С. И. НОВОСЕЛОВ

ТРИГОНОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК
ДЛЯ 9-10 КЛАССОВ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

УЧПЕДГИЗ · 1957

С. И. НОВОСЕЛОВ

ТРИГОНОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК ДЛЯ 9—10 КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Утверждён Министерством просвещения РСФСР

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Москва — 1957

Сергей Иосифович Новоселов

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Редактор *С. А. Пономарёв*. Обложка художника *Г. В. Смеловой*.
Художественный редактор *М. Л. Фрам*. Технический редактор *И. В. Рыбин*.
Чертежи выполнены *Н. А. Меделяновским*.

Подписано к печати с матриц 5/I 1957 г. 60×92 1/16.
Печ. л. 6. Уч.-изд. л. 5,4. Тираж — допечатка 800 тыс. (800 001 — 1 600 000) экз.
Заказ № 1127.

Цена без переплёта 70 к. Переплёт 50 к.

Учпедгиз. Москва, Чистые пруды, 6.

Отпечатано с матриц Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова, Москва, Ж-54, Валовая, 28, в типографии издательства «Уральский рабочий». Свердловск, ул. имени Ленина, 49. Заказ № 14.

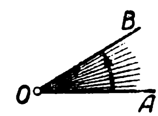
Глава I

УГЛЫ И ДУГИ; ИХ ИЗМЕРЕНИЕ

§ 1. Углы произвольной величины

В геометрии углом называют фигуру, образованную двумя лучами, исходящими из одной точки.

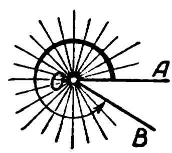
Всякий угол может быть образован вращением в плоскости луча вокруг начальной точки. Так, при вращении луча вокруг точки O от начального положения OA до конечного положения OB образуется угол AOB (черт. 1).



Черт. 1.

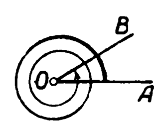
В тригонометрии угол рассматривается как путь, описанный лучом, вращающимся в плоскости вокруг его начальной точки.

При вращении луча может образоваться угол, больший развёрнутого (черт. 2).



Черт. 2.

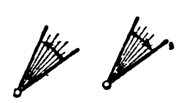
Вращающийся луч, описав в плоскости несколько полных оборотов вокруг точки O, совпадёт с первоначальным положением.



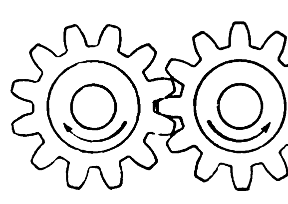
Черт. 3.

Поворот луча может складываться из нескольких полных оборотов и угла, составляющего часть полного оборота (черт. 3). Примером может служить движение спицы вращающегося колеса.

Вращение луча в плоскости может происходить в двух взаимно противоположных направлениях (черт. 4). Так, например, два зубчатые колеса одинакового радиуса, сцепленные друг с другом, как показано на чертеже 5, вращаются во взаимно противоположных направлениях и при повороте одного из них на некоторый угол другое повернётся на такой же угол, но в противоположном направлении.



Черт. 4.



Черт. 5.

Одно из двух возможных направлений вращения на плоскости будем считать положительным, а *другое отрицательным. Тогда угол, образованный вращением луча в положительном направлении, считается положительным, а угол, образованный вращением луча в отрицательном направлении, — отрицательным.*

Любое из двух возможных направлений вращения в плоскости можно принять за положительное. В дальнейшем положительным направлением вращения мы будем считать направление, **противоположное** вращению стрелки часов, положенных на плоскость, в которой происходит вращение, и обращённых циферблатом к наблюдателю.

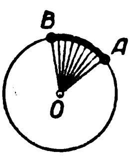
Если луч OA, не совершив никакого вращения, остался в первоначальном положении, то говорят, что угол поворота луча равен нулю.

Определение. ***Начальное положение вращающегося луча называется начальной стороной соответствующего угла поворота, а конечное положение луча — конечной стороной этого угла.***

Существует бесконечное множество углов, для которых начальная и конечная стороны имеют данное положение; все эти углы отличаются друг от друга целым числом полных (положительных или отрицательных) оборотов.

§ 2. Дуги окружности произвольной величины

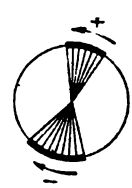
Всякому углу, образованному двумя радиусами окружности, соответствует дуга этой окружности, ограниченная концами данных радиусов (черт. 6). Если радиус OA вращается вокруг центра O, то конец A радиуса движется по окружности. Говорят, что *точка движется по окружности в положительном (или отрицательном) направлении, если радиус, соединяющий её с центром, вращается в положительном (соответственно отрицательном) направлении.*



Черт. 6.

Дуга, образованная движением точки по окружности в положительном направлении, считается положительной, а в отрицательном направлении — отрицательной (черт. 7).

Если радиус совершит полный (положительный или отрицательный) оборот, то конец радиуса, описав полную окружность, возвратится в начальное положение.



Черт. 7.

Можно рассматривать дуги, содержащие какое угодно число положительных или отрицательных полных окружностей. Представление о такой дуге даёт намотанная на катушку тонкая нить: она может содержать любое количество витков, намотанных в том или ином направлении.

§ 3. Измерение углов и дуг

Понятие об измерении углов известно из геометрии. Для измерения углов принимают некоторый определённый угол за единицу измерения и с её помощью измеряются все прочие углы.

За единицу измерения можно принять любой угол.

На практике часто углы измеряют в градусах, принимая за единицу измерения $\frac{1}{360}$ часть полного оборота, называемую градусом. Для измерений, требующих большой точности, градус делится на 60 равных частей — минуты; минута делится на 60 равных частей — секунды.

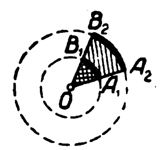
В геометрии иногда углы измеряют „в долях d", принимая за единицу измерения прямой угол.

В технике часто за единицу измерения углов принимают полный оборот. Так, поворот колеса машины или пропеллера самолёта обычно измеряется числом оборотов.

В артиллерии за единицу измерения углов принимают $\frac{1}{60}$ часть полного оборота, т. е. $\frac{360^\circ}{60}=6^\circ$; этот угол называют большим делением угломера. Для более точного измерения углов большое деление угломера делят на 100 равных частей; угол $\frac{6^\circ}{100}=3'36''$ называют малым делением угломера.

Величина положительного угла выражается положительным числом, а отрицательного угла — отрицательным числом.

Углы, которые изучаются в тригонометрии, могут измеряться любыми действительными числами, так как при вращении луча может образоваться угол произвольной величины (положительный, отрицательный, нулевой, содержащий любое число полных оборотов).



Черт. 8.

При измерении дуг данной окружности за единицу принимают дугу, на которую опирается центральный угол, взятый за единицу измерения углов. Тогда *величина центрального угла и величина дуги, на которую он опирается, выразятся одним и тем же числом в угловых и в дуговых единицах (соответственно).*

Радианное измерение углов и дуг. Из геометрии известно, что при одном и том же центральном угле длины дуг двух окружностей относятся как длины их радиусов (черт. 8)*:

$$\frac{\breve{A_1B_1}}{\breve{A_2B_2}}=\frac{R_1}{R_2}, \quad \text{или} \quad \frac{\breve{A_1B_1}}{R_1}=\frac{\breve{A_2B_2}}{R_2}.$$

Итак, *при одном и том же центральном угле отношение длины дуги окружности к её радиусу не зависит от величины радиуса.*

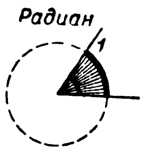
---

* Секторы OA_1B_1 и OA_2B_2 подобны.

При изменении центрального угла величина этого отношения изменяется.

Определение. ***Радианной мерой угла называется отношение длины дуги окружности, для которой данный угол является центральным, к длине радиуса этой дуги.***

При радианном измерении углов единицей измерения служит положительный центральный угол, опирающийся на дугу, равную по длине радиусу. Этот угол называется радианом (черт. 9).



Черт. 9.

При радианном измерении дуг окружности единицей служит дуговой радиан; это есть **дуга, равная по длине радиусу.**

Переход от градусной меры к радианной. Радианная мера полного (положительного) оборота равна длине окружности, делённой на радиус:

$$\frac{2\pi R}{R} = 2\pi = 6{,}283185\ldots$$

Радианная мера 1° равна $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = 0{,}017453\ldots$

Если угол содержит $A°$, то его радианная мера α равна:

$$\boxed{\alpha = \frac{A\pi}{180}}. \qquad (1)$$

Вычислим радианную меру угла 1′:

$$1' = \frac{1}{60}\ (\text{градуса}) = \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180}\ (\text{радианов}) = 0{,}00029088 \ldots\ (\text{радианов}).$$

Радианная мера некоторых часто встречающихся углов дана в следующей таблице:

Градусы	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радианы	$\frac{\pi}{6} \approx$ $\approx 0{,}5236$	$\frac{\pi}{4} \approx$ $\approx 0{,}7854$	$\frac{\pi}{3} \approx$ $\approx 1{,}0472$	$\frac{\pi}{2} \approx$ $\approx 1{,}5708$	$\pi \approx$ $\approx 3{,}1416$	$\frac{3\pi}{2} \approx$ $\approx 4{,}7124$	$2\pi \approx$ $\approx 6{,}2832$

Переход от радианной меры к градусной. Из равенства (1) следует, что угол, равный α радианов, содержит

$$A° = \frac{\alpha \cdot 180°}{\pi}.$$

В частности,

$$1\ \text{радиан} = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}295\ (\text{градусов}) \approx 3438' \approx 206265'' \approx 57°17'45''.$$

Пример. Градусная мера (с точностью до минуты) угла в 2 радиана равна

$$\frac{2\cdot 180^\circ}{\pi}\approx 2\cdot(57^\circ 17'45'')\approx 114^\circ 36'$$

(секунды отбрасываем по правилам округления).

Число, полученное в результате измерения какой-либо величины, как правило, сопровождается наименованием единицы измерения, например: 5 *км*, 10 *руб.*, 7° и т. п. Однако для радианной меры углов и дуг вошло в обычай исключение: *величина угла (или дуги), выраженная в радианах, записывается числом без наименования.* Вместо слов „угол, измеряющийся числом α", кратко говорят „угол α". Так, например, говорят: „угол 0,5" вместо: „угол, величина которого равна 0,5 радиана".

Для перехода от градусной меры к радианной можно пользоваться готовыми таблицами. В школьных таблицах В. М. Брадиса, в таблице XVI, даны значения радианной меры углов от 0 до 90° через каждые 6 минут. Эти значения вычислены приближённо с точностью до четвёртого десятичного знака.

Примеры. 1) Найти радианную меру α угла $130^\circ 26'$.

Решение. Данный угол состоит из угла 90° и из угла $40^\circ 26'$. Из таблицы найдём радианную меру углов: 90° и $40^\circ 24'$; сбоку в табличке помещена поправка на $2'$, которую следует прибавить к последнему десятичному знаку:

$$\begin{array}{r}
90^\circ \quad —1{,}5708\\
40^\circ 24'—0{,}7051\\
2'— \quad\quad 6\\
\hline
\alpha=2{,}2765
\end{array}$$

2) Найти градусную меру (с точностью до 1°) угла, равного (приближённо) 1,25 радиана.

Решение. В таблицах В. М. Брадиса (стр. 48) найдём, что число 1,2497 — ближайшее к 1,2500; ему соответствует угол $71^\circ 36'$.

Округлим найденное значение с точностью до 1°, тогда получим (приближённо) 72°.

Зная радиус окружности R и радианную меру α дуги, можно вычислить длину l этой дуги. В самом деле, по определению радианной меры:

$$\alpha=\frac{l}{R},\qquad \text{откуда}\qquad l=\alpha R.$$

Итак, *длина дуги окружности равна произведению её радианной меры на радиус.*

Пример. Колесо радиусом 2,2 *м* повернулось на угол $30^\circ{,}5$; найти длину пути, пройденного точкой на ободе колеса.

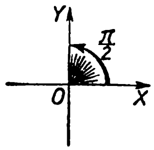
Решение. По формуле $l=\alpha R$ найдём длину пути:

$$l\approx 2{,}2\cdot 0{,}53\approx 1{,}2.$$

Примечание. Радианная мера угла $30^\circ 30'$ взята из таблиц Брадиса: 0,5323. Так как приближённое значение R дано с двумя значащими цифрами, то и значение α следует округлить, сохранив лишь две значащие цифры $\alpha\approx 0{,}53$.

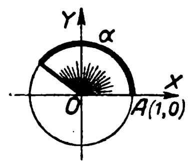
§ 4. Координатная плоскость, единичный круг

Установим на плоскости положительное направление вращения и выберем на ней оси координат. *Положительное направление на оси ординат всегда выбирается так, чтобы при повороте положительного луча OX оси абсцисс на положительный прямой угол он совместился с положительным лучом OY оси ординат.* Так, на чертеже 10 указаны: положительное направление вращения — против часовой стрелки, положительное направление оси абсцисс — вправо; положительное направление оси ординат — вверх.



Черт. 10.

Углы на координатной плоскости принято откладывать так: за вершину угла берётся начало координат, а за начальную сторону — положительная полуось абсцисс. Чтобы получить конечную сторону угла, измеряющегося данным числом, надо повернуть луч от начального положения OX на угол, измеряющийся этим числом (черт. 11).

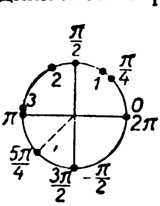


Черт. 11.

Луч, исходящий из начала координат, служит конечной стороной для бесконечного множества углов, отложенных от положительной полуоси OX; эти углы отличаются один от другого на целое число полных оборотов: если α — величина одного из таких углов, то величина произвольного угла β из этого множества выразится числом $\beta = 2k\pi + \alpha$, где k — любое целое число, т. е. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Угол β состоит из угла α и k полных (положительных или отрицательных) оборотов. Так, например, луч, наклонённый к оси абсцисс под углом в 30°, служит конечной стороной для углов $30° + 360° k$, т. е. для углов 30° ($k = 0$), 390° ($k = 1$), —330° ($k = -1$), 750° ($k = 2$) и т. д.

Определение. ***Круг с центром в начале координат и с радиусом, по длине равным 1, называется единичным кругом, а его окружность — единичной окружностью.***

Всякое действительное число α можно изобразить точкой единичной окружности; для этого принято от правого конца $A(1,0)$ горизонтального диаметра откладывать дугу, измеряющуюся числом α (см. черт. 11). Если α есть радианная мера дуги, то достаточно от точки A отложить при $\alpha > 0$ в положительном направлении и при $\alpha < 0$ в отрицательном направлении дугу, по длине равную $|\alpha|$; конец этой дуги и изображает число α. Число нуль, $\alpha = 0$, изображается начальной точкой $A(1, 0)$.



Черт. 12.

На чертеже 12 показаны точки единичной окружности, изображающие различные действительные числа.

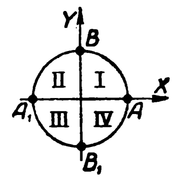
Два различных действительных числа α и β изображаются одной и той же точкой единичной окружности в том и *только в том случае, если дуги, измеряющиеся этими числами, отличаются на целое число полных окружностей, т. е.* $\beta - \alpha = 2k\pi$, или

$$\boxed{\beta = \alpha + 2k\pi},$$

где k — целое (положительное или отрицательное) число.

Координатные оси делят плоскость, а вместе с ней единичный круг и его окружность на четыре равные части, называемые четвертями (соответственно плоскости, круга или единичной окружности).

Если конечная сторона угла (или конец дуги) содержится в некоторой четверти плоскости (или единичной окружности), то говорят, что данный угол (дуга) оканчивается в этой четверти.



Черт. 13.

Четверти I и II единичной окружности (черт. 13) образуют обе вместе верхнюю полуокружность, а четверти III и IV — нижнюю полуокружность. Четверти I и IV образуют правую, а четверти II и III — левую полуокружность.

В правом конце A горизонтального диаметра оканчиваются дуги, измеряющиеся числами $2k\pi$ (или в градусах $360° k$), а в левом конце A_1 этого диаметра — дуги, измеряющиеся числами $\pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$ (или в градусах $(2k+1)\cdot 180°$), где k — любое целое число.

Дуги $n\pi$ или $180° n$ (где n — целое число) оканчиваются в концах горизонтального диаметра; при чётном $n = 2k$ — в точке A, а при нечётном $n = 2k+1$ — в точке A_1.

В точке $B(0, 1)$ — верхнем конце вертикального диаметра, оканчиваются дуги $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (или в градусах $90° + 360°\cdot k$). В точке $B_1(0, -1)$ — нижнем конце вертикального диаметра, оканчиваются дуги $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi$. Дуги $\frac{\pi}{2} + n\pi$ оканчиваются в концах вертикального диаметра: в точке B при чётном $n = 2k$ и в точке B_1 при нечётном $n = 2k-1$.

Дуги $k\frac{\pi}{2}$ (или $90° k$) оканчиваются в концах либо горизонтального, либо вертикального диаметра. При $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ получим последовательно точки $A, B, A_1, B_1, A, \ldots$, при $k = -1, -2, -3, -4, \ldots$ получим последовательно точки $B_1, A_1, B, A, \ldots$.

§ 5. Проекция вектора на ось*

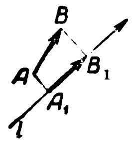
Вектором называется направленный прямолинейный отрезок (черт. 14). В обозначении вектора на первом месте пишут его

* Под осью мы понимаем прямую линию, на которой установлено положительное направление и выбрана единица масштаба для измерения длин.

начало, а на втором — конец. Вектор $\overline{AB}$ можно рассматривать как путь, пройденный точкой, движущейся прямолинейно из начального положения A в конечное положение B. Векторными являются многие физические величины, как, например, силы, скорости, ускорения и т. п.; эти величины изображаются направленными отрезками.

Определение. ***Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется величина отрезка A_1B_1, соединяющего проекцию начала данного вектора с проекцией его конца на ось l*** (черт. 15).

Черт. 14.

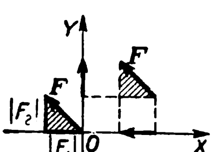


Черт. 15.

Черт. 16.

Величина проекции считается положительной (или отрицательной), если направление отрезка A_1B_1 совпадает (или противоположно) с направлением оси l. Если вектор перпендикулярен оси l, то его проекция на эту ось равна нулю (черт. 16). Иногда тем же словом „проекция“ называют не только величину отрезка A_1B_1 оси l, но и вектор $\overline{A_1B_1}$.

Пусть $\overline{F}$ — вектор на координатной плоскости; обозначим через F_1 и F_2 его проекции на оси абсцисс и ординат, а через $|\overline{F}|$ его длину.



Черт. 17.

Теорема. ***Квадрат длины вектора равен сумме квадратов его проекций на координатные оси.***

Доказательство. При параллельном переносе вектора его проекция на ось не меняется (черт. 17). Перенесём вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Опустим перпендикуляр на ось OX из конца вектора $\overline{F}$; тогда получим прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна длине вектора, а катеты — абсолютным величинам $|F_1|$ и $|F_2|$ его проекций на координатные оси. По теореме Пифагора:

$$|\overline{F}|^2 = |F_1|^2 + |F_2|^2.$$

Так как квадрат абсолютной величины числа равен квадрату этого числа, то знаки абсолютных величин в правой части излишни:

$$\boxed{|\overline{F}|^2 = F_1^2 + F_2^2}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

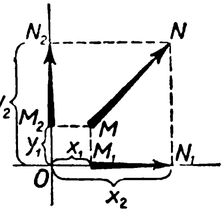
Примечание. Если вектор $\overline{F}$ лежит на одной из координатных осей, то треугольник превращается в отрезок, но и в этом случае теорема верна. Так, если вектор лежит на оси абсцисс, то $F_2=0$, а $|\bar{F}|=|F_1|$; то же самое получим и по формуле:

$$|\bar{F}|=\sqrt{F_1^2+F_2^2}=\sqrt{F_1^2}=|F_1|.$$

§ 6. Расстояние между двумя точками на координатной плоскости

Теорема. ***Квадрат расстояния d между двумя точками $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$ на координатной плоскости равен сумме квадратов разностей одноимённых координат этих точек:***

$$\boxed{d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



Черт. 18.

Доказательство. Даны точки M и N (черт. 18); рассмотрим вектор на координатной плоскости с началом и с концом в этих точках. Проекция вектора $\overline{MN}$ на ось абсцисс равна величине отрезка (направленного) M_1N_1 на оси OX. По правилу сложения величин направленных отрезков на одной оси имеем:

$$OM_1+M_1N_1=ON_1, \quad \text{откуда} \quad M_1N_1=ON_1-OM_1.$$

Так как

$$OM_1=x_1, \quad \text{а} \quad ON_1=x_2, \quad \text{то } \text{пр}_x\, \overline{MN}=M_1N_1=x_2-x_1.$$

Спроектировав вектор $\overline{MN}$ на ось ординат, точно так же получим:

$$\text{пр}_y\, \overline{MN}=M_2N_2=y_2-y_1.$$

Так как квадрат длины вектора равен сумме квадратов его проекции на оси координат (см. § 5), то

$$d^2=(M_1N_1)^2+(M_2N_2)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Примечание. Выведенная формула верна при любом расположении точек M и N на плоскости (а не только при том, которое представлено на чертеже 18). В самом деле, правило сложения величин направленных отрезков оси, на основании которого были вычислены величины отрезков M_1N_1 и M_2N_2, справедливо при произвольном положении начальных и конечных точек отрезков (на данной оси).

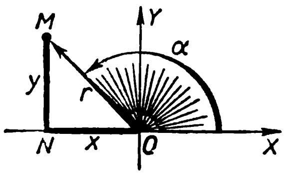
Глава II

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 7. Определение тригонометрических функций произвольного угла

Пусть M — произвольная точка плоскости, отличная от начала координат (черт. 19).

Определение. ***Вектор $\overline{OM}$, соединяющий начало координат с точкой M, называется радиусом-вектором точки M или подвижным радиусом.***



Черт. 19.

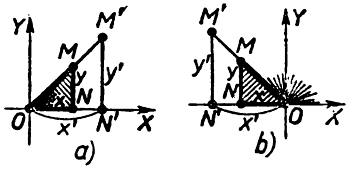
Обозначим через x и y — абсциссу и ординату конца подвижного радиуса $\overline{OM}$, а через r — его длину.

Теорема. ***Если подвижной радиус $\overline{OM}$ образует данный угол с осью абсцисс, то отношения***

$$\frac{x}{r} \quad \text{и} \quad \frac{y}{r} \tag{1}$$

не зависят от длины радиуса-вектора $\overline{OM}$.

Доказательство. Отложим на координатной плоскости данный угол α, приняв за начальную сторону положительную полуось абсцисс. На конечной стороне угла α возьмём две произвольные, но отличные друг от друга и от начала координат точки M и M'. Докажем, что соответственные отношения (1), составленные для радиусов-векторов $\overline{OM}$ и $\overline{OM'}$, равны между собой. Спроектировав точки M и M' на ось абсцисс (черт. 20, a и b), получим два подобных треугольника OMN и $OM'N'$. Длины катетов треугольника OMN равны абсолютным величинам координат точки M, т. е. $|x|$ и $|y|$, а длина гипотенузы равна r. Длины катетов и гипотенузы треугольника $OM'N'$ суть $|x'|$, $|y'|$ и r'. Из подобия треугольников OMN и $OM'N'$ имеем: $\frac{|x|}{r}=\frac{|x'|}{r'}$ (отношения сходственных сторон равны).



Черт. 20.

Отношения $\frac{x}{r}$ и $\frac{x'}{r'}$ одинаковы и по знаку. В самом деле, отрезки ON и ON' суть проекции одинаково направленных радиусов-векторов $\overline{OM}$ и $\overline{OM'}$. Следовательно, они также одинаково направлены, и их величины x и x' имеют один и тот же знак (на чертеже 22a x и x' положительны, а на чертеже 22b отрицательны). Следовательно,

$$\frac{x}{r}=\frac{x'}{r'}.$$

Так же доказывается равенство отношений $\frac{y}{r}$ и $\frac{y'}{r'}$ (спроектировать M и M' на ось OY), ч. т. д.

Примечание. Если конечная сторона угла α направлена вдоль одной из координатных осей, то треугольники OMN и $OM'N'$ превращаются в отрезки, но теорема верна и в этом случае. Так, например, если конечная сторона угла направлена вдоль положительной полуоси абсцисс, то $\frac{x}{r}=1$, а $\frac{y}{r}=0$; если же конечная сторона направлена вдоль отрицательной полуоси абсцисс, то $\frac{x}{r}=-1$, а $\frac{y}{r}=0$.

Определение. 1) ***Косинусом угла α называется отношение абсциссы конца подвижного радиуса, образующего угол α с осью абсцисс, к длине этого радиуса:***

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{x}{r}}$$

2) ***Синусом угла α называется отношение ординаты конца подвижного радиуса, образующего угол α с осью абсцисс, к длине этого радиуса:***

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{y}{r}}$$

3) ***Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к косинусу этого угла:***

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

4) ***Котангенсом угла α называется отношение косинуса угла α к синусу этого угла:***

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

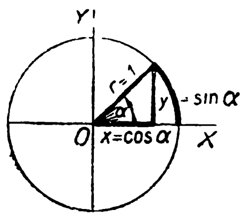
Значения отношений $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ не зависят от длины подвижного радиуса.

