим через  $\mathcal{L}^p[0, T]$ ,  $p \geq 1$ , линейное пространство функций ограниченной вариации, первые производные которых принадлежат пространству  $L^p[0, T]$ . Пространство  $\mathcal{L}^p[0, T]$  будет банаховым, если положить

$$\|f(t)\|_{\mathcal{L}^p[0, T]} = |f(0)| + \|f'(t)\|_{L^p[0, T]}.$$

Через  $\mathcal{L}_n^p[0, T]$  будем обозначать соответствующее пространство вектор-функций.

Пример 10. Через  $\mathcal{L}^\infty[0, T]$  будем обозначать банахово пространство функций ограниченной вариации, первые производные которых принадлежат пространству  $L^\infty[0, T]$ . Норма определяется следующим образом:

$$\|f(t)\|_{\mathcal{L}^\infty[0, T]} = |f(0)| + \|f'(t)\|_{L^\infty[0, T]}.$$

Через  $\mathcal{L}_n^\infty[0, T]$  обозначается соответствующее пространство вектор-функций.

Пример 11. Через  $B[0, T]$  будем обозначать банахово пространство функций ограниченной вариации

на отрезке  $[0, T]$ . Норма определяется следующим образом:

$$\|f(t)\|_{B[0, T]} = \bigvee_0^T [f].$$

Здесь  $\bigvee_0^T [f]$  — полное изменение функции  $f(t)$  на отрезке  $[0, T]$ . Очевидно, что  $\mathcal{L}^p[0, T]$  есть при любом  $p$  подпространство пространства  $B[0, T]$ .

Напомним еще определение (топологического) *произведения* линейных нормированных пространств  $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ , элементами которого являются упорядоченные наборы

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in E_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Если положить

$$\|x\|_E = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{E_i},$$

то  $E$  будет линейным нормированным пространством. Если все пространства  $E_i$  — банаховы, то и пространство  $E$  — банахово.

*Шаром*  $S_\rho(x_0)$  с центром в точке  $x_0$  и радиусом  $\rho$  называется множество

$$S_\rho(x_0) = \{x: x \in E, \|x - x_0\| < \rho\}.$$

Пусть множество  $G \subset E$ . Точка  $x_0 \in G$  называется *внутренней точкой* множества  $G$ , если существует шар  $S_\rho(x_0) \subset G$ . Множество, все точки которого внутренние, называется *открытым*. Пустое множество открыто по определению. Справедливы следующие утверждения:

а) Пустое множество и все пространство  $E$  — открытые множества.

б) Объединение любого множества открытых множеств есть открытое множество.

в) Пересечение конечного множества открытых множеств есть открытое множество

Если в произвольном множестве  $E$  выделена система подмножеств, называемых открытыми, так, что выполняются условия а), б), в), то говорят, что в множестве  $E$  задана *топология*. Множество  $E$  с заданной

в нем топологией называется *топологическим пространством*. Любое множество, содержащее открытое множество, которое, в свою очередь, содержит точку  $x$ , называется *окрестностью* точки  $x$ . Система окрестностей  $\{V_x\}$  точки  $x$  называется *фундаментальной*, если для любой окрестности  $U_x$  точки  $x$  найдется окрестность  $V_x \subset U_x$ . В метрическом пространстве шары с центрами в точке  $x$  образуют фундаментальную систему окрестностей точки  $x$ . Топология полностью определена, если в каждой точке задана фундаментальная система окрестностей. Говорят, что точка  $x$  есть *предел* последовательности точек  $x_n$  топологического пространства, если в любой окрестности точки  $x$  лежат все точки  $x_n$ , за исключением, быть может, конечного числа точек.

Множество в топологическом пространстве  $E$  называется *замкнутым*, если его дополнение есть открытое множество. Для того чтобы множество в линейном нормированном пространстве (или даже в метрическом пространстве) было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало пределы всех сходящихся последовательностей своих точек. Для общего топологического пространства это утверждение уже не является верным. Для того чтобы множество в топологическом пространстве было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало пределы всех обобщенных последовательностей своих точек. Напомним определение обобщенной последовательности. Пусть  $\Lambda$  — частично упорядоченное множество. Оно называется *направлением*, если для любых элементов  $\alpha, \alpha' \in \Lambda$  найдется элемент  $\alpha'' \in \Lambda$  такой, что  $\alpha'' \geq \alpha$  и  $\alpha'' \geq \alpha'$ . *Обобщенная последовательность* ставит в соответствие каждому элементу  $\alpha \in \Lambda$  элемент  $x_\alpha \in E$ . Говорят, что обобщенная последовательность  $x_\alpha$  стремится к пределу  $x$ , если для любой окрестности  $U_x$  точки  $x$  найдется такой элемент  $\alpha_0 \in \Lambda$ , что  $x_\alpha \in U_x$  для всех  $\alpha \geq \alpha_0$ .

Функция  $f(x)$ , ставящая в соответствие точкам топологического пространства  $E_1$  точки топологического пространства  $E_2$ , называется непрерывной, если прообраз любого открытого множества есть открытое

множество. Линейное пространство  $E$  с заданной в нем топологией называется линейным топологическим пространством, если операции сложения и умножения на вещественные числа, рассматриваемые как отображения из  $E \times E$  и  $E \times R$  в  $E$ , непрерывны. Линейное нормированное пространство будет и линейным топологическим пространством. Топология в линейном топологическом пространстве полностью определяется заданием фундаментальной системы окрестностей нуля пространства  $E$ . Ограничимся этими краткими сведениями о линейных топологических пространствах, так как в дальнейшем мы будем иметь дело в основном с линейными нормированными пространствами.

## § 2. Линейные операторы и функционалы

Пусть оператор  $T$  действует из л. н. п.  $E_1$  в л. н. п.  $E_2$ . Оператор  $T$  называется *ограниченным*, если существует такая постоянная  $C$ , что для всех  $x \in E_1$  выполняется неравенство

$$\|Tx\|_{E_2} \leq C \|x\|_{E_1}.$$

Оператор  $T$  называется *непрерывным в точке  $x$* , если из  $x_n \rightarrow x$  следует  $Tx_n \rightarrow Tx$ . Оператор  $T$  называется *однородным*, если для всех элементов  $x \in E$  и для всех вещественных чисел  $\alpha$  выполняется равенство  $T(\alpha x) = \alpha Tx$ . Оператор  $T$  называется *аддитивным*, если для любых  $x, y \in E$  выполняется равенство  $T(x+y) = Tx + Ty$ . Для того чтобы аддитивный и однородный оператор  $T$  был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным. Аддитивный однородный и ограниченный оператор называется *линейным*.

Множество всех линейных операторов, действующих из л. н. п.  $E_1$  в л. н. п.  $E_2$ , будет л. н. п., если ввести норму следующим образом:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

Это пространство обозначается символом  $[E_1 \rightarrow E_2]$ . Пространство  $[E_1 \rightarrow E_2]$  полное, если пространство образов  $E_2$  — полное.

Линейный оператор, действующий из л. н. п.  $E$  в пространство вещественных чисел  $R$ , называется *линейным функционалом*. Пространство  $[E \rightarrow R]$  всех линейных функционалов, определенных на пространстве  $E$ , будет полным, так как пространство  $R$  — полное. Оно называется *сопряженным пространством* и обозначается  $E^*$ . Элементы сопряженного пространства будем обозначать  $x^*$ , а значение линейного функционала  $x^*$  на элементе  $x$  — через  $(x^*, x)$ .

Два л. н. п.  $E_1$  и  $E_2$  называются *линейно изометричными*, если между ними можно установить такое взаимно однозначное соответствие  $x \leftrightarrow x'$ , при котором из  $x \leftrightarrow x'$  следует  $\|x\| = \|x'\|$ ,  $\alpha x \leftrightarrow \alpha x'$ , и из  $x \leftrightarrow x'$ ,  $y \leftrightarrow y'$  следует  $x + y \leftrightarrow x' + y'$ . Мы не будем различать линейно изометричные пространства.

Для некоторых банаховых пространств известен общий вид линейного функционала, что позволяет просто описать сопряженное пространство.

**Пример 1.** Любой линейный функционал в  $L^p[0, T]$  при  $1 \leq p < +\infty$  имеет следующий вид:

$$(f^*, f) = \int_0^T \varphi(t) f(t) dt, \quad \varphi(t) \in L^q[0, T],$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \|f^*\| = \|\varphi\|_{L^q[0, T]}.$$
(1)

Из формулы (1) вытекает, что пространство, сопряженное  $L^p[0, T]$ , линейно изометрично  $L^q[0, T]$ . Поэтому эти пространства можно отождествить. В частности, пространство, сопряженное  $L^1[0, T]$ , есть пространство  $L^\infty[0, T]$ .

**Пример 2.** Любой линейный функционал в пространстве  $L_m^p[0, T]$  при  $1 \leq p < \infty$  имеет следующий вид:

$$(f^*, f) = \int_0^T \varphi(t) f(t) dt, \quad \varphi(t) \in \tilde{L}_m^q[0, T],$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \|f^*\| = \|\varphi\|_{\tilde{L}_m^q[0, T]}.$$
(2)

Докажем формулу (2). Доказательство проведем для случая  $m=2$ , в общем случае доказательство

аналогично. Пусть  $f = (f_1, f_2)$ , тогда  $f = (f_1, 0) + (0, f_2)$ . Линейный функционал  $f^*$ , действующий на элементы вида  $(f_1, 0)$ , можно отождествить с некоторым линейным функционалом  $f_1^*$ , действующим на элементы пространства  $L^p[0, T]$ . Аналогично, когда  $f^*$  действует на элементы вида  $(0, f_2)$ , он может быть отождествлен с линейным функционалом  $f_2^*$ , действующим в  $L^p[0, T]$ . Тогда

$$(f^*, f) = (f_1^*, f_1) + (f_2^*, f_2).$$

В силу формулы (1) имеем

$$\begin{aligned} (f^*, f) &= (f_1^*, f_1) + (f_2^*, f_2) = \\ &= \int_0^T \varphi_1(t) f_1(t) dt + \int_0^T \varphi_2(t) f_2(t) dt, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\varphi_i(t) \in L^q[0, T], \quad \|\varphi_i\| = \|f_i^*\|,$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad i = 1, 2.$$

Из формулы (3) получаем

$$\begin{aligned} |(f^*, f)| &\leq \|\varphi_1\| \cdot \|f_1\| + \|\varphi_2\| \cdot \|f_2\| \leq \\ &\leq \max_{i=1, 2} \|\varphi_i\| \cdot (\|f_1\| + \|f_2\|) = \|\varphi\|_{L_2^q[0, T]} \cdot \|f\|_{L_2^p[0, T]}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|f^*\| \leq \|\varphi\|_{L_2^q}. \quad (4)$$

С другой стороны, из формулы (3) получаем

$$\begin{aligned} \|f^*\| &= \sup_{\|f\| \leq 1} |(f^*, f)| \geq \sup_{\|f_1\| \leq 1} |(f^*, (f_1, 0))| = \\ &= \sup_{\|f_1\| \leq 1} |(f_1^*, f_1)| = \|f_1^*\| = \|\varphi_1\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f^*\| &= \sup_{\|f\| \leq 1} |(f^*, f)| \geq \sup_{\|f_2\| \leq 1} |(f^*, (0, f_2))| = \\ &= \sup_{\|f_2\| \leq 1} |(f_2^*, f_2)| = \|f_2^*\| = \|\varphi_2\|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|f^*\| \geq \max \{\|\varphi_1\|, \|\varphi_2\|\} = \|\varphi\|. \quad (5)$$

Из (3)—(5) следует (2). Формула (2) показывает, что при  $1 \leq p < +\infty$  пространство, сопряженное  $L_n^p[0, T]$ ,



есть  $\tilde{L}_n^q[0, T]$ . В частности, пространство, сопряженное  $L_n^1[0, T]$ , есть  $\tilde{L}_n^\infty[0, T]$ .

Пространство, сопряженное произведению л. н. п., есть произведение сопряженных пространств с нормой

$$\|x^*\| = \max_{i=1, \dots, n} \|x_i^*\|. \quad (6)$$

Формула (6) доказывается, в сущности, так же, как и формула (2).

Пример 3. Любой линейный функционал в пространстве  $c_0$  последовательностей, стремящихся к нулю, имеет следующий вид:

$$(x^*, x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i, \quad \|x^*\| = \sum_{i=1}^{\infty} |p_i| < +\infty,$$

так что  $c_0^* = l^1$ .

Пример 4. Любой линейный функционал в пространстве  $l^p$  при  $1 \leq p < +\infty$  имеет следующий вид:

$$(x^*, x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i, \quad y = (y_1, y_2, \dots) \in l^q, \\ \|x^*\| = \|y\|_{l^q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Пример 5. При  $1 \leq p < \infty$  пространство, сопряженное  $l_n^p$ , есть  $l_n^q$ . Доказательство аналогично доказательству примера 2.

Пример 6. Любой линейный функционал в пространстве  $C[0, T]$  имеет следующий вид:

$$(f^*, f) = \int_0^T f(t) d\Phi,$$

где функция  $\Phi(t)$  есть функция ограниченной вариации и интеграл понимается в смысле Стильтьеса. При этом норма функционала равна полной вариации функции  $\Phi(t)$  на отрезке  $[0, T]$ .

Напомним еще определение сопряженного оператора. Пусть  $T \in [E_1 \rightarrow E_2]$ , тогда сопряженный оператор  $T^* \in [E_2^* \rightarrow E_1^*]$  определяется следующим образом:

$$(T^* y^*, x) = (y^*, Tx).$$

Известно, что  $\|T^*\| = \|T\|$ .

### § 3. Теорема Банаха — Хана о продолжении линейного функционала

С. Банах доказал следующую важную теорему, имеющую многочисленные приложения.

**Теорема** (о продолжении линейного функционала). *Линейный функционал  $f(x)$ , определенный на подпространстве  $L$  линейного нормированного пространства  $E$ , может быть продолжен с сохранением нормы на все пространство  $E$ .*

Часто используются следующие следствия из теоремы Банаха — Хана.

**Следствие 1.** *Пусть  $L$  есть замкнутое подпространство линейного нормированного пространства  $E$ , точка  $x_0 \in L$  и лежит на расстоянии  $d$  от  $L$ . Тогда существует элемент  $x_0^* \in E^*$  такой, что*

$$\|x_0^*\| = \frac{1}{d}, \quad (x_0^*, x_0) = 1, \quad (x_0^*, x) = 0 \quad \text{для всех } x \in L.$$

**Следствие 2.** *Пусть  $x_0 \in E$ . Тогда существует элемент  $x_0^* \in E^*$  такой, что*

$$\|x_0^*\| = 1, \quad (x_0^*, x_0) = \|x_0\|.$$

**Следствие 3.** *Справедлива формула*

$$\|x\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |(x^*, x)|.$$

**Доказательство.** Если  $\|x^*\| \leq 1$ , то

$$|(x^*, x)| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \leq \|x\|.$$

Поэтому

$$\sup_{\|x^*\| \leq 1} |(x^*, x)| \leq \|x\|.$$

С другой стороны, в силу следствия 2 найдется такой линейный функционал  $x_x^*$ , что

$$\|x_x^*\| = 1, \quad (x_x^*, x) = \|x\|.$$

### § 4. Слабая и слабая\* сходимость

Говорят, что последовательность элементов  $x_n \in E$  слабо сходится к элементу  $x$ , если для любого  $x^* \in E^*$  выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^*, x_n) = (x^*, x).$$

Если последовательность  $x_n$  сходится сильно (по норме пространства  $E$ ), то она сходится и слабо. Слабо сходящаяся последовательность может не сходиться сильно, но она всегда ограничена. Множество в л. н. п.  $E$  будем называть *секвенциально слабо замкнутым*, если оно содержит пределы всех слабо сходящихся последовательностей своих элементов.

В пространстве  $E$  можно ввести *слабую топологию*, которая определяется заданием следующей фундаментальной системы окрестностей нуля:

$$\Omega_{x_1^*, \dots, x_n^*}^\varepsilon = \{x: x \in E, |(x_i^*, x)| \leq \varepsilon, i = 1, \dots, n\},$$

где  $\varepsilon$  — произвольное число, а  $x_1^*, \dots, x_n^*$  — произвольное конечное множество элементов  $E^*$ . Секвенциально слабо замкнутое множество может быть незамкнутым в слабой топологии.

Говорят, что последовательность  $x_n^*$  *слабо\* сходится* к  $x^* \in E^*$ , если для любого элемента  $x \in E$  выполнено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^*, x) = (x^*, x).$$

Слабо\* сходящаяся последовательность может не сходиться по норме  $E^*$ , но она всегда ограничена. Множество в сопряженном пространстве, содержащее пределы всех слабо\* сходящихся последовательностей своих точек, называется *секвенциально слабо\* замкнутым*. В пространстве  $E^*$  можно ввести *слабую\* топологию*, которая определяется заданием следующей фундаментальной системы окрестностей нуля пространства  $E^*$ :

$$\Omega_{x_1, \dots, x_n}^\varepsilon = \{x^*: x^* \in E^*, |(x^*, x_i)| \leq \varepsilon, i = 1, \dots, n\}.$$

Секвенциально слабо\* замкнутое множество может быть незамкнутым в слабой\* топологии пространства  $E^*$ .

Приведем также сводку основных результатов для линейных операторов с замкнутой областью значений. Пусть  $B_1$  и  $B_2$  — банаховы пространства и  $T \in [B_1 \rightarrow B_2]$ .

Обозначим через  $N(T)$  и  $R(T)$  множество нулей и множество значений оператора  $T$ :

$$N(T) = \{x: x \in B_1, Tx = 0\},$$

$$R(T) = \{y: y = Tx, x \in B_1\}.$$

Нетрудно видеть, что  $N(T)$  — слабо замкнутое подпространство. Множество  $R(T)$  есть (не обязательно замкнутое) подпространство пространства  $B_2$ .

Если  $T^*$  — сопряженный оператор, то можно ввести в рассмотрение множества  $N(T^*)$  и  $R(T^*)$ . Очевидно, что  $N(T^*)$  — слабо\* замкнутое множество.

Пусть  $\Omega$  — некоторое множество в л. н. п.  $E$ . Его ортогональным дополнением  $\Omega^\perp$  называется следующее множество в сопряженном пространстве:

$$\Omega^\perp = \{x^*: x^* \in E^*, (x^*, x) = 0 \text{ для всех } x \in \Omega\}.$$

Аналогично, если  $\Omega^*$  — некоторое множество в сопряженном пространстве  $E^*$ , то его ортогональным дополнением  ${}^\perp\Omega^*$  называется следующее множество элементов пространства  $E$ :

$${}^\perp\Omega^* = \{x: x \in E, (x^*, x) = 0 \text{ для всех } x^* \in \Omega^*\}.$$

**Теорема 1.** *Множество  $R(T)$  замкнуто в том и только в том случае, когда замкнуто множество  $R(T^*)$ . При этом*

$$R(T) = {}^\perp N(T^*), \quad R(T^*) = N(T)^\perp.$$

**Следствие.** *Если множество  $R(T)$  замкнуто, то оно и слабо замкнуто. Если множество  $R(T^*)$  замкнуто, то оно и слабо\* замкнуто.*

**Теорема 2.** *Если оператор  $T \in [B_1 \rightarrow B_2]$  имеет замкнутую область значений и  $Tx_n \rightarrow y_0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то найдется последовательность  $z_n \in N(T)$  такая, что  $x_n + z_n \rightarrow x_0$  и  $Tx_0 = y_0$ .*

**Теорема 3.** *Если оператор  $T \in [B_1 \rightarrow B_2]$  отображает ограниченные замкнутые множества на замкнутые, то область его значений замкнута.*

## § 5. Компактные множества. Вполне непрерывные операторы

Множество  $\Omega \subset E$  называется компактным, если из любой последовательности элементов  $x_n \in \Omega$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

**Теорема 4** (критерий М. Рисса компактности в  $L^p[0, T]$ ). Для того чтобы множество  $G \subset L^p[0, T]$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и равномерно непрерывно в среднем, т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  должно существовать  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x(t) \in G$  выполняется неравенство

$$\int_0^T |x(t+\delta) - x(t)|^p dt < \varepsilon.$$

Множество  $\Omega \subset E$  называется локально компактным, если любое его ограниченное подмножество компактно.

Множество  $\Omega \subset E$  называется слабо компактным, если из любой последовательности  $x_n \in \Omega$  можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.

**Теорема 5** (критерий слабой компактности в  $L^1[0, T]$ ). Для того чтобы множество  $G \subset L^1[0, T]$  было слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и чтобы интегралы от функций  $x(t) \in G$  были равномерно абсолютно непрерывны, т. е. чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  существовало такое  $\delta > 0$ , что для любого измеримого множества  $e \subset [0, T]$  с  $\mu(e) < \delta$  и для всех  $x(t) \in G$  выполнялось неравенство

$$\int_e |x(t)| dt < \varepsilon.$$

**Следствие.** Если для всех функций  $x(t) \in G \subset L^1[0, T]$  выполнено неравенство

$$|x(t)| < \varphi(t),$$

где  $\varphi(t) \in L^1[0, T]$ , то множество  $G$  слабо компактно.

Множество  $\Omega \subset E$  будем называть локально слабо компактным, если любое его ограниченное подмножество слабо компактно.

Множество  $\Omega^* \subset E^*$  называется *слабо\* компактным*, если из любой последовательности  $x_n^* \in \Omega^*$  можно выделить слабо\* сходящуюся подпоследовательность.

**Теорема 6.** Пусть линейное нормированное пространство  $E$  сепарабельно. Для того чтобы множество в сопряженном пространстве  $E^*$  было слабо\* компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным.

Сформулируем две теоремы Хелли.

**Теорема 7** (первая теорема Хелли). Пусть функции  $\Phi_n(x)$  с ограниченным изменением на отрезке  $[a, b]$  сходятся в каждой точке этого отрезка к некоторой функции  $\Phi(x)$ , причем полные изменения функций  $\Phi_n(x)$  ограничены:

$$\bigvee_a^b [\Phi_n(x)] \leq C.$$

Тогда предельная функция  $\Phi(x)$  тоже имеет ограниченное изменение и для любой непрерывной функции  $f(x)$  справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) d\Phi_n(x) = \int_a^b f(x) d\Phi(x).$$

**Теорема 8** (вторая теорема Хелли). Из всякого бесконечного множества функций  $\Phi(x)$ , заданных на некотором отрезке  $[a, b]$  и удовлетворяющих условиям

$$\max |\Phi(x)| \leq C, \quad \bigvee_a^b [\Phi(x)] \leq K,$$

можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке отрезка  $[a, b]$ .

Линейный оператор  $T \in [E_1 \rightarrow E_2]$  называется *вполне непрерывным*, если он отображает ограниченные множества в компактные.

**Теорема 9.** Пусть  $B_1$  и  $B_2$  — банаховы пространства и  $T \in [B_1 \rightarrow B_2]$ . Оператор  $T$  вполне непрерывен в том и только в том случае, когда вполне непрерывен оператор  $T^*$ .

## § 6. Производная оператора

Пусть нелинейный оператор  $\Phi(x)$  действует из л. н. п.  $E_1$  в л. н. п.  $E_2$ . Если в точке  $x_0$  существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\Phi(x_0 + th) - \Phi(x_0)}{t} = d(x_0, h), \quad (7)$$

то предельный оператор  $d$  называется *дифференциалом Гато*. Вообще говоря, дифференциал Гато не будет аддитивным оператором относительно  $h$ . Справедливо следующее утверждение:

**Теорема 10.** Пусть дифференциал Гато существует в некоторой окрестности точки  $x_0$  и как функция  $x$  непрерывен в точке  $x_0$ , а оператор  $d(x_0, h)$  непрерывен при  $h \rightarrow 0$ , тогда дифференциал Гато будет линейным оператором относительно  $h$ .

В том случае, когда дифференциал Гато линеен относительно  $h$ , мы будем записывать его в следующем виде:

$$d(x_0, h) = \Phi'(x_0)h,$$

и линейный оператор  $\Phi'(x_0)$  будем называть *производной Гато* оператора  $\Phi(x)$  в точке  $x_0$ .

Если предел (7) — равномерный по всем  $h$  с  $\|h\| \leq 1$ , то в этом случае дифференциал Гато называется *дифференциалом Фреше* и производная Гато, если она существует, называется *производной Фреше*. Если производная Гато существует в окрестности точки  $x_0$  и непрерывна в точке  $x_0$ , то она будет и производной Фреше. Если  $\Phi'(x)$  есть производная Фреше оператора  $\Phi(x)$  в точке  $x$ , то

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \Phi'(x)h + o(h).$$

Часто бывают полезны следующие формулы, являющиеся обобщениями теоремы о среднем в дифференциальном исчислении. Если производная Гато или Фреше определена в некотором шаре с центром в точке  $x$ , то

$$\begin{aligned} \|\Phi(x+h) - \Phi(x)\| &\leq \|\Phi'(x+\theta h)\| \|h\|, & 0 < \theta < 1, \\ \|\Phi(x+h) - \Phi(x) - \Phi'(x)h\| &\leq \\ &\leq \|\Phi'(x+\theta h) - \Phi'(x)\| \|h\|. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть вектор-функция  $f(x)$  задает отображение из  $R_n$  в  $R_m$ . Если функции  $f_i(x)$  непрерывно дифференцируемы, то производная Фреше оператора  $f'(x)$  будет линейным оператором, действующим из  $R_n$  в  $R_m$ , матрица которого есть матрица Якоби

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}.$$

**Теорема 11.** Пусть вектор-функция  $f(x)$  задает непрерывное отображение  $R_n$  в  $R_m$ . Тогда оператор  $\Phi(u) = f[u(t)]$  задает непрерывное отображение  $L_n^\infty[0, T]$  в  $L_m^\infty[0, T]$ .

**Доказательство.** Если  $u(t) \in L_n^\infty$ , то функции  $f_i[u(t)]$ ,  $i = 1, \dots, m$ , будут измеримыми. Покажем, что они почти всюду ограничены. Пусть  $|u_j(t)| \leq c$ ,  $j = 1, \dots, n$ , почти для всех  $t \in [0, T]$ . Функции  $f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , непрерывны на множестве

$$\Omega = \{x: |x_j| \leq c, \quad j = 1, \dots, n\}, \quad (9)$$

а поэтому и ограничены. Пусть

$$|f_i(x)| \leq \mathcal{K}, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{при} \quad |x_j| \leq c, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$|f_i[u(t)]| \leq \mathcal{K}, \quad \text{почти всюду на} \quad [0, T].$$

Ясно, что  $f[u(t)] \in L_m^\infty$ . Покажем, что  $f[u(t)]$  есть непрерывное отображение  $L_n^\infty[0, T]$  в  $L_m^\infty[0, T]$ . Пусть  $|u_j(t)| \leq c$  почти всюду,  $j = 1, \dots, n$ . Функция  $f(x)$  равномерно непрерывна на множестве (9). Поэтому для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что

$$|f_i(x + \Delta x) - f_i(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\Delta x_j| < \delta \quad (10)$$

и при всех  $x \in \Omega$ ;  $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ . Пусть

$$\|\Delta u(t)\|_{L_n^\infty[0, T]} < \delta,$$

тогда  $|\Delta u_j(t)| < \delta$  почти всюду на  $[0, T]$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Из (10) тогда имеем, что

$$|f_i[u(t) + \Delta u(t)] - f_i[u(t)]| < \varepsilon$$

почти всюду на  $[0, T]$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,



и поэтому

$$\|f_i[u(t) + \Delta u(t)] - f_i(t)\|_{L_m^\infty[0, T]} < \varepsilon.$$

**Теорема 12.** Если функция  $f(x)$  задает непрерывно-дифференцируемое отображение  $R_n$  в  $R_m$ , то оператор  $f[u(t)]$  имеет производную Фреше  $f'[u(t)]$ .

**Доказательство.** Воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} \|f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x) \Delta x\|_{R_m} &\leq \\ &\leq \|f'(x + \theta \Delta x) - f'(x)\| \|\Delta x\|_{R_n}. \end{aligned}$$

В силу равномерной непрерывности производных функции  $f(x)$  на ограниченном множестве для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что при  $\|\Delta x\| < \delta$  будет выполнено неравенство

$$\|f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x) \Delta x\|_{R_m} \leq \varepsilon \|\Delta x\|_{R_n}. \quad (11)$$

Пусть  $|u_j(t)| \leq c$  почти всюду на  $[0, T]$  и  $\|\Delta u\|_{L_n^\infty} < \delta$ .

Тогда  $|\Delta u_j| < \delta$  почти всюду на  $[0, T]$ , и из (11) получаем, что почти всюду на  $[0, T]$  выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \|f[u(t) + \Delta u(t)] - f[u(t)] - f'[u(t)] \Delta u(t)\|_{R_m} &\leq \\ &\leq \varepsilon \|\Delta u(t)\|_{R_n} \leq \varepsilon \|\Delta u(t)\|_{L_n^\infty[0, T]}, \end{aligned}$$

откуда

$$\|f[u(t) + \Delta u(t)] - f[u(t)] - f'[u(t)] \Delta u(t)\|_{L_m^\infty} \leq \varepsilon \|\Delta u\|_{L_n^\infty}.$$

В силу произвольности  $\varepsilon$  выражение  $f'[u(t)]$  будет производной Фреше оператора  $f[u(t)]$ .

Рассмотрим еще один пример на вычисление производной Фреше, который будет полезен в дальнейшем. Пусть  $\{f_t(x)\}$ ,  $t=0, 1, \dots$ , есть последовательность вектор-функций строк, задающих отображения пространства  $R_n$  в  $R_m$ . Будем говорить, что последовательность  $\{f_t(x)\}$  равномерно ограничена на множестве  $M \subset R_n$ , если для всех  $x \in M$  выполняется неравенство  $\|f_t(x)\|_{R_m} \leq c$ . Будем говорить, что множество  $\{f_t(x)\}$  *равностепенно непрерывно* на  $M$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для всех  $x, x' \in M$  и

таких, что  $\|x - x'\|_{R_n} < \delta(\varepsilon)$ , и для всех  $t$  выполняется неравенство

$$\|f_t(x) - f_t(x')\|_{R_m} < \varepsilon. \quad (12)$$

**Теорема 13.** Пусть вектор-функции  $f_t(x)$  задают непрерывные отображения  $R_n$  в  $R_m$  и равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на любом шаре в  $R_n$ . Тогда оператор

$$f(u) = \{f_t(u_t), u_t \in R_n\}, \quad u = \{u_t\}, \quad (13)$$

задает непрерывное отображение банахова пространства  $l_n^\infty$  в  $l_m^\infty$ .

**Доказательство.** Пусть  $\{u_t\} \in l_n^\infty$ . Тогда  $\|u_t\|_{R_n} \leq \|u\|$ ,  $t = 0, 1, \dots$  В силу равномерной ограниченности последовательности  $f_t(x)$  на любом шаре в  $R_n$  получим, что существует такая постоянная  $c_0$ , что  $\|f_t(u_t)\|_{R_m} \leq c_0$ . Поэтому оператор (13) задает отображение из  $l_n^\infty$  в  $l_m^\infty$ . Докажем, что это отображение непрерывно. Пусть  $u \in l_n^\infty$ . Рассмотрим в  $R_n$  шар

$$S = \{x: \|x\|_{R_n} \leq 2\|u\|_{l_n^\infty}\}. \quad (14)$$

В этом шаре последовательность  $f_t(x)$  равностепенно непрерывна. Поэтому для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta(\varepsilon)$  такое, что для любых  $x, x' \in S$ ,  $\|x - x'\|_{R_n} < \delta$  и для всех  $t$  выполнено неравенство (12). Без ограничения общности можно считать, что  $\delta(\varepsilon) < \|u\|_{l_n^\infty}$ . Возьмем теперь

$$\|\Delta u\|_{l_n^\infty} < \delta(\varepsilon). \quad (15)$$

Тогда

$$\|u + \Delta u\|_{l_n^\infty} \leq \|u\| + \|\Delta u\| \leq \|u\| + \delta(\varepsilon) < 2\|u\|,$$

и, следовательно,  $\|u_t + \Delta u_t\|_{R_n} < 2\|u\|$ . Но из (15) имеем  $\|\Delta u_t\|_{R_n} < \delta(\varepsilon)$ . Поэтому для всех  $t$

$$\|f_t(u_t + \Delta u_t) - f_t(u_t)\|_{R_m} < \varepsilon, \quad \|\Delta u\|_{l_n^\infty} < \delta(\varepsilon).$$

Беря  $\sup$  по  $t$ , получаем

$$\|f(u + \Delta u) - f(u)\|_{l_m^\infty} \leq \varepsilon, \quad \text{если} \quad \|\Delta u\|_{l_n^\infty} < \delta(\varepsilon),$$

что и доказывает непрерывность оператора  $f(u)$ .

**Теорема 14.** Пусть функции  $\{f_t(x)\}$  задают непрерывно-дифференцируемые отображения  $R_n$  в  $R_m$ , последовательности  $\{f_t(x)\}$  и их частных производных равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на любом шаре пространства  $R_n$ . Тогда оператор  $f(u)$ , определяемый формулой (13), имеет производную Фреше в каждой точке пространства  $l_n^\infty$  и

$$f'(u) \Delta u = \left\{ \Delta u_t \frac{\partial f_t}{\partial x}(u_t) \right\}. \quad (16)$$

**Доказательство.** В силу равностепенной непрерывности для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta(\varepsilon)$ , что для всех  $x, x' \in S$ , где шар  $S$  определен формулой (14), и таких, что  $\|x - x'\|_{R_n} < \delta$ , и для всех  $t$  выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\partial f_t}{\partial x}(x') - \frac{\partial f_t}{\partial x}(x) \right\|_{[R_n \rightarrow R_m]} < \varepsilon.$$

Применяя формулу (8), получаем

$$\begin{aligned} & \left\| f_t(x) - f_t(x') - (x - x') \frac{\partial f_t}{\partial x}(x) \right\|_{R_n} \leq \\ & \leq \left\| \frac{\partial f_t}{\partial x}[x + \theta(x' - x)] - \frac{\partial f_t}{\partial x}(x) \right\|_{[R_n \rightarrow R_m]} \|x - x'\|_{R_n}, \end{aligned}$$

откуда получаем, что для любых  $x, x' \in S$  и таких, что  $\|x - x'\|_{R_n} < \delta$ , и для всех  $t$  должно выполняться неравенство

$$\left\| f_t(x) - f_t(x') - (x - x') \frac{\partial f_t}{\partial x}(x) \right\|_{R_n} \leq \varepsilon \|x - x'\|_{R_n}. \quad (17)$$

Возьмем теперь  $\Delta u$ , удовлетворяющее неравенству (15). Тогда  $u_t + \Delta u_t \in S$  и  $\|\Delta u_t\|_{R_n} < \delta$ . Подставляя в неравенство (17)  $u_t$  и  $u_t + \Delta u_t$ , получаем

$$\left\| f_t(u_t + \Delta u_t) - f_t(u_t) - \Delta u_t \frac{\partial f_t}{\partial x}(u_t) \right\|_{R_m} \leq \varepsilon \|\Delta u_t\|_{R_n}$$

для  $\|\Delta u_t\| < \delta(\varepsilon)$  и для всех  $t = 0, 1, \dots$ . Если взять теперь  $\sup$  по  $t$ , то

$$\|f(u + \Delta u) - f(u) - f'(u)\Delta u\|_{l_m^\infty} \leq \varepsilon \|\Delta u\|_{l_n^\infty}, \quad (18)$$

где под  $f'(u)$  понимается оператор, определенный формулой (16). Из формулы (18) ясно, что это будет оператор производной Фреше оператора  $f(u)$ . Теорема доказана.

Определим в пространстве  $c_n^0$  оператор  $T$ , действующий по закону

$$T\xi = \left\{ \xi_t \frac{\partial f_t}{\partial x}(u_t) \right\}, \quad \xi \in c_n^0. \quad (19)$$

Если выполнены условия теоремы 14, то оператор  $T$  действует из пространства  $c_n^0$  в  $c_m^0$  и линеен. Из (16) и (19) непосредственно следует, что

$$T^{**} = f'(u). \quad (20)$$

Таким образом, производная Фреше оператора  $f(u)$  допускает такое сужение на подпространство  $c_n^0$ , что выполнены условия (20). Нетрудно также построить оператор  $T^*$ :

$$T^*\eta = \left\{ \frac{\partial f_t}{\partial x}(u_t) \eta_t \right\}, \quad \{\eta_t\} \in l_n^1.$$

Пусть  $M$  есть множество в л. н. п.  $E$ . Говорят, что вектор  $x$  *касателен* к множеству  $M$  в точке  $x_0$ , если существует число  $\varepsilon > 0$  и функция  $\varphi(t)$ , определенная на отрезке  $[0, \varepsilon]$ , со значениями в  $E$  такие, что

$$x_0 + tx + \varphi(t) \in M \quad \text{при всех } t \in [0, \varepsilon],$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\|\varphi(t)\|}{t} = 0.$$

Множество всех касательных векторов к множеству  $M$  в точке  $x_0$  образует замкнутый конус, который называется *касательным конусом* к множеству  $M$  в точке  $x_0$ . В том случае, когда конус есть подпространство, он называется *касательным пространством* к множеству  $M$  в точке  $x_0$ .

**Теорема 14'** (теорема Люстерника). Пусть оператор  $F(x)$  действует из банахова пространства  $B_1$

в банахово пространство  $B_2$  и  $F(x)$  имеет производную Фреше в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Предположим, что область значений оператора  $F'(x_0)$  совпадает с пространством  $B_2$  и что оператор  $F'(x)$  непрерывен в точке  $x_0$ ; тогда касательное пространство к множеству

$$M = \{x: F(x) = F(x_0)\}$$

совпадает со множеством нулей оператора  $F'(x_0)$ .

## § 7. Замыкания по мере

Пусть  $\mathcal{E}$  — измеримое множество в  $R^1$ . Будем говорить, что  $t_0$  есть  $m$ -предельная точка множества  $\mathcal{E}$ , если для любой окрестности  $S$  точки  $t_0$  выполнено условие

$$\text{mes}(\mathcal{E} \cap S) > 0.$$

Множество всех  $m$ -предельных точек множества  $\mathcal{E}$  будем называть  $m$ -замыканием множества  $\mathcal{E}$  (или замыканием по мере). Замыкание  $\mathcal{E}$  по мере будем обозначать  $\bar{\mathcal{E}}$ .

Теорема 15 (Дубовицкий и Милютин). Если  $\text{mes} \mathcal{E} > 0$ , то  $\bar{\mathcal{E}}$  непусто и замкнуто.

Доказательство. Пусть  $\text{mes} \mathcal{E} > 0$ , но  $\bar{\mathcal{E}}$  — пусто. Тогда для каждой точки  $\xi$  найдется окрестность  $S_\xi$  такая, что  $\text{mes}(\mathcal{E} \cap S_\xi) = 0$ . Поэтому, выделяя счетное покрытие прямой  $S_k$ , получаем

$$\text{mes} \mathcal{E} \leq \sum_k \text{mes}(\mathcal{E} \cap S_k) = 0,$$

что противоречит условию  $\text{mes} \mathcal{E} > 0$ . Докажем теперь, что  $\bar{\mathcal{E}}$  замкнуто. Пусть  $t_k \in \bar{\mathcal{E}}$  и  $t_k \rightarrow t_0$ . Пусть  $S$  произвольная окрестность точки  $t_0$ . Найдется  $t_k \in S$  и окрестность  $S_k \subset S$ . Тогда

$$\text{mes}(\mathcal{E} \cap S) \geq \text{mes}(\mathcal{E} \cap S_k) > 0$$

и, следовательно,  $t_0 \in \bar{\mathcal{E}}$ .

Множество  $\mathcal{E}$  будем называть *m-ограниченным*, если существует такое число  $M$ , что

$$\text{mes} \{t: t \in \mathcal{E}, |t| > M\} = 0.$$

**Следствие.** Если  $\mathcal{E}$  — измеримое, *m-ограниченное* множество и  $\text{mes } \mathcal{E} > 0$ , то  $\overline{\mathcal{E}}$  есть непустой компакт.

Для доказательства достаточно заметить, что  $\overline{\mathcal{E}}$  будет ограниченным, и применить теорему 15.

Пусть  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$  есть измеримая вектор-функция на измеримом множестве  $\mathcal{E}$ . Точка  $y \in R_n$  называется *m-частичным пределом* функции  $\varphi$  при  $t \rightarrow t_0$ , если для любых  $\varepsilon, \delta > 0$  выполнено

$$\text{mes} \{t: t \in \mathcal{E}, |t - t_0| < \delta, |\varphi(t) - y| < \varepsilon\} > 0.$$

Из определения следует, что точка  $t_0 \in \overline{\mathcal{E}}$ . Множество всех *m-частичных пределов* функции  $\varphi(t)$  при  $t \rightarrow t_0$  будем обозначать  $\overline{\varphi(t_0)}$ . Множество

$$\{(t, y): t \in \mathcal{E}, y \in \overline{\varphi(t)}\}$$

будем называть *m-замыканием* (или *замыканием по мере*) функции  $\varphi(t)$  и обозначим его через  $\overline{\varphi(\mathcal{E})}$ .

**Теорема 16.** Пусть  $\varphi \in L^\infty[\mathcal{E}]$ , где  $\mathcal{E}$  есть *m-ограниченное измеримое множество* в  $R_1$ . Тогда

$$\text{vrai} \max_{\mathcal{E}} \varphi(t) = \max_{(t, y) \in \overline{\varphi(\mathcal{E})}} y.$$

**Доказательство.** Пусть  $A = \text{vrai} \max_{\mathcal{E}} \varphi$ . Тогда в силу определения  $\text{vrai} \max$  для любого  $\varepsilon > 0$  множества

$$\mathcal{E}_\varepsilon = \{t: t \in \mathcal{E}, |\varphi(t) - A| < \varepsilon\}$$

имеют ненулевую меру. В силу следствия теоремы 15 множества  $\overline{\mathcal{E}_\varepsilon}$  образуют сужающуюся систему непустых компактов. У такой системы есть общая точка  $t_0 \in \overline{\mathcal{E}_\varepsilon}$ . Покажем, что  $A \in \overline{\varphi(t_0)}$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \text{mes} \{t: t \in \mathcal{E}, |t - t_0| < \delta, |\varphi(t) - A| < \varepsilon\} = \\ = \text{mes} \{t: t \in \mathcal{E}_\varepsilon, |t - t_0| < \delta\} > 0, \end{aligned}$$

так как  $t_0 \in \overline{\mathcal{E}}_g$ . Итак

$$A \in \overline{\varphi(t_0)}, \quad A \leq \sup_{(t, y) \in \overline{\varphi(\mathcal{E})}} y.$$

Покажем, что на самом деле имеет место знак равенства (и тем самым вместо  $\sup$  можно поставить  $\max$ ).

Действительно, если  $A < \sup_{(t, y) \in \overline{\varphi(\mathcal{E})}} y$ , то найдутся  $\tilde{t} \in \overline{\mathcal{E}}$ ,

$\tilde{y} \in \overline{\varphi(\tilde{t})}$  такие, что  $A < \tilde{y}$ ,  $\tilde{t} \in \overline{\mathcal{E}}$ ,  $\tilde{y} \in \overline{\varphi(\tilde{t})}$ . Пусть  $S_{\tilde{y}}$  есть окрестность точки  $\tilde{y}$ , не содержащая  $A$ ; тогда по определению  $\text{vrai max}$

$$\text{mes} \{t: t \in \mathcal{E}, |\varphi(t) - \tilde{y}| < \varepsilon\} = 0,$$

и, следовательно,  $\tilde{y} \in \overline{\varphi(\tilde{t})}$ .

**Теорема 17.** Пусть  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  — измеримые на  $\mathcal{E}$  вектор-функции и  $a \in \overline{\varphi(t_0)}$ . Тогда найдется  $b \in \overline{\psi(t_0)}$  такое, что

$$(a, b) \in \overline{(\varphi(t_0), \psi(t_0))}.$$

**Доказательство.** Очевидно, что достаточно ограничиться случаем, когда  $\psi(t)$  есть скалярная функция. Пусть  $a \in \overline{\varphi(t_0)}$ , тогда

$$\text{mes } \mathcal{E}_n > 0, \quad \mathcal{E}_n = \{t: |t - t_0| < 1/n, t \in \mathcal{E}, |\varphi(t) - a| < 1/n\}.$$

Так как последовательность множеств  $\mathcal{E}_n$  — сужающаяся, то последовательность  $\alpha_n = \text{vrai max}_{\mathcal{E}_n} \psi(t)$  будет монотонно убывающей и ограниченной. Пусть  $b$  — ее предел при  $n \rightarrow \infty$ . Для любых  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  найдется  $n$  такое, что

$$\varepsilon > 1/n, \quad \delta > 1/n, \quad b \leq \text{vrai max}_{\mathcal{E}_n} \psi(t) < b + \varepsilon/2,$$

поэтому

$$\text{mes} \{t: t \in \mathcal{E}_n, |\psi(t) - b| < \varepsilon\} > 0.$$

Теперь

$$\begin{aligned} \text{mes}\{t: t \in \mathcal{E}, |t - t_0| < \delta, |\varphi(t) - a| < \varepsilon, \\ |\psi(t) - b| < \varepsilon\} &> \text{mes}\{t: t \in \mathcal{E}, |t - t_0| < 1/n, \\ |\varphi(t) - a| < 1/n, |\psi(t) - b| < \varepsilon\} = \\ &= \text{mes}\{t: t \in \mathcal{E}_n, |\psi(t) - b| < \varepsilon\} > 0, \end{aligned}$$

следовательно,

$$b \in \overline{\psi(t_0)}, \quad (a, b) \in \overline{\varphi(t_0), \psi(t_0)}.$$

**Теорема 18.** Пусть  $f(x, t)$  — непрерывная функция на  $R_n \times R_1$ , а  $x(t)$  — измеримая функция на множестве  $\mathcal{E} \subset R_1$ . Тогда

$$\overline{f(x(t), t)} = \overline{f(x(t), t)}.$$

**Доказательство.** Покажем сначала, что  $\overline{f(x(t), t)} \subset \overline{f(x(t), t)}$ . Пусть  $a \in \overline{x(t_0)}$ . Тогда для любых  $\delta > 0, \sigma > 0$

$$\text{mes}\{t: t \in \mathcal{E}, |t - t_0| < \delta, |x(t) - a| < \sigma\} > 0. \quad (21)$$

Пусть  $f(a, t_0) = b$ . В силу непрерывности  $f(x, t)$  для любых  $\varepsilon > 0$  найдутся  $\sigma(\varepsilon)$  и  $\delta(\varepsilon)$  такие, что при  $\sigma < \sigma(\varepsilon), \delta < \delta(\varepsilon)$  из неравенства (21) следует неравенство  $|\overline{f(x(t), t)} - b| < \varepsilon$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \text{mes}\{t: t \in \mathcal{E}, |t - t_0| < \delta, |\overline{f(x(t), t)} - b| < \varepsilon\} &> \\ &> \text{mes}\{t: t \in \mathcal{E}, |t - t_0| < \delta, |x(t) - a| < \sigma, \\ &|\overline{f(x(t), t)} - b| < \varepsilon\} = \\ &= \text{mes}\{t: t \in \mathcal{E}, |t - t_0| < \delta, |x(t) - a| < \sigma\} > 0. \end{aligned}$$

Итак,  $b \in \overline{f(x(t), t)}, \overline{f(x(t), t)} \subset \overline{f(x(t), t)}$ . Докажем обратное включение  $\overline{f(x(t), t)} \subset \overline{f(x(t), t)}$ . Пусть  $b \in \overline{f(x(t_0), t_0)}$ . По теореме 17 найдется  $a \in \overline{x(t_0)}$  и такое, что

$$\mathcal{E}_k = \{t: t \in \mathcal{E}, |t - t_0| < 1/k, |x(t) - a| < 1/k, \\ |\overline{f(x(t), t)} - b| < 1/k\}, \quad \text{mes } \mathcal{E}_k > 0.$$



Возьмем  $t_k \in \mathcal{E}_k$ . Тогда

$$x(t_k) \rightarrow a, \quad f(x(t_k), t_k) \rightarrow b, \quad t_k \rightarrow t_0,$$

и, так как функция  $f(x, t)$  непрерывна, то  $b = f(a, t_0)$ ,

т. е.  $\overline{f(x(t), t)} \subset \overline{f(x(t), t)}$ . Теорема доказана.

**Теорема 19.** Пусть  $\mathcal{E} \subset R_1$ ,  $0 < \text{mes } \mathcal{E} < +\infty$ . Если  $f(t) \in L_n^\infty[\mathcal{E}]$ , то  $\overline{f(\mathcal{E})}$  есть непустой компакт в  $R_{n+1}$ .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 15.

# ВЫПУКЛЫЕ КОНУСЫ И ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА В ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

## § 1. Основные определения

Пусть  $E$  — л. н. п. Множество  $\mathcal{K} \subset E$  называется *выпуклым конусом*, если для любых  $x, y \in \mathcal{K}$  и любых двух неотрицательных вещественных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  выполняется соотношение

$$\alpha x + \beta y \in \mathcal{K}.$$

Выпуклый конус вносит полуупорядоченность в л. н. п.  $E$ . Будем писать  $x \geq y$ , если  $x - y \in \mathcal{K}$ . В частности,  $x \geq 0$ , если  $x \in \mathcal{K}$ . Нетрудно проверить, что так определенный знак неравенства обладает следующими свойствами:

- а) Из  $x \geq y, y \geq z$  следует  $x \geq z$ ;
- б) Из  $x \geq y, \alpha \geq 0$  следует  $\alpha x \geq \alpha y$ ;
- в) Из  $x \geq y$  при любом  $z$  следует  $x + z \geq y + z$ .

Вообще говоря, конусу могут принадлежать одновременно элементы  $x$  и  $-x$ ,  $\|x\| \neq 0$ . Если из  $x \geq 0$  и  $-x \geq 0$  следует, что  $x = 0$ , то конус  $\mathcal{K}$  называется *острым*. Конус  $\mathcal{K}$  называется *замкнутым*, если он содержит все свои предельные точки. Конус  $\mathcal{K}$  называется *телесным*, если он имеет внутренние точки.

Нетрудно проверить, что множества неотрицательных функций в пространствах  $L^p[0, T]$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , есть выпуклые замкнутые конусы. Если  $1 \leq p < +\infty$ , то эти конусы не имеют внутренних точек. Конус неотрицательных функций в  $L^\infty[0, T]$  — телесный. Аналогичными свойствами обладают конусы неотрицательных вектор-функций в пространствах  $L_m^p[0, T]$ .

Множество  $M \subset E$  называется *выпуклым*, если из  $x, y \in M$  следует, что для любых  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$  выполняется условие  $\alpha x + \beta y \in M$ . Очевидно, что выпуклый конус есть выпуклое множество.

## § 2. Теорема М. Г. Крейна

о продолжении неотрицательного линейного функционала и ее следствия

Пусть л. н. п.  $E$  частично упорядочено выпуклым конусом  $\mathcal{K}$ . Функционал  $f(x)$  называется неотрицательным, если  $f(x) \geq 0$  для всех  $x \in \mathcal{K}$ .

Теорема 1. Если  $\mathcal{K}$  — телесный выпуклый конус, а  $f(x)$  — неотрицательный аддитивный и однородный функционал, то он будет ограниченным, а следовательно, линейным.

Доказательство. Пусть  $x_0$  есть внутренняя точка конуса  $\mathcal{K}$ . Тогда найдется шар  $\bar{S}_\rho(x_0) \subset \mathcal{K}$ . Если  $x$  — произвольный элемент пространства  $E$ , то

$$x_0 \pm \rho \frac{x}{\|x\|} \in \bar{S}_\rho(x_0) \subset \mathcal{K}, \quad x_0 \pm \rho \frac{x}{\|x\|} \geq 0.$$

Из неотрицательности  $f(x)$  тогда следует, что

$$f\left(x_0 \pm \rho \frac{x}{\|x\|}\right) \geq 0, \quad -\frac{f(x_0)}{\rho} \|x\| \leq f(x) \leq \frac{f(x_0)}{\rho} \|x\|. \quad (1)$$

Из (1) получаем, что функционал  $f(x)$  — ограничен, причем

$$\|f\| \leq \frac{f(x_0)}{\rho}.$$

Теорема 2 (о продолжении линейного неотрицательного функционала). Пусть  $\mathcal{K}$  есть выпуклый телесный конус, не совпадающий со всем пространством  $E$ , и пусть подпространство  $G$  содержит хотя бы одну внутреннюю точку конуса  $\mathcal{K}$ . Тогда любой неотрицательный линейный функционал, определенный на подпространстве  $G$ , может быть продолжен до линейного неотрицательного функционала, определенного на всем пространстве  $E$ .

Доказательство. Пусть  $x \in G$ . Определим множества

$$N' = \{\xi': \xi' \in G, \xi' \leq x\}, \quad N'' = \{\xi'': \xi'' \in G, \xi'' \geq x\}. \quad (2)$$

Эти множества непустые. В самом деле, подпространство  $G$  по условию теоремы содержит внутреннюю

точку  $x_0$  конуса  $\mathcal{K}$ . Поэтому найдется замкнутый шар  $\bar{S}_\rho(x_0) \subset \mathcal{K}$ . Но точка  $x_0 \pm \rho \frac{x}{\|x\|} \in S_\rho(x_0) \subset \mathcal{K}$ . Поэтому

$$-\frac{\|x\|}{\rho} x_0 \leq x \leq \frac{\|x\|}{\rho} x_0, \quad -\frac{\|x\|}{\rho} x_0 \in N', \quad \frac{\|x\|}{\rho} x_0 \in N''.$$

Из (2) в силу неотрицательности функционала  $f(x)$  получаем  $f(\xi') \leq f(\xi'')$  для любых  $\xi' \in N'$ ,  $\xi'' \in N''$ . Поэтому существует такое число  $\gamma$ , что

$$f(\xi') \leq \gamma \leq f(\xi'') \quad \text{для всех } \xi' \in N', \xi'' \in N''. \quad (3)$$

Построим теперь подпространство

$$G_1 = \{y: y = \xi + tx, \xi \in G, -\infty < t < +\infty\}.$$

Так как точка  $x \in G$ , то представление элемента  $y \in G_1$  в виде  $y = \xi + tx$  единственно. Поэтому можно на подпространстве  $G_1$  определить функционал  $\varphi(y) = f(\xi) + t\gamma$ , который является продолжением  $f(x)$  с  $G$  на  $G_1$ . Покажем, что он неотрицателен. Пусть  $\xi + tx \geq 0$ ,  $t \neq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} x &\geq -\xi/t \quad \text{при } t > 0; & -\xi/t &\in N'. \\ x &\leq -\xi/t \quad \text{при } t < 0; & -\xi/t &\in N'', \end{aligned}$$

откуда, используя (3), получаем

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\xi}{t}\right) &\leq \gamma \quad \text{при } t > 0; & f(\xi) + \gamma t = \varphi(y) &\geq 0, \\ f\left(-\frac{\xi}{t}\right) &\geq \gamma \quad \text{при } t < 0; & f(\xi) + \gamma t = \varphi(y) &\geq 0. \end{aligned}$$

Итак, неотрицательный аддитивный и однородный функционал  $\varphi(y)$  есть продолжение с  $G$  на  $G_1$ . По теореме 1 он будет линейным. Итак,  $\varphi(y)$  есть неотрицательное линейное продолжение функционала  $f(x)$  с подпространства  $G$  на более широкое подпространство  $G_1$ . Последовательно расширяя функционал  $f(x)$ , мы можем продолжить его на все пространство  $E$  с сохранением линейности и неотрицательности. Строгое доказательство основано на лемме Цорна теории частично упорядоченных множеств, и оно ничем не отличается от соответствующего пункта в доказательстве теоремы Банаха — Хана о продолжении линейного функционала.

**Теорема 3.** Пусть л. н. п.  $E$  частично упорядочено выпуклым телесным конусом  $\mathcal{K}$ , не совпадающим со всем пространством  $E$ . Тогда на  $E$  существует по крайней мере один неотрицательный линейный функционал.

**Доказательство.** Пусть  $x_0$  — внутренняя точка конуса  $\mathcal{K}$ . Точка  $-x_0 \notin \mathcal{K}$ . Действительно, если  $-x_0 \in \mathcal{K}$  и  $x$  — произвольная точка пространства  $E$ , то (так как точка  $x_0$  — внутренняя) при некотором  $\rho > 0$  имеем  $x_0 + \rho x \in \mathcal{K}$ . Так как  $-x_0 \in \mathcal{K}$ , то по свойству выпуклого конуса  $\rho x = -x_0 + x_0 + \rho x \in \mathcal{K}$ . Поэтому  $x \in \mathcal{K}$ , что противоречит условию теоремы  $\mathcal{K} \neq E$ . Рассмотрим одномерное подпространство

$$G = \{x: x = x_0 t, -\infty < t < +\infty\}.$$

Определим на  $G$  линейный функционал  $f(x) = t$ . Очевидно, что  $f(x)$  — аддитивный и однородный функционал на подпространстве  $G$ . Покажем, что он неотрицателен. Если это не так, то найдется такое  $t_0 < 0$ , что  $t_0 x_0 \in \mathcal{K}$ . Но тогда  $-x_0 \in \mathcal{K}$ , что невозможно. Продолжая  $f(x)$  по теореме 2 на все пространство  $E$ , получаем линейный неотрицательный функционал.

Докажем теперь важную теорему об отделимости выпуклых конусов в л. н. п.

