Экзамен без проблем

наглядно

доступно

И. В. Третьяк

Геометрия

в схемах и таблицах

эффективная подготовка к ЕГЭ

наглядно

доступно

И. В. Третьяк

ГЕОМЕТРИЯ

в схемах и таблицах

МОСКВА 2016

УДК 514(03)
ББК 22.151я2
Т66

Третьяк, Ирина Владимировна.

Т66 Геометрия в схемах и таблицах / И.В. Третьяк. — Москва : Эксмо, 2016. — 128 с. — (Наглядно и доступно).

ISBN 978-5-699-85283-3

В издании в сжатой, концентрированной форме приводится основной теоретический материал, охватывающий школьный курс геометрии. Термины, понятия, теоремы и формулы объединены в наглядные логические модули, позволяющие лучше понять и усвоить информацию.

Пособие окажет учащимся существенную помощь в подготовке к единому государственному экзамену по математике.

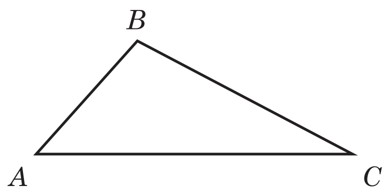
УДК 514(03)
ББК 22.151я2

ISBN 978-5-699-85283-3

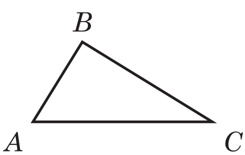
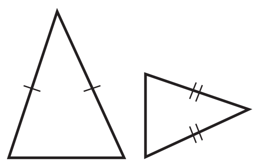
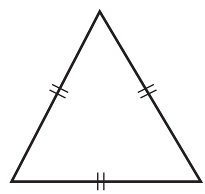
СОДЕРЖАНИЕ

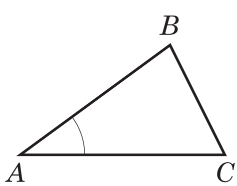
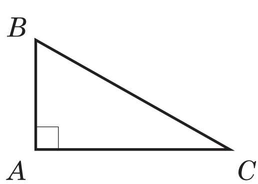
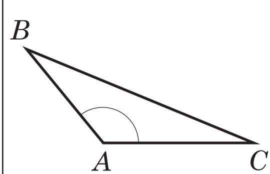
1. ПЛАНИМЕТРИЯ

Треугольник

<table>
<tr>
<td>Треугольник — фигура, состоящая из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, которые их попарно соединяют</td>
<td>

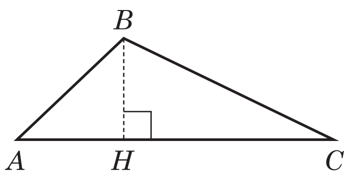
ΔABC, A, B, C — вершины;
AB, BC, AC — стороны</td>
</tr>
</table>

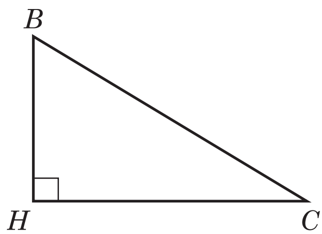
<table>
<tr>
<td colspan="3">В зависимости от соотношения сторон выделяют такие виды треугольников:</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>разносторонний — все его стороны разные</td>
<td>равнобедренный — равны две стороны</td>
<td>равносторонний (правильный) — все стороны равны</td>
</tr>
</table>

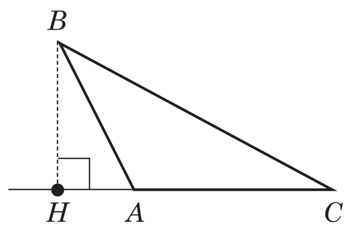
<table>
<tr>
<td colspan="3">В зависимости от соотношения углов выделяют такие виды треугольников:</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>остроугольный</td>
<td>прямоугольный</td>
<td>тупоугольный</td>
</tr>
</table>

Высота, медиана, биссектриса, средняя линия треугольника, серединный перпендикуляр к сторонам

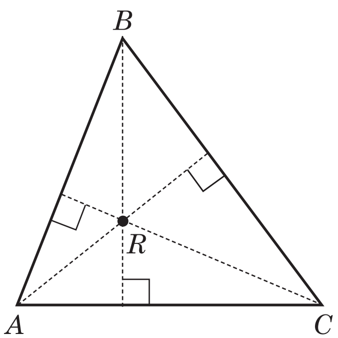
Высота треугольника — перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону

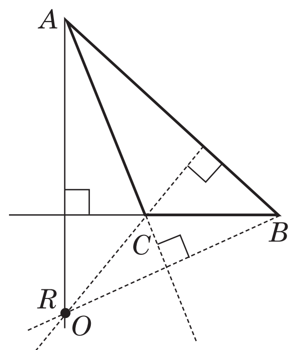






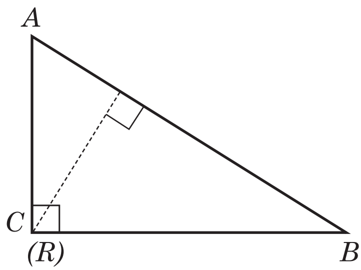
Высоты треугольника пересекаются в одной точке, которая называется **ортоцентром**. Положение ортоцентра R зависит от вида треугольника





остроугольный внутри области треугольника	**тупоугольный** вне области треугольника

Окончание таблицы



прямоугольный (R совпадает с C)

Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам. То есть **наибольшая** высота проведена к **наименьшей** стороне, а **наименьшая** высота — к **наибольшей** стороне.

Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину с **серединой** противоположной стороны.

Свойство медианы треугольника

Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

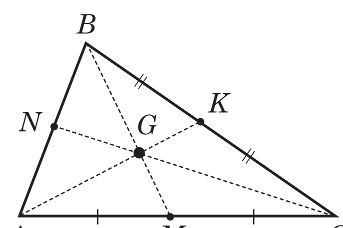
$$BG : GM = 2 : 1;$$
$$GC : GN = 2 : 1;$$
$$AG : GK = 2 : 1$$

Задача.

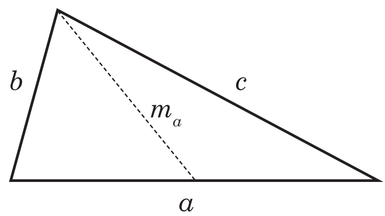
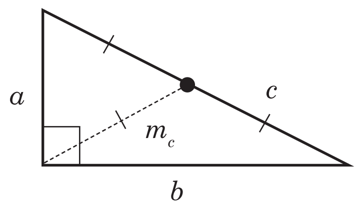
а) $GM = 3$ см, BM — ?
Решение.
$GM = 3$ см, тогда $BG = 6$ см;
$BM = 6 + 3 = 9$ (см).

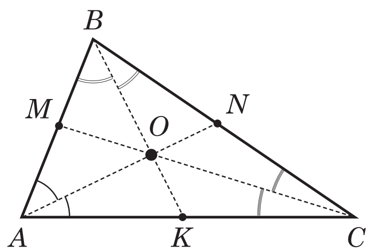
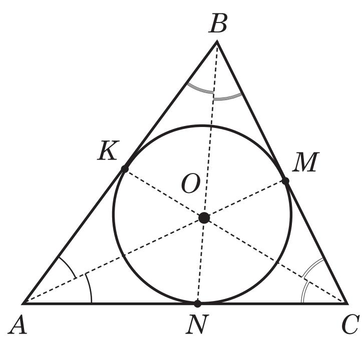
б) $AG = 12$ см, AK — ?
Решение.
$AG = 12$ см, $GK = 6$ см,
$AK = 12 + 6 = 18$ (см).

Ответ: а) 9 см; б) 18 см.

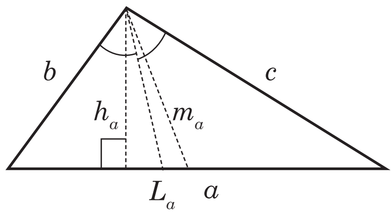
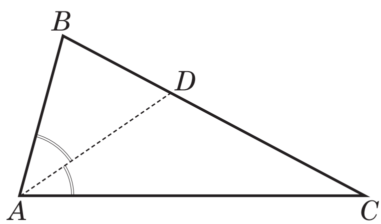


Окончание таблицы

Медианы пересекаются в одной точке, она называется **центром**, или **центром масс**	
Медиану можно вычислить по формуле: $m_a^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$	
$m_c = \dfrac{1}{2}c$ Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна его половине	

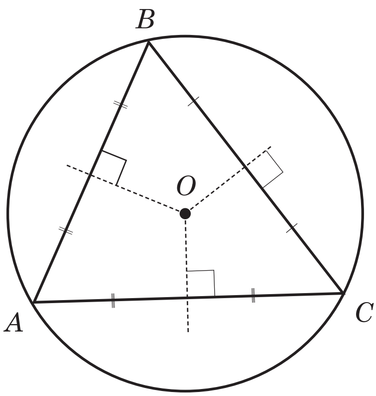
Биссектриса угла треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны и **делящий угол пополам**	
Эта точка является центром вписанной в треугольник окружности. Точка O — центр вписанной окружности, AM, CK и BN — биссектрисы	

Окончание таблицы

Свойство биссектрисы треугольника Биссектриса угла треугольника делит его противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам	$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$; AD — биссектриса
$m_a \geq L_a \geq h_a$, где m — медиана, L — биссектриса, h — высота	
Задача. $BD = 6$ см, $DC = 8$ см, AD — биссектриса; $P_{\Delta ABC} = 35$ см. AB — ? AC — ? *Решение.* $AB + AC = P_{\Delta ABC} - BC =$ $= 35 - (6 + 8) = 21$ (см). По свойству биссектрисы: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$; $\left.\begin{array}{l} AB = 3x \\ AC = 4x \end{array}\right\} 21;$ $7x = 21$; $x = 3$; $AB = 3 \cdot 3 = 9$ (см); АС $= 4 \cdot 3 = 12$ (см). *Ответ:* 12 см.	

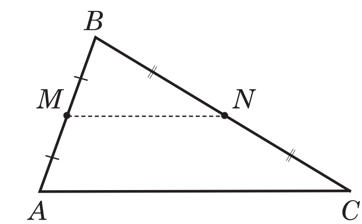
Серединный перпендикуляр — прямая, проходящая через середину отрезка перпендикулярно к нему.
Три серединных перпендикуляра в треугольнике пересекаются в одной точке.

Эта точка — **центр окружности, описанной около данного треугольника**



Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна третьей стороне, а её длина равна половине третьей стороны



$MN \parallel AC$ и $MN = \dfrac{1}{2}AC$

Задача.

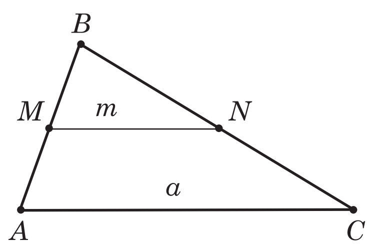
Средняя линия равностороннего треугольника равна 2,5 см.

Найти: его периметр.

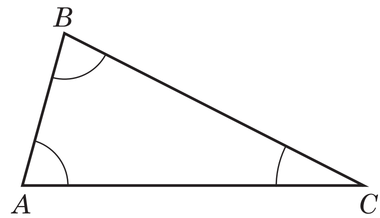
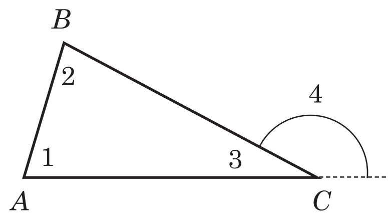
Решение.

По теореме о средней линии $m = 0{,}5a$, тогда
$a = 2m = 5$ см. $P = 3a = 15$ см.

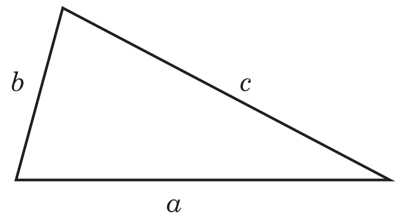
Ответ: 15 см.



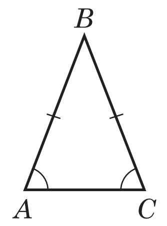
Свойства сторон и углов треугольника

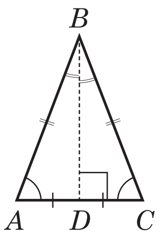
Сумма углов треугольника равна 180° $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$	
Внешний угол треугольника	
Внешний угол треугольника при данной вершине — это угол, смежный с внутренним углом треугольника. $\angle 4$ — внешний (при вершине C)	
Свойства внешнего угла треугольника	
Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним	$\angle 4=\angle 1+\angle 2$
Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним	$\angle 4>\angle 1,\ \angle 4>\angle 2$

Неравенство треугольника

$a<b+c$ $a>\lvert b-c\rvert$	

Равнобедренный треугольник

ΔABC — равнобедренный ($AB = BC$) AC — основание, AB и BC — боковые стороны	

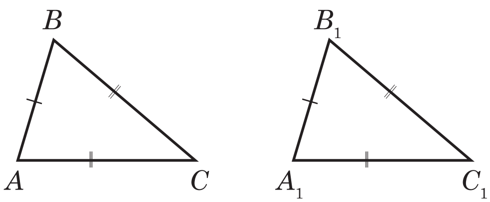
	Свойства	**Признаки**
	Если в ΔABC $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$ (углы при основании равны)	Если в ΔABC $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$ (равнобедренный треугольник)

Если ΔABC — равнобедренный и BD — медиана, проведённая к основанию, то BD — высота и биссектриса	Если в треугольнике совпадают: а) высота и медиана или б) высота и биссектриса или в) медиана и биссектриса, то **треугольник** является **равнобедренным**

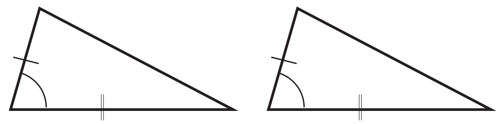
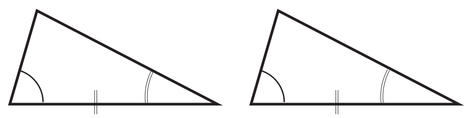
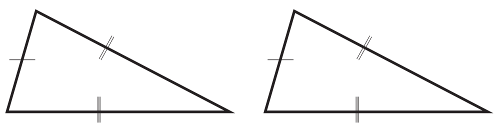
Равенство треугольников

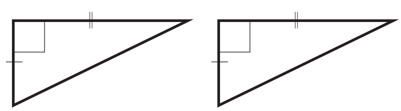
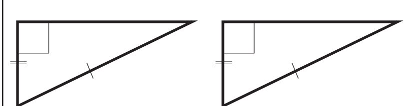
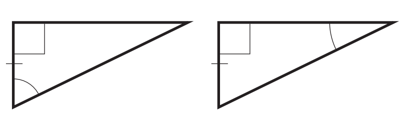
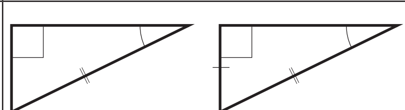
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ $\Leftrightarrow$

$AB = A_1B_1$	$\angle A = \angle A_1$
$AC = A_1C_1$	$\angle B = \angle B_1$
$BC = B_1C_1$	$\angle C = \angle C_1$

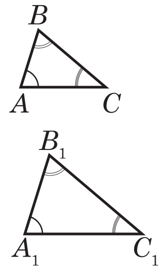


Свойства равных треугольников
1. У равных треугольников равны соответствующие элементы (стороны, углы, медианы, высоты и др.). 2. У равных треугольников против равных сторон лежат равные углы, против равных углов — равные стороны

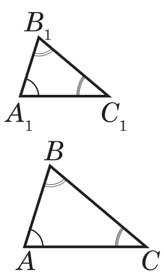
Признаки равенства треугольников	
По двум сторонам и углу между ними	
По стороне и двум прилежащим углам	
По трём сторонам	

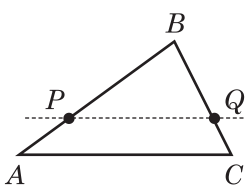
Признаки равенства прямоугольных треугольников	
По двум катетам	По гипотенузе и катету
	
По катету и острому углу	По гипотенузе и острому углу
	

Подобие треугольников

Подобные треугольники — это треугольники, у которых соответствующие **углы равны**, а соответствующие **стороны пропорциональны**. $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$; $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} \Leftrightarrow \Delta ABC \quad \Delta A_1B_1C_1$	

Свойства подобных треугольников	
$\dfrac{P}{P_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1} = k$	**Отношение периметров** равно отношению соответственных сторон и равно коэффициенту подобия
$\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \left(\dfrac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = k^2$	**Отношение площадей** подобных треугольников равно **квадрату** коэффициента подобия

Признаки подобия треугольников	
	Если $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ — по двум равным углам
	Если $\angle A = \angle A_1$ и $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ — по двум пропорциональным сторонам и углу между ними
	Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ — по трём пропорциональным сторонам

	Если $PQ \parallel AC$, то $\Delta PBQ \sim \Delta ABC$. Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному

Задача.

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$; $AB : BC : AC = 2 : 6 : 7$. $A_1C_1 - A_1B_1 = 35$ см.

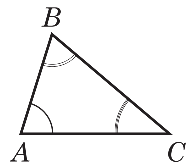
Найти: A_1B_1; B_1C_1 и A_1C_1.

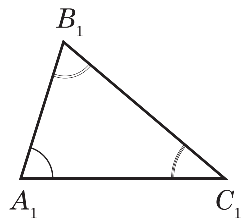
Решение.

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1 = 2 : 6 : 7$;
$A_1B_1 = 2x$; $B_1C_1 = 6x$; $A_1C_1 = 7x$;

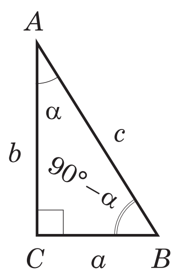
$7x - 2x = 35$; $x = 7$; $A_1B_1 = 14$;
$B_1C_1 = 42$ и $A_1C_1 = 49$.

Ответ: 14; 42; 49.





Соотношение между элементами прямоугольного треугольника



$\angle C = 90°$, a, b — катеты,
c — гипотенуза, $\angle A = \alpha$

$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$ — теорема Пифагора

$\boxed{\angle B = 90° - \alpha;\ c > a;\ c > b}$

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$	$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$	$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$	$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$
$a = c\sin\alpha$	$b = c\cos\alpha$	$a = b\operatorname{tg}\alpha$	$b = a\operatorname{ctg}\alpha$

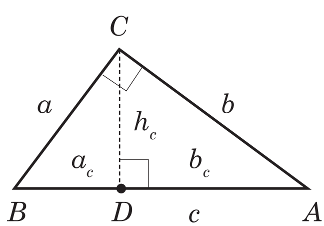
$\Delta ACD \sim \Delta ABC$

$\Delta CBD \sim \Delta ABC$

$\Delta ACD \sim \Delta CBD$

CD — высота,

$CD = c$



$h^2 = a_c \cdot b_c$

$a^2 = c \cdot a_c$

$b^2 = c \cdot b_c$

<table>
<tr><td>

Задача.

$a_c = 9$; $b_c = 16$; a, b, c, h — ?

Решение.

$h^2 = 9 \cdot 16$; $h = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12$;

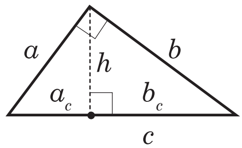
$c = 9 + 16 = 25$;

$a^2 = a_c \cdot c$; $a = \sqrt{9 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15$;

$b^2 = b_c \cdot c$; $b = \sqrt{16 \cdot 25} = 4 \cdot 5 = 20$.

Ответ: 15; 20; 25; 12.

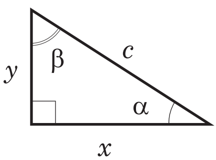
</td><td>



</td></tr>
</table>

Решение прямоугольных треугольников

<table>
<tr><th>Дано</th><th>Найти</th><th>Решение</th></tr>
<tr><td>



c — гипотенуза;
α — острый угол

</td><td>x, y, β</td><td>$\beta = 90° - \alpha$;
$x = c\cos\alpha$;
$y = c\sin\alpha$</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Пример 1.

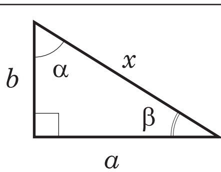
Дано: $c = 2$, $\alpha = 20°$.

Найти: β; x; y.

Решение.
$\beta = 90° - 20° = 70°$;
$x = c\cos 20° = 2 \cdot 0{,}9397 \approx 1{,}88$;
$y = c\sin 20° = 2 \cdot 0{,}3420 \approx 0{,}68$.

Ответ: 70°; 1,88; 0,68.

</td></tr>
<tr><td>



a — катет;
b — катет

</td><td>x, α, β</td><td>

$x = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$; $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{b}{a}$

или $\beta = 90° - \alpha$

</td></tr>
</table>

Пример 2.

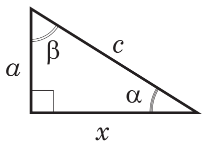
Дано: $a = 11,\ b = 60$.
Найти: c, α, β.

Решение: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{11}{60} \approx 0{,}833.$

По таблице Брадиса $\alpha \approx 10°$; $\beta = 90° - 10° = 80°$;

$c = \sqrt{11^2 + 60^2} = \sqrt{3721} = 61.$

Ответ: $c = 61$; $\alpha = 10°$; $\beta = 80°$.

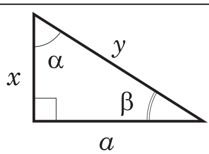
 c — гипотенуза; a — катет	x, α, β	$x = \sqrt{c^2 - a^2}$; $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$; $\cos\beta = \dfrac{a}{c}$ или $\beta = 90° - \alpha$

Пример 3.

Дано: $a = 84,\ c = 85$.
Найти: x, α, β.

Решение: $x = \sqrt{85^2 - 84^2} = 13$; $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{84}{85} \approx 0{,}9882;$

$\alpha \approx 81°$; $\beta = 90° - 81° = 9°$.
Ответ: $x = 0{,}9882$; $\alpha = 81°$; $\beta = 9°$.

 a — катет; α — острый угол, противолежащий a	x, y, β	$\beta = 90° - \alpha$; $x = a\operatorname{ctg}\alpha$; $y = \dfrac{a}{\sin\alpha}$

Пример 4.

Дано: $a = 9,\ \alpha = 68°$.

Найти: β, x, y.

Решение: $\beta = 90° - 68° = 22°$; $y = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{9}{\sin 68°} \approx \dfrac{9}{0{,}9277} \approx 9{,}71;$

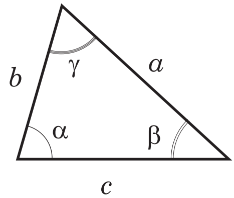
$x = a \operatorname{tg} 22° \approx 9 \cdot 0{,}4040 \approx 3{,}64.$
Ответ: 22°; 3,64; 9,71.

Соотношения между сторонами и углами в произвольном треугольнике

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\beta}=2R}$$



R — радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b, c

Теорема косинусов

$$\boxed{\begin{gathered}c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma;\\ b^2=a^2+c^2-2ab\cos\beta;\\ a^2=b^2+c^2-2ab\cos\alpha\end{gathered}}$$

Задача 1.

Дано: ΔABC,

$\angle A=\angle C=67°30',\ AC=10\sqrt{2}.$

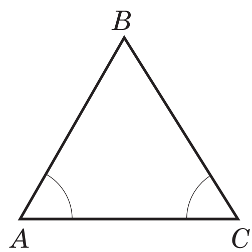
Найти: R.

Решение.

$\angle B=180°-(67°30'+67°30')=45°;$

$$R=\frac{AC}{2\sin\angle B}=\frac{10\sqrt{2}}{2\cdot\sin 45°}=\frac{10\sqrt{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=10.$$

Ответ: 10.



Задача 2.

Дано: $a=8$, $c=13$, $\gamma=120°$.

Найти: b.

Решение.

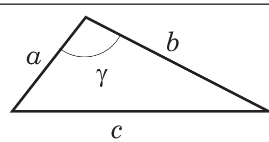
Пусть $b=x$, по теореме косинусов:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos120°;\ \cos120°=-\frac{1}{2};$$

$$8^2+x^2-2\cdot8\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=13^2;$$

$x^2+8x-105=0;\ x=b=15.$

Ответ: 15.