Из определений тангенса и котангенса следует, что ***тангенс угла α равен отношению ординаты к абсциссе конца подвижного радиуса, образующего угол α с осью OX, а котангенс равен отношению абсциссы к ординате конца этого подвижного радиуса:***

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x}{y}.$$

Отношение $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ можно составить, если $x \neq 0$. Если же $x = 0$, то данного отношения составить н е л ь з я (на нуль делить нельзя); в этом последнем случае конечная сторона угла направлена вдоль оси ординат и $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, или в градусах $90° + 180°k$ (где k — любое целое число). Следовательно, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ н е с у щ е с т в у е т.

Для углов $k\pi$ (или в градусах $180°k$) конечная сторона направлена вдоль оси абсцисс, отношение $\frac{x}{y}$ теряет смысл, так как $y = 0$; для этих углов котангенс не существует.



Черт. 21.

Всякому углу α соответствует некоторое значение каждого из отношений (если только оно имеет смысл):

$$\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ \operatorname{tg}\alpha \text{ и } \operatorname{ctg}\alpha.$$

Следовательно, данные отношения суть функции угла α. Эти функции называются тригонометрическими функциями; угол α является их аргументом.

Кроме указанных четырёх функций, иногда рассматриваются ещё две тригонометрические функции — с е к а н с и к о с е к а н с:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{r}{x} \quad \text{и} \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{r}{y}.$$

Однако эти две последние функции не имеют широкого применения.

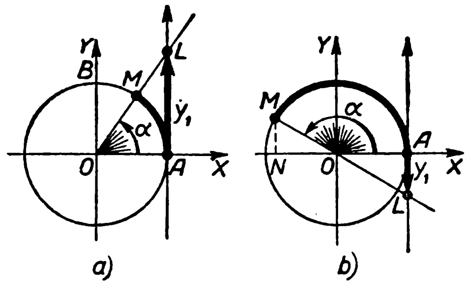
Так как значения тригонометрических функций не зависят от длины подвижного радиуса, то можно этот радиус всегда брать одной и той же длины. Обычно считают $r = 1$; тогда конец подвижного радиуса находится на единичной окружности, а угол образуется двумя её радиусами (черт. 21). В этом случае

$$\boxed{\cos\alpha = x, \quad \sin\alpha = y, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}}$$

Таким образом, ***косинус и синус угла α равны абсциссе и ординате конца подвижного радиуса единичной окружности, образующего угол α с начальным радиусом, а тангенс и котангенс равны отношениям ординаты к абсциссе и абсциссы к ординате конца подвижного радиуса.***

Аргументом тригонометрических функций можно считать не только угол, но и дугу единичной окружности. По данной дуге можно построить соответствующую точку на единичной окружности (конец подвижного радиуса) и найти значения тригонометрических функций.

Касательная к единичной окружности в конце $A(1, 0)$ *горизонтального диаметра называется осью тангенсов.* Положительное направление на оси тангенсов устанавливается такое же, как на оси ординат (на чертеже 22 снизу вверх). Пусть M — точка единичной окружности, соответствующая углу α. Продолжив радиус OM до пересечения с осью тангенсов, получим на этой оси точку L (этого построения нельзя выполнить, если точка M лежит на оси ординат).



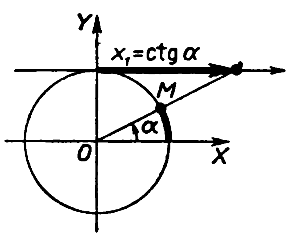
Черт. 22.

Тангенс угла α равен ординате соответствующей точки оси тангенсов.

В самом деле, если угол α оканчивается в правой полуплоскости, то, взяв $\overline{OL}$ за подвижной радиус, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{AL}{OA}=\frac{AL}{1}=y_1,$$

где y_1 — ордината точки L (черт. 22a).



Черт. 23.

Если угол α оканчивается в левой полуплоскости (черт. 22b), то одноимённые координаты точек M и L противоположны по знаку, а отношения ординаты к абсциссе для обеих этих точек одинаковы (треугольники OMN и OAL подобны):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{NM}{ON}=\frac{AL}{OA}=\frac{y_1}{1}=y_1.$$

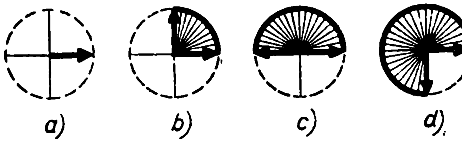
Примечание. Если точка M лежит на оси ординат, то точка L не существует, $\operatorname{tg}\alpha$ также не существует.

Осью котангенсов называется касательная к единичной окружности в конце $B(0, 1)$ вертикального диаметра; положительное направление на этой оси такое же, как на оси абсцисс.

Котангенс угла α есть абсцисса x соответствующей точки оси котангенсов (черт. 23).

§ 8. Значения тригонометрических функций от некоторых углов

Если угол $\alpha = 0$ (черт. 24а), то конец подвижного радиуса единичной окружности имеет координаты $x = 1$, $y = 0$, а потому $\cos 0 = 1$; $\sin 0 = 0$; $\operatorname{tg} 0 = \frac{y}{x} = 0$; $\operatorname{ctg} 0$ не существует.



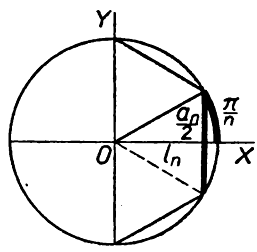
Черт. 24.

Если угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (или в градусах $\alpha = 90°$), то конец подвижного радиуса имеет координаты (черт. 24 b) $x = 0, y = 1$, а потому $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = 0$; $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \operatorname{tg} 90°$ не существует; $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = \operatorname{ctg} 90° = 0$.

Если $\alpha = \pi$ (черт. 24с), то $x = -1$; $y = 0$, а потому $\cos\pi = \cos 180° = -1$; $\sin\pi = \sin 180° = 0$; $\operatorname{tg}\pi = \operatorname{tg} 180° = 0$; $\operatorname{ctg}\pi = \operatorname{ctg} 180°$ не существует.

Если $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ (черт. 24d), то $x = 0$, $y = -1$, а потому $\cos\frac{3}{2}\pi = \cos\ 270° = 0$; $\sin\frac{3}{2}\pi = \sin\ 270° = -1$; $\operatorname{tg}\frac{3}{2}\pi = \operatorname{tg}\ 270°$ не существует; $\operatorname{ctg}\frac{3}{2}\pi = \operatorname{ctg} 270° = 0$.

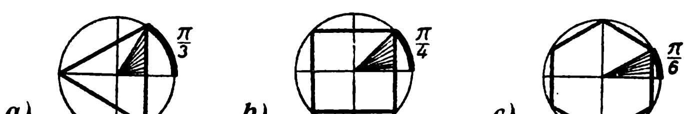
Пусть a_n — сторона, а l_n — апофема правильного n-угольника, вписанного в единичный круг. Расположим n-угольник так, чтобы положительная полуось абсцисс делила пополам одну из его сторон; тогда из чертежа 25 найдём:



Черт. 25.

$$\cos\frac{\pi}{n} = \cos\frac{180°}{n} = l_n \quad \text{и} \quad \sin\frac{\pi}{n} = \sin\frac{180°}{n} = \frac{a_n}{2}.$$

При $n = 3$ получим вписанный треугольник (черт. 26а). Из геометрии известно, что $a_3 = \sqrt{3}$, $l_3 = \frac{1}{2}$; следовательно,



Черт. 26.

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos 60° = \frac{1}{2}; \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}; \qquad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{ctg} 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

При $n=4$ получим вписанный квадрат (черт. 26b); имеем: $a_n=\sqrt{2}$, $l_n=\frac{\sqrt{2}}{2}$; а потому

$$\cos\frac{\pi}{4}=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \sin\frac{\pi}{4}=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{tg}45^\circ=1; \qquad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{ctg}45^\circ=1.$$

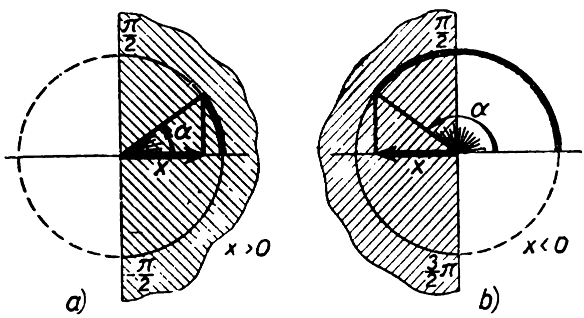
При $n=6$ получим вписанный шестиугольник (черт. 26c); имеем: $a_6=1$, $l_6=\frac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно,

$$\cos\frac{\pi}{6}=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \sin\frac{\pi}{6}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\operatorname{tg}30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\operatorname{ctg}30^\circ=\sqrt{3}.$$

§ 9. Знаки тригонометрических функций

Так как $\cos\alpha$ есть абсцисса конца радиуса единичного круга, образующего угол α с осью OX, то значения косинуса положительны (отрицательны) для углов, оканчивающихся в тех четвертях, в которых абсциссы точек положительны (отрицательны).



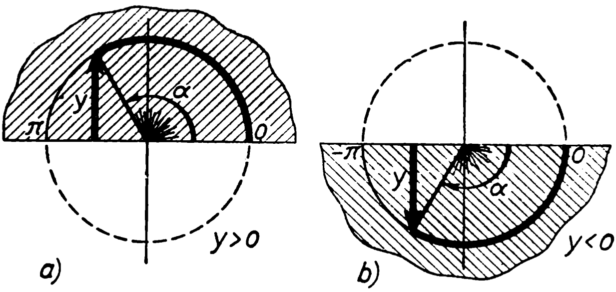
Черт. 27.

Следовательно, ***косинусы углов (дуг), оканчивающихся в правой полуплоскости (I и IV четверти) положительны, а косинусы углов, оканчивающихся в левой полуплоскости (II и III четверти), отрицательны*** (черт. 27).

В частности, для углов, заключённых между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, т. е. $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ (или в градусах $-90^\circ<\alpha<90^\circ$), имеем $\cos\alpha>0$. Для углов, заключённых между $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, т. е. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, имеем $\cos\alpha<0$.

Так как $\sin\alpha$ есть ордината конца радиуса единичного круга, образующего угол α с осью OX, то значения синуса положительны (отрицательны) для углов, оканчивающихся в тех четвертях, в которых ординаты точек положительны (отрицательны).

Следовательно, ***синусы углов (дуг), оканчивающихся в верхней полуплоскости (I и II четверти), положительны,***



Черт. 28.

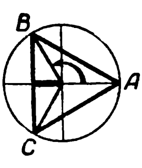
а синусы углов, оканчивающихся в нижней полуплоскости (III и IV четверти), отрицательны (черт. 28).

В частности, для углов, заключённых между 0 и π, т. е. $0 < \alpha < \pi$ (или в градусах $0° < \alpha < 180°$), имеем $\sin\alpha > 0$. Для углов, заключённых между $-\pi$ и 0, т. е. $-\pi < \alpha < 0$, имеем $\sin\alpha < 0$.

Так как $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ суть отношения координат конца подвижного радиуса:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x}{y},$$

то значения тангенса и котангенса положительны (отрицательны) для углов, оканчивающихся в тех четвертях, в которых координаты точек одинаковы (противоположны) по знаку.



Черт. 29.

Следовательно, ***тангенсы и котангенсы углов, оканчивающихся в I и III четвертях, положительны, а тангенсы и котангенсы углов, оканчивающихся во II и IV четвертях, отрицательны.***

Пример. Рассматривая вершины B и C равностороннего треугольника, расположенного, как показано на чертеже 29, получим:

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos 120° = -\frac{1}{2}; \quad \sin\frac{2\pi}{3} = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{tg}120° = -\sqrt{3}.$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \quad \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg}\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

§ 10. Основные тригонометрические тождества и их следствия

Установим основные соотношения, которыми связаны значения четырёх тригонометрических функций при данном значении аргумента.

I. Сумма квадратов косинуса и синуса одного и того же аргумента равна единице:

$$\boxed{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1} \qquad \text{(I)}$$

Доказательство. Пусть α — произвольный угол (дуга); проекции радиуса $\overline{OM}$ единичного круга, образующего угол α с осью абсцисс на оси OX и OY, суть:

$$x=\cos\alpha \quad \text{и} \quad y=\sin\alpha.$$

Так как длина OM равна 1, то (см. черт. 20):

$$x^2+y^2=1, \text{ или } \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1, \qquad \text{ч. т. д.}$$

II. По определению тангенса и котангенса имеем:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \qquad \text{(II)}$$

Следствия. Перемножив почленно тождества (II), получим следующее тождество:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1} \qquad \text{(III)}$$

Разделив почленно тождество (I) на $\cos^2\alpha$, а затем на $\sin^2\alpha$, получим тождества:

$$1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

или

$$\boxed{1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}} \quad \text{и} \quad \boxed{1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}} \qquad \text{(IV)}$$

Иначе эти тождества можно записать так:

$$\sec^2\alpha=1+\operatorname{tg}^2\alpha \quad \text{и} \quad \operatorname{cosec}^2\alpha=1+\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Разъяснение. Всякое тригонометрическое тождество есть равенство, справедливое при всех допустимых значениях аргумента α, т. е. при всех тех значениях аргумента, при которых левая и правая части (каждая) имеют смысл. Так, например, равенство $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ выполняется при всех значениях α, при которых $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ оба имеют смысл, т. е. при всех α, за исключением углов (дуг) $k\frac{\pi}{2}$, оканчивающихся в концах либо горизонтального, либо вертикального диаметра (для углов $k\frac{\pi}{2}$ либо тангенс, либо котангенс теряет смысл).

Основные тригонометрические тождества позволяют производить тождественные преобразования выражений, содержащих тригонометрические функции, и доказывать различные прочие тригонометрические тождества. Для этого используются общие правила действий над алгебраическими выражениями, основные тригонометрические тождества и их следствия.

Примеры. 1) Доказать тождество:

$$\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}.$$

Доказательство. Преобразуем левую часть, заменив в числителе 1 суммой $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$. Имеем последовательно:

$$\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}.$$

Разделим числитель и знаменатель на $\cos\alpha$:

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}.$$

Итак, получилось то же выражение, которое находится в правой части, ч. т. д.

2) Упростить выражение:

$$P=\sqrt{\frac{2}{1+\sin\alpha}+\frac{2}{1-\sin\alpha}}.$$

Решение. Выполняем преобразования:

$$P=\sqrt{\frac{2}{1+\sin\alpha}+\frac{2}{1-\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{2(1-\sin\alpha)+2(1+\sin\alpha)}{1-\sin^2\alpha}}=$$

$$=\sqrt{\frac{4}{\cos^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{\cos^2\alpha}}=\frac{2}{|\cos\alpha|}.$$

Следовательно, $P=\frac{2}{\cos\alpha}$, если $\cos\alpha>0$, т. е. α оканчивается в правой полуплоскости, и $P=-\frac{2}{\cos\alpha}$, если $\cos\alpha<0$, т. е. α оканчивается в левой полуплоскости.

§ 11. Вычисление значений тригонометрических функций по значению одной из них

При помощи основных тождеств можно **каждую** из тригонометрических функций (от одного и того же аргумента) выразить через **любую другую** тригонометрическую функцию.

Выражения тригонометрических функций через косинус. Из тождества (I) (стр. 19) можно выразить синус через косинус:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha};$$

подставив $\sin\alpha$ в тождества (II), получим выражения тангенса и котангенса через косинус:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

Выражения тригонометрических функций через синус. Из тождеств (I) и (II) получим (вычисления такие же, как и в предыдущем случае):

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Выражения тригонометрических функций через тангенс. Из тождеств (IV) и (II) (первых) получим:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}; \quad \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha.$$

Из этих равенств и из тождества (III) найдём:

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad \sin\alpha = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Выражения тригонометрических функций через котангенс. Из тождеств (IV), (II) и (III) найдём:

$$\cos\alpha = \pm\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}; \quad \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Полученные формулы позволяют, зная значение одной из тригонометрических функций, вычислить значения остальных функций при том же значении аргумента.

В формулах, содержащих радикалы, знак $+$ или $-$ следует ставить в зависимости от того, в какой четверти оканчивается угол (дуга) α.

Пример. Дано $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, вычислить значения прочих тригонометрических функций, если $90° < \alpha < 180°$.

Решение. Угол α оканчивается во II четверти, в которой косинус, тангенс и котангенс отрицательны; поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}.$$

§ 12. Чётность и нечётность тригонометрических функций

Функция называется чётной, если её значение y не изменяется при замене произвольного значения аргумента x противоположным ему значением $-x$. Примером чётной функции может служить функция $y=x^2$, так как

$$(-x)^2 = x^2 = y.$$

Функция называется нечётной, если её значение y заменяется противоположным числом $-y$ при замене произвольного значения аргумента x противоположным ему значением $-x$. Примером нечётной функции может служить функция x^3, так как

$$(-x)^3 = -x^3 = -y.$$

Примером функции, не являющейся ни чётной, ни нечётной, может служить функция x^2+x. В самом деле, заменив x на $-x$, получим:

$$(-x)^2 + (-x) = x^2 - x,$$

что (при $x \neq 0$) не равно ни x^2+x, ни $-(x^2+x)$.

Теорема. ***Косинус является чётной функцией:***

$$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$$

синус, тангенс и котангенс являются нечётными функциями:

$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \ \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \ \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha}$$

Из этой теоремы вытекает следующее правило: *знак минус у аргумента косинуса может быть опущен, а у аргумента синуса, тангенса и котангенса может быть вынесен за знак функции.*

Доказательство. Пусть α — данный угол; рассмотрим угол $-\alpha$. Взаимно противоположные углы α и $-\alpha$ образуются одинаковым поворотом подвижного радиуса от общего начального положения OA, но во взаимно противоположных направлениях; поэтому их конечные стороны OM и ON симметричны относительно оси абсцисс (черт. 30). Следовательно, абсциссы точек M и N равны, а ординаты противоположны. Сравнив координаты точки $M(x, y)$:

$$x = \cos\alpha \qquad \text{и} \qquad y = \sin\alpha$$

с координатами точки $N(x, -y)$:

$$x = \cos(-\alpha) \quad \text{и} \quad -y = \sin(-\alpha),$$

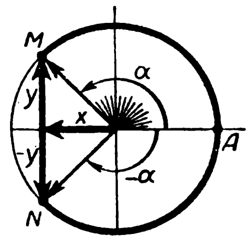
получим:

$$\cos\alpha = \cos(-\alpha); \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Далее найдём:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha, \text{ ч. т. д.}$$



Черт. 30.

Примеры.

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$;

$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$.

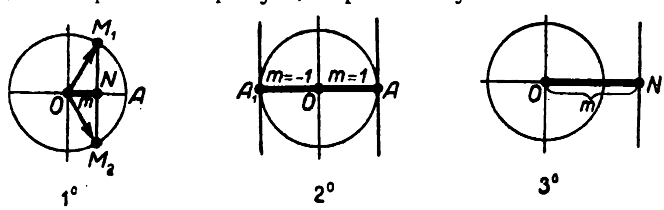
2) $\cos(-135^\circ) = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad \sin(-135^\circ) = -\sin 135^\circ = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

$\operatorname{tg}(-135^\circ) = -\operatorname{tg} 135^\circ = 1$; $\quad \operatorname{ctg}(-135^\circ) = -\operatorname{ctg} 135^\circ = 1$.

§ 13. Построение угла по данному значению его тригонометрической функции

Задача I. *Дано число m, построить угол (дугу) α, косинус которого равен m.*

Решение. Построим на оси OX точку N с абсциссой $x = m$ и проведём через неё прямую, параллельную оси OY:



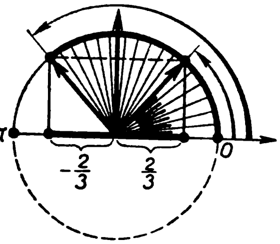
Черт. 31.

Возможны следующие случаи (черт. 31):

Случай 1°. $|m| < 1$, тогда точка $N(m, 0)$ лежит внутри единичного круга. Параллель оси OY пересечёт единичную окружность в двух различных точках, одна из которых M_1 содержится в верхней, а другая M_2 — в нижней полуокружности. Всякий угол α, для которого OM_1 либо OM_2 является конечной стороной, имеет косинус, равный m:

$$\cos\alpha = m.$$

Случай 2°. $m = \pm 1$, тогда точка $N(m, 0)$ совпадает с одним из концов горизонтального диаметра, параллель оси ординат касается единичной окружности (черт. 31,2°). Для конечной стороны искомого угла возможно лишь одно положение: OA при $m = 1$ и OA_1 при $m = -1$. Имеем соответственно $\alpha = 2k\pi$ (при $m = 1$) и $\alpha = (2k+1)\pi$ (при $m = -1$), где k — любое целое число: $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



Черт. 32.

Случай 3°. $|m| > 1$, тогда точка $N(m, 0)$ лежит вне единичного круга, и параллель оси ординат, проведённая через точку N, не пересекает единичной окружности, а потому углов, косинус которых равен m, не существует.

Из всех углов (дуг), косинус которых равен m (где $|m| \leqslant 1$), наименьший неотрицательный α_0 заключён в промежутке от 0 до π (верхняя полуплоскость); этот угол (дуга) называется главным углом (дугой) и обозначается так: $\alpha_0 = \arccos m$*.

Определение. ***Главный угол (дуга)*, $\arccos m$, *есть угол (дуга), содержащийся в промежутке от* 0 *до* π:**

$0 \leqslant \arccos m \leqslant \pi$, *косинус которого равен* m.

Если $|m| > 1$, то выражение $\arccos m$ не имеет смысла, так как углов, косинус которых равен m, не существует.

Примеры. 1) $\arccos 1 = 0$; $\arccos(-1) = \pi$; $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$; $\arccos 5$ не имеет смысла.

2) На чертеже 32 показаны углы $\arccos\frac{2}{3}$ и $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Задача II. *Дано число m, построить угол α, синус которого равен m.*

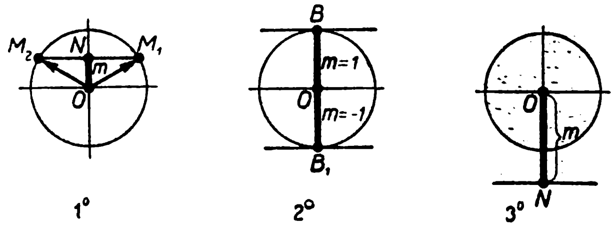
Решение аналогично решению предыдущей задачи; точка $N(0, m)$ строится на оси ординат, и через неё проводится параллель оси абсцисс (черт. 33).

Случай 1°. $|m| < 1$, тогда параллель оси OX пересечёт единичную окружность в двух точках, одна из которых M_1 содержится в правой, а другая M_2 — в левой полуокружности. Радиусы-векторы $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$ определяют два различных положения конечной стороны искомых углов.

---

* Первые три буквы arc являются сокращением латинского слова arcus — дуга. $\arccos m$ читать так: арккосинус числа m.

Случай 2°. $m = \pm 1$, тогда для конечной стороны угла α возможно одно положение: OB при $m = 1$ и OB_1 при $m = -1$. Имеем соответственно $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (при $m = 1$) и $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (при $m = -1$), где k — любое целое число.



Черт. 33.

Случай 3°. $|m| > 1$, тогда задача не имеет решения: углов, синус которых равен m, не существует.

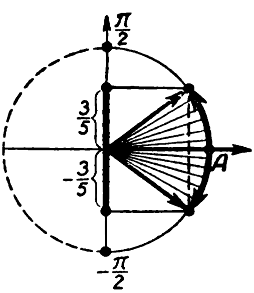
Из всех углов (дуг), синус которых равен m, где $|m| \leqslant 1$, главным считается наименьший по абсолютной величине; этот угол заключён в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ (правая полуплоскость).

Определение. ***Главный угол (дуга), $\arcsin m$, есть угол (дуга), содержащийся в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$:***

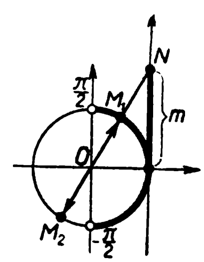
$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin m \leqslant \frac{\pi}{2},$$

синус которого равен m.

Если $|m| > 1$, то выражение $\arcsin m$ не имеет смысла.



Черт. 34.



Черт. 35.

Примеры. 1) $\arcsin 0 = 0$; $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$;

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

2) На чертеже 34 показано построение углов $\arcsin\frac{3}{5}$ и $\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$.

3) Найти (приближённо) $\arcsin 0{,}4226$. По таблицам (см. таблицы Брадиса, табл. VIII) находим (в градусной мере): $\arcsin 0{,}4226 \approx 25°$.

Задача III. *Дано число m, построить угол (дугу) α, тангенс которого равен m.*

Решение. Построим на оси тангенсов точку $N(1, m)$ с ординатой, равной m (черт. 35). Прямая, соединяющая точку N с началом координат, пересечёт единичную окружность в двух диаметрально противоположных точках M_1 и M_2, радиусы-векторы которых определяют два различных положения конечной стороны искомого угла.