**Теорема 4.** Пусть  $\mathcal{K}_1 \subset E$  — выпуклый телесный конус и  $\mathcal{K}_2 \subset E$  — выпуклый конус, не имеющий общих точек со внутренностью  $\mathcal{K}_1$ . Тогда существует линейный функционал  $x_0^* \neq 0$ , разделяющий  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$ :

$$(x_0^*, y) \leq 0 \leq (x_0^*, x) \text{ для всех } x \in \mathcal{K}_1, y \in \mathcal{K}_2.$$

**Доказательство.** Рассмотрим множество

$$\mathcal{K} = \{z: z = x - y, x \in \mathcal{K}_1, y \in \mathcal{K}_2\}.$$

Нетрудно проверить, что  $\mathcal{K}$  — выпуклый конус в  $E$ . Он телесен, так как содержит телесный конус  $\mathcal{K}_1$ . Покажем, что  $\mathcal{K} \neq E$ . Действительно, если  $x_0$  — внутренняя точка  $\mathcal{K}_1$ , то  $-x_0 \notin \mathcal{K}$ . Если  $-x_0 \in \mathcal{K}$ , то  $-x_0 = x - y$ ,  $x \in \mathcal{K}_1$ ,  $y \in \mathcal{K}_2$  и, значит,  $y = x + x_0$ . По свойству выпуклого конуса точка  $x + x_0$  — внутренняя, если  $x_0$  — внутренняя точка. Поэтому  $\mathcal{K}_2$  имеет непустое пересечение со внутренностью  $\mathcal{K}_1$ , что противоречит

условию теоремы. Итак,  $-x_0 \in \mathcal{K}$  и, следовательно,  $\mathcal{K} \neq E$ . В силу теоремы 3 на  $E$  определен нетривиальный неотрицательный линейный функционал

$$(x_0^*, z) \geq 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{K}$$

или

$$\begin{aligned} (x_0^*, x-y) &\geq 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{K}_1, y \in \mathcal{K}_2, \\ (x_0^*, y) &\leq (x_0^*, x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{K}_1, y \in \mathcal{K}_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как конусы  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  содержат нулевой элемент, то из (4) получаем утверждение теоремы.

Теорема 4 имеет простую геометрическую интерпретацию. Если множество  $(x_0^*, x) = 0$  назвать гиперплоскостью, проходящей через нуль пространства  $E$ , то эта гиперплоскость разбивает все пространство  $E$  на два полупространства  $(x_0^*, x) \geq 0$  и  $(x_0^*, x) \leq 0$ . Говорят, что *гиперплоскость разделяет два множества*, если эти множества лежат в разных полупространствах, определяемых этой гиперплоскостью. Таким образом, теорема 4 утверждает, что найдется гиперплоскость, проходящая через нуль пространства  $E$  и разделяющая конусы  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$ .

### § 3. Теоремы отделимости для выпуклых множеств

Каждому выпуклому множеству  $M \subset E$  можно поставить в соответствие выпуклый конус

$$\mathcal{K}(M) = \{x: x = \lambda y, y \in M, \lambda \geq 0\}.$$

**Теорема 5.** Если выпуклое множество  $M \subset E$  имеет внутренние точки и 0 не есть внутренняя точка  $M$ , то  $\mathcal{K}(M)$  не совпадает со всем пространством  $E$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_0$  — внутренняя точка  $M$  и замкнутый шар  $S_\rho(x_0) \subset M$ . Покажем, что точка  $-x_0 \in \mathcal{K}(M)$ . Если  $-x_0 \in \mathcal{K}(M)$ , то при некотором  $\varepsilon \geq 0$  имеем  $y_0 = -\varepsilon x_0 \in M$ . Так как  $S_\rho(x_0) \subset M$ , то  $x_0 + \rho x \in M$  при любом  $x$  с  $\|x\| \leq 1$ . Так как  $M$  — выпуклое множество, то

$$\frac{y_0}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} (x_0 + \rho x) \in M \quad \text{если} \quad \|x\| \leq 1,$$

и так как  $y_0 = -\varepsilon x_0$ , то  $\frac{\varepsilon p}{1+\varepsilon} x \in M$  при  $\|x\| \leq 1$ . Поэтому  $S_{\frac{\varepsilon p}{1+\varepsilon}}(0) \subset M$ . Но этого не может быть, так как точка  $x=0$  не есть внутренняя точка множества  $M$ . Полученное противоречие доказывает, что  $-x_0 \in \mathcal{K}(M)$  и, следовательно,  $\mathcal{K}(M) \neq E$ .

**Теорема 6.** Если  $M$  — выпуклое множество в л. н. п.  $E$ , содержащее внутренние точки, и  $x=0$ , не принадлежит внутренности  $M$ , то существует линейный функционал, принимающий неотрицательные значения на множестве  $M$ .

**Доказательство.** В силу теоремы 5 конус  $\mathcal{K}(M)$  будет выпуклым и телесным и  $\mathcal{K}(M) \neq E$ . Тогда в силу теоремы 3 на конусе  $\mathcal{K}(M)$ , а следовательно, и на множестве  $M$  определен нетривиальный неотрицательный линейный функционал.

Теореме 6 можно придать геометрическую форму. Гиперплоскость  $(x_0^*, x) = \alpha$ , проходящая через точку  $x_0$ , называется *опорной* к множеству  $M$  в точке  $x_0$ , если  $M$  лежит по одну сторону от гиперплоскости. Полупространство, в котором лежит  $M$ , называется *опорным полупространством*. Так как при преобразовании параллельного переноса любая точка может быть перенесена в точку 0, и так как внутренние точки переходят во внутренние, то мы получаем следующую теорему.

**Теорема 7.** Если  $M$  — выпуклое множество в л. н. п.  $E$  и  $M$  имеет внутренние точки, то через любую точку  $x$ , не принадлежащую внутренности  $M$ , можно провести опорную гиперплоскость к множеству  $M$ .

Докажем теперь теорему об отделимости выпуклых множеств.

**Теорема 8.** Если множества  $M_1, M_2$  выпуклы, внутренность  $M_1$  не пуста и  $M_2$  не имеет общих точек с внутренностью  $M_1$ , то существует линейный функционал  $x_0^* \neq 0$ , разделяющий множества  $M_1$  и  $M_2$ :

$$(x_0^*, y) \leq (x_0^*, x) \quad \text{для всех } x \in M_1, y \in M_2. \quad (5)$$

**Доказательство.** Рассмотрим сначала случай, когда множества  $M_1$  и  $M_2$  не пересекаются. Построим множество

$$M = \{z: z = x - y, \quad x \in M_1, \quad y \in M_2\}.$$

Нетрудно видеть, что  $M$  — выпуклое множество и, так как  $M_1 \subset M$ , то  $M$  имеет внутренние точки. Точка  $z=0$  не принадлежит  $M$ , так как множества  $M_1$  и  $M_2$  не имеют общих точек. Применяя теорему 6, построим нетривиальный линейный функционал  $x_0^*$ , принимающий неотрицательные значения на множестве  $M$ :

$$(x_0^*, x-y) \geq 0 \quad \text{для всех} \quad x \in M_1, y \in M_2.$$

Отсюда и следует неравенство (5).

Для доказательства теоремы в общем случае докажем следующие вспомогательные леммы.

**Лемма 1.** Если  $x_0$  — внутренняя точка выпуклого множества  $M$ , а  $y_0 \in \bar{M}$ , то все точки отрезка

$$x = ty_0 + (1-t)x_0, \quad 0 \leq t < 1 \quad (6)$$

принадлежат внутренности множества  $M$ .

**Доказательство.** Так как  $y_0$  — предельная точка множества  $M$ , то  $y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ,  $y_n \in M$ . Пусть  $\xi$  — произвольный элемент пространства  $E$  с  $\|\xi\| = 1$ , а  $\varepsilon$  — положительное число. Тогда

$$\begin{aligned} (1-t)x_0 + ty_0 + \varepsilon\xi &= \\ &= (1-t)x_0 + ty_n + t(y_0 - y_n) + \varepsilon\xi = \\ &= (1-t) \left[ x_0 + \frac{t}{1-t}(y_0 - y_n) + \frac{\varepsilon}{1-t}\xi \right] + ty_n. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как точка  $x_0$  — внутренняя точка множества  $M$  и  $y_n \rightarrow y_0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то существуют номер  $n$  и число  $\varepsilon_0 > 0$  такие, что

$$x_0 + \frac{t}{1-t}(y_0 - y_n) + \frac{\varepsilon}{1-t}\xi \in M \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Тогда из равенства (7) следует, что точка  $(1-t)x_0 + ty_0$  принадлежит множеству  $M$  вместе с шаром радиуса  $\varepsilon$  с центром в этой точке. Поэтому все точки отрезка (6) будут внутренними.

**Лемма 2.** Внутренность выпуклого множества  $M$  есть выпуклое множество. Если внутренность  $M$  не пуста, то ее замыкание совпадает с  $\bar{M}$ .

**Доказательство.** То, что внутренность  $\bar{M}$  выпукла, следует из леммы 1. Пусть внутренность  $M$



непуста и  $x_0$  — внутренняя точка  $M$ . Если  $y_0 \in \bar{M}$ , то

$$y_0 = \lim_{t \rightarrow 1-0} [ty_0 + (1-t)x_0],$$

и так как все точки отрезка (6) в силу леммы 1 будут внутренними, то  $y_0$  принадлежит замыканию внутренней  $M$ .

Докажем теперь теорему 8 в общем случае. Будем внутренность  $M$  обозначать через  $\text{int } M$ . Так как  $\text{int } M_1$  есть непустое выпуклое множество, не пересекающееся с выпуклым множеством  $M_2$ , то отделяя эти два непересекающиеся множества линейным функционалом  $x_0^*$ , получаем

$$(x_0^*, y) \leq (x_0^*, x) \quad \text{для всех } y \in M_2, \quad x \in \text{int } M_1.$$

Так как в пределе нестрогие неравенства сохраняются, то  $(x_0^*, y) \leq (x_0^*, x)$  для всех  $y \in M_2, \quad x \in \overline{\text{int } M_1} = \bar{M}_1$ , что и требовалось доказать.

Теореме 8 можно придать геометрическую форму.

**Теорема 9.** Если множества  $M_1$  и  $M_2$  — выпуклы, внутренность  $M_1$  непуста и  $M_2$  не имеет общих точек с внутренностью  $M_1$ , то существует гиперплоскость, разделяющая множества  $M_1$  и  $M_2$ .

**Доказательство.** Из (5) следует существование такого числа  $\alpha$ , что

$$(x_0^*, y) \leq \alpha \leq (x_0^*, x) \quad \text{для всех } x \in M_1, \quad y \in M_2.$$

Гиперплоскость  $(x_0^*, x) = \alpha$  и будет разделять множества  $M_1$  и  $M_2$ .

Докажем еще теорему о строгой отделимости выпуклого замкнутого (не обязательно телесного) множества от точки, ему не принадлежащей.

**Теорема 10.** Пусть  $M$  — замкнутое выпуклое множество в л. н. п.  $E$  и точка  $x_0 \notin M$ . Тогда существует линейный функционал  $x_0^*$ , строго отделяющий точку  $x_0$  от множества  $M$ , т. е.

$$\sup_{x \in M} (x_0^*, x) < (x_0^*, x_0). \quad (7')$$

**Доказательство.** Заметим сначала, что условие (7') можно переписать в эквивалентной форме:

$$(x_0^*, x) \leq \alpha < (x_0^*, x_0) \quad \text{для всех } x \in M, \quad (8)$$

где  $\alpha$  — некоторое вещественное число. Так как множество  $M$  замкнуто, то его дополнение открыто. Поэтому существует замкнутый шар  $\bar{S}_\rho(x_0)$ , принадлежащий этому дополнению и, следовательно, не пересекающийся с множеством  $M$ . В силу теоремы 8 найдутся линейный функционал  $x_0^*$  и число  $\alpha$  такие, что

$$(x_0^*, x) \leq \alpha \leq (x_0^*, y) \text{ для всех } x \in M, y \in \bar{S}_\rho(x_0). \quad (9)$$

Так как функционал  $x_0^*$  — нетривиален, то существует элемент  $y_0$ , на котором он принимает значение, равное единице. И так как  $x_0 - \rho \frac{y_0}{\|y_0\|} \in \bar{S}_\rho(x_0)$ , то в силу (9) получаем, что для всех  $x \in M$

$$\begin{aligned} (x_0^*, x) &\leq \alpha \leq \left( x_0^*, x_0 - \rho \frac{y_0}{\|y_0\|} \right) = \\ &= (x_0^*, x_0) - \frac{\rho}{\|y_0\|} < (x_0^*, x_0), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Переформулируем еще теорему 10 для случая конуса.

**Теорема 11.** Пусть  $\mathcal{K}$  — замкнутый выпуклый конус в л. н. п.  $E$  и точка  $x_0 \notin \mathcal{K}$ . Тогда существует линейный функционал  $x_0^*$ , строго отделяющий точку  $x_0$  от конуса  $\mathcal{K}$ :

$$(x_0^*, x) \leq 0 < (x_0^*, x_0) \text{ для всех } x \in \mathcal{K}.$$

**Доказательство.** В силу теоремы 10 найдется линейный функционал  $x_0^*$ , для которого выполнено неравенство (8). Покажем, что число  $\alpha$  в этом неравенстве равно нулю. Так как  $0 \in \mathcal{K}$ , то  $\alpha \geq 0$ . С другой стороны, функционал  $x_0^*$  не может на конусе  $\mathcal{K}$  принимать положительные значения, так как, в силу свойств конуса, он был бы тогда неограниченным сверху на конусе  $\mathcal{K}$ . Поэтому можно взять

$$\alpha = \sup_{x \in \mathcal{K}} (x_0^*, x) = 0.$$

**Теорема 12.** Выпуклое замкнутое множество  $M \subseteq E$  совпадает с пересечением всех опорных к нему полупространств.

**Доказательство.** Очевидно, что  $M$  принадлежит пересечению всех опорных полупространств. Если же

точка  $x_0$  принадлежит пересечению всех опорных полупространств, но не принадлежит множеству  $M$ , то ее можно строго отделить от множества  $M$ , т. е. найдется такой линейный функционал и число  $\alpha$ , что

$$(x_0^*, x) \leq \alpha < (x_0^*, x_0) \quad \text{для всех} \quad x \in M.$$

Опорное полупространство  $(x_0^*, x) \leq \alpha$  не содержит точки  $x_0$ , и поэтому точка  $x_0$  не может принадлежать пересечению всех опорных полупространств. Полученное противоречие доказывает, что  $M$  совпадает с пересечением всех опорных к  $M$  полупространств.

#### § 4. Регулярно-выпуклые множества в сопряженном пространстве

Пусть  $E^*$  — пространство, сопряженное л. н. п.  $E$ . Множество  $\Omega^* \subset E^*$  называется *регулярно-выпуклым*, если любую точку  $x_0^* \in \Omega^*$  можно строго отделить от  $\Omega^*$  при помощи некоторого элемента  $x_0 \in E$ , т. е.  $\sup_{x^* \in \Omega^*} (x^*, x_0) < (x_0^*, x_0)$ , или, что то же самое, если найдутся элемент  $x_0$  и число  $\alpha$  такие, что

$$(x^*, x_0) \leq \alpha < (x_0^*, x_0) \quad \text{для всех} \quad x^* \in \Omega^*. \quad (10)$$

**Пример 1.** Шар  $\|x^*\| \leq 1$  есть регулярно-выпуклое множество.

Действительно, если  $\|x_0^*\| > 1$ , то в силу определения нормы линейного функционала найдется элемент  $x_0$  с  $\|x_0\| \leq 1$  и такой, что  $(x_0^*, x_0) > 1$ . С другой стороны, в силу следствия 3 теоремы Банаха — Хана

$$\|x_0\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |(x^*, x_0)| \leq 1 < (x_0^*, x_0),$$

что и означает, что множество  $\{x^*: \|x^*\| \leq 1\}$  является регулярно-выпуклым.

**Пример 2.** Множество (полупространство)

$$H_\alpha^* = \{x^*: (x^*, x_0) \geq \alpha\}$$

регулярно-выпукло.

Действительно, если  $x_0^* \in H_\alpha^*$ , то

$$(x_0^*, x_0) < a \leq (x^*, x_0) \quad \text{для всех} \quad x^* \in H_\alpha^*,$$

что и доказывает регулярную выпуклость множества  $H_\alpha^*$ .

**Теорема 13.** *Пересечение любого множества регулярно-выпуклых множеств — регулярно-выпуклое множество.*

**Доказательство.** Пусть  $\Omega_\alpha^*$ ,  $\alpha \in A$ , — регулярно-выпуклые множества и

$$\Omega^* = \bigcap_{\alpha \in A} \Omega_\alpha^*.$$

Если  $x_0^* \in \Omega^*$ , то существует  $\alpha_0 \in A$  такое, что  $x_0^* \in \Omega_{\alpha_0}^*$ . Так как множество  $\Omega_{\alpha_0}^*$  — регулярно-выпукло, то найдется элемент  $x_0 \in E$  такой, что  $\sup_{x^* \in \Omega_{\alpha_0}^*} (x^*, x_0) < (x_0^*, x_0)$ , тем более  $\sup_{x^* \in \Omega^*} (x^*, x_0) < (x_0^*, x_0)$ , что и доказывает регулярную выпуклость множества  $\Omega^*$ .

**Теорема 14.** *Регулярно-выпуклое множество выпукло и слабо\* замкнуто.*

**Доказательство.** Выпуклость регулярно-выпуклого множества  $\Omega^*$  сразу следует из неравенства (10). Пусть  $x_0^*$  — произвольная предельная точка множества  $\Omega^*$ . Предположим, что  $x_0^* \notin \Omega^*$ . Тогда напомним для точки  $x_0^*$  неравенство (10). Его можно переписать в следующем виде:

$$(x^* - x_0^*, -x_0) > \varepsilon_0 = (x_0^*, x_0) - \alpha \quad \text{для всех } x^* \in \Omega^*.$$

Последнее неравенство означает, что в окрестности  $\{x^*: (x^* - x_0^*, -x_0) \leq \varepsilon_0\}$  не содержится точек множества  $\Omega^*$ . Поэтому точка  $x_0^*$  не может быть предельной. Полученное противоречие показывает, что множество  $\Omega^*$  содержит все свои слабые\* предельные точки.

Справедлива и теорема, обратная теореме 14, которую мы докажем для случая сепарабельного пространства  $E$ .

**Теорема 15.** *Если пространство  $E$  сепарабельно, а ограниченное множество  $\Omega^*$  выпукло и секвенциально слабо\* замкнуто, то оно будет регулярно-выпуклым.*

**Доказательство.** Пусть  $\{e_n\}$  — плотная последовательность элементов в пространстве  $E$ . Рассмотрим последовательность пространств  $R_n$  и в каждом  $R_n$  рассмотрим множество

$$\Omega_n = \{\xi: \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\},$$

$$\xi_i = (x^*, e_i), \quad x^* \in \Omega^*, \quad i = 1, \dots, n.$$

Из выпуклости множества  $\Omega^*$  в  $E^*$  следует, что  $\Omega_n$  выпукло в  $R_n$ . Покажем, что  $\Omega_n$  замкнуто в  $R_n$ . Пусть  $\xi_0$  есть предельная точка множества  $\Omega_n$ . Это означает, что

$$\xi_l^0 = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k^*, e_l), \quad x_k^* \in \Omega^*, \quad l = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Так как множество  $\Omega^*$  ограничено, то из  $x_k^*$  можно выделить слабо\* сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности можно считать, что и последовательность  $x_k^*$  слабо\* сходится к элементу  $x_0^*$ . Так как множество  $\Omega^*$  секвенциально слабо\* замкнуто, то  $x_0^* \in \Omega^*$ . Переходя к пределу в формуле (11), получаем

$$\xi_{l0} = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k^*, e_l) = (x_0^*, e_l), \quad x_0^* \in \Omega^*, \quad l = 1, \dots, n,$$

и поэтому  $\xi_0 \in \Omega_n$ . Итак, множество  $\Omega_n$  замкнуто в  $R_n$  при любом  $n$ .

Пусть  $x_0^* \notin \Omega^*$ . Покажем, что существует такое  $n$ , что

$$\xi_0^0 \notin \Omega_n, \quad \xi_l^0 = (x_0^*, e_l), \quad l = 1, \dots, n.$$

Если это не так, то при любом  $n$  существует элемент  $x_n^* \in \Omega^*$  такой, что

$$(x_n^*, e_l) = (x_0^*, e_l), \quad l = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Пользуясь ограниченностью множества  $\Omega^*$ , выделим из  $x_n^*$  слабо\* сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности считаем, что и последовательность  $x_n^*$  слабо\* сходится к  $\tilde{x}^*$ . В силу того, что множество  $\Omega^*$  секвенциально слабо\* замкнуто, имеем  $\tilde{x}^* \in \Omega^*$ . Переходя в равенстве (12) к пределу, получаем  $(\tilde{x}^*, e_l) = (x_0^*, e_l)$ ,  $l = 1, \dots, n$ , и так как последовательность  $e_l$  плотна в  $E$ , то  $\tilde{x}^* = x_0^*$ . Но  $x_0^* \notin \Omega^*$ ,  $\tilde{x}^* \in \Omega^*$ . Полученное противоречие доказывает, что  $\xi_0 \notin \Omega_n$  при некотором  $n$ .

Итак, при некотором  $n$  множество  $\Omega_n$  — выпуклое, замкнутое и не содержит точку  $\xi_0$ . В силу теоремы 10 найдется вектор  $(p_1, \dots, p_n)$  такой, что

$$\sup_{\xi \in \Omega_n} \sum_{i=1}^n p_i \xi_i < \sum_{i=1}^n p_i \xi_{i0}.$$

Подставляя выражения для чисел  $\xi_i$ , получаем

$$\sup_{x^* \in \Omega^*} (x^*, x_0) < (x_0^*, x_0), \quad x_0 = \sum_{i=1}^n p_i e_i,$$

что и доказывает регулярную выпуклость множества  $\Omega^*$ .

*Следствие.* Если множество  $\Omega^*$  выпукло и секвенциально слабо\* замкнуто и пространство  $E$  сепарабельно, то множество  $\Omega^*$  будет замкнутым и в слабой\* топологии пространства  $E^*$ .

*Доказательство.* В силу теоремы 15 множество  $\Omega^*$  будет регулярно-выпуклым, а в силу теоремы 14 оно будет тогда и замкнутым в слабой\* топологии пространства  $E^*$ .

Проверить секвенциальную слабую\* замкнутость, конечно, проще, чем замкнутость в слабой\* топологии.

Теорема 15 верна и для несепарабельного пространства, если усилить требования, потребовав уже замкнутости множества  $\Omega^*$  в слабой\* топологии пространства  $E^*$ . Доказательство получается незначительным видоизменением доказательства теоремы 15. Каждому конечному набору элементов  $(e_1, \dots, e_n)$  пространства  $E$  поставим в соответствие множество  $\Omega \subset R_n$  по следующему правилу:

$$\Omega = \{\xi: \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \\ \xi_i = (x^*, e_i), x^* \in \Omega^*, i = 1, \dots, n\}.$$

Как и при доказательстве теоремы 15, показывается, что множество  $\Omega$  будет замкнутым и выпуклым в  $R_n$ . Пусть  $x_0^* \in \Omega^*$ . Так как множество  $\Omega^*$  слабо\* замкнуто, то найдется такой набор элементов  $(e_1, \dots, e_n)$  и число  $\varepsilon > 0$ , что

$$|(x_0^* - x^*, e_i)| \geq \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x^* \in \Omega^*, \quad i = 1, \dots, n,$$

откуда ясно, что

$$\rho(\xi_0, \Omega) = \sup_{i=1, \dots, n} \sup_{\xi \in \Omega} |\xi_{0i} - \xi_i| \geq \varepsilon, \\ \xi_{0i} = (x_0^*, e_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, точка  $\xi_0 \notin \Omega$ . Дальнейшее доказательство повторяет доказательство теоремы 15.

Покажем теперь, что теорема 15 верна и для неограниченных множеств. Докажем предварительно две теоремы.

**Теорема 16.** *Если пространство  $E$  сепарабельно, а множества  $\Omega_1^*$  и  $\Omega_2^*$  регулярно-выпуклы и ограничены, то и множество  $\Omega_1^* - \Omega_2^*$  — регулярно-выпукло.*

**Доказательство.** Так как множества  $\Omega_1^*$  и  $\Omega_2^*$  регулярно-выпуклы, то они выпуклы и слабо\* замкнуты. Пусть  $x_0^*$  есть предел слабо\* сходящейся последовательности точек множества  $\Omega^*$ . Это означает, что для всех  $x \in E$

$$(x_0^*, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^* - y_n^*, x), \quad x_n^* \in \Omega_1^*, \quad y_n^* \in \Omega_2^*. \quad (12')$$

Пользуясь слабой\* компактностью множеств  $\Omega_1^*$  и  $\Omega_2^*$ , выделим из  $\Omega_1^*$  и  $\Omega_2^*$  слабо\* сходящиеся подпоследовательности. Без ограничения общности можно считать, что и последовательности  $x_n^*$  и  $y_n^*$  слабо\* сходятся к элементам  $\bar{x}^*$  и  $\bar{y}^*$ . Так как множества  $\Omega_1^*$  и  $\Omega_2^*$  слабо\* замкнуты, то  $\bar{x}^* \in \Omega_1^*$  и  $\bar{y}^* \in \Omega_2^*$ . Переходя в равенстве (12') к пределу, получаем

$$x_0^* = \bar{x}^* - \bar{y}^*, \quad \bar{x}^* \in \Omega_1^*, \quad \bar{y}^* \in \Omega_2^*,$$

поэтому  $x_0^* \in \Omega^*$ . Таким образом, множество  $\Omega^*$  выпукло и секвенциально слабо\* замкнуто; в силу теоремы 15 оно будет регулярно-выпуклым.

Теорема 16 верна и без предположения о сепарабельности пространства  $E$ . В этом случае доказательство менее тривиально, и мы его опускаем.

**Теорема 17.** *Пусть  $\Omega^*$  — ограниченное регулярно-выпуклое множество,  $x_0^* \in \Omega^*$ , и*

$$\rho(x_0^*, \Omega^*) = \inf_{x^* \in \Omega^*} \|x_0^* - x^*\| = d > 0.$$

*Тогда для любого  $d'$  такого, что  $0 < d' < d$ , найдется элемент  $x_0$ , для которого справедливо неравенство*

$$\sup_{x^* \in \Omega^*} (x^*, x_0) < (x_0^*, x_0) - d' \|x_0\|.$$

**Доказательство.** Пусть  $S_{d'}(x_0^*)$  есть шар радиуса  $d'$  с центром в точке  $x_0^*$ . Множество  $\Omega^* - S_{d'}(x_0^*)$  по теореме 16 будет регулярно-выпуклым, и оно не

содержит точку  $x^* = 0$ . Отделяя точку  $x^* = 0$ , получаем, что существует элемент  $x_0$  такой, что

$$\begin{aligned} \sup_{x^* \in \Omega^*, y^* \in S_d'} (x^* - y^*, x_0) = \\ = \sup_{x^* \in \Omega^*, \|\xi^*\| \leq 1} (x^* - x_0^* + d' \xi^*, x_0) < 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Но в силу следствия из теоремы Банаха — Хана  $\sup_{\|\xi^*\| \leq 1} (\xi^*, x_0) = \|x_0\|$ . Поэтому из (13) получаем

$$\sup_{x^* \in \Omega^*} (x^*, x_0) - (x_0^*, x_0) + d' \|x_0\| < 0,$$

что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что в теореме 15 можно избавиться от требования ограниченности множества  $\Omega^*$ . Для этого докажем следующую теорему.

**Теорема 18.** *Если пересечение множества  $\Omega^* \subset E^*$  с любым ограниченным регулярно-выпуклым множеством есть регулярно-выпуклое множество, то и множество  $\Omega^*$  будет регулярно-выпуклым.*

**Доказательство.** Пусть множество  $\Omega^*$  неограничено и  $x_0^* \in \Omega^*$ . Пусть  $0 < d < \rho(x_0^*, \Omega^*)$ . Построим последовательность точек  $x_m$ , обладающую следующим свойством: если  $x^* \in \Omega^*$  и

$$(x^*, x_m) \geq (x_0^*, x_m) - (m-1)d\|x_m\|, \quad m = 1, \dots, n, \quad (14)$$

то  $\rho(x^*, x_0^*) \geq nd$ .

Построение будем производить по индукции. Покажем, что (14) справедливо при  $n=1$ . Будем замкнутый шар радиуса  $nd$  с центром в точке  $x_0^*$  обозначать  $S_n$ . Рассмотрим множество  $\Omega^* \cap S_1$ . Так как  $S_1$  есть ограниченное и регулярно-выпуклое множество, то по условию теоремы и множество  $\Omega^* \cap S_1$  будет регулярно-выпуклым. Поэтому найдется элемент  $x_1 \in E$ , строго отделяющий  $x_0^*$  от  $\Omega^* \cap S_1$ :

$$\sup_{x^* \in \Omega^* \cap S_1} (x^*, x_1) < (x_0^*, x_1).$$

Теперь из  $x^* \in \Omega^*$ ,  $(x^*, x_1) \geq (x_0^*, x_1)$  следует, что  $x^* \notin S_1$  и, следовательно,  $\rho(x^*, x_0^*) > d$ . Пусть теперь (14) справедливо при некотором  $n$ . Положим

$$\alpha_m = (x_0^*, x_m) - (m-1)d\|x_m\|.$$



Рассмотрим множества

$$H_m = \{x^*: (x^*, x_m) \geq \alpha_m\}, \quad \Omega_n^* = \Omega^* \cap S_{n+1} \bigcap_{i=1}^n H_i.$$

Множество  $\Omega_n^*$  есть пересечение  $\Omega^*$  с ограниченным регулярно-выпуклым множеством  $S_{n+1} \bigcap_{i=1}^n H_i$ . По условию теоремы оно будет регулярно-выпуклым. Так как (14) справедливо по предположению индукции, то множество  $\Omega_n^*$  отстоит от  $x_0^*$  на расстоянии большем, чем  $nd$ . В силу теоремы 17 найдется элемент  $x_{n+1}$  такой, что

$$\sup_{x^* \in \Omega_n^*} (x^*, x_{n+1}) < (x_0^*, x_{n+1}) - nd \|x_{n+1}\|.$$

Если  $x^* \in \Omega^*$  и

$$(x^*, x_m) \geq (x_0^*, x_m) - (m-1)d \|x_m\|, \quad m=1, \dots, n+1,$$

то  $x^* \in \Omega_n^*$ . Но  $x^* \in \Omega^*$ ,  $x^* \in H_1, \dots, x^* \in H_n$ . Поэтому  $x^* \in S_{n+1}$  и  $\rho(x_0^*, x^*) > (n+1)d$ . Итак, из предположения, что утверждение (14) справедливо при некотором  $n$ , следует, что оно справедливо и для  $n+1$ . Так как оно верно для  $n=1$ , то оно будет справедливым при любом  $n$ .

Из (14) следует, что для каждого элемента  $x^* \in \Omega^*$  хотя бы при одном  $m$  выполнено условие

$$(x^*, x_m) \leq (x_0^*, x_m) - (m-1)d \|x_m\|,$$

или, что то же самое,

$$\sup_m \frac{(x_0^*, x_m) - (x^*, x_m)}{(m-1) \|x_m\|} \geq d. \quad (15)$$

Если положить  $y_m = \frac{x_m}{(m-1) \|x_m\|}$ , то очевидно, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = 0$ . Пусть  $c_0$  — пространство ограниченных последовательностей (см. гл. I). Рассмотрим в пространстве  $c_0$  множество

$$\mathcal{K} = \{\eta: \eta_i = (x^*, y_i), x^* \in \Omega^*, i=1, 2, \dots\}.$$

Множество  $\mathcal{K}$  выпукло в  $c_0$ , так как  $\Omega^*$  выпукло.

Пусть

$$\eta_0 = (\eta_{10}, \dots, \eta_{n0}, \dots), \quad \eta_{i0} = (x_0^*, y_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

В силу (15) имеем

$$\begin{aligned} \rho(\eta_0, \mathcal{K}) &= \sup_{\eta \in \mathcal{K}} \left\{ \sup_i |\eta_i - \eta_{i0}| \right\} = \\ &= \sup_{x^* \in \Omega^*} \left\{ \sup_m \frac{(x_0^*, x_m) - (x^*, x_m)}{(m-1) \|x_m\|} \right\} \geq d, \end{aligned}$$

поэтому  $\eta_0 \notin \overline{\mathcal{K}}$ . Так как  $\overline{\mathcal{K}}$  — выпуклое замкнутое множество в пространстве  $c_0$ , то  $\eta_0$  можно строго отделить от  $\overline{\mathcal{K}}$  линейным функционалом. Так как  $c_0^* = l_1$  (см. гл. I), то найдется последовательность  $p_0 \in l_1$  и такая, что

$$\sup_{\eta \in \mathcal{K}} \sum_{i=1}^{\infty} p_i \eta_i < \sum_{i=1}^{\infty} p_i \eta_{i0}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |p_i| < +\infty. \quad (16)$$

Полагая  $x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} p_i y_i$ , из (16) получаем  $\sup_{x^* \in \Omega^*} (x^*, x_0) < (x_0^*, x_0)$ , т. е.  $\Omega^*$  — регулярно-выпуклое множество.

*Следствие. В теореме 15 можно отбросить требование ограниченности множества  $\Omega^*$ .*

## § 5. Теория сопряженных конусов в л. н. п.

Пусть  $\mathcal{K}$  есть выпуклый конус в л. н. п.  $E$ . Рассмотрим в сопряженном пространстве выпуклый конус

$$\mathcal{K}^+ = \{x^*: (x^*, x) \geq 0 \text{ для всех } x \in \mathcal{K}\}.$$

Конус  $\mathcal{K}^+$  называется *сопряженным к конусу  $\mathcal{K}$* .

**Теорема 19.** *Если  $\mathcal{K}$  — выпуклый конус в л. н. п.  $E$ , то*

- замыкание  $\overline{\mathcal{K}}$  есть выпуклый конус,*
- $\overline{\mathcal{K}}^+ = \mathcal{K}^+$ ,*
- конус  $\mathcal{K}^+$  — регулярно-выпуклый,*
- если  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  — выпуклые конусы в л. н. п.  $E$ , то*

$$\mathcal{K}_1^+ \cap \mathcal{K}_2^+ = (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)^+.$$

Доказательство. а) Если  $x \in \overline{\mathcal{K}}$  и  $y \in \overline{\mathcal{K}}$ , то  

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad x_n \in \mathcal{K}, \quad y_n \in \mathcal{K}.$$

Если  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ , то

$$\alpha x_n + \beta y_n \in \mathcal{K}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y \in \overline{\mathcal{K}}.$$

б) Очевидно, что  $\overline{\mathcal{K}}^+ \subset \mathcal{K}^+$ . Докажем обратное включение. Если существует элемент  $x_0^* \in \mathcal{K}^+$ , но  $x_0^* \notin \overline{\mathcal{K}}^+$ , то это означает, что  $(x_0^*, x) \geq 0$  для всех  $x \in \mathcal{K}$ , но существует элемент  $x_0 \in \overline{\mathcal{K}}$  такой, что  $(x_0^*, x_0) < 0$ . Пусть  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x_n \in \mathcal{K}$ . Тогда  $(x_0^*, x_n) \geq 0, n = 1, 2, \dots$  Переходя в этом неравенстве к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем, что  $(x_0^*, x_0) \geq 0$ . Полученное противоречие доказывает, что  $\overline{\mathcal{K}}^+ = \mathcal{K}^+$ .

в) Пусть  $x_0^* \in \mathcal{K}^+$ . Это означает, что существует элемент  $x_0 \in \mathcal{K}$  такой, что  $(x_0^*, x_0) < 0$ . Тогда

$$(x_0^*, x_0) < 0 \leq (x^*, x_0) \quad \text{для всех } x^* \in \mathcal{K}^+.$$

Таким образом, элемент  $x_0$  строго отделяет  $x_0^*$  от конуса  $\mathcal{K}^+$ . Поэтому конус  $\mathcal{K}^+$  — регулярно-выпуклый.

г) Пусть  $x^* \in \mathcal{K}_1^+ \cap \mathcal{K}_2^+$ , тогда

$$\begin{aligned} (x^*, x) &\geq 0 & \text{для всех } x \in \mathcal{K}_1, \\ (x^*, y) &\geq 0 & \text{для всех } y \in \mathcal{K}_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Поэтому

$$(x^*, x + y) \geq 0 \quad \text{для всех } x \in \mathcal{K}_1, \quad y \in \mathcal{K}_2, \quad (18)$$

т. е.

$$\mathcal{K}_1^+ \cap \mathcal{K}_2^+ \subset (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)^+.$$

Если же  $x^* \in (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)^+$ , то выполнено условие (18). Полагая в (18) сначала  $x = 0$ , а затем  $y = 0$ , получаем, что выполнены условия (17). Поэтому  $x^* \in \mathcal{K}_1^+, x^* \in \mathcal{K}_2^+$  и  $x^* \in \mathcal{K}_1^+ \cap \mathcal{K}_2^+$ . Следовательно,

$$(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)^+ \subset \mathcal{K}_1^+ \cap \mathcal{K}_2^+.$$

**Теорема 20.** Если  $\mathcal{K}$  — выпуклый замкнутый конус в л. н. п.  $E$  и для некоторого  $x_0 \in E$  выполнено

условие

$$(x^*, x_0) \geq 0 \quad \text{для всех } x^* \in \mathcal{K}^+,$$

то  $x_0 \in \mathcal{K}$ .

Доказательство. Положим, что  $x_0 \notin \mathcal{K}$ . Так как конус  $\mathcal{K}$  — выпуклый и замкнутый, то в силу теоремы 11 существует такой линейный функционал  $x_0^*$ , что

$$(x_0^*, x_0) < 0 \leq (x_0^*, x) \quad \text{для всех } x \in \mathcal{K}.$$

Отсюда  $x_0^* \in \mathcal{K}^+$ , но  $(x_0^*, x_0) < 0$ , что противоречит условию теоремы.

Пусть  $\mathcal{K}^*$  есть выпуклый конус в сопряженном пространстве  $E^*$ . Рассмотрим в пространстве  $E$  множество

$${}^+\mathcal{K}^* = \{x: (x^*, x) \geq 0 \text{ для всех } x^* \in \mathcal{K}^*\}.$$

Нетрудно видеть, что  ${}^+\mathcal{K}^*$  есть замкнутый выпуклый конус в пространстве  $E$  (даже слабо замкнутый). Конус  ${}^+\mathcal{K}^*$  называется сопряженным конусу  $\mathcal{K}^*$ . Аналогично пункту г) теоремы 19 доказывается, что

$${}^+\mathcal{K}_1^* \cap {}^+\mathcal{K}_2^* = {}^+(\mathcal{K}_1^* + \mathcal{K}_2^*). \quad (19)$$

Теорема 21. Если конус  $\mathcal{K}$  — выпуклый и замкнутый, то

$${}^+(\mathcal{K}^+) = \mathcal{K}.$$

Доказательство. Очевидно, что  $\mathcal{K} \subset {}^+(\mathcal{K}^+)$ . Докажем обратное включение. Если  $x_0 \in {}^+(\mathcal{K}^+)$ , но  $x_0 \notin \mathcal{K}$ , то в силу теоремы 11 найдется линейный функционал  $x_0^*$  такой, что

$$(x_0^*, x_0) < 0 \leq (x_0^*, x) \quad \text{для всех } x \in \mathcal{K},$$

откуда  $x_0^* \in \mathcal{K}^+$ ,  $(x_0^*, x_0) < 0$  и, следовательно,  $x_0 \notin {}^+(\mathcal{K}^+)$ . Полученное противоречие показывает, что  $\mathcal{K} = {}^+(\mathcal{K}^+)$ .

Следствие 1. Если конус  $\mathcal{K}$  — выпуклый и замкнутый, то он будет и слабо замкнутым.

Следствие 2. Если конус  $\mathcal{K}$  — выпуклый, но не замкнутый, то

$$\overline{\mathcal{K}} = {}^+(\mathcal{K}^+).$$

**Теорема 21'.** Если конус  $\mathcal{K}^* \subset E^*$  — регулярно-выпуклый, то

$$({}^+\mathcal{K}^*)^+ = \mathcal{K}^*.$$

**Доказательство.** Очевидно, что  $\mathcal{K}^* \subset ({}^+\mathcal{K}^*)^+$ . Докажем, что и  $({}^+\mathcal{K}^*)^+ \subset \mathcal{K}^*$ . Пусть  $x_0^* \in ({}^+\mathcal{K}^*)^+$ , но  $x_0^* \notin \mathcal{K}^*$ . Так как конус  $\mathcal{K}^*$  — регулярно-выпуклый, то существует элемент  $x_0 \in E$  такой, что

$$(x_0^*, x_0) < 0 \leq (x^*, x_0) \quad \text{для всех } x^* \in \mathcal{K}^+.$$

Отсюда  $x_0 \in {}^+\mathcal{K}^*$ , но  $(x_0^*, x_0) < 0$  и, следовательно,  $x_0 \notin ({}^+\mathcal{K}^*)^+$ . Полученное противоречие доказывает, что  $\mathcal{K}^* = ({}^+\mathcal{K}^*)^+$ .

**Теорема 22.** Если  $\mathcal{K}$  — выпуклый конус в л. н. п.  $E$ , то  $\mathcal{K}^{++}$  есть слабое\* замыкание конуса  $\mathcal{K}$  в пространстве  $E^{**}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{K}^{**}$  есть слабое\* замыкание конуса  $\mathcal{K}$  в пространстве  $E^{**}$ . Очевидно, что  $\mathcal{K}^{**} \subset \mathcal{K}^{++}$ . Предположим, что существует элемент  $x_0^{**} \in \mathcal{K}^{++}$ ,  $x_0^{**} \notin \mathcal{K}^{**}$ . Слабо\* замкнутый и выпуклый конус  $\mathcal{K}^{**}$  будет по теореме Крейна регулярно-выпуклым. Поэтому найдутся элемент  $x_0^* \in E^*$ , разделяющий конус  $\mathcal{K}^{**}$ , и элемент  $x_0^{**}$ , что

$$(x_0^{**}, x_0^*) < 0 \leq (x^{**}, x_0^*)$$

для всех  $x^{**} \in \mathcal{K}^{**}$ . Так как  $\overline{\mathcal{K}} \subset \mathcal{K}^{**}$ , то  $x_0^* \in \mathcal{K}^+$ , но  $(x_0^{**}, x_0^*) < 0$ . Поэтому  $x_0^{**} \notin \mathcal{K}^{++}$ . Полученное противоречие доказывает, что  $\mathcal{K}^{**} = \mathcal{K}^{++}$ .

# § 1. Конусы, связанные с линейными операторами

Пусть  $E_1$  и  $E_2$  — л. н. п., частично упорядоченные замкнутыми выпуклыми конусами  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$ , и пусть линейный оператор  $T \in [E_1 \rightarrow E_2]$ . Сопряженные пространства  $E_1^*$  и  $E_2^*$  частично упорядочены сопряженными конусами  $\mathcal{K}_1^+$  и  $\mathcal{K}_2^+$ .

Рассмотрим выпуклый конус в  $E_2$

$$Q_T = \{y: y = Tx, x \geq 0\}. \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что сопряженный конус есть

$$Q_T^+ = \{y^*: T^*y^* \geq 0\}. \quad (2)$$

В пространстве  $E_1^*$  рассмотрим конус

$$Q_{T^*} = \{x^*: x^* = T^*y^*, y^* \geq 0\}. \quad (3)$$

Элементарное вычисление показывает, что

$${}^+Q_{T^*} = \{x: Tx \geq 0\}. \quad (4)$$

Вообще говоря, конусы  $Q_T$  и  $Q_{T^*}$  не являются замкнутыми. Докажем несколько теорем, дающих достаточные условия замкнутости конуса  $Q_T$ .

Линейный функционал  $x_0^* \in \mathcal{K}_1^+$  будем называть *строго положительным*, если существует такая постоянная  $\gamma > 0$ , что

$$(x_0^*, x) \geq \gamma \|x\| \quad \text{для всех } x \in \mathcal{K}_1.$$

**Теорема 1.** *Если л. н. п.  $E$  частично упорядочено выпуклым замкнутым конусом  $\mathcal{K}$  и в пространстве  $E^*$  есть строго положительный линейный функционал, то предел слабо сходящейся последовательности  $x_n \geq 0$ ,  $\|x_n\| = 1$ , отличен от нуля.*

**Доказательство.** Пусть  $x_0^*$  — строго положительный линейный функционал. Тогда

$$(x_0^*, x_n) \geq \gamma \|x_n\| \geq \gamma > 0.$$

Поэтому

$$(x_0^*, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_0^*, x_n) \geq \gamma > 0,$$

и следовательно,  $x_0 \neq 0$ .

В пространстве  $L^1[0, T]$  существует строго положительный линейный функционал

$$(x_0^*, x) = \int_0^T x(t) dt.$$

В пространствах  $L^p[0, T]$  при  $p > 1$  нет строго положительных линейных функционалов.

**Теорема 2.** Пусть  $B_1$  и  $B_2$  — банаховы пространства, частично упорядоченные выпуклыми замкнутыми конусами  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$ . И пусть линейный оператор  $T \in [B_1 \rightarrow B_2]$  имеет замкнутую область значений. Тогда конус  $Q_T$  будет замкнутым, если выполнено одно из следующих условий:

а) множество нулей оператора  $N(T)$  локально слабо компактно и  $N(T) \cap \mathcal{K}_1 = \{0\}$ . В пространстве  $B_1^*$  есть строго положительный линейный функционал  $x_0^*$ ,

б) множество нулей оператора  $N(T)$  — конечномерно и  $\mathcal{K}_1 \cap N(T) = \{0\}$ .

в) множество нулей оператора  $N(T)$  локально слабо компактно и в  $B_1^*$  есть строго положительный функционал вида  $x_0^* = T^* y_0^*$ .

**Доказательство.** Пусть  $y_0$  есть предельная точка конуса  $Q_T$ :

$$y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} T x_n, \quad x_n \geq 0.$$

В силу теоремы 2 гл. I найдется последовательность  $z_n \in N(T)$  такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + z_n) = x_0, \quad T x_0 = y_0. \quad (5)$$

Нужно теперь доказать существование такого элемента  $x'_0 \geq 0$ , что  $T x'_0 = y_0$ . Доказательство проведем отдельно для случаев а), б), в).

а) Покажем, что последовательность  $z_n$  ограничена. Если это не так, то из  $z_n$ , а в силу (5) и из  $x_n$  можно выделить подпоследовательности  $x_{n_k}$  и  $z_{n_k}$  такие, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{n_k}\| = +\infty$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n\| = \infty$ . Тогда в силу (5) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{z_n}{\|x_n\|} \right) = 0. \quad (6)$$

Так как последовательность  $x_n/\|x_n\|$  ограничена, то и последовательность  $z_n/\|x_n\|$  будет ограниченной. Так как  $N(T)$  локально слабо компактно, то из последовательности  $z_n/\|x_n\|$  можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Так как  $N(T)$  слабо замкнуто, то предел этой подпоследовательности  $\zeta_0 \in N(T)$ . Тогда из (6) получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} = -\zeta_0 \in N(T).$$

В силу теоремы 1 имеем  $\zeta_0 \neq 0$ , и так как замкнутый и выпуклый конус будет и слабо замкнутым, то  $-\zeta_0 \in \mathcal{K}_1$ . Итак,  $-\zeta_0 \in \mathcal{K}_1$ ,  $-\zeta_0 \in N(T)$  и  $\zeta_0 \neq 0$ , что противоречит условию  $\mathcal{K}_1 \cap N(T) = \{0\}$ .

Итак, мы показали, что последовательность  $z_n$  должна быть ограниченной. Так как  $N(T)$  локально слабо компактно, то из  $z_n$  можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности можно считать, что и последовательность  $z_n$  слабо сходится. Но тогда в силу (5) и последовательность  $x_n$  будет слабо сходиться к элементу  $x'_0 \in E_1$ . В силу слабой замкнутости конуса  $\mathcal{K}_1$  имеем  $x'_0 \in \mathcal{K}_1$ . Таким образом,

$$x_0 = z'_0 + x'_0, \quad z'_0 \in N(T), \quad x'_0 \geq 0,$$

откуда

$$y_0 = Tx_0 = T(z'_0 + x'_0) = Tx'_0, \quad x'_0 \geq 0.$$

Поэтому  $y_0 \in Q_T$  и, следовательно, конус  $Q_T$  — замкнутый.

Рассмотрим теперь случай б). Покажем, что последовательность  $z_n$  в равенстве (5) ограничена. Если это



не так, то без ограничения общности можно считать, что  $\|z_n\| \rightarrow \infty$ . Тогда должно быть выполнено условие (6). Так как ограниченное множество в конечномерном пространстве компактно, то из последовательности  $z_n/\|z_n\|$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $z_{n_k}/\|z_{n_k}\|$ . Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_{n_k}}{\|z_{n_k}\|} = \zeta_0 \in N(T), \quad \|\zeta_0\| = 1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} = -\zeta_0.$$

Таким образом,  $-\zeta_0 \in N(T)$ ,  $-\zeta_0 \in \mathcal{K}_1$  и  $\|\zeta_0\| = 1$ , что противоречит условию  $N(T) \cap \mathcal{K}_1 = \{0\}$ . Дальнейшее доказательство повторяет доказательство п. а).

Рассмотрим теперь п. в). Покажем, что последовательность  $z_n$  в равенстве (5) будет ограниченной. Пусть  $x_0^* = T^*y_0^*$  есть строго положительный линейный функционал. Тогда

$$(y_0^*, Tx_n) = (T^*y_0^*, x_n) \geq \gamma \|x_n\|. \quad (7)$$

Так как последовательность  $Tx_n$  сходится, то из (7) получаем, что  $x_n$  — ограниченная последовательность. Тогда из (5) следует, что и последовательность  $z_n$  ограничена. Дальнейшее доказательство — как в п. а).

Теорема доказана. Заметим, что вместо локальной компактности (слабой локальной компактности) множества  $N(T)$  можно требовать локальной компактности (слабой локальной компактности) конуса  $\mathcal{K}_1$ . Впрочем, требование локальной компактности банахова пространства эквивалентно его конечномерности, а требование слабой локальной компактности банахова пространства эквивалентно его рефлексивности. Во многих практически важных случаях условия теоремы 2 не выполняются, и для доказательства замкнутости конуса  $Q_T$  приходится использовать более тонкие рассуждения, учитывающие специфику задачи.

Докажем еще одну теорему, которая будет использована в дальнейшем.

**Теорема 3.** Пусть сепарабельные банаховы пространства  $B_1$  и  $B_2$  частично упорядочены замкнутыми выпуклыми конусами  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  и пусть линейный

оператор  $T \in [B_1 \rightarrow B_2]$  имеет замкнутую область значений. Тогда конус  $Q_T$  будет замкнутым, если выполнено одно из двух условий:

- а) в  $B_2$  есть строго положительный функционал  $y_0^{**}$  и  $N(T^*) \cap \mathcal{K}_2^+ = \{0\}$ ,  
 б) в  $B_2$  есть строго положительный функционал вида  $y_0^{**} = T^{**}x_0^{**}$ .

Доказательство. Рассмотрим случай а) (доказательство для случая б) — аналогично). Пусть  $x_0^*$  есть предельная точка конуса  $Q_T$ .

$$x_0^* = \lim_{n \rightarrow \infty} T^* y_n^*, \quad y_n^* \geq 0.$$

Доказательство ограниченности последовательности  $y_n^*$  такое же, как и в теореме 2. Итак  $y_n^*$  — ограниченная последовательность. Она слабо\* компактна. Выделяя из нее слабо\* сходящуюся подпоследовательность  $y_{n_k}^*$  и пользуясь тем, что конус  $\mathcal{K}_2^+$  слабо\* замкнут, получаем

$$y_0^* = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}^* \in \mathcal{K}_2^+, \quad x_0^* = \lim_{k \rightarrow \infty} T^* y_{n_k}^* = T^* y_0^*,$$

что и доказывает замкнутость конуса  $Q_T$ .

Докажем теперь теорему о регулярной выпуклости конуса  $Q_T$ .

Теорема 4. Пусть  $B_1$  и  $B_2$  — банаховы пространства, частично упорядоченные замкнутыми выпуклыми конусами  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$ . Линейный оператор  $T \in [B_1 \rightarrow B_2]$  имеет замкнутую область значений. Пусть конус  $\mathcal{K}_2$  имеет внутренние точки и пересечение области значений оператора  $R(T)$  с внутренностью конуса  $\mathcal{K}_2$  непусто. Тогда конус  $Q_T$  — регулярно-выпуклый.

Доказательство. Покажем сначала, что

$$[\mathcal{K}_2 \cap R(T)]^+ = \mathcal{K}_2^+ + N(T^*), \quad (8)$$

где  $N(T^*)$  — множество нулей оператора  $T^*$ . Пусть  $y^* \in [\mathcal{K}_2 \cap R(T)]^+$ . Это означает, что линейный функционал  $y^*$  принимает неотрицательные значения на конусе  $\mathcal{K}_2 \cap R(T)$ . Пусть  $\tilde{y}^*$  есть сужение линейного функционала  $y^*$  на подпространство  $R(T)$ . Так как подпространство  $R(T)$  содержит внутренние точки ко-

нуса  $\mathcal{K}_2$ , то линейный функционал  $\tilde{y}^*$  можно продолжить с сохранением неотрицательности на конусе  $\mathcal{K}_2$  на все пространство  $B_2$ . Тогда

$$y^* = \tilde{y}^* + \hat{y}^*, \quad \hat{y}^* = y^* - \tilde{y}^*. \quad (9)$$

Но линейный функционал  $y^*$  принимает на подпространстве  $R(T)$  те же значения, что и линейный функционал  $\tilde{y}^*$ . Поэтому,  $\hat{y}^*$  обращается в нуль на  $R(T)$ , т. е.  $\hat{y}^* \in R(T)^\perp$ . В силу теоремы Хаусдорфа 1 гл. I имеем  $R(T)^\perp = N(T^*)$ . Поэтому  $\hat{y}^* \in N(T^*)$ . Из (9) теперь получаем

$$\hat{y}^* + \hat{y}^* \in \mathcal{K}_2^+ + R(T)^\perp, \quad [\mathcal{K}_2 \cap R(T)]^+ \subset \mathcal{K}_2^+ + N(T^*).$$

Обратное включение очевидно. Формула (8), таким образом, доказана.

Покажем теперь, что множество  $Q_{T^*}$  будет регулярно-выпуклым. Из результатов § 4 гл. II следует, что нам достаточно доказать слабую\* замкнутость множества  $Q_{T^*}$ , так как оно есть выпуклый конус. Пусть  $x_0^*$  — предельная точка конуса  $Q_{T^*}$ . Тогда найдется обобщенная последовательность  $y_\alpha^*$  такая, что

$$x_\alpha^* = T^* y_\alpha^*, \quad y_\alpha^* \geq 0, \\ (x_\alpha^*, x) \rightarrow (x_0^*, x) \quad \text{для всех } x \in B_1.$$

Так как область значений оператора  $T^*$  слабо\* замкнута, то найдется элемент  $y_0^*$  такой, что  $x_0^* = T^* y_0^*$ . Покажем, что  $y_0^* \in \mathcal{K}_2^+ + N(T^*)$ . Если это не так, то  $y_0^*$  можно строго отделить от регулярно-выпуклого конуса  $\mathcal{K}_2^+ + N(T^*)$ . То, что этот конус — регулярно-выпуклый, следует из формулы (8), так как сопряженный конус всегда регулярно-выпуклый. Итак, найдется элемент  $y_0$  такой, что

$$(\mathcal{K}_2^+ + N(T^*), y_0) \leq 0 < (y_0^*, y_0). \quad (10)$$

Так как  $N(T^*)$  — подпространство, то  $(N(T^*), y_0) = 0$ . Поэтому  $y_0 \in N(T^*)^\perp = R(T)$ ,  $y_0 = Tx_0$ . Из (10) теперь получаем, что

$$(y^*, Tx_0) \leq 0 < (y_0^*, Tx_0) \quad \text{для всех } y^* \geq 0.$$

Подставляя сюда  $y_\alpha^*$ , получаем

$$(T^* y_\alpha^*, x_0) \leq 0 < (T^* y_0^*, x_0), \quad (x_\alpha^*, x_0) \leq 0 < (x_0^*, x_0),$$

что противоречит слабой\* сходимости обобщенной последовательности  $x_\alpha^*$  к  $x_0^*$ . Поэтому  $y_0^* \in \mathcal{K}_1^+ + N(T^*)$ . Но тогда

$$\begin{aligned} y_0^* &= \tilde{y}_0^* + z_0^*, & \tilde{y}_0^* &\geq 0, & z_0^* &\in N(T^*); \\ x_0^* &= T^* y_0^* = T^* \tilde{y}_0^*, & \tilde{y}_0^* &\geq 0, \end{aligned}$$

откуда и следует слабая\* замкнутость конуса  $Q_{T^*}$ . Теорема доказана.

*Замечание. Условия:*

- а)  $R(T)$  имеет непустое пересечение с конусом  $\text{int } \mathcal{K}_2$ ,  
 б)  $N(T^*) \cap \mathcal{K}_1^+ = \{0\}$  являются эквивалентными.

*Доказательство.* Пусть выполнено условие а). Покажем, что выполнено и условие б). Если это не так, то найдется элемент  $y_0^* \neq 0$  такой, что  $y_0^* \geq 0$ ,  $T^* y_0^* = 0$ . Пусть  $y_0 = T x_0$  есть внутренняя точка конуса  $\mathcal{K}_2$ . Тогда найдется шар  $\bar{S}_\rho(y_0) \subset \mathcal{K}_2$ . Поэтому

$$\begin{aligned} (y_0^*, y_0 - \rho y) &\geq 0 \quad \text{при } \|y\| \leq 1, \\ (y_0^*, y_0) &\geq \rho \sup_{\|y\| \leq 1} (y_0^*, y) = \rho \|y_0^*\| > 0. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$(y_0^*, y_0) = (y_0^*, T x_0) = (T^* y_0^*, x_0) = 0.$$

Полученное противоречие показывает, что а) — выполнено.

Пусть теперь выполнено условие б). Если а) не выполнено, то  $R(T)$  не пересекается со внутренностью  $\mathcal{K}_2$  и поэтому  $R(T)$  и  $\mathcal{K}_2$  можно разделить линейным функционалом  $y_0^*$ :

$$(y_0^*, R(T)) \leq 0 \leq (y_0^*, \mathcal{K}_2). \quad (11)$$

Из (11) следует, что  $y_0^* \geq 0$ , и так как  $R(T)$  — подпространство, то  $(y_0^*, R(T)) = 0$ ,  $y_0^* \in R(T)^\perp = N(T^*)$ . Итак,  $y_0^* \geq 0$  и  $y_0^* \in N(T^*)$ , что противоречит условию б).