Следствия из теоремы косинусов

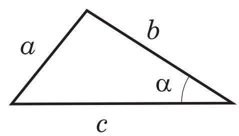
1. Косинус угла можно вычислить по формуле:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2. Определение **вида треугольника** по теореме косинусов: если $a^2+b^2 < c^2$, γ — тупой угол, треугольник тупоугольный; если $a^2+b^2 > c^2$, γ — острый угол, треугольник остроугольный; если $a^2+b^2 = c^2$, $\gamma = 90°$, то треугольник прямоугольный.
3. Если a, b и c — стороны треугольника, то медиана, проведённая к стороне a, равна:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+b^2)-a^2}$$

Задача 3.



Дано: $a = 5,\ b = 5\sqrt{3};\ c = 10.$

Найти: α.

Решение.

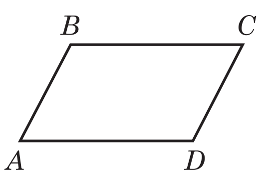
$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{10^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2 - 5^2}{2\cdot 10\cdot 5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \alpha = 30°.$$

Ответ: 30°.

Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат

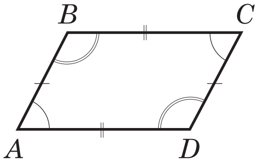
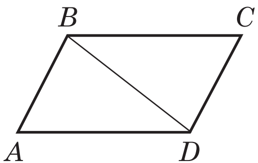
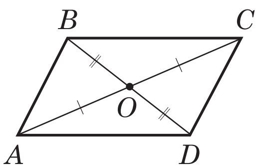
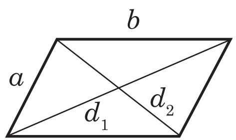
Параллелограмм

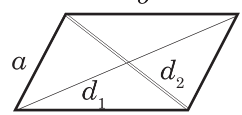


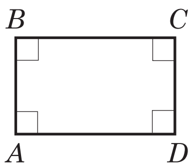
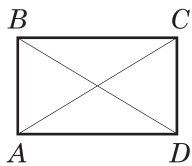
Параллелограмм — четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

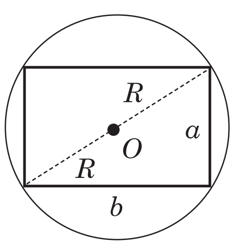
$AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD \Leftrightarrow$ $ABCD$ — параллелограмм

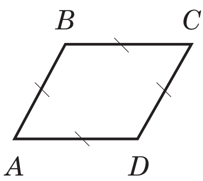
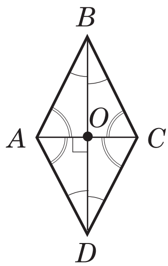
Окончание таблицы

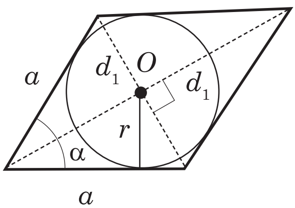
	Свойства	Признаки
	Если $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = CD$; $AD = BC$; $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$	Если $ABCD$ — четырёхугольник и $BC \parallel AD$; $BC = AD$, то $ABCD$ — параллелограмм. Если $ABCD$ — четырёхугольник и $AB = DC$ и $AD = BC$, то $ABCD$ — параллелограмм
	Если $ABCD$ — параллелограмм, BD — диагональ, то $\Delta ABD = \Delta CDB$	—
	Если $ABCD$ — параллелограмм, то $\angle A + \angle B = 180°$ (сумма соседних углов равна 180°)	—
	Если $ABCD$ — параллелограмм, AC и BD — диагонали, то $AO = OC$; $BO = OD$	Если $ABCD$ — четырёхугольник и $AO = OC$, $BO = OD$, то $ABCD$ — параллелограмм
	Сумма квадратов диагоналей равна удвоенной сумме квадратов его смежных сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$	Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон: $d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

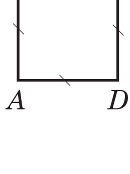
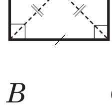
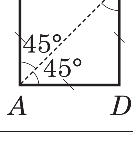
Задача. *Дано*: $a = 7$, $b = 11$, $d_1 : d_2 = 7 : 6$. *Найти*: d_1 и d_2. *Решение.* $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$; $d_1 : d_2 = 7 : 6$; $d_1 = 7x$; $d_2 = 6x$; $(6x)^2 + (7x)^2 = 2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 11^2$; $85x^2 = 340$; $x = 2$; $d_1 = 6 \cdot 2 = 12$; $d_2 = 7 \cdot 2 = 14$. $d_1 = 12$; $d_2 = 14$. *Ответ*: 12; 14.	

Прямоугольник		
		**Прямоугольник** — параллелограмм, у которого все углы прямые

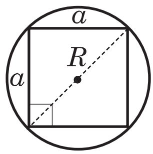
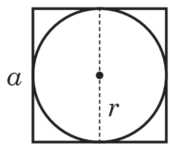
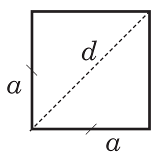
Свойства	**Признаки**
1. Все свойства параллелограмма. 2. Если $ABCD$ — прямоугольник, то $AC = BD$ (диагонали равны)	1. Если $ABCD$ — параллелограмм и $\angle A = 90°$, то $ABCD$ — прямоугольник. 2. Если $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$, то $ABCD$ — прямоугольник
	Вокруг любого прямоугольника можно описать окружность: $R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

Ромб		
		**Ромб** — параллелограмм, у которого все стороны равны

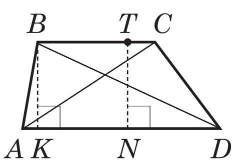
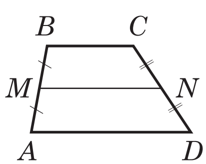
Свойства	Признаки
1. Все свойства параллелограмма. 2. Если $ABCD$ — ромб, AC и BD — диагонали, то: а) $AC \perp BD$; б) диагонали являются биссектрисами углов	Если $ABCD$ — четырёхугольник и $AB = AD = BC = CD$, то $ABCD$ — ромб
	В любой ромб можно вписать окружность: $r = \frac{h}{2} = \frac{a\sin\alpha}{2} = \frac{d_1 d_2}{4a}$

Квадрат	
  	**Квадрат** — прямоугольник, у которого все стороны равны: $AB = BC = CD = AD$ или **Квадрат** — ромб, у которого все углы прямые: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

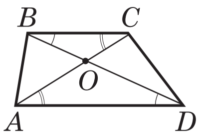
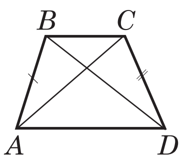
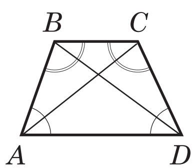
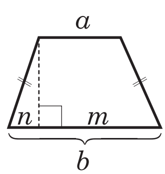
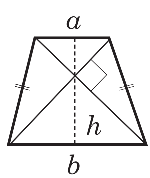
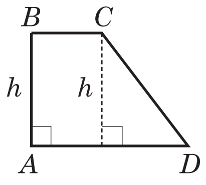
Окончание таблицы

Свойства квадрата	
	Вокруг квадрата можно описать окружность $R = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{2}$
	В квадрат можно вписать окружность $r = \frac{a}{2}$
	Диагональ в $\sqrt{2}$ раз больше стороны, т. е. $d = a\sqrt{2}$ и $a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$

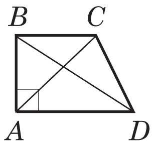
Трапеция

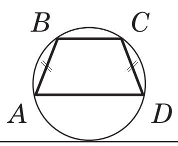
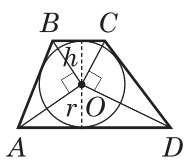
	**Трапеция** — четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны. $AD \parallel BC$, AD и BC — основания; AB и CD — боковые стороны; AC и BD — диагонали; BK и TN — высоты
Средняя линия трапеции	
	**Средняя линия трапеции** — отрезок, соединяющий середины боковых сторон. MN — средняя линия **Свойства:** $\begin{matrix} MN \parallel BC \\ MN \parallel AD \end{matrix}$; $MN = \frac{BC + AD}{2}$

Продолжение таблицы

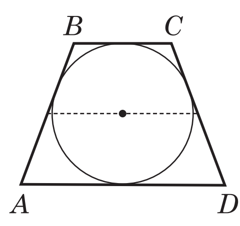
	$\Delta BOC \sim \Delta DOA;\ \dfrac{BO}{DO} = \dfrac{OC}{AO} = \dfrac{BC}{AD}$
Равнобокая трапеция	
	**Равнобокая трапеция** — трапеция с равными боковыми сторонами
Свойства	
  	1. $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle C$; углы при основании равны. 2. $AC = BD$; диагонали равны. Высота, проведённая из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки m и n длиной $m = \dfrac{a+b}{2}$ (равен средней линии $n = \dfrac{b-a}{2}$). Если диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны, то высота равна средней линии: $h = \dfrac{a+b}{2}$.
Прямоугольная трапеция	
	**Прямоугольная трапеция** — это трапеция, у которой одна боковая сторона перпендикулярна основаниям: $AB \perp AD$; $AB \perp BC$; $AB = h$

Окончание таблицы

Свойства		
	**Разность квадратов диагоналей** равна разности квадратов оснований: $BD^2 - AC^2 =$ $= AD^2 - BC^2$	**Сумма квадратов диагоналей** равна сумме квадратов оснований и удвоенного квадрата высоты: $AC^2 + BD^2 =$ $= AD^2 + BC^2 + 2AB^2$

Трапеция и окружность	
	Если около трапеции **описана окружность**, эта трапеция **равнобокая**. Обратно: около равнобокой трапеции **можно описать окружность**
 $\angle AOB = \angle COD = 90°$ ΔAOB и ΔCOD — прямоугольные	Если в трапецию **вписана окружность**, то: 1) сумма оснований равна сумме боковых сторон: $AB + CD = BC + AD$; 2) радиус окружности равен половине высоты: $r = \dfrac{h}{2}$; 3) если соединить центр окружности с вершинами трапеции, треугольники, прилежащие к боковым сторонам, будут прямоугольными

Задача.
В трапецию вписана окружность, $AB = CD = 8$ см.



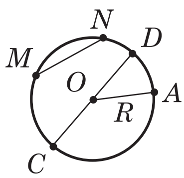
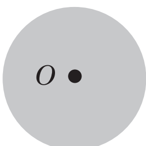
Найти: среднюю линию трапеции.

Решение. В трапецию вписана окружность, значит,
$AB + CD = BC + AD = 8 + 8 = 16.$

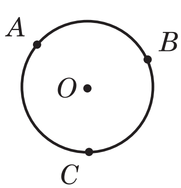
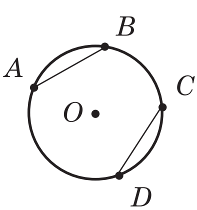
Средняя линия составит: $\dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{16}{2} = 8\,(\text{см})$

Ответ: 8 см.

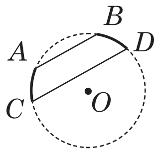
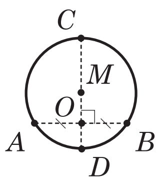
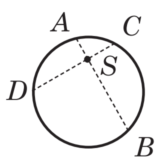
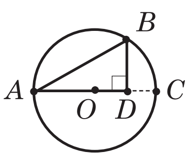
Окружность и круг

	**Окружность** — множество точек плоскости, расстояние от которых до данной точки (центра окружности) одинаково. O — центр окружности. **Радиус окружности** — расстояние от центра до точки на окружности. OA, OC, OD — радиусы. Обозначается R или r. **Хорда** — отрезок, соединяющий две точки на окружности. MN, CD — хорды. **Диаметр** — хорда, проходящая через центр (обозначается D или d). $D = 2R$, $CD = 2OA$
	**Круг** — множество точек плоскости, расстояние до которых от данной точки (центра круга) не превышает данного расстояния (радиуса круга)

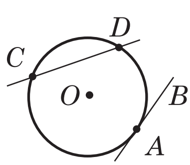
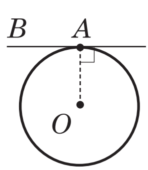
Окружность, хорды и дуги

	**Дуга окружности** — часть окружности, ограниченная двумя её точками. $\cup AB$, $\cup BC$, $\cup AC$
Свойства	
	Равные дуги стягивают равные хорды. Если $\cup AB = \cup CD$, то $AB = CD$. Равные хорды стягивают равные дуги. Если $AB = CD$, то $\cup AB = \cup CD$

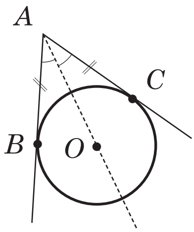
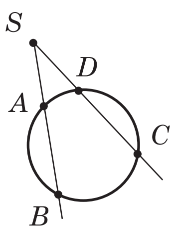
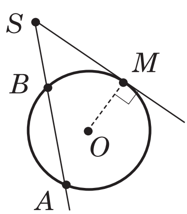
Окончание таблицы

	Параллельные хорды отсекают от окружности равные дуги. Если $AB \parallel CD$, то $\smile AC = \smile BD$
	CD — диаметр, AB — хорда. Если $CD \perp AB$, то $AM = MB$; если $AM = MB$, то $CD \perp AB$
	Если хорды AB и CD пересекаются в точке S, то $AS \cdot SB = CS \cdot SD$
	Если AB — хорда, AC — диаметр, $BD \perp AC$, то $AB^2 = AD \cdot AC$; $BD^2 = AD \cdot DC$

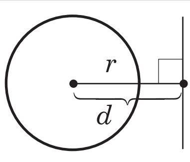
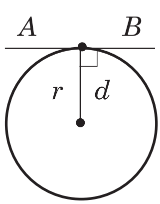
Окружность, касательные и секущие

	**Касательная** — прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку. AB — касательная. **Секущая** — прямая, имеющая с окружностью две общие точки. CD — секущая
Свойства	
	$OA \perp AB$ Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания

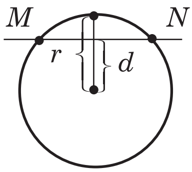
Окончание таблицы

	$AB = AC$ OA — биссектриса $\angle BAC$. Если из одной точки к окружности проведены две касательные, то: а) отрезки касательных равны; б) биссектриса угла между касательными проходит через центр окружности
	Если SB и SC — секущие, то $SA \cdot SB = SD \cdot SC$
	Если SM — касательная, SA — секущая, то $SM^2 = SB \cdot SA$

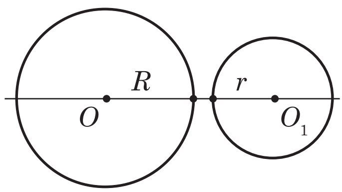
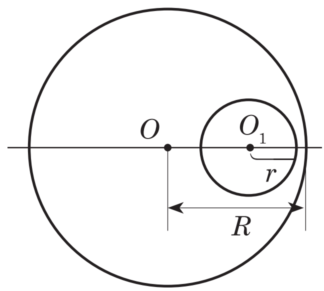
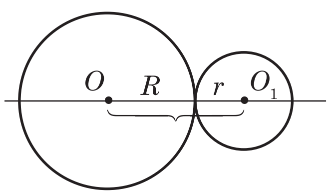
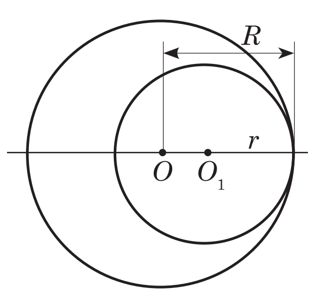
Взаимное расположение прямой и окружности

d — расстояние от центра окружности до прямой, r — радиус окружности	
	$d > r$ Общих точек нет
	$d = r$ Одна общая точка AB — касательная

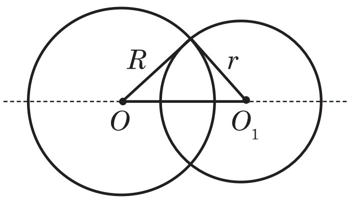
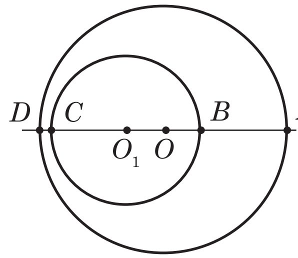
Окончание таблицы

	$d < r$ Две общие точки MN — секущая

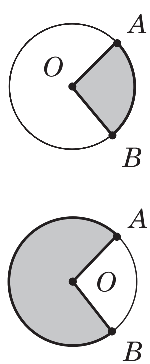
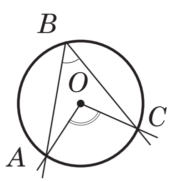
Взаимное расположение двух окружностей

<table>
<tr><td colspan="2">OO_1 — расстояние между центрами, R и r — радиусы окружностей ($R > r$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Окружности не имеют общих точек</td></tr>
<tr><td>
Окружности лежат одна вне другой
$R+r < OO_1$</td><td>
Одна окружность лежит внутри другой
$OO_1 < R-r$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Окружности касаются (одна общая точка)</td></tr>
<tr><td>
Касаются внешне
$OO_1 = R+r$</td><td>
Касаются внутренне
$OO_1 = R-r$</td></tr>
</table>

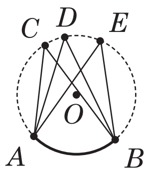
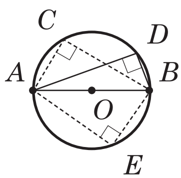
Окончание таблицы

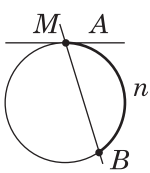
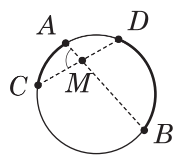
Окружности пересекаются (две общие точки)	
$R - r < OO_1 < R + r$	
	

Углы в окружности

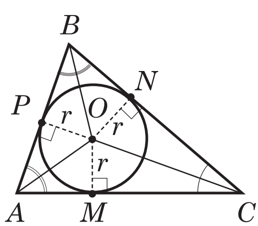
	**Центральный угол** — плоский угол с вершиной в центре окружности. $\angle AOB$ — центральный угол. $\angle AOB = \cup AB$. Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается
	**Вписанный угол** — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают её. $\angle ABC$ — вписанный. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, и половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу: $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$ $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$

Окончание таблицы

	Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой. $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$
	Вписанные углы, которые опираются на диаметр, прямые. $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = 90°$

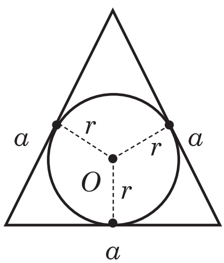
Угол между касательной и секущей	**Угол между хордами**
 MA — касательная; MB — секущая $\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB$	 AB и CD — хорды $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$

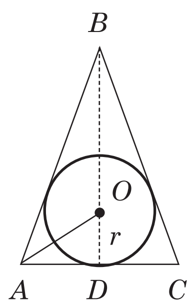
Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника

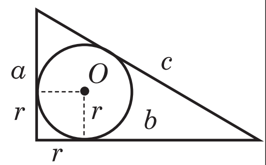
Вписанная окружность	
	Окружность называется **вписанной** в треугольник, если она касается всех его сторон. Центр этой окружности — точка пересечения **биссектрис** углов треугольника. $r = \frac{2S}{a+b+c}$ или $r = \frac{S}{p}$,

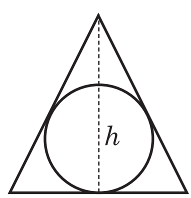
Окончание таблицы

	где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, S — площадь треугольника, p — полупериметр, a, b, c — длины сторон

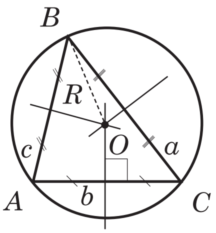
<table>
<tr><th>Равно-
сторонний
треугольник</th><th>Равно-
бедренный
треугольник</th><th>Прямо-
угольный
треугольник</th></tr>
<tr>
<td>

$r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$
Точка O — центр вписанной и описанной окружности, точка пересечения биссектрис, медиан, высот</td>
<td>

$AB = BC$
BD — высота, медиана, биссектриса, высота.
$OD = r$</td>
<td>

a и b — катеты,
c — гипотенуза
$r = \dfrac{a+b-c}{2}$
$a + b = 2R + 2r$,
R — радиус описанной окружности</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Задача.
В равностороннем треугольнике высота равна 12 см. Найти радиус вписанной окружности.
Решение.
h — высота, она же и медиана,
поэтому $BO : OD = 2 : 1$.
$OD = r = 12 : 3 = 4$ (см)</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Описанная окружность



Окружность называется **описанной** около треугольника, если она проходит через все **его вершины**.

Центр этой окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

$OA = OB = OC = R$

В произвольном треугольнике: $R = \dfrac{abc}{4S}$; $R = \dfrac{a}{2\sin A}$.

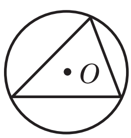
В равностороннем треугольнике: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

В прямоугольном треугольнике: $R = \dfrac{c}{2}$,

где c — гипотенуза треугольника

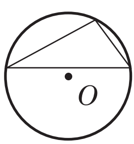
Положение точек описанной окружности в зависимости от вида треугольника

Остроугольный



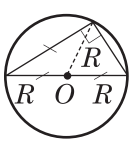
Центр — во внутренней области треугольника

Тупоугольный



Центр — вне области треугольника

Прямоугольный

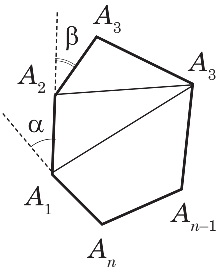


$R = \dfrac{c}{2} = m_c$

Центр — совпадает с серединой гипотенузы

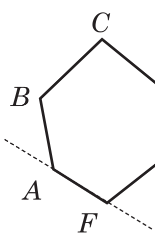
Многоугольник

Сумма углов выпуклого многоугольника

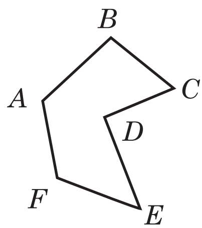


Многоугольник — простая замкнутая ломаная. Соседние звенья не лежат на одной прямой.
$A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, A_n$ — вершины;
$A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ — стороны;
$A_2A_4, \ldots A_1A_4$ — диагонали;
$\angle A_1, \angle A_2, \ldots, \angle A_n$ — внутренние углы;
$\alpha, \beta, \ldots$ — внешние углы многоугольника

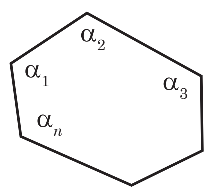
Выпуклый многоугольник лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей сторону



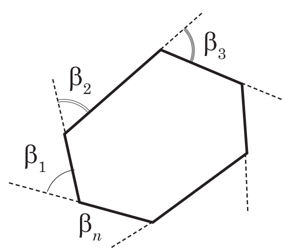
Невыпуклый многоугольник.
Прямая, содержащая сторону многоугольника, делит его плоскость на части.