Из всех углов (дуг), имеющих данный тангенс, главным считается угол, наименьший по абсолютной величине; этот угол заключён между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Определение. ***Главный угол (дуга)***, $\operatorname{arc\,tg} m$, ***есть угол (дуга), содержащийся между*** $-\frac{\pi}{2}$ ***и*** $\frac{\pi}{2}$:

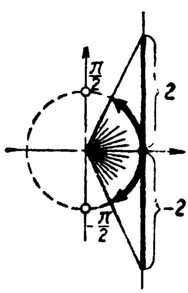
$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} m < \frac{\pi}{2}$, ***тангенс которого равен*** m.

Примеры. 1) $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$; $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$; $\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arc\,tg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

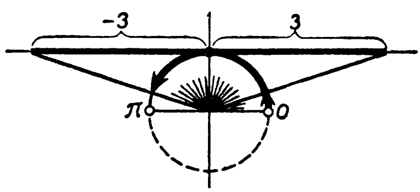
2) На чертеже 36 показано построение углов $\operatorname{arc\,tg} 2$ и $\operatorname{arc\,tg}(-2)$.

Задача IV. Дано число m, построить угол (дугу) α, котангенс которого равен m.

Решение аналогично решению предыду-



Черт. 36.



Черт. 37.

щей задачи; следует провести прямую через начало координат и через точку $N(m, 1)$, лежащую на оси котангенсов, и найти точки её пересечения с единичной окружностью. Из всех углов (дуг), имеющих данный котангенс, главным считается наименьший положительный угол, он заключён между 0 и π.

Определение. ***Главный угол (дуга)***, $\operatorname{arc\,ctg} m$, ***есть угол (дуга), содержащийся между*** 0 ***и*** π:

$0 < \operatorname{arc\,ctg} m < \pi$, ***котангенс которого равен*** m.

Примеры. 1) $\operatorname{arc\,ctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arc\,ctg} 1 = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arc\,ctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5}{6}\pi$.

2) На чертеже 37 показано построение углов $\operatorname{arc\,ctg} 3$ и $\operatorname{arc\,ctg}(-3)$.

Из изложенного следует, что ***функции*** $\cos\alpha$ ***и*** $\sin\alpha$ ***могут принимать любое действительное значение m не большее*** 1 ***по абсолютной величине.*** Таким образом:

$$|\cos\alpha| \leqslant 1; \quad |\sin\alpha| \leqslant 1,$$

или, что то же: $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$; $\quad -1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$.

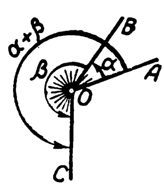
Функции $\operatorname{tg}\alpha$ ***и*** $\operatorname{ctg}\alpha$ ***могут принимать любое действительное значение.***

Глава III

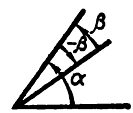
ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

§ 14. Сложение и вычитание углов

Рассмотрим два угла, измеряющиеся числами α и β. Допустим, что луч OA, повернувшись на угол α вокруг точки O, занял положение OB, а затем от положения OB, как от начального, повернулся на угол β и занял положение OC. Последовательное выполнение этих двух поворотов можно заменить одним поворотом на угол с начальной стороной OA и с конечной стороной OC, измеряющийся числом $\alpha+\beta$; этот последний угол называется суммой углов α и β (черт. 38).



Черт. 38.



Черт. 39.

Вычитание углов есть действие, обратное сложению: *разность $\alpha-\beta$ двух углов α и β есть такой угол, который в сумме с углом β даёт угол α.* Разность углов α и β можно представить как сумму угла α и угла $-\beta$, противоположного углу β. В самом деле, если луч повернётся сначала на угол α, затем на угол $-\beta$, а потом на угол β, то его конечная сторона возвратится в положение конечной стороны угла α (черт. 39):

$$[\alpha+(-\beta)]+\beta=\alpha.$$

Дуги окружности складываются и вычитаются по тем же правилам, по которым складываются и вычитаются соответствующие им центральные углы.

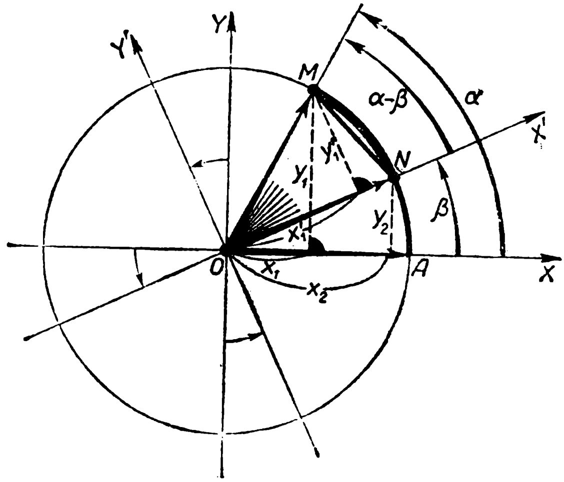
§ 15. Теорема сложения для косинуса

Теоремы сложения в тригонометрии устанавливают формулы, по которым можно, зная значения тригонометрических функций от аргументов α и β, вычислять тригонометрические функции от суммы и разности $\alpha\pm\beta$ этих аргументов.

Теорема. ***Косинус суммы (разности) двух аргументов равен произведению косинусов минус (плюс) произведение синусов данных аргументов:***

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}\qquad\begin{matrix}(\mathrm{I})\\(\mathrm{II})\end{matrix}$$

Доказательство. Докажем формулу (II). Доказательство основывается на том, что при вращении координатных осей XOY вокруг точки O длины отрезков не изменяются. Даны дуги α и β; пусть M и N — точки единичной окружности, в которых оканчиваются эти дуги: $\angle AOM=\alpha$ и $\angle AON=\beta$ (черт. 40).



Черт. 40.

В системе XOY точки M и N имеют следующие координаты:

$$x_1=\cos\alpha,\ y_1=\sin\alpha;\qquad x_2=\cos\beta,\ y_2=\sin\beta;$$

квадрат расстояния между точками M и N равен:

$$\begin{aligned}d^2&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2=\\&=(\cos^2\beta+\cos^2\alpha-2\cos\beta\cos\alpha)+(\sin^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\beta\sin\alpha)=\\&=(\cos^2\beta+\sin^2\beta)+(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\\&=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta).\end{aligned}$$

Повернём оси координат на угол β. В новом положении направление OX' оси абсцисс совпадает с направлением радиуса ON. Радиус OM составит с осью OX' угол, равный $\alpha-\beta$. В самом деле, $\angle XOX'+\angle X'OM=\angle XOM$ или $\beta+\angle X'OM=\alpha$, откуда $\angle X'OM=\alpha-\beta$.

Точки M и N в системе $X'OY'$ будут иметь следующие координаты:

$$x_1'=\cos(\alpha-\beta),\ y_1'=\sin(\alpha-\beta);\qquad x_2'=1,\ y_2'=0.$$

Вычислим квадрат расстояния между точками M и N, зная их координаты в системе $X'OY'$:

$$d^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 = [1 - \cos(\alpha - \beta)]^2 + \sin^2(\alpha - \beta) =$$
$$= [\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)] + 1 - 2\cos(\alpha - \beta) =$$
$$= 2 - 2\cos(\alpha - \beta).$$

Приравняем два найденные выражения для d^2:

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta),$$

откуда и получим формулу (II):

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Для вывода формулы (I) заменим в формуле (II) аргумент β на $-\beta$:

$$\cos\Big(\alpha - (-\beta)\Big) = \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta).$$

Воспользовавшись свойствами чётности косинуса и нечётности синуса, получим:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Доказанные формулы (I) и (II) справедливы для произвольных углов α и β. В самом деле, эти формулы доказаны на основании общего правила сложения и вычитания углов и дуг и формулы расстояния между двумя точками, а эта последняя формула справедлива при произвольном расположении точек.

Пример. Вычислить $\cos 15°$.

Решение. Так как $15° = 45° - 30°$ и известны

$$\cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 30° = \frac{1}{2}, \qquad \text{то}$$

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1) \approx 0{,}9659.$$

§ 16. Формулы дополнительных аргументов

Углы (дуги) α и β называются дополнительными до $\frac{\pi}{2}$, если их сумма равна $\frac{\pi}{2}$, т. е. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, или, что то же, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$.

Лемма. *Косинус одного из двух дополнительных до* $\frac{\pi}{2}$ *аргументов равен синусу другого:* $\cos\beta = \sin\alpha$; $\cos\alpha = \sin\beta$.

Доказательство. Воспользовавшись формулой косинуса разности, получим:

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta.$$

Подставив $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, получим доказываемые тождества, ч. т. д.

Примеры. 1) $\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

2) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 17. Теорема сложения для синуса

Теорема. ***Синус суммы (разности) двух аргументов равен произведению синуса первого аргумента на косинус второго плюс (минус) произведение косинуса первого аргумента на синус второго:***

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}}\qquad \begin{matrix}(III)\\(IV)\end{matrix}$$

Доказательство. Синус суммы $\alpha+\beta$ равен косинусу дополнительного аргумента $\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$; последний можно представить в виде разности аргумента, дополнительного до $\frac{\pi}{2}$ относительно α, и аргумента β, т. е. $\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta) = \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta$.

Следовательно,

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta =$$

(по формуле косинуса разности)

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

(по формулам дополнительных аргументов).

Заменив в выведенной формуле (III) β на $-\beta$, получим формулу для синуса разности:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$ ч. т. д.

Пример. Вычислить синус 15°.

Решение. Имеем:

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ\cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \approx 0{,}2588.$$

§ 18. Теорема сложения для тангенса

Теорема. ***При всех допустимых значениях аргументов α и β имеет место формула:***

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}} \qquad \text{(V)}$$

Разъяснение. Допустимыми значениями α и β являются все те их значения, при которых тангенсы дуг α, β и $\alpha+\beta$ имеют смысл. Следовательно, эти дуги не должны оканчиваться в концах вертикального диаметра и тогда для каждой из трёх рассматриваемых дуг значение косинуса не равно нулю.

Доказательство. Имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделив почленно числитель и знаменатель на $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$, получим формулу (V):

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cancel{\cos}\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Заменим в формуле (V) β на $-\beta$ и воспользуемся свойством нечётности тангенса, тогда получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}(\alpha+(-\beta))=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Итак:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}} \qquad \text{(VI)}$$

Пример. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

Решение.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}.$$

§ 19. О формулах сложения для нескольких аргументов

Путём последовательного применения теорем сложения для случая двух аргументов можно вывести формулы сложения для тригонометрических функций от суммы трёх, четырёх и т. д. аргументов. Так, для тригонометрических функций от суммы трёх аргументов получим:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin[(\alpha+\beta)+\gamma]=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=$$
$$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\cos\gamma+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\sin\gamma=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma;$$

и аналогично

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma;$$

и, наконец,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}.$$

§ 20. Формулы приведения

Формулами приведения называются формулы, выражающие тригонометрические функции от аргументов:

$$-\alpha;\quad \frac{\pi}{2}\pm\alpha;\quad \pi\pm\alpha;\quad \frac{3}{2}\pi\pm\alpha;\quad 2\pi\pm\alpha$$

через функции от аргумента α, где α — произвольное (допустимое) значение аргумента. Все эти формулы выписаны в таблицу, помещённую на странице 33.

Таблицей формул приведения пользуются следующим образом. Пусть, например, требуется вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$. Берём строку (вторую) с пометкой $\frac{\pi}{2}+\alpha$ и столбец (третий) с пометкой tg; на их пересечении написано $-\operatorname{ctg}\alpha$. Соответствующая формула пишется так: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$.

Формулы приведения в особом доказательстве не нуждаются. Формулы первой строки выражают свойства чётности и нечётности тригонометрических функций (см. § 12), прочие же формулы вытекают из теорем сложения для косинуса и синуса. Для образца выведем формулы для аргумента $\frac{3}{2}\pi+\alpha$. Приняв во внимание, что $\cos\frac{3}{2}\pi=0$, $\sin\frac{3}{2}\pi=-1$, получим:

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\cos\frac{3}{2}\pi\cos\alpha-\sin\frac{3}{2}\pi\sin\alpha=-(-1)\sin\alpha=\sin\alpha;$$

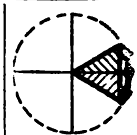
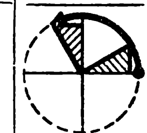
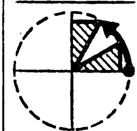
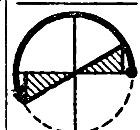
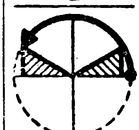
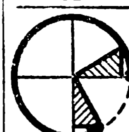
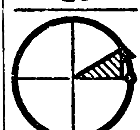
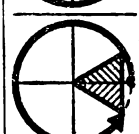
$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\frac{3}{2}\pi\cos\alpha+\cos\frac{3}{2}\pi\sin\alpha=-\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha\ *.$$

---

* Формула тангенса суммы не применима, так как $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}$ не существвует.

Функция / Аргумент / Радианы (градусы)	cos	sin	tg	ctg	
1 — α	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	
2 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ $(90°+\alpha)$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	
3 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ $(90°-\alpha)$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	
4 $\pi+\alpha$ $(180°+\alpha)$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	
5 $\pi-\alpha$ $(180°-\alpha)$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	
6 $\frac{3}{2}\pi+\alpha$ $(270°+\alpha)$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	
7 $\frac{3}{2}\pi-\alpha$ $(270°-\alpha)$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	
8 $2\pi+\alpha$ $(360°+\alpha)$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	
9 $2\pi-\alpha$ $(360°-\alpha)$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	

В последнем столбце таблицы дано геометрическое пояснение формул приведения 1—9 для **острого** угла α (равные треугольники заштрихованы).

Формулы четвёртой и восьмой строк легко вывести также и геометрически. Если к углу α прибавить π, т. е. половину полного оборота, то подвижной радиус займёт диаметрально противоположное положение. Абсцисса x и ордината y конца подвижного радиуса, т. е. косинус и синус угла, изменят знаки (не изменяя абсолютной величины) на противоположные:

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha;\quad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$$

а их отношения не изменятся:

$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Если к углу α прибавить любое целое число полных оборотов, то подвижной радиус займёт прежнее положение и координаты его конца не изменятся. Поэтому значения тригонометрических функций от аргументов α и $\alpha+2k\pi$ при любом целом $k=0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \ldots$ равны между собой:

$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha;\quad \sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+2k\pi)=\operatorname{tg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}(\alpha+2k\pi)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

При $k=1$ получатся формулы, выписанные в восьмой строке таблицы.

Формулы приведения показывают, что *в практических вычислениях достаточно знать значения тригонометрических функций лишь острых углов (и даже не бо́льших 45°).*

В самом деле, пусть β — произвольный угол. Если угол β **отрицательный**, то (воспользовавшись свойством чётности и нечётности) можно выразить значения его тригонометрических функций угла через их значения от **положительного** угла $-\beta$.

Пусть β — любой **положительный** угол. Если $\beta>360°$, то можно исключить целое число полных оборотов и выразить тригонометрические функции угла β через тригонометрические функции положительного угла, меньшего 360°.

Пусть β — любой положительный угол, **меньший** 360°. Рассмотрим два острые угла, которые образует конечная сторона угла β с осями координат. Обозначим через α какой-либо из этих углов (наименьший из них не больше 45°). При помощи соответствующих формул приведения можно выразить тригонометрические функции угла β через тригонометрические функции угла α.

Пример. Вычислить $\cos(-1000°)$.

Решение: $\cos(-1000°)=\cos 1000°=$	(чётность косинуса)
$=\cos(2\cdot 360°+280°)=\cos 280°=$	(исключение полных оборотов)
$=\cos(270°+10°)=\sin 10°\approx$	(по формуле приведения)
$\approx 0{,}1736$	(таблица VIII В. М. Брадиса)

При пользовании формулами приведения можно руководствоваться следующим правилом.

Правило. *Если угол α откладывается от горизонтального диаметра (формулы для углов $-\alpha$, $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$), то функции в обеих частях равенства имеют одно и то же наименование; если угол α откладывается от вертикального диаметра $\left(\text{формулы для углов } \frac{\pi}{2} \pm \alpha,\ \frac{3}{2}\pi \pm \alpha\right)$, то функции в обеих частях равенства имеют сходные наименования (синус и косинус, тангенс и котангенс);*

чтобы определить знак, с которым следует взять тригонометрическую функцию в правой части, достаточно, считая угол α острым, определить искомый знак по знаку левой части.

Пример. Составить формулу приведения для $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$.

Решение. Так как угол α откладывается от вертикального диаметра, то в правой части следует поставить котангенс. Будучи верной при всех (допустимых) значениях α, формула верна и для острого угла, но если α острый угол, то угол $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ оканчивается в III четверти, в которой тангенс положителен; следовательно, $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$ (проверить по таблице).

§ 21. Формулы удвоения аргумента

Формулы удвоения аргумента выражают тригонометрические функции от двойного аргумента 2α через тригонометрические функции от аргумента α.

Положив в формулах сложения для косинуса $\alpha = \beta$, получим:

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Итак, ***косинус двойного аргумента равен разности квадратов косинуса и синуса данного аргумента:***

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \qquad \text{(VII)}$$

Положив $\alpha = \beta$ в формулах сложения для синуса, получим:

$$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Итак, ***синус двойного аргумента равен удвоенному произведению синуса и косинуса данного аргумента:***

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha} \qquad \text{(VIII)}$$

Аналогично выводится формула удвоения аргумента для тангенса:

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}} \qquad \text{(IX)}$$

Пример.

$$\cos 120^\circ = \cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}.$$

Путём последовательного применения формул сложения можно получить формулы для тригонометрических функций кратного аргумента, т. е. 3α, 4α и т. д.

Пример.

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha =$$
$$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Заменив $\sin^2\alpha$ на $1 - \cos^2\alpha$, получим:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha =$$
$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha.$$

Заменив $\cos^2\alpha$ на $1 - \sin^2\alpha$, получим:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

§ 22. Формулы деления аргумента пополам

Формулы деления аргумента пополам выражают тригонометрические функции половинного аргумента $\frac{\alpha}{2}$ *через тригонометрические функции аргумента* α.

Заменим в формуле косинуса двойного аргумента аргумент α половинным аргументом $\frac{\alpha}{2}$:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Присоединив основное тождество

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad (2)$$

сложим и вычтем почленно тождества (1) и (2); тогда получим:

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha; \qquad 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha,$$

откуда найдём:

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} \qquad (X)$$

и

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}} \qquad (XI)$$

Разделив почленно тождество (XI) на (X), получим:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}} \qquad \text{(XII)}$$

Знаки перед радикалами выбираются в соответствии с тем, в какой четверти оканчивается угол $\frac{\alpha}{2}$.

Примеры. 1) Вычислить

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sin 22^\circ{,}5 \quad \text{и} \quad \cos\frac{\pi}{8}=\cos 22^\circ{,}5.$$

Решение. Так как $\cos\frac{\pi}{4}=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, то

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\ \sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Знак перед радикалами $+$, так как угол $\frac{\pi}{8}$ острый.

2) Дано $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, где $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$; вычислить $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Решение. Находим $\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$. Так как угол $\frac{\alpha}{2}$ оканчивается во второй четверти, то $\cos\frac{\alpha}{2}<0$, $\sin\frac{\alpha}{2}>0$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<0$. Имеем:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{10};\ \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-3.$$

§ 23. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

Сложим почленно тождества:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad \text{(II)}$$

и

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \qquad \text{(I)}$$

затем переставим между собой левую и правую части полученного равенства и разделим их на 2.

Таким образом, мы получим следующую формулу преобразования произведения двух косинусов в сумму:

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}} \qquad \text{(XIII)}$$

Произведение двух косинусов равно полусумме косинуса разности и косинуса суммы их аргументов.

Если из тождества (II) вычесть почленно тождество (I), то получим формулу преобразования произведения синусов:

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}} \qquad \text{(XIV)}$$

Произведение двух синусов равно полуразности косинуса разности и косинуса суммы их аргументов.

Сложив почленно формулы $\sin(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha-\beta)$, получим формулу преобразования произведения синуса на косинус:

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}} \qquad \text{(XV)}$$

Произведение синуса на косинус равно полусумме синуса суммы и синуса разности их аргументов.

Следствие. Если $\alpha=\beta$, то получатся формулы:

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha;\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};\quad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Последовательным применением выведенных формул можно преобразовать в сумму любое произведение синусов и косинусов и их степеней (с целыми положительными показателями).

Примеры. 1. Преобразовать в сумму произведение $\cos 2\alpha\cos 4\alpha$.

Решение. $\cos 4\alpha\cos 2\alpha=\frac{\cos 6\alpha+\cos 2\alpha}{2}$.

2. Преобразовать в сумму $\sin^4\alpha\cos^2\alpha$.

Решение.

$$\sin^4\alpha\cos^2\alpha=\sin^2\alpha(\sin\alpha\cos\alpha)^2=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\cdot\frac{\sin^2 2\alpha}{4}=$$

$$=\frac{1}{8}(1-\cos 2\alpha)\left(\frac{1-\cos 4\alpha}{2}\right)=\frac{1}{16}(1-\cos 2\alpha-\cos 4\alpha+\cos 2\alpha\cos 4\alpha)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(1-\cos 2\alpha-\cos 4\alpha+\frac{\cos 6\alpha+\cos 2\alpha}{2}\right)=\frac{1}{16}-\frac{\cos 2\alpha}{32}-\frac{\cos 4\alpha}{16}+\frac{\cos 6\alpha}{32}.$$

§ 24. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение позволяют представить сумму и разность двух тригонометрических функций в виде произведения тригонометрических функций (но от некоторых других аргументов).

Формула суммы двух косинусов:

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad \text{(XVI)}$$

Сумма двух косинусов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на косинус полуразности их аргументов.

Для доказательства достаточно произведение, находящееся в правой части равенства (XVI), преобразовать в сумму:

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=$$

$$=2\frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2}=\cos\alpha+\cos\beta,$$

ч. т. д.

Таким же способом доказываются следующие три формулы:

Формула суммы двух синусов:

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad \text{(XVII)}$$

Сумма двух синусов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на косинус полуразности их аргументов.

Формула разности косинусов:

$$\boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad \text{(XVIII)}$$

Разность двух косинусов равна минус удвоенному произведению синуса полусуммы на синус полуразности их аргументов.

Формула разности синусов:

$$\boxed{\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad \text{(XIX)}$$

Разность двух синусов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на синус полуразности их аргументов.

Формулы суммы и разности тангенсов:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}} \qquad \text{(XX)}$$

и

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}} \qquad \text{(XXI)}$$

Для углов (дуг) α и β допустимыми являются произвольные значения, отличные от $\frac{\pi}{2}+k\pi$. При всех допустимых значениях α и β функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ имеют смысл и $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$.

Для доказательства выполним следующие преобразования:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Тем же способом доказывается тождество (XXI).

Формулы (XVI)—(XXI) называются также формулами приведения к логарифмическому виду, так как при вычислениях при помощи логарифмических таблиц и логарифмической линейки удобно вычислять произведения, но не суммы и разности.

Сумма $1\pm\cos\alpha$ преобразуется в произведение по формулам (XVI) и (XVIII). Приняв во внимание, что $1=\cos 0$, получим $1\pm\cos\alpha=\cos 0\pm\cos\alpha$ и окончательно

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2};\quad 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Примеры. Преобразовать в произведение:

1) $\sin 24°+\sin 22°=2\sin 23°\cos 1°$;

2) $\sin\alpha+\cos\beta=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right);$$

3) $1-\sin\alpha=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\alpha=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=$

$$=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

(аргументы $\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}$ дополняют друг друга до $\frac{\pi}{2}$).

§ 25. Преобразование в произведение выражения $a\sin\alpha+b\cos\alpha$

Предположим, что числа a и b не равны нулю. Построим на плоскости точку M (a, b) с абсциссой, равной a, и ординатой, равной b. Длина радиуса-вектора $\overline{OM}$ равна $r=\sqrt{a^2+b^2}$. Косинус и синус угла φ, образованного $\overline{OM}$ с осью абсцисс, равны:

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Выполним следующие преобразования:

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi).$$

Итак:

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi).$$

Угол φ называется вспомогательным углом.

Примеры.

1) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$

$$=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right);$$

2) $2\sin\alpha-3\cos\alpha=\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\sin\alpha-\frac{3}{\sqrt{13}}\cos\alpha\right)=\sqrt{13}\sin(\alpha+\varphi),$

где:

$$\varphi=\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}=\arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}\approx\arccos 0{,}5547\approx 56^\circ 18'$$

(находим по таблицам).

§ 26. Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента

Теорема. ***Если*** $\alpha\neq(2k+1)\pi$ ***(где*** k ***— целое число), то*** $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ***и*** $\operatorname{tg}\alpha$ ***выражаются рационально* через*** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ***по следующим формулам:***

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Доказательство. По формулам удвоения имеем:

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2};\quad \cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

или

$$\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

(знаменатель тождественно равен 1). Так как $\alpha\neq\pi+2k\pi$, то $\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ и, следовательно, $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$. Разделив числители и знаменатели правых частей последних тождеств на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, получим два первые тождества. Разделив друг на друга почленно эти тождества, получим третью формулу.