Заметим также, что условие существования внутренних точек у конуса  $\mathcal{K}_2$  является весьма ограничительным и не выполняется во многих практически важных случаях.

Докажем еще одну теорему о регулярной выпуклости конуса  $Q_{T^*}$ .

**Теорема 5.** Пусть сепарабельные банаховы пространства  $B_1$  и  $B_2$  частично упорядочены замкнутыми выпуклыми конусами  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$ , и линейный оператор  $T \in [B_1 \rightarrow B_2]$  имеет замкнутую область значений. Тогда, если множество нулей оператора  $N(T^*)$  конечномерно и  $N(T^*) \cap \mathcal{K}_2^+ = \{0\}$ , то конус  $Q_{T^*}$  будет регулярно-выпуклым.

**Доказательство.** Достаточно показать, что конус  $Q_{T^*}$  есть выпуклое и секвенциально слабо\* замкнутое множество. Пусть  $x_0^*$  есть предел слабо\* сходящейся последовательности точек конуса  $Q_{T^*}$ :

$$x_n^* = T^* y_n^*, \quad y_n^* \geq 0, \quad x_n^* \rightarrow x_0^*. \quad (12)$$

Так как оператор  $T^*$  имеет замкнутую область значений, то  $x_0^* = T^* y_0^*$ . Так как последовательность  $x_n^*$  слабо\* сходится, то она ограничена. Поэтому среди прообразов точек  $x_n^*$  можно выделить ограниченную последовательность  $\tilde{y}_n^*$ . Очевидно, что найдется такая последовательность  $z_n^* \in N(T^*)$ , что

$$\tilde{y}_n^* = y_n^* + z_n^*. \quad (13)$$

Покажем, что последовательность  $z_n^*$  ограничена. Если это не так, то без ограничения общности можно считать, что  $\|z_n^*\| \rightarrow \infty$ . Тогда из (13) получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{y_n^*}{\|z_n^*\|} + \frac{z_n^*}{\|z_n^*\|} \right) = 0. \quad (14)$$

Так как ограниченное множество в конечномерном пространстве компактно, то без ограничения общности можно считать, что последовательность  $z_n^*/\|z_n^*\|$  сходится:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n^*}{\|z_n^*\|} = z_0^* \in N(T^*), \quad \|z_0^*\| = 1.$$

Но тогда из (14) получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n^*}{\|z_n^*\|} = -z_0^* \in \mathcal{K}_2^+.$$

Итак,  $-z_0^* \in N(T^*) \cap \mathcal{K}_2^+$ ,  $\|z_0^*\| = 1$ , что противоречит условию б). Итак, последовательность  $z_n^*$  ограничена. Так как ограниченное множество в сопряженном пространстве слабо\* компактно, то без ограничения

общности можно считать, что  $y_n^*$  и  $z_n^*$  слабо\* стремятся к  $y_0^*$  и  $z_0^*$ . В силу слабой\* замкнутости  $\mathcal{K}_2^+$  и  $N(T^*)$  получаем, что  $y_0^* \geq 0$ ,  $z_0^* \in N(T^*)$ . Из (12), переходя к пределу, получаем  $x_0^* = T^*y_0^*$ ,  $y_0^* \geq 0$ , что и доказывает, что конус  $Q_T$  секвенциально слабо\* замкнут. Так как он выпуклый, то в силу теоремы 15 гл. II он будет и регулярно-выпуклым.

## § 2. Линейные неравенства

В этом параграфе мы рассмотрим теоремы о линейных неравенствах. Пусть  $E_1$  и  $E_2$  — л. н. п., частично упорядоченные замкнутыми выпуклыми конусами  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$ , и пусть линейный оператор  $T \in [E_1 \rightarrow E_2]$ .

**Теорема 6.** Если конус

$$Q_T + \mathcal{K}_2 = \{y: y = z + Tx, \quad z \geq 0, \quad x \geq 0\} \quad (15)$$

замкнут и из  $y^* \geq 0$ ,  $T^*y^* \geq 0$  следует  $(y^*, y_0) \geq 0$ , то существует элемент  $x_0 \geq 0$  такой, что

$$(T^*y^*, x_0) \leq (y^*, y_0) \quad \text{для всех} \quad y^* \geq 0.$$

**Доказательство.** То, что из  $y^* \geq 0$ ,  $T^*y^* \geq 0$  следует  $(y^*, y_0) \geq 0$ , означает в силу (2), что  $y_0 \in {}^+(Q_T^+ \cap \mathcal{K}_2^+)$ . Но в силу формулы (19) гл. II  $Q_T^+ \cap \mathcal{K}_2^+ = (Q_T + \mathcal{K}_2)^+$ . Так как по условию теоремы конус (15) замкнут, то в силу теоремы 21 гл. II получаем

$$\begin{aligned} y_0 &\in {}^+(Q_T + \mathcal{K}_2)^+ = Q_T + \mathcal{K}_2, \\ y_0 &= Tx_0 + z_0, \quad x_0 \geq 0, \quad z_0 \geq 0, \end{aligned}$$

откуда, для всех  $y^* \geq 0$  имеем

$$(y^*, y_0) = (y^*, Tx_0 + z_0) \geq (y^*, Tx_0) = (T^*y^*, x_0),$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь двойственную теорему.

**Теорема 7.** Если конус

$$Q_T + \mathcal{K}_1^+ = \{x^*: x^* = T^*y^* + z^*, \quad z^* \geq 0, \quad y^* \geq 0\} \quad (16)$$

— регулярно-выпуклый и из  $x \geq 0$ ,  $Tx \geq 0$  следует  $(x_0^*, x) \geq 0$ , то найдется элемент  $y_0^*$  такой, что

$$(y_0^*, Tx) \leq (x_0^*, x) \quad \text{для всех} \quad x \geq 0.$$

Доказательство. То, что из  $x \geq 0$ ,  $Tx \geq 0$  следует  $(x_0^*, x) \geq 0$ , означает, что

$$x_0^* \in (\mathcal{K}_1 \cap {}^+Q_{T^*})^+ = ({}^+\mathcal{K}_1^+ \cap {}^+Q_{T^*})^+.$$

Но в силу (19) гл. II  $({}^+\mathcal{K}_1^+ \cap {}^+Q_{T^*}) = ({}^+\mathcal{K}_1^+ + Q_{T^*})$ . Так как по условию конус  $\mathcal{K}_1^+ + Q_{T^*}$  — регулярно-выпуклый, то в силу теоремы 21 гл. II имеем

$$\begin{aligned} x_0^* &\in ({}^+\mathcal{K}_1^+ + Q_{T^*})^+ = \mathcal{K}_1^+ + Q_{T^*}, \\ x_0^* &= T^*y_0^* + z_0^*, \quad y_0^* \geq 0, \quad z_0^* \geq 0, \end{aligned}$$

откуда для всех  $x \geq 0$  получаем

$$(x_0^*, x) = (T^*y_0^* + z_0^*, x) \geq (T^*y_0^*, x) = (y_0^*, Tx),$$

что и доказывает теорему.

Теорема 8. Пусть выполнены следующие условия:

а) конус

$$\mathcal{K}_T = \{(y, r) : y = z + Tx, \quad r = \rho - (x_0^*, x), \\ z \geq 0, \quad x \geq 0, \quad \rho \geq 0\} \quad (17)$$

замкнут,

б) из  $y^* \geq 0$ ,  $T^*y^* - x_0^* \geq 0$  следует  $(y^*, y_0) - \alpha \geq 0$ ,

в) существует элемент  $y^* \geq 0$  такой, что  $T^*y^* - x_0^* \geq 0$ . Тогда найдется элемент  $x_0$  такой, что

$$(T^*y^* - x_0^*, x_0) \leq (y^*, y_0) - \alpha \quad \text{для всех } y^* \geq 0.$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что из  $y^* \geq 0$ ,  $\rho^* \geq 0$ ,  $T^*y^* - \rho^*x_0^* \geq 0$  следует  $(y^*, y_0) - \rho^*\alpha \geq 0$ . Если это не так, то существуют  $y_0^* \geq 0$  и  $\rho_0^* \geq 0$  такие, что

$$T^*y_0^* - \rho_0^*x_0^* \geq 0, \quad \text{но} \quad (y_0^*, y_0) - \rho_0^*\alpha < 0. \quad (18)$$

Если  $\rho_0^* > 0$ , то полагая в (18)  $\eta^* = y_0^*/\rho_0^*$ , получаем

$$\eta^* \geq 0, \quad T^*\eta^* - x_0^* \geq 0, \quad \text{но} \quad (\eta^*, y_0) - \alpha < 0,$$

что противоречит условию б). Если же  $\rho_0^* = 0$ , то из (18) получаем

$$y_0^* \geq 0, \quad T^*y_0^* \geq 0, \quad \text{но} \quad (y_0^*, y_0) < 0. \quad (19)$$

Возьмем элемент  $y^*$  из условия в). Тогда при любом  $\rho^* > 0$  имеем  $T^*y_0^* + \rho^*(T^*y^* - x_0^*) \geq 0$ , или

$T^*(y_0^* + \rho^* \tilde{y}^*) - \rho^* x_0^* \geq 0$ . Очевидно, что  $y_0^* + \rho^* \tilde{y}^* \geq 0$ . Поэтому, по только что доказанному,

$$(y_0^* + \rho^* \tilde{y}^*, y_0) - \rho^* \alpha \geq 0. \quad (20)$$

Так как конус  $\mathcal{K}_2$  замкнут, то в неравенстве (20) можно перейти к пределу при  $\rho^* \rightarrow 0$ . Получаем  $(y_0^*, y_0) \geq 0$ , что противоречит условию (19).

Итак, из  $y^* \geq 0$ ,  $\rho^* \geq 0$ ,  $T^* y^* - \rho^* x_0^* \geq 0$  следует, что  $(y^*, y_0) - \rho^* \alpha \geq 0$ .

Пространство  $E_2 \times R = \tilde{E}_2$  частично упорядочим конусом  $\mathcal{K}_2 \times R^+ = \tilde{\mathcal{K}}_2$ . Рассмотрим линейный оператор  $\tilde{T} \in [E_1 \rightarrow E_2 \times R]$  следующего вида:

$$\tilde{T}x = [Tx, -(x_0^*, x)].$$

Найдем сопряженный оператор  $\tilde{T}^*$ :

$$(\tilde{y}^*, \tilde{T}x) = (\tilde{T}^* \tilde{y}^*, x) = (y^*, Tx) - (x_0^*, x) \rho^* = \\ = (T^* y^* - \rho^* x_0^*, x),$$

откуда

$$\tilde{T}^* \tilde{y}^* = \tilde{T}^* (y^*, \rho^*) = T^* y^* - \rho^* x_0^*. \quad (21)$$

Заметим, что конус  $\mathcal{K}_T$ , определенный формулой (17), есть конус  $Q_T + \tilde{\mathcal{K}}_2$ , определяемый формулой (15), но построенный для оператора  $\tilde{T}$ . Из  $y^* \geq 0$ ,  $\rho^* \geq 0$ ,  $T^* y^* - \rho^* x_0^* \geq 0$  следует, что  $(y^*, y_0) - \rho^* \alpha \geq 0$ . В силу (21) это означает, что из  $\tilde{y}^* \geq 0$ ,  $\tilde{T}^* \tilde{y}^* \geq 0$  следует  $(\tilde{y}^*, \tilde{y}_0) \geq 0$ , где  $\tilde{y}_0 = (y_0, -\alpha)$ . Применяя теорему 6, получаем, что найдется элемент  $x_0 \geq 0$  и такой, что

$$(T^* y^* - \rho^* x_0^*, x_0) \leq (y^*, y_0) - \alpha \rho^* \\ \text{для всех } y^* \geq 0, \rho^* \geq 0.$$

Полагая в последнем соотношении  $\rho^* = 1$ , получаем утверждение теоремы.

Двойственная теорема имеет следующий вид.

**Теорема 9.** Пусть выполнены следующие условия:  
а) конус

$$\mathcal{K}_{T^*} = \{(x^*, r^*): x^* = z^* + T^* y^*, \\ r^* = \rho^* - (y^*, y_0), \rho^* \geq 0, y^* \geq 0, z^* \geq 0\}$$

— регулярно-выпуклый в пространстве  $E_1^* \times R$ ,



- б) из  $x \geq 0$ ,  $Tx - y_0 \geq 0$  следует  $(x_0^*, x) - \beta \geq 0$ ,  
 в) существует элемент  $\bar{x}$  такой, что  $T\bar{x} - y_0 \geq 0$ ,  
 $\bar{x} \geq 0$ . Тогда найдется элемент  $y_0^*$  такой, что
- $$(y_0^*, Tx - y_0) \leq (x_0^*, x) - \beta \quad \text{для всех } x \geq 0.$$

Доказательство теоремы 9 есть почти дословное повторение доказательства теоремы 8, и мы его опускаем.

Заметим, что требование замкнутости конуса (15) в теореме 6 является весьма ограничительным. Если от него отказаться, то теорема 6 может быть доказана в ослабленной, предельной форме.

**Теорема 10.** Пусть из  $y^* \geq 0$ ,  $T^*y^* \geq 0$  следует, что  $(y^*, y_0) \geq 0$ . Тогда найдутся последовательности  $x_n \in E_1$ ,  $x_n \geq 0$  и  $\eta_n \in E_2$ ,  $\eta_n \rightarrow 0$  такие, что для всех  $y^* \geq 0$  выполняется неравенство

$$(T^*y^*, x_n) \leq (y^*, y_0) + (y^*, \eta_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (22)$$

**Доказательство.** То, что из  $y^* \geq 0$ ,  $T^*y^* \geq 0$  следует  $(y^*, y_0) \geq 0$ , означает, что

$$y_0 \in {}^+(\mathcal{K}_1^+ \cap Q_1^+) = {}^+[(\mathcal{K}_2 + Q_T)^+] = \overline{\mathcal{K}_2 + Q_T}.$$

Поэтому

$$y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (Tx_n + z_n), \quad x_n \geq 0, \quad z_n \geq 0,$$

или

$$y_0 = Tx_n + z_n + \eta_n, \quad \eta_n \rightarrow 0.$$

Поэтому для всех  $y^* \geq 0$

$$(y^*, y_0) = (y^*, Tx_n + z_n + \eta_n) \geq (T^*y^*, x_n) + (y^*, \eta_n),$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 11.** Пусть из  $y^* \geq 0$ ,  $T^*y^* + x_0^* \geq 0$  следует, что  $(y^*, y_0) + \alpha \geq 0$ . Тогда найдутся последовательности  $x_n \in E_1$ ,  $x_n \geq 0$ ,  $\eta_n \in E_2$ ,  $\eta_n \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_n \in R$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  такие, что для всех  $y^* \geq 0$  выполняется неравенство

$$(T^*y^* + x_0^*, x_n) \leq (y^*, y_0) + \alpha + (y^*, \eta_n) + \varepsilon_n.$$

**Доказательство.** Повторяя доказательство теоремы 8, получаем, что из  $\tilde{y}^* \geq 0$ ,  $\tilde{T}^*\tilde{y}^* \geq 0$  следует

$(\tilde{y}^*, \tilde{y}_0) \geq 0$ , где

$$\begin{aligned} \tilde{T}x &= [Tx, -(x_0^*, x)], \quad \tilde{T}^*\tilde{y}^* = T^*y^* - x_0^*\rho^*, \\ \tilde{y}^* &= (y^*, \rho^*), \quad \tilde{y} = (y, \rho), \quad \tilde{y}_0 = (y_0, \alpha). \end{aligned} \quad (23)$$

Применяя теперь теорему 10, получаем, что найдутся последовательности  $x_n \in E_1$ ,  $x_n \geq 0$ ,  $\eta_n \in E_2$ ,  $\eta_n \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_n \in R$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  такие, что для всех  $y^* \geq 0$ ,  $\rho^* \geq 0$  выполняется неравенство

$$\left( \tilde{T}^* \begin{pmatrix} y^* \\ \rho^* \end{pmatrix}, x_n \right) \leq \left( \begin{pmatrix} y^* \\ \rho^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha \end{pmatrix} \right) + \left( \begin{pmatrix} y^* \\ \rho^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_n \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \right),$$

или

$$(T^*y^* + \rho^*x_0^*, x_n) \leq (y^*, y_0) + \rho^*\alpha + (y^*, \eta_n) + \rho^*\varepsilon_n.$$

Полагая тут  $\rho^* = 1$ , получаем утверждение теоремы.

### § 3. Элементы теории линейного программирования в л. н. п.

Пусть  $E_1$  и  $E_2$  — л. н. п., частично упорядоченные замкнутыми выпуклыми конусами  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$ , и линейный оператор  $T \in [E_1 \rightarrow E_2]$ . Сопряженные пространства  $E_1^*$  и  $E_2^*$  частично упорядочены сопряженными конусами  $\mathcal{K}_1^+$  и  $\mathcal{K}_2^+$ .

Сформулируем две следующие основные задачи линейного программирования.

**Задача I.** Найти  $\min (x_0^*, x)$  при ограничениях

$$x \geq 0, \quad Tx - y_0 \geq 0. \quad (24)$$

**Задача II.** Найти  $\max (y^*, y_0)$  при ограничениях

$$y^* \geq 0, \quad T^*y^* - x_0^* \leq 0. \quad (25)$$

Элементы  $x$  и  $y^*$ , удовлетворяющие ограничениям (24) и (25), будем называть *допустимыми*. Допустимые элементы, на которых достигается минимум в задаче I или максимум в задаче II, будем называть *оптимальными*.

При исследовании задач линейного программирования большую роль играет так называемая *функция*

*Лагранжа*

$$L(x, y^*) = (x_0^*, x) - (y^*, Tx - y_0) = \\ = (y^*, y_0) - (T^*y^* - x_0^*, x). \quad (26)$$

Пара  $(\bar{x}, \bar{y}^*)$  называется *седловой точкой* функции Лагранжа, если  $\bar{x} \geq 0$ ,  $\bar{y}^* \geq 0$  и

$$L(\bar{x}, y^*) \leq L(\bar{x}, \bar{y}^*) \leq L(x, \bar{y}^*) \\ \text{для всех } x \geq 0, y^* \geq 0. \quad (27)$$

**Теорема 12.** Пусть  $(\bar{x}, \bar{y}^*)$  — седловая точка функции Лагранжа. Тогда  $\bar{x}$  — оптимальный элемент задачи I, а  $\bar{y}^*$  — оптимальный элемент задачи II.

**Доказательство.** Распишем левую часть неравенства (27)

$$(x_0^*, \bar{x}) - (y^*, T\bar{x} - y_0) \leq (x_0^*, \bar{x}) - (y^*, T\bar{x} - y_0).$$

Для всех  $y^* \geq 0$  это неравенство может быть выполнено только, если  $T\bar{x} - y_0 \geq 0$  и

$$(\bar{y}^*, T\bar{x} - y_0) = 0. \quad (28)$$

Распишем теперь правую часть неравенства (27):

$$(x_0^*, \bar{x}) \leq (x_0^*, x) - (\bar{y}^*, Tx - y_0) \leq (x_0^*, x)$$

для всех  $x \geq 0$ ,  $Tx - y_0 \geq 0$ . Итак, элемент  $\bar{x}$  будет оптимальным. Аналогично доказывается, что и элемент  $\bar{y}^*$  оптимален и что выполнено условие

$$(T^*\bar{y}^* - x_0^*, \bar{x}) = 0. \quad (29)$$

Условия (28) и (29) называются *условиями дополняющей нежесткости*. Часто оказывается полезной следующая теорема.

**Теорема 13.** Если элементы  $\bar{x}$  и  $\bar{y}^*$  допустимы и для них выполнены условия дополняющей нежесткости, то они оптимальны.

**Доказательство.** Покажем, что  $(\bar{x}, \bar{y}^*)$  будет седловой точкой функции Лагранжа. Для любого  $y^* \geq 0$  имеем

$$(x_0^*, \bar{x}) - (y^*, T\bar{x} - y_0) \leq (x_0^*, \bar{x}) - (\bar{y}^*, T\bar{x} - y_0),$$

так как  $T\bar{x} - y_0 \geq 0$ ,  $(\bar{y}^*, T\bar{x} - y_0) = 0$ . Поэтому, в силу определения (26) функции Лагранжа, получаем

$$L(\bar{x}, y^*) \leq L(\bar{x}, \bar{y}^*). \quad (30)$$

Аналогично, при любом  $x \geq 0$  имеем

$$(\bar{y}^*, y_0) - (T^* \bar{y}^* - x_0^*, \bar{x}) \leq (y^*, y_0) - (T^* y^* - x_0^*, x),$$

так как  $T^* \bar{y}^* - x_0^* \leq 0$  и  $(T^* \bar{y}^* - x_0^*, \bar{x}) = 0$ . Поэтому, в силу (26), получаем

$$L(\bar{x}, \bar{y}^*) \leq L(x, y^*). \quad (31)$$

Из (30) и (31) следует, что  $(\bar{x}, \bar{y}^*)$  есть седловая точка функции Лагранжа. По теореме 12 элементы  $\bar{x}$  и  $\bar{y}^*$  оптимальны.

Докажем теперь двойственные теоремы, дающие необходимые условия оптимальности.

**Теорема 14.** Пусть конус

$$\mathcal{K}_T = \{(y, r): y = z - Tx, \\ r = \rho + (x_0^*, x), \quad z \geq 0, \quad x \geq 0, \quad \rho \geq 0\} \quad (32)$$

замкнут в пространстве  $E_2 \times R$  и задача II имеет решение  $\bar{y}^*$ . Тогда существует элемент  $\bar{x}$  такой, что пара  $(\bar{x}, \bar{y}^*)$  будет седловой точкой функции Лагранжа.

**Доказательство.** Пусть  $(\bar{y}^*, \bar{y}_0) = \alpha$ . Так как  $\bar{y}^*$  — оптимальный элемент, то из  $y^* \geq 0$ ,  $-T^* y^* - (-x_0^*) \geq 0$  следует, что  $(y^*, -y_0) + \alpha \geq 0$ . Применим теперь теорему 8. Заметим, что при этом оператор  $T$  нужно заменить на  $-T$ ,  $y_0$  на  $-y_0$  и  $x_0^*$  на  $-x_0^*$ . Найдется элемент  $\bar{x} \geq 0$  такой, что для всех  $y^* \geq 0$  будет выполнено условие

$$(-T^* y^* + x_0^*, \bar{x}) \leq (y^*, -y_0) + \alpha = \\ = (\bar{y}^*, y_0) - (y^*, y_0). \quad (33)$$

Полагая в (33)  $y^* = \bar{y}^*$ , получаем  $(-T^* \bar{y}^* + x_0^*, \bar{x}) \leq 0$ . Но  $\bar{x} \geq 0$ ,  $-T^* \bar{y}^* + x_0^* \geq 0$ , поэтому

$$(-T^* \bar{y}^* + x_0^*, \bar{x}) = 0. \quad (34)$$

Используя (34), можем (33) переписать в следующем виде:

$$(y^*, y_0) - (T^* y^* - x_0^*, \bar{x}) \leq (\bar{y}^*, y_0) - (T^* \bar{y}^* - x_0^*, \bar{x}) \\ \text{для всех } y^* \geq 0,$$

или

$$L(\bar{x}, y^*) \leq L(\bar{x}, \bar{y}^*) \quad \text{для всех } y^* \geq 0. \quad (35)$$

С другой стороны, в силу (34) и неравенств  $\bar{x} \geq 0$ ,  $T^*y^* - x_0^* \leq 0$  имеем

$$(y^*, y_0) = (y^*, y_0) - (T^*y^* - x_0^*, \bar{x}) \leq \\ \leq (y^*, y_0) - (T^*y^* - x_0^*, x) \text{ для всех } x \geq 0,$$

или

$$L(\bar{x}, y^*) \leq L(x, y^*) \text{ для всех } x \geq 0. \quad (36)$$

Из (35) и (36) следует, что  $(\bar{x}, y^*)$  есть седловая точка функции Лагранжа.

*Следствие. Если конус (32) замкнут, то из существования решения  $y^*$  задачи II следует, что существует такое решение  $\bar{x}$  задачи I, для которого*

$$(x_0^*, \bar{x}) = (y^*, y_0) \quad (37)$$

*и выполняются условия дополняющей нежесткости*

$$(T^*y^* - x_0^*, \bar{x}) = 0, \quad (y^*, T\bar{x} - y_0) = 0. \quad (38)$$

*Доказательство.* В силу теоремы 14 найдется элемент  $\bar{x}$  такой, что  $(\bar{x}, y^*)$  будет седловой точкой функции Лагранжа. Тогда в силу теоремы 13 задача I имеет решение  $\bar{x}$  и выполняются условия дополняющей нежесткости (38). Равенство (37) получается из выражения (26) для функции Лагранжа, если положить в нем  $x = \bar{x}$ ,  $y^* = y^*$  и воспользоваться условиями дополняющей нежесткости.

Теорема, двойственная теореме 14, имеет следующий вид.

**Теорема 15.** Пусть конус

$$\mathcal{K}_{T^*} = \{(x^*, r^*): x^* = T^*y^* + z^*, r^* = \rho^* - (y^*, y_0), \\ \rho^* \geq 0, y^* \geq 0, z^* \geq 0\} \quad (39)$$

— регулярно-выпуклый в пространстве  $E_1^* \times R$ . Тогда, если задача I имеет решение  $\bar{x}$ , то найдется элемент  $y^*$  такой, что  $(\bar{x}, y^*)$  будет седловой точкой функции Лагранжа.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 14.

*Следствие.* Если конус  $\mathcal{K}_{T^*}$ , определяемый формулой (39), — регулярно-выпуклый, то из существования решения задачи I следует, что существует такое решение задачи II, что выполняются условия (37) и (38).

Докажем теперь следующую простую теорему.

**Теорема 16.** *Если множества  $X$  и  $Y^*$  допустимых элементов задач I и II непусты, то*

$$\sup_{y^* \in Y^*} (y^*, y_0) \leq \inf_{x \in X} (x_0^*, x). \quad (40)$$

**Доказательство.** Пусть  $x \in X$ ,  $y^* \in Y^*$ . Это значит, что  $x \geq 0$ ,  $y^* \geq 0$ ,  $Tx - y_0 \geq 0$ ,  $T^*y^* - x_0^* \leq 0$ . Поэтому

$$(y^*, Tx - y_0) + (x_0^* - T^*y^*, x) \geq 0,$$

и так как  $(y^*, Tx) = (T^*y^*, x)$ , то  $(y^*, y_0) \leq (x_0^*, x)$ . Но  $y^*$  и  $x$  — произвольные допустимые элементы задач I и II. Поэтому справедливо неравенство (40).

В конечномерном случае линейная функция, ограниченная снизу на замкнутом многограннике (многогранном множестве), принимает на нем свое наименьшее значение. Таким образом, в конечномерном случае при выполнении условий теоремы 16 задачи I и II имеют решения. В бесконечномерном случае дело обстоит сложнее. Справедлива следующая простая теорема.

**Теорема 17.** *Если множества допустимых элементов задач I и II непусты, то*

а) *если множество  $Y^*$  ограничено, то задача II имеет решение.*

б) *Если множество  $X$  слабо компактно, то задача I имеет решение.*

**Доказательство.** Пусть множество  $Y^*$  ограничено. Тогда оно слабо\* компактно (в предположении, что пространство  $E_2$  — сепарабельно). Пусть  $y_k^*$  есть максимизирующая последовательность,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (y_k^*, y_0) = \sup_{y^* \in Y^*} (y^*, y_0). \quad (41)$$

В силу неравенства (40) этот предел конечен. Так как  $Y^*$  слабо\* компактно, то из  $y_k^*$  можно выделить сходящуюся слабо\* подпоследовательность. Без ограничения общности можно считать, что и последовательность  $y_k^*$  слабо\* сходится. Переходя в (41) к пределу, получаем

$$(\bar{y}^*, y_0) = \sup_{y^* \in Y^*} (y^*, y_0).$$

Покажем, что элемент  $\bar{y}^*$  допустим. Так как  $y_k^* \geq 0$  и конус  $\mathcal{K}_2^+$  слабо  $*$  замкнут, то  $\bar{y}^* \geq 0$ . Покажем, что  $T^*y^* - x_0^* \leq 0$ . В самом деле, так как  $T^*y_k^* - x_0^* \leq 0$ , то для любого  $x$  имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (T^*y_k^*, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (y_k^*, Tx) = (\bar{y}^*, Tx) = (T^*\bar{y}^*, x),$$

так что  $T^*y_k^*$  слабо  $*$  стремится к  $T^*\bar{y}^*$ . В силу слабой  $*$  замкнутости конуса  $\mathcal{K}_2^+$  из неравенства  $T^*y_k^* - x_0^* \leq 0$  в пределе получаем  $T^*\bar{y}^* - x_0^* \leq 0$ . Поэтому элемент  $\bar{y}^*$  будет допустимым. Случай б) теоремы рассматривается аналогично.

Заметим, что следствие к теореме 14 можно сформулировать в виде теоремы, дающей необходимые условия оптимальности.

**Теорема 18.** Если конус (32) замкнут и  $\bar{y}^*$  есть оптимальный элемент задачи II, то найдется элемент  $\bar{x}$  такой, что

$$\bar{x} \geq 0, \quad T\bar{x} - y_0 \geq 0, \\ (T^*\bar{y}^* - x_0^*, \bar{x}) = 0, \quad (x_0^*, \bar{x}) = (\bar{y}^*, y_0).$$

Если отказаться от требования замкнутости конуса (32), то необходимые условия оптимальности можно получить в предельной форме.

**Теорема 19.** Если  $\bar{y}^*$  — оптимальный элемент задачи II, то найдутся последовательности  $x_n \in E_1$ ,  $x_n \geq 0$  и  $\eta_n \in E_2$ ,  $\eta_n \rightarrow 0$  такие, что

$$Tx_n - y_0 + \eta_n \geq 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (T^*\bar{y}^* - x_0^*, x_n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_0^*, x_n) = (\bar{y}^*, y_0).$$

**Доказательство.** Из  $y^* \geq 0$ ,  $-T^*y^* + x_0^* \geq 0$  следует, что  $(y^*, -y_0) + (\bar{y}^*, y_0) \geq 0$ .

Применяя теорему 11, получаем, что найдутся последовательности  $x_n \geq 0$ ,  $\eta_n \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  такие, что для всех  $y^* \geq 0$

$$(-T^*y^* + x_0^*, x_n) \leq -(y^*, y_0) + (\bar{y}^*, y_0) + (y^*, \eta_n) + \varepsilon_n. \quad (42)$$

Положим  $y^* = \bar{y}^*$ . Тогда  $0 \leq (-T^*\bar{y}^* + x_0^*, x_n) \leq (\bar{y}^*, \eta_n) + \varepsilon_n$ . Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем

$\lim_{n \rightarrow \infty} (T^* \bar{y}^* - x_0^*, x_n) = 0$ . Перепишем неравенство (42) в следующем виде:

$$(y^*, Tx_n - y_0 + \eta_n) \geq (x_0^*, x_n) - (\bar{y}^*, y_0) + \varepsilon_n.$$

При фиксированном  $n$  это неравенство может быть выполнено для всех  $y^* \geq 0$ , только если

$$(y^*, Tx_n - y_0 + \eta_n) \geq 0. \quad (43)$$

В силу замкнутости конуса  $\mathcal{K}_2$  имеем  $Tx_n - y_0 + \eta_n \geq 0$ . Полагая в (43)  $y^* = \bar{y}^*$ , получаем  $(\bar{y}^*, Tx_n - y_0 + \eta_n) \geq 0$ , или

$$(T^* \bar{y}^* - x_0^*, x_n) + (x_0^*, x_n) - (\bar{y}^*, y_0) + (\bar{y}^*, \eta_n) \geq 0,$$

откуда

$$(x_0^*, x_n) \geq (\bar{y}^*, y_0) + (\bar{y}^*, \eta_n) - (T^* \bar{y}^* - x_0^*, x_n). \quad (44)$$

Полагая в (42)  $y^* = 0$ , получаем

$$(x_0^*, x_n) \leq (\bar{y}^*, y_0) + \varepsilon_n. \quad (45)$$

Из (44) и (45) следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_0^*, x_n) = (\bar{y}^*, y_0),$$

что и требовалось доказать.

Поставим обобщенную задачу линейного программирования.

*Задача I'. На множестве последовательностей  $x_n$  и  $\eta_n$  таких, что*

$$Tx_n - y_0 + \eta_n \geq 0, \quad x_n \geq 0, \quad \eta_n \rightarrow 0,$$

*найти*

$$\min \lim (x_0^*, x_n).$$

**Теорема 20.** *Последовательность  $x_n$ , полученная в теореме 19, будет оптимальной для задачи I'.*

**Доказательство.** Пусть  $\xi_n$  — допустимая последовательность. Тогда

$$(\bar{y}^*, T\xi_n - y_0 + \eta_n) + (-T^* \bar{y}^* + x_0^*, \xi_n) \geq 0,$$



откуда

$$(x_0^*, \xi_n) \geq (\bar{y}^*, y_0) - (\bar{y}^*, \eta_n),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_0^*, \xi_n) \geq (\bar{y}^*, y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_0^*, x_n),$$

что и требовалось доказать.

Последовательность  $x_n$  в теореме 19 может быть неограниченной. Удобно поэтому ввести нормирующий множитель, полагая

$$s_n = \frac{1}{1 + \|x_n\|}, \quad x'_n = \frac{x_n}{1 + \|x_n\|}.$$

Без ограничения общности можно считать, что ограниченная числовая последовательность  $s_n$  сходится,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ .

После нормировки теорема 19 может быть переписана в следующем виде.

**Теорема 19'.** Если  $\bar{y}^*$  — оптимальный элемент задачи II, то найдутся последовательность  $x_n \in E_1$  и число  $s \geq 0$  такие, что

$$Tx_n - sy_0 + \eta_n \geq 0, \quad x_n \geq 0, \quad \eta_n \rightarrow 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T^* \bar{y}^* - x_0^*, x_n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [(x_0^*, x_n) - s(\bar{y}^*, y_0)] = 0,$$
(46)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{y}^*, Tx_n - sy_0) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| + s = 1.$$

Поставим задачу, аналогичную задаче I'.

**Задача I''.** На множестве последовательностей  $x_n$ ,  $\eta_n$  и чисел  $s$  таких, что

$$Tx_n - sy_0 + \eta_n \geq 0, \quad \|x_n\| + s = 1,$$

$$x_n \geq 0, \quad \eta_n \rightarrow 0, \quad s \geq 0,$$

найти

$$\min \lim (x_0^*, x_n).$$

**Теорема 20'.** Последовательности  $x_n$  и  $\eta_n$  и число  $s$ , полученные в теореме 19', дают решение задачи I''.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 20.

Будем говорить, что по условию  $T^* y^* - x_0^* \leq 0$  выполнено условие Слейтера, если найдется такой строго

положительный линейный функционал  $e^* \in E_1^*$  и элемент  $\tilde{y} \in E_2^*$ , что

$$\tilde{y}^* \geq 0, \quad x_0^* - T^* \tilde{y}^* \geq e^*. \quad (47)$$

Напомним, что линейный функционал  $e^*$  называется строго положительным, если существует такое положительное число  $\alpha$ , что для всех  $x \geq 0$  выполнено неравенство

$$(e^*, x) \geq \alpha \|x\|.$$

**Теорема 19".** Если по ограничению  $T^* \tilde{y}^* - x_0^* \leq 0$  выполнено условие Слейтера, то число  $s$  отлично от нуля.

**Доказательство.** Из условия (46) при  $s=0$  получаем

$$Tx_n \geq \eta_n, \quad (x_0^*, x_n) \rightarrow 0 \quad \|x_n\| \rightarrow 1, \quad \eta_n \rightarrow 0.$$

Воспользовавшись условием Слейтера, получаем

$$\begin{aligned} -\alpha \|x_n\| &\geq -(e^*, x_n) \geq (T^* \tilde{y}^* - x_0^*, x_n) = \\ &= (\tilde{y}^*, Tx_n) - (x_0^*, x_n) \geq (\tilde{y}^*, \eta_n) - (x_0^*, x_n) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Так как  $\|x_n\| \rightarrow 1$ , то из последнего неравенства при  $n \rightarrow \infty$  получаем противоречивое неравенство  $-\alpha \geq 0$ . Полученное противоречие доказывает, что число  $s \neq 0$ .

#### § 4. Исследование замкнутости конусов, связанных с задачами линейного программирования

Исследуем вопрос о замкнутости конуса  $\mathcal{K}_T$ , определяемого формулой (32). Будем считать, что оператор  $T$  действует из банахова пространства  $B_1$  в банахово пространство  $B_2$  и имеет замкнутую область значений. Пространства  $B_1$  и  $B_2$  частично упорядочены замкнутыми выпуклыми конусами  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$ . Рассмотрим линейный оператор  $\tilde{T} \in [B_1 \times B_2 \times R \rightarrow B_2 \times R]$  следующего вида:

$$\begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = \tilde{T} \begin{pmatrix} x \\ z \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - Tx \\ \rho + (x_0^*, x) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что  $\mathcal{K}_T$  есть конус  $Q\tilde{T}$ , определяемый формулой (1):

$$\mathcal{K}_T = Q\tilde{T} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = \tilde{T} \begin{pmatrix} x \\ z \\ \rho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ z \\ \rho \end{pmatrix} \geq 0 \right\}.$$

Выпишем формулу для сопряженного оператора:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ z^* \\ \rho^* \end{pmatrix} = \tilde{T}^* \begin{pmatrix} y^* \\ r^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^* x_0^* - T^* y^* \\ y^* \\ r^* \end{pmatrix}.$$

Докажем следующую теорему:

**Теорема 21.** Если для задачи II по ограничению  $T^* y^* + x_0^* \leq 0$  выполнено условие Слейтера (47), то существует такая постоянная  $c$ , что из  $(y, r) \in \mathcal{K}_T$  следует

$$\|x\|, \|z\|, |\rho| \leq c(\|y\| + |r|).$$

**Доказательство.** Пусть  $(y, r) \in \mathcal{K}_T$ . Это означает, что

$$y = z - Tx, \quad r = \rho + (x_0^*, x), \quad x \geq 0, z \geq 0, \rho \geq 0. \quad (48)$$

Умножая первое неравенство на  $\tilde{y}^*$  и складывая со вторым, получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{y}^*, z - Tx) + \rho + (x_0^*, x) &\geq \\ &\geq (x_0^* - T^* \tilde{y}^*, x) \geq (e^*, x) \geq \gamma \|x\|, \quad \gamma > 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \frac{1}{\gamma} (\tilde{y}^*, y) + r \leq \frac{1}{\gamma} \|\tilde{y}^*\| \|y\| + r \leq \\ &\leq c(\|y\| + r), \quad c = \max \left\{ \frac{1}{\gamma} \|\tilde{y}^*\|, r \right\}. \end{aligned}$$

Из равенств (48) теперь получаются остальные оценки.

**Теорема 22.** Если линейный функционал  $x_0^*$  строго положителен, то справедливы оценки теоремы 21.

**Доказательство.** Из равенств (48), пользуясь строгой положительностью линейного функционала  $x_0^*$ , получаем

$$\rho + (x_0^*, x) \geq (x_0^*, x) \geq \gamma \|x\|, \quad \|x\| \leq cr \leq c(r + \|y\|).$$

Остальные неравенства просто следуют из формул (48).

**Теорема 23.** Пусть сепарабельные банаховы пространства  $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2$  частично упорядочены замкнутыми выпуклыми конусами  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ . Банаховы пространства  $B_1$  и  $B_2$  сопряжены пространствам  $\tilde{B}_1$  и  $\tilde{B}_2$ , конусы  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  сопряжены конусам  $\mathcal{K}_1 \subset \tilde{B}_1$  и  $\mathcal{K}_2 \subset \tilde{B}_2$ . Линейный оператор  $\tilde{T} \in [\tilde{B}_2 \rightarrow \tilde{B}_1]$ , а оператор  $T \in [B_1 \rightarrow B_2]$  сопряжен оператору  $\tilde{T}$ . Тогда при выполнении следующих условий:

а) по ограничению  $T^*y^* - x_0^* \leq 0$  выполнено условие Слейтера,

б) линейный функционал  $x_0^* \in \tilde{B}_1$  конус  $\mathcal{K}_T$  будет замкнутым.

**Доказательство.** Пусть  $(y_0, r_0)$  — предельная точка конуса  $\mathcal{K}_T$ . Это означает, что

$$y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - Tx_n), \quad r_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} [\rho_n + (x_0^*, x_n)], \quad (49)$$

$$z_n \geq 0, \quad x_n \geq 0, \quad \rho_n \geq 0.$$

Воспользовавшись результатами теорем 21 или 22 соответственно, получаем, что и последовательности  $x_n, z_n$  и  $\rho_n$  ограничены. Так как пространства  $B_1$  и  $B_2$  сопряжены пространствам  $\tilde{B}_1$  и  $\tilde{B}_2$ , то  $x_n$  и  $z_n$  можно рассматривать как ограниченные последовательности линейных функционалов в пространствах  $\tilde{B}_1$  и  $\tilde{B}_2$ . По известной теореме ограниченные последовательности линейных функционалов слабо\* компактны. Без ограничения общности можно считать, что они слабо\* сходятся. Ограниченную числовую последовательность  $\rho_n$  также можно считать сходящейся. Переходя в равенствах (49) к пределу и воспользовавшись тем, что сопряженный конус слабо\* замкнут, получаем

$$y_0 = z_0 - Tx_0, \quad r_0 = \rho_0 + (x_0^*, x_0),$$

$$z_0 \geq 0, \quad x_0 \geq 0, \quad \rho_0 \geq 0,$$

что и доказывает замкнутость конуса  $\mathcal{K}_T$ .

Заметим, что доказанные в этом параграфе теоремы не охватывают многих практически важных случаев. Замкнутость конуса в этих случаях приходится доказывать при помощи более тонких рассуждений, учитывающих специфику задачи.

## § 5. Учет ограничений типа равенств

При исследовании простейших задач линейного программирования в § 3 учитывались только ограничения типа неравенств. Ценой некоторого усложнения можно учесть и ограничения типа равенств.

Пусть  $E_1, E_2, E_3, E_4$  — л. н. п. Пространства  $E_1$  и  $E_2$  частично упорядочены замкнутыми выпуклыми конусами  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$ . Сопряженные пространства частично упорядочены сопряженными конусами. Заданы линейные операторы

$$\begin{aligned} T &\in [E_1 \rightarrow E_2], & S &\in [E_3 \rightarrow E_2], \\ P &\in [E_1 \rightarrow E_4], & R &\in [E_3 \rightarrow E_4]. \end{aligned}$$

Рассмотрим две следующие основные задачи линейного программирования, являющиеся обобщением задач линейного программирования I и II, сформулированных в § 3.

Задача I' *Найти*

$$\min \{(x_0^*, x) + (\xi_0^*, \xi)\}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} x &\in E_1, \quad x \geq 0, \quad \xi \in E_3, \\ Tx + S\xi - y_0 &\geq 0, \quad Px + R\xi - \eta_0 = 0. \end{aligned}$$

Задача II'. *Найти*

$$\max \{(y^*, y_0) + (\eta^*, \eta_0)\}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} y^* &\in E_2^*, \quad y^* \geq 0, \quad \eta^* \in E_4^*, \\ T^*y^* + P^*\eta^* - x_0^* &\leq 0, \quad S^*y^* + R^*\eta^* - \xi_0^* = 0. \end{aligned}$$

По аналогии с предыдущим параграфом будем также рассматривать следующую задачу.

Задача I''. *Найти*

$$\min \lim \{(x_0^*, x_n) + (\xi_0^*, \xi_n)\}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} x_n &\in E_1, \quad x_n \geq 0, \quad \xi_n \in E_3, \\ Tx_n + S\xi_n - y_0 + \eta_n &\geq 0, & \eta_n &\rightarrow 0, \\ Px_n + R\xi_n - \eta_0 + \zeta_n &= 0, & \zeta_n &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

Функция Лагранжа для задач I' и II' будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} L(x, \xi, y^*, \eta^*) = & \\ = (x_0^*, x) + (\xi_0^*, \xi) - (y^*, Tx + S\xi - y_0) - & \\ - (\eta^*, Px + R\xi - \eta_0) = (y^*, y_0) + (\eta^*, \eta_0) - & \\ - (T^*y^* + P^*\eta^* - x_0^*, x) - (S^*y^* + R^*\eta^* - \xi_0^*, \xi). \end{aligned}$$

Точка  $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{y}^*, \bar{\eta}^*)$  называется *седловой точкой* функции Лагранжа, если  $\bar{x} \geq 0$ ,  $\bar{y}^* \geq 0$  и выполнены неравенства

$$L(\bar{x}, y^*, \bar{\xi}, \eta^*) \leq L(\bar{x}, \bar{y}^*, \bar{\xi}, \bar{\eta}^*) \leq L(x, \bar{y}^*, \bar{\xi}, \bar{\eta}^*)$$

для всех  $y^* \geq 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $\xi \in E_3$ ,  $\eta^* \in E_4^*$ .

Доказательства теорем этого параграфа получаются небольшим видоизменением доказательств соответствующих теорем предыдущих параграфов. Мы приводим их без доказательств.

**Теорема 24.** Пусть  $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{y}^*, \bar{\eta}^*)$  есть седловая точка функции Лагранжа. Тогда  $\bar{x}, \bar{\xi}$  есть решение задачи I', а  $\bar{y}^*, \bar{\eta}^*$  есть решение задачи II'.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 12.

Рассмотрим конусы, связанные с операторами

$$\begin{aligned} Q &= \{(y, \eta): y = Tx + S\xi, \eta = Px + R\xi, x \geq 0\}, \\ Q^* &= \{(y^*, \eta^*): x^* = T^*y^* + P^*\eta^*, \\ &\quad \xi^* = S^*y^* + R^*\eta^*, y^* \geq 0\}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что сопряженные конусы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Q^+ &= \{(y^*, \eta^*): T^*y^* + P^*\eta^* \geq 0, S^*y^* + R^*\eta^* = 0\}, \\ +Q^* &= \{(x, \xi): Tx + S\xi \geq 0, Px + R\xi = 0\}. \end{aligned}$$

Условия дополняющей нежесткости для задач I' и II' имеют следующий вид:

$$(y^*, Tx + S\xi - y_0) = 0, \quad (T^*y^* + P^*\eta^* - x_0^*, x) = 0.$$

**Теорема 25.** Если элементы  $x, \xi, y^*, \eta^*$  допустимы и для них выполнены условия дополняющей нежесткости, то они будут оптимальными.

**Теорема 26.** Пусть из  $y^* \geq 0$ ,  $\eta^* \in E_i^*$ ,  $T^*y^* + P^*\eta^* \geq 0$ ,  $S^*y^* + R^*\eta^* = 0$  следует, что  $(y^*, y_0) + (\eta^*, \eta_0) \geq 0$ , и пусть конус

$$\mathcal{K}_0 = \{(y, \eta): y = z + Tx + S\xi,$$

$$\eta = Px + R\xi, x \geq 0, z \geq 0\}$$

замкнут в пространстве  $E_2 \times E_4$ . Тогда найдутся элементы  $\bar{x}$ ,  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{x} \geq 0$  такие, что для всех  $y^* \geq 0$ ,  $\eta^* \in E_i^*$  выполнены неравенства

$$(T^*y^* + P^*\eta^*, \bar{x}) + (S^*y^* + R^*\eta^*, \bar{\xi}) \leq (y^*, y_0) + (\eta^*, \eta_0).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6. То, что из  $y^* \geq 0$ ,  $\eta^* \in E_i^*$ ,  $T^*y^* + P^*\eta^* \geq 0$ ,  $S^*y^* + R^*\eta^* = 0$  следует, что  $(y^*, y_0) + (\eta^*, \eta_0) \geq 0$ , означает, что

$$(y_0, \eta_0) \in [(\mathcal{K}_2^+ \times E_i^*) \cap Q^+] = \\ = [(\mathcal{K}_2 \times \{0\} + Q)^+ = \mathcal{K}_0^+ = \overline{\mathcal{K}_0} = \mathcal{K}_0.$$

Поэтому

$$y_0 = z + T\bar{x} + S\bar{\xi}, \quad \eta_0 = P\bar{x} + R\bar{\xi}, \quad \bar{x} \geq 0, z \geq 0,$$

и следовательно,

$$(y^*, y_0) + (\eta^*, \eta_0) = \\ = (y^*, z + T\bar{x} + S\bar{\xi}) + (\eta^*, P\bar{x} + R\bar{\xi}) \geq \\ \geq (T^*y^* + P^*\eta^*, \bar{x}) + (S^*y^* + R^*\eta^*, \bar{\xi}),$$

что и требовалось доказать.

Если отказаться от требования замкнутости конуса  $\mathcal{K}_0$ , то теорему 26 можно доказать в предельной форме.

**Теорема 27.** Пусть из  $y^* \geq 0$ ,  $\eta^* \in E_i^*$ ,  $T^*y^* + P^*\eta^* \geq 0$ ,  $S^*y^* + R^*\eta^* = 0$  следует, что  $(y^*, y_0) + (\eta^*, \eta_0) \geq 0$ . Тогда найдутся последовательности  $x_n \geq 0$ ,  $\xi_n \in E_3$ ,  $\xi'_n, \xi''_n \in E_2, E_4$ ,  $\xi'_n, \xi''_n \rightarrow 0$  такие, что

$$(T^*y^* + P^*\eta^*, x_n) + (S^*y^* + R^*\eta^*, \xi_n) \leq \\ \leq (\eta^*, \eta_0) + (y^*, y_0) + (y^*, \xi'_n) + (\eta^*, \xi''_n)$$

для всех  $y^* \geq 0$ ,  $\eta^* \in E_i^*$ .

**Доказательство.** Из доказательства предыдущей теоремы следует, что  $(y_0, \eta_0) \in \mathcal{K}_0$ . Поэтому

$$y_0 = z + T\bar{x} + S\xi + \zeta'_n, \quad \eta_0 = P\bar{x} + R\xi + \zeta'_n,$$

откуда, аналогично доказательству теоремы 26, получаем доказательство утверждения теоремы 27.

**Теорема 28.** Пусть из  $y^* \geq 0$ ,  $\eta^* \in E_4^*$ ,  $T^*y^* + P^*\eta^* - x_0^* \geq 0$ ,  $S^*y^* + R^*\eta^* - \xi_0^* = 0$  следует, что  $(y^*, y_0) + (\eta^*, \eta_0) + \alpha \geq 0$ , и пусть конус

$$\mathcal{K} = \{(y, \eta, r): y = z + Tx + S\xi, \eta = Px + R\xi, \\ r = \rho - (x_0^*, x) - (\xi_0^*, \xi), \quad z \geq 0, x \geq 0, \rho \geq 0\} \quad (49')$$

замкнут в пространстве  $E_2 \times E_4 \times R$ . Тогда найдутся элементы  $\xi \in E_3$  и  $\bar{x} \geq 0$  такие, что для всех  $y^* \geq 0$ ,  $\eta^* \in E_4^*$  будет выполнено неравенство

$$(T^*y^* + P^*\eta^* - x_0^*, \bar{x}) + (S^*y^* + R^*\eta^* - \xi_0^*, \xi) \leq \\ \leq (y^*, y_0) + (\eta^*, \eta_0) + \alpha.$$

**Доказательство.** Как и при доказательстве теоремы 8, показывается, что из  $y^* \geq 0$ ,  $\rho^* \geq 0$ ,  $\eta^* \in E_4^*$ ,  $S^*y^* + R^*\eta^* - \rho^*\xi_0^* = 0$  и  $T^*y^* + P^*\eta^* - \rho^*x_0^* \geq 0$  следует, что  $(y^*, y_0) + (\eta^*, \eta_0) + \alpha\rho^* \geq 0$ .

Вводится оператор  $\tilde{T} \in [E_1 \times E_3 \rightarrow E_2 \times E_4 \times R]$

$$\tilde{T}(x, \xi) = [Tx + S\xi, Px + R\xi, -(x_0^*, x) - (\xi_0^*, \xi)].$$

Сопряженный оператор  $\tilde{T}^* \in [E_2^* \times E_4^* \times R \rightarrow E_1^* \times E_3^*]$  имеет следующий вид:

$$\tilde{T}^*(y^*, \eta^*, \rho^*) = \\ = (T^*y^* + P^*\eta^* - \rho^*x_0^*, S^*y^* + R^*\eta^* - \xi_0^*\rho^*).$$

Далее применяется теорема 26 к оператору  $\tilde{T}$ . Заметим, что конус  $\mathcal{K}$  есть конус  $Q$ , построенный для оператора  $\tilde{T}$ . Найдутся элементы  $\bar{x} \geq 0$  и  $\xi \in E_3$  такие, что неравенство

$$(T^*y^* + P^*\eta^* - \rho^*x_0^*, \bar{x}) + (S^*y^* + R^*\eta^* - \rho^*\xi_0^*, \xi) \leq \\ \leq (y^*, y_0) + (\eta^*, \eta_0) + \alpha$$

будет выполнено для всех  $y^* \geq 0$ ,  $\eta^* \in E_4^*$ . Полагая  $\rho^* = 1$ , получаем утверждение теоремы.

Сформулируем теперь теорему, аналогичную теореме 11.



**Теорема 29.** Пусть из  $y^* \geq 0$ ,  $\eta^* \in E_4^*$ , из  $T^*y^* + P^*\eta^* - x_0^* \geq 0$ ,  $S^*y^* + R^*\eta^* - \xi_0^* = 0$  следует, что  $(y^*, y_0) + (\eta^*, \eta_0) + \alpha \geq 0$ . Тогда найдутся последовательности  $x_n \geq 0$ ,  $\xi_n \in E_3$ ,  $\xi_n, \xi'_n \in E_2$ ,  $E_3, \xi_n, \xi'_n \rightarrow 0$ ,  $e_n \in R$ ,  $e_n \rightarrow 0$  такие, что для всех  $y^* \geq 0$ ,  $\eta^* \in E_4^*$  будет выполнено неравенство

$$(T^*y^* + P^*\eta^* - x_0^*, x_n) + (S^*y^* + R^*\eta^* - \xi_0^*, \xi_n) \leq \\ \leq (y^*, y_0) + (\eta^*, \eta_0) + \alpha + (y^*, \xi'_n) + (\eta^*, \xi_n).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 11.

**Теорема 30.** Пусть конус, определяемый соотношениями (49'), замкнут в пространстве  $E_2 \times E_4 \times R$  и задача II' имеет решение  $\bar{y}^*, \bar{\eta}^*$ . Тогда найдутся элементы  $(\bar{x}, \bar{\xi})$  и  $\bar{x} \geq 0$  такие, что  $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{y}^*, \bar{\eta}^*)$  будет седловой точкой функции Лагранжа.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 14.

**Следствие.** Если конус  $\mathcal{K}$  замкнут, то из существования решения  $\bar{y}^*, \bar{\eta}^*$  задачи II' следует, что существует такое решение  $\bar{x}, \bar{\xi}$  задачи I', для которого будут выполнены следующие условия:

$$(x_0^*, \bar{x}) + (\xi_0^*, \bar{\xi}) = (\bar{y}^*, y_0) + (\bar{\eta}^*, \eta_0), \\ (T^*\bar{y}^* + P^*\bar{\eta}^* - x_0^*, \bar{x}) = 0, \quad (\bar{y}^*, T\bar{x} + S\bar{\xi} - \eta_0) = 0.$$

**Теорема 31.** Если множества допустимых элементов  $Y^*$  и  $X$  задач I' и II' непусты и множество допустимых элементов задачи II' ограничено, то задача II' имеет решение.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 17.

**Теорема 32.** Если  $\bar{y}^* \geq 0$  и  $\bar{\eta}^* \in E_4^*$  есть оптимальные элементы задачи II', то найдутся последовательности  $x_n \geq 0$ ,  $\xi_n \in E_3$ ,  $\xi'_n \in E_2$ ,  $\xi'_n \rightarrow 0$ ,  $\xi''_n \in E_4$ ,  $\xi''_n \rightarrow 0$  такие, что

$$Tx_n + S\xi_n - y_0 + \xi'_n \geq 0, \quad Px_n + R\xi_n - \eta_0 + \xi''_n = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T^*\bar{y}^* + P^*\bar{\eta}^* - x_0^*, x_n) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(x_0^*, x_n) + (\xi_0^*, \xi_n)] = (\bar{y}^*, y_0) + (\bar{\eta}^*, \eta_0).$$

Последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{\xi_n\}$  дают решение задачи I'.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 19.

Сформулируем теперь теорему, аналогичную теореме 19'.

**Теорема 32'.** Если  $\bar{y}^*$  и  $\bar{\eta}^*$  есть оптимальные элементы задачи II', то найдутся последовательности  $x_n \geq 0$ ,  $\xi_n \in E_3$  и числовая последовательность  $s_n \geq 0$  такие, что

$$\begin{aligned} Tx_n + S\xi_n - s_n y_0 + \zeta'_n &\geq 0, & \zeta'_n &\rightarrow 0, \\ Px_n + R\xi_n - s_n \eta_0 + \zeta''_n &= 0, & \zeta''_n &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \|x_n\| + \|\xi_n\| + s_n &= 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (T^* \bar{y}^* + P^* \bar{\eta}^* - x_0^*, x_n) &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{y}^*, Tx_n + S\xi_n - s_n y_0) &= 0, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(x_0^*, x_n) + (\xi_0^*, \xi_n) - s_n (\bar{y}^*, y_0) - s_n (\bar{\eta}^*, \eta_0)] = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

Будем говорить, что по условию  $T^* y^* + P^* \eta^* - x_0^* \leq 0$  удовлетворяется условие Слейтера, если найдется строго положительный линейный функционал  $e^* \in E_1^*$  и элементы  $\tilde{y}^* \in E_2^*$ ,  $\tilde{\eta}^* \in E_4^*$  такие, что

$$T^* \tilde{y}^* + P^* \tilde{\eta}^* - x_0^* \leq -e^*, \quad S^* \tilde{y}^* + R^* \tilde{\eta}^* - \xi_0^* = 0.$$

Будем говорить, что ограничение типа равенства  $S^* y^* + R^* \eta^* - \xi_0^* = 0$  — невырожденное, если любой элемент пространства  $E_3^*$  может быть представлен в следующем виде:

$$\xi^* = S^* y^* + R^* \eta^* - \xi_0^*, \quad y^* \geq 0, \quad \eta^* \in E_4^*. \quad (52)$$

**Теорема 32''.** Если по ограничению  $T^* y^* + P^* \eta^* - x_0^* \leq 0$  удовлетворено условие Слейтера, а ограничение типа равенства — невырожденное, то число  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  отлично от нуля.