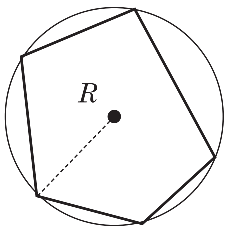
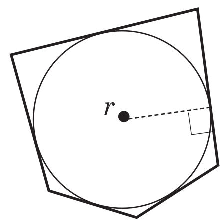
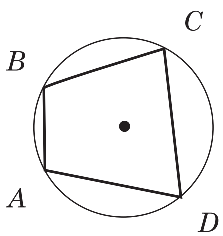
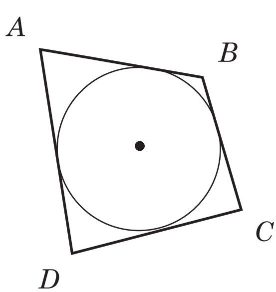


Сумма углов выпуклого n-угольника
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \sum\nolimits_n = 180^\circ \cdot (n-2)$$

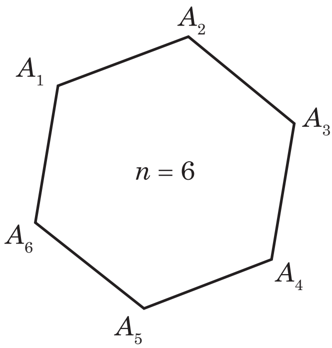
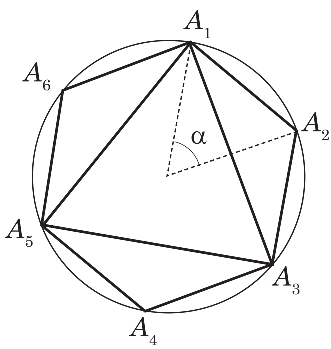
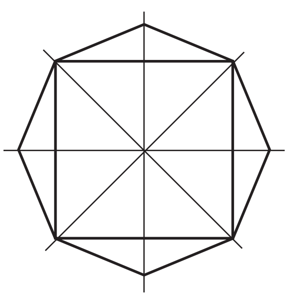


Сумма внешних углов n-угольника (по одному при вершине)
$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_n = 360^\circ$$

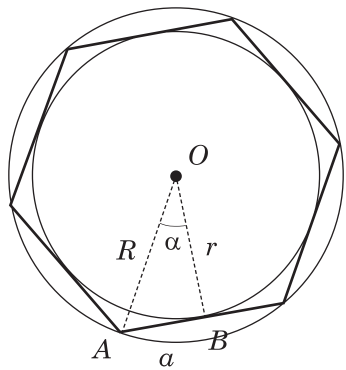


<table>
<tr><th colspan="2">Вписанные и описанные многоугольники</th></tr>
<tr><td>Вписанный многоугольник

Все вершины лежат на окружности</td><td>Описанный многоугольник

Все стороны — касательные к окружности.
$S = \frac{P \cdot r}{2}$,
P — периметр, r — радиус окружности</td></tr>
<tr><th colspan="2">Вписанные и описанные четырёхугольники</th></tr>
<tr><td></td><td>$ABCD$ — вписанный четырёхугольник $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \angle A + \angle C = 180^\circ$
и $\angle B + \angle D = 180^\circ$</td></tr>
<tr><td></td><td>$ABCD$ — описанный четырёхугольник $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow AB + CD = AD + BC$</td></tr>
</table>

Правильные многоугольники

	Выпуклый многоугольник называется **правильным**, если у него все стороны и углы равны. Каждый угол правильного n-угольника равен: $\alpha_n = \dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$
 $n = 6$ и $n = 3$	Внешний угол правильного n-угольника равен $\beta_n = \dfrac{360^\circ}{n}$. Периметр правильного n-угольника со стороной a: $P_n = a \cdot n$. Площадь правильного n-угольника со стороной a: $S_n = \dfrac{na^2}{4\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{180^\circ}{n}\right)}$
 $n = 4$ и $n = 8$	Площадь правильных а) треугольника $S_3 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; б) четырёхугольника (квадрата) $S_4 = a^2$; в) шестиугольника $S_6 = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника



Вписанная окружность касается всех **сторон** правильного многоугольника.

Описанная окружность проходит через все **вершины** правильного треугольника

R — радиус описанной окружности,
r — радиус вписанной окружности,
a — сторона правильного многоугольника,
S_n — площадь, P_n — периметр

Связь между P_n, R, r, S_n и a

Количество сторон многоугольника	***R***	***r***	***S***
n	$\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$	$\dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$	$\dfrac{1}{2}P_n r$
3	$\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
4	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{a}{2}$	a^2
6	a	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Зависимость стороны a_n правильного n-угольника от R и r

Количество сторон многоугольника	**Зависимость a_n от R и n**	**Зависимость a_n от r и n**
n	$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$	$a_n = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$
3	$a_3 = R\sqrt{3}$	$a_3 = 2r\sqrt{3}$
4	$a_4 = R\sqrt{2}$	$a_4 = 2r$
6	$a_6 = R$	$a_6 = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$

Задача.

В квадрат со стороной a вписана окружность.

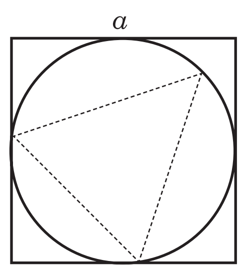
Найти:
сторону правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

Решение.
Сторона квадрата равна a.
В квадрат вписана окружность, её радиус $\frac{a}{2}$

В окружность вписан треугольник, его сторона

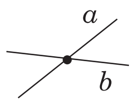
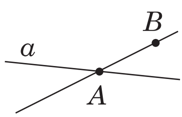
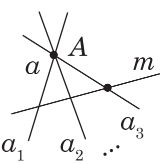
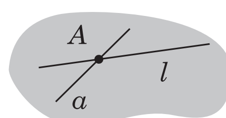
$$a_3 = R\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ a_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

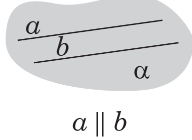
Ответ: $a_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



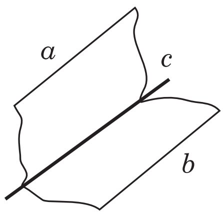
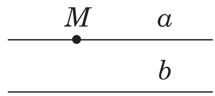
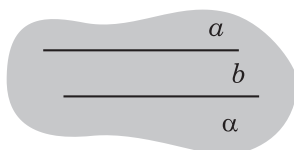
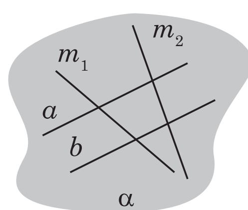
2. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

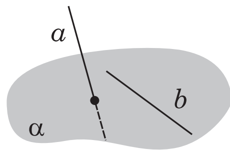
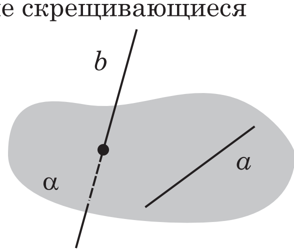
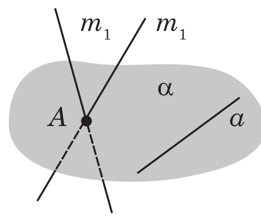
Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пересекающиеся прямые	
	**Пересекающиеся прямые** — две прямые, имеющие только одну общую точку
Признаки	**Свойства**
Если одна точка принадлежит данной прямой, а другая ей не принадлежит, то данная прямая и прямая, проходящая через эти точки, **пересекаются** 	Через точку вне данной прямой можно провести бесконечно много прямых, пересекающих данную прямую 
	 Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и при этом только одну

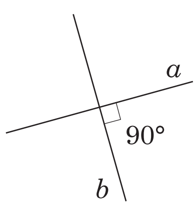
Параллельные прямые	
 $a \parallel b$	**Параллельные прямые** — две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек

Окончание таблицы

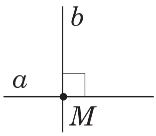
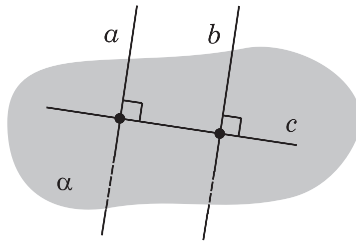
<table>
<tr><th>Признаки</th><th>Свойства</th></tr>
<tr><td>Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.
Если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$
</td><td>Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной прямой, и при этом только одну
</td></tr>
<tr><td></td><td>Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и при этом только одну
</td></tr>
<tr><td></td><td>Все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат с ними в одной плоскости

$a \parallel b$
$m_1 \cap a$; $m_1 \cap b$;
$m_2 \cap a$; $m_2 \cap b$;
$a, b, m_1, m_2 \subset \alpha$</td></tr>
</table>

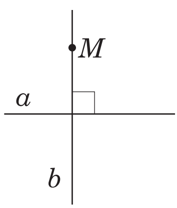
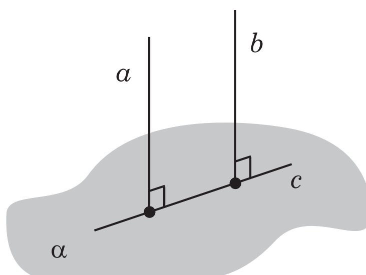
<table>
<tr><th colspan="2">Скрещивающиеся прямые</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Скрещивающиеся прямые — две прямые, не лежащие в одной плоскости</td></tr>
<tr><th>Признаки</th><th>Свойства</th></tr>
<tr><td>в плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся

</td><td>1. Через точку вне данной прямой можно провести бесконечно много скрещивающихся прямых.


2. Для любых двух скрещивающихся прямых в пространстве существует третья прямая, которая является скрещивающейся для каждой из данных двух прямых</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Перпендикулярные прямые</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Перпендикулярные прямые — две прямые, которые пересекаются под углом 90°</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

<table>
<tr><th>Существование
и единственность</th><th>Перпендикулярность
и параллельность</th></tr>
<tr><td>Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и при этом только одну

</td><td>Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой


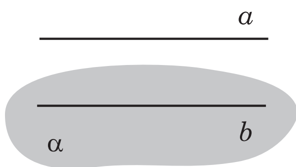
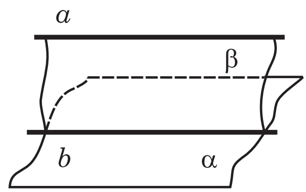
$a \perp c,\ b \perp c \Rightarrow a \parallel b$</td></tr>
<tr><td>Через каждую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести перпендикулярную ей прямую,
и при этом только одну

</td><td>Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой прямой


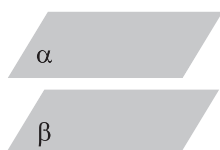
$a \perp c,\ a \parallel b \Rightarrow b \perp c$</td></tr>
</table>

Параллельность прямой и плоскости

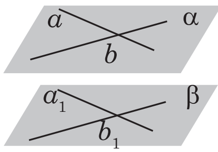
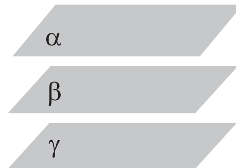
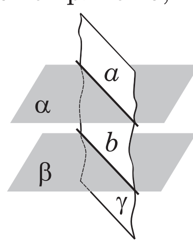
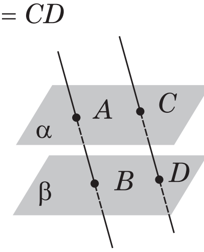
<table>
<tr><td>
</td><td>Прямая и плоскость параллельны, если они не имеют общих точек
$a \parallel \alpha$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

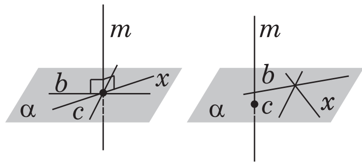
Признак	**Свойство**
 Если $a \parallel b$ и $b \subset \alpha$, то $a \parallel b$. Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-либо прямой в этой плоскости, то она параллельна всей плоскости	 Если $a \parallel \alpha$, β проходит через a, β пересекает α по b, то $a \parallel b$. Если через прямую, параллельную плоскости, провести вторую плоскость, которая пересекает первую, то прямая пересечения плоскостей будет параллельна первой прямой

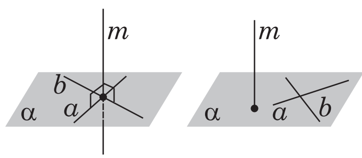
Параллельность плоскостей	
	Две плоскости называют параллельными, если они не имеют общих точек. $\alpha \parallel \beta$
Признаки	**Свойства**
Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны	Если две различные плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой

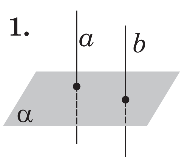
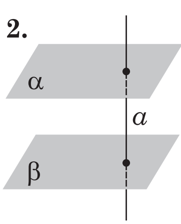
Окончание таблицы

Признаки	**Свойства**
Прямые обоих плоскостей пересекаются. Если $a \parallel a_1$; $b \parallel b_1$ ($a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$), то $\alpha \parallel \beta$. 	Если $\alpha \parallel \beta$ и $\gamma \parallel \beta$, то $\alpha \parallel \gamma$ 
	Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны. Если $\alpha \parallel \beta$ и плоскость γ пересекает плоскость α по прямой a, плоскость γ пересекает плоскость β по прямой b, то $a \parallel b$ 
	Отрезки параллельных прямых, заключённых между параллельными плоскостями, равны. Если $AB \parallel CD$ и $\alpha \parallel \beta$, ($A \in \alpha$, $C \in \alpha$, $B \in \beta$, $D \in \beta$), то $AB = CD$ 

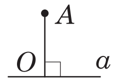
Перпендикулярность прямой и плоскости

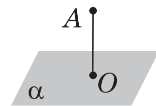
	Прямая, пересекающая плоскость, называется **перпендикулярной** этой плоскости, если она перпендикулярна **любой** прямой, лежащей в этой плоскости. $m \perp \alpha \Leftrightarrow m \perp x$, x — любая прямая плоскости α

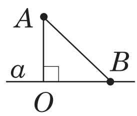
Признак перпендикулярности прямой и плоскости	
	Если $a \perp m$ и $b \perp m$ (a и b лежат в плоскости α и пересекаются), то $a \perp \alpha$. Если прямая перпендикулярна **двум** пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости

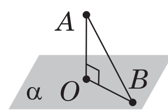
Свойства перпендикулярных прямой и плоскости		
1. 	Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и второй прямой. Если $a \parallel b$ и $a \perp \alpha$, то $\alpha \perp b$	Если прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны. Если $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$
2. 	Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и второй. Если $\alpha \parallel \beta$ и $a \perp \alpha$, то $a \perp \beta$	Две различные плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны. Если $\alpha \perp a$ и $\beta \perp a$, то $\alpha \parallel \beta$

Перпендикуляр и наклонная

<table>
<tr><th>На плоскости</th><th>В пространстве</th></tr>
<tr><td>

$AO \perp a$, $O \in a$
AO — перпендикуляр из точки A к прямой a</td><td>

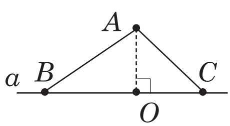
$AO \perp \alpha$, $O \in \alpha$
AO — перпендикуляр из точки A на плоскость α</td></tr>
<tr><td>

AO — расстояние от точки A до прямой a;
AB — наклонная</td><td>

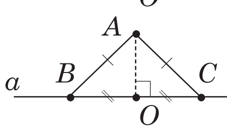
AO — расстояние от точки A до плоскости α;
AB — наклонная</td></tr>
<tr><td colspan="2">Перпендикуляр короче всякой наклонной.
$AO < AB$</td></tr>
</table>

OB — проекция наклонной AB на прямую a

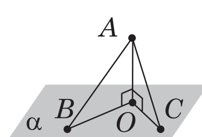
OB — проекция наклонной AB на плоскость α



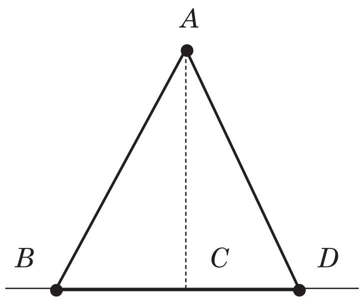
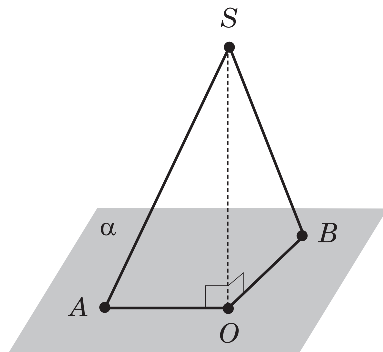
$AB > AC \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow BO > OC$



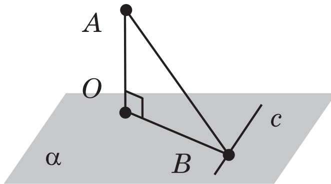
$AB = AC \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow BO = OC$



Если из одной точки к одной прямой (плоскости) проведены две наклонные, то:
- равные наклонные имеют равные проекции;
- если проекции наклонных равны, то равны и сами наклонные;
- бо́льшая наклонная имеет бо́льшую проекцию;
- из двух наклонных больше та, у которой проекция больше

На плоскости	**В пространстве**
Задача 1.  AC — перпендикуляр, AB и AD — наклонные. $AB = 30$ см, $AD = 26$ см. Проекции наклонных относятся как $5:9$. *Найти*: AC. *Решение.* $AB > AD \Leftrightarrow BC > CD$ и $BC = 9x$, $CD = 5x$. По теореме Пифагора: из ΔABC: $AC^2 = AB^2 - BC^2 =$ $= 30^2 - (9x)^2 = 900 - 81x^2$; из ΔACD: $AC^2 = AD^2 - DC^2 =$ $= 26^2 - (5x)^2 = 676 - 25x^2$. $900 - 81x^2 = 676 - 25x^2$; $56x^2 = 224$; $x = 2$. $AC = \sqrt{676 - 25 \cdot 2^2} = 24$. $AC = 24$ (см). *Ответ*: 24 см.	**Задача 2.**  Из точки S на плоскость α проведены наклонные, разность длин которых 6 см. Их проекции — 27 см и 15 см. *Найти*: расстояние от точки до плоскости. *Решение.* $SO \perp \alpha$, $SA > SB \Leftrightarrow AO > OB$, $OA = 27$, $OB = 15$, $BS = x$, $AS = x + 6$. По теореме Пифагора: из ΔSOA: $SO^2 = SA^2 - OA^2 =$ $= (x + 6)^2 - 27^2$; из ΔSOB: $SO^2 = SB^2 - OB^2 =$ $= x^2 - 15^2$. $(x + 6)^2 - 27^2 = x^2 - 15^2$; $x = 39$. $SO = \sqrt{x^2 - 15^2} =$ $= \sqrt{39^2 - 15^2} = 36$. $SO = 36$ (см). *Ответ*: 36 см.

Теорема о трёх перпендикулярах



OB — проекция AB на плоскость α,
c — прямая на плоскости α, $OB \perp c$ $\Leftrightarrow$ $AB \perp c$

Если прямая на плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и наклонной.

Обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции прямой

Задача.
ΔABC, $AB = AC = 10$ см,
$BC = 12$ см, $AD \perp (ABC)$, $AD = 6$.

Найти: расстояние от D до BC.

Решение.

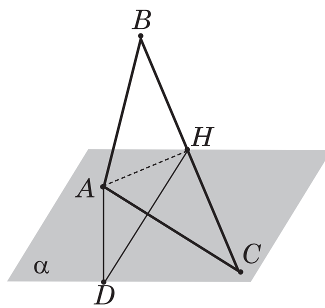
1. Проведём $AH \perp BC$.

2. Соединим D и H, по теореме о трёх перпендикулярах $DH \perp BC$, т. к. AH — проекция наклонной DH на плоскость ABC. DH — искомое расстояние.

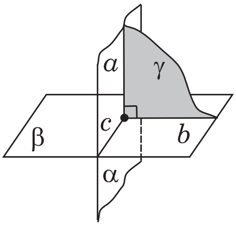
3. Из ΔACH: $AH^2 = AC^2 - CH^2$, $AH = 8$ (см) (AH — высота и медиана треугольника ABC).

4. Из ΔADH: $DA \perp (ABC)$, $DA \perp AH$;
$DH^2 = AD^2 + AH^2 = 6^2 + 8^2 = 100$;
$AH = 10$ (см).

Ответ: 10 см.



Перпендикулярность плоскостей



$\boxed{\alpha \perp \beta}$ ⇔

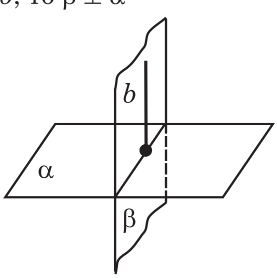
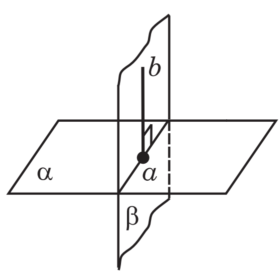
α пересекает β по прямой c

γ пересекает α по прямой a

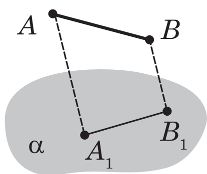
γ пересекает β по прямой b

$a \perp b$, $\gamma \perp c$

Две пересекающиеся плоскости называют **перпендикулярными**, если третья плоскость, перпендикулярная прямой их пересечения, пересекает эти плоскости по перпендикулярным прямым

Признак перпендикулярности плоскостей	**Свойство**
Если прямая, лежащая в одной плоскости, перпендикулярна другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны	Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости
Если $b \perp \alpha$ и β проходит через b, то $\beta \perp \alpha$ 	Если $\beta \perp \alpha$, β пересекает α по a и $b \perp a$ (b лежит в β), то $b \perp \alpha$ 

Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур на плоскости



$AA_1 \parallel BB_1$.

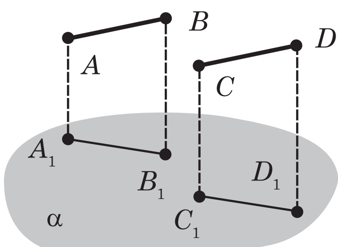
Прямая AA_1 пересекает α в точке A_1, т. е. точка A проектируется в точку A_1 на плоскости α.

$A \to A_1$; $B \to B_1$; $AB \to A_1B_1$

Отрезок проектируется в отрезок $AB \to A_1B_1$

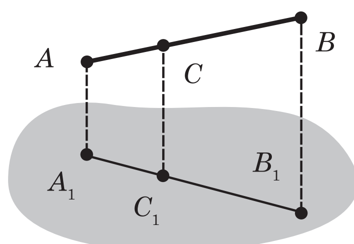
При параллельном проектировании параллельность отрезков сохраняется.

Если $AB \parallel CD$ ($AB \to A_1B_1$; $CD \to C_1D_1$), то $A_1B_1 \parallel C_1D_1$



При параллельном проектировании отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется.

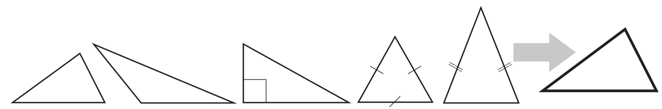
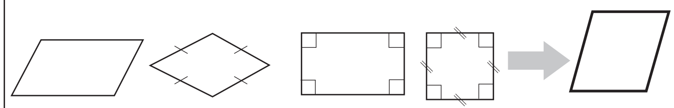
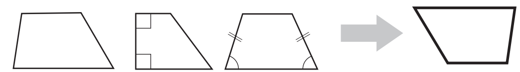
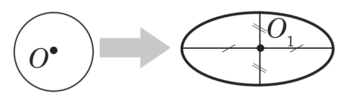
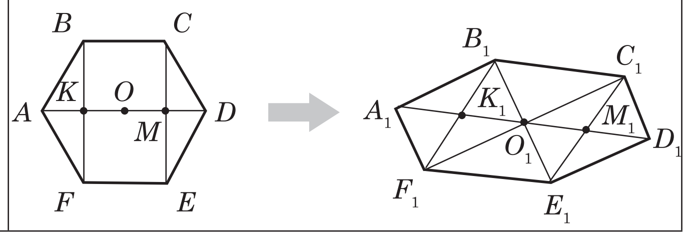
$$\frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1}$$



Следствие

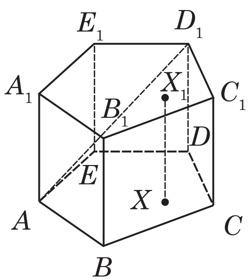
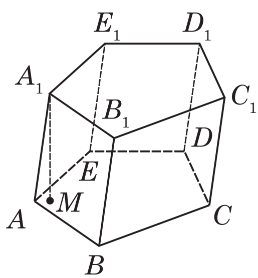
Если C — середина AB, $AB \to A_1C_1$; $C \to C_1$, то C_1 — середина A_1B_1.
Середина отрезка проектируется в середину отрезка

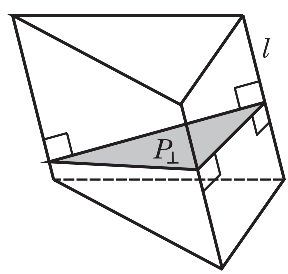
Параллельные проекции некоторых плоских фигур (плоскость фигуры не параллельна направлению проектирования)

Треугольник Проекция — треугольник любой формы	
Параллелограмм и его виды Проекция — параллелограмм любой формы	
Трапеция Проекция — трапеция любой формы	
Окружность Проекция — эллипс (центр окружности на изображении — точка пересечения сопряжённых диаметров)	
Правильный шестиугольник Проекция — шестиугольник, две вершины — концы диаметра эллипса, а другие четыре — концы хорд, проведённых параллельно сопряжённому диаметру и делящих диаметр в отношении $1:2:1$	

3. МНОГОГРАННИКИ

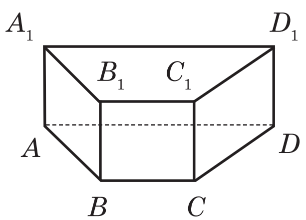
Призма

 	**Призма** — многогранник, состоящий из плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников. $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ — основания призмы; AA_1, BB_1, CC_1, ... — боковые ребра; ABB_1A_1, BB_1C_1C, ... — боковые грани; AD_1 — диагональ призмы (отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани; $A_1M \perp (ABC)$, $A_1M = H$ — высота)

Свойства	Формулы
1. Основания призмы равны. 2. Основания призмы лежат в параллельных плоскостях. 3. Боковые ребра параллельны и равны. 4. Боковые грани — параллелограммы	 **Боковая поверхность** — сумма площадей боковых граней или $S_{бок} = P_\perp \cdot l$,

Окончание таблицы

	где l — длина бокового ребра; $P_{\perp}$ — сечение плоскостью, перпендикулярной к её боковым граням
	Полная поверхность — сумма боковой поверхности и площадей оснований: $S = S_{бок} + 2S_{осн}.$ **Объём призмы** $V = S_{осн} \cdot H_{призмы}$

Прямая призма	
	Призма называется **прямой**, если её боковые ребра перпендикулярны основаниям. $AA_1 \perp (ABC)$, $BB_1 \perp (ABC)$, …
Свойства	**Формулы**
1. Высота равна боковому ребру. 2. Боковые грани — прямоугольники	**Боковая поверхность:** $S_{бок} = P_{осн} \cdot H,$ где $P_{осн}$ — периметр основания; $H = AA_1$ — высота. **Полная поверхность:** $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$ **Объём:** $V = S_{осн} \cdot H = S_{осн} \cdot AA_1$

Задача.

$ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма,
ΔABC, $\angle C = 90°$, $BC = 5$ см,
$AC = 12$ см, $S_{\text{полн}} = 270$ см^2.

Найти: AA_1.

Решение.
1. По теореме Пифагора:
$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$;
$AB = 13$ (см).

2. $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$;

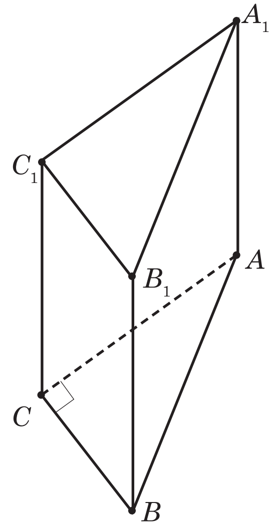
$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30 \text{ (см}^2\text{)};$$

$S_{\text{бок}} = S_{\text{полн}} - 2S_{\text{осн}} = 270 - 2 \cdot 30 =$
$= 210$ (см^2);
$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot AA_1$;

$$AA_1 = \frac{S_{\text{бок}}}{P_{\text{осн}}} = \frac{210}{5+12+13} = 7.$$

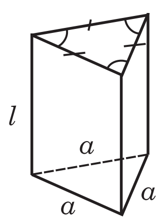
$AA_1 = 7$ (см).

Ответ: 7 см.

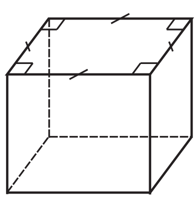


Правильная призма

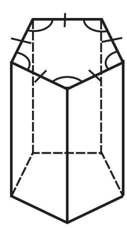
Прямая призма называется **правильной**, если её основания — правильные многоугольники



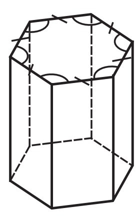
треугольная



четырёх-угольная



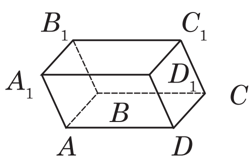
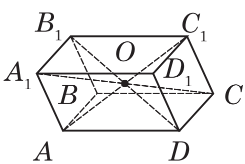
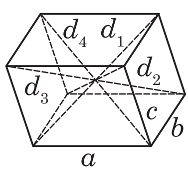
пятиугольная



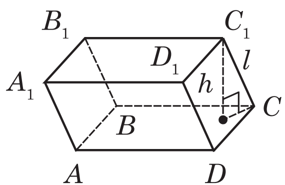
шести-угольная

Площадь боковой поверхности правильной призмы	
$S_{\text{бок}} = S_{\text{гр}} \cdot n = aln$	$S_{\text{гр}}$ — площадь грани; n — количество граней; a — сторона основания; l — длина бокового ребра

Параллелепипед

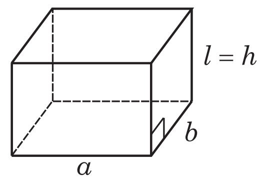
	**Параллелепипед** — призма, в основании которой лежит параллелограмм
	**Свойства**: 1. Все грани — параллелограммы. 2. Противолежащие грани параллельны и равны. 3. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. O — середина A_1C, BD_1, AC_1 и B_1D. 4. Точка O — центр симметрии параллелепипеда
	Сумма квадратов всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов его рёбер. $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$. Существует три вида параллелепипедов. 1. Прямой — все боковые грани перпендикулярны плоскостям оснований, основания — параллелограммы. 2. Прямоугольный — все боковые грани и основания — прямоугольники. 3. Наклонный — боковые грани не перпендикулярны основаниям, все шесть граней — параллелограммы

Виды параллелепипедов

<table>
<tr><th>Наклонный</th><th>Прямой</th><th>Прямоугольный</th></tr>
<tr>
<td>

1. Боковые ребра **не перпендикулярны** плоскостям основания.

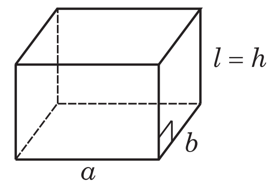
2. Высота **не совпадает** с боковым ребром.

3. Все боковые грани — **параллелограммы**</td>
<td>

1. Боковые ребра **перпендикулярны** основаниям.

2. Боковое ребро **совпадает** с высотой.

3. В основаниях — **параллелограммы**.

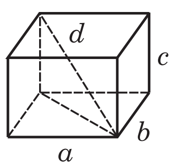
4. Все боковые грани — **прямоугольники**</td>
<td>

1. Боковые ребра **перпендикулярны** основаниям.

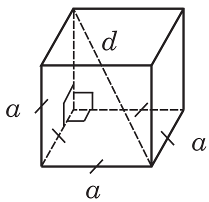
2. Боковое ребро **совпадает** с высотой.

3. Оба основания и боковые грани — **прямоугольники**</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">Площадь боковой поверхности параллелепипеда</td></tr>
<tr>
<td>$S_{бок} = 2(S_{AA_1D_1D} + S_{AA_1B_1B})$</td>
<td>$S_{бок} = 2(a+b)\cdot l$</td>
<td>$S_{бок} = 2(a+b)\cdot l$</td>
</tr>
</table>

Окончание таблицы

Наклонный	**Прямой**	**Прямоугольный**
Площадь полной поверхности параллелепипеда		
$S_{\text{полн}} = 2(S_{AA_1D_1D} + S_{AA_1B_1B} + S_{ABCD})$	$S_{\text{полн}} = 2(a+b)\cdot l + 2S_{\text{осн}}$	$S_{\text{полн}} = 2(ab+al+bl)$
Объем параллелепипеда		
1. Произведение площади основания $S_{\text{осн}}$ на высоту h: $V = S_{\text{осн}} \cdot h.$ 2. Произведение площади перпендикулярного сечения $S_{\wedge}$ на длину бокового ребра l: $V = S_{\wedge} \cdot l$	Произведение площади основания $S_{\text{осн}}$ на длину бокового ребра l: $V = S_{\text{осн}} \cdot l$	Произведение трёх измерений прямоугольного параллелепипеда: $V = abl$
	В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трёх его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$	

Куб



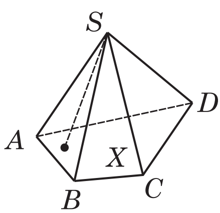
Куб — прямоугольный параллелепипед, у которого все рёбра равны.

Свойство
Все боковые грани — квадраты.

Формулы

1. Диагональ: $d = a\sqrt{3}$.
2. Площадь: $S_{бок} = 4a^2$; $S_{полн} = 6a^2$.
3. Объём: $V = a^3$ или $V = \dfrac{d^3}{3\sqrt{3}}$

Пирамида



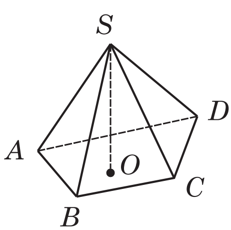
Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (основания пирамиды), точки, не лежащей в плоскости основания (вершины пирамиды), и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с вершинами основания

$ABCD$ — основание пирамиды;

S — вершина пирамиды;

SA, SB, SC, SD — боковые рёбра;

ΔASB, ΔBSC, ΔCSD, ΔASD — боковые грани



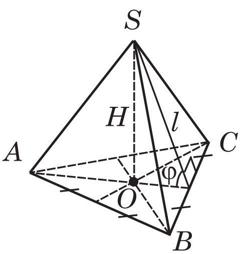
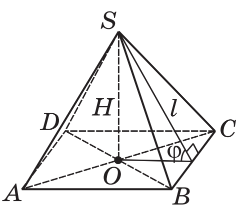
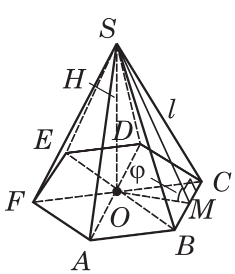
Высота пирамиды — перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.
SO — высота пирамиды;
$SO = H$ ($SO \perp (ABCD)$).

$$V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$$

$$S_{бок.\ пир.} = S_{\Delta ASB} + S_{\Delta BSC} + S_{\Delta CSD} + S_{\Delta ASD}$$
$$S_{полн.\ пир.} = S_{бок} + S_{осн}$$

Правильная пирамида

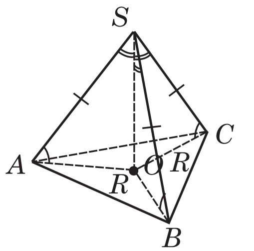
Пирамида называется **правильной**, если её основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника

<table>
<tr><th colspan="2">Некоторые виды правильных пирамид</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Треугольная
ΔABC — правильный;
O — точка пересечения медиан (высот и биссектрис), центр вписанной и описанной окружностей</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Четырёхугольная
$ABCD$ — квадрат;
O — точка пересечения диагоналей</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Шестиугольная
$ABCDEF$ — правильный шестиугольник;
O — точка пересечения диагоналей AD, BE и FC</td></tr>
<tr><td colspan="2">SO — высота правильной пирамиды ($SO \perp (ABC)$;
O — центр основания).
SM — апофема правильной пирамиды
(высота боковой грани, $SM \perp BC$)</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

Свойства	Формулы
1. Боковые ребра равны, одинаково наклонены к плоскости основания. $SA = SB = SC = \ldots;$ $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \ldots$ 2. Боковые грани — равные друг другу равнобедренные треугольники. $\Delta ASB = \Delta BSC = \ldots$ Апофемы равны и наклонены к плоскости основания под одним углом	**Площадь боковой поверхности:** $S_{бок} = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot SM = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot l,$ где l — апофема или $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi},$ где φ — угол наклона боковой грани к плоскости основания, $\varphi = \angle SMO$. **Площадь полной поверхности:** $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$ **Объём**: $V_{пир} = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H,$ $H = SO,$ H — высота пирамиды
Задача. *Найти*: площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, если все её ребра равны a. *Решение.* $S_{полн.} = S_{грани} \cdot 4 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = a^2\sqrt{3};\ S_{полн.} = a^2\sqrt{3}.$ *Ответ*: $S_{полн.} = a^2\sqrt{3}.$	

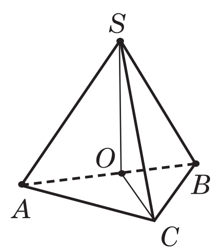
Положение высоты в некоторых видах пирамид

<table>
<tr><td></td><td>1. Если в пирамиде:
а) все боковые рёбра равны
или
б) все боковые рёбра составляют одинаковые углы с плоскостью основания
или
в) боковые рёбра составляют одинаковые углы с высотой пирамиды,
то высота проходит через центр окружности, описанной около основания</td></tr>
<tr><td colspan="2">Примечание: высота пирамиды может располагаться внутри пирамиды, на боковой грани или вне пирамиды, в зависимости от размещения центра описанной окружности. Около такой пирамиды можно описать конус</td></tr>
</table>

Задача.

Основание пирамиды — треугольник со сторонами 3, 4 и 5 см.
Все боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 45°.

Найти: объём пирамиды.



Решение.

1. Все боковые рёбра наклонены под одним углом $\Rightarrow$ т. O — центр окружности, описанной около ΔABC.

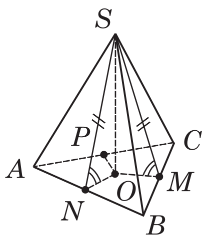
2. ΔABC — прямоугольный, т. к. $5^2 = 3^2 + 4^2$.
В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности — совпадает с серединой гипотенузы.

3. $AC = 4$ см; $BC = 3$ см; $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ (см).

Продолжение таблицы

4. ΔSOC — равнобедренный прямоугольный треугольник ($\angle SOC = 90°$, $\angle OSC = \angle OCS = 45°$). $SO = OC = AO = OB =$ $= AB : 2 = 5 : 2 = 2{,}5$ (см); $V = \dfrac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2{,}5 = 5$ (см^3).

Ответ: 5 см^3.



2. Если в пирамиде:

а) все **двугранные углы** при основании равны

или

б) все **высоты боковых граней** равны

или

в) высота составляет одинаковые углы с плоскостями боковых граней,

то **высота проходит через центр окружности, вписанной в основание**

В такую пирамиду можно вписать конус.
Площадь боковой поверхности пирамиды, в которой все **двугранные углы при основании равны** α, можно вычислять по формуле: $S_{\text{бок}} = \dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha}$

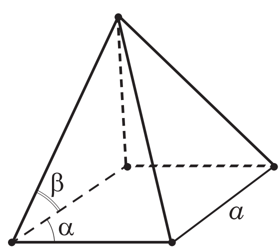
Задача.

Основание пирамиды — ромб со стороной a и острым углом α. Боковые грани наклонены к основанию под углом β.

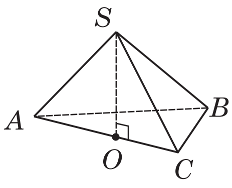
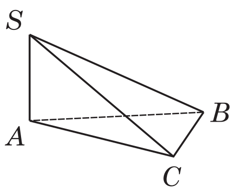
Найти: площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.

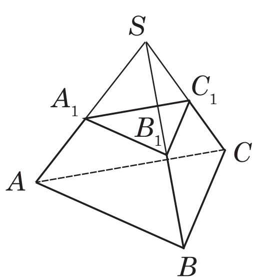
$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\beta} = \frac{a^2 \sin\alpha}{\cos\beta}.$$



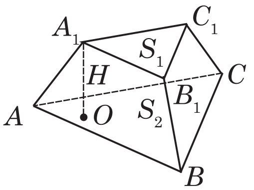
Окончание таблицы

	3. Если **одна боковая грань** пирамиды перпендикулярна **плоскости основания**, то **высотой пирамиды является высота этой грани**. Если в $SABC$ $(SAC) \perp (ABC)$ и $SO \perp AC$ $(O \in AC)$, то SO — высота пирамиды, $SO \perp (ABC)$
	4. Если **две смежные боковые** грани перпендикулярны плоскости основания, то **высотой пирамиды является их общее боковое ребро**. Если $(SAB) \perp (ABC)$ и $(SAC) \perp (ABC)$, то SA — высота пирамиды ($SA \perp (ABC)$)

Усечённая пирамида

	**Образование усечённой пирамиды** Если задана пирамида $SABC$ и проведена плоскость $A_1B_1C_1$, параллельная основанию пирамиды ($(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$), то эта плоскость отсекает от заданной пирамиды пирамиду $SA_1B_1C_1$, подобную данной. (С коэффициентом подобия $k = \frac{SA_1}{SA} = \frac{A_1B_1}{AB}$)
Другая часть заданной пирамиды — многогранник $ABCA_1B_1C_1$ — называется **усечённой пирамидой**. Грани ABC и $A_1B_1C_1$ — **основания** ($(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$). Трапеции ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1 — **боковые грани**	

Окончание таблицы

<table>
<tr>
<td>


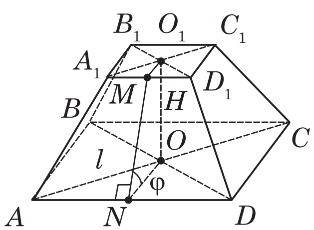
</td>
<td>

Высотой усечённой пирамиды называется расстояние между плоскостями её оснований.

$A_1O \perp (ABC)$;
$A_1O = H$ — высота.

$$V_{\text{усеч. пир.}} = \frac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right),$$

где S_1, S_2 — площади оснований

</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>

Площадь поверхности усечённой пирамиды равна сумме площадей оснований и боковой поверхности:

$S_{\text{полн}} = S_1 + S_2 + S_{\text{бок}}$.

Правильная усечённая пирамида — усечённая пирамида, являющаяся частью правильной пирамиды.

Апофема — высота боковой грани.

$MN \perp AD$ и $MN \perp A_1D_1$;
MN — апофема

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<th colspan="2">Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды</th>
</tr>
<tr>
<td>

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\cdot l,$$

P_1 и P_2 — периметры оснований;

l — апофема

</td>
<td>

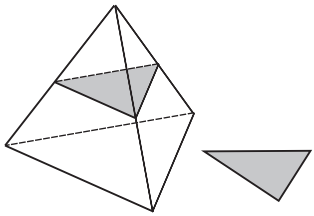
$$S_{\text{бок}} = \frac{S_1 - S_2}{\cos\varphi},$$

S_1 и S_2 — площади оснований;

φ — угол наклона боковой грани к бóльшему основанию

</td>
</tr>
</table>

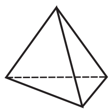
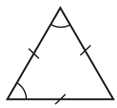
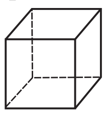
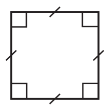
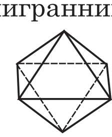
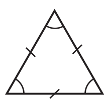
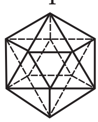
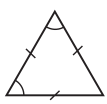
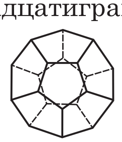
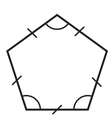
Сечения куба, призмы, пирамиды

	**Секущая плоскость** геометрического тела — это любая плоскость, по обе стороны от которой — точки данного тела. **Сечение геометрического тела** — фигура, составленная общими точками секущей плоскости и данного тела
Методы построения сечений: а) метод следов; б) метод внутреннего проектирования; в) метод переноса секущей плоскости	**Секущая плоскость может быть задана**: а) тремя точками, не лежащими на одной прямой; б) прямой и точкой, не лежащей на ней; в) двумя пересекающимися прямыми

Метод следов
1. В плоскости нижнего основания (иногда в некоторой другой) построить **следы** (линии и точки пересечения секущей плоскости). 2. С помощью этих следов выполнить построение точек пересечения секущей плоскости с **ребром** многогранника и линией пересечения секущей плоскости с **гранями** многогранника

Правильные многогранники

Правильный выпуклый многогранник — выпуклый многогранник, грани которого являются правильными многоугольниками с одинаковым количеством сторон и к каждой вершине сходится одинаковое количество рёбер

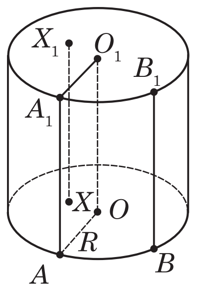
№	Многогранник	Многоугольник	Число граней	Число вершин	Число рёбер
1	Правильный тетраэдр (четырёхгранник) 		4	4	6
2	Гексаэдр (шестигранник), куб 		6	8	12
3	Октаэдр (восьмигранник) 		8	6	12
4	Икосаэдр (двадцатигранник) 		20	12	30
5	Додекаэдр (двенадцатигранник) 		12	20	30

Площадь поверхности, объём, радиусы вписанной и описанной сфер

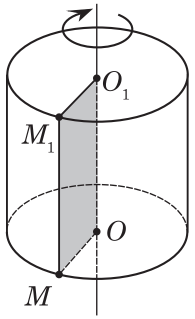
Тип многогранника	Площадь поверхности	Объём	Радиус описанной сферы	Радиус вписанной сферы
Правильный тетраэдр	$a^2\sqrt{3}$	$\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$\dfrac{3}{4}H = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$	$\dfrac{1}{4}H = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$
Правильный октаэдр	$2a^2\sqrt{3}$	$\dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$
Правильный икосаэдр	$5a^2\sqrt{3}$	$\dfrac{5a^3\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$	$\dfrac{a\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{4}$	$\dfrac{a\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$
Правильный гексаэдр	$4a^2$	a^3	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{a}{2}$
Правильный додекаэдр	$3a^2\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}$	$\dfrac{a^3\left(15+7\sqrt{5}\right)}{4}$	$\dfrac{a\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}$	$\dfrac{a\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{20}$

4. ТЕЛА И ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

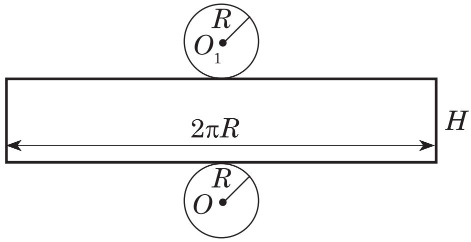
Цилиндр

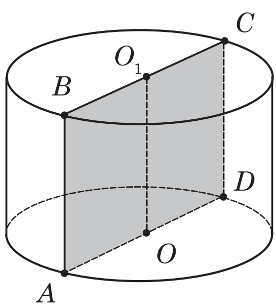


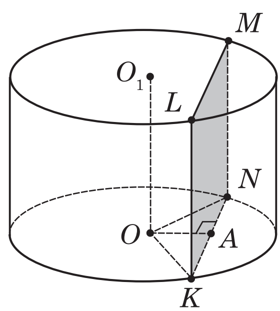
Цилиндр (круговой цилиндр) — тело, состоящее из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки окружностей, лежащих в основаниях этих цилиндров.
Основания цилиндра — круги.
Образующие — отрезки, соединяющие точки окружностей.
AA_1, BB_1 — образующие

Свойства	Формулы
1. Основания цилиндра равны и параллельны $AO = O_1A_1 = R$ $(AOB) \parallel (A_1O_1B_1)$ 2. Образующие цилиндра равны и параллельны $AA_1 \parallel BB_1$; $AA_1 = BB_1$ 3. Высота цилиндра равна образующей. $H_{осн} = AA_1 = OO_1$  При вращении прямоугольника около его стороны как оси образуется цилиндр	**Площадь основания:** $S_{осн.} = \pi R^2$ **Площадь боковой поверхности:** $S_{бок} = 2\pi RH$ **Площадь полной поверхности:** $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$ $S_{полн} = 2\pi R(H+R)$ **Объём:** $V = S_{осн} \cdot H$ $V = \pi R^2 H$ OMM_1O_1 — прямоугольник; OO_1 — ось цилиндра; $R_{цил} = OM = O_1M_1$; $H_{цил} = MM_1 = OO_1$

Продолжение таблицы

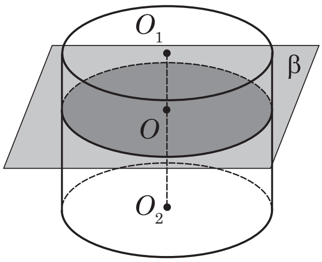
<table>
<tr><td colspan="2">Развёртка цилиндра</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Развёртка цилиндра — прямоугольник со сторонами $2\pi R$ и H (боковая поверхность) и два круга радиусами R (основания цилиндра)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сечение цилиндра плоскостями</td></tr>
<tr><td>Осевое сечение</td><td>Сечение плоскостью, параллельной оси</td></tr>
<tr><td>

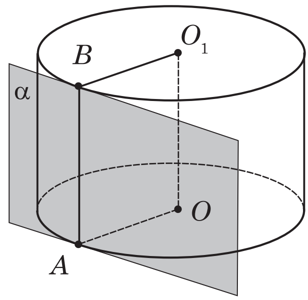
$ABCD$ — осевое сечение (сечение, проходящее через ось OO_1)
$ABCD$ — прямоугольник
$AD = d_{\text{осн}} = 2R$
$AB = CD = H_{\text{цил}}$
AB и CD — образующие</td>
<td>

$(KLMN) \parallel OO_1$
$KLMN$ — прямоугольник
KL и MN — образующие
$KL = H_{\text{цил}}$, KN — хорда.
OA — расстояние от основания высоты до хорды NK</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

<table>
<tr><th>Сечение плоскостью, параллельной основанию</th><th>Касательная плоскость</th></tr>
<tr><td>


Плоскость, параллельная основанию, пересекает боковую поверхность цилиндра по окружности, равной окружности основания:

$$R_{\text{сеч}} = R_{\text{осн}}$$
</td><td>


Касательная плоскость — плоскость, проходящая через образующую и перпендикулярная плоскости осевого сечения, проходящего через эту образующую.