---

* Рационально, т. е. в виде алгебраических выражений, не содержащих радикалы.

Глава IV

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 27. Тригонометрические функции числового аргумента и области их определения

В предыдущих главах аргументом тригонометрической функции считался угол или дуга, но можно рассматривать этот аргумент и как число, а именно: *считать аргументом тригонометрической функции не сам угол (дугу), а число, выражающее его величину*. При этом принято дуги и углы измерять в радианах. Так, например, $\cos 2$ (т. е. косинус числа 2) есть косинус угла, измеряющегося двумя радианами; $\sin 20$ есть синус угла, измеряющегося двадцатью радианами.

В настоящей главе мы будем изучать свойства тригонометрических функций числового аргумента.

Понятие функции известно из алгебры. Утверждение, что y есть функция от аргумента x, означает следующее: существует закон соответствия, по которому всякому значению аргумента x соответствует некоторое определённое значение функции y.

Множество всех значений аргумента называется областью определения данной функции.

Тригонометрические функции имеют следующие области определения.

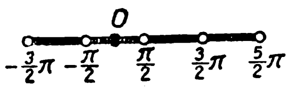
1°. Каждая из функций $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ имеет определённое значение при произвольном численном значении аргумента α. В самом деле, на единичной окружности от начальной точки $A(1, 0)$ можно отложить дугу, измеряющуюся любым числом α; координаты её конца x и y суть значения функций $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

Итак, ***областью определения функций*** $\cos\alpha$ ***и*** $\sin\alpha$ ***является множество всех действительных чисел.***

2°. Функция $\operatorname{tg}\alpha$ имеет определённое значение для любой дуги, кроме дуг, измеряющихся числами $\frac{\pi}{2}+k\pi$ (где k — целое число); эти последние дуги не имеют тангенса.

Областью определения тангенса является множество всех действительных чисел, не равных $\frac{\pi}{2}+k\pi$.

Если из множества всех действительных чисел исключить числа вида $\frac{\pi}{2}+k\pi$, то останется бесконечное множество интервалов *:



Черт. 41.

$$\ldots, \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right), \ldots \text{ (черт. 41).}$$

3°. ***Областью определения функции*** $\operatorname{ctg}\alpha$ ***служит множество всех действительных чисел, не равных*** $k\pi$, т. е. бесконечное множество интервалов: $\ldots, (-\pi, 0), (0, \pi), (\pi, 2\pi), \ldots$ (дуги, измеряющиеся числами $k\pi$, не имеют котангенса).

§ 28. Свойство ограниченности и неограниченности тригонометрических функций

Функция называется ограниченной (в области её определения), если существует такое положительное число M, что значения функции по абсолютной величине не больше числа M при всех значениях аргумента. Если функция может принимать как угодно бо́льшие значения по абсолютной величине, то она называется неограниченной.

Ограниченность и неограниченность тригонометрических функций следует из их свойств, установленных в § 13, а именно: ***функции*** $\cos\alpha$ ***и*** $\sin\alpha$ ***ограничены, так как их значения по абсолютной величине не больше*** 1 (см. стр. 26):

$$|\cos\alpha| \leqslant 1, \qquad |\sin\alpha| \leqslant 1.$$

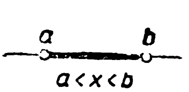
Функции $\operatorname{tg}\alpha$ ***и*** $\operatorname{ctg}\alpha$ ***неограничены, так как каждая из них может принимать любое действительное значение.***

§ 29. Интервалы знакопостоянства

Если при всех значениях аргумента, принадлежащих некоторому числовому промежутку, значения функции одинаковы по знаку (положительны или отрицательны), то этот промежуток называется промежутком знакопостоянства данной функции.

---

* Напоминаем определение интервала. Пусть a и b — два действительных числа и $a < b$. *Интервалом от a до b называется множество всех действительных чисел x, заключённых между a и b,* т. е. $a < x < b$. На числовой прямой (черт. 42) интервал изображается отрезком, ограниченным точками a и b, причём сами эти точки к интервалу не причисляются. Интервал от a до b обозначается так: (a, b).



Черт. 42.

На основании сказанного в § 9 имеем:

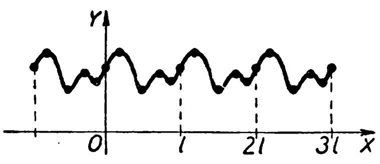
1°. *В интервалах* $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ *(где k — любое целое число) функция* $\cos\alpha$ *положительна.* В самом деле, если $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi$, то угол, измеряющийся числом α, оканчивается в правой полуплоскости, а потому $\cos\alpha>0$. *В интервалах* $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)$ *(левая полуокружность) косинус отрицателен.*

2°. *В интервалах* $\left(2k\pi, (2k+1)\pi\right)$ *(верхняя полуокружность) функция* $\sin\alpha$ *положительна, а в интервалах* $(-\pi+2k\pi,\ 2k\pi)$ *(нижняя полуокружность) отрицательна.*

3°. *В интервалах* $\left(k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ *(при k — чётном I четверть, а при k — нечётном III четверть) функции* $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ *положительны, а в интервалах* $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\pi\right)$ *(при k — чётном IV четверть, а при k — нечётном II четверть) отрицательны.*

§ 30. Свойство периодичности тригонометрических функций

Функция называется периодической, если существует такое число $l\neq 0$, называемое периодом, что значение функции не изменяется при прибавлении (или вычитании) этого числа к любому значению её аргумента.



Черт. 43.

На чертеже 43 изображён график периодической функции, он состоит из бесконечного множества „повторяющихся“ дуг.

Периодические функции имеют большое значение в физике, механике и технике при изучении различных периодических процессов (колебания, движения механизмов, сила переменного электрического тока и т. п.).

Теорема 1°. *Тригонометрические функции являются периодическими с общим периодом* 2π.

2°. *Наименьший положительный период функций* $\cos\alpha$ ***и*** $\sin\alpha$ ***равен*** 2π.

3°. *Наименьший положительный период функций* $\operatorname{tg}\alpha$ ***и*** $\operatorname{ctg}\alpha$ ***равен*** π.

Доказательство. Значения любой тригонометрической функции от аргументов α и $\alpha+2k\pi$ (где k — любое целое число) одинаковы (см. стр. 34):

$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha,\ \sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha,\ \text{и т. д.};$$

следовательно, каждое из чисел $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi$ и т. д. является **общим периодом** всех четырёх тригонометрических функций. В частности, 2π есть их общий период.

Для функции $\cos\alpha$ число 2π есть **наименьший положительный** период. Допустим противное, что положительное число l, меньшее 2π, есть период косинуса; тогда равенство $\cos(\alpha+l)=\cos\alpha$ имеет место при всех значениях аргумента α. Положив в этом тождестве $\alpha=0$, получим $\cos l=1$, что невозможно, так как положительная дуга, измеряющаяся числом l, меньшим 2π, не оканчивается в точке A (1, 0), а потому её косинус не равен 1.

Аналогично доказывается, что 2π есть наименьший положительный период синуса: если выполняется тождество $\sin(\alpha+l)=$ $=\sin\alpha$, то при $\alpha=\frac{\pi}{2}$ получим $\sin\left(\frac{\pi}{2}+l\right)=\cos l=1$; но при $0<l<2\pi$ последнее равенство невозможно.

Функция $\operatorname{tg}\alpha$ имеет период π, так как при любом значении аргумента α:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\operatorname{tg}\alpha, \quad \text{где} \quad \alpha\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Число π есть **наименьший положительный** период тангенса. В самом деле, если бы положительное число l, меньшее π, было периодом тангенса, то, положив $\alpha=0$ в тождестве $\operatorname{tg}(\alpha+l)=\operatorname{tg}\alpha$, мы получили бы $\operatorname{tg}l=0$, что при $0<l<\pi$ не имеет места.

Аналогично доказывается, что число π есть **наименьший положительный** период котангенса.

Наименьший положительный период функции кратко называют её **периодом**. Поэтому говорят, ***что*** 2π ***есть период косинуса и синуса, а*** π ***есть период тангенса и котангенса.***

Свойство периодичности **упрощает** исследование тригонометрических функций, так как *для изучения свойств периодической функции достаточно изучить её свойства в каком-либо промежутке, равном по длине её периоду.*

§ 31. Промежутки монотонности тригонометрических функций

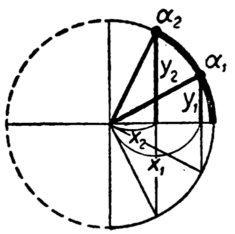
Функция называется возрастающей в некотором числовом промежутке, если при любых двух различных значениях аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция называется убывающей в некотором промежутке, если при любых двух различных значениях аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Функции возрастающие и убывающие относятся к классу **монотонных функций.**

Найдём промежутки возрастания и убывания для каждой тригонометрической функции в отдельности.

Функция $\cos\alpha$. Если значения аргумента α_1 и α_2 принадлежат первой четверти и $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $x_1 = \cos\alpha_1$ и $x_2 = \cos\alpha_2$ суть расстояния от центра единичного круга до хорд, стягивающих дуги, равные по длине $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$ (черт. 44).



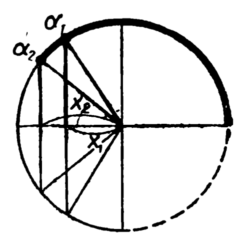
Черт. 44.

Из двух хорд, стягивающих две дуги (не бо́льшие полуокружности), хорда, стягивающая бо́льшую дугу, расположена ближе к центру; поэтому при $\alpha_1 < \alpha_2$ имеем $x_1 > x_2$.

Итак: $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2$, если $\alpha_1 < \alpha_2$, т. е. большему значению аргумента в I четверти соответствует меньшее значение косинуса. *Следовательно, в I четверти функция* $\cos\alpha$ *убывает.*

Наибольшее и наименьшее значения косинус имеет в граничных точках I четверти: 1 при $\alpha = 0$ и 0 при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Если значения аргумента α_1 и α_2 принадлежат II четверти и $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \pi$, то, выполнив построение (черт. 45), увидим, что расстояние от центра круга до хорды, соответствующей дуге α_1, меньше расстояния от центра до хорды, соответствующей дуге α_2. Эти расстояния равны абсолютным величинам $|x_1|$ и $|x_2|$ абсцисс концов дуг α_1 и α_2, а потому $|x_1| < |x_2|$. Так как абсциссы точек второй четверти отрицательны, то $x_1 > x_2$. Следовательно, $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2$, т. е. *во второй четверти функция* $\cos\alpha$ *убывает.*



Черт. 45.

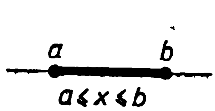
Наибольшее и наименьшее значения косинус принимает в граничных точках II четверти: 0 при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и -1 при $\alpha = \pi$.

Будучи убывающей в I и II четвертях, функция $\cos\alpha$ убывает в верхней полуокружности; наибольшее и наименьшее значения $\cos 0 = 1$ и $\cos\pi = -1$ она принимает в граничных точках верхней полуокружности. Всякое значение m, заключённое между -1 и 1, функция $\cos\alpha$ принимает при главном значении аргумента $\alpha = \arccos m$.

Числовому сегменту* $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ соответствует верхняя полуокружность (включая граничные точки).

---

* Пусть a и b — два действительных числа и $a < b$ (черт. 46); *числовым сегментом от a до b (не смешивать с круговым сегментом) называется множество, состоящее из всех действительных чисел, заключённых между a и b, и самих чисел a и b*, т. е. множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравен-



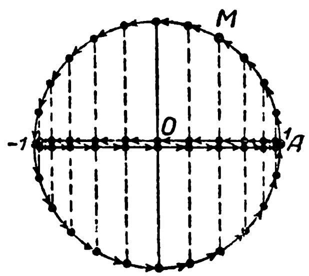
Черт. 46.

Установленные свойства функции $\cos\alpha$ формулируют так: ***на сегменте*** $[0, \pi]$ ***функция*** $\cos\alpha$ ***убывает от*** 1 ***до*** -1.

Рассмотрев функции $\cos\alpha$ в нижней полуокружности, можно показать, что на ***сегменте*** $-\pi \leqslant \alpha \leqslant 0$ ***(нижняя полуокружность) функция*** $\cos\alpha$ ***возрастает от*** -1 ***до*** 1.

Будучи периодической с периодом 2π, *функция* $\cos\alpha$ *убывает от* 1 *до* -1 *на всяком сегменте* $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ *(верхняя полуокружность) и возрастает от* -1 *до* 1 *на всяком сегменте* $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ *(нижняя полуокружность)*.

Если точка M движется в положительном направлении по единичной окружности, то её проекция на ось абсцисс движется вдоль горизонтального диаметра (черт. 47). Если точка M описывает верхнюю полуокружность, то её проекция описывает горизонтальный диаметр справа налево, а её абсцисса, т. е. косинус дуги $\alpha = AM$, убывает от 1 до -1. Если точка M описывает нижнюю полуокружность, то её проекция на ось абсцисс описывает горизонтальный диаметр слева направо; при этом абсцисса точки M возрастает от -1 до 1.



Черт. 47.

Если точка M движется равномерно по окружности, то её проекция на прямую совершает периодическое движение, называемое в физике гармоническим колебанием. Гармоническое колебание рассматривается как простейший вид периодического движения.

Функция $\sin\alpha$. Если значения аргумента α_1 и α_2 принадлежат первой четверти и $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, то (черт. 44) бо́льшую дугу стягивает бо́льшая хорда, а потому $2y_1 < 2y_2$ и $y_1 < y_2$. Так как $y_1 = \sin\alpha_1$, $y_2 = \sin\alpha_2$, то

$$\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2, \quad \text{если} \quad \alpha_1 < \alpha_2.$$

Итак, в I четверти большему значению аргумента соответствует большее значение синуса.

В первой четверти функция $\sin\alpha$ *возрастает от* 0 *до* 1.

Рассмотрев функцию $\sin\alpha$ в IV четверти, покажем, что в этой четверти она возрастает от -1 до 0.

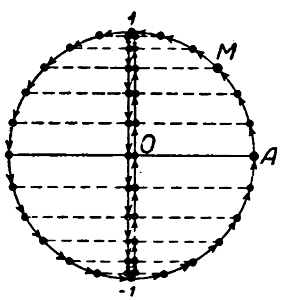
I и IV четверти в совокупности составляют правую полуокружность. ***На сегменте*** $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ ***(правая полуокружность) функция*** $\sin\alpha$ ***возрастает от*** -1 ***до*** 1.

ствам $a \leqslant x \leqslant b$. На числовой прямой сегмент изображается отрезком, ограниченным точками a и b, причём сами эти точки причисляются к сегменту. Сегмент от a до b обозначается так: $[a, b]$.

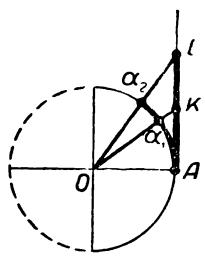
Из рассмотрения функции $\sin\alpha$ в левой полуокружности следует, что ***на сегменте*** $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ ***функция*** $\sin\alpha$ ***убывает от 1 до —1.***

Будучи периодической с периодом 2π, *функция* $\sin\alpha$ *возрастает от* -1 *до* 1 *на всяком сегменте* $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ *(правая полуокружность) и убывает от* 1 *до* -1 *на всяком сегменте* $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right]$ *(левая полуокружность).*

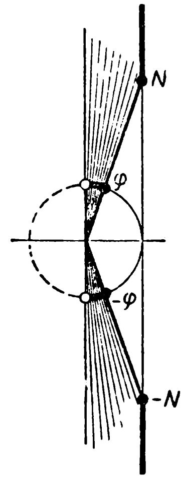
При движении точки M в положительном направлении по правой полуокружности её проекция на ось ординат описывает вертикальный диаметр снизу вверх, а ордината точки M, т. е. синус дуги AM, возрастает от -1 до 1. При движении точки по левой полуокружности её проекция описывает вертикальный диаметр сверху вниз, а ордината убывает от 1 до -1 (черт. 48).



Черт. 48



Черт. 49.



Черт. 50.

Функция $\operatorname{tg}\alpha$. Если значения аргумента α_1 и α_2 принадлежат первой четверти и $0<\alpha_1<\alpha_2<\frac{\pi}{2}$, то, построив на оси тангенсов соответствующие точки, получим треугольники OAK и OAL (черт. 49) с углами α_1 и α_2 при вершине O. Так как $\alpha_2>\alpha_1$, то прямая OL располагается вне треугольника OAK и пересекает в точке L продолжение стороны AK. Поэтому $AK<AL$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha_1<\operatorname{tg}\alpha_2$. Следовательно, *функция* $\operatorname{tg}\alpha$ *в первой четверти возрастает.*

Пусть N — произвольное заданное (как угодно большое) положительное число. Построим на оси тангенсов точку $(1, N)$ (черт. 50) и соответствующую дугу $\varphi=\operatorname{arc\,tg} N$ единичной окружности. Если дуга, измеряющаяся числом α, оканчивается между точками φ и $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\alpha>N$.

Итак, *при любом заданном положительном числе* N *и при всех значениях аргумента* α*, достаточно близких к* $\frac{\pi}{2}$*, но мень-*

ших, чем $\frac{\pi}{2}$ $\left(\textit{а именно } \operatorname{arc\,tg} N < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, *значения тангенса больше, чем* N. Это свойство тангенса записывается так:

$$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \alpha = +\infty \qquad \left(\text{при } \alpha < \frac{\pi}{2}\right)^{*}.$$

Рассмотрев функцию $\operatorname{tg} \alpha$ в IV четверти, можно показать, что, во-первых, в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ она возрастает, будучи отрицательной, и, во-вторых, что при любом заданном числе $N > 0$ её значения меньше, чем $-N$:

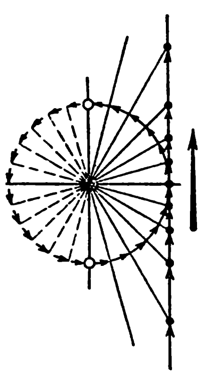
$$\operatorname{tg} \alpha < -N, \quad \text{если} \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < -\operatorname{arc\,tg} N.$$

Последнее свойство тангенса записывается так:

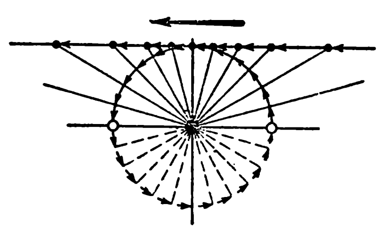
$$\lim_{\alpha \to -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \alpha = -\infty \qquad \left(\text{при } \alpha > -\frac{\pi}{2}\right).$$

В интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (правая полуокружность) функция $\operatorname{tg} \alpha$ возрастает и принимает произвольное действительное значение m при $\alpha = \operatorname{arc\,tg} m$. Принято говорить, что ***в интервале*** $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ***функция*** $\operatorname{tg} \alpha$ ***возрастает от*** $-\infty$ ***(минус бесконечности) до*** $+\infty$ ***(плюс бесконечности).***

Будучи периодической с периодом π, *функция* $\operatorname{tg} \alpha$ *возрастает от* $-\infty$ *до* $+\infty$ *в каждом интервале* $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, *из которых состоит её область определения.*



Черт. 51.



Черт. 52.

При движении точки в положительном направлении (черт. 51) как по правой, так и по левой полуокружности её центральная проекция из начала координат на ось тангенсов движется снизу вверх, а ордината проекции возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

* Читать так: $\operatorname{tg} \alpha$ стремится к плюс бесконечности, если α стремится к $\frac{\pi}{2}$, будучи меньшим, чем $\frac{\pi}{2}$.

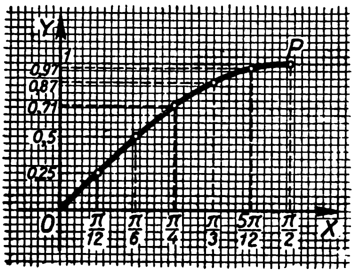
Функция $\operatorname{ctg}\alpha$ в каждом из интервалов $\left(k\pi, (k+1)\pi\right)$, из которых состоит область её определения, убывает от $+\infty$ до $-\infty$ (черт. 52).

Исследовать котангенс можно тем же способом, каким был исследован тангенс.

§ 32. Графики тригонометрических функций

Построение графиков функций известно из алгебры.

Ниже даётся построение графиков тригонометрических функций.



Черт. 53.

При построении графика значение аргумента изображается точками оси абсцисс (а не единичной окружности); поэтому аргумент тригонометрической функции будем обозначать буквой x (вместо α).

Синусоида (обыкновенная)— так называется график функции $y=\sin x$. Функция $y=\sin x$ на сегменте $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \approx 1,57$ (I четверть) возрастает от 0 до 1; следовательно, линия „поднимается вверх" от точки $O\,(0, 0)$ до точки $P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Для построения промежуточных точек графика можно составить, например, такую таблицу значения синуса (черт. 53):

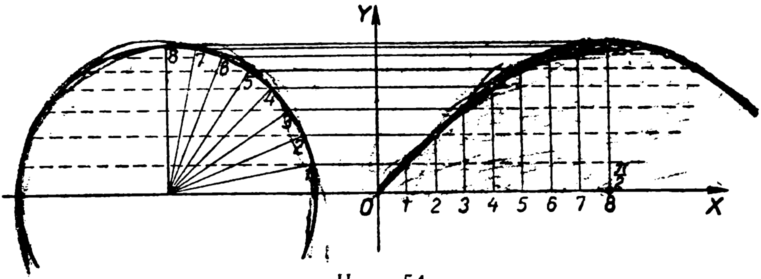
x	0	$\frac{\pi}{12} \approx 0,26$ (15°)	$\frac{\pi}{6} \approx 0,52$ (30°)	$\frac{\pi}{4} \approx 0,78$ (45°)	$\frac{\pi}{3} \approx 1,05$ (60°)	$\frac{5\pi}{12} \approx 1,31$ (75°)	$\frac{\pi}{2} \approx 1,57$ (90°)
$y=\sin x$	0	0,26	0,50	0,71	0,87	0,97	1

Значения синуса взяты из таблиц В. М. Брадиса (округлить, сохранив два десятичных знака).

Построить синусоиду с любой степенью точности можно и геометрически. Первая четверть (черт. 54) единичной окружности и отрезок оси абсцисс $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \approx 1,57$, равный по длине четверти окружности, разделены на одинаковое количество равных частей (на чертеже 54 на 8 частей)*. Перпендикуляры, опущенные из точек деления окружности на ось OX (по длине равные значениям синуса), перенесены и восставлены из соответствующих

* Чтобы не загромождать чертёж, единичная окружность перенесена влево и её центр не находится в начале координат.

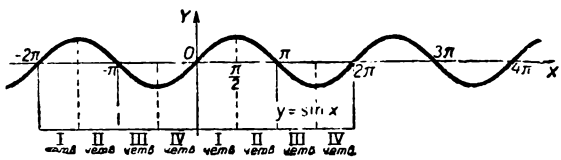
точек отрезка $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ оси абсцисс. Концы этих перпендикуляров принадлежат синусоиде; для практического построения синусоиды их следует соединить плавной линией при помощи лекала.



Черт. 54.

Во второй четверти $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$ синус убывает от 1 до 0. Из геометрического построения видно, что график синуса во второй четверти симметричен его графику в первой четверти относительно параллели оси ординат, проходящей через точку $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

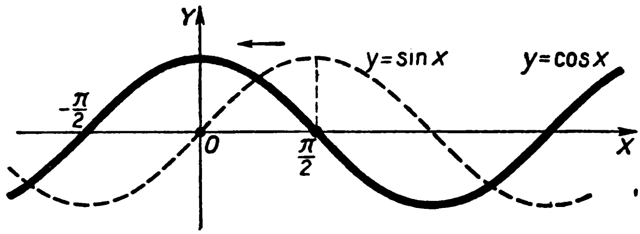
Из свойства нечётности синуса следует, что точки синусоиды $x, y = \sin x$ и $-x, -y = \sin(-x)$, соответствующие взаимно противоположным значениям аргумента, симметричны относительно начала координат. Следовательно, *синусоида есть линия, симметричная относительно начала координат.* Поэтому, построив график синуса на сегменте $[0, \pi]$, можно построить его и на сегменте $[-\pi, 0]$. Сегмент $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ равен по длине периоду синуса; поэтому для построения всей синусоиды достаточно её часть, построенную для этого сегмента, последовательно перенести вправо и влево на расстояния 2π, 4π, 6π... Таким образом, получается волнообразная линия (черт. 55), состоящая из одинаковых, периодически повторяющихся дуг.



Черт. 55.

Графиком функции $y = \cos x$ также служит синусоида. В самом деле, из формулы приведения $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ следует, что ордината графика косинуса в точке с абсциссой x равна ординате обыкновенной синусоиды в точке с абсциссой $x + \frac{\pi}{2}$. Так, в частности, при $x = 0$ ордината графика равна

$\cos 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$; при $x = \frac{\pi}{4}$ ордината равна $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; при $x = \frac{\pi}{2}$ ордината равна $\sin\pi = 0$. Весь график (черт. 56) может быть получен параллельным переносом синусоиды (на чертеже 56 показана пунктиром) в направлении оси абсцисс влево на расстояние $\frac{\pi}{2}$, что соответствует прибавлению к аргументу x слагаемого $\frac{\pi}{2}$.