**Доказательство.** Умножая первое из соотношений (50) на  $\tilde{y}^*$ , а второе на  $\tilde{\eta}^*$  и складывая, получаем после простых преобразований, при условии,

что  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ :

$$(T^* \tilde{y} + P^* \tilde{\eta} - x_0^*, x_n) \geq \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

Воспользовавшись условием Слейтера, теперь имеем, что и  $x_n \rightarrow 0$ . Третье из ограничений (50) теперь дает, что  $\|\xi_n\| \rightarrow 1$ . Условия (50) теперь можно записать в следующем виде:

$$S\xi_n + \zeta'_n \geq 0, \quad R\xi_n + \zeta'_n = 0, \quad \zeta'_n \rightarrow 0, \quad \zeta''_n \rightarrow 0, \quad \|\xi_n\| \rightarrow 1.$$

Возьмем произвольный элемент  $\xi^*$  пространства  $E_3^*$  в виде (52). Умножая первое ограничение на  $y^*$ , а второе на  $\eta^*$  и складывая, получаем

$$(\xi^*, \xi_n) + \varepsilon_n = 0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

В силу произвольности элемента  $\xi^*$  имеем  $\xi_n \rightarrow 0$ . Это противоречит условию  $\|\xi_n\| \rightarrow 1$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ .

**Теорема 33.** Пусть банаховы пространства  $B_1, B_2, B_3, B_4$  сопряжены сепарабельным банаховым пространствам  $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{B}_3, \tilde{B}_4$ . Пространства  $\tilde{B}_1$  и  $\tilde{B}_2$  частично упорядочены выпуклыми замкнутыми конусами  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$ , а пространства  $B_1$  и  $B_2$  — сопряженными конусами  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$ . Заданы линейные операторы  $\tilde{T} \in [\tilde{B}_2 \rightarrow \tilde{B}_1]$ ,  $\tilde{S} \in [\tilde{B}_2 \rightarrow \tilde{B}_3]$ ,  $\tilde{P} \in [\tilde{B}_4 \rightarrow \tilde{B}_1]$ ,  $\tilde{R} \in [\tilde{B}_4 \rightarrow \tilde{B}_3]$ . Операторы  $T \in [B_1 \rightarrow B_2]$ ,  $S \in [B_3 \rightarrow B_2]$ ,  $P \in [B_1 \rightarrow B_4]$ ,  $R \in [B_3 \rightarrow B_4]$  сопряжены операторам  $\tilde{T}, \tilde{S}, \tilde{P}, \tilde{R}$ . Выполнено условие

а) Из  $x^* \in \mathcal{K}_1^+, y^* \in \mathcal{K}_2^+, x_n \in \mathcal{K}_1, y_n \in \mathcal{K}_2, x_n y_n$  слабо\* стремятся к  $x_0, y_0$  следует  $\lim (x^*, x_n) \geq (x^*, x_0)$ ,  $\lim (y^*, y_n) \geq (y^*, y_0)$ .

Тогда для оптимальных элементов  $\bar{y}^*, \bar{\eta}^*$  задачи  $\Pi'$  найдутся элементы  $\bar{x} \in B_1, \bar{x} \geq 0, \bar{\xi} \in B_3$  и число  $s \geq 0$  такие, что

$$T\bar{x} + S\bar{\xi} - sy_0 \geq 0, \quad P\bar{x} + R\bar{\xi} - s\eta_0 = 0, \quad \|\bar{x}\| + \|\bar{\xi}\| + s > 0, \\ (T^* \bar{y}^* + P^* \bar{\eta}^* - x_0^*, \bar{x}) = 0, \quad (\bar{y}^*, T\bar{x} + S\bar{\xi} - sy_0) = 0. \quad (53)$$

Если еще выполнены условия теоремы 32", то можно положить  $s=1$ . В этом случае  $\bar{x}$  и  $\bar{\xi}$  будут давать решение задачи  $\Pi'$ .

**Доказательство.** Будем рассматривать в формулах (50)—(51)  $x_n$  и  $\xi_n$  как линейные функционалы в пространствах  $\tilde{B}_1, \tilde{B}_3$ . Так как  $\|x_n\| \leq 1$  и  $\|\xi_n\| \leq 1$ , то из этих последовательностей можно выделить слабо\*сходящиеся подпоследовательности функционалов. Переходя к пределу в формулах (50)—(51), получаем формулы (53). Если выполнены условия теоремы 32", то  $s \neq 0$  и после перенормировки мы получим формулы (53), но уже с  $s = 1$ .

Заметим, что для тройки пространств последовательностей  $c_r^0, l_r^1, l_r^\infty$  выполнено условие а) теоремы 33. Если  $x^* \in l_r^\infty, x^* \geq 0, x_n \in l_r^1, x_n \geq 0$  и для любого  $y \in c_r^0, y \geq 0$  выполнено условие  $\lim (x_n, y) = (x_0, y)$ , то

$$\underline{\lim} (x^*, x_n) \geq (x^*, x_0).$$

Заметим также, что при выполнении условия а) теоремы 33, условие б) в теореме 23 можно отбросить и считать  $x_0^* \in B_1^*$ .

### § 1. Выпуклые функции и операторы

Пусть  $E$  — л. н. п., а функция  $f(x)$  определена на  $E$  и принимает значения из расширенной области вещественных чисел, т. е. функция  $f(x)$  может принимать и значения  $\pm \infty$ . Функция  $f(x)$  называется *выпуклой*, если для любых  $x_1, x_2 \in E$  и для любого вещественного  $\lambda$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , выполняется условие

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2). \quad (1)$$

Функция  $f(x)$  называется *вогнутой*, если функция  $-f(x)$  будет выпуклой, т. е. для вогнутой функции неравенство (1) выполняется с противоположным знаком. Выпуклая функция называется *собственной*, если она не принимает значения  $-\infty$  и по крайней мере в одной точке конечна. В противном случае выпуклая функция называется *несобственной*. С выпуклыми функциями тесно связаны два выпуклых множества: *надграфик*  $\text{epi } f$  и *эффективная область*  $\text{dom } f$ , которые определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{epi } f &= \{(x, \mu): x \in E, \mu \geq f(x)\}, \\ \text{dom } f &= \{x: |f(x)| < +\infty\}. \end{aligned}$$

У собственной выпуклой функции надграфик не есть пустое множество и не содержит вертикальных прямых.

Теория выпуклых функций хорошо развита и имеет многочисленные приложения. Имея в виду те приложения, которые рассматриваются в этой книге, ограничимся изучением наиболее простого случая дифференцируемых выпуклых функций.

**Теорема 1.** Если собственная выпуклая функция  $f(x)$  имеет в точке  $\bar{x}$  производную Фреше (или Гато),

то справедливо неравенство

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq f'(\bar{x})(x - \bar{x}). \quad (2)$$

**Доказательство.** Для функции одной переменной неравенство (2) очевидно. Оно отражает тот геометрический факт, что угол наклона хорды больше угла наклона касательной к графику в точке  $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ . Рассмотрим теперь следующую функцию одной переменной:

$$\varphi(t) = f(\bar{x} + t(x - \bar{x})) = f(tx + (1 - t)\bar{x}). \quad (3)$$

Если  $f(x)$  было конечным, то в силу неравенства (1) функция  $\varphi(t)$  принимает конечные значения при  $0 \leq t \leq 1$ . Кроме того, она выпукла и имеет производную в точке  $t=0$ . Применяя к ней неравенство (2), получаем  $\varphi(1) - \varphi(0) \geq \varphi'(0)$ . Воспользовавшись теперь выражением (3) для функции  $\varphi(t)$ , получаем неравенство (2). Если  $f(x) = +\infty$ , то неравенство (2) выполняется очевидным образом.

Заметим, что для вогнутой функции выполняется неравенство, противоположное неравенству (2).

Пусть теперь оператор  $\Phi(x)$  действует из л. н. п.  $E_1$  в л. н. п.  $E_2$ , частично упорядоченное конусом  $\mathcal{K}_2$ . Будем говорить, что оператор  $\Phi(x)$  — *выпуклый*, если

$$\Phi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda \Phi(x_1) + (1 - \lambda)\Phi(x_2), \\ x_1, x_2 \in E_1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Докажем следующую теорему.

**Теорема 2.** Если в точке  $\bar{x}$  выпуклый оператор  $\Phi(x)$  имеет производную Фреше (или Гато), то справедливо неравенство

$$\Phi(x) - \Phi(\bar{x}) \geq \Phi'(\bar{x})(x - \bar{x}).$$

**Доказательство.** Пусть  $y^*$  — произвольный линейный функционал из конуса  $\mathcal{K}_2^+$ . Рассмотрим функцию на  $E_1$

$$(y^*, \Phi(x)) = f(x), \quad x \in E_1. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что она выпукла, принимает конечные значения и имеет производную Фреше в точке  $\bar{x}$ .

Применяя к ней неравенство (2), получаем

$$(y^*, \Phi(x) - \Phi(\bar{x}) - \Phi'(\bar{x})(x - \bar{x})) \geq 0. \quad (5)$$

Неравенство (5) справедливо для любого элемента  $y^* \in \mathcal{K}_2^+$ . Так как конус  $\mathcal{K}_2$  замкнут, то должно быть выполнено неравенство

$$\Phi(x) - \Phi(\bar{x}) - \Phi'(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0,$$

что и требовалось доказать.

Нам понадобятся в дальнейшем некоторые сведения из теории сублинейных функционалов. Функционал  $\Phi(x)$ , определенный на л. н. п.  $E$ , называется *сублинейным*, если он субаддитивен и положительно однороден, т. е. для любых  $x, y \in E$  и любого неотрицательного числа  $\alpha \geq 0$  выполнены условия

$$\Phi(x + y) \leq \Phi(x) + \Phi(y), \quad \Phi(\alpha x) = \alpha \Phi(x). \quad (5')$$

Из (5') следует, что  $\Phi(0) = 0$ .

Функционал  $x^* \in E^*$  называется *опорным* к сублинейному функционалу  $\Phi(x)$ , если для всех  $x \in E$  выполнено неравенство

$$\Phi(x) \geq (x^*, x).$$

Множество всех опорных функционалов будем обозначать  $Q(\Phi)$ .

**Теорема 2'.** Пусть  $\Phi(x)$  — непрерывный сублинейный функционал, тогда  $Q(\Phi)$  непусто и

$$\Phi(x) = \max_{x^* \in Q(\Phi)} (x^*, x). \quad (5'')$$

**Доказательство.** Докажем непустоту  $Q(\Phi)$ . Рассмотрим надграфик функции  $\Phi(x)$ :

$$\text{epi } \Phi = \{(z, x): x \in E, z \geq \Phi(x)\}.$$

В силу непрерывности функции  $\Phi(x)$  множество  $\text{epi } \Phi$  замкнуто. Ясно также, что оно выпукло и содержит внутренние точки. Точка  $x = 0, z = 0$  не принадлежит внутренности  $\text{epi } \Phi$ . Отделяя точку  $x = 0, z = 0$  от надграфика  $\Phi$ , получаем

$$\gamma z \geq (x_0^*, x), \quad (x, z) \in \text{epi } \Phi. \quad (5''')$$

Нетрудно видеть, что  $\gamma > 0$ . Действительно, если  $\gamma < 0$ , то  $-\gamma z$  не ограничено сверху и неравенство  $\gamma z \geq (x_0^*, x)$  невозможно. Если же  $\gamma = 0$ , то из (5''') получаем, что и  $x_0^* = 0$ , что также невозможно. Итак,  $\gamma > 0$ . Без ограничения общности можно положить  $\gamma = 1$ . Полагая в (5''')  $\gamma = 1$ ,  $z = \Phi(x)$ , получаем  $\Phi(x) \geq (x_0^*, x)$ . Поэтому  $x_0^*$  есть опорный функционал и множество  $Q(\Phi)$  непусто. Докажем теперь равенство (5'''). Пусть оно неверно; тогда существует  $x_0 \in E$  такой, что

$$\Phi(x_0) > a = \max_{x^* \in Q(\Phi)} (x^*, x_0).$$

Точка  $(a, x_0) \in \text{epi } \Phi$ . Отделим ее строго от  $\text{epi } \Phi$ ,

$$-\gamma a + (x_0^*, x_0) > -\gamma z + (x_0^*, x), \quad (z, x) \in \text{epi } \Phi.$$

Аналогично предыдущему показываем, что  $\gamma$  можно принять равным единице. Полагая еще  $z = \Phi(x)$ , получаем

$$-a + (x_0^*, x_0) > -\Phi(x) + (x_0^*, x). \quad (5^{IV})$$

Полагая  $x = 0$ , имеем

$$a = \max_{Q(\Phi)} (x^*, x_0) < (x_0^*, x_0),$$

поэтому  $x_0^* \notin Q(\Phi)$ . Найдется элемент  $\bar{x}$  такой, что

$$-\Phi(\bar{x}) + (x_0^*, \bar{x}) = \alpha > 0.$$

Полагая в (5<sup>IV</sup>)  $x = t\bar{x}$ ,  $t > 0$ , получаем

$$-a + (x_0^*, x_0) > -\Phi(t\bar{x}) + (x_0^*, t\bar{x}) = \alpha t.$$

Неравенство противоречиво при  $t \rightarrow +\infty$ . Поэтому (5'') справедливо. Теорема доказана.

Очевидно, что множество  $Q(\Phi)$  слабо\* замкнуто и выпукло.

**Теорема 2".** Пусть  $\Phi(x)$  — непрерывный сублинейный функционал, множество  $R \subset Q(\Phi)$  слабо\* замкнуто и выпукло. Если для любого  $x \in E$

$$\Phi(x) = \max_{x^* \in Q(\Phi)} (x^*, x),$$



то  $R$  совпадает со множеством всех опорных к  $\Phi(x)$  линейных функционалов.

Доказательство. Пусть  $x_0^* \in R$ . Так как  $R$  — регулярно выпуклое множество, то точку  $x_0^*$  можно строго отделить от  $R$  элементом  $x_0$

$$(x_0^*, x_0) > \max_{x^* \in R} (x^*, x_0),$$

откуда  $\Phi(x_0) < (x_0^*, x_0)$ , и следовательно,  $x_0^* \notin Q(\Phi)$ .

Пусть  $C(T)$  — пространство непрерывных функций на компакте  $T \subset R_n$ . Сопряженное пространство состоит из мер, сосредоточенных на  $T$ . Рассмотрим на  $C(T)$  сублинейный функционал

$$\Phi(x) = \max_{t \in T} x(t).$$

Любой опорный к нему есть мера  $d\sigma$  такая, что

$$\max_{t \in T} x(t) \geq \int_T x(t) d\sigma. \quad (5^V)$$

Из (5<sup>V</sup>) следует, что

$$\min_{t \in T} x(t) \leq \int_T x(t) d\sigma \leq \max_{t \in T} x(t). \quad (5^{VI})$$

Полагая  $x(t) \geq 0$ , получаем, что  $\int_T x(t) d\sigma \geq 0$ , следовательно, мера  $d\sigma \geq 0$ . Полагая в (5<sup>VI</sup>)  $x(t) = 1$ , получаем

$$|\sigma| = \int_T d\sigma = 1, \quad d\sigma \geq 0. \quad (5^{VII})$$

Таким образом, каждый функционал, опорный к  $\Phi(x)$ , есть мера, сосредоточенная на  $T$  и удовлетворяющая условиям (5<sup>VII</sup>). Наоборот, каждая мера, удовлетворяющая условиям (5<sup>VII</sup>), будет опорной к  $\Phi(x)$ :

$$\int_T x(t) d\sigma \leq \max_{t \in T} x(t) \cdot \int_T d\sigma = \max_{t \in T} x(t).$$

Итак, множество функционалов, опорных к  $\Phi(x)$ , состоит из мер, сосредоточенных на  $T$  и удовлетворяющих условиям (5<sup>VII</sup>).

## § 2. Элементы выпуклого программирования в сопряженном пространстве

Пусть банаховы пространства  $B_1$  и  $B_2$  частично упорядочены замкнутыми выпуклыми конусами  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$ . Сопряженные пространства  $B_1^*$  и  $B_2^*$  частично упорядочены сопряженными конусами  $\mathcal{K}_1^+$  и  $\mathcal{K}_2^+$ . Рассмотрим следующую задачу вогнутого программирования.

**Задача III.** Найти  $\text{тах } \Phi(y^*)$  при следующих ограничениях:

$$y^* \in B_2^*, \quad y^* \geq 0, \quad \Phi(y^*) \leq 0,$$

где  $\Phi(y^*)$  — вогнутая функция,  $\Phi(y^*)$  — выпуклый оператор, действующий из  $B_2^*$  в  $B_1^*$ .

Элементы, удовлетворяющие ограничениям, будем называть *допустимыми*. Допустимые элементы, дающие  $\text{тах } \Phi(y^*)$ , будем называть *оптимальными*.

Условие Слейтера: в пространстве  $B_1^*$  есть строго положительный функционал  $e^*$  и существуют число  $\alpha > 0$  и такой допустимый элемент  $y_0^*$ , что

$$\Phi(y_0^*) \leq -\alpha e^*. \quad (6)$$

**Теорема 3.** Пусть функция  $\Phi(y^*)$  и оператор  $\Phi(y^*)$  имеют производные Фреше (или Гато) в точке  $y^*$  и пусть выполнено условие Слейтера. Тогда для того, чтобы элемент  $y^*$  был оптимальным для задачи III, необходимо и достаточно, чтобы он был оптимальным для следующей задачи линейного программирования:

**Задача III'.** Найти  $\text{тах } \Phi'(y^*)(y^* - y^*)$  при следующих ограничениях:

$$y^* \geq 0, \quad \Phi(y^*) + \Phi'(y^*)(y^* - y^*) \leq 0.$$

**Необходимость.** Пусть  $y^*$  есть оптимальный элемент задачи III. Если  $y^*$  не есть оптимальный элемент задачи III', то найдется такой элемент  $\tilde{y}^*$ , что будут выполнены условия

$$\begin{aligned} \Phi'(\tilde{y}^*) \tilde{y}^* &> \Phi'(\tilde{y}^*) y^*, \\ \tilde{y}^* &\geq 0, \quad \Phi(\tilde{y}^*) + \Phi'(\tilde{y}^*)(\tilde{y}^* - y^*) \leq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Но тогда найдется и такой элемент  $\hat{y}^*$ , что будут выполнены неравенства

$$\begin{aligned}\varphi'(\bar{y}^*) \hat{y}^* &> \varphi'(\bar{y}^*) \bar{y}^*, \quad \hat{y}^* \geq 0, \\ \Phi(\bar{y}^*) + \Phi'(\bar{y}^*) (\hat{y}^* - \bar{y}^*) &\leq -\varepsilon e^*.\end{aligned}\quad (8)$$

В самом деле, используя условия Слейтера (6) и неравенство (3) для выпуклого оператора, получаем

$$-\alpha e^* \geq \Phi(y_0^*) \geq \Phi(\bar{y}^*) + \Phi'(\bar{y}^*) (y_0^* - \bar{y}^*).$$

Умножая это неравенство на  $\mu$ ,  $0 < \mu < 1$ , и складывая его с неравенством (7), помноженным на  $1 - \mu$ , получаем

$$\begin{aligned}-\mu \alpha e^* &\geq \Phi(\bar{y}^*) + \Phi'(\bar{y}^*) [\mu y_0^* + (1 - \mu) \tilde{y}^* - \bar{y}^*] = \\ &= \Phi(\bar{y}^*) + \Phi'(\bar{y}^*) [\hat{y}^* - \bar{y}^*], \\ \hat{y}^* &= \mu y_0^* + (1 - \mu) \tilde{y}^* \geq 0.\end{aligned}\quad (9)$$

С другой стороны, при достаточно малых  $\mu$  имеем из неравенства (7):

$$\begin{aligned}\varphi'(\bar{y}^*) \hat{y}^* &= \varphi'(\bar{y}^*) [\mu y_0^* + (1 - \mu) \tilde{y}^*] = \\ &= \varphi'(\bar{y}^*) \tilde{y}^* + \mu \varphi'(\bar{y}^*) (y_0^* - \tilde{y}^*) \geq \varphi'(\bar{y}^*) \bar{y}^*.\end{aligned}\quad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что неравенства (8) выполняются.

Пусть  $z \geq 0$  — произвольный элемент с  $\|z\| = 1$ . Из (8) получаем

$$\begin{aligned}(\Phi(\bar{y}^*), z) + (\Phi'(\bar{y}^*) (\hat{y}^* - \bar{y}^*), z) &\leq \\ &\leq -\varepsilon (e^*, z) < -\varepsilon \gamma \|z\|, \\ (\Phi(\bar{y}^*) + \Phi'(\bar{y}^*) (\hat{y}^* - \bar{y}^*), z) &< -\varepsilon \gamma = -\varepsilon_0.\end{aligned}\quad (11)$$

Положим

$$\eta^* = \bar{y}^* + t (\hat{y}^* - \bar{y}^*).$$

Тогда в силу первого из неравенств (8) при достаточно малом  $t > 0$

$$\varphi(\eta^*) = \varphi(\bar{y}^*) + t \varphi'(\bar{y}^*) (\hat{y}^* - \bar{y}^*) + o(t) > \varphi(\bar{y}^*).$$

С другой стороны,

$$\Phi(\eta^*) = \Phi(\bar{y}^*) + t \Phi'(\bar{y}^*) (\hat{y}^* - \bar{y}^*) + o(t).$$

Воспользовавшись неравенством (11), получаем

$$(\Phi(\eta^*), z) = (1-t)(\Phi(\bar{y}^*), z) + \\ + t(\Phi(\bar{y}^*) + \Phi'(\bar{y}^*)(\hat{y} - \bar{y}^*), z) + o(t) \leq -\varepsilon_0 t + o(t) \leq 0$$

для достаточно малых  $t$ . Так как конус  $\mathcal{K}_1$  замкнут и  $z$  — его произвольный элемент, то должно быть выполнено неравенство

$$\Phi(\eta^*) \leq 0, \quad \eta^* \geq 0, \quad \varphi(\eta^*) > \varphi(\bar{y}^*),$$

что противоречит оптимальности  $\bar{y}^*$ . Противоречие возникло из предположения, что  $\bar{y}^*$  не есть оптимальный элемент задачи III'. Итак,  $\bar{y}^*$  должен быть оптимальным элементом задачи III'. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть  $\bar{y}^*$  есть оптимальный элемент задачи III'. Тогда он должен удовлетворять ограничениям этой задачи. Полагая  $y^* = \bar{y}^*$ , получаем, что  $\Phi(\bar{y}^*) \leq 0$ . Поэтому элемент  $\bar{y}^*$  допустим и для задачи III. Пусть  $y^*$  — произвольный допустимый элемент задачи III. Покажем, что он будет допустимым и для задачи III'. Если это не так, то найдется такой элемент  $z \in B_1$ , что

$$z \geq 0, \quad (\Phi(\bar{y}^*) + \Phi'(\bar{y}^*)(y^* - \bar{y}^*), z) > 0.$$

Воспользовавшись неравенством (3), получаем

$$0 \geq (\Phi(y^*), z) \geq (\Phi(\bar{y}^*) + \Phi'(\bar{y}^*)(y^* - \bar{y}^*), z) > 0.$$

Полученное противоречие показывает, что элемент  $y^*$  допустим и для задачи III'. Воспользовавшись теперь вогнутостью функции  $\varphi(y^*)$  и оптимальностью  $\bar{y}^*$ , получаем

$$\varphi(y^*) \leq \varphi(\bar{y}^*) + \varphi'(\bar{y}^*)(y^* - \bar{y}^*) \leq \varphi(\bar{y}^*).$$

Следовательно, элемент  $\bar{y}^*$ , оптимальный для задачи III', будет оптимальным и для задачи III. Достаточность доказана.

### § 3. Двойственные задачи выпуклого программирования

Будем предполагать выполненными условия теоремы 3. Тогда задачу III можно заменить задачей III'. Сделаем еще предположение, что производную Фреше оператора  $\Phi(y^*)$  можно рассматривать как линейный

оператор, сопряженный некоторому линейному оператору  $T \in [B_1 \rightarrow B_2]$ , т. е.

$$(\Phi'(y^*)\eta^*, x) = (\eta^*, Tx), \quad T^* = \Phi'(y^*).$$

Кроме того, будем предполагать, что для каждого элемента  $y^*$  найдется такой элемент  $y \in B_2$ , что

$$\Phi'(y^*)\eta^* = (\eta^*, y).$$

Перепишем теперь задачу III', пользуясь новыми обозначениями.

**Задача III'.** Найти  $\max(y^*, y_0)$  при следующих ограничениях:

$$y^* \geq 0, \quad T^*y^* - x_0^* \leq 0,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi'(y^*)y^* &= (y^*, y_0), \quad T^* = \Phi'(y^*), \\ x_0^* &= \Phi'(y^*)\bar{y}^* - \Phi(\bar{y}^*). \end{aligned} \quad (12)$$

Воспользовавшись результатами гл. III, мы можем записать задачу, двойственную задаче III:

**Задача IV.** Найти  $\min(x_0^*, x)$  при следующих ограничениях:

$$x \geq 0, \quad x \in B_1, \quad Tx - y_0 \geq 0,$$

где  $x_0^*$ ,  $y_0$  и  $T^*$  определяются равенствами (12).

Запишем теперь для задач III и IV условия дополняющей нежесткости:

$$(\bar{y}^*, Tx - y_0) = 0, \quad (T^*\bar{y}^* - x_0^*, \bar{x}) = 0;$$

или, вспоминая обозначения (12), получаем

$$(\Phi(\bar{y}^*), \bar{x}) = 0, \quad (\Phi'(\bar{y}^*)\bar{y}^*, \bar{x}) - \Phi'(\bar{y}^*)\bar{y}^* = 0. \quad (13)$$

Если ввести для задачи III функцию Лагранжа

$$L(x, y^*) = \Phi(y^*) - (\Phi(y^*), x)$$

и вычислить ее частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(y^*, x)}{\partial y^*} \eta^* &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(y^* + t\eta^*, x) - L(y^*, x)}{t} = \\ &= \Phi'(y^*)\eta^* - (\Phi'(y^*)\eta^*, x), \\ \frac{\partial L(y^*, x)}{\partial x} \xi &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(y^*, x + t\xi) - L(y^*, x)}{t} = (\Phi(y^*), \xi), \end{aligned}$$

то условия (13) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial L(\bar{y}^*, \bar{x})}{\partial y^*} \bar{y}^* = 0, \quad \frac{\partial L(\bar{y}^*, \bar{x})}{\partial x} \bar{x} = 0. \quad (14)$$

Вспоминая теперь теорему 14 гл. III и следствия из нее, получаем следующую теорему, дающую необходимые условия оптимальности:

**Теорема 4.** Пусть  $\bar{y}^*$  есть оптимальный элемент задачи III и пусть выполнены следующие условия:

1) функции  $\Phi(y^*)$  и  $\varphi(y^*)$  имеют производные Фреше в точке  $\bar{y}^*$ ,

2) выполнено условие Слейтера (6),

3) производная Фреше оператора  $\Phi(\bar{y}^*)$  совпадает с линейным оператором, сопряженным некоторому линейному оператору  $T \in [B_1 \rightarrow B_2]$ ,

4) существует элемент  $\bar{y}$  такой, что

$$\varphi'(\bar{y}^*) \eta^* = (\eta^*, \bar{y}),$$

5) конус

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_T = \{(y, r): y = z - Tx, r = \rho + (x_0^*, x), \\ z \geq 0, x \geq 0, \rho \geq 0\}, \quad (15) \\ T^* = \Phi'(\bar{y}^*), \quad x_0^* = \Phi'(\bar{y}^*) \bar{y}^* - \Phi(\bar{y}^*), \end{aligned}$$

замкнут в пространстве  $B_2 \times R$ .

Тогда существует такое решение задачи IV, что будут выполнены условия оптимальности (13), или, то же самое, условия (14).

**Теорема 5.** Если условие Слейтера выполнено для выпуклой задачи III, то оно выполнено и для соответствующей ей линейной задачи III'.

**Доказательство.** Пусть  $\Phi(y_0^*) \leq -\alpha e^*$ . Тогда, используя неравенство (3) для выпуклого оператора, получаем

$$\begin{aligned} -\alpha e^* \geq \Phi(y_0^*) \geq \Phi(\bar{y}^*) + \Phi'(\bar{y}^*)(y_0^* - \bar{y}^*) = \\ = T^* y_0^* - x_0^*, \quad y_0^* \geq 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 6.** Если для задачи III выполнено условие Слейтера, то из  $(x, r) \in \mathcal{K}_T$  следует

$$\|x\|, \|z\|, \rho \leq c \{\|y\| + r\}.$$

Эта теорема есть аналог теоремы 21 гл. III. Надо лишь учесть, что в силу теоремы 5 условие Слейтера будет выполнено и для линейной задачи III'.

Если в условии теоремы 4 отказаться от требования 5 замкнутости конуса  $\mathcal{K}_T$ , то из теоремы 19 гл. III получаем теорему, соответствующую теореме 4, в предельной форме.

**Теорема 7.** Пусть выполнены условия 1) — 4) теоремы 4 и  $\bar{y}^*$  есть оптимальный элемент задачи III. Тогда найдется такая последовательность  $x_n$ , что будут выполнены следующие необходимые условия оптимальности:

$$\begin{aligned} x_n &\geq 0, \quad Tx_n - y_0 + \eta_n \geq 0, \quad \eta_n \rightarrow 0, \\ T^* &= \Phi'(\bar{y}^*), \quad \Phi'(\bar{y}^*) y^* = (y^*, y_0), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi(\bar{y}^*), x_n) &= 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi'(\bar{y}^*) \bar{y}^*, x_n) = \Phi'(\bar{y}^*) y^*. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу несколько более общего вида, чем задача III.

**Задача III<sub>1</sub>.** Найти  $\max \Phi(y^*, \eta^*)$  при следующих ограничениях

$$\begin{aligned} y^* &\in B_2^*, \quad y^* \geq 0, \quad \eta^* \in B_4^*, \\ \Phi(y^*, \eta^*) &\leq 0, \quad S^* y^* + R^* \eta^* = x_0^*, \end{aligned}$$

где  $\Phi(y^*, \eta^*)$  — вогнутая функция на  $B_2^* \times B_4^*$ ,  $\Phi(y^*, \eta^*)$  — выпуклый оператор из  $B_2^* \times B_4^*$  в  $B_1^*$ ;  $S^*$ ,  $R^*$  — линейные операторы из  $B_2^*$  в  $B_3^*$  и  $B_4^*$  в  $B_3^*$  соответственно.

Будем говорить, что для задачи III<sub>1</sub> удовлетворено условие Слейтера, если существуют элементы  $y_0^* \in B_2^*$ ,  $y_0^* \geq 0$ ,  $\eta_0^* \in B_4^*$  и такие, что

$$\Phi(y_0^*, \eta_0^*) \leq -\alpha \epsilon^*, \quad S^* y_0^* + R^* \eta_0^* = x_0^*.$$

**Теорема 8.** Пусть  $\Phi(y^*, \eta^*)$  и  $\Phi(y^*, \eta^*)$  имеют производные Фреше в точке  $\bar{y}^*, \bar{\eta}^*$  и пусть для задачи III<sub>1</sub> выполнено условие Слейтера. Тогда для того, чтобы  $\bar{y}^*, \bar{\eta}^*$  были бы оптимальными элементами задачи III<sub>1</sub>, необходимо и достаточно, чтобы они были бы оптимальными для следующей задачи линейного программирования:

Задача III'. Найти

$$\max \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial y^*} (\bar{y}^*, \bar{\eta}^*) y^* + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*} (\bar{y}^*, \bar{\eta}^*) \eta^* \right\}$$

при следующих ограничениях:

$$y^* \in B_1^*, \quad y^* \geq 0, \quad \eta^* \in B_2^*,$$

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{y}^*, \bar{\eta}^*) + \frac{\partial \Phi}{\partial y^*} (\bar{y}^*, \bar{\eta}^*) (y^* - \bar{y}^*) + \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*} (\bar{y}^*, \bar{\eta}^*) (\eta^* - \bar{\eta}^*) \leq 0, \\ S^* y^* + R^* \eta^* = x_0^*. \end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Мы можем теперь доказать теорему, аналогичную теореме 8, дающую необходимые условия оптимальности.

Теорема 8'. Пусть  $\bar{y}^*, \bar{\eta}^*$  — оптимальные элементы задачи III' и пусть

1)  $\Phi(y^*, \eta^*)$  и  $\varphi(y^*, \eta^*)$  имеют производные Фреше в точке  $\bar{y}^*, \bar{\eta}^*$ ,

2) для задачи III' выполнено условие Слейтера,

3)  $\partial \Phi / \partial y^* (\bar{y}^*, \bar{\eta}^*)$  и  $\partial \Phi / \partial \eta^* (\bar{y}^*, \bar{\eta}^*)$  совпадают с линейными операторами, сопряженными линейным операторам  $T \in [B_1 \rightarrow B_2]$  и  $P \in [B_1 \rightarrow B_4]$ ,

4) существуют элементы  $y_0, \eta_0$  такие, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y^*} (\bar{y}^*, \bar{\eta}^*) y^* = (y^*, y_0), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*} (\bar{y}^*, \bar{\eta}^*) \eta^* = (\eta^*, \eta_0),$$

5) любой элемент  $\xi^* \in B_3^*$  может быть представлен в следующем виде:

$$\xi^* = S^* y^* + R^* \eta^*, \quad y^* \geq 0.$$

Тогда найдутся ограниченные последовательности  $x_n \in B_1$ ,  $\xi_n \in B_3$  и такие, что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} x_n \geq 0, \quad T x_n + S \xi_n - y_0 + \zeta'_n \geq 0, \\ P x_n + R \xi_n - \eta_0 + \zeta''_n = 0, \quad \zeta'_n, \zeta''_n \rightarrow 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi(\bar{y}^*, \bar{\eta}^*), x_n) = 0, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y^*} (\bar{y}^*, \bar{\eta}^*) \bar{y}^*, x_n \right) + (S^* \bar{y}^*, \xi_n) \right] = \frac{\partial \Phi}{\partial y^*} (\bar{y}^*, \bar{\eta}^*) \bar{y}^*.$$



Доказательство аналогично доказательству теоремы 8. При доказательстве надо использовать также теоремы 32 и 32" гл. III.

Сформулируем теперь выпуклый аналог теоремы 33 гл. III.

**Теорема 8".** Пусть выполнены условия теоремы 8 и пусть банаховы пространства  $B_1, B_2, B_3, B_4$  сопряжены сепарабельным банаховым пространствам  $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{B}_3, \tilde{B}_4$ . Линейные операторы  $T, P, S, R$  сопряжены некоторым линейным операторам  $\tilde{T} \in [\tilde{B}_2 \rightarrow \tilde{B}_1], \tilde{P} \in [\tilde{B}_4 \rightarrow \tilde{B}_1], \tilde{S} \in [\tilde{B}_2 \rightarrow \tilde{B}_3], \tilde{R} \in [\tilde{B}_4 \rightarrow \tilde{B}_3]$ .

Тогда найдутся элементы  $\bar{x} \in B_1, \bar{\xi} \in B_3$  такие, что

$$\bar{x} \geq 0, \quad T\bar{x} + S\bar{\xi} - y_0 \geq 0, \quad P\bar{x} + R\bar{\xi} - \eta_0 = 0, \\ (\Phi(\bar{y}^*, \bar{\eta}^*), \bar{x}) = 0,$$

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\bar{y}^*, \bar{\eta}^*) \bar{y}^*, \bar{x} \right) + (S^* \bar{y}^*, \bar{\xi}) = \frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\bar{y}^*, \bar{\eta}^*) \bar{y}^*.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 33 гл. III.

#### § 4. О седловых точках функции Лагранжа

Выпишем функцию Лагранжа задачи III и соответствующей ей линейной задачи III':

$$L(y^*, x) = \Phi(y^*) - (\Phi(\bar{y}^*), x), \\ \tilde{L}(y^*, x) = \Phi(\bar{y}^*) + \Phi'(\bar{y}^*)(y^* - \bar{y}^*) - \\ - (\Phi(\bar{y}^*) + \Phi'(\bar{y}^*)(y^* - \bar{y}^*), x). \quad (16)$$

**Теорема 9.** Если  $(\bar{x}, \bar{y}^*)$  — седловая точка функции Лагранжа  $\tilde{L}(x, y^*)$ , то  $(\bar{x}, \bar{y}^*)$  будет седловой точкой и функции Лагранжа  $L(y^*, x)$ .

**Доказательство.** Пусть  $(\bar{x}, \bar{y}^*)$  — седловая точка функции Лагранжа  $\tilde{L}(y^*, x)$ , т. е.

$$\bar{x} \geq 0, \quad \bar{y}^* \geq 0,$$

$$\tilde{L}(y^*, \bar{x}) \leq \tilde{L}(\bar{y}^*, \bar{x}) \leq \tilde{L}(\bar{y}^*, x)$$

для всех  $x \geq 0, y^* \geq 0$ .

Воспользовавшись выражением (16) для функции Лагранжа и неравенствами для выпуклых функций,

получаем

$$\begin{aligned} L(\bar{y}^*, \bar{x}) = \tilde{L}(\bar{y}^*, \bar{x}) &\geq \tilde{L}(y^*, \bar{x}) = \varphi(\bar{y}^*) + \varphi'(\bar{y}^*)(y^* - \bar{y}^*) - \\ &- (\Phi(\bar{y}^*) + \Phi'(\bar{y}^*)(y^* - \bar{y}^*), \bar{x}) \geq \varphi(y^*) - (\Phi(y^*), \bar{x}) = \\ &= L(y^*, \bar{x}) \quad \text{для всех } y^* \geq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Так как  $\tilde{L}(\bar{y}^*, x) = L(\bar{y}^*, x)$  и  $\tilde{L}(\bar{y}^*, x) \geq \tilde{L}(\bar{y}^*, \bar{x})$ , то из (17) получаем

$$L(y^*, \bar{x}) \leq L(\bar{y}^*, \bar{x}) \leq L(\bar{y}^*, x) \quad \text{для всех } x \geq 0, y^* \geq 0, \quad (18)$$

что и требовалось доказать.

Теперь мы можем доказать теорему, аналогичную теореме Куна — Таккера.

**Теорема 10.** Пусть выполнены условия теоремы 4 и  $\bar{y}^*$  есть оптимальный элемент задачи III. Тогда найдется такой элемент  $\bar{x} \geq 0$ , что пара  $(\bar{x}, \bar{y}^*)$  будет седловой точкой функции Лагранжа задачи III.

**Доказательство.** В силу теоремы 3  $\bar{y}^*$  будет и оптимальным элементом для задачи III'. В силу теоремы 14 гл. III найдется такой элемент  $\bar{x} \geq 0$ , что  $(\bar{y}^*, \bar{x})$  будет седловой точкой функции Лагранжа  $\tilde{L}(y^*, x)$ . В силу теоремы 9  $(\bar{y}^*, \bar{x})$  будет и седловой точкой функции Лагранжа  $L(y^*, x)$ .

По-видимому, не очень просто в теореме 10 освободиться от требования дифференцируемости. Для приложений, рассматриваемых в этой книге, требование дифференцируемости выполняется.

Аналогично теореме 12 гл. III можно доказать следующую теорему:

**Теорема 11.** Если  $(\bar{x}, \bar{y}^*)$  есть седловая точка функции Лагранжа задачи III, то  $\bar{y}^*$  есть оптимальный элемент для задачи III.

## § 5. Локальный экстремум в задачах более общего вида (невыпуклый случай)

Рассмотрим задачу более общего вида, чем в § 2, и учтем ограничения типа равенств.

**Задача V. Найти**

$$\max \varphi(y^*, \eta^*)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} y^* \in B_2^*, \quad \eta^* \in B_4^*, \quad y^* \geq 0, \\ \Phi(y^*, \eta^*) \leq 0, \quad \Psi(y^*, \eta^*) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $B_1, B_2, B_3, B_4$  — банаховы пространства,  $B_1$  и  $B_2$  частично упорядочены замкнутыми выпуклыми конусами  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$ , оператор  $\Phi$  действует из  $B_2^* \times B_4^*$  в  $B_1^*$ , а оператор  $\Psi$  действует из  $B_2^* \times B_4^*$  в  $B_3^*$ ,  $\varphi(y^*, \eta^*)$  — скалярная функция на  $B_2^* \times B_4^*$ . Операторы  $\Phi, \Psi$  и  $\varphi$  имеют производные Фреше в точке  $\bar{y}^*, \bar{\eta}^*$ .

Для задачи V естественно ставить вопрос о разыскании локального максимума. Будем говорить, что точка  $\bar{y}^*, \bar{\eta}^*$  есть точка локального максимума для задачи V, если существует такая окрестность этой точки  $W(\bar{y}^*, \bar{\eta}^*)$ , что для всех  $y^*, \eta^*$  из этой окрестности, удовлетворяющих ограничениям (19), выполнено неравенство

$$\varphi(y^*, \eta^*) \leq \varphi(\bar{y}^*, \bar{\eta}^*).$$

С задачами V свяжем следующую задачу линейного программирования.

**Задача V'. Найти**

$$\max \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\cdot) y^* + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\cdot) \eta^* \right\}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} y^* \in B_2^*, \quad \eta^* \in B_4^*, \quad y^* \geq 0, \\ \Phi(\cdot) + \frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\cdot)(y^* - \bar{y}^*) + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\cdot)(\eta^* - \bar{\eta}^*) \leq 0, \quad (20) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y^*}(\cdot)(y^* - \bar{y}^*) + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta^*}(\cdot)(\eta^* - \bar{\eta}^*) = 0, \end{aligned}$$

где для краткости принято обозначение  $f(\cdot) = f(\bar{y}^*, \bar{\eta}^*)$ .

**Теорема 12. Пусть:**

1)  $(\bar{y}^*, \bar{\eta}^*)$  есть точка локального максимума задачи V',

2) производная Фреше оператора  $\Psi$  в точке  $\bar{y}^*, \bar{\eta}^*$  отображает пространство  $B_2^* \times B_4^*$  на все пространство  $B_3^*$ ,

3) в любой окрестности точки  $\bar{y}^*$ ,  $\bar{\eta}^*$  найдется точка  $y_0^*$ ,  $\eta_0^*$  такая, что

$$\begin{aligned}\Phi(\cdot) + \frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\cdot)(y_0^* - \bar{y}^*) + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\cdot)(\eta_0^* - \bar{\eta}^*) &\leq -e^*, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y^*}(\cdot)(y_0^* - \bar{y}^*) + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta^*}(\cdot)(\eta_0^* - \bar{\eta}^*) &= 0,\end{aligned}\quad (21)$$

где  $e^*$  — строго положительный линейный функционал пространства  $B_1$ . Тогда  $\bar{y}^*$ ,  $\bar{\eta}^*$  будет решением задачи линейного программирования  $V'$ .

Доказательство. Если  $(\bar{y}^*, \bar{\eta}^*)$  не есть решение задачи  $V'$ , то найдутся элементы  $\hat{y}^*$ ,  $\hat{\eta}^*$  такие, что

$$\begin{aligned}\hat{y}^* &\geq 0, \quad \hat{\eta}^* \in B_1^*, \\ \Phi(\cdot) + \frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\cdot)(\hat{y}^* - \bar{y}^*) + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\cdot)(\hat{\eta}^* - \bar{\eta}^*) &\leq 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y^*}(\cdot)(\hat{y}^* - \bar{y}^*) + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta^*}(\cdot)(\hat{\eta}^* - \bar{\eta}^*) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\cdot)\hat{y}^* + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\cdot)\hat{\eta}^* &> \frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\cdot)\bar{y}^* + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\cdot)\bar{\eta}^*.\end{aligned}\quad (22)$$

Но тогда найдутся и элементы  $\hat{y}^*$ ,  $\hat{\eta}^*$  такие, что

$$\begin{aligned}\hat{y}^* &\geq 0, \quad \hat{\eta}^* \in B_1^*, \\ \Phi(\cdot) + \frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\cdot)(\hat{y}^* - \bar{y}^*) + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\cdot)(\hat{\eta}^* - \bar{\eta}^*) &\leq \\ &\leq -\varepsilon_0 e^*, \quad \varepsilon_0 > 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y^*}(\cdot)(\hat{y}^* - \bar{y}^*) + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta^*}(\cdot)(\hat{\eta}^* - \bar{\eta}^*) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\cdot)\hat{y}^* + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\cdot)\hat{\eta}^* &> \frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\cdot)\bar{y}^* + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\cdot)\bar{\eta}^*.\end{aligned}\quad (23)$$

Для доказательства неравенств (23) надо умножить неравенство (21) на  $\varepsilon$ , а неравенства (22) на  $1 - \varepsilon$  и сложить. Полагая  $\hat{y}^* = \varepsilon y_0^* + (1 - \varepsilon)\bar{y}^*$ , получаем, что неравенства (23) должны быть выполнены при любом  $0 < \varepsilon < 1$ . Если выбрать  $\varepsilon$  достаточно малым, то  $\hat{y}^*$ ,  $\hat{\eta}^*$  будет близким к  $\bar{y}^*$ ,  $\bar{\eta}^*$  и поэтому

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\cdot)\hat{y}^* + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\cdot)\hat{\eta}^* > \frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\cdot)\bar{y}^* + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\cdot)\bar{\eta}^*.$$

Итак, в каждой окрестности точки  $\bar{y}^*$ ,  $\bar{\eta}^*$  найдутся элементы  $\hat{y}^*$ ,  $\hat{\eta}^*$  такие, что будут выполнены соотношения (23).

В силу теоремы Люстерника вектор  $\hat{y}^* - \bar{y}^*$ ,  $\hat{\eta}^* - \bar{\eta}^*$  будет касательным к множеству

$$\{(y^*, \eta^*): \Psi(y^*, \eta^*) = 0\}$$

в точке  $\bar{y}^*$ ,  $\bar{\eta}^*$ . Поэтому при всех  $0 \leq t \leq t_0$

$$\begin{aligned} \Psi(z^*(t), \zeta^*(t)) &= 0, \\ z^*(t) &= \bar{y}^* + t(\hat{y}^* - \bar{y}^*) + o(t), \\ \zeta^*(t) &= \bar{\eta}^* + t(\hat{\eta}^* - \bar{\eta}^*) + o(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Кроме того, в силу первого из соотношений (23) имеем:

$$\begin{aligned} \Phi(z^*(t), \zeta^*(t)) &= \\ &= \Phi(\bar{y}^* + t(\hat{y}^* - \bar{y}^*) + o(t), \bar{\eta}^* + t(\hat{\eta}^* - \bar{\eta}^*) + o(t)) = \\ &= \Phi(\cdot) + t \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\cdot)(\hat{y}^* - \bar{y}^*) + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\cdot)(\hat{\eta}^* - \bar{\eta}^*) \right] + o(t) = \\ &= (1-t)\Phi(\cdot) + t \left[ \Phi(\cdot) + \frac{\partial \Phi(\cdot)}{\partial y^*}(\hat{y}^* - \bar{y}^*) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\cdot)(\hat{\eta}^* - \bar{\eta}^*) \right] + o(t) \leq -\varepsilon_0 e^* t + o(t) \leq 0. \end{aligned}$$

А в силу последнего неравенства (23):

$$\begin{aligned} \Phi(z^*(t), \zeta^*(t)) &= \\ &= \Phi(\cdot) + t \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\hat{y}^* - \bar{y}^*) + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\hat{\eta}^* - \bar{\eta}^*) \right] + o(t) > \Phi(\cdot). \end{aligned}$$

Итак, при достаточно малом  $t$  элементы  $z^*(t)$ ,  $\zeta^*(t)$  близки к  $\bar{y}^*$ ,  $\bar{\eta}^*$ , но

$$\begin{aligned} \Phi(z^*(t), \zeta^*(t)) &\leq 0, \quad \Psi(z^*(t), \zeta^*(t)) = 0, \\ \Phi(z^*(t), \zeta^*(t)) &> \Phi(\bar{y}^*, \bar{\eta}^*), \end{aligned}$$

и следовательно, в точке  $\bar{y}^*$ ,  $\bar{\eta}^*$  нет локального максимума задачи  $V'$ , что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие доказывает, что точка  $\bar{y}^*$ ,  $\bar{\eta}^*$  есть решение задачи линейного программирования  $V'$ .

Применяя теперь теорему 19, получим необходимые условия локального максимума в следующем виде.

**Теорема 13.** Пусть выполнены условия теоремы 12 и пусть существуют линейные операторы  $S$ ,  $T$  и  $P$ ,  $R$  такие, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\cdot) = T^*, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\cdot) = S^*, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y^*}(\cdot) = P^*, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta^*}(\cdot) = R^*;$$

пусть, кроме того, существуют элементы  $y_0$  и  $\eta_0$  такие, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\cdot) y^* = (y^*, y_0), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\cdot) \eta^* = (\eta^*, \eta_0).$$

Тогда найдутся последовательности  $x_n \geq 0$ ,  $\xi_n \in B_3$ ,  $\zeta'_n \rightarrow B_2$ ,  $\zeta''_n \rightarrow 0$ ,  $\zeta''_n \in B_4$ ,  $\zeta''_n \rightarrow 0$  такие, что

$$Tx_n + S\xi_n - y_0 + \zeta'_n \geq 0, \quad Px_n + R\xi_n - \eta_0 + \zeta''_n = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi(\bar{y}^*, \bar{\eta}^*), x_n) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\cdot) \bar{y}^* + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\cdot) \bar{\eta}^*, x_n \right) + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y^*}(\cdot) \bar{y}^* + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta^*}(\cdot) \bar{\eta}^*, \xi_n \right) \right] = \frac{\partial \Phi}{\partial y^*}(\cdot) \bar{y}^* + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta^*}(\cdot) \bar{\eta}^*.$$

Доказательство этой теоремы получается прямым применением теоремы 19 гл. III к задаче линейного программирования  $V'$ .

**Замечание.** Очевидно, что выполнены условия теоремы 32" гл. III. Поэтому последовательности  $x_n$  и  $\xi_n$  можно считать ограниченными.

# СОПРЯЖЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

## § 1. Постановка задачи

Пусть  $L_r^1[0, T]$  есть банахово пространство вектор-функций (столбцов), компоненты которых есть суммируемые на отрезке  $[0, T]$  функции и

$$\|f\|_{L_r^1[0, T]} = \sum_{i=1}^r \|f_i\|_{L^1[0, T]}.$$

Сопряженное пространство  $L_r^\infty[0, T]$  состоит из вектор-функций строк, компоненты которых есть измеримые и почти всюду на отрезке  $[0, T]$  ограниченные функции

$$\|f^*\|_{L_r^\infty[0, T]} = \max \|f_i^*(t)\|_{L^\infty[0, T]}.$$

Пусть  $\mathcal{L}_r^\infty[0, T]$  и  $\mathcal{L}_r^1[0, T]$  есть классы абсолютно-непрерывных вектор-функций, производные которых принадлежат пространствам  $L_r^\infty[0, T]$  и  $L_r^1[0, T]$  соответственно. Через  $R_n$  будем обозначать пространство числовых векторов (столбцов), а через  $R_n^*$  — сопряженное пространство строк.

Рассмотрим следующую линейную задачу оптимального управления со смешанными ограничениями:

**Задача А.** Найти управления  $u^*(t) \in L_m^\infty[0, T]$  и  $\theta^* \in R_l^*$ , дающие максимум линейному функционалу  $\Phi(u^*, \theta^*) =$

$$= x^*(T) \alpha + \theta^* \gamma + \int_0^T [x^*(t) a(t) + u^*(t) b(t)] dt \quad (1)$$

при следующих ограничениях:

$$\frac{dx^*(t)}{dt} = x^*(t) A(t) + u^*(t) B(t) + a^*(t), \quad (2)$$

$$x^*(t) \in \mathcal{L}_n^\infty[0, T], \quad u^*(t) \geq 0, \\ x^*(0) = \alpha^* + \theta^* P, \quad \theta^* R \leq \beta^*, \quad \theta^* \geq 0, \quad (3)$$

$$-x^*(t) C(t) + u^*(t) D(t) \leq b^*(t), \quad (4)$$

$$x^*(T) Q \geq c^*. \quad (5)$$

Матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  и  $D(t)$  и векторы  $a(t)$ ,  $a^*(t)$ ,  $b(t)$  и  $b^*(t)$  имеют ограниченные измеримые компоненты. Соответствующие матрицы и векторы имеют следующие размеры:  $A[n \times n]$ ,  $B[m \times n]$ ,  $C[n \times r]$ ,  $D[m \times r]$ ,  $P[l \times n]$ ,  $R[l \times p]$ ,  $Q[n \times q]$ ,  $a[n]$ ,  $b[m]$ ,  $b^*[r]$ ,  $\alpha[n]$ ,  $\alpha^*[n]$ ,  $\beta^*[r]$ ,  $c^*[q]$ .

Целью настоящей главы является вывод необходимых условий оптимальности для задачи А. В том случае, когда фазовый вектор не входит в ограничения, т. е.  $C(t) \equiv 0$ , необходимые условия оптимальности дает принцип максимума Понтрягина. Если же  $C(t) \neq 0$ , то принцип максимума в форме Понтрягина не всегда имеет место и его в общем случае можно записать в форме Дубовицкого и Милютина. К сожалению, в такой форме принцип максимума имеет сложный вид, и его трудно использовать для решения прикладных задач. Мы будем разыскивать условия, при выполнении которых принцип максимума может быть записан в форме Понтрягина.

Будем совместно с задачей А рассматривать связанную с ней задачу Б.

Задача Б. Найти управление  $v(t) \in L^1_+[0, T]$ ,  $\xi \in R^p$ ,  $\eta \in R^q$ , дающие минимум линейному функционалу  $\psi(v, \xi, \eta) = \alpha^* x(0) + \beta^* \xi - c^* \eta +$

$$+ \int_0^T [b^*(t) v(t) + a^*(t) x(t)] dt \quad (6)$$

при следующих ограничениях:

$$-\frac{dx(t)}{dt} = A(t) x(t) + C(t) v(t) + a(t), \quad v(t) \geq 0, \quad (7)$$

$$R\xi - Px(0) \geq \gamma, \quad x(T) = \alpha + Q\eta,$$

$$-B(t) x(t) + D(t) v(t) \geq b(t). \quad (8)$$



В дальнейшем будет показано, что задачи А и Б сводятся к двойственным задачам линейного программирования в банаховом пространстве. Заметим, что ограничения (4) и (8) считаются выполненными почти всюду на отрезке  $[0, T]$ .

## § 2. Линейные дифференциальные операторы

Рассмотрим сопряженные дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} Nx &= -\frac{dx(t)}{dt} - A(t)x(t), \quad x(T) = 0, \quad x \in \mathcal{L}_n^1[0, T], \\ Mx^* &= \frac{dx^*(t)}{dt} - x^*(t)A(t), \quad x^*(0) = 0, \\ x^* &\in \mathcal{L}_n^\infty[0, T]. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть  $F(t)$  есть фундаментальная матрица оператора  $M$ :

$$\frac{dF(t)}{dt} = F(t)A(t), \quad F(0) = E.$$

Очевидно, что  $F(t)$  — непрерывная и кусочно-гладкая функция. Нетрудно непосредственно проверить, что справедливы следующие выражения для операторов  $M^{-1}$  и  $N^{-1}$ :

$$\begin{aligned} N^{-1}f &= F^{-1}(t) \int_t^T F(\tau) f(\tau) d\tau, \\ M^{-1}\varphi &= \int_0^t \varphi(\tau) F^{-1}(\tau) d\tau \cdot F(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Простое вычисление показывает, что операторы  $N^{-1}$  и  $M^{-1}$  сопряжены:

$$(M^{-1}\varphi, f) = (\varphi, N^{-1}f).$$

**Теорема 1.** *Оператор  $N^{-1}$  вполне непрерывен в пространстве  $L_n^1[0, T]$ .*

**Доказательство.** Если воспользоваться выражением (10) для оператора  $N^{-1}$ , то легко увидеть, что

нужно доказать компактность в  $L_n^1[0, T]$  функций

$$\psi(t) = \int_t^T F(\tau) f(\tau) d\tau, \quad \|f\|_{L_n^1[0, T]} \leq c. \quad (11)$$

Вектор-функции  $f(t)$  и  $\psi(t)$  продолжим нулем вне отрезка  $[0, T]$ . Множество (11) ограничено в пространстве  $L_n^1[0, T]$ . Действительно, пусть

$$\psi_i(t) = \int_t^T \sum_{j=1}^n F_{ij}(\tau) f_j(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Так как  $F_{ij}(t)$  непрерывны на отрезке  $[0, T]$ , то они ограничены. Из (12) тогда получаем

$$\begin{aligned} |\psi_i(t)| &\leq \int_t^T \sum_{j=1}^n |F_{ij}(\tau)| \cdot |f_j(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq c_0 \int_0^T \sum_{j=1}^n |f_j(\tau)| d\tau \leq c_0 \|f\|_{L_n^1[0, T]}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\psi(t)\|_{L_n^1[0, T]} \leq Q_0, \quad Q_0 = C_0 C,$$

и поэтому множество функций  $\psi(t)$  ограничено. Покажем теперь, что оно равномерно непрерывно в среднем. Из (12) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T |\psi_i(t+\delta) - \psi_i(t)| dt &= \int_0^T dt \left| \int_{t+\delta}^T \sum_{j=1}^n F_{ij}(\tau) f_j(\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_0^T dt \int_t^{t+\delta} |F_{ij}(\tau)| \cdot |f_j(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq c_0 \sum_{j=1}^n \int_0^T dt \int_t^{t+\delta} |f_j(\tau)| d\tau = \\ &= \sum_{j=1}^n c_0 \int_0^T dt \int_0^\delta |f_j(t+\tau)| d\tau = \sum_{j=1}^n c_0 \int_0^\delta d\tau \int_0^T |f_j(t+\tau)| dt \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n c_0 \int_0^\delta d\tau \int_0^T |f_j(t)| dt \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n c_0 \delta \|f_j\|_{L^1[0, T]} \leq c_0 \delta \|f\|_{L_n^1} \leq c_0 c \delta. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что множество функций  $\psi(t)$  равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в среднем. Поэтому, в силу критерия М. Рисса, оно будет компактным в  $L_n^1[0, T]$ . Теорема доказана.