α — касательная плоскость,
AB — образующая,
α проходит через AB:

$$\alpha \perp (AOO_1B)$$
</td></tr>
</table>

Задача.

Площадь основания цилиндра равна Q, площадь осевого сечения равна S.

Найти:
площадь полной поверхности цилиндра.

Решение.

$S_{\text{осн}} = Q$; $S_{ABCD} = S$; $S_{\text{полн}} = 2\pi R(H + R)$, но $2RH = S$.

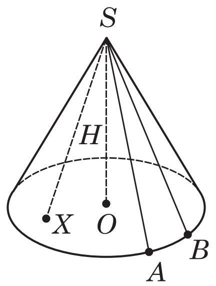
$S_{\text{бок}} = 2\pi RH$, тогда $S_{\text{бок}} = \pi S$;

$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2Q = \pi S + 2Q$;

$S_{\text{полн}} = \pi S + 2Q$.

Ответ: $S_{\text{полн}} = \pi S + 2Q$.

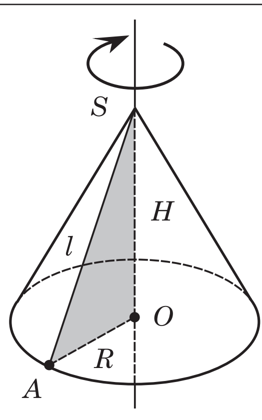
Конус

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Конус (круговой конус) — тело, состоящее из круга, точки, не лежащей в плоскости этого круга, и всех отрезков, соединяющих заданную точку с точками окружности основания.

Основание конуса — круг, т. S — вершина конуса.

SA и SB — образующие (отрезки, соединяющие вершину с точками окружности основания)</td>
</tr>
<tr>
<th>Свойства</th>
<th>Формулы</th>
</tr>
<tr>
<td>1. Образующие конуса равны:
$SA = SB = \ldots$

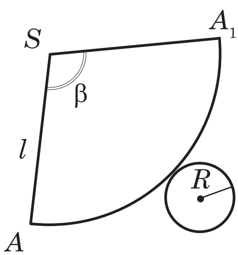
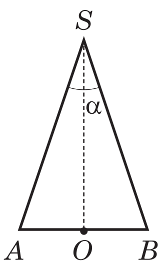
2. $H_{кон} = SO$ $SO \perp (AOB)$</td>
<td>Площадь основания:
$S_{осн} = \pi R^2$
Площадь боковой поверхности:
$S_{бок} = \pi Rl$
Площадь полной поверхности:
$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$
$S_{полн} = \pi R(l + R)$

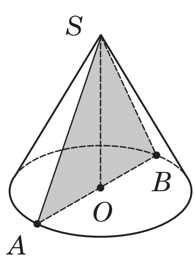
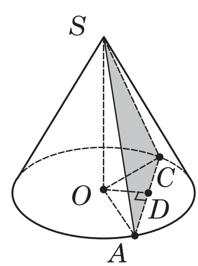
Объём:
$V_{кон} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$; $V_{кон} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>При вращении прямоугольного треугольника около его катета как оси образуется конус.

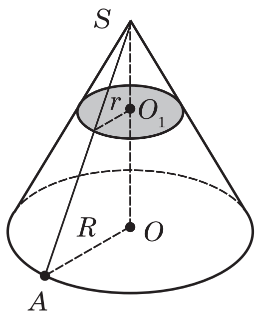
ΔAOS — прямоугольный.

SO — ось симметрии,
AS — образующая.

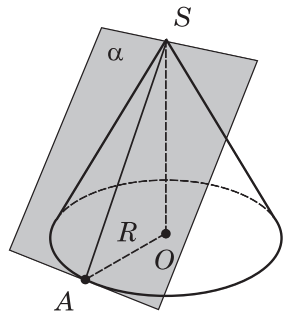
$R_{кон} = AO$; $H_{кон} = SO$; $AS = l$</td>
</tr>
</table>

Развёртка конуса	
 	**Развёртка** конуса состоит из сектора SAA_1, радиус которого равен образующей конуса, длина дуги — длине окружности основания. $SA = SA_1 = l$; $\cup AA_1 = 2\pi R$. $\angle ASA_1 = \beta$ — угол в развёртке конуса. $\angle ASB = \alpha$ — угол при вершине осевого сечения, $\beta = 2\pi \sin\frac{\alpha}{2}$; $\alpha = 2\arcsin\frac{\beta}{2\pi}$

Сечение конуса плоскостями	
Осевое сечение	**Сечение, проходящее через вершину**
	
ΔSAB — осевое сечение (проходит через ось SO) ΔSAB — равнобедренный $SA = SB = l$ — образующие	ΔASC — равнобедренный $AS = SC = l$ — образующие AC — хорда, $OA = OC = R$ OD — расстояние от основания высоты до хорды AC $OD^2 = AO^2 - AD^2$

<table>
<tr><th>Сечение плоскостью, параллельной основанию</th><th>Касательная плоскость</th></tr>
<tr><td>


Плоскость, параллельная основанию, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.

$$\frac{r_{\text{сеч}}}{R_{\text{кон}}} = \frac{SO_1}{SO}$$
</td><td>


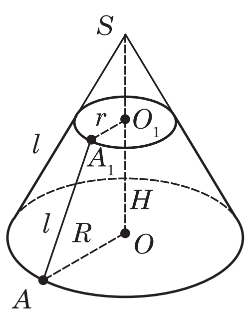
Касательная плоскость — это плоскость, проходящая через образующую конуса перпендикулярно осевому сечению, содержащему эту образующую.

α — касательная плоскость;

SA — образующая, α проходит через SA;

$$\alpha \perp (SAO)$$
</td></tr>
</table>

Усечённый конус

<table>
<tr><td>


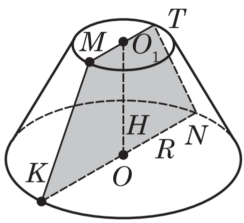
</td><td>
Усечённый конус — часть конуса, заключённая между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

Основания — круги с центрами O и O_1.

l — образующая, $AA_1 = l$;

$OA = R$ и $O_1A_1 = r$ — радиусы оснований
</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

<table>
<tr><th>Свойства</th><th>Формулы</th></tr>
<tr><td>


Осевое сечение — равнобокая трапеция.
$MKNT$ — осевое сечение.
$MT \parallel KN$ и $MK = TN$
$MT = 2r$; $KN = 2R$
$OO_1 \perp KN$
$OO_1 = H$
</td><td rowspan="2">
Площадь боковой поверхности:

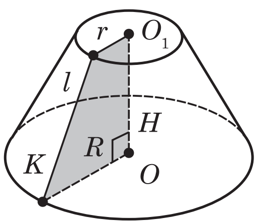
$$S_{\text{бок}} = \pi(R+r)l$$

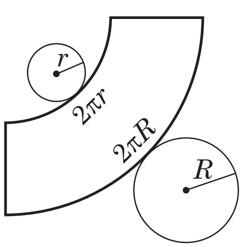
Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{1осн}} + S_{\text{2осн}}$$

Объём:

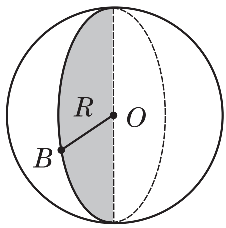
$$V_{\text{у.к.}} = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$$

R и r — радиусы нижнего и верхнего оснований;
l — образующая.
</td></tr>
<tr><td>


При вращении прямоугольной трапеции около оси, проходящей через меньшую боковую сторону, перпендикулярную основаниям, образуется усечённый конус
</td></tr>
<tr><th colspan="2">Развёртка усечённого конуса</th></tr>
<tr><td>


</td><td>
Два круга — верхнее и нижнее основания радиусами r и R; часть кольца — боковая поверхность
</td></tr>
</table>

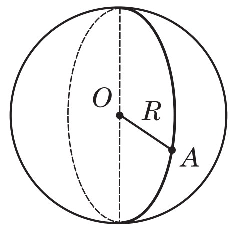
Шар и сфера

<table>
<tr><th>Шар</th><th>Сфера</th></tr>
<tr><td>


Шар — тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного (R) от данной точки (O).

O — центр шара;
OB — радиус шара;
$OB = R$.

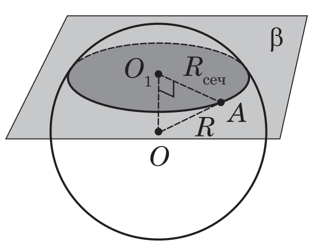
Шар получается при вращении полукруга вокруг его диаметра.

Объём шара:
$$V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$$
</td><td>


Сфера — тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии (R) от данной точки (O).

O — центр сферы;
OA — радиус сферы;
$AO = R$.

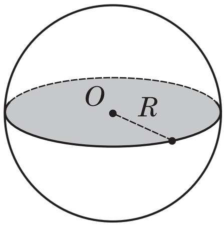
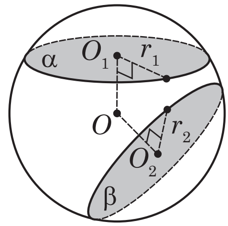
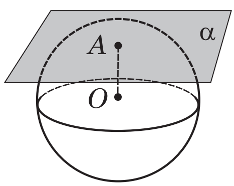
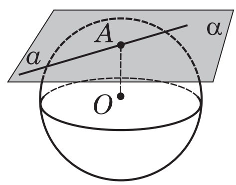
При вращении полуокружности вокруг её диаметра получаем сферу.

Площадь поверхности сферы:
$$S_{сф} = 4\pi R^2$$
</td></tr>
<tr><th colspan="2">Сечение шара плоскостью</th></tr>
<tr><td>


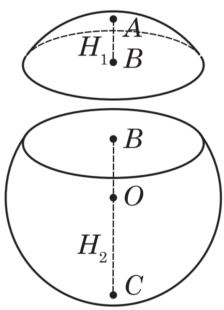
O — центр шара;
O_1 — центр круга сечения;
$OO_1 \perp \beta$
</td><td>
Всякое сечение шара плоскостью есть круг.

Центр этого круга — основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Из ΔOO_1A:
$$R_{сеч} = \sqrt{R^2_{шара} - OO_1^2}$$
</td></tr>
</table>

Большой круг	**Сечение двумя плоскостями**
 **Большой круг** — сечение шара, проходящее через центр. $R_{сеч} = R_{шара}$	 $OO_1 \perp \alpha$ и $OO_2 \perp \beta$ r_1 и r_2 — радиусы кругов сечения. $OO_1 = OO_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$ $OO_1 < OO_2 \Leftrightarrow r_1 > r_2$ $OO_1 > OO_2 \Leftrightarrow r_1 < r_2$
 **Касательная плоскость** к шару — это плоскость, проходящая через точку сферы, перпендикулярная к радиусу, проведённому в эту точку. $OA \perp \alpha$	 **Касательная к шару** — это прямая, лежащая в касательной плоскости и проходящая через точку касания. $OA \perp \alpha$; $OA \perp a$; $a \in \alpha$

Части шара

	**Шаровой сегмент** — часть шара, которую отсекает секущая плоскость. Плоскость делит шар на два сегмента: $AB = H_1$ — высота меньшего сегмента; $BC = H_2$ — высота большего сегмента

Окончание таблицы

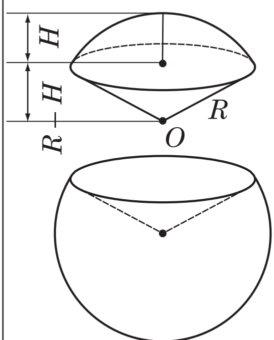
<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Основные формулы

Площадь боковой поверхности:
$S_{бок} = 2\pi RH$.
Площадь полной поверхности:
$S_{полн} = \pi H(4R - H)$

Объем: $V_{сегм} = \pi H^2\left(R - \dfrac{H}{3}\right)$

</td>
</tr>
<tr>
<td>



</td>
<td>

Шаровой сектор — тело, ограниченное сферической поверхностью шарового сегмента и боковой поверхностью конуса, которое имеет общее основание с сегментом и вершину в центре конуса.

Основные формулы

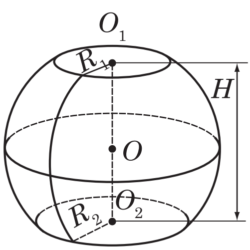
Площадь полной поверхности:
$S_{полн} = \pi R\left(2H + \sqrt{H(2R - H)}\right)$

Объём: $V_{сек} = \dfrac{2}{3}\pi R^2 H$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Примечание: если шаровой сегмент меньше полушара, то для получения шарового сектора его дополняют конусом, а если больше полушара, то конус удаляют

</td>
</tr>
<tr>
<td>



</td>
<td>

Шаровой слой — часть шара между двумя параллельными секущими плоскостями.

H — расстояние между секущими плоскостями;

R_1 и R_2 — радиусы оснований

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Основные формулы

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = 2\pi RH$; R — радиус шара.

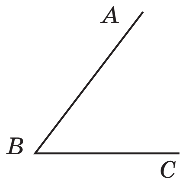
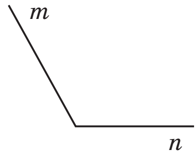
Площадь полной поверхности: $S_{полн} = \pi(2RH + R_1^2 + R_2^2)$.

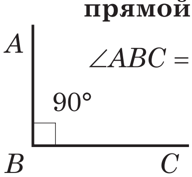
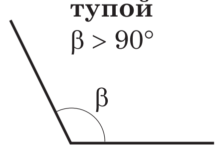
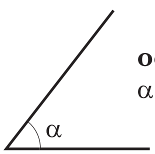
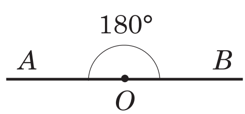
Объём: $V = \dfrac{\pi H}{6}(3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2)$

</td>
</tr>
</table>

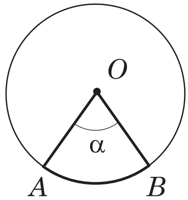
5. ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Угол. Величина угла, градусная мера угла

 $\angle ABC$	 $\angle(m, n)$	**Угол** — фигура, состоящая из точки (вершины угла) и двух различных лучей, исходящих из этой точки
Углы измеряют в градусах. $1^\circ = \dfrac{1}{180}$ развёрнутого угла		

Виды углов	
прямой $\angle ABC = 90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$ рад 	**тупой** $\beta > 90^\circ$ 
 **острый** $\alpha < 90^\circ$	**развёрнутый** $\angle AOB = 180^\circ$ 

Дуга

	**Дуга** — часть окружности между двумя точками. **Градусная мера дуги** — градусная мера соответствующего центрального угла. Длина дуги 1°: $l_{1^\circ} = \dfrac{\pi R}{180^\circ}$. Длина дуги n°: $l_{n^\circ} = \dfrac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$.

Задача.

а) Найти длину дуги окружности радиуса $R = 5$, если её градусная мера 72°.

Решение.

$$l_{72^\circ} = \frac{\pi \cdot 5 \cdot 72^\circ}{180^\circ} = 2\pi \approx 6{,}28.$$

б) Найти длину маятника стенных часов, если угол его колебаний 38°, а длина дуги, которую он описывает, равна 48 см.

Решение.

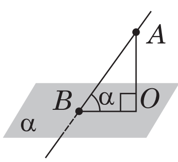
$\alpha = 38^\circ$, $C_{38^\circ} = 48$ см.

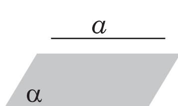
$$l_{n^\circ} = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ} \Rightarrow R = \frac{180^\circ \cdot l_{n^\circ}}{\pi n^\circ};$$

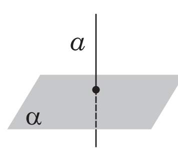
$$R = \frac{180^\circ \cdot 48}{3{,}14 \cdot 38^\circ} \approx 40{,}5 \text{ (см)}.$$

Ответ: а) 6,28; б) 40,5 см.

Углы в пространстве

<table>
<tr><th colspan="2">Угол между прямой и плоскостью</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Угол между прямой и пересекающей её плоскостью — это угол между прямой и её проекцией на плоскость.
$\angle ABO$ — угол между прямой AB и плоскостью α;
BO — проекция AB на α, $AO \perp \alpha$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Особые случаи</th></tr>
<tr><td>

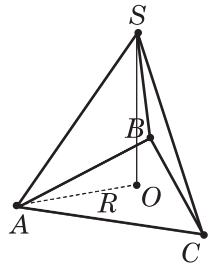
$a \parallel \alpha \Leftrightarrow \angle(a; \alpha) = 0$</td><td>

$a \perp \alpha \Leftrightarrow \angle(a; \alpha) = 90^\circ$</td></tr>
</table>

Задача.

Все рёбра пирамиды $SABC$ равны 3 см.
SO — высота.

Найти:
угол между прямой AS и плоскостью ABC.



Решение.

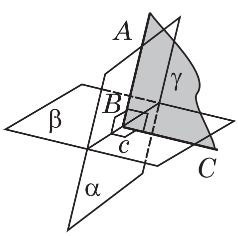
По условию $AS = BS = CS \Rightarrow$
т. O — центр описанной окружности: $AO = R$.

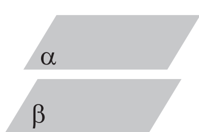
$$R = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

$SO \perp (ABC)$, то AO — проекция AS на (ABC),
т. е. $\angle SAO$ — угол между AS и (ABC).

Из ΔASO: $\cos\angle SAO = \dfrac{AO}{AS} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\angle SAO = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

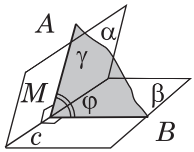
Ответ: $\angle SAO = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

<table>
<tr><th colspan="2">Угол между плоскостями (двугранный угол)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Углом между плоскостями α и β, пересекающимися по прямой c, называется угол между прямыми, по которым третья плоскость γ, перпендикулярная их линии пересечения, пересекает плоскости α и β.

$\angle ABC$ — угол между плоскостями α и β, т. е. $AB \perp c$; $BC \perp c$, $AB \subset \alpha$; $BC \subset \beta$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Угол между параллельными плоскостями равен 0°.

$\angle(\alpha; \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha \parallel \beta$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы



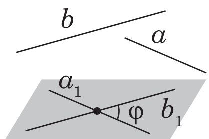
Двугранный угол — фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой.

α и β — грани двугранного угла,
c — ребро двугранного угла
$AM \perp c$, $BM \perp c$, $AM \subset \alpha$, $MB \subset \beta$.
$\angle AMB = \varphi$ — линейный угол двугранного угла

Свойства
Плоскость линейного угла перпендикулярна каждой грани двугранного угла.

$$(AMB) \perp \alpha \text{ и } (AMB) \perp \beta$$

Угол между скрещивающимися прямыми



Угол между скрещивающимися прямыми — это угол между прямыми, которые пересекаются и параллельны данным скрещивающимся.

$a \parallel a_1$; $b \parallel b_1$; $\angle(a; b) = \angle(a_1; b_1) = \varphi$
$0° < \varphi < 90°$

Если угол между скрещивающимися прямыми равен 90°, то они называются **перпендикулярными**

Задача.

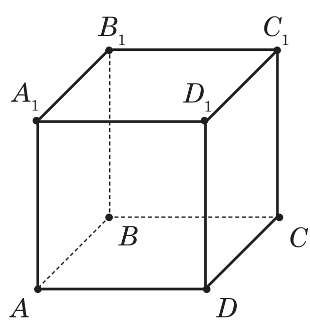
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

Найти:
угол между прямыми AA_1 и DC.

Решение.

$DD_1 \parallel AA_1$,
тогда $\angle D_1DC = 90°$.

Ответ:
$\angle D_1DC = 90°$ — искомый угол.



Длина отрезка, ломаной, окружности. Периметр многоугольника

Отрезок — часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя её точками — концами отрезка

Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые отрезок разбивается любой его точкой: $AB = AK + KB$

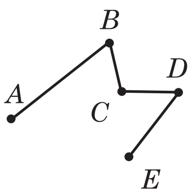
Задача.
В каком случае точки M, K и C лежат на одной прямой:

а) $MK = 3$ см; $KC = 10$ см; $MC = 8$ см;

б) $MK = 12$ см; $KC = 1$ см; $MC = 12$ см;

в) $MK = 15$ см; $KC = 5$ см; $MC = 10$ см.

Ответ:
в), поскольку $MK = KC + MC$, т. е. $15 = 5 + 10$ (см).



Ломаная — геометрическая фигура, состоящая из точек, не лежащих на одной прямой **(вершин)**, соединённых отрезками **(звеньями)**.

Длина ломаной равна сумме длин её звеньев

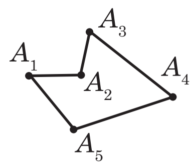
Задача.

Найти:
длину ломаной $ABCDEF$, если $AB = 3$ см, $BC = 2{,}3$ см, $CD = 5{,}1$ см, $DE = 6{,}2$ см, $EF = 3{,}7$ см.

Решение.

$AB + BC + CD + DE + EF = 3 + 2{,}3 + 5{,}1 + 6{,}2 + 3{,}7 = 20{,}3$ (см).

Ответ: 20,3 см.



Многоугольник — простая замкнутая ломаная, соседние звенья которой не лежат на одной прямой.

Многоугольник называется **выпуклым**, если каждая из его диагоналей лежит внутри многоугольника

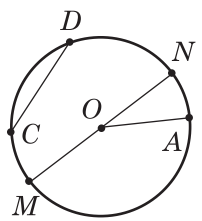
Число диагоналей выпуклого многоугольника:

$$n_d = \frac{n(n-3)}{2},$$

n — число сторон многоугольника.

Периметр многоугольника равен сумме длин его сторон:

$$P_n = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$$



Окружность — фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки (центра).

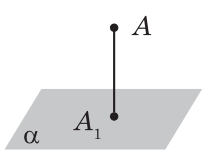
$OA = R$ — радиус;
$MN = D = 2R$ — диаметр;
CD — хорда;
$\cup AN$, $\cup AM$ — дуги

Длина окружности:
$C = 2\pi R$,
где R — радиус; число π — отношение длины окружности к диаметру:

$$\pi = \frac{C}{2R} \approx 3{,}14$$

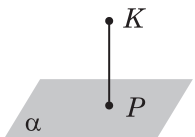
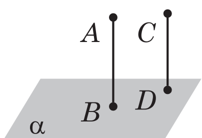
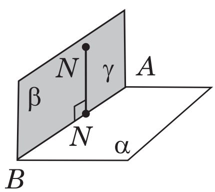
Расстояние в пространстве

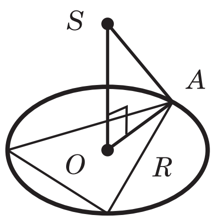
Расстояние от точки до плоскости (r — расстояние)



Расстояние от точки до плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость

Окончание таблицы

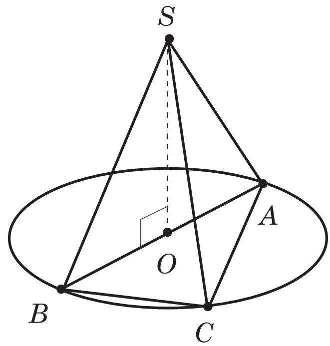
Способы построения	
	Провести $KP \perp \alpha$; $P \in \alpha$. $KP = \rho(K; \alpha)$ где ρ — расстояние от точки до плоскости
	$AB \perp \alpha$ Провести $CD \parallel AB \Rightarrow CD \perp \alpha$. $CD = \rho(C; \alpha)$
	Провести $\beta \perp \alpha$ через точку M (β пересекает α по AB). Провести $MN \perp AB \Rightarrow MN \perp \alpha$ $MN = \rho(N; \alpha)$

Частные случаи нахождения расстояния от точки до плоскости (до прямой)	
 SO — расстояние от точки до плоскости многоугольника; $OA = R$ — радиус описанной окружности; SA — расстояние от точки до вершины многоугольника	**Свойство точки, равноудалённой от всех вершин многоугольника** Если точка вне плоскости многоугольника **равноудалена от всех его вершин**, то основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости многоугольника, является центром **окружности, описанной** около многоугольника.