Черт. 56.

Свойство чётности $\cos x = \cos(-x)$ показывает, что *линия симметрична относительно оси OY*.

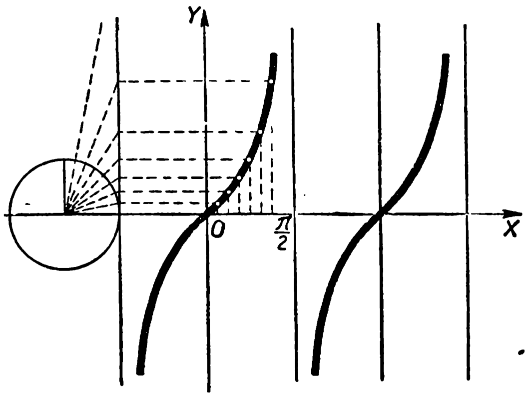
Тангенсоида — так называется график функции $y = \operatorname{tg} x$. В промежутке $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает от 0 до ∞. Для построения точек графика можно составить, например, такую таблицу значений тангенса (см. таблицы Брадиса):

x	0	$\frac{\pi}{12}$ (15°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{5\pi}{12}$ (75°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
y	0	0,27	0,58	1,00	1,73	3,73	—

Геометрическое построение тангенсоиды в промежутке $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ показано на чертеже 57. Первая четверть единичной окружности и отрезок оси абсцисс от 0 до $\frac{\pi}{2}$ разделены на некоторое число равных частей (на чертеже 57 на 8 частей). Точки деления окружности проектируются из центра круга на ось тангенсов, а затем отрезки оси тангенсов переносятся в виде перпендикуляров, восставленных из соответствующих точек оси абсцисс. Концы этих перпендикуляров следует соединить плавной линией.

Из свойства нечётности функции $\operatorname{tg} x$ следует, что её *график симметричен относительно начала координат*. Поэтому, построив график в промежутке $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, можно продолжить его по симметрии и на промежуток $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ (IV четверть).

Интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ равен по длине периоду тангенса; для построения всей тангенсоиды достаточно полученную ветвь последовательно перенести вправо и влево на расстояния π, 2π, 3π,...



Черт. 57.

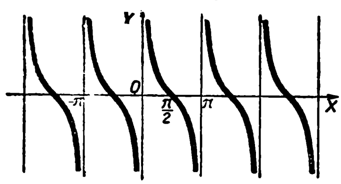
Таким образом получится линия, состоящая из бесконечного множества одинаковых, периодически повторяющихся ветвей.

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ изображён на чертеже 58. Для его построения следует принять во внимание, что в интервале $0 < x < \pi$ функция $\operatorname{ctg} x$ убывает от ∞ до $-\infty$. Для построения отдельных точек следует составить таблицу значений.

Примеры построения графиков функций.

1. Построить график функции $y = 3 \sin x$.

Решение. Достаточно заметить, что при данном значении x ордината графика $y = 3 \sin x$ равна утроенной ординате обыкновенной синусоиды. Следовательно, график — деформированная синусоида — может быть получен растяжением всех ординат обыкновенной синусоиды в три раза (черт. 59, пунктиром намечена обыкновенная синусоида).



$y = \operatorname{ctg} x$

Черт. 58.

Функция $y = 3 \sin x$ имеет те же промежутки знакопостоянства и тот же период 2π, как и функция $y = \sin x$. Наибольшее и наименьшее её значения суть ± 3.

2. Построить график функции $y = \sin 2x$.

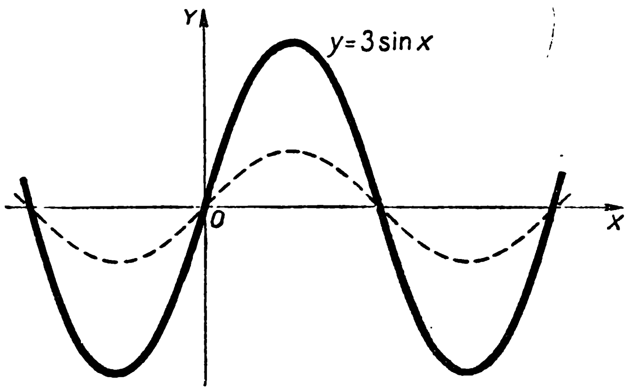
Решение. Достаточно заметить, что при данном значении x значение функции $\sin 2x$ равно ординате обыкновенной синусоиды в точке с удвоенной абсциссой $2x$. Так, в частности, при

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{имеем} \quad y = \sin 2\,\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{при } x = \frac{\pi}{4} \quad \text{имеем} \quad y = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Следовательно, искомый график — деформированная синусоида — может быть получен из обыкновенной синусоиды путём её сжатия в направлении оси абсцисс в два раза (черт. 60).

Функция $\sin 2x$ периодическая с периодом π, так как её значение не изменяется от прибавления числа π к её аргументу:

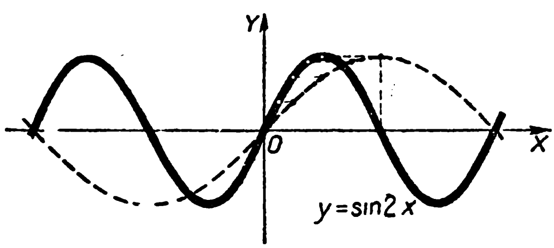
$$\sin 2(x+\pi) = \sin(2x+2\pi) = \sin 2x.$$



Черт. 59.

3. Построить график функции $y = \sec x$.

Решение. Имеем $y = \frac{1}{\cos x}$. Область определения находится из условия $\cos x \neq 0$, откуда $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.



Черт. 60.

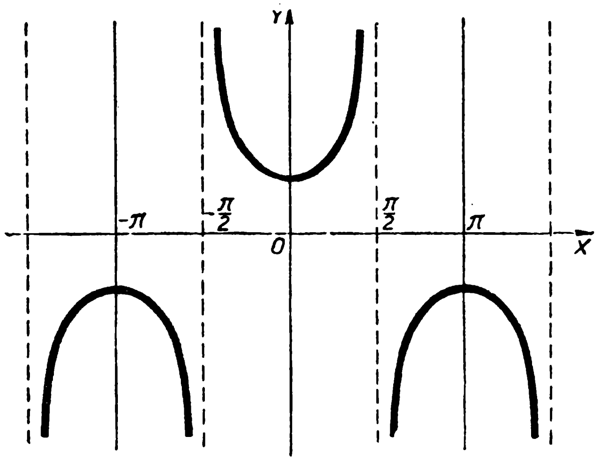
Функция чётная, так как $\frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x}$; следовательно, график симметричен относительно оси OY.

Функция периодическая с периодом 2π, так как $\frac{1}{\cos(x+2\pi)} = \frac{1}{\cos x}$.

Значения $\sec x$ и $\cos x$ одинаковы по знаку: либо оба положительны, либо оба отрицательны.

В I четверти $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ функция $\cos x$ убывает от 1 до 0, а $y = \frac{1}{\cos x}$ возрастает от 1 до $+\infty$. Для построения точек графика (черт. 61) составим таблицу значений функции:

$\frac{\pi}{20}$ (9°)	$\frac{2\pi}{20}$ (18°)	$\frac{3\pi}{20}$ (27°)	$\frac{4\pi}{20}$ (36°)	$\frac{5\pi}{20}$ (45°)	$\frac{6\pi}{20}$ (54°)	$\frac{7\pi}{20}$ (63°)	$\frac{8\pi}{20}$ (72°)	$\frac{9\pi}{20}$ (81°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
1,01	1,05	1,12	1,24	1,41	1,70	2,20	3,24	6,41	—



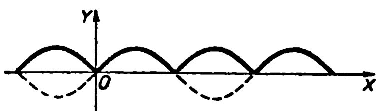
$y = \sec x$

Черт. 61.

Эта таблица составлена так: значения косинуса (с округлением до третьего знака) взяты из таблиц VII Брадиса, обратные величины взяты из таблиц XVII, и результат округлён до второго знака.

Например:

$$\sec\frac{\pi}{20} = \frac{1}{\cos 9^\circ} \approx \frac{1}{0{,}988} \approx 1{,}01.$$



$y = |\sin x|$

Черт. 62.

Для построения графика секанса в промежутке $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0$ достаточно график, построенный в I четверти, продолжить симметрично относительно оси OY.

В интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ имеем $y < 0$; при этом в промежутке $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$ функция y возрастает от $-\infty$ до -1, а в промежутке $\pi \leqslant x < \frac{3}{2}\pi$ убывает от -1 до $-\infty$.

4. На чертеже 62 изображён график функции $y = |\sin x|$. Он может быть получен из обыкновенной синусоиды. В промежутках, в которых $\sin x \geqslant 0$, имеем $y = \sin x$. В промежутках, в которых $\sin x < 0$, имеем $y = -\sin x$; поэтому надо взять ординаты синусоиды с обратным знаком.

Глава V

ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ТАБЛИЦ

§ 33. Тригонометрические таблицы

Для практических вычислений пользуются таблицами приближённых значений тригонометрических функций и их логарифмов. В школьных вычислениях применяются четырёхзначные таблицы В. М. Брадиса. В более точных вычислениях применяются таблицы значений функций с бо́льшим числом значащих цифр (например, пятизначные, семизначные таблицы).

Натуральные таблицы. Таблицы, в которых даются значения тригонометрических функций, называются натуральными тригонометрическими таблицами. В таблицах VIII (см. таблицы Брадиса) даны приближённые значения с четырьмя десятичными знаками синусов и косинусов углов от 0 до 90° через каждые 6'. Формулы дополнительных аргументов:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha; \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

показывают, что *для вычисления значений синуса и косинуса могут служить одни и те же таблицы.* Так, например, $\sin 26°$ и $\cos 64°$ имеют одно и то же значение. В таблицах В. М. Брадиса значения аргумента синуса расположены в порядке возрастания сверху вниз, а значения аргумента косинуса снизу вверх. Приближённое значение синуса или косинуса угла, содержащего целое число градусов, дано в таблице. Так, например, значение $\sin 33° \approx 0{,}5446$ помещено рядом с пометкой 33° в крайнем левом столбце „А“. Значение $\cos 33° \approx 0{,}8387$ помещено рядом с пометкой 33° в крайнем правом столбце „А“.

Чтобы найти $\sin 33°12'$, отыскиваем в левом столбце „А“ пометку 33°, а в самой верхней строке пометку 12'. Значение $\sin 33°12' \approx 0{,}5476$ находится на пересечении соответствующих строки и столбца. Значение $\cos 33°12' \approx 0{,}8368$ находится так же, с той лишь разницей, что пометку 33° следует искать в крайнем правом столбце „А“, а пометку 12' в самой нижней строке.

Пусть требуется найти $\sin 33°14'$. Из таблиц находим $\sin 33°12' \approx 0{,}5476$. Так как функция $\sin\alpha$ в промежутке от 0 до 90° возрастает, то $\sin 33°14' > \sin 33°12'$. Следовательно, к значению

$\sin 33°12'$ надо прибавить поправку на $2'$, которая помещена в таблице поправок справа от основной таблицы. В строке $33°$ и в столбце поправок с пометкой $2'$ находится число 5, которое следует прибавить к четвёртому десятичному знаку $\sin 33°12'$. Таким образом, $\sin 33°14' \approx 0{,}5481$. Если требуется найти $\sin 33°17'$, то из таблиц находим $\sin 33°18' \approx 0{,}5490$ и из четвёртого десятичного знака вычитаем поправку на $1'$, равную 2. Итак, $\sin 33°17' \approx 0{,}5488$. Значения косинуса находятся при помощи таблиц тем же способом, но со следующим отличием: функция $\cos\alpha$ убывающая (в промежутке от 0 до $90°$); поэтому, если косинус найден для меньшего значения аргумента, надо поправку вычитать (а не прибавлять); если же косинус найден для большего значения аргумента, то надо поправку прибавлять (а не вычитать). Так, например, чтобы вычислить $\cos 33°14'$, находим по таблицам $\cos 33°12' \approx 0{,}8368$ и от последнего десятичного знака отнимаем поправку на $2'$, равную 3; итак, $\cos 33°14' \approx 0{,}8365$. Чтобы вычислить $\cos 33°17'$, следует к последнему знаку $\cos 33°18' \approx 0{,}8358$ прибавить поправку на $1'$, равную 2. Итак, $\cos 33°17' \approx 0{,}8360$.

В таблице IX В. М. Брадиса даны значения тангенса от 0 до $76°$ через каждые $6'$. В таблице X даны значения тангенса от $76°$ до $89°$ через $1'$. Наличие более подробной таблицы X для тангенсов углов, близких к $90°$, объясняется тем, что для этих углов разность между двумя соседними табличными значениями тангенса — так называемая табличная разность — изменяется очень быстро. По тем же таблицам IX и X находят значения котангенса. Правила прибавления и вычитания поправок те же, что и для таблиц значений синуса и косинуса: следует помнить, что в интервале $(0°, 90°)$ тангенс возрастает, а котангенс убывает.

Для нахождения угла по данному значению его тригонометрической функции применяются те же самые таблицы значения тригонометрических функций. Покажем это на примерах.

1. Найти острый угол α, зная $\sin\alpha = 0{,}1016$.

Решение. В таблице VIII находим число, ближайшее к 0,1016; это есть число 0,1011, помещённое в строке с пометкой $5°$ и в столбце с пометкой $48'$. Заданное значение синуса 0,1016 больше, чем 0,1011; поэтому истинное значение угла больше, чем $5°48'$, так как $\sin\alpha$ есть возрастающая функция в интервале $(0°, 90°)$. В таблице поправок число 6 является ближайшим к числу 5, на которое отличаются последние десятичные знаки чисел 0,1016 и 0,1011. Прибавив соответствующую поправку, равную $2'$, получим:

$$\alpha = \arcsin 0{,}1016 \approx 5°50'.$$

2. Найти $\beta = \arccos(-0{,}5375)$.

Решение. Искомый угол оканчивается во второй четверти, так как $\cos\beta = -0{,}5375$ отрицателен. Вычислим острый угол α, дополняющий искомый до $180°$; имеем:

$$\cos\alpha = \cos(180° - \beta) = -\cos\beta = -(-0{,}5375) = 0{,}5375.$$

Значению 0,5373, ближайшему к 0,5375, соответствует угол $57°30'$. Разности 2 единицы четвёртого десятичного знака соответствует поправка на $1'$. Эту поправку следует вычесть. Итак,

$$\alpha \approx 57°29' \quad \text{и} \quad \beta \approx 180° - 57°29' = 122°31'.$$

При вычислениях по натуральным таблицам целесообразно представлять произведние тригонометрических функций в виде суммы.

При вычислениях следует соблюдать правила приближённых вычислений.

Так, например, если приближённые числа даны с тремя значащими цифрами, то, при выполнении умножения и деления, значения функций, взятые из таблиц, следует округлить, сохранив четыре значащие цифры (четвёртая цифра сохраняется в качестве „запасной"), все промежуточные результаты вычислений следует округлять, сохраняя четыре значащие цифры, окончательный результат следует округлить до трёх значащих цифр. При сложении приближённого числа, данного, например, с пятью десятичными знаками, со значением тригонометрической функции, взятым из четырёхзначных таблиц, следует округлить приближённое число, сохранив в нём четыре десятичные знака. Если при вычислениях, требующих большой точности, такое округление недопустимо, следует воспользоваться более точными таблицами.

Примеры. 1. Вычислить по четырёхзначным таблицам $\sin 70° \cos 55°$.

Решение. Преобразуем произведение в сумму

$$\sin 70° \cos 55° = \frac{\sin(70° + 55°) + \sin(70° - 55°)}{2} = \frac{\sin 125° + \sin 15°}{2}.$$

По формулам приведения $\sin 125° = \sin(180° - 125°) = \sin 55°$. Значение $\sin 55° \approx 0,8192$ и $\sin 15° \approx 0,2588$ находим по таблицам. Итак:

$$\sin 70° \cos 55° \approx \frac{1}{2}(0,8192 + 0,2588) = 0,5390.$$

2. Вычислить произведение $S = 0,721 \sin^2 31°12'$.

Решение. Преобразуем квадрат синуса в разность, воспользовавшись формулой $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$; получим:

$$S = 0,721 \sin^2 31°12' = \frac{1}{2}\, 0,721\,(1 - \cos 62°24').$$

По таблицам найдём $\cos 62°24' \approx 0,4633$ и далее $1 - \cos 62°24' \approx 0,5367$. Следовательно:

$$S = \frac{1}{2}\, 0,721 \cdot 0,5367 \approx 0,1935 \approx 0,194.$$

3. Вычислить значение функции $y = x + \sin\frac{1}{x}$

a) при $x = 2$; b) при $x = \pi$ по четырёхзначным таблицам Брадиса.

Решение. a) при $x = 2$ получим $y = 2 + \sin\frac{1}{2}$. В таблицах Брадиса значения тригонометрических функций даны для аргумента, выраженного в градусной мере, поэтому значения аргумента $\frac{1}{2}$ (радиана) следует предварительно выразить в градусах: $\frac{1}{2}$ (радиан) $\approx \frac{1}{2}$ $(57°18') = 28°39'$.

Следовательно, $y = 2 + \sin 28°39' = 2 + 0{,}4795 = 2{,}4795$.

b) При $x = \pi$ получим $y = \pi + \sin\frac{1}{\pi}$. На странице 5 таблиц Брадиса помещены готовые данные: $\pi = 3{,}1415926\ldots$ и $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098\ldots$, которые следует предварительно округлить: $\pi \approx 3{,}1416$; $\frac{1}{\pi} \approx 0{,}3183$.

Выполнив перевод в градусы значения 0,3183 (радианов), по таблице XVI получим $18°14'$. Следовательно,

$$y \approx 3{,}1416 + \sin 18°14' \approx 3{,}1416 + 0{,}3129 = 3{,}4545.$$

Логарифмические таблицы. Для вычислений при помощи логарифмов составлены таблицы логарифмов значений тригонометрических функций. В таблицах Брадиса III—VII эти логарифмы даны с четырьмя десятичными знаками для значений аргумента в интервале (0°, 90°).

Логарифмическая функция при основании 10 является в о з р а с т а ю щ е й; поэтому большему значению выражения, находящегося под знаком логарифма, соответствует большее значение логарифма. Так как в первой четверти функции $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ возрастают, а функции $\cos x$ и $\operatorname{ctg} x$ убывают, то и функции $\lg\sin x$ и $\lg\operatorname{tg} x$ также возрастают, а функции $\lg\cos x$ и $\lg\operatorname{ctg} x$ убывают.

Логарифмические тригонометрические таблицы устроены так же, как и натуральные; правила пользования ими те же.

1. *Таблицы служат для вычисления значений логарифмов тригонометрических функций и для вычисления углов по значениям логарифмов их тригонометрических функций.*

2. *Для вычисления логарифмов синусов и косинусов (тангенсов и котангенсов) служит одна и та же таблица.*

3. *Значения логарифмов даны для углов через каждые* 6′. *Поправки на* 1′, 2′ *и* 3′ *даны в специальных таблицах справа от основной таблицы. Прибавление и вычитание поправок производится с учётом того, что в интервале* (0°, 90°) *функции* $\lg\sin x$ *и* $\lg\operatorname{tg} x$ *возрастают, а* $\lg\cos x$ *и* $\lg\operatorname{ctg} x$ *убывают.*

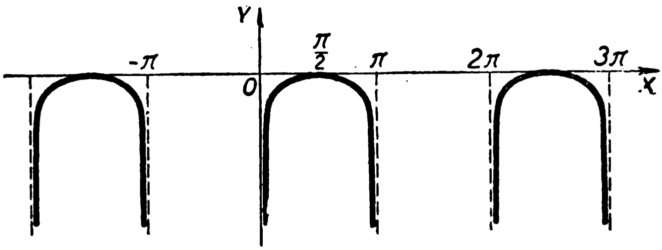
4. *Для промежутков, в которых табличная разность изменяется быстро, значения функций даны через* 1′. *Такова, например, таблица III значений логарифма синуса (косинуса) для углов от* 0 *до* 14° *(от* 76 *до* 90°*).*

5. *При вычислениях по четырёхзначным таблицам логарифмов приближённые числа следует округлить, сохранив четыре значащие цифры.*

6. *При вычислении произведений, содержащих отрицательные сомножители, следует вычислить произведение абсолютных величин и взять его с надлежащим знаком (по числу отрицательных сомножителей).*

На чертеже 63 представлен график функции $y = \lg \sin x$. Этот график построен так: в I четверти, $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$, промежуточный аргумент $u = \sin x$ возрастает от 0 до 1, а функция $y = \lg \sin x = \lg u$ возрастает от $-\infty$ до 0. Для построения точек графика можно составить, например, следующую таблицу:

x	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{2\pi}{20}$	$\frac{3\pi}{20}$	$\frac{4\pi}{20}$	$\frac{5\pi}{20}$	$\frac{6\pi}{20}$	$\frac{7\pi}{20}$	$\frac{8\pi}{20}$	$\frac{9\pi}{20}$	$\frac{\pi}{2}$
	$-0{,}81$	$-0{,}51$	$-0{,}34$	$-0{,}23$	$-0{,}15$	$-0{,}09$	$-0{,}05$	$-0{,}02$	$-0{,}01$	0



Черт. 63.

взяв (с округлением) значения $\lg \sin x$ из таблицы III Брадиса.

В промежутке $\frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi$ функция $\lg \sin x$ убывает от 0 до $-\infty$, так как во II четверти $\sin x$ убывает от 1 до 0.

Сегмент $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ не принадлежит области определения функции, так как в нижней полуокружности $\sin x \leqslant 0$ и $\lg \sin x$ не имеет смысла.

Функция $\lg \sin x$ периодическая с периодом 2π, так как

$$\lg \sin (x + 2\pi) = \lg \sin x.$$

График состоит из отдельных периодически повторяющихся линий.

§ 34. О применении логарифмической линейки

Для вычислений, не требующих большой точности (не более чем с тремя значащими цифрами), можно применять логарифмическую линейку. На корпусе линейки помещена основная логарифмическая шкала, которая устроена следующим образом: длина отрезка шкалы от её начала до точки с пометкой a равна мантиссе (трёхзначной) логарифма числа a*. Точно такая же шкала нанесена на лицевой стороне движка. На обратной стороне движка нанесены шкала синусов (Sin) и шкала тангенсов (Tg).

* За единицу длины обычно берётся 0,001 длины шкалы.

Эти шкалы устроены таким же образом, как и основная логарифмическая шкала. Так, на шкале синусов длина отрезка от начала шкалы до точки, обозначающей данный угол (выраженный в градусах), равна мантиссе логарифма синуса этого угла. Если, перевернув движок обратной стороной, совместить начало основной шкалы с началом тригонометрической шкалы, то на основной шкале против пометки шкалы синусов (или тангенсов), обозначающей данный угол, будет стоять число, образуемое первыми (тремя) значащими цифрами синуса (тангенса) этого угла. Так, например, против пометки $12°30'$ шкалы синусов на основной шкале стоит пометка 2—1—6, что означает $\sin 12°30' = 0{,}216$. Следовательно, при помощи линейки можно находить значения тригонометрических функций и обратно значения углов по их тригонометрическим функциям. На линейке нет шкалы для косинусов, так как косинус можно заменить синусом угла, дополнительного до $90°$. Шкала тангенсов дана лишь для острых углов, не бо́льших $45°$, так как для угла, большего $45°$, можно найти тангенс, воспользовавшись следующим тождеством: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}(90° - \alpha)}$. Так, например, $\operatorname{tg} 70° = \frac{1}{\operatorname{tg} 20°}$; поэтому, установив пометку $20°$ шкалы тангенсов против правого конца основной шкалы, прочтём число 2—7—5, которое укажет начальная точка шкалы тангенсов. Приняв во внимание, что $\operatorname{tg} 70° > 1$ (но $\operatorname{tg} 70° < 10$, ибо $\operatorname{arc\,tg} 10 \approx 84°$), получим $\operatorname{tg} 70° \approx 2{,}75$.

Во избежание частого переворачивания движка, на обратной стороне корпуса линейки нанесены ш т р и х и, находящиеся в прорези строго против концов основной шкалы. Если против такого штриха поставить пометку угла, то конец основной шкалы укажет на лицевой стороне движка значение соответствующей тригонометрической функции.

Вычисление выражений, представляющих собой произведения и частные, содержащие в качестве множителей и делителей значения тригонометрических функций, производится по обычным правилам вычислений на логарифмической линейке. Так, например, чтобы вычислить произведение $22{,}8 \cdot \sin 18°30'$, ставим начальную точку шкалы синусов (перевернув движок) против пометки 2—2—8 основной шкалы; тогда на основной шкале против пометки шкалы синусов $18°30'$ окажутся значащие цифры искомого произведения: 7—2—3; следовательно, $22{,}8 \cdot \sin 18°30' = 7{,}23$.

П р и м е ч а н и е. Для малых углов нанести соответствующие пометки на общую шкалу практически невозможно. Приняв во внимание, что $\sin 5°{,}6 \approx \operatorname{tg} 5°{,}6 \approx 0{,}1$ и что значения синуса и тангенса малых углов близки друг к другу, помещают посередине оборотной стороны движка общую шкалу для синусов и тангенсов углов, меньших $5°{,}6$. При помощи этой шкалы производятся вычисления с малыми углами; правила вычислений остаются прежними.