**Теорема 2.** Если  $A(t) \geq 0$ , то  $N^{-1}$  — неотрицательный линейный оператор в  $L_n^1[0, T]$ .

**Доказательство.** Достаточно показать, что уравнение

$$-\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad x(T) = 0$$

имеет неотрицательное решение при  $f(t) \geq 0$ . Оно эквивалентно следующему интегральному уравнению Фредгольма:

$$x(t) = \tilde{A}x(t) + \Phi(t),$$

$$\tilde{A}x(t) = \int_t^T A(\tau)x(\tau)d\tau, \quad \Phi(t) = \int_t^T f(\tau)d\tau. \quad (13)$$

У оператора  $\tilde{A}$  нет собственных значений. Это следует из того, что однородное уравнение (13) имеет только тривиальное решение. Кроме того, оператор  $\tilde{A}$  неотрицателен. Запишем решение уравнения (13) при помощи ряда Неймана

$$x(t) = [E + \tilde{A} + \dots + \tilde{A}^n + \dots]\Phi(t).$$

Так как оператор  $\tilde{A}$  неотрицателен и  $\Phi(t) \geq 0$ , то и  $x(t) \geq 0$ , что и требовалось доказать.

Будем рассматривать задачу Коши

$$-\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad x(T) = \alpha, \quad f \in L_n^1[0, T].$$

Ее решение есть

$$x(t) = N^{-1}f(t) + F^{-1}(t)F(T)\alpha. \quad (14)$$

Аналогично, решение задачи Коши

$$\frac{dx^*(t)}{dt} - x^*(t)A(t) = f^*(t), \quad x^*(0) = \alpha^*, \quad f^* \in L_n^\infty[0, T]$$

может быть записано следующим образом:

$$x^*(t) = M^{-1}f^*(t) + \alpha^*F(t). \quad (15)$$

### § 3. Сведение задач А и Б к двойственным задачам линейного программирования в банаховом пространстве

Решая уравнение (2) относительно  $x^*(t)$  при граничном условии (3) и используя (15), получаем

$$\begin{aligned} x^*(t) &= M^{-1}(u^*B + a^*) + (\alpha^* + \theta^*P)F(t) = \\ &= \left\{ \int_0^t [u^*(\tau)B(\tau) + a^*(\tau)]F^{-1}(\tau) d\tau + \alpha^* + \theta^*P \right\} F(t). \end{aligned} \quad (16)$$

Интегрируя уравнение (2) от 0 до  $T$  и используя начальное условие, получаем

$$\begin{aligned} x^*(T) &= \alpha^* + \theta^*P + \\ &+ \int_0^T [x^*(t)A(t) + u^*(t)B(t) + a^*(t)]dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Преобразуем функционал (1):

$$\begin{aligned} \varphi(u^*, \theta^*) &= x^*(T)\alpha + \int_0^T [x^*(t)a(t) + u^*(t)b(t)]dt = \\ &= (\alpha^* + \theta^*P)\alpha + \int_0^T [x^*(t)(A(t)\alpha + a(t)) + \\ &+ u^*(t)(B(t)\alpha + b(t)) + a^*(t)]dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Будем в дальнейшем пользоваться обозначением

$$(u^*, u) = \int_0^T u^*(t)u(t)dt, \quad u^* \in L_m^\infty, \quad u \in L_m^1[0, T].$$

Тогда (18), используя (16), можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi(u^*, \theta^*) &= \\ &= \theta^*P\alpha + ((\alpha^* + \theta^*P)F(t) + M^{-1}(u^*B + a^*), A\alpha + a) + \\ &+ (u^*, B\alpha + b) + \text{const}, \end{aligned}$$

или, с точностью до постоянной, не зависящей от  $u^*$ :

$$\begin{aligned}\varphi(u^*, \theta^*) &= \theta^* \theta_0 + (u^*, u_0), \\ \theta_0 &= \gamma + P \left[ \alpha + \int_0^T F(t) (A(t) \alpha + a(t)) dt \right], \\ u_0(t) &= B(t) N^{-1} (A \alpha + a) + B(t) \alpha + b(t).\end{aligned}\quad (19)$$

Преобразуем теперь ограничение (4), используя (16):

$$\begin{aligned}-M^{-1}(u^* B) C(t) + u^*(t) D(t) - \theta^* P F(t) C(t) &\leq \tilde{b}^*(t), \\ \tilde{b}^*(t) &= b^* + M^{-1}(a^*(t)) C(t) + \alpha^* F(t) C(t).\end{aligned}\quad (20)$$

Преобразуем ограничение (5). Полагая в (16)  $t = T$ , получаем

$$\left\{ \alpha^* + \theta^* P + \int_0^T [u^*(t) B(t) + a^*(t)] F^{-1}(t) dt \right\} F(T) Q \geq c^*,$$

или

$$\begin{aligned}\left[ \theta^* P + \int_0^T u^*(t) B(t) F^{-1}(t) dt \right] F(T) Q &\geq \tilde{c}^*, \\ \tilde{c}^* &= c^* - \left[ \alpha^* + \int_0^T a^*(t) F^{-1}(t) dt \right] F(T) Q.\end{aligned}\quad (21)$$

Таким образом, задача А сводится к следующей задаче:

**Задача А<sub>1</sub>.** Найти максимум линейного функционала

$$\varphi(u^*, \theta^*) = \theta^* \theta_0 + (u^*, u_0)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned}-M^{-1}(u^* B) C + u^* D + \theta^* P F C &\leq \tilde{b}^*, \\ \theta^* R &\leq \beta^*, \\ -\left[ \theta^* P + \int_0^T u^*(t) B(t) F^{-1}(t) dt \right] F(T) Q &\leq -\tilde{c}^*.\end{aligned}$$

Рассмотрим линейный оператор  $T^*$ , действующий из банахова пространства  $L_m^\infty[0, T] \times R_l^*$  в банахово

пространство  $L_r^\infty[0, T] \times R_p^* \times R_q^*$  по следующему закону:

$$T^* \begin{pmatrix} u^* \\ \theta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M^{-1}(u^*B)C + u^*D + \theta^*PFC \\ \theta^*R \\ -\left[\theta^*P + \int_0^T u^*(t)B(t)F^{-1}(t)dt\right]F(T)Q \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Тогда задачу А можно записать как стандартную задачу линейного программирования:

Задача  $A_1$ . Найти

$$\max \{\theta^*\theta_0 + (u^*, u_0)\} \quad (23)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{pmatrix} u^* \\ \theta^* \end{pmatrix} \geq 0, \quad T^* \begin{pmatrix} u^* \\ \theta^* \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \tilde{b}^* \\ \beta^* \\ -\tilde{c}^* \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Легко проверить, что оператор  $T^*$  сопряжен оператору  $T$ , действующему из  $L_r^1[0, T] \times R_p \times R_q$  в  $L_m^1[0, T] \times R_l$  по следующему закону:

$$T \begin{pmatrix} v \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -BN^{-1}(Cv) + Dv - BF^{-1}(t)F(T)Q\eta \\ R\xi - PF(T)Q\eta - \int_0^T PF(t)C(t)v(t)dt \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Тогда, как это следует из результатов гл. III, наряду с задачей  $A_1$  нужно рассматривать двойственную задачу:

Задача  $B_1$ . Найти

$$\min [(\tilde{b}^*, v) + \beta^*\xi - \tilde{c}^*\eta] \quad (26)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{pmatrix} v \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} \geq 0, \quad T \begin{pmatrix} v \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} u_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Покажем, что задача  $B_1$  сводится к задаче Б. Преобразуем первое ограничение. Из (27), используя (25) и (19), получаем

$$-B[N^{-1}(Cv + A\alpha + a) + F^{-1}(t)F(T)Q\eta + \alpha] + Dv \geq b. \quad (28)$$

Положим

$$x(t) = N^{-1}(Cv + A\alpha + a) + \alpha + F^{-1}(t)F(T)Q\eta. \quad (29)$$

Воспользовавшись теперь выражением (10) для оператора  $N$ , получаем

$$-\frac{dx(t)}{dt} - A(t)x(t) = C(t)v(t) + a(t), \quad (30)$$

$$x(T) = \alpha + Q\eta,$$

что совпадает с первым и третьим соотношением (7). Ограничение (28) теперь можно записать в следующем виде:

$$-B(t)x(t) + D(t)v(t) \geq b(t), \quad (31)$$

что совпадает с (8). Преобразуем теперь второе ограничение (27). Из (25) и (19) получаем

$$R\xi - PF(T)Q\eta - \int_0^T PF(t)C(t)v(t)dt \geq$$

$$\geq \gamma + P\left[\alpha + \int_0^T F(t)(A\alpha + a)dt\right]$$

или

$$R\xi - P\left[\int_0^T F(t)(Cv + A\alpha + a)dt + F(T)Q\eta + \alpha\right] \geq \gamma. \quad (32)$$

Замечая, что  $FA = dF/dt$ , получаем

$$\int_0^T F(t)[Cv + A\alpha + a]dt = \int_0^T F(t)\left[-\frac{dx}{dt} - Ax + A\alpha\right]dt =$$

$$= -\int_0^T \frac{d}{dt}(F(t)x(t))dt + \int_0^T \frac{dF}{dt}\alpha dt =$$

$$= -F(T)x(T) + F(0)x(0) + [F(T) - F(0)]\alpha =$$

$$= -F(T)[\alpha + Q\eta] + x(0) + F(T)\alpha - \alpha =$$

$$= -F(T)Q\eta + x(0) - \alpha. \quad (33)$$

Подставляя (33) в (32), получаем

$$R\xi - Px(0) \geq \gamma,$$

что совпадает с первым из равенств (7).

Преобразуем теперь функционал задачи (26). С точностью до константы

$$\begin{aligned}
 \psi(v, \xi, \eta) &= (\tilde{b}^*, v) + \beta^* \xi - \hat{c}^* \eta = \\
 &= (b^* + M^{-1}(a^* C) + \alpha^* F C, v) + \beta^* \xi - c^* \eta + \\
 &\quad + \left[ \alpha^* + \int_0^T a^*(t) F^{-1}(t) dt \right] F(T) Q \eta = \\
 &= (b^*, v) + (a^*, N^{-1}(Cv)) + \\
 &\quad + \alpha^* \left[ \int_0^T F(t) C(t) v(t) dt + F(T) Q \eta \right] + \\
 &\quad + \beta^* \xi - c^* \eta + \int_0^T a^*(t) F^{-1}(t) dt F(T) Q \eta = \\
 &= (b^*, v) + \beta^* \xi - c^* \eta + (a^*, N^{-1}(Cv)) + \\
 &\quad + A\alpha + a + F^{-1}(t) F(T) Q \eta + \alpha + \\
 &\quad + \alpha^* \left[ \int_0^T F(t) (Cv + a) dt + F(T) Q \eta \right] + \text{const.} \quad (34)
 \end{aligned}$$

Замечая, что  $FA = dF/dt$ ,  $F(0) = E$ , получаем

$$\begin{aligned}
 &\int_0^T F(t) (Cv + a) dt + F(T) (Q\eta + \alpha) = \\
 &= \int_0^T F \left[ -\frac{dx}{dt} + Ax \right] dt + F(T) (Q\eta + \alpha) = \\
 &= \int_0^T -\frac{d}{dt} (Fx) dt + F(T) (Q\eta + \alpha) = \\
 &= -F(T) x(T) + F(0) x(0) + F(T) (Q\eta + \alpha) = \\
 &= x(0) + F(T) [Q\eta + \alpha - x(T)] = x(0).
 \end{aligned}$$

Тогда (34) приводится к следующему виду:

$$\psi = \alpha^* x(0) + \beta^* \xi - c^* \eta + \int_0^T [b^*(t) v(t) + a^*(t) x(t)] dt,$$

что совпадает с выражением (6).



Итак, доказано, что задачи оптимального управления А и Б сводятся к задачам линейного программирования  $A_1$  и  $B_1$  в банаховом пространстве.

#### § 4. Исследование замкнутости конуса, связанного с задачей А

Вспомним определение конуса  $\mathcal{K}_T$ , формула (32) гл. III. Построим конус  $\mathcal{K}_T$  для оператора Т, определяемого формулой (25). Это будет конус в пространстве  $L_m^1[0, T] \times R_l \times R$  следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_T = \{ (u, \theta, \rho) : u &= BN^{-1}(Cv) - Dv + \\ &\quad + BF^{-1}(t)F(T)Q\eta + w, \\ \theta &= \int_0^T PFCv dt + PF(T)Q\eta - R\xi + \zeta, \\ \rho &= r + \int_0^T \tilde{b}^*(t)v(t) dt - \tilde{c}^*\eta + \beta^*\xi, \\ v &\in L_l^1[0, T], \quad \xi \in R_p, \quad \eta \in R_q, \\ v &\geq 0, \quad w \geq 0, \quad \eta \geq 0, \quad \xi \geq 0, \quad r \geq 0 \}, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $\tilde{b}^*$  определяется формулой (20), а  $\tilde{c}^*$  определяется формулой (21).

**Лемма 1.** Если управления  $u_0^*(t) \equiv 0$  и  $\theta_0^* = 0$  допустимы для задачи А по ограничению (4), то  $b^* \geq 0$ . Если управления  $u_0^* \equiv 0$  и  $\theta_0^* = 0$  допустимы по ограничению (5), то  $\tilde{c}^* \leq 0$ .

**Доказательство.** Пусть управления  $u_0^* \equiv 0$ ,  $\theta_0^* = 0$  допустимы по ограничению (4); это означает, что задача

$$\begin{aligned} \frac{dx_0^*}{dt} &= x_0^*(t)A(t) + a^*(t), \quad x_0^*(0) = \alpha^*, \\ &\quad - x_0^*(t)C(t) \leq b^*(t) \end{aligned} \quad (36)$$

имеет решение. Вспоминая определение оператора М, получаем

$$x_0^*(t) = M^{-1}(a^*) + \alpha^*F(t). \quad (37)$$

Подставляя это выражение в (36), получаем, что  $\tilde{b}^* \geq 0$ .

Если же управления  $u_0^*(t) \equiv 0$  и  $\theta_0^* = 0$  допустимы по ограничению (5), то задача

$$\frac{dx_0^*}{dt} = x_0^*(t) A(t) + a^*(t), \quad x_0^*(0) = \alpha^*, \quad x_0^*(T) Q \geq c^*$$

имеет решение. Подставляя (37) в ограничение  $x_0^*(T) Q \geq c^*$ , получаем, что  $\tilde{c}^* \leq 0$ .

Будем говорить, что управления  $\bar{\theta}^*$  и  $\bar{u}^*$  строго допустимы по ограничению (4), если существует такая постоянная  $\gamma > 0$ , что

$$-\bar{x}^*(t) C(t) + \bar{u}^*(t) D(t) \leq b^*(t) - \gamma e_m, \quad (33)$$

где  $e_m = (1, 1, \dots, 1)$ . Аналогично определяются строго допустимые управления по остальным ограничениям.

**Лемма 2.** Если допустимые управления  $\bar{\theta}^*$ ,  $\bar{u}^*$  строго допустимы по ограничению (4), то существует такая постоянная  $k$ , что для всех элементов конуса (35) будет выполнено неравенство

$$\|v\|_{L_r^1[0, T]} \leq k \{ \|u\|_{L_m^1[0, T]} + \|\theta\|_{R_l} + |\rho| \}. \quad (39)$$

**Доказательство.** Вспоминая определение (25) оператора  $T$ , получаем для точки  $(u, \theta, \rho)$  конуса  $\mathcal{K}_T$  следующее соотношение:

$$\begin{aligned} (\bar{u}^*, u) + \bar{\theta}^* \theta + \rho &= (\bar{u}^*, w) + \theta^* \xi + r - \\ &- \left( (\bar{u}^*, \theta^*), T \begin{pmatrix} v \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) + \int_0^T \tilde{b}^*(t) v(t) dt - \tilde{c}^* \eta + \beta^* \xi \geq \\ &\geq - \left( T^* (\bar{u}^*, \bar{\theta}^*), \begin{pmatrix} v \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) + \int_0^T \hat{b}^*(t) v(t) dt - \hat{c}^* \eta + \beta^* \xi. \end{aligned}$$

Вспоминая теперь определение оператора  $T^*$ , получаем

$$\begin{aligned} &\geq (\tilde{b}^* - [\bar{u}^* D - M^{-1} (\bar{u}^* B) C], v) + (\beta^* - \bar{\theta}^* R, \xi) + \\ &+ \left[ \bar{\theta}^* P + \int_0^T \bar{u}^*(t) B(t) F^{-1}(t) dt \right] F(T) Q - c^* = \\ &= (b^* + \bar{x}^*(t) C(t) - \bar{u}^*(t) D(t), v(t)) + (\beta^* - \bar{\theta}^* R, \xi) + \\ &+ (\bar{x}^*(T) Q - c^*) \eta. \quad (40) \end{aligned}$$

Так как по условию теоремы управления  $\bar{u}^*$ ,  $\bar{\theta}^*$  допустимы, то  $\beta^* - \bar{\theta}^* R \geq 0$ ,  $x^*(T)Q - c^* \geq 0$ , и так как управления строго допустимы по ограничению (4), то выполнено условие (38). Поэтому

$$\begin{aligned} (\bar{u}^*, u) + \bar{\theta}^* \theta + \rho &\geq \\ &\geq (b^* + \bar{x}^*(t)C(t) - u^*(t)D(t), v(t)) \geq \\ &\geq (\gamma e_m, v(t)) = \gamma \sum_{i=1}^m \int_0^T v_i(t) dt \geq c \|v\|_{L_r^1}. \end{aligned}$$

Из (40) тогда получаем

$$\begin{aligned} \|v\| &\leq \frac{1}{c} \{(\bar{u}^*, u) + \bar{\theta}^* \theta + \rho\} \leq \\ &\leq \frac{1}{c} (\|\bar{u}^*\| \cdot \|u\| + \|\bar{\theta}^*\| \cdot \|\theta\| + \rho) \leq c_0 \{\|u\| + \|\theta\| + \rho\}, \end{aligned}$$

откуда и следует неравенство (39).

*Замечание.* Если допустимые управления  $\bar{\theta}^*$ ,  $\bar{u}^*$  строго допустимы по ограничению (3) или по ограничению (5), то для  $\|\xi\|$  или  $\|\eta\|$  также справедлива оценка типа (39).

*Теорема 3.* Пусть выполнены следующие условия:

а) задача А имеет допустимые управления  $\bar{u}^*$ ,  $\bar{\theta}^*$ , строго допустимые по ограничениям (4) и (5),

б) матрица  $-D \geq 0$  имеет в каждом столбце по строго положительному элементу

$$-d_{i,j}(t) \geq \gamma > 0, \quad j = 1, \dots, r.$$

Тогда конус  $\mathcal{K}_T$  замкнут.

*Доказательство.* Пусть  $(u_0, \theta_0, \rho_0)$  есть предельная точка конуса  $\mathcal{K}_T$ ; в силу (35) это означает, что

$$\begin{aligned} u_0 &= \lim u_n, \quad \theta_0 = \lim \theta_n, \quad \rho_0 = \lim \rho_n, \\ u_n &= BN^{-1}(Cv_n) - Dv_n + BF^{-1}(t)F(T)Q\eta_n + w_n, \\ \theta_n &= \int_0^T PFCv_n dt + PF(T)Q\eta_n - R\xi_n + \zeta_n, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\rho_n = r_n + \int_0^T \tilde{b}^*(t)v_n(t) dt - \tilde{c}^*\eta_n + \beta^*\xi_n,$$

$$\begin{aligned} v_n &\in L_r^1[0, T], \quad \xi_n \in R_p, \quad \eta_n \in R_q, \quad v_n \geq 0, \\ w_n &\geq 0, \quad \eta_n \geq 0, \quad \zeta_n \geq 0, \quad r_n \geq 0. \end{aligned}$$

Воспользовавшись условием а) и леммой 2, получаем, что

$$\|v_n\|, \|\eta_n\| \leq c \{ \|u_n\| + \|\theta_n\| + \|\rho_n\| \}. \quad (42)$$

Так как последовательности  $\|u_n\|$ ,  $\|\theta_n\|$  и  $\|\rho_n\|$  сходятся, то последовательности  $v_n$  и  $\eta_n$  ограничены. В конечномерном пространстве ограниченная последовательность компактна. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что последовательность  $\eta_n$  сходится. Покажем, что последовательность  $v_n$  слабо компактна в  $L_m^1[0, T]$ . В силу теоремы 1 оператор  $N^{-1}$  вполне непрерывен в пространстве  $L_m^1[0, T]$ . Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что последовательность  $BN^{-1}(Cv_n)$  сходится в  $L_m^1[0, T]$ . Тогда из второго из равенств (41) имеем

$$\omega_n - Dv_n = \omega_n, \quad (43)$$

где последовательность  $\omega_n$  неотрицательна и сходится в  $L_m^1[0, T]$ . Воспользовавшись теперь неотрицательностью  $\omega_n$  и условием б) теоремы, получаем

$$\begin{aligned} \omega_{n_{ij}} &\geq [-Dv_n]_{i,j} = - \sum_{j=1}^r d_{i,j} v_{nj} \geq \\ &\geq -d_{i,j} v_{nj} \geq \gamma v_{nj}, \quad j = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (44)$$

Так как последовательность  $\omega_{n_{ij}}$  сходится и, следовательно, слабо компактна в  $L^1[0, T]$ , то из неравенства (44) следует, что и последовательность  $v_{nj}$  будет слабо компактной. Без ограничения общности можно считать, что она слабо сходится к функции  $v_{0j}$ . Переходя теперь во втором из равенств (41) к пределу, получаем

$$u_0 = BN^{-1}(Cv_0) - Dv_0 + BF^{-1}(t) F(T) Q\eta_0 + \omega_0. \quad (45)$$

Рассмотрим теперь третье равенство (41). Из него следует, что  $\xi_n - R\xi_n$  стремится к вектору

$$\theta_0 - \int_0^T PFCv_0 dt - PF(T) Q\eta_0.$$

А из четвертого равенства (41) следует, что последовательность  $r_n + \beta^* \xi_n$  стремится к числу

$$\rho_0 = \int_0^T \tilde{b}^*(t) v_0(t) dt + \tilde{c}^* \eta_0.$$

В силу замкнутости многогранного конуса в конечномерном пространстве найдется пара  $\xi_0, r_0$  такая, что,  $\xi_0 \geq 0, \zeta_0 \geq 0, r_0 \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \int_0^T PFCv_0 dt + PF(T)Q\eta_0 - R\xi_0 + \zeta_0, \\ \rho_0 &= r_0 + \int_0^T \tilde{b}^*(t) v_0(t) dt - \tilde{c}^* \eta_0 + \beta^* \xi_0. \end{aligned} \quad (46)$$

Из равенств (45) и (46) и следует замкнутость конуса  $\mathcal{K}_T$ . Теорема доказана.

Нужно сказать, что для экономических приложений более интересен случай, когда матрица  $D$  неотрицательна. Он требует специального рассмотрения.

**Теорема 4.** Пусть выполнены следующие условия:

- а)  $A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0, P \geq 0$ ,
- б) задача А имеет управления  $\bar{u}^*, \bar{\theta}^*$ , строго допустимые по ограничениям (4) и (5),
- в) управление  $u_0^* \equiv 0, \theta_0^* = 0$  допустимо по ограничению (4).

Тогда конус  $\mathcal{K}_T$  замкнут.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма, принадлежащая Дубовицкому и Милютину.

**Лемма 3** (Дубовицкий и Милютин). Пусть  $v_n(t)$  — ограниченная последовательность в  $L_m^1[0, T]$ . Тогда из нее можно выделить подпоследовательность  $v_{n_k}$  такую, что

$$v_{n_k} = v'_{n_k} + v''_{n_k}, \quad (47)$$

где последовательность  $v'_{n_k}$  слабо сходится, а последовательность  $v''_{n_k}$  стремится к нулю почти всюду на отрезке  $[0, T]$ . Если  $v_n(t) \geq 0$ , то последовательности  $v'_{n_k}$  и  $v''_{n_k}$  можно взять неотрицательными.

Доказательство. Пусть, для начала,  $v_n(t)$  есть ограниченная неотрицательная последовательность функций в  $L^1[0, T]$ :

$$v_n(t) \geq 0, \quad \int_0^T v_n(t) dt \leq c_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Построим функции  $v_n^m \in L^\infty[0, T]$  следующего вида:

$$v_n^m(t) = \begin{cases} v_n(t), & v_n(t) \leq m, \\ 0, & v_n(t) > m. \end{cases}$$

Всякая ограниченная последовательность в  $L^\infty[0, T]$  слабо\* компактна. Поэтому при каждом  $m$  из последовательности  $v_n^m(t)$  можно выделить слабо\* сходящуюся подпоследовательность  $v_{n_k}^m(t)$ . Без ограничения общности можно считать, что числа  $n_k$  не зависят от  $m$  (в противном случае мы применили бы канторовский диагональный процесс по  $m$ ). Поэтому, без ограничения общности, можно предположить, что и сама последовательность  $v_n^m(t)$  слабо\* сходится к некоторой функции  $v^m(t) \in L^\infty[0, T]$  при любом  $m = 1, 2, \dots$ , т. е. для любой функции  $\varphi(t) \in L^1[0, T]$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T v_n^m(t) \varphi(t) dt = \int_0^T v^m(t) \varphi(t) dt. \quad (48)$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в неравенствах

$$v_n^{m+1}(t) \geq v_n^m(t), \quad \int_0^T v_n^m(t) dt \leq c_0,$$

получаем

$$v^{m+1}(t) \geq v^m(t), \quad \int_0^T v^m(t) dt \leq c_0.$$

По теореме Б. Леви последовательность  $v^m(t)$  сильно в  $L^1[0, T]$  сходится к некоторой функции  $v(t)$ ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T [v(t) - v^m(t)] dt = 0, \quad v(t) \geq v^m(t). \quad (49)$$

Подберем теперь последовательность  $m_k$  так, чтобы

$$\int_0^T [v(t) - v^{m_k}(t)] dt < \frac{1}{k}.$$

Положим в (48)  $\varphi \equiv 1$  и подберем  $n_k$  так, чтобы

$$\left| \int_0^T v_{n_k}^{m_k}(t) dt - \int_0^T v^{m_k}(t) dt \right| < \frac{1}{k}.$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T v_{n_k}^{m_k}(t) dt = \int_0^T v(t) dt.$$

Покажем, что последовательность  $v_{n_k}^{m_k}(t)$  слабо в  $L^1[0, T]$  сходится к  $v(t)$ . Пусть

$$\varphi(t) \in L^\infty[0, T], \quad \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1.$$

Пусть  $\varepsilon > 0$  — произвольное число. Воспользовавшись равенством (49), найдем такое  $m$ , что

$$\int_0^T [v(t) - v^m(t)] dt < \varepsilon.$$

Рассмотрим  $m_k \geq m$ , тогда  $v^{m_k} \geq v^m$  и мы получаем, что

$$\begin{aligned} \overline{\lim} \left| \int_0^T v_{n_k}^{m_k}(t) \varphi(t) dt - \int_0^T v(t) \varphi(t) dt \right| &\leq \\ &\leq \overline{\lim} \left| \int_0^T [v_{n_k}^{m_k}(t) - v_{n_k}^m(t)] \varphi(t) dt \right| + \\ &+ \overline{\lim} \left| \int_0^T [v_{n_k}^m(t) - v(t)] \varphi(t) dt \right| \leq \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T [v_{n_k}^{m_k}(t) - v_{n_k}^m(t)] dt + \\ &+ \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_0^T [v_{n_k}^m(t) - v(t)] \varphi(t) dt \right| = \\ &= \int_0^T [v(t) - v^m(t)] dt + \left| \int_0^T [v^m(t) - v(t)] \varphi(t) dt \right| \leq \\ &\leq 2 \int_0^T [v(t) - v^m(t)] dt < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности  $\varepsilon$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_0^T v_{n_k}^{m_k}(t) \varphi(t) dt - \int_0^T v(t) \varphi(t) dt \right| = 0,$$

следовательно,  $v_{n_k}^{m_k}(t)$  слабо стремится к  $v(t)$ .

Рассмотрим теперь подпоследовательность  $v_{n_k}(t)$  и положим

$$v_{n_k}(t) = v_{n_k}^{m_k}(t) + [v_{n_k} - v_{n_k}^{m_k}(t)] = v'_{n_k} + v''_{n_k}.$$

Как выше доказано,  $v'_{n_k}$  слабо стремится к нулю. Применим к  $v''_{n_k}$  неравенство Чебышева:

$$\text{mes} \{t: v''_{n_k} > 0\} =$$

$$= \text{mes} \{t: v_{n_k} > m_k\} \leq \frac{1}{m_k} \int_0^T v_{n_k}(t) dt \leq \frac{c_0}{m_k}.$$

Следовательно,  $v''_{n_k}$  стремится к нулю по мере. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, мы можем считать, что  $v''_{n_k}$  почти всюду стремится к нулю.

Итак, лемма доказана для неотрицательных последовательностей. В общем случае последовательность  $v_n(t)$  может быть представлена в виде разности

$$v_n(t) = v_n^+(t) - v_n^-(t); \quad v_n^+(t), v_n^-(t) \geq 0.$$

Применяя лемму для  $v_n^+$  и  $v_n^-$ , получим доказательство и для  $v_n$ . При доказательстве леммы для вектор-функций достаточно применить ее к каждой компоненте.

Докажем теперь теорему 4. Пусть  $(u_0, \theta_0, \rho_0)$  — произвольная точка конуса  $\mathcal{K}_T$ . Это означает, что выполняются условия (41). Так же, как и при доказательстве теоремы 3, показывается, что последовательность  $v_n(t)$  ограничена в  $L_m^1$ , а последовательность  $\eta_n$  можно считать сходящейся к  $\eta_0$ . Из (41) следует, что последовательность  $w_n$  ограничена. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 3, получаем, что справедливо равенство (43), где  $\omega_n$  сходится, но уже не обязательно неотрицательна. Применим к  $v_n$  и  $w_n$  лемму Дубовицкого и Милютина. Без ограничения общности



имеем

$$v_n = v'_n + v''_n, \quad \omega_n = \omega'_n + \omega''_n, \quad (50)$$

где  $v'_n$  и  $\omega'_n$  слабо стремятся к  $v_0$  и  $\omega_0$ , а  $v''_n$  и  $\omega''_n$  почти всюду стремятся к нулю и ограничены в  $L_m^1[0, T]$ . Подставляя равенства (50) в (43), получаем

$$\omega''_n - Dv''_n = \omega_n - \omega'_n + Dv'_n.$$

Из последнего равенства следует, что последовательность  $\omega''_n - Dv''_n$  слабо сходится и почти всюду стремится к нулю. Поэтому она будет и сильно стремиться к нулю. Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\omega''_n - Dv''_n] = 0. \quad (51)$$

Подставим теперь (50) в первое из равенств (41). Получаем

$$u_n = BN^{-1}(Cv'_n) - Dv'_n + BF^{-1}(t)F(T)Q\eta_n + \\ + \omega''_n + \omega''_n - Dv''_n, \quad \omega'''_n = \omega'_n + BN^{-1}(Cv''_n). \quad (52)$$

В силу условия а) теоремы оператор  $N^{-1}$  будет неотрицательным, и поэтому  $\omega'''_n \geq 0$ . Воспользовавшись равенством (51) и тем, что  $v'_n$  и  $\omega''_n$  слабо стремятся к неотрицательным функциям  $v_0$ ,  $\omega_0$ , и переходя к пределу в равенстве (52), получаем

$$u_0 = BN^{-1}(Cv_0) - Dv_0 + BF^{-1}(t)F(T)\eta_0 + \omega_0, \\ \eta_0 \geq 0, \quad v_0 \geq 0, \quad \omega_0 \geq 0.$$

Подставим теперь (50) в третье и четвертое равенство (41). Замечая, что в силу условия в)  $\tilde{b}^* \geq 0$  и что матрицы  $P \geq 0$ ,  $F \geq 0$ , получаем

$$\theta_n = \int_0^T PFCv'_n dt + PF(T)Q\eta_n - R\xi_n + \zeta'_n, \\ \rho_n = r'_n + \int_0^T \tilde{b}^*(t)v'_n(t) dt - \tilde{c}^*\eta_n + \beta^*\xi_n, \quad (53) \\ \zeta'_n = \zeta_n + \int_0^T PFCv''_n dt \geq 0, \\ r'_n = r_n + \int_0^T \tilde{b}^*(t)v''_n(t) dt \geq 0.$$

Так же как и при доказательстве теоремы 3, теперь можно показать, что найдутся неотрицательные  $\xi_0, \zeta_0, r_0$  такие, что будут выполнены равенства (46). Из (53) и (46) следует замкнутость конуса  $\mathcal{K}_T$ . Теорема доказана.

## § 5. Необходимые условия оптимальности.

### Принцип максимума Понтрягина

Сформулируем следующий принцип оптимальности.

**Теорема 5.** Если конус  $\mathcal{K}_T$ , определяемый равенством (35), замкнут в пространстве  $L_T^1 \times R_l \times R$  и  $\bar{u}^*$ ,  $\bar{v}^*$  есть оптимальное решение задачи А, то найдется такое оптимальное решение задачи Б, что будут выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^* [-B(t) \bar{x}(t) + D(t) \bar{v}(t) - b(t)]_i &= 0, & i &= 1, \dots, m; \\ [-\bar{x}^*(t) C(t) + \bar{u}^*(t) D(t) - b^*(t)]_j \bar{v}_j(t) &= 0, & j &= 1, \dots, r; \\ \bar{\theta}_i^* [R \xi - P x(0) - \gamma]_i &= 0, & i &= 1, \dots, l; \\ [\bar{x}^*(T) Q - c^*]_k \bar{\eta}_k &= 0, & k &= 1, \dots, q, \end{aligned} \quad (54)$$

причем первые два равенства выполняются почти при всех  $t$ .

**Доказательство.** В § 3 задачи А и Б сведены к решению двойственных задач линейного программирования А' и Б'. Применяя теперь следствие теоремы 14 гл. III, получаем, что существует такой оптимальный элемент задачи Б', что будут выполнены условия дополняющей нежесткости (38) гл. III. В силу равенств (24) и (25) эти условия дополняющей нежесткости можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \left( \begin{pmatrix} \bar{u}^* \\ \bar{\theta}^* \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} \bar{v} \\ \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \right) &= 0, \\ \left( T^* \begin{pmatrix} \bar{u}^* \\ \bar{\theta}^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{b}^* \\ \beta^* \\ -\tilde{c}^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{v} \\ \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (55)$$

или, в силу определения (22) и (25) операторов  $T$  и  $T^*$ , получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \bar{u}^*(t) [-BN^{-1}(C\bar{v}) + D\bar{v} - BF^{-1}(t)F(T)Q\bar{\eta} - u_0] dt + \\ & + \bar{\theta}^*[R\xi - PF(T)Q\bar{\eta} - \int_0^T PF(t)C(t)\bar{v}(t)dt - \theta_0 - \gamma] = 0, \\ & \int_0^T [-M^{-1}(\bar{u}^*B)C + \bar{u}^*D + \\ & + \bar{\theta}^*PF(t)C(t) - \tilde{b}^*]\bar{v}(t)dt + (\bar{\theta}^*R - \beta^*)\xi + \\ & + C^* - \left[ \bar{\theta}^*P + \int_0^T \bar{u}^*(t)B(t)F^{-1}(t)dt \right] F(T)Q = 0. \end{aligned}$$

Возвращаясь к фазовым переменным  $x^*(t)$  и  $x(t)$ , получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \bar{u}^*(t) [-B(t)\bar{x}(t) + D(t)\bar{v}(t) - b(t)] dt + \\ & + \bar{\theta}^*[R\xi - P\bar{x}(0) - \gamma] = 0, \\ & \int_0^T [-\bar{x}^*(t)C(t) + \bar{u}^*(t)D(t) - b^*(t)]\bar{v}(t)dt + \\ & + (\bar{\theta}^*R - \beta^*)\xi + [\bar{x}^*(T)Q - c^*]\bar{\eta} = 0. \quad (56) \end{aligned}$$

Так как все слагаемые в формулах (54) и (55) неотрицательны, то

$$\begin{aligned} & \int_0^T \bar{u}^*(t) [-B(t)\bar{x}(t) + D(t)\bar{v}(t) - b(t)] dt = 0, \\ & \int_0^T [-\bar{x}^*(t)C(t) + \bar{u}^*(t)D(t) - b^*(t)]\bar{v}(t)dt = 0, \quad (57) \\ & \bar{\theta}^*[R\xi - P\bar{x}(0) - \gamma] = 0, \\ & (\bar{\theta}^*R - \beta^*)\xi = 0, \quad [\bar{x}^*(T)Q - c^*]\bar{\eta} = 0. \end{aligned}$$

Так как подынтегральные функции в (57) неотрицательны, то они должны быть равны нулю почти всюду. Следовательно, выполняются условия (54). Теорема доказана.

Введем теперь для задач А и Б функции Пон-  
трягина

$$\mathcal{H}(u^*, x) = u^*(Bx + b), \quad \tilde{\mathcal{H}}(x^*, v) = (b^* + x^*C)v. \quad (58)$$

Рассмотрим следующую задачу.

Задача П. *Найти*

$$\max_{u^*} \mathcal{H}(u^*, \bar{x}(t))$$

при следующих условиях:

$$u^* \geq 0, \quad u^*D(t) \leq b^*(t) + \bar{x}^*(t)C(t). \quad (59)$$

Задача П почти при всех  $t$  есть задача линейного  
программирования. Запишем двойственную задачу:

Задача П'. *Найти*

$$\min_v [b^*(t) + \bar{x}^*(t)C(t)]v = \min_v \tilde{\mathcal{H}}(x^*(t), v)$$

при следующих ограничениях:

$$v \geq 0, \quad D(t)v \geq B(t)\bar{x}(t) + b(t). \quad (60)$$

Условия дополняющей нежесткости для задач П и  
П' выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} [-\bar{x}^*(t)C(t) + u^*D(t) - b^*(t)]v &= 0, \\ \bar{u}^*[-B(t)\bar{x}(t) + D(t)v - b(t)] &= 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Если для  $\bar{u}^*(t)$  и  $\bar{v}(t)$  почти при всех  $t$  выполнены со-  
отношения (61), то в силу теоремы 13 гл. III зада-  
чи П и П' имеют решения  $\bar{u}^*(t)$  и  $\bar{v}(t)$  соответственно. По-  
этому теорему 5 можно записать в форме принципа  
максимума Понтрягина.

Теорема 5'. Если конус  $\mathcal{K}_T$ , определяемый равен-  
ством (35), замкнут в пространстве  $L_1^1 \times R_1 \times R$  и задача  
А имеет оптимальное решение  $\bar{x}^*(t)$ , то найдется  
такое оптимальное решение  $\bar{x}(t)$  задачи Б, что

$$\max \mathcal{H}(u^*, \bar{x}(t)) = \mathcal{H}(u^*(t), \bar{x}(t)), \quad (62)$$

где  $\max$  берется по многограннику (59). Кроме того,

$$\min \tilde{\mathcal{H}}(\bar{x}^*(t), v) = \tilde{\mathcal{H}}(\bar{x}^*(t), v(t)),$$

где  $\min$  берется по многограннику (60).

Необходимые условия оптимальности как в форме теоремы 5, так и в форме теоремы 5' могут быть использованы для решения задач синтеза оптимальных управлений. Решая задачи П и П' для произвольных точек  $x^*$  и  $x$ , лежащих на оптимальных траекториях, мы находим оптимальные управления  $u^*$  и  $v$  как функции (вообще говоря, разрывные)  $x^*$  и  $x$ :

$$u^* = u^*(x, x^*), \quad v = v(x, x^*). \quad (63)$$

Подставляя затем эти функции в дифференциальные уравнения (2) и (7) и решая полученную систему уравнений при соответствующих начальных условиях, найдем оптимальные траектории. Таким образом, в принципе функции (63) решают задачу синтеза управления. Правда, для того чтобы в заданный момент времени знать управление, нужно знать как положение точки  $x^*$ , так и положение точки  $x$ , что затрудняет построение алгоритмов приближенного вычисления оптимального управления.

Вспоминая теперь теорему 4, мы можем теорему 5' записать в следующем виде:

*Теорема 6. Пусть выполнены следующие условия:*

- а) задача А имеет управления  $\bar{u}^*$ ,  $\bar{v}$ , строго допустимые по ограничениям (4) и (5),*
- б)  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$ ,  $C \geq 0$ ,  $P \geq 0$ ,*
- в) управления  $u_0^* \equiv 0$ ,  $v_0^* \equiv 0$  допустимы по ограничению (4).*

*Тогда для любого оптимального решения  $\bar{u}^*$ ,  $\bar{x}^*$  задачи А найдется такое оптимальное решение задачи Б, что будут выполнены условия (54) и принцип максимума Понтрягина (62).*

## § 6. Пример на построение оптимальных управлений

Рассмотрим следующую задачу: найти

$$\max [x_1^*(T) \alpha_1 + x_2^*(T) \alpha_2], \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0,$$

при следующих ограничениях:

$$\frac{dx_1^*}{dt} = u_1^*, \quad \frac{dx_2^*}{dt} = u_2^*, \quad x_1^*(0) = \alpha_1^* > 0, \quad x_2^*(0) = \alpha_2^* > 0,$$

$$u_1^* \geq 0, \quad u_2^* \geq 0, \quad u_1^* + u_2^* \leq x_1^*.$$

Сопряженная задача будет иметь следующий вид:  
найти

$$\min [\alpha_1^* x_1(0) + \alpha_2^* x_2(0)]$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} -\frac{dx_1}{dt} = v, \quad -\frac{dx_2}{dt} = 0, \quad x_1(T) = \alpha_1, \quad x_2(T) = \alpha_2, \\ v \geq 0, \quad -x_1 + v \geq 0, \quad -x_2 + v \geq 0, \end{aligned}$$

откуда

$$x_1(t) = \alpha_1 + \int_t^T v(\tau) d\tau > 0, \quad x_2(T) \equiv \alpha_2. \quad (64)$$

Нетрудно проверить, что все условия теоремы 6 выполнены. Управление  $\bar{u}_1^* \equiv 0$ ,  $\bar{u}_2^* \equiv 0$  будет строго допустимым. Поэтому функция

$$\mathcal{K}(u^*, \bar{x}(t)) = u_1^* \bar{x}_1(t) + u_2^* \alpha_2 \quad (65)$$

должна иметь максимум при ограничениях

$$u_1^* \geq 0, \quad u_1^* + u_2^* \leq x_1^*(t) \quad (66)$$

на оптимальном управлении  $\bar{u}_1^*(t)$ ,  $\bar{u}_2^*(t)$ . Функция

$$\tilde{\mathcal{K}}(\bar{x}^*(t), v) = x_1^*(t) v \quad (67)$$

имеет минимум при ограничениях

$$v \geq x_1, \quad v \geq \alpha \quad (68)$$

на оптимальном управлении  $\bar{v}(t)$ . Так как  $x_1^*(t) \geq 0$ , то многогранник ограничений (66) есть треугольник с вершинами в точках  $(x_1^*, 0)$ ,  $(0, x_1^*)$  и  $(0, 0)$ . Функция  $\mathcal{K}$  в этих вершинах принимает соответственно значения  $x_1^* x_1$ ,  $x_1^* \alpha_2$ , 0. Но

$$\begin{aligned} x_1^* x_1 &\leq x_1^* \alpha_2, & \text{если} \quad x_1 &\leq \alpha_2, \\ x_1^* x_1 &\geq x_1^* \alpha_2, & \text{если} \quad x_1 &\geq \alpha_2. \end{aligned}$$

Поэтому решение задачи линейного программирования (65), (66) имеет следующий вид:

$$u^*(x_1^*, x_1) = \frac{x_1^*}{2} \left( 1 + \operatorname{sgn}(x_1 - \alpha_2) \right). \quad (69)$$

Решение задачи линейного программирования (67), (68) имеет вид

$$v = \min(x_1, \alpha_2).$$

Управление  $v$  получилось независимым от  $x^*$ . Поэтому можно найти оптимальные траектории, решая задачу Коши для уравнения с разрывной правой частью

$$-\frac{dx_1}{dt} = \min(x_1, \alpha_2), \quad x_1(T) = \alpha_1.$$

Если  $\alpha_1 > \alpha_2$ , то  $x_1 \geq \alpha_2$  и

$$-\frac{dx_1}{dt} = \alpha_2, \quad x_1(T) = \alpha_1, \quad x_1(t) = \alpha_1 + \alpha_2(T - t).$$

Если  $\alpha_1 < \alpha_2$ , то для  $t$ , близких к  $T$ ,

$$-\frac{dx_1}{dt} = x_1, \quad x_1(T) = \alpha_1, \quad x_1 = \alpha_1 e^{T-t}.$$

Найдем  $\tilde{t}$ , при котором  $\alpha_1 e^{T-t} = \alpha_2$  (точка переключения управления). При  $T > \ln(\alpha_2/\alpha_1)$  имеем

$$\tilde{t} = T - \ln(\alpha_2/\alpha_1).$$

Итак, при  $T > \ln(\alpha_2/\alpha_1)$  есть точка переключения. Если же  $T < \ln(\alpha_2/\alpha_1)$ , то  $x_1(t) = \alpha_1 e^{T-t}$ . Будем предполагать, что  $T > \ln(\alpha_2/\alpha_1)$ , тогда

$$x_1(t) = \begin{cases} \alpha_1 e^{T-t}, & \tilde{t} \leq t \leq T, \\ \frac{\alpha_2}{\tilde{t}} t, & 0 \leq t \leq \tilde{t}. \end{cases} \quad (70)$$

Теперь из (69) и (70) получаем

$$u^* = (x_1^*, 0), \quad \text{если} \quad \alpha_1 > \alpha_2.$$

Если  $\alpha_1 < \alpha_2$ , то есть одна точка переключения  $\tilde{t}$  и

$$\begin{aligned} u^* &= (x_1^*, 0) && \text{при} && 0 \leq t \leq \tilde{t}, \\ u^* &= (0, x_1^*) && \text{при} && \tilde{t} \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Найдем теперь оптимальные траектории

$$\frac{dx_1^*}{dt} = x_1^*, \quad \frac{dx_2^*}{dt} = 0, \quad x_1^*(0) = \alpha_1^*, \quad x_2^*(0) = \alpha_2^*$$

при  $0 \leq t \leq \tilde{t}$ ,

$$\frac{dx_1^*}{dt} = 0, \quad \frac{dx_2^*}{dt} = x_1^* \quad \text{при} \quad \tilde{t} \leq t \leq T,$$

откуда

$$x_1^* = \alpha_1^* e^t \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq \tilde{t}, \quad x_2^* = \alpha_2^*,$$

$$x_1^* = \alpha_1^* e^{\tilde{t}}, \quad x_2^* = \alpha_2^* (t - \tilde{t}) \quad \text{при} \quad \tilde{t} \leq t \leq T.$$

Формулы написаны для случая  $\alpha_2 > \alpha_1$ ,  $T > \ln(\alpha_2/\alpha_1)$ . В остальных случаях они выписываются столь же просто. Ясно, что в более сложных примерах решить задачу точно не удастся и нужно развивать приближенные методы, использующие принцип максимума.

## § 7. Достаточные условия оптимальности

Докажем следующую теорему.

**Теорема 7 (достаточный признак оптимальности).** Пусть для некоторых допустимых управлений  $\bar{u}^*(t)$ ,  $\bar{\theta}^*$  и  $\bar{v}(t)$ ,  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$  задач А и Б выполнены условия (54). Тогда  $\bar{u}^*$ ,  $\bar{\theta}^*$ ,  $\bar{x}^*(t)$  будет оптимальным решением задачи А, а  $\bar{v}(t)$ ,  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$ ,  $\bar{x}(t)$  будет оптимальным решением задачи Б.

**Доказательство.** Теорема 7 есть следствие теоремы 13 гл. III. В самом деле, из неравенств (54) следуют неравенства (56), т. е. условия дополняющей нежесткости для задач линейного программирования А' и Б'. В силу теоремы 13 гл. III  $\bar{u}^*$ ,  $\bar{\theta}^*$  должно быть оптимальным управлением для задачи А, а  $\bar{v}$ ,  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$  должно быть оптимальным управлением для задачи Б. Теорема доказана.

Докажем еще следующую теорему существования.

**Теорема 8.** Пусть множество допустимых управлений задачи А ограничено, задачи А и Б имеют хотя бы по одному допустимому управлению, тогда задача А имеет решение.



**Доказательство.** Задачи А и Б сводятся к двойственным задачам линейного программирования А' и Б'. Теорема 8 есть следствие теоремы 16 гл. III.

## § 8. Общий случай

В предыдущих параграфах мы предполагали, что конус  $\mathcal{K}_T$  замкнут. Это предположение позволяет записать необходимые условия оптимальности (в частности, принцип максимума) в особенно простой форме. В общем случае конус  $\mathcal{K}_T$  не замкнут, и это сильно усложняет выписывание необходимых условий оптимальности. Начнем со следующей теоремы.

**Теорема 9.** Пусть  $\bar{u}^*$ ,  $\bar{\theta}^*$  есть оптимальные управления для задачи А. Тогда найдется последовательность суммируемых вектор-функций  $v_n(t) \in L^1_+[0, T]$  и последовательности векторов  $\xi_n \in R_p$ ,  $\eta_n \in R_q$  такие, что

$$-\frac{dx_n}{dt} = A(t)x_n(t) + C(t)v_n(t) + a(t), \quad v_n(t) \geq 0, \quad (71)$$

$$\delta_n + R\xi_n - Px_n(0) \geq \gamma, \quad x_n(T) = \alpha + Q\eta_n, \quad (72)$$

$$-B(t)x_n(t) + D(t)v_n(t) + \zeta_n(t) \geq b(t), \quad (73)$$

$$\xi_n \geq 0, \quad \eta_n \geq 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T [-\bar{x}^*(t)C(t) + \bar{u}^*(t)D(t) - b^*(t)]v_n(t) dt = 0, \quad (74)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{u}^*(t)[-B(t)x_n(t) + D(t)v_n(t) - b(t)] dt = 0, \quad (75)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{\theta}^*R - \beta^*, \xi_n) = 0, \quad (76)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{x}^*(T)Q - c^*, \eta_n) = 0, \quad (77)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{\theta}^*, R\xi_n - Px_n(0) - \gamma) = 0, \quad (78)$$

где  $\zeta_n(t)$  и  $\delta_n$  сильно стремятся к нулю в пространствах  $L^1_m[0, T]$  и  $R_n$  соответственно.

Доказательство. В § 3 задача А сведена к задаче линейного программирования в банаховом пространстве  $A_1$ . Применим теперь к задаче  $A_1$  теорему 32 гл. III, дающую необходимые условия оптимальности. Если в эти условия подставить выражение (25) для оператора  $T$  и выражение (22) для оператора  $T^*$  и далее провести рассуждения, аналогичные приведенным в § 3, то получим равенства (71)—(78). Теорема доказана.

Удобно несколько преобразовать равенства (71)—(78). Положим

$$s_n^{-1} = 1 + \|v_n\| + \|\eta_n\| + \|\xi_n\|. \quad (79)$$

Нормируем  $x_n(t)$  и  $v_n(t)$ ,  $\xi_n$ ,  $\eta_n$  множителем  $s_n$ . Тогда равенства (71)—(79) перепишутся в следующем виде:

$$-\frac{dx_n}{dt} = A(t)x_n(t) + C(t)v_n(t) + s_n a(t), \quad v_n(t) \geq 0, \quad (80)$$

$$\delta_n + R\xi_n - Px_n(0) \geq \gamma s_n, \quad x_n(T) = \alpha s_n + Q\eta_n, \quad (81)$$

$$-B(t)x_n(t) + D(t)v_n(t) + \xi_n(t) \geq b(t)s_n, \quad (82)$$

$$\xi_n \rightarrow 0, \quad \delta_n \rightarrow 0, \quad \xi_n \geq 0, \quad \eta_n \geq 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T [-\bar{x}^*(t)C(t) + \bar{u}^*(t)D(t) - b^*(t)]v_n(t)dt = 0, \quad (83)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{u}^*(t)[-B(t)x_n(t) + D(t)v_n(t) - s_nb(t)]dt = 0, \quad (84)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{\theta}^*R - \beta^*, \xi_n) = 0, \quad (85)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{x}^*(T)Q - c^*, \eta_n) = 0, \quad (86)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{\theta}^*, R\xi_n - Px_n(0) - s_n\gamma) = 0, \quad (87)$$

$$s_n + \|v_n\| + \|\xi_n\| + \|\eta_n\| = 1. \quad (88)$$

Соотношения (80)—(88) дают необходимые условия оптимальности. В такой предельной форме они неудобны. Следуя Дубовицкому и Милютину, их можно преобразовать, вводя меры.

Прежде всего заметим, что без ограничения общности последовательности  $s_n$ ,  $\xi_n$  и  $\eta_n$  можно считать сходящимися, так как ограниченное множество в конечномерном пространстве компактно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \eta. \quad (89)$$

Далее, воспользовавшись леммой 3 Дубовицкого и Милютина, представим  $v_n$  в виде

$$v_n = v'_n + v''_n, \quad v'_n \geq 0, \quad v''_n \geq 0, \quad (90)$$

где  $v'_n$  слабо стремится к функции  $\omega(t) \geq 0$ , а  $v''_n$  почти всюду стремится к нулю. Далее введем меру  $dv/dt$  как слабый предел в пространстве, сопряженном пространству непрерывных функций

$$\frac{dv}{dt} = \lim C(t) v''_n(t). \quad (91)$$

Тогда, переходя к пределу, можно уравнение (80) заменить следующим уравнением:

$$-\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + C(t)\left[\omega(t) + \frac{dv}{dt}\right] + sa(t). \quad (92)$$

Ограничения (81) примут следующий вид:

$$x(T-0) = \alpha s + Q\eta + v(T), \quad R\xi - Px(0) \geq \gamma s. \quad (93)$$

Преобразуем теперь ограничение (82). Перепишем его в следующем виде:

$$-B(t)x_n(t) + D(t)v_n(t) - b(t)s_n - \varphi_n(t) = \xi_n, \quad (94)$$

$$\varphi_n \geq 0, \quad \xi_n \rightarrow 0.$$

Функцию  $\varphi_n(t)$  тоже представим в виде (90), тогда (94) можно переписать в следующем виде:

$$-B(t)x_n(t) + D(t)v'_n(t) - b(t)s - \varphi'_n - \xi_n =$$

$$= -D(t)v''_n + \varphi''_n. \quad (95)$$

В левой части этого равенства стоит функция, слабо сходящаяся в  $L^1_m$ , а в правой части — функция,

стремящаяся к нулю почти всюду. Поэтому и правая и левая части и слабо и почти всюду стремятся к нулю. Переходя к пределу, получаем

$$-B(t)x(t) + D(t)\omega(t) - b(t)s - \varphi = 0, \quad \varphi \geq 0,$$

или

$$-B(t)x(t) + D(t)\omega(t) - b(t)s \geq 0. \quad (96)$$

Используя  $\varphi_n'' \geq 0$ , получаем из (95)

$$D(t)v_n'' \geq \chi_n(t), \quad (97)$$

где функция  $\chi_n(t)$  слабо и почти всюду стремится к нулю, откуда следует, что  $\chi_n(t)$  и сильно в  $L_m^1[0, T]$  стремится к нулю.

Преобразуем теперь соотношение (84). Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{u}^*(t) D(t) v_n''(t) dt = 0. \quad (98)$$

Воспользовавшись разложением (90) и переходя в равенстве (84) к пределу, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \bar{u}^*(t) [-B(t)x(t) + D(t)\omega(t) - sb(t)] dt + \\ & + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{u}^*(t) D(t) v_n''(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (99)$$

Воспользовавшись неравенством (97), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{u}^*(t) D(t) v_n''(t) dt \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{u}^*(t) \chi_n(t) dt = 0. \quad (100)$$

С другой стороны, из (99), воспользовавшись неравенством (96), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{u}^*(t) D(t) v_n''(t) dt \leq 0. \quad (101)$$

Из (100) и (101) следует (98). Из (98) и (99) следует, что

$$\int_0^T \bar{u}^*(t) [-B(t)x(t) + D(t)\omega(t) - sb(t)] dt = 0. \quad (102)$$

Преобразуем теперь равенство (83). Подставляя в него разложение (90) и переходя к пределу, получаем, используя (98):

$$\int_0^T [-\bar{x}^*(t)C(t) + \bar{u}^*(t)D(t) - b^*(t)] \omega(t) dt = 0, \quad (103)$$

$$\int_0^T [-\bar{x}^*(t)] dv - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T b^*(t) v_n'(t) dt = 0. \quad (104)$$

Если ввести еще меру  $d\mu/dt$  как слабый предел в пространстве, сопряженном пространству непрерывных функций:

$$\frac{d\mu}{dt} = \lim b^*(t) v_n'(t), \quad \mu(0) = 0, \quad (105)$$

то (104) можно записать в виде

$$\int_0^T \bar{x}^* dv + \mu(T) = 0. \quad (106)$$

Вспоминая определение нормирующего множителя  $s_n$ , получаем

$$s_n + \|\eta_n\| + \|\xi_n\| + \|v_n'\| + \|v_n''\| = 1,$$

откуда, переходя к пределу, имеем

$$s + \|\eta\| + \|\xi\| + \|\omega\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n''\| = 1.$$

Таким образом, из теоремы 9 получаем следующую теорему.