Задача.

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12. Точка S находится вне плоскости этого треугольника и на расстоянии 10 см от каждой его вершины.

Найти:
расстояние от точки S до плоскости треугольника.



Решение.

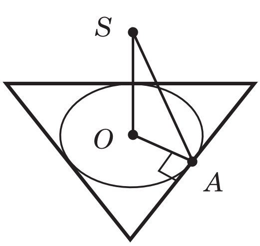
Точка S равноудалена от вершин $\Delta ABC \Rightarrow$ точка S проецируется в точку O — центр описанной окружности.

В прямоугольном треугольнике это середина гипотенузы.

$$AO = OB = 6 \text{ см}.$$

Из ΔASO ($\angle AOS = 90°$):
$SO^2 = AS^2 - AO^2 = 10^2 - 6^2 = 64.$
$SO = 8$ (см).

Ответ: 8 см.



SO — расстояние от точки до плоскости многоугольника;

$AO = r$ — радиус окружности, вписанной в многоугольник

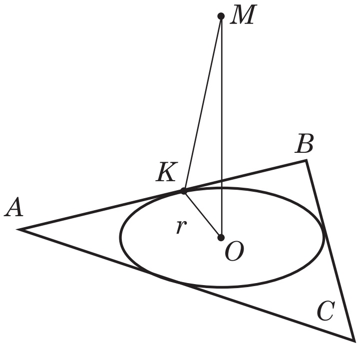
Свойство точки, равноудалённой от сторон многоугольника

Если точка вне плоскости многоугольника **равноудалена от его сторон**, то основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости многоугольника, является центром **окружности, вписанной** в многоугольник.

SA — расстояние от точки до стороны многоугольника

Задача.

Найти:
расстояние от точки M до плоскости равнобедренного треугольника ABC, если $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см; точка M равноудалена от каждой стороны на $8\frac{2}{3}$ см.



Решение.
Точка M равноудалена от **всех сторон** $\Delta ABC \Rightarrow$ точка M проецируется в точку O — центр вписанной в ΔABC окружности.

1) Найдём $S_{\Delta ABC}$:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+13+10}{2} = 18 \text{ (см)};$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{18(18-13)(18-13)(18-10)} = 60\,(\text{см}^2).$$

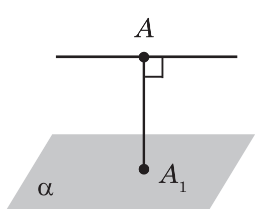
2) $OK = r = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p} = \dfrac{60}{18} = \dfrac{10}{3}$ (см);

3) Из ΔMOK ($\angle MOK = 90°$):

$$MO^2 = MK^2 - OK^2 = \left(8\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{36\cdot 16}{9};\quad MO = 8\,(\text{см}).$$

Ответ: 8 см.

Расстояние между параллельными прямой и плоскостью

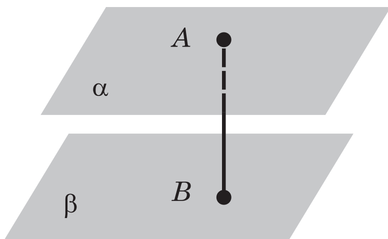
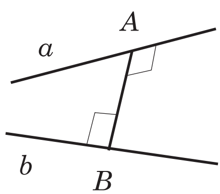
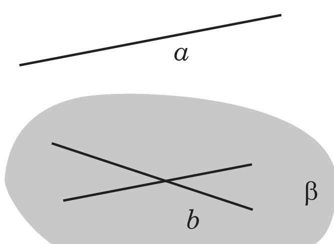


Выбрать на прямой a произвольную точку A и найти расстояние от этой точки до плоскости α.

$a \parallel \alpha$ $A \in a$;

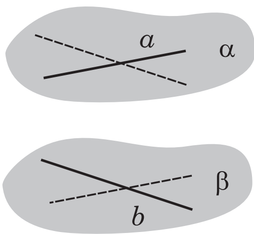
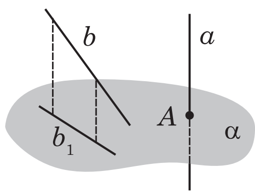
$\rho(a;\, \alpha) = \rho(A;\, \alpha) = AA_1$

Продолжение таблицы

<table>
<tr><th colspan="2">Расстояние между параллельными плоскостями</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Выбрать в плоскости произвольную точку A и найти расстояние от точки A до плоскости β.
$\alpha \parallel \beta$, $A \in \alpha$
$\rho(\alpha; \beta) = \rho(A; \beta) = AB$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Расстояние между скрещивающимися прямыми</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Расстояние между скрещивающимися прямыми — это длина общего перпендикуляра к этим прямым.
$AB \perp a$; $AB \perp b$;
$\rho(a; b) = AB$;
прямые a и b скрещиваются</td></tr>
<tr><th colspan="2">Способы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми</th></tr>
<tr><td>

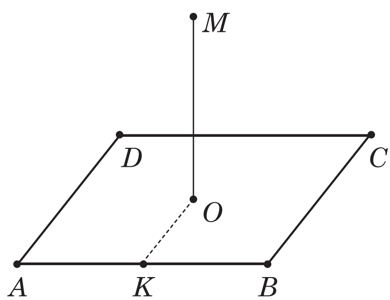
$\rho(a; b) = \rho(\alpha; \beta)$</td><td>Провести через прямую b плоскость $\beta \parallel a$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

 $\rho(a;\,b) = \rho(\alpha;\,\beta)$	Провести через a и b параллельные плоскости α и β
 $\rho(a;\,b) = \rho(A;\,b_1)$	Провести $\alpha \perp a$, спроектировать a и b на эту плоскость: $a \to A$, $b \to b_1$

Задача.

Через точку O — точку пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ проведён перпендикуляр MO к его плоскости. $AD = 2a$.



Найти:
расстояние между прямыми AB и MO.

Решение.

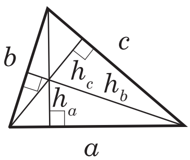
$AB \subset (ABC)$, $MO \cap (AMC) = O$; $O \notin AB$,
т. е. AB и MO — скрещивающиеся прямые.
Проведём OK — среднюю линию ΔABD. Тогда $KO \parallel AD$.
Но $AB \perp AD$, тогда $AB \perp KO$; $MO \perp (ABC)$, то есть $MO \perp OK$.
То есть KO — общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым AB и MO.

$$KO = \frac{1}{2}AD = a.$$

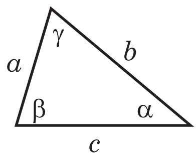
Ответ: a.

Площади треугольника, четырёхугольника, круга и его частей

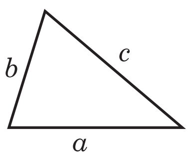
Площадь треугольника

<table>
<tr><td>
</td><td>

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

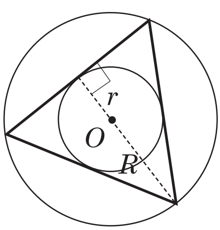
Формула Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

или

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

Нахождение площади через радиусы вписанной и описанной окружностей r и R.

$S = p \cdot r,$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}.$

$$S = \frac{a+b+c}{2}r,$$

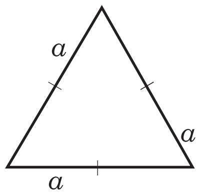
где r — радиус вписанной окружности;

$S = \dfrac{abc}{4R}$ или $S = 2R^2 \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$

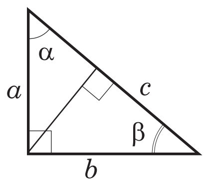
где R — радиус описанной окружности

</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

<table>
<tr><td>


</td><td>
Площадь равностороннего треугольника:

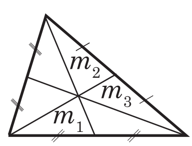
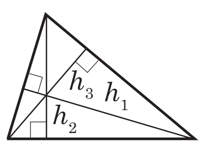
$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
</td></tr>
<tr><td>


</td><td>
Площадь прямоугольного треугольника:

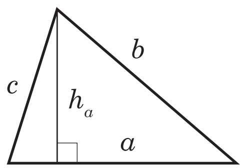
$$S=\frac{1}{2}ab \quad S=\frac{1}{2}ch_c$$

$$S=\frac{1}{2}ac\sin\alpha=\frac{1}{2}bc\sin\beta$$

Следствие: $h_c=\dfrac{ab}{c}$
</td></tr>
</table>

Дополнительные формулы для площади треугольника
Через медианы треугольника m_1, m_2, m_2: $S=\frac{1}{3}\sqrt{(m_1+m_2+m_3)(-m_1+m_2+m_3)(m_1-m_2+m_3)(m_1+m_2-m_3)}$ 
Через высоты треугольника h_1, h_2, h_3: $S=\sqrt{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(-\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)}$ 

Нахождение высоты произвольного треугольника методом площадей



Метод площадей заключается в нахождении площади различными способами.

Далее из этого равенства находят различные элементы треугольника, например высоту

$$S = \frac{1}{2}ah_a \text{ или}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$$

Задача.

Найти:
наибольшую высоту треугольника со сторонами 12, 39 и 45.

Решение.

Наибольшая высота проводится к наименьшей стороне, т. е. в данном случае к стороне 12.

$a = 12$, $b = 39$, $c = 45$.

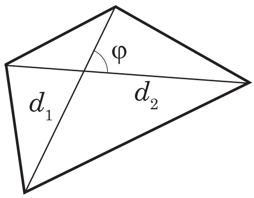
$$p = \frac{12+39+45}{2} = 48;$$

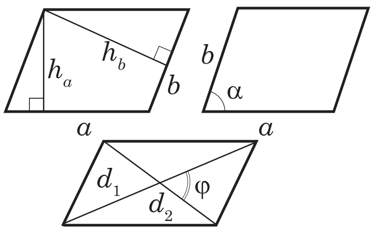
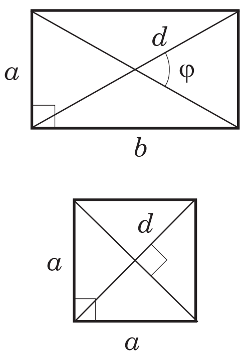
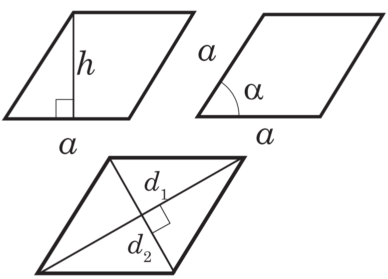
$$S = \sqrt{48(48-12)(48-39)(48-45)} = 216;$$

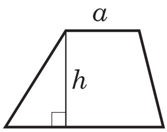
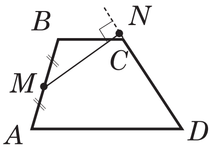
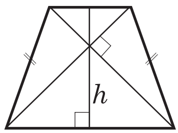
$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 216}{12} = 36; h = 36.$$

Ответ: 36.

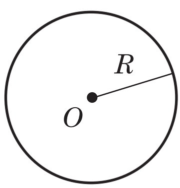
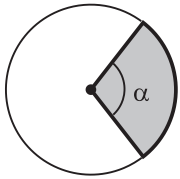
Площадь четырёхугольника

	Площадь любого выпуклого четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$

	**Площадь параллелограмма** $S = ah_a = ah_b$ $S = ab\sin\alpha$ $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$
	**Площадь прямоугольника и квадрата** $S_{пр} = ab$ $S_{пр} = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi$ $S_{кв} = a^2$ $S_{кв} = \frac{d^2}{2}$
	**Площадь ромба** $S_р = ah$ $S_р = a^2\sin\alpha$ $S_р = \frac{1}{2} d_1 d_2$

  	**Площадь трапеции** $S_{\text{тр}} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$ или $S_{\text{тр}} = m \cdot h$, где $m = \dfrac{a+b}{2}$ — средняя линия трапеции. $S_{\text{тр}} = CD \cdot MN$, CD — боковая сторона; MN — перпендикуляр, проведённый из середины другой боковой стороны на CD
В равнобокой трапеции с взаимно перпендикулярными диагоналями площадь равна квадрату высоты: $S_{\text{тр}} = h^2$	

Площадь круга и его частей

	**Круг** — фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не больше данного. Точка O — центр круга, данное расстояние R — радиус круга
Площадь круга: $S = \pi R^2$ или $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$, где D — диаметр	
	**Круговой сектор** — часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла

Окончание таблицы

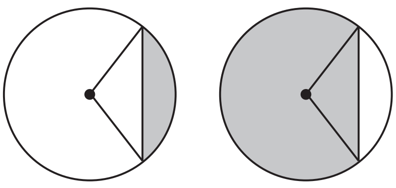
Площадь кругового сектора:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2 \cdot n^\circ}{360^\circ},$$

где n° — градусная мера соответствующего центрального угла.

$$S_{\text{сект}} = \frac{\alpha R^2}{2},$$

где α — радианная мера соответствующего центрального угла



Круговой сегмент — общая часть круга и полуплоскости

Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле:

$$S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ \pm S_\Delta,$$

где n° — градусная мера соответствующего центрального угла;
S_Δ — площадь треугольника с вершиной в центре круга;
«+», если $n^\circ > 180^\circ$; «–», если $n^\circ < 180^\circ$

Задача.

Найти:
площадь круга, вписанного в квадрат со стороной a.

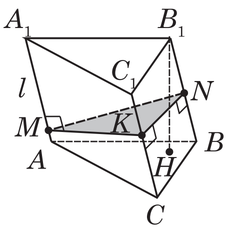
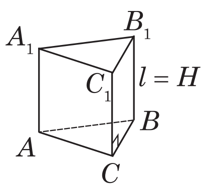
Решение.

Пусть дан квадрат со стороной a, тогда радиус круга $r = \frac{a}{2}$.

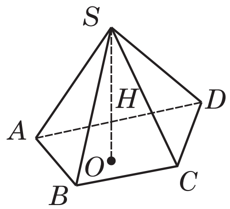
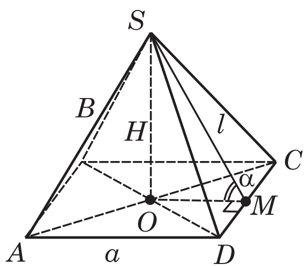
$$S_{\text{кр}} = \pi r^2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}; \quad S_{\text{кр}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Ответ: $S_{\text{кр}} = \frac{\pi a^2}{4}$.

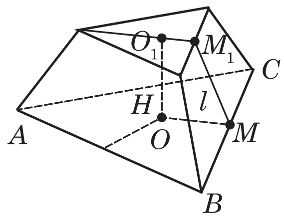
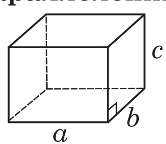
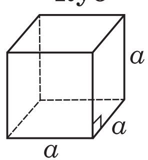
Площадь поверхности и объём многогранников

Вид многогранника	Боковая поверхность	Полная поверхность	Объём
Наклонная призма 	$S_{бок} = P_{\perp} \cdot l$, где $P_{\perp}$ — периметр перпендикулярного сечения; l — длина бокового ребра или $S_{бок} = S_{AA_1B_1B} + S_{B_1BCC_1} + \ldots$	$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$	$V_{н.пр.} = S_{\perp} \cdot l$ или $V_{н.пр.} = S_{осн} \cdot H$
MNK — перпендикулярное сечение; l — боковое ребро; H — высота		$S_{\perp}$ — площадь перпендикулярного сечения; l — длина бокового ребра; $S_{осн}$ — площадь основания; H — высота	
Прямая призма 	$S_{бок} = P_{осн} \cdot H$ или $S_{бок} = P_{осн} \cdot l$	$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$	$V = S_{осн} \cdot H$ или $V = S_{осн} \cdot l$
Длина высоты совпадает с длиной бокового ребра			

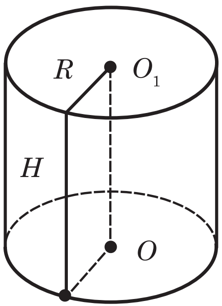
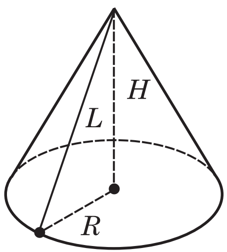
Продолжение таблицы

Вид многогранника	Боковая поверхность	Полная поверхность	Объём
Пирамида 	$S_{бок} =$ $= S_{ASB} + S_{BSC} + S_{CSD} + \ldots$	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$
Правильная пирамида 	$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l$ $S_{бок} = \frac{n}{2} a \cdot l$ или $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos \alpha}$	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} =$ $= \frac{aln}{2} + S_{осн}$	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$
	$S_{осн}$ — площадь основания; H — высота; l — апофема; a — сторона основания; α — угол наклона боковой грани		

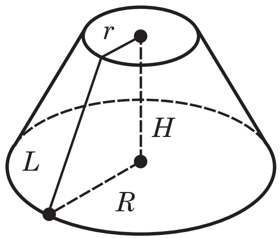
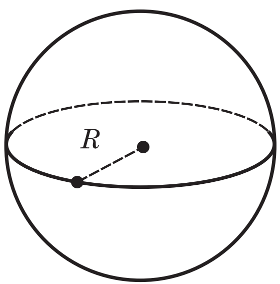
Окончание таблицы

Вид многогранника	Боковая поверхность	Полная поверхность	Объём
Правильная усечённая пирамида 	$S_{бок} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн_1} + S_{осн_2}$	$V = \frac{1}{3} H(S_{осн_1} + \sqrt{S_{осн_1} \cdot S_{осн_2}} + S_{осн_2})$
Прямоугольный параллелепипед 	$S_{бок} = 2(a+b)c$	$S_{полн} = 2(ab+bc+ac)$	$V = abc$
Куб 	$S_{бок} = 4a^2$	$S_{полн} = 6a^2$	$V = a^3$

Площадь поверхности и объём тел вращения

Вид тела вращения	Боковая поверхность	Полная поверхность	Объём
Цилиндр 	$S_{бок} = 2\pi RH$	$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$ $S_{полн} = 2\pi R(H+R)$	$V = \pi R^2 H$
	R — радиус основания; L — образующая; H — высота; $L = H$		
Конус 	$S_{бок} = \pi RL$	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$ $S_{полн} = \pi R(L+R)$	$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$
	R — радиус основания; L — образующая; H — высота		

Окончание таблицы

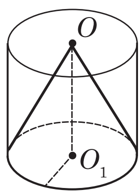
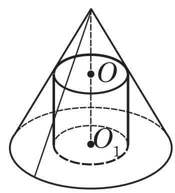
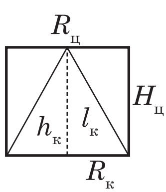
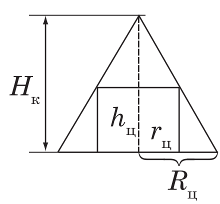
Вид тела вращения	Боковая поверхность	Полная поверхность	Объём
Усечённый конус 	$S_{бок} = \pi(R+r)L$	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн_1} + S_{осн_2}$	$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$
	R и r — радиусы большего и меньшего оснований; L — образующая; H — высота		
Шар и сфера 	**Площадь сферы** $S_{сф} = 4\pi R^2$		**Объём шара** $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
	R — радиус шара		

Комбинации тел

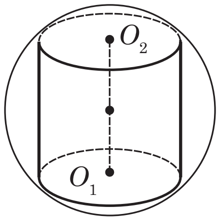
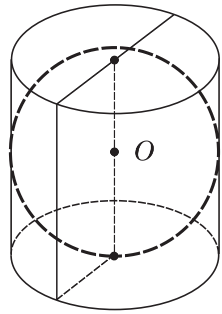
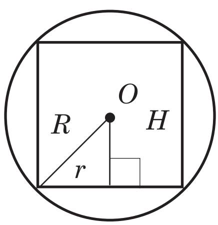
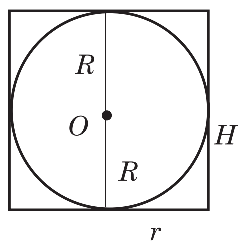
Комбинации многогранников

> Многогранник называется **вписанным во второй многогранник**, если вершины первого лежат на поверхности (рёбрах, гранях) второго. Второй многогранник называется **описанным около первого**

Комбинации тел вращения

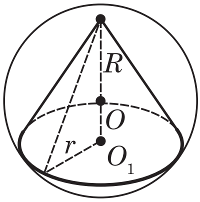
Цилиндр — конус	
 Конус называется **вписанным в цилиндр**, если основание конуса совпадает с основанием цилиндра, а вершина конуса лежит на втором основании цилиндра. При этом цилиндр называется **описанным около** конуса	 Цилиндр называется **вписанным в конус**, если одно основание цилиндра лежит в основании конуса, а окружность второго основания лежит на боковой поверхности конуса. При этом конус называется **описанным около** цилиндра
 **Осевое сечение, свойства** $h_к = H_ц$; $R_к = R_ц$, $h_к$ и $H_ц$ — высоты конуса и цилиндра; $R_к$ и $R_ц$ — радиусы конуса и цилиндра	 **Осевое сечение, свойства** $\frac{R_к}{r_ц} = \frac{H_к}{H_к - h_ц}$, $H_к$ и $h_ц$ — высоты конуса и цилиндра; $R_к$ и $r_ц$ — радиусы конуса и цилиндра

Продолжение таблицы

Шар — цилиндр	
 Цилиндр называется **вписанным в шар**, если его основания являются сечениями шара. При этом **шар описан около** цилиндра	 Цилиндр называется **описанным около шара**, если шар касается всех образующих цилиндра и его оснований. При этом шар **вписан** в цилиндр
 **Осевое сечение, свойства** 1. Центр шара лежит на середине высоты цилиндра. 2. Основания цилиндра — равные параллельные сечения шара. 3. Радиус шара R, радиус цилиндра r и высота цилиндра H связаны соотношением: $R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2$	 **Осевое сечение, свойства** 1. Шар можно вписать только в равносторонний цилиндр. 2. $R = r = \frac{H}{2}$, где R — радиус шара, H — высота цилиндра, r — радиус цилиндра

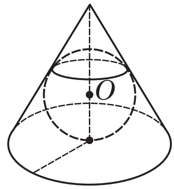
Окончание таблицы

<table>
<tr><th colspan="2">Шар — конус</th></tr>
<tr><td>



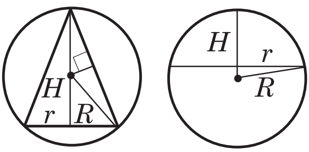
Конус называется **вписанным в шар**, если вершина конуса лежит на поверхности шара, а его основание — сечение шара. Шар при этом **описан около конуса**

</td><td>



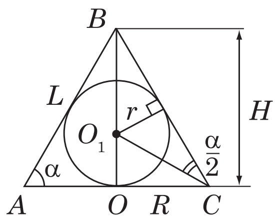
Конус называется **описанным около шара**, если шар касается всех образующих конуса и его оснований.
Шар при этом вписан в конус

</td></tr>
<tr><td>



Осевое сечение, свойства
1. Шар можно описать около любого конуса.
2. Центр шара — на оси конуса и является центром окружности, описанной около осевого сечения конуса.
3. Если R — радиус шара, r — радиус основания конуса, H — высота конуса, то $R^2 = (H-R)^2 + r^2$

</td><td>



Осевое сечение, свойства
1. Шар можно вписать в любой конус.