Глава VI

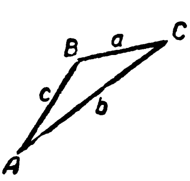
ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

§ 35. Элементы треугольника

В геометрии рассматриваются элементы треугольника: стороны, углы, периметр, площадь, биссектрисы, медианы, высоты и т. п.

Стороны треугольника и его углы называются **основными элементами**.

Если A, B, C — вершины углов треугольника, то принято этими же буквами обозначать и сами углы (и их величины); строчными буквами a, b и c принято обозначать стороны (и их длины), противолежащие углам, которые обозначены **теми же** прописными буквами (черт. 64).



Черт. 64.

Допустимые значения основных элементов треугольника должны удовлетворять следующим условиям:

1°. *Углы треугольника положительны и в сумме составляют* 180°:

$$A > 0,\ B > 0,\ C > 0 \text{ и } A+B+C=180°.$$

2°. *Стороны треугольника положительны, и всякая сторона меньше суммы двух других сторон:*

$$0 < a < b+c;\ 0 < b < c+a;\ 0 < c < a+b.$$

§ 36. О решении треугольников

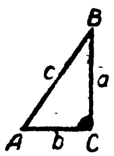
В геометрии рассматриваются различные задачи на **построение** треугольника по достаточному числу данных его элементов. В тригонометрии рассматриваются задачи на **вычисление**, в которых требуется **вычислить** те или иные элементы треугольника по достаточному количеству численных значений заданных его элементов. Эти задачи обычно называются задачами на **решение** треугольника. В геометрии изучаются следующие **основные** задачи на построение треугольника: *построить тре-*

*угольник по трём данным его основным элементам, из которых хотя бы один является стороной *.*

В тригонометрии решаются соответствующие основные задачи: **по заданным величинам трёх основных элементов треугольника, из которых хотя бы один является стороной, вычислить величины трёх остальных его основных элементов.**

§ 37. Решение прямоугольных треугольников

Пусть ABC — прямоугольный треугольник, C — прямой угол, a и b — катеты, противолежащие острым углам A и B, c — гипотенуза (черт. 65); тогда имеем:



Черт. 65.

Косинус острого угла есть отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\boxed{\cos A = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c}} \tag{1}$$

Синус острого угла есть отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\boxed{\sin A = \frac{a}{c}, \quad \sin B = \frac{b}{c}} \tag{2}$$

Тангенс острого угла есть отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\boxed{\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}} \tag{3}$$

Котангенс острого угла есть отношение прилежащего катета к противолежащему:

$$\boxed{\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{ctg} B = \frac{a}{b}} \tag{4}$$

***Сумма острых углов равна** 90°.*

Основные задачи на прямоугольные треугольники.

***Задача I.** Даны гипотенуза и один из острых углов, вычислить прочие элементы.*

* По трём углам A, B, C треугольник либо нельзя построить (если $A+B+C \neq 180°$), либо (если $A+B+C=180°$) существует бесконечное множество подобных между собой треугольников с данными углами.

Решение. Пусть даны c и A. Угол $B = 90° - A$ также известен; катеты находятся из формул (1) и (2):

$$a = c \sin A, \quad b = c \cos A.$$

Задача II. *Даны катет и один из острых углов, вычислить прочие элементы.*

Решение. Пусть даны a и A. Угол $B = 90° - A$ известен; из формул (1) и (3) найдём:

$$b = a \operatorname{tg} B \ (= a \operatorname{ctg} A), \quad c = \frac{a}{\sin A}.$$

Задача III. *Даны катет и гипотенуза, вычислить прочие элементы.*

Решение. Пусть даны a и c (причём $a < c$). Из равенств (2) найдём угол A:

$\sin A = \frac{a}{c}$ и $A = \arcsin \frac{a}{c}$, затем $B = 90° - A$ и, наконец, катет b:

$$b = c \cos A \ (= c \sin B).$$

Задача IV. *Даны катеты a и b, найти прочие элементы.*

Решение. Из равенств (3) найдём острый угол, например A: $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, $A = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$, затем угол $B = 90° - A$, затем гипотенузу:

$$c = \frac{a}{\sin A} \left(= \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\cos B} \right).$$

Ниже приводится пример решения прямоугольного треугольника при помощи логарифмических таблиц *.

При вычислениях по логарифмическим таблицам следует выписать соответствующие формулы, прологарифмировать их, подставить числовые данные, по таблицам найти требуемые логарифмы известных элементов (или их тригонометрических функций), вычислить логарифмы искомых элементов (или их тригонометрических функций) и по таблицам найти искомые элементы.

Пример. Даны катет $a = 166{,}1$ и гипотенуза $c = 187{,}3$; вычислить острые углы, другой катет и площадь.

Решение. Имеем:

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \lg \sin A = \lg a - \lg c; \qquad \begin{array}{r} - \begin{array}{r} \lg a = 2{,}2204 \\ \lg c = 2{,}2725 \end{array} \\ \hline \lg \sin A = \bar{1}{,}9479. \end{array}$$

$$A \approx 62°30'; \quad B \approx 90° - 62°30' = 27°30'.$$

Вычисляем катет b:

$$b = a \operatorname{tg} B; \quad \lg b = \lg a + \lg \operatorname{tg} B; \qquad \begin{array}{r} \lg a = 2{,}2204 \\ \lg \operatorname{tg} B = \bar{1}{,}7165 \\ \hline \lg b = 1{,}9369. \end{array} \qquad b \approx 86{,}48.$$

---

* Вычисление элементов прямоугольных треугольников по натуральным таблицам известно из курса геометрии VIII класса.

Площадь треугольника можно вычислить по формуле:

$$S=\frac{1}{2}ab=0{,}5a^2\operatorname{tg}B;\qquad \begin{array}{r} \lg 0{,}5=\bar{1}{,}6990 \\ 2\lg a=4{,}4408 \\ \lg\operatorname{tg}B=\bar{1}{,}7165 \\ \hline \lg S=3{,}8563 \end{array}\;\left\|\;\begin{array}{l} \lg a=2{,}2204 \\ \\ \\ S\approx 7183. \end{array}\right.$$

Для контроля подсчитаем угол A на логарифмической линейке:

$$A=\arcsin\frac{a}{c}=\arcsin\frac{166}{187}\approx 62^\circ.$$

Примечание. Катет b можно вычислить по теореме Пифагора, пользуясь таблицами квадратов и квадратных корней (табл. XI и XII):

$$b=\sqrt{187{,}3^2-166{,}1^2}=\sqrt{35080-27590}\approx 86{,}54.$$

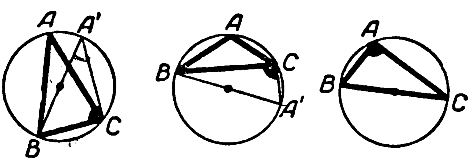
Расхождение с ранее полученным значением $b\approx 86{,}48$ объясняется погрешностями таблиц, в которых даются приближённые значения функций. Результат 86,54 является более точным.

§ 38. Теорема синусов

Теорема. ***Во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов:***

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}}$$

Доказательство. Опишем круг около данного треугольника ABC (черт. 66). Пусть R — радиус этого круга. Возьмём одну из вершин треугольника, например A; через одну из других вершин, например через B, проведём диаметр BA' описанного круга. Вспомогательный треугольник $A'BC$ прямоугольный, так как вписанный угол $A'CB$ опирается на диаметр. Из вспомогательного треугольника найдём:



Черт. 66.

$$a=2R\sin A'.$$

Если угол A острый, то $A=A'$, так как вписанные углы A и A' опираются на одну и ту же дугу. Если угол A тупой, то угол A' острый, измеряющийся половиной дуги BAC:

$$A'=\frac{1}{2}\smile BAC=\frac{1}{2}(2\pi-\smile BA'C)=\pi-\frac{\smile BA'C}{2}=\pi-A.$$

Итак, или $A=A'$ или $A'=\pi-A$, в обоих случаях

$$\sin A'=\sin A,$$

а потому

$$a = 2R \sin A. \qquad (1)$$

Если угол A прямой, то $a = 2R$, $\sin A = 1$ и равенство (1) также справедливо.

Аналогичные равенства найдём и для прочих углов B и C. Итак,

$$a = 2R \sin A; \quad b = 2R \sin B; \quad c = 2R \sin C,$$

откуда

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$ ч. т. д.

Следствие. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру круга, описанного около треугольника.

§ 39. Теорема косинусов

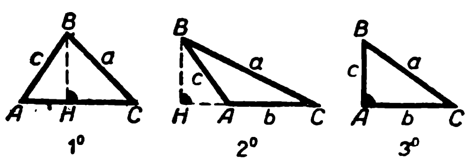
Теорема. ***Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:***

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}}$$

Доказательство. Докажем первое равенство.

Случай 1°. Угол A острый. Пусть BH высота, опущенная из вершины B (черт. 67); из геометрии известно, что:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AH. \qquad (1)$$



Черт. 67.

Из прямоугольного треугольника ABH найдём $AH = c \cos A$; подставив в формулу (1), получим доказываемое равенство.

Случай 2°. Угол A тупой. В этом случае

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b \cdot AH. \qquad (2)$$

Из треугольника ABH найдём:

$$AH = c \cos \angle BAH = c \cos (\pi - A) = -c \cos A.$$

Подставив в формулу (2), получим доказываемое равенство.

Случай 3°. Угол A прямой. В этом случае (по теореме Пифагора): $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (так как $\cos A = 0$).

Итак, во всех случаях

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$ ч. т. д.

§ 40. Формулы для площади треугольника

1°. Из геометрии известна формула Герона:

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (где $p=\frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр), позволяющая вычислять площадь треугольника по его сторонам.

2°. **Теорема.** ***Площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними:***

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A. \qquad (1)$$

Доказательство. Из геометрии известно, что площадь треугольника равна половине произведения стороны треугольника на высоту, опущенную на эту сторону из противоположной вершины

$$S=\frac{1}{2}b\cdot h_b. \qquad (2)$$

Если угол A острый, то из треугольника ABH (черт. 67) найдём:

$$BH=h_b=c\sin A.$$

Если угол A тупой, то $BH=h_b=c\sin(\pi-A)=c\sin A$.
Если угол A прямой, то $\sin A=1$ и $h_b=AB=c=c\sin A$.
Следовательно, во всех случаях $h_b=c\sin A$. Подставив в равенство (2), получим доказываемую формулу, ч. т. д.

Точно так же получим формулы:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B.$$

3°. На основании теоремы синусов:

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}, \quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Подставив эти выражения в формулу (1), получим следующую формулу:

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}.$$

§ 41. Теорема тангенсов

Теорема. ***Разность двух сторон треугольника относится к их сумме, как тангенс полуразности противолежащих углов к тангенсу полусуммы этих углов:***

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}$$

(и две аналогичные формулы для прочих пар сторон a, c и b, c).

Доказательство. В силу теоремы синусов имеем:

$$a-b=2R(\sin A-\sin B)=4R\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2};$$

$$a+b=2R(\sin A+\sin B)=4R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

Разделив почленно эти равенства, получим доказываемую формулу, ч. т. д.

§ 42. Решение треугольника по двум его углам и стороне.

Задача. *Даны два угла треугольника и одна сторона, вычислить другие стороны и угол.*

Даны B, C и a; требуется найти b, c и A.

Решение. Условие возможности построения треугольника по этим данным: $A+B<180°$, будем считать выполненным.

Можно считать известными все три угла, так как

$$A=180°-(B+C).$$

Для вычисления сторон b и c достаточно применить теорему синусов:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A},\quad \frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A},\ \text{откуда:}\ b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Площадь вычисляется по формуле:

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}.$$

Пример. Решить треугольник по следующим данным: $a\approx 17{,}4$, $B\approx 44°30'$, $C\approx 64°$.

Решение. При помощи натуральных таблиц. Находим угол

$$A=180°-(B+C)\approx 180°-(44°30'+64°)\approx 71°30'.$$

Вычисляем стороны. Имеем:

$$\sin B\approx 0{,}7009;\quad \sin C\approx 0{,}8988;\quad \sin A\approx 0{,}9483$$

и далее

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}\approx\frac{17{,}4\cdot 0{,}7009}{0{,}9483}\approx\frac{12{,}20}{0{,}9483}\approx 12{,}86\approx 12{,}9$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}\approx\frac{17{,}4\cdot 0{,}8988}{0{,}9483}\approx\frac{15{,}64}{0{,}9483}\approx 16{,}49\approx 16{,}5$$

Деление на $\sin A$ можно заменить умножением на обратное число. По таблицам Брадиса (см. табл. XVII) найдём: $\frac{1}{0{,}9483}\approx 1{,}055$.

Вычисления выполнены по правилам приближённых вычислений. Значения синусов взяты из таблиц Брадиса; во всех промежуточных результатах сохраняются четыре значащие цифры (правило запасной цифры), а окончательный результат округлён до трёх значащих цифр.

Решение при помощи логарифмических таблиц. Имеем:

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A};\quad \lg b=\lg a+\lg\sin B-\lg\sin A.$$

По таблицам найдём:

$$
\begin{array}{r|l}
\lg a = 1{,}2405 & \\
\lg \sin B = \bar{1}{,}8457 & \\
-\lg \sin A = 0{,}0230 & \quad \lg \sin A = \bar{1}{,}9770. \\
\hline
\lg b = 1{,}1092 &
\end{array}
$$

По таблицам Брадиса найдём $b = 12{,}86$. Однако в ответе следует оставить три значащие цифры, так как значение a дано с тремя значащими цифрами; поэтому $b \approx 12{,}9$.

Сторона c вычисляется аналогично:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}; \quad \lg c = \lg a + \lg \sin C - \lg \sin A;$$

$$
\begin{array}{r}
\lg a = 1{,}2405 \\
\lg \sin C = \bar{1}{,}9537 \\
-\lg \sin A = 0{,}0230 \\
\hline
\lg c = 1{,}2172;
\end{array}
\qquad c \approx 16{,}5.
$$

§ 43. Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними

Задача. Даны две стороны треугольника и угол между ними; вычислить третью сторону и два другие угла.

Пусть, например, даны a, b и C, требуется вычислить A, B и c.

Решение при помощи натуральных таблиц. Формула косинусов даёт выражение стороны c непосредственно через известные элементы:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}.$$

Для вычисления A можно также воспользоваться формулой косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Так как $0 < A < 180°$, то

$$A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{и, наконец,} \quad B = 180° - (A + C).$$

Решение при помощи логарифмических таблиц. Известна сумма углов $A + B = 180° - C$, откуда $\frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2}$. Разность углов $A - B$ можно вычислить, воспользовавшись теоремой тангенсов:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} = \frac{a-b}{a+b}, \quad \text{откуда} \quad \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

Углы A и B определяются из системы уравнений:

$$\frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2}, \quad \frac{A-B}{2} = \operatorname{arctg} \left(\frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right).$$

Сторону c можно вычислить по теореме синусов:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Пример. Дано: $a \approx 49,4$; $b \approx 26,4$ и $C \approx 47°20'$; найти A, B и c.

Решение при помощи натуральных таблиц. Имеем

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \approx (49,4)^2 + (26,4)^2 - 2\cdot 49,4\cdot 26,4\cdot \cos 47°20'.$$

По таблицам квадратов найдём:

$$a^2 \approx 49,4^2 \approx 2440; \quad b^2 \approx 26,4^2 \approx 697,0$$

и далее

$$2\cdot 49,4\cdot 26,4\cdot \cos 47°20' \approx 2\cdot 49,4\cdot 26,4\cdot 0,6778 \approx 1768.$$

Следовательно, $c^2 \approx 2440 + 697 - 1768 \approx 1369.$

По таблицам квадратных корней $c \approx 37,0$.
Далее

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx \frac{697 + 1369 - 2440}{2\cdot 26,4\cdot 37,0} \approx -\frac{374}{1954} \approx -0,191;$$

$A \approx \arccos(-0,191)$; угол A — тупой. Находим дополнительный угол:

$$180° - A \approx \arccos(0,191) \approx 79°; \quad A \approx 180° - 79° = 101°;$$

(с округлением до 10′) $B = 180° - (A + C) \approx 31°40'$.

Решение при помощи логарифмических таблиц. Вычислим углы A и B.

$$\lg \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \lg(a-b) + \lg \operatorname{ctg}\frac{C}{2} - \lg(a+b).$$

	Вспомогательные вычисления
$\lg(a-b) = 1,3617$	$a - b \approx 49,4 - 26,4 = 23,0;$
$\lg \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = 0,3583$	$a + b \approx 75,8;$ $\frac{C}{2} \approx 23°40';$
$-\lg(a+b) = \bar{2},1203$	$\lg(a+b) = 1,8797.$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \bar{1},8403 \quad \text{и} \quad \frac{A-B}{2} \approx 34°40'.$$

Из системы уравнений:

$$\frac{A-B}{2} = 34°40'; \quad \frac{A+B}{2} = 66°20'$$

найдём: $A \approx 101°$, $B \approx 31°40'$.

§ 44. Решение треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них

Задача. *Даны две стороны треугольника и угол, лежащий против одной из них; вычислить третью сторону и два остальных угла.*

Пусть даны a, b и A; требуется вычислить B, C и c.

Решение. Случай 1°. $a > b$, т. е. заданный угол A лежит против большей стороны. Построение показано на чертеже 68а.

Из точки C (как из центра), взятой на одной из сторон угла A на расстоянии b от вершины, описана окружность радиуса a; точка B есть точка пересечения этой окружности с другой стороной угла A. Построение всегда возможно, задача имеет единственное решение.

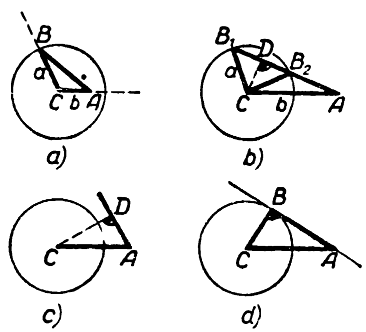
Острый угол B, противолежащий меньшей стороне, находится по теореме синусов:

$$\sin B = \frac{b}{a}\sin A, \qquad \text{откуда} \qquad B = \arcsin\left(\frac{b}{a}\sin A\right)$$

и затем $C = 180° - (A + B)$.

Сторона c находится по теореме синусов: $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.

Случай 2°. $a < b$, т. е. угол A лежит против меньшей стороны; поэтому он не может быть тупым или прямым. Следовательно, при $A \geqslant 90°$ задача не имеет решения. Пусть угол A острый. Из построения на чертеже 68b видно, что окружность радиуса a с центром в точке C пересечёт другую сторону угла A в двух точках при условии $a > CD$, где D — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на другую сторону угла A. Так как $CD = b \sin A$ (из треугольника ACD), то условие запишется так: $a > b \sin A$. Для угла B возможны два значения: $B = B_1$ (острый) и $B = B_2$ (тупой). Задача имеет два решения.



Черт. 68.

Значения угла B вычисляются по теореме синусов:

$$\sin B = \frac{b}{a}\sin A,$$

откуда $B_1 = \arcsin\left(\frac{b}{a}\sin A\right)$ и $B_2 = 180° - B_1$.

Значения угла C и стороны c вычисляются так же, как в предыдущем случае (см. ниже, пример).

Из чертежа 68c видно, что при $CD = b \sin A > a$ окружность не пересечёт другой стороны угла A; задача не имеет решений. В этом случае $\sin B = \frac{b \sin A}{a} > 1$ и угол B вычислить нельзя.

При $CD = b \sin A$ задача имеет единственное решение: треугольник ABC прямоугольный.

Случай 3°. $a = b$. В этом случае треугольник ABC равнобедренный. Такой треугольник можно решить, разбив его высотой CD на два прямоугольных треугольника:

$$B = A; \quad C = 180° - 2A; \quad c = 2AD = 2a\cos A.$$

Пример. Вычислить стороны и углы треугольника, если дано:

$$a \approx 73{,}5; \qquad b \approx 86{,}4; \qquad A \approx 49°0'.$$

Решение: $\sin B = \frac{b \sin A}{a} \approx \frac{86{,}4 \cdot 0{,}7547}{73{,}5} \approx \frac{65{,}21}{73{,}5} \approx 0{,}8872 \approx 0{,}887$

(деление на 73,5 можно заменить умножением на $\frac{1}{73{,}5} \approx 0{,}0136$ табл. XVII).

Так как в данном случае $a < b$ и $\frac{b \sin A}{a} < 1$, то задача имеет два решения:

1) $B_1 \approx \arcsin 0{,}887 \approx 62°30'$; $C_1 \approx 180° - (49° + 62°30') = 68°30'$;

(с округлением до 10′)

$$c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A} = \frac{73{,}5 \cdot 0{,}9304}{0{,}755} \approx \frac{68{,}38}{0{,}755} \approx 90{,}56 \approx 90{,}6$$

2) $B_2 = 180° - B_1 \approx 117°30'$; $C_2 \approx 180° - (49° + 117°30') = 13°30'$;

$$c_2 = \frac{a \sin C_2}{\sin A} \approx \frac{73{,}5 \cdot 0{,}2334}{0{,}755} \approx \frac{17{,}15}{0{,}755} \approx 22{,}72 \approx 22{,}7.$$

§ 45. Решение треугольника по трём сторонам

Задача. *Даны три стороны треугольника; вычислить его углы.*

Пусть даны длины трёх сторон треугольника. Обозначим через a меньшую сторону, через b — среднюю, а через c — бóльшую: $a \leqslant b \leqslant c$. По трём данным сторонам можно построить единственный треугольник, если большая сторона меньше суммы двух других сторон: $c < a + b$. Если же $c \geqslant a + b$, то треугольник с данными сторонами не существует. Будем считать, что $c < a + b$.

Решение при помощи натуральных таблиц.

Углы треугольника можно вычислить по теореме косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

откуда:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ и } A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ (так как } 0° < A < 180°).$$

Аналогично найдём:

$$B = \arccos \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \text{ и, наконец, } C = 180° - (A + B).$$

Решение при помощи логарифмических таблиц. Вычислим сначала площадь треугольника (формула Герона):

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Имеем далее:

$$S = \frac{bc \sin A}{2}, \quad \text{откуда} \quad \sin A = \frac{2S}{bc}.$$

Угол A — острый, так как он лежит против меньшей стороны; следовательно,

$$A = \arcsin \frac{2S}{bc}.$$

Точно так же $B = \arcsin \frac{2S}{ac}$; и, наконец, $C = 180° - (A + B)$.

Итак, при решении треугольника по трём сторонам при помощи логарифмических таблиц *углы, лежащие против меньших сторон, находятся по формулам, а угол, лежащий против наибольшей стороны, вычисляется как разность между* 180° *и суммой двух найденных углов.*

Пример. Решить треугольник, зная длины (приближённые) его сторон: 24,7, 22,4 и 31,3. Обозначим $a \approx 22{,}4$; $b \approx 24{,}7$; $c \approx 31{,}3$.

Решение при помощи натуральных таблиц. Имеем:

$$\cos A \approx \frac{(24{,}7)^2 + (31{,}3)^2 - (22{,}4)^2}{2 \cdot 24{,}7 \cdot 31{,}3} \approx \frac{610{,}1 + 979{,}7 - 501{,}8}{1546} \approx 0{,}7038,$$

откуда $A \approx 45°20'$ (с округлением до 10').

$$\cos B \approx \frac{(22{,}4)^2 + (31{,}3)^2 - (24{,}7)^2}{2 \cdot 22{,}4 \cdot 31{,}3} \approx \frac{501{,}8 + 979{,}7 - 610{,}1}{1402} \approx 0{,}6215,$$

откуда $B \approx 51°30'$, и, наконец, $C = 180° - (45°20' + 51°30') \approx 83°10'$.