**Теорема 10.** Пусть  $\bar{u}^*$ ,  $\bar{\theta}^*$  — оптимальные управления для задачи А. Тогда найдутся вектор-функция  $\omega(t) \in L_r^1[0, T]$ , векторы  $\xi \in R_p$ ,  $\eta \in R_q$ , число  $s$ , меры

$dv/dt$  и  $d\mu/dt$  и последовательность  $v_n^*$ , почти всюду стремящаяся к нулю, такие, что

$$-\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)\omega(t) + \frac{dv}{dt} + sa(t), \quad (107)$$

$$x(T-0) = \alpha s + Q\eta + v(T), \quad R\xi - Px(0) \geq \gamma s, \quad (108)$$

$$-B(t)x(t) + D(t)\omega(t) - b(t)s \geq 0, \quad (109)$$

$$\frac{dv}{dt} = \lim C(t)v_n^*(t), \quad \frac{d\mu}{dt} = \lim b^*(t)v_n^*(t), \quad (110)$$

$$D(t)v_n^*(t) + \chi_n(t) \geq 0, \quad \|\chi_n\|_{L_m^1} \rightarrow 0, \quad (111)$$

$$s + \|\eta\| + \|\xi\| + \|\omega\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n^*\| = 1, \quad (112)$$

$$\omega(t) \geq 0, \quad \xi \geq 0, \quad s \geq 0, \quad v_n^* \geq 0, \quad (113)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{u}^*(t) D(t) v_n^*(t) dt = 0, \quad (114)$$

$$\mu(T) + \int_0^T \bar{x}^*(t) dv = 0. \quad (115)$$

Кроме того, почти всюду на отрезке  $[0, T]$

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^* [-B(t)x(t) + D(t)\omega(t) - sb(t)]_i &= 0, \quad i = 1, \dots, m \\ [-\bar{x}^*(t)C(t) + \bar{u}^*(t)D(t) - b^*(t)]_j \omega_j &= 0, \quad j = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Дубовицкий и Милютин дали описание мер  $dv/dt$  и  $d\mu/dt$  через позитивную меру, сосредоточенную на множестве фазовых точек траектории. Идея предлагаемого ниже доказательства принадлежит Ю. Бродскому.

Пусть меры  $dv/dt$  и  $d\mu/dt$  не обращаются одновременно в нуль. Тогда в силу (112) величина  $\|v_n^*\|$  стремится к некоторой положительной постоянной, которую без ограничения общности можно считать равной единице. В теореме 8 содержится следующее описание мер  $dv/dt$  и  $d\mu/dt$ . Пусть  $z(t)$  — непрерывная вектор-

функция, а  $\xi(t)$  — скалярная функция; тогда

$$\begin{aligned} \int_0^T z(t) dv + \xi(t) d\mu &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T [z(t) C(t) + \xi(t) b^*(t)] v_n''(t) dt, \\ v_n''(t) &\in L_r^1[0, T], \quad v_n''(t) \geq 0, \\ D(t) v_n''(t) + \chi_n(t) &\geq 0, \quad \|\chi_n\|_{L_m^1[0, T]} \rightarrow 0, \\ \int_0^T \bar{u}^*(t) D(t) v_n''(t) dt &\rightarrow 0, \\ \int_0^T [b^*(t) + x^*(t) C(t)] v_n''(t) dt &\rightarrow 0, \\ \|v_n''\| = \int_0^T e v_n''(t) dt &\rightarrow 1, \quad e = (1, \dots, 1). \end{aligned} \quad (116)$$

Рассмотрим экстремальную задачу.

Задача U. Найти  $\inf \alpha$  при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} \alpha, \beta, \gamma &\in R_1, \quad u(t) \in L_m^\infty[0, T], \quad u(t) \geq 0, \\ \alpha e &\geq u D(t) + \beta \bar{u}^*(t) D + \gamma [b^* + x^*(t) C(t)] + \\ &+ z(t) C(t) + \xi(t) b^*(t) \text{ почти всюду.} \end{aligned} \quad (117)$$

Очевидно, что у задачи U есть допустимые элементы  $\alpha, \beta, \gamma, u(t)$ . Покажем, что  $\inf \alpha > -\infty$ . Умножая (117) на  $v_n''$ , интегрируя от 0 до T и используя (116), получаем при  $n \rightarrow \infty$

$$\alpha \geq \int_0^T z(t) dv + \xi(t) d\mu. \quad (118)$$

Поэтому множество чисел  $\alpha$  ограничено снизу и  $\inf \alpha > -\infty$ . Пусть  $n$  — произвольный вектор вида

$$n \in R_m, \quad n \geq 0, \quad |n| = \sum n_i = 1. \quad (119)$$

Тогда (117) эквивалентно неравенству

$$\begin{aligned} \alpha \geq u(t) D(t) n + \beta \bar{u}^*(t) D n + \gamma [b^* + x^*(t) C(t)] n + \\ + [z(t) C(t) + \xi(t) b^*(t)] n \equiv \Phi(u, \beta, \gamma, n, t). \end{aligned} \quad (120)$$

Неравенство (120) при фиксированных допустимых  $u(t)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  выполнено при всех  $t \in [0, T]$  и  $n$ , удовлетворяющих условиям (119). Используя теперь понятие замыкания по мере и теоремы 16 и 18 гл. I, получаем

$$\begin{aligned} \alpha &\geq \max_n \{ \operatorname{vrai} \max_t \Phi(u, \beta, \gamma, n, t) \} = \\ &= \max_{\theta_0} \{ u D n + \beta u^* D n + \gamma [b^* + x^*(t) C] n + \\ &\quad + [z(t) C + \zeta(t) b^*] n \}, \quad (121) \end{aligned}$$

где  $\max$  берется по множеству

$$\begin{aligned} \theta_0 = \{ (t, n, D, u^*, b^*, C) : t \in [0, T], n \geq 0, |n| = 1, \\ D, u^*, b^*, C \in \overline{D(t), u^*(t), b^*(t), C(t)} \}, \end{aligned}$$

которое есть компакт в конечномерном пространстве. Из (121) следует

$$\inf \alpha = \inf_{u, \beta, \gamma} \{ \max_{\theta_0} [u D n + \beta u^* D n + \gamma (b^* + x^*(t) C) n + (z(t) C + \zeta(t) b^*) n] \}.$$

Назовем точку множества  $\theta_0$  *фазовой*, если

$$D n \geq 0, \quad u^* D n = 0, \quad [b^* + x^*(t) C] n = 0. \quad (122)$$

Множество всех фазовых точек обозначим через  $\theta$ . Так как на дополнении  $\theta$  в  $\theta_0$   $\inf \max = -\infty$ , то

$$\inf \alpha = \inf_u \{ \max_{\theta} [u D n + (z(t) C + \zeta(t) b^*) n] \}.$$

В силу условий (122)  $\inf$  достигается при  $u = 0$ . Поэтому

$$\inf \alpha = \max_{\theta} [z(t) C + \zeta(t) b^*] n.$$

Из неравенства (118) тогда имеем

$$\max_{\theta} [z(t) C + \zeta(t) b^*] \geq \int_0^T z(t) dx + \zeta(t) d\mu.$$

Таким образом, меры  $dv/dt$  и  $d\mu/dt$  — опорные к сублинейному функционалу

$$\varphi(z, \zeta) = \max_{\theta} [z(t) C + \zeta(t) b^*] n. \quad (123)$$



В § 1 гл. IV было показано, что любой опорный функционал к (123) выражается через позитивную меру, сосредоточенную на  $\theta$ . Поэтому

$$\int_0^T z(t) dv + \zeta(t) d\mu = \int_{\theta} [z(t) C + \zeta(t) b^*] n d\sigma. \quad (123')$$

Таким образом, все меры, определяемые условиями (116), будут опорными к сублинейному функционалу (123). Можно показать, что такими мерами исчерпывается все множество опорных функционалов к (123). В силу теоремы 2 гл. IV достаточно показать, что множество мер, определяемых условиями (116), слабо\* замкнуто, выпукло и

$$\varphi(z, \zeta) = \max_{v_n} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^T [z(t) C(t) + \zeta(t) b^*(t)] v_n(t) dt. \quad (124)$$

Выпуклость и слабая\* замкнутость рассматриваемого множества мер очевидна. Равенство (124) следует из результатов § 5 гл. III.

Рассмотрим экстремальную задачу  $\tilde{U}$  о разыскании максимума функционала, стоящего в правой части равенства (124) на множестве последовательностей  $v_n$ , удовлетворяющих ограничениям (116). Тогда задача  $U$  двойственна задаче  $\tilde{U}$ . В силу результатов § 5 гл. III значения функционалов двойственных задач на решении совпадают. Поэтому (124) должно быть выполнено.

**Теорема 11.** *Если задача  $A$  имеет строго допустимое управление, то множитель  $s$  в теоремах 7—10 можно считать равным единице.*

**Доказательство.** В самом деле, как было показано ранее, последовательность  $v_n(t)$  в формулах (71) — (78) в этом случае будет ограниченной в  $L_r^1[0, T]$ , и нормирующий множитель (79) вводить не нужно.

Теорема 8 позволяет сформулировать принцип максимума Понтрягина. Введем функции Понтрягина

$$\mathcal{H}(u^*, x) = u^*(Bx + sb), \quad \tilde{\mathcal{H}}(x^*, \omega) = (b^* + x^*C)\omega. \quad (125)$$

**Теорема 11'.** Пусть задача А имеет оптимальные управления  $\bar{u}^*$ ,  $\bar{\theta}^*$ . Тогда найдутся вектор-функция  $\omega(t) \in L_+^1[0, T]$ , векторы  $\xi \in R_p$ ,  $\eta \in R_q$ , число  $s$ , меры  $dv/dt$  и  $d\mu/dt$  и последовательность  $v_n^*$ , почти всюду стремящаяся к нулю, такие, что выполнены условия (107)—(113):

$$\max_{u^*} \mathcal{H}(u^*, x(t)) = \mathcal{H}(\bar{u}^*(t), x(t)), \quad (126)$$

где  $\max$  берется по многограннику

$$u^* \geq 0, \quad u^* D(t) \leq b^*(t) + \bar{x}^*(t) C(t). \quad (127)$$

Кроме того,

$$\min_{\omega} \tilde{\mathcal{H}}(\bar{x}^*(t), \omega) = \tilde{\mathcal{H}}(\bar{x}^*(t), \omega(t)), \quad (128)$$

где  $\min$  берется по многограннику

$$\omega \geq 0, \quad D(t) \omega \geq B(t) \bar{x}(t) + b(t) s. \quad (129)$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 5', если воспользоваться условиями (116).

## § 9. Учет ограничений типа равенств

Рассмотрим задачу, более общую, чем задача А.

**Задача  $A_I$ .** Найти управления  $u^*(t) \in L_{m_1}^\infty[0, T]$  и  $h^*(t) \in L_{m_2}^\infty[0, T]$ , дающие максимум линейному функционалу

$$\begin{aligned} \varphi = & x^*(T) \alpha + x^*(0) \beta + \\ & + \int_0^T [x^*(t) a(t) + u^*(t) b_1(t) + h^*(t) b_2(t)] dt \end{aligned} \quad (130)$$

при следующих ограничениях:

$$\frac{dx^*(t)}{dt} = x^*(t) A(t) + u^*(t) B_1(t) + h^*(t) B_2(t) + a^*(t),$$

$$x^*(t) \in \mathcal{L}_n^\infty[0, T], \quad u^*(t) \geq 0, \quad (131)$$

$$-x^*(t) C_1(t) + u^*(t) D_1(t) + h^*(t) E_1(t) \leq b_1^*(t), \quad (132)$$

$$-x^*(t) C_2(t) + u^*(t) D_2(t) + h^*(t) E_2(t) = b_2^*(t), \quad (133)$$

$$x^*(0) G_1 + x^*(T) Q_1 \leq C_1^*, \quad (134)$$

$$x^*(0) G_2 + x^*(T) Q_2 = C_2^*. \quad (135)$$

Матрицы и векторы, зависящие от  $t$ , предполагаются ограниченными и измеримыми. Векторы  $b_1^*$ ,  $b_2^*$ ,  $c_1^*$ ,  $c_2^*$  имеют размерности соответственно  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ .

Аналогично § 3 задача  $A_1$  может быть сведена к задаче линейного программирования в банаховом пространстве. Положим

$$x^*(0) = \kappa^*.$$

Тогда функционал (130) может быть преобразован к следующему виду:

$$\varphi = \kappa^* \kappa_0 + (u^*, u_0) + (h^*, h_0),$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= \alpha + \beta + \int_0^T F(t) [A(t) \alpha + a(t)] dt, \\ u_0(t) &= B_1(t) N^{-1} [A(t) \alpha + a(t)] + B_1(t) \alpha + b_1(t), \\ h_0(t) &= B_2(t) N^{-1} [A(t) \alpha + a(t)] + B_2(t) \alpha + b_2(t). \end{aligned}$$

Ограничения (132) и (133) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} & -M^{-1}(u^* B_1) C_1(t) + u^*(t) D_1(t) - M^{-1}(h^* B_2) C_1(t) + \\ & \quad + h^*(t) E_1(t) - \kappa^* F(t) C_1(t) \leq \tilde{b}_1^*(t), \\ & -M^{-1}(u^* B_1) C_2(t) + u^*(t) D_2(t) - M^{-1}(h^* B_2) C_2(t) + \\ & \quad + h^*(t) E_2(t) - \kappa^* F(t) C_2(t) \leq \tilde{b}_2^*(t), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{b}_i^*(t) = b_i^*(t) + M^{-1}(a^*) C_i(t), \quad i = 1, 2. \quad (136)$$

Ограничения (126) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_0^T [u^*(t) B_1(t) + h^*(t) B_2(t)] F^{-1}(t) dt \cdot F(T) Q_1 + \\ & \quad + \kappa^* (F(T) Q_1 + G_1) \leq \tilde{c}_1^*, \\ & \int_0^T [u^*(t) B_1(t) + h^*(t) B_2(t)] F^{-1}(t) dt \cdot F(T) Q_2 + \\ & \quad + \kappa^* (F(T) Q_2 + G_2) = \tilde{c}_2^*, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{c}_i^* = c_i - \int_0^T a^*(t) F^{-1}(t) dt \cdot F(T) Q_i, \quad i = 1, 2. \quad (137)$$

Если ввести операторы  $S^* \in [L_{m_1}^\infty \rightarrow L_{r_1}^\infty \times R_{q_1}]$ ,  $R^* \in [L_{m_2}^\infty \times R_n \rightarrow L_{r_2}^\infty \times R_{q_2}]$ ,  $T^* \in [L_{m_1}^\infty \rightarrow L_{r_1}^\infty \times R_{q_1}]$ ,  $P^* \in [L_{m_2}^\infty \times R_n \rightarrow L_{r_2}^\infty \times R_{q_2}]$  следующим образом:

$$T^* u^* = \begin{pmatrix} M^{-1}(u^* B_1) C_1(t) + u^* D_1(t) \\ \int_0^T u^* B_1(t) F^{-1}(t) dt \cdot F(T) Q_1 \end{pmatrix},$$

$$P^*(h^*, \kappa^*) = \begin{pmatrix} -M^{-1}(h^* B_2) C_1(t) + h^* E_1 - \kappa^* F(t) C_1(t) \\ \int_0^T h^*(t) B_2(t) F^{-1}(t) dt \cdot F(T) Q_1 + \kappa^* (F(T) Q_1 + G_1) \end{pmatrix},$$

$$S^* u^* = \begin{pmatrix} -M^{-1}(u^* B_1) C_2(t) + u^* D_2(t) \\ \int_0^T u^* B_1(t) F^{-1}(t) dt \cdot F(T) Q_2 \end{pmatrix},$$

$$R^*(h^*, \kappa^*) = \begin{pmatrix} -M^{-1}(h^* B_2) C_2(t) + h^* E_2(t) - \kappa^* F(t) C_2(t) \\ \int_0^T h^*(t) B_2(t) F^{-1}(t) dt \cdot F(T) Q_2 + \kappa^* (F(T) Q_2 + G_2) \end{pmatrix},$$

то задача  $A_I$  может быть записана в стандартном виде задачи II § 5 гл. III.

**Задача  $A_{II}$ . Найти**

$$\max \{(u^*, u_0) + (h^*, h_0) + (\kappa^*, \kappa_0)\}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} S^* u^* + R^*(h^*, \kappa^*) - (\tilde{b}_2^*, \tilde{c}_2^*) &= 0, \\ T^* u^* + P^*(h^*, \kappa^*) - (\tilde{b}_1^*, \tilde{c}_1^*) &\leq 0, \\ u^* &\geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что операторы  $S^*$ ,  $R^*$ ,  $T^*$ ,  $P^*$  сопряжены операторам  $S \in [L_{r_1}^1 \times R_{q_1} \rightarrow L_{m_1}^1]$ ,  $R \in [L_{r_2}^1 \times R_{q_2} \rightarrow L_{m_2}^1 \times R_n]$ ,  $T \in [L_{r_1}^1 \times R_{q_1} \rightarrow L_{m_1}^1]$  и  $P \in [L_{r_1}^1 \times R_{q_1} \rightarrow L_{m_1}^1 \times R_n]$ :

$$\begin{aligned} T(v(t), \xi) &= -B_1 N^{-1}(C_1 v) + D_1 v + B_1 F^{-1}(t) F(T) Q_1 \xi, \\ S(\delta, \eta) &= -B_1 N^{-1}(C_2 \delta) + D_2 \delta + B_1 F^{-1}(t) F(T) Q_2 \eta, \\ P(v, \xi) &= \begin{pmatrix} -B_2 N^{-1}(C_1 v) + E_1 v + B_2 F^{-1}(t) F(T) Q_1 \xi \\ -\int_0^T F(t) C_1(t) v(t) dt + (F(T) Q_1 + G_1) \xi \end{pmatrix}, \\ R(\delta, \eta) &= \begin{pmatrix} -B_2 N^{-1}(C_2 \delta) + E_2 \delta + B_2 F^{-1}(t) F(T) Q_2 \eta \\ -\int_0^T F(t) C_2(t) \delta(t) dt + (F(T) Q_2 + G_2) \eta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (138)$$

Из результатов § 5 гл. III следует, что задача, двойственная задаче  $A_{II}$ , имеет следующий вид.

**Задача  $B_2$ . Найти**

$$\min \{(\tilde{b}_1^*, v) + \tilde{c}_1^* \xi + (\tilde{b}_2^*, \delta) + \tilde{c}_2^* \eta\}$$

*при следующих ограничениях:*

$$\begin{aligned} v &\geq 0, \quad \xi \geq 0, \\ T(v, \xi) + S(\delta, \eta) - u_0 &\geq 0, \\ P(v, \xi) + R(\delta, \eta) - (h_0, \kappa_0) &\geq 0. \end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь выражениями (138) для операторов и выражениями (136) и (137) для  $\tilde{b}_i^*$  и  $\tilde{c}_i^*$ , при помощи рассуждений, аналогичным рассуждениям § 3 этой главы, мы сведем задачу  $B_2$  к следующей задаче:

**Задача  $B_1$ . Найти управления  $v(t) \in L_{r_1}^1[0, T]$ ,  $\delta(t) \in L_{r_2}^1[0, T]$ ,  $\xi \in R_{q_1}$ ,  $\eta \in R_{q_2}$ , дающие минимум линейному функционалу**

$$\psi = c_1^* \xi + c_2^* \eta + \int_0^T [a^*(t) x(t) + b_1^*(t) v(t) + b_2^*(t) \delta(t)] dt,$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} -\frac{dx(t)}{dt} - A(t)x(t) &= C_1(t)v(t) + C_2(t)\delta(t) + a(t), \\ x(t) &\in \mathcal{L}_n^1[0, T], \quad v(t) \geq 0, \quad \xi \geq 0, \\ x(T) &= \alpha - (Q_1\xi + Q_2\eta), \\ x(0) &= -\beta + G_1\xi + G_2\eta, \\ -B_1(t)x(t) + D_1(t)v(t) + D_2(t)\delta(t) &\geq b_1(t), \\ -B_2(t)x(t) + E_1(t)v(t) + E_2(t)\delta(t) &= b_2(t). \end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь теоремой 32 гл. III, мы можем доказать теорему, аналогичную теореме 7 этой главы:

**Теорема 12.** Пусть  $\bar{u}^*(t)$ ,  $\bar{h}^*(t)$ ,  $\bar{x}^* = x^*(0)$  — оптимальные управления задачи  $A_1$ . Тогда найдутся последовательности суммируемых вектор-функций  $v_n(t) \in L_{r_1}^1[0, T]$ ,  $\delta_n(t) \in L_{r_2}^1[0, T]$ , последовательности векторов  $\xi_n \in R_{q_1}$ ,  $\eta_n \in R_{q_2}$ , такие, что

$$\begin{aligned} -\frac{dx_n(t)}{dt} &= A(t)x_n(t) + C_1(t)v_n(t) + C_2(t)\delta_n(t) + a(t), \\ x_n(T) &= \alpha - Q_1\xi_n - Q_2\eta_n, \quad \xi_n \geq 0, \quad v_n(t) \geq 0, \\ x_n(0) &= -\beta + G_1\xi_n + G_2\eta_n + \zeta_n, \quad \zeta_n \rightarrow 0, \\ -B_1(t)x_n(t) + D_1(t)v_n(t) + D_2(t)\delta_n(t) + \chi_n'(t) &\geq b_1(t), \\ -B_2(t)x_n(t) + E_1(t)v_n(t) + E_2(t)\delta_n(t) + \chi_n''(t) &= b_2(t), \\ \chi_n'(t), \chi_n''(t) &\rightarrow 0 \text{ сильно}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T [-\bar{x}^*(t)C_1(t) + \bar{u}^*(t)D_1(t) + \\ &\quad + \bar{h}^*(t)E_1(t) - b_1^*(t)]v_n(t) dt = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{u}^*(t)[-B_1(t)x_n(t) + D_1(t)v_n(t) + \\ &\quad + D_2(t)\delta_n(t) - b_1(t)] dt = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} [\bar{x}^*(0)G_1 + x^*(T)Q_1 - c_1^*]\xi_n &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7.

**Замечание.** Как следует из теоремы 32, если по ограничениям типа неравенства удовлетворяется условие Слейтера, а ограничения типа равенства не-

вырождены, то последовательности  $v_n(t)$ ,  $\delta_n(t)$ ,  $\xi_n$ ,  $\eta_n$  будут ограниченными.

В общем случае теореме 12 можно при помощи нормировки придать следующий вид:

**Теорема 13.** Пусть  $\bar{u}^*(t)$ ,  $\bar{h}^*(t)$ ,  $x^* = x^*(0)$  — оптимальные управления задачи  $A_1$ . Тогда найдутся последовательности суммируемых вектор-функций  $v_n(t) \in L_{r_1}^1[0, T]$ ,  $\delta_n(t) \in L_{r_2}^1[0, T]$ , последовательности векторов  $\xi_n \in R_{q_1}$ ,  $\eta_n \in R_{q_2}$  и числовая последовательность  $s_n$  такие, что

$$-\frac{dx_n(t)}{dt} = A(t)x_n(t) + C_1(t)v_n(t) + C_2(t)\delta_n(t) + s_n a(t),$$

$$x_n(T) = s_n \alpha - Q_1 \xi_n - Q_2 \eta_n, \quad \xi_n \geq 0, \quad v_n(t) \geq 0,$$

$$x_n(0) = -s_n \beta + G_1 \xi_n + G_2 \eta_n + \zeta_n, \quad \zeta_n \rightarrow 0,$$

$$-B_1(t)x_n(t) + D_1(t)v_n(t) + D_2(t)\delta_n(t) - s_n b_1(t) \geq \chi'_n(t),$$

$$-B_2(t)x_n(t) + E_1(t)v_n(t) + E_2(t)\delta_n(t) - s_n b_2(t) = \chi''_n(t),$$

$$\chi_n(t), \chi'_n(t) \rightarrow 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T [-x^*(t)C_1(t) + \bar{u}^*(t)D_1(t) + \bar{h}^*(t)E_1(t) - b_1^*(t)]v_n(t) dt = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{u}^*(t)[-B_1(t)x_n(t) + D_1(t)v_n(t) + D_2(t)\delta_n(t) - b_1(t)s_n] dt = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [x^*(0)G_1 + x^*(T)Q_1 - c_1^*]\xi_n = 0,$$

$$\|v_n\| + \|h_n\| + \|\xi_n\| + \|\eta_n\| + s_n = 1.$$

Без ограничения общности можно считать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ . Сформулируем условия, при выполнении которых число  $s \neq 0$ .

**Теорема 14.** Пусть

- 1) существуют допустимые управления, строго допустимые по ограничениям (132), (134),
- 2) ограничения типа равенства (133) и (135) — невырожденные.

Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \neq 0$ .

**Доказательство.** Воспользуемся теоремой 32<sup>а</sup> гл. III. Теорема 14 есть простое следствие этой теоремы.

**З а м е ч а н и е.** Условие невырожденности ограничения (124) означает, что любая вектор-функция  $\varphi(t) \in L_{r_2}^1[0, T]$  может быть представлена в виде

$$\varphi(t) = -x^*(t) C_2(t) + u^*(t) D_2(t) + h^*(t) E_2(t), \\ h^* \in L_{m_2}^1[0, T], \quad u^*(t) \in L_{m_1}^1[0, T], \quad u^*(t) \geq 0. \quad (139)$$

Поскольку  $x^*(t)$  есть интегральный оператор типа Вольтерра от  $u^*(t)$ ,  $h^*(t)$ , то (139) есть интегральное уравнение типа Вольтерра. Условие невырожденности ограничения есть условие разрешимости этого уравнения. Аналогично, условие невырожденности ограничения (135) заключается в том, что любой вектор  $k \in R_{q_1}$  можно представить в виде

$$k = \kappa^* G_2 + \kappa^*(T) Q_2, \quad \kappa^* \in R_n.$$

Например, если ранг матрицы  $G_2$  равен  $q_2$ , то ограничение (135) будет невырожденным.

Сформулируем теперь теорему, аналогичную теореме 8.

**Теорема 15.** Пусть  $\bar{u}^*(t)$ ,  $\bar{h}^*(t)$ ,  $\kappa^* = x^*(0)$  — оптимальные управления задачи  $A_1$ . Тогда найдутся вектор-функции  $v(t) \in L_{r_1}^1[0, T]$ ,  $\delta(t) \in L_{r_2}^1[0, T]$ , векторы  $\xi \in R_{q_1}$ ,  $\eta \in R_{q_2}$  и число  $s$  такие, что

$$-\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C_1(t)v(t) + C_2(t)\delta(t) + \\ + sa(t) + \frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt},$$

$$x(T) = s\alpha - Q_1\xi - Q_2\eta + v_1(T) + v_2(T), \quad \xi \geq 0, \quad v(t) \geq 0,$$

$$x(0) = -s\beta + G_1\xi + G_2\eta, \quad v(t) \geq 0, \quad \xi \geq 0, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

$$-B_1(t)x(t) + D_1(t)v(t) + D_2(t)\delta(t) - sb_1(t) \geq 0,$$

$$-B_2(t)x(t) + E_1(t)v(t) + E_2(t)\delta(t) - sb_2(t) = 0,$$

$$\int_0^T [-\bar{x}^*(t) C_1(t) + \bar{u}^*(t) D_1(t) +$$

$$+ \bar{h}^*(t) E_1(t) - b_1^*(t)] v(t) dt = 0,$$

$$\int_0^T \bar{u}^*(t) [-B_1(t)x(t) + D_1(t)v(t) +$$

$$+ D_2(t)\delta(t) - b_1(t)s] dt = 0,$$

$$[\bar{x}^*(0) G_1 + x^*(T) Q_1 - c_1^*] \xi = 0,$$



где меры  $dv_1/dt$  и  $dv_2/dt$  определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \lim_{n \rightarrow \infty} C_1(t) v_n''(t), \quad \frac{dv_2}{dt} = \lim_{n \rightarrow \infty} C_2(t) \delta_n''(t), \\ v_n''(t) &\in L_{r_1}^1[0, T], \quad v_n''(t) \geq 0, \\ v_n''(t) &\rightarrow 0 \text{ почти всюду на } [0, T], \\ \delta_n''(t) &\in L_{r_2}^1[0, T], \quad \delta_n''(t) \rightarrow 0 \text{ почти всюду на } [0, T], \\ D_1(t) v_n''(t) + D_2(t) \delta_n''(t) &\geq \chi_n(t) \rightarrow 0 \text{ в } L_{m_1}^1[0, T], \\ E_1(t) v_n''(t) + E_2(t) \delta_n''(t) &\rightarrow 0 \text{ в } L_{m_2}^1[0, T], \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{u}^*(t) [D_1(t) v_n''(t) + D_2(t) \delta_n''(t)] dt &= 0, \\ \int_0^T \bar{x}^*(t) (dv_1 + dv_2) + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T [b_1^*(t) v_n''(t) + b_2^*(t) \delta_n''(t)] dt = 0, \\ s + \|\xi\| + \|\eta\| + \|\nu\| + \|\delta\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n''\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n''\| &> 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T [-\bar{x}^*(t) C_1 + \bar{u}^* D_1(t) + \\ &+ \bar{h}^*(t) E_1(t) - b_1^*(t)] v_n''(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем параграфе, можно дать описание мер через позитивную меру, сосредоточенную на множестве фазовых точек.

# ГЛАВА VI

## ВЫПУКЛЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

### § 1. Постановка задачи

Ограничимся рассмотрением дифференциальных уравнений, линейных относительно фазовой переменной, и сформулируем следующую простую задачу:

**Задача С.** Найти управления  $u^*(t) \in L_m^\infty[0, T]$ ,  $\kappa^* \in R^n$ , дающие максимум функционалу

$$\Phi(u^*, \kappa^*) = \int_0^T \psi[x^*(t), u^*(t), t] dt \quad (1)$$

при следующих ограничениях:

$$\frac{dx^*(t)}{dt} = x^*(t) A(t) + \eta(u^*(t), t), \quad u^*(t) \geq 0, \quad (2)$$

$$x^*(0) = \kappa^*, \quad \chi[x^*(T), x^*(0)] \leq 0, \quad (3)$$

$$\Phi[x^*(t), u^*(t), t] \leq 0, \quad x^*(0) G_2 + x^*(T) Q_2 = c_2^*. \quad (4)$$

Предполагается, что функции  $-\Phi(x^*, u^*, t)$ ,  $\psi(x^*, u^*, t)$ ,  $-\eta(u^*, t)$  непрерывно дифференцируемы во всем пространстве, вогнуты по  $x^*$ ,  $u^*$  и монотонно возрастают по  $x^*$ ,  $\Phi(x^*, u^*, t)$  — вектор-функция с  $r$  компонентами,  $-\chi(\alpha, \beta)$  — непрерывно-дифференцируемая функция, вогнутая и монотонно возрастающая по  $\alpha$ .

Задачу С нетрудно свести к задаче вогнутого программирования в банаховом пространстве. Из (2), воспользовавшись формулой (15) гл. V, получаем

$$x^*(t) = M^{-1}(\eta(u^*, t)) + \kappa^* F(t). \quad (5)$$

Поэтому задача С сводится к следующей задаче вогнутого программирования:

**Задача С'.** Найти максимум вогнутого функционала

$$\Phi(u^*, \kappa^*) = \int_0^T \psi[M^{-1}(\eta(u^*, t)) + \kappa^* F(T), u^*(t), t] dt \quad (6)$$

при следующих ограничениях:

$$\Phi[M^{-1}(\eta(u^*, t)) + \kappa^* F(T), u^*(t), t] \leq 0, \quad (7)$$

$$\chi \left[ \int_0^T \eta(u^*, t) F^{-1}(t) dt \cdot F(T) + \kappa^* F(T), \kappa^* \right] \leq 0, \quad (8)$$

$$\kappa^* G_2 + \left\{ \int_0^T \eta(u^*, t) F^{-1}(t) dt + \kappa^* \right\} F(T) Q_2 = c_2^*. \quad (9)$$

Напомним, что для задачи С' выполнено условие Слейтера по ограничению (5), если найдутся такие допустимые управления  $\tilde{u}^*, \tilde{\kappa}^*$ , что

$$\Phi(\tilde{x}^*(t), \tilde{u}^*(t), t) \geq \gamma e_r, \quad \gamma \geq 0, \quad e_r = (1, 1, \dots, 1). \quad (10)$$

Аналогично определяется условие Слейтера для других ограничений типа неравенства.

Применяя теперь к задаче С теорему 3 гл. IV, получаем следующую теорему:

**Теорема 1.** Пусть функции —  $\Phi(x^*, u^*, t)$ ,  $\psi(x^*, u^*, t)$ , —  $\eta(u^*, t)$  — непрерывно-дифференцируемы, монотонно возрастают по  $x^*$  вогнуты по  $x^*, u^*$ , функция —  $\chi(\alpha, \beta)$  — непрерывно-дифференцируема, вогнута и монотонно возрастает по  $\alpha$ . И пусть по всем ограничениям удовлетворяется условие Слейтера. Тогда для того, чтобы управления  $\bar{u}^*(t)$ ,  $\bar{\kappa}^*$  были бы оптимальными для задачи С, необходимо и достаточно, чтобы они были бы оптимальными для следующей линейной задачи оптимального управления:

**Задача С<sub>0</sub>.** Найти управления  $u^*(t)$ ,  $\kappa^*$ , дающие максимум линейному функционалу

$$\int_0^T \left\{ x^*(t) \frac{\partial \psi}{\partial x^*} [\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), t] + \right. \\ \left. + u^*(t) \frac{\partial \psi}{\partial u^*} [\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), t] \right\} dt, \quad (11)$$

при следующих ограничениях:

$$\frac{dx^*(t)}{dt} = x^*(t) A(t) + (u^* - \bar{u}^*) \frac{\partial \eta}{\partial u^*}(\bar{u}^*, t) + \eta(\bar{u}^*, t), \quad (12)$$

$$\Phi(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) + (x^* - \bar{x}^*) \frac{\partial \Phi}{\partial x^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) + \\ + (u^* - \bar{u}^*) \frac{\partial \Phi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) \leq 0, \quad (13)$$

$$u^* \geq 0, \quad x^*(0) = \kappa^*, \quad x^*(0) G_2 + x^*(T) Q_2 = c_2^*, \quad (14)$$

$$\chi(\bar{x}^*(T), \bar{\kappa}^*) + (x^*(T) - \bar{x}^*(T)) \frac{\partial \chi}{\partial \alpha}(\bar{x}^*(T), \bar{\kappa}^*) + \\ + (\kappa^* - \bar{\kappa}^*) \frac{\partial \chi}{\partial \beta}(\bar{x}^*(T), \bar{\kappa}^*) \leq 0.$$

**Доказательство.** Для задачи  $S'$  выполнены все условия теоремы 3 гл. IV, ибо нетрудно проверить, что добавление ограничений типа равенств, но линейных, не делает теорему неверной. Далее, в силу теоремы II гл. I операторы и функционалы, входящие в формулировку задачи  $S'$  и определяемые равенствами (6)–(9), имеют производные Фреше, которые легко вычислить по формуле, данной в теореме 11 гл. I. Вычисляя производную Фреше функционала (6), получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u^*}(\bar{u}^*, \bar{\kappa}^*)(u^* - \bar{u}^*) + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa^*}(\bar{u}^*, \kappa^*)(\kappa^* - \bar{\kappa}^*) = \\ = \int_0^T \left[ M^{-1} \left( \frac{\partial \eta}{\partial u^*}(\bar{u}^*, t) \right) (u^* - \bar{u}^*) + (\kappa^* - \bar{\kappa}^*) F(t) \right] \times \\ \times \frac{\partial \psi}{\partial x^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) dt + \int_0^T (u^* - \bar{u}^*) \frac{\partial \psi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) dt. \quad (15)$$

Полагая теперь

$$x^*(t) - \bar{x}^*(t) = \\ = M^{-1} \left( \frac{\partial \eta}{\partial u^*}(\bar{u}^*, t) \right) (u^* - \bar{u}^*) + (\kappa^* - \bar{\kappa}^*) F(t),$$

получаем, что  $x^*(t)$  есть решение уравнения (12) с начальным условием  $x^*(0) = \kappa^*$ . Поэтому равенство

(15) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u^*}(\bar{u}^*, \bar{\kappa}^*)(u^* - \bar{u}^*) + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa^*}(\bar{u}^*, \bar{\kappa}^*)(\kappa^* - \bar{\kappa}^*) = \\ = \int_0^T [x^*(t) - \bar{x}^*(t)] \frac{\partial \Phi}{\partial x^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) dt + \\ + \int_0^T [u^*(t) - \bar{u}^*(t)] \frac{\partial \Phi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) dt. \end{aligned}$$

Аналогичным образом выписываются производные Фреше и всех остальных операторов. Применяя теперь теорему 3 гл. IV, получаем, что справедливо утверждение теоремы 1.

Заметим теперь, что задача  $C_0$  имеет стандартный вид задачи  $A_1$  гл. V, в которой отсутствует ограничение (125) гл. V и управление  $h^*(t) = 0$ . Нужно лишь положить

$$B_1 = \frac{\partial \eta}{\partial u^*}(\bar{u}^*, t), \quad B_2 = 0, \quad C_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t), \quad C_2 = 0,$$

$$D_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t), \quad D_2 = 0, \quad E_1 = 0, \quad E_2 = 0,$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad a^*(t) = \eta(\bar{u}^*, t) - \bar{u}^* \frac{\partial \eta}{\partial u^*}(\bar{u}^*, t), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} b_1^* = -\Phi(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) + \bar{x}^* \frac{\partial \Phi}{\partial x^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) + \\ + \bar{u}^* \frac{\partial \Phi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1^* = -\chi(\bar{x}^*(T), \bar{\kappa}^*) + \bar{x}^*(T) \frac{\partial \chi}{\partial \alpha}(\bar{x}^*(T), \bar{\kappa}^*) + \\ + \bar{\kappa}^* \frac{\partial \chi}{\partial \beta}(\bar{x}^*(T), \bar{\kappa}^*), \end{aligned}$$

$$b_2^* = 0, \quad a(t) = \frac{\partial \psi}{\partial x^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t), \quad b(t) = \frac{\partial \psi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t).$$

Подставляя теперь выражения (16) в формулировку задачи  $B_1$ , двойственной задаче  $A_1$ , получаем формулировку задачи, двойственной задаче  $C_0$ , которую мы обозначим через  $D_0$ :

**Задача D<sub>0</sub>.** Найти управления  $v(t) \in L_1^+[0, T]$ ,  $\xi \in R_{q_1}$ ,  $\eta \in R_{q_2}$ , дающие минимум линейному функционалу

$$\begin{aligned} \psi = & \left[ -\chi(\bar{x}^*(T), \bar{\kappa}^*) + \right. \\ & \left. + \bar{x}^*(T) \frac{\partial \chi}{\partial \alpha}(\bar{x}^*(T), \bar{\kappa}^*) + \bar{\kappa}^* \frac{\partial \chi}{\partial \beta}(\bar{x}^*(T), \bar{\kappa}^*) \right] \xi + \\ & + c_2^* \eta + \int_0^T \left[ \eta(\bar{u}^*, t) - \bar{u}^* \frac{\partial \eta}{\partial u^*}(\bar{u}^*, t) \right] x(t) dt + \\ & + \int_0^T \left[ -\Phi(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) + \bar{x}^* \frac{\partial \Phi}{\partial x^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) + \right. \\ & \left. + \bar{u}^* \frac{\partial \Phi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) \right] v(t) dt, \quad (17) \end{aligned}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} -\frac{dx(t)}{dt} = & A(t)x(t) - \frac{\partial \Phi}{\partial x^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t)v(t) + \\ & + \frac{\partial \psi}{\partial x^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t), \quad (18) \end{aligned}$$

$$v(t) \geq 0, \quad \xi(t) \geq 0,$$

$$x(T) = -\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}(\bar{x}^*(T), \bar{\kappa}^*) \xi - Q_2 \eta, \quad (19)$$

$$x(0) = \frac{\partial \chi}{\partial \beta}(\bar{x}^*(T), \bar{\kappa}^*) \xi + G_2 \eta,$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \eta}{\partial u^*}(\bar{u}^*, t)x(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t)v(t) \geq \\ \geq \frac{\partial \psi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t). \quad (20) \end{aligned}$$

## § 2. Необходимые условия оптимальности

Применяя теорему 12 гл. V, получаем следующую теорему.

**Теорема 2.** Пусть  $u^*(t)$ ,  $\kappa^*$  — оптимальные управления задачи C. И пусть по всем ограничениям выполнено условие Слейтера. Тогда найдутся ограни-

ченные последовательности  $v_n(t) \in L_2^1[0, T]$ ,  $\xi_n \in R_{q_1}$ ,  $\eta_n \in R_{q_2}$ , такие, что

$$-\frac{dx_n}{dt} = A(t) x_n(t) - \frac{\partial \Phi}{\partial x^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) v_n(t) + \frac{\partial \psi}{\partial x^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t), \quad (21)$$

$$x_n(T) = -\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}(\bar{x}^*(T), \bar{\kappa}^*) \xi_n - Q_2 \eta_n, \quad v_n \geq 0, \quad \xi_n \geq 0, \quad (22)$$

$$x_n(0) = \frac{\partial \chi}{\partial \beta}(\bar{x}^*(T), \bar{\kappa}^*) \xi_n + G_2 \eta_n + \zeta_n, \quad \zeta_n \rightarrow 0, \quad (23)$$

$$-\frac{\partial \eta}{\partial u^*}(\bar{u}^*, t) x_n(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) v_n(t) \geq \frac{\partial \psi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) + \chi_n(t), \quad \chi_n(t) \rightarrow 0, \quad (24)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \Phi[\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), t] v_n(t) dt = 0, \quad (25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{u}^*(t) \left[ -\frac{\partial \eta}{\partial u^*}(\bar{u}^*, t) x_n(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) v_n(t) - \frac{\partial \psi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) \right] dt = 0, \quad (26)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi(\bar{x}^*(t), \bar{\kappa}^*) \xi_n = 0.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 задача С эквивалентна задаче  $C_0$ . В силу теоремы 5 гл. IV условие Слейтера будет выполняться и для ограничений задачи  $C_0$ . Далее, применяя теорему 12 гл. V и учитывая замечание к этой теореме, получаем утверждение теоремы 2.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теорем 1 и 2 и пусть

- 1)  $x_i^*(t) \geq \alpha_i > 0, \quad i = 1, \dots, n,$
- 2)  $\Phi(0, 0, t) \leq 0.$

Тогда найдется функция  $v(t) \in L_r^1[0, T]$  и векторы  $\xi \in R_{q_1}$ ,  $\eta \in R_{q_2}$ , такие, что

$$-\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) - \frac{\partial \Phi}{\partial x^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t)v(t) + \frac{\partial \psi}{\partial x^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t), \quad (27)$$

$$x(T) = -\frac{\partial \chi}{\partial \alpha}(\bar{x}^*(T), \bar{\kappa}^*)\xi - Q_2\eta, \quad \xi \geq 0, \quad v(t) \geq 0, \quad (28)$$

$$x(0) = \frac{\partial \chi}{\partial \beta}(\bar{x}^*(T), \bar{\kappa}^*)\xi + G_2\eta, \quad (29)$$

$$-\frac{\partial \eta}{\partial u^*}(\bar{u}^*, t)x(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t)v(t) \geq \frac{\partial \psi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t), \quad (30)$$

$$\int_0^T \Phi(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t)v(t)dt = 0, \quad (31)$$

$$\int_0^T \bar{u}^*(t) \left[ -\frac{\partial \eta}{\partial u^*}(\bar{u}^*, t)x(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t)v(t) - \frac{\partial \psi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) \right] dt = 0, \quad (32)$$

$$\chi(\bar{x}^*(T), \bar{\kappa}^*)\xi = 0. \quad (33)$$

Доказательство. В силу теоремы 2 последовательности  $v_n(t)$ ,  $\xi_n$ ,  $\eta_n$  ограничены. Без ограничения общности  $\eta_n \rightarrow \eta$ ,  $\xi_n \rightarrow \xi \geq 0$ . Применим теперь рассуждения, аналогичные уже примененным при доказательстве теоремы 8 гл. V. Воспользуемся леммой Дубовицкого и Милютина и представим  $v_n(t)$  в виде

$$v_n(t) = v'_n(t) + v''_n(t), \quad v'_n, v''_n \geq 0, \quad (34)$$

где  $v'_n(t)$  слабо стремится к  $v(t)$ , а  $v''_n(t)$  почти всюду стремится к нулю. Покажем, что в условиях теоремы  $\partial \Phi / \partial x^* \cdot v''_n(t)$  сильно стремится к нулю. Аналогично доказательству равенства (98) гл. V найдем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{u}^*(t) \frac{\partial \Phi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t)v''_n(t)dt = 0. \quad (35)$$



Из (25) получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \Phi [\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), t] v_n''(t) dt = 0. \quad (36)$$

Воспользовавшись известным неравенством для выпуклых операторов, получаем

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) &\leq \\ &\leq \Phi(0, 0, t) - \bar{x}^* \frac{\partial \Phi}{\partial x^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) - \bar{u}^* \frac{\partial \Phi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t). \end{aligned}$$

Тогда из (36), используя (35), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left[ \Phi(0, 0, t) - \bar{x}^* \frac{\partial \Phi}{\partial x^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) \right] v_n''(t) dt \geq 0.$$

Но

$$\Phi(0, 0, t) \leq 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x^*} \geq 0,$$

так как функция  $\Phi(x^*, u^*, t)$  монотонно возрастает по  $x^*$ . Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left[ \Phi(0, 0, t) - \bar{x}^* \frac{\partial \Phi}{\partial x^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) \right] v_n''(t) dt = 0,$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{x}^*(t) \frac{\partial \Phi}{\partial x^*}[\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), t] v_n''(t) dt = 0,$$

и так как  $\bar{x}^*(t)$  — строго положительный вектор, то  $\partial \Phi / \partial x^* v_n''(t)$  сильно стремится к нулю. Подставляя разложение (34) в (21) и переходя к пределу, получаем уравнение (27). Остальные соотношения (28) — (33) выводятся так же, как и при доказательстве теоремы 8 гл. V.

В том случае, когда условия 1) и 2) теоремы не выполняются, в правую часть уравнения (27) могут входить меры. Мы не будем на этом останавливаться, так как эти меры имеют достаточно сложное описание.

Следствие. Условия оптимальности (31) — (33) можно записать в следующем виде: почти при всех  $t$

$$\Phi_i(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), t) v_i(t) = 0; \quad i = 1, \dots, r, \quad (37)$$

$$u_i^*(t) \left[ -\frac{\partial \eta}{\partial u^*}(\bar{u}^*, t) x(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) v(t) - \right. \\ \left. - \frac{\partial \psi}{\partial u^*}(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) \right]_i = 0; \quad i = 1, \dots, m, \quad (38)$$

$$\chi_k(\bar{x}^*(T), \kappa^*) \xi_k = 0; \quad k = 1, \dots, q_1. \quad (39)$$

Для доказательства равенств (37) — (39) достаточно воспользоваться знакопостоянством подинтегральных функций в равенствах (31) — (32).

### § 3. Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим функцию Понтрягина для задачи С

$$\mathcal{K}(u^*, x^*, x, t) = \eta(u^*, t) x + \psi(x^*, u^*, t) \quad (40)$$

и поставим следующую задачу вогнутого программирования:

Задача П. Найти

$$\max_{u^*} \mathcal{K}(u^*, \bar{x}^*(t), x(t), t) \quad (41)$$

при следующих ограничениях:

$$u^* \geq 0, \quad \Phi(\bar{x}^*(t), u^*, t) \geq 0. \quad (42)$$

Рассмотрим также функцию Понтрягина для задачи  $C_0$

$$\mathcal{K}_0(u^*, x^*, x, t) = u^* \frac{\partial \eta}{\partial u^*}(u^*, t) + \frac{\partial \psi}{\partial u^*}(x^*, u^*, t) \quad (43)$$

и соответствующую ей задачу линейного программирования:

Задача  $P_0$ . Найти

$$\max \mathcal{K}_0(u^*, \bar{x}^*(t), x(t), t)$$

при следующих ограничениях:

$$u^* \geq 0, \quad \Phi(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), t) + \\ + (u^* - \bar{u}^*(t)) \frac{\partial \Phi}{\partial u^*}(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), t) \leq 0.$$

Двойственная задача  $\tilde{P}_0$ . Найти

$$\min \left\{ \Phi [\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), t] - \bar{u}^*(t) \frac{\partial \Phi}{\partial u^*} [\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), t] \right\} v$$

при следующих ограничениях:

$$v \geq 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u^*} [\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), t] v - \\ - \frac{\partial \eta}{\partial u^*} (\bar{u}^*(t), t) x(t) - \frac{\partial \psi}{\partial u^*} (\bar{u}^*(t), \bar{x}^*(t), t) \geq 0.$$

Заметим, что соотношения (37) и (38) есть условия дополняющей нежесткости для задач  $P_0$  и  $\tilde{P}_0$ . Если они выполнены, то  $u^* = \bar{u}^*(t)$  будет решением задачи  $P_0$ , а  $v(t)$  — решением задачи  $\tilde{P}_0$ . Из результатов гл. IV следует, что задача  $P_0$  есть задача линейного программирования, соответствующая задаче вогнутого программирования П. Так как  $\bar{u}^*(t)$  есть решение задачи  $P_0$ , то в силу теоремы 3 гл. IV  $\bar{u}^*(t)$  будет и решение задач П (при доказательстве этого пункта теоремы 3 гл. IV не было использовано условие Слейтера).

Таким образом приходим к следующей теореме:

**Теорема 4** (принцип максимума Понтрягина). Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда

$\max \mathcal{H}(u^*, \bar{x}^*(t), x(t), t) = \mathcal{H}(\bar{u}^*(t), \bar{x}^*(t), x(t), t)$ , где  $\max$  берется почти при всех  $t$  по множеству

$$u^* \geq 0, \quad \Phi(\bar{x}^*(t), u^*, t) \geq 0.$$

**Замечание.** Теорема 4 справедлива и в тех случаях, когда не выполнены условия теоремы 3. В этих случаях в правую часть уравнения (27) войдет еще мера  $dv/dt$ , точным описанием которой мы здесь не будем заниматься.

Сформулируем в заключение достаточный признак оптимальности.

**Теорема 5.** Пусть выполнено условие Слейтера и для управлений  $\bar{u}^*(t)$  и  $v(t)$  выполнены условия дополняющей нежесткости (37) и (38). Тогда управления  $\bar{u}^*(t)$  и  $v(t)$  оптимальны.

**Доказательство.** Применяя теорему 7 гл. V, получаем, что  $\bar{u}^*(t)$  и  $v(t)$  будут оптимальными управ-

лениями для задач  $\Pi_0$  и  $\tilde{\Pi}_0$ . Так как удовлетворено условие Слейтера, то  $\bar{u}^*(t)$  будет оптимальным управлением и для задачи  $\Pi$ .

**З а м е ч а н и е.** Выполнение условий дополняющей нежесткости для  $\bar{u}^*(t)$  и  $v(t)$  можно заменить условием, что функции  $\bar{u}^*(t)$  и  $v(t)$  удовлетворяют принципу максимума для задач  $\Pi_0$  и  $\tilde{\Pi}_0$ . К сожалению, нельзя утверждать, что функция  $\bar{u}^*(t)$ , дающая максимум почти при всех  $t$  функции Понтрягина  $\mathcal{H}$ , при ограничениях (42) будет давать оптимальное управление. Это связано с тем, что мы не можем гарантировать при естественных ограничениях условие Слейтера для задачи  $\Pi$ .

## ГЛАВА VII

### ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

#### § 1. Постановка задачи (линейный случай)

Пусть  $\{x_t^*\}$ ,  $t=0, 1, \dots$ , есть последовательность  $n$ -мерных числовых векторов-строк,  $\{u_t^*\}$  — последовательность  $m$ -мерных числовых векторов-строк. Рассмотрим систему уравнений

$$x_{t+1}^* = x_t^* A + u_t^* B + a_t^*, \quad x_0^* = \alpha^* \quad (1)$$

при следующих ограничениях:

$$-x_t^* C + u_t^* D \leq b_t^*, \quad u_t^* \geq 0; \quad (2)$$

матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  для простоты будем считать постоянными, хотя это и несущественно. Вектор  $x_t^*$  будем называть *фазовым вектором*, а вектор  $u_t^*$  — *управлением*. Нормы векторов  $x_t^*$  и  $u_t^*$  будем обозначать следующим образом:

$$\|x_t^*\|_{R^n} = |x_t^*| = \max_{i=1, \dots, n} |x_{it}^*|, \quad |u_t^*| = \max_{i=1, \dots, m} |u_{it}^*|. \quad (3)$$

Без ограничения общности можно предполагать, что выполнено следующее условие:

$$\|A\| < 1. \quad (4)$$

В противном случае можно было бы перейти к новым переменным  $x_t^* = (\varepsilon + \|A\|)^t \xi_t^*$ . В дальнейшем будем предполагать, что условие (4) выполнено.

Рассмотрим вопрос о решении системы уравнений

$$x_{t+1}^* = x_t^* A + f_t^*, \quad x_0^* = \alpha^*. \quad (5)$$

Пусть  $l_n^\infty$  — пространство ограниченных последовательностей векторов, см. гл. I пример 7. Тогда, если

считать, что последовательность  $\{f_i\} \in l_n^\infty$ , то решая систему (5), мы получим некоторую последовательность векторов  $\{x_i^*\}$ . Покажем, что система уравнений (5) определяет линейный оператор из  $l_n^\infty$  в  $l_n^\infty$ .

**Теорема 1.** Если выполнено условие (4) и последовательность  $\{f_i\} \in l_n^\infty$ , то решением системы уравнений (5) будет последовательность  $\{x_i^*\} \in l_n^\infty$ . Более того,  $x^* = T^* f^* + z_0^*$ , где  $T^*$  есть линейный оператор из  $l_n^\infty$  в  $l_n^\infty$  и  $z_0^* \in l_n^\infty$ .

**Доказательство.** Из (5) нетрудно установить, что

$$x_0^* = \alpha^*, \quad x_{t+1}^* = f_t^* + f_{t-1}^* A + \dots + f_0^* A^t + \alpha^* A^{t+1}. \quad (6)$$

Определим оператор

$$\eta^* = T^* f^*, \quad \eta_{t+1}^* = f_t^* + \dots + f_0^* (A)^t, \quad \eta_0^* = 0. \quad (7)$$

Тогда из (6) имеем

$$x^* = T^* f^* + z_0^*, \quad z_0^* = (\alpha^*, \alpha^* A, \dots, \alpha^* A^t, \dots). \quad (8)$$

Из (7) следует, что оператор  $T^*$  аддитивный и однородный. Покажем, что он действует из  $l_n^\infty$  в  $l_n^\infty$  и ограничен. Имеем

$$\begin{aligned} |\eta_{t+1}^*| &= |f_t^* + \dots + f_0^* A^t| \leq \\ &\leq |f_t^*| + |f_{t-1}^*| \cdot \|A\| + \dots + |f_0^*| \cdot \|A\|^t \leq \\ &\leq \sup_t |f_t^*| \cdot \{1 + \|A\| + \dots\} \leq \|f^*\|_{l_n^\infty} \frac{1}{1 - \|A\|}, \end{aligned}$$

откуда

$$\|T^* f^*\|_{l_n^\infty} = \|\eta\| = \sup_t |\eta_t| \leq \frac{\|f^*\|}{1 - \|A\|}.$$

Следовательно, оператор  $T^*$  ограничен. Из (8) следует, что  $z_0^* \in l_n^\infty$ ; более того,  $z_0^* \in c_n^0$ , где  $c_n^0$  — пространство векторов, стремящихся к нулю. Итак, теорема доказана.

Поставим теперь задачу оптимального управления на бесконечном интервале времени.

Задача I. Найти управление  $u^* = \{u_i^*\} \in l_n^\infty$ , дающее максимум линейному функционалу

$$\varphi(u^*) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^* p_i, \quad \sum_{i=0}^{\infty} |p_i| < +\infty, \quad (9)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* &= x_i^* A + u_i^* B + a_i^*, & t &= 0, 1, \dots, \\ x_0^* &= \alpha^*, & u_i^* &\geq 0, & -x_i^* C + u_i^* D &\leq b_i^*, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $a^* = \{a_i^*\} \in l_n^\infty$ ,  $b^* = \{b_i^*\} \in l_r^\infty$ .

## § 2. Формулировка двойственной задачи

Чтобы сформулировать задачу, для которой задача I будет двойственной, сведем задачу I к задаче линейного программирования в банаховом пространстве. Используя результат теоремы 1, можем разрешить уравнение (10) относительно  $x^*$ :

$$x^* = T^*(u^* B + a^*) + z_0^*, \quad (11)$$

где оператор  $T^*$  определен формулой (7).

Подставляя (11) в ограничения (10), получаем

$$-T^*(u^* B) C + u^* D \leq \tilde{b}^*, \quad (12)$$

$$\tilde{b}^* = b^* + (T^* a^* + z_0^*) C. \quad (13)$$

Подставляя (11) в (9), получаем

$$\varphi(u^*) = (T^*(u^* B), p) = \sum_{i=0}^{\infty} (T^*(u^* B))_i p_i, \quad (14)$$

Чтобы сформулировать двойственную задачу, нужно сначала построить оператор  $T$ , которому сопряжен оператор  $T^*$ . Пусть  $l_n^1$  — пространство последовательностей векторов-столбцов, определенное в примере 6 гл. I:

$$\{x_i\} = x \in l_n^1, \quad \sum_{i=0}^{\infty} |x_i| < +\infty.$$

Общий вид линейного функционала в  $l_n^1$  следующий:

$$(x^*, x) = \sum_{t=0}^{\infty} x_t^* x_t, \quad x^* \in l_n^{\infty}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (T^* x^*, x) &= x_0^* x_0 + (x_1^* + x_0^* A) x_1 + \dots = \\ &= x_0^* (x_0 + A x_1 + \dots) + x_1^* (x_1 + A x_2 + \dots) + \dots = (x^*, T x), \end{aligned}$$

откуда находим выражение для оператора  $T$ :

$$\zeta = T x, \quad \zeta_t = x_t + A x_{t+1} + \dots, \quad (15)$$

$$\zeta_t = x_t + A \zeta_{t+1}. \quad (16)$$

Используя выражения (12) и (14), мы можем записать задачу I как следующую задачу линейного программирования в банаховом пространстве:

**Задача I'.** Найти максимум линейного функционала

$$\Phi(u^*) = (u^*, u_0), \quad u_0 = B(Tp) \quad (17)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} u^* &\geq 0, \quad \tilde{T}^* u^* \leq \tilde{b}^*, \\ \tilde{T}^* u^* &= -T(u^* B)C + u^* D. \end{aligned} \quad (18)$$

Нетрудно построить оператор  $\tilde{T}$ , которому сопряжен оператор  $\tilde{T}^*$ :

$$\begin{aligned} (u^*, \tilde{T}v) &= (\tilde{T}u^*, v) = (-T^*(u^* B)C + u^* D, v) = \\ &= (u^*, Dv) - (T^*(u^* B), Cv) = (u^*, -BT(Cv) + Dv), \end{aligned}$$

откуда

$$\tilde{T}v = -BT(Cv) + Dv. \quad (19)$$

Запишем теперь задачу линейного программирования, которой задача I' двойственна.