2. Центр шара — на оси конуса.

3. Если r — радиус шара, R — радиус основания конуса, H — его высота, то

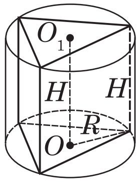
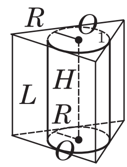
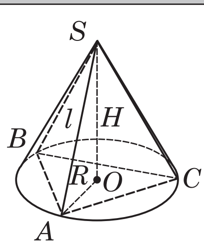
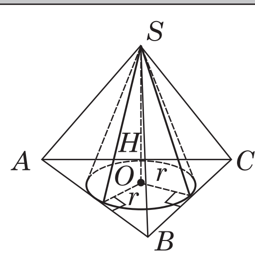
$$\frac{r}{H-r} = \frac{R}{\sqrt{H^2 + R^2}};$$

$$r = R\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{S_{\Delta ABC}}{R+L},$$

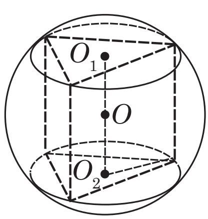
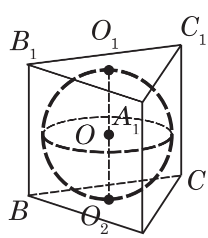
L — образующая конуса;
α — угол между образующей и плоскостью основания конуса

</td></tr>
</table>

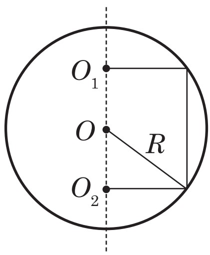
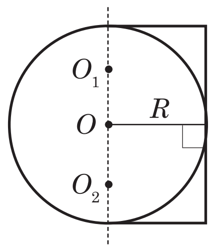
Комбинации многогранников и тел вращения

Цилиндр — призма	
	
Призма называется **вписанной в цилиндр**, если её основания вписаны в основания цилиндра, а боковые рёбра — образующие цилиндра. При этом цилиндр **описан около призмы**. **Свойства призмы, вписанной в цилиндр** 1. Цилиндр можно описать около прямой призмы, если её основание — многоугольник, около которого можно описать окружность. 2. Ось цилиндра лежит на одной прямой с высотой H призмы. 3. Боковые рёбра призмы являются образующими цилиндра и равны H	Призма называется **описанной около цилиндра**, если её основания описаны около оснований цилиндра, а боковые грани касаются цилиндра (лежат в касательных плоскостях). Цилиндр при этом **вписан в призму**. **Свойства призмы, описанной около цилиндра** 1. Цилиндр можно вписать в прямую призму, если в её основании лежит многоугольник, в который можно вписать окружность. 2. Боковые грани призмы касаются поверхности цилиндра. 3. Боковые рёбра призмы равны образующим цилиндра и высоте цилиндра
Конус — пирамида	
	

Продолжение таблицы

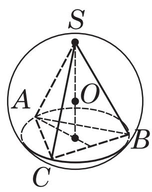
Пирамида называется **вписанной в конус**, если её основание вписано в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. При этом конус **описан около пирамиды**. **Свойства пирамиды, вписанной в конус** 1. Конус можно описать около пирамиды, если её основание — многоугольник, вокруг которого можно описать окружность. 2. Высота пирамиды равна высоте конуса и проходит через центр описанной около основания окружности. 3. Боковые рёбра пирамиды являются образующими конуса	Пирамида называется **описанной около конуса**, если её основание описано около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. При этом конус **вписан в пирамиду**. **Свойства пирамиды, описанной около конуса** 1. Конус можно вписать в пирамиду, если её основание — многоугольник, в который можно вписать окружность, высота проходит через центр этой окружности. 2. Радиус основания конуса равен радиусу окружности, вписанной в основание. Высоты конуса и пирамиды совпадают. 3. Высоты боковых граней пирамиды являются образующими конуса
Шар — призма	
 Призма называется **вписанной в шар**, если все её вершины лежат на поверхности шара. При этом шар **описан около призмы**	 Призма называется **описанной около шара**, если все её грани касаются поверхности шара. При этом шар **вписан в призму**

Продолжение таблицы

Свойства призмы, вписанной в шар	**Свойства призмы, описанной около шара**
	
1. Шар можно описать около прямой призмы, если около оснований можно описать окружность. Центр шара лежит на середине высоты призмы, которая соединяет центры этих окружностей. 2. Основания призмы вписаны в равные и параллельные сечения шара. 3. При решении задач целесообразно рассматривать сечение полуплоскостью, которая проходит через центр шара и боковое ребро призмы. 4. $R^2 = \frac{H^2}{4} + r^2$, где R — радиус шара; r — радиус окружности, описанной около основания, H — высота призмы	1. Шар можно вписать в прямую призму, если в её основание можно вписать окружность, а высота призмы равна диаметрам этих окружностей. Центр шара — на середине высоты призмы, соединяющей центры этих окружностей. 2. При решении задач целесообразно рассматривать сечение полуплоскостью, которая проходит через центр шара перпендикулярно боковой грани призмы. 3. $R = r = \frac{H}{2}$, где R — радиус шара; r — радиус окружности, вписанной в основание; H — высота призмы. 4. Чтобы в призму можно было вписать шар, необходимо и достаточно, чтобы в её перпендикулярное сечение можно было вписать окружность и чтобы высота призмы равнялась диаметру этой окружности

Продолжение таблицы

Шар — пирамида



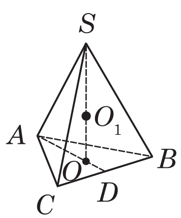
Пирамида называется **вписанной в шар**, если все её вершины лежат на поверхности шара. При этом **шар описан около пирамиды**.

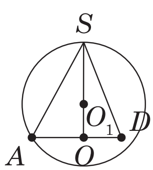
Свойства правильной пирамиды, вписанной в шар

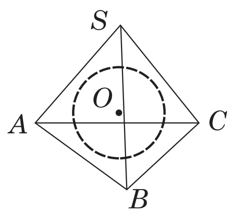
1. Шар можно описать около любой правильной пирамиды.

2. Центр шара лежит на прямой, которая содержит высоту пирамиды.

3. Решая задачи, обычно рассматривают сечения:
в треугольной пирамиде (в основании правильный треугольник)







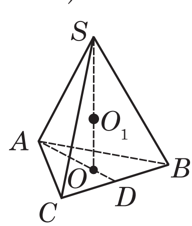
Пирамида называется **описанной около шара**, если все её грани касаются поверхности шара. **Шар** при этом **вписан в пирамиду**.

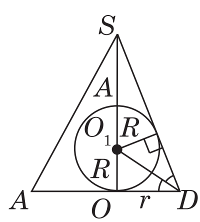
Свойства пирамиды, описанной около шара

1. Шар можно вписать в любую правильную пирамиду.

2. Центр шара лежит на высоте пирамиды.

3. Решая задачи, обычно рассматривают сечения:
в треугольной пирамиде (в основании — правильный треугольник)

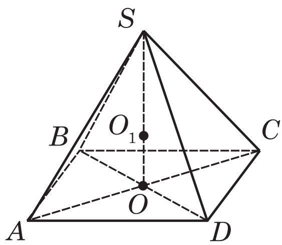


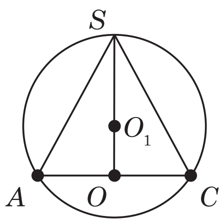


Окончание таблицы

<table>
<tr>
<td>
Целесообразно провести сечение через медиану основания и вершину пирамиды;

в четырёхугольной пирамиде
(в основании — квадрат)

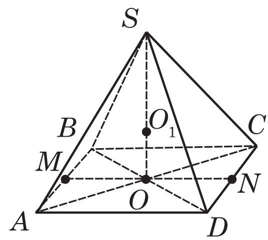


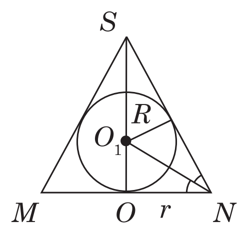


Рассматривают сечение, проходящее через одну из диагоналей основания и вершину пирамиды.

4. Радиус шара R и радиус окружности r, описанной около основания пирамиды, и высота пирамиды H связаны соотношением:
$R^2 = (H - R^2) + r^2$
</td>
<td>
Целесообразно провести сечение через медиану основания и вершину пирамиды;

в четырёхугольной пирамиде
(в основании — квадрат)



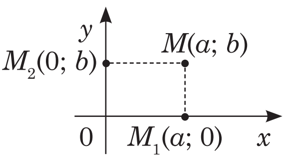
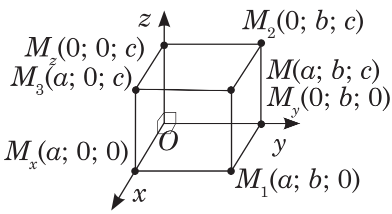


Рассматривают сечение, проходящее через вершину пирамиды и апофемы противолежащих боковых граней.

4. Если R — радиус шара, H — высота пирамиды, r — радиус окружности, вписанной в основание, то
$$\frac{R}{H-R} = \frac{r}{\sqrt{H^2 + r^2}}$$
5. Центр вписанного шара лежит на пересечении высоты пирамиды с биссектрисой угла между апофемой и её проекцией на основание
</td>
</tr>
</table>

6. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

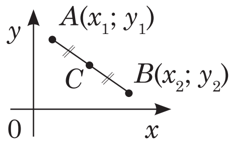
Декартовы координаты

Декартовы координаты на плоскости	**Декартовы координаты в пространстве**
 O — начало координат; Ox — ось абсцисс; Oy — ось ординат	 O — начало координат; Ox — ось абсцисс; Oy — ось ординат; Oz — ось аппликат

Задача 1. *Найти*: точки, симметричные точке $M(2;\ 1)$ относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; з) начала координат. *Ответ:* а) $M_x(2;\ –1)$; б) $M_y(–2;\ 1)$; в) $M_O(–2;\ –1)$	**Задача 2.** Дана точка $M(1;\ 2;\ 3)$. *Найти*: точки, симметричные точке M относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) оси Oz; г) плоскости xOy; д) плоскости xOz; е) плоскости yOz; ж) начала координат. *Ответ:* а) $M_x(1;\ –2;\ –3)$; б) $M_y(–1;\ 2;\ –3)$; в) $M_z(–1;\ –2;\ 3)$; г) $M_{xOy}(1;\ 2;\ –3)$; д) $M_{xOz}(1;\ –2;\ 3)$; е) $M_{yOz}(–1;\ 2;\ 3)$; ж) $M_O(–1;\ –2;\ –3)$

Координаты середины отрезка

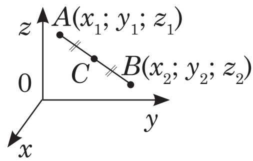
$C(x_C; y_C)$ — середина отрезка AB



$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$C(x_C; y_C; z_C)$ — середина отрезка AB



$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_C = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

$$z_C = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Задача 1.

Точка C — середина отрезка AB. $A(2; -3)$, $C(0; 1)$

Найти:
координаты точки B.

Решение.

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}; \ \frac{2 + x_B}{2} = 0;$$

$$x_B = -2;$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2}; \ \frac{-3 + y_B}{2} = 1;$$

$$-3 + y_B = 2; \ y_B = 5.$$

Ответ: $B\,(-2; 5)$.

Задача 2.

Концы отрезка AB
$A(5; -2; -4)$ и $B(5; 3; 6)$.

Найти:
точку, симметричную середине отрезка AB относительно плоскости xOz.

Решение.
$C(x_C; y_C; z_C)$ — середина отрезка AB.

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}; \ \frac{5 + 5}{2} = 5;$$

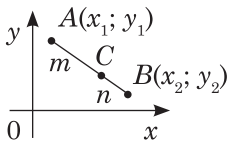
$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2}; \ \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2};$$

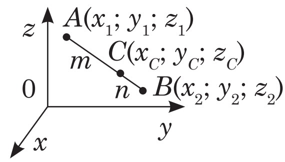
$$z_C = \frac{z_A + z_B}{2}; \ \frac{-4 + 6}{2} = 1;$$

$C\left(5; \frac{1}{2}; 1\right)$, точка C_1, симметричная точке C относительно плоскости xOz.

Ответ: $C_1\left(5; -\frac{1}{2}; 1\right)$.

Координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении





Даны точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Точка $C(x_C; y_C)$ делит отрезок AB в отношении $m:n$, считая от точки A. Тогда координаты точки C:

$$x_C = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n};\ y_C = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$$

$A(x_1; y_1; z_1)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, $B(x_2; y_2; z_2)$
Точка $C(x_C; y_C; z_C)$ делит отрезок AB в отношении $m:n$, считая от точки A.

$$x_C = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n};\ y_C = \frac{ny_1 + my_2}{m+n};$$

$$z_C = \frac{nz_1 + mz_2}{m+n}$$

Задача 1.

Точка C делит отрезок AB с координатами концов $A(-1; 2)$ и $B(0; -4)$ в отношении $2:3$, считая от точки A.

Найти:
координаты точки C.

Решение.

$m = 2$, $n = 3$.

$$x_C = \frac{3\cdot(-1) + 2\cdot 0}{2+3} = -\frac{3}{5} = -0{,}6;$$

$$y_C = \frac{3\cdot 2 + 2\cdot(-4)}{2+3} = \frac{6-8}{5} =$$

$$= -\frac{2}{5} = -0{,}4.$$

Ответ: $C\ (-0{,}6; -0{,}4)$.

Задача 2.

Точка $M(2; 6; 3)$ — середина отрезка, концы которого находятся на оси Ox и в плоскости yOz.

Найти:
координаты концов отрезка.

Решение.

Точка, лежащая на оси Ox, имеет координаты $A(x; 0; 0)$, а точка, лежащая в плоскости yOz, имеет координаты $B(0; y; z)$. M — середина отрезка AB, тогда

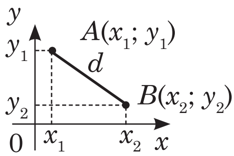
$$\frac{x+0}{2} = 2;\ x = 4;\ \frac{0+y}{2} = 6,$$

$$y = 12;\ \frac{0+z}{2} = 3,\ z = 6.$$

Ответ: $A(4; 0; 0)$; $B(0; 12; 6)$.

Формула расстояния между точками

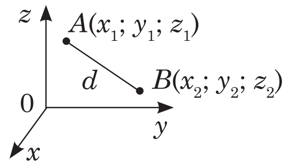
$A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$



Расстояние d между точками A и B:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$



Расстояние d между точками A и B:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Задача 1.

Вычислить длину медианы BB_1 треугольника ABC с вершинами $A(4; 0)$, $B(2; 0)$, $C(16; 2)$.

Решение.

Координаты точки B_1:

$$x_{B_1} = \frac{4+16}{2} = 10;\ y_{B_1} = \frac{0+2}{2} = 1.$$

$$BB_1 = \sqrt{(10-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{65}.$$

Ответ: $BB_1 = \sqrt{65}$.

Задача 2.

На оси аппликат найти точку A_1, равноудалённую от точек $M(-2; 3; 5)$ и $N(3; -5; -1)$.

Решение.

На оси аппликат точка имеет координаты $A(0; 0; z)$.

$AM^2 = (-2 - 0)^2 + (3 - 0)^2 + (5 - z)^2$;

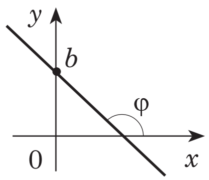
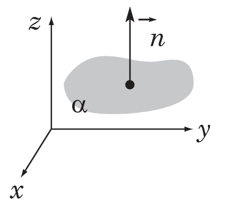
$AN^2 = (3 - 0)^2 + (-5 - 0)^2 + (1 + z)^2$,

но $AM = AN$, то $AM^2 = AN^2$;

$4 + 9 + (5 - z)^2 = 9 + 25 + (1 + z)^2$;

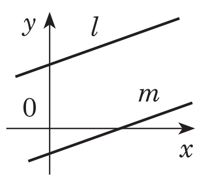
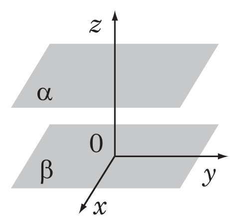
$$z = \frac{3}{8}.$$

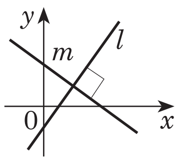
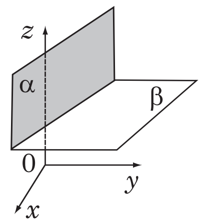
Ответ: $A\left(0; 0; \frac{3}{8}\right)$.

Уравнение прямой на плоскости	**Уравнение плоскости в пространстве**
В общем виде: $ax+by+c=0.$ С угловым коэффициентом $k=-\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$  $y=kx+b$ прямая l, где $(0; b)$ — точка пересечения прямой с осью Oy; $k=\operatorname{tg}\varphi.$ Угловой коэффициент прямой: $k=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}.$ если прямая проходит через точки $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$	**В общем виде:** $ax+by+cz+d=0$  $\bar{n}(a; b; c)$ — *нормаль* (*нормальный вектор*) — ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости. Если плоскость проходит через точки $M(x_O; y_O; z_O)$ и $\bar{n}(a; b; c)$, $\bar{n} \perp \alpha$, то уравнение плоскости α: $a(x-x_O)+b(y-y_O)+c(z-z_O)=0$
Задача. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; 2)$ и $B(-2; 1)$. *Решение.* $y=kx+b;$ $k=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-2}{-2-1}=\frac{1}{3}.$	**Задача.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1; -2; 3)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}(2; 1; -4)$. *Решение.* $2(x+1)+1(y+2)-4(z-3)=0;$

Окончание таблицы

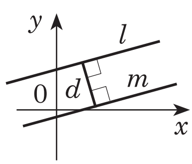
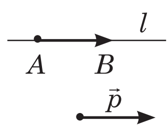
Тогда $y=\frac{1}{3}x+b$. Подставим координаты $A(1;\,2)$, тогда $2=\frac{1}{3}+b;\ b=\frac{5}{3}$. $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ или $\frac{1}{3}x-y+\frac{5}{3}=0$. *Ответ*: $x-3y+5=0$.	$2x+2+y+2-4z+12=0$; $2x+y-4z+16=0$ — уравнение плоскости. *Ответ*: $2x+y-4z+16=0$.

Условие параллельности прямых на плоскости	**Условие параллельности плоскостей в пространстве**
 1. Если прямые заданы уравнениями: l: $a_1x+b_1y+c_1=0$; m: $a_2x+b_2y+c_2=0$, то $l \parallel m$ при $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ 2. Если прямые заданы уравнениями: l: $y=k_1x+b_1$; m: $y=k_2x+b_2$, то $l \parallel m$ при $k_1=k_2$ и $b_1\neq b_2$.	 Две различные плоскости α_1 и α_2, заданные уравнениями: α_1: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$; α_2: $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ параллельны тогда и только тогда, если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$. **Следствие:** если $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$, то плоскости совпадают

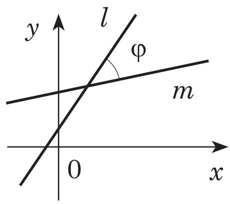
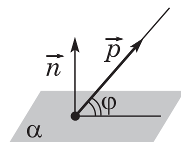
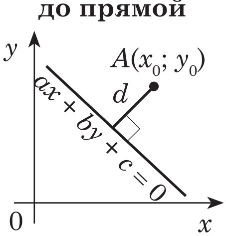
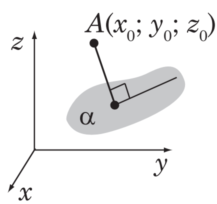
Условие перпендикулярности прямых на плоскости	**Условие перпендикулярности плоскостей в пространстве**
 1. Если прямые заданы уравнениями l: $a_1x+b_1y+c_1=0$; m: $a_2x+b_2y+c_2=0$, то $l \perp m$ при $a_1b_2+a_2b_1=0$. 2. Если прямые заданы уравнениями: l: $y=k_1x+b_1$; m: $y=k_2x+b_2$, то $l \perp m$ при $k_1 \cdot k_2=-1$ или $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$	 Если плоскости заданы уравнениями α: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$; β: $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$, то они перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$
Задача 1. Составить уравнения прямых, проходящих через т. $M(3; -2)$ и: а) параллельных прямой $y=3x+5$; б) перпендикулярных прямой $y=3x+5$. *Решение.* а) Если прямые параллельны, то $k_1=k_2=3$. Уравнение искомой прямой: $y=3x+b$, она проходит через точку $M(3; -2)$. $-2=3\cdot 3+b$; $b=-11$. Искомая прямая $y=3x-11$.	**Задача 2.** При каких значениях a и c плоскость α_1: $ax-3y+cz+1=0$ и плоскость α_2: $2x+y-4z-5=0$ параллельны. *Решение.* Плоскости параллельны, значит, $\dfrac{a}{2}=\dfrac{-3}{1}=\dfrac{c}{-4}$; $\dfrac{a}{2}=\dfrac{-3}{1}$; $a=\dfrac{-3\cdot 2}{1}=-6$.

Окончание таблицы

б) Если прямые перпендикулярны, то $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{3}$, искомая прямая $y = -\frac{1}{3}x + b$. Прямая проходит через точку (3; –2). $-2 = -\frac{1}{3}(-3) + b;\ b = -1.$ $y = -\frac{1}{3}x - 1.$ *Ответ*: а) $y = 3x - 11$; б) $y = -\frac{1}{3}x - 1.$	$\frac{-3}{1} = \frac{c}{-4};\ c = \frac{-3\cdot(-4)}{1} = 12.$ Уравнение плоскости α_2 имеет вид: $-6x - 3y + 12z + 1 = 0.$ *Ответ*: $-6x - 3y + 12z + 1 = 0.$

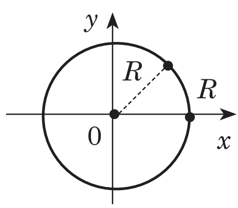
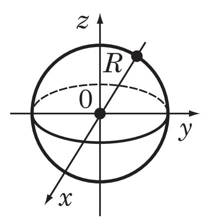
Расстояния и углы между прямыми	Расстояния и углы между прямыми и плоскостями
Расстояние между параллельными прямыми 	**Угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися)** 
Если прямые заданы уравнениями l: $ax + by = c_1$; m: $ax + by = c_2$, то $d = \frac{\lvert c_1 - c_2 \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	**Направляющий вектор прямой** — вектор, лежащий на прямой или на прямой, ей параллельной. Вычисляется по координатам двух точек прямой $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$; $\bar{p} = \overline{AB}$

Продолжение таблицы

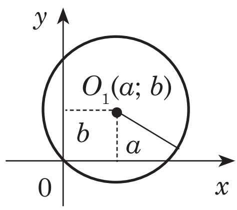
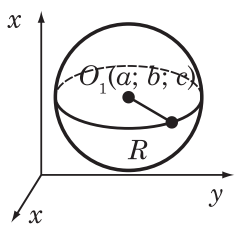
Расстояния и углы между прямыми	**Расстояния и углы между прямыми и плоскостями**
	Угол между прямыми с направляющими векторами $\bar{p}(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $\bar{q}(x_2;\, y_2;\, z_2)$: $\cos\phi =$ $= \dfrac{\lvert x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \rvert}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}}$
Угол между прямыми  Если прямые заданы уравнениями l: $y = k_1c + b_1$; m: $y = k_2x + b_2$ и $k_1 \neq k_2$, то $\operatorname{tg}\varphi = \left\lvert \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} \right\rvert$	**Угол между прямой и плоскостью**  Угол между направляющим вектором $\bar{p}(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и плоскостью $ax + by + cz + d = 0$: $\cos\varphi =$ $= \dfrac{\lvert ax_1 + by_1 + cz_1 \rvert}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \cdot (a^2 + b^2 + c^2)}}$
Расстояние от точки до прямой  Расстояние от точки $A(x_O;\, y_O)$ до прямой $ax + by + c = 0$: $d = \dfrac{\lvert ax_0 + by_0 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	**Расстояние от точки до плоскости**  Расстояние от точки $A(x_O;\, y_O;\, z_O)$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$: $d = \dfrac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Окончание таблицы

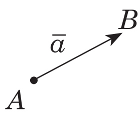
Задача 1. Найти расстояние от точки $A(-6;\ 8)$ до прямой $4x + 3y - 1 = 0$. *Решение.* Расстояние от точки $A(-6;\ 8)$ до прямой $4x + 3y - 1 = 0$ равно $d = \dfrac{\lvert 4\cdot(-6) + 3\cdot 8 - 1\rvert}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0{,}2.$ *Ответ*: 0,2.	**Задача 2.** Найти расстояние между параллельными плоскостями α и β. α: $x + y + z - 1 = 0$ и β: $x + y + z - 3 = 0$. *Решение.* Возьмём произвольную точку A, принадлежащую α, т. е. её координаты удовлетворяют уравнению α. $A(x_O;\ y_O;\ z_O)$, $A(1;\ -1;\ 1)$. Найдём расстояние от A до плоскости α $(a = 1,\ b = 1,\ c = 1)$: $d = \dfrac{\lvert 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 - 3\rvert}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.$ *Ответ*: $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

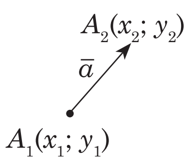
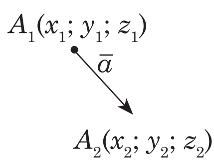
Уравнение окружности	**Уравнение сферы**
с центром в начале координат	
 $x^2 + y^2 = R^2$ Центр окружности $O(0;\ 0)$	 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ Центр окружности $O(0;\ 0;\ 0)$
Задача 1. На окружности $x^2 + y^2 = 169$ найти точки, абсцисса которых равна 5.	**Задача 2.** Записать уравнение сферы с центром в начале координат и с диаметром $D = \sqrt{12}$.