Решение при помощи логарифмических таблиц. Имеем:

$$\sin A = \frac{2S}{bc}, \quad \lg \sin A = \lg 2S - \lg b - \lg c.$$

Вычисляем:

$$\lg 2S = \lg\left(2\sqrt{p(p-a)(p-b))(p-c)}\right) = \lg 2 + \frac{1}{2}\lg p + \frac{1}{2}\lg(p-a) + \frac{1}{2}\lg(p-b) + \frac{1}{2}\lg(p-c),$$

где

$$p = \frac{a+b+c}{2} \approx \frac{22{,}4 + 24{,}7 + 31{,}3}{2} = 39{,}2.$$

$$p - a \approx 39{,}2 - 22{,}4 = 16{,}8; \quad p - b \approx 14{,}5; \quad p - c \approx 7{,}9.$$

$\lg 2 = 0{,}3010$	$\lg p = 1{,}5933$
$\frac{1}{2}\lg p = 0{,}7966$	
$\frac{1}{2}\lg(p-a) = 0{,}6126$	$\lg(p-a) = 1{,}2253$
$\frac{1}{2}\lg(p-b) = 0{,}5807$	$\lg(p-b) = 1{,}1614$
$\frac{1}{2}\lg(p-c) = 0{,}4488$	$\lg(p-c) = 0{,}8976$
$\lg 2S = 2{,}7397.$	

Далее

$\lg 2S = 2{,}7397$	
$-\lg b = \bar{2}{,}6073$	$\lg b = 1{,}3927$
$-\lg c = \bar{2}{,}5045$	$\lg c = 1{,}4955$
$\lg \sin A = \bar{1}{,}8515$;	$A \approx 45°20'$

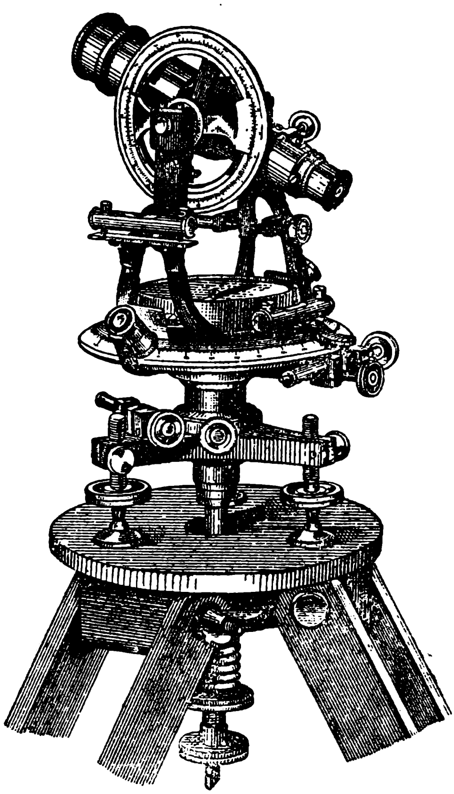
Вычисляем B. Имеем: $\lg \sin B = \lg 2S - \lg a - \lg c$.

$$\begin{array}{l|l} \lg 2S = 2{,}7397 & \\ -\lg a \;= \bar{2}{,}6498 & \lg a = 1{,}3502; \\ -\lg c \;= \bar{2}{,}5045 & \\ \hline \lg \sin B = \bar{1}{,}8940. & B \approx 51°30'. \end{array}$$

$$C = 180° - (A + B) \approx 83°10'.$$

§ 46. Применение тригонометрии к измерениям на местности

С помощью тригонометрии решаются многие измерительные задачи на местности, как, например, вычисление расстояний между различными пунктами земной поверхности (если это расстояние нельзя измерить непосредственно), вычисление высоты данного предмета (горы, здания и т. п.), составление планов и карт и т. п. Будем предполагать, что измерения производятся на малом участке, так, что можно считать его плоским и не учитывать кривизны земной поверхности *.



Черт. 69.

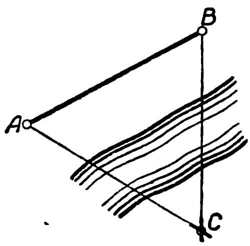
Измерение небольших расстояний производится непосредственно, при помощи, например, стальных измерительных лент.

Измерение углов на местности производится при помощи угломерных инструментов. Наиболее распространённым современным угломерным инструментом является **теодолит** (черт. 69). Зрительная труба теодолита может вращаться как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскости. Если ось зрительной трубы, находящейся в горизонтальном положении в пункте C земной поверхности, направить сначала в пункт A, а затем в пункт B, то угол её поворота есть угол C треугольника ABC; под этим углом из пункта C видно расстояние AB (черт. 70). При помощи

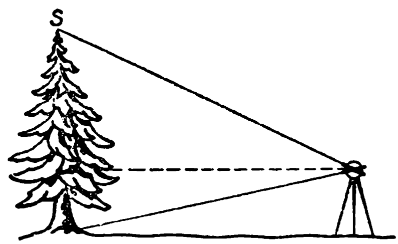
* Вычисления, связанные с измерениями на больших участках, где нельзя пренебрегать шарообразностью Земли, производятся средствами сферической тригонометрии.

поворота зрительной трубы можно измерять углы и в вертикальной плоскости (черт. 71).

Углы поворота зрительной трубы можно измерять с большой точностью при помощи делений на горизонтальном и вертикальном кругах и микрометрических винтов.



Черт. 70.

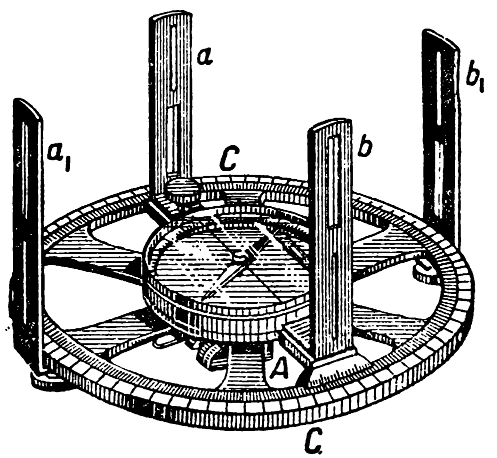


Черт. 71.

При отсутствии теодолита пользуются (например, в учебных целях) более простыми приборами. Один из таких приборов — астролябия — изображён на чертеже 72. Основные части астролябии следующие: круг, разделённый на градусы (лимб), и линейка (алидада), которая может вращаться вокруг центра круга. Для наведения линейки на данный пункт служат прикреплённые к её концам вертикальные пластинки с узкими продольными прорезями.

Рассмотрим несколько простейших задач на вычисление расстояний и высот.

Задача. *Вычислить расстояние от доступной точки* A *до недоступной точки* B, *видимой из точки* A (точки A и B лежат в одной и той же горизонтальной плоскости, черт. 73).

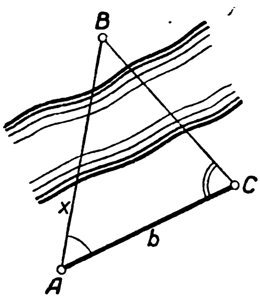


Черт. 72.

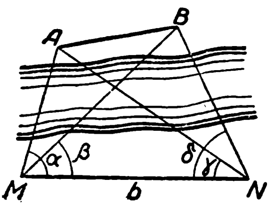
Разъяснение. Точка A считается доступной, если в ней может находиться наблюдатель с измерительными инструментами. Точка B считается недоступной, если расстояние AB не может быть измерено непосредственно (например, имеется препятствие: река, овраг и т. п.).

Решение. Выберем вблизи точки A доступную точку C, из которой видна точка B. Измерим непосредственно отрезок-базис $AC=b$ и углы A и C. Сторону $x=c$ треугольника ABC найдём по теореме синусов:

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}, \quad \text{откуда} \quad x=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{b\sin C}{\sin(A+C)}.$$



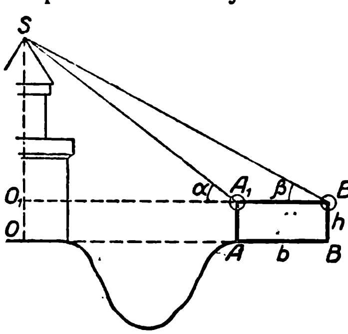
Черт. 73.



Черт. 74.

Задача. *Вычислить расстояние между двумя недоступными точками A и B, видимыми из доступной местности. Расположение точек дано на чертеже 74.*

Решение. Выберем в доступной местности отрезок-базис; измерим базис и углы $\alpha=\angle AMN$, $\beta=\angle BMN$, $\gamma=\angle ANM$, $\delta=\angle BNM$ между базисом и направлениями из его концов на точки A и B. Вычислим расстояния MA и MB (см. предыдущую задачу).



Черт. 75.

$$MA=\frac{b\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}; \quad MB=\frac{b\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}.$$

Зная две стороны треугольника AMB и угол $\alpha-\beta$ между ними, можно вычислить третью сторону, например по теореме косинусов:

$$x=AB=\sqrt{MA^2+MB^2-2MA\cdot MB\cos(\alpha-\beta)}.$$

Задача. *Вычислить высоту вертикального предмета, основание которого недоступно* (черт. 75).

Решение. Допустим, что можно выбрать горизонтальный базис $AB=b$, из концов которого видна вершина S измеряемой высоты. Пусть h — высота угломерного инструмента. Измерив углы α и β треугольника SA_1B_1, найдём (по теореме синусов):

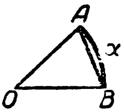
$$\frac{A_1S}{\sin\beta}=\frac{b}{\sin(\alpha-\beta)}, \quad \text{откуда} \quad A_1S=\frac{b\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)},$$

и, наконец,

$$OS=OO_1+O_1S=h+A_1S\sin\alpha=h+\frac{b\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

§ 47. Применение тригонометрии к решению геометрических задач

Планиметрические задачи. Тригонометрия применяется к решению задач на вычисление элементов различных геометрических фигур. Обычно при вычислении элементов многоугольника его разбивают на треугольники с тем расчётом, чтобы искомые элементы было можно вычислить путём последовательного решения ряда треугольников.



Черт. 76.

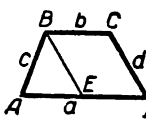
Задача. Вычислить площадь кругового сегмента, дуга которого (в радианной мере) измеряется числом α; радиус круга равен R (черт. 76).

Решение. Площадь S сегмента равна площади соответствующего сектора OAB минус площадь треугольника OAB. Из геометрии известно, что площадь кругового сектора вычисляется по формуле $s_1 = \frac{1}{2} Rl$, где l — длина ограничивающей его дуги. Так как $l = \alpha R$, то $s_1 = \frac{1}{2} R^2\alpha$.

Площадь треугольника равна $s_2 = \frac{R^2 \sin\alpha}{2}$.

Искомая площадь сегмента равна

$$S = s_2 - s_1 = \frac{R^2\alpha}{2} - \frac{R^2 \sin\alpha}{2} = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha).$$



Черт. 77.

***Задача.** Основания трапеции равны a и b, боковые стороны равны c и d. Определить углы трапеции.*

Решение. Пусть a — большее основание, A — угол, образованный сторонами a и c (черт. 77). Проведём прямую, параллельную d; тогда трапеция разобьётся на треугольник ABE и параллелограм $BCDE$. В треугольнике ABE известны длины трёх сторон: a, d, $a - b$. По теореме косинусов найдём угол A:

$$d^2 = (a-b)^2 + c^2 - 2c(a-b)\cos A, \text{ откуда } \cos A = \frac{(a-b)^2 + c^2 - d^2}{2c(a-b)}.$$

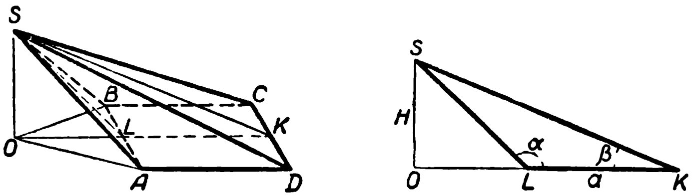
Аналогично вычислим:

$$\cos D = \frac{(a-b)^2 + d^2 - c^2}{2d(a-b)} \text{ и, наконец, } B = \pi - A;\ C = \pi - D.$$

Стереометрические задачи. Тригонометрия применяется для вычисления различных элементов пространственных фигур: объёмов, поверхностей, площадей сечений, плоских и двугранных углов и т. п. Обычно производят вспомогательные построения (проведение сечений, линий и т. п.) с тем расчётом, чтобы искомые элементы было можно найти путём последовательного решения ряда треугольников. При решении задач на вычисление с числовыми данными обычно сначала решают задачу в общем виде, а затем подставляют данные в условии числа. Общую формулу решения представляют в виде, наиболее удобном для последующих вычислений.

Задача. Основанием пирамиды служит квадрат. Одна из боковых граней — равнобедренный треугольник и образует с основанием тупой угол α. Противоположная грань образует с основанием угол β. Высота пирамиды равна H; найти объём пирамиды.

Решение. Пусть $ABCD$ — основание пирамиды; S — вершина; OS — высота; ASB — грань, образующая с основанием угол α; DSC — грань, образующая с основанием угол β (черт. 78).



Черт. 78.

Наклонные SA и SB равны; поэтому их проекции OA и OB на плоскость основания равны. Пусть L — середина стороны AB. В равнобедренных треугольниках AOB и ASB медианы OL и SL суть также и высоты; поэтому $OL \perp AB$ и $SL \perp AB$. Следовательно, $\angle OLS$ есть линейный угол двугранного угла $OABS$ (с ребром AB), а потому $\angle OLS = 180° - \alpha$. Пусть K — точка пересечения прямой OL со стороной CD; имеем: $DK = KC$ и $OK \perp CD$. Наклонная $SK \perp CD$ по теореме о трёх перпендикулярах. Так как $OK \perp CD$ и $SK \perp CD$, то $\angle OKS = \beta$. Полуплоскости ABS и DCS пересекутся в том и только в том случае, если

$$180° - \alpha > \beta, \text{ т. е. } \alpha + \beta < 180°$$

(угол $180° - \alpha$ есть внешний угол треугольника SLK, а β — внутренний угол); это условие будем считать выполненным. Отрезок LK равен стороне основания a. Так как $OL = H \operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -H \operatorname{ctg} \alpha$ (из треугольника SOL) и $OK = H \operatorname{ctg} \beta$ (из треугольника SOK), то $a = OK - OL = H(\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha)$. Вычисляем объём:

$$V = \frac{1}{3} a^2 H = \frac{1}{3} H^3 (\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha)^2.$$

Эта форма ответа удобна для вычислений с помощью натуральных таблиц. Если вычисления проводятся при помощи логарифмических таблиц или линейки, то следует сумму котангенсов преобразовать в произведение:

$$V = \frac{1}{3} H^3 \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Вычислим объём при следующих данных: $H \approx 12{,}53$; $\alpha \approx 110°48'$, $\beta \approx 32°30'$.

1) $H^3 \approx (12{,}53)^3 \approx 1967$ (таблица XIII Брадиса).

2) $\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha\approx\operatorname{ctg}32°30'+\operatorname{ctg}110°48'=\operatorname{ctg}32°30'-\operatorname{ctg}69°12'\approx$
$\approx 1{,}5697-0{,}3799\approx 1{,}1898\approx 1{,}190$ (таблица IX Брадиса).

3) $(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha)^2\approx(1{,}190)^2\approx 1{,}416$ (таблица XI Брадиса)

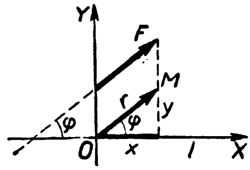
и, наконец, $V=\dfrac{H^3(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha)^2}{3}\approx\dfrac{1967\cdot 1{,}416}{3}\approx 928{,}4.$

§ 48. О применениях тригонометрии в физике, механике, технике

Тригонометрия имеет многочисленные применения в различных вопросах физики, механики, техники.

I. В механике и физике часто применяется следующая теорема о проекции вектора на ось:

Теорема. ***Проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус угла, образованного вектором с осью.***



Черт. 79.

Доказательство. Пусть $\overline{F}$ — данный вектор, l — ось (изображена в горизонтальном положении), φ — угол вектора с осью l (черт. 79).

При параллельном переносе вектора величина его проекции на ось не меняется; поэтому можно перенести вектор в положение $\overline{OM}$, поместив его начало в некоторой точке O оси l. Приняв точку O за начало координат, а ось l за ось абсцисс, получим:

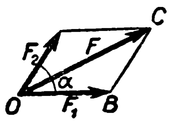
$$\cos\varphi=\frac{x}{r},\quad \text{или}\quad x=r\cos\varphi,$$

где $x=\text{пр}_l\overline{OM}=\text{пр}_l\overline{F}$, а r есть длина $|\overline{F}|$ вектора $\overline{F}$. Следовательно,

$$\boxed{\text{пр}_l\overline{\boldsymbol{F}}=|\overline{\boldsymbol{F}}|\cos\varphi},\qquad \text{ч. т. д.}$$

Вычисление работы. Если под действием постоянной силы $\overline{F}$ тело описывает прямолинейный путь S, то для вычисления работы A следует величину проекции силы $\overline{F}$ на путь умножить на длину пути; следовательно,

$$A=\text{пр}\,\overline{F}\cdot S=|\overline{F}|\,S\cos\varphi.$$



Черт. 80.

II. Чтобы вычислить величину равнодействующей $\overline{F}$ двух сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, образующих между собой угол α, достаточно вычислить длину OC стороны треугольника OBC (черт. 80). По теореме косинусов получим:

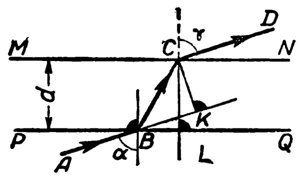
$$OC^2=OB^2+BC^2-2OB\cdot BC\cdot\cos(180°-\alpha),$$

или

$$|\overline{F}|^2=|\overline{F}_1|^2+|\overline{F}_2|^2+2|\overline{F}_1|\cdot|\overline{F}_2|\cdot\cos\alpha.$$

III. Из физики известно, что дальность полёта тела, брошенного с начальной скоростью v_0 под углом α (где $0 < \alpha < 90°$) к горизонту, равна $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ (сопротивление воздуха не учитывается, g — ускорение силы тяжести). Дальность полёта является наибольшей, если $\sin 2\alpha = 1$, откуда $2\alpha = 90°$ и $\alpha = 45°$. Итак, дальность полёта будет наибольшей, если тело брошено под углом 45° к горизонту.

IV. Задача из геометрической оптики: *определить смещение луча света после его прохождения через плоско-параллельную пластинку* (черт. 81).



Черт. 81.

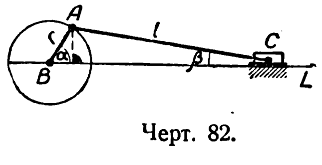
Пусть d — толщина пластинки, n — её показатель преломления, MN и PQ — плоскости, ограничивающие пластинку, α — угол падения луча.

Луч AB, встретив пластинку, изменит направление и пойдёт по прямой BC, составляющей угол β с перпендикуляром к плоскости PQ, где (по закону преломления света): $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$. При выходе из пластинки луч составит с перпендикуляром к плоскости MN угол γ, где $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{1}{n}$. Следовательно, $\sin\alpha = \sin\gamma$, и так как α и γ острые углы, то $\alpha = \gamma$. Смещение KC найдём из треугольника BKC:

$$KC = BC \sin\angle CBK = BC\sin(\alpha - \beta); \quad \text{но} \quad BC = \frac{d}{\cos\beta}$$

(из треугольника BCL), а потому $KC = \frac{d\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}$.

V. Движение кривошипного механизма. При вращении стержня кривошипа AB ползун C движется по прямой BL. Движение передаётся при помощи шатуна AC (черт. 82). Пусть α — угол, образованный кривошипом AB, а β — угол, образованный шатуном с прямой BL, r — длина кривошипа, l — длина шатуна. Зависимость между α и β можно найти из треугольника ABC.



Черт. 82.

$$\frac{r}{\sin\beta} = \frac{l}{\sin\alpha}, \quad \text{откуда} \quad \sin\beta = \frac{r}{l}\sin\alpha.$$

Во многих механизмах $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ и тогда $\beta = \arcsin\frac{\sin\alpha}{5}$.

Для расчёта можно составить, например, такую таблицу приближённых значений β:

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
β	0°	2°	4°	5,5°	7,5°	9°	10°	11°	11,5°	11,5°

Если кривошип от начального положения повернётся на угол α, то расстояние ползуна от центра вращения β сделается равным

$$BC = r\cos\alpha + l\cos\beta.$$

Отклонение ползуна от его первоначального положения равно

$$r + l - (r\cos\alpha + l\cos\beta) = r(1 - \cos\alpha) + l(1 - \cos\beta).$$

VI. Из физики известно, что колебание переменного электрического тока выражается формулой:

$$I = A\sin(\omega t + \alpha),$$

где A — амплитуда колебаний, ω — частота, $l = \frac{2\pi}{\omega}$ — период, α — фаза.

Обычный трёхфазный ток, который вырабатывает электрогенератор, имеет три фазы α, $\alpha + \frac{2\pi}{3}$, $\alpha + \frac{4\pi}{3}$, получающиеся одна из другой путём последовательного прибавления трети периода синуса. Таким образом, колебание тока для каждой фазы по отдельности выразится формулами:

$$I_1 = A\sin(\omega t + \alpha);\quad I_2 = A\sin\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right);$$
$$I_3 = A\sin\left(\omega t + \alpha + \frac{4\pi}{3}\right).$$

При этом в любой момент времени $I_1 + I_2 + I_3 = 0$. В самом деле:

$$I_1 + I_2 + I_3 = A\left[\sin(\omega t + \alpha) + \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{4\pi}{3}\right)\right] = A\left[2\sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3} + \sin\left(\omega t + \pi + \alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right] =$$
$$= A\left[\sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0.$$

Глава VII

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 49. Простейшие тригонометрические уравнения

Определение. *Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения:*

$$\cos x = m;\quad \sin x = m;\quad \operatorname{tg} x = m;\quad \operatorname{ctg} x = m,$$

где m — данное число.

Решить простейшее тригонометрическое уравнение — значит найти множество всех углов (дуг), имеющих данное значение m тригонометрической функции. В § 13 эта задача решалась построением.

1. Уравнение $\cos x = m$. Если $|m| \leqslant 1$, то существуют две симметричные относительно оси абсцисс дуги

$$\arccos m \quad \text{и} \quad -\arccos m,$$

косинус которых имеет заданное значение (построение см. в § 13). Промежуток от $-\pi$ до π, на котором оканчиваются эти дуги, равен по величине полной окружности (периоду косинуса); все прочие искомые дуги оканчиваются в тех же точках. Общее решение уравнения (т. е. множество всех его решений) выразится формулой:

$$\boxed{x = \pm \arccos m + 2k\pi}$$

Определённое — частное — решение уравнения получится, если в правой части формулы общего решения выбрать знак и придать k некоторое целочисленное значение.

Если $|m| > 1$, то уравнение не имеет решений.

Примеры. 1. $\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ (в радианах) $= \pm 60^\circ + 360^\circ k$ (в градусах).

2. $\cos x = 0{,}7251$; $x = \pm \arccos 0{,}7251 + 360^\circ k \approx \pm 43^\circ 32' + 360^\circ k$ (в градусах) $\approx \pm 0{,}7598 + 2k\pi$ (в радианах)

($\arccos 0{,}7251 \approx 43^\circ 32'$ находится по таблице VIII Брадиса, градусы переведены в радианы по таблице XVI).

2. Уравнение $\sin x = m$. Если $|m| \leqslant 1$, то синусы дуг $\arcsin m$ и $\pi - \arcsin m$ имеют заданное значение m (см. § 13). Концы этих дуг симметричны относительно оси ординат. Множество всех искомых дуг получится прибавлением к найденным двум дугам любого целого числа полных оборотов (периодов синуса):

$$x = \begin{cases} \arcsin m + 2k\pi \\ \pi - \arcsin m + 2k\pi \end{cases} = \begin{cases} \arcsin m + 2k\pi \\ -\arcsin m + (2k+1)\pi \end{cases} \qquad (1)$$

Общее решение можно записать одной формулой:

$\boxed{x = (-1)^n \arcsin m + n\pi}$ (где n — произвольное целое число).

В самом деле, при n чётном $n = 2k$ получается верхняя, а при n нечётном $n = 2k + 1$ — нижняя строчка формулы (1).

Если $|m| > 1$, то уравнение не имеет решений.

Примеры. 1. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + n\pi = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi$.

2. $\sin x = 1$. Все дуги, имеющие синус, равный 1, оканчиваются в верхнем конце вертикального диаметра, поэтому имеем $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (где k — любое целое число).

Точно так же решается уравнение $\sin x = -1$; имеем $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

3. Уравнение $\operatorname{tg} x = m$. При любом значении m в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, равном по длине π, т. е. периоду тангенса, существует единственная дуга $\operatorname{arc\,tg} m$, имеющая данный тангенс.

Для концов искомых дуг возможны два диаметрально противоположные положения. Все искомые дуги можно получить, прибавляя к дуге $\operatorname{arc\,tg} m$ любое целое число полуоборотов (периодов тангенса). Поэтому множество всех искомых дуг выразится формулой:

$$\boxed{x = \operatorname{arc\,tg} m + k\pi}$$

4. Уравнение $\operatorname{ctg} x = m$. При любом m имеет бесконечное множество решений:

$$\boxed{x = \operatorname{arc\,ctg} m + k\pi}$$

(рассуждения такие же, как и в предыдущем случае).

Примеры.

1. $\operatorname{ctg} x = -1$; $x = \operatorname{arc\,ctg}(-1) + k\pi = \frac{3\pi}{4} + k\pi$.

2. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$; $x = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} + 180°k \approx \operatorname{arc\,tg} 0{,}3333 + 180°k \approx$
$\approx 18°26' + 180°$ (в градусах) $\approx 0{,}3217 + k\pi$ (в радианах).

Примечание. Общие решения простейших тригонометрических уравнений $\cos x=m$; $\sin x=m$; $\operatorname{tg} x=m$; $\operatorname{ctg} x=m$ иногда обозначаются следующим образом:

$$\operatorname{Arc}\cos m, \quad \operatorname{Arc}\sin m, \quad \operatorname{Arc}\operatorname{tg} m, \quad \operatorname{Arc}\operatorname{ctg} m.$$

Итак:

$$\operatorname{Arc}\cos m=\pm\arccos m+2k\pi; \quad \operatorname{Arc}\sin m=(-1)^k\arcsin m+k\pi;$$
$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} m=\operatorname{arc}\operatorname{tg} m+k\pi, \quad \operatorname{Arc}\operatorname{ctg} m=\operatorname{arc}\operatorname{ctg}+k\pi,$$

где k — произвольное целое число.