**Задача II'.** Найти минимум линейного функционала

$$\Psi(v) = (\tilde{b}^*, v) \quad (20)$$



при следующих ограничениях:

$$v \in l_r^1, \quad v \geq 0, \quad \tilde{T}v \geq u_0. \quad (21)$$

Преобразуем условие (21). Подставляя в него выражение (19) для оператора  $\tilde{T}$  и выражение (17) для элемента  $u_0$ , получаем

$$-BT(Cv) + Dv \geq B(Tp).$$

Положим  $x = T(Cv + p)$ . Воспользовавшись рекуррентной формулой для оператора  $T$ , получаем

$$\begin{aligned} x_t &= Cv_t + p_t + A(Cv_{t+1} + p_{t+1}) + \dots, \\ x_t &= Cv_t + p_t + Ax_{t+1}, \quad t = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (22)$$

Так как  $\|A\| \leq 1$  и ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} |v_i|$  сходится, то из (22) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |x_t| &= \lim_{t \rightarrow \infty} |Cv_t + p_t + A(Cv_{t+1} + p_{t+1}) + \dots| \leq \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=t}^{\infty} \|C\| \cdot |v_i| + |p_i| = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Неравенство (23) иногда называют *условием трансверсальности на бесконечности*. Преобразуем еще функционал (20). С точностью до константы

$$\begin{aligned} (\hat{b}^*, v) &= (b^* + (T^*(a^*) + z_0^*)C, v) = \\ &= (b^*, v) + (a^*, Tv) + (z_0^*, Cv) = \\ &= (b^*, v) + (a^*, x) + (z_0^*, Cv) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (b_i^* v_i + a_i^* x_i + \alpha^* A^i C v_i). \end{aligned} \quad (24)$$

Это выражение можно упростить. Из (22) получаем

$$\begin{aligned} x_0 &= Cv_0 + p_0 + Ax_1, \\ x_1 &= Cv_1 + p_1 + Ax_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Умножая второе уравнение на  $A$ , третье на  $A^2$  и т. д. и складывая, получаем

$$x_0 = \sum_{t=0}^{\infty} A^t C v_t + \sum_{t=0}^{\infty} p_t A^t + \lim_{t \rightarrow \infty} A^t x_t,$$

и, так как  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = 0$  и  $\|A\| \leq 1$ , то

$$x_0 = \sum_{t=0}^{\infty} A^t C v_t + \sum_{t=0}^{\infty} p_t A^t. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24), получаем с точностью до константы

$$(\check{b}^*, v) = \sum_{t=0}^{\infty} (a_t^* x_{t+1} + b_t^* v_t) + \alpha^* x_0.$$

Итак, задача II' приводится к следующей динамической задаче:

*Задача II'. Найти минимум линейного функционала*

$$\psi(v) = \alpha^* x_0 + \sum_{t=0}^{\infty} (a_t^* x_{t+1} + b_t^* v_t) \quad (26)$$

*при следующих ограничениях:*

$$\begin{aligned} x_t &= A x_{t+1} + C v_t + p_t, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_t &= 0, \quad \sum_{t=0}^{\infty} |v_t| < +\infty, \\ -B x_{t+1} + D v_t &\geq 0, \quad v_t \geq 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Заметим, что задачи I и II этой главы имеют замечательную аналогию с соответствующими задачами гл. V, где рассматривались задачи с непрерывным временем. Как будет показано в последующих разделах, исследование разностных задач гораздо более простое, чем исследование соответствующих задач с непрерывным временем.

### § 3. Необходимые условия оптимальности в линейном случае

В § 2 задачи I и II были сведены к двойственным задачам линейного программирования в банаховых пространствах.

Будем говорить, что для задачи I выполнено условие Слейтера по ограничению (10), если существует управление  $\{\tilde{u}_i^*\}$ , допустимое и удовлетворяющее неравенству

$$-\tilde{x}_i^*C + \tilde{u}_i^*D \leq b_i^* - \gamma e_r, \quad \gamma > 0, \quad e_r = (1, \dots, 1).$$

Заметим, что условие Слейтера для задачи I означает, что для задачи I' существует такой строго положительный функционал  $e^*$ , что

$$\tilde{T}^* \tilde{u}^* \leq \tilde{b}^* - \gamma e^*.$$

Вспомним определение конуса (32) из гл. III и запишем выражение для этого конуса для задачи I:

$$\mathcal{K}_{\tilde{T}} = \{(u, r): u = w - \tilde{T}v, \quad r = \rho + (\tilde{b}^*, v); \quad w, v, \rho \geq 0\}. \quad (28)$$

Напомним, что вопрос о замкнутости этого конуса тесно связан с теорией двойственности. Докажем следующую теорему.

**Теорема 2.** Если для задачи I выполнено условие Слейтера, то конус (28) замкнут в пространстве  $l_r^1 \times R$ .

**Доказательство.** Достаточно сослаться на теорему 23 гл. III. Пусть  $c_0^m$  — пространство последовательностей векторов-строк, стремящихся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Оно частично упорядочено конусом неотрицательных последовательностей. Норма определяется так же, как и в пространстве ограниченных последовательностей  $l_m^\infty$ . В гл. I мы отмечали, что пространство  $l_m^1$  сопряжено  $c_0^m$  и конус неотрицательных последовательностей в  $l_m^1$  сопряжен конусу неотрицательных последовательностей в  $c_0^m$ . Кроме того, для задачи I' выполнено условие Слейтера. Условия теоремы 23 выполнены, и конус (28) будет замкнутым. Теорема доказана.

Докажем теперь теорему, дающую необходимые условия оптимальности.

**Теорема 3.** Пусть для задачи I выполнено условие Слейтера и  $\{\bar{u}_i^*\}$  есть оптимальное управление для задачи I. Тогда найдется такое оптимальное управление для задачи II  $\{\bar{v}_i\}$ , что будут выполнены следующие условия оптимальности:

$$(-\bar{x}_i^* C + \bar{u}_i^* D - b_i^*)_i \bar{v}_{ii} = 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (29)$$

$$\bar{u}_{ii}^* (-B\bar{x}_{i+1} + D\bar{v}_i)_i = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (30)$$

**Доказательство.** Так как в силу предыдущей теоремы конус  $\mathcal{K}_T$  замкнут, то используя теорему 14 гл. III и следствие из нее, получаем, что для задач I' и II' должны выполняться условия дополняющей жесткости

$$(\tilde{T}^* \bar{u}^* + b^*, \bar{v}) = 0, \quad (\bar{u}^*, \tilde{T} \bar{v} - u_0) = 0.$$

Возвращаясь к фазовым переменным, эти условия можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} (-\bar{x}_i^* C + \bar{u}_i^* D - b_i^*) \bar{v}_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \bar{u}_i^* (-B\bar{x}_{i+1} + D\bar{v}_i) &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Так как в каждой из сумм (31) все слагаемые одного знака, то они должны обратиться в нуль, т. е. должны быть выполнены условия (29). Теорема доказана.

Мы можем теперь сформулировать принцип максимума Понтрягина. Введем для задач I и II функции Понтрягина

$$\mathcal{H}(u^*, x_{t+1}) = u^* B x_{t+1}, \quad (32)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}(x_i^*, v) = (b_i^* + x_i^* C) v. \quad (33)$$

Рассмотрим следующие задачи линейного программирования для этих функций

**Задача П.** Найти  $\max \mathcal{H}(u^*, x_{t+1})$  при следующих ограничениях:

$$u^* \geq 0, \quad u^* D \leq b_i^* + x_i^* C. \quad (34)$$

Задача П'. Найти  $\min_v \tilde{H}(x_t^*, v)$  при следующих ограничениях:

$$v \geq 0, \quad Dv \geq Bx_{t+1}. \quad (35)$$

Аналогично доказательству теоремы 5 гл. V мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 4. Пусть задача I имеет оптимальное управление  $\{\bar{u}_t^*\}$  и пусть для нее удовлетворено условие Слейтера, тогда найдется такое оптимальное управление  $\{\bar{v}_t\}$  задачи II, что

$$\max \mathcal{K}(u^*, \bar{x}_{t+1}) = \mathcal{K}(\bar{u}_t^*, \bar{x}_{t+1}),$$

где max берется по многограннику (34). Кроме того,

$$\min \tilde{\mathcal{K}}(\bar{x}_t^*, v) = \tilde{\mathcal{K}}(\bar{x}_t^*, \bar{v}_t),$$

где min берется по многограннику (35).

Доказательство. В силу предыдущей теоремы будут выполнены условия (29) — (30). Задачи П и П' — двойственные. Условия (29) — (30) есть условия дополняющей нежесткости для этих задач. В силу теоремы 13 гл. III  $\bar{u}_t^*$  должно быть решением задачи П, а  $\bar{v}_t$  должно быть решением задачи П'. Теорема доказана.

#### § 4. Общий случай линейной задачи

Рассмотрим динамическую систему более общего вида, чем система (1) — (2):

$$x_{t+1}^* = x_t^* A_t + u_t^* B_t + h_t^* B'_t + a_t^*, \quad (36)$$

$$-x_t^* C_t + u_t^* D_t + h_t^* E_t \leq b_t^*, \quad (37)$$

$$-x_t^* C'_t + u_t^* D'_t + h_t^* E'_t = b_t^{*'}, \quad (38)$$

$$u_t^* \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots$$

Будем предполагать, что

$$\|A_t\| \leq \alpha < 1,$$

$$\|B_t\|, \|B'_t\|, \|C_t\|, \|C'_t\|, \|D_t\|, \|D'_t\|, \|E_t\|, \|E'_t\| \leq \beta, \quad (39)$$

$$|a_t^*|, |b_t^{*'}|, |b_t^{*'}| \leq \beta.$$

Управления  $u^*$ ,  $h^*$  берутся из пространств  $l_m^\infty$ ,  $l_{m'}^\infty$ ,  $x_t^*$  —  $n$ -мерный вектор,  $b_t^*$  —  $r$ -мерный вектор,  $b_t^{*'} — r'$ -мерный вектор.

Рассмотрим уравнение

$$x_{t+1}^* = x_t^* A_t + f_t^*, \quad x_0^* = \kappa^*, \quad t = 0, 1, \dots \quad (40)$$

Из (40) получаем

$$\begin{aligned} x^* &= K^*(f^*, \kappa^*) = (\kappa^*, x_1^*, \dots, x_t^*, \dots), \\ x_t^* &= f_{t-1}^* + f_{t-2}^* A_{t-1} + \dots + f_0^* A_1 \dots A_{t-1} + \\ &\quad + \kappa^* A_0 A_1 \dots A_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (41)$$

**Теорема 5.** *Оператор  $K^*$ , определяемый формулами (41), будет линейным оператором из пространства  $l_n^\infty \times R_n$  в  $l_n^\infty$ .*

**Доказательство.** В силу формул (41) имеем  $\|K^*(f^*, \kappa^*)\| = \max_t |x_t^*| = \max_t |f_{t-1}^* + \dots + f_0^* A_1 \dots A_{t-1} +$

$$\begin{aligned} &+ \kappa^* A_0 \dots A_t| \leq \|f^*\|_{l_n^\infty} (1 + \alpha + \dots + \alpha^n) + |\kappa^*| \leq \\ &\leq \frac{1}{1 - \alpha} \|f^*\|_{l_n^\infty} + |\kappa^*|, \end{aligned}$$

откуда следует ограниченность оператора  $K^*$ . Аддитивность и однородность его очевидны. Следовательно, оператор  $K^*$  линеен.

Найдем теперь оператор  $K \in [l_n^1 \rightarrow l_n^1 \times R_n]$ , которому оператор  $K^*$  сопряжен. Имеем

$$\begin{aligned} (K^*(f^*, \kappa^*), f) &= \sum_{t=0}^{\infty} x_t^* f_t = \kappa^* f_0 + (f_0^* + \kappa^* A_0) f_1 + \dots \\ &\dots + (f_{t-1}^* + f_{t-2}^* A_{t-1} + \dots + f_0^* A_1 \dots A_{t-1} + \kappa^* A_0 A_1 \dots \\ &\dots A_{t-1}) f_t = \sum_{t=1}^{\infty} f_{t-1}^* x_t + \kappa^* x_0, \quad f \in l_n^1, \end{aligned} \quad (42)$$

$$x_t = f_t + A_t f_{t+1} + \dots + A_t \dots A_{t+p} f_{t+p+1} + \dots, \quad t = 0, 1, \dots \quad (43)$$

Определим операторы

$$K_1 f = (x_1, \dots, x_t, \dots), \quad K_2 f = x_0, \quad K = (K_1, K_2). \quad (44)$$

Нетрудно видеть, что оператор  $K_1$  есть линейный оператор из  $l_n^1$  в  $l_n^1$ . В самом деле, аддитивность и однородность его очевидна. Докажем его ограниченность. Имеем из (43)

$$|x_t| \leq |f_t| + \alpha |f_{t+1}| + \dots + \alpha^{t+p} |f_{t+p+1}| + \dots \quad (45)$$

Суммируя выражения (45) по  $t$ , получаем

$$\begin{aligned} \|x\|_{l_n^1} = \|K_1 f\|_{l_n^1} &\leq \|f\|_{l_n^1} + \alpha \|f\|_{l_n^1} + \dots + \alpha^t \|f\|_{l_n^1} + \dots \leq \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha} \|f\|_{l_n^1}, \end{aligned} \quad (46)$$

откуда следует ограниченность, а, следовательно, и линейность оператора  $K_1 f$ . Аналогично доказываем, что оператор  $K_2 f$  есть линейный оператор из  $l_n^1$  в  $R_n$ . В силу (42)

$$(K^*(f^*, \kappa^*), f) = (f^*, K_1 f) + (\kappa^*, K_2 f) = \kappa^* x_0 + \sum_{t=1}^{\infty} f_{t-1}^* x_t,$$

поэтому оператор  $K = (K_1, K_2)$  сопряжен оператору  $K^*$ .

Пусть  $c_n^0$  есть пространство последовательностей векторов, стремящихся к нулю. Обозначим через  $\tilde{K}$  сужение оператора  $K^*$  на подпространство  $c_n^0 \times R_n$ . Тогда оператор  $\tilde{K}$  действует из  $c_n^0 \times R_n$  в  $c_n^0$ . Действительно, пусть

$$\begin{aligned} \xi = (\kappa, \xi_1, \dots, \xi_t, \dots) &= \tilde{K}(\varphi, \kappa), \quad \{\varphi_t\} \in c_n^0, \kappa \in R_n, \\ \xi_t &= \varphi_{t-1} + \varphi_{t-2} A_{t-1} + \dots + \varphi_0 A_1 \dots A_{t-1} + \kappa A_0 A_1 \dots A_{t-1}; \end{aligned}$$

для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся  $N(\varepsilon)$  и  $K(\varepsilon)$  такие, что

$$\begin{aligned} |\varphi_t| &< \varepsilon/2, \quad t \geq N(\varepsilon), \\ (\|\varphi\|_{c_n^0} + |\kappa|_{R_n}) \alpha^{k-1} &< \varepsilon/2, \quad k \geq K(\varepsilon); \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \xi_{t+k} &= \varphi_{t+k-1} + \varphi_{t+k-2} A_{t+k-1} + \dots + \varphi_t A_{t-1} \dots A_{t+k-1} + \\ &+ \varphi_{t-1} A_t \dots A_{t+k-1} + \dots + \kappa^* A_0 \dots A_{t+k-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |\xi_{t+k}| &\leq \max \{ |\varphi_t|, \dots, |\varphi_{t+k-1}| \} + \alpha^{k-1} \{ \|\varphi\|_{c_n^0} + |\kappa|_{R_n} \} < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{для} \quad t > N(\varepsilon), \quad k > K(\varepsilon); \end{aligned}$$

таким образом,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_m = 0$ ,  $\{\xi_t\} \in c_n^0$  и  $\tilde{K}^* = K$ .

Будем разыскивать решения динамической системы (36) — (38), дающие максимум линейному функционалу

$$\varphi = \sum_{t=0}^{\infty} (x_t^* a_t + u_t^* b_t + h_t^* b'_t).$$

Будем  $x^* = x_0^*$  считать тоже управлением. Введем операторы  $C, C', D, D', E, E'$  следующим образом:

$$x^* C = (x_0^* C_0, x_1^* C_1, \dots, x_t^* C_t, \dots)$$

и т. д.

Тогда мы приходим к следующей задаче линейного программирования в банаховом пространстве.

**Задача I'. Найти**

$$\max \{(x^*, a) + (u^*, b) + (h^*, b')\} \quad (47)$$

при следующих ограничениях:

$$-x^* C + u^* D + h^* E \leq b^*, \quad (48)$$

$$-x^* C' + u^* D' + h^* E' = b^{*'}, \quad (49)$$

$$u^* \in l_m^\infty, \quad h^* \in l_m^\infty, \quad u^* \geq 0, \quad (50)$$

$$x^* = K^* \{u^* B + h^* B' + a^*, x^*\}. \quad (51)$$

Введем операторы

$$\begin{aligned} T^* u^* &= -K^* (u^* B, 0) C + u^* D, \\ P^* (h^*, x^*) &= -K^* (h^* B', x^*) C + h^* E, \\ S^* u^* &= -K^* (u^* B, 0) C' + u^* D', \\ R^* (h^*, x^*) &= -K^* (h^* B', x^*) C' + h^* E', \end{aligned} \quad (52)$$

и элементы

$$\begin{aligned} \tilde{b}^* &= b^* + K^* (a^*, 0) C, \quad \tilde{b}^{*'} = b^{*'} + K^* (a^*, 0) C', \\ u_0 &= B (K_1 a) + b, \quad h_0 = B' (K_1 a) + b', \\ \kappa_0 &= K_2 a. \end{aligned} \quad (53)$$

Тогда задачу I' можно переписать в следующем стандартном виде:

**Задача I'. Найти**

$$\max \{(u^*, u_0) + (h^*, h_0) + (x^*, \kappa_0)\}$$



при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} T^* u^* + P^* (h^*, \kappa^*) - \tilde{b}^* &\leq 0, \\ S^* u^* + R^* (h^*, \kappa^*) - \tilde{b}^{*'} &= 0, \\ u^* &\geq 0. \end{aligned}$$

Найдем теперь операторы, которым операторы  $T^*$ ,  $P^*$ ,  $S^*$  и  $R^*$  сопряжены. Имеем

$$\begin{aligned} (T^* u^*, v) &= (-K^* (u^* B, 0) C + u^* D, v) = \\ &= (u^*, -BK_1(Cv) + Dv), \\ (P^* (h^*, \kappa^*), v) &= (-K^* (h^* B', \kappa^*) C + h^* E, v) = \\ &= (h^*, -B'K_1(Cv) + Ev) - \kappa^* K_2(Cv), \end{aligned}$$

откуда

$$Tv = -BK_1(Cv) + Dv, \quad Pv = \begin{pmatrix} -B'K_1(Cv) + Ev \\ -K_2(Cv) \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Аналогично

$$S\delta = -BK_1(C'\delta) + D'\delta, \quad R\delta = \begin{pmatrix} -B'K_1(C'\delta) + E'\delta \\ -K_2(C'\delta) \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись результатами § 5 гл. III, напишем задачу, которой задача I' двойственна:

**Задача II'.** Найти  $\min \{(\tilde{b}^*, v) + (\tilde{b}^{*'}, \delta)\}$  при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} -BK_1(Cv) + Dv - BK_1(C'\delta) + D'\delta &\geq B(K_1 a) + b, \\ -B'K_1(Cv) + Ev - B'K_1(C'\delta) + E'\delta &= B'(K_1 a) + b', \\ K_2(Cv) + K_2(C'\delta) + K_2 a &= 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Положим

$$x = K_1(Cv + C'\delta + a), \quad x_0 = K_2(Cv + C'\delta + a).$$

Тогда, в силу определения (43) и (44) операторов  $K_1$  и  $K_2$ , получаем

$$x_t = C_t v_t + C'_t \delta_t + a_t + A_t x_{t+1}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (56)$$

Ограничения (55) переписутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} -B_t x_{t+1} + D_t v_t + D'_t \delta_t &\geq b_t, \\ -B'_t x_{t+1} + E_t v_t + E'_t \delta_t &= b'_t, \\ x_0 &= 0. \end{aligned}$$

Преобразуем еще функционал задачи II'. Вспоминая формулы (53), получаем

$$\begin{aligned}\psi &= (\tilde{b}^*, v) + (b^{*'}, \delta) = \\ &= (b^* + K^*(a^*, 0)C, v) + (b^{*'} + K^*(a^*, 0)C', \delta) = \\ &= (b^*, v) + (b^{*'}, \delta) + (a^*, Cv + C'\delta) = \\ &= (b^*, v) + (b^{*'} \delta) + (a^*, x) + \text{const} = \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} (b_t^* v_t + b_t^{*'} \delta_t + a_t^* x_{t+1}).\end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к следующей формулировке двойственной задачи:

Задача II'. *Найти*

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} (a_t^* x_{t+1} + b_t^* v_t + b_t^{*'} \delta_t) \quad (57)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned}x_t &= C_t v_t + C_t' \delta_t + a_t + A_t x_{t+1}, \quad t = 0, 1, \dots, \\ x_0 &= 0,\end{aligned} \quad (58)$$

$$-B_t' x_{t+1} + E_t v_t + E_t' \delta_t = b_t', \quad -B_t' x_{t+1} + D_t v_t + D_t' \delta_t \geq b_t. \quad (59)$$

При помощи теоремы 33 гл. III мы можем теперь получить теорему, дающую необходимые условия оптимальности.

Будем говорить, что по ограничениям (37) выполнено условие Слейтера, если существуют такие последова-

тельности  $\{\tilde{u}_t^*\} \in l_m^\infty$ ,  $\tilde{u}_t^* \geq 0$  и  $\{\tilde{h}_t^*\} \in l_{m'}^\infty$ , что

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{t+1}^* &= \tilde{x}_t^* A_t + \tilde{u}_t^* B_t + \tilde{h}_t^* B_t' + a_t^*, \\ -\tilde{x}_t^* C_t + \tilde{u}_t^* D_t + \tilde{h}_t^* E_t &\leq b_t^* - \varepsilon_0 e_r, \\ -\tilde{x}_t^* C_t + \tilde{u}_t^* D_t + \tilde{h}_t^* E_t &= b_t^{*'},\end{aligned} \quad (60)$$

$$\varepsilon_0 > 0, \quad e_r = (1, \dots, 1); \quad t = 0, 1, \dots$$

Будем говорить, что ограничения (38) невырождены, если любая последовательность  $v^* = \{v_t^*\} \in l_r^1$  может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}v_t^* &= -x_t^* C_t + u_t^* D_t + h_t^* E_t, \quad u_t^* \geq 0, \\ x_{t+1}^* &= x_t^* A_t + u_t^* B_t + h_t^* B_t' + a_t^*.\end{aligned} \quad (61)$$

Условие (61) будет всегда выполнено, если уравнение  $u^* \geq 0$ ,  $-\kappa^* C'_0 + u^* D'_0 + h^* E'_0 = v_0^*$  разрешимо для любой правой части и уравнение  $u^* \geq 0$ ,  $u^* D'_i + h^* E'_i = v^*$  разрешимо при любой правой части,  $i = 1, 2, \dots$

**Теорема 6.** Пусть  $\{\bar{h}_t^*\} \in l_m^\infty$ ,  $\{\bar{u}_t^*\} \in l_m^\infty$ ,  $\bar{u}_t^* \geq 0$  — оптимальные управления задачи I'. Тогда найдутся последовательности  $\{\bar{v}_t\} \in l_r^1$ ,  $\bar{v}_t \geq 0$ ,  $\{\bar{\delta}_t\} \in l_r^1$  и число  $s \geq 0$  такие, что

$$\begin{aligned} \bar{x}_t &= A_t \bar{x}_{t+1} + C_t \bar{v}_t + C'_t \bar{\delta}_t + s a_t, \\ -B_t \bar{x}_{t+1} + D_t \bar{v}_t + D'_t \bar{\delta}_t &\geq s b_t, \\ -B'_t \bar{x}_{t+1} + E_t \bar{v}_t + E'_t \bar{\delta}_t &= s b'_t, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} (-\bar{x}_t^* C_t + \bar{u}_t^* D_t + \bar{h}_t^* E_t - b_t^*)_i \bar{v}_t^i &= 0, \quad i = 1, \dots, r, \\ \bar{u}_t^{*j} (-B_t \bar{x}_{t+1} + D_t \bar{v}_t + D'_t \bar{\delta}_t - s b_t)_j &= 0, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} (\bar{v}_t + |\bar{\delta}_t|) + s > 0, \quad x_0 = 0, t = 0, 1, \dots$$

Если для ограничений (37) выполнено условие Слейтера, а ограничения (38) — невырожденные, то можно положить  $s = 1$ .

**Доказательство.** Применим теорему 33 гл. III. Заметим, что пространство  $l_r^1$  сопряжено пространству  $c_r^0$  последовательностей, стремящихся к нулю. В силу теоремы 33 гл. III найдутся элементы  $\bar{v} \in l_r^1$ ,  $\bar{v} \geq 0$  и  $\bar{\delta} \in l_r^1$  такие, что

$$\begin{aligned} T\bar{v} + S\bar{\delta} - s u_0 &\geq 0, \\ P\bar{v} + R\bar{\delta} - S(h_0, \kappa_0) &= 0, \\ (\bar{u}^*, T\bar{v} + S\bar{\delta} - s u_0) &= 0, \\ (T^* \bar{u}^* + P^*(\bar{h}^*, \bar{\kappa}^*) - \bar{b}^*, \bar{v}) &= 0, \\ \|\bar{v}\| + \|\bar{\delta}\| + s &> 0, \end{aligned} \quad (64)$$

или, вспоминая определение операторов, получаем

$$\begin{aligned} -BK_1(C\bar{v} + C'\bar{\delta}) + D\bar{v} + D'\bar{\delta} &\geq sB(K_1 a) + s b, \\ -B'K_1(C\bar{v} + C'\bar{\delta}) + E\bar{v} + E'\bar{\delta} &= sB'(K_1 a) + s b', \\ K_2(C\bar{v} + C'\bar{\delta}) + sK_2 a &= 0. \end{aligned} \quad (65)$$

Положим  $\bar{x} = K_1 (C\bar{v} + C'\delta + sa)$ . Тогда

$$\bar{x}_t = A_t \bar{x}_{t+1} + C_t \bar{v}_t + C'_t \bar{\delta}_t + sa_t.$$

Условия (65) дают, что

$$-B_t \bar{x}_{t+1} + D_t \bar{v}_t + D'_t \bar{\delta}_t \geq sb_t,$$

$$-B'_t \bar{x}_{t+1} + E_t \bar{v}_t + E'_t \bar{\delta}_t = sb'_t,$$

$$x_0 = 0, \quad t = 0, 1, \dots$$

А из последних трех условий (64) получаем, что

$$\sum_{t=0}^{\infty} \bar{u}_t^* [-B_t \bar{x}_{t+1} + D_t \bar{v}_t + D'_t \bar{\delta}_t - sb_t] = 0,$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} [-\bar{x}_t^* C_t + \bar{u}_t^* D_t + \bar{h}_t^* E_t - b_t^*] v_t = 0,$$

$$s + \sum_{t=1}^{\infty} [|\bar{v}_t| + |\bar{\delta}_t|] > 0.$$

Так как все слагаемые в сумме знакопостоянны, то отсюда следует (63). Из теоремы 33 гл. III следует, что при выполнении условия Слейтера по ограничению (37) и условий невырожденности по ограничению (38) можно положить  $s = 1$ .

Сформулируем теперь принцип максимума Понтрягина. Введем для задач I' и II' функции Понтрягина

$$\mathcal{H}(u^*, h^*, x_{t+1}, s) = u^* (B_t x_{t+1} + sb_t) + h^* (B'_t x_{t+1} + sb'_t),$$

$$\tilde{\mathcal{H}}(x_t^*, v, \delta, s) = (b_t^* + x_t^* C_t) v + (b_t^{*'} + x_t^* C'_t) \delta.$$

Рассмотрим следующие задачи линейного программирования:

Задача II. Найти  $\max \mathcal{H}(u^*, h^*, x_{t+1}, s)$  при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} u^* &\geq 0, & u^* D_t + h^* E_t &\leq b_t^* + \bar{x}_t^* C_t, \\ u^* D'_t + h_t E_t &= b_t^{*'} + \bar{x}_t^* C'_t. \end{aligned} \quad (66)$$

Задача 11'. Найти  $\min \tilde{\mathcal{K}}(x_t^*, v, \delta, s)$  при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} v \geq 0, \quad D_t v + D'_t \delta &\geq B_t x_{t+1} + s b_t, \\ E_t v + E'_t \delta &= B'_t x_{t+1} + s b'_t. \end{aligned} \quad (67)$$

Теорема 7. Пусть задача I имеет оптимальные управления  $\{\bar{u}_t^*\}$ ,  $\{\bar{h}_t^*\}$ ; тогда найдутся последовательности  $\{\bar{v}_t\} \in l_t^1$ ,  $\bar{v}_t \geq 0$ ,  $\{\bar{\delta}_t\} \in l_t^1$ , и число  $s \geq 0$  такие, что

$$\bar{x}_t = A_t \bar{x}_{t+1} + C_t \bar{v}_t + C'_t \bar{\delta}_t + s a_t, \quad s + \sum_{t=0}^{\infty} v_t + \sum_{t=0}^{\infty} |\delta_t| > 0$$

$$\begin{aligned} -B_t \bar{x}_{t+1} + D_t \bar{v}_t + D'_t \bar{\delta}_t &\geq s b_t, \\ -B'_t \bar{x}_{t+1} + E_t \bar{v}_t + E'_t \bar{\delta}_t &= s b'_t, \quad \bar{x}_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\max \mathcal{K}(u^*, h^*, \bar{x}_{t+1}, s) = \mathcal{K}(\bar{u}_t^*, \bar{h}_t^*, \bar{x}_{t+1}, s),$$

где  $\max$  берется по многограннику (66).

Кроме того

$$\min \tilde{\mathcal{K}}(\bar{x}_t^*, v, \delta) = \tilde{\mathcal{K}}(\bar{x}_t^*, \bar{v}_t, \bar{\delta}_t),$$

где  $\min$  берется по многограннику (67). Если по ограничению (37) выполнено условие Слейтера, а ограничение (38) невырождено, то можно принять  $s=1$ .

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.

В заключение этого параграфа заметим, что можно рассмотреть системы с ограничениями на коэффициенты более общего вида, чем ограничения (39). Пусть, например,

$$\|A_t\| \leq \alpha \gamma^t, \quad \alpha > 0, \quad \gamma \geq 1.$$

Делая в (36) — (38) замену

$$x_t^* = \bar{x}_t^* \gamma^{\frac{t^2}{2}}, \quad \delta = \max\{1, \alpha\} + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

придем к системе того же вида, но с новыми коэффициентами

$$A_t = \frac{\gamma^{-t}}{\delta \sqrt{\gamma}} \bar{A}_t, \quad \tilde{B}_t = B_t \gamma^{-\frac{(t+1)^2}{2}} \delta^{-(t+1)},$$

и т. д. Нетрудно видеть, что  $\|A_t\| < 1$ . Если потребовать, чтобы все новые коэффициенты были бы ограничены (а это сводится к тому, что старые коэффициенты растут не быстрее, чем некоторые показательные функции), то для новой системы уже будут выполнены ограничения (39).

## § 5. Выпуклые задачи

Сделаем следующие предположения:

а) вектор-функции  $\psi_t(\xi, \zeta)$ ,  $\eta_t(\zeta)$ ,  $\Phi_t(\xi, \zeta)$  при  $t = 0, 1, \dots$  задают непрерывно-дифференцируемые отображения из  $R_n \times R_m$  в  $R_1$ ,  $R_n$  и  $R_r$  соответственно,

б) —  $\psi_t(\xi, \zeta)$ ,  $\eta_t(\zeta)$ ,  $\Phi_t(\xi, \zeta)$  выпуклы и монотонно возрастают по  $\xi$ ,

в) функции  $\psi_t(\xi, \zeta)$ ,  $\eta_t(\zeta)$ ,  $\Phi_t(\xi, \zeta)$  и их частные производные равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на любом шаре пространства  $R_n \times R_m$ ,

г) матрица  $A_t$  имеет размеры  $n \times n$  и

$$\|A_t\| \leq \alpha < 1.$$

По аналогии с гл. VI рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

*Задача III. Найти управление  $\{u_t^*\} \in l_m^\infty$ , дающее максимум вогнутому функционалу*

$$\varphi(u^*) = \sum_{t=0}^{\infty} \psi_t(x_t^*, u_t^*) p_t, \quad \sum_{t=0}^{\infty} |p_t| < +\infty, \quad (68)$$

*при следующих ограничениях:*

$$x_{t+1}^* = x_t^* A_t + \eta_t(u_t^*), \quad u_t^* \geq 0, \quad x_0^* = \alpha^*, \quad (69)$$

$$\Phi_t(x_t^*, u_t^*) \leq 0, \quad t = 0, 1, \dots \quad (70)$$

Рассмотрим выпуклый оператор  $\eta(u^*)$  следующего вида:

$$\eta(u^*) = \{\eta_t(u_t^*)\}_{t=0, 1, \dots} \quad (71)$$

В силу теоремы 13 гл. I оператор  $\eta(u^*)$  действует из  $l_n^\infty$  в  $l_n^\infty$ , дифференцируем по Фреше и

$$\eta'(u^*) \Delta u^* = \left\{ \Delta u_t^* \frac{\partial \eta_t}{\partial u_t^*}(u_t^*) \right\}_{t=0, 1, \dots} \quad (72)$$

Если ввести оператор

$$U\xi = \left\{ \xi_t \frac{\partial \eta_t}{\partial u_t^*} (u_t^*) \right\}, \quad (73)$$

то, как нетрудно видеть,  $U$  действует из  $c_n^0$  в  $c_n^0$  и линейен, где  $c_n^0$  — пространство векторов, стремящихся к нулю. Кроме того, ясно, что

$$U^*p = \left\{ \frac{\partial \eta_t}{\partial u_t^*} (u_t^*) p_t \right\}, \quad p \in l_n^1, \quad U^{**} = \eta' (u^*). \quad (74)$$

Уравнение (69) может быть разрешено относительно  $x_t^*$ . Из (41) получаем

$$x^* = K^* (\eta (u^*)) + \kappa^*, \quad \kappa_t^* = \alpha^* A_0 \dots A_{t-1}, \quad (74')$$

$$\{K^* f^*\}_t = f_{t-1}^* + f_{t-2}^* A_{t-1} + \dots + f_0^* A_1 \dots A_{t-1}.$$

Если ввести линейный оператор

$$\tilde{K}\Phi = \Phi_{t-1} + \Phi_{t-2} A_{t-1} + \dots + \Phi_0 A_1 \dots A_{t-1}, \quad (75)$$

то, как было показано в § 2,  $\tilde{K} \in [c_n^0 \rightarrow c_n^0]$  и

$$\begin{aligned} \tilde{K}^* &= K, \quad \tilde{K}^{**} = K^*, \quad Kf = (x_1, \dots, x_t, \dots), \\ x_t &= f_t + A_t f_{t+1} + \dots + A_t \dots A_{t+p} f_{t+p+1} + \dots, \\ x_t &= A_t x_{t+1} + f_t. \end{aligned} \quad (76)$$

Пусть, далее,

$$\psi(x^*, u^*) = \{\psi_t(x_t^*, u_t^*)\}, \quad \overline{\Phi}(x^*, u^*) = \{\Phi_t(x_t^*, u_t^*)\}. \quad (77)$$

В силу теоремы 13 гл. I  $\psi$  и  $\Phi$  есть выпуклые операторы из  $l_n^\infty \times l_m^\infty$  в  $l_1^\infty$  и  $l_r^\infty$  соответственно, монотонные по  $x^*$  и дифференцируемые по Фреше, причем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x^*} (x^*, u^*) \Delta x^* &= \left\{ \Delta x_t^* \frac{\partial \psi_t}{\partial x_t^*} (x_t^*, u_t^*) \right\}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial u^*} (x^*, u^*) \Delta u^* &= \left\{ \Delta u_t^* \frac{\partial \psi_t}{\partial u_t^*} (x_t^*, u_t^*) \right\}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^*} (x^*, u^*) \Delta x^* &= \left\{ \Delta x_t^* \frac{\partial \Phi_t}{\partial x_t^*} (x_t^*, u_t^*) \right\}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u^*} (x^*, u^*) \Delta u^* &= \left\{ \Delta u_t^* \frac{\partial \Phi_t}{\partial u_t^*} (x_t^*, u_t^*) \right\}. \end{aligned} \quad (78)$$

Введем в рассмотрение линейные операторы

$$\begin{aligned} P\xi &= \left\{ \xi_t \frac{\partial \psi_t}{\partial x_t^*} (x_t^*, u_t^*) \right\}, & R\xi &= \left\{ \xi_t \frac{\partial \psi_t}{\partial u_t^*} (x_t^*, u_t^*) \right\}, \\ S\xi &= \left\{ \xi_t \frac{\partial \Phi_t}{\partial x_t^*} (x_t^*, u_t^*) \right\}, & Q\xi &= \left\{ \xi_t \frac{\partial \Phi_t}{\partial u_t^*} (x_t^*, u_t^*) \right\}, \end{aligned} \quad (79)$$

действующие из  $c_n^0$ ,  $c_m^0$  в  $c_l^0$ ,  $c_r^0$  соответственно. Очевидно, что,

$$\begin{aligned} P^*v &= \left\{ \frac{\partial \psi_t}{\partial x_t^*} (x_t^*, u_t^*) v_t \right\}, & R^*q &= \left\{ \frac{\partial \psi_t}{\partial u_t^*} (x_t^*, u_t^*) q_t \right\}, \\ S^*v &= \left\{ \frac{\partial \Phi_t}{\partial x_t^*} (x_t^*, u_t^*) v_t \right\}, & Q^*q &= \left\{ \frac{\partial \Phi_t}{\partial u_t^*} (x_t^*, u_t^*) q_t \right\}, \\ P^{**} &= \frac{\partial \psi}{\partial x^*} (x^*, u^*), & R^{**} &= \frac{\partial \psi}{\partial u^*} (x^*, u^*), \\ S^{**} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x^*} (x^*, u^*), & Q^{**} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u^*} (x^*, u^*). \end{aligned} \quad (80)$$

Запишем теперь задачу III как задачу вогнутого программирования в банаховом пространстве.

**Задача III'.** Найти управление  $u^* \in l_m^\infty$ , дающее максимум вогнутому функционалу

$$\Phi(u^*) = (\psi[K^*\eta(u^*) + \kappa^*, u^*], p), \quad (81)$$

при следующих ограничениях:

$$u^* \geq 0, \quad \Phi[K^*\eta(u^*) + \kappa^*, u^*] \leq 0. \quad (82)$$

Так как операторы  $\Phi(x^*, u^*)$  и  $\psi(x^*, u^*)$  выпуклы и монотонно возрастают по  $x^*$ , а оператор  $K^*$  — линейен, оператор  $\eta(u^*)$  — выпуклый, то  $\Phi[K^*\eta(u^*) + \kappa^*, u^*]$  и  $\psi[K^*\eta(u^*) + \kappa^*, u^*]$  — выпуклые операторы в  $l_m^\infty$ . Будем говорить, что для задачи III выполнено условие Слейтера, если существует управление  $\{\tilde{u}_t^*\}$  такое, что

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{t+1}^* &= \tilde{x}_t^* A_t + \eta_t(\tilde{u}_t^*), & \tilde{u}_t^* &\geq 0, & \tilde{x}_0^* &= \alpha^*, \\ \Phi_t(\tilde{x}_t^*, \tilde{u}_t^*) &\leq -\varepsilon_0 e^*, & \varepsilon_0 &> 0, & e^* &= (1, \dots, 1). \end{aligned} \quad (83)$$

Если условие Слейтера выполнено для задачи III, то оно очевидно выполнено и для задачи III'.



Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\psi [K^*\eta(u^*) + \kappa^*, u^*]}{du^*} &= \frac{\partial \psi}{\partial x^*}(x^*, u^*) K^* \frac{\partial \eta}{\partial u^*}(u^*) + \\ &+ \frac{\partial \psi}{\partial u^*}(x^*, u^*) = P^{**} K^* U^{**} + R^{**} \equiv N^{**}, \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi [K^*\eta(u^*) + \kappa^*, u^*]}{du^*} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x^*}(x^*, u^*) K^* \frac{\partial \eta}{\partial u^*}(u^*) + \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial u^*}(x^*, u^*) = S^{**} K^* U^{**} + Q^{**} \equiv T^{**}, \end{aligned} \quad (85)$$

откуда

$$\begin{aligned} N &= P\tilde{K}U + R, & T &= S\tilde{K}U + Q, \\ N^* &= U^* K P^* + R^*, & T^* &= U^* K S^* + Q^*. \end{aligned} \quad (86)$$

Пусть для задачи III выполнено условие Слейтера. Тогда, в силу теоремы 3 гл. IV, для того, чтобы  $\bar{u}^* \in l_m^\infty$  было бы оптимальным управлением для задачи III, необходимо и достаточно, чтобы оно было бы оптимальным для следующей задачи линейного программирования:

Задача III". Найти

$$\max (N^{**}(\bar{u}^*) u^*, \rho)$$

при следующих ограничениях:

$$u^* \geq 0, \quad \Phi(\bar{x}^*, \bar{u}^*) + T^{**}(\bar{u}^*)(u^* - \bar{u}^*) \leq 0. \quad (87)$$

Из результатов гл. III следует, что задача III двойственна следующей задаче линейного программирования:

Задача IV. Найти минимум линейного функционала

$$(T^{**}(\bar{u}^*) \bar{u}^* - \Phi(\bar{x}^*, \bar{u}^*), v) = K(v) \quad (88)$$

при следующих ограничениях:

$$v \geq 0, \quad T^*(\bar{u}^*) v - N^*(\bar{u}^*) \rho \leq 0. \quad (89)$$

Вспоминая определение (86) операторов  $T^*$  и  $N^*$ , получаем

$$T^* v - N^* \rho = U^* K (S^* v - P^* \rho) + Q^* v - R^* \rho.$$

Положим

$$x = K(S^*v - P^*p). \quad (90)$$

Тогда, в силу определения (76) оператора  $K$ , получаем

$$x_t = A_t x_{t+1} + \frac{\partial \Phi_t}{\partial x_t^*}(\bar{x}_t^*, \bar{u}_t^*) v_t - \frac{\partial \psi_t}{\partial x_t^*}(\bar{x}_t^*, \bar{u}_t^*) p_t, \quad (91)$$

и, в силу (80), ограничение (89) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial u_t^*}(\bar{u}_t^*) x_{t+1} + \frac{\partial \Phi_t}{\partial u_t^*}(\bar{x}_t^*, \bar{u}_t^*) v_t - \frac{\partial \psi_t}{\partial u_t^*}(\bar{x}_t^*, \bar{u}_t^*) p_t \leq 0. \quad (92)$$

Преобразуем еще функционал (88):

$$\begin{aligned} K(v) &= (\bar{u}^*, T^*v) - (\Phi(\bar{x}^*, \bar{u}^*), v) = \\ &= (\bar{u}^*, [U^*KS^* + Q^*]v) - (\Phi(\bar{x}^*, \bar{u}^*), v) = \\ &= (\bar{u}^*, U^*x + Q^*v) - (\Phi(\bar{x}^*, \bar{u}^*), v) = \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \bar{u}_t^* \frac{\partial \eta_t}{\partial u_t^*}(\bar{u}_t^*) x_{t+1} + \bar{u}_t^* \frac{\partial \Phi_t}{\partial u_t^*}(\bar{x}_t^*, \bar{u}_t^*) v_t - \Phi_t(\bar{x}_t^*, \bar{u}_t^*) v_t \right\}. \end{aligned} \quad (93)$$

Таким образом, задача IV может быть записана в следующей форме:

**Задача IV.** Найти минимум линейного функционала

$$\sum_{t=0}^{\infty} \bar{u}_t^* \frac{\partial \eta_t}{\partial u_t^*}(\bar{u}_t^*) x_{t+1} + \sum_{t=0}^{\infty} \left[ \bar{u}_t^* \frac{\partial \Phi_t}{\partial u_t^*}(\bar{x}_t^*, \bar{u}_t^*) - \Phi_t(\bar{x}_t^*, \bar{u}_t^*) \right] v_t$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} x_t &= A_t x_{t+1} + \frac{\partial \Phi_t}{\partial x_t^*}(\bar{x}_t^*, \bar{u}_t^*) v_t - \frac{\partial \psi_t}{\partial x_t^*}(\bar{x}_t^*, \bar{u}_t^*) p_t, \\ \{v_t\} &\in l_r, \quad v_t \geq 0, \end{aligned} \quad (94)$$

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial u_t^*}(\bar{u}_t^*) x_{t+1} + \frac{\partial \Phi_t}{\partial u_t^*}(\bar{x}_t^*, \bar{u}_t^*) v_t - \frac{\partial \psi_t}{\partial u_t^*}(\bar{x}_t^*, \bar{u}_t^*) p_t \leq 0.$$

Справедлива следующая теорема, дающая необходимые условия оптимальности:

**Теорема 8.** Пусть удовлетворены условия а)—г) и для задачи III выполнено условие Слейтера. Тогда найдется такое решение задачи IV, что будут выполнены следующие необходимые условия оптимальности:

$$\Phi_t^i(\bar{x}_t^*, \bar{u}_t^*) v_t^i = 0, \quad i = 1, \dots, r; \quad t = 0, 1, \dots, \quad (95)$$

$$\bar{u}_t^{*j} \left[ \frac{\partial \eta_t}{\partial u_t^*}(\bar{u}_t^*) x_{t+1} + \frac{\partial \Phi_t}{\partial u_t^*}(\bar{x}_t^*, \bar{u}_t^*) v_t - \frac{\partial \Psi_t}{\partial u_t^*}(x_t^*, \bar{u}_t^*) p_t \right]_j = 0, \quad (96)$$

$$j = 1, \dots, m; \quad t = 0, 1, \dots$$

**Доказательство.** Так как условие Слейтера выполнено для задачи III, то оно выполнено для задачи III', а следовательно, и для соответствующей ей линейной задачи III". Выполнены все условия теоремы 23 гл. III, и поэтому ограничения задач III и IV должны удовлетворять условиям дополняющей нежесткости, которые после обычной обработки принимают вид равенств (95)—(96).

Необходимым условиям оптимальности можно придать форму принципа максимума Понтрягина; для этого рассмотрим функцию Понтрягина для задачи III

$$\mathcal{H}_t(u^*, x_t, x_t^*) = \eta_t(u^*) x_{t+1} + \psi_t(\bar{x}_t^*, \bar{u}_t^*) p_t, \quad (97)$$

и соответствующую ей задачу выпуклого программирования:

**Задача II. Найти**

$$\max_{u^*} \mathcal{H}_t(u^*, x_t, x_t^*) \quad (98)$$

при следующих ограничениях:

$$u^* \geq 0, \quad \Phi_t(x_t^*, u^*, t) \leq 0. \quad (99)$$

**Теорема 9** (принцип максимума Понтрягина). Пусть выполнены условия теоремы 8; тогда

$$\max \mathcal{H}_t(u^*, \bar{x}_t, \bar{x}_t^*) = \mathcal{H}_t(\bar{u}_t^*, \bar{x}_t, \bar{x}_t^*),$$

где max берется при ограничениях (99).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4 гл. VI.

Сформулируем еще теорему, дающую достаточные условия оптимальности.

*Теорема 10. Пусть выполнено условие Слейтера и для управлений (допустимых)  $\{\bar{u}_i^*\}$  и  $\{\bar{v}_i\}$  выполнены условия дополняющей нежесткости (95) и (96); тогда управление  $\{\bar{u}_i^*\}$  будет оптимальным.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5 гл. VI.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА  
ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

## § 1. Модель Леонтьева «затраты — выпуск»

В этом параграфе очень бегло будут перечислены некоторые свойства статической модели Леонтьева типа затраты — выпуск.

Рассматривается экономика, состоящая из  $n$  отраслей. Каждая отрасль производит только один продукт и различные отрасли производят различные продукты. Будем считать, что производственный процесс непрерывен во времени. Пусть в момент времени  $t$  для производства единицы продукта в  $j$ -й отрасли за единицу времени требуется  $a_{ij}(t)$  единиц  $i$ -го продукта. Коэффициенты  $a_{ij}(t)$  называют *коэффициентами прямых затрат*, а составленную из этих коэффициентов матрицу  $A(t)$  — *матрицей прямых затрат*. Изменение  $a_{ij}(t)$  с течением времени учитывает изменения технологии, связанные с техническим прогрессом. Считаем, что  $a_{ij}(t)$  кусочно-непрерывные, монотонно убывающие (в нестрогом смысле) функции времени. Впрочем, можно было бы считать  $a_{ij}(t)$  измеримыми ограниченными функциями времени  $t$ . Через  $x_i(t)$  будем обозначать скорость выпуска  $i$ -го продукта (для краткости будем говорить просто «выпуск») в момент времени  $t$ . Должны быть выполнены следующие балансовые уравнения:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j(t) + y_i(t), \quad i = 1, \dots, n; \quad (1)$$

здесь  $y_i(t)$  — конечный спрос  $i$ -го продукта. В статической модели  $y_i(t)$  — экзогенные (задаваемые из соображений, лежащих вне модели) величины. Если обозначить через  $x(t)$  вектор-столбец с компонентами  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ , а через  $y(t)$  — вектор-столбец с компонентами

$y_1(t), \dots, y_n(t)$ , то уравнение (1) можно записать в матричном виде

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + y(t). \quad (2)$$

Если для любого конечного спроса  $y(t) \geq 0$  матричное уравнение (2) имеет неотрицательное решение  $x(t) \geq 0$ , то матрица  $A(t)$  называется *продуктивной*. Продуктивность матрицы  $A$  означает, что матрица  $(E - A)^{-1}$  неотрицательна и что ее можно представить в виде суммы ряда Неймана

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^n + \dots \quad (3)$$

Матрица называется *положительной*, если ее произведение на любой неотрицательный вектор, отличный от нуля, есть положительный вектор. Матрица  $A$  называется *неразложимой*, если перестановкой строк и столбцов ее нельзя привести к виду

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Если матрица  $A$  неразложима и продуктивна, то матрица  $(E - A)^{-1}$  положительна. Будем говорить, что элемент  $a_{ij}(t)$  *строго положителен*, если

$$a_{ij}(t) \geq \gamma > 0. \quad (4)$$

Матрицу, все элементы которой строго положительны, будем называть *строго положительной*.

## § 2. Динамическая модель производства Леонтьева

В статической модели, описанной в предыдущем параграфе, конечный спрос  $y(t)$  был экзогенной величиной. Чтобы перейти к динамическим моделям, нужно  $y(t)$  сделать эндогенной величиной, т. е. указать в рамках модели, как формируется конечный спрос. В зависимости от того, каким способом это делать, будем получать различные динамические модели. Опишем для начала простейшую динамическую модель Леонтьева.

Будем обозначать вектор производственных мощностей через  $V(t)$ . Очевидно, что справедливо ограничение

$$0 \leq x(t) \leq V(t). \quad (5)$$

Прирост производственных мощностей в единицу времени есть  $\dot{V}(t)$ . Будем считать, что мощности могут только расти:

$$\dot{V}(t) \geq 0. \quad (6)$$

Пусть  $b_{ij}(t)$  есть затраты  $i$ -го продукта на увеличение производственных мощностей в  $j$ -й отрасли на единицу в единицу времени. Величины  $b_{ij}(t)$  называются *коэффициентами фондоемкости*. Матрица  $B(t)$ , составленная из  $b_{ij}(t)$ , называется *матрицей фондоемкости*. Так как не все продукты являются фондообразующими, то у матрицы  $B(t)$  могут быть чисто нулевые строки, соответствующие этим продуктам. Вектор затрат продуктов на прирост мощностей равен  $B(t) \dot{V}(t)$ .

Будем также считать, что для функционирования экономики необходим труд. Для простоты считаем труд однородным: он может быть одинаково применен в любой отрасли. Будем предполагать, что трудовые ресурсы ограничены:

$$a_0(t) x(t) \leq \pi(t), \quad (7)$$

$a_0(t)$  есть вектор-строка прямых затрат труда на производство единичного набора продуктов. Функции  $a_0(t)$  и  $\pi(t)$  также предполагаются кусочно-непрерывными (или ограниченными измеримыми) функциями. Обозначим через  $c(t)$  потребление населения. Будем считать, что потребление не должно опускаться ниже заданного уровня

$$c(t) \geq c_0(t), \quad (8)$$

где  $c_0(t)$  — кусочно-непрерывная функция. Зададим теперь вектор конечного спроса следующим образом:

$$y(t) = B(t) \dot{V}(t) + c(t). \quad (9)$$

Период планирования будем считать конечным и равным  $T$ . Считаем, что при  $t=0$  известна структура производственных мощностей

$$V(0) = V_0.$$

При  $t=T$  можно задавать различные условия. Мы возьмем ограничение наиболее общего вида. Вектор  $V(T)$  должен быть точкой некоторого многогранного множества в  $R^n$ :

$$G_1 V(T) \leq a_1, \quad G_2 V(T) = a_2.$$

Будем считать, что цель производства заключается в максимизации линейного функционала

$$J(c) = \int_0^T p_0(t) c(t) dt, \quad (10)$$

где  $p_0(t)$  — некоторая известная кусочно-непрерывная (или суммируемая по Лебегу) функция. Функционал  $J(c)$  можно трактовать как линейную функцию полезности.

Будем также рассматривать и более общую задачу максимизации вогнутого функционала

$$I(c) = \int_0^T u[c(t)] dt, \quad (11)$$

где  $u(c)$  — неотрицательная вогнутая функция полезности. Предполагается, что она непрерывно-дифференцируема в  $R^n$ .

Сформулируем теперь задачу, к которой мы пришли.

**Задача Л.** Найти максимум линейного функционала (10) при следующих ограничениях:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\dot{V}(t) + c(t), \quad (12)$$

$$0 \leq x(t) \leq V(t), \quad \dot{V}(t) \geq 0, \quad V(0) = V_0, \quad c(t) \geq c_0(t), \quad (13)$$

$$a_0(t)x(t) \leq \pi(t), \quad G_1 V(T) \leq a_1, \quad G_2 V(T) = a_2. \quad (14)$$



### § 3. Сведение задачи Л к стандартной задаче оптимального управления

Положим

$$\dot{V}(t) = u(t), \quad c(t) = c_0(t) + w(t). \quad (15)$$

В силу ограничений (13) имеем

$$u(t) \geq 0, \quad w(t) \geq 0. \quad (16)$$

Будем считать  $u(t)$  и  $w(t)$  управлениями и брать их функциями из  $L_m^\infty[0, T]$  и  $L_n^\infty[0, T]$  соответственно. Полагая

$$\tilde{A}(t) = [E - A(t)]^{-1}, \quad (17)$$

мы можем решить уравнение (12) относительно  $x(t)$ :

$$x(t) = \tilde{A}(t) B(t) u(t) + \tilde{A}(t) w(t) + \tilde{A}(t) c_0(t). \quad (18)$$

Оставшиеся ограничения (12) — (14) переписутся теперь в следующем виде:

$$-V(t) + \tilde{A}(t) B(t) u(t) + \tilde{A}(t) w(t) \leq -\tilde{A}(t) c_0(t), \quad (19)$$

$$a_0(t) \tilde{A}(t) B(t) u(t) + a_0(t) \tilde{A}(t) w(t) \leq \pi(t) - a_0(t) \tilde{A}(t) c_0(t), \quad (20)$$

$$V(0) = V_0, \quad G_1 V(T) \leq a_1, \quad G_2 V(T) = a_2.$$

Если воспользоваться блочными матрицами, то задачу Л можно записать в стандартном виде:

Задача Л. Найти управление  $(u(t), w(t)) \in L_m^\infty \times L_n^\infty$ , дающее максимум линейному функционалу

$$J = \int_0^T (0, p_0) \begin{pmatrix} u(t) \\ w(t) \end{pmatrix} dt, \quad (21)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= (E, 0) \begin{pmatrix} u(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \geq 0, \\ -\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} V(t) + \begin{pmatrix} \tilde{A}B & \tilde{A} \\ a_0\tilde{A}B & a_0\tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} &\leq \begin{pmatrix} -\tilde{A}c_0 \\ \pi - a_0\tilde{A}c_0 \end{pmatrix}, \\ V(0) &= V_0, \quad G_1 V(t) \leq a_1, \quad G_2 V(T) = a_2. \end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(t) \\ w(t) \end{pmatrix} &= u^*(t), \quad (0, p_0) = b, \quad (E, 0) = \tilde{B}, \quad V_0 = \alpha^*, \\ \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} &= \tilde{C}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{A}B & \tilde{A} \\ a_0\tilde{A}B & a_0\tilde{A} \end{pmatrix} = \tilde{D}, \quad \begin{pmatrix} -\tilde{A}c_0 \\ \pi - a_0\tilde{A}c_0 \end{pmatrix} = b^*, \end{aligned} \quad (22)$$

то задача Л примет стандартный вид задачи  $A_1$  гл. V: найти

$$\max \int_0^T b(t) u^*(t) dt$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \tilde{B}(t) u^*(t), \quad V(0) = \alpha^*, \\ -\tilde{C}(t) V(t) + \tilde{D}(t) u^*(t) &\leq b^*(t), \\ G_1 V(t) &\leq a_1, \quad G_2 V(T) = a_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что по традиции в экономических задачах рассматриваются выпуски как векторы-столбцы, так что звездочками индексированы векторы-столбцы, в то время как в гл. V из соображений математического удобства рассматривались векторы-строки. В дальнейшем все теоремы гл. V будут применяться с вполне понятной заменой строк на столбцы и наоборот.