Окончание таблицы

Решение. $x^2 + y^2 = 169$ — это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $R = 13$ ($13^2 = 169$). $x = 5$; $5^2 + y^2 = 169$; $y^2 = 144$; $y = 12$ или $y = -12$. *Ответ*: (5; 12) и (5; –12).	*Решение.* $D = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{3}$; $R = \frac{D}{2} = \sqrt{3}$. Уравнение сферы с центром $O(0;\ 0;\ 0)$ и $R = \sqrt{3}$. *Ответ*: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.
с центром в произвольной точке	
 $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$. Центр $O_1(a;\ b)$, радиус R	 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$. Центр сферы $O_1(a;\ b;\ c)$, радиус R
Задача 1. Составить уравнение окружности с диаметром MN, если $M(1;\ 7)$ и $N(5;\ 4)$. *Решение.* 1. Центр окружности: $x_0 = \frac{1+5}{2} = 3$; $y_0 = \frac{7+4}{2} = 5{,}5$. 2. Радиус окружности: $R = MO = \sqrt{(1-3)^2 + (7-5{,}5)^2} =$ $= 2{,}5$. *Ответ*: $(x - 3)^2 + (y - 5{,}5)^2 = 6{,}25$.	**Задача 2.** Составить уравнение сферы, если её центр находится в точке $O(-3;\ 1;\ 0)$, и она проходит через точку $A(1;\ -1;\ 2)$. *Решение.* Радиус сферы: $R = OA = \sqrt{(-3-1)^2 + (1+1)^2 + +(0-2)^2} =$ $= \sqrt{24}$. *Ответ*: $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 24$.

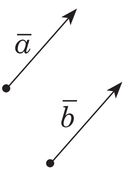
Векторы

Векторы на плоскости	Векторы в пространстве
	**Вектором** называется направленный отрезок: $\overline{AB} = \overline{a}$ Длина этого отрезка называется **длиной (модулем, абсолютной величиной)** вектора: $\lvert\overline{a}\rvert = AB$

Координаты вектора на плоскости	Координаты вектора в пространстве
 $\overline{a}(a_1;\ a_2)$, где $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$ $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$	 $\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$, где $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$; $a_3 = z_2 - z_1$ $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
Задача 1. $A(-1;\ 4)$, $B(-4;\ 0)$. *Найти*: $\lvert\overline{AB}\rvert$. *Решение.* $\overline{AB}(a_1; a_2)$. $a_1 = -4 - (-1) = -3$; $a_2 = 0 - 4 = -4$.	**Задача 2.** $A(1; -2; 0)$, $B(4; -4; \sqrt{3})$. *Найти*: $\lvert\overline{AB}\rvert$. *Решение.* $\overline{AB}(a_1; a_2; a_3)$. $a_1 = 4 - 1 = 3$; $a_2 = -4 - (-2) = -2$; $a_3 = \sqrt{3} - 0 = \sqrt{3}$. $\overline{AB}(3;\ -2;\ \sqrt{3})$.

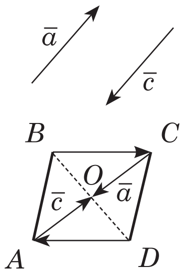
Окончание таблицы

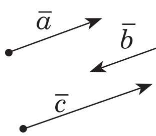
$\overline{AB}(-3;-4)$; $\lvert\overline{AB}\rvert=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5.$ *Ответ*: 5.	$\lvert\overline{AB}\rvert=\sqrt{3^2+(-2)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=4;$ $\lvert\overline{AB}\rvert=4.$ *Ответ*: 4.

Равные векторы	
	$\overline{a}=\overline{b}\Leftrightarrow\begin{cases}\lvert\overline{a}\rvert=\lvert\overline{b}\rvert\\ \text{векторы } \overline{a} \text{ и } \overline{b} \text{ одинаково напралены}\end{cases}$

В координатах	
$\overline{a}(a_1;a_2)=\overline{b}(b_1;b_2)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\ a_2=b_2\end{cases}$	$\overline{a}(a_1;a_2;a_3)=\overline{b}(b_1;b_2;b_3)\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\ a_2=b_2\\ a_3=b_3\end{cases}$

Задача 1. $ABCD$ — параллелограмм. Указать пару равных векторов из: а) $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$; б) $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$; в) $\overline{AO}$ и $\overline{CO}$. *Ответ*: равны векторы $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$.	**Задача 2.** $\overline{A}(x;\ 2;\ -3)$; $\overline{B}(-3;\ y;\ z)$. При каких значениях x, y и z $\overline{AB}=\overline{a}(-4;0;1)$. *Решение.* Координаты $\overline{AB}=(-3-x;\ y-2;\ z+3)$; $-3-x=-4,\ x=1;$ $y-2=0,\ y=2;$ $z+3=1,\ z=-2.$ *Ответ*: $x=1,\ y=2,\ z=-2.$

Противоположные векторы	
	**Противоположные векторы** — векторы, имеющие одинаковую длину и противоположное направление. Векторы $\overline{AO}$ и $\overline{CO}$; $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$ — противоположные. $\lvert\overline{a}\rvert = \lvert\overline{c}\rvert$; $\overline{a} = -\overline{c}$

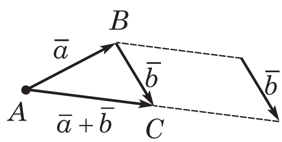
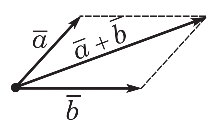
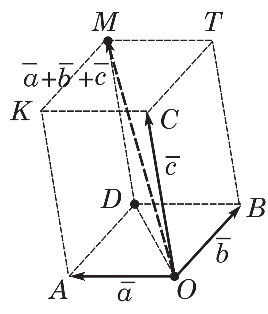
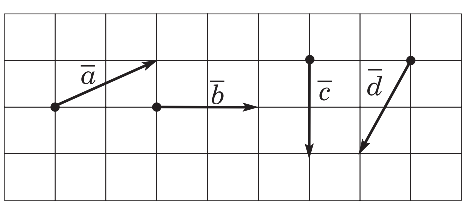
Коллинеарные векторы	
	Ненулевые векторы называют **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы направлены одинаково или противоположно

Условие коллинеарности векторов	
$\overline{a}$ коллинеарно $\overline{b}$ $\overline{a}(a_1; a_2)$; $\overline{b}(b_1; b_2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$	$\overline{a}$ коллинеарно $\overline{b}$ $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$; $\overline{b}(b_1; b_2; b_3) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$
Задача 1. Коллинеарны ли векторы: а) $\overline{a}(-1;3)$ и $\overline{b}(3;-9)$; б) $\overline{m}(1;-4)$ и $\overline{n}\left(\dfrac{1}{2};2\right)$? *Решение.* а) $\dfrac{-1}{3} = \dfrac{3}{-9}; -1 \cdot (-9) = 3 \cdot 3.$ Да.	**Задача 2.** При каких значениях m и n векторы коллинеарны, если $\overline{a}(-1;4;-2)$ и $\overline{b}(-3;m;n)$? *Решение.* Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то $\dfrac{-1}{-3} = \dfrac{4}{m} = \dfrac{-2}{n}.$

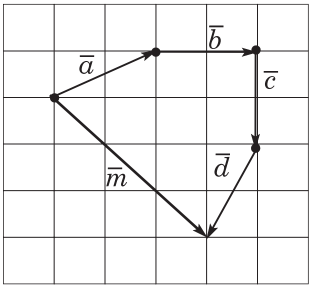
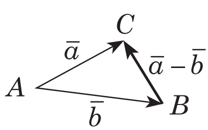
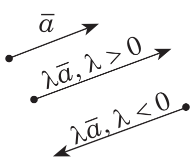
Окончание таблицы

б) $\dfrac{1}{0{,}5} \neq \dfrac{-4}{2}$; $1 \cdot 2 \neq -4 \cdot 0{,}5$; $2 \neq -2$. Нет. *Ответ*: а) да; б) нет.	1) $\dfrac{-1}{-3} = \dfrac{4}{m}$; $m = 12$; 2) $\dfrac{-1}{-3} = \dfrac{-2}{n}$; $n = -6$. *Ответ*: $m = 12$; $n = -6$.

Операции над векторами

Сумма векторов	
На плоскости	**В пространстве**
$\overline{a}(a_1; a_2) + \overline{b}(b_1; b_2) =$ $= \overline{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$	$\overline{a}(a_1; a_2; a_3) + \overline{b}(b_1; b_2; b_3) =$ $= \overline{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$
Правило треугольника  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ **Правило параллелограмма**  	**Правило параллелепипеда**  $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$
Найти сумму векторов  	

Окончание таблицы

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$\overline{a}(2;1)$
$+\ \overline{b}(2;0)$
$\overline{c}(0;-2)$
$\overline{d}(-1;-2)$
———
$\overline{m}(3;-3)$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Правило многоугольника
Пусть даны векторы $\overline{a}$; $\overline{b}$; $\overline{c}$; $\overline{d}$.
а) от произвольной точки строим вектор $\overline{a}$;
б) от конца вектора $\overline{a}$ строим вектор $\overline{b}$;
в) от конца вектора $\overline{b}$ строим вектор $\overline{c}$;
г) от конца вектора $\overline{c}$ строим вектор $\overline{d}$;
д) вектор-сумма $\overline{m}$ — его начало совпадает с началом вектора $\overline{a}$, конец — с концом вектора $\overline{d}$.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Разность векторов</td>
</tr>
<tr>
<td>$\overline{a}(a_1;a_2)-\overline{b}(b_1;b_2)=$
$=\overline{c}(a_1-b_1;a_2-b_2)$

</td>
<td>$\overline{a}(a_1;a_2;a_3)-\overline{b}(b_1;b_2;b_3)=$
$=\overline{c}(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$
$\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Умножение вектора на число</td>
</tr>
<tr>
<td>$\lambda\cdot\overline{(a_1;a_2)}=\overline{(\lambda a_1;\lambda a_2)}$

</td>
<td>$\lambda\cdot\overline{(a_1;a_2;a_3)}=\overline{(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)}$
При $\lambda<0$ вектор $\lambda\overline{a}$ одинаково направлен с вектором $\overline{a}$.
При $\lambda<0$ вектор $\lambda\overline{a}$ противоположно направлен с вектором $\overline{a}$.
$\lvert\lambda\overline{a}\rvert=\lvert\lambda\rvert\cdot\lvert\overline{a}\rvert$</td>
</tr>
</table>

Векторы $\overline{a}$ и $\lambda\overline{a}$ коллинеарны		
Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то $\overline{b}=\lambda\overline{a}$	$\Leftrightarrow$	Если $\overline{b}=\lambda\overline{a}$, то $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — коллинеарны

Свойства действий над векторами

Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ и любых чисел γ и μ:

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;
2) $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$;
3) $\overline{a}+0=\overline{a}$;
4) $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-1)\cdot\overline{b}$;
5) $(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$;
6) $\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$;
7) $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$;
8) $\lambda\cdot\overline{0}=\overline{0}$;
9) $|\lambda\overline{a}|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$;
10) $\lambda>0\Rightarrow\lambda\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{a}$;
11) $\lambda<0\Rightarrow\lambda\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{a}$

Задача 1.

$|\lambda\overline{a}|=5$; $\overline{a}(-3;4)$.

Найти: λ.

Решение.
$\overline{a}(-3;4)$, тогда

$\lambda\overline{a}=\sqrt{(-3\lambda)^2+(4\lambda)^2}=$

$=\sqrt{25\lambda^2}=|5\lambda|;|\lambda\overline{a}|=5,$

тогда $\lambda=\pm1$.

Ответ: ±1.

Задача 2.

Найти:
длину вектора $\overline{a}=-3\overline{AB}$,
если $A(3;-2;0)$, $B(5;0;-1)$.

Решение.

$\overline{AB}=\overline{(5-3;\,0-(-2);\,-1-0}$;

$\overline{AB}=(2;\,2;\,-1)$;

$\overline{a}=-3\overline{AB}=(-6;\,-6;\,3)$;

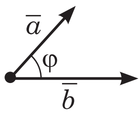
$|\overline{a}|=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+3^2}=9.$

Ответ: 9.

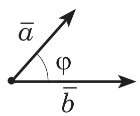
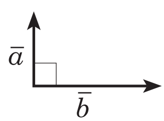
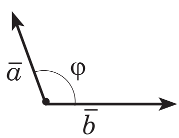
Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов на плоскости	Скалярное произведение векторов в пространстве
$\overline{a}(a_1;a_2)$; $\overline{b}(b_1;b_2)$ $\overline{a}\cdot\overline{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$	$\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$; $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$ $\overline{a}\cdot\overline{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$

Окончание таблицы

	**Теорема о скалярном произведении векторов** $\overline{a}\cdot\overline{b}=\lvert\overline{a}\rvert\cdot\lvert\overline{b}\rvert\cos\varphi$, где φ — угол между векторами

Следствия из теоремы о скалярном произведении

Численное значение скалярного произведения характеризует величину угла между векторами:	
	$\overline{a}\cdot\overline{b}>0\Leftrightarrow 0^\circ\le\varphi<90^\circ$ Угол между векторами — **острый**
	**Условие перпендикулярности векторов** $\overline{a}\cdot\overline{b}=0\Leftrightarrow\overline{a}\perp\overline{b}$ Угол между векторами 90° (векторы перпендикулярны)
	$\overline{a}\cdot\overline{b}<0\Leftrightarrow 90^\circ<\varphi<180^\circ$ Угол между векторами — **тупой**
Косинус угла между векторами вычисляется по формуле: $\cos\phi=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\lvert\overline{a}\rvert\cdot\lvert\overline{b}\rvert}$	
Задача. Даны точки: $A(0;\ 1;\ 1)$, $B(1;\ 1;\ 2)$, $C(2;\ –2;\ 2)$ и $D(2;\ –3;\ 1)$. *Найти*: угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. *Решение.* $\overline{AB}=\overline{(1-0;\ 1-1;\ 2-1)}=\left(\overline{1;\ 0;\ 1}\right)$; $\overline{AB}=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$; $\overline{CD}=\overline{(2-2;\ -3+2;\ 1-2)}=\left(\overline{0;\ -1;\ -1}\right)$; $\overline{CD}=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$;	

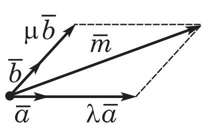
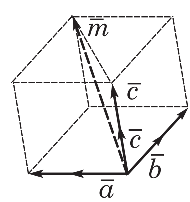
Окончание таблицы

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD} = 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) + 1\cdot(-1) = -1;$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{CD}\right|} = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2};\ \varphi = 120°.$$

Ответ: 120°.

Разложение вектора

На плоскости: по двум **неколлинеарным** векторам	**В пространстве:** по трём **неколлинеарным** векторам
$\overline{m}$ — произвольный вектор плоскости; $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — неколлинеарные векторы. Всегда существует разложение: $\overline{m} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$, где λ и μ — единственные числа 	$\overline{m}$ — произвольный вектор пространства; $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и $\overline{c}$ — некомпланарные (т. е. не параллельные одной плоскости) векторы. Всегда существует разложение: $\overline{m} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}$, где λ, μ и ν — единственные числа 
Векторы $\overline{a}(a_1; a_2)$ и $\overline{b}(b_1; b_2)$ неколлинеарны, если $\dfrac{a_1}{b_1} \neq \dfrac{a_2}{b_2}$	**Условие компланарности векторов** Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ — компланарны, если $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$, где $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$
Задача 1. Для векторов $\overline{a}(-1;1)$ и $\overline{b}(1;1)$ найти такое разложение, чтобы $\overline{c}(1;-2)$	**Задача 2.** Даны три некопланарных вектора $\overline{a}(3;-2;1)$; $\overline{b}(-1;1;-2)$ и $\overline{c}(2;1;-3)$. Найти разложение вектора $\overline{m}(11;-6;5)$ по векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Окончание таблицы

Решение. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны, т. е. $\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1}$; тогда вектор $\overline{c}$ можно разложить по двум неколлинеарным векторам единственным образом: $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$; $\left(\overline{1;-2}\right) =$ $= \lambda\left(\overline{-1;1}\right) + \mu\left(\overline{1;1}\right)$; $\left(\overline{1;-2}\right) = \left(\overline{-\lambda;\lambda}\right) + \left(\overline{\mu;\mu}\right)$; $\left(\overline{-\lambda+\mu;\lambda+\mu}\right) = \left(\overline{1;-2}\right)$. Получим систему: $\begin{cases} -\lambda+\mu = 1, \\ \lambda+\mu = -2; \end{cases}$ *Ответ*: $\lambda = -1{,}5$; $\mu = -0{,}5$.	*Решение.* Вектор $\overline{m}$ можно представить единственным образом, разложенным по некомпланарным векторам: $\overline{m} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}$; $\left(\overline{11;-6;5}\right) = \lambda\left(\overline{3;-2;1}\right) +$ $+\mu\left(\overline{-1;1;-2}\right) + \nu\left(\overline{2;1;-3}\right)$; $\left(\overline{3\lambda;-2\lambda;\lambda}\right) + \left(\overline{-\mu;\mu;-2\mu}\right) +$ $+\left(\overline{2\nu;\nu;-3\nu}\right) = \left(\overline{11;-6;5}\right)$. Получим систему: $\begin{cases} 3\lambda-\mu+2\nu = 11; \\ -2\lambda+\mu+\nu = -6; \\ \lambda-2\mu-3\nu = 5. \end{cases}$ *Ответ*: $\lambda = 2$; $\mu = -3$; $\nu = 1$.

Векторный метод для решения геометрических задач

Этапы векторного метода:
1) сформулировать задачу на языке векторов;
2) преобразовать составленные равенства на основании векторных соотношений;
3) перевести полученные результаты на язык геометрии.
Рассмотрим примеры использования векторного языка для формулирования некоторых геометрических утверждений

На геометрическом языке	На векторном языке
$a \parallel b$	$\overline{AB} = k\overline{CD}$, где отрезки AB и CD принадлежат соответственно прямым a и b, k — число
Точки A, B и C принадлежат прямой a	Установить справедливость равенства: $\overline{AB} = k\overline{BC}$ или $\overline{AC} = k\overline{BC}$, или $\overline{AC} = k\overline{AB}$

Окончание таблицы

На геометрическом языке	**На векторном языке**
 $AC:AB=m:n$	$\overline{AC}=\frac{m}{n}\overline{CB}$ или $\overline{QC}=\frac{n}{m+n}\overline{QA}+\frac{m}{m+n}\overline{QB}$ для некоторой точки Q
$a\perp b$	$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0,$ где точки A и B принадлежат прямой a, а точки C и D — прямой b
Вычислить длину отрезка	а) выбрать два неколлинеарных вектора, у которых известны длины и угол между ними; б) разложить по ним вектор, длина которого вычисляется; в) найти скалярный квадрат этого вектора: $\overline{a}^2=\lvert\overline{a}\rvert^2$
Вычислить величину угла	а) выбрать два неколлинеарных вектора, для которых известно отношение длин и углы между ними; б) выбрать векторы, задающие искомый угол, и разложить их по базисным векторам; в) вычислить $\cos(\overline{a};\overline{b})=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\lvert\overline{a}\rvert\cdot\lvert\overline{b}\rvert}$

Задача.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка M — середина B_1B, N — середина A_1D_1. Ребро куба равно $2a$. Найти длину MN.

Решение.
1. Ввести систему координат.
$C(0;\,0;\,0)$; C_1C — по оси Oz; CD — по оси Oy; CB — по оси Ox.
$M(2a;\,0;\,a)$, $N(a;\,2a;\,2a)$.

2. $\overline{MN}(a-2a;2a-0;2a-a)$;

$$\overline{MN}=\left(\overline{-a;2a;a}\right);\left|\overline{MN}\right|=\sqrt{\left(-a\right)^2+\left(2a\right)^2+a^2}=\sqrt{6}a.$$

Ответ: $\sqrt{6}a$.

Справочное издание
анықтамалық баспа

Для старшего школьного возраста
мектеп жасындағы ересек балаларға арналған

НАГЛЯДНО И ДОСТУПНО

Третьяк Ирина Владимировна

ГЕОМЕТРИЯ В СХЕМАХ И ТАБЛИЦАХ
(орыс тілінде)

Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *И. Успенский*

ООО «Издательство «Эксмо»
123308, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел. 8 (495) 411-68-86.
Home page: **www.eksmo.ru** E-mail: **info@eksmo.ru**

Өндіруші: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.
Тел. 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru.
Тауар белгісі: «Эксмо»
Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша арыз-талаптарды қабылдаушының өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС, Алматы қ., Домбровский көш., 3«а», литер Б, офис 1.
Тел.: 8(727) 2 51 59 89,90,91,92, факс: 8 (727) 251 58 12 вн. 107; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Сертификация туралы ақпарат сайтта: www.eksmo.ru/certification

Оптовая торговля книгами «Эксмо»:
ООО «ТД «Эксмо». 142700, Московская обл., Ленинский р-н, г. Видное, Белокаменное ш., д. 1, многоканальный тел. 411-50-74.
E-mail: **reception@eksmo-sale.ru**
По вопросам приобретения книг «Эксмо» зарубежными оптовыми покупателями *обращаться в отдел зарубежных продаж ТД «Эксмо»*
E-mail: **international@eksmo-sale.ru**
International Sales: International wholesale customers should contact Foreign Sales Department of Trading House «Eksmo» for their orders.
international@eksmo-sale.ru

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно законодательству РФ о техническом регулировании можно получить по адресу: http://eksmo.ru/certification/

Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылған

Подписано в печать 20.02.2016. Произведено 02.03.2016.
Формат 60x90 $^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,0.
Тираж экз. Заказ

ISBN 978-5-699-85283-3

9 785699 852833 >

Знак информационной продукции
6+
согласно Федеральному закону от 29.12.2010 г. N 436-ФЗ

ИНТЕРНЕТ-МАГАЗИН

ISBN 978-5-699-85283-3

ЭФФЕКТИВНАЯ ПОДГОТОВКА

к уроку

к экзамену

Курс геометрии в схемах и таблицах подготовлен в полном соответствии с современными требованиями школьной программы и представляет собой учебное пособие, в котором в сжатой, концентрированной форме даются основные теоретические сведения.

- **Необходимый объем информации по геометрии**
- **Структура текстов, удобная для запоминания**
- **Основные правила, понятия и теоремы**
- **Иллюстративные материалы, таблицы, схемы**

Эта книга поможет:

- эффективно подготовиться к единому государственному экзамену;
- быстро повторить школьный курс геометрии;
- сэкономить силы и время.

в схемах и таблицах

ГЕОМЕТРИЯ