На нижеследующих примерах показано решение тригонометрических уравнений, приводящихся к простейшим.

Примеры.

1. Решить уравнение: $2\sin x-1=0$.

Решение.

$$\sin x=\frac{1}{2}, \text{ откуда } x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi.$$

2. Решить уравнение: $2\cos x+3=0$.

Решение. Уравнение не имеет решений, так как равносильное ему простейшее уравнение $\cos x=-\frac{3}{2}$ не имеет решений.

3. Решить уравнение: $2\cos 3x+1=0$.

Решение. Промежуточный аргумент $3x$ найдём из уравнения: $\cos(3x)=-\frac{1}{2}$; $3x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$; отсюда найдём общее решение данного уравнения $x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi$.

4. Решить уравнение: $2\sin x+\cos x=0$. (1)

Решение. Разделив обе части уравнения на $\cos x$, получим:

$$2\operatorname{tg} x+1=0, \tag{2}$$

откуда $\operatorname{tg} x=-\frac{1}{2}$ и $x\approx-26°34'+180°k$.

При переходе к уравнению (2) из множества допустимых значений неизвестного исключаются числа $\frac{\pi}{2}+k\pi$, так как при $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ левая часть уравнения (2) теряет смысл. Эти значения не удовлетворяют уравнению (1), а потому потери корней не происходит.

§ 50. Способ приведения к одной функции

Рассмотрим, например, уравнение:

$$2\cos^2 x-7\cos x+3=0,$$

квадратное относительно $\cos x$. Решив это уравнение относительно косинуса:

$$\cos x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{7\pm5}{4},$$

составим два простейших уравнения:

$$\cos x=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \cos x=3.$$

Первое уравнение имеет общее решение:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \tag{1}$$

второе не имеет решений. Формула (1) даёт множество всех решений данного уравнения.

Если уравнение содержит различные тригонометрические функции от неизвестного, то можно все эти функции выразить через одну и, выполнив подстановку, получить уравнение, содержащее лишь одну тригонометрическую функцию от неизвестного.

Применение формул, выражающих тригонометрические функции одна через другую, может внести в уравнение радикалы, и при освобождении уравнения от них возможно появление посторонних решений. Поэтому рекомендуется (если это возможно) выбирать такую подстановку, которая не вносит в уравнение радикалов.

Примеры. 1. Решить уравнение:

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 0.$$

Решение. Заменив $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получим:

$$2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0, \quad \text{или} \quad 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0,$$

откуда: $\sin x = -\frac{1}{2}$ и $\sin x = 2$.

Первое уравнение имеет общее решение:

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + n\pi = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\pi,$$

второе не имеет решений.

Примечание. Если применить подстановку $\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$, то получится уравнение, содержащее радикал. Поэтому при решении данного уравнения целесообразно выразить косинус через синус, но не синус через косинус.

2. Решить уравнение:

$$\sin x + \cos x = 1. \tag{1}$$

Решение. Подставив $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$, получим:

$$\sin x \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1, \quad \text{или} \quad \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 - \sin x.$$

По возведении в квадрат обеих частей и сокращении получим:

$$\sin^2 x - \sin x = 0, \tag{2}$$

откуда:

$$\sin x = 1 \quad \text{и} \quad \sin x = 0.$$

Решив эти простейшие уравнения, найдём две серии решений:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = n\pi \quad (k \text{ и } n \text{ целые числа}).$$

Проверка. Для решений первой серии:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0.$$

Уравнение (1) удовлетворяется. Для решения второй серии:

$$\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ чётное;} \\ -1, & \text{если } n \text{ нечётное.} \end{cases}$$

Уравнение (1) удовлетворяется лишь при чётных значениях $n=2m$. Решения второй серии при нечётном $n=2m+1$ являются посторонними (другой способ решения этого уравнения см. ниже на стр. 89).

Общее решение уравнения (1) состоит из двух серий:

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{и} \quad x=2m\pi.$$

Для уравнения, содержащего неизвестное под знаком тригонометрических функций от сложных аргументов, в ряде случаев также можно, выразив все тригонометрические функции через одну, получить уравнение, содержащее лишь одну тригонометрическую функцию от неизвестного.

Примеры.

1. Решить уравнение: $\cos 2x=\sin^2 x$.

Решение. Выполнив подстановку:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},$$

получим следующее уравнение, содержащее лишь одну функцию от неизвестного:

$$\cos 2x=\frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \text{или} \quad 3\cos 2x=1,$$

откуда:

$$\cos 2x=\frac{1}{3}; \quad 2x=\pm\arccos\frac{1}{3}+360^\circ k$$

и, наконец,

$$x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+180^\circ k\approx\pm 35^\circ 16'+180^\circ k.$$

2. Решить уравнение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos 2x+\sin(2x-\pi)\sin x=0.$$

Решение. Подставив

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \quad \text{и} \quad \sin(2x-\pi)=-\sin 2x,$$

приведём уравнение к следующему виду:

$$\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x=0, \quad \text{или} \quad \cos 3x=0,$$

откуда:

$$3x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{и} \quad x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}=\frac{(2k+1)\pi}{6}.$$

§ 51. Способ разложения на множители

Если левую часть уравнения, после переноса в неё всех слагаемых, можно разложить на множители, то уравнение примет вид равенства нулю произведения. Далее следует *приравнять поочерёдно нулю каждый из сомножителей*, решить каждое из полученных уравнений и объединить в одно множество все найденные решения.*

---

* Произведение равно в том и только в том случае, если хотя бы один из сомножителей равен нулю.

Пример. Решить уравнение: $\sin 5x - \cos 3x = \sin x$.

Решение. Перенесём все слагаемые в левую часть и разложим её на множители. Имеем последовательно:

$$(\sin 5x - \sin x) - \cos 3x = 0;$$
$$2\sin 2x \cos 3x - \cos 3x = 0;$$
$$\cos 3x \cdot (2\sin 2x - 1) = 0.$$

Приравняв нулю сомножители левой части, получим совокупность уравнений:

$$2\sin 2x - 1 = 0 \quad \text{и} \quad \cos 3x = 0.$$

Решим первое уравнение:

$$\sin 2x = \frac{1}{2}; \quad 2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi \quad \text{и} \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + n\frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Решим второе уравнение:

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \qquad x = \frac{2k+1}{6}\pi. \tag{2}$$

Общее решение данного уравнения состоит из двух серий:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2} \quad \text{и} \quad x = \frac{2k+1}{6}\pi.$$

Если при некотором значении неизвестного хотя бы один из сомножителей обращается в нуль, а из других хотя бы один теряет смысл, то и всё произведение теряет смысл; такие значения неизвестного решениями данного уравнения не являются.

Пример. Если приравнять нулю по отдельности сомножители левой части уравнения

$$\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = 0, \tag{1}$$

то получим совокупность уравнений:

$$\sin 2x = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = 0, \tag{2}$$

из которых найдём:

$$x = \frac{n\pi}{2} \quad \text{и} \quad x = k\pi.$$

Второй сомножитель $\operatorname{tg} x$ теряет смысл при значениях $x = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, содержащихся в множестве решений первого уравнения (2) при нечётном $n = 2k+1$. Это посторонние решения. При чётном $n = 2k$ решения первого уравнения (2) содержатся в множестве решений второго уравнения. Формула общего решения данного уравнения есть $x = k\pi$.

§ 52. О потере решений и появлении посторонних решений при выполнении преобразований

Тождественные преобразования данного выражения могут изменить его область определения. Так, например, выражение $\frac{\sin 2x}{\sin x}$ не имеет смысла при $x = k\pi$ (k — любое целое число), ибо при этих значениях аргумента знаменатель обращается в нуль. Если выполнить следующее преобразование:

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{2\sin x \cos x}{\sin x} = 2\cos x,$$

то получится выражение $2\cos x$, имеющее смысл при всех значениях x. Множество допустимых значений аргумента x расширилось.

Напротив, при переходе от выражения $2\cos x$ к первоначальному $\frac{\sin 2x}{\sin x}$ множество допустимых значений аргумента x сузится.

При выполнении тождественных преобразований над выражениями, содержащимися в уравнении, возможно появление посторонних решений, если множество допустимых значений неизвестного расширилось, и возможна потеря решений, если это множество сузилось.

Пример. Решить уравнение:

$$\frac{1+\cos 2x}{2\cos x}=\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}. \qquad (1)$$

Решение. Произведём сокращение дробных выражений:

$$\frac{1+\cos 2x}{2\cos x}=\frac{2\cos^2 x}{2\cos x}=\cos x;$$

$$\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x}=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

Уравнение примет вид:

$$\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}, \quad \text{или} \quad \frac{\cos x(\sin x-1)}{\sin x}=0. \qquad (2)$$

Приравняв нулю сомножители числителя:

$$\cos x=0 \quad \text{и} \quad \sin x-1=0,$$

получим:

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{и} \quad x=\frac{\pi}{2}+2n\pi.$$

Вторая серия значений x содержится в первой, и обе формулы можно объединить в одну: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

Сокращение дробных выражений при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) может внести посторонние решения. В данном примере все найденные решения посторонние, так как левая часть уравнения (1) при $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ теряет смысл. Данное уравнение не имеет решений.

Примечание. Потери решений не может быть, так как при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) множество допустимых значений x расширилось.

§ 53. Частные приёмы решения тригонометрических уравнений

Ниже на примерах показаны различные частные приёмы решения тригонометрических уравнений. Эти приёмы могут быть самыми разнообразными в зависимости от вида левой и правой частей уравнения.

Примеры.

1. Решить уравнение: $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$.

Решение. Преобразуем в сумму левую и правую части:

$$\frac{\cos 6x - \cos 8x}{2} = \frac{\cos 2x - \cos 8x}{2}, \quad \text{или} \quad \cos 6x = \cos 2x.$$

Применим способ разложения на множители:

$$\cos 6x - \cos 2x = 0; \quad -2\sin 4x \sin 2x = 0,$$

откуда:

$$\sin 4x = 0, \quad \sin 2x = 0 \quad \text{и, наконец,} \quad x = \frac{k\pi}{4} \quad \text{и} \quad x = \frac{k\pi}{2}.$$

Первая серия содержит вторую (при чётном $k = 2n$); поэтому $x = \frac{k\pi}{4}$ есть формула общего решения данного уравнения.

2. Решить уравнение: $\cos x + \sin x = 1$.

Решение. Разделив обе части на $\sqrt{2}$ и приняв во внимание, что $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, представим левую часть в виде косинуса разности.

Имеем последовательно:

$$\cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos x \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

откуда найдём две серии решений:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{и} \quad x = 2k\pi.$$

Другим способом это уравнение было решено в § 50 (стр. 85, пример 2). При решении, изложенном в настоящем параграфе, проверка корней не требуется.

Примечание. Этим способом может быть решено уравнение $a\sin x + b\cos x = c$.

В самом деле, введением вспомогательного угла φ (см. § 25) оно может быть преобразовано к виду:

$$\sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(x + \varphi) = c.$$

3. Решить уравнение:

$$\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 0. \qquad (1)$$

Решение. Разделив обе части на $\cos^2 x$, получим:

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0, \qquad (2)$$

откуда:

$$\operatorname{tg} x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad x = \operatorname{arc\,tg}\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} + k\pi.$$

При переходе от уравнения (1) к (2) область определения уравнения сужается, так как исключается из множества допустимых значений неизвестного числа $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Но ни одно из этих чисел не удовлетворяет уравнению (1), поэтому потери решений не происходит.

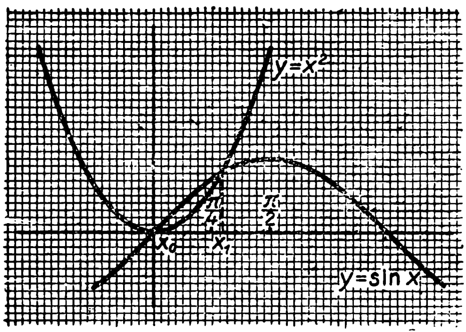
Примечание. Это уравнение относится к классу однородных тригонометрических уравнений, так как все его члены имеют одну и ту же степень (в данном примере вторую) относительно $\sin x$ и $\cos x$. Изложенным способом обычно и решаются однородные тригонометрические уравнения.

4. Решить уравнение: $3\cos 4x - 5\sin^3 x = 10$.

Решение. Уравнение не имеет решений, так как по абсолютной величине $3\cos 4x$ не больше, чем 3, а $5\sin^3 x$ не больше, чем 5, а потому правая часть не может быть равна 10.

§ 54. О приближённом решении тригонометрических уравнений

Средствами элементарной математики не всегда возможно составить формулу общего решения данного уравнения. В этом случае на практике вычисляют корни приближённо, при помощи графического метода и таблиц значений функций. Поясним сказанное на примере.



Черт. 83.

Решить уравнение: $x^2 = \sin x$.

Аккуратно построенный график (черт. 83) показывает, что линии $y = x^2$ и $y = \sin x$ пересекаются в двух точках с абсциссами $x_0 = 0$ и $x_1 > 0$. Уравнение имеет два корня $x_0 = 0$ и $x_1 > 0$. Вычислим корень x_1 с точностью до 0,1, пользуясь таблицами Брадиса.

На чертеже видно, что корень x_1 содержится в интервале $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Это же подтверждают вычисления. В самом деле, при $x = \frac{\pi}{4}$ левая часть уравнения $x^2 - \sin x = 0$, равносильного данному, отрицательна:

$$x^2 - \sin x = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \sin\frac{\pi}{4} \approx (0{,}7854)^2 - 0{,}7071 \approx$$

$\approx 0{,}6168 - 0{,}7071 < 0$, а при $x = \frac{\pi}{2}$ положительна:

$$x^2 - \sin x = (1{,}5708)^2 - 1 > 0$$

(возведение в квадрат выполняем по таблицам квадратов).

Из чертежа видно, что значение x_1 „близко“ к $\frac{\pi}{4}$; поэтому, разделив интервал $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, например, на пять равных частей, испытаем значение $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{20} = \frac{3\pi}{10}$ $(= 54^\circ)$.

Имеем:

$$x^2-\sin x=\left(\frac{3\pi}{10}\right)^2-\sin 54^\circ\approx(0{,}9425)^2-0{,}8090\approx$$

$\approx 0{,}8883-0{,}8090>0$. Так как при $x=\frac{\pi}{4}$ левая часть уравнения $x^2-\sin x=0$ отрицательна, а при $x=\frac{3\pi}{10}$ положительна, то $\frac{\pi}{4}<x_1<\frac{3\pi}{10}$. Разделив интервал $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{10}\right)$, например, на три равные части, испытаем значения:

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{60}=\frac{4\pi}{15}\ (=48^\circ)\quad\text{и}\quad x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{30}=\frac{17\pi}{60}\ (=51^\circ).$$

При $x=\frac{4\pi}{15}$ имеем:

$$\left(\frac{4\pi}{15}\right)^2-\sin\frac{4\pi}{15}\approx(0{,}8378)^2-\sin 48^\circ\approx 0{,}7019-0{,}7431<0.$$

Испытываем значение $x=\frac{17\pi}{60}$:

$$\left(\frac{17\pi}{60}\right)^2-\sin 51^\circ\approx(0{,}8901)^2-0{,}7771\approx 0{,}7923-0{,}7771>0.$$

Итак, корень x заключён между числами $\frac{4\pi}{15}=0{,}837\ldots$ и $\frac{17\pi}{60}=0{,}890\ \ldots$, а поэтому $0{,}8<x_1<0{,}9$. Чтобы установить, какое из значений 0,8 или 0,9 следует взять, испытаем $x=0{,}85\ (\approx 48^\circ 42')$.

$$(0{,}85)^2-\sin 48^\circ 42'\approx 0{,}7225-0{,}7513<0;$$

следовательно, $0{,}85<x_1<0{,}9$, а поэтому $x_1\approx 0{,}9$ (с избытком). Дальнейшим делением промежутка можно вычислить x_1 с точностью до 0,01 и т. д.

§ 55. О способе рационализации

Метод рационализации заключается в следующем: *вводится вспомогательное неизвестное так, чтобы после подстановки получилось рациональное уравнение относительно этого вспомогательного неизвестного.*

В качестве примера решим уравнение:

$$a\sin x+b\cos x=c. \tag{1}$$

Решение. Так как $\cos x$ и $\sin x$ выражаются рационально через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (см. § 26), то, положив $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, получим:

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};\quad \sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}.$$

После подстановки уравнение примет вид:

$$-\frac{t^2(b+c)-2at+c-b}{1+t^2}=0. \tag{2}$$

Умножив обе части на выражение $-(1+t^2)$ (не равное нулю при всех значениях t), получим квадратное уравнение:

$$t^2(b+c)-2at+c-b=0, \tag{3}$$

равносильное уравнению (2), откуда, если $b\neq -c$:

$$t=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}. \tag{4}$$

Значения t действительны, если $a^2+b^2\geqslant c^2$.

Если $b=-c$, то уравнение (3) обратится в уравнение первой степени, из которого найдём:

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{b}{a},\quad \frac{x}{2}=\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{b}{a}\right)+k\pi. \tag{5}$$

Выражение для вспомогательного неизвестного $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ теряет смысл при $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, т. е. при $x=(2k+1)\pi$. Решения уравнения (1) вида $x=(2k+1)\pi$ (если такие решения существуют) могут быть потеряны. Подставив $x=(2k+1)\pi$ в уравнение (1), получим $-b=c$.

В этом случае уравнение (1) имеет серию решений $x=(2k+1)\pi$.

Из сказанного следует:

1°. Если $a^2+b^2<c^2$, то уравнение (1) не имеет решений, так как уравнение (3) не имеет действительных корней.

2°. Если $a^2+b^2\geqslant c^2$ и $c\neq -b$, то из уравнения (4) найдём:

$$x=2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}+k\pi\right).$$

3°. Если $c=-b$, то уравнение (1) имеет две серии решений: $x=(2k+1)\pi$ и $x=2\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{b}{2}\right)+2k\pi$ [из уравнения (5)].

Исторический очерк

Тригонометрия, как и всякая научная дисциплина, возникла из потребностей практической деятельности человечества. Различные задачи астрономии, мореплавания, землемерия, архитектуры привели к необходимости разработки способа вычисления элементов геометрических фигур по известным значениям других их элементов, найденных путём непосредственных измерений. Так, например, на основе данных, полученных в результате наблюдений и измерений, астрономы вычислили расстояния от Земли до других небесных тел.

Само название „тригонометрия“ греческого происхождения, в переводе на русский язык оно обозначает „измерение треугольников“: τρίγονον (тригонон) — треугольник, μετρέιν (метрейн) — измерение.

Зарождение тригонометрии относится к глубокой древности. Ещё задолго до н. э. древневавилонские учёные умели предсказывать солнечные и лунные затмения. Это позволяет сделать вывод, что им были известны некоторые простейшие сведения из тригонометрии.

Во II в. до н. э. накопившийся материал астрономических наблюдений потребовал математической обработки. Одним из основоположников тригонометрии считается древнегреческий астроном Гиппарх, живший во II в. до н. э. Гиппарх является автором первых тригонометрических таблиц. Эти таблицы до нас не дошли, но они вошли (в усовершенствованном виде) в сочинение

„Великое построение“ (Альмагест) знаменитого александрийского астронома Клавдия Птолемея, жившего во второй половине II в. н. э. В этих таблицах давались значения хорд окружности для различных значений соответствующего центрального угла. Единицей измерения хорд служила $\frac{1}{60}$ часть радиуса. Эти таблицы, говоря современным языком, являются таблицами значений удвоенного синуса половины соответствующего центрального угла. В них были даны значения хорд для углов $0^\circ,5$; 1°; $1^\circ,5$; 2°; $2^\circ,5$; ... ; 180°. Однако надо иметь в виду, что в древней Греции тригонометрия не выделялась в самостоятельную науку, а считалась частью астрономии.

Важный вклад в развитие тригонометрии был внесён индийской математикой в период V—XII вв. н. э. Индийские математики стали вычислять не полную хорду, как это делали греки, а её половину (т. е. линию синуса). Индийцы составили таблицу „синусов“, в которой были даны значения полухорд, измеренных частями (минутами) окружности. Индийским математикам были известны соотношения, которые в современных обозначениях пишутся так:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha).$$

В период IX—XV вв. ведущая роль в развитии математики принадлежала народам Средней Азии и Закавказья. Развитие среднеазиатской математики происходило также в тесной связи с необходимостью решения практических вычислительных задач, которые ставились астрономией, географией, геодезией. Среднеазиатскими учёными были введены в рассмотрение шесть тригонометрических линий (синуса, косинуса, тангенса, котангенса, секанса и косеканса). Для решения задач об определении высоты Солнца арабский астроном Аль-Баттани (живший в X в.) составил небольшую таблицу значений котангенса. Выдающийся астроном и математик Абу-ль-Вефа из Хорасана (ныне территория Ирана) выразил словесно алгебраические соотношения между тригонометрическими функциями; он же составил таблицы синусов с точностью до $\frac{1}{60^4}$ через каждые $10'$, а также таблицы тангенсов.

Трудами среднеазиатских учёных тригонометрия сформировалась в самостоятельную научную дисциплину, в которой средством исследования явились не только геометрические построения, но и алгебраические соотношения между тригонометрическими функциями. Знаменитый азербайджанский математик и астроном Насирэддин Туси (живший в XIII в.) в сочинении „Трактат о полном четырёхстороннике“ (трактат переведён на русский язык) изложил тригонометрию в виде самостоятельной науки. В этом сочинении был впервые введён ряд новых понятий и получен ряд важных результатов.

В обсерватории знаменитого астронома Улугбека, жившего в Самарканде (XV в.), был разработан весьма точный способ составления тригонометрических таблиц.

В ряде важнейших открытий среднеазиатская математика значительно опередила западноевропейскую науку. Насирэддин Туси развил тригонометрию как самостоятельную дисциплину почти на 200 лет раньше основоположника тригонометрии в Европе Региомонтана.

Первые научные работы по тригонометрии в Западной Европе относятся к XV в. Развитие мореплавания требовало умения точно определять положения небесных светил, что привело к необходимости составления весьма точных тригонометрических таблиц. В XV в. немецкий учёный Региомонтан (Иоганн Мюллер) написал трактат «Пять книг о различного рода треугольниках», где было дано систематическое изложение тригонометрии в виде самостоятельной научной дисциплины. Им же были составлены таблицы синусов с точностью до $\frac{1}{10^7}$. В таблицах Региомонтана радиус круга принимался вместо числа кратного 60 за 10 000 000, т. е. по сути дела был совершён переход от шестидесятиричной системы измерения к десятичной.

Развитие алгебраической символики позволило записывать тригонометрические соотношения в виде формул; применение теории отрицательных чисел позволило рассматривать направленные углы и дуги и распространить понятие тригонометрических линий для любых углов. Таким образом, создалась база для изучения тригонометрических функций как функций от числового аргумента. Аналитический аппарат, позволяющий вычислять значения тригонометрических функций с любой степенью точности, был разработан Ньютоном.

Дальнейшее развитие тригонометрии связано с именем великого учёного, члена Русской академии наук Л. Эйлера (1707—1783). До Эйлера тригонометрические функции рассматривались как отрезки в круге (так называемые тригонометрические линии); Эйлер стал рассматривать значения тригонометрических функций как числа — величины тригонометрических линий в круге, радиус которого принят за единицу. Эйлер дал окончательное решение вопроса о знаках тригонометрических функций в различных четвертях, упростил и дал общие доказательства ряда теорем тригонометрии, открыл связь между тригонометрическими и показательной функциями от комплексного аргумента.

Аналитическое (не зависящее от геометрии) построение теории тригонометрических функций, начатое Эйлером, получило завершение в трудах великого русского учёного Н. И. Лобачевского.

Современная точка зрения на тригонометрические функции как на функции числового аргумента во многом обусловлена развитием физики, механики, техники. Эти функции легли в основу математического аппарата, при помощи которого изучаются различные периодические процессы: колебательные движения, распространение волн, движения механизмов, колебание переменного электрического тока. Как показал Ж. Фурье (1768—1830), всякое периодическое движение с любой степенью точности можно представить в виде суммы простейших синусоидальных (гармонических) колебаний.

На первоначальных стадиях своего развития тригонометрия служила средством решения вычислительных геометрических задач и её содержанием считалось вычисление элементов простейших геометрических фигур, т. е. треугольников. В современной тригонометрии самостоятельное и столь же важное значение имеет изучение свойств тригонометрических функций.

Этим функциям принадлежит исключительно важное значение в современном математическом аппарате, необходимом для изучения закономерностей явлений природы и для использования этих закономерностей в практической деятельности человека.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. Углы и дуги; их измерение

Глава II. Тригонометрические функции

Глава III. Теоремы сложения и их следствия

Глава IV. Основные свойства тригонометрических функций

Глава V. Вычисления при помощи таблиц

Глава VI. Вычисление элементов геометрических фигур

Глава VII. Тригонометрические уравнения

Цена 1 р. 20 к.