#### § 4. Двойственная задача Л

Пользуясь результатами § 8 гл. V, запишем задачу, двойственную к задаче Л: найти минимум линейного функционала

$$\Psi = q(0) \alpha^* + \xi a_1 + \eta a_2 + \int_0^T v(t) b^*(t) dt \quad (24)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} -\frac{dq(t)}{dt} &= v(t) \tilde{C}(t), \quad v(t) \geq 0, \quad \xi \geq 0, \\ v(t) &\in L^1_+[0, T], \quad \xi \in R_{q_1}, \quad \eta \in R_{q_2}, \\ -q(t) \tilde{B}(t) + v(t) \tilde{D}(t) &\geq b(t), \\ q(T) &= -\xi G_1 - \eta G_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Если вспомнить обозначения (22), то задачу, двойственную задаче Л, можно переписать в блочном виде:

**Задача Л'.** Найти управления  $r(t) \in L_n^1[0, T]$ ,  $s(t) \in L^1[0, T]$ ,  $\xi \in R_{q_1}$ ,  $\eta \in R_{q_2}$ , дающие минимум линейному функционалу

$$\psi = q(0) \alpha^* + \xi a_1 + \eta a_2 + \int_0^T (r(t), s(t)) \begin{pmatrix} -\tilde{A}c_0 \\ \pi - a_0 \tilde{A}c_0 \end{pmatrix} dt, \quad (26)$$

при следующих ограничениях

$$\begin{aligned} r(t) &\geq 0, \quad s(t) \geq 0, \quad \xi \geq 0, \\ -\frac{dq(t)}{dt} &= (r(t), s(t)) \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}, \\ -q(t)(E, 0) + (r(t), s(t)) \begin{pmatrix} \tilde{A}B & \tilde{A} \\ a_0 \tilde{A}B & a_0 \tilde{A} \end{pmatrix} &\geq (0, p_0), \\ q(T) &= -\xi G_1 - \eta G_2. \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, задачу Л' можно переписать в следующем виде:

**Задача Л'.** Найти управления  $r \in L_n^1$ ,  $s \in L^1$ ,  $\xi \in R_{q_1}$ ,  $\eta \in R_{q_2}$ , дающие минимум линейному функционалу

$$\begin{aligned} \psi &= q(0) \alpha^* + \xi a_1 + \eta a_2 + \\ &+ \int_0^T s(t) \pi(t) dt - \int_0^T [r(t) \tilde{A}(t) + s(t) a_0(t) \tilde{A}] c_0 dt, \end{aligned}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} -\frac{dq(t)}{dt} &= r(t), \quad r(t) \geq 0, \quad s(t) \geq 0, \quad \xi \geq 0, \\ -q(t) + [r(t) \tilde{A}(t) + s(t) a_0 \tilde{A}(t)] B(t) &\geq 0, \\ r(t) \tilde{A}(t) + s(t) a_0(t) \tilde{A}(t) &\geq p_0, \\ q(T) &= -\xi G_1 - \eta G_2. \end{aligned} \quad (28)$$

Положим

$$p(t) = r(t) \tilde{A}(t) + s(t) a_0(t) \tilde{A}(t). \quad (29)$$

Тогда

$$p(t) = p(t) A(t) + r(t) + s(t) a_0(t), \quad (30)$$

и задача Л' может быть записана в следующем виде:

**Задача Л'.** Найти управления  $r(t) \in L_n^1[0, T]$ ,  $s(t) \in L^1[0, T]$   $\xi \in R_{q_1}$ ,  $\eta \in R_{q_2}$ , дающие минимум линейному функционалу

$$\psi = q(0) V_0 + \xi a_1 + \eta a_2 + \int_0^T s(t) \pi(t) dt - \int_0^T p(t) c_0(t) dt, \quad (31)$$

при следующих ограничениях:

$$p(t) = p(t) A(t) + s(t) a_0(t) + r(t), \quad -\dot{q}(t) = r(t), \quad (32)$$

$$p(t) B(t) \geq q(t), \quad p(t) \geq p_0(t), \quad (33)$$

$$q(T) = -\xi G_1 - \eta G_2, \quad r(t) \geq 0, \quad s(t) \geq 0, \quad \xi \geq 0. \quad (34)$$

### § 5. Экономическая интерпретация двойственной задачи

В этом параграфе будет дана одна из возможных интерпретаций двойственной задачи. Пусть

$$p(t) = \{p_1(t), \dots, p_n(t)\}, \quad r(t) = \{r_1(t), \dots, r_n(t)\}. \quad (35)$$

Функции  $p_i(t)$  назовем *ценами продуктов* соответствующих отраслей. Функция  $s(t)$  — *цена труда* (зарплата плата). Расписывая уравнение (32) по координатам, получаем

$$r_i(t) = p_i(t) - \sum_{j=1}^n p_j(t) a_{ji}(t) - s(t) a_{0i}(t). \quad (36)$$

Так как  $\sum_{j=1}^n p_j(t) a_{ji}(t)$  есть стоимость технологических затрат на производство единицы продукта  $i$ -й отрасли, то  $r_i(t)$  имеет смысл прибавленной стоимости или прибыли в единицу времени на единицу продукта в  $i$ -й отрасли.

Функцию  $p_i(t)$  будем называть *ценой мощности* в  $i$ -й отрасли. Тогда из (32) и (34)

$$q_i(t) = \int_t^T r_i(t) dt + q_i(T), \quad q_i(T) = -(\xi G_1 + \eta G_2)_i \quad (37)$$

Из (37) получаем, что цена  $i$ -й мощности есть сумма финальной цены  $q_i(t)$  и прибыли, которую можно получить с единицы этой мощности (при полной ее загрузке) за период  $[t, T]$ . Если нет финальных ограничений на мощности (23), то финальные цены мощностей равны нулю. Если же финальные ограничения на мощности (23) есть, то финальные цены мощностей задаются формулами (37).

Интерпретируем первое из неравенств (33). Расписывая его в координатах, имеем

$$\sum_{j=1}^n p_j(t) b_{ji}(t) \geq q_i(t). \quad (38)$$

Так как  $\sum_{j=1}^n p_j(t) b_{ji}(t)$  есть стоимость затрат на строительство единичной мощности в  $i$ -й отрасли в момент времени  $t$ , то неравенство (38) означает, что цена этой мощности не может превышать затрат на ее строительство.

Функции  $p_{oi}(t)$  назовем *потребительскими ценами*;  $p_{oi}(t)$  есть некоторая количественная характеристика удовлетворения населения от потребления единицы продукта  $i$ -й отрасли. Потребительские цены должны находиться на основании изучения потребительского спроса. Второе из неравенств (33) означает, что цены  $p_i(t)$  продуктов отраслей должны быть не ниже их потребительских цен.

Дадим теперь интерпретацию линейного функционала  $\psi$ . Несколько его преобразуем. Из (31), используя (37), получаем

$$\psi = q(0) V_0 - q_T V(T) + \int_0^T s(t) \pi(t) dt - \int_0^T p(t) c_0(t) dt + \xi(a_1 - G_1 V_T). \quad (39)$$

Тогда  $q(0) V_0 - q_T V(T)$  есть падение стоимости фондов,  $\int_0^T s(t) \pi(t) dt$  — доход населения в условиях полной занятости,  $\int_0^T p(t) c_0(t) dt$  — расходы населения на потреб-

ление на нижнем уровне за период  $[0, T]$ . Как будет показано в дальнейшем, слагаемое  $\xi(a_1 - G_1 V(T))$  при достаточно слабых предположениях обращается в нуль на оптимали, так что его можно отбросить.

## § 6. Необходимые условия оптимальности и их экономическая интерпретация

Вспомним формулировку (10)—(14) задачи Л. Ограничимся рассмотрением того случая, когда на конце  $t=T$  есть только одно ограничение  $G_1 V(T) \leq a_1$ . Сделаем следующие предположения.

Предположение 1. *Задача*

$$\begin{aligned} x_0(t) &= A(t)x_0(t) + c_0(t), \\ 0 \leq x_0(t) &\leq V_0 - \varepsilon e, \quad \varepsilon > 0, \quad e = (1, \dots, 1), \\ a_0(t)x_0(t) &\leq \pi(t) - \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

*имеет решение.*

Предположение 1 означает, что начальные мощности  $V_0$  могут обеспечить потребление на нижнем уровне в течение планового периода при недозагрузке мощности и неполной занятости.

Предположение 2. *Существуют такие программы строительства мощностей  $\tilde{u}(t)$  и потребления  $\tilde{w}(t)$ , что*

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}(t) &= \tilde{u}(t), \quad \tilde{u}(t) \in L_n^\infty[0, T], \quad \tilde{u}(t) \geq 0, \quad \tilde{V}(0) = V_0, \\ \tilde{c}(t) &= c_0(t) + \tilde{w}(t), \quad \tilde{w}(t) \in L_n^\infty[0, t], \quad \tilde{w}(t) \geq 0, \\ \tilde{x}(t) &= A(t)\tilde{x}(t) + B(t)\tilde{u}(t) + \tilde{c}(t), \\ 0 \leq \tilde{x}(t) &\leq \tilde{V}(t), \quad a_0(t)\tilde{x}(t) \leq \pi(t), \quad G_1 V(T) \leq a_1 - \varepsilon e, \\ \varepsilon &> 0, \quad e = (1, \dots, 1). \end{aligned}$$

Предположение 2 означает, что финальное ограничение по мощности  $G_1 V(T) \leq a_1$  не является очень жестким.

Предположение 3. *Матрица  $G_1 \leq 0$ .*

Предположение 3, например, всегда выполнено, если ограничение на конце  $t=T$  имеет вид  $V(T) \geq V_T$ .

В § 3 задача Л была сведена к стандартной задаче оптимального управления (23). Предположение 1 означает, что для этой задачи управление  $u_0^*(t) \equiv 0$  строго допустимо по ограничению

$$-\tilde{C}(t)V(t) + \tilde{D}(t)u^*(t) \leq b^*(t).$$

Предположение 2 означает, что управление  $\tilde{u}^*(t)$  строго допустимо по ограничению  $G_1V(T) \leq a_1$ .

Таким образом, выполнены все условия теоремы 6 гл. V. Поэтому, должны быть выполнены следующие необходимые условия оптимальности:

$$\begin{aligned} [-q(t)\tilde{B}(t) + v(t)\tilde{D}(t) - b(t)]u^*(t) &= 0, \\ v(t)[- \tilde{c}(t)V(t) + \tilde{D}(t)u^*(t) - b^*(t)] &= 0, \\ \xi[G_1V(T) - a_1] &= 0, \end{aligned}$$

или, в силу (22),

$$\begin{aligned} \{-q(t) + [r(t)\tilde{A}(t) + s(t)a_0(t)\tilde{A}(t)]B(t)\}u(t) &= 0, \\ [-p_0(t) + r(t)\tilde{A}(t) + s(t)a_0(t)\tilde{A}(t)]w(t) &= 0, \\ r(t)[-V(t) + \tilde{A}(t)B(t)u(t) + \tilde{A}(t)w(t) + \tilde{A}(t)c_0(t)] &= 0, \\ s(t)[a_0\tilde{A}(t)B(t)u(t) + a_0\tilde{A}(t)B(t)w(t) + \\ &+ a_0\tilde{A}(t)B(t)c_0(t) - \pi(t)] = 0, \\ \xi[G_1V(T) - a_1] &= 0 \quad \text{почти всюду на } [0, T]. \end{aligned}$$

В силу равенств (29) и (18) получаем (почти всюду):

$$\begin{aligned} [p(t)B(t) - q(t)]\dot{V}(t) &= 0, \\ [p(t) - p_0(t)] \cdot [c(t) - c_0(t)] &= 0, \\ r(t)[V(t) - x(t)] &= 0, \\ s(t)[-a_0(t)x(t) + \pi(t)] &= 0, \\ \xi[G_1V(T) - a_1] &= 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Если воспользоваться знакопостоянством сомножителей в (40), то можно эти равенства переписать в

следующем виде:

$$\left[ \sum_{j=1}^n p_j(t) b_{ji}(t) - q_i(t) \right] \dot{V}_j(t) = 0, \quad (41)$$

$$[p_i(t) - p_{0i}(t)] \cdot [c_i(t) - c_{0i}(t)] = 0, \quad (42)$$

$$r_i(t) [V_i(t) - x_i(t)] = 0, \quad \xi_i [G_1 V(t) - a_1]_i = 0, \quad (43)$$

$$s(t) \left[ \pi(t) - \sum_{i=1}^n a_{0i}(t) x_i(t) \right] = 0. \quad (44)$$

В дальнейшем условия (41)–(44) будем называть *условиями оптимальности* задач Л и Л'. Вспоминая интерпретации предыдущего параграфа, мы можем легко дать экономическую интерпретацию условий оптимальности.

Если в заданный момент времени  $t$  мощность в отрасли строго растет, то ее цена совпадает со стоимостью всех затрат на строительство единицы мощности. Если же цена мощности меньше затрат на строительство единичной мощности, то мощность в заданный момент времени  $t$  не строится,  $\dot{V}_i(t) = 0$ . Если цена  $i$ -го продукта  $p_i(t)$  выше потребительской цены этого продукта, то потребление этого продукта находится на нижнем уровне  $c_i(t) = c_{0i}(t)$ . Если потребление  $i$ -го продукта выше нижнего уровня, то цена  $i$ -го продукта совпадает с потребительской ценой на этот продукт. Если при заданном  $t$  отрасль прибыльна, то она работает на полную мощность. Если мощности отрасли недогружены, то отрасль дает нулевую прибыль. Если заработная плата  $s(t) \neq 0$ , то в данный момент времени  $t$  имеет место полная занятость. Если в данный момент нет полной занятости, то  $s(t) = 0$ .

Будем считать, что носителем стоимости являются деньги и что существует некоторый финансовый орган (который мы условно будем называть *банком*), управляющий денежными потоками, неизбежно возникающими (наряду с продуктовыми потоками) между отраслями. Для того чтобы произвести единицу продукта в единицу времени,  $i$ -я отрасль должна затратить на



технологические нужды и на оплату труда сумму в

$$K_i(t) = \sum_{j=1}^n p_j(t) a_{ji}(t) + s(t) a_{oi}(t)$$

денежных единиц, которую она получает в кредит от банка. После реализации продукции отрасль вносит в банк сумму

$$r_i(t) + K_i(t).$$

Величину  $r_i(t)$ , которую мы раньше называли прибылью отрасли на единицу продукта, мы можем теперь считать процентом за кредит. Некоторые авторы называют  $r_i(t)$  *платой отрасли за дефицитные фонды*. Мощность  $V_i$  называется *дефицитной*, если она в заданный момент времени  $t$  загружена полностью,  $V_i(t) = x_i(t)$ . Из (43) следует, что если плата отрасли за фонды отлична от нуля, то мощность  $V_i$  дефицитна. Опять-таки, в силу (43), плата за единицу фондов совпадает с прибылью на единицу выпуска отрасли.

Из результатов гл. V следует, что если  $x(t)$ ,  $V(t)$  и  $c(t)$  допустимы, т. е. удовлетворяют ограничениям (12)—(14), и  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $r(t)$ ,  $s(t)$  допустимы, т. е. удовлетворяют ограничениям (32)—(34), и если, кроме того, выполнены условия (40), то  $x(t)$ ,  $V(t)$ ,  $c(t)$ ,  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $r(t)$ ,  $s(t)$  оптимальны.

Заметим, что оптимальные цены определяются неоднозначно. Умножим потребительские цены на постоянный множитель  $\rho > 0$ . От этого функционал (10) также умножится на этот множитель и оптималь задачи Л останется той же самой. Если теперь  $p$ ,  $q$ ,  $r(t)$ ,  $s(t)$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  умножить на  $\rho$ , то соотношения (32)—(34) останутся в силе и условия оптимальности (40) также будут выполняться. Таким образом, оптимальные цены допускают умножение на постоянный множитель. Этим постоянным множителем можно распорядиться для нормировки цен. Например, можно принять среднюю за период  $[0, T]$  цену некоторого эталонного продукта (золота) равной единице.

Заметим еще, что вектор

$$a_0(t) \dot{A}(t) = a_0(t) [E - A(t)]^{-1}$$

есть вектор суммарных затрат труда на производство единичного набора продуктов. Из формулы (29) тогда следует, что цена линейно зависит от суммарных затрат труда на производство единицы продукта, что согласуется с трудовой теорией стоимости.

При желании можно считать  $s(t)$  не истинной заработной платой, а превышением заработной платой некоторого нижнего уровня  $s_0(t)$ . То же замечание относится и к плате за фонды.

Дадим теперь экономическое истолкование функций Понтрягина задач Л и Л'. Вспоминая формулы (58) гл. V после замен строк на столбцы и используя формулы (22) и (30), получаем

$$\mathcal{H}(q, u, c) = (q\tilde{B} + b)u^* = [q(E, 0) + (0, p_0)] \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix} = qu + p_0c, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}(V, p, s, r) &= v[b^* + \tilde{c}V] = \\ &= (r, s) \left[ \begin{pmatrix} -Ac_0 \\ \pi - a_0Ac_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} V \right] = s\pi(t) + rV - pc_0(t), \quad (46) \\ p &= pA(t) + r + su_0(t). \end{aligned}$$

Пусть выполнены предположения 1, 2, 3. Тогда на оптимали должны выполняться условия (40), которые эквивалентны принципу максимума Понтрягина

$$\max \mathcal{H}(q(t), u, c) = \mathcal{H}(q(t), u(t), c(t)), \quad (47)$$

где max берется при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} x &= A(t)x + B(t)u + c, \\ 0 &\leq x \leq V(t), \quad u \geq 0, \quad c \geq c_0(t), \\ a_0(t)x &\leq \pi(t). \end{aligned} \quad (48)$$

Кроме того,

$$\min \tilde{\mathcal{H}}(V(t), p, s, r) = \tilde{\mathcal{H}}(V(t), p(t), s(t), r(t)), \quad (49)$$

где min берется при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} p &= pA(t) + r + sa_0(t), \quad r \geq 0, \quad s \geq 0, \\ pB(t) &\geq q(t), \quad p \geq p_0(t). \end{aligned} \quad (50)$$

Если воспользоваться условиями дополняющей нежесткости (40), то

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(q(t), u(t), c(t)) &= \\ &= q(t) \dot{V}(t) + p_0(t) c(t) = p(t) B(t) \dot{V}(t) + p(t) c(t) = \\ &= p(t) [x(t) - A(t) x(t)] = E(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(V(t), p(t), s(t), r(t)) &= \\ &= s(t) \pi(t) + r(t) V(t) - p(t) c_0(t) = \\ &= s(t) a_0(t) x(t) + r(t) x(t) - p(t) c(t) = \\ &= [p(t) - p(t) A(t)] x(t) - p(t) c(t) = \\ &= p(t) [x(t) - A(t) x(t) - c(t)] = I(t).\end{aligned}$$

Функция  $E(t)$  есть национальный доход, а  $I(t)$  — общая сумма капиталовложений (или инвестиций) в народное хозяйство в момент времени  $t$ .

Для того чтобы управлять экономикой, нужно в каждый момент времени  $t$  задавать прирост мощностей  $u$  и потребление  $c$ , удовлетворяющие ограничениям (48). При этом функция Понтрягина (45) есть сумма стоимости мощности  $u$  в оптимальных ценах и потребления  $c$  в потребительских ценах. Максимум этой функции при ограничениях (48) есть национальный доход в оптимальных ценах. Можно управлять экономикой, задавая в каждый момент времени заработную плату  $s$  и плату за фонды  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Тогда функция  $\mathcal{H}$  есть сумма заработной платы (в условиях полной занятости), стоимости потребления на нижнем уровне (взятой со знаком минус) и суммарной платы за фонды. Минимум этой функции при ограничениях (50) равен общей сумме капиталовложений в оптимальных ценах.

## § 7. Модель леонтьевского типа с запасами ( $\pi$ -модель)

Рассмотрим некоторое усложнение модели, рассмотренной в предыдущих параграфах. Будем дополнительно предполагать, что в процессе производства могут образовываться запасы. Количество запаса  $i$ -го

продукта в момент времени  $t$  обозначим через  $\xi_i(t)$ . Будем предполагать, что выполнены следующие ограничения:

$$\xi_i(t) \geq 0, \quad \dot{\xi}_i(t) \geq -\delta(t), \quad \delta(t) \geq 0. \quad (51)$$

Условия (51) означают, что запас неотрицателен и не может быть израсходован мгновенно. Усложним также ограничения на труд. Будем считать их двухсторонними:

$$0 \leq \pi_1(t) \leq a_0(t) x(t) \leq \pi_2(t). \quad (52)$$

Ограничения (52) означают, что трудовые ресурсы ограничены и что занятость не должна опускаться ниже определенного уровня.

Сформулируем теперь задачу, к которой мы приходим.

*п-задача. Найти максимум линейного функционала (10) при следующих ограничениях:*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\dot{V}(t) + \dot{\xi}(t) + c(t), \quad (53)$$

$$0 \leq x(t) \leq V(t), \quad \pi_1(t) \leq a_0(t)x(t) \leq \pi_2(t), \quad (54)$$

$$\dot{\xi}(t) \geq -\delta(t), \quad \dot{V}(t) \geq 0, \quad \xi(t) \geq 0,$$

$$V(0) = V_0, \quad \xi(0) = \xi_0, \quad V_0, \xi_0 \geq 0,$$

$$L_1 \xi(T) + G_1 V(T) \leq a_1, \quad G_2 V(T) + L_2 \xi(T) = a_2.$$

Для того чтобы свести п-задачу к стандартной задаче оптимального управления, введем обозначения

$$\dot{V}(t) = u(t), \quad \dot{\xi}(t) = v(t) - \delta(t),$$

$$c(t) = c_0(t) + w(t).$$

Функции  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$  будем считать управлениями и брать их в соответствующих классах измеримых и почти всюду ограниченных функций. В силу ограничений (54)

$$u(t) \geq 0, \quad v(t) \geq 0, \quad w(t) \geq 0.$$

Проводя те же рассуждения, что и в § 3, можем записать п-задачу в стандартном виде с использованием блочных матриц:

**п-задача.** Найти управления  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$  в классе ограниченных измеримых вектор-функций, дающие максимум линейному функционалу

$$\varphi = \int_0^T (0, 0, p_0) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} dt, \quad (55)$$

при следующих ограничениях:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\delta(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \geq 0, \quad (56)$$

$$\begin{aligned} - \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{A}B & \tilde{A} & \tilde{A} \\ a_0 \tilde{A}B & a_0 \tilde{A} & a_0 \tilde{A} \\ -a_0 \tilde{A}B & -a_0 \tilde{A} & -a_0 \tilde{A} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \leq \\ \leq \begin{pmatrix} \tilde{A}(\delta - c_0) \\ \pi_2 + a_0 \tilde{A}(\delta - c_0) \\ -\pi_1 - a_0 \tilde{A}(\delta - c_0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V(0) \\ \xi(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} V_0 \\ \xi_0 \end{pmatrix}, \quad (G_1, L_1) \begin{pmatrix} V(T) \\ \xi(T) \end{pmatrix} = a_1, \\ (G_2, L_2) \begin{pmatrix} \bar{V}(T) \\ \xi(T) \end{pmatrix} &= a_2. \quad (58) \end{aligned}$$

Запишем теперь в блочном виде двойственную задачу:

**п'-задача.** Найти управления  $r(t)$ ,  $s(t)$ ,  $l(t)$ ,  $m(t)$  в классе суммируемых вектор-функций, дающие минимум линейному функционалу

$$\begin{aligned} \psi &= \int_0^T (q(t), Q(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta(t) \end{pmatrix} dt + \\ &+ \int_0^T (r, s, l, m) \begin{pmatrix} \tilde{A}(\delta - c_0) \\ \pi_2 + a_0 \tilde{A}(\delta - c_0) \\ -\pi_1 - a_0 \tilde{A}(\delta - c_0) \\ 0 \end{pmatrix} dt + \\ &+ (q(0), Q(0)) \begin{pmatrix} V_0 \\ \xi_0 \end{pmatrix} + \xi a_1 + \eta a_2, \end{aligned}$$

при следующих ограничениях:

$$-\frac{d}{dt}(q(t), Q(t)) = (r, s, l, m) \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad (r, s, l, m) \geq 0,$$

$$-(q, Q) \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+(r, s, l, m) \begin{pmatrix} \tilde{A}B & \tilde{A} & \tilde{A} \\ a_0 \tilde{A}B & a_0 \tilde{A} & a_0 \tilde{A} \\ -a_0 \tilde{A}B & -a_0 \tilde{A} & -a_0 \tilde{A} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_0 \end{pmatrix},$$

$$q(T) = -\zeta G_1 - \eta G_2, \quad Q(T) = -\zeta L_1 - \eta L_2.$$

Введем обозначение

$$p(t) = r\tilde{A} + sa_0\tilde{A} - la_0\tilde{A}.$$

Тогда

$$p(t) = p(t)A(t) + r(t) + [s(t) - l(t)]a_0(t), \quad (59)$$

и  $\pi'$ -задачу можно переформулировать в следующем виде:

**$\pi'$ -задача.** Найти управления  $r(t)$ ,  $s(t)$ ,  $l(t)$ ,  $m(t)$ , дающие минимум линейному функционалу

$$\Psi = q(0)V_0 + Q(0)\xi_0 + \zeta a_1 + \eta a_2 - \int_0^T Q(t)\delta(t)dt +$$

$$+ \int_0^T p(t)[\delta(t) - c_0(t)]dt + \int_0^T s(t)\pi_2(t)dt -$$

$$- \int_0^T l(t)\pi_1(t)dt, \quad (60)$$

при следующих ограничениях:

$$p(t) = p(t)A(t) + r(t) + [s(t) - l(t)]a_0(t),$$

$$-\dot{q}(t) = r(t), \quad -\dot{Q}(t) = m(t), \quad r(t) \geq 0,$$

$$s(t) \geq 0, \quad m(t) \geq 0, \quad l(t) \geq 0,$$

$$q(t) \leq p(t)B(t), \quad p(t) \geq p_c(t),$$

$$Q(t) \leq p(t),$$

$$q(T) = -\zeta G_1 - \eta G_2, \quad Q(T) = -\zeta L_1 - \eta L_2. \quad (61)$$

Дадим экономическую интерпретацию  $\pi'$ -задачи. Как и для задачи  $\Pi'$ ,  $p(t)$  — вектор цен,  $s(t)$  — заработная плата,  $r_i(t)$  — прибыль на единицу продукта в  $i$ -й отрасли,  $q_i(t)$  — цена мощности,  $Q_i(t)$  — цена запаса. Числам  $l_i(t)$  можно придать следующий смысл: это выплаты отраслям от финансового органа за поддержание занятости на уровне, превышающем  $\pi_1$ . Числа  $m_i(t)$  характеризуют скорость обесценивания запасов. Числа  $\xi_i$  и  $\eta_i$  характеризуют финальные цены мощностей и запасов. Если нет ограничений при  $t=T$ , то финальные цены мощностей и запасов равны нулю.

Переходим к анализу необходимых условий оптимальности. Как и в § 5, сделаем следующие предположения.

Предположение 1. Следующая задача:

$$\begin{aligned}x_0(t) &= A(t)x_0(t) + c_0(t), \\ 0 \leq x_0(t) &\leq V_0 - \varepsilon e, \quad \varepsilon > 0, \quad e = (1, \dots, 1), \\ \pi_1(t) + \varepsilon &\leq a_0(t)x_0(t) \leq \pi_2(t) - \varepsilon, \\ \dot{\xi}_0(t) &= -\delta(t), \quad \xi_0(t) > \varepsilon e\end{aligned}$$

имеет решение.

Предположение 1 означает, что начальные мощности  $V_0$  могут обеспечить потребление на нижнем уровне в течение планового периода при недозагрузке мощностей и неполной занятости. Начальные запасы  $\xi_0$  таковы, что

$$\xi_0 > \int_0^T \delta(t) dt. \quad (62)$$

Неравенство (62) означает, что начальные запасы не могут быть израсходованы в течение планового периода, если их даже расходовать с максимально возможной скоростью. Это предположение не вполне естественно, но отказ от него привел бы к тому, что в ценах на запасы могут появиться скачки.

Предположение 2. На конце  $t=T$  нет ограничения равенства, и существуют такие управления  $y$ ,

$\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$ , что

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}} &= \tilde{u}, & \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} + \tilde{v} + c_0 + \tilde{w}, \\ 0 &\leq \tilde{x} \leq \tilde{V}, & \pi_1 &\leq a_0\tilde{x} \leq \pi_2, & \dot{\tilde{\xi}} &= \tilde{w}, \\ \tilde{V}(0) &= V_0, & \tilde{\xi}(0) &= \xi_0, & \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} &\geq 0, \\ L_1\tilde{\xi}(T) &+ G_1\tilde{V}(T) &\leq a_1 - \varepsilon e.\end{aligned}$$

Предположение 2 означает, что финальное ограничение  $L_1\tilde{\xi}(T) + G_1\tilde{V}(T) \leq a_1$  не очень жесткое.

Предположение 3. Матрицы  $L_1, G_1 \leq 0$ .

Это предположение всегда выполнено, если ограничения на конце имеют вид  $\tilde{\xi}(T) \geq \xi_T, V(T) \geq V_T$ .

Если выполнены предположения 1—3, то задача  $\pi$  и задача  $\pi'$  таковы, что для них будут выполнены следующие необходимые условия оптимальности: почти всюду

$$\begin{aligned}[q(t) - p(t)B(t)]_i \dot{V}_i(t) &= 0, \\ [Q_i(t) - p_i(t)][\dot{\xi}_i(t) + \delta_i(t)] &= 0, \\ [p_i(t) - p_{i0}(t)][c_i(t) - c_{i0}(t)] &= 0 \\ \dot{q}_i[V_i - x_i] &= 0, \\ s(t)[\pi_2(t) - a_0(t)x(t)] &= 0, \\ l(t)[a_0(t)x(t) - \pi_1(t)] &= 0, \\ \zeta_j[L_1\tilde{\xi}(T) + G_1V(T) - a_1]_j &= 0, \\ i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, r.\end{aligned}\tag{63}$$

Экономическая интерпретация условий (63) аналогична соответствующей интерпретации для задачи Л. Заметим, что если цена на запас  $i$ -го продукта меньше цены  $p_i(t)$ , то запас этого продукта расходуется с максимальной скоростью. Если скорость расхода запаса меньше максимальной, то цена запаса  $i$ -го продукта равна цене продукта. Если уровень занятости выше  $\pi_1(t)$ , то плата  $l(t)$  равна нулю. Если плата  $l(t)$  отлична от нуля, то занятость находится на нижнем уровне  $\pi_1(t)$ .

Можно показать, что как и для задачи Л, из (63) следует принцип максимума Понтрягина для задачи  $\pi'$ .



## § 8. Дискретные задачи планирования на бесконечном интервале времени

При планировании на конечном интервале времени возникает хорошо известная трудность. Добиваясь выполнения поставленных целей на отрезке планирования  $[0, T]$ , мы не заботимся о том, что будет в году  $T+1$ . Но для экономической системы это далеко не безразлично. Для того чтобы преодолеть эту трудность, приходится рассматривать бесконечный отрезок планирования.

Рассмотрим динамическую модель Леонтьева в дискретном случае, но на бесконечном интервале времени. Будем через  $x_t$  обозначать вектор выпуска, а через  $V_t$  — вектор производственных мощностей в году  $t$ ,  $c_t$  — вектор потребления. Если  $A_t$  — технологическая матрица,  $B_t$  — матрица фондоемкостей,  $a_t^0$  — вектор норм затрат труда на производство единичного набора продуктов в году  $t$ , то по аналогии с § 2 мы можем функционирование экономики описать следующей системой уравнений и неравенств:

$$\begin{aligned} x_t &= A_t x_t + B_t [V_{t+1} - V_t] + c_t, \\ 0 \leq x_t \leq V_t, \quad V_{t+1} - V_t &\geq 0, \quad V_0 = \alpha, \\ c_t &\geq c_t^0, \quad a_t^0 x_t \leq \pi_t. \end{aligned} \quad (64)$$

Положим

$$V_{t+1} - V_t = u_t, \quad c_t - c_t^0 = w_t.$$

Будем считать  $u_t$  и  $w_t$  управлениями. Пусть существует число  $q > 1$  такое, что

$$q^{-t} c_t^0 = \tilde{c}_t^0 \leq \alpha, \quad q^{-t} \pi_t = \tilde{\pi}_t \leq \alpha, \quad t = 0, 1, \dots \quad (65)$$

Полагая

$$V_t = q^t \tilde{V}_t, \quad x_t = q^t \tilde{x}_t, \quad w_t = q^t \tilde{w}_t, \quad (66)$$

можем (64) представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{t+1} &= \frac{1}{q} \tilde{V}_t + \frac{1}{q} \tilde{u}_t, \\ 0 \leq \tilde{x}_t \leq \tilde{V}_t, \quad \tilde{x}_t &= A_t \tilde{x}_t + B_t \tilde{u}_t + \tilde{w}_t + \tilde{c}_t^0, \\ \tilde{c}_t &\geq \tilde{c}_t^0, \quad a_t^0 \tilde{x}_t \leq \tilde{\pi}_t. \end{aligned} \quad (67)$$

Будем управления  $\tilde{u}_t$  и  $\tilde{w}_t$  брать в классе ограниченных последовательностей. Тогда  $u_t$  и  $w_t$  будут последовательностями, растущими не быстрее геометрической прогрессии со знаменателем  $q > 1$ . Будем считать, что матрицы  $A_t$  и  $B_t$  ограничены, что находится в согласии с экономическим смыслом этих матриц. Будем также предполагать, что матрица

$$A_t = (E - A_t)^{-1} = E + A_t + \dots + A_t^n + \dots$$

ограничена. Это предположение также естественно, так как с течением времени коэффициенты технологической матрицы в силу технического прогресса должны убывать.

Будем считать целью производства максимизацию линейного функционала

$$\Phi = \sum_{t=0}^{\infty} \tilde{p}_t^0 \tilde{w}_t, \quad \tilde{p}_t^0 \geq 0, \quad \sum_{t=0}^{\infty} \tilde{p}_t^0 < +\infty,$$

или, если вернуться к управлениям  $w_t$ , то максимизацию линейного функционала

$$\Phi = \sum_{t=0}^{\infty} p_t^0 w_t = \sum_{t=0}^{\infty} p_t^0 (c_t - c_t^0), \quad \sum_{t=0}^{\infty} q^t p_t^0 < +\infty, \quad p_t^0 \geq 0.$$

Можно также рассматривать вогнутый функционал

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t^0 U(\tilde{w}_t),$$

где  $U(c)$  — вогнутая функция полезности.

Задача максимизации линейного функционала (68) при ограничениях (67) может быть приведена к частному случаю задачи, рассмотренной в § 2 гл. VII. Пользуясь блочными матрицами, приходим к следующей формулировке:

**Задача Л.** Найти максимум линейного функционала

$$\Phi = \sum_{t=0}^{\infty} (0, \tilde{p}_t^0) \begin{pmatrix} \tilde{u}_t \\ \tilde{w}_t \end{pmatrix}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{t+1} &= \frac{1}{q} \hat{V}_t + \left( \frac{1}{q} E, 0 \right) \begin{pmatrix} \tilde{u}_t \\ \tilde{w}_t \end{pmatrix}, \\ - \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} V_t + \begin{pmatrix} \tilde{A}_t B_t & \tilde{A}_t \\ a_0 \tilde{A}_t B_t & a_0 \tilde{A}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_t \\ \tilde{w}_t \end{pmatrix} &\leq \begin{pmatrix} -\tilde{A}_t \tilde{c}_t^0 \\ \tilde{\pi}_t - a_0 \tilde{A}_t \tilde{c}_t^0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{u}_t &\geq 0, \quad \tilde{w}_t \geq 0, \quad \{u_t\}, \{w_t\} \in l_n^\infty. \end{aligned}$$

Пользуясь результатами § 2 гл. VII, можем двойственную задачу записать в следующем виде:

Задача Л'. Найти минимум линейного функционала

$$\tilde{\Psi} = \tilde{Q}_0 \alpha + \sum_{t=0}^{\infty} (r_t, s_t) \begin{pmatrix} -\tilde{A}_t \tilde{c}_t^0 \\ \tilde{\pi}_t - \tilde{a}_t^0 \tilde{A}_t \tilde{c}_t^0 \end{pmatrix}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_t &= \frac{1}{q} \tilde{Q}_{t+1} + (r_t, s_t) \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}, \\ - \left( \frac{1}{q} E, 0 \right) \tilde{Q}_{t+1} + (r_t, s_t) \begin{pmatrix} \tilde{A}_t B_t & \tilde{A}_t \\ a_0 \tilde{A}_t B_t & a_0 \tilde{A}_t \end{pmatrix} &\geq \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{p}_t^0 \end{pmatrix}, \\ t &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Если положить

$$\tilde{p}_t = \tilde{r}_t A_t + \tilde{s}_t a_t^0 \tilde{A}_t,$$

то двойственная задача может быть записана в следующем виде:

Задача Л'. Найти минимум линейного функционала

$$\Psi = \tilde{Q}_0 \alpha + \sum_{t=0}^{\infty} \tilde{s}_t \tilde{\pi}_t - \sum_{t=0}^{\infty} \tilde{p}_t \tilde{c}_t^0 \quad (68)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_t &= \tilde{p}_t A_t + \tilde{r}_t + \tilde{s}_t a_t^0, \\ \tilde{Q}_t &= \frac{1}{q} \tilde{Q}_{t+1} + \tilde{r}_t, \\ \frac{1}{q} \tilde{Q}_{t+1} &\leq \tilde{p}_t B_t, \quad \tilde{p}_t \geq \tilde{p}_t^0, \\ \{\tilde{r}_t\} &\in l_n^1, \quad \{\tilde{s}_t\} \in l^1, \quad \tilde{r}_t, \tilde{s}_t \geq 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Заметим, что из результатов § 2 гл. VII следует, что  $\{\tilde{Q}_t\} \in l'_n$ .

Положим теперь

$$\tilde{Q}_t = q^t Q_t, \quad \tilde{r}_t = q^t r_t, \quad \tilde{s}_t = q^t s_t.$$

Тогда задачу Л' можно переписать в следующем виде:

**Задача Л'.** Найти минимум линейного функционала

$$\psi = Q_0 \alpha + \sum_{t=0}^{\infty} s_t \pi_t - \sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^0 \quad (70)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} p_t &= p_t A_t + r_t + s_t a_t^0, \\ Q_t &= Q_{t+1} + r_t, \quad Q_{t+1} \leq p_t B_t, \quad p_t \geq p_t^0, \\ \sum_{t=0}^{\infty} |r_t| q^t &< +\infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} s_t q^t < +\infty. \end{aligned} \quad (71)$$

Двойственная задача Л допускает экономическую интерпретацию, аналогичную интерпретации § 4. Будем  $p_t$  называть *вектором цен*, а  $s_t$  — *заработной платой*. Тогда первое из уравнений (71) определяет  $r_t$  как вектор прибылей отраслей на единицу произведенного продукта. Вектор  $Q_t$  будем называть *вектором цен мощностей*. Тогда второе из уравнений (71) позволяет интерпретировать  $r_t$  еще и как плату за единицу мощности. Цена мощности в момент  $t$  равна цене мощности в момент  $t+1$ , сложенной с платой за единицу мощности в году  $t$ . Неравенство  $Q_{t+1} \leq p_t B_t$  означает, что цена мощности в году  $t+1$  не превышает затрат на строительство этой мощности в году  $t$ . Цена  $p_t$  всегда превышает потребительскую цену  $p_t^0$ .

Прежде чем переходить к условиям оптимальности, выясним, какой смысл имеет условие Слейтера для задачи Л. Будем говорить, что по ограничениям  $x_t \leq V_t$  и  $a_t^0 x_t \leq \pi_t$  выполнено условие Слейтера, если найдутся управления  $\{\bar{u}_t\}$  и  $\{\bar{w}_t\}$  такие, что

$$\begin{aligned} \bar{x}_t &= A_t \bar{x}_t + B_t \bar{u}_t + c_t^0 + \bar{w}_t, \quad \bar{V}_{t+1} - \bar{V}_t = \bar{u}_t, \quad \bar{V}_0 = \alpha, \\ 0 &\leq \bar{x}(t) \leq \bar{V}_t - \varepsilon q^t e, \quad \varepsilon > 0, \quad e = (1, \dots, 1), \\ a_t^0 \bar{x}_t &\leq \pi_t - \varepsilon q^t, \quad \bar{u}_t, \bar{w}_t \geq 0. \end{aligned}$$

Из результатов гл. VII следует, что для задач Л и Л' должны быть в случае выполнения условия Слейтера справедливы условия дополняющей нежесткости, которые и дают необходимые условия оптимальности

$$\begin{aligned} [p_t B_t - Q_{t+1}] u_t^i &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ (p_t^i - p_t^0)(c_t^i - c_t^0) &= 0, \\ r_t^i [V_t^i - x_t^i] &= 0, \quad s_t [\pi_t - a_t^0 x_t] = 0, \\ t &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (72)$$

Интерпретация условий оптимальности такая же, как и в непрерывном случае. Если в году  $t$  была построена новая мощность  $u_t^i$ , то ее цена в году  $t+1$  равна расходам на строительство единицы мощности. Если же  $Q_{t+1}$  меньше расходов на строительство единичной мощности, то мощность в году  $t$  не строится. Если цена продукта превышает потребительскую цену, то потребление этого продукта находится в году  $t$  на нижнем уровне. Если потребление  $i$ -го продукта превышает нижний уровень, то цена этого продукта равна потребительской его цене. Если плата за фонды отлична от нуля, то соответствующая мощность загружена полностью. Если какая-то мощность недозагружена, то плата за фонды равна нулю. Если — неполная занятость, то зарплата равна нулю; если зарплата отлична от нуля, то имеет место полная занятость.

Как следует из результатов гл. VII, условия (72) достаточны для оптимальности, если  $x_t$ ,  $V_t$ ,  $u_t$ ,  $c_t$ ,  $p_t$ ,  $Q_t$ ,  $r_t$ ,  $s_t$  допустимы.

Если ввести функции Понтрягина

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(u, c, Q_{t+1}) &= Q_{t+1}u + p_t^0 c, \\ \mathcal{H}(s, r, V_t) &= s\pi_t + rV_t - pc_t^0, \\ p &= pA_t + r + sa_t^0, \end{aligned} \quad (73)$$

то, как следует из результатов гл. VII, условия (72) эквивалентны тому, что

$$\max \mathcal{H}(u, c, Q_{t+1}) = \mathcal{H}(u_t, c_t, Q_{t+1}),$$

где  $\max$  берется при ограничениях

$$x = A_t x + B_t u + c, \quad x \leq V_t,$$

$$a_t^0 x \leq \pi_t, \quad u \geq 0, \quad c \geq c_{0t}.$$

Аналогично

$$\min \mathcal{K}(s_t, r_t, V_t) = \mathcal{K}(s_t, r_t, V_t),$$

где  $\min$  берется при ограничениях

$$p = pA_t + r + sa_t^0, \quad pB_t \geq Q_{t+1},$$

$$p \geq p_t^0, \quad r \geq 0, \quad s \geq 0.$$

Заметим, что если вместо линейного функционала взять вогнутый

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t^0 U_t(w_t),$$

где  $U_t(w)$  — вогнутая функция полезности,  $U(0) = 0$ , то все результаты этого параграфа остаются в силе, если только во всех формулах заменить  $p_t^0$  на  $p_t^0 \partial U_t(w_t) / \partial w$ . При этом нужно предполагать, что последовательность функций

$$\psi_t(w) = \frac{\partial U_t(w)}{\partial w}, \quad t = 0, 1, \dots,$$

равномерно ограничена и равномерно непрерывна на любом шаре в пространстве  $R^n$ .

## § 9. Сбалансированный рост

Как мы уже говорили в предыдущем параграфе, условия (72) достаточны для оптимальности. Пусть для некоторой траектории

$$x_{t+1} = p_t B_t, \quad p_t = p_t^0, \quad V_t = x_t, \quad \pi_t = a_t^0 x_t. \quad (74)$$

Тогда условия (72) выполнены и  $x_t, u_t, c_t, p_t, Q_t, r_t, s_t$  будут оптимальными. Используя условия (74), упростим систему (71):

$$p_t = p_t A_t + p_t B_t - p_{t+1} B_{t+1} + s_t a_t^0. \quad (75)$$

Система (64) тоже упрощается:

$$\begin{aligned}x_t &= A_t x_t + B_t (x_{t+1} - x_t) + c_t, \\x_{t+1} - x_t &\geq 0, \quad x_0 = \alpha, \\a_t^0 x_t &= \pi_t, \quad c_t \geq 0;\end{aligned}\tag{76}$$

без ограничения общности считаем, что  $c_t^0 = 0$ . Будем искать решение системы (76) в виде

$$x_t = x_0 \lambda^t, \quad c_t = c_0 \lambda^t, \tag{77}$$

предполагая, что матрицы  $A_t$ ,  $B_t$  и вектор  $a_t$  не зависят от  $t$ , а

$$\pi_t = \pi \lambda^t, \quad \lambda > 1.$$

Число  $\lambda$  называется *темпом роста* рабочей силы, а  $\rho = \lambda - 1$  — *нормой роста*. Решение вида (77) будем называть *лучом сбалансированного роста*. На таком луче производство растет с темпом, диктуемым темпом роста рабочей силы. Подставляя (77) в (76), получаем

$$x_0 = A x_0 + B \rho x_0 + c_0, \quad x_0 = \alpha, \quad a^0 x_0 = \pi, \tag{78}$$

откуда

$$(E - A - \rho B) \alpha = c_0, \quad a^0 \alpha = \pi.$$

Так как матрица  $A$  продуктивна, то  $E - A$  — строго положительно обратима. Поэтому при достаточно малых  $\rho$  и матрица  $E - A - \rho B$  также строго положительно обратима. Поэтому

$$\alpha = (E - A - \rho B)^{-1} c_0, \tag{79}$$

откуда получаем условие на начальное состояние  $\alpha = x_0$

$$a^0 (E - A - \rho B)^{-1} c_0 = \pi, \quad c_0 \geq 0. \tag{80}$$

Так как  $(E - A - \rho B)^{-1} > 0$ , то множество (80) будет ограниченным многогранником. Все лучи сбалансированного роста могут начинаться только из множества пар  $(\alpha, c_0)$ , удовлетворяющих условиям (79) и (80).

Решение системы (75) будем при  $A_t = A$ ,  $B_t = B$  искать в виде

$$p_t = p_0 \mu^t, \quad s_t = s_0 \mu^t, \quad \lambda \mu < 1, \quad 1 - \mu = \rho',$$

откуда

$$p_0 = p_0 A + p_0 B \rho' + s_0 a_0,$$

$$p_0 (E - A - \rho' B) = s_0 a_0,$$

$$p_0 = s_0 a_0 (E - A - \rho' B)^{-1},$$

где  $\rho'$  — темп падения цен. Если  $\rho' = \rho$ , то существует такой луч сбалансированного роста, на котором темп роста производства (совпадающий с темпом роста народонаселения) совпадает с темпом падения цен (нормой процента).

С лучами сбалансированного роста тесно связаны так называемые *магистральные свойства* оптимальных траекторий. Мы не будем тут заниматься изучением этого вопроса.



# КОММЕНТАРИИ

## ГЛАВА I

Основные определения даны по учебникам Люстерника и Соболева [1], Канторовича и Акилова [1], там же можно найти и доказательства соответствующих теорем. Доказательства теорем § 4 можно найти в монографии Данфорда и Шварца [1]. Понятие замыкания по мере было введено в работах Дубовицкого и Милютина [1]—[2]. Изложение § 7 следует работе Ю. Бродского [1].

## ГЛАВА II

Изложение, в основном, по статьям Крейна и Рутмана [1] и Крейна и Шмульяна [1].

§ 1. Вместо термина Крейна «линейная полугруппа» мы предпочитаем термин «выпуклый конус». В статье Крейна и Рутмана от конуса требуется замкнутость. Требуется также, чтобы из  $\pm x \in \mathcal{K}$  следовало бы  $x = 0$ . Мы в этом случае говорим об остром конусе. Такая терминология более распространена в литературе, посвященной вопросам программирования и математической экономики.

§ 2. Все доказательства этого параграфа воспроизводят с небольшими изменениями соответствующие доказательства статьи Крейна и Рутмана [1].

§ 3. Доказательство теоремы 8 заимствовано из книги Данфорда и Шварца [1]. Доказательства лемм 1 и 2 заимствованы из книги Иоффе и Тихомирова [1].

§ 4. Изложение — по статье Крейна и Шмульяна [1]. Для простоты некоторые результаты доказаны в менее общих предположениях, чем в [1].

§ 5. Теоремы этого параграфа можно найти во многих монографиях, например в книге Эрроу, Гурвица, Удзавы [1].

## ГЛАВА III

Изложение, в основном, по монографии Эрроу, Гурвица, Удзавы [1].

§ 1. Теорема 1 заимствована из книги Красносельского [1]. Там же введено понятие строго положительного линейного функционала. Теорема 4 доказана в книге Гирсанова [1]. Заметим, что теоремы этого параграфа оказываются малоэффективными при исследовании задач оптимального управления с непрерывным временем, но иногда полезны при исследовании задач с дискретным временем на бесконечном интервале времени.

§ 2. Теория линейных неравенств изложена по книге Эрроу, Гурвица, Удзавы [1]. Теоремы в предельной форме 10 и 11 являются обобщениями соответствующих теорем книги [1]. Они оказываются весьма полезными для теории задач оптимального управления.

§ 3. Основное изложение в стиле книги Эрроу, Гурвиц, Удзава [1]. Обобщение теории двойственности, полученное в этом параграфе, оказывается полезным для задач оптимального управления. Еще более далекие обобщения теории двойственности можно найти в монографии Гольштейна [1].

§ 4. При исследовании задач линейного программирования в конечномерном пространстве условие Слейтера не играет роли. В бесконечномерном случае оно становится существенным, что показывают теоремы этого параграфа.

§ 5. Показывается, что учет ограничений равенств не приводит к существенным осложнениям. Естественно возникает условие невырожденности ограничений типа равенств.

## ГЛАВА IV

В главе IV теория выпуклого программирования развивается в гладком случае. Это позволяет просто сводить задачу получения необходимых условий оптимальности к линейному программированию.

§ 1. Наиболее полное изложение теории выпуклых функций для конечномерного случая см. в книге Рокафеллера [1], в бесконечномерном случае — в книге Иоффе и Тихомирова [1].

§ 2. Задача вогнутого программирования рассматривается в пространстве, сопряженном пространству Банаха. Тогда при некоторых ограничениях необходимые условия оптимальности можно сформулировать в терминах пространства  $E$ , а не второго сопряженного пространства  $E^{**}$ . Такой подход интересен для

приложений, рассматриваемых в этой книге. Отказ от дифференцируемости вызывает известные трудности, так как нам неизвестны соответствующие теоремы отделимости. Общая теория двойственности изложена у Иоффе и Тихомирова [1] и в монографии Гольштейна [1]. Изложение § 2 следует статье автора [2].

§ 4. Если рассматривать задачу в пространстве  $E^*$ , а двойственную — в пространстве  $E^{**}$ , то теорема Куна — Таккера может быть доказана и без требования дифференцируемости. См. Эрроу, Гурвиц, Удзава [1].

§ 5. Находятся необходимые условия экстремума в невыпуклом гладком случае. Исходная экстремальная задача в пространстве  $E^*$ . Необходимые условия оптимальности находятся в терминах пространства  $E$ .

## ГЛАВА V

§ 1. Двойственные задачи оптимального управления в дискретном случае сформулированы и исследованы в работе Иванилова и Пропося [1], в непрерывном случае они сформулированы в работе Кривенкова [1] (для простейшего случая). Изложение в главе V следует работе автора [1].

§ 4. Лемма 3, принадлежащая Дубовицкому и Милютину, оказывается весьма полезной при исследовании вопроса о замкнутости конуса  $\mathcal{K}_T$ . Она позволяет избавиться от ограничений, которые накладывались на матрицу  $D$  в статье автора [1].

§ 5. Как показал в своей лекции А. Я. Дубовицкий, теорема 6 может быть выведена из общих условий оптимальности, полученных Дубовицким и Милютиным.

§§ 8, 9. Рассматривается общий случай линейной задачи, когда не выполнены условия, гарантирующие замкнутость конуса  $\mathcal{K}_T$ . В работе Дубовицкого и Милютина теоремы, подобные теореме 7, получаются при помощи так называемой «аппроксимативной теоремы», которая позволяет находить условие непересечения конусов в пространстве  $E^*$  (уравнение Эйлера) не в терминах пространства  $E^{**}$ , а через некоторые последовательности элементов пространства  $E$ . В настоящей книге вместо уравнения Эйлера используется теория двойственности в линейном программировании. Теория двойственности также используется для получения описания возникающих в необходимых условиях мер через позитивную меру, сосредоточенную на множестве фазовых точек траектории. В работе Дубовицкого и Милютина это описание получено другим способом.

## ГЛАВА VI

Предполагается, что дифференциальное уравнение линейно относительно фазовой переменной. Если отказаться от этого предположения, задача перестает быть выпуклой. Изложение по статье автора [2].

## ГЛАВА VII

Рассматриваются дискретные задачи оптимального управления, линейные, но на бесконечном интервале времени. Изучение таких задач вызывает значительные трудности. Часть этих трудностей в настоящей книге снимается за счет того, что исходная задача приводится к задаче линейного программирования в пространстве, сопряженном пространству суммируемых последовательностей. Упрощения в формулировке принципа максимума для таких задач связаны с тем, что пространство суммируемых последовательностей само сопряжено пространству  $c_0$  последовательностей, стремящихся к нулю. В дискретном конечномерном случае аналогичные задачи рассматривались в работе Иванилова и Пропоия [1]. Здесь изложение по статье автора [3].

## Глава VIII

В дискретном случае на конечном интервале  $\pi$ -модель рассматривалась в работе Иванилова и Петрова [1]. Более простая модель леонтьевского типа без запасов и ограничений на труд рассматривалась в работе Дубовского [1]. Дискретные задачи планирования на бесконечном интервале рассматривались многими авторами, см., например, работу Вайцмана и Шмидта [1]. Особенно труден вопрос о существовании оптимальных планов. Он тесно связан с магистральными свойствами оптимальных траекторий. Вопрос о необходимых условиях оптимальности излагается по статье автора [3].

В некоторых работах вместо термина «оптимальные цены» употребляется термин «оптимальные оценки». Предлагаемая экономическая интерпретация двойственной задачи является лишь одной из возможных. Этой проблеме посвящено много работ экономистов. См., например, работу Канторовича [1].

## ЛИТЕРАТУРА

Бродский Ю. И.

1. Локальный принцип максимума для непрерывных и дискретных задач оптимального управления на бесконечном интервале времени, ВИНТИ, № 2562—76.

Вайцман М., Шмидт А. Г.

1. Принцип максимума для дискретных экономических процессов на бесконечном интервале времени, Кибернетика, 1971, № 5.

Гирсанов И. В.

1. Математическая теория экстремальных задач, Изд-во МГУ, 1970.

Гольштейн Е. Г.

1. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения, «Наука», 1971.

Данфорд Н., Шварц Дж.

1. Линейные операторы, т. 1, ИЛ, 1962.

Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.

1. Задачи на экстремум при наличии ограничений, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965 5, № 3.
2. Необходимые условия слабого экстремума в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями типа неравенства, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968 8, № 4.
3. Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления, «Наука», 1971.

Дубовский С. В., Дюкалов А. Н., Иванов Ю. Н., Токарев В. В., Уздемир А. П., Фаткин Ю. М.

1. О построении оптимального экономического плана, Автоматика и телемеханика, 1972, № 8.

Дюкалов А. Н., Илютович А. Е.

1. Асимптотические свойства оптимальных траекторий экономической динамики, Автоматика и телемеханика, 1973, № 3.

Иванилов Ю. П., Петров А. А.

1. Динамическая модель расширения и перестройки производства (п-модель), Сб. «Кибернетику — на службу коммунизму», под редакцией А. И. Берга, 6, «Энергия», 1971.

Иванилов Ю. П., Пропой А. И.

1. О задачах динамического линейного программирования, ДАН СССР, 1971 198, 8.

Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.

1. Теория экстремальных задач, «Наука», 1974.

Канторович Л. В.

1. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, Изд-во АН СССР, 1959.

Канторович Л. В., Акилов Г. П.

1. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.

Красносельский М. А.

1. Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, 1962.

Крейн М. Г., Рутман М. А.

1. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН, 1948 3, № 1 (23).

Крейн М. Г., Шмультян В. Л.

1. On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space, Ann. of Math., 41 (1940).

Кривенков Ю. П.

1. Математические и вычислительные вопросы линейного динамического программирования, Изд-во АН СССР, 1962.

Рокафеллар Р. Т.

1. Выпуклый анализ, «Мир», 1973

Тер-Крикоров А. М.

1. Линейные задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, № 1.
2. Вопросы выпуклого программирования в пространстве, сопряженном пространству Банаха, и задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, № 2.
3. Линейные и выпуклые задачи оптимального управления на бесконечном отрезке времени, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, 3.

Эрроу К., Гурвиц Дж., Удзава Ж.

1. Исследования по линейному и нелинейному программированию, ИЛ, 1